

LUIS ANTONIO R. VERDI

GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS,
COMANDADOS PELAS M ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES.

DEFESA DE TESE DE MESTRADO
EM ESTATÍSTICA NO IMECC -
INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO.

UNICAMP
1991

GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS,
COMANDADOS PELAS M ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Luis Antonio Rodrigues Verdi e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 05 de Setembro de 1991


Prof. Dr. Sebastião de Amorim

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

LUIS ANTONIO R. VERDI

GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS,
COMANDADOS PELAS M ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES.

ORIENTAÇÃO : PROF DR. SEBASTIÃO DE AMORIM †

DEFESA DE TESE DE MESTRADO
EM ESTATÍSTICA NO IMECC -
INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E CIENCIA DA
COMPUTAÇÃO.

CAMPINAS - SP
1991

A voz do intelecto é suave, mas não descansa até ter ganho um ouvinte. Em última análise após inúmeras derrotas, ela vence. Este é um dos poucos pontos em relações aos quais podemos ser otimistas no tocante ao futuro da humanidade.

Sigmund Freud

The Future of an Illusion

A meus pais,

por uma força oculta,
e sempre presente.

ABSTRACT

The Classic Shewhart Scheme for constructing control charts for the mean of a process establishes upper and lower control limits around the target value M . Samples of a fixed size n_0 are drawn at regular intervals of length h_0 , and the averages \bar{X} are plotted sequentially. A value of \bar{X} outside the control limits determines the process to be considered out of control and that the appropriate actions be taken. To assure adequate protection against false alarms the control limits are positioned far from M . This renders the scheme slow in detecting stable shifts of small magnitude in the mean of the process.

Several alternatives have been proposed on the literature to eliminate this limitation. A recent proposal establish a central stripe centered in M and inside the control limits: One observation \bar{X} in this stripe implies on a long waiting time (h_1) until the next sample; one observation \bar{X} inside the control limits, but outside the central stripe implies on a short waiting time (h_c) until the next sample.

The limits of the central stripe and the values h_c and h_1 are chosen as to make the expected waiting time until the next sample equals to h_0 .

This scheme yields good results. In our work this basic idea is generalized to make the decision on the waiting time until the next sample depend not only on the last, but on the m last observations. The decision on the waiting sample time is taken with basis on the distance, between the vector $(\bar{X}_{i-m+1}, \dots, \bar{X}_i)$ to the central point (M, M, \dots, M) using the Euclidean distance we get to the Chi-square distribution allowing the definition of an elegant scheme for constructions \bar{X} control charts that presents high efficiency relative to the Classical Shewhart Scheme.

RESUMO

O Esquema Clássico de Shewhart para a construção de gráficos de controle para a média de um processo estabelece limites superior e inferior de controle em torno do valor objetivo M . Amostras são retiradas a intervalos regulares h_0 , e os valores médios \bar{X} são plotados sequencialmente no gráfico. Um valor de \bar{X} fora dos limites de controle determina que o processo seja considerado fora de controle e que as ações apropriadas sejam tomadas. Para se garantir proteção adequada contra alarmes falsos, os limites de controle são posicionados distantes de M , fazendo com que o esquema seja pouco ágil na detecção de perturbações estáveis na média do processo.

Diversas alternativas tem sido propostas, buscando superar esta limitação. Uma proposta recente estabelece uma faixa centrada em M e interna aos limites de controle: Uma observação \bar{X} nesta faixa central determina um intervalo longo de espera (h_1) até a próxima amostra; uma observação \bar{X} interna aos limites de controle, mas fora da faixa central, determina um intervalo curto (h_c) até a próxima amostra. Os limites da faixa interna e os valores h_1 e h_c são escolhidos de forma a se ter o comprimento médio esperado até a próxima amostra igual a h_0 .

Este esquema produz bons resultados. No nosso trabalho esta idéia é generalizada, no sentido de se fazer a decisão sobre o comprimento do próximo intervalo depender não apenas da última, mas das m últimas observações. A decisão é então tomada com base na distância do ponto $(\bar{X}_{i-m+1}, \dots, \bar{X}_i)$ ao ponto central (M, \dots, M) . Trabalhando com a distância Euclídeana chegamos à distribuição Chi-quadrado, permitindo construir de forma elegante um esquema para a construção de gráficos de controle para \bar{X} que apresenta alta eficiência relativa ao Esquema Clássico de Shewhart.

LISTA DE FIGURAS

- 1.1 Forma Tradicional de um gráfico de controle para \bar{X} , com limites inferior e superior de controle.- 2
- 1.2 A forma de um gráfico de controle para média de um processo, com limites de advertência e intervalos entre amostras variando entre um valor curto, h_c , e um valor longo, h_l .- 4
- 1.3 Curva de Eficiência do Esquema hV ao ECS, em função de δ , para $h_c = 1$ e $h_l = 30$.- 15
- 1.4 Curvas de Eficiência do Esquema hV relativa ao ECS, em função de δ , para diversos pares de valores (h_c, h_l) .- 16
- 2.1 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_2 .- 32
- 2.2 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o ECS.- 32
- 3.1 Idem 2.2.- 45
- 3.2 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_1 .- 46
- 3.3 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_2 .- 46
- 3.4 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_3 .- 47
- 3.5 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_4 .- 47

LISTA DE FIGURAS - CONT.

3.6 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_1 = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_5 . - 48

3.7 Histograma de T_2 com $h_c = 1$, $h_1 = 15$ e $\delta = 1.25$ para o esquema hV_6 . - 48

LISTA DE TABELAS

- 2.1 Valores de $E_{hv_2} (T_2)$ em 1000 repetições M.C. para diversos pares (h_c, h_1) . - 28
- 2.2 Eficiência relativa do nosso delineamento com $m = 2$, em relação ao ECS. - 29
- 2.3 Eficiência relativa do delineamento proposto por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas, com respeito ao ECS. - 30
- 2.4 Eficiência do nosso delineamento em relação ao de Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas. - 31
- 3.1 Valores estimados para k , com respectivos I.C. 95 % para a $E_{hv_m} (T_2)$. - 35
- 3.2 Valores de $E_{hv_3} (T_2)$ em 1000 repetições M.C., para diversos pares (h_c, h_1) . - 37
- 3.3 Eficiência relativa do nosso delineamento com $m = 3$ em relação ao ECS. - 38
- 3.4 Valores de $E_{hv_4} (T_2)$ em 1000 repetições M.C., para diversos pares (h_c, h_1) . - 39
- 3.5 Eficiência relativa do nosso delineamento com $m = 4$ em relação ao ECS. - 40

LISTA DE TABELAS - CONT.

- 3.6 Valores de $E_{h\nu_5}(T_2)$ em 1000 repetições M.C., para diversos pares (h_c, h_1) . - 41
- 3.7 Eficiência relativa do nosso delineamento com $m = 5$ em relação ao ECS. - 42
- 3.8 Valores de $E_{h\nu_6}(T_2)$ em 1000 repetições M.C., para diversos pares (h_c, h_1) . - 43
- 3.9 Eficiência relativa do nosso delineamento com $m = 6$ em relação ao ECS. - 44

SUMARIO

CAPITULO 1 - GRÁFICOS DE CONTROLE PARA \bar{x} , COM LIMITES DE ALERTA E INTERVALOS AMOSTRAIS VARIÁVEIS.

1.1 INTRODUÇÃO

1.2 O ESQUEMA ALTERNATIVO hV

CAPITULO 2 - GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS, COMANDADOS PELAS 2 ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES.

2.1 INTRODUÇÃO

2.2 O CASO $M = 2$

CAPITULO 3 - GRAFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS, COMANDADOS PELAS M , $M > 2$ OBSERVAÇÕES.

3.1 INTRODUÇÃO

3.2 SIMULAÇÕES E COMPARAÇÕES

CAPITULO 1

GRÁFICOS DE CONTROLE PARA \bar{X} , COM LIMITES DE ALERTA E INTERVALOS AMOSTRAIS VARIÁVEIS

1.1 INTRODUÇÃO

As cartas de controle foram primeiro introduzidas por Shewhart, ainda nos anos 20. Seu esquema original, que denominaremos aqui Esquema Clássico de Shewhart (ECS) propõe que no acompanhamento de uma variável de processo X , amostras de tamanho n_0 sejam feitas a cada intervalo de h_0 unidades de tempo. O valor médio \bar{X} (a média aritmética dos n_0 valores observados de X) é então plotado num gráfico seqüencial onde estão delimitados o valor médio objetivo M e os limites inferior e superior de controle (LIC e LSC respectivamente), definidos por $LIC = M - k_0 \cdot \sigma_{n_0}$ e $LSC = M + k_0 \cdot \sigma_{n_0}$ com $\sigma_{n_0} = \sigma / \sqrt{n_0}$, onde σ é o desvio padrão de X e k_0 é uma constante pré-estabelecida. Um valor de \bar{X} fora dos limites de controle sugere que o processo deve ter saído do estado de controle estatístico, recomendando-se as ações apropriadas de localização e controle ou eliminação das causas da perturbação (Ver Statistical Quality Control - Shewhart, 1931).

Para k_0 Shewhart recomenda o valor 3, que fornece excelente proteção contra alarmes falsos dado que, se X tem

distribuição $N(M, \sigma^2)$ e, a cada amostragem, os n_0 valores são estocasticamente independentes, então $V(\bar{X}) = \sigma^2 / n_0$ e $P[\bar{X} \notin (LIC, LSC)] = 0.0027$. Assim, quando o processo está sob controle, a taxa média de alarmes falsos é de apenas 1 a cada 370 operações de amostragem. Ver a este respeito no Apêndice A.

Esta excelente proteção contra alarmes falsos, contudo, tem seu preço: Perturbações pequenas na média ou na variabilidade do processo são difíceis de serem detectadas e podem passar despercebidas por longo tempo.

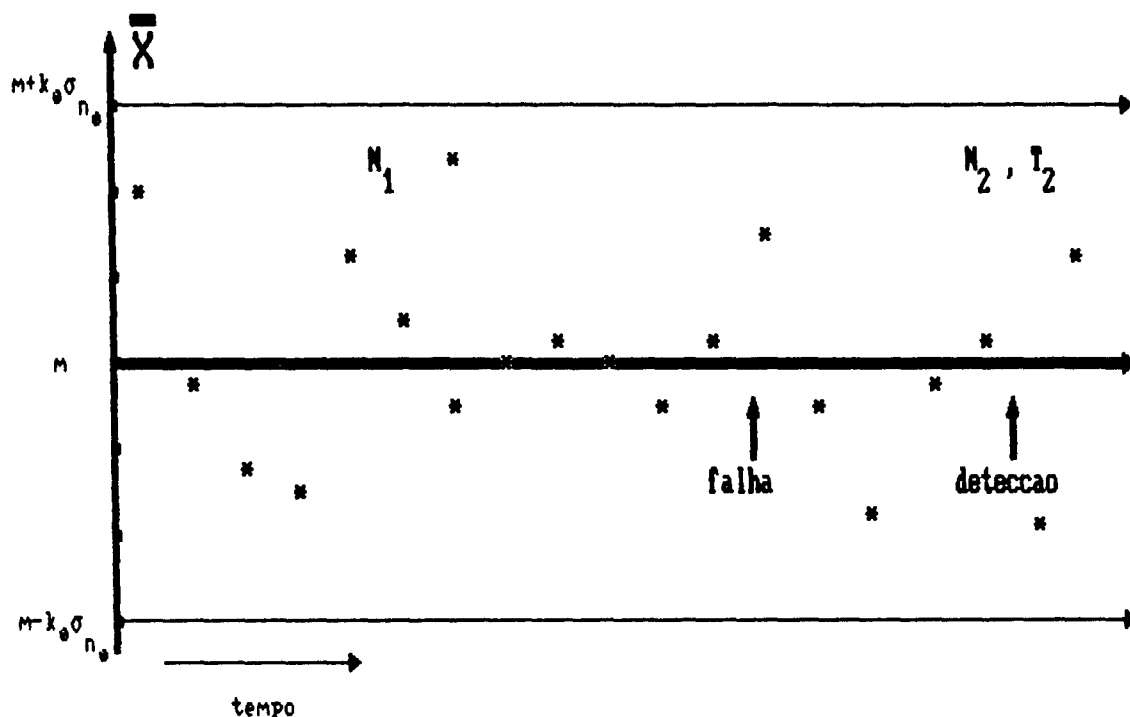


FIGURA 1.1: FORMA TRADICIONAL DE UM GRAFICO DE CONTROLE PARA \bar{X} , COM LIMITES INFERIOR E SUPERIOR DE CONTROLE.

Diversos procedimentos alternativos visam conferir

maior agilidade ao ECS. Em particular, diversos sinais, além da observação fora dos limites de controle, podem comandar a busca por perturbações e conseqüentes correções no processo. Por exemplo, 10 observações consecutivas acima de M são forte indicação de que a média do processo tenha se deslocado para cima. Duas observações consecutivas acima de $M + 2 \sigma_{n_0}$ também evidenciam desajustes na média e/ou variância, e assim por diante. Estes conjuntos de regras de controle possuem todavia alguns inconvenientes: O conjunto de regras de decisão não é muito bem definido dificultando o controle sobre a taxa de alarmes falsos, além de tornar o acompanhamento um tanto mais complicado.

Outros esforços têm sido desenvolvidos, introduzindo variações mais profundas no ECS. Os gráficos de controle baseados na soma acumulada ou na Média Móvel Ponderada Exponencialmente (Hunter,² 1986) introduzem consideráveis ganhos de eficiência no sentido de reduzirem o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de uma perturbação na média do processo.

Em trabalho recente Reynolds, Amim, Arnold, Nachlas⁴ (1988) propõem uma nova alternativa: Em vez de amostrarem a intervalos regulares de tempo h_0 , fazem este intervalo variar de acordo com o último valor observado de \bar{X} . Um valor de \bar{X} próximo de M determina um intervalo longo de espera até a próxima inspeção. Um valor de \bar{X} interno aos limites de controle, mas próximo destes limites, determina um intervalo curto de tempo até a próxima inspeção.

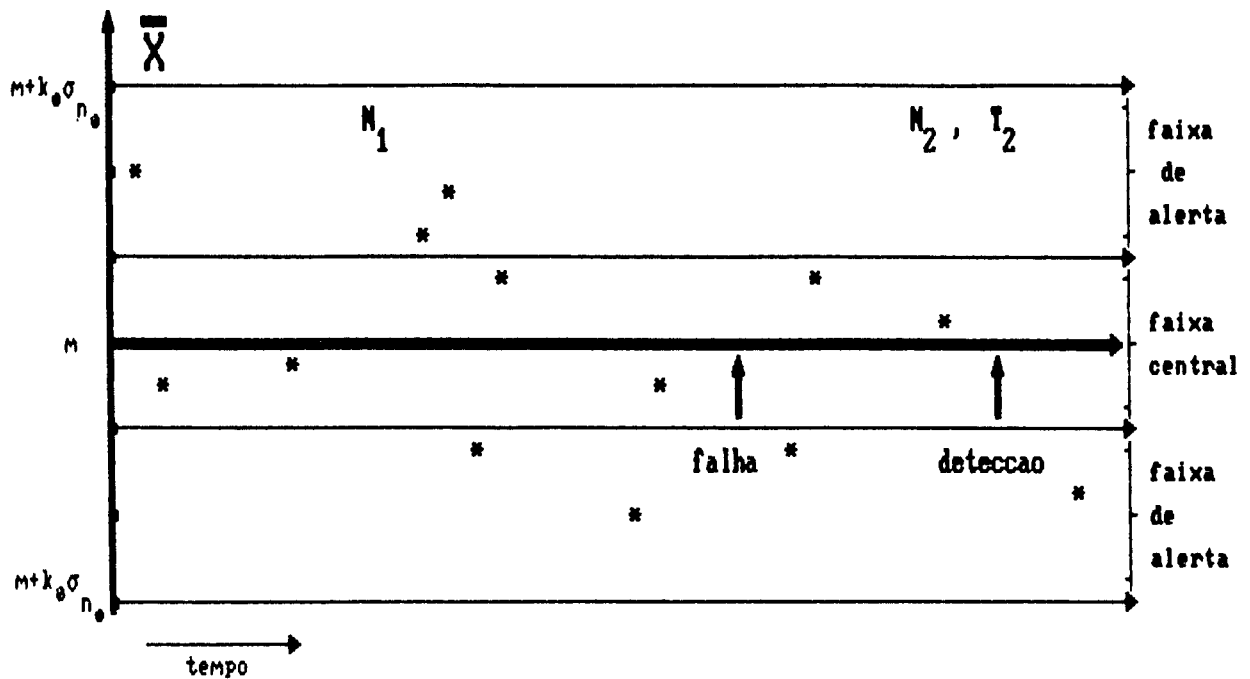


FIGURA 1.2 : A FORMA DE UM GRAFICO DE CONTROLE PARA A MEDIA DE UM PROCESSO, COM LIMITES DE ADVERTENCIA E INTERVALOS ENTRE AMOSTRAS VARIANDO ENTRE UM VALOR CURTO, h_c , E UM VALOR LONGO, h_l .

Embora conceitualmente se possa pensar num intervalo $h = h(\bar{X})$ como uma função contínua e decrescente de $|\bar{X} - M|$, para $\bar{X} \in (LIC, LSC)$, resultados teóricos de Reynolds (1986) e Reynolds e Arnold (1986) sugerem que somente dois tamanhos de intervalos sejam considerados, isto é:

$$h(\bar{X}) = \begin{cases} h_c & \text{se } \bar{X} \in (LIC, LIA) \cup (LSA, LSC) \\ h_l & \text{se } \bar{X} \in (LIA, LSA) \end{cases}$$

Aqui $h_c < h_l$ são respectivamente os intervalos curto e longo; $LIA = M - k_a \sigma_{n_0}$ e $LSA = M + k_a \sigma_{n_0}$ são os limites inferior e superior de alerta respectivamente, com $k_a < k_0$.

Os valores k_a , h_c e h_l são escolhidos no sentido de se fazer com que, desde que o sistema esteja sob controle estatístico, a esperança condicional de h dado que $\bar{X} \in (LIC, LSC)$ seja igual a h_0 . Desta forma, mantendo-se n_0 e k_0 , garante-se para este esquema o mesmo custo de operação associado ao ECS de referência, com parâmetros n_0 , k_0 , h_0 . Isto é importante por permitir que os dois esquemas possam ser comparados em termos simplesmente do tempo médio esperado entre ocorrência e detecção da perturbação. Ao esquema proposto por Arnold, Amin, Reynolds e Nachlas, descrito acima, denominaremos Esquema hV, de "h Variável"

Considerando o modelo em que o processo sai do controle pela ocorrência de uma perturbação estável na média, a qual a desloca instantaneamente de M para $M + \delta \sigma$, com δ constante, e que a ocorrência de uma perturbação bloqueia outras até sua detecção e correção, chega-se a resultados notáveis em termos de eficiência relativa ao ECS. Este modelo de perturbação, originalmente proposto por Duncan¹(1956) é útil pela sua grande simplicidade, e por trazer resultados que, pelo menos qualitativamente, são coerentes com outros modelos de perturbações mais complexos. Assim um esquema eficiente em termos deste modelo de perturbação também o será com respeito aos modelos de perturbação gradual - em rampa - na média, entre outros.

Para ilustração, notamos que uma perturbação de meio desvio padrão na média de um processo, tomará em média 44

inspeções para ser detectada no Esquema Clássico de Shewhart com $n_o = 4$ e $k_o = 3$. Se $h_o = 10$ min o tempo médio entre a ocorrência e detecção desta perturbação será de 440 minutos.

No Esquema hV, com $h_c = 1$ min e $h_1 = 30$ min, o valor de k_a deverá ser igual a 0.398 para que $E(h / \bar{X} \in (LIC, LSC)) = 10$. Neste caso, após a ocorrência da perturbação, o valor esperado de h cai para 6.7114. Como o número esperado de inspeções desde a ocorrência até a detecção da perturbação continua igual a 44, o tempo médio esperado seria de 397 min. Assim, a eficiência relativa, definida como a razão entre o tempo médio esperado entre a ocorrência e detecção da perturbação sob o ECS e o esquema alternativo é igual a 1.49 neste caso.

Existe uma lógica clara e elegante por traz deste esquema. O conceito de faixa de alerta, define a região interna aos limites de controle mas afastada de M , criando uma opção intermediária entre as decisões extremas de não mexer no processo, e de interrompê-lo para inspeção. Na região de alerta não se interrompe o processo para inspeção, mas se antecipa, por precaução, a próxima amostragem.

No nosso trabalho, vamos generalizar esta proposta no sentido de se tornar a decisão sobre o próximo valor de h (h_c ou h_1) baseando-se não apenas no último valor de \bar{X} , mas nos m últimos valores, para $m = 2, 3, 4, \dots$. Para $m = 2$, olharemos os dois últimos valores de \bar{X} para decidirmos sobre o próximo valor de h . Devemos aqui estabelecer uma regra simples, clara e objetiva de decisão. Com a decisão de controle e de alerta sendo baseada não na última observação \bar{X}_i , mas no vetor $(\bar{X}_{i-1}, \bar{X}_i)$ tais objetivos são alcançados. Para maior simplicidade devemos aqui padronizar os valores de \bar{X} , definindo

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - M}{\sigma} \cdot \sqrt{n_0}$$

Assim as decisões podem se basear em $Y_i = Z_{i-1}^2 + Z_i^2$, que tem, na hipótese de normalidade de X e de que o sistema esteja sob controle estatístico, uma distribuição Chi-quadrado com 2 graus de liberdade.

Desta forma, construímos o gráfico de controle baseado na distribuição Chi-quadrado. O limite superior de controle será um valor k^2 , tal que $P [Y > k^2] = P [\bar{X} \notin (LIC, LSC)]$ quando o sistema está sob controle estatístico. No caso de $k_0 = 3$, $m = 2$, k^2 deveria então ser igual a 11.83, já que a probabilidade de uma variável com distribuição Chi-quadrado com 2 graus de liberdade assumir, numa dada tentativa, um valor maior que 11.83 é exatamente igual a 0.0027 [Note que a Chi-quadrado com dois graus de liberdade é uma exponencial com média igual a 2].

Acontece que os Y_i 's não são independentes. Desta forma a estrutura de auto correlação de uma série de observações fará com que o número médio de inspeções entre dois alarmes falsos seja superior a $1 / 0.0027 = 370.37$ (mesmo que a probabilidade marginal de uma observação ser superior a 11.83 seja igual a 0.0027). Isto se deve a um efeito - que tem uma explicação intuitiva curiosa e interessante - que é geral para dados seriais com auto correlação positiva, do tipo média móvel : Dados vizinhos se parecem. Assim um alarme falso tende a ser seguido de outros. Acontece que um alarme falso interrompe e reinicializa o gráfico de controle. Como na série não interrompida, o intervalo entre alarmes falsos tem valor médio igual a 370.37, a esperança do número de inspeções até o primeiro alarme falso é maior que 370.

O cálculo do valor de k^2 que permite a mesma taxa média de alarme falso deve então ser calculado considerando a estrutura de auto-correlação na série dos Y_i 's. Isto pode ser feito através de uma integração numérica complicada ou, aproximadamente, via simulação.

Por simulação encontramos, para $m = 2$, $k_0 = 3$, o valor de k^2 igual a 11.16. Note que $P [Y < 11.16] = 0.9962$ para $Y \sim \chi_{(2)}^2$, sugerindo uma taxa média de alarmes falsos igual a $1 / 263$. Porém a auto-correlação na série faz com que o número esperado de inspeções desde o início (ou reinício) do gráfico de controle até o primeiro alarme falso seja igual aproximadamente a 370. Para simplicidade, denominaremos este esquema por hV_m , de h variável baseado nas m últimas observações.

Fizemos este estudo para $m = 2$ a $m = 6$, considerando valores de δ de 0.25 a 2.25, com passos iguais a 0.25. Os ganhos de eficiência foram, em diversas combinações de m e δ , realmente extraordinários. Por exemplo, com $\delta = 0.5$, $n_0 = 4$, $h_0 = 10$ min e $k_0 = 3$, comparado com o ECS, o nosso esquema alternativo, baseado na Chi quadrado com $h_c = 1$, $h_1 = 30$, $k_a^2 = 0.7396$, $k^2 = 11.16$, e $m = 2$ apresenta uma eficiência igual a 3.55.

Os altos ganhos de eficiência, ao par da grande simplicidade conceitual e operacional deste esquema, o tornam uma ferramenta útil e versátil na detecção rápida de perturbações estáveis na média de processos gaussianos em geral. Esta rapidez na detecção de perturbações na média de um processo é muito importante. Uma operação prolongada de um processo desajustado normalmente induz grandes perdas tanto pelo das taxas de não conformidade como pela uma deterioração acentuada na qualidade dos itens conformes.

Na abordagem tradicional do Controle Estatístico de Qualidade (CEQ), pensa-se em termos de limites de tolerância (ou de especificação) : um item (ou uma batelada), é considerado aceitável, se estiver dentro de limites de tolerância, definidos antecipadamente de forma estática e rígida.. Às vezes estes limites podem ser folgados, gerando valores altos do coeficiente CP (= (LST-LIT) / 6 σ). Isto é uma impropriedade, dado que o esforço pela melhoria contínua de qualidade é incompatível com limites de tolerância estáticos, principalmente se eles forem largos. De fato estes limites deveriam evoluir, acompanhando com a evolução da capacidade do processo, indo se estreitando gradualmente em direção ao valor ideal M, à medida que σ cai para zero.

Desta forma, mesmo pequenas perturbações provocarão aumentos sensíveis no retrabalho. As perdas na qualidade provém da diminuição da densidade de probabilidade da variável X na vizinhança de M. Considerando por exemplo uma função de perdas quadrática do tipo $L(X) = C_0 \cdot (X - M)^2$, onde C_0 é uma constante, temos que $E [L (X) / \bar{X} \in (LIT, LST)]$ vai de $0.773741 \cdot C_0 \cdot \sigma^2$ para $0.872338 \cdot C_0 \cdot \sigma^2$ - um crescimento de 12.7 % - quando a média cresce de M para $M + 0.5 \sigma$ com $LIT = M - 2\sigma$ e $LST = M + 2\sigma$. Paralelamente, a taxa de rejeição de itens fora das especificações, cresce de 4.55 % para 7.30 %.

A seguir, ilustraremos com mais detalhes a performance do esquema hV proposto por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas, como introdução à nossa proposta de generalização deste esquema.

1.2 O ESQUEMA ALTERNATIVO hV

No esquema alternativo hV, o intervalo entre amostragens será igual a h_1 se o último valor observado de \bar{X} estiver na região central, próximo a M, e será igual a h_c , menor que h_1 , se o último valor de \bar{X} estiver numa das 2 faixas de alerta. As faixas de alerta são definidas por um fator k_α , menor que k_0 , escolhidos conjuntamente aos valores h_c e h_1 , de forma a se obter, $E [h / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = h_0$, enquanto o processo estiver sob controle estatístico. Assim, temos :

$$E [h / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = h_1 \cdot P [\bar{X} \in (LIA, LSA) / \bar{X} \in (LIC, LSC)] + h_c \cdot P [\bar{X} \notin (LIA, LSA) / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = h_0$$

É óbvio que este novo esquema não altera o número médio esperado de inspeções desde a ocorrência até a detecção de uma perturbação na média do processo, já que, antecipando ou postergando a próxima inspeção, a probabilidade de \bar{X} cair fora dos limites de controle não se altera. Contudo, uma vez ocorrida a perturbação, a frequência relativa de valores de \bar{X} na faixa de alerta aumentará, reduzindo o valor médio esperado de h e reduzindo conseqüentemente o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção da perturbação.

Nós definimos a eficiência deste esquema, relativamente ao ECS, como a razão entre o tempo médio esperado entre a ocorrência e a detecção de uma perturbação na média do processo para o ECS e para o esquema alternativo proposto. Podemos então provar o seguinte resultado:

Resultado 1.1 - A eficiência do esquema hV relativa ao ECS é dada por:

$$Ef = \frac{h_o}{(h_1 - h_c) \frac{\Phi(k_a - \delta) - \Phi(-k_a - \delta)}{\Phi(k_o - \delta) - \Phi(-k_o - \delta)} + h_c} \quad (1.02)$$

onde Φ é a FDP acumulada da normal padrão.

Prova:

Fixando de início os valores de h_c e h_1 , com $h_c < h_o < h_1$, podemos determinar o valor de k_a , tal que, estando o sistema sob controle estatístico,

$$E [Ch / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = h_c p_c + h_1 p_1 = h_o, \text{ onde}$$

$$p_1 = P [\bar{X} \in (LIA, LSA) / \bar{X} \in (LIC, LSC)] =$$

$$= \frac{P [\bar{X} \in (LIA, LSA)]}{P [\bar{X} \in (LIC, LSC)]} =$$

$$= \frac{\Phi(k_a) - \Phi(-k_a)}{\Phi(k_o) - \Phi(-k_o)} =$$

$$= \frac{2\Phi(k_a) - 1}{2\Phi(k_o) - 1} \quad \text{e} \quad p_c = 1 - p_1$$

onde $\Phi(X) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ é a FDP acumulada da normal padrão.

Logo, $h_1 p_1 - h_c p_1 + h_c = h_o$ ou

$$(h_1 - h_c) \cdot \frac{2\Phi(k_\alpha) - 1}{2\Phi(k_o) - 1} + h_c = h_o,$$

Portanto, isolando $\Phi(k_\alpha)$ temos

$$\Phi(k_\alpha) = 0.5 \cdot \left(1 + \frac{h_o - h_c}{h_1 - h_c} \cdot (2\Phi(k_o) - 1) \right)$$

Então

$$k_\alpha = \Phi^{-1} \left[0.5 \cdot \left(1 + \frac{h_o - h_c}{h_1 - h_c} \cdot (2\Phi(k_o) - 1) \right) \right] \quad (1.01)$$

Vamos agora determinar a eficiência deste esquema relativa ao ECS. Suponhamos uma perturbação estável na média, igual a δ desvios padrões. Sem perda de generalidade, consideremos que a perturbação seja positiva, levando o valor médio esperado de X de M para $M + \delta \sigma$.

O valor de p_1 fica agora diminuído, pois

$$P_1 = \frac{P [\bar{X} \in (LIA, LSA)]}{P [\bar{X} \in (LIC, LSC)]} ,$$

Como $\bar{X} \sim N (M + \delta \sigma, \frac{\sigma^2}{n_0})$

Então,

$$P_1 = \frac{\Phi (k_a - \delta) - \Phi (-k_a - \delta)}{\Phi (k_o - \delta) - \Phi (-k_o - \delta)}$$

Logo, após a perturbação,

$$E [h / \bar{X} \in (LIC, LSC)] = (h_1 - h_c) \cdot \frac{\Phi(k_a - \delta) - \Phi(-k_a - \delta)}{\Phi(k_o - \delta) - \Phi(-k_o - \delta)} + h_c$$

Como a esperança de N_2 , o número de inspeções desde a ocorrência até a detecção da perturbação é a mesma para os 2 esquemas, temos

$$Ef = \frac{h_o}{(h_1 - h_c) \frac{\Phi(k_a - \delta) - \Phi(-k_a - \delta)}{\Phi(k_o - \delta) - \Phi(-k_o - \delta)} + h_c}$$

Exemplo : Partindo de $k_0 = 3$ e $h_0 = 10$, escolhemos $h_c = 1$ e $h_1 = 30$. Neste caso,

$$k_\alpha = \Phi^{-1} \left[0.5 * \left(1 + \frac{\rho}{29} \left(2 \Phi(3) - 1 \right) \right) \right] = 0.398.$$

Logo, os limites de alerta serão :

$$LIA = M - 0.398 \sigma_{n_0} \quad e$$

$$LSA = M + 0.398 \sigma_{n_0}.$$

Neste caso,

10

$$Ef = \frac{10}{29 \cdot \frac{\Phi(0.398-\delta) - \Phi(-0.398-\delta)}{\Phi(3-\delta) - \Phi(-3-\delta)} + 1}$$

ou

10

$$Ef = \frac{10}{29 \cdot \frac{\int_{-0.398-\delta}^{0.398-\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx}{\int_{-3-\delta}^{3-\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx} + 1}$$

Podemos assim, traçar um gráfico de EF em função de δ ,

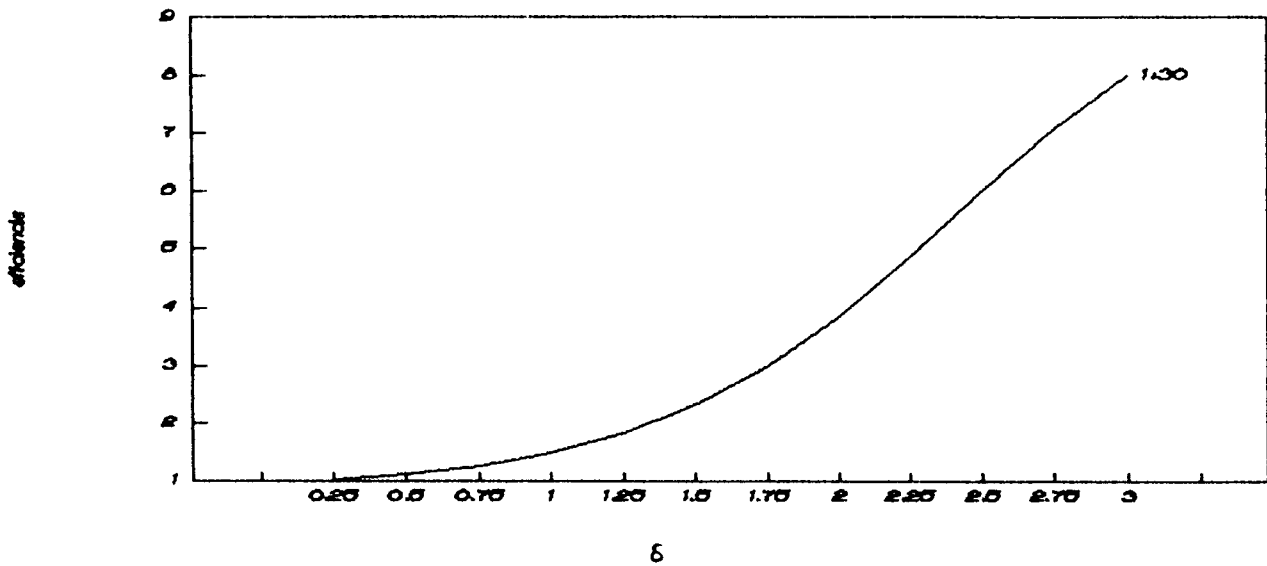


FIGURA 1.3 : CURVA DE EFICIENCIA DO ESQUEMA hv AO ECS, EM FUNCAO DE δ , PARA $h_c = 1$ e $h_1 = 30$

É ilustrativo considerar esta curva para outras escolhas de h_c e h_1 . Conjugando (1.01) e (1.02), podemos tirar quaisquer curvas, sem dificuldade. Esta forma de abordar o problema da comparação do desempenho da alternativa com o ECS, não foi considerada no artigo de Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas, mas achamos conveniente colocá-la aqui, por sua

simplicidade e abrangência. Na Figura 1.4 temos estas curvas para algumas opções de h_c e h_1 , considerando $k_o = 3$ e $h_o = 10$ min..

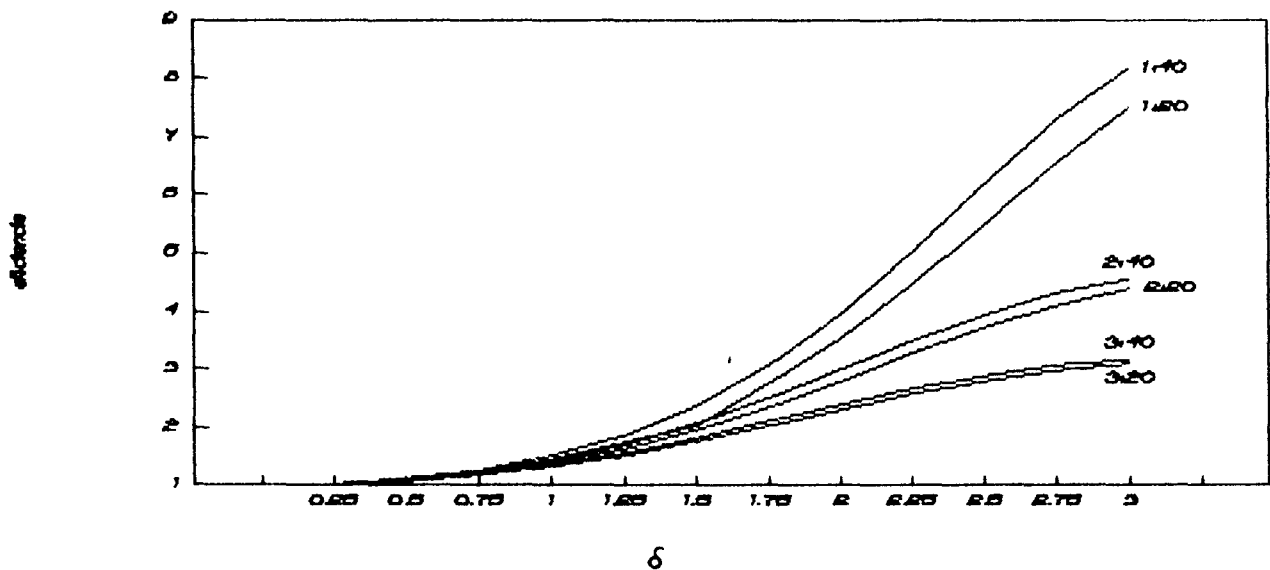


FIGURA 1.4 : CURVAS DE EFICIENCIA DO ESQUEMA hv RELATIVA AO ECS, EM FUNCAO DE δ , PARA DIVERSOS PARES DE VALORES (h_c, h_1)

No gráfico da Figura 1.4, variamos os intervalos h_c e h_1 e encontramos valores para k_a relativos a estes intervalos. Vemos que em situações onde δ é grande e $h_c \ll h_1$, ganhos extraordinários de eficiência são possíveis.

Outra forma de abordar o problema seria fixar o valor de k_a e ir variando os valores de h_1 e h_c . Note aqui que dado k_a , fica definida uma relação linear entre h_1 e h_c , de forma que a escolha de um valor para h_1 amarra o de h_c . Isto porque, uma vez escolhido k_c , os valores de p_1 e p_c ficam determinados, e assim

com k_a fixo, temos $h_1 p_1 + h_c p_c = h_o$, $h_c = (h_o - h_1 p_1) / p_c$

No capítulo seguinte tratamos da família mais geral de delineamentos hV_m , considerando com particular detalhe o caso $m = 2$.

CAPITULO 2

GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS, COMANDADOS PELAS 2 ÚLTIMAS OBSERVAÇÕES.

2.1 INTRODUÇÃO

No esquema hV_2 , o tempo de espera entre uma inspeção e a seguinte é variável, mas depende unicamente do último valor observado de \bar{X} . Se este valor estiver entre $M - k_\alpha \sigma_{\alpha n_0}$ e $M + k_\alpha \sigma_{\alpha n_0}$, o tempo até a próxima inspeção será igual a h_1 . Caso contrário, se ele cair fora desta faixa central, mas ainda dentro dos limites de controle, o tempo de espera será h_c , com $h_c < h_0 < h_1$. A escolha adequada de k_α , h_c e h_1 fará com que $E(t) = h_0$, desde que o processo esteja sob controle.

Neste trabalho nós vamos explorar este mesmo princípio, mas tornando-o mais geral. Adotaremos ainda dois valores, h_c e h_1 , para h , mas com a decisão sendo tomada com base nas m últimas observações. Assim, a decisão sobre h_i , o comprimento do i -ésimo intervalo de espera será uma função do vetor $(\bar{X}_{i-m+1}, \bar{X}_{i-m}, \dots, \bar{X}_i)$, para $i = m, m+1, m+2, \dots$. Se este vetor cair numa vizinhança de (M, M, \dots, M) , o tempo de espera, até a próxima amostragem será $h_i = h_1$. Se o vetor cair fora da vizinhança, mas ainda dentro dos limites de controle, o tempo de espera será igual a h_c .

Mais formalmente, definimos $\bar{X} = (\bar{X}_{i-m+1}, \dots, \bar{X}_i)$ e $M = (M, M, \dots, M)$, vetores de dimensão m . Então a função h pode ser definida como

$$h = h(\bar{X}) = \begin{cases} h_1 & \text{se } D(\bar{X}, M) < k_a \\ h_c & \text{se } k_a \leq D(\bar{X}, M) < k \end{cases} \quad (2.1)$$

para valores de \bar{X} dentro dos limites de controle, isto é, tais que $D(\bar{X}, M) < k$. Aqui $D(\bar{X}, M)$ é a distância, segundo uma métrica específica, entre \bar{X} e M .

Os valores k e k_a são escolhidos de forma a se ter $E(h / D \leq k) = h_0$ e $P[D > k] = 2 \cdot [1 - \Phi(k_0)]$, enquanto o sistema estiver sob controle estatístico.

Em princípio esta métrica pode ser qualquer. Neste trabalho nós adotamos a métrica Euclidiana, por diversas vantagens, como veremos.

Assim,

$$D(\bar{X}_i, M) = \left[\sum_{j=1}^m (\bar{X}_{i-j+1} - M)^2 \right]^{1/2}$$

para $i = m, m+1, m+2, \dots$

Para maior conveniência, contudo, vamos trabalhar com a

sequência $\{Z_i\}_{i \geq m}$, definida por

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - M}{\sigma} \cdot \sqrt{n_0}, \quad i = m, m+1, m+2, \dots \quad (2.2)$$

Assim, na suposição de que \bar{X} tem distribuição normal, Z terá distribuição normal padrão, enquanto o processo estiver sob controle. O ponto central de referência é agora o vetor $(0, 0, \dots, 0)$ e h é definido por

$$h_i = h(\tilde{Z}_i) = \begin{cases} h_1 & \text{se } \left[\sum_{j=1}^m Z_{i-m+j}^2 \right]^{1/2} < k_a \\ h_c & \text{se } k_a \leq \left[\sum_{j=1}^m Z_{i-m+j}^2 \right]^{1/2} < k \end{cases}$$

para vetores \tilde{Z}_i tais que $\left[\sum_{j=1}^m Z_{i-m+j}^2 \right]^{1/2} < k$.

Sabemos que se $\bar{X}_{i-m+1}, \bar{X}_{i-m+2}, \dots, \bar{X}_i$ forem iid $N(M, \sigma^2)$, então $Z_{i-m+1}, Z_{i-m+2}, \dots, Z_i$ serão iid $N(0, 1)$ e

$$\sum_{j=1}^m Z_{i-m+j}^2 \sim \chi_m^2, \text{ a distribuição Chi-quadrado com } m \text{ graus de}$$

liberdade.

Definindo $Y_i = \sum_{j=1}^m Z_{i-m+j}^2$, temos então que nosso

gráfico de controle será baseado na sequência $Y_m, Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots$ identicamente distribuídos segundo uma Chi-Quadrado com m graus de liberdade, com uma f.d.p. dada por (ver Johnson e Kotz, (1972))

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot 2^{\frac{m}{2}}} \cdot y^{\frac{m}{2} - 1} \cdot e^{-\frac{y}{2}}, \text{ para } y > 0,$$

com $E(Y) = m$ e $\text{Var}(Y) = 2m$

Note aqui que a independência entre os elementos da sequência foi perdida; há agora uma auto-correlação serial que depende de m . Contudo esta perda será amplamente compensada pela performance muito interessante do delineamento, na aceleração da detecção de perturbações estáveis na média de um processo gaussiano, conforme veremos neste trabalho. Neste capítulo trataremos particularmente, e em detalhe, do caso $m = 2$.

Para conveniência, neste trabalho, nos referiremos sempre a este esquema por hV_m , de h variável, baseado nas m últimas observações. O esquema de Arnold, Amin, Arnold e Nachlas é portanto o caso particular de hV_1 .

2.2 O CASO $m = 2$.

Para $m = 2$, a sequência

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \dots$ de Normais é transformada na sequência Y_2, Y_3, Y_4, \dots de Chi-quadrados com dois graus de liberdade, e a função h pode então ser definida por

$$h_i = h(Y_i) = \begin{cases} h_1 & \text{se } Y_i < k_a^2 \\ h_c & \text{se } k_a^2 < Y_i \leq k^2 \end{cases}$$

para valores de Y_i no intervalo $[0, k^2]$.

A frequência desejada de alarmes falsos, bem como os valores de h_c e h_1 definirão os limites k_a e k , através das propriedades da distribuição Chi-quadrado.

Assim, para se ter a probabilidade de alarme falso, numa inspeção específica, igual a $P[|Z| > 3] = 0.0027$, devemos

$$\text{ter } k^2 = 11.83, \text{ pois } f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, \text{ uma exponencial,}$$

$$\text{e } \int_0^{11.83} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}y} dy = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 11.83} = 0.9973.$$

Portanto $k = 3.44$

Há contudo uma pequena complicação que deve ser considerada: os Y_i 's não são independentes.

Resultado 2.1 - Para $m = 2$, a função de auto-correlação na sequência Y_2, Y_3, \dots é dada por

$$\text{Corr} (Y_i, Y_{i+s}) = \begin{cases} 0.50 & \text{se } s = 1 \\ 0 & \text{se } s > 1 \end{cases}$$

Prova :

Para $s = 1$,

$$\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E [(Y_i - E(Y_i))] \cdot [(Y_{i+1} - E(Y_{i+1}))]$$

$$\text{Como } Y_i = \sum_{j=1}^2 Z_{i-2+j}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} (Y_i, Y_{i+1}) &= E [(Z_{i-1}^2 + Z_i^2 - 2)] \cdot [(Z_i^2 + Z_{i+1}^2 - 2)] = \\ &= E [(Z_{i-1}^2 - 1) + (Z_i^2 - 1)] \cdot [(Z_i^2 - 1) + (Z_{i+1}^2 - 1)] \end{aligned}$$

Assim, já que as esperanças dos produtos cruzados para i 's diferentes são iguais a zero, temos (R2.1)

$$\text{Cov} (Y_i, Y_{i+1}) = E [(Z_i^2 - 1)^2] = \text{Var} (Z_i^2) = 2$$

Mas

$$\text{Var} (Y_i) = \text{Var} (Y_{i+1}) = 4$$

Portanto

$$\text{Corr} (Y_i, Y_{i+1}) = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = 0.5$$

Para $s > 1$,

$$\text{Temos } Y_{i+s} = \sum_{j=1}^2 Z_{i+s-2+j}^2$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_{i+s}) =$$

$$= E [(Z_{i-1} - 1) + (Z_i - 1)] \cdot [(Z_{i+s-1} - 1) + (Z_{i+s} - 1)] = 0$$

Pelo mesmo motivo de R2.1, dado que $s > 1$.

Portanto,

$$\text{Corr} (Y_i, Y_{i+s}) = 0, \quad \text{se } s > 1$$

■

Interessa-nos aqui determinar, para um dado valor k , a frequência de alarmes falsos com o sistema em controle. No ECS esta frequência é igual ao recíproco da probabilidade de alarme falso numa dada inspeção. Esta probabilidade é constante e, para $k_0 = 3$, vale exatamente $2 \cdot (1 - \Phi(3)) = 0.0027$. Portanto, no ECS, com $k_0 = 3$ e o processo sob controle estatístico, a taxa de ocorrência de alarmes falsos será de um a cada 370.4 ($= 1/0.0027$) inspeções.

Vejamos o que ocorreria no nosso caso, com a frequência

de alarmes falsos, se escolhêssemos o limite de controle $k^2 = 11.83$. Vamos supor aqui, para simplicidade, que o processo não sai do controle, já que queremos estudar as propriedades do delineamento neste estágio do ciclo de qualidade.

A probabilidade de um alarme falso na segunda inspeção do ciclo é igual a, exatamente, 0.0027. A terceira inspeção, que gerará Y_3 , - o segundo valor da série dos Y 's - só ocorrerá se não houve alarme falso na segunda. Assim, devemos determinar $P [Y_3 \geq k^2 / Y_2 < k^2]$. Esta probabilidade é, obviamente, menor que 0.0027, dada a correlação positiva entre Y_2 e Y_3 . Similarmente devemos determinar $P [Y_4 \geq k^2 / Y_2 < k^2 \text{ e } Y_3 < k^2]$, e assim por diante. O tratamento algébrico rigoroso destas probabilidades é trabalhoso, envolvendo cálculo numérico pesado, pois a função de densidade de probabilidade conjunta de Y_i, Y_{i+1} é dada por [Ver Johnson e Kotz (1972) Vol III, pg 261]

$$f_{y_i, y_{i+1}}(Y_i, Y_{i+1}) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})} \int_0^{\min(y_i, y_{i+1})} \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{t(y_i - t)(y_{i+1} - t)}} dt$$

Além disto, porque estamos trabalhando com valores de probabilidade muito próximos do zero, a avaliação precisa de variações na probabilidade de alarmes falsos demandará um nível extraordinário de precisão nos cálculos. Não nos ocuparemos desta tarefa neste trabalho. Em vez disto obteremos boas aproximações para a freqüência de alarmes falsos com base em simulações Monte Carlo. Estas são feitas gerando seqüências Z_1, Z_2, \dots de normais padrões independentes, e daí as seqüências dos Y 's.

Com base em 10.000 repetições Monte Carlo obtivemos a incidência de alarmes falsos, para $k^2 = 11.83$ foi, em média de um a cada 506 ± 12 inspeções. Os programas computacionais para estas simulações são apresentados no Apêndice A.

Para podermos comparar nosso delineamento com o ECS com $k_o = 3$, devemos pois reduzir k . Ainda via Monte Carlo estimamos para $k^2 = 11.16$ (ou $k = 3.34$) o número médio de inspeções entre alarmes falsos em 367 ± 7.27 . Adotamos então este valor.

Para cada escolha de h_c e h_1 , temos que determinar o valor k_a , tal que $E(h) = h_o$.

Resultado 2.2 : Para $m = 2$, e limite de controle dado por k , o valor de k_a para intervalos iguais a h_c e h_1 , com $E(h) = h_o$, é dado por

$$k_a^2 = -2 \cdot \ln \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2} k^2} \right) \cdot \frac{h_o - h_c}{h_1 - h_c} \right)$$

Prova :

Partimos de

$$E(h) = h_c \cdot p_c + h_1 \cdot p_1 = h_o$$

Mas $p_1 = 1 - p_c$, e

$$p_c = \frac{h_o - h_c}{h_1 - h_c}$$

Lembramos agora que $p_1 = P [Y \leq k_a^2 / Y \leq k^2]$.

Logo já que $Y \sim \chi^2_{(2)} \equiv \text{Exp}(2)$, temos que

$$P [Y \leq k^2] = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot k^2}$$

$$\text{Logo } p_1 = P [Y \leq k_a^2] / (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot k_a^2})$$

$$\text{Então } P [Y \leq k_a^2] = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot k_a^2} = (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot k^2}) \cdot \frac{h_0 - h_c}{h_1 - h_c}$$

ou

$$k_a^2 = -2 \cdot \ln (1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot k^2}) \cdot \frac{h_0 - h_c}{h_1 - h_c})$$

■

Sem nenhuma perda de generalidade, vamos considerar sempre $h_0 = 10$. Assim, referindo-se ao ECS, com $k_0 = 3$, temos $k_a^2 = -2 \cdot \ln (1 - 0.9962 \cdot \frac{10 - h_c}{h_1 - h_c})$. Para ilustração, fazendo se $h_c = 0$ e $h_1 = 50$, obtemos $k_a^2 = 0.4444$. Aqui $h_c = 0$ quer dizer que, se Y cair na região de alerta, a inspeção seguinte será feita imediatamente.

Consideramos que após exatamente N_1 inspeções ocorre uma perturbação estável na média do processo deslocando-a de M para $M + \delta \sigma$. Assim

$\bar{X}_{N_1+1}, \bar{X}_{N_1+2}, \dots$ são iid $N (M + \delta \sigma, \sigma / \sqrt{n_0})$ e portanto $Y_{N_1+s}, s = 1, 2, 3, \dots$ são Chi-quadrados não centrais com 2 graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade igual a δ^2 para $s = 1$ e $2 \cdot \delta^2$ para $s = 2, 3, 4, \dots$ (Johnson e Kotz,)

Vamos comparar este nosso esquema, com $m = 2$, com o ECS

equivalente. Assim, vamos usar o ECS com $k_0 = 3$, e conseqüentemente, o nosso esquema com $k^2 = 11.16$. Sem nenhuma perda de generalidade fixaremos $n_0 = 1$ e $h_0 = 10$ min..

A comparação será feita com base na eficiência relativa dos dois esquemas, que definimos como $E_{\text{ECS}}(T_2) / E_{hV_2}(T_2)$ onde $E_{\text{ECS}}(T_2)$ e $E_{hV_2}(T_2)$ representam as esperanças de T_2 sob o ECS e sob o hV_2 , respectivamente.

Esta eficiência é função de δ e depende da escolha do par (h_c, h_1) . Por meio de simulações, obtivemos valores aproximados para $E_{hV_2}(T_2)$ para diversos valores de h_c e h_1 , e para δ indo de 0.25 a 2.25.

Os resultados são sumarizados na tabela abaixo, observe que as menores tempos médios são obtidos quando $h_c = 0$.

Tabela 2.1 : Valores obtidos para $E_{hv_2}(T_2)$, com base em 1000 repetições Monte Carlo em cada Caso, para diversos pares (h_c, h_l) , e δ indo de 0.25 a 2.25.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10		2812	1550	812	440	250	150	95	63	44
0	15	2.182	2504	1036	421	118	41	14	5	3	1
0	30	0.807	2408	998	327	107	25	7	4	0.58	0.38
0	60	0.363	2629	1012	344	87	23	6	2	1	0.29
0	120	0.173	2513	988	310	84	20	7	2	1	0.14
1	15	2.045	2551	1147	396	160	49	20	10	5	4
1	30	0.740	2482	1080	383	124	42	18	9	6	4
1	60	0.330	2531	1113	364	115	39	20	10	8	8
1	120	0.157	2378	973	351	109	39	21	16	14	13
2	15	1.899	2580	1121	423	141	51	22	13	9	6
2	30	0.670	2543	998	365	119	45	21	16	11	10
2	60	0.296	2412	1041	351	115	47	23	19	16	15
2	120	0.140	2598	1011	365	124	54	38	31	25	24
5	15	1.379	2657	1186	483	172	76	41	26	19	15
5	30	0.444	2658	1168	495	184	80	47	31	26	23
5	60	0.190	2560	1197	454	202	86	58	43	40	39
5	120	0.886	2768	1086	439	198	100	77	76	72	70

Com base nestes resultados determinamos a eficiência relativa $E_{ECS}(T_2) / E_{hv_2}(T_2)$, que apresentamos na Tabela 2.2

Tabela 2.2 : Eficiência relativa do nosso delineamento, com $m = 2$, em relação ao ECS.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
0	15	2.182	1.12	1.50	1.93	3.73	6.10	10.7	19.0	21.0	44
0	30	0.807	1.17	1.55	2.48	4.11	10.0	21.4	23.8	65.2	69.5
0	60	0.363	1.07	1.53	2.36	5.06	10.9	25.0	47.5	63.0	91
0	120	0.173	1.12	1.57	2.62	5.24	12.5	21.4	47.5	63.0	189
1	15	2.045	1.10	1.35	2.05	2.75	5.10	7.50	9.50	12.6	11
1	30	0.740	1.13	1.44	2.12	3.55	5.95	8.33	10.6	10.5	11
1	60	0.330	1.11	1.39	2.23	3.93	6.41	7.50	9.50	7.88	5.5
1	120	0.157	1.18	1.59	2.31	4.04	6.41	7.14	5.94	4.50	3.4
2	15	1.899	1.09	1.38	1.92	3.12	4.90	6.82	7.31	7.00	4.4
2	30	0.670	1.11	1.55	2.22	3.70	5.56	7.14	5.94	5.73	4.4
2	60	0.296	1.17	1.49	2.31	3.83	5.32	6.52	5.00	3.94	2.9
2	120	0.140	1.08	1.53	2.23	3.55	4.63	3.95	3.06	2.52	1.8
5	15	1.379	1.06	1.31	1.68	2.56	3.29	3.66	3.65	3.32	2.9
5	30	0.444	1.06	1.33	1.64	2.39	3.13	3.19	3.06	2.42	1.9
5	60	0.190	1.10	1.30	1.79	2.18	2.91	2.59	2.21	1.58	1.1
5	120	0.886	1.02	1.43	1.85	2.22	2.5	1.95	1.25	0.88	0.6

Os ganhos relativos ao delineamento de Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas, que corresponde ao delineamento V com $m = 1$, podem ser apreciados com base nos dados da Tabela 2.3

Tabela 2.3 : Eficiência relativa delineamento proposto por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas, com respeito ao ECS.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
0	15	0.964	1.02	1.09	1.22	1.42	1.71	2.15	2.81	3.77	5.24
0	30	0.430	1.03	1.12	1.29	1.57	2.01	2.70	3.79	5.53	8.43
0	60	0.210	1.03	1.13	1.31	1.61	2.08	2.84	4.05	6.04	6.34
0	120	0.104	1.03	1.13	1.31	1.61	2.09	2.87	4.14	6.20	9.62
1	15	0.918	1.03	1.08	1.20	1.37	1.62	1.97	2.43	3.04	3.79
1	30	0.398	1.03	1.11	1.26	1.49	1.83	2.32	2.99	3.85	4.88
1	60	0.192	1.03	1.11	1.27	1.52	1.88	2.40	3.12	4.03	5.10
1	120	0.095	1.03	1.11	1.27	1.52	1.89	2.42	3.16	4.07	5.16
2	15	0.866	1.02	1.08	1.18	1.33	1.54	1.80	2.14	2.53	2.95
2	30	0.365	1.02	1.10	1.22	1.42	1.69	2.04	2.41	2.94	3.43
2	60	0.173	1.03	1.10	1.23	1.43	1.71	2.09	2.53	3.02	3.52
2	120	0.085	1.03	1.10	1.23	1.44	1.72	2.09	2.54	3.04	3.52
5	15	0.672	1.01	1.05	1.12	1.20	1.31	1.42	1.54	1.65	1.75
5	30	0.253	1.02	1.07	1.14	1.24	1.36	1.48	1.61	1.72	1.81
5	60	0.114	1.02	1.06	1.13	1.23	1.35	1.48	1.61	1.72	1.82
5	120	0.054	1.01	1.06	1.14	1.24	1.36	1.48	1.61	1.72	1.82

A eficiência $E_{hv_1}(T_2) / E_{hv_2}(T_2)$, apresentada na Tabela 2.4, apresenta os ganhos possíveis quando, após a adoção do delineamento a tempos variáveis, decidimos incluir 2 variáveis ($m = 2$).

Tabela 2.4 : Eficiência $E_{h\nu_1}(T_2) / E_{h\nu_2}(T_2)$ do nosso delineamento em relação ao de Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas.

h_c	h_l	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
0	15	1.09	1.42	1.59	2.63	3.57	4.98	6.76	5.57	8.40
0	30	1.35	1.44	1.94	2.62	4.98	7.93	6.28	11.79	8.24
0	60	1.24	1.41	1.82	3.14	5.24	8.80	11.73	10.43	9.74
0	120	1.30	1.44	2.02	3.26	5.98	7.46	11.47	10.16	19.64
1	15	1.28	1.30	1.73	2.01	3.15	3.81	3.91	4.15	2.90
1	30	1.31	1.34	1.70	2.38	3.25	3.59	3.55	2.73	2.25
1	60	1.29	1.31	1.77	2.52	3.41	3.13	3.05	1.96	1.08
1	120	1.37	1.49	1.84	2.66	3.39	2.95	1.88	1.11	0.66
2	15	1.28	1.33	1.64	2.35	3.18	3.79	3.42	2.77	1.49
2	30	1.29	1.46	1.84	2.61	3.29	3.50	2.47	1.95	1.28
2	60	1.35	1.41	1.89	2.68	3.11	3.12	1.98	1.31	0.82
2	120	1.25	1.45	1.82	2.47	2.69	1.89	1.21	0.83	0.51
5	15	1.25	1.30	1.51	2.13	2.51	2.58	2.37	2.01	1.66
5	30	1.24	1.29	1.45	1.93	2.30	2.16	1.90	1.41	1.05
5	60	1.28	1.27	1.59	1.77	2.16	1.75	1.37	0.92	0.60
5	120	1.20	1.40	1.63	1.79	1.84	1.32	0.78	0.51	0.33

Vemos assim que, em diversas situações de interesse prático, o nosso delineamento, mesmo considerando apenas as duas últimas observações ($m = 2$), introduz melhoras extraordinárias no tempo médio esperado entre ocorrência e detecção da perturbação no processo, principalmente quando $h_c = 0$.

Na figura abaixo temos os histogramas para os 1000 valores de T_2 obtidos pelo nosso esquema, com $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$. Neste caso a eficiência relativa é 5.10. O histograma do gráfico seguinte dá a distribuição de T_2 sob o ECS no mesmo contexto.

$M = 2$

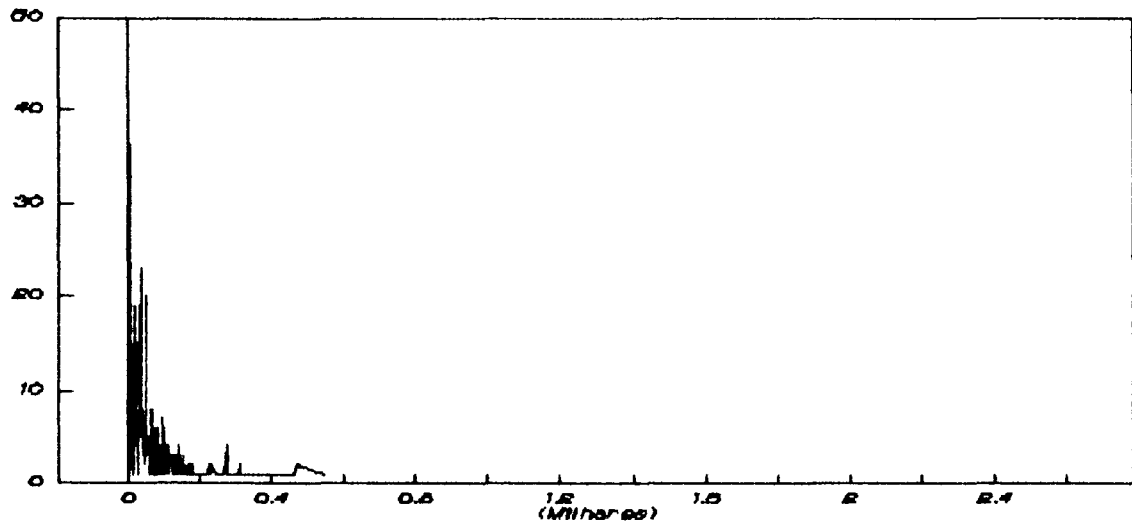


FIGURA 2.1 : HISTOGRAMA COM $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ PARA O ESQUEMA HV_2 .

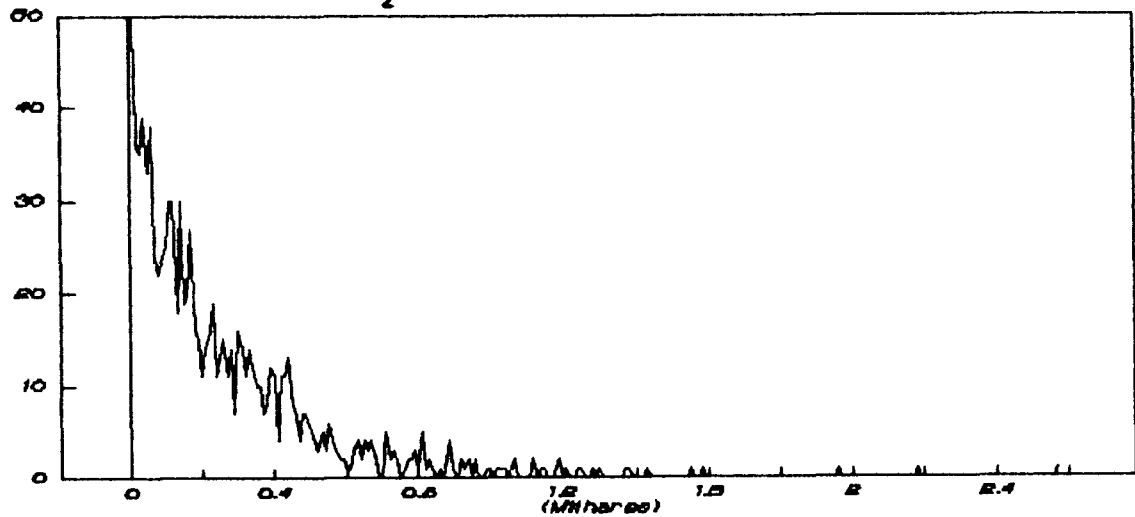


FIGURA 2.2 : HISTOGRAMA COM $h_c = 1$, $h_l = 15$ e $\delta = 1.25$ PARA O ECS.

É interessante notar que, uma vez decidida a adoção do esquema amostral com intervalos variáveis (hV_1), as complicações adicionais implicadas pela inclusão da penúltima observação (Esquema hV_2) são praticamente nulas. Os ganhos adicionais, apresentados na Tabela 2.4, são conseguidos a custo zero.

No Capítulo 3 consideramos o delineamento hV_m , com $m > 2$

CAPITULO 3

GRÁFICOS DE CONTROLE COM AMOSTRAGEM A TEMPOS VARIÁVEIS, COMANDADAS PELAS $m, m > 2$ OBSERVAÇÕES.

3.1 INTRODUÇÃO

Não há, em princípio, um limite bem definido para m . Podemos, no entanto, adotar qualquer valor para m , sujeito apenas às restrições de operacionalidade. Neste capítulo exploramos o delineamento hV_m para $m = 3, 4, 5$ e 6 . Veremos que a eficiência crescerá sempre, embora cada vez menos rapidamente. Além disto há que se considerar o fato que em cada início de ciclo ocorre uma certa complicação durante as $m-1$ primeiras inspeções : A primeira observação, \bar{X}_1 , deve ser transformada em Z_1 . O seu quadrado é então comparado com os limites k^2 e k_a^2 correspondentes ao delineamento hV_1 . Com a segunda observação, compomos $Y_2 = Z_1^2 + Z_2^2$ e comparamos com os limites k^2 e k_a^2 do delineamento hV_2 , e assim por diante, até ocorrer a estabilização dos limites a partir da m -ésima inspeção.

3.2 SIMULACOES E COMPARAÇÕES

Via simulação, encontramos os valores do limite de controle, k , para $m = 3, 4, 5$, e 6 . Os valores estimados são

apresentados na Tabela 3.1, com os respectivos intervalos de confiança para $E(T_2)$, baseados em 10.000 replicações Monte Carlo.

O número de replicações Monte Carlo escolhido obtém resultados com margem provável de erro não superior a 2 %.

Tabela 3.1 : Valores estimados para k , com respectivos intervalos de confiança 95 % para $E_{h_v}(\hat{T}_2)$, baseados em 10.000 replicações Monte Carlo.

	m				
	2	3	4	5	6
$F^{-1}(0.9973)$	11.83	14.15	16.25	18.206	20.062
$E(\hat{T}_2)_{\min}$	494.46	602.09	672.01	768.24	842.41
$E(\hat{T}_2)$	506.57	614.33	686.17	784.46	859.81
$E(\hat{T}_2)_{\max}$	518.68	626.57	700.33	800.68	877.21
k^2	11.16	13.07	14.72	16.42	17.89
$E(\hat{T}_2)_{\min}$	359.69	368.55	359.82	360.77	360.08
$E(\hat{T}_2)$	366.96	376.15	367.31	368.48	367.88
$E(\hat{T}_2)_{\max}$	374.23	383.75	374.79	376.19	375.68

onde F é a função de distribuição acumulada da $\chi^2_{(m)}$.

Os valores de k_a são obtidos a partir de que

$$P [Y \leq k_a] = \frac{h_0 - h_c}{h_1 - h_c} \cdot P [Y \leq k^2]$$

onde k^2 é um valor conhecido.

Por meio de simulações Monte Carlo encontramos as eficiências relativas ao ECS. As tabelas subseqüentes mostram os resultados do tempo médio esperado, bem como as respectivas eficiências relativas para os esquemas hV_m , para $m = 2, 3, 4, 5$, e 6.

Tabela 3.2 : Valores obtidos para $E_{hv_3^2}(T_2)$, com base em 1000 repetições Monte Carlo em cada caso, para diversos pares (h_c, h_l) e δ indo de 0.25 a 2.25.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10		2812	1550	812	440	250	150	95	63	44
0	15	3.382	2708	1057	298	89	21	8	3	2	0.29
0	30	1.561	2484	991	262	65	13	5	1	0.38	0.27
0	60	0.864	2537	903	233	59	11	4	0.40	0.25	0.04
0	120	0.508	2507	894	225	49	11	2	0.14	0	0
1	15	3.212	2492	1101	366	111	33	13	8	5	3
1	30	1.462	2566	1041	316	80	27	10	5	3	2
1	60	0.805	2454	886	283	83	27	11	11	8	8
1	120	0.473	2532	918	236	66	29	15	13	13	13
2	15	3.028	2611	1047	339	108	34	17	10	7	6
2	30	1.357	2587	982	294	90	32	17	12	11	10
2	60	0.744	2694	915	291	84	33	21	19	16	16
2	120	0.437	2451	965	285	91	42	32	30	30	28
5	15	2.354	2686	1109	388	152	57	30	20	17	14
5	30	1.002	2700	1100	373	134	57	36	28	25	23
5	60	0.542	2606	1142	374	139	66	49	42	41	40
5	120	0.318	2506	1154	376	160	95	76	75	74	74

Tabela 3.3 : Eficiência relativa do nosso delineamento ($m = 3$) em relação ao ECS, com base nos valores da Tabela 3.2 .

h_c	h_l	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0	15	1.04	1.47	2.72	4.94	11.90	18.75	31.67	31.50	91.0
0	30	1.13	1.56	3.10	6.77	19.23	30.00	95.00	99.47	97.7
0	60	1.11	1.72	3.48	7.46	22.73	37.50	142.5	151.2	660.0
0	120	1.12	1.73	3.61	8.98	22.73	75.00	407.1	∞ (*)	∞
1	15	1.13	1.41	2.22	3.96	7.58	11.54	11.88	12.6	14.7
1	30	1.10	1.49	2.57	5.50	9.26	15.00	19.00	21.0	22.0
1	60	1.15	1.75	2.87	5.30	9.26	13.64	8.64	7.88	5.5
1	120	1.11	1.69	3.44	6.67	8.62	10.00	7.31	4.85	3.4
2	15	1.08	1.48	2.40	4.07	7.35	8.82	9.50	9.00	7.3
2	30	1.09	1.58	2.76	4.89	7.81	8.82	7.92	6.30	4.4
2	60	1.04	1.69	2.79	5.24	7.58	7.14	5.94	3.94	2.8
2	120	1.15	1.61	2.85	4.84	5.95	4.69	3.17	2.10	1.6
5	15	1.05	1.40	2.09	2.89	4.39	5.00	4.75	3.71	3.1
5	30	1.05	1.41	2.18	3.28	4.39	4.17	3.39	2.53	1.9
5	60	1.08	1.36	2.17	3.17	3.79	3.06	2.25	1.54	1.1
5	120	1.12	1.34	2.16	2.75	2.63	1.97	1.27	0.85	0.6

(*) : Equivale a um valor muito grande da eficiência.

Tabela 3.4 : Valores obtidos para $E_{hv_4^2}(T)$, com base em 1000 repetições Monte Carlo em cada caso, para diversos pares (h_c, h_l) e δ indo de 0.25 a 2.25.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10		2812	1550	812	440	250	150	95	63	44
0	15	3.382	2460	921	229	59	18	6	2	0.53	0.12
0	30	1.561	2322	857	222	37	10	5	1	0.07	0
0	60	0.864	2446	765	194	36	7	2	1	0	0
0	120	0.508	2259	745	181	30	7	3	1	0	0
1	15	3.212	2347	790	214	50	21	9	6	4	2
1	30	1.462	2362	747	178	45	16	8	8	4	4
1	60	0.805	2309	617	171	34	16	11	10	10	8
1	120	0.473	2294	746	204	52	27	20	17	12	15
2	15	3.028	2383	941	282	74	25	12	8	6	5
2	30	1.357	2538	877	228	70	25	15	11	10	8
2	60	0.744	2293	819	253	63	29	20	18	17	16
2	120	0.437	2518	842	235	80	41	38	31	30	30
5	15	2.354	2379	850	233	86	36	22	18	15	14
5	30	1.002	2371	889	279	73	39	29	27	25	23
5	60	0.542	2217	836	207	90	54	47	44	46	41
5	120	0.318	2573	897	312	128	91	80	75	75	78

Tabela 3.5 : Eficiência relativa do nosso delineamento (m = 4) em relação ao ECS, com base nos valores da Tabela 3.4 .

h_c	h_l	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0	15	1.14	1.68	3.55	7.46	13.89	25.00	47.50	71.3	0.12
0	30	1.21	1.81	3.66	11.89	25.00	30.00	95.00	540	∞
0	60	1.15	2.03	4.19	12.22	35.71	75.00	95.00	∞ (*)	∞
0	120	1.24	2.08	4.49	14.67	35.71	50.00	95.00	∞	∞
1	15	1.20	1.96	3.79	8.80	11.90	16.67	15.83	15.75	22.0
1	30	1.19	2.07	4.56	9.78	15.63	18.75	11.88	15.75	11.0
1	60	1.22	2.51	4.75	12.94	15.63	13.64	9.50	6.30	5.50
1	120	1.23	2.08	3.98	8.46	9.26	7.50	5.59	5.25	2.93
2	15	1.18	1.65	2.88	5.95	10.00	12.50	11.88	10.50	8.80
2	30	1.11	1.77	3.56	6.29	10.00	10.00	8.64	6.30	5.50
2	60	1.23	1.89	3.21	6.98	8.62	7.50	5.28	3.71	2.75
2	120	1.12	1.84	3.46	5.50	6.10	3.95	3.06	2.10	1.47
5	15	1.18	1.82	3.48	5.12	6.94	6.82	5.28	4.20	3.14
5	30	1.19	1.74	2.91	6.03	6.41	5.17	3.52	2.52	1.91
5	60	1.27	1.85	3.92	4.89	4.63	3.19	2.16	1.37	1.07
5	120	1.09	1.73	2.60	3.44	2.75	1.88	1.27	0.84	0.56

(*) : Equivale um valor muito grande de eficiência.

Tabela 3.6 : Valores obtidos para $E_{hV_5^2}(T_2)$, com base em 1000 repetições Monte Carlo em cada caso, para diversos pares (h_c, h_l) e δ indo de 0.25 a 2.25.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10		2812	1550	812	440	250	150	95	63	44
0	15	3.382	2488	900	218	53	13	5	3	0.35	0.14
0	30	1.561	2606	836	186	36	8	3	0.51	0.18	0
0	60	0.864	2391	675	157	32	7	1	0.24	0	0
0	120	0.508	2391	679	133	35	8	3	0.50	0	0
1	15	3.212	2479	743	193	39	16	8	5	3	3
1	30	1.462	2217	706	146	36	17	7	6	5	5
1	60	0.805	2317	659	154	31	18	11	9	8	6
1	120	0.473	2419	735	159	49	23	18	17	17	19
2	15	3.028	2685	849	255	63	24	12	8	6	5
2	30	1.357	2580	784	211	55	23	14	13	9	9
2	60	0.744	2572	796	203	57	32	19	19	18	16
2	120	0.437	2521	787	204	75	39	34	34	27	27
5	15	2.354	2531	816	226	77	33	20	17	14	12
5	30	1.002	2434	770	192	74	37	30	26	24	23
5	60	0.542	2592	719	206	84	53	44	43	41	42
5	120	0.318	2513	950	289	131	86	82	77	79	82

Tabela 3.7 : Eficiência relativa do nosso delineamento (m = 5) em relação ao ECS, com base nos valores da Tabela 3.6 .

h_c	h_l	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0	15	1.13	1.72	3.72	8.30	19.23	30.00	31.67	108	0.14
0	30	1.08	1.85	4.37	12.22	31.25	50.00	112	210	∞
0	60	1.18	2.30	5.17	13.75	35.71	150	238	∞ (*)	∞
0	120	1.18	2.28	6.11	12.57	31.25	50.00	114	∞	∞
1	15	1.13	2.09	4.21	11.28	15.63	18.75	19.00	21.0	14.7
1	30	1.27	2.20	5.56	12.22	14.71	21.43	15.83	12.6	8.8
1	60	1.21	2.35	5.27	14.19	13.89	13.64	10.56	7.9	7.3
1	120	1.16	2.11	5.11	8.98	10.87	8.33	5.59	3.7	2.3
2	15	1.05	1.83	3.18	6.98	10.42	12.50	11.88	10.5	8.8
2	30	1.09	1.98	3.85	8.00	10.87	10.71	7.31	7.0	4.9
2	60	1.09	1.95	4.00	7.72	7.81	7.89	5.00	3.5	2.8
2	120	1.12	1.97	3.98	5.87	6.41	4.41	2.79	2.3	1.6
5	15	1.11	1.90	3.59	5.71	7.58	7.50	5.59	4.5	3.7
5	30	1.16	2.01	4.23	5.95	6.76	5.00	3.65	2.6	1.9
5	60	1.08	2.16	3.94	5.24	4.72	3.41	2.21	1.5	1.1
5	120	1.12	1.63	2.81	3.36	2.91	1.83	1.23	0.8	0.5

(*) : Equivale a um valor muito grande de eficiência.

Tabela 3.8 : Valores obtidos para $E_{hv_2}(T_2)$, com base em 1000 repetições Monte Carlo em cada caso, para diversos pares (h_c, h_l) e δ indo de 0.25 a 2.25.

h_c	h_l	k_a^2	$\delta_{n_o} = \delta * \sqrt{n_o}$								
			0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10		2812	1550	812	440	250	150	95	63	44
0	15	3.382	2554	786	174	39	13	5	1	0.23	0.17
0	30	1.561	2355	689	132	29	10	3	0.59	0.10	0
0	60	0.864	2282	626	129	28	8	2	0	0	0
0	120	0.508	2431	611	121	26	7	1	0	0	0
1	15	3.212	2503	673	134	34	13	7	5	3	2
1	30	1.462	2315	595	123	31	13	9	6	5	5
1	60	0.805	2232	538	123	33	16	11	11	9	9
1	120	0.473	2662	604	140	50	27	22	19	16	18
2	15	3.028	2551	907	208	54	20	12	8	5	5
2	30	1.357	2264	754	165	50	21	13	11	10	8
2	60	0.744	2387	737	176	49	28	20	17	17	17
2	120	0.437	2423	723	178	74	41	36	30	30	32
5	15	2.354	2517	817	169	62	28	20	16	14	12
5	30	1.002	2287	736	169	71	37	29	24	23	22
5	60	0.542	2422	692	177	83	55	46	44	41	41
5	120	0.318	2423	723	178	74	41	36	30	30	32

Tabela 3.9 : Eficiência relativa do nosso delineamento (m = 6) em relação ao ECS, com base nos valores da Tabela 3.8 .

h_c	h_l	$\delta_{n_0} = \delta * \sqrt{n_0}$								
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
10	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0	15	1.10	1.97	4.67	11.28	19.23	30.00	95.0	164	155
0	30	1.19	2.25	6.15	15.17	25.00	50.00	96.6	378	∞
0	60	1.23	2.48	6.29	15.71	31.25	75.00	∞	∞ (*)	∞
0	120	1.16	2.54	6.71	16.92	35.71	150	∞	∞	∞
1	15	1.12	2.30	6.06	12.94	19.23	21.43	19.0	21.0	22.0
1	30	1.21	2.61	6.60	14.19	19.23	16.67	15.8	12.6	8.8
1	60	1.26	2.88	6.60	13.33	15.63	13.64	8.6	7.0	4.9
1	120	1.06	2.57	5.80	8.80	9.26	6.82	5.0	3.9	2.4
2	15	1.10	1.71	3.90	8.15	12.50	12.50	11.8	12.6	8.8
2	30	1.24	2.06	4.92	8.80	11.90	11.54	8.6	6.3	5.5
2	60	1.18	2.10	4.61	8.98	8.93	7.50	5.6	3.7	2.6
2	120	1.16	2.14	4.56	5.95	6.10	4.17	3.2	2.1	1.4
5	15	1.12	1.90	4.80	7.10	8.93	7.50	5.9	4.5	3.7
5	30	1.23	2.11	4.80	6.20	6.76	5.17	4.0	2.7	2.0
5	60	1.16	2.24	4.59	5.30	4.55	3.26	2.2	1.5	1.1
5	120	1.16	2.14	4.56	5.95	6.10	4.17	3.1	2.1	1.4

(*) : Equivale a um valor muito grande de eficiência.

Como vemos, a eficiência cresce tanto, quanto aumentamos o valor de m ; porém este crescimento torna-se mais estável, na medida que este valor vai aumentando. As decisões por seu valor, deve sempre ser acompanhadas pelas possibilidades que a operacionalização permite.

Abaixo temos, todos os histogramas formados, retirados dos dados apresentados nesta dissertação, como fato, destacando a distribuição de $E(T_2)$, com $h_c = 1$, $h_1 = 15$ e $\delta = 1.25$.

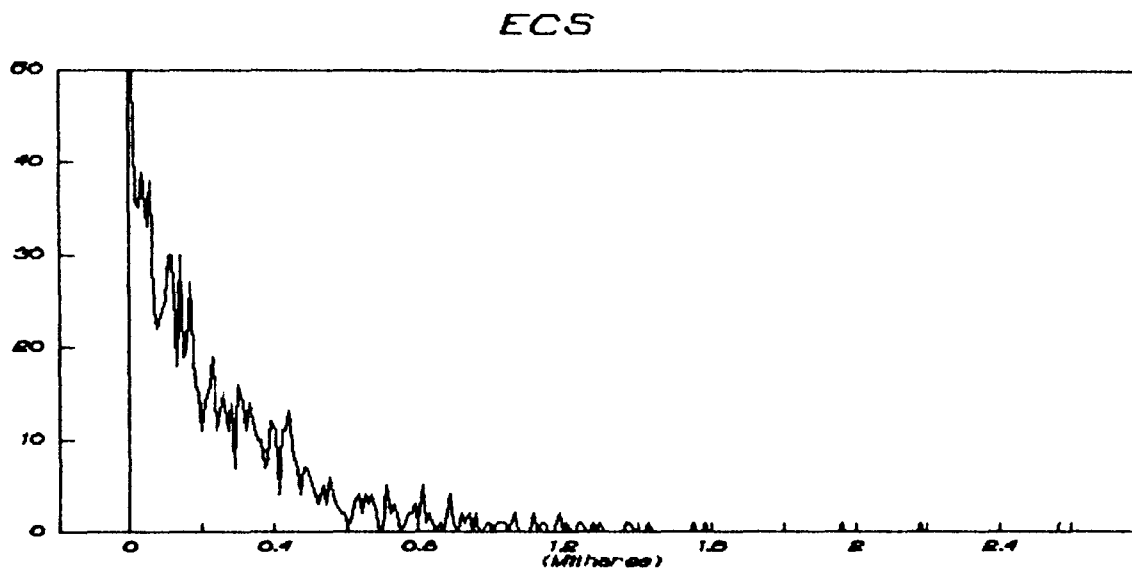


FIGURA 3.1 : HISTOGRAMA PARA O ECS

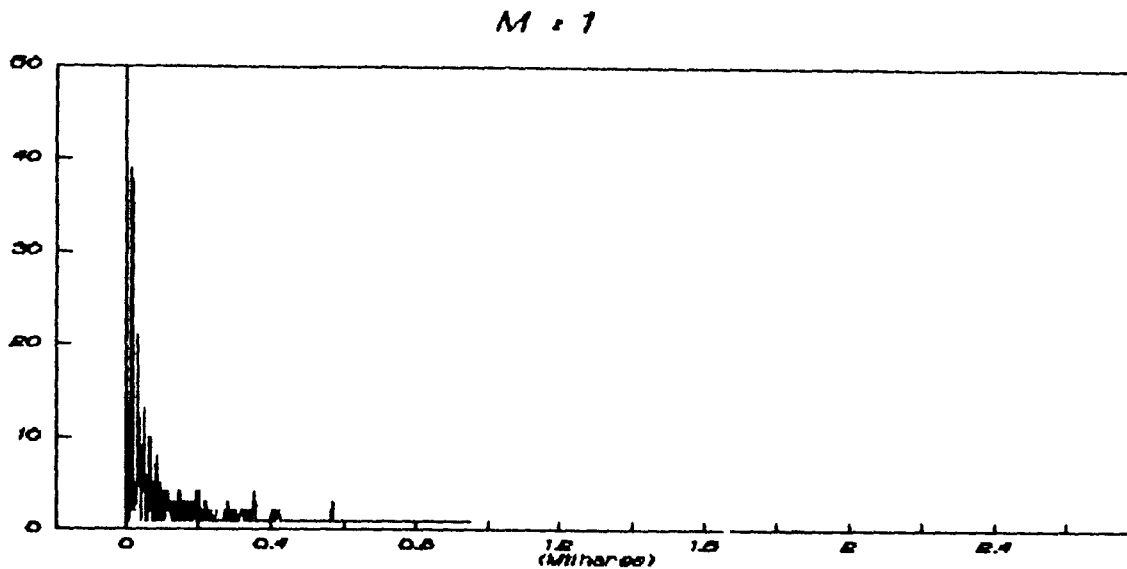


FIGURA 3.2 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_1$

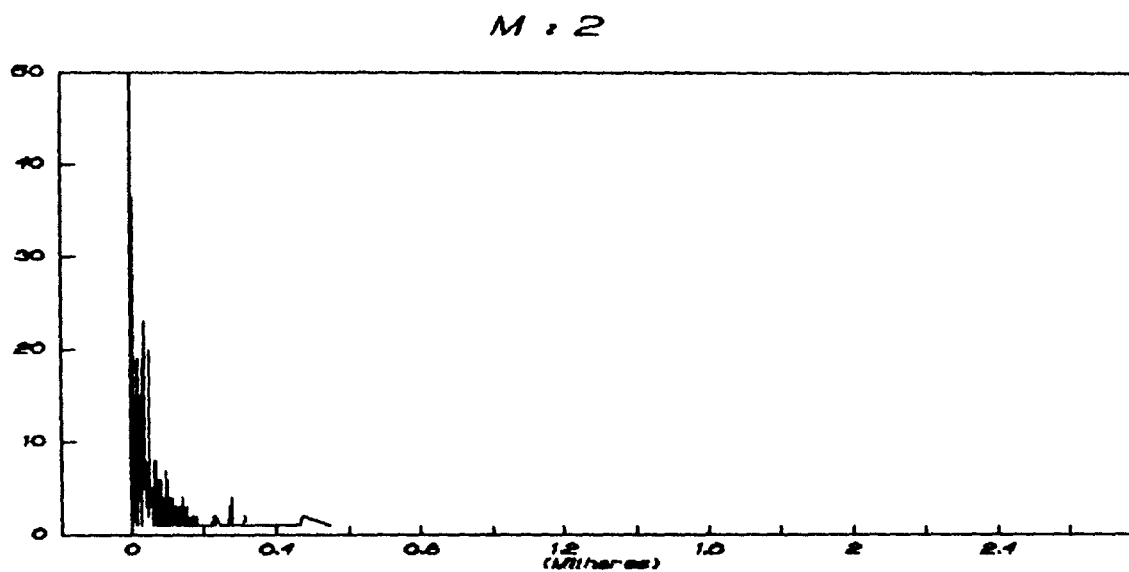


FIGURA 3.3 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_2$

M = 3

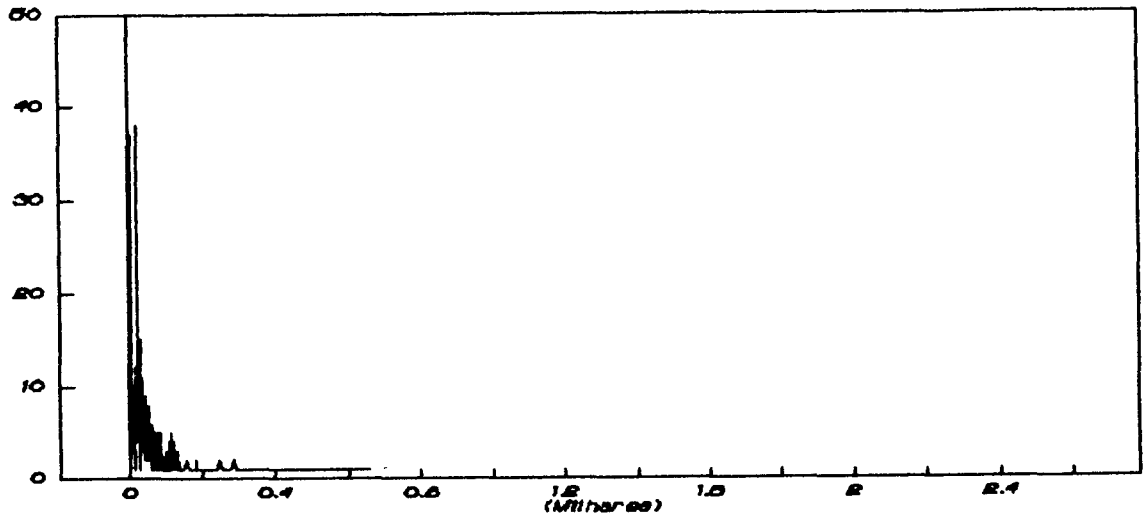


FIGURA 3.4 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_2$

M = 4

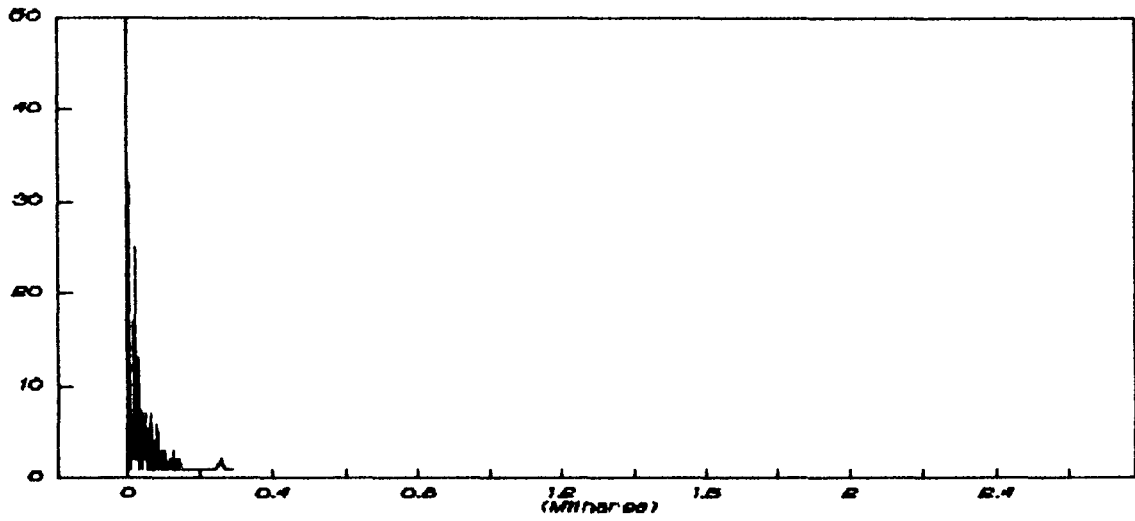


FIGURA 3.5 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_4$

M : 5

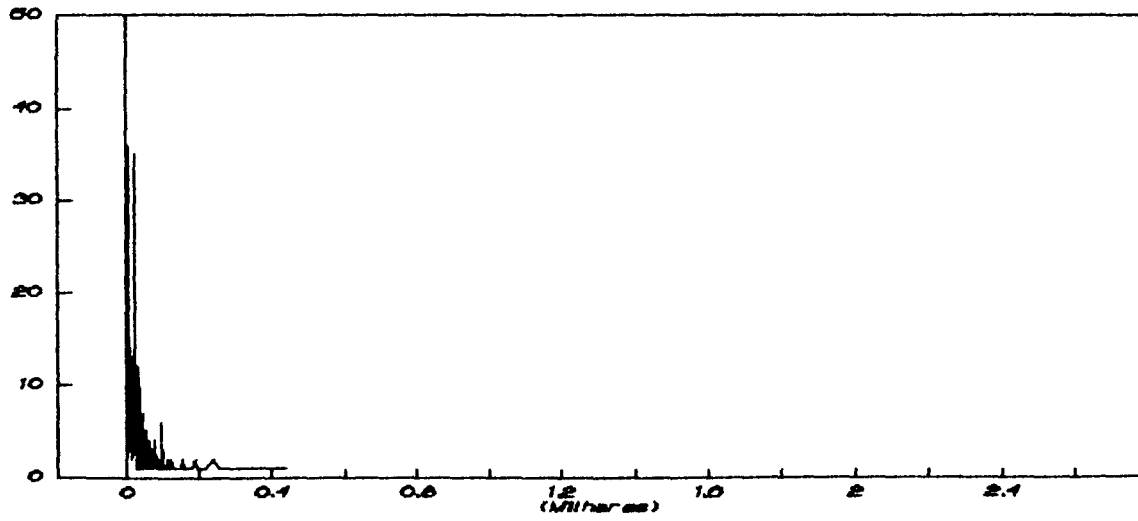


FIGURA 3.6 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_5$

M : 6

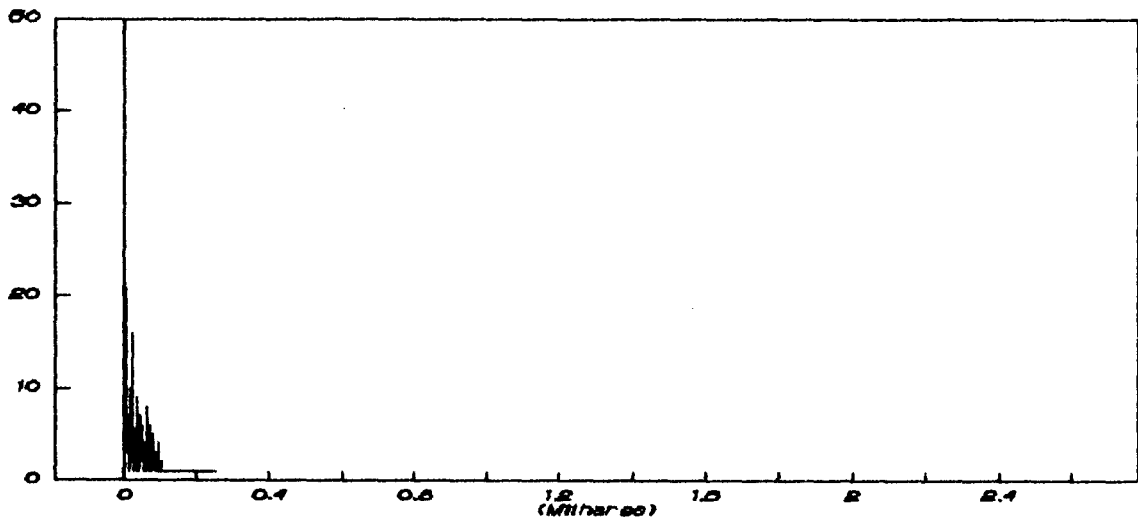


FIGURA 3.7 : HISTOGRAMA PARA T_2 DO ESQUEMA $h\nu_6$

Outras possibilidades de se conseguir um tempo de detecção reduzido, já estão sendo estudadas, como por exemplo controlar o processo variando o tamanho da amostra; mantendo, é claro, limites de alerta em questão.

APENDICE A

1. Programa elaborado em Pascal, para ser rodado em Turbo
Compatibilidade : PC, AT ou compatível.

Programa para determinar k^2 , e $m = 2$

```
Program Var2;
```

```
Uses crt;
```

```
Var sum,x,y,x1,x2,x3,zv,zn,k,u1,u2 : real;  
    soma,soma2,v,dp : real;  
    n,i : integer;  
    t : boolean;
```

```
Const E = 11.16;
```

```
Procedure Escrita;
```

```
begin  
    soma := soma + k;  
    soma2 := soma2 + k*k;  
    n := n+1;  
end;
```

```
Procedure Gerador;
```

```
begin  
    zv := zn;  
    u1 := random;  
    u2 := random;  
    x1 := sqrt ( -2*ln(u1) );  
    x2 := cos ( 2*π*u2 );  
    y := x1*x2;  
    zn := y*y;  
    sum := zv+zn;  
    k := k+1;  
end;
```

```
Procedure Inicial;
```

```
begin  
    randomize;  
    k := 1;  
    sum := 0;  
    u1 := random;  
    x1 := sqrt ( -2*ln(u1) );  
    x2 := sin ( 2*π*u2 );  
    x3 := cos ( 2*π*u2 );  
    x := x1*x2;  
    y := x1*x3;
```

```
zv := x*x;
zn := y*y;
sum := zv + zn;
```

1. Programa - cont.

```
end;

begin
  n := 0;
  soma := 0;
  soma2 := 0;
  t := true;
  clrscr;
  Inicial;
  While ( t = true ) do
    begin
      if n > 1000 then t := false
      else
        begin
          if sum > E then
            begin
              Escrita;
              Inicial;
            end
          else
            begin
              sum := sum-zv;
              gerador;
            end;
          end;
        end;
      v := (soma2-(n*(sqr(soma/n))))/(n-1);
      dp := sqrt(v/n);
      clrscr;
      gotoxy(18,9);
      writeln(' " RESULTADOS " ');
      gotoxy(20,13);
      writeln(' Media : ', soma/n);
      gotoxy(20,15);
      writeln(' Desvio Medio : ', dp);
      writeln;
      readln;
    end.
end.
```


2. Seja $X \sim N(0, 1)$ e

N = Número de observações até a ocorrência de um ponto fora dos limites de controle.

Então $N \approx G(q)$, onde

$$q = P [X > LSC \cup X < LIC] =$$

$$= P [X > LSC] + P [X < LIC].$$

Como $LSC = 3$ e $LIC = -3$, temos que $q = 0.0027$

Sabemos que $E [N] = \frac{1}{q}$

Portanto $E [N] = 370,37$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Duncan, A. J. (1956) *The Economic Design of \bar{X} Chart use to maintain current control of process* - Journal of Quality Technology 51, pg 228 - 242
2. Hunter, J. S. (1986) *The Exponentially Weight moving average* Journal of Quality Technology 4, pg 203 - 210
3. Shewhart, W. A. (1931) *Economic Control Quality of manufacturing product* - New York : Van Nostrand.
4. Reynolds, M. R.; Arnold, J. C.; Amin, R. W. & Nachlas, J. A. (1988) *\bar{X} Charts with variable sampling intervals* - Technometrics, vol 30, no 02, pag 181 - 192.