VIVIANNE TASSO PERUGINI DE OLIVEIRA

GEOMETRIA DO TÁXI: PELAS RUAS DE UMA CIDADE APRENDE-SE UMA GEOMETRIA DIFERENTE

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

VIVIANNE TASSO PERUGINI DE OLIVEIRA

GEOMETRIA DO TÁXI: PELAS RUAS DE UMA CIDADE APRENDE-SE UMA GEOMETRIA DIFERENTE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Profª. Dra. Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Vivianne Tasso Perugini de Oliveira e orientada pela Profª. Dra. Claudina Izepe Rodrigues.

Assinatura da Orientadora

Claudina Izepe Rodrigues

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

OL4g

Oliveira, Vivianne Tasso Perugini de, 1975-
Geometria do táxi : pelas ruas de uma cidade aprende-se uma geometria diferente / Vivianne Tasso Perugini de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria. 2. Geometria não-euclidiana. I. Rodrigues, Claudina Izepe. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Taxicab geometry : learning a different geometry through the streets of a city
Palavras-chave em inglês:
Geometry
Non-euclidean geometry
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]
Sergio Antonio Tozoni
Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Data de defesa: 25-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 25 de junho de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof.(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof.(a). Dr(a). PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI

Abstract

In this paper we present the study of the Taxicab Geometry, a non-Euclidean Geometry of easy understanding and very close to people's daily lives, as it has a wide range of applications in situations related to urban geography. The Taxicab Geometry is a geometry very similar to Euclidian Geometry, differing only by the definition of distance. While in Euclidean Geometry the distance between two points is the length of the line that unites them, which can be obtained with the help of the Pythagorean Theorem, in the Taxicab Geometry the distance between two points is the length of the shortest path travelled by horizontal and vertical lines from one point to another. This small detail, from the mathematical point of view, presents major differences, particularly in the geometric figures that are related to distance. We cover this aspect in the form of examples and present in the end of the work a suggestion of pedagogical activities to be used in class.

Key-words: geometry, non-euclidean, distance.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o estudo sobre a Geometria do Táxi, uma Geometria não-Euclidiana de fácil compreensão e muito próxima do cotidiano das pessoas, uma vez que tem uma ampla gama de aplicações em situações relacionadas à geografia urbana. A Geometria do Táxi é uma geometria muito semelhante à Geometria Euclidiana, diferindo desta apenas pela definição de distância. Enquanto que, na Geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une, podendo ser obtida com o auxílio do Teorema de Pitágoras, na Geometria do Táxi, a distância entre dois pontos é o comprimento do menor caminho percorrido por linhas horizontais e verticais de um ponto a outro. Esse pequeno detalhe sob o ponto de vista matemático, apresenta grandes diferenças, principalmente nas figuras geométricas que estão relacionadas à distância. Abordamos esse aspecto sob a forma de exemplos e apresentamos no final do trabalho uma sugestão de atividades pedagógicas para serem trabalhadas em sala de aula.

Palavras-chave: geometria, não-euclidiana, distância.

Sumário

Ao meu esposo Tito, por ser meu grande amor e meu porto seguro.
Aos meus filhos, Bruno e Daniel, para que se sintam motivados a sempre buscarem a realização de seus sonhos, tendo esta minha conquista como um exemplo de que com esforço e dedicação é possível alcançar tudo que almejamos.
Aos meus queridos pais Alceu Rubens Perugini (in memorian) e Maria de Lourdes Tasso Perugini (in memorian), pois devo a eles tudo o que sou.

Agradecimentos

À Deus, Senhor da minha vida, por estar ao meu lado em todos os momentos, de alegrias ou de preocupações. Senhor, meu Pai, muito obrigada.

À toda minha família, pelo grande amor, carinho e paciência que demonstraram. Em especial, meu esposo Tito, pois foi seu grande apoio e incentivo que me deram forças para conquistar esse meu sonho.

À todos os professores, pela dedicação e ensinamentos transmitidos durante todo o curso.

À professora Claudina, que me orientou e acompanhou todas as etapas dessa dissertação com muita dedicação, sempre me ensinando e incentivando. Sou muito grata.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tive durante o curso, podendo assim me dedicar aos estudos.

Ao meu irmão Matheus e à minha cunhada Ana Elisa, pelo empenho que tiveram em me ajudar com as traduções do material de pesquisa dessa dissertação.

Ao meu primo Claude Thiago, pela grande ajuda que me proporcionou com o Latex, pois foi graças às suas orientações e dicas que consegui escrever nesta linguagem tão diferente e até então desconhecida.

Aos amigos e colegas que conquistei ao longo dessa caminhada, muito obrigada pela amizade e incentivo constante. Os momentos que passamos juntos serão guardados para sempre.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli

Introdução

O propósito deste trabalho é o de contribuir com a divulgação de uma geometria diferente e interessante, que pode vir a despertar a curiosidade dos alunos e assim, ajudar no ensino da matemática trazendo incentivo e motivação.

A geometria que estamos nos referindo é a Geometria do Táxi, uma Geometria não-Euclidiana que se baseia em um modelo axiomático muito semelhante ao modelo da Geometria Euclidiana, diferindo apenas pela definição de distância e por um dos axiomas que não é válido, o axioma "lado-ângulo-lado".

Atualmente, o objeto de estudo deste trabalho, a Geometria do Táxi, não está incluída no plano curricular do ensino da matemática, tanto do ensino fundamental como do ensino médio, porém existem boas razões pedagógicas para que esse conteúdo possa ser ensinado aos alunos por meio de atividades complementares. Um dos motivos é que o ensino de uma Geometria não-Euclidiana, simples e de fácil compreensão, pode vir a contribuir no aprendizado da própria Geometria Euclidiana, assim como, por exemplo, o ensino de Sistemas de Numeração em outras bases, base-dois, base-doze, pode melhorar o domínio e o entendimento sobre o Sistema de Numeração da base-dez, o Sistema de Numeração Decimal. Não existe apenas uma Geometria não-Euclidiana, portanto a escolha da geometria ideal para ser ensinada deve atender a três condições: estar próxima da Geometria Euclidiana em sua estrutura axiomática, ser de fácil entendimento, bastando uma iniciação na Geometria Euclidiana e ter aplicação no dia-a-dia das pessoas. Felizmente, a Geometria do Táxi satisfaz as três condições, pois como já foi mensionado, difere da estrutura axiomática da Geometria Euclidiana apenas por um axioma, é uma geometria fácil de entender cujo único pré-requisito é alguma noção da Geometria Euclidiana e o conhecimento do plano de coordenadas e possui uma ampla gama de aplicações na geografia urbana.

O contato com a Geometria do Táxi pode ajudar o aluno a se familiarizar cada vez mais com o plano cartesiano contribuindo, assim, para um maior entendimento na geometria analítica, possibilitando um ambiente favorável para que o mesmo faça associações entre o geométrico e o algébrico. Portanto, essa geometria é uma boa escolha de Geometria não-Euclidiana para ser ensinada aos alunos do ensino fundamental e médio. Esse trabalho, através de um estudo bibliográfico de autores experientes no assunto busca mostrar um pouco dessa interessante geometria.

O primeiro capítulo deste trabalho descreve um pouco sobre a história da evolução e organização da Geometria, onde através do matemático grego Euclides e sua grande obra "Elementos", a primeira geometria estudada e conhecida por todos é a Geometria Euclidiana. Abordamos também sobre o método axiomático, destacando os axiomas e postulados utilizados por Euclides em sua obra. Sobre o nascimento de outras Geometrias, relatamos a cerca da polêmica que se formou em cima do quinto postulado da obra de Euclides, pois sua formulação era notavelmente mais complexa que a dos outros, levando-se a pensar em não se tratar de um postulado e sim de um teorema. As diversas tentativas de demonstração do referido postulado acabou por abrir as portas para o surgimento de outras geometrias, as Geometrias não-Euclidianas. Enfim, comentamos sobre a criação da Geometria do Táxi, uma Geometria não-Euclidiana, a qual é o principal assunto deste trabalho.

No segundo capítulo apresentamos a Geometria Euclidiana, fazendo uma abordagem axiomática da mesma, de modo que esta nos ajudará, posteriormente, ao apresentarmos a Geometria do Táxi. No final deste capítulo comentamos que substituindo o Axioma das Paralelas por um outro semelhante, teremos a definição da Geometria Hiperbólica, um outro modelo de Geometria não-Euclidiana, desse modo descrevemos o referido axioma nas duas versões, Euclidiana e Hiperbólica.

No terceiro capítulo, descrevemos o Plano Coordenado como um modelo da Geometria Euclidiana, definindo seus elementos, ponto, reta e plano, e as funções distância e angular. Fazemos também uma breve verificação de que esse modelo satisfaz todos os axiomas da Geometria Euclidiana apresentados no Capítulo 2.

No quarto capítulo apresentamos, enfim, as definições da Geometria do Táxi, fazendo uma comparação com os elementos e propriedades da Geometria Euclidiana, mostrando as semelhanças e diferenças. Damos um destaque na definição de distância, pois esta é uma das diferenças. Depois fazemos uma verificação de que todos os axiomas da Geometria Euclidiana apresentados no Capítulo 2 são satisfeitos nessa geometria, exceto um, o axioma "lado-ângulo-lado", o qual, mostramos que não vale através de um contra-exemplo, e, aproveitando a oportunidade, mostramos que os outros casos de congruência de triângulos também não valem na Geometria do Táxi.

Como a definição de distância na Geometria do Táxi é diferente da distância da Geometria Euclidiana, algumas figuras geométricas conhecidas da Geometria Euclidiana que estão relacionadas à distância são modificadas na Geometria do Táxi, assim, no Capítulo 5, nos propomos a mostrar através de exemplos algumas dessas figuras, descrevendo como realizar suas construções, tanto no geométrico como no algébrico, possibilitando que o aluno faça associações entre as duas construções.

No Capítulo 6, finalizando o estudo, sugerimos uma sequência de atividades pedagógicas para serem trabalhadas em sala de aula, descrevendo os objetivos gerais e específicos, público alvo, material de apoio e descrição das atividades, buscando dar um incentivo para o professor ao iniciar o ensino da Geometria do Táxi. Incluimos também no apêndice uma questão da 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP 2013, envolvendo o tema Geometria do Táxi.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Por volta de 332 a.C., o conquistador Alexandre, o Grande, filho e sucessor do rei Filipe da Macedônia, expande seus domínios e funda a cidade de Alexandria, no Egito. Esta cidade, desde a sua fundação, devido em grande parte à sua localização privilegiada, num entroncamento de importantes rotas comerciais, foi concebida para ser o grande centro intelectual e cosmopolita da época. Por volta de 300 a.C. já tinha cerca de 500 mil habitantes.

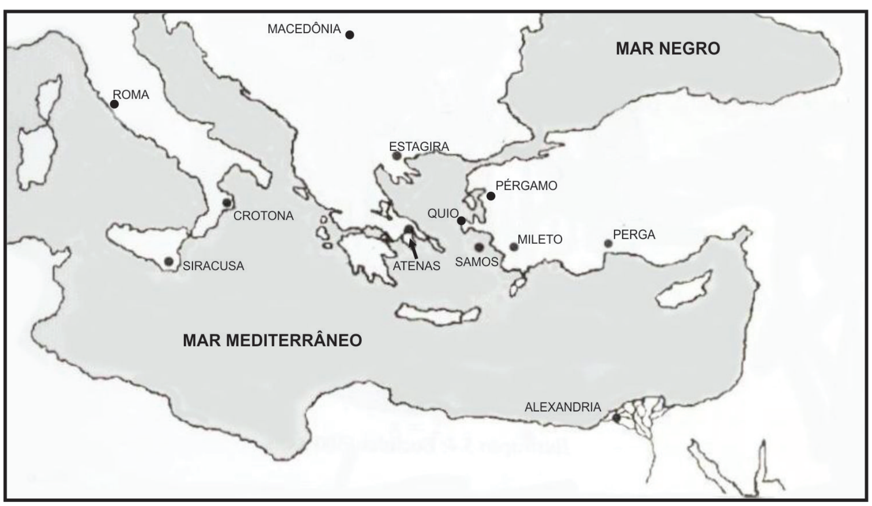


Figura 1.1: O Mediterrâneo Oriental nos tempos clássicos

A morte de Alexandre levou disputas entre os generais do exército grego. Em 323 a.C., seu império se divide formando três impérios, com governos independentes, mas unidos pelos laços da civilização helênica decorrente das conquistas de Alexandre. O Egito ficou sob o comando de Ptolomeu, governante voltado a atenção para esforços construtivos, e Alexandria foi escolhida como sua capital. Assim, para dar vida aos propósitos de Alexandria e atrair homens intelectuais à sua cidade, Ptolomeu imediatamente iniciou a construção da famosa Universidade de Alexandria, primeira obra do gênero e cuja organização, estrutura e objetivos não diferiam muito de instituições modernas de ensino superior. O grande patrimônio da instituição era a biblioteca, que por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo, donde com poucos anos de existência já contava com mais de 600 mil rolos de papiro.

Para formar uma equipe de intelectuais a qual pudessem tomar conta da Universidade, Ptolomeu teve que recorrer a Atenas, pois naquele período era onde residiam quase em sua totalidade os homens do saber. Era em Atenas que se localizava o Museu de Platão, unidade intelectual equivalente às universidades de hoje. Ali estavam os mais importantes matemáticos, filósofos e físicos então existentes. Demétrio Faleiros foi convidado para dirigir a grande biblioteca e Euclides, possivelmente também oriundo de Atenas, foi escolhido como professor de Matemática.

1.1 Euclides e os “Elementos”

Pouco se sabe sobre Euclides e sua vida, e as informações que temos vêm dos comentários de Proclus (410-485), comentador dos *Elementos* de Euclides e autor do Sumário Eudemiano. Sabe-se que Euclides viveu por volta de 300 a.C. e acredita-se que sua formação matemática tenha sido na Escola Platônica de Atenas. Proclus diz que Euclides precedeu Arquimedes (287-212 a.C.), pelo fato de Arquimedes citar os *Elementos* e também diz que Euclides é posterior a Eudoxo e Teeteto, pois incorpora os trabalhos destes nos *Elementos*. Sobre a personalidade de Euclides, Proclus cita algumas passagens curiosas como, por exemplo, a resposta dada por Euclides à indagação do rei Ptolomeu se não haveria um caminho mais curto para o conhecimento da geometria: “Não há estradas reais na geometria”, foi sua resposta.

Figura 1.2: Euclides de Alexandria

Euclides escreveu muitas obras importantes, das quais apenas cinco chegaram até nós, sendo os *Elementos* a mais conhecida, obra que reúne quase todo o conhecimento matemático da época. Não se sabe se os *Elementos* tiveram como objetivo seu uso no ensino ou apenas uma forma de organizar esse conhecimento, mas ao que consta Euclides alcançou os dois objetivos, e os *Elementos* foram usados no ensino da matemática por mais de dois milênios.

Figura 1.3: Um dos mais antigos fragmentos sobreviventes dos *Elementos* de Euclides. O diagrama acompanha o Livro II, Proposição 5.

Muitos têm o pensamento equivocado que os *Elementos* é uma obra apenas sobre Geometria, sendo que esta consta muito de Aritmética e Álgebra em vários de seus livros. O que explica em parte esse pensamento, é que na época em que Euclides escreveu os *Elementos*, a matemática grega era toda geometrizada.

Os *Elementos* é uma obra no estilo de livro de texto onde são compostos de 465 proposições distribuídas em 13 livros, onde todas estas proposições são deduzidas a partir de dez suposições iniciais. Sabe-se que houve outros *Elementos* anteriores aos de Euclides e é provável que este tenha feito uma compilação muito bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores, pois o grande sucesso dos *Elementos* de Euclides reside na ótima seleção de proposições e na organização em sequência de racicínios concatenados, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

1.2 O Método Axiomático

Tales de Mileto inaugurou na Matemática grega as demonstrações no início do século VI a.C., onde cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, essas a partir de outras precedentes, um processo esse que não teria fim. Felizmente, os gregos perceberam que para parar esse processo seria necessária a existência de proposições iniciais, admitidas como verdades, sem necessidade de provas e a partir dessas, todas as outras seriam demonstradas. Essas proposições iniciais, evidentes por si mesmas, são chamadas, indiferentemente, “postulados” ou “axiomas”. Essa é a essência do raciocínio postulacional, axiomático ou dedutivo.

O método axiomático presente nos *Elementos* de Euclides causou um impacto tão grande nas gerações seguintes que penetrou em quase todos os campos da matemática.

Muitos matemáticos gregos faziam distinção entre “postulado” e “axioma” (também chamado de noção comum). Atualmente não existe essa distinção, mas aparentemente para Euclides, um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo. Das dez suposições iniciais utilizadas nos *Elementos* por Euclides, cinco são axiomas e cinco são postulados. São eles:

Axiomas ou Noções comuns:

A1) Coisas iguais à mesma coisa são também iguais.

A2) Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais.

A3) Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais.

A4) Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

A5) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados:

P1) É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

P2) É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

P3) É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

P4) Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P5) Se uma reta intersecta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Ao ler os cinco axiomas e os cinco postulados acima é facilmente notável a diferença existente na formulação do quinto postulado em relação aos outros. Esse postulado suscitou questionamentos e muitas tentativas de demonstração, pois pensavam não se tratar de um postulado e sim de um teorema. Há também o fato de as primeiras 28 proposições, presentes nos *Elementos*, terem sido provadas apenas com os quatro primeiros postulados, mostrando que até mesmo Euclides não confiava totalmente no quinto postulado, adiando ao máximo o uso deste.

Após muitos estudos e descobertas obtidas por conta da polêmica em cima do quinto postulado, muitos matemáticos começaram a estudar a consistência dos postulados de Euclides e descobriram que haviam muitas falhas. Perceberam, então, a necessidade de reorganizar a própria Geometria

Euclidiana. Uma contribuição muito importante nesse sentido foi feita por *David Hilbert* (1862-1943), que em seu livro *Fundamentos da Geometria* apresenta um conjunto completo de axiomas lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana.

1.3 O Quinto Postulado

O quinto postulado, também conhecido como postulado das paralelas, chamou a atenção por sua extensão e complexidade dos contemporâneos de Euclides. Essa segunda denominação se deve ao matemático escocês *John Playfair* (1748-1819), de onde podemos extrair de um de seus livros uma formulação equivalente ao postulado numa linguagem moderna: *"Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada"*, ver [3].

Já na antiguidade muitos matemáticos pensavam tratar-se de um teorema e assim, tentaram por muito tempo demonstrá-lo através de raciocínios lógicos tirados dos demais postulados. A partir dessas tentativas, por não se conseguir tal demonstração e numa tentativa de utilizar a sua negação surge a possibilidade da descoberta de uma Geometria não-Euclidiana.

Entre os matemáticos que estudaram o quinto postulado, o italiano *Girolamo Saccheri* (1667-1733) deu uma importante contribuição com a publicação de um trabalho no qual apresenta a primeira tentativa de demonstração do quinto postulado pelo método de redução ao absurdo, ou seja, usando a sua negação para tentar chegar na sua veracidade. Seu trabalho foi pouco conhecido mas muitos matemáticos utilizaram os resultados apresentados e deram continuidade às idéias de Saccheri.

Em meados de 1830 suspeitava-se que o quinto postulado fosse independente dos outros quatro. O primeiro a acreditar nessa independência foi *Gauss* (1777-1855), mas manteve-se calado, pois essa descoberta o fez perceber a existência de uma geomentria diferente da euclidiana, mas igualmente lógica e precisa. Contudo, com receio do impacto que tal informação causaria, devido à Igreja adotar a Geometria Euclidiana como a única e absoluta, não publicou seu trabalho. Foi então que o matemático húngaro *János Bolyai* (1802-1860) e o russo *Nicokolai Ivanovich Lobachevsky* (1792-1856) publicaram, independentemente um do outro, trabalhos sobre uma geomentria que nega o quinto postulado, a qual ficou conhecida como Geometria não-Euclidiana.

1.4 O Nascimento de Novas Geometrias

Os questionamentos em torno do quinto postulado abriram as portas para a possibilidade da existência de um universo curioso, belo e intrigante. Surge, então, o nascimento de uma nova geometria, que ficou conhecida como Geometria não-Euclidiana, por ser diferente daquela geometria proposta por Euclides. O primeiro modelo de Gemometria não-Euclidiana que se descobriu foi a Geometria

Hiperbólica Plana, apoiada nos quatro primeiros postulados de Euclides e na negação da unicidade das paralelas.

Contudo, mesmo após as publicações dos trabalhos de Bolyai e de Lobachewski, ainda haviam questionamentos: como garantir a consistência dessa nova geometria? E se existir alguma contradição? Perguntas como essas levaram os matemáticos a perceberem que a própria Geometria Euclidiana era incompleta e apresentava falhas. Havia a necessidade de validar a Geometria não-Euclidiana, foi então que *Eugênio Beltrami* (1835-1900) apresentou um modelo para essa geometria que permitia interpretar os fatos através da própria Geometria Euclidiana. Depois disso, outros modelos foram contruídos, também apoiados na Geometria Euclidiana, como a *Geometria da Esfera*, do matemático alemão *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866), o de *Henri Poincaré* (1854-1912), conhecido como o *Disco de Poincaré* e entre outros modelos, a *Geometria do Táxi* de *Hermann Minkowski* (1864-1909).

A criação desses modelos, além de dar credibilidade a essa nova geometria, também colocou um ponto final na batalha pela prova do quinto postulado de Euclides.

1.5 Da Criação da Geometria do Táxi

A Geometria do Táxi é um modelo de Geometria não-Euclidiana a qual baseia-se em um modelo axiomático muito próximo do modelo da Geometria Euclidiana, onde apenas o axioma de congruência lado-ângulo-lado não vale. O responsável pelo seu surgimento, no século XIX, foi o matemático alemão *Hermann Minkowski* (1864-1909), amigo de *David Hilbert* e um dos professores de *Albert Einstein*. Essa geometria é designada por Taxicab Geometry desde 1952, onde o termo foi usado pela primeira vez em um pequeno livreto distribuído num evento no Museu da Ciência e Indústria de Chicago.

Capítulo 2

Noção da Geometria Euclidiana

Antes de apresentarmos as definições da Geometria não-Euclidiana que estamos interessados neste trabalho, faz-se necessário termos uma noção da Geometria Euclidiana. Aqui, para tanto, nos restringiremos a Geometria Euclidiana Plana, com uma abordagem axiomática, pois servirá como base para a apresentação da Geometria do Táxi Plana.

Consideraremos alguns termos, chamados de primitivos ou elementares, sem precisar defini-los. São eles:

(a) ponto;

(b) reta;

O principal objeto de estudo da Geometria Euclidiana Plana é o plano, que consiste em um conjunto cujos elementos são pontos e retas, sendo estas subconjuntos de pontos do plano.

Essa geometria possui uma função de distância "d" e uma função de medida angular "m". Apresentaremos a seguir seus principais axiomas, que estão organizados em grupos.

2.1 Propriedades e Axiomas

2.1.1 Axiomas de Incidência

São eles:

1. Dois pontos distintos determinam uma única reta, à qual eles pertencem.

A reta determinada pelos pontos distintos *A* e *B* é denotada por $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 2.1: r = $\overleftrightarrow{AB}$

2. Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não percentem à reta.

2.1.2 Axiomas de Ordem

O conceito de que um ponto está entre dois outros pontos é uma relação entre pontos de uma mesma reta que satisfaz os axiomas seguintes.

3. Sejam três pontos distintos de uma reta. Um e apenas um deles está entre os outros dois pontos.

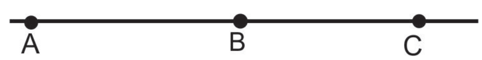


Figura 2.2: O ponto *B está* entre *A* e *C*

4. Dados dois pontos distintos *A* e *B*, sempre existem: um ponto *C* entre *A* e *B* e um ponto *D* tal que *B* está entre *A* e *D*.

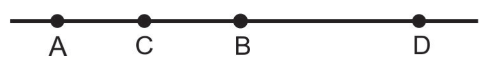


Figura 2.3: O ponto *C está entre A* e *B*, e o ponto *B está entre A* e *D*

Comentário. Pelo axioma anterior, entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos.

Para o próximo axioma apresentamos as seguintes definições:

Definição de Segmento. O conjunto constituído por dois pontos*A* e *B* e por todos os pontos que estão entre *A* e *B* é chamado Segmento e é denotado por $\overline{AB}$. Os pontos *A* e *B* são denominados extremos ou extremidades do segmento $\overline{AB}$.

Definição de Subconjunto convexo. Um subconjunto do plano é convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido.

5. Uma reta *r* separa o plano em dois outros subconjuntos α_1 e α_2 de pontos tais que:

(a) O conjunto intersecção $\alpha_1 \cap \alpha_2$ é vazio;

(b) Os subconjuntos α_1 e α_2 são convexos;

(c) Se um ponto *A* está em α_1 e um ponto *B* está em α_2, então a intersecção de $\overline{AB}$ com a reta *r* é não-vazia.

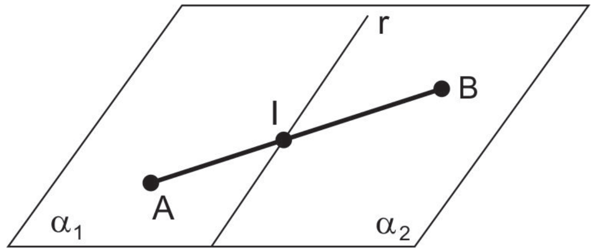


Figura 2.4: $\overline{AB} \cap r = \{I\}$

2.1.3 Axiomas de Medição de Segmentos

6. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior do que ou igual a zero. Este número é zero se os pontos são coincidentes. O número associado a um par de pontos é chamado de *distância* entre dois pontos e também dizemos que é o comprimento do segmento determinado pelos dois pontos. Como notação usaremos $d(A,B)$ como a distância entre *A* e *B*.

Figura 2.5: Indicamos $d(A,B) = d$

Distância é uma das noções mais básicas da geometria e satisfaz algumas propriedades, tais como: se $A = B$, temos $d(A,B) = 0$, logo *d* assume sempre um número real maior do que ou igual a zero. Temos também que *d* é simétrica, ou seja, $d(A,B) = d(B,A) = d$.

E ainda, satisfaz a propriedade da *desigualdade triangular*:

Dados três pontos distintos *A*, *B* e *C* do plano, tem-se $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$, ocorrendo a igualdade se e somente se o ponto *B* pertencer ao segmento $\overline{AC}$.

7. Dada qualquer reta *r*, existe uma função biunívoca entre os pontos dessa reta e os números reais, tal que o valor absoluto da diferença entre esses números (denominados *coordenadas* dos pontos) seja a distância entre os pontos correspondentes da reta.

Esse axioma é conhecido como “axioma da régua infinita”.

Então temos: $f : r \to R$ (onde *R* é o conjunto dos números reais), tal que

$$|f(A) - f(B)| = d(A,B).$$

8. Se o ponto *C* está entre os pontos *A* e *B*, então $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$.

2.1.4 Axiomas de Medição de Ângulos

Para os próximos axiomas apresentamos as seguintes definições:

Definição de Semirreta. Se *A* e *B* são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento $\overline{AB}$ e por todos os pontos *C* tais que *B* encontra-se entre *A* e *C*, é chamado de semirreta de origem *A* contendo o ponto *B*, e denotado $\overrightarrow{AB}$. O ponto *A* é chamado origem da semirreta.

Sejam $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ semirretas de mesma origem. Se o segmento $\overline{AB}$ intersecta $\overrightarrow{OC}$ diremos que $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$.

Definição de Semiplano. Sejam *s* uma reta e *P* um ponto que não pertence a *s*. O conjunto formado pelos pontos de *s* e por todos os pontos *Q* tais que *P* e *Q* estão em um mesmo lado da reta *s* é chamado de semiplano determinado por *s* contendo *P*.

Diremos que uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Na figura abaixo, temos um ângulo de vértice *O* formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que são chamadas os *lados* do ângulo.

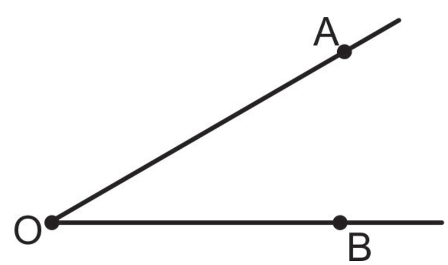


Figura 2.6: Indica-se: $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ ou simplesmente $\hat{O}$ (quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice)

9. Todo ângulo tem uma medida maior do que ou igual a zero. Essa medida representaremos pela letra "*m*". A medida do ângulo é zero somente quando ele é formado por duas semirretas coincidentes. Denotaremos a medida do ângulo $A\hat{O}B$ por $m(A\hat{O}B)$.

10. Existe uma bijeção entre as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano e os números reais entre zero e 180, tal que o valor absoluto da diferença entre os números (denominados *coordenada* das semirretas) é a medida do ângulo formado pelas semirretas.

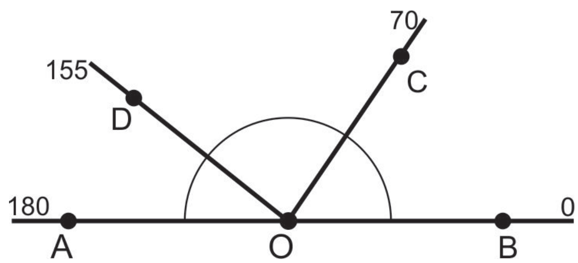


Figura 2.7: $m(C\hat{O}D) = |155 - 70| = 85$ e $m(A\hat{O}D) = |180 - 155| = 25$

11. Se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $A\hat{O}B$, então $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}B)$.

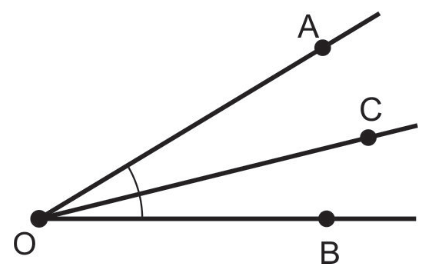


Figura 2.8: $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}B)$

12. Se *A*, *B* e *C* são pontos colineares, isto é, pontos de uma mesma reta, com *B* entre *A* e *C* e se $D \notin \overleftrightarrow{AC}$, então $m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = 180$ (Ângulos Suplementares). Ou seja, o suplemento de um dado ângulo é o ângulo adjacente ao próprio ângulo obtido prolongando-se um de seus lados.

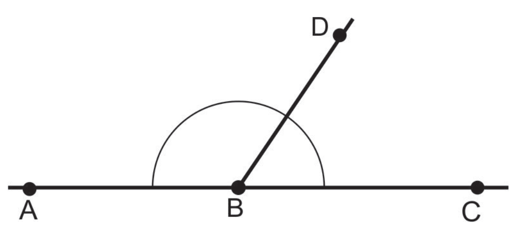


Figura 2.9: $m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = 180$

2.1.5 Axioma de Congruência

13. Se dois triângulos têm dois lados e o ângulo por eles determinado congruentes aos seus correspondentes, então eles são congruentes.

Esse axioma corresponde ao primeiro caso de congruência de triângulos, conhecido como Lado-Ângulo-Lado (LAL). A compreensão desse axioma requer o conhecimento de congruência de segmentos, congruência de ângulos e correspondência biunívoca de lados e vértices entre dois triângulos.

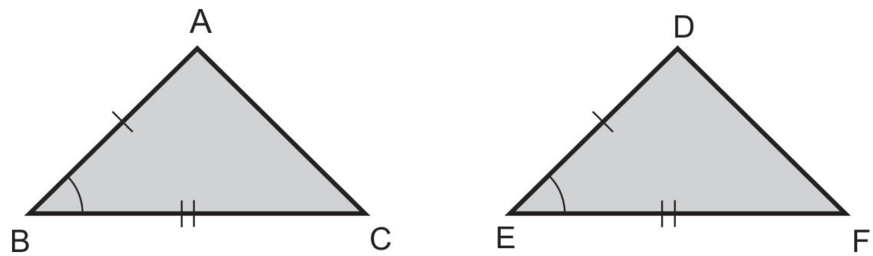


Figura 2.10: $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\hat{B} = \hat{E}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Antes de apresentarmos o próximo axioma é importante ressaltar que com esse sistema de axiomas 1-13 apresentados até aqui, podemos definir uma geometria absoluta e com o acréscimo do último, o Axioma 14, teremos concluído a definição da Geometria Euclidiana Plana Axiomática. Mas se trocarmos esse axioma por um que consiste na negação da unicidade das paralelas, teremos a definição da Geometria Hiperbólica que satisfaz os Axiomas 1-13 e 14' apresentado a seguir. Já a Geometria do Táxi satisfaz os Axiomas 1-12 e 14, mas não satisfaz o Axioma 13, como mostraremos nos próximos capítulos.

2.1.6 Axioma das Paralelas Euclidiana

14. Dada uma reta *r* e um ponto *P* fora dela, pode-se traçar uma única reta passando por *P* e paralela a reta *r*.

Esse axioma é o tão conhecido 5^o postulado dos *Elementos* de Euclides. Existem para ele muitas formulações, das quais a que estamos usando aqui utiliza uma linguagem mais moderna e é devido a *John Playfair* (1748-1819).

Com esses 14 axiomas concluímos a definição da Geometria Euclidiana plana axiomática.

2.1.7 Axioma das Paralelas Hiperbólica

14'. Dada uma reta *r* e um ponto *P* fora dela, pode-se traçar pelo menos duas retas distintas passando por *P* e paralelas a reta *r*.

Capítulo 3

O Plano Coordenado Como um Modelo da Geometria Euclidiana

Seja R o conjunto dos números reais. Considere o conjunto $R \times R = R^2$ de todos os pares ordenados de números reais, ou seja,

$$R^2 = \{(x, y); x, y \in R\}$$

.

Os pontos são os pares ordenados (x, y) de números reais e as retas são conjuntos soluções de equações na forma $ax + by + c = 0$, com $a^2 + b^2 \neq 0$ (isto é, *a* e *b* não simultaneamente iguais a zero).

3.1 Representação Geométrica do Plano Coordenado

Representamos geometricamente este conjunto por meio de um sistema que consiste em dois eixos perpendiculares os quais se intersectam no ponto *O* (origem), ficando designados como eixo das *abscissas* ou *OX* (eixo horizontal) e eixo das *ordenadas* ou *OY* (eixo vertical). Denotamos esse sistema como *sistema OXY*.

Utilizando esse sistema de coordenadas estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pares ordenados de números reais do conjunto R^2 e os pontos do plano coordenado.

Sejam $x, y \in R$ as coordenadas de um ponto *P* do plano π relativo ao sistema *OXY*, onde *x* é a *abscissa* e *y* é a *ordenada*. Portanto, $(x, y) \in R^2$ é o par ordenado que corresponde ao ponto *P*.

A origem do sistema de coordenadas, que designamos pelo ponto *O*, tem como par ordenado o

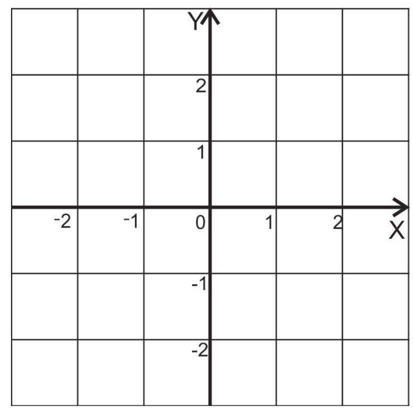


Figura 3.1: Sistema de coordenadas *OXY*

$(0,0) \in R^2$, ou seja, abscissa e ordenada ambas iguais a zero.

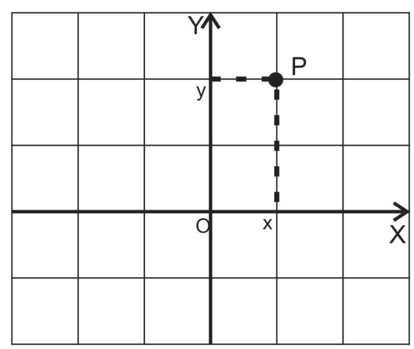


Figura 3.2: $P = (x, y)$

3.2 Função Distância Euclidiana

Dados dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, definimos a função distância euclidiana *d* como,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

que é inspirada pelo Teorema de Pitágoras.

Comentário. Pensando geometricamente, se considerarmos um terceiro ponto $R = (x_2, y_1)$, temos *PRQ* um triângulo retângulo, onde $d(P, Q)$ é a medida da hipotenusa, $d(P, R)$ e $d(R, Q)$ são as medidas dos catetos. Então, sendo $d(P, R) = |x_1 - x_2|$ e $d(R, Q) = |y_1 - y_2|$, e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos a função distância como segue:

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 \\ d(P,Q)^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ d(P,Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

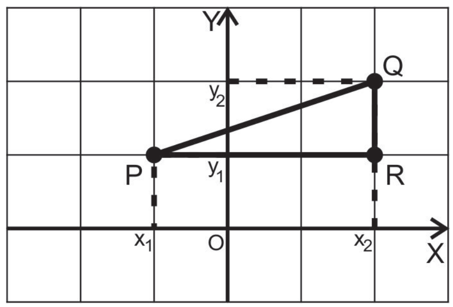


Figura 3.3: $d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

3.3 Função Angular

A definição da função angular "*m*", por envolver conteúdos de álgebra linear e cálculo não tão simples, foge aos nossos propósitos aqui escrevê-la, portanto diremos apenas de um modo intuitivo, que os ângulos são medidos em graus com o auxílio de um transferidor.

3.4 Verificação dos Axiomas Para o Plano Coordenado

Cabe agora fazermos a verificação de que esse modelo de geometria satisfaz todos os 14 axiomas da Geometria Euclidiana apresentados no Capítulo 2. Essa é uma verificação bem extensa, portanto apresentaremos aqui apenas uma pequena mostra para podermos enfim nos dedicarmos ao nosso propósito, que é descrever a Geometria do Táxi.

Para o Axioma de Incidência 1, onde por dois pontos distintos passa uma única reta, sejam os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ distintos, considere

$$a = y_2 - y_1,$$

$$b = x_1 - x_2,$$

e

$$c = (x_2 - x_1)y_1 - (y_2 - y_1)x_1.$$

Logo os pontos *P* e *Q* pertencem à reta definida pelo conjunto solução da equação $ax + by + c = 0$, onde fazendo as substituições temos,

$$\underbrace{(y_2 - y_1)}_{a}x + \underbrace{(x_1 - x_2)}_{b}y + \underbrace{(x_2 - x_1)y_1 - (y_2 - y_1)x_1}_{c} = 0.$$

O conjunto solução da equação $ax + by + c = 0$ é igual ao conjunto solução de $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$, ou seja, as equações $ax + by + c = 0$ e $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$ são equivalentes (se $b \neq 0$). Assim,

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right).$$

Sejam

$$-\frac{a}{b} = k_1 \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} = k_2.$$

Podemos escrever

$$y = k_1x + k_2.$$

Para mostrar a unicidade, vamos supor dois conjuntos soluções iguais $S_1 = S_2$, que definem duas retas onde

$$y = k_1x + k_2 \in S_1 \quad \text{e} \quad y = k_1'x + k_2' \in S_2.$$

Assim, se $x = 0$ temos $y = k_2$. Então $(0, k_2) \in S_1$, pois

$$k_2 = k_1 0 + k_2.$$

Como $S_1 = S_2$, temos $(0, k_2) \in S_2$, portanto

$$k_2 = k_1' 0 + k_2'$$

e logo

$$k_2 = k_2'.$$

Fazendo agora $x = 1$, temos $y = k_1 + k_2$. Então $(1, k_1 + k_2) \in S_1$, pois

$$k_1 + k_2 = k_1 1 + k_2.$$

Novamente, temos $(1, k_1 + k_2) \in S_2$ e assim

$$k_1 + k_2 = k_1'1 + k_2'.$$

Como $k_2 = k_2'$, podemos escrever

$$k_1 + k_2 = k_1'1 + k_2.$$

Então

$$k_1 = k_1'$$

Portanto, concluímos que a reta é única.

Essa foi a verificação do Axioma 1 e assim vamos aqui, sem mostrar um a um, assumir que esse modelo de geometria satisfaz os 14 axiomas apresentados para a Geometria Euclidiana Plana.

Capítulo 4

A Geometria do Táxi - a Métrica do Taxista

A Geometria do Táxi é uma Geometria não-Euclidiana muito próxima da geometria apresentada no Capítulo 2, ou seja, que apresenta muitas propriedades semelhantes. É de fácil compreensão e possibilita inúmeras aplicabilidades na vida cotidiana, mostrando o porquê de ser interessante para o aprendizado do aluno.

Para a Geometria do Táxi o plano, os pontos, as retas e a medida angular "*m*" são os mesmos definidos no Capítulo 3 que apresenta o plano coordenado como um modelo da Geometria Euclidiana Plana, apenas a função distância *d* é diferente. Por conta disso, a partir de agora iremos nos referir a d_e como distância euclidiana e d_t como distância táxi ou táxi-distância.

Essa geometria no plano utiliza também um sistema de coordenadas cartesianas com dois eixos ortogonais (horizontal e vertical), onde a distância táxi obedece o traçado das linhas para percorrer a distância de um ponto a outro, sugerindo a rota que um táxi deve tomar.

Segundo Wanderley [14] a distância táxi se aproxima mais das situações cotidianas referentes à distância entre lugares, pois seus caminhos trafegam por ruas em trechos horizontais e verticais, respeitando os limites físicos das construções e não passam por meios de quarteirões ou por cima de prédios como acontece com a distância calculada na Geometria Euclidiana.

4.1 Função Distância Táxi

A distância táxi entre os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é definida por:

$$d_t(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|,$$

onde a função módulo aparece de forma natural.

4.2 Comparação Entre as Distâncias Euclidiana e Táxi

Como exemplo, na figura a seguir, de modo a fazermos uma comparação, vamos calcular a distância entre os pontos $A = (-1, -1)$ e $B = (2, 3)$ utilizando as duas distâncias d_t e d_e. Assim, pela distância táxi, temos $d_t(A, B) = |-1-2| + |-1-3| = 7$, enquanto que na distância euclidiana obtemos $d_e(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$.

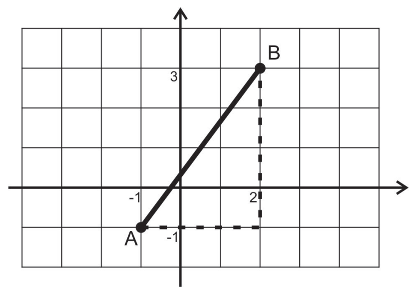


Figura 4.1: $d_t(A, B) = 7$ e $d_e(A, B) = 5$

Pelo resultado acima podemos observar que a distância entre dois pontos calculada na Geometria Euclidiana é menor que a distância calculada na Geometria do Táxi. Podemos verificar que isso sempre acontece, ou seja, que a distância euclidiana é sempre menor do que ou igual à distância táxi.

Sejam os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e consideremos a desigualdade

$$0 \leq 2|x_A - x_B||y_A - y_B|.$$

Somando $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ aos dois membros da desigualdade obtemos

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + 2|x_A - x_B||y_A - y_B|.$$

Logo,

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2.$$

Como os dois membros da desigualdade acima são maiores do que ou iguais a zero, podemos extrair a raiz quadrada dos dois membros e ainda será verdadeira. Assim

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq \sqrt{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2}$$

e portanto

$$\underbrace{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}_{d_e(A,B)} \leq \underbrace{|x_A - x_B| + |y_A - y_B|}_{d_t(A,B)}.$$

Desse modo, mostramos que a distância euclidiana entre os pontos *A* e *B* é menor do que ou igual à distância táxi, ou seja, $d_e(A,B) \leq d_t(A,B)$.

4.3 Verificação dos Axiomas Para a Geometria do Táxi

Vamos mostrar agora que todos os axiomas da Geometria Euclidiana apresentados no Capítulo 2 são verificados na Geometria do Táxi, exceto um, o axioma lado-ângulo-lado (LAL).

Os Axiomas 1 e 2, que dizem respeito aos axiomas de incidência, como definem retas e plano, são verificados diretamente, pois estes são os mesmos da Geometria Euclidiana.

Para verificar os Axiomas 3, 4 e 5, que dizem respeito aos axiomas de ordem, é necessário primeiramente definir o que "estar entre" significa nesse modelo de Geometria não-Euclidiana.

Assim, na Geometria do Táxi, *B* está entre *A* e *C* se, e somente se,
1. $d_t(A,B) + d_t(B,C) = d_t(A,C)$;
2. *A*, *B* e *C* são pontos distintos e colineares.

Para ilustrar, consideremos dois pontos $A = (2,0)$ e $C = (6,3)$ e todos os pontos *B* entre eles.

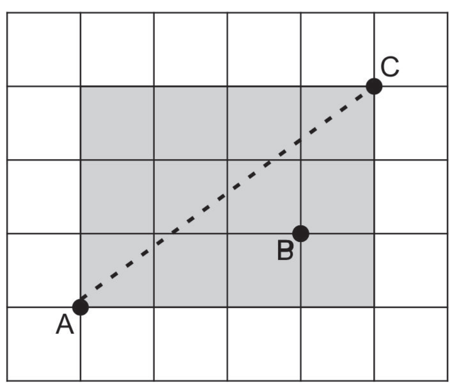


Figura 4.2

O retângulo sombreado representa todos os pontos *B* que satisfazem a condição 1, mas os pontos *B* que satisfazem a condição 2 são aqueles que se encontram na linha pontilhada excluindo as extremidades, ou seja, os pontos *A* e *C*. Portanto, o conjunto de pontos entre *A* e *C* na Geometria do Táxi é o mesmo que da Geometria Euclidiana e assim os Axiomas 3 e 4 se verificam.

A partir dessa definição temos que os segmentos da Geometria do Táxi são os mesmos da Geometria Euclidiana e portanto conjuntos convexos nessa geometria também são como os da Geometria

Euclidiana, ficando claro que o axioma da separação de plano também se verifica.

Comentário. No modelo da Geometria Euclidiana a representação geométrica do segmento unindo dois pontos coincide com a representação geométrica do único caminho mínimo entre esses pontos. Na Geometria do Táxi, dados dois pontos existem muitos caminhos mínimos ligando esses pontos, considerando que apenas podemos caminhar horizontalmente ou verticalmente, exceto quando os mesmos estiverem na mesma reta vertical ou horizontal. Logo, a representação geométrica do segmento unindo dois pontos nessa geometria nem sempre coincide com um caminho mínimo entre os pontos e sim com a representação geométrica do segmento correspondente no modelo da Geometria Euclidiana.

O Axioma 6, correspondente ao axioma de medição de segmentos, ou seja, que se refere a distância, pode ser verificado em consequência da definição da distância táxi.

A desigualdade triangular, é verificado utilizando a desigualdade para valor absoluto: $|u| + |v| \geq |u + v|, \forall u, v \in R$, como mostramos a seguir:

Considere os pontos $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$ e $C = (z_1, z_2)$.

Temos,

$$\begin{aligned}
d_t(A, B) + d_t(B, C) &= d_t((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_t((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \\
&= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\
&= (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|) \\
&\geq |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \\
&= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\
&= d_t(A, C).
\end{aligned}$$

Para o Axioma 7, o axioma da régua infinita, temos dois casos:

Caso 1. A reta *r* é vertical.

Então definimos $f(x, y) = y$, para todo $(x, y) \in r$.

Temos que $f : r \to R$ é uma correspondência biunívoca e $|f(A) - f(B)| = d_t(A, B), \forall A, B \in r$.

Caso 2. A reta *r* não é vertical e tem a equação na forma $y = mx + b$.

Podemos definir $f(x, y) = (1 + |m|)x$, para todo $(x, y) \in r$, como mostramos na ilustração 4.3.

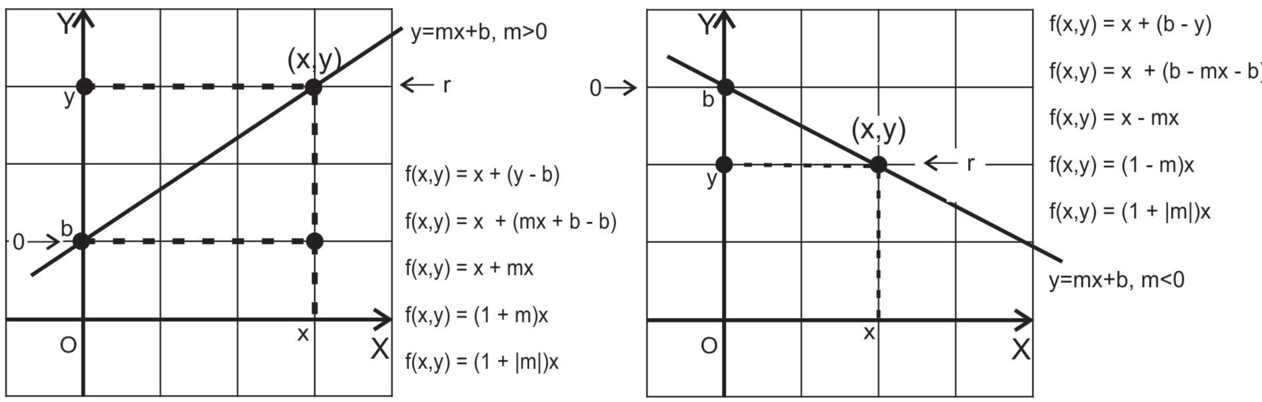


Figura 4.3: $f(x, y) = (1 + |m|)x$, para todo $(x, y) \in r$

E para verificar que vale o axioma na Geometria do Táxi, considere dois pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$.

De fato, usando a equação da reta *r*, temos:

$$a_2 = ma_1 + b \quad \text{e} \quad b_2 = mb_1 + b,$$
$$a_2 - b_2 = m(a_1 - b_1),$$
$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = m \ (a_1 \neq b_1, \text{pois a reta } r \text{ não é vertical}).$$

Queremos mostrar que vale $|f(A) - f(B)| = d_t(A, B)$. Então,

$$\begin{aligned}
|f(A) - f(B)| &= |f(a_1, a_2) - f(b_1, b_2)| \\
&= |(1 + |m|)a_1 - (1 + |m|)b_1| \\
&= |(1 + |m|)(a_1 - b_1)| \\
&= |1 + |m|||a_1 - b_1| \\
&= (1 + |m|)|a_1 - b_1| \\
&= |a_1 - b_1| + |m||a_1 - b_1| \\
&= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \\
&= d_t((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \\
&= d_t(A, B).
\end{aligned}$$

Portanto, $f : r \rightarrow R$ é uma correspondência biunívoca e $|f(A) - f(B)| = d_t(A, B), \forall A, B \in r$.

Os Axiomas de Medição de Ângulos, de 9 a 12, são satisfeitos na Geometria do Táxi já que eles são satisfeitos pelo modelo da Geometria Euclidiana como foi descrito no Capítulo 3.

O Axioma das Paralelas Euclidianas, como diz respeito a plano e retas, também é verificado na Geometria do Táxi pois vale no modelo da Geometria Euclidiana.

4.4 A Não Validade do Axioma LAL na Geometria do Táxi

Já o Axioma 13, referente ao caso de congruência lado-ângulo-lado, não vale nesse modelo da Geometria não-Euclidiana como mostraremos através de um contra-exemplo.

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 3)$ vértices do $\triangle ABC$ e $A' = (3, 2)$, $B' = (5, 2)$ e $C' = (3, 0)$ vértices do $\triangle A'B'C'$. Podemos verificar que o $\triangle ABC$ possui dois lados e um ângulo entre eles congruentes a dois lados e um ângulo entre eles correspondentes do $\triangle A'B'C'$. Mas, os triângulos não são congruentes pois seus lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ não são congruentes. Observe a figura abaixo e as distâncias táxi calculadas.

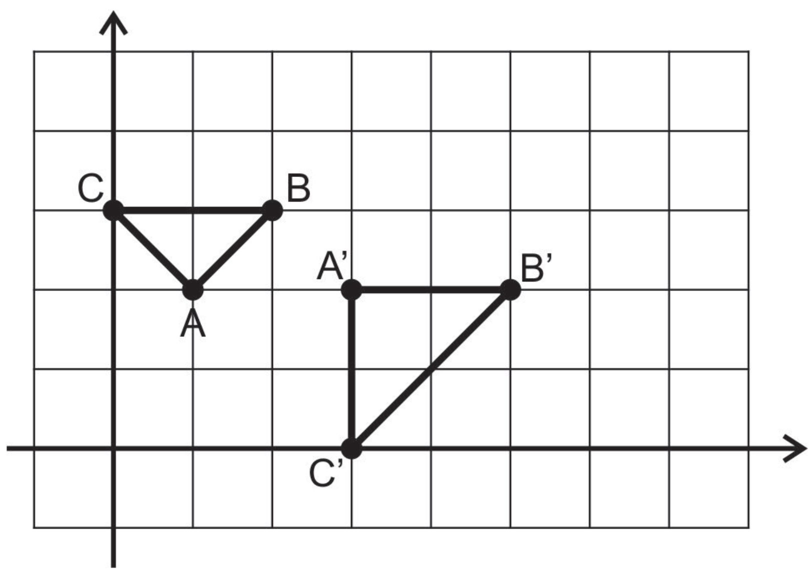


Figura 4.4: $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$

Pela distância taxi temos,

$$d_t(A, B) = d_t(A', B') = 2,$$
$$d_t(A, C) = d_t(A', C') = 2,$$
$$m(B\hat{A}C) = m(B'\hat{A}'C') = 90^o.$$

Mas, $d_t(B, C)$ = 2 e $d_t(B', C')$ = 4, portanto, $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$.

Também podemos verificar através de exemplos que os outros casos de congruência de triângulos (ALA, LLL e LAA) não valem na Geometria do Taxi. Veja a seguir.

Caso ALA: não vale. Vamos utilizar o mesmo exemplo do caso anterior. Observe a figura 4.4 acima. Temos,

$$d_t(A,B) = d_t(A',B') = 2,$$
$$m(B\hat{A}C) = m(B'\hat{A}'C') = 90^o,$$
$$m(C\hat{B}A) = m(C'\hat{B}'A') = 45^o.$$

Como no caso anterior, devido aos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ não serem congruentes, $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$.

Caso LLL: não vale. Sejam $A = (0,2)$, $B = (0,3)$ e $C = (2,3)$ vértices do $\triangle ABC$ e $A' = (3,0)$, $B' = (3,1)$ e $C' = (4,2)$ vértices do $\triangle A'B'C'$. Temos,

$$d_t(A,B) = d_t(A',B') = 1,$$
$$d_t(B,C) = d_t(B',C') = 2,$$
$$d_t(A,C) = d_t(A',C') = 3.$$

Como $m(C\hat{B}A) \neq m(C'\hat{B}'A')$, $m(B\hat{A}C) \neq m(B'\hat{A}'C')$ e $m(C\hat{A}B) \neq m(C'\hat{A}'B')$, logo $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$.

Caso LAA: não vale. Sejam $A = (1,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (4,4)$ vértices do $\triangle ABC$ e $A' = (8,0)$, $B' = (5,0)$ e $C' = (5,6)$ vértices do $\triangle A'B'C'$.

Como a função angular da Geometria do Táxi é a mesma do modelo da Geometria Euclidiana, é fácil notar que os ângulos em $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são retos. Além disso, na Geometria Euclidiana,

$$tg\hat{A} = \frac{\sqrt{(4-0)^2+(4-2)^2}}{\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2}} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

e

$$tg\hat{A}' = \frac{6}{3} = 2,$$

o que implica $m(B\hat{A}C) = m(B'\hat{A}'C')$.

E assim temos,

$$d_t(B,C) = d_t(B',C') = 6,$$
$$m(C\hat{B}A) = m(C'\hat{B}'A') = 90^o,$$
$$m(B\hat{A}C) = m(B'\hat{A}'C').$$

Mas como, $d_t(A, C) = 7$ e $d_t(A', C') = 9$, portanto, $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$.

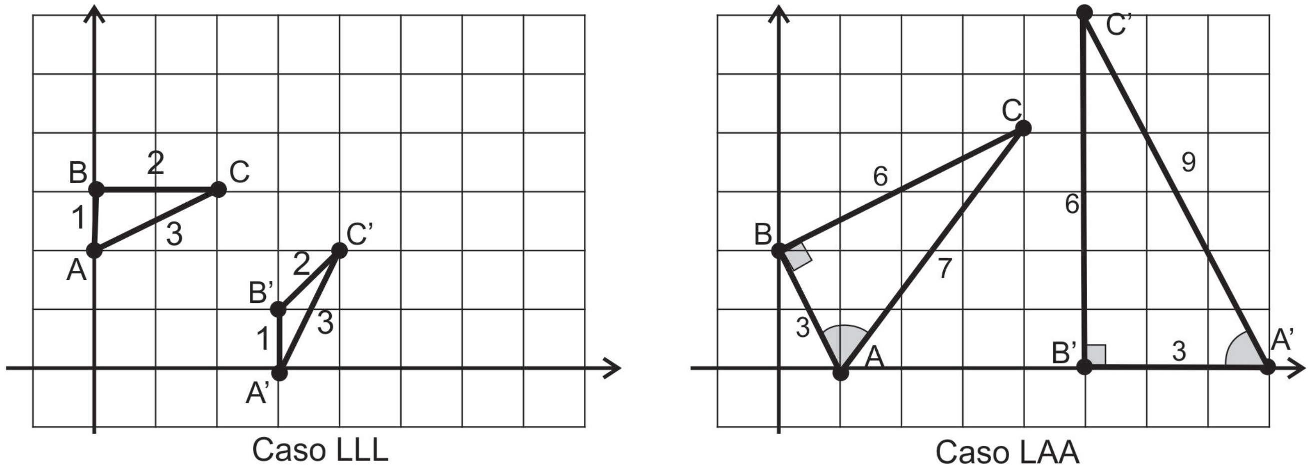


Figura 4.5: $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$, nos dois exemplos dados para os casos LLL e LAA

Capítulo 5

Algumas Figuras Geométricas na Geometria do Táxi

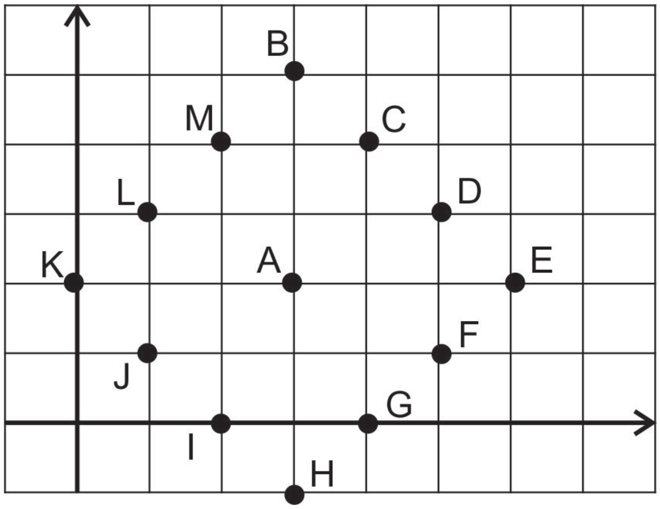
Algumas figuras geométricas familiares da Geometria Euclidiana são modificadas na Geometria do Táxi. As figuras onde ocorrem as mudanças surpreendentes são as que estão relacionadas à distância. As definições dessas figuras na Geometria do Táxi são as mesmas da Geometria Euclidiana, apenas substituindo a distância euclidiana pela distância táxi. Vamos mostrar algumas dessas figuras através de exemplos, onde o professor poderá utilizá-los como exercícios para serem trabalhados em sala de aula, juntamente com a sequência de atividades sugeridas no próximo capítulo.

5.1 Círculo Táxi

Exemplo 1. Desenhe um Círculo Táxi com o centro em $A = (3, 2)$ e raio 3.

Primeiramente vamos encontrar alguns pontos no plano cartesiano que distam uma distância táxi 3 do ponto A e vamos fazer todos os calculos algébricos usando a função distância táxi definida no Capítulo 4 para confirmar que os pontos encontrados estão a uma distância táxi 3 do ponto dado e então verificar que figura a união desses pontos sugerem.

Aqui vale ressaltar que os pontos que usaremos para encontrar a forma que sugere a figura Círculo Táxi possuem coordenadas inteiras, mas a maioria dos pontos do plano de coordenadas não têm duas coordenadas inteiras, portanto outros pontos de coordenadas não inteiras também fazem parte desse conjunto de pontos que estão a uma distância táxi 3 do ponto A, logo pertencem a figura Círculo Táxi que estamos construindo.



$d_T(B, A) = |3 - 3| + |5 - 2| = 0 + 3 = 3$
$d_T(C, A) = |4 - 3| + |4 - 2| = 1 + 2 = 3$
$d_T(D, A) = |5 - 3| + |3 - 2| = 2 + 1 = 3$
$d_T(E, A) = |6 - 3| + |2 - 2| = 3 + 0 = 3$
$d_T(F, A) = |5 - 3| + |1 - 2| = 2 + 1 = 3$
$d_T(G, A) = |4 - 3| + |0 - 2| = 1 + 2 = 3$
$d_T(H, A) = |3 - 3| + |-1 - 2| = 0 + 3 = 3$
$d_T(I, A) = |2 - 3| + |0 - 2| = 1 + 2 = 3$
$d_T(J, A) = |1 - 3| + |1 - 2| = 2 + 1 = 3$
$d_T(K, A) = |0 - 3| + |2 - 2| = 3 + 0 = 3$
$d_T(L, A) = |1 - 3| + |3 - 2| = 2 + 1 = 3$
$d_T(M, A) = |2 - 3| + |4 - 2| = 1 + 2 = 3$

Figura 5.1: Pontos cuja distância táxi de *A* é igual a 3

A união desses pontos forma o conjunto *S* de todos os pontos *P* que estão a uma distância táxi 3 do ponto **A**, ou seja $S = \{P|d_t(P, A) = 3\} = \{(x, y) \in R^2/|x - 3| + |y - 2| = 3\}$. O conjunto *S* é chamado de *Círculo Táxi*.

A figura abaixo nos mostra o traçado do Círculo Táxi de centro em *A* e raio 3.

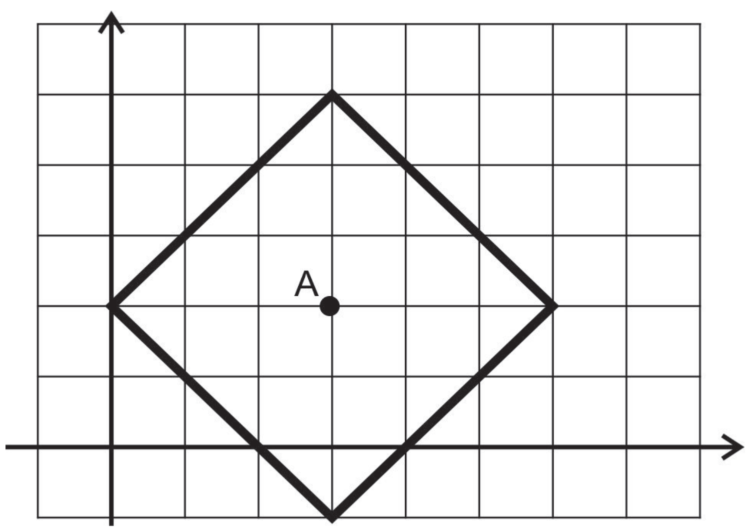


Figura 5.2: *Círculo Táxi* de centro em *A* e raio 3

Vamos agora determinar o conjunto *S*, encontrando o conjunto solução da equação $|x - 3| + |y - 2| = 3$, e assim, verificar algebricamente que a figura apresentada é de fato o Círculo Táxi de centro em *A* e raio 3.

Temos para tanto que,

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se} \quad x \geq 3, \\ -x+3, & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$$

e

$$|y-2| = \begin{cases} y-2, & \text{se} \quad y \geq 2, \\ -y+2, & \text{se} \quad y < 2. \end{cases}$$

Para fazer essa verificação separamos em casos:

Caso 1: Se $x \geq 3$ e $y \geq 2$

$|x-3| + |y-2| = 3$

$x - 3 + y - 2 = 3$

$x + y = 8$

$\boxed{y = 8 - x}$

Caso 2: Se $x \geq 3$ e $y < 2$

$|x-3| + |y-2| = 3$

$x - 3 - y + 2 = 3$

$x - y = 4$

$\boxed{y = x - 4}$

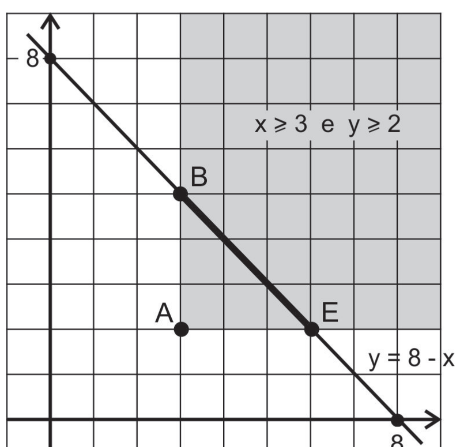


Figura 5.3: Pelo caso 1: o segmento $\overline{BE}$ pertence ao conjunto *S*

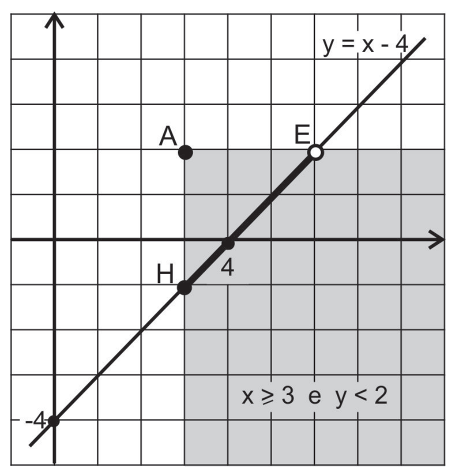


Figura 5.4: Pelo caso 2: o segmento $\overline{EH}$ pertence ao conjunto *S*

Caso 3: Se $x < 3$ e $y < 2$

$|x-3| + |y-2| = 3$

$-x + 3 - y + 2 = 3$

$-x - y = -2$

$\boxed{y = 2 - x}$

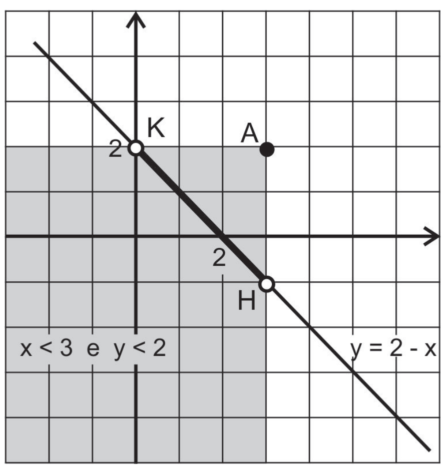


Figura 5.5: Pelo caso 3: o segmento $\overline{HK}$ pertence ao conjunto *S*

Caso 4: Se $x < 3$ e $y \geq 2$

$|x-3| + |y-2| = 3$

$-x + 3 + y - 2 = 3$

$-x + y = 2$

$\boxed{y = 2 + x}$

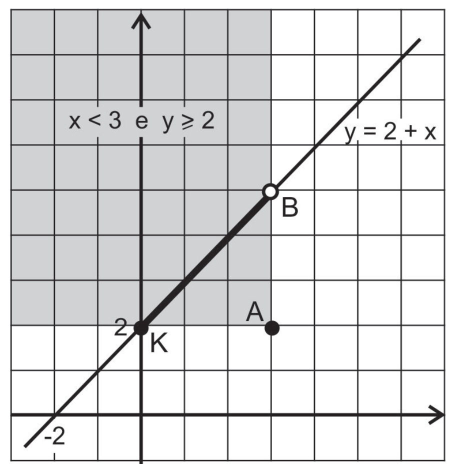


Figura 5.6: Pelo caso 4: o segmento $\overline{KB}$ pertence ao conjunto *S*

Portanto, podemos concluir que os quatro segmentos pertencem ao conjunto *S*, logo formam a figura 5.2 apresentada como Círculo Táxi.

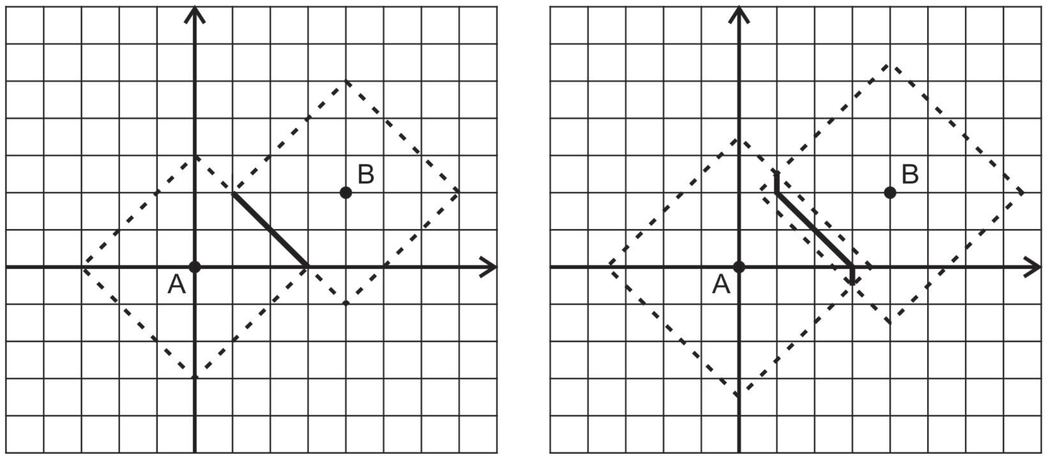
5.2 Mediatriz Táxi

Exemplo 2. Dados $A = (0, 0)$ e $B = (4, 2)$, esboçar o conjunto de todos os pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*.

Para encontrar o conjunto procurado vamos começar esboçando o conjunto de todos os pontos *P* que estão a:

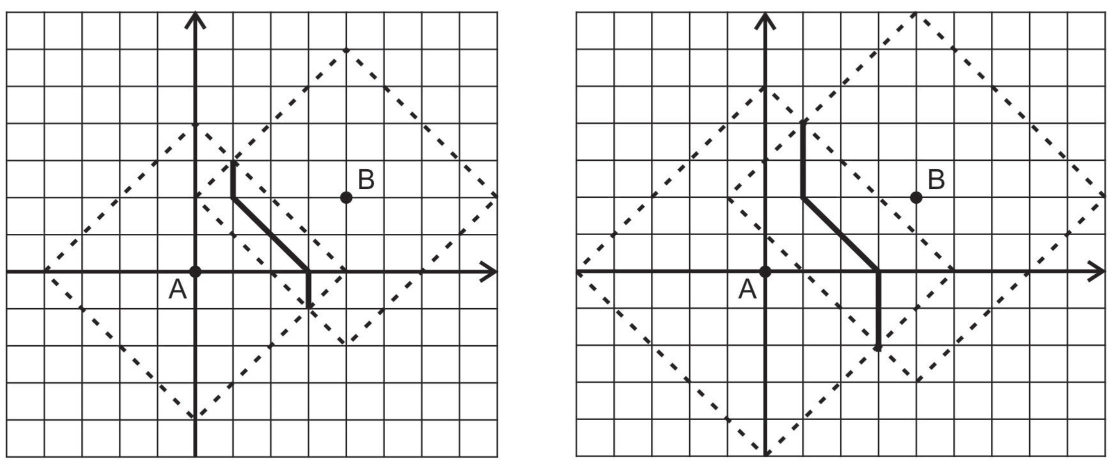
1. uma distância táxi 3, de *A* e de *B*;
2. uma distância táxi $3\frac{1}{2}$, de *A* e de *B*;

3. uma distância táxi 4, de *A* e de *B*;
4. uma distância táxi 5, de *A* e de *B*.



Dois Círculos Táxi pontilhados para parte 1 Dois Círculos Táxi pontilhados para parte 2

Figura 5.7: A interseção dos círculos mostra o conjuntos de pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*



Dois Círculos Táxi pontilhados para parte 3 Dois Círculos Táxi pontilhados para parte 4

Figura 5.8: A interseção dos círculos mostra o conjuntos de pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*

E então pela interseção dos círculos podemos encontrar os pontos que são equidistantes táxi de *A* e de *B*. Esse conjunto que queremos esboçar é chamado de *Mediatriz Táxi de um segmento*, pois é o conjunto de todos os pontos que estão a uma equidistância táxi das extremidades do segmento, no caso do segmento $\overline{AB}$, isto é $\{P|d_t(P,A) = d_t(P,B)\} = \{(x,y) \in R^2/|x-0|+|y-0| = |x-4|+|y-2|\}$.

A figura a seguir nos mostra o conjunto completo dos pontos procurados, portanto essa figura é a Mediatriz Táxi do segmento $\overline{AB}$.

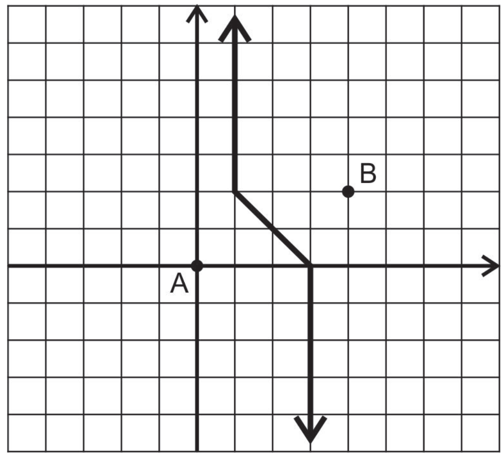


Figura 5.9: Conjunto de todos os pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*

Assim como fizemos com o Círculo Táxi, podemos verificar, algebricamente, que de fato a figura acima apresentada é a Mediatriz Táxi do segmento $\overline{AB}$, encontrando o conjunto solução da equação $|x-0|+|y-0| = |x-4|+|y-2|$.

Temos para tanto que,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -y, & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{se} \quad x \geq 4, \\ -x+4, & \text{se} \quad x < 4, \end{cases}$$

$$|y-2| = \begin{cases} y-2, & \text{se} \quad y \geq 2, \\ -y+2, & \text{se} \quad y < 2. \end{cases}$$

Novamente separamos em casos:

Caso 1: Se $x \geq 4$ e $y \geq 2$
$|x|+|y| = |x-4|+|y-2|$
$x+y = x-4+y-2$
$x-x+y-y = -6$
$0 = -6$
O conjunto solução é vazio.

Caso 2: Se $x \geq 4$ e $0 \leq y < 2$
$|x|+|y| = |x-4|+|y-2|$
$x+y = x-4-y+2$
$x-x+y+y = -2$
$2y = -2$
$y = -1$
Como $y \geq 0$, o conjunto solução é vazio.

Caso 3: Se $x \geq 4$ e $y < 0$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$x - y = x - 4 - y + 2$
$x - x - y + y = -2$
$0 = -2$
O conjunto solução é vazio.

Caso 4: Se $x < 0$ e $y \geq 2$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$-x + y = -x + 4 + y - 2$
$-x + x + y - y = 2$
$0 = -2$
O conjunto solução é vazio.

Caso 5: Se $x < 0$ e $0 \leq y < 2$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$-x + y = -x + 4 - y + 2$
$-x + x + y + y = 6$
$2y = 6$
$y = 3$
Como $y < 2$, o conjunto solução é vazio.

Caso 6: Se $x < 0$ e $y < 0$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$-x - y = -x + 4 - y + 2$
$-x + x - y + y = 6$
$0 = 6$
O conjunto solução é vazio.

Caso 7: Se $0 \leq x < 4$ e $y \geq 2$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$x + y = -x + 4 + y - 2$
$x + x + y - y = 2$
$2x = 2$
$\boxed{x = 1}$

Caso 8: Se $0 \leq x < 4$ e $0 \leq y < 2$
$|x| + |y| = |x-4| + |y-2|$
$x + y = -x + 4 - y + 2$
$x + x + y + y = 6$
$2x + 2y = 6$
$x + y = 3$
$\boxed{y = 3 - x}$

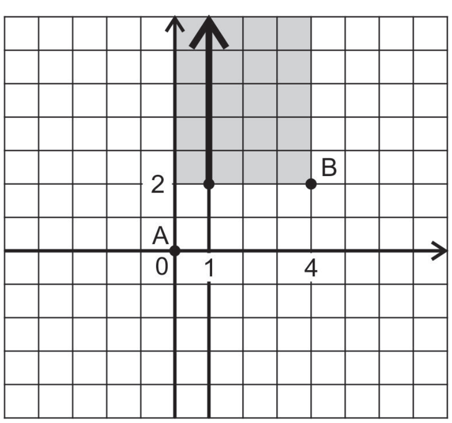


Figura 5.10: Pelo caso 7: a semirreta $\{(1, y) | y \geq 2\}$ pertence ao conjunto solução

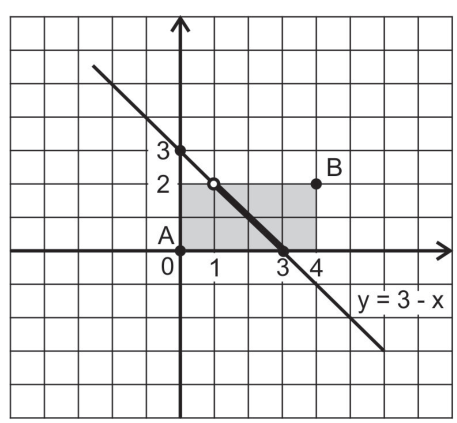


Figura 5.11: Pelo caso 8: o segmento de extremidades nos pontos (1,2) e (3,0) pertence ao conjunto solução

Caso 9: Se $0 \leq x < 4$ e $y < 0$

$$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 2|$$

$$x - y = -x + 4 - y + 2$$

$$x + x - y + y = 6$$

$$2x = 6$$

$$\boxed{x = 3}$$

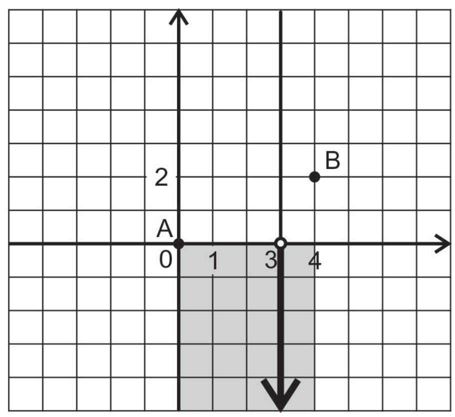


Figura 5.12: Pelo caso 9: a semirreta $\{(3, y)|y < 0\}$ pertence ao conjunto solução

Logo o conjunto solução da equação $|x - 0| + |y - 0| = |x - 4| + |y - 2|$ é a união da semirreta $\{(1, y)|y \geq 2\}$, do segmento de extremidades nos pontos (1,2) e (3,0) e da semirreta $\{(3, y)|y < 0\}$. Portanto, a Mediatriz Táxi do segmento $\overline{AB}$ é a figura 5.9 apresentada.

Exemplo 3. Dados $A = (0, 0)$ e $B = (4, 4)$, esboçar o conjunto de todos os pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*.

Este exemplo é similar ao exemplo 2, ou seja, também queremos construir a Mediatriz Táxi do segmento $\overline{AB}$, porém apresenta uma figura diferente. Levar o aluno a esboçar o conjunto de todos os pontos *P* que estão a uma equidistância táxi de *A* e *B*, com *A* e *B* em diferentes posições, é um bom exercício, pois na Geometria do Táxi, o conjunto de todos os pontos equidistantes de dois pontos dados pode ter uma variedade de formas como podemos verificar por esses dois exemplos apresentados.

Como no exemplo anterior vamos esboçar o conjunto de todos os pontos *P* que estão a:

1. uma distância táxi 4, de *A* e de *B*;
2. uma distância táxi $4\frac{1}{2}$, de *A* e de *B*;
3. uma distância táxi 5, de *A* e de *B*;
4. uma distância táxi 6, de *A* e de *B*.

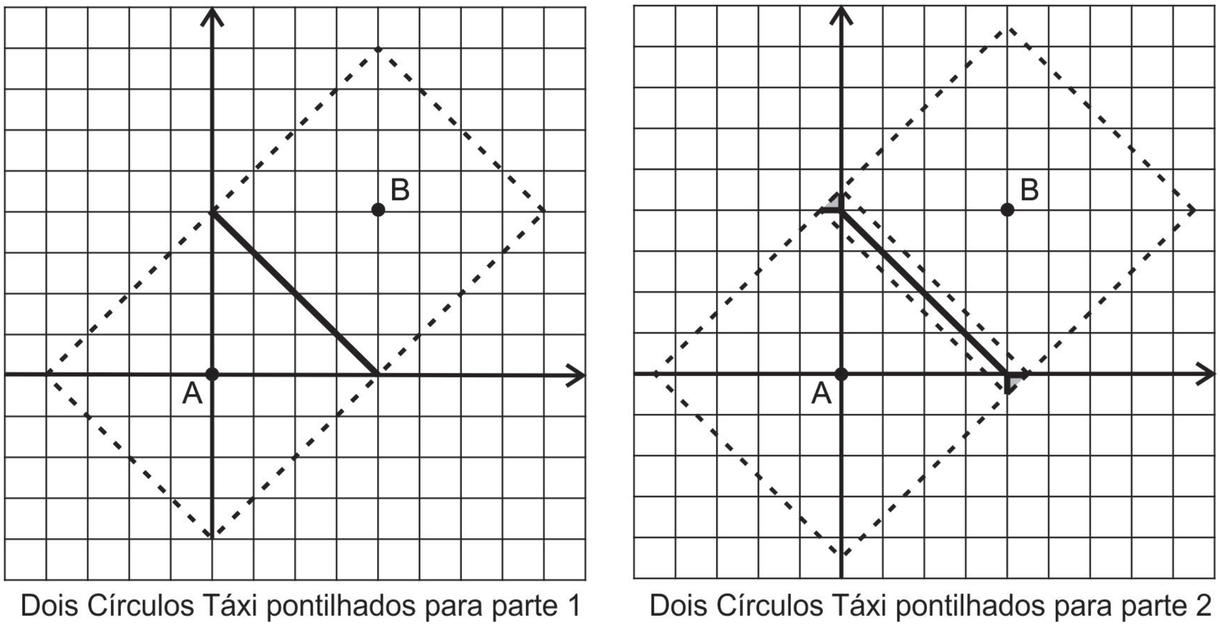


Figura 5.13: A interseção dos círculos mostra o conjunto de pontos P que são equidistantes táxi de A e de B

Observe que neste exemplo, na interseção dos círculos, temos uma parte sombreada que também faz parte do conjunto de pontos procurados, ou seja, pertence ao conjunto de pontos P que são equidistantes táxi de A e de B.

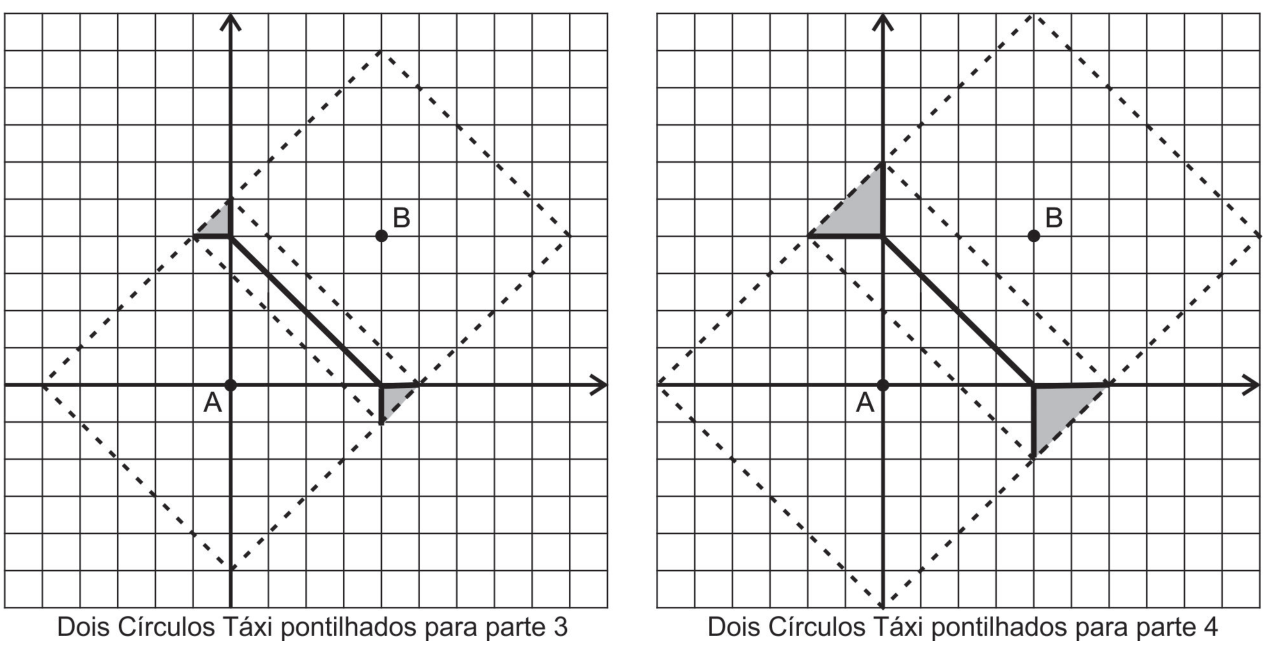


Figura 5.14: A interseção dos círculos mostra o conjunto de pontos P que são equidistantes táxi de A e de B

Portanto, na figura a seguir podemos verificar como fica o esboço completo desse conjunto.

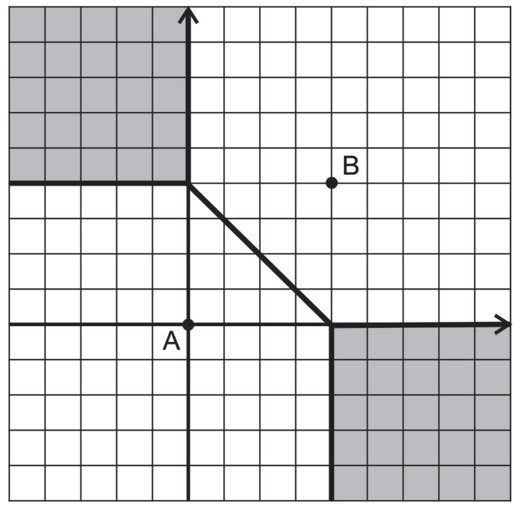


Figura 5.15: conjunto de todos os pontos *P* que são equidistantes táxi de *A* e de *B*

Para este exemplo, por se tratar de um conjunto de pontos de aparência muito diferente do exemplo anterior, também faremos a verificação algébrica da figura 5.15 através do conjunto solução da equação dada por $|x-0|+|y-0| = |x-4|+|y-4|$

Assim temos que,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{se} \quad y \geq 0, \\ -y, & \text{se} \quad y < 0, \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{se} \quad x \geq 4, \\ -x+4, & \text{se} \quad x < 4, \end{cases}$$

$$|y-4| = \begin{cases} y-4, & \text{se} \quad y \geq 4, \\ -y+4, & \text{se} \quad y < 4. \end{cases}$$

Separando em casos, são:

Caso 1: Se $x \geq 4$ e $y \geq 4$
$|x|+|y| = |x-4|+|y-4|$
$x+y = x-4+y-4$
$x-x+y-y = -8$
$0 = -8$
O conjunto solução é vazio.

Caso 2: Se $x < 0$ e $0 \leq y < 4$
$|x|+|y| = |x-4|+|y-4|$
$-x+y = -x+4-y+4$
$-x+x+y+y = 8$
$2y = 8$
$y = 4$
Como $y < 4$, o conjunto solução é vazio.

Caso 3: Se $x \geq 4$ e $0 \leq y < 4$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$x + y = x - 4 - y + 4$

$x - x + y + y = 0$

$2y = 0$

$\boxed{y = 0}$

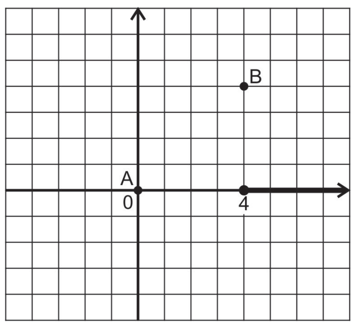


Figura 5.16: Pelo caso 3: a semirreta $\{(x, 0)|x \geq 4\}$ pertence ao conjunto solução

Caso 4: Se $x \geq 4$ e $y < 0$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$x - y = x - 4 - y + 4$

$x - y = x - y$

$\boxed{(x, y)}$

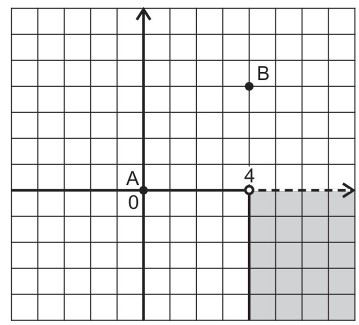


Figura 5.17: Pelo caso 4: o conjunto de pontos $\{(x, y)|x \geq 4 \quad \text{e} \quad y < 0\}$ pertence ao conjunto solução

Caso 5: Se $0 \leq x < 4$ e $y \geq 4$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$x + y = -x + 4 + y - 4$

$x + x + y - y = 0$

$2x = 0$

$\boxed{x = 0}$

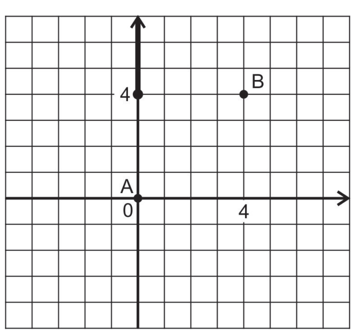


Figura 5.18: Pelo caso 5: a semirreta $\{(0, y)|y \geq 4\}$ pertence ao conjunto solução

Caso 6: Se $0 \leq x < 4$ e $0 \leq y < 4$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$x + y = -x + 4 - y + 4$

$x + x + y + y = 8$

$2x + 2y = 8$

$x + y = 4$

$\boxed{y = -x + 4}$

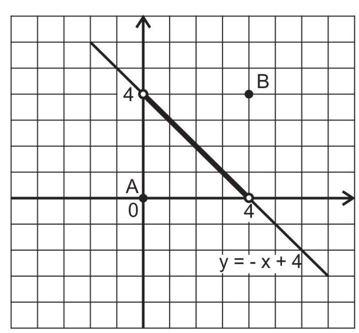


Figura 5.19: Pelo caso 6: o segmento de extremidades nos pontos (4,0) e (0,4) pertence ao conjunto solução

Caso 7: Se $0 \leq x < 4$ e $y < 0$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$x - y = -x + 4 - y + 4$

$x + x - y + y = 8$

$2x = 8$

$x = 4$

Como $x < 4$, o conjunto solução é vazio.

Caso 8: Se $x < 0$ e $y < 0$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$-x - y = -x + 4 - y + 4$

$-x + x - y + y = 8$

$0 = 8,$

logo o conjunto solução é vazio.

Caso 9: Se $x < 0$ e $y \geq 4$

$|x| + |y| = |x - 4| + |y - 4|$

$-x + y = -x + 4 + y - 4$

$-x + y = -x + y$

$\boxed{(x, y)}$

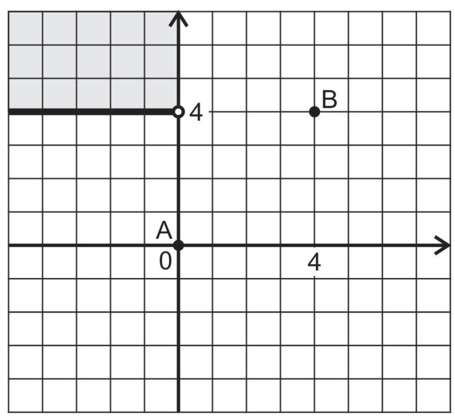


Figura 5.20: Pelo caso 9: o conjunto de pontos $\{(x, y)|x < 0 \quad \text{e} \quad y \geq 4\}$ pertence ao conjunto solução

Portanto, o conjunto solução da equação $|x - 0| + |y - 0| = |x - 4| + |y - 4|$ é a união das soluções encontradas nos casos 3, 4, 5, 6 e 9. E assim, confirmamos que a Mediatriz Táxi do segmento $\overline{AB}$ é representada pela figura 5.15.

5.3 Elipse Táxi

Exemplo 4. Esboce a Elipse Táxi, ou seja, o conjunto $\{P|d_t(P, C) + d_t(P, D) = 9\}$, onde $C = (-1, -1)$ e $D = (3, 2)$.

Por definição uma elipse é o conjunto de todos os pontos cuja soma das distâncias à dois pontos dados é uma constante. Então, nesse exemplo, devemos encontrar todos os pontos cuja soma das distâncias táxi aos pontos C e D é igual a 9.

Para encontrar os pontos que pertencem à Elipse Táxi procurada realize os seguintes passos:

1. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 5 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 4. Em seguida marque a interseção dos dois círculos, pois qualquer ponto que se encontra em ambos os círculos estará a uma distância táxi 5 de C e uma distância táxi 4 de D, portanto a soma das distâncias táxi desse ponto à C e D será 9, e vai ser um ponto da elipse que estamos buscando.

2. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 6 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 3. Marque os pontos da interseção dos círculos. Repetindo o procedimento realizado no passo 1. Faça o mesmo em todos os passos seguintes.

3. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 7 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 2. Marque os pontos da interseção dos círculos.

4. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 8 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 1. Marque os pontos da interseção dos círculos.

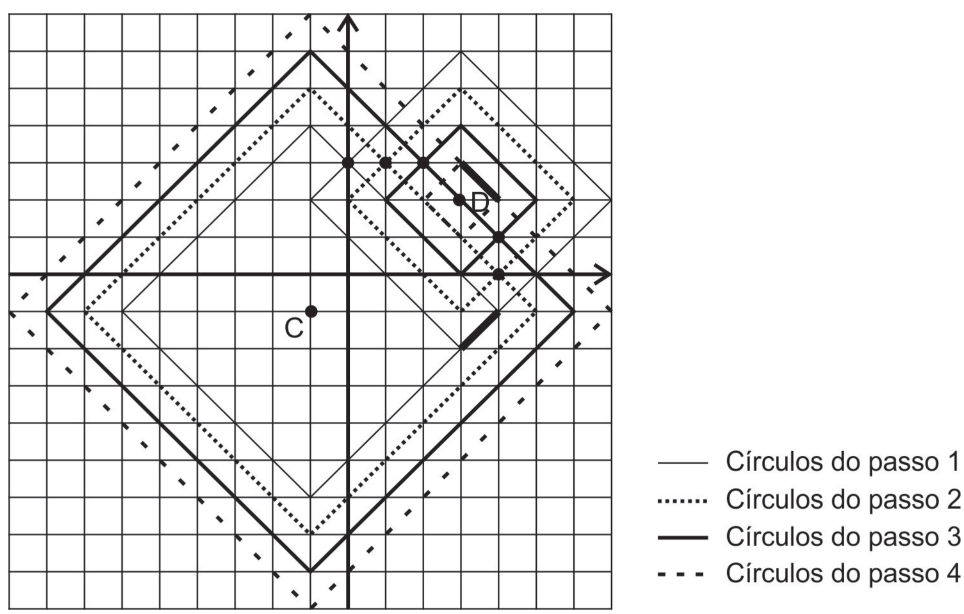


Figura 5.21: Nas interseções dos Círculos Táxi obtemos pontos que pertencem à Elipse Táxi procurada

Observe a figura e note que em algumas interseções encontramos mais que dois pontos. Repare também que através dos procedimentos realizados acima encontramos os pontos de apenas um lado da Elipse Táxi.

Agora, devemos repetir todos os passos trocando os raios dos círculos de centro em C e em D como segue abaixo:

1'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 4 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 5. Marque os pontos da interseção dos círculos.

2'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 3 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 6. Marque os pontos da interseção dos círculos.

3'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 2 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 7. Marque os pontos da interseção dos círculos.

4'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 1 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 8. Marque os pontos da interseção dos círculos.

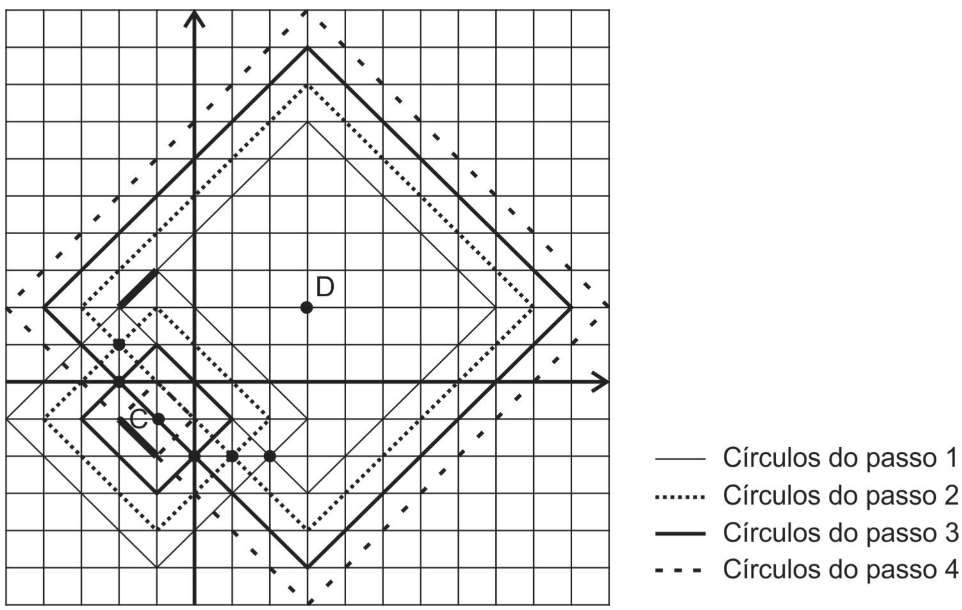


Figura 5.22: Nas interseções dos Círculos Táxi obtemos pontos que pertencem à Elipse Táxi procurada

Juntando os pontos obtidos nos procedimentos acima, temos as figuras a seguir que nos mostram o formato e o conjunto completo de pontos que forma a Elipse Táxi.

Assim como foi feito nos Exemplos 1, 2 e 3, para o Círculo Táxi e para a Mediatriz Táxi, aqui também é possível verificar algebricamente que a figura apresentada como Elipse Táxi é de fato o conjunto de pontos $\{P|d_t(P,C)+d_t(P,D)=9\} = \{(x,y) \in R^2/|x+1|+|y+1|+|x-3|+|y-2|=9\}$, ou seja, é o conjunto solução da equação $|x+1|+|y+1|+|x-3|+|y-2|=9$. Por essa verificação ser semelhante às já apresentadas nos exemplos anteriores, não a faremos para essa figura e para as demais figuras, apresentando apenas as equações.

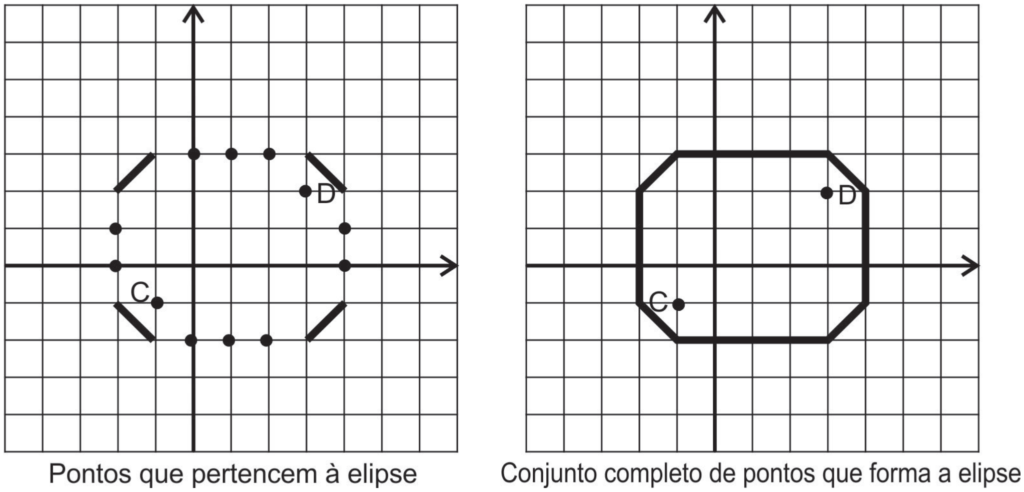


Figura 5.23: *Elipse Táxi*

5.4 Hipérbole Táxi

Exemplo 5. Dados os pontos $C = (-1, -1)$ e $D = (3, 2)$, esboce a Hipérbole Táxi, cujo conjunto é $\{P||d_t(P, C) - d_t(P, D)| = 3\}$.

Por definição uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos *P* para os quais o módulo da diferença de suas distâncias à dois pontos dados é uma constante. Então, nesse exemplo, devemos encontrar todos os pontos cujo módulo da diferença das distâncias táxi aos pontos *C* e *D* é igual a 3. Na Geometria do Táxi, se mudarmos o valor da constante a Hipérbole Táxi apresenta uma variedade de formas, assim, também mostraremos para outros valores diferentes da constante 3.

Para encontrar os pontos que pertencem à Hipérbole Táxi procurada realize os seguintes passos:

1. Desenhe um Círculo Táxi de centro em *C* e raio 6 e um Círculo Táxi de centro em *D* e raio 3. Em seguida marque a interseção dos dois círculos, pois qualquer ponto que se encontra em ambos os círculos estará a uma distância táxi 6 de *C* e uma distância táxi 3 de *D*, portanto o módulo da diferença das distâncias táxi de *C* e *D* será 3, e vai ser um ponto da Hipérbole Táxi que estamos buscando.

2. Desenhe um Círculo Táxi de centro em *C* e raio 5 e um Círculo Táxi de centro em *D* e raio 2. Marque os pontos da interseção dos círculos. Repetindo o procedimento realizado no passo 1. Faça o mesmo em todos os passos seguintes.

3. Desenhe um Círculo Táxi de centro em *C* e raio 7 e um Círculo Táxi de centro em *D* e raio 4. Marque os pontos da interseção dos círculos.

4. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 8 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 5. Marque os pontos da interseção dos círculos.

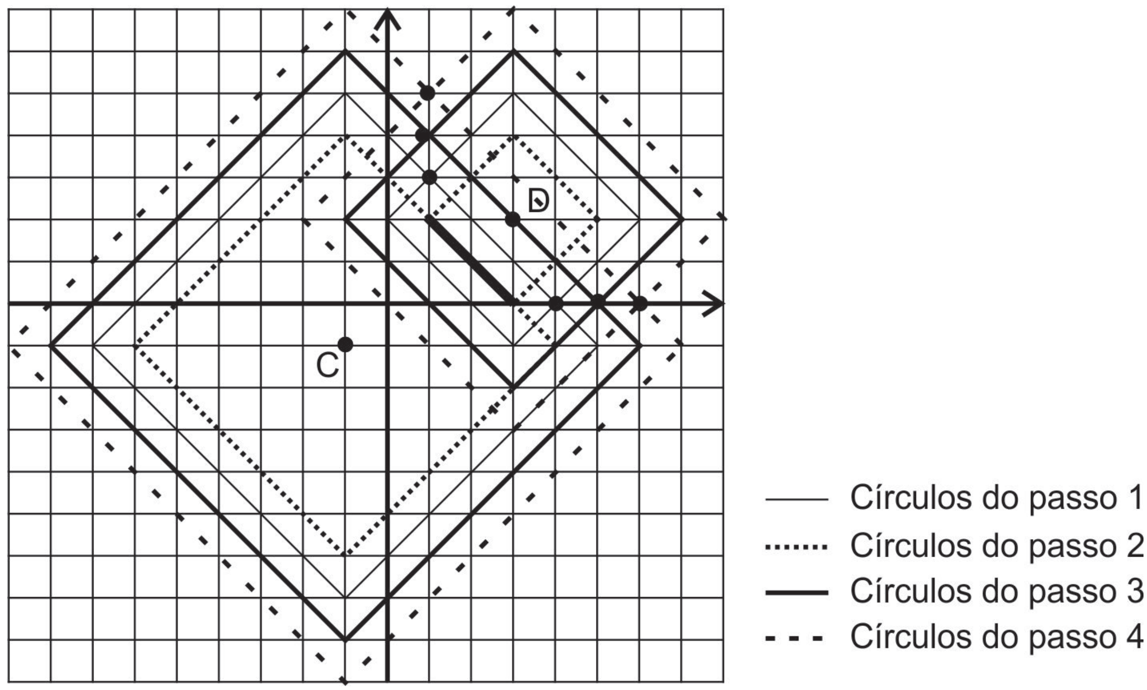


Figura 5.24: Nas interseções dos Círculos Táxi obtemos pontos que pertencem à Hipérbole Táxi procurada

Observe a figura e note que assim como na construção da Elipse Táxi, em algumas interseções dos Círculos Táxi desenhados acima encontramos mais que dois pontos. Repare também que através dos procedimentos realizados encontramos os pontos de apenas um lado da Hipérbole Táxi, logo para encontrar os pontos que pertencem ao outro ramo da Hiperbóle Táxi, devemos repetir todos os passos trocando os raios dos círculos de centro em C e em D como segue abaixo:

1'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 3 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 6. Marque os pontos da interseção dos círculos.

2'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 2 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 5. Marque os pontos da interseção dos círculos.

3'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 4 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 7. Marque os pontos da interseção dos círculos.

4'. Desenhe um Círculo Táxi de centro em C e raio 5 e um Círculo Táxi de centro em D e raio 8. Marque os pontos da interseção dos círculos.

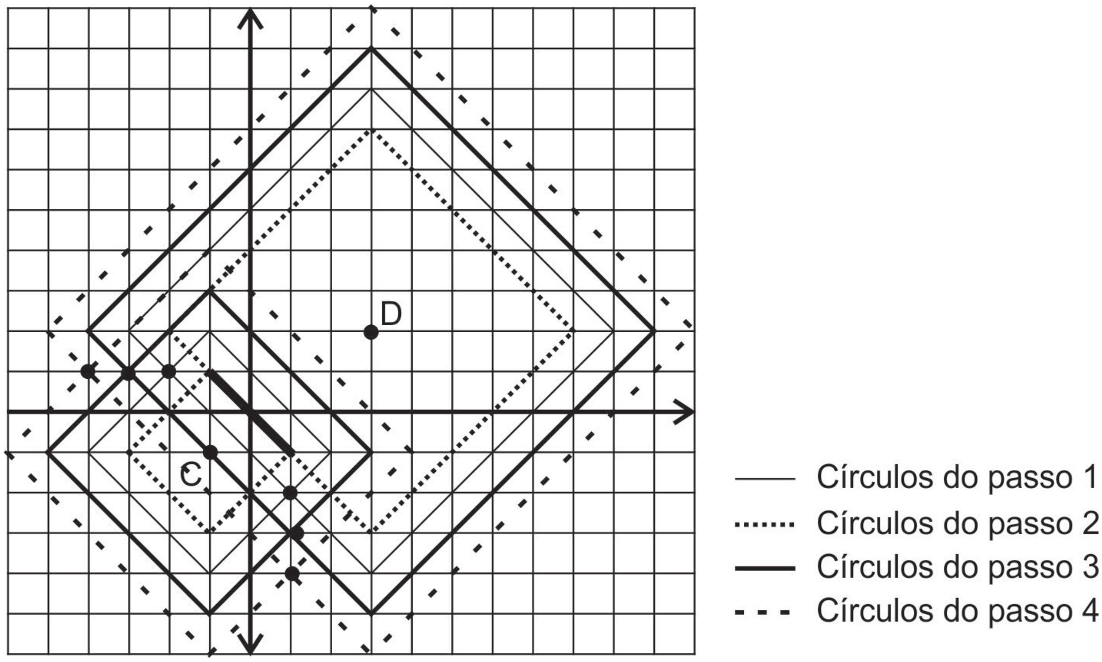


Figura 5.25: Nas interseções dos Círculos Táxi obtemos pontos que pertencem à Hipérbole Táxi procurada

Juntando os pontos obtidos nos procedimentos acima, temos a figura abaixo que nos mostra do lado esquerdo o formato do conjunto de pontos e do lado direito o conjunto completo que forma a Hipérbole Táxi com constante 3.

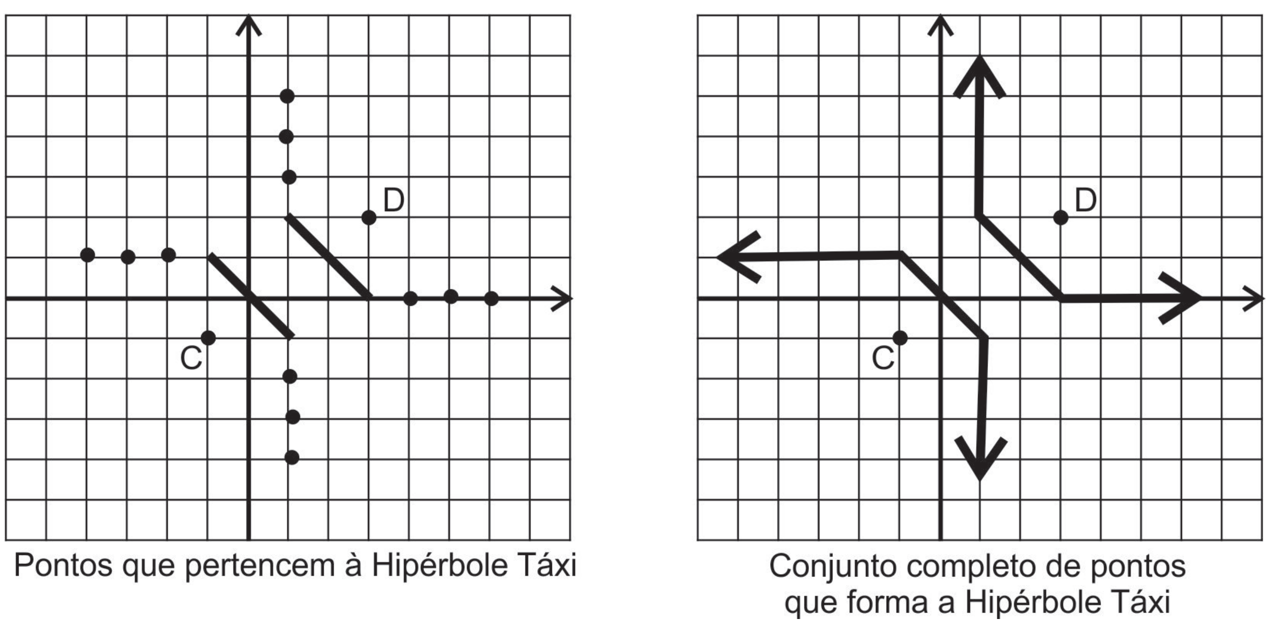


Figura 5.26: *Hipérbole Táxi* com constante 3

Para explorar este exemplo, também é interessante solicitar aos alunos que esbocem outras Hipérboles Táxi com valores diferentes para a constante k, no conjunto $\{P||d_t(P,C) - d_t(P,D)| = k\}$, como mostraremos no exemplo 6.

Exemplo 6. Dados os pontos *C* e *D* do exemplo anterior, esboce a Hipérbole Táxi quando $\{P||d_t(P,C) - d_t(P,D)| = 7\}$ e outra quando $\{P||d_t(P,C) - d_t(P,D)| = 1\}$

Utilize os procedimentos descritos no exemplo 5 para a construção das Hipérboles Táxi mudando apenas as medidas dos raios dos Círculos Táxi de centro em *C* e em *D*. Segue abaixo as figuras com as Hipérboles Táxi procuradas.

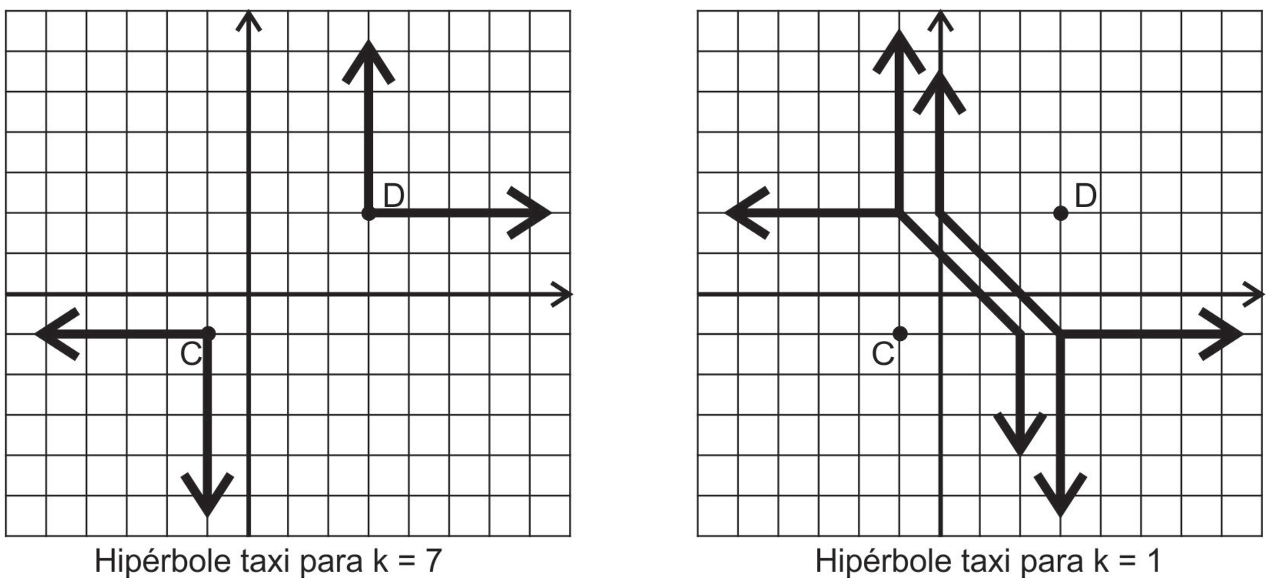


Figura 5.27: *Hipérbole Táxi* com constante 7 e constante 1

5.5 Parábola Táxi

Para o próximo exemplo apresentamos a seguinte definição:

Distância de um ponto à reta na Geometria do Táxi. Dados um ponto *A* e uma reta *r*, definimos a distância táxi de *A* à *r* como,

$$d_t(A, r) = \text{min } d_t(A, P), \text{ onde } P \in r,$$

que corresponde a mesma definição da $d_e(A, r)$.

Para encontrar o ponto $P \in r$, tal que a $d_t(A, P)$ é mínima, devemos inflar lentamente um Círculo Táxi com centro em *A* até tocar *r* no ponto *P*. O raio do Círculo Táxi que toca *r* no ponto *P* é a distância táxi de *A* à *P*, ou seja, a distância táxi de *A* à *r*.

É possível também localizar o ponto $P \in r$ de forma direta dependendo da inclinação "*m*" da reta *r*. Assim, devemos separar em três casos:

1. Se $|m| < 1$, o ponto *P* está na mesma reta vertical que passa pelo ponto *A*.

2. Se $|m| = 1$, o ponto *P* está na mesma reta vertical ou na mesma reta horizontal que passa pelo ponto *A*.

3. Se $|m| > 1$ ou *r* é vertical, o ponto *P* está na mesma reta horizontal que passa pelo ponto *A*.

Então, utilizando o procedimento descrito acima, podemos encontrar o conjunto *S* de todos os pontos *P*, que estão a uma distância táxi 2 da reta *r* que passa pelos pontos (3,0) e (1,-4), ou seja o conjunto $S = \{P|d_t(P, r) = 2\}$. A figura abaixo nos mostra o esboço da reta *r* e o conjunto *S* representado pelas linhas pontilhadas.

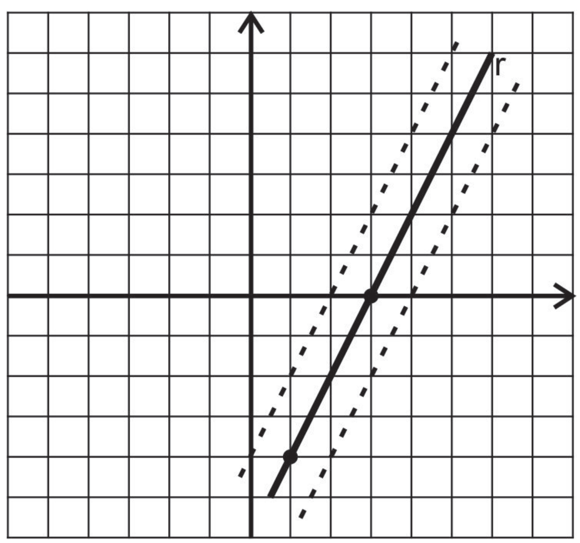


Figura 5.28: *O conjunto S está representado pelas linhas pontilhadas*

Exemplo 7. Esboce a Parábola Táxi de foco *F* e diretriz *l*, onde $F = (-3, -1)$ e *l* é a reta que passa por (0,2) e (6,0).

Por definição, Parábola é o conjunto de todos os pontos *P* que são equidistantes de *F* e de *l*, ou seja, $\{P|d_t(P, F) = d_t(P, l)\}$. Logo, queremos encontrar todos os pontos que equidistam do foco *F* e da diretriz *l*.

Para encontrar os pontos que pertencem à Parábola Táxi procurada utilize o seguinte procedimento:

1. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 2 e esboce o conjunto S_1 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 2. Em seguida marque os pontos comuns ao círculo e a S_1, pois qualquer ponto pertencente a ambos estará a uma distância táxi 2 de F e de *l*, logo pertence a Parábola táxi procurada. Faremos isso em todos os passos a seguir.

2. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 2,5 e esboce o conjunto S_2 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 2,5.

3. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 3 e esboce o conjunto S_3 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 3.

4. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 4 e esboce o conjunto S_4 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 4.

5. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 6 e esboce o conjunto S_5 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 6.

6. Desenhe um Círculo Táxi de centro em F e raio 8 e esboce o conjunto S_6 de pontos cuja distância táxi de *l* seja 8.

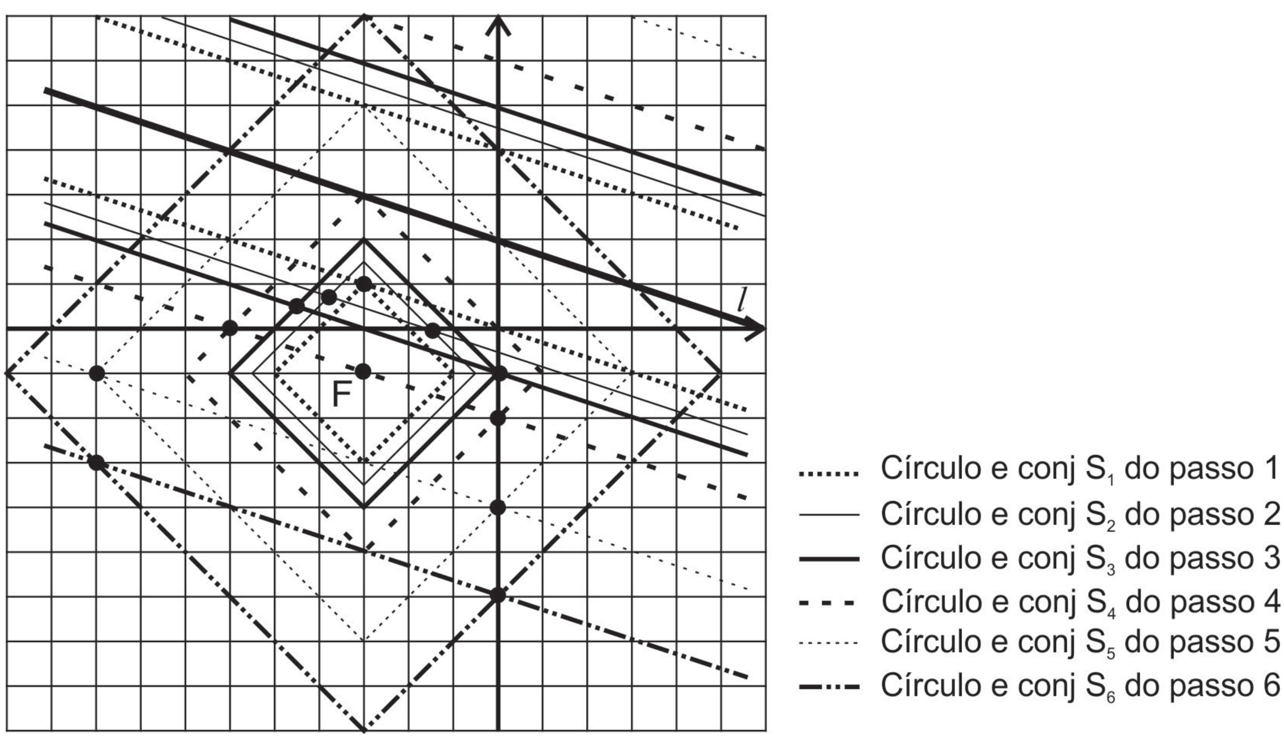


Figura 5.29: Nas interseções dos Círculos Táxi com os conjuntos correspondentes obtemos pontos que pertencem à Parábola Táxi procurada

Observe os pontos obtidos na figura a seguir que nos mostra, do lado esquerdo, o formato da Parábola Táxi para o foco e diretriz dados e, do lado direito, com a união dos pontos, o esboço do conjunto completo de pontos da mesma.

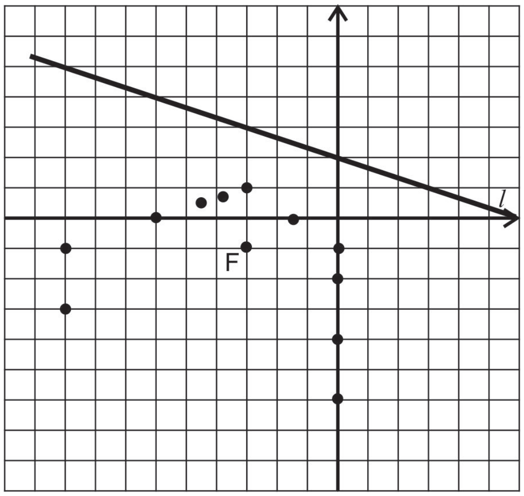


Figura 5.30: Pontos obtidos seguindo o procedimento sugerido acima

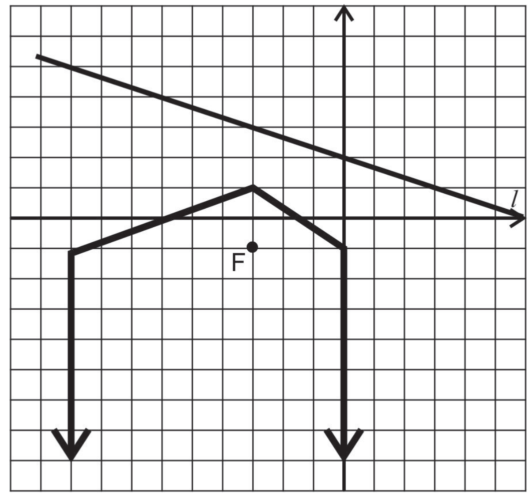


Figura 5.31: Parábola Táxi de foco F e diretriz l dados

Capítulo 6

Sequência de Atividades para Sala de Aula

Apresentaremos a seguir uma sequência de atividades pedagógicas como sugestão para serem trabalhadas em sala de aula ao se iniciar o estudo da Geometria do Táxi com os alunos do ensino médio.

6.1 Objetivos Gerais das Atividades

As atividades propostas têm como objetivos:

1. Apresentar aos alunos uma geometria interessante, de fácil entendimento, diferente da Geometria Euclidiana, mas ao mesmo tempo muito parecida com a mesma e também muito próxima de seu cotidiano.

2. Identificar as diferenças entre as Geometrias Euclidiana e do Táxi. Isto pode contribuir para um melhor entendimento da própria Geometria Euclidiana.

3. Ajudar o aluno a se familiarizar cada vez mais com atividades no plano cartesiano contribuindo, assim, com a geometria analítica e levando os alunos a fazerem associações entre o geométrico e o algébrico.

4. Construir algumas figuras geométricas na Geometria do Táxi, comparando-as com as figuras já conhecidas da Geometria Euclidiana.

Nessa sequência de atividades serão utilizados alguns recursos educacionais da Coleção M^3 Matemática Multimídia, desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. Esses recursos estão disponíveis no endereço eletrônico <http://m3.ime.unicamp.br> e também no site do Banco Internacional de Objetos Educacionais do Mec.

A Geometria do Táxi é desenvolvida considerando todos os pares ordenados de números reais, porém, de modo a simplificar a medição da distância táxi, nas Atividades 2 e 3 são considerados somente os pontos de coordenadas inteiras. As Atividades 4, 5 e 6 são direcionadas para que os alunos trabalhem com todos os pontos do plano cartesiano, sejam de coordenadas inteiras ou não.

6.2 Atividade 1 - Apresentação da Geometria do Táxi

Como primeira atividade sugerimos o vídeo “Vou de Táxi” para iniciar o estudo da Geometria do Táxi, onde o assunto é abordado de forma descontraída através de um problema cotidiano, mostrando dessa forma algumas de suas aplicações. Esse vídeo pode ser encontrado no endereço eletrônico a seguir: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191>. Nesse mesmo endereço, o professor interessado em ler mais sobre o assunto, terá a sua disposição um guia do professor com alguns aprofundamentos de conteúdos e sugestões de atividades que podem ser utilizadas antes ou depois da execução do vídeo. Para ser trabalhado antes do vídeo, o guia do professor sugere pedir aos alunos para fazer a verificação da fórmula da distância euclidiana utilizando o Teorema de Pitágoras. E para ser trabalhado após o vídeo, temos como sugestão do guia do professor, três atividades, uma pedindo para calcular o caminho mais curto seguindo o traçado das ruas entre as localidades dadas e depois calcular a distância entre essas localidades utilizando a fórmula da distância do táxi, de modo a fazer comparações. Na segunda atividade, além de pedir para calcular a distância entre duas localidades, pede para calcular quantos caminhos diferentes e mais curtos existem para ir de uma localidade a outra. Nessa atividade utiliza-se o conceito de combinação. E como última sugestão de atividade, um pouco mais complexa, propor aos alunos uma sequência de questões com o objetivo de mostrar algebricamente a desigualdade triangular na Geometria Euclidiana. Com esta desigualdade é possível mostrar a relação entre as distâncias euclidiana e táxi.

Tipo de Atividade: vídeo aula.

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: Apresentar a Geometria do Táxi; Comparar a distância euclidiana e a distância táxi usando coordenadas.

Sinopse: A personagem Luciana requisita os serviços do motorista de táxi Wandercy, pedindo que vá buscá-la no aeroporto utilizando o caminho mais curto. Wandercy esclarece que ao viajar de carro nem sempre a linha reta é o menor caminho devido à necessidade de seguir o traçado das ruas. Ele apresenta para Luciana a Geometria do Táxi e mostra a relação entre a distância euclidiana e a distância táxi.

Material de apoio: computador e datashow.

Duração: Aproximadamente 10 minutos.

Observação para o professor: Após a apresentação do vídeo o professor poderá discutir com os alunos sobre os tópicos abordados no mesmo, tirando as possíveis dúvidas e realizar algumas das atividades sugeridas no Guia do Professor.

6.3 Atividade 2 - Conhecendo Uma Nova Noção de Distância

Após a aula de vídeo sugerida na atividade 1, recomendamos a utilização do software "Geometria do Táxi - Distâncias", pois este oferece aos alunos atividades com recursos multimídia bastante atraentes, levando estes a interagirem com as situações apresentadas. Este software pode ser encontrado no endereço <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1231>. Ele também está acompanhado de um Guia do Professor que traz alguns aprofundamentos teóricos e recomendações metodológicas para o uso do material.

Tipo de Atividade: Aula digital utilizando o software "Geometria do Táxi - Distâncias".

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: Representar um mapa por meio de uma malha quadriculada. Favorecer o uso de coordenadas cartesianas no plano. Utilizar uma nova noção de distância e fazer comparações entre as distâncias euclidiana e do táxi.

Sinopse: Nas atividades propostas o aluno escolhe quais são seus pontos de referência no mapa (sua casa, a escola, etc.) e é solicitado a calcular e comparar as distâncias do táxi e euclidiana entre estes pontos e outros. Como o nome "Geometria do Táxi", está associado com a ideia de "trafegar pelas ruas", a distância táxi entre dois pontos no plano cartesiano é calculada assumindo-se que só se possa fazer trajetos horizontais e verticais.

Material de apoio: Laboratório de informática (as atividades podem ser feitas em duplas).

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Observação para o professor: Durante as atividades do software o professor pode estar levantando alguns questionamentos de modo a instigar o aluno. Como por exemplo, na questão 2 da parte 1, quando pergunta qual é o mínimo de quarteirões que ele terá que percorrer para ir de sua casa até a escola, o professor pode questioná-lo se o caminho escolhido é único, se mudar o caminho altera o número mínimo de quarteirões, entre outras perguntas. Para a questão 1 da parte 2, como pede a distância percorrida pelo helicóptero, tem como pré-requisito que o aluno já saiba sobre o Teorema de Pitágoras e que esteja com o caderno em mãos para efetuar os cálculos.

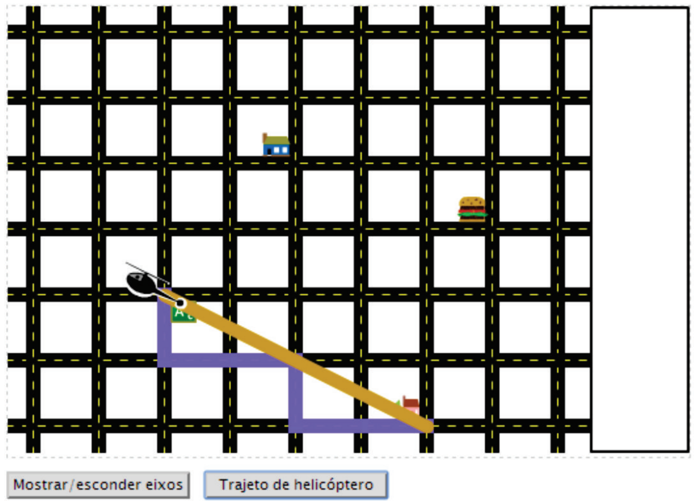


Figura 6.1: Uma das telas da parte 1 do software "Geometria do Táxi - Distâncias"

6.4 Atividade 3 - Formas Geométricas na Geometria do Táxi

Além do software "Geometria do Táxi - Distâncias", existem outros recursos multimídia disponíveis sobre Geometria do Táxi para serem explorados. Como as formas geométricas nessa geometria apresentam muitas mudanças em relação as formas geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana, sugerimos trabalhar com os alunos o software "Geometria do Táxi - Formas Geométricas", que traz atividades introdutórias para a figura Círculo Táxi, uma figura bastante importante e indispensável ao estudo das formas geométricas na Geometria do Táxi. Este software pode ser encontrado no endereço <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1248>. Assim como o software sugerido na atividade anterior, este também está acompanhado de um Guia do Professor com alguns aprofundamentos teóricos e recomendações metodológicas para o uso do material.

Tipo de Atividade: Aula digital utilizando o software "Geometria do Táxi - Formas Geométricas"

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: Utilizar o sistema de coordenadas cartesianas no plano e a noção de distância táxi para explorar as formas geométricas de circunferência e círculo na Geometria do Táxi.

Sinopse: Nas atividades propostas o aluno escolhe no mapa as "esquinas" onde colocar quatro pontos de referência (sua casa, a escola, a casa de um amigo e a lanchonete) e é solicitado a considerar distância como o número mínimo de quadras a serem percorridas para se ir de um ponto a outro (distância táxi). Depois é convidado a pensar no que corresponde aos conceitos de circunferência e círculo na Geometria do Táxi, marcando todos os pontos que distam uma mesma distância de um determinado local.

Material de apoio: laboratório de informática (as atividades podem ser feitas em duplas).

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Observação para o professor: Nesse software, na parte 2 as questões são direcionadas ao aluno visualizar a figura geométria Círculo Táxi, marcando os pontos na malha quadriculada que tenham a mesma distância táxi de um local escolhido. Vale ressaltar que o sotfware utiliza como unidade de medida "quadras" e que os pontos são colocados somente nas "esquinas", logo são pontos de coordenadas inteiras, mas o professor pode explicar aos alunos que existem outros pontos de coordenadas não inteiras que também fazem parte dessa figura, pois atendem a definição. Portanto, algumas questões do software, como a questão 6 da parte 2, que pergunta quantos pontos têm uma circunferência de raio R, só tem sentido a resposta quando trabalhado somente com coordenadas inteiras, como é o caso. É importante que o professor faça algum comentário sobre isso para não gerar confusão quando o aluno for realizar construções no papel.

Figura 6.2: Uma das telas da atividade 2 do software "Geometria do Táxi - Formas Geométricas"

Os softwares e o vídeo sugeridos nas atividades anteriores também estão disponíveis no site do Banco Internacional de Objetos Educacionais do MEC.

Após realizar as atividades dos dois softwares citados o aluno já tem uma noção de como é calculada a distância entre duas localidades, ou dois pontos na Geometria do Táxi e também que forma apresenta o Círculo Táxi. Vamos agora contribuir para a consolidação desse apredizado sugerindo atividades no papel.

6.5 Atividade 4 - Comparando as Distâncias Euclidiana e Táxi

Tipo de Atividade: Calcular as distâncias táxi e euclidiana dos pontos dados e fazer as devidas comparações.

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: Comparar as distâncias do táxi e euclidiana.

Descrição: Resolver os exercícios:

1. Em uma folha de papel milimetrado, marque cada par de pontos *A* e *B* e, em seguida, encontre tanto a distância táxi ($d_t(A, B)$) quanto a distância euclidiana ($d_e(A, B)$) entre os pontos *A* e *B*.

a) $A = (-3, 2)$ e $B = (4, 1)$,

b) $A = (-4, -3)$ e $B = (2, -1)$,

c) $A = (4, -2)$ e $B = (-1, 3)$,

d) $A = (5, -4)$ e $B = (-1, -4)$,

e) $A = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ e $B = (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Responda as perguntas a seguir usando os resultados da questão anterior:

a) Se $d_t(P, Q) = d_t(R, S)$ devemos ter necessariamente $d_e(P, Q) = d_e(R, S)$?

b) Se $d_e(P, Q) = d_e(R, S)$ devemos ter necessariamente $d_t(P, Q) = d_t(R, S)$?

c) Quais as condições para os pontos *A* e *B* para que se tenha $d_t(A, B) = d_e(A, B)$?

d) Observando as distâncias calculadas, é verdade que $d_e(A, B) \leq d_t(A, B)$?

Material de apoio: Papel milimetrado.

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Observação para o professor: Para essa atividade o professor deve orientar seus alunos para que após marcar os pontos no papel milimetrado façam os cálculos das distâncias usando suas definições. Também poderá sugerir outros pares de pontos e pedir que apenas calculem as distâncias sem a necessidade da representação no papel. Para a última pergunta da questão 2, se o professor achar necessário pode fazer com os alunos a demonstração da desigualdade $d_e(A, B) \leq d_t(A, B)$. Para isso pode estar consultando o Capítulo 4 deste trabalho.

6.6 Atividade 5 - Construção de Figuras Geométricas no Papel

Tipo de Atividade: Construção de uma figura geométrica na Geometria do Táxi.

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: Construir a figura Círculo Táxi no papel utilizando as definições de distância táxi. Fazer comparações entre o círculo da Geometria Euclidiana e da Geometria do Táxi.

Descrição: Resolver os exercícios:

1. Marque o ponto $A = (-1, -2)$ no papel milimetrado. Em seguida para cada ponto *P* dado, calcule $d_t(P, A)$ e marque no papel todos os pontos que distam uma distância táxi 3 do ponto *A*.

a) $P = (2, -2)$,

b) $P = (-1, -5)$,

c) $P = (0, -4)$,

d) $P = (0, 0)$,

e) $P = (-3, -1)$,

f) $P = (1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$,

g) $P = (-2, 5; -0, 5)$.

2. Encontre mais alguns pontos que distem uma distância táxi 3 do ponto *A* dado na questão anterior, marcando-os no papel milimetrado de modo a sugerir uma figura e confirme as distâncias através dos cálculos.

3. Risque os segmentos que formam o conjunto de todos os pontos que distam uma distância táxi 3 do ponto *A* ligando os pontos marcados nas questões (1) e (2). Essa figura formada pela união desses segmentos forma o Círculo Táxi de centro em *A* e raio 3.

4. Trace uma circunferência de centro em *A* e raio 3 usando a distância euclidiana, no mesmo papel milimetrado em que foi traçado o Círculo Táxi e compare as duas figuras.

5. Usando a definição da função distância táxi $d_t(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$, confirme algebricamente a figura encontrada na questão (3) resolvendo a equação: $|x + 1| + |y + 2| = 3$.

Material de apoio: Papel milimetrado.

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Observação para o professor: Nessa atividade estamos sugerindo que encontrem os pontos que estão a uma distância táxi 3 de um ponto dado, mas o professor pode variar a atividade mudando essa distância que equivale ao raio do círculo. Para a questão 2, o professor pode ir dando sugestões de pontos de modo a contornar o ponto *A* para que os alunos consigam visualizar a figura procurada. Na questão 4, o professor deve sugerir a utilização de um compasso para traçar a circunferência euclidiana e após a construção das duas figuras promover a comparação entre elas. A questão 5 tem como pré-requisito que o aluno saiba trabalhar com equação modular. No Capítulo 5 temos a resolução de uma equação similar a equação da questão 5, caso o professor queira consultar. Nesse mesmo capítulo o professor também irá encontrar exemplos que podem ser utilizados como exercícios para a construção de outras figuras geométricas na Geometria do Táxi. São figuras conhecidas da Geometria Euclidiana, mas que por serem figuras relacionas à função distância sofrem mudanças em sua forma na Geometria do Táxi, e portanto, chamam a atenção dos alunos.

6.7 Atividade 6 - Algumas Aplicações na Geografia Urbana

Tipo de Atividade: Atividade de aplicação na geografia urbana.

Público alvo: Alunos do 1^o ano do Ensino Médio.

Objetivos específicos: relacionar situações do cotidiano das pessoas com as figuras geométricas da Geometria do Táxi, mostrando algumas de suas aplicações. Mostrar que o conceito de distância táxi para os cálculos de distâncias entre locais urbanos quando precisamos nos locomover a pé ou de carro é mais indicado do que a distância euclidiana, pois precisamos obedecer ao trajeto das ruas.

Descrição: Resolver as situações problemas:

1. Elaine e Rafael estão à procura de um apartamento na cidade onde trabalham. Elaine trabalha como professora de matemática numa escola que se localiza no ponto $A = (-2, 1)$. Rafael trabalha como instrutor em uma academia localizada no ponto $B = (3, 3)$. Eles desejam que o seu apartamento seja localizado de modo que a distância que Elaine tem que andar para trabalhar seja a mesma distância que Rafael tem de andar para chegar ao seu trabalho. Onde eles devem procurar um apartamento?

2. Elaine ainda trabalha como professora de matemática na mesma escola localizada em $A = (-2, 1)$, mas Rafael tem um novo trabalho como um condutor no novo veículo de transporte na cidade, que corre ao longo da linha *r*, que passa por (4,-1) e (-1,-3), como mostrado na figura abaixo. Um dos benefícios desse trabalho de Rafael é que, quando ele vem do trabalho para casa ou vice versa, ele pode descer do veículo no ponto mais próximo de sua casa. Essa mudança levou Elaine e Rafael em outra pesquisa de apartamentos.

a) Eles querem viver onde têm a mesma distância a pé para o trabalho de ambos. Onde eles devem olhar?

b) Onde eles devem olhar se ambos não querem andar mais que 6 quarteirões para chegar ao seu

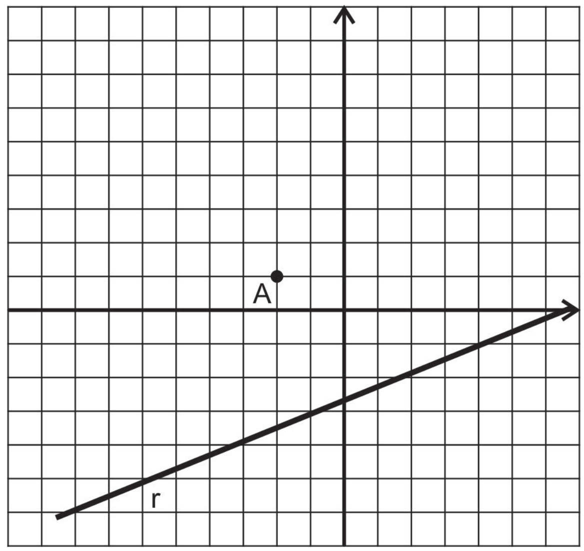


Figura 6.3: O ponto A é o local de trabalho de Elaine e a reta r é por onde o veículo que Rafael conduz passa

trabalho?

Material de apoio: Papel milimetrado.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Observação para o professor: As duas questões dessa atividade estão relacionadas com figuras geométricas. Antes de traçar as figuras para resolver a situação problema do casal, é importante o professor discutir com os alunos quais os conceitos envolvidos em cada questão. Na questão 1 estamos procurando pelo conjunto de pontos que estão a uma mesma distância dos locais de trabalho do casal, logo estamos procurando pela Mediatriz Táxi do segmento de extremidades nos pontos A e B, veja a figura 6.4. Na questão 2 novamente estamos procurando pelo conjunto de pontos que estão a uma mesma distância dos locais de trabalho do casal, mas agora esse conjunto dista do ponto A e da reta r, logo estamos procurando pela Parábola Táxi, veja a figura 6.5. Para o item (a) devemos considerar todos os pontos da Parábola Táxi, pois equidistam do ponto A e da reta r. No item (b), a resposta são os pontos da Parábola Táxi que estão no Círculo Táxi de raio 6 e centro em A ou no seu interior, como está destacado na figura. Apesar das questões serem problemas fictícios, os alunos podem identificá-los como problemas do mundo real, portanto esse é um momento interessante para se discutir qual é o cálculo de distância mais indicado para a situação, a distância táxi ou a distância euclidiana. Para traçar as figuras o professor pode sugerir aos alunos um procedimento semelhante ao descrito nos exemplos de cada uma das figuras contidos no capítulo 5.

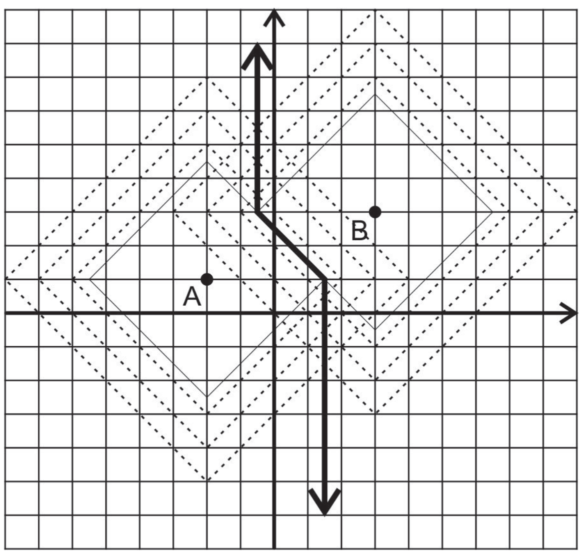


Figura 6.4: Resposta da questão 1

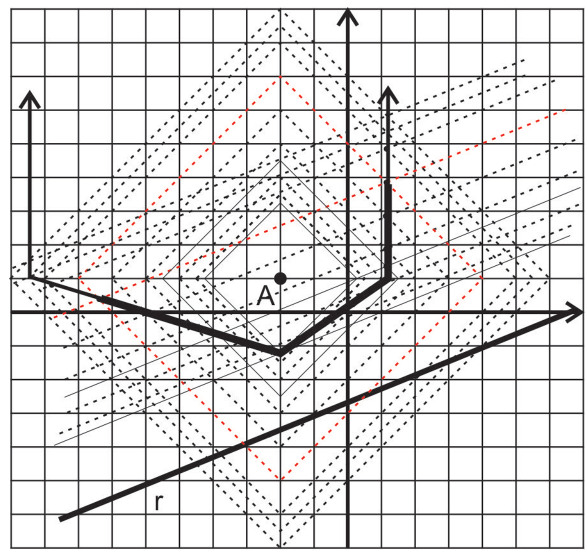


Figura 6.5: Resposta da questão 2, a parte destacada da Parábola Táxi responde o item (b)

Considerações Finais

A Geometria Euclidiana é a geometria ensinada nas escolas desde o ensino básico até o ensino superior. Muitas vezes, essa é a única geometria que o aluno tem contato, porém sabemos que existem outras Geometrias não-Euclidianas tão importantes quanto, mas que não são incluídas no planejamento curricular por várias razões. As Geometrias não-Euclidianas que são simples de se entender, são muito diferentes da geometria ensinada na escola, ou ao contrário, as que são próximas da Geometria Euclidiana tendem a ser muito difícies.

Mas felizmente a Geometria do Táxi é uma Geometria não-Euclidiana muito semelhante à Geometria Euclidiana e de fácil compreensão, portanto, é uma geometria que pode ser ensinada nas escolas, trazendo muitas contribuições, pois além de ser uma novidade, ela possui muitas aplicações a problemas na geografia urbana, ou seja, é um modelo mais adequado aos problemas relacionados a distâncias entre locais urbanos, fazendo com que seja uma rica fonte de problemas reais que estão ao alcance do aluno.

Este trabalho visa apresentar os conceitos, propriedades e características da Geometria do Táxi, pois acreditamos que divulgar essa geometria possa beneficiar professores e futuros professores de matemática. O conhecimento de uma geometria diferente e interessante pode enriquecer as aulas e torná-las mais dinâmicas e contextualizadas com problemas reais para os alunos.

Após um estudo bibliográfico de autores experientes no assunto, elaboramos uma sequência de atividades sobre o tema para serem trabalhadas em sala de aula, assim os professores que se interessarem em ensinar essa geometria já terão um material para iniciar, podendo depois com suas experiências incrementar as atividades necessárias. Concluímos este trabalho esperando que o mesmo sirva para melhorar cada vez mais o Ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, S., Encontro com o Mundo não Euclidiano. *XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2006.

[2] ÁVILA, G., Euclides, Geometria e Fundamentos. *Revista do Professor de Matemática,* SBM, n. 45, p. 1-5, 2002.

[3] ÁVILA, G., Legendre e o Postulado das Paralelas. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, n. 22, p. 16-28, 1992.

[4] BARBOSA, J. L. M., Geometria Euclidiana Plana. *Coleção do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[5] BARRICHELO, Leonardo; RODRIGUES, Claudina Izepe; COSTA, Sueli I. Geometria do Táxi: Distâncias. *Matemática Multimídia*, Campinas. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1231>. Acesso em: 20 abr. 2014.

[6] EVES, H., Introdução à História da Matemática. *Editora da Unicamp*, 2011.

[7] FIRER, Marcelo; RODRIGUES, Claudina Izepe, Vou de Táxi. *Série: Matemática na Escola. Guia do professor.* Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191>. Acesso em: 20 abr. 2014.

[8] KALEFF, Ana Maria; NASCIMENTO, Rogério Santos do, Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do Táxi. *BOLETIM GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42, jan./jun., 2004.

[9] KRAUSE, Eugene F., Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. *Dover Publications*, New York, 1986.

[10] KRAUSE, Eugene F., Taxicab Geometry. *Mathematics Teacher*, n. 66, p. 695-706, 1973.

[11] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., A Matemática do Ensino Médio - Volume 3. *Coleção do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[12] OLIVA, W. M., A Independência do Axioma das Paralelas e as Geometrias não-Euclidianas. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, n. 2, p. 28-31, 1983.

[13] RODRIGUES, Claudina Izepe; COSTA, Sueli I, Geometria do Táxi: Formas Geométricas. *Matemática multimídia*, Campinas. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1248>. Acesso em: 20 abr. 2014.

[14] WANDERLEY, A. J. M, Como Melhorar a Vida de um Casal Usando uma Geometria não-Euclidiana. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, n. 50, p. 23-30, 2002.

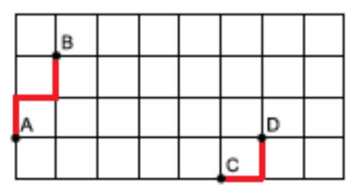
Apêndice

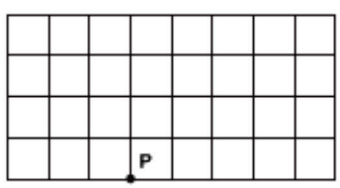
Estamos anexando a questão 5 da Segunda Fase do Nível 1 da 9ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP 2013, pois a mesma trata de distâncias entre esquinas percorrendo ruas representadas por linhas horizontais e verticais. Logo a questão pede a distância táxi entre as esquinas dadas, ou seja, é uma questão sobre a Geometria do Táxi. O nível 1 da OBMEP é destinado aos alunos de 6º e 7º ano do ensino fundamental II.

NÍVEL 1 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

9ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2013
Semeando novos talentos para o Brasil

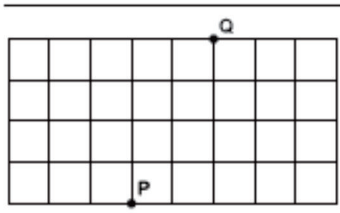
5. No quadriculado ao lado, as linhas horizontais e verticais representam ruas. Os pontos onde as ruas se cortam são as esquinas e a distância entre duas esquinas consecutivas quaisquer é 100 metros. No quadriculado estão indicadas quatro esquinas **A**, **B**, **C** e **D**. Qualquer caminho ligando as esquinas **A** e **B** tem, no mínimo, 300 metros; dizemos então que a *distância* entre **A** e **B** é 300 metros. Do mesmo modo, a distância entre as esquinas **C** e **D** é 200 metros.





a) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas que estão a 300 metros da esquina **P**.

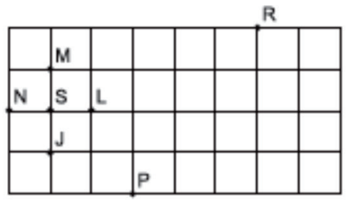
Correção Regional | Correção Nacional



b) Marque, no quadriculado ao lado, as esquinas cujas distâncias à esquina **P** e à esquina **Q** são iguais.

Correção Regional | Correção Nacional

c) A figura mostra uma esquina **S** e quatro esquinas vizinhas **J**, **L**, **M** e **N**. Calcule a soma das distâncias de cada uma dessas esquinas aos pontos **P** e **R**.



esquina	**distância a P**	**distância a R**	**distância a P + distância a R**
S			
J			
L			
M			
N			

Correção Regional | Correção Nacional

d) Explique por que não há esquinas cujas distâncias às esquinas **P** e **R**, do item anterior, sejam iguais.

Correção Regional | Correção Nacional

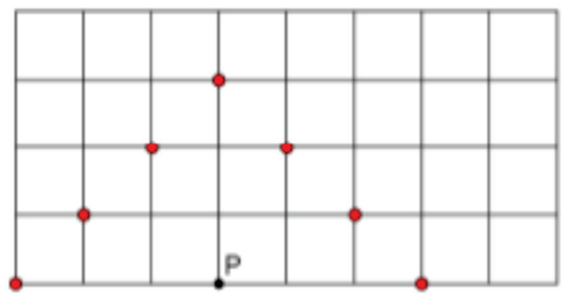
TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

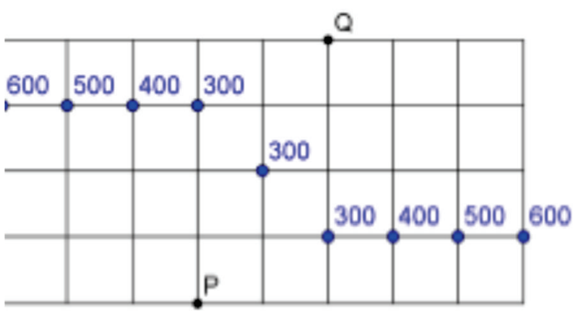
Em seguida temos também axenado a solução comentada da questão acima.

9ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2013
Somando novos talentos para o Brasil

N1Q5

a) As esquinas que estão a 300 metros da esquina **P** aparecem assinaladas em vermelho ao lado.





b) As esquinas equidistantes de **P** e de **Q** aparecem em azul na figura ao lado, com a indicação de suas distâncias a **P** e **Q**.

c) A tabela preenchida aparece a seguir.

Ponto	Distância a P	Distância a R	Soma das distâncias a P e a R
S	400	700	1100
J	300	800	1100
L	300	600	900
M	500	600	1100
N	500	800	1300

d) O item anterior mostra que, ao passar de uma esquina qualquer para uma de suas vizinhas, a soma das distâncias a **P** e a **R** muda por um múltiplo de 200. Como em **S** essa soma não é um múltiplo de 200 e podemos chegar a qualquer esquina a partir de **S** passando de vizinha a vizinha, segue que essa soma não é um múltiplo de 200 em todas as esquinas. Logo não há esquina equidistante de **P** e **R**, pois em uma tal esquina a soma de suas distâncias a **P** e a **R** seria um múltiplo de 200.