



DIEGO FERNANDO DE BERNARDINI

**A FÓRMULA DE RUSSO E DESIGUALDADES DE
DESACOPLAMENTO PARA ENTRELACAMENTOS ALEATÓRIOS**

**CAMPINAS
2014**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

DIEGO FERNANDO DE BERNARDINI

**A FÓRMULA DE RUSSO E DESIGUALDADES DE
DESACOPLAMENTO PARA ENTRELACAMENTOS ALEATÓRIOS**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em estatística.

Orientador: Serguei Popov

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO DIEGO FERNANDO DE BERNARDINI, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SERGUEI POPOV.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, reading "Serguei Popov", is written over a horizontal line. The signature is cursive and fluid.

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B456f Bernardini, Diego Fernando de, 1986-
A fórmula de Russo e desigualdades de desacoplamento para entrelaçamentos aleatórios / Diego Fernando de Bernardini. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Serguei Popov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Entrelaçamentos aleatórios. 2. Passeios aleatórios (Matemática)
. 3. Percolação (Física estatística). I. Popov, Serguei, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Russo's formula and decoupling inequalities for random interlacements

Palavras-chave em inglês:

Random interlacements
Random walks (Mathematics)
Percolation (Statistical physics)

Área de concentração: Estatística

Titulação: Doutor em Estatística

Banca examinadora:

Serguei Popov [Orientador]
Christophe Frédéric Gallesco
Anatoli Iambartsev
Augusto Quadros Teixeira
Marcelo Richard Hilário

Data de defesa: 16-06-2014

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Tese de Doutorado defendida em 16 de junho de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). SERGUEI POPOV



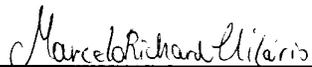
Prof(a). Dr(a). CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESKO



Prof(a). Dr(a). ANATOLI IAMBARTSEV



Prof(a). Dr(a). AUGUSTO QUADROS TEIXEIRA



Prof(a). Dr(a). MARCELO RICHARD HILÁRIO

Abstract

The random interacements model was originally introduced in order to investigate the trace left by random walks in large graphs and, basically, such process is described by a Poisson point process in a space of doubly infinite simple random walk trajectories in the d -dimensional lattice, with dimension d at least equal to three. In this sense, the process is characterized by a random tangle of trajectories of this kind. Such model also has an intensity parameter, which controls, in a certain sense, the quantity of trajectories that constitutes the process.

A relevant issue in the context of this process, which has been largely studied in the literature, concerns the characterization of the dependence relation (through the covariance) between the so-called increasing events in this model, which are supported on disjoint subsets of the lattice, and this is precisely the issue on which we focus.

In a first step in this work, we determine explicit expressions for the derivative, with respect to the intensity parameter, of the probability of an increasing event which is supported in a finite subset of the lattice, thus establishing what we call as Russo's formula for random interacements. The use of this term is justified and motivated by the widely known original term, which, in the context of the usual percolation model, provides an expression for the derivative of the probability of events defined as increasing in that model.

Then, we try to use this result to establish a first approach to the problem of the covariance between increasing events, and such investigation is essentially based in a fact about the expected number of the so-called positive pivotal (or plus pivotal) trajectories for the event of interest.

Finally, we establish a new approach to the same problem by using an alternative construction of the interacements process based on the technique of soft local times, and investigating a kind of joint "pivotality" of collections of excursions of the random walk trajectories, through the sets on which the events of interest are supported. From this approach we obtain our last result on the covariance.

Overall, we believe that the investigation and the attempt to get an increasingly accurate characterization of the above mentioned dependence relation should help to understand the interacements process and its properties in an increasingly clear way.

Resumo

O modelo de entrelaçamentos aleatórios foi introduzido no sentido de se investigar originalmente o traço deixado por passeios aleatórios em grandes grafos e, basicamente, tal processo é descrito

por um processo pontual de Poisson em um espaço de trajetórias duplamente infinitas de passeios aleatórios simples no reticulado d -dimensional, com dimensão d pelo menos igual a três. Neste sentido, o processo é caracterizado por um emaranhado aleatório de trajetórias deste tipo. Tal modelo possui ainda um parâmetro de intensidade, que controla, de certa forma, a quantidade de trajetórias que constituem o processo.

Um problema relevante no contexto deste processo, e que tem sido amplamente estudado na literatura, diz respeito à caracterização da relação de dependência (através da covariância) entre os eventos denominados como crescentes neste modelo e suportados em subconjuntos disjuntos do reticulado, e é justamente este o problema no qual nos concentramos.

Em uma primeira etapa neste trabalho, determinamos expressões explícitas para a derivada, com respeito ao parâmetro de intensidade, da probabilidade de um evento crescente e suportado em um subconjunto finito do reticulado, estabelecendo assim aquilo que denominamos como a fórmula de Russo para os entrelaçamentos aleatórios. A utilização desta denominação é justificada e motivada pelo amplamente conhecido termo original, que no contexto do modelo usual de percolação estabelece uma expressão para a derivada da probabilidade dos eventos definidos como crescentes naquele modelo.

Em seguida, tentamos utilizar este resultado no sentido de estabelecer uma primeira abordagem para o problema da covariância entre os eventos crescentes, e esta investigação é baseada essencialmente em uma observação sobre o número esperado das trajetórias então denominadas como pivotais positivas para o evento de interesse.

Por fim, estabelecemos uma nova abordagem para o mesmo problema, utilizando uma construção alternativa do processo de entrelaçamentos baseada na técnica dos *soft local times*, e investigando uma espécie de pivotalidade conjunta de coleções de excursões das trajetórias dos passeios aleatórios pelos conjuntos nos quais estão suportados os eventos de interesse. Justamente a partir desta abordagem obtemos nosso último resultado sobre a covariância.

De forma geral, acreditamos que a investigação e a tentativa de obter uma caracterização cada vez mais precisa para a relação de dependência que mencionamos deve ajudar a entender o processo de entrelaçamentos e suas propriedades de forma cada vez mais clara.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Preliminares	1
1.1 O Processo de Entrelaçamentos Aleatórios	1
1.2 A Fórmula de Russo para os Entrelaçamentos	4
1.3 Investigando a Covariância	5
1.4 Uma Nova Investigação sobre a Covariância	8
2 A Fórmula de Russo para o Modelo de Entrelaçamentos Aleatórios	13
2.1 Introdução e Definições Preliminares	13
2.2 O Processo de Entrelaçamentos Aleatórios	14
2.3 A Fórmula de Russo para o Processo de Percolação	21
2.4 A Fórmula de Russo para os Entrelaçamentos Aleatórios	24
2.4.1 Analiticidade	24
2.4.2 Derivadas Laterais	26
2.4.3 Uma Verificação	39
2.4.4 Uma Outra Expressão	42
2.4.5 Algumas Consequências	47
3 Dependência entre Eventos Crescentes	49
3.1 Preliminares	49
3.2 Uma Cota para a Covariância	51
4 Uma Nova Cota para a Covariância	75
4.1 O Processo da Sopa de Minhocas: Introdução e Definições	75
4.2 A Fórmula de Russo para a Sopa de Minhocas	77
4.3 Os <i>Soft Local Times</i>	81
4.3.1 Os <i>Soft Local Times</i> e os Entrelaçamentos Aleatórios	85
4.4 O Processo das Colheiradas de Minhocas	86
4.4.1 A Fórmula de Russo para o Processo das Colheiradas	92
4.4.2 Investigando as Colheiradas Pivotaes Positivas	95

4.5 As Colheiradas de Minhocas e os *Soft Local Times*: Uma Outra Cota para a Covariância 97

Referências Bibliográficas **113**

Aos meus pais, Mariangela e Flávio, e aos meus irmãos, Leilane e Alex.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a família que tenho.

Aos meus pais e irmãos, que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida, especialmente diante dos desafios e dificuldades eventualmente impostos pelas minhas escolhas. E em particular, ao meu irmão Alex, que admiro imensamente, e cujo exemplo e incentivo me ajudaram muito a chegar até aqui.

À professora Marina Vachkovskaia, que depositou sua confiança em minha capacidade desde o início de meu doutorado.

Ao meu estimado orientador, professor Serguei, que me acompanhou de perto ao longo de toda esta jornada, com muita paciência e generosidade, sempre me motivando e me incentivando a superar as dificuldades que surgiram ao longo do caminho, e que contribuiu de forma incomensurável para a concretização deste trabalho e especialmente para a minha formação.

À CAPES, que proporcionou o financiamento de minha bolsa de doutorado, tornando possível a realização deste trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora, professores Anatoli Iambartsev, Augusto Quadros Teixeira, Christophe Frédéric Gallesco e Marcelo Richard Hilário, que muito contribuíram com seus comentários, sugestões e correções.

Lista de Ilustrações

2.1	O processo pontual de Poisson em $W^* \times \mathbb{R}_+$ e o acoplamento dos processos em $W^* \times [0, u]$, para todos os níveis $u > 0$	16
2.2	O mapeamento $\mu_{G,u}$. Nesta ilustração, todas as trajetórias visitando o conjunto G possuem índices menores do que ou iguais a u	18
2.3	Exemplo de uma realização do processo de entrelaçamentos restrito à G , em \mathbb{Z}^3 . Nesta representação, o evento $A = \{\omega \in \Omega^{G,+} : \mathcal{I}_G^u \geq G /2\}$ está ocorrendo sob esta configuração de trajetórias.	20
2.4	Nesta configuração de trajetórias, os pontos v e z em G estão conectados por um caminho finito τ (segmento tracejado), totalmente contido em \mathcal{I}_G^u	20
2.5	Exemplo de uma realização (parcial) do processo de percolação por elos em \mathbb{Z}^2 . Os elos sólidos estão abertos e os elos tracejados estão fechados.	23
2.6	O acoplamento dos processos de entrelaçamento restritos à G , para todos os níveis não negativos. Nesta ilustração, ao aumentar o nível do processo de u para $u + h$, apenas uma trajetória é incluída à configuração.	27
2.7	Ao diminuir o nível do processo de u para $u - h$, algumas trajetórias podem ser retiradas da configuração. Se o evento A ocorre no nível u e pelo menos uma das trajetórias retiradas é pivotal positiva, então o evento deixa de ocorrer no nível $u - h$. Da mesma forma, se uma coleção de trajetórias com níveis entre $u - h$ e u fazem com que o evento deixe de ocorrer ao serem simultaneamente retiradas da configuração, então o evento também deixará de ocorrer no nível $u - h$	33
3.1	A decomposição do processo $\mu_{G,u}$. As trajetórias tracejadas compõem o processo $\mu_{1,2}$, e as trajetórias sólidas, à esquerda e à direita, compõem respectivamente os processos μ_1 e μ_2	52
3.2	Os conjuntos G_1 , G_2 e \mathcal{B}_2 . Nesta ilustração temos $\mu_{G_2,u} = m$ e $\mu_{1,2} = 1$, ou seja, o processo de entrelaçamentos restrito à G_2 no nível u possui m trajetórias, das quais apenas uma ($w_{1,2}$) visita também o conjunto G_1	66
3.3	Os conjuntos G_1 , G_2 e \mathcal{C}_2 . O raio R é igual a $2\text{diam}(G_2)$. Nesta ilustração temos $\mu_{G_2,u} = m$ e $\mu_{1,2} = 1$, e a trajetória $w_{1,2}$ (ou o passeio $X^{(*)}$) é correspondente ao passeio $X^{(j)}$	70

4.1	Nesta ilustração, o conjunto V é representado pela curva que cerca o conjunto C , separando-o do infinito. Os trechos sólidos das trajetórias representam as excursões que se iniciam na fronteira de C e terminam em V . Os tempos de parada $\{D_k\}_k$ e $\{R_k\}_k$ serão definidos mais adiante, na subseção 4.3.1.	76
4.2	Ilustração de uma realização da configuração η em Θ , sob a lei \mathbb{Q}	77
4.3	O processo pontual de Poisson em $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+$, e o acoplamento entre os processos em $\Sigma_C \times [0, v]$, para todos os níveis $v > 0$	78
4.4	A construção das sequências $\{\xi_n\}$, $\{G_n\}$ e $\{(z_n, v_n)\}$. Cada curva G_n passa por um, e apenas um, ponto do processo pontual.	83
4.5	A construção das sequências $\{\xi_n^m\}$, $\{G_n^m\}$ e $\{(z_n^m, v_n^m)\}$. A função $G_k^j(\cdot)$ denota o <i>soft local time</i> da j -ésima cadeia, até o tempo k	84
4.6	As colheiradas no processo da sopa de minhocas. Nesta ilustração, os pontos correspondentes ao processo da sopa de minhocas, bem como as colheiradas, estão “projetados” no “plano vertical” $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+$. A k -colheirada η_k^u , por exemplo, possui 6 excursões nesta ilustração.	89
4.7	Os conjuntos C_1 , C_2 e V em \mathbb{Z}^d . À esquerda, C_1 e o complementar de C_2 são finitos, e à direita C_1 e C_2 são finitos. Em ambos os casos, o conjunto V é finito e separa C_1 de C_2	98
4.8	O processo pontual de Poisson em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+ \times [0, t]$ (à esquerda) e sua projeção em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$, dando origem ao processo η^* (à direita).	99
4.9	O processo pontual de Poisson η^* em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$, as colheiradas η_n^{t, C_1} e η_n^{t, C_2} de nível t projetadas em $\Sigma_{C_1} \times \mathbb{R}_+$ e em $\Sigma_{C_2} \times \mathbb{R}_+$, e os <i>soft local times</i> acumulados. Nesta figura, denotamos $a_h = h \text{cap}(V)$	101
4.10	Uma ilustração dos conjuntos $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ e V , conforme estabelecidos em (4.5.8) e (4.5.9).	103

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo do presente trabalho, pretendemos apresentar da forma mais clara e breve possível as principais definições e conceitos que envolvem os objetos que estudamos, no sentido de contextualizar os assuntos que abordamos nos capítulos subsequentes, bem como expor os problemas que nos propusemos a investigar e os principais resultados alcançados.

1.1 O Processo de Entrelaçamentos Aleatórios

O processo de passeios aleatórios tem sido amplamente estudado nas últimas décadas, por sua clara importância teórica e também devido à existência de uma vasta quantidade de aplicações. Este processo constitui um dos modelos estocásticos mais simples e usuais para situações relacionadas por exemplo à movimentação de partículas, propagação de calor, deslocamento de fluidos, dentre outros processos físicos de transporte.

O processo de entrelaçamentos aleatórios, por sua vez, foi introduzido por Alain-Sol Sznitman em [22], motivado por uma questão que relacionava os passeios aleatórios e a corrosão de materiais. Mais especificamente, sua construção foi motivada pela investigação do traço deixado pelas trajetórias de passeios aleatórios em grafos muito grandes, como por exemplo um toro discreto muito grande.

Naturalmente, este modelo possui uma grande e clara importância, do ponto de vista teórico e prático, devido por exemplo à sua própria natureza, que é amplamente relacionada com a teoria de percolação e com a física estatística.

A grosso modo, o modelo de entrelaçamentos aleatórios é caracterizado por um processo pontual de Poisson em um espaço de trajetórias duplamente infinitas de passeios aleatórios simples em \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$), de tal forma que uma realização do processo será basicamente um emaranhado aleatório (“poissoniano”) de tais trajetórias. Este processo possui ainda um parâmetro de intensidade $u > 0$ que controla de certa forma o emaranhado, de modo que quanto maior for o valor de u , mais trajetórias serão incluídas na realização do processo.

Para descrever o processo formalmente, precisamos antes apresentar algumas definições. Uma descrição ainda mais precisa e completa é apresentada nas seções 2.1 e 2.2.

Denotamos por W_+ e W os espaços das trajetórias, respectivamente infinitas e duplamente

infinitas, em \mathbb{Z}^d ,

$$W_+ = \left\{ w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d : \|w(n+1) - w(n)\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. \text{e } \#\{n : w(n) = y\} < \infty, \forall y \in \mathbb{Z}^d \right\},$$

$$W = \left\{ w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^d : \|w(n+1) - w(n)\| = 1, \forall n \in \mathbb{Z}, \right. \\ \left. \text{e } \#\{n : w(n) = y\} < \infty, \forall y \in \mathbb{Z}^d \right\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana, e consideramos estes espaços respectivamente dotados das σ -álgebras \mathcal{W}_+ e \mathcal{W} , geradas pelas coordenadas canônicas $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, respectivamente.

Adicionalmente, definimos o espaço das trajetórias *modulo time-shift* em W

$$W^* = W/\sim, \text{ onde } w \sim w' \Leftrightarrow w(\cdot) = w'(\cdot + k), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

dotado da σ -álgebra

$$\mathcal{W}^* = \left\{ B \subset W^* : (\pi^*)^{-1}(B) \in \mathcal{W} \right\},$$

onde π^* denota a projeção canônica do espaço W em W^* .

Para um subconjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, definimos sua fronteira interna

$$\partial G = \{x \in G : \|x - y\| = 1, \text{ para algum } y \notin G\},$$

e os tempos de parada

$$H_G(w) = \min\{n : X_n(w) \in G\}, \text{ para } w \in W_+ \text{ ou } w \in W, \\ \text{e } \tilde{H}_G(w) = \min\{n \geq 1 : X_n(w) \in G\}, \text{ para } w \in W_+,$$

assumindo que $\min\{\emptyset\} = \infty$. Ainda para este conjunto G , denotamos por W_G o conjunto das trajetórias em W que necessariamente visitam G ,

$$W_G = \left\{ w \in W : X_n(w) \in G, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z} \right\},$$

de modo que, pela definição de π^* , o conjunto das trajetórias *modulo time-shift* (ou seja, trajetórias em W^*) que passam necessariamente por G é dado por $W_G^* = \pi^*(W_G)$.

Neste contexto, é possível definir a medida harmônica em G ,

$$e_G(x) = P_x[\tilde{H}_G = \infty] \mathbf{1}_G(x), \text{ para } x \in \mathbb{Z}^d,$$

onde $\mathbf{1}_G$ denota a função indicadora em G e $P_x[\cdot]$ representa a lei do passeio aleatório simples iniciando em x , observando que $P_x[\tilde{H}_G = \infty]$ corresponde à probabilidade de escape do conjunto G , ou seja, a probabilidade de que o passeio aleatório simples, partindo de x , nunca retorne ao conjunto G . Por sua vez, a capacidade do conjunto G fica definida como

$$\text{cap}(G) = e_G(\mathbb{Z}^d) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e_G(x),$$

que é então utilizada para se definir a medida harmônica normalizada

$$\bar{e}_G(x) = \frac{e_G(x)}{\text{cap}(G)}, \text{ para } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Finalmente, o processo de entrelaçamentos aleatórios será governado por um processo pontual de Poisson no espaço mensurável

$$(W^* \times \mathbb{R}_+, \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)),$$

com uma medida de intensidade específica. Para descrever esta medida de intensidade, considere a medida denotada por Q_G , definida em (W, \mathcal{W}) e suportada em W_G , tal que

$$Q_G((X_{-n})_{n \geq 0} \in B_1, X_0 = x, (X_n)_{n \geq 0} \in B_2) = P_x(B_1 \mid \tilde{H}_G = \infty) e_G(x) P_x(B_2),$$

para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{W}_+$ e $x \in \mathbb{Z}^d$. Especificamente, a medida de intensidade mencionada (do processo de Poisson que governa os entrelaçamentos) será igual à medida produto $\nu \otimes \lambda_+$, onde λ_+ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}_+ e ν é a única medida σ -finita em (W^*, \mathcal{W}^*) tal que $\mathbf{1}_{W_G^*} \cdot \nu = \pi^* \circ Q_G$, para qualquer conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, onde

$$\mathbf{1}_{W_G^*} \cdot \nu(\cdot) := \nu(W_G^* \cap \cdot).$$

Complementando a caracterização do modelo, introduzimos ainda o espaço de medidas pontuais finitas em $W^* \times \mathbb{R}_+$,

$$\Omega = \left\{ \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)} : w_i^* \in W^*, u_i \in \mathbb{R}_+, \text{ tal que } \omega(W_G^* \times [0, u]) < \infty, \text{ para todo } G \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito e } u \geq 0 \right\},$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{A} gerada pelos mapeamentos $\omega \mapsto \omega(D)$, para $D \in \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, e denotamos por \mathbb{P} a lei do processo pontual de Poisson sobre (Ω, \mathcal{A}) com medida de intensidade $\nu \otimes \lambda_+$, que caracteriza o processo de entrelaçamentos aleatórios, e por \mathbb{P}_G^u a lei do processo pontual de Poisson que governa o processo de entrelaçamentos aleatórios no nível u , restrito à G . Precisamente, \mathbb{P}_G^u será a lei de um processo pontual de Poisson em W_+ com medida de intensidade igual a $u P_{e_G}$, onde

$$P_{e_G}(B) = \sum_{x \in G} e_G(x) P_x(B), \quad B \in \mathcal{W}_+.$$

Em palavras, no entrelaçamento restrito à G no nível u , uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro igual a $u \text{cap}(G)$ determina a quantidade (aleatória) de pontos na fronteira ∂G a partir dos quais são iniciados passeios aleatórios simples independentes. Cada um destes pontos é escolhido aleatoriamente em ∂G , de acordo com a medida harmônica normalizada $\bar{e}_G(x)$, para $x \in \partial G$.

Dois objetos interessantes que surgem a partir da construção deste processo são os chamados conjunto de entrelaçamento e conjunto vacante. Especificamente, para $\omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)} \in \Omega$, o conjunto de entrelaçamento no nível u é dado por

$$\mathcal{I}^u = \mathcal{I}^u(\omega) = \bigcup_{i: u_i \leq u} R(w_i^*),$$

onde $R(w_i^*)$ representa a imagem de w_i^* , ou seja, o conjunto de todos os pontos em \mathbb{Z}^d que são de fato visitados pela trajetória w_i^* . Por sua vez, o conjunto vacante no nível u é definido por

$$\mathcal{V}^u = \mathcal{V}^u(\omega) = \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u(\omega),$$

ou seja, o complementar do conjunto de entrelaçamento no nível u .

Observe que, por construção, fica estabelecida uma relação de ordem parcial entre os elementos de Ω , de tal forma que, para configurações ω e ω' neste espaço, sempre escreveremos $\omega \leq \omega'$ quando todas as trajetórias que compõem a configuração ω também estiverem presentes na configuração ω' . Com isso, é possível definir os eventos crescentes com relação a este processo. Precisamente, um evento $A \in \mathcal{A}$ é dito crescente com relação ao processo de entrelaçamentos aleatórios quando $\mathbf{1}_A(\omega) \leq \mathbf{1}_A(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$ ($\omega, \omega' \in \Omega$), ou seja, se o evento A ocorre sob uma configuração ω , então ele deve continuar ocorrendo sob qualquer configuração ω' que contenha as mesmas trajetórias da configuração inicial ω e eventualmente outras trajetórias adicionais. Além disso, dizemos que um evento é suportado no conjunto $G \subset \mathbb{Z}^d$ quando ele está definido em termos apenas dos pontos em \mathbb{Z}^d que pertencem à G .

Neste cenário, um problema que tem sido amplamente estudado na literatura nos últimos anos, como por exemplo em [22] e em [14], está relacionado com a investigação da relação de dependência entre eventos suportados em subconjuntos disjuntos em \mathbb{Z}^d . Neste contexto, vários métodos e ferramentas têm sido criados e aplicados no sentido de se obter abordagens e caracterizações cada vez mais precisas para esta dependência. Neste trabalho, essencialmente, nos concentramos em investigar esta relação de dependência (caracterizada pela covariância) especificamente entre eventos crescentes.

1.2 A Fórmula de Russo para os Entrelaçamentos

No sentido de abordar o problema que mencionamos sobre a covariância entre os eventos crescentes, determinamos, em uma etapa prévia, no capítulo 2, expressões para a derivada (com respeito ao parâmetro de intensidade u) da probabilidade de um evento A , suportado em um conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, e crescente com relação ao processo de entrelaçamentos, estabelecendo assim aquilo que denominamos como a Fórmula de Russo para os entrelaçamentos aleatórios, a qual julgamos constituir, inclusive, um resultado bastante interessante por si só. É importante ressaltar que o termo “Fórmula de Russo” se refere na realidade a um teorema conhecido na teoria de percolação, e determina uma expressão para a derivada da probabilidade de um evento definido como crescente naquele modelo, conforme discutimos na seção 2.3. É justamente devido a esta analogia que escolhemos esta denominação no contexto dos entrelaçamentos aleatórios neste trabalho.

Antes de discutir este resultado, enunciamos a próxima proposição, que é demonstrada na subseção 2.4.1 e estabelece a analiticidade (e a consequente diferenciabilidade) da probabilidade $\mathbb{P}_G^u(A)$ de qualquer evento A crescente e suportado no conjunto G .

Proposição 1.2.1. Seja G um subconjunto finito do espaço \mathbb{Z}^d , com dimensão $d \geq 3$, e considere um evento A , suportado em G e crescente com relação ao processo de entrelaçamento restrito à G . Então a probabilidade do evento A , sob a lei \mathbb{P}_G^u do entrelaçamento restrito ao conjunto G no nível u , denotada por $\mathbb{P}_G^u(A)$, como função de u , é analítica no intervalo $[0, +\infty)$.

Adicionalmente, precisamos mencionar que uma trajetória w (com índice $v \leq u$) do processo de entrelaçamento restrito à G , no nível u , é dita pivotal positiva para o evento crescente A (suportado em G) na configuração ω deste processo (restrito à G no nível u), se o evento A ocorre sob esta configuração e a trajetória w está presente em ω , mas o evento deixa de ocorrer se esta trajetória (exclusivamente) é retirada da configuração, ou seja,

$$\mathbf{1}_A(\omega) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\omega - \delta_{(w,v)}) = 0.$$

Algumas ilustrações de trajetórias deste tipo são apresentadas nas figuras 2.3 e 2.4 na seção 2.2, considerando os respectivos eventos mencionados nos exemplos a que se referem tais figuras.

Denotando então por $N_{\omega_u}^+$ o número de trajetórias pivotais positivas para o evento crescente A na configuração ω_u do processo restrito à G no nível u , podemos finalmente enunciar o

Teorema 1.2.2. (Fórmula de Russo para entrelaçamentos aleatórios). Sejam G um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d , com dimensão $d \geq 3$, e A um evento suportado em G e crescente com relação ao processo de entrelaçamentos aleatórios restrito à G . Se $\mathbb{P}_G^u(A)$ denota a probabilidade do evento A sob a lei do processo pontual de Poisson que governa este processo de entrelaçamentos restrito à G no nível u , então a derivada de $\mathbb{P}_G^u(A)$ com respeito a u pode ser escrita como

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}_G^u(A) = \frac{1}{u} E_u [N_{\omega_u}^+],$$

onde E_u representa a esperança sob a lei \mathbb{P}_G^u .

Algumas outras expressões equivalentes para esta derivada foram obtidas nas subseções 2.4.2 e 2.4.4, e todas estas expressões reunidas são apresentadas no teorema 2.4.5.

1.3 Investigando a Covariância

Como uma aplicação da fórmula de Russo para os entrelaçamentos aleatórios, tentamos utilizá-la em um primeiro momento justamente no sentido de atacar o problema da caracterização da covariância entre eventos crescentes neste processo. Essa investigação é basicamente sustentada na observação de que, como uma consequência do último teorema, o número esperado de trajetórias pivotais positivas para um evento crescente suportado em um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d , no nível u , deve ser uma quantidade de certa forma “pequena”, para a “maioria” dos valores do parâmetro u em um determinado intervalo da reta positiva. Mais precisamente, é possível mostrar, conforme

discutimos na seção 3.1, que se u_1 , u_2 e α são constantes positivas e finitas com $u_1 < u_2$ e $\alpha > 1$, então é possível definir um conjunto $D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2)$ tal que

$$E_u[N_{\omega_u}^+] \leq \frac{u\alpha}{u_2 - u_1}, \quad \forall u \in D_{u_1, u_2, \alpha},$$

com

$$\lambda_+(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

onde λ_+ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}_+ . Além disto, consequentemente

$$\mathbb{P}^u(N_{\omega_u}^+ \geq k) \leq \frac{u\alpha}{k(u_2 - u_1)}, \quad \forall u \in D_{u_1, u_2, \alpha},$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Para contextualizar o problema, considere agora dois subconjuntos disjuntos e finitos de \mathbb{Z}^d , digamos G_1 e G_2 , e também dois eventos crescentes A_1 e A_2 , respectivamente suportados nos conjuntos G_1 e G_2 . Adicionalmente, suponha que cada um destes conjuntos G_1 e G_2 não separa o outro conjunto do infinito.

No sentido de representar a covariância entre estes dois eventos segundo a abordagem que estabelecemos no capítulo 3, precisamos antes considerar algumas definições adicionais relacionadas ao processo de entrelaçamentos aleatórios. Para um conjunto finito qualquer $G \subset \mathbb{Z}^d$, definimos o mapeamento

$$s_G : W_G^* \rightarrow W$$

tal que, para $w^* \in W_G^*$, $s_G(w^*)$ será a única trajetória w no espaço W para a qual ocorre $\pi^*(w) = w^*$ e $H_G(w) = 0$, ou seja, o mapeamento s_G associa a cada trajetória duplamente infinita *modulo time-shift* que passa por G , a única trajetória duplamente infinita que visita o conjunto G pela primeira vez exatamente no instante zero, e cuja projeção por π^* é exatamente a trajetória (*modulo time-shift*) original. Adicionalmente, para uma trajetória $w \in W$, denotamos por w^+ a trajetória em W_+ que corresponde ao caminho desenvolvido por w a partir do instante zero, ignorando o passado de w anterior a este instante, ou seja, $w^+ = \{X_i(w)\}_{i=0}^\infty$, onde $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ representa as coordenadas canônicas das trajetórias no espaço W .

Além disso, consideramos o espaço das medidas pontuais finitas em W_+ ,

$$\Omega_+ = \left\{ \omega_+ = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)} : w_i \in W_+, u_i \in \mathbb{R}_+, \text{ tal que} \right. \\ \left. \omega_+(W_+ \times [0, u]) < \infty, \text{ para todo } u \geq 0 \right\},$$

e finalmente o mapeamento $\mu_{G, u} : \Omega \rightarrow \Omega_+$ dado por

$$\mu_{G, u}(\omega) = \sum_{\substack{i: w_i^* \in W_G^*, \\ u_i \leq u}} \delta_{(s_G(w_i^*)^+, u_i)}, \quad \text{para } \omega = \sum_i \delta_{(w_i^*, u_i)} \in \Omega,$$

de tal forma que $\mu_{G, u}$ será uma medida pontual em Ω_+ , representando uma configuração de trajetórias (unilaterais) infinitas que se iniciam na fronteira de G , todas com níveis menores do que ou

iguais a u , ou seja, esta será justamente uma configuração de trajetórias do processo de entrelaçamentos aleatórios restrito à G , no nível u .

Assumimos então, em particular, que $G = G_1 \cup G_2$. Com isso, a covariância que mencionamos pode ser representada por

$$E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u}) \right] - E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \right] E_u \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u}) \right],$$

e um dos resultados que obtivemos pode ser enunciado como o seguinte teorema, que é apresentado ao final do capítulo 3.

Teorema 1.3.1. Sejam G_1 e G_2 dois subconjuntos disjuntos e finitos de \mathbb{Z}^d (com $d \geq 3$), e tais que nenhum deles separa o outro do infinito. Considere A_1 e A_2 dois eventos suportados respectivamente em G_1 e G_2 , e crescentes com relação ao entrelaçamento aleatório restrito à $G = G_1 \cup G_2$. Denote $\Gamma := \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2)$, defina ainda a distância entre os conjuntos G_1 e G_2 ,

$$\Delta_G := \inf_{x \in G_1, y \in G_2} \|x - y\|,$$

e suponha que $\Delta_G > 4 \max\{\text{diam}(G_1), \text{diam}(G_2)\}$. Então, para quaisquer constantes u_1 e u_2 tais que $0 \leq u_1 < u_2 < \infty$, e $\alpha > 1$, existem constantes positivas e finitas c_1 , c_2 e c_3 (com c_2 dependendo de d e dos diâmetros de G_1 e de G_2) tais que

$$\begin{aligned} & \left| E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u}) \right] - E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \right] E_u \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u}) \right] \right| \\ & \leq 4u\Gamma \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \left[4u\Gamma \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} + \frac{c_3\alpha u}{(u_2 - u_1)} \exp \left\{ -u\Gamma \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \right\} \right], \end{aligned}$$

para todo u pertencente a um conjunto $D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2)$ tal que

$$\lambda_+(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right).$$

A demonstração deste resultado é discutida na seção 3.2, e é baseada em princípio na observação sobre o número de trajetórias pivotais positivas que mencionamos no início desta seção, e em uma decomposição do processo pontual de Poisson $\mu_{G,u}$ que governa a configuração de trajetórias que se iniciam na fronteira de $G_1 \cup G_2$. Mais especificamente, consideramos que

$$\mu_{G,u} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_{1,2},$$

onde μ_1 representa o processo $\mu_{G,u}$ restrito às trajetórias que se iniciam na fronteira de G_1 e nunca visitam G_2 , μ_2 representa este processo restrito às trajetórias que se iniciam na fronteira de G_2 e nunca visitam G_1 , e por fim $\mu_{1,2}$ representa o processo $\mu_{G,u}$ restrito às trajetórias que se iniciam ou na fronteira de G_1 ou na fronteira de G_2 e posteriormente visitam o outro conjunto em algum tempo finito. Para os detalhes, veja a seção 3.2.

É importante ressaltar que este resultado aparentemente não estabelece nenhum ganho ou melhora significativa sobre outros resultados já existentes na literatura, pois apresenta um decaimento polinomial da covariância em termos da distância entre os conjuntos sobre os quais os eventos de

interesse estão suportados. Em particular, devemos mencionar que uma cota da forma do fator que aparece fora dos colchetes neste resultado já havia sido estabelecida na literatura.

No entanto, julgamos que a técnica empregada ao longo do desenvolvimento que culmina neste teorema é bastante interessante e construtiva, podendo ser, inclusive, eventualmente adaptada à outras situações semelhantes ou mesmo podendo ser ainda refinada no sentido de abordar o mesmo problema.

1.4 Uma Nova Investigação sobre a Covariância

Prosseguindo com o objetivo de investigar o problema da caracterização da covariância entre os eventos crescentes no processo de entrelaçamentos aleatórios, tentamos em uma etapa subsequente, no capítulo 4, estabelecer uma nova abordagem para este problema, considerando uma construção alternativa do próprio processo de entrelaçamentos aleatórios.

Para descrever esta abordagem, precisamos inicialmente apresentar o processo da “sopa de minhocas”, que foi introduzido por Serguei Popov e Augusto Teixeira em [14]. Devemos mencionar que uma “versão” deste processo já havia aparecido no artigo de Sznitman, [22].

Neste sentido, considere dois subconjuntos disjuntos C e V do espaço \mathbb{Z}^d , tais que V e ∂C sejam finitos, novamente assumindo que $d \geq 3$. Se o próprio conjunto C for finito, assumimos que o conjunto V o separa do infinito, ou seja, qualquer trajetória que parte de C e segue para o infinito deve necessariamente atravessar o conjunto V (veja a figura 4.1 para um exemplo).

Consideramos então o contexto introduzido por Popov e Teixeira em [14], seção 5.2, onde são investigados os traços deixados no conjunto C pelas trajetórias dos passeios aleatórios que compõem o processo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d a partir do instante de suas primeiras visitas ao conjunto V , observando que essas trajetórias realizam várias excursões entre C e V antes de divergirem para o infinito. O processo da sopa de minhocas foi introduzido justamente no sentido de simular tais excursões dos passeios aleatórios que compõem o entrelaçamento.

Mais precisamente, considere o espaço de excursões entre C e V ,

$$\Sigma_C = \{\Delta\} \cup \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots, x_k) : x_n \in \mathbb{Z}^d, \quad n = 1, \dots, k, \quad \|x_{i+1} - x_i\| = 1, \\ i = 1, \dots, k-1, \quad x_1 \in \partial C, \quad x_j \notin V, \quad j = 2, \dots, k-1, \quad x_k \in V \end{array} \right\} \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{Z}^d, \quad n \geq 1, \quad \|x_{i+1} - x_i\| = 1, \quad i \geq 1, \\ x_1 \in \partial C, \quad x_j \notin V, \quad j \geq 2 \end{array} \right\},$$

onde Δ denota o elemento deste espaço que representa o fato de uma trajetória ter divergido para o infinito. Adicionalmente, assuma que este espaço é dotado da σ -álgebra \mathcal{S}_C gerada pelas coordenadas canônicas em Σ_C , e considere a medida

$$\mu_C(\cdot) = \sum_{x \in \partial C} P_x[(X_0, X_1, \dots, X_{H_V}) \in \cdot] + \delta_\Delta(\cdot)$$

definida em $(\Sigma_C, \mathcal{S}_C)$.

O então mencionado processo da sopa de minhocas é definido por um processo pontual de Poisson em

$$(\Sigma_C \times \mathbb{R}_+, \mathcal{S}_C \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$$

com medida de intensidade igual a $\mu_C \otimes \lambda_+$, e para complementar a caracterização deste processo, consideramos o espaço de medidas pontuais

$$\Theta = \left\{ \eta = \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{T} gerada pelos mapeamentos $\eta \mapsto \eta(D)$, para $D \in \mathcal{S}_C \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, e denotamos por \mathbb{Q} a lei do processo pontual de Poisson mencionado acima, sobre (Θ, \mathcal{T}) .

Analogamente ao que ocorre no processo de entrelaçamentos aleatórios, agora sob a lei \mathbb{Q} os elementos η em Θ podem ser vistos como configurações aleatórias de excursões de passeios aleatórios simples entre C e V , com seus respectivos índices $v_i \in \mathbb{R}_+$ (veja a figura 4.2).

Além disto, para $v > 0$, denotamos por \mathbb{Q}^v a lei deste processo de Poisson restrito à $\Sigma_C \times [0, v]$, de tal forma que neste processo são consideradas apenas excursões com índices menores do que ou iguais a v . Assim, a lei \mathbb{Q}^v do processo no nível v estará definida sobre o espaço

$$\Theta_v = \left\{ \eta = \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i \in [0, v] \right\},$$

e de maneira geral denotamos por η_v um elemento de Θ_v cuja lei é justamente \mathbb{Q}^v .

Novamente de forma análoga ao que acontece no modelo de entrelaçamentos aleatórios, observamos que fica caracterizada uma relação de ordem parcial entre os elementos de Θ . Se η e η' são duas configurações de excursões em Θ , escrevemos $\eta \leq \eta'$ se todas as excursões presentes em η também estão presentes em η' .

Se $A \in \mathcal{T}$ for um evento agora suportado em C , dizemos que este evento é crescente com relação ao processo da sopa de minhocas se, para $\eta, \eta' \in \Theta$,

$$\mathbf{1}_A(\eta) \leq \mathbf{1}_A(\eta') \quad \text{sempre que} \quad \eta \leq \eta',$$

ou seja, se o evento A ocorre sob uma determinada configuração de excursões, então este evento continuará ocorrendo se mais excursões forem acrescentadas à configuração inicial.

Ao longo da construção do capítulo 4, explorando o problema da covariância ao qual nos referimos recorrentemente, obtivemos eventualmente alguns resultados periféricos interessantes que podem ser mencionados, como por exemplo a próxima proposição e o próximo teorema, os quais são demonstrados na seção 4.2.

Proposição 1.4.1. Se $C \subset \mathbb{Z}^d$ é finito ou tal que sua fronteira ∂C é finita, $d \geq 3$, e A é um evento suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas, então a probabilidade de A sob a lei \mathbb{Q}^v do processo no nível v , denotada por $\mathbb{Q}^v(A)$, é uma função analítica de v no intervalo $[0, +\infty)$.

Esta proposição garante portanto a diferenciabilidade (em v) da probabilidade $\mathbb{Q}^v(A)$ de um evento suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas.

Mais uma vez de maneira análoga ao caso dos entrelaçamentos aleatórios, agora no presente contexto dizemos que a excursão $z \in \Sigma_C$ (com respectivo índice $v' \leq v$) é pivotal positiva para o evento crescente A (suportado em C) na configuração η_v se z está presente em η_v e

$$\mathbf{1}_A(\eta_v) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\eta_v - \delta_{(z, v')}) = 0,$$

ou seja, o evento A ocorre na presença de z no nível v , mas deixa de ocorrer quando z é (exclusivamente) retirada da configuração. Denotamos então por $N_{\eta_v}^+$ o número de excursões pivotais positivas para o evento A na configuração η_v do processo no nível v .

Com isto, podemos então enunciar também o

Teorema 1.4.2. Sob as hipóteses da proposição anterior,

$$\frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A) = \frac{1}{v} E_{\mathbb{Q}^v} [N_{\eta_v}^+].$$

onde $E_{\mathbb{Q}^v}$ denota a esperança sob a lei \mathbb{Q}^v do processo da sopa de minhocas no nível v .

Conforme comentamos no início desta seção, levamos em conta no capítulo 4 uma construção alternativa do processo de entrelaçamentos aleatórios. Tal construção é baseada especificamente na chamada técnica dos *soft local times* de um processo.

Originalmente, os *soft local times* de um processo estocástico foram definidos por Popov e Teixeira em [14], no sentido de construir um método para obter uma dominação estocástica aproximada entre os traços (ou imagens) de duas cadeias definidas no mesmo espaço de estados. Em princípio, a técnica consiste basicamente em se realizar uma simulação de um processo estocástico a partir de uma realização de um determinado processo pontual de Poisson. Uma descrição completa é apresentada na seção 4.3.

Os mesmos autores utilizam então, ainda em [14], a técnica dos *soft local times* no contexto do processo da sopa de minhocas para simular as excursões sucessivas pelo conjunto $C \subset \mathbb{Z}^d$, de trajetórias de passeios aleatórios simples independentes, até que esses passeios divirjam para o infinito, estabelecendo assim uma construção alternativa do processo de entrelaçamentos aleatórios restrito ao conjunto C . Esta construção, por sua vez, é discutida em detalhe na subseção 4.3.1.

Para tratar, neste novo contexto, o problema da covariância entre os eventos crescentes com relação ao processo de entrelaçamentos aleatórios, exploramos em um certo sentido o comportamento conjunto de uma coleção de excursões em Σ_C , ou mais especificamente, investigamos uma espécie de pivotalidade conjunta de uma tal coleção de excursões. Para isso, introduzimos na seção 4.4 uma certa adaptação do processo da sopa de minhocas, dando origem ao que denominamos processo das “colheiradas de minhocas”. Vale mencionar que, no contexto deste novo processo, foram obtidos resultados análogos à proposição 1.4.1 e ao teorema 1.4.2. Tais resultados são apresentados e demonstrados na subseção 4.4.1.

Finalmente, utilizando este processo das colheiradas de minhocas, e em particular o conceito (introduzido na seção 4.4) de colheiradas pivotais positivas para um evento crescente neste processo, juntamente com a técnica dos *soft local times*, além de alguns resultados relacionados à estimação de grandes desvios, pudemos então estabelecer, na seção 4.5, o teorema que enunciamos agora, o qual estabelece uma outra cota para a covariância entre eventos crescentes no processo de entrelaçamentos aleatórios.

Teorema 1.4.3. Sejam C_1 e C_2 dois subconjuntos finitos e disjuntos de \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$), com diâmetros respectivamente iguais a r_1 e r_2 , e afastados um do outro por uma distância igual a s . Considere então A_1 e A_2 , eventos crescentes com respeito ao processo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d , respectivamente suportados em C_1 e C_2 . Fixando $\delta > 0$ e $\zeta > 2(1 + \delta)$, então para

qualquer $\varepsilon \in (0, 1)$, existem constantes c_2, c_3 e c_4 estritamente positivas e finitas que dependem apenas da dimensão d , tais que, definindo

$$n_\varepsilon := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\zeta}{\delta \sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n} + 1)}{2n} \leq \varepsilon \right\} \quad \text{e} \quad N_\varepsilon := \max \left\{ n_\varepsilon, \lceil c_2 \rceil \right\},$$

teremos

$$|\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)| \leq 1 - (1 - \varepsilon)^2 \times \left(1 - c_3(r_1 + r_2 + s)^d \exp \left\{ -c_4 \frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon^4} vts^{d-2} \right\} \right),$$

para todo $v \in \mathbb{R}_+$ e todo $t \in \tilde{L}_\delta^\zeta \subset (1, 1 + \delta)$, desde que a distância s seja tal que o segundo fator do produto nesta cota seja positivo, e onde

$$\lambda_+(\tilde{L}_\delta^\zeta) \geq \delta \left(1 - \frac{2(1 + \delta)}{\zeta} \right).$$

O desenvolvimento que leva a este resultado é apresentado em detalhes na seção 4.5.

Observe que, dependendo da escolha dos parâmetros δ e ζ , este teorema estabelece uma cota para a covariância, não exatamente no nível $v \in \mathbb{R}_+$ do processo de entrelaçamentos, mas para a “maioria” dos níveis no intervalo $(v, v + \delta v)$.

Capítulo 2

A Fórmula de Russo para o Modelo de Entrelaçamentos Aleatórios

Neste capítulo, em um primeiro momento, apresentamos de forma detalhada as definições e os conceitos que envolvem o modelo de entrelaçamentos aleatórios, sobre o qual essencialmente se sustentam as investigações do presente trabalho. Em seguida, discutimos brevemente a fórmula de Russo para o processo de percolação usual, por sua vez justificando a utilização deste termo no contexto dos entrelaçamentos, quando, logo em seguida, determinamos expressões explícitas para a derivada da probabilidade dos eventos denominados como crescentes neste processo, com respeito ao parâmetro de intensidade do modelo.

2.1 Introdução e Definições Preliminares

Considere um processo estocástico $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ representando especificamente um passeio aleatório simples no espaço \mathbb{Z}^d , com dimensão $d \geq 3$, constituído dos pontos com coordenadas inteiras. Considere ainda um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d , digamos $G \subset \mathbb{Z}^d$, e defina os tempos de parada

$$H_G = \min\{n : X_n \in G\} \quad \text{e} \quad \tilde{H}_G = \min\{n \geq 1 : X_n \in G\}, \quad (2.1.1)$$

que representam, respectivamente, o tempo da primeira visita ao conjunto G e o tempo de retorno ao conjunto G , pelo passeio aleatório. Defina também a fronteira (interna) ∂G do conjunto G ,

$$\partial G = \{x \in G : \|x - y\| = 1, \text{ para algum } y \notin G\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana.

Neste contexto, é possível definir a medida harmônica, denotada por $e_G(\cdot)$,

$$e_G(x) = P_x[\tilde{H}_G = \infty] \mathbf{1}_{\{x \in G\}}, \text{ para } x \in \mathbb{Z}^d,$$

onde $P_x[\cdot]$ representa a lei do passeio aleatório simples iniciando em x , observando que $P_x[\tilde{H}_G = \infty]$ corresponde à probabilidade de escape do conjunto G , ou seja, a probabilidade de que o passeio

aleatório simples, partindo de x , nunca retorne ao conjunto G . Desta maneira, $e_G(x)$ é igual a essa probabilidade quando $x \in G$, e é igual a zero quando $x \notin G$. Mais precisamente, observe que $e_G(x) = 0$ para todo $x \notin \partial G$, ou seja, a medida harmônica é igual a zero em todos os pontos de \mathbb{Z}^d fora da fronteira de G , inclusive nos pontos de G que não fazem parte da fronteira.

Por sua vez, a capacidade do conjunto G fica definida como

$$\text{cap}(G) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e_G(x).$$

Note ainda que a medida harmônica $e_G(\cdot)$ pode ser normalizada pela capacidade $\text{cap}(G)$ do conjunto G , dando origem a uma medida de probabilidade chamada medida harmônica normalizada em G , e denotada por $\bar{e}_G(\cdot)$,

$$\bar{e}_G(x) = \frac{e_G(x)}{\text{cap}(G)}, \text{ para } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Naturalmente, assim como a medida harmônica, a medida harmônica normalizada é também igual a zero em todo ponto de \mathbb{Z}^d que não pertence à fronteira ∂G .

2.2 O Processo de Entrelaçamentos Aleatórios

Vamos descrever agora o modelo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d introduzido por Alain-Sol Sznitman ([22]), denotando por \mathcal{I}_G^u o conjunto de entrelaçamento no nível u , restrito ao conjunto G , com $u \geq 0$.

Em palavras, no entrelaçamento restrito à G , uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro igual a $u \text{cap}(G)$ determina a quantidade (aleatória) de pontos na fronteira ∂G de G a partir dos quais são iniciados passeios aleatórios simples independentes. Cada um destes pontos é escolhido aleatoriamente em ∂G , de acordo com a medida harmônica normalizada $\bar{e}_G(x)$, para $x \in \partial G$.

Para descrever este processo de entrelaçamentos aleatórios formalmente, precisamos antes definir o espaço das trajetórias duplamente infinitas em \mathbb{Z}^d e também o espaço das trajetórias *modulo time-shift* neste último espaço.

O espaço das trajetórias duplamente infinitas em \mathbb{Z}^d é dado por

$$W = \left\{ w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^d : \|w(n+1) - w(n)\| = 1, \forall n \in \mathbb{Z}, \right. \\ \left. \text{e } \#\{n : w(n) = y\} < \infty, \forall y \in \mathbb{Z}^d \right\}. \quad (2.2.1)$$

Note que os elementos que compõem o espaço W , ou seja, as trajetórias duplamente infinitas, são simplesmente funções que, a cada número inteiro n representando o tempo, associam um ponto em \mathbb{Z}^d , e além disso, essas trajetórias visitam qualquer subconjunto finito de \mathbb{Z}^d apenas um número finito de vezes.

Se denotamos por X_n , $n \in \mathbb{Z}$, as coordenadas canônicas de elementos em W , de modo que $X_n(w) = w(n)$ para $w \in W$, é possível estabelecer a σ -álgebra \mathcal{W} de subconjuntos de W , gerada pelas próprias coordenadas canônicas.

Por sua vez, o espaço das trajetórias *modulo time-shift* em W é definido por

$$W^* = W/\sim, \text{ onde } w \sim w' \Leftrightarrow w(\cdot) = w'(\cdot + k), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z},$$

que representa o espaço W fracionado com respeito à relação de equivalência descrita acima. Assim, no espaço W^* , pertencem à mesma classe de equivalência aquelas trajetórias w em W que desenvolvem exatamente o mesmo caminho em \mathbb{Z}^d exceto apenas por uma eventual translação temporal, visitando os mesmos pontos em \mathbb{Z}^d e respeitando a mesma ordem nas visitas.

Se π^* denota a projeção canônica do espaço W em W^* , ou seja, o mapeamento que leva elementos de W para sua correspondente classe de equivalência em W^* , então uma σ -álgebra de subconjuntos de W^* é induzida por π^* e dada por

$$\mathcal{W}^* = \{B \subset W^* : (\pi^*)^{-1}(B) \in \mathcal{W}\}.$$

Consideremos ainda o conjunto W_G das trajetórias em W que necessariamente passam pelo conjunto G . Precisamente,

$$W_G = \{w \in W : X_n(w) \in G, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.2.2)$$

de modo que, pela definição de π^* , o conjunto das trajetórias *modulo time-shift* (ou seja, trajetórias em W^*) que passam (necessariamente) por G é dado por $W_G^* = \pi^*(W_G)$.

Finalmente, definimos o espaço de medidas pontuais finitas

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)} : w_i^* \in W^*, u_i \in \mathbb{R}_+, \text{ tal que} \right. \\ &\quad \left. \omega(W_G^* \times [0, u]) < \infty, \text{ para todo } G \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito e } u \geq 0 \right\}, \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{A} gerada pelos mapeamentos $\omega \mapsto \omega(D)$, para $D \in \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, ou seja, a menor σ -álgebra que contém as imagens inversas deste mapeamento.

Analogamente à definição do espaço W , estabelecido pela expressão (2.2.1), que contempla todas as trajetórias duplamente infinitas em \mathbb{Z}^d , consideremos também o espaço das trajetórias (unilaterais) infinitas em \mathbb{Z}^d ,

$$\begin{aligned} W_+ &= \left\{ w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d : \|w(n+1) - w(n)\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \right. \\ &\quad \left. e \#\{n : w(n) = y\} < \infty, \forall y \in \mathbb{Z}^d \right\}, \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{W}_+ gerada pelas coordenadas canônicas X_n , com $n \in \mathbb{N}$, em W_+ .

Por fim, o processo de entrelaçamentos aleatórios será governado por um processo pontual de Poisson no espaço mensurável

$$(W^* \times \mathbb{R}_+, \mathcal{W}^* \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)),$$

com uma medida de intensidade específica, a qual descreveremos agora.

Para estabelecer esta descrição, levando em conta o conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, considere antes a medida denotada por Q_G , definida em (W, \mathcal{W}) e suportada em W_G , tal que

$$Q_G\left((X_{-n})_{n \geq 0} \in B_1, X_0 = x, (X_n)_{n \geq 0} \in B_2\right) = P_x(B_1 \mid \tilde{H}_G = \infty) e_G(x) P_x(B_2),$$

para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{W}_+$ e $x \in \mathbb{Z}^d$.

A medida de intensidade do processo pontual de Poisson mencionado (que governa o processo de entrelaçamentos aleatórios) será então igual à medida produto $\nu \otimes \lambda_+$, onde λ_+ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}_+ e ν é a única medida σ -finita em (W^*, \mathcal{W}^*) tal que

$$\mathbf{1}_{W_G^*} \cdot \nu = \pi^* \circ Q_G,$$

para qualquer conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, onde

$$\mathbf{1}_{W_G^*} \cdot \nu(\cdot) := \nu(W_G^* \cap \cdot),$$

veja o Teorema 1.1 de [22], onde a existência e a unicidade desta medida ν são estabelecidas.

Observe que, desta maneira,

$$\nu(W_G^*) = Q_G(\pi^{*-1}(W_G^*)) = Q_G(W_G) = \text{cap}(G). \quad (2.2.5)$$

Denote por \mathbb{P} a lei do processo pontual de Poisson sobre (Ω, \mathcal{A}) com medida de intensidade $\nu \otimes \lambda_+$, que caracteriza o processo de entrelaçamentos aleatórios, e por \mathbb{P}_G^u a lei do processo pontual de Poisson que governa o processo de entrelaçamentos aleatórios no nível u , restrito à G . A lei \mathbb{P}_G^u será caracterizada precisamente mais adiante.

Sob a lei \mathbb{P} , os elementos ω em Ω podem ser vistos como configurações (aleatórias) infinitas de trajetórias duplamente infinitas (*modulo time-shift*) de passeios aleatórios simples, cada trajetória com respectivo índice real não-negativo u_i , que gera o acoplamento dos processos para todos os níveis $u \geq 0$. Este acoplamento está ilustrado na figura 2.1.

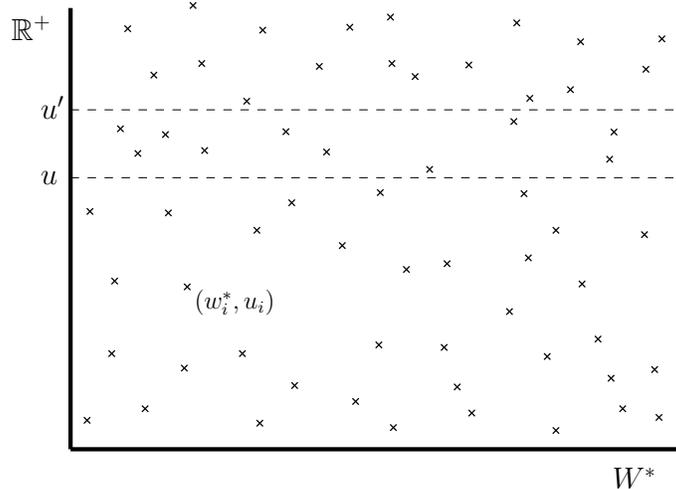


Figura 2.1: O processo pontual de Poisson em $W^* \times \mathbb{R}_+$ e o acoplamento dos processos em $W^* \times [0, u]$, para todos os níveis $u > 0$.

Além disso, denotemos por Ω^G o espaço de medidas pontuais restrito às trajetórias em W^* que necessariamente passam por G , ou seja, o espaço das configurações de trajetórias que passam por

G ,

$$\Omega^G = \left\{ \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)} : w_i^* \in W_G^*, u_i \in \mathbb{R}_+, \text{ tal que} \right. \\ \left. \omega(W_B^* \times [0, u]) < \infty, \text{ para todo } B \subset G \text{ e } u \geq 0 \right\}, \quad (2.2.6)$$

onde W_B é definido exatamente como em (2.2.2) e $W_B^* = \pi^*(W_B)$. De forma equivalente, podemos escrever

$$\Omega^G = \left\{ \omega \in \Omega : \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i^*, u_i)}, \quad w_i^* \in W_G^* \right\}.$$

Em analogia à definição do espaço Ω estabelecida pela expressão (2.2.3), considere o espaço das medidas pontuais finitas em W_+ ,

$$\Omega_+ = \left\{ \omega_+ = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)} : w_i \in W_+, u_i \in \mathbb{R}_+, \text{ tal que} \right. \\ \left. \omega_+(W_+ \times [0, u]) < \infty, \text{ para todo } u \geq 0 \right\},$$

dotado da σ -álgebra denotada por \mathcal{A}_+ , gerada pelos mapeamentos $\omega_+ \mapsto \omega_+(D)$, para $D \in \mathcal{W}_+ \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Para um subconjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, é possível definir o mapeamento $s_G : W_G^* \rightarrow W$ tal que, para $w^* \in W_G^*$, $s_G(w^*)$ é a única trajetória w no espaço W para a qual ocorre $\pi^*(w) = w^*$ e $H_G(w) = 0$, ou seja, o mapeamento s_G associa a cada trajetória duplamente infinita *modulo time-shift* que passa por G , a única trajetória duplamente infinita que visita o conjunto G pela primeira vez exatamente no instante zero, e cuja projeção por π^* é exatamente a trajetória (*modulo time-shift*) original.

Por outro lado, para uma trajetória $w \in W$, denotamos por w^+ a trajetória em W_+ que corresponde ao caminho desenvolvido por w a partir do instante zero, ignorando o passado de w anterior a este instante, ou seja, $w^+ = \{X_i(w)\}_{i=0}^\infty$.

Finalmente, assim como é introduzido em [14], podemos definir o mapeamento $\mu_{G,u} : \Omega \rightarrow \Omega_+$ dado por

$$\mu_{G,u}(\omega) = \sum_{\substack{i: w_i^* \in W_G^*, \\ u_i \leq u}} \delta_{(s_G(w_i^*)^+, u_i)}, \quad \text{para } \omega = \sum_i \delta_{(w_i^*, u_i)} \in \Omega. \quad (2.2.7)$$

Note que, desta forma, $\mu_{G,u}$ será de fato uma medida pontual de Ω_+ , representando uma configuração de trajetórias (unilaterais) infinitas que se iniciam na fronteira de G , veja uma ilustração na figura 2.2.

Além disso, note também que se $\omega \in \Omega^G \subset \Omega$, onde Ω^G está definido em (2.2.6), então $\mu_{G,u}(\omega)$ é constituído por todas as trajetórias em ω com níveis menores do que ou iguais a u , ignorando seus passados anteriores à primeira visita ao conjunto G .

A lei \mathbb{P}_G^u do entrelaçamento restrito à G no nível u , mencionada anteriormente, será especificamente a lei induzida por $\mu_{G,u}$ a partir da lei \mathbb{P} , ou seja, $\mathbb{P}_G^u = \mu_{G,u} \circ \mathbb{P}$. Mais precisamente, \mathbb{P}_G^u será a lei de um processo pontual de Poisson em W_+ com medida de intensidade igual a uP_{e_G} , onde

$$P_{e_G}(B) = \sum_{x \in G} e_G(x) P_x(B), \quad B \in \mathcal{W}_+. \quad (2.2.8)$$

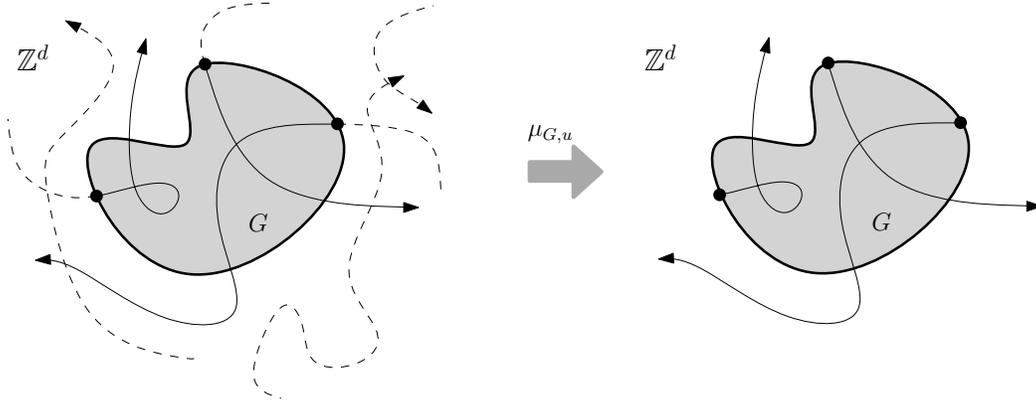


Figura 2.2: O mapeamento $\mu_{G,u}$. Nesta ilustração, todas as trajetórias visitando o conjunto G possuem índices menores do que ou iguais a u .

Podemos definir ainda o espaço das trajetórias unilaterais em \mathbb{Z}^d que se iniciam necessariamente em ∂G ,

$$W_{G,+} = \{w \in W_+ : X_0(w) = w(0) \in \partial G\},$$

e com isso definimos também os espaços de medidas pontuais

$$\Omega^{G,+} = \{\omega \in \Omega_+ : \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)}, w_i \in W_{G,+}\}$$

$$\text{e } \Omega_u^{G,+} = \{\omega \in \Omega^{G,+} : \omega = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)}, u_i \leq u\}, \quad (2.2.9)$$

de tal forma que, se $\omega \in \Omega$, então $\omega_u = \mu_{G,u}(\omega)$ será um elemento de $\Omega_u^{G,+}$, e podemos interpretar ω_u como sendo o resultado aleatório (sob a lei \mathbb{P}_G^u) do processo de entrelaçamentos aleatórios no nível u , restrito à G , ou seja, a configuração aleatória (sob a lei \mathbb{P}_G^u) de trajetórias infinitas com níveis menores do que ou iguais a u , que se iniciam na fronteira de G . Assim, os processos restritos à G ficam acoplados de tal forma que observamos uma ordenação entre os elementos de $\Omega^{G,+}$. Se a trajetória $w_i \in W_{G,+}$ (com respectivo índice u_i) está presente na realização do processo no nível u , então ela estará presente na realização do processo para todo nível $u' \geq u$, e escrevemos $\omega_u \leq \omega_{u'}$ sempre que $u \leq u'$. Neste sentido, todas as trajetórias que fazem parte da configuração ω_u também farão parte da configuração $\omega_{u'}$ quando $u \leq u'$.

De maneira geral, para configurações ω e ω' pertencentes a $\Omega^{G,+}$, sempre escreveremos $\omega \leq \omega'$ quando todas as trajetórias que compõem a configuração ω também estão presentes na configuração ω' .

Antes de discutir a definição dos eventos crescentes e decrescentes com relação ao entrelaçamento, formalizaremos agora as definições do conjunto de entrelaçamento restrito à G no nível u , e também do conjunto vacante restrito à G no nível u , respectivamente denotados por \mathcal{I}_G^u e \mathcal{V}_G^u .

Para $\omega_u = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)} \in \Omega_u^{G,+}$, o conjunto de entrelaçamento restrito à G no nível u é dado por

$$\mathcal{I}_G^u = \mathcal{I}_G^u(\omega_u) = \left(\bigcup_{i \geq 1} R(w_i) \right) \cap G,$$

onde $R(w_i)$ representa a imagem de w_i , ou seja, o conjunto de todos os pontos em \mathbb{Z}^d de fato visitados pela trajetória w_i . Desta forma, o conjunto \mathcal{I}_G^u representa o conjunto de todos os pontos em G que são visitados pelas trajetórias do entrelaçamento restrito à G no nível u .

Por sua vez, o conjunto vacante restrito à G no nível u é definido por

$$\mathcal{V}_G^u = \mathcal{V}_G^u(\omega_u) = G \setminus \mathcal{I}_G^u(\omega_u),$$

e representa, portanto, o conjunto de todos os pontos em G que não são visitados pelas trajetórias do entrelaçamento restrito à G no nível u .

Considere agora um evento A , crescente com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u e suportado em G . Formalmente, um evento A é dito crescente com relação ao processo de entrelaçamentos aleatórios quando $\mathbf{1}_A(\omega) \leq \mathbf{1}_A(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$ ($\omega, \omega' \in \Omega^{G,+}$), ou seja, se o evento A ocorre sob a configuração ω , então A também deve ocorrer sob a configuração ω' , quando $\omega \leq \omega'$. Dizemos que o evento é suportado no conjunto G quando ele está definido em termos apenas dos pontos em \mathbb{Z}^d que pertencem à G . Mais precisamente, considere a σ -álgebra $\mathcal{W}_{G,+}$ em $W_{G,+}$ gerada pelas coordenadas canônicas neste espaço, e a σ -álgebra $\mathcal{A}^{G,+}$ de subconjuntos de $\Omega^{G,+}$, gerada pelos mapeamentos $\omega \mapsto \omega(D)$, para $D \in \mathcal{W}_{G,+} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Então a afirmação de que o evento está suportado no conjunto G significa que este evento pertence à σ -álgebra $\mathcal{A}^{G,+}$ de subconjuntos de $\Omega^{G,+}$, e representa assim uma coleção de configurações ω de trajetórias que se iniciam na fronteira de G , sendo que estas configurações ω na referida coleção satisfazem alguma condição imposta apenas em termos dos sítios do conjunto G .

Por exemplo, se denotamos por $|G|$ a cardinalidade do conjunto G , então o evento

$$A = \left\{ \omega \in \Omega^{G,+} : |\mathcal{I}_G^u| \geq |G|/2 \right\}$$

é crescente com relação a \mathcal{I}_G^u , e representa o conjunto de todas as configurações $\omega \in \Omega^{G,+}$ para as quais pelo menos metade dos pontos de G são visitados pelas trajetórias do entrelaçamento no nível u restrito à G , ou seja, pelo menos metade dos pontos de G pertencem ao conjunto de entrelaçamento \mathcal{I}_G^u . Na figura 2.3 temos representada uma configuração de trajetórias do processo restrito à G , em \mathbb{Z}^3 . Nesta ilustração, a cardinalidade de G é igual a 18 e a cardinalidade de \mathcal{I}_G^u é igual a 12. Portanto o evento A ocorre sob esta configuração, e se mais trajetórias forem incorporadas, o evento continuará ocorrendo.

Um outro exemplo pode ser construído da seguinte maneira. Denotemos por Ψ a classe de caminhos finitos de pontos vizinhos em \mathbb{Z}^d , precisamente definida por

$$\Psi = \left\{ \tau : \{0, 1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{Z}^d : k \geq 1 \text{ e } \|\tau(n+1) - \tau(n)\| = 1, \quad \forall n = 0, 1, \dots, k-1 \right\}.$$

Então também será crescente o evento caracterizado pela sentença

“existe um caminho finito (em Ψ), totalmente contido no conjunto de entrelaçamento restrito à G no nível u , conectando dois pontos distintos v e z em G ”,

que formalmente pode ser representado como

$$\left\{ \omega \in \Omega^{G,+} : \exists \tau \in \Psi \text{ com } R(\tau) \subset \mathcal{I}_G^u, \quad \tau(0) = v \text{ e } \tau(k) = z \right\},$$

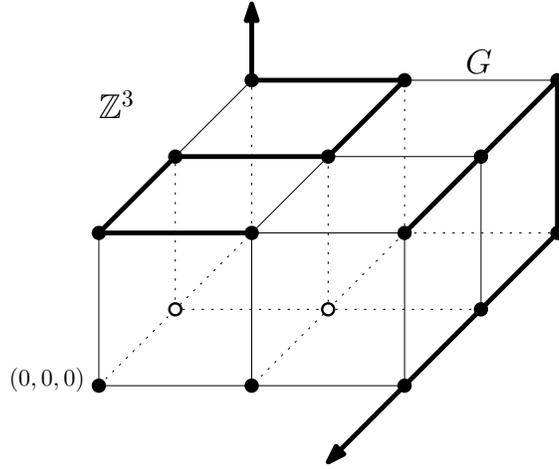


Figura 2.3: Exemplo de uma realização do processo de entrelaçamentos restrito à G , em \mathbb{Z}^3 . Nesta representação, o evento $A = \{\omega \in \Omega^{G,+} : |\mathcal{I}_G^u| \geq |G|/2\}$ está ocorrendo sob esta configuração de trajetórias.

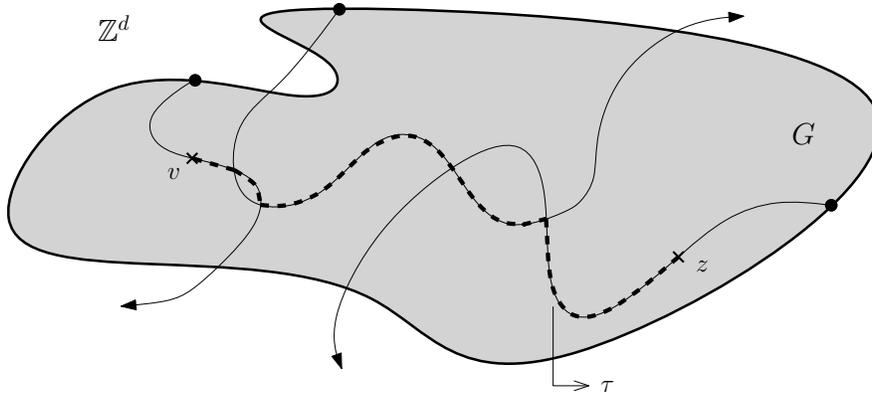


Figura 2.4: Nesta configuração de trajetórias, os pontos v e z em G estão conectados por um caminho finito τ (segmento tracejado), totalmente contido em \mathcal{I}_G^u .

para $v, z \in G$, onde $R(\tau)$ representa, assim como antes, a imagem do caminho τ , veja a figura 2.4 para uma ilustração deste evento. Com algumas pequenas modificações neste exemplo, os pontos v e z podem ser naturalmente substituídos por subconjuntos finitos e disjuntos de G .

Por outro lado, um evento B é dito decrescente com relação ao entrelaçamento simplesmente se o seu complementar B^C for um evento crescente com relação ao entrelaçamento. Por exemplo, o evento

“existe um caminho finito (em Ψ), totalmente contido no conjunto vacante restrito à G no nível u , conectando dois pontos distintos x e y em G ”,

ou formalmente, para $x, y \in G$,

$$B = \left\{ \omega \in \Omega^{G,+} : \exists \tau \in \Psi \text{ com } R(\tau) \subset \mathcal{V}_G^u, \tau(0) = x \text{ e } \tau(k) = y \right\},$$

será um evento decrescente com relação ao entrelaçamento, pois o seu complementar,

$$B^C = \left\{ \omega \in \Omega^{G,+} : \nexists \tau \in \Psi \text{ com } R(\tau) \subset \mathcal{V}_G^u, \tau(0) = x \text{ e } \tau(k) = y \right\},$$

é um evento crescente.

Também é decrescente, por exemplo, o evento

$$B_K = \left\{ \omega \in \Omega^{G,+} : K \subset \mathcal{V}_G^u \right\},$$

para qualquer $K \subset G$, ou seja, o evento em que o subconjunto K de G não é visitado por nenhuma trajetória do entrelaçamento restrito à G .

Especificamente, estamos interessados em estudar a taxa de variação da probabilidade de um evento A , crescente com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u e suportado em G , denotada por $\mathbb{P}_G^u(A)$ (ou por simplicidade de notação, $\mathbb{P}^u(A)$), como uma função do nível u do entrelaçamento. Precisamente, temos interesse em determinar uma expressão analítica para a derivada

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A),$$

caracterizando assim a fórmula de Russo para o modelo de entrelaçamentos aleatórios.

O termo “fórmula de Russo” se refere na realidade a um teorema conhecido na teoria de percolação, e estabelece uma expressão para a derivada da probabilidade de um evento definido como crescente naquele modelo. Para justificar o uso deste termo no contexto deste trabalho, apresentaremos na seção seguinte uma discussão sobre a fórmula de Russo para o modelo de percolação.

2.3 A Fórmula de Russo para o Processo de Percolação

Descreveremos nesta seção o modelo usual de percolação (por elos) no espaço \mathbb{Z}^d , sendo d um número inteiro positivo, e apresentaremos também algumas definições básicas relacionadas ao modelo, no sentido de enunciar apropriadamente, ao final da seção, a fórmula de Russo para percolação.

Primeiramente consideramos o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$, onde \mathbb{Z}^d representa o conjunto de vértices deste grafo, enquanto que \mathcal{E} representa o conjunto de elos que conectam vértices adjacentes em \mathbb{Z}^d , ou seja, pares de vértices que estão a uma distância (Euclidiana) unitária uns dos outros.

Para uma constante p assumindo valor no intervalo $[0, 1]$, consideramos então, assim como é apresentado em [7], Seção 1.3, o espaço de probabilidade $(\Sigma, \mathcal{F}, P_p)$ que irá caracterizar este modelo. O espaço amostral Σ é definido por

$$\Sigma = \{0, 1\}^{\mathcal{E}} = \prod_{x \in \mathcal{E}} \{0, 1\}$$

e representa o conjunto de configurações $\eta = \{\eta(x) : x \in \mathcal{E}\}$ tais que $\eta(x) \in \{0, 1\}$.

Neste modelo, cada elo do grafo irá assumir um dentre dois possíveis estados, que chamamos de “aberto” e “fechado”. Para cada elo $x \in \mathcal{E}$, escreveremos $\eta(x) = 1$ para representar que o elo x está aberto, e $\eta(x) = 0$ para representar que este elo está fechado.

A σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Σ é definida como a σ -álgebra gerada pelos cilindros finito-dimensionais em Σ , ou seja, a menor σ -álgebra que contém os conjuntos cilíndricos da forma

$$C = \{\eta \in \Sigma : \eta(x) = c_x, \quad x \in S\}, \quad \text{onde } S \subset \mathcal{E} \text{ é finito,}$$

e finalmente a medida de probabilidade P_p será a medida produto

$$P_p = \prod_{x \in \mathcal{E}} \nu_x,$$

onde ν_x é a medida de probabilidade da distribuição Bernoulli com parâmetro p , para cada x em \mathcal{E} .

Desta forma, cada elo do grafo será declarado aberto com probabilidade p e fechado com probabilidade $1 - p$, independentemente dos estados dos outros elos.

Observe que, em particular, se o conjunto cilíndrico C é dado por exemplo pela expressão mencionada a pouco, então

$$P_p(C) = p^{n_1}(1 - p)^{n_0},$$

onde $n_1 = \#\{x \in S : c_x = 1\}$ e $n_0 = \#\{x \in S : c_x = 0\}$.

Note também que é possível identificar uma relação de ordem parcial entre os elementos do espaço Σ . Se η e η' pertencem a Σ , escreve-se $\eta \leq \eta'$ para representar que $\eta(x) \leq \eta'(x)$ para todo x em \mathcal{E} , ou seja, sempre que $\eta(x) = 1$ implicar que $\eta'(x) = 1$, para todo x em \mathcal{E} .

É possível ainda acoplar os processos de percolação descritos desta forma para todos os valores de p no intervalo $[0, 1]$. Para tanto, definimos uma família de variáveis aleatórias $\{\mathcal{U}_x, x \in \mathcal{E}\}$ tal que

$$\mathcal{U}_x \sim \text{Uniforme}[0, 1], \quad \text{para todo } x \text{ em } \mathcal{E},$$

e \mathcal{U}_x é independente de \mathcal{U}_y , para todos $x, y \in \mathcal{E}$, $x \neq y$.

Definimos então a configuração $\eta^{(p)}$ em Σ fazendo $\eta^{(p)}(x) = \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_x < p\}}$, para todo x em \mathcal{E} , de tal forma que esta configuração de fato irá possuir a distribuição desejada, caracterizada por P_p .

De acordo com a descrição da relação de ordem parcial em Σ apresentada acima, se $0 < p \leq p'$ então naturalmente $\eta^{(p)} \leq \eta^{(p')}$.

Neste contexto que temos estabelecido, dizemos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é crescente se e somente se

$$\mathbf{1}_A(\eta) \leq \mathbf{1}_A(\eta'), \quad \text{para todas as configurações } \eta, \eta' \in \Sigma \text{ tais que } \eta \leq \eta'.$$

Ou seja, se o evento A ocorre sob uma determinada configuração, então este evento deverá continuar ocorrendo se os elos abertos desta configuração forem mantidos abertos e eventualmente elos fechados se tornarem também abertos. Por exemplo, se $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^2$ são dois vértices distintos do grafo $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{E})$, então o evento A que se refere à existência de um caminho finito através de elos adjacentes abertos conectando y_1 e y_2 é um evento crescente (veja uma ilustração na figura 2.5).

Por outro lado, um evento em \mathcal{F} será dito decrescente se o seu complementar for um evento crescente.

A partir disto, podemos então definir os elos pivotais para um evento crescente. Em palavras, um elo $x \in \mathcal{E}$ é chamado pivotal para o evento crescente A se, e somente se, o evento A ocorre

quando o elo x está aberto e não ocorre quando o mesmo elo está fechado, mantendo inalterados todos os estados dos outros elos. Formalmente, o elo x é pivotal para A (na configuração η) se, e somente se,

$$\mathbf{1}_A(\eta) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\eta') = 0,$$

onde a configuração η' é idêntica à configuração η em todos os elos exceto no elo x , que é aberto em η e fechado em η' , ou seja,

$$\eta(y) = \eta'(y) \quad \text{para todo } y \neq x, \quad \text{mas } \eta(x) = 1 \text{ e } \eta'(x) = 0.$$

Na figura 2.5 temos uma ilustração de uma realização parcial do processo de percolação em \mathbb{Z}^2 . Neste exemplo, o evento que diz respeito à existência de um caminho finito através de elos adjacentes abertos conectando os vértices y_1 e y_2 está ocorrendo. Claramente este evento é crescente, pois se novos elos se tornarem abertos (mantendo inalterados os estados dos elos atualmente abertos), então o evento continuará ocorrendo. O elo denotado por α nesta ilustração (e apenas este elo neste exemplo) é pivotal para este evento.

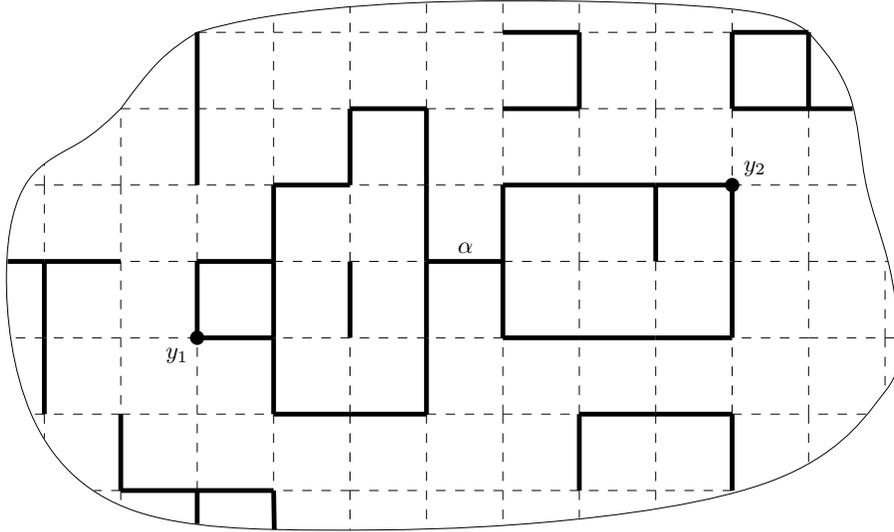


Figura 2.5: Exemplo de uma realização (parcial) do processo de percolação por elos em \mathbb{Z}^2 . Os elos sólidos estão abertos e os elos tracejados estão fechados.

Com todas estas definições em mente, podemos então finalmente enunciar o teorema que estabelece a fórmula de Russo para o modelo de percolação. A demonstração deste teorema pode ser encontrada por exemplo em [7], Seção 2.4.

Teorema 2.3.1. (Fórmula de Russo, Teorema 2.25 de [7]) Se A é um evento crescente e definido apenas em termos dos estados de um número finito de elos do grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$, então

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = E_p(N(A)),$$

onde $N(A)$ representa o número de elos pivotais para A e E_p representa a esperança com respeito à lei P_p .

Como mencionamos anteriormente, podemos dizer que este teorema de certa maneira justifica a utilização do termo “fórmula de Russo” neste trabalho, quando estudamos a taxa de variação da probabilidade de um evento crescente no modelo de entrelaçamentos aleatórios.

2.4 A Fórmula de Russo para os Entrelaçamentos Aleatórios

2.4.1 Analiticidade

Com o intuito de prosseguir com nosso objetivo de investigar a taxa de variação da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, mencionada ao final da seção 2.2, veremos antes de tudo que esta probabilidade, vista como função de u , é de fato diferenciável para todos os valores de u no intervalo $[0, +\infty)$, para qualquer evento A crescente com relação ao entrelaçamento restrito ao conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, e suportado neste conjunto. Mais do que isso, na realidade mostraremos que $\mathbb{P}^u(A)$ é uma função analítica em toda a reta \mathbb{R} , embora esta função não apresente nem mesmo uma interpretação probabilística quando $u < 0$. O que irá nos interessar, de fato, é a analiticidade desta função no intervalo $[0, +\infty)$.

Para estabelecer claramente o contexto, considere um intervalo real aberto $I \subset \mathbb{R}$ e uma função real $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a função g é analítica quando, em alguma vizinhança de cada ponto do seu domínio, ela pode ser representada por uma série de potências convergente. Mais precisamente, a função g é dita analítica se, para cada $a \in I$, existe $\delta > 0$ tal que o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ está contido em I e existe também uma série de potências $\sum_n b_n(x - a)^n$, em torno de a , convergente para todo x pertencente ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e tal que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - a)^n, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Provaremos então a proposição seguinte, mas por uma questão de clareza, com o propósito de simplificar as argumentações que se seguem, para qualquer $u \geq 0$ fixo, consideraremos o conjunto (aleatório) \mathcal{H}_u constituído por todas as trajetórias que compõem o entrelaçamento \mathcal{I}_G^u , e denotaremos por M a cardinalidade de \mathcal{H}_u , ou seja, M será igual a $|\mathcal{H}_u|$ e representará a quantidade total de partículas que dão origem às trajetórias no entrelaçamento \mathcal{I}_G^u .

Proposição 2.4.1. Seja G um subconjunto finito do espaço \mathbb{Z}^d , com dimensão $d \geq 3$, e considere um evento A , crescente com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u e suportado em G . Então a probabilidade do evento A , sob a lei \mathbb{P}_G^u do entrelaçamento restrito ao conjunto G no nível u , denotada por $\mathbb{P}^u(A)$, como função de u , é analítica no intervalo $[0, +\infty)$.

Demonstração. Como a variável aleatória M definida acima é tal que

$$M \sim \text{Poisson}(u \text{cap}(G)), \tag{2.4.1}$$

então, de acordo com a fórmula da probabilidade total,

$$\mathbb{P}^u(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}^u(A \mid M = m) P(M = m) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(A) \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^m}{m!},$$

em que os termos $P_m(A)$ não dependem de u , mas apenas da quantidade m de trajetórias no entrelaçamento.

Denotando por a_m os termos $P_m(A)$, com $m = 0, 1, \dots$, e por b a capacidade do conjunto G , $\text{cap}(G)$, podemos escrever

$$\mathbb{P}^u(A) = e^{-ub} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m b^m}{m!} u^m. \quad (2.4.2)$$

A função $f(u) = e^{-ub}$ é reconhecidamente uma função analítica para todo $u \in \mathbb{R}$. De fato, para cada $a \in \mathbb{R}$, a série de Taylor de f em torno de a é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ab} \frac{[-b(u-a)]^n}{n!},$$

e esta série converge para e^{-ub} , para todo $u \in \mathbb{R}$, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-b(u-a)]^n}{n!} = e^{-b(u-a)},$$

veja por exemplo [18], capítulo 8, páginas 178 e 179.

Como o produto de funções analíticas é também uma função analítica (veja [12], capítulo X, seção 4), para concluir a demonstração basta então mostrar que a série de potências multiplicando a função exponencial na expressão (2.4.2) acima, vista como função de u , é também uma função analítica.

Mas a convergência desta série de fato ocorre para $|u| < R$, onde

$$R = \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m b^m}{m!} \right|^{1/m} \right)^{-1},$$

com a convenção de que

$$\frac{1}{0} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{+\infty} = 0,$$

veja por exemplo o Teorema 3.39 de [18].

Como os termos a_m são tais que $0 \leq a_m \leq 1$, para todo $m = 0, 1, \dots$, então observamos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m b^m}{m!} \right|^{1/m} = |b| \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(a_m)^{1/m}}{(m!)^{1/m}} \leq |b| \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(m!)^{1/m}} = 0, \quad (2.4.3)$$

pois a sequência $\{(m!)^{1/m}\}_{m>0}$ é crescente.

E como todos os termos da sequência

$$\left\{ \left| \frac{a_m b^m}{m!} \right|^{1/m} \right\}_m$$

são não-negativos, então o limite que aparece à esquerda da primeira igualdade em (2.4.3) é nulo, e naturalmente

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m b^m}{m!} \right|^{1/m} = 0,$$

de onde concluímos que $R = +\infty$.

Portanto a série de potências que aparece na expressão (2.4.2), vista como função de u , é de fato convergente para todo $u \in \mathbb{R}$. Consequentemente, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, esta série (como função de u) pode ser representada por uma (outra) série de potências, agora em torno do ponto a , a qual é convergente para todo $u \in \mathbb{R}$, veja por exemplo o Teorema 8.4 de [18]. Isto mostra, finalmente, que a série na expressão (2.4.2) é uma função analítica de u em \mathbb{R} , e em particular no intervalo $[0, +\infty)$, de onde concluímos que a função $\mathbb{P}^u(A)$ é analítica em $[0, +\infty)$, como queríamos mostrar. \square

A partir da proposição 2.4.1 naturalmente concluímos que a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, como função de u , possui derivadas de todas as ordens, e suas derivadas são contínuas em $[0, +\infty)$, veja por exemplo o Teorema 5.2 de [18].

2.4.2 Derivadas Laterais

Lembrando que A é um evento crescente com relação à \mathcal{I}_G^u e suportado no conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$, calcularemos agora as derivadas à direita e à esquerda de $\mathbb{P}^u(A)$, respectivamente definidas por

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^{u+h}(A) - \mathbb{P}^u(A)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^u(A) - \mathbb{P}^{u-h}(A)}{h},$$

e posteriormente ainda apresentaremos um argumento probabilístico de que ambas as expressões de fato coincidem, estabelecendo assim expressões que irão caracterizar a fórmula de Russo no contexto dos entrelaçamentos aleatórios.

Primeiramente, para algum $u \geq 0$ e $0 < h < \text{cap}(G)^{-1}$, calcularemos a probabilidade $\mathbb{P}^{u+h}(A)$. Note que $\mathbb{P}^{u+h}(A) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A)$ é a probabilidade de que o evento A ocorra sob a configuração $\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in \Omega_{u+h}^{G,+}$, ou seja, sob a lei do entrelaçamento restrito à G com nível igual a $u+h$.

Pela fórmula da esperança total,

$$\mathbb{P}^{u+h}(A) = E_u[\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \boldsymbol{\omega}_u)] = E_u[\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A \mid \boldsymbol{\omega}_u)], \quad (2.4.4)$$

onde $E_u[\cdot]$ representa a esperança sob a lei \mathbb{P}^u .

Precisamente, seja $\mathcal{A}_u^{G,+}$ a σ -álgebra de subconjuntos de $\Omega_u^{G,+}$ definida por

$$\mathcal{A}_u^{G,+} = \sigma\left(\sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)} : w_i \in W_{G,+}, u_i \leq u\right), \quad (2.4.5)$$

que representa, em palavras, a menor σ -álgebra que contém toda a informação sobre os entrelaçamentos restritos à G , até o nível u . Então rigorosamente a expressão (2.4.4) fica dada por

$$\mathbb{P}^{u+h}(A) = E_u[\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \mathcal{A}_u^{G,+})] = E_u[\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A \mid \mathcal{A}_u^{G,+})].$$

No entanto, por uma questão de simplicidade, continuaremos representando o condicionamento em $\boldsymbol{\omega}_u$, como em (2.4.4).

Como o evento A é crescente, se $\boldsymbol{\omega}_u \in A$ então, por definição, $\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A$, de tal maneira que

$$\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \boldsymbol{\omega}_u \in A) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A \mid \boldsymbol{\omega}_u \in A) = 1.$$

Para estabelecer uma expressão para $\mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid \omega_u \notin A)$, levando em conta a afirmação estabelecida em (2.2.5) observamos que é possível descrever o acoplamento dos processos de entrelaçamento restritos à G , para todos os níveis $u \geq 0$, definindo um processo de Poisson em \mathbb{R}_+ com intensidade (taxa) igual a $\text{cap}(G)$, de modo que a quantidade de pontos distribuídos em ∂G (a partir dos quais são iniciados os passeios aleatórios) no processo de nível u será dada pela quantidade de pontos deste processo de Poisson no intervalo $[0, u]$ (veja a figura 2.6). Denote esta quantidade novamente por M , de modo que $M \sim \text{Poisson}(u \text{cap}(G))$. Desta forma, ao aumentar o nível do processo (restrito à G) de u para $u + h$, é possível que novas trajetórias sejam incluídas à configuração ω_u , formando assim a configuração ω_{u+h} (veja novamente a figura 2.6). Denote por H a quantidade destas trajetórias que são eventualmente incluídas neste caso. O valor de H é dado pela quantidade de pontos do processo de Poisson (que caracteriza o acoplamento, com taxa igual a $\text{cap}(G)$) no intervalo $(u, u + h]$, de modo que

$$H \sim \text{Poisson}(h \text{cap}(G)), \quad (2.4.6)$$

pois o comprimento do intervalo $(u, u + h]$ é igual a h .

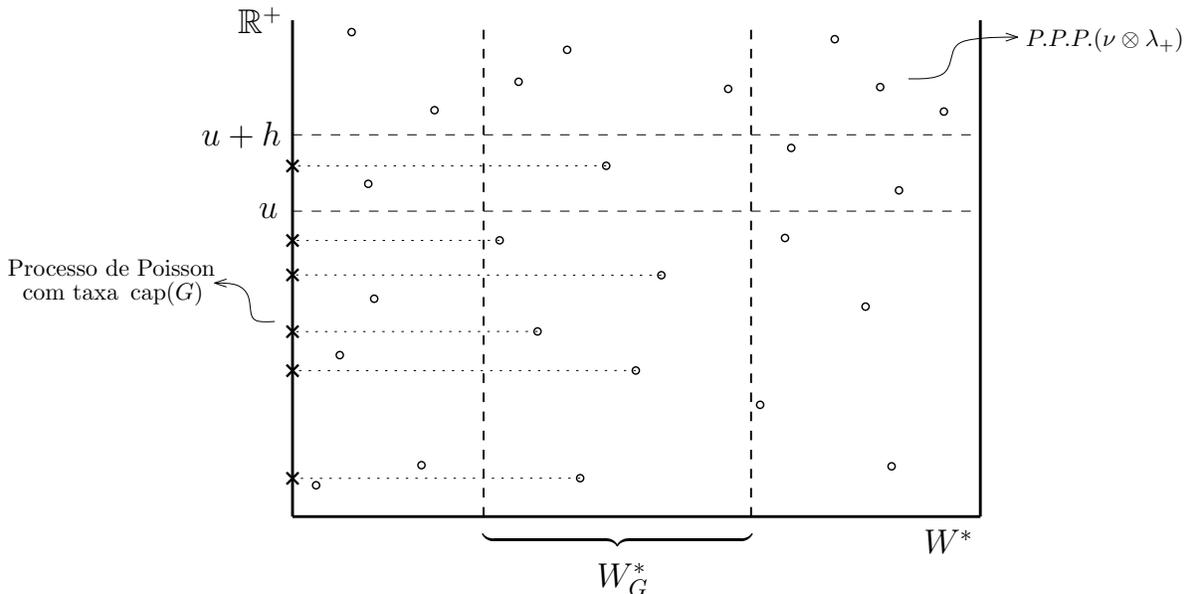


Figura 2.6: O acoplamento dos processos de entrelaçamento restritos à G , para todos os níveis não negativos. Nesta ilustração, ao aumentar o nível do processo de u para $u + h$, apenas uma trajetória é incluída à configuração.

Assim, a probabilidade de que sejam incluídas exatamente k ($k \geq 2$) trajetórias à configuração ω_u ao aumentar o nível do processo para $u + h$ é igual a

$$\mathbb{P}(H = k) = \frac{e^{-h \text{cap}(G)} (h \text{cap}(G))^k}{k!} < (h \text{cap}(G))^k = o(h), \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

enquanto que a probabilidade de se incluir exatamente uma trajetória à essa configuração é igual a

$$\mathbb{P}(H = 1) = h \text{cap}(G) e^{-h \text{cap}(G)}.$$

Vamos provar que a probabilidade de que sejam incluídas duas ou mais trajetórias à configuração ω_u ao aumentar o nível do processo para $u + h$ é também igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$.

De fato, como $h \text{cap}(G) < 1$ por suposição, então

$$\mathbb{P}(H \geq 2) = \sum_{k \geq 2} \frac{e^{-h \text{cap}(G)} (h \text{cap}(G))^k}{k!} < \sum_{k \geq 2} (h \text{cap}(G))^k = \frac{(h \text{cap}(G))^2}{1 - h \text{cap}(G)},$$

e como

$$\frac{(h \text{cap}(G))^2}{1 - h \text{cap}(G)} = o(h), \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

então $\mathbb{P}(H \geq 2)$ é também igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$.

Além disso, portanto,

$$\mathbb{P}(\{H = 0\} \cup \{H = 1\}) = 1 - o(h), \quad \text{quando } h \downarrow 0.$$

Observe também que, dado o evento $\{H = 0\}$, a configuração ω_{u+h} será igual à configuração ω_u , enquanto que dado o evento $\{H = 1\}$, a configuração ω_{u+h} será da forma $\omega_u + \delta_{(w_\eta, u_\eta)}$, onde w_η pertence a $W_{G,+}$ e representa a (única) trajetória adicionada à configuração $\omega_u \in \Omega_u^{G,+}$, com respectivo índice u_η . Como o índice u_η é irrelevante neste contexto, no sentido de que nos interessa apenas a configuração de trajetórias obtida após a inclusão da trajetória w_η , escreveremos então apenas $\omega_u + \delta_{(w_\eta)}$ ao invés de $\omega_u + \delta_{(w_\eta, u_\eta)}$ nas construções que se seguem.

Novamente aplicando a fórmula da probabilidade total, utilizando a partição gerada pela variável aleatória H , e supondo $\omega_u \notin A$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid \omega_u) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A, H = k \mid \omega_u) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid H = k, \omega_u) P(H = k \mid \omega_u). \end{aligned}$$

Como os intervalos $[0, u]$ e $(u, u + h]$ são disjuntos, então

$$\mathbb{P}(H = k \mid \omega_u) = \mathbb{P}(H = k), \quad \forall k \geq 0,$$

pois a variável aleatória H representa a quantidade de pontos do processo de Poisson (do acoplamento) no intervalo $(u, u + h]$, e a configuração ω_u é gerada pelo conjunto de trajetórias cuja quantidade é dada pela quantidade de pontos deste mesmo processo de Poisson no intervalo $[0, u]$. De fato, como são independentes quaisquer eventos que dizem respeito à ocorrência de pontos em subconjuntos disjuntos de um espaço sobre o qual esteja definido um processo de Poisson, então o evento $\{H = k\}$ é independente de ω_u , para qualquer $k \geq 0$.

A partir das observações anteriores relacionadas ao condicionamento no valor da variável H , concluímos que, se $\omega_u \notin A$,

$$\mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid H = 0, \omega_u) = 0, \quad \text{quase certamente,}$$

e também que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid H = 1, \omega_u) &= \mathbb{P}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A \mid H = 1, \omega_u) \\ &= P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A). \end{aligned}$$

onde esta última expressão representa a probabilidade do evento $\{\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}$, sob a lei da trajetória w_η , que denotamos P_{w_η} .

Além disso, observe que a probabilidade $\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A \mid H = k, \boldsymbol{\omega}_u)$ não depende de h , mas apenas do nível u e da quantidade k de pontos deste processo de Poisson no intervalo $(u, u+h]$, e podemos então escrever

$$P(\boldsymbol{\omega}_{u+h} \in A \mid H = k, \boldsymbol{\omega}_u) = a_{u,k}, \quad \forall k \geq 0,$$

por simplicidade de notação.

Desta forma, a probabilidade para a qual procuramos estabelecer uma expressão (considerando $\boldsymbol{\omega}_u \notin A$) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{u+h}(A \mid \boldsymbol{\omega}_u) &= P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbb{P}(H = 1) + R_h \\ &= P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) h \operatorname{cap}(G) e^{-h \operatorname{cap}(G)} + R_h, \end{aligned}$$

onde

$$R_h = \sum_{k \geq 2} a_{u,k} \mathbb{P}(H = k) = \sum_{k \geq 2} a_{u,k} \frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)} (h \operatorname{cap}(G))^k}{k!}.$$

Note que, como $0 \leq a_{u,k} \leq 1$, para todo $k \geq 0$, e também $\frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)}}{k!} \leq 1$, para todo $k \geq 0$, então

$$R_h \leq \sum_{k \geq 2} (h \operatorname{cap}(G))^k = \frac{(h \operatorname{cap}(G))^2}{1 - h \operatorname{cap}(G)} = o(h) \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

novamente pois $h \operatorname{cap}(G) < 1$. Então R_h é também igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$, ou seja, $R_h/h \rightarrow 0$ quando $h \downarrow 0$.

Levando em conta o que discutimos até este momento, podemos formular a seguinte expressão

$$\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \boldsymbol{\omega}_u) = \begin{cases} 1 & \text{se } \boldsymbol{\omega}_u \in A, \\ P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) h \operatorname{cap}(G) e^{-h \operatorname{cap}(G)} + R_h & \text{se } \boldsymbol{\omega}_u \notin A, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{u+h}(A \mid \boldsymbol{\omega}_u) &= P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) h \operatorname{cap}(G) e^{-h \operatorname{cap}(G)} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}} \\ &\quad + R_h \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}} + \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}}. \end{aligned}$$

Denote agora por \bar{R}_h a esperança de $R_h \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}}$ com respeito à lei \mathbb{P}^u . Segundo o Teorema de Convergência Monótona,

$$\begin{aligned} \bar{R}_h &= E_u[R_h \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}}] \\ &= \sum_{k \geq 2} E_u[a_{u,k} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}}] \frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)} (h \operatorname{cap}(G))^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 2} \bar{a}_{u,k} \frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)} (h \operatorname{cap}(G))^k}{k!}, \end{aligned}$$

onde os termos $\bar{a}_{u,k} = E_u[a_{u,k} \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}}]$ são constantes tais que $0 \leq \bar{a}_{u,k} \leq 1$, para todo $k \geq 2$, e além disso independem de h .

Portanto, assim como R_h ,

$$\bar{R}_h \leq \sum_{k \geq 2} \left(h \operatorname{cap}(G) \right)^k = \frac{(h \operatorname{cap}(G))^2}{1 - h \operatorname{cap}(G)} = o(h) \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

de modo que a quantidade \bar{R}_h é também igual a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$.

Relembrando a definição da σ -álgebra $\mathcal{A}_u^{G,+}$, estabelecida em (2.4.5) como

$$\mathcal{A}_u^{G,+} = \sigma \left(\sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)} : w_i \in W_{G,+}, u_i \leq u \right),$$

ou seja, a menor σ -álgebra que contém toda a informação sobre os entrelaçamentos restritos ao conjunto G com níveis menores do que ou iguais a u , podemos calcular a esperança da variável aleatória $\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \omega_u) = \mathbb{P}^{u+h}(A \mid \mathcal{A}_u^{G,+})$, com respeito à lei \mathbb{P}^u ,

$$\begin{aligned} E_u \left[\mathbb{P}^{u+h}(A \mid \omega_u) \right] &= E_u \left[P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} h \operatorname{cap}(G) e^{-h \operatorname{cap}(G)} \right] \\ &\quad + E_u \left[R_h \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] + E_u \left[\mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \right] \\ &= E_u \left[P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] h \operatorname{cap}(G) e^{-h \operatorname{cap}(G)} \\ &\quad + \bar{R}_h + \mathbb{P}^u(A), \end{aligned}$$

de tal forma que uma expressão para a derivada à direita de $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito à u , pode ser estabelecida como

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^{u+h}(A) - \mathbb{P}^u(A)}{h} &= \operatorname{cap}(G) E_u \left[P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] \lim_{h \downarrow 0} \frac{h e^{-h \operatorname{cap}(G)}}{h} \\ &\quad + \lim_{h \downarrow 0} \frac{\bar{R}_h}{h} \\ &= \operatorname{cap}(G) E_u \left[P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right]. \end{aligned}$$

Com o objetivo de reescrever a última expressão de maneira um pouco mais clara e intuitiva, introduziremos mais algumas notações.

Equivalentemente à notação $E_u[\cdot]$ utilizada até este momento, utilizaremos também a notação $E_{\omega_u}[\cdot]$ para representar a esperança sob a lei \mathbb{P}^u . Analogamente, denotaremos por $E_{w_\eta}[\cdot]$ a esperança sob a lei da trajetória w_η , ou seja, sob a lei P_{w_η} .

Assim, escrevemos por exemplo,

$$P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) = E_{w_\eta} \left[\mathbf{1}_{\{\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}} \right].$$

Denotando por $\omega_u \oplus w_\eta$ a superposição da configuração ω_u com a trajetória w_η , observe que

$$\begin{aligned} E_u \left[P_{w_\eta}(\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] &= E_{\omega_u} \left[E_{w_\eta}(\mathbf{1}_{\{\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}}) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] \\ &= E_{\omega_u} \left[E_{w_\eta}(\mathbf{1}_{\{\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}}) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] \\ &= E_{\omega_u \oplus w_\eta} \left[\mathbf{1}_{\{\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}} \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right] \\ &= P_{\omega_u \oplus w_\eta} \left[\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \omega_u \notin A \right], \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

onde $E_{\omega_u \oplus w_\eta}[\cdot]$ representa a esperança com respeito à medida produto $\mathbb{P}^u \times P_{w_\eta}$.

Desta forma,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^{u+h}(A) - \mathbb{P}^u(A)}{h} = \text{cap}(G) E_{\omega_u \oplus w_\eta} \left[\mathbf{1}_{\{\omega_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}} \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}} \right], \quad (2.4.8)$$

de modo que a derivada à direita de $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito à u , pode ser vista como um múltiplo da capacidade do conjunto G , onde a constante multiplicativa pode ser interpretada como a proporção, sob a lei $\mathbb{P}^u \times P_{w_\eta}$, de configurações de trajetórias no nível u sobre as quais o evento A não ocorre, mas dotadas da propriedade de fazer com que o evento A passe a ocorrer, ao se incorporar uma nova trajetória w_η .

Para estabelecer, por outro lado, uma expressão para a derivada à esquerda da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito à u , precisamos antes apresentar algumas outras definições.

Seja A um evento qualquer, suportado em G , não necessariamente crescente, e considere uma medida pontual $\omega_u \in \Omega_u^{G,+}$, que como antes, pode ser vista como uma configuração aleatória de trajetórias que se iniciam na fronteira do conjunto G , com índices menores do que ou iguais a u . Dizemos que a trajetória $w^* \in W_{G,+}$ (com respectivo índice $v \leq u$) é pivotal para o evento A na configuração ω_u (ou pivotal para o par (A, ω_u)) se $\mathbf{1}_A(\omega_u) \neq \mathbf{1}_A(\omega'_u)$, onde $\omega'_u = \omega_u \pm \delta_{(w^*,v)}$. Especificamente, escrevemos $\omega'_u = \omega_u + \delta_{(w^*,v)}$ quando ω'_u é igual a ω_u e possui adicionalmente a trajetória w^* . Ao contrário, escrevemos $\omega'_u = \omega_u - \delta_{(w^*,v)}$ quando ω'_u é igual a ω_u mas não possui a trajetória w^* . Assim, a configuração ω'_u difere da configuração ω_u apenas pela trajetória w^* . Neste sentido, a ocorrência ou não do evento A depende diretamente da presença da trajetória w^* na configuração. Por sua vez, o evento

$$\{w^* \text{ é pivotal para } A \text{ no nível } u\}$$

é o conjunto de todas as configurações $\omega_u \in \Omega_u^{G,+}$, no nível u , tais que w^* é pivotal para o par (A, ω_u) .

Particularmente para um evento crescente A , dizemos que a trajetória $w^* \in W_{G,+}$ (com respectivo índice $v \leq u$) é pivotal positiva para o evento A na configuração ω_u se o evento A ocorre e w^* está presente na configuração ω_u , mas o evento A deixaria de ocorrer se w^* fosse retirada de ω_u , ou seja, $\mathbf{1}_A(\omega_u) = 1$ e $\mathbf{1}_A(\omega_u - \delta_{(w^*,v)}) = 0$. Por exemplo, as duas trajetórias que aparecem na figura 2.3 e as três trajetórias que aparecem na figura 2.4 são todas pivotais positivas para os respectivos eventos mencionados nos exemplos a que se referem cada uma das figuras. Na figura 2.3, se alguma das trajetórias for retirada da configuração, então a quantidade de pontos em G que serão de fato visitados pelo entrelaçamento será menor do que a metade da cardinalidade de G . Na figura 2.4, se alguma das trajetórias for excluída, então não teremos mais um caminho contido em \mathcal{I}_G^u conectando os pontos v e z .

Similarmente, a trajetória $w^* \in W_{G,+}$ (com respectivo índice $v \leq u$) é dita pivotal negativa para o evento (crescente) A na configuração ω_u se o evento A não ocorre e w^* não está presente na configuração ω_u , mas o evento A passaria a ocorrer se w^* fosse incluída em ω_u , ou seja, $\mathbf{1}_A(\omega_u) = 0$ e $\mathbf{1}_A(\omega_u + \delta_{(w^*,v)}) = 1$.

E finalmente uma trajetória $w^* \in W_{G,+}$ será simplesmente denominada pivotal para o evento crescente A na configuração ω_u se ela for pivotal positiva ou pivotal negativa para este evento, nesta configuração.

Neste contexto, denotamos por $N_{\omega_u}^+$ o número de trajetórias pivotais positivas para o evento crescente A , na configuração ω_u . Como as trajetórias pivotais positivas somente são identificadas quando A ocorre (sob ω_u), podemos escrever

$$N_{\omega_u}^+ = N_{\omega_u}^+ \mathbf{1}_A(\omega_u).$$

Observe que, ao contrário do que ocorre nos modelos de percolação usuais, no contexto do modelo de entrelaçamentos aleatórios não é possível definir o número de trajetórias pivotais negativas para o evento crescente A , na configuração ω_u , digamos $N_{\omega_u}^-$. Isto ocorre porque, ao tentar defini-la notamos que, na realidade, esta quantidade será sempre igual a infinito, ou seja, para uma configuração ω_u sobre a qual o evento crescente A não ocorre, é sempre possível encontrar uma infinidade de trajetórias que, ao serem incluídas na configuração, farão com que o evento A passe a ocorrer (se $A \neq \emptyset$, naturalmente).

Procuramos agora estabelecer uma expressão para a probabilidade $\mathbb{P}^{u-h}(A)$, para algum $u \geq 0$ e $0 < h < u$, sendo A um evento, assim como antes, suportado em G e crescente com relação ao entrelaçamento restrito à G , e observando novamente que

$$\mathbb{P}^{u-h}(A) = \mathbb{P}(\omega_{u-h} \in A).$$

Através da fórmula da esperança total,

$$\mathbb{P}^{u-h}(A) = E_u[\mathbb{P}^{u-h}(A \mid \mathcal{A}_u^{G,+})] = E_u[\mathbb{P}(\omega_{u-h} \in A \mid \omega_u)].$$

Como o evento A é crescente então, por definição, $\omega_u \notin A$ implica $\omega_{u-h} \notin A$, de tal forma que

$$\mathbb{P}(\omega_{u-h} \in A \mid \omega_u \notin A) = 0.$$

Lembrando que a variável aleatória M representa a quantidade (aleatória) de trajetórias na configuração ω_u , interpretamos M como sendo a quantidade de pontos do processo de Poisson de intensidade igual a $\text{cap}(G)$ no intervalo $[0, u]$ (veja a figura 2.6). Desta forma sabemos que, dado o valor de M , cada um destes pontos se distribui uniformemente e de forma independente neste intervalo.

Por sua vez, a quantidade $N_{\omega_u}^+$ de trajetórias pivotais positivas para o evento A na configuração ω_u , pode ser vista como a quantidade de pontos (dentro dos M pontos) do processo de Poisson, no intervalo $[0, u]$, correspondentes aos pontos em ∂G que originam as trajetórias pivotais positivas, de tal forma que $N_{\omega_u}^+ \leq M$. Neste contexto, dado o valor de $N_{\omega_u}^+$, estes pontos também serão uniformemente e independentemente distribuídos no intervalo $[0, u]$. Assim, a probabilidade de que um ponto qualquer, correspondente à uma trajetória pivotal positiva, pertença por exemplo ao intervalo $(u-h, u]$, dado o valor de $N_{\omega_u}^+$, será igual a h/u , de acordo com a distribuição uniforme.

Denote agora por V a quantidade de pontos deste mesmo processo de Poisson de intensidade igual a $\text{cap}(G)$, que pertencem ao intervalo $(u-h, u]$, dentre os $N_{\omega_u}^+$ pontos correspondentes às trajetórias pivotais positivas, e adicionalmente denote por V' a quantidade de pontos deste processo de Poisson que pertencem ao mesmo intervalo $(u-h, u]$, porém agora dentre os M pontos do processo no nível u . Então a probabilidade de que o evento A deixe de ocorrer no entrelaçamento de nível $u-h$, dado que o evento ocorre no nível u , será igual à probabilidade de que pelo menos um

dos $N_{\omega_u}^+$ pontos correspondentes às trajetórias pivotais positivas, do processo de Poisson, pertença ao intervalo $(u-h, u]$, ou uma coleção de pelo menos dois dentre os M pontos do processo pertença à este intervalo e a retirada simultânea de todas as trajetórias desta coleção faça com que o evento deixe de ocorrer, de modo que, ao diminuir o nível do entrelaçamento de u para $u-h$, pelo menos uma trajetória pivotal positiva será retirada da configuração ω_u , ou uma coleção de trajetórias, digamos “conjuntamente pivotais positivas”, seja retirada desta configuração, fazendo com que o evento A deixe de ocorrer (veja a figura 2.7).

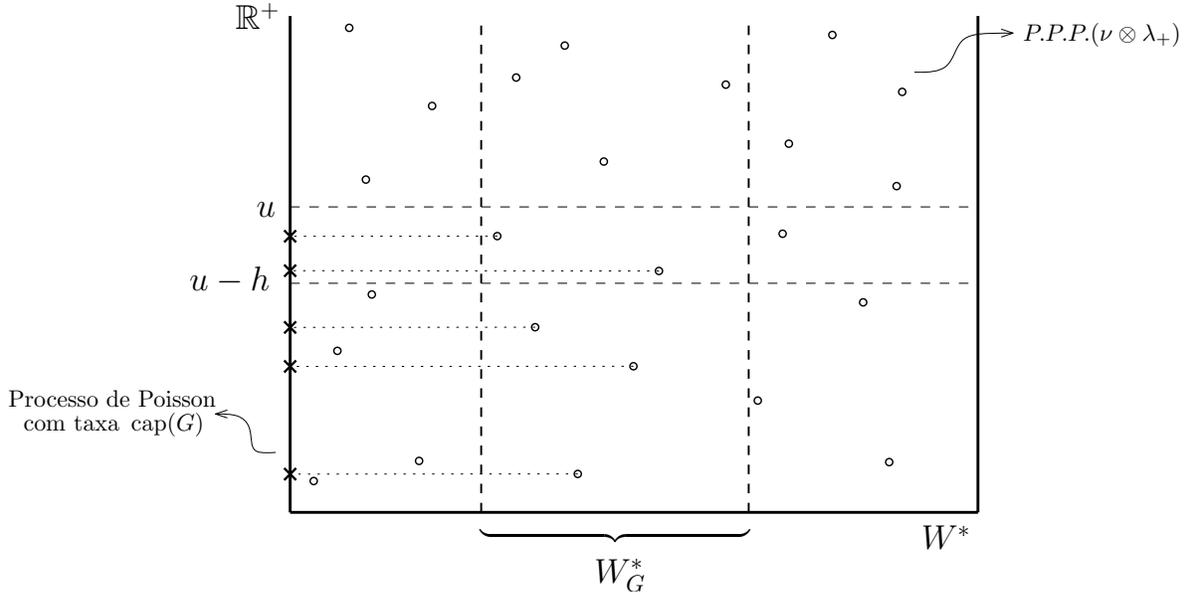


Figura 2.7: Ao diminuir o nível do processo de u para $u-h$, algumas trajetórias podem ser retiradas da configuração. Se o evento A ocorre no nível u e pelo menos uma das trajetórias retiradas é pivotal positiva, então o evento deixa de ocorrer no nível $u-h$. Da mesma forma, se uma coleção de trajetórias com níveis entre $u-h$ e u fazem com que o evento deixe de ocorrer ao serem simultaneamente retiradas da configuração, então o evento também deixará de ocorrer no nível $u-h$.

Precisamente, de acordo com a fórmula da probabilidade total podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_{u-h} \notin A \mid \omega_u \in A) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\omega_{u-h} \notin A, M = m, N_{\omega_u}^+ = n, V = k \mid \omega_u \in A) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\omega_{u-h} \notin A \mid M = m, N_{\omega_u}^+ = n, V = k, \omega_u \in A) \\ &\quad \times \mathbb{P}(M = m, N_{\omega_u}^+ = n, V = k \mid \omega_u \in A). \end{aligned}$$

No sentido de explorar esta expressão, para $\omega_u = \sum_{i \geq 1} \delta_{(w_i, u_i)}$ em $\Omega_u^{G,+}$, considere o evento

$$\mathbb{B}(V') := \left\{ \mathbf{1}_A(\omega_u) = 1, \mathbf{1}_A\left(\omega_u - \sum_{i: u-h < u_i \leq u} \delta_{(w_i, u_i)}\right) = 0 \right\},$$

ou seja, o evento em que A ocorre sob o processo no nível u , mas deixa de ocorrer se forem retiradas simultaneamente todas as trajetórias com índices entre $u - h$ e u , notando que a quantidade de trajetórias que são retiradas ao diminuir o nível do processo para $u - h$ é exatamente igual à V' . Assim, este evento afirma que as trajetórias com índices entre $u - h$ e u são de certa maneira “conjuntamente pivotais positivas” para o evento A , no nível u .

Observe então que, de acordo com as definições das variáveis aleatórias V e V' e das trajetórias pivotais positivas para o evento A na configuração ω_u , temos

$$\mathbb{P}(\omega_{u-h} \notin A \mid M = m, N_{\omega_u}^+ = n, V = k, \omega_u \in A) = \begin{cases} p^{m,n}, & \text{se } k = 0, \\ 1, & \text{se } k \geq 1, \end{cases}$$

onde

$$p^{m,n} = \mathbb{P}(\{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid M = m, N_{\omega_u}^+ = n, V = 0, \omega_u \in A),$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_{u-h} \notin A \mid \omega_u \in A) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(V = k, M = m, N_{\omega_u}^+ = n \mid \omega_u \in A) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(V = 0, M = m, N_{\omega_u}^+ = n \mid \omega_u \in A) p^{m,n} \\ &= \mathbb{P}(V \geq 1 \mid \omega_u \in A) + \mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \omega_u \in A). \end{aligned}$$

A primeira probabilidade que aparece na última linha desta expressão, por sua vez, pode ser calculada levando-se em conta os comentários anteriores sobre a distribuição uniforme, de modo que, se $\omega_u \in A$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \geq 1 \mid \omega_u) &= \sum_{k=1}^{N_{\omega_u}^+} \binom{N_{\omega_u}^+}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N_{\omega_u}^+}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq k\}}, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_{u-h} \in A \mid \omega_u) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N_{\omega_u}^+}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq k\}} \\ &\quad - \mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \omega_u). \end{aligned}$$

Com isso, finalmente podemos escrever

$$\mathbb{P}(\omega_{u-h} \in A \mid \omega_u) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega_u \notin A, \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N_{\omega_u}^+}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq k\}} \\ \quad - \mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \omega_u), & \text{se } \omega_u \in A, \end{cases}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}_{u-h} \in A \mid \boldsymbol{\omega}_u) &= \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ \geq k\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \\ &\quad - \mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \boldsymbol{\omega}_u) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}}, \end{aligned}$$

e tomando a esperança desta última expressão com respeito à lei \mathbb{P}^u , obtemos, pelo Teorema de Convergência Monótona,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{u-h}(A) &= \mathbb{P}^u(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{h}{u}\right)^k E_u \left[\binom{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ \geq k\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right] \\ &\quad - E_u \left[\mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \boldsymbol{\omega}_u) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Denote por r_h o somatório

$$r_h = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{h}{u}\right)^k E_u \left[\binom{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ \geq k\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right].$$

Provaremos agora que r_h é igual a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$, e mais adiante mostraremos que a mesma afirmação também é válida para o valor esperado

$$r'_h = E_u \left[\mathbb{P}(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \boldsymbol{\omega}_u) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right]. \quad (2.4.11)$$

Lema 2.4.2.

$$r_h := \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{h}{u}\right)^k E_u \left[\binom{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+ \geq k\}} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right] = o(h),$$

quando $h \downarrow 0$.

Demonstração. Primeiramente, observe que se $n \in \mathbb{N}$ é par, então o coeficiente binomial satisfaz a seguinte relação,

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\frac{n}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

e se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\frac{n-1}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

de tal forma que

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

onde $\lfloor b \rfloor$ representa o maior número inteiro menor do que ou igual a b .

Desta maneira, podemos afirmar que, quase certamente,

$$\binom{N_{\omega_u}^+}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - k} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq k\}} \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \leq \binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor},$$

e pela monotonicidade da esperança $E_u[\cdot]$,

$$\begin{aligned} r_h &\leq E_u \left[\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor} \right] \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{h}{u}\right)^k \\ &= E_u \left[\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor} \right] \frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)}, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

onde a igualdade decorre da suposição de que $h < u$, o que garante a convergência da série presente nesta expressão.

Mas note que

$$\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor} = \frac{N_{\omega_u}^+!}{(N_{\omega_u}^+ - \lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor)! \lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor!} \leq N_{\omega_u}^+!,$$

e além disso, como já discutimos anteriormente, o número de trajetórias pivotais positivas para o evento A na configuração ω_u é menor do que ou igual ao número total de trajetórias na configuração ω_u , ou seja, $N_{\omega_u}^+ \leq M$. Isto implica que $N_{\omega_u}^+! \leq M!$, e consequentemente

$$\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor} \leq M!,$$

lembrando que a variável aleatória M tem distribuição Poisson com parâmetro igual a $u \text{cap}(G)$, de acordo com (2.4.1).

Então, novamente devido à monotonicidade da esperança $E_u[\cdot]$,

$$E_u \left[\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+ / 2 \rfloor} \right] \leq E_u[M!], \quad (2.4.13)$$

e de acordo com a distribuição Poisson, supondo $0 < u \text{cap}(G) < 1$,

$$\begin{aligned} E_u[M!] &= \sum_{m=0}^{\infty} m! \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^m}{m!} \\ &= e^{-u \text{cap}(G)} \sum_{m=0}^{\infty} (u \text{cap}(G))^m \\ &= \frac{e^{-u \text{cap}(G)}}{1 - u \text{cap}(G)}, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

de onde concluímos que a esperança $E_u[M!]$ é finita se $0 < u \text{cap}(G) < 1$.

Consequentemente, de acordo com (2.4.13), a esperança que aparece na expressão (2.4.12) também é finita no caso em que $0 < u \text{cap}(G) < 1$.

Vejamos agora o caso em que $u \text{cap}(G) \geq 1$. Observe que, como $N_{\omega_u}^+ \leq M$,

$$\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+/2 \rfloor} \leq \binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} = \binom{M}{\lceil M/2 \rceil} \leq \frac{M!}{\lceil M/2 \rceil!}, \quad (2.4.15)$$

onde $\lceil b \rceil$ representa o menor número inteiro maior do que ou igual a b , e a partir de onde podemos afirmar que

$$E_u \left[\binom{N_{\omega_u}^+}{\lfloor N_{\omega_u}^+/2 \rfloor} \right] \leq E_u \left[\frac{M!}{\lceil M/2 \rceil!} \right]. \quad (2.4.16)$$

Novamente de acordo com a distribuição Poisson,

$$\begin{aligned} E_u \left[\frac{M!}{\lceil M/2 \rceil!} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{\lceil m/2 \rceil!} \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^m}{m!} \\ &= e^{-u \text{cap}(G)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u \text{cap}(G))^m}{\lceil m/2 \rceil!} \\ &= e^{-u \text{cap}(G)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(u \text{cap}(G))^2]^{m/2}}{\lceil m/2 \rceil!}. \end{aligned}$$

Mas como estamos supondo agora que $u \text{cap}(G) \geq 1$, então

$$[(u \text{cap}(G))^2]^{m/2} \leq [(u \text{cap}(G))^2]^{\lceil m/2 \rceil},$$

para todo $m \geq 0$, de tal forma que

$$\begin{aligned} E_u \left[\frac{M!}{\lceil M/2 \rceil!} \right] &\leq e^{-u \text{cap}(G)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(u \text{cap}(G))^2]^{\lceil m/2 \rceil}}{\lceil m/2 \rceil!} \\ &\leq 2e^{-u \text{cap}(G)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(u \text{cap}(G))^2]^k}{k!} \\ &= 2e^{(u \text{cap}(G))^2 - u \text{cap}(G)} \\ &< \infty, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

de onde concluímos, observando a expressão (2.4.16), que a esperança em (2.4.12) é finita também quando $u \text{cap}(G) \geq 1$.

Portanto, a esperança do coeficiente binomial na expressão (2.4.12) é finita e além disso não depende de h , e como

$$\frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)} = o(h), \text{ quando } h \downarrow 0, \quad (2.4.18)$$

concluímos que r_h é de fato igual a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$. \square

Conforme mencionamos antes, mostraremos agora que o termo denominado r'_h , estabelecido em (2.4.11), é também igual a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$.

Lema 2.4.3.

$$r'_h := E_u \left[\mathbb{P} \left(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \boldsymbol{\omega}_u \right) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \right] = o(h),$$

quando $h \downarrow 0$.

Demonstração. Antes de tudo observe que, quase certamente,

$$\mathbb{P} \left(\{V = 0\} \cap \{V' \geq 2\} \cap \mathbb{B}(V') \mid \boldsymbol{\omega}_u \right) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}} \leq \mathbb{P}(V' \geq 2 \mid \boldsymbol{\omega}_u), \quad (2.4.19)$$

e utilizando um raciocínio análogo àquele empregado para se estabelecer a expressão (2.4.9), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V' \geq 2 \mid \boldsymbol{\omega}_u) &= \sum_{k=2}^M \binom{M}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{M-k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \binom{M}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{M-k} \mathbf{1}_{\{M \geq k\}}. \end{aligned}$$

Novamente empregando o Teorema de Convergência Monótona, ao tomar a esperança E_u em (2.4.19) obtemos

$$r'_h \leq E_u \left[\mathbb{P}(V' \geq 2 \mid \boldsymbol{\omega}_u) \right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{h}{u}\right)^k E_u \left[\binom{M}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{M-k} \mathbf{1}_{\{M \geq k\}} \right],$$

e como

$$\binom{M}{k} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{M-k} \mathbf{1}_{\{M \geq k\}} \leq \binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} \leq M!,$$

quase certamente, então

$$r'_h \leq E_u \left[\binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} \right] \frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)}, \quad (2.4.20)$$

onde

$$E_u \left[\binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} \right] \leq E_u[M!] < \infty,$$

quando $0 < u \operatorname{cap}(G) < 1$, conforme já vimos em (2.4.14).

Por outro lado, a partir de (2.4.15),

$$\binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} \leq \frac{M!}{\lceil M/2 \rceil!},$$

e além disso,

$$E_u \left[\frac{M!}{\lfloor M/2 \rfloor!} \right] < \infty,$$

quando $u \operatorname{cap}(G) \geq 1$, de acordo com (2.4.17), de tal maneira que

$$E_u \left[\binom{M}{\lfloor M/2 \rfloor} \right] < \infty, \quad \forall u > 0.$$

Como este valor esperado não depende de h , concluímos então a partir de (2.4.20) e (2.4.18) que o termo r'_h é realmente igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$. \square

Observe agora que

$$E_u \left[\binom{N_{\omega_u}^+}{1} \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq 1\}} \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \right] = E_u \left[N_{\omega_u}^+ \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq 1\}} \right],$$

e que além disso, pelo Teorema de Convergência Monótona,

$$\lim_{h \downarrow 0} E_u \left[N_{\omega_u}^+ \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq 1\}} \right] = E_u [N_{\omega_u}^+ \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq 1\}}] = E_u [N_{\omega_u}^+],$$

onde a última igualdade decorre do fato que a variável aleatória $N_{\omega_u}^+$ assume apenas valores inteiros não-negativos.

Deste modo, utilizando (2.4.10) e os dois últimos lemas, a derivada à esquerda de $\mathbb{P}^u(A)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^u(A) - \mathbb{P}^{u-h}(A)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\frac{h}{u} E_u \left[N_{\omega_u}^+ \left(1 - \frac{h}{u}\right)^{N_{\omega_u}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{\omega_u}^+ \geq 1\}} \right] + r_h + r'_h}{h} \\ &= \frac{1}{u} E_u [N_{\omega_u}^+] + \lim_{h \downarrow 0} \frac{r_h}{h} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{r'_h}{h} \\ &= \frac{1}{u} E_u [N_{\omega_u}^+], \end{aligned}$$

estabelecendo assim uma expressão analítica para esta derivada à esquerda, e portanto uma nova expressão para a derivada de $\mathbb{P}^u(A)$,

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) = \frac{1}{u} E_u [N_{\omega_u}^+]. \quad (2.4.21)$$

2.4.3 Uma Verificação

Até este momento, temos estabelecido duas expressões para a derivada de $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito à u . Especificamente, deduzimos expressões para as derivadas à direita e à esquerda de $\mathbb{P}^u(A)$, onde A é um evento suportado no conjunto finito $G \subset \mathbb{Z}^d$ e crescente com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u . Além disso, sabemos que estas duas expressões devem ser iguais, pois como já mostramos,

a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, vista como função de u , é diferenciável. Portanto, seria interessante apresentar também, como faremos agora, um argumento probabilístico de que estas expressões de fato coincidem.

Primeiramente, através da expressão (2.4.7), já vimos que

$$E_u \left[P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}} \right] = P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} \left[\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \right].$$

Agora, lembrando que a variável aleatória M possui distribuição Poisson com parâmetro igual a $u \operatorname{cap}(G)$, podemos escrever, a partir da fórmula da probabilidade total,

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} \left[\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \right] &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} \left[\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m \right] \mathbb{P}[M = m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} \left[\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m \right] \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^m}{m!}. \end{aligned}$$

Mas, de acordo com a fórmula da esperança total por sua vez, e denotando a partir de agora a configuração $\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)}$ por $\boldsymbol{\omega}'_u$,

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} \left(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m \right) &= \\ &= E_{\boldsymbol{\omega}'_u} \left[P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} (\boldsymbol{\omega}'_u \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m, \boldsymbol{\omega}'_u) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Similarmente ao que já fizemos anteriormente, determinaremos agora expressões para a probabilidade condicional que aparece no argumento desta última esperança, no caso em que $\boldsymbol{\omega}'_u \notin A$ e no caso em que $\boldsymbol{\omega}'_u \in A$.

Se $\boldsymbol{\omega}'_u \notin A$, então

$$P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} (\boldsymbol{\omega}'_u \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m, \boldsymbol{\omega}'_u) = 0.$$

Por outro lado, se $\boldsymbol{\omega}'_u \in A$, então

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} (\boldsymbol{\omega}'_u \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m, \boldsymbol{\omega}'_u) &= P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} (\boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m, \boldsymbol{\omega}'_u) \\ &= \frac{N_{m+1}^+}{m+1}, \end{aligned}$$

onde N_{m+1}^+ denota o número de trajetórias pivotais positivas na configuração $\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)}$ quando a quantidade de trajetórias em $\boldsymbol{\omega}_u$ é igual a m , ou seja, quando a quantidade de trajetórias em $\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)}$ é igual a $m+1$. Assim, dado que o evento A ocorre sob a configuração $\boldsymbol{\omega}'_u$ e também que $\{M = m\}$, então a probabilidade de que o evento A deixe de ocorrer ao se retirar apenas uma trajetória da configuração é simplesmente igual a proporção de trajetórias pivotais positivas nesta configuração.

Portanto, de maneira geral, podemos estabelecer a seguinte expressão para a probabilidade condicional que aparece do lado direito da igualdade em (2.4.22), no argumento da esperança,

$$P_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta} (\boldsymbol{\omega}'_u \in A, \boldsymbol{\omega}_u \notin A \mid M = m, \boldsymbol{\omega}'_u) = \frac{N_{m+1}^+}{m+1} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}'_u \in A\}}.$$

Calculando a esperança desta expressão com respeito à lei da configuração $\omega'_u = \omega_u + \delta_{(w_\eta)}$ obtemos

$$\begin{aligned} P_{\omega_u \oplus w_\eta}(\omega'_u \in A, \omega_u \notin A \mid M = m) &= E_{\omega'_u} \left[\frac{N_{m+1}^+}{m+1} \mathbf{1}_{\{\omega'_u \in A\}} \mid M = m \right] \\ &= \frac{1}{m+1} E_{\omega'_u} [N_{\omega'_u}^+ \mid M = m] \\ &= \frac{1}{m+1} E_{\omega'_u} [N_{m+1}^+]. \end{aligned}$$

e resumindo, temos a seguinte equação,

$$\begin{aligned} \text{cap}(G) E_u [P_{w_\eta}(\omega'_u \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}}] &= \text{cap}(G) P_{\omega_u \oplus w_\eta}[\omega'_u \in A, \omega_u \notin A] \\ &= \text{cap}(G) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_{\omega'_u} [N_{m+1}^+]}{m+1} e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^m}{m!} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{m=0}^{\infty} E_{\omega'_u} [N_{m+1}^+] e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^{m+1}}{(m+1)!} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\omega'_u} [N_k^+] e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^k}{(k)!}. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Mas observe que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$E_{\omega'_u} [N_{\omega'_u}^+ \mid M = k-1] = E_{\omega_u} [N_{\omega_u}^+ \mid M = k], \quad (2.4.24)$$

pois, como a configuração ω'_u é igual a $\omega_u + \delta_{(w_\eta)}$ e além disso a variável aleatória M determina o número de trajetórias que compõem a configuração ω_u , então em ambas as esperanças na expressão (2.4.24), o condicionamento no valor de M faz com que as duas configurações, respectivamente ω'_u e ω_u , possuam exatamente o mesmo número de trajetórias, especificamente igual a k .

Além disso, lembrando que

$$E_{\omega'_u} [N_{\omega'_u}^+ \mid M = k-1] = E_{\omega'_u} [N_k^+], \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

finalmente podemos concluir, a partir de (2.4.23), que

$$\begin{aligned} \text{cap}(G) E_u [P_{w_\eta}(\omega'_u \in A) \mathbf{1}_{\{\omega_u \notin A\}}] &= \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\omega'_u} [N_{\omega'_u}^+ \mid M = k-1] e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^k}{(k)!} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{\infty} E_{\omega_u} [N_{\omega_u}^+ \mid M = k] e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^k}{(k)!} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} E_{\omega_u} [N_{\omega_u}^+ \mid M = k] e^{-u \text{cap}(G)} \frac{(u \text{cap}(G))^k}{(k)!} \\ &= \frac{1}{u} E_{\omega_u} [N_{\omega_u}^+], \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Note que, nesta última equação, a terceira igualdade decorre do fato que $N_{\omega_u}^+ = 0$ sob o evento $\{M = 0\}$, pois o número de trajetórias pivotais positivas em uma configuração aleatória que não possui nenhuma trajetória é naturalmente igual a zero, e a quarta igualdade decorre novamente da fórmula da esperança total.

2.4.4 Uma Outra Expressão

Uma terceira expressão para a derivada de $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito a u , pode ainda ser obtida, como mostraremos agora.

Para um evento crescente A , suportado em $G \subset \mathbb{Z}^d$, e para algum $u \geq 0$ e $h > 0$, calcularemos $\mathbb{P}^{u+h}(A)$ de uma maneira um pouco diferente daquela apresentada anteriormente, estabelecendo assim uma nova expressão para a derivada à direita da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$.

Relembrando as definições das variáveis aleatórias M e H , estabelecidas em (2.4.1) e (2.4.6), vimos que

$$M \sim \text{Poisson}(u \text{cap}(G)) \quad \text{e} \quad H \sim \text{Poisson}(h \text{cap}(G)),$$

e podemos afirmar que ambas são independentes, pois cada uma destas variáveis computa a quantidade de pontos, de um mesmo processo de Poisson, que ocorrem em intervalos disjuntos de \mathbb{R} .

Além disso, também já vimos que a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$ pode ser escrita como

$$\mathbb{P}^u(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^{\ell}}{\ell!},$$

onde $P_{\ell}(A) = \mathbb{P}^u(A \mid M = \ell)$ não depende de u , mas apenas de ℓ .

Agora, aplicando a fórmula da probabilidade total, condicionando nos valores de M e H , e denotando por $P_{m+k}(A)$ a probabilidade $\mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid M = m, H = k)$, conseguimos estabelecer as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{u+h}(A) &= \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{u+h} \in A \mid M = m, H = k) \mathbb{P}(M = m, H = k) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{m+k}(A) \mathbb{P}(M = m) \mathbb{P}(H = k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} P_{\ell}(A) \mathbb{P}(M = \ell - k) \mathbb{P}(H = k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(A) \left[\sum_{k=0}^{\ell} \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^{\ell-k}}{(\ell-k)!} \frac{e^{-h \text{cap}(G)} (h \text{cap}(G))^k}{k!} \right] \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k e^{-h \text{cap}(G)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

observando que $P_{\ell}(A)$ não depende de h .

Subtraindo $\mathbb{P}^u(A)$ desta última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{u+h}(A) - \mathbb{P}^u(A) &= \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \text{cap}(G)} (u \text{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \text{cap}(G)} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u}\right)^k - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \operatorname{cap}(G)} - 1 \right] \right\} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \operatorname{cap}(G)} \frac{\ell h}{u} \right] \right\} \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \operatorname{cap}(G)} \sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\}. \tag{2.4.25}
\end{aligned}$$

Para calcular a derivada à direita da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, basta então dividir esta expressão por h e depois calcular o limite quando h tende à zero. Para isso, observe primeiramente que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)} - 1}{h} = -\operatorname{cap}(G) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{u} e^{-h \operatorname{cap}(G)}}{h} = \frac{1}{u},$$

e além disso, para todo $\ell \geq 2$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$e^{-h \operatorname{cap}(G)} \sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k = o(h), \quad \text{quando } h \downarrow 0,$$

pois esta soma é finita, observando que para todo $2 \leq k \leq \ell$, com $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h \operatorname{cap}(G)} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k}{h} = \binom{\ell}{k} \lim_{h \rightarrow 0} e^{-h \operatorname{cap}(G)} \frac{h^{k-1}}{u^k} = 0.$$

Provaremos agora o

Lema 2.4.4.

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \operatorname{cap}(G)} \sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\} = o(h), \tag{2.4.26}$$

quando $h \downarrow 0$.

Demonstração. Primeiramente, como $e^{-h \operatorname{cap}(G)} \leq 1$ para todo $h \geq 0$, e os termos $P_{\ell}(A)$ são tais que $0 \leq P_{\ell}(A) \leq 1$ para todo $\ell \geq 0$, $\ell \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ P_{\ell}(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[e^{-h \operatorname{cap}(G)} \sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\} \\
&\leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[\sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\} \\
&\leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \left[\binom{\ell}{\lfloor \ell/2 \rfloor} \sum_{k=2}^{\ell} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\} \\
&\leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^{\ell}}{\ell!} \binom{\ell}{\lfloor \ell/2 \rfloor} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{h}{u} \right)^k \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)} \left[\sum_{\ell=2}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{\ell!} \binom{\ell}{\lfloor \ell/2 \rfloor} \right\} \right] \\
&\leq \frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{\ell!} \frac{\ell!}{[\ell/2]! (\ell - \lfloor \ell/2 \rfloor)!} \right\} \right] \\
&= \frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{[\ell/2]! (\ell - \lfloor \ell/2 \rfloor)!} \right\} \right]. \tag{2.4.27}
\end{aligned}$$

Como já foi comentado anteriormente,

$$\frac{\left(\frac{h}{u}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{u}\right)} = o(h), \quad \text{quando } h \downarrow 0.$$

Resta mostrar, portanto, que a série

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{[\ell/2]! (\ell - \lfloor \ell/2 \rfloor)!}, \tag{2.4.28}$$

é convergente.

Denotando por a_ℓ o termo geral desta série, ou seja,

$$a_\ell = \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{[\ell/2]! (\ell - \lfloor \ell/2 \rfloor)!}, \quad \text{para } \ell \geq 0, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

provaremos que a convergência de fato ocorre neste caso.

De acordo com o Teste da Razão, a convergência da série em (2.4.28) realmente ocorrerá quando

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} \right| < 1,$$

veja por exemplo o Teorema 3.34 de [18].

Mostraremos especificamente que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} \right| = 0.$$

Denote a razão $\left| \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} \right|$ simplesmente por b_ℓ , de modo que, precisamente,

$$b_\ell = u \operatorname{cap}(G) \frac{[\ell/2]! (\ell - \lfloor \ell/2 \rfloor)!}{[(\ell + 1)/2]! ((\ell + 1) - \lfloor (\ell + 1)/2 \rfloor)!}.$$

Agora observe que, para todo $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$b_{2\ell} = b_{2\ell+1} = u \operatorname{cap}(G) \frac{\ell!}{(\ell + 1)!} = \frac{u \operatorname{cap}(G)}{\ell + 1},$$

a partir de onde podemos escrever que

$$b_\ell = \frac{u \operatorname{cap}(G)}{\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor + 1}, \quad \text{para } \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

de tal maneira que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} \right| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} b_\ell = 0.$$

Portanto,

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} \right| = 0 < 1,$$

de onde concluímos que a série em (2.4.28) de fato converge.

Desta forma, a última expressão na equação (2.4.27) é igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$, de modo que o somatório em (2.4.26) é também igual a $o(h)$, quando $h \downarrow 0$, como queríamos mostrar. \square

Finalmente, de acordo com este lema e as observações imediatamente anteriores a ele, dividindo a expressão (2.4.25) por h e tomando o limite quando h tende à zero (à direita), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}^{u+h}(A) - \mathbb{P}^u(A)}{h} &= \\ &= -\operatorname{cap}(G)\mathbb{P}^u(A) + \frac{1}{u} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_\ell(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{\ell!} \\ &= -\operatorname{cap}(G)\mathbb{P}^u(A) + \frac{1}{u} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_\ell(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{\ell!}. \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Por outro lado, como a variável aleatória M , definida anteriormente em (2.4.1), possui distribuição Poisson($u \operatorname{cap}(G)$) sob a lei \mathbb{P}^u do entrelaçamento restrito à G no nível u , e observando que

$$P_\ell(A) = \mathbb{P}^u(A \mid M = \ell)$$

é a probabilidade de que o evento crescente A ocorra sob uma configuração com exatamente ℓ trajetórias, sendo que essa probabilidade depende apenas de ℓ e não mais do nível u do processo, então o somatório que aparece na expressão (2.4.29) corresponde à esperança, com respeito à lei \mathbb{P}^u , da variável aleatória $M\mathbb{P}^u(A \mid M)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_\ell(A) \frac{e^{-u \operatorname{cap}(G)} (u \operatorname{cap}(G))^\ell}{\ell!} &= E_u \left[M \mathbb{P}^u(A \mid M) \right] \\ &= E_u \left[M E_u(\mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \mid M) \right] \\ &= E_u \left[E_u(M \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \mid M) \right] \\ &= E_u \left[M \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \right] \end{aligned}$$

e por fim, uma nova expressão para a derivada da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, com respeito à u , é dada por

$$\frac{d}{du}\mathbb{P}^u(A) = \frac{1}{u}E_u[M\mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}}] - \text{cap}(G)\mathbb{P}^u(A), \quad (2.4.30)$$

ou equivalentemente, como

$$E_u[M \mid \{\omega_u \in A\}] = \frac{E_u[M\mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}}]}{\mathbb{P}^u(A)},$$

podemos escrever também

$$\frac{d}{du}\mathbb{P}^u(A) = \frac{1}{u}\mathbb{P}^u(A)\{E_u[M \mid \{\omega_u \in A\}] - u \text{cap}(G)\}.$$

Temos estabelecido, portanto, a partir do que foi obtido a respeito da derivada da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$ nestas últimas seções, o teorema que enunciamos adiante, reunindo e resumindo os resultados mais importantes discutidos.

Por uma questão de clareza e organização, antes de enunciá-lo julgamos pertinente relembrar algumas notações:

- $E_u[\cdot]$ (ou equivalentemente $E_{\omega_u}[\cdot]$) representa a esperança sob a lei \mathbb{P}_G^u (ou por simplicidade \mathbb{P}^u) do processo pontual de Poisson que governa o processo de entrelaçamento restrito à G no nível u ;
- $P_{w_\eta}(\cdot)$ representa a medida de probabilidade sob a lei da trajetória w_η em $W_{G,+}$;
- $E_{\omega_u \oplus w_\eta}[\cdot]$ representa a esperança sob a medida produto $\mathbb{P}^u \times P_{w_\eta}$, e $\omega_u \oplus w_\eta$ representa a superposição da configuração ω_u com a trajetória w_η ;
- $N_{\omega_u}^+$ representa o número de trajetórias pivotais positivas para o evento A na configuração ω_u em $\Omega_u^{G,+}$;
- M representa a quantidade de partículas que dão origem às trajetórias em \mathcal{I}_G^u , e possui distribuição Poisson com parâmetro $u \text{cap}(G)$.

Teorema 2.4.5. (Fórmula de Russo para entrelaçamentos aleatórios). Sejam G um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d , com dimensão $d \geq 3$, e A um evento suportado em G e crescente com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u . Se $\mathbb{P}^u(A)$ denota a probabilidade do evento A sob a lei do processo pontual de Poisson que governa o processo de entrelaçamento restrito à G no nível u , então a derivada de $\mathbb{P}^u(A)$ com respeito a u pode ser representada de forma equivalente por qualquer uma das

seguintes expressões:

$$\frac{d}{du}\mathbb{P}^u(A) = \text{cap}(G)E_u\left[P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A)\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}}\right] \quad (2.4.31)$$

$$= \text{cap}(G)E_{\boldsymbol{\omega}_u \oplus w_\eta}\left[\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A\}}\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}}\right] \quad (2.4.32)$$

$$= \frac{1}{u}E_u\left[N_{\boldsymbol{\omega}_u}^+\right] \quad (2.4.33)$$

$$= \frac{1}{u}E_u\left[M\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}}\right] - \text{cap}(G)\mathbb{P}^u(A) \quad (2.4.34)$$

$$= \frac{1}{u}\mathbb{P}^u(A)\left\{E_u\left[M \mid \{\boldsymbol{\omega}_u \in A\}\right] - u \text{cap}(G)\right\}. \quad (2.4.35)$$

Como desejávamos, este teorema fornece algumas expressões analíticas explícitas para a taxa de variação da probabilidade de interesse com relação ao nível do processo de entrelaçamento restrito ao conjunto G . Por sua simplicidade relativa às outras expressões, talvez a expressão (2.4.33) seja uma das mais úteis. De fato, a utilizaremos mais adiante no sentido de investigar a possível relação de dependência entre eventos crescentes com relação ao entrelaçamento.

2.4.5 Algumas Consequências

Apresentaremos agora algumas consequências relativamente simples das expressões para a derivada da probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$ deduzidas nas seções anteriores.

Primeiramente, a partir da expressão (2.4.31), fica claro que se o evento A é não-trivial, ou seja, se $A \neq \emptyset$ e $A \neq \Omega^{G,+}$, então

$$\frac{d}{du}\mathbb{P}^u(A) > 0, \quad \forall u > 0. \quad (2.4.36)$$

Isto ocorre porque o argumento da esperança E_u na expressão (2.4.31),

$$P_{w_\eta}(\boldsymbol{\omega}_u + \delta_{(w_\eta)} \in A)\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\omega}_u \notin A\}},$$

é não-negativo e possui probabilidade positiva (sob a lei \mathbb{P}^u) de assumir valores estritamente positivos.

Deste modo, a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, vista como função de u , é uma função monótona crescente no intervalo $(0, \infty)$, ou seja,

$$\mathbb{P}^{u_1}(A) < \mathbb{P}^{u_2}(A), \quad \text{sempre que } 0 < u_1 < u_2,$$

onde A é um evento suportado em $G \subset \mathbb{Z}^d$ e crescente com relação ao entrelaçamento restrito à G .

Esta propriedade da função $\mathbb{P}^u(A)$ é de fato intuitivamente razoável. Neste modelo, o parâmetro u regula, em um certo sentido, a quantidade de trajetórias que constituem o entrelaçamento, de tal forma que a quantidade de trajetórias aumenta ou permanece a mesma à medida que aumentamos o valor de u . Por outro lado, como o evento A é crescente, então é natural que a

probabilidade deste evento não decresça ao se aumentar o valor do parâmetro u , ou seja, ao se aumentar ou manter a quantidade de trajetórias na configuração.

Da expressão (2.4.33) e dos fatos que $N_{\omega_u}^+ \leq M$ e $M \sim \text{Poisson}(u \text{cap}(G))$ sob a lei \mathbb{P}^u , obtemos facilmente uma cota superior para a derivada de $\mathbb{P}^u(A)$,

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) \leq \frac{1}{u} E_u[M] = \text{cap}(G), \quad \forall u > 0, \quad (2.4.37)$$

e uma outra desigualdade deste tipo pode ser estabelecida de forma mais precisa a partir da expressão (2.4.34), observando que $M \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}} \leq M$, de tal forma que

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) \leq \text{cap}(G) - \mathbb{P}^u(A) \text{cap}(G) = \text{cap}(G) \mathbb{P}^u(A^C).$$

Da expressão (2.4.33), e simplesmente observando que $N_{\omega_u}^+ = N_{\omega_u}^+ \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}}$, podemos concluir que

$$\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) = \frac{1}{u} E_u(N_{\omega_u}^+ | A) \mathbb{P}^u(A). \quad (2.4.38)$$

Analogamente ao que pode ser feito no caso dos modelos de percolação usuais (veja por exemplo [7], página 44, equação (2.30)), podemos dividir a expressão (2.4.38) por $\mathbb{P}^u(A)$ e então integrá-la entre as constantes u_1 e u_2 , com $0 \leq u_1 < u_2$,

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A)}{\mathbb{P}^u(A)} du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} E_u(N_{\omega_u}^+ | A) du,$$

o que nos fornece a seguinte expressão

$$\log \left(\frac{\mathbb{P}^{u_2}(A)}{\mathbb{P}^{u_1}(A)} \right) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} E_u(N_{\omega_u}^+ | A) du,$$

ou seja,

$$\mathbb{P}^{u_2}(A) = \mathbb{P}^{u_1}(A) \exp \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} E_u(N_{\omega_u}^+ | A) du \right\}. \quad (2.4.39)$$

Assim como ocorre nos modelos usuais de percolação, estimativas para a esperança condicional $E_u(N_{\omega_u}^+ | A)$ que aparece dentro da integral na expressão (2.4.39) podem ajudar a fornecer alguma ideia sobre o crescimento de $\mathbb{P}^u(A)$.

Por fim, a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$ pode ser expressa em termos de esperanças envolvendo as variáveis aleatórias $N_{\omega_u}^+$ e M . Basta igualar as expressões (2.4.34) e (2.4.38) para obter

$$\mathbb{P}^u(A) = \frac{E_u[M \mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}}]}{E_u[N_{\omega_u}^+ | A] + u \text{cap}(G)},$$

de onde podemos concluir também que

$$E_u[N_{\omega_u}^+ | A] = E_u[M | A] - E_u[M] = E_u[M | A] - u \text{cap}(G),$$

lembrando que $\mathbb{P}^u(A) = \mathbb{P}(\omega_u \in A) = E_u[\mathbf{1}_{\{\omega_u \in A\}}]$.

Capítulo 3

Dependência entre Eventos Crescentes

Como uma primeira aplicação da fórmula de Russo para o modelo de entrelaçamentos aleatórios, tentamos neste capítulo utilizá-la no sentido de atacar o problema da caracterização da covariância entre eventos suportados em subconjuntos finitos e disjuntos do reticulado d -dimensional, e crescentes com relação ao processo de entrelaçamentos. A abordagem que estabelecemos aqui é baseada essencialmente em uma investigação sobre o número de trajetórias pivotais positivas para um evento deste tipo.

3.1 Preliminares

Temos interesse em estudar agora a relação de dependência entre eventos suportados em subconjuntos finitos e disjuntos de \mathbb{Z}^d , e crescentes com relação ao entrelaçamento restrito a um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d . Para desenvolver esta investigação, utilizaremos a fórmula de Russo para os entrelaçamentos aleatórios, estabelecida no Teorema 2.4.5.

Antes de tudo, mostraremos que o número esperado de trajetórias pivotais positivas para um evento crescente e suportado em um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d , no nível u , deve ser, em um certo sentido, uma quantidade “pequena”, para a “maioria” dos valores de u maiores do que zero. Vejamos como isto pode ser estabelecido formalmente.

Assim como antes, denotamos por G um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d .

De acordo com as expressões (2.4.36) e (2.4.37), se A é um evento crescente e suportado em G , então

$$0 < \frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) \leq \text{cap}(G), \quad \forall u > 0,$$

e como neste caso a capacidade do conjunto G é finita, concluímos que a derivada $\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A)$, vista como função de u , é uma função real limitada, para todo $u > 0$.

Além disso, através da proposição 2.4.1 já vimos que a probabilidade $\mathbb{P}^u(A)$, vista como função de u , é uma função analítica no intervalo $(0, +\infty)$, e portanto a sua derivada $\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A)$, além de ser limitada, é uma função contínua em todos os valores de u positivos.

Assim, se u_1 e u_2 são tais que $0 < u_1 < u_2 < \infty$, podemos afirmar que a derivada $\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A)$ é contínua no intervalo $[u_1, u_2]$, o que implica que esta derivada é integrável (no sentido de Riemann) em $[u_1, u_2]$, veja por exemplo o Teorema 6.8 de [18]. Assim, de acordo com o Teorema Fundamental

do Cálculo (ou Teorema de Newton-Leibniz), veja por exemplo o Teorema 6.21 de [18], se A for um evento crescente e suportado em $G \subset \mathbb{Z}^d$ finito, então

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) du = \mathbb{P}^{u_2}(A) - \mathbb{P}^{u_1}(A),$$

e como neste caso $\mathbb{P}^u(A)$ é uma função não-decrescente em u , consequentemente

$$0 \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) du \leq 1. \quad (3.1.1)$$

Defina agora o conjunto

$$D_{u_1, u_2, \alpha} = \left\{ u \in (u_1, u_2) : \frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) \leq \frac{\alpha}{u_2 - u_1} \right\} \subset (u_1, u_2),$$

para alguma constante $\alpha > 1$, e denote por $\lambda(\cdot)$ a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

Neste caso, utilizando (2.4.36) e (3.1.1), temos

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}^C) = \frac{u_2 - u_1}{\alpha} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{1}_{D_{u_1, u_2, \alpha}^C}(u) \frac{\alpha}{u_2 - u_1} du < \frac{u_2 - u_1}{\alpha} \int_{u_1}^{u_2} \frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A) du \leq \frac{u_2 - u_1}{\alpha},$$

e portanto

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) = (u_2 - u_1) - \lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}^C) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Neste sentido, escolhendo a contante α convenientemente, podemos afirmar que deve ser “ampla” a região onde a derivada $\frac{d}{du} \mathbb{P}^u(A)$ é “pequena”. Utilizando em particular a expressão (2.4.33) para esta derivada, podemos afirmar então que, se $N_{\omega_u}^+$ denota a quantidade de trajetórias pivotais positivas para A no nível u , seu valor esperado deverá satisfazer

$$E_u[N_{\omega_u}^+] \leq \frac{u\alpha}{u_2 - u_1}, \quad \forall u \in D_{u_1, u_2, \alpha},$$

conforme comentamos no início da seção. A partir disto, utilizando a desigualdade de Markov, para quaisquer u_1 e u_2 tais que $0 < u_1 < u_2 < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, temos portanto

$$\mathbb{P}^u(N_{\omega_u}^+ \geq k) \leq \frac{u\alpha}{k(u_2 - u_1)}, \quad \forall u \in D_{u_1, u_2, \alpha}, \quad (3.1.2)$$

com

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \text{onde } \alpha > 1. \quad (3.1.3)$$

Pretendemos utilizar esta última afirmação, postulada pelas expressões (3.1.2) e (3.1.3), com o intuito de tentar majorar a covariância entre eventos crescentes e suportados em subconjuntos finitos e disjuntos de \mathbb{Z}^d .

3.2 Uma Cota para a Covariância

Para abordar o problema de interesse neste momento, introduzido na seção anterior, iremos estabelecer um contexto específico, como aquele explorado por exemplo na demonstração do Teorema 2.1 de [22] e também no Lema 3.5 de [3]. Descreveremos este contexto agora.

Consideremos dois subconjuntos disjuntos e finitos de \mathbb{Z}^d , denotando-os G_1 e G_2 . Adicionalmente, assumimos que nenhum destes conjuntos separa o outro do infinito, ou seja, qualquer trajetória em \mathbb{Z}^d que segue de um conjunto para o infinito não precisa necessariamente visitar o outro conjunto. Denotemos então por G a união entre esses dois conjuntos e consideremos também dois eventos crescentes com relação ao entrelaçamento \mathcal{I}_G^u , com $u \geq 0$, suportados respectivamente em G_1 e G_2 , denotando-os respectivamente A_1 e A_2 .

Na discussão que se segue, procuramos estabelecer uma cota para a covariância entre estes dois eventos, representada por

$$E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u})\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})] - E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u})]E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})], \quad (3.2.1)$$

ou equivalentemente por

$$\mathbb{P}^u(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}^u(A_1)\mathbb{P}^u(A_2).$$

Relembrando a expressão (2.2.7), neste contexto $\mu_{G,u}$ representa o processo pontual de Poisson em (W_+, \mathcal{W}_+) que governa a configuração de trajetórias em W_+ que se iniciam na fronteira de G . As definições de $\mu_{G_1,u}$ e $\mu_{G_2,u}$ são análogas.

Como comentamos acima, definimos $G = G_1 \cup G_2$. Consideramos então a seguinte decomposição do processo pontual de Poisson $\mu_{G,u}$:

$$\mu_{G,u} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_{1,2}, \quad (3.2.2)$$

onde μ_1 representa o processo pontual $\mu_{G,u}$ restrito às trajetórias que se iniciam na fronteira de G_1 e nunca visitam G_2 , μ_2 é análogo a μ_1 invertendo as posições de G_1 e G_2 , e $\mu_{1,2}$ representa o processo pontual $\mu_{G,u}$ restrito às trajetórias que se iniciam ou na fronteira de G_1 ou na fronteira de G_2 e posteriormente visitam o outro conjunto em algum tempo finito.

Formalmente,

$$\begin{aligned} \mu_1(dw) &= \mu_{G,u}(dw)\mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_1, H_{G_2}(w) = \infty\}}, \\ \mu_2(dw) &= \mu_{G,u}(dw)\mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) = \infty\}}, \\ \mu_{1,2}(dw) &= \mu_{G,u}(dw)\mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_1, H_{G_2}(w) < \infty\} \cup \{X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) < \infty\}}. \end{aligned}$$

Para uma ilustração desta decomposição, expressa em (3.2.2), observe a figura 3.1.

De acordo com [22], Seção 2, ou [3], Seção 3.3, μ_1 , μ_2 e $\mu_{1,2}$ também serão processos pontuais de Poisson, e além disso serão independentes. De fato, observe que todos estes processos estão definidos em subconjuntos disjuntos de W_+ , especificamente o conjunto das trajetórias que se iniciam em G_1 e nunca visitam G_2 , o conjunto das trajetórias que se iniciam em G_2 e nunca visitam G_1 , e finalmente o conjunto das trajetórias que visitam G_1 e G_2 , iniciando-se em algum

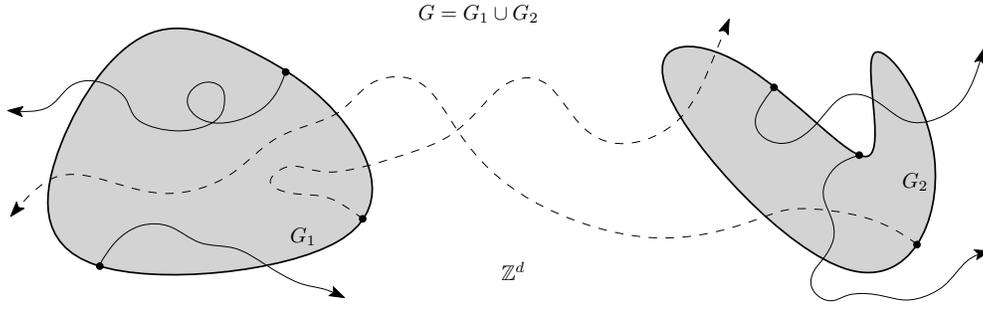


Figura 3.1: A decomposição do processo $\mu_{G,u}$. As trajetórias tracejadas compõem o processo $\mu_{1,2}$, e as trajetórias sólidas, à esquerda e à direita, compõem respectivamente os processos μ_1 e μ_2 .

deles. Além disso, novamente de acordo com [22], Seção 2, ou [3], Seção 3.3, as medidas de intensidade dos dois primeiros processos são respectivamente iguais a

$$\begin{aligned} u \mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_1, H_{G_2}(w) = \infty\}} P_{e_G}, \\ u \mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) = \infty\}} P_{e_G}, \end{aligned}$$

e analogamente, a medida de intensidade do processo $\mu_{1,2}$ será

$$u \mathbf{1}_{\{X_0(w) \in G_1, H_{G_2}(w) < \infty\} \cup \{X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) < \infty\}} P_{e_G}, \quad (3.2.3)$$

onde P_{e_G} está definida em (2.2.8) e é suportada em \mathcal{W}_+ .

Agora observe que os processos $\mu_{G_1,u}$ e $\mu_{G_2,u}$ são determinados respectivamente pelos processos $\mu_1 + \mu_{1,2}$ e $\mu_2 + \mu_{1,2}$, no sentido de que as quantidades de trajetórias observadas nas configurações obtidas dos processos $\mu_{G_1,u}$ e $\mu_{G_2,u}$ coincidem respectivamente com aquelas quantidades observadas em $\mu_1 + \mu_{1,2}$ e $\mu_2 + \mu_{1,2}$. Consideremos então uma cópia independente do processo $\mu_{1,2}$, também independente de μ_1 e μ_2 , denotando-a $\mu'_{1,2}$, de modo que

$$\mu'_{G,u} := \mu_1 + \mu_2 + \mu'_{1,2} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu_{G,u},$$

onde o símbolo $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ denota a relação de igualdade em lei.

Consideremos também o número $N_{A_2}^+$ de trajetórias pivotais positivas para A_2 na configuração $\mu_2 + \mu_{1,2}$, observando que, naturalmente, esta quantidade é igual ao número de trajetórias pivotais positivas para A_2 em $\mu_{G_2,u}$. Desta forma, de acordo com (3.1.2) e (3.1.3), para quaisquer u_1 e u_2 tais que $0 < u_1 < u_2 < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k) \leq \frac{\alpha}{k} \frac{u}{(u_2 - u_1)}, \quad \forall u \in D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2), \quad (3.2.4)$$

onde $\alpha > 1$ e

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \quad (3.2.5)$$

Relembrando a definição do espaço $\Omega_u^{G,+}$ dada em (2.2.9), introduzimos os mapeamentos κ_1 e κ_2 ,

$$\kappa_1 : \Omega_u^{G,+} \rightarrow \Omega_u^{G_1,+} \quad \text{e} \quad \kappa_2 : \Omega_u^{G,+} \rightarrow \Omega_u^{G_2,+},$$

definidos da seguinte maneira:

Para $j = 1, 2$, se $\boldsymbol{\omega} \in \Omega_u^{G,+}$ é da forma $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i \geq 0} \delta_{(w_i, u_i)}$, então

$$\kappa_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i \geq 0} \delta_{(w'_i, u_i)},$$

onde

$$X_k(w'_i) = w'_i(k) = \begin{cases} w_i(k), & \text{se } X_0(w_i) \in G_j \\ w_i(k + H_{G_j}(w_i)), & \text{se } X_0(w_i) \in G \setminus G_j, \text{ e } H_{G_j}(w_i) < \infty, \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, o mapeamento κ_j mantém intactas as trajetórias em $\boldsymbol{\omega}$ que se iniciam na fronteira de G_j , apaga os passados, anteriores à primeira visita a G_j , das trajetórias que se iniciam na fronteira de $G \setminus G_j$ e depois visitam G_j , e ignora as trajetórias que nunca visitam G_j .

A partir da definição destes mapeamentos, observe que

$$\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2})),$$

e como o processo $\mu'_{1,2}$ possui a mesma lei que o processo $\mu_{1,2}$, então

$$E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})] = E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2}))] = E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))]. \quad (3.2.6)$$

Além disso, de acordo com a definição da cópia $\mu'_{1,2}$, os processos $\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})$ e $\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})$ serão independentes, e conseqüentemente serão independentes também as funções mensuráveis $\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2}))$ e $\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))$. Portanto, utilizando a expressão (3.2.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u})] E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})] &= E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2}))] E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2}))] \\ &= E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2}))] E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))] \\ &= E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))]. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando este último fato e a desigualdade de Jensen, podemos estabelecer que

$$\begin{aligned} & \left| E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u}) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})] - E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1,u})] E_u[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2,u})] \right| \\ &= \left| E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2}))] \right. \\ & \quad \left. - E_u[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))] \right| \\ &\leq E_u \left[\left| \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2})) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})) \right| \right]. \quad (3.2.7) \end{aligned}$$

Para simplificar a notação nos argumentos que seguem, denotaremos por χ a quantidade (mensurável) cuja esperança do valor absoluto é tomada na última expressão em (3.2.7), ou seja,

$$\chi = \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2}))\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2})) - \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2}))\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})). \quad (3.2.8)$$

Investigaremos a partir de agora o comportamento de χ em cada uma das partes de uma partição do espaço amostral. Para isso, introduzimos ainda a variável aleatória $N_{1,2}^{A_2}$, que representa o número de trajetórias pertencentes à $\mu_{1,2}$ (ou seja, que visitam G_1 e G_2) e que são pivotais positivas para A_2 na configuração $\mu_2 + \mu_{1,2}$, e analogamente definimos a variável $N_{1,2}^{A'_2}$, que representa o número de trajetórias pertencentes à $\mu'_{1,2}$ que são pivotais positivas para A_2 em $\mu_2 + \mu'_{1,2}$.

Especificamente, considere a partição $\{B_i\}_{i=1}^6$ do espaço amostral, onde suas partes são, respectivamente:

- $B_1 = \{\mu_{1,2} = 0, \mu'_{1,2} = 0\}$,
- $B_2 = \{\mu_{1,2} = 0, \mu'_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A'_2} = 0\}$,
- $B_3 = \{\mu_{1,2} = 0, \mu'_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A'_2} = 1\}$,
- $B_4 = \{\mu_{1,2} = 1, \mu'_{1,2} = 0, N_{1,2}^{A_2} = 0\}$,
- $B_5 = \{\mu_{1,2} = 1, \mu'_{1,2} = 0, N_{1,2}^{A_2} = 1\}$,
- $B_6 = \{\mu_{1,2} + \mu'_{1,2} \geq 2\}$.

Observe que, por simplicidade, ao definir esta partição cometemos um abuso de linguagem, pois $\mu_{1,2}$ e $\mu'_{1,2}$ são originalmente processos pontuais.

Antes de tudo, mostraremos que a variável aleatória χ é nula sob cada um dos eventos B_1 , B_2 e B_4 .

Sob o evento B_1 , claramente

$$\chi = \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1)\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) - \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1)\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) = 0.$$

Por sua vez, sob o evento B_2 ,

$$\chi = \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1)\left[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) - \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2}))\right].$$

Mas observe que, sob este evento, a única trajetória presente em $\mu'_{1,2}$ não é pivotal positiva para A_2 , pois neste caso temos $N_{1,2}^{A'_2} = 0$. Isto significa que, se o evento A_2 ocorre na presença da trajetória em $\mu'_{1,2}$ então sua ocorrência não é afetada pela retirada desta trajetória do entrelaçamento, ou seja,

$$\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) = 1, \quad \text{sob } B_2.$$

Por outro lado, quando A_2 não ocorre na presença da trajetória em $\mu'_{1,2}$, como A_2 é crescente então o evento continuará não ocorrendo com a retirada de uma trajetória, de modo que

$$\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) = 0, \quad \text{sob } B_2.$$

Disto concluímos que

$$\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu'_{1,2})) = \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2), \quad \text{sob } B_2,$$

e portanto χ é de fato igual a zero sob B_2 .

Em B_4 , por outro lado, temos

$$\chi = \mathbf{1}_{A_1}(\mu_1 + \kappa_1(\mu_{1,2})) \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2})) - \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) \right].$$

Sob este evento, a única trajetória presente em $\mu_{1,2}$ não é pivotal positiva para A_2 , pois $N_{1,2}^{A_2} = 0$ neste caso. Então, de maneira exatamente análoga ao que foi discutido no caso anterior (caso sob o evento B_2) podemos concluir que

$$\mathbf{1}_{A_2}(\mu_2 + \kappa_2(\mu_{1,2})) = \mathbf{1}_{A_2}(\mu_2) \quad \text{sob } B_4,$$

de tal forma que a variável χ é nula também sob o evento B_4 .

Com isso, temos mostrado aquilo que afirmamos inicialmente a respeito do comportamento da variável χ restrita a estes três eventos.

Agora observe que

$$|\chi| = |\chi| \left(\sum_{i=1}^6 \mathbf{1}_{B_i} \right),$$

e que, de acordo com a definição de χ estabelecida em (3.2.8), esta variável aleatória assume valores no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de modo que $|\chi| \leq 1$.

Mas acabamos de verificar que χ é igual a zero sob os eventos B_1 , B_2 e B_4 , de tal maneira que, por exemplo, $|\chi| \mathbf{1}_{B_1} = 0$, sendo a mesma afirmação verdadeira para os outros dois eventos.

Podemos portanto afirmar que

$$\begin{aligned} E_u(|\chi|) &= E_u(|\chi| \mathbf{1}_{B_3}) + E_u(|\chi| \mathbf{1}_{B_5}) + E_u(|\chi| \mathbf{1}_{B_6}) \\ &\leq \mathbb{P}^u(B_3) + \mathbb{P}^u(B_5) + \mathbb{P}^u(B_6), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

de modo que a nossa tarefa se resume agora em investigar estas três probabilidades, buscando cotas razoáveis para elas.

Primeiramente, estudaremos a probabilidade do evento B_6 .

Lembremos que $\mu_{1,2}$ é um processo pontual de Poisson, com medida de intensidade apresentada em (3.2.3). Se denotamos por $W_{1,2} \in \mathcal{W}_+$ o subconjunto de W_+ dado por

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \left\{ w \in W_+ : X_0(w) \in G_1, H_{G_2}(w) < \infty \right\} \\ &\quad \cup \left\{ w \in W_+ : X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

então

$$\mu_{1,2}(W_{1,2}) \sim \text{Poisson}(uP_{e_G}(W_{1,2})), \tag{3.2.10}$$

e como $\mu'_{1,2}$ é uma cópia independente de $\mu_{1,2}$, então

$$\mu_{1,2}(W_{1,2}) + \mu'_{1,2}(W_{1,2}) \sim \text{Poisson}(2uP_{e_G}(W_{1,2})).$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^u(B_6) &= \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} + \mu'_{1,2} \geq 2) \\
&= 1 - \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} + \mu'_{1,2} = 0) - \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} + \mu'_{1,2} = 1) \\
&= 1 - e^{-2uP_{e_G}(W_{1,2})} - e^{-2uP_{e_G}(W_{1,2})}2uP_{e_G}(W_{1,2}) \\
&\leq 2uP_{e_G}(W_{1,2}) - e^{-2uP_{e_G}(W_{1,2})}2uP_{e_G}(W_{1,2}) \\
&= 2uP_{e_G}(W_{1,2})[1 - e^{-2uP_{e_G}(W_{1,2})}],
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

onde a desigualdade é consequência do fato que $1 - e^{-x} \leq x$, para todo $x \geq 0$.

Observando que os dois conjuntos unidos definindo $W_{1,2}$ são disjuntos, e consequentemente

$$P_{e_G}(W_{1,2}) = P_{e_G}(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) + P_{e_G}(X_0 \in G_2, H_{G_1} < \infty),$$

iremos agora construir cotas superiores para as duas probabilidades que aparecem do lado direito desta expressão, assim como fazem [22] e [3].

Primeiramente, lembrando que $G = G_1 \cup G_2$, de acordo com a definição da medida P_{e_G} dada em (2.2.8) podemos escrever

$$\begin{aligned}
P_{e_G}(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) &= \sum_{x \in G} e_G(x) P_x(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) \\
&= \sum_{x \in G_1} e_G(x) P_x(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) \\
&= \sum_{x \in G_1} e_G(x) P_x(H_{G_2} < \infty),
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

pois $P_x(X_0 \in G_1) = 1$ quando $x \in G_1$, e como

$$e_G(x) = P_x(\tilde{H}_{G_1 \cup G_2} = \infty) \mathbf{1}_{G_1 \cup G_2}(x) \leq P_x(\tilde{H}_{G_1} = \infty) \mathbf{1}_{G_1 \cup G_2}(x)$$

e além disso $\mathbf{1}_{G_1 \cup G_2}(x) = \mathbf{1}_{G_1}(x) = 1$ para todo $x \in G_1$, então de (3.2.12) obtemos

$$P_{e_G}(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) \leq \sum_{x \in G_1} e_{G_1}(x) P_x(H_{G_2} < \infty). \tag{3.2.13}$$

Para prosseguir com esta construção, no entanto, precisamos antes citar alguns fatos a respeito da função de Green do passeio aleatório, definida por

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n = y), \quad \text{para } x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

Para interpretar esta função, como usualmente é feito, note que se definirmos a variável aleatória $N_y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}}$, que representa o número de visitas pelo passeio aleatório $\{X_n\}_{n \geq 0}$ ao vértice $y \in \mathbb{Z}^d$, e se denotarmos por \mathbb{E}_x a esperança com respeito à lei P_x , então usando o Teorema de Convergência Monótona,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n = y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$

de onde fica claro que $g(x, y)$ representa o número esperado de visitas à y , pelo passeio aleatório simples partindo de x .

Como estamos considerando que os conjuntos G_1 e G_2 são finitos e também que a dimensão d do espaço \mathbb{Z}^d é maior do que ou igual a três, caso em que o passeio aleatório simples é conhecido ser transiente, veja por exemplo [21], Teorema 1, Seção 8, Capítulo 2, então de acordo com a discussão apresentada na Seção 6 do Capítulo 1 de [6] é possível mostrar que

$$P_x(H_{G_2} < \infty) = \sum_{y \in G_2} e_{G_2}(y)g(x, y), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \quad (3.2.14)$$

veja também a Proposição 4.6.4(c) de [10].

Além disso, ainda neste caso, de acordo com o Teorema 4.3.1, página 95 de [10], para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, quando $\|x - y\| \rightarrow \infty$, a função de Green satisfaz

$$g(x, y) = \frac{c_d}{\|x - y\|^{d-2}} + O(\|x - y\|^{-d}), \quad (3.2.15)$$

onde c_d é uma constante positiva que depende da dimensão d , lembrando que denotamos por $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana.

Mas observe que se $f(\cdot)$ é uma função real, então a afirmação de que $f(\|x - y\|)$ é igual a $O(\|x - y\|^{-d})$ quando $\|x - y\| \rightarrow \infty$ significa que existem constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$|f(\|x - y\|)| \leq \alpha_1 \|x - y\|^{-d}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ tais que } \|x - y\| > \alpha_2.$$

Mas isto implica que, para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, existe apenas um número finito de valores de $\|x - y\|$, menores do que ou iguais a α_2 , para os quais a última afirmação não procede. Podemos afirmar, portanto, que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (eventualmente maior do que α_1) tal que

$$|f(\|x - y\|)| \leq \alpha \|x - y\|^{-d}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

Levando isto em consideração, podemos concluir que

$$\frac{O(\|x - y\|^{-d})\|x - y\|^{d-2}}{c_d} = O(\|x - y\|^{-2}), \quad \text{quando } \|x - y\| \rightarrow \infty,$$

e portanto (3.2.15) é equivalente a

$$\frac{g(x, y)\|x - y\|^{d-2}}{c_d} = 1 + O(\|x - y\|^{-2}), \quad \text{quando } \|x - y\| \rightarrow \infty.$$

Esta última afirmação, por sua vez, implica que

$$\lim_{\|x-y\| \rightarrow \infty} \frac{g(x, y)\|x - y\|^{d-2}}{c_d} = 1,$$

o que significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito e enumerável K de \mathbb{R}_+ , tal que

$$\frac{c_d(1 - \varepsilon)}{\|x - y\|^{d-2}} \leq g(x, y) \leq \frac{c_d(1 + \varepsilon)}{\|x - y\|^{d-2}},$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tais que $\|x - y\| \in K^C = \mathbb{R}_+ \setminus K$, de modo que finalmente podemos afirmar que existem constantes positivas (e finitas) c_0 e c_1 tais que

$$\frac{c_0}{\|x - y\|^{d-2}} \leq g(x, y) \leq \frac{c_1}{\|x - y\|^{d-2}}, \quad (3.2.16)$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

Retornando à nossa argumentação, a partir da expressão (3.2.13) e utilizando as expressões (3.2.14) e (3.2.16) obtemos

$$\begin{aligned} P_{e_G}(X_0 \in G_1, H_{G_2} < \infty) &\leq \sum_{x \in G_1} \sum_{y \in G_2} e_{G_1}(x) e_{G_2}(y) g(x, y) \\ &\leq \sup_{x \in G_1, y \in G_2} g(x, y) \sum_{x \in G_1} e_{G_1}(x) \sum_{y \in G_2} e_{G_2}(y) \\ &\leq c_1 \sup_{x \in G_1, y \in G_2} \frac{1}{\|x - y\|^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2) \\ &= \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2), \end{aligned}$$

onde $\Delta_G = \inf_{x \in G_1, y \in G_2} \|x - y\|$ representa a menor distância (segundo a norma Euclidiana) entre pontos de G_1 e de G_2 .

De maneira exatamente análoga,

$$P_{e_G}(X_0 \in G_2, H_{G_1} < \infty) \leq \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2),$$

de tal forma que

$$P_{e_G}(W_{1,2}) \leq 2 \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2), \quad (3.2.17)$$

e assim finalmente podemos estabelecer, a partir de (3.2.11), a seguinte cota superior para a probabilidade do evento B_6 ,

$$\mathbb{P}^u(B_6) \leq 4u \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2) \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \left[1 - \exp \left\{ -4u \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2) \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \right\} \right], \quad (3.2.18)$$

onde a constante positiva e finita c_1 existe de acordo com o comentário anterior à expressão (3.2.16).

Podemos estabelecer também uma cota inferior para $P_{e_G}(W_{1,2})$. Usando (3.2.12) e (3.2.14) (e as expressões análogas a estas, trocando G_1 por G_2 e vice-versa), e também a expressão (3.2.16), obtemos

$$\begin{aligned} P_{e_G}(W_{1,2}) &\geq \sum_{x \in G_1} e_G(x) \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_2) + \sum_{x \in G_2} e_G(x) \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \\ &\geq \min\{\text{cap}(G_1), \text{cap}(G_2)\} \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \left(\sum_{x \in G_1} e_G(x) + \sum_{x \in G_2} e_G(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min\{\text{cap}(G_1), \text{cap}(G_2)\} \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G) \\
&\geq \min\{\text{cap}(G_1), \text{cap}(G_2)\} \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \max\{\text{cap}(G_1), \text{cap}(G_2)\} \\
&= \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2), \tag{3.2.19}
\end{aligned}$$

onde a constante c_2 é positiva e finita, e depende da dimensão d e dos diâmetros dos conjuntos G_1 e G_2 .

Completando nossa investigação, estudaremos finalmente as probabilidades dos eventos B_3 e B_5 . Para isso, observe primeiramente que

$$\mathbb{P}^u(B_3) \leq \mathbb{P}^u(\mu'_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A'_2} = 1) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}^u(B_5) \leq \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A_2} = 1), \tag{3.2.20}$$

e como as probabilidades que aparecem do lado direito de cada uma das desigualdades acima são iguais, devido à construção de $\mu'_{1,2}$, então vamos nos concentrar a partir de agora no cálculo de uma cota para a probabilidade do evento $\{\mu_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A_2} = 1\}$.

Com esse intuito, note que

$$\mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A_2} = 1) = \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1) \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1), \tag{3.2.21}$$

e de acordo com (3.2.10)

$$\mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1) = u P_{e_G}(W_{1,2}) e^{-u P_{e_G}(W_{1,2})}.$$

A partir disto e das cotas nas expressões (3.2.17) e (3.2.19), temos

$$\mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1) \leq 2u \exp\left\{-u \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2)\right\} \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2), \tag{3.2.22}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas e finitas, e c_2 depende da dimensão d e dos diâmetros de G_1 e de G_2 .

Por outro lado, a investigação da probabilidade condicional que aparece na expressão (3.2.21) é bem mais delicada e exige uma abordagem particular, que realizaremos agora.

A partir da fórmula da probabilidade total, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1) &= \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ \geq k) \mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k \mid \mu_{1,2} = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1) \\
&\leq \mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k \mid \mu_{1,2} = 1) + \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1).
\end{aligned}$$

Mas, como a única trajetória em $\mu_{1,2}$ (quando ocorre o evento $\{\mu_{1,2} = 1\}$) se comporta tipicamente como uma trajetória usual do processo de entrelaçamentos restrito a G_2 , quando a distância Δ_G entre os conjuntos G_1 e G_2 aumenta, podemos dizer que a probabilidade $\mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k \mid \mu_{1,2} = 1)$ irá se aproximar de $\mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k)$, quando Δ_G cresce, de tal forma que existe uma constante positiva e finita c_3 tal que

$$\mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k \mid \mu_{1,2} = 1) \leq c_3 \mathbb{P}^u(N_{A_2}^+ \geq k),$$

e portanto

$$\mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1) \leq c_3 \frac{\alpha}{k} \frac{u}{(u_2 - u_1)} + \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1), \quad (3.2.23)$$

para todo u pertencente ao conjunto $D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2)$, onde $\alpha > 1$, u_1 e u_2 são tais que $0 < u_1 < u_2 < +\infty$, e

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

sendo a desigualdade em (3.2.23) e as afirmações subsequentes decorrentes de (3.2.4) e (3.2.5).

Por sua vez, a probabilidade condicional que aparece após a desigualdade em (3.2.23) pode ser decomposta utilizando-se, novamente, a fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1, \mu_{G_2, u} = m) \mathbb{P}^u(\mu_{G_2, u} = m \mid \mu_{1,2} = 1) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2, u} = m) \mathbb{P}^u(\mu_{G_2, u} = m \mid \mu_{1,2} = 1). \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\mathbb{P}^u(\mu_{G_2, u} = m \mid \mu_{1,2} = 1) = \mathbb{P}^u(\mu_2 = m - 1 \mid \mu_{1,2} = 1) = \mathbb{P}^u(\mu_2 = m - 1),$$

pois μ_2 e $\mu_{1,2}$ são independentes. Desta maneira,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2, u} = m) \mathbb{P}^u(\mu_2 = m - 1). \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Além disto, denotando por W_2 o espaço das trajetórias em W_+ que se iniciam em G_2 e nunca visitam G_1 ,

$$W_2 := \left\{ w \in W_+ : X_0(w) \in G_2, H_{G_1}(w) = \infty \right\},$$

temos, pela definição do processo μ_2 ,

$$\mu_2(W_2) \sim \text{Poisson}(u P_{e_G}(W_2)). \quad (3.2.25)$$

Adicionalmente, pela definição da medida P_{e_G} ,

$$\begin{aligned} P_{e_G}(W_2) &= P_{e_G}(X_0 \in G_2, H_{G_1} = \infty) \\ &= \sum_{x \in G} e_G(x) P_x(X_0 \in G_2, H_{G_1} = \infty) \\ &= \sum_{x \in G_2} e_G(x) P_x(X_0 \in G_2, H_{G_1} = \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{x \in G_2} e_{G_2}(x) P_x(H_{G_1} = \infty) \\
&= \sum_{x \in G_2} e_{G_2}(x) \left[1 - \sum_{y \in G_1} e_{G_1}(y) g(x, y) \right] \\
&= \text{cap}(G_2) - \left(\sum_{x \in G_2} \sum_{y \in G_1} e_{G_2}(x) e_{G_1}(y) g(x, y) \right) \\
&\leq \text{cap}(G_2). \tag{3.2.26}
\end{aligned}$$

Denotaremos a partir deste momento $\Lambda := P_{e_G}(W_2)$.

Denote agora por $w_{1,2}$ a única trajetória presente em $\mu_{1,2}$ quando $\mu_{1,2} = 1$, caso no qual estamos de fato interessados ao estudar estas últimas expressões. Assim, mais uma vez pela fórmula da probabilidade total,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m) \\
&\leq \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_2) \\
&\quad + \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1). \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

Devemos, portanto, investir na tentativa de construção de cotas para as duas probabilidades condicionais que aparecem somadas nesta última expressão. Para investigar a primeira destas probabilidades, condicional no caso em que a única trajetória que visita ambos G_1 e G_2 deve visitar primeiramente G_2 (fato traduzido pelo evento $\{w_{1,2}(0) \in G_2\}$), necessitaremos de alguns resultados preliminares, apresentados a seguir na forma de lemas.

Antes de discutir estes lemas, no entanto, precisamos definir um conjunto específico em \mathbb{Z}^d , cuja fronteira irá separar, de certa maneira, os conjuntos G_1 e G_2 .

Especificamente, definimos o conjunto \mathcal{B}_2 em \mathbb{Z}^d como

$$\mathcal{B}_2 = G_2 \cup \left\{ y \in \mathbb{Z}^d \setminus G_2 : \inf_{x \in G_2} \|y - x\| \leq r \right\},$$

onde $r = \frac{\Delta_G}{2}$, lembrando que $\Delta_G = \inf_{x \in G_1, y \in G_2} \|x - y\|$ é a menor distância entre os pontos de G_1 e de G_2 , segundo a norma Euclidiana. Assim, este conjunto será finito, irá conter o conjunto G_2 e não interceptará o conjunto G_1 (veja a figura 3.2).

A seguir provaremos então o

Lema 3.2.1. Existem constantes ε e K tais que

$$0 < \varepsilon \leq \frac{P_x(H_{G_1} < \infty)}{P_{x'}(H_{G_1} < \infty)} \leq K < \infty,$$

para quaisquer x e x' pertencentes à fronteira interna $\partial\mathcal{B}_2$ do conjunto \mathcal{B}_2 . Isto significa que são comparáveis as probabilidades de um passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d visitar G_1 em um tempo finito, partindo de quaisquer dois pontos em $\partial\mathcal{B}_2$.

Demonstração. Para simplificar um pouco a notação nesta demonstração denotaremos por $p(x)$ a probabilidade $P_x(H_{G_1} < \infty)$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

A partir da equação (3.2.14) podemos afirmar que

$$p(x) = \sum_{y \in \partial G_1} e_{G_1}(y) g(x, y), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d,$$

o que implica que

$$\text{cap}(G_1) \min_{y \in \partial G_1} g(x, y) \leq p(x) \leq \text{cap}(G_1) \max_{y \in \partial G_1} g(x, y),$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Utilizando este fato e a equação (3.2.16), obtemos então

$$c_0^{(x)} := c_0 \min_{y \in \partial G_1} \frac{1}{\|x - y\|^{d-2}} \leq \frac{p(x)}{\text{cap}(G_1)} \leq c_1 \max_{y \in \partial G_1} \frac{1}{\|x - y\|^{d-2}} =: c_1^{(x)}.$$

Mas como a fronteira ∂G_1 é finita e além disso $\partial \mathcal{B}_2 \cap \partial G_1 = \emptyset$, então se supomos que $x \in \partial \mathcal{B}_2$ temos

$$\max_{y \in \partial G_1} \|x - y\|^{d-2} < \infty \quad \text{e} \quad \min_{y \in \partial G_1} \|x - y\|^{d-2} > 0,$$

e conseqüentemente $0 < c_0^{(x)} < c_1^{(x)} < \infty$, para todo $x \in \partial \mathcal{B}_2$.

Desta maneira, se x e x' pertencem à $\partial \mathcal{B}_2$ então

$$0 < \frac{c_0^{(x)}}{c_1^{(x')}} \leq \frac{p(x)}{p(x')} \leq \frac{c_1^{(x)}}{c_0^{(x')}} < \infty,$$

e como a fronteira $\partial \mathcal{B}_2$ também é finita, concluímos que de fato existem constantes ε e K tais que

$$0 < \varepsilon \leq \frac{p(x)}{p(x')} \leq K < \infty,$$

para quaisquer $x, x' \in \partial \mathcal{B}_2$, como queríamos mostrar. \square

O próximo lema será enunciado e demonstrado em um contexto mais geral, e posteriormente será utilizado no contexto específico em que estamos concentrados.

Lema 3.2.2. Considere uma coleção finita X_1, X_2, \dots, X_m de variáveis aleatórias independentes tais que

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Suponha ainda que existe uma constante $\gamma \in (0, 1)$ tal que $p_i \leq \gamma$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$ e além disso as probabilidades na coleção $\{p_i\}_{i=1}^m$ são comparáveis, no sentido que existem constantes ε e K tais que

$$0 < \varepsilon \leq \frac{p_i}{p_j} \leq K < \infty, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Então existem constantes positivas e finitas ρ_1 e ρ_2 tais que

$$\frac{\rho_1}{m} \leq P\left(X_{k_0} = 1 \mid \sum_{i=1}^m X_i = 1\right) \leq \frac{\rho_2}{m},$$

para todo $k_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstração. Observe que, para qualquer k_0 em $\{1, 2, \dots, m\}$,

$$P\left(\sum_{i=1}^m X_i = 1 \mid X_{k_0} = 1\right) = P(X_i = 0, \forall i \neq k_0) = \prod_{i \neq k_0} (1 - p_i)$$

e

$$P\left(\sum_{i=1}^m X_i = 1\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^m \{X_i = 1, X_j = 0 \ \forall j \neq i\}\right) = \sum_{i=1}^m p_i \prod_{j \neq i} (1 - p_j)$$

de tal forma que

$$P\left(X_{k_0} = 1 \mid \sum_{i=1}^m X_i = 1\right) = \frac{p_{k_0} \prod_{i \neq k_0} (1 - p_i)}{\sum_{i=1}^m p_i \prod_{j \neq i} (1 - p_j)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{p_{k_0}} \frac{(1 - p_{k_0})}{(1 - p_i)}}.$$

Mas as probabilidades em $\{p_i\}_{i=1}^m$ são comparáveis, o que significa que existem constantes ε e K tais que

$$0 < \varepsilon \leq \frac{p_i}{p_{k_0}} \leq K < \infty, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

e além disso, como $p_i \leq \gamma$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, então

$$0 < 1 - \gamma \leq \frac{(1 - p_{k_0})}{(1 - p_i)} \leq \frac{1}{1 - \gamma} < \infty, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

o que implica que

$$m\varepsilon(1 - \gamma) \leq \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{p_{k_0}} \frac{(1 - p_{k_0})}{(1 - p_i)} \leq m \frac{K}{1 - \gamma},$$

e portanto

$$0 < \frac{(1 - \gamma)/K}{m} \leq P\left(X_{k_0} = 1 \mid \sum_{i=1}^m X_i = 1\right) \leq \frac{1/[\varepsilon(1 - \gamma)]}{m} < \infty,$$

para qualquer k_0 em $\{1, 2, \dots, m\}$, completando assim a demonstração com

$$\rho_1 = \frac{(1 - \gamma)}{K} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{1}{\varepsilon(1 - \gamma)},$$

observando que $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$. □

Queremos agora aplicar este último lema ao contexto que estamos estudando. Neste sentido, considere uma coleção de m ($m \in \mathbb{N}$) passeios aleatórios simples independentes em \mathbb{Z}^d , denotando-os $\{X_n^{(i)}, n \geq 0\}$, com $i = 1, 2, \dots, m$. Defina ainda, para cada um destes passeios, o tempo de primeira visita ao conjunto G_1 ,

$$H_{G_1}^{(i)} = \min\{n \geq 0 : X_n^{(i)} \in G_1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2.28)$$

Como o passeio aleatório simples é transiente no caso em que a dimensão é maior do que ou igual a 3, conforme já comentamos anteriormente, então é positiva a probabilidade de que o passeio nunca visite o conjunto G_1 , partindo de qualquer ponto em $\partial\mathcal{B}_2$, e portanto

$$P_y(H_{G_1}^{(i)} < \infty) < 1, \quad \text{para qualquer } y \in \partial\mathcal{B}_2 \text{ e todo } i = 1, 2, \dots, m.$$

Mas como a fronteira $\partial\mathcal{B}_2$ é finita, então existe uma constante $\gamma \in (0, 1)$ tal que

$$P_y(H_{G_1}^{(i)} < \infty) \leq \gamma, \quad \text{para qualquer } y \in \partial\mathcal{B}_2 \text{ e todo } i = 1, 2, \dots, m.$$

Além disso, através do Lema 3.2.1 já vimos que as probabilidades de se visitar G_1 em um tempo finito, $P_y(H_{G_1}^{(i)} < \infty)$, partindo de qualquer ponto y na fronteira de \mathcal{B}_2 , são comparáveis.

Desta maneira, se fixamos m pontos pertencentes à fronteira de \mathcal{B}_2 , digamos y_1, y_2, \dots, y_m , de tal forma que cada um dos m passeios se inicie em cada um destes pontos, ou seja, $X_0^{(i)} = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$, então de acordo com o Lema 3.2.2 existem constantes positivas e finitas ρ_1 e ρ_2 tais que

$$\frac{\rho_1}{m} \leq P\left(H_{G_1}^{(i)} < \infty \mid \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{H_{G_1}^{(j)} < \infty\}} = 1\right) \leq \frac{\rho_2}{m},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Mas como é arbitrária a escolha dos pontos y_1, y_2, \dots, y_m a partir dos quais se iniciam os passeios aleatórios, e além disto a fronteira de \mathcal{B}_2 é finita, então podemos afirmar que existem constantes positivas e finitas ρ_1 e ρ_2 (não necessariamente iguais às constantes ρ_1 e ρ_2 da expressão anterior) tais que

$$\frac{\rho_1}{m} \leq P\left(H_{G_1}^{(i)} < \infty \mid \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{H_{G_1}^{(j)} < \infty\}} = 1\right) \leq \frac{\rho_2}{m}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2.29)$$

para quaisquer pontos $y_1, y_2, \dots, y_m \in \partial\mathcal{B}_2$ de onde partem os m passeios aleatórios simples independentes. Observe a figura 3.2 para uma ilustração deste cenário.

Levando em conta estas informações, qual seria então a probabilidade de alguma trajetória em $\mu_{G_2, u}$, pivotal positiva para A_2 , visitar o conjunto G_1 , condicional nos fatos de que o número de trajetórias na configuração $\mu_{G_2, u}$ é igual a m , que o número de trajetórias pivotais positivas para A_2 é menor do que k , e que existe apenas uma trajetória nesta configuração que visita também o conjunto G_1 , sendo que esta se inicia no conjunto G_2 ?

Para responder esta pergunta denotamos por $\mathcal{P}_{A_2}^+$ o subconjunto de trajetórias em $\mu_{G_2, u}$ que são pivotais positivas para A_2 , e para cada trajetória w em $\mu_{G_2, u}$ consideramos ainda a translação w' definida de tal forma que

$$w'(n) = w\left(n + H_{\partial\mathcal{B}_2}(w)\right), \quad n \geq 0,$$

ou seja, w' é a própria trajetória w a partir do momento de sua primeira visita à $\partial\mathcal{B}_2$. Assim, lembrando que $w_{1,2}$ representa a única trajetória presente em $\mu_{1,2}$ quando $\mu_{1,2} = 1$, então a proba-

bilidade condicional mencionada no parágrafo anterior pode ser formalmente escrita como

$$\mathbb{P}^u \left(\bigcup_{w \in \mathcal{P}_{A_2}^+} \{H_{G_1}(w) < \infty\} \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) \quad (3.2.30)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}^u \left(\bigcup_{w \in \mathcal{P}_{A_2}^+} \{H_{G_1}(w) < \infty\} \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ = i, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) \quad (3.2.31)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i \mathbb{P}^u \left(H_{G_1}(w_j) < \infty \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2 \right), \quad (3.2.32)$$

onde w_1, w_2, \dots, w_i representam as trajetórias (aleatórias) em $\mathcal{P}_{A_2}^+$ quando $N_{A_2}^+ = i$.

Agora note que cada termo do somatório (em j) na expressão (3.2.32), para cada um dos $w_j \in \mathcal{P}_{A_2}^+$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in \partial \mathcal{B}_2} \mathbb{P}^u \left(H_{G_1}(w_j) < \infty \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2, H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w_j(H_{\partial \mathcal{B}_2}) = y \right) \\ & \quad \times \mathbb{P}^u \left(H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w_j(H_{\partial \mathcal{B}_2}) = y \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) \\ & = \sum_{y \in \partial \mathcal{B}_2} \mathbb{P}^u \left(H_{G_1}(w'_j) < \infty \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2, H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w'_j(0) = y \right) \\ & \quad \times \mathbb{P}^u \left(H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w_j(H_{\partial \mathcal{B}_2}) = y \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2 \right). \end{aligned}$$

Além disso, de acordo com (3.2.29),

$$\mathbb{P}^u \left(H_{G_1}(w'_j) < \infty \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2, H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w'_j(0) = y \right) \leq \frac{\rho_2}{m},$$

para qualquer y na fronteira de \mathcal{B}_2 , e por outro lado,

$$\begin{aligned} & \sum_{y \in \partial \mathcal{B}_2} \mathbb{P}^u \left(H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty, w_j(H_{\partial \mathcal{B}_2}) = y \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) \\ & = \mathbb{P}^u \left(H_{\partial \mathcal{B}_2}(w_j) < \infty \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) = 1, \end{aligned}$$

pois o passeio aleatório é transiente e qualquer trajetória w_j neste caso se inicia na fronteira $\partial G_2 \subset \mathcal{B}_2$, sendo que o conjunto \mathcal{B}_2 é finito, ou seja, qualquer trajetória w_j neste caso deve visitar $\partial \mathcal{B}_2$ em um tempo finito, quase certamente.

Portanto, finalmente temos estabelecido uma cota para a probabilidade em (3.2.30), ou seja, podemos afirmar que existe uma constante positiva e finita ρ_2 tal que

$$\mathbb{P}^u \left(\bigcup_{w \in \mathcal{P}_{A_2}^+} \{H_{G_1}(w) < \infty\} \mid \mu_{G_2, u} = m, \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, w_{1,2}(0) \in G_2 \right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} i \frac{\rho_2}{m}.$$

Para uma ilustração desta argumentação, veja a figura 3.2.

Retornando à expressão (3.2.27), basta notar agora que a probabilidade que representa o primeiro termo da soma (do lado direito do sinal de desigualdade) naquela expressão corresponde

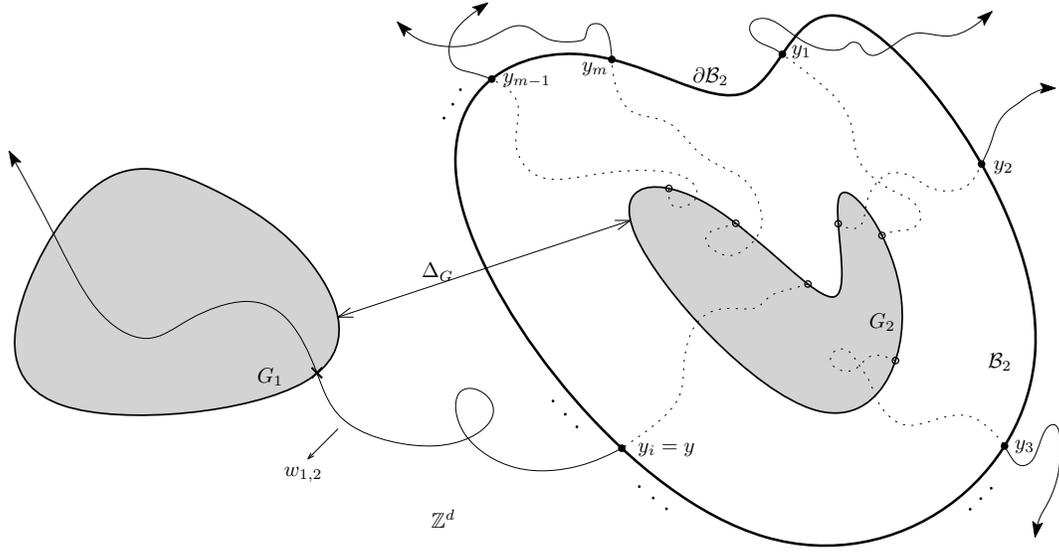


Figura 3.2: Os conjuntos G_1 , G_2 e B_2 . Nesta ilustração temos $\mu_{G_2,u} = m$ e $\mu_{1,2} = 1$, ou seja, o processo de entrelaçamentos restrito à G_2 no nível u possui m trajetórias, das quais apenas uma ($w_{1,2}$) visita também o conjunto G_1 .

justamente à probabilidade que aparece na expressão anterior, de modo que temos encontrado assim uma cota para aquela probabilidade, ou seja, podemos afirmar que existe uma constante positiva e finita ρ_2 tal que

$$\mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_2) \leq \sum_{i=1}^{k-1} i \frac{\rho_2}{m} = \frac{k(k-1)}{2} \frac{\rho_2}{m}.$$

Consequentemente, usando o fato descrito em (3.2.25) e a cota em (3.2.26), lembrando que Λ denota $P_{e_G}(W_2)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_2) \mathbb{P}^u(\mu_2 = m-1) \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\rho_2}{2m} e^{-u\Lambda} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^{m-1}}{(m-1)!} \\ & = \frac{k(k-1)\rho_2 e^{-u\Lambda}}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^m}{m!} \\ & < \frac{k(k-1)\rho_2 e^{-u\Lambda}}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^m}{m!} \\ & = \frac{k(k-1)\rho_2}{2u \operatorname{cap}(G_2)} e^{-u(\Lambda - \operatorname{cap}(G_2))}. \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Resta então investigar a probabilidade que representa o segundo termo da soma que aparece

na expressão (3.2.27), ou seja, a probabilidade condicional

$$\mathbb{P}^u\left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1\right). \quad (3.2.34)$$

Note que agora, de acordo com o evento sobre o qual ocorre o condicionamento, a única trajetória em $\mu_{G_2,u}$ que visita também o conjunto G_1 realiza sua primeira visita ao conjunto G_2 apenas após ter visitado G_1 .

Para iniciar esta discussão, vamos supor antes de tudo que a distância entre os conjuntos G_1 e G_2 seja pelo menos quatro vezes o diâmetro do conjunto G_2 , ou seja, $\Delta_G > 4 \text{diam}(G_2)$, onde

$$\text{diam}(G_2) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in G_2\},$$

é a maior distância entre quaisquer dois pontos de G_2 . Desta forma, para qualquer ponto $z \in G_2$ fixo, a bola \mathcal{C}_2 centrada em z e com raio igual a $2 \text{diam}(G_2)$,

$$\mathcal{C}_2 := B(z, 2 \text{diam}(G_2)) := \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x - z\| \leq 2 \text{diam}(G_2)\},$$

irá conter G_2 e não interceptará o conjunto G_1 (veja a figura 3.3). Na realidade a distância Δ_G mínima mencionada acima é mais do que suficiente para que isso ocorra, e a imposição desta distância mínima será completamente justificada mais adiante. A partir de agora, o centro z da bola \mathcal{C}_2 permanecerá fixo.

Para prosseguir, provaremos antes o

Lema 3.2.3. Condicional a visitar o conjunto G_2 em um tempo finito, as probabilidades de um passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d visitar G_2 pela primeira vez através de qualquer ponto em ∂G_2 , partindo de qualquer ponto na fronteira de \mathcal{C}_2 são comparáveis. Precisamente, existem constantes positivas e finitas ε' e K' tais que

$$0 < \varepsilon' \leq \frac{P_y(X_{H_{G_2}} = x \mid H_{G_2} < \infty)}{P_{y'}(X_{H_{G_2}} = x' \mid H_{G_2} < \infty)} \leq K' < \infty,$$

para quaisquer $x, x' \in \partial G_2$ e quaisquer $y, y' \in \partial \mathcal{C}_2$.

Demonstração. Basta observar que, para qualquer $y \in \partial \mathcal{C}_2$ e qualquer $x \in \partial G_2$, sempre é possível identificar um caminho finito conectando y a x e evitando G_2 antes de chegar até x , ou seja, é possível identificar uma sequência finita de pontos em $\mathbb{Z}^d \setminus G_2$ conectando y a x , sendo unitária a distância euclidiana entre dois pontos consecutivos desta sequência, de tal forma que

$$P_y(X_{H_{G_2}} = x \mid H_{G_2} < \infty) > 0, \quad \forall y \in \partial \mathcal{C}_2, \quad \forall x \in \partial G_2,$$

e conseqüentemente

$$P_y(X_{H_{G_2}} = x \mid H_{G_2} < \infty) < 1, \quad \forall y \in \partial \mathcal{C}_2, \quad \forall x \in \partial G_2.$$

Mas como as cardinalidades de $\partial \mathcal{C}_2$ e ∂G_2 são finitas, então existem constantes δ_0 e δ_1 tais que

$$0 < \delta_0 \leq P_y(X_{H_{G_2}} = x \mid H_{G_2} < \infty) \leq \delta_1 < 1, \quad (3.2.35)$$

para quaisquer $y \in \partial\mathcal{C}_2$ e $x \in \partial G_2$, e com isso obtemos

$$0 < \frac{\delta_0}{\delta_1} \leq \frac{P_y(X_{H_{G_2}} = x \mid H_{G_2} < \infty)}{P_{y'}(X_{H_{G_2}} = x' \mid H_{G_2} < \infty)} \leq \frac{\delta_1}{\delta_0} < \infty,$$

para quaisquer $y, y' \in \partial\mathcal{C}_2$ e $x, x' \in \partial G_2$, de onde concluímos a demonstração. \square

Agora note que a probabilidade condicional representada em (3.2.34) pode ser escrita levando-se em conta a posição inicial da trajetória $w_{1,2}$. Precisamente, utilizando a fórmula da probabilidade total temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1 \right) \\ &= \sum_{v \in \partial G_1} \mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v \right) \\ & \quad \times \mathbb{P}^u \left(w_{1,2}(0) = v \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1 \right). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Por sua vez, para cada $v \in \partial G_1$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v \right) \\ &= \sum_{y \in \partial\mathcal{C}_2} \mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y \right) \\ & \quad \times \mathbb{P}^u \left(w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v \right). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Completando a justificativa para a suposição estabelecida anteriormente de que Δ_G deve ser maior do que $4 \text{diam}(G_2)$, sob esta suposição podemos aplicar a Proposição 6.5.4 de [10], de tal forma que, para qualquer $v \in \partial G_1$ e $y \in \partial\mathcal{C}_2$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u \left(w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v \right) \\ &= \bar{e}_{\mathcal{C}_2}(y) \left[1 + O \left(\frac{\text{rad}(\mathcal{C}_2 - z)}{\|v - z\|} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

quando $\|v - z\| \rightarrow \infty$, onde

$$\text{rad}(B) = \sup\{\|x\| : x \in B\},$$

representa o raio de um conjunto qualquer $B \subset \mathbb{Z}^d$. Desta maneira, de acordo com a definição da bola \mathcal{C}_2 , fica claro que $\text{rad}(\mathcal{C}_2 - z) = 2 \text{diam}(G_2)$. Além disso, como a expressão (3.2.38) é estabelecida para $v \in \partial G_1$ e

$$\|v - z\| \geq \Delta_G > 4 \text{diam}(G_2), \quad \forall v \in \partial G_1,$$

lembrando que z é um ponto de G_2 que representa o centro da bola \mathcal{C}_2 , então podemos afirmar que existe uma constante positiva finita β tal que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u \left(w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v \right) \\ & \leq \bar{e}_{\mathcal{C}_2}(y) \left[1 + \beta \left(\frac{\text{rad}(\mathcal{C}_2 - z)}{4 \text{diam}(G_2)} \right) \right] = \bar{e}_{\mathcal{C}_2}(y) \left(1 + \frac{\beta}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

para quaisquer $v \in \partial G_1$ e $y \in \partial \mathcal{C}_2$. Para uma ilustração da trajetória $w_{1,2}$ e do evento cuja probabilidade acabamos de discutir, veja a figura 3.3.

Finalmente vamos majorar a probabilidade que representa o primeiro fator do produto que aparece na expressão (3.2.37), ou seja, a probabilidade condicional

$$\mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial \mathcal{C}_2}) = y \right).$$

Para fazer isso, vamos considerar novamente uma coleção de m ($m \in \mathbb{N}$) passeios aleatórios simples independentes em \mathbb{Z}^d , denotando-os $\{X_n^{(i)}, n \geq 0\}$, com $i = 1, 2, \dots, m$, mas agora consideraremos que cada um destes passeios se inicia na fronteira de G_2 , ou seja, $X_0^{(i)} \in \partial G_2$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Assim, a reunião das trajetórias destes passeios irá representar a coleção de trajetórias no entrelaçamento restrito à G_2 , quando $\mu_{G_2,u} = m$ (veja a figura 3.3). Consideremos adicionalmente um outro passeio aleatório simples $\{X_n^{(*)}, n \geq 0\}$ que se inicia na fronteira da bola \mathcal{C}_2 , ou seja, $X_0^{(*)} \in \partial \mathcal{C}_2$. Vamos dizer que o passeio aleatório $X^{(*)}$ é “correspondente” ao passeio $X^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), e denotaremos esta relação por $X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}$, se e somente se

$$X_{n+H_{G_2}^*}^{(*)} = X_n^{(i)}, \quad \forall n \geq 0,$$

onde $H_{G_2}^*$, analogamente à (3.2.28), representa o tempo da primeira visita à G_2 pelo passeio $X^{(*)}$. Isto significa que o passeio $X^{(*)}$ irá se comportar exatamente como $X^{(i)}$ a partir de sua primeira visita à G_2 . De forma mais geral, a definição desta relação de “correspondência” pode ser estendida para o caso em que $X_0^{(*)} \in \mathcal{C}_2^C$.

Assim, se denotamos novamente por $\mathcal{P}_{A_2}^+$ o subconjunto de trajetórias em $\mu_{G_2,u}$ que são pivotais positivas para A_2 , então a probabilidade de interesse neste momento pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^u \left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial \mathcal{C}_2}) = y \right) \\ &= \mathbb{P}^u \left(\bigcup_{w \in \mathcal{P}_{A_2}^+} \{w_{1,2} \rightarrow w\} \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial \mathcal{C}_2}) = y \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}^u \left(\bigcup_{w \in \mathcal{P}_{A_2}^+} \{w_{1,2} \rightarrow w\} \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ = i, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial \mathcal{C}_2}) = y \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i \mathbb{P}^u \left(w_{1,2} \rightarrow w_j \mid \mu_{1,2} = 1, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial \mathcal{C}_2}) = y \right), \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

onde w_1, w_2, \dots, w_i representam as trajetórias (aleatórias) em $\mathcal{P}_{A_2}^+$ quando $N_{A_2}^+ = i$.

Para cada trajetória w_j em $\mathcal{P}_{A_2}^+$, desejamos aplicar o Lema 3.2.2 à probabilidade que aparece no argumento dos somatórios na última linha da expressão (3.2.40). Para isso, mostraremos que são comparáveis as probabilidades do passeio aleatório $X^{(*)}$, iniciando em qualquer $y \in \partial \mathcal{C}_2$, ser correspondente com o passeio $X^{(j)}$. No sentido de estabelecer isto precisamente, provaremos o próximo lema. Para visualizar o cenário que estamos discutindo, observe a ilustração apresentada na figura 3.3.

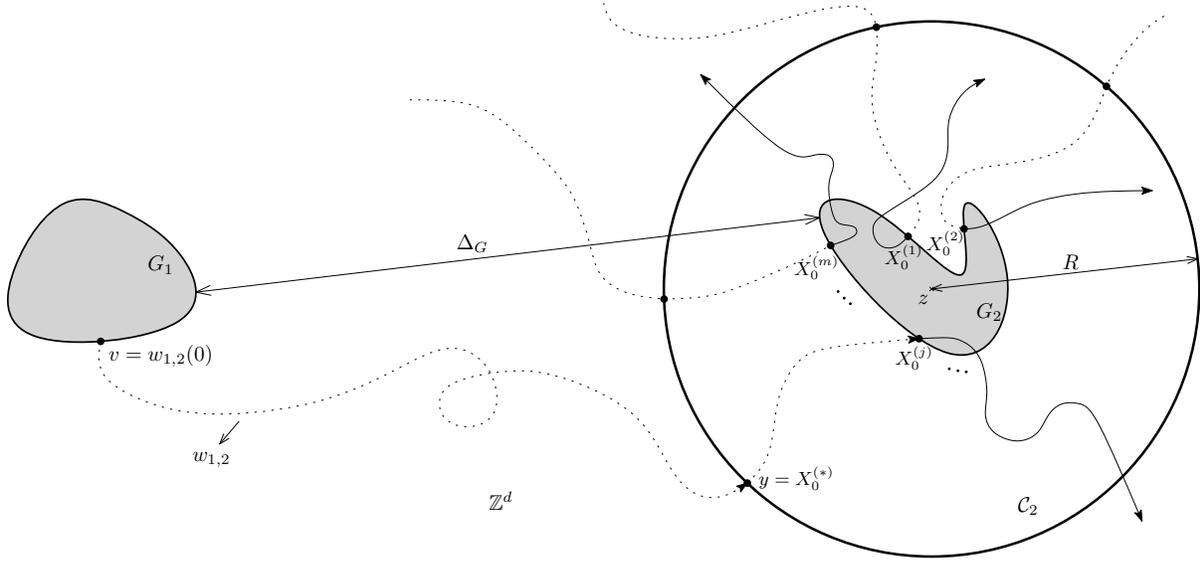


Figura 3.3: Os conjuntos G_1 , G_2 e \mathcal{C}_2 . O raio R é igual a $2\text{diam}(G_2)$. Nesta ilustração temos $\mu_{G_2,u} = m$ e $\mu_{1,2} = 1$, e a trajetória $w_{1,2}$ (ou o passeio $X^{(*)}$) é correspondente ao passeio $X^{(j)}$.

Lema 3.2.4. Existem constantes positivas e finitas ε' e K' tais que

$$\varepsilon' \leq \frac{P(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\})}{P(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y', H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\})} \leq K', \quad (3.2.41)$$

para quaisquer $y, y' \in \partial\mathcal{C}_2$ e qualquer $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Além disso, existe uma constante positiva δ_1 tal que

$$P(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}) \leq \delta_1 < 1, \quad (3.2.42)$$

para qualquer $y \in \partial\mathcal{C}_2$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstração. Como os passeios aleatórios $\{X_n^{(i)}, n \geq 0\}$, com $i = 1, 2, \dots, m$, são tais que $X_0^{(i)} \in \partial G_2$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, então para simplificar um pouco a notação consideraremos que este fato está implícito nas condições das probabilidades que manipulamos neste lema.

Para o j -ésimo passeio aleatório $\{X_n^{(j)}\}$ e para $y \in \partial\mathcal{C}_2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & P(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}) \\ &= \sum_{x \in \partial G_2} P(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}, X_0^{(j)} = x) \\ &\quad \times P(X_0^{(j)} = x) \\ &= \sum_{x \in \partial G_2} P(X_{n+H_{G_2}^*}^{(*)} = X_n^{(j)}, n \geq 1 \mid X_{H_{G_2}^*}^{(*)} = X_0^{(j)} = x, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}) \\ &\quad \times P_y(X_{H_{G_2}^*}^{(*)} = x \mid H_{G_2}^* < \infty) P(X_0^{(j)} = x). \end{aligned}$$

Mas de acordo com a expressão (3.2.35) na demonstração do Lema 3.2.3, existem constantes δ_0 e δ_1 tais que

$$0 < \delta_0 \leq P_y\left(X_{H_{G_2}^*}^{(*)} = x \mid H_{G_2}^* < \infty\right) \leq \delta_1 < 1,$$

para quaisquer $y \in \partial\mathcal{C}_2$ e $x \in \partial G_2$, de tal forma que

$$P\left(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}\right) \leq \delta_1 \sum_{x \in \partial G_2} P\left(X_0^{(j)} = x\right) = \delta_1,$$

para qualquer $y \in \partial\mathcal{C}_2$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, o que prova a expressão (3.2.42).

Denotemos agora por S_j o somatório

$$S_j = \sum_{x \in \partial G_2} P\left(X_{n+H_{G_2}^*}^{(*)} = X_n^{(j)}, \quad n \geq 1 \mid X_{H_{G_2}^*}^{(*)} = X_0^{(j)} = x, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}\right) \\ \times P\left(X_0^{(j)} = x\right),$$

de tal forma que $0 < S_j < \infty$, para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Com isso, novamente devido à expressão (3.2.35),

$$\delta_0 S_j \leq P\left(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}\right) \leq \delta_1 S_j,$$

para todo $y \in \partial\mathcal{C}_2$ e qualquer $j = 1, 2, \dots, m$.

Portanto, finalmente temos

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} \leq \frac{P\left(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y, H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}\right)}{P\left(X^{(*)} \rightarrow X^{(j)} \mid X_0^{(*)} = y', H_{G_2}^* < \infty, \cup_{i=1}^m \{X^{(*)} \rightarrow X^{(i)}\}\right)} \leq \frac{\delta_1}{\delta_0},$$

para quaisquer $y, y' \in \partial\mathcal{C}_2$ e qualquer $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, provando a expressão (3.2.41) e completando assim a demonstração do lema. \square

Conforme comentamos a pouco, o Lema 3.2.4 acima garante portanto a validade das condições que proporcionam a aplicação do Lema 3.2.2 à probabilidade

$$\mathbb{P}^u\left(w_{1,2} \rightarrow w_j \mid \mu_{1,2} = 1, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y\right),$$

que aparece na expressão (3.2.40), de tal maneira que podemos afirmar que existe uma constante positiva e finita ρ'_2 tal que,

$$\mathbb{P}^u\left(w_{1,2} \rightarrow w_j \mid \mu_{1,2} = 1, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y\right) \leq \frac{\rho'_2}{m}, \quad (3.2.43)$$

para qualquer $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, onde precisamente $\rho'_2 = \frac{1}{\varepsilon'(1-\delta_1)} = \frac{\delta_1}{\delta_0(1-\delta_1)}$.

Substituindo (3.2.43) em (3.2.40) obtemos

$$\mathbb{P}^u\left(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(H_{\partial\mathcal{C}_2}) = y\right) \leq \frac{k(k-1)}{2} \frac{\rho'_2}{m},$$

e aplicando este resultado à expressão (3.2.37), juntamente com (3.2.39), podemos estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) = v) \\ \leq \frac{k(k-1)}{2} \frac{\rho'_2}{m} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \sum_{y \in \partial \mathcal{C}_2} \bar{e}_{\partial \mathcal{C}_2}(y) = \frac{k(k-1)}{2} \frac{\rho'_2}{m} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Com isso, a expressão (3.2.36) nos fornece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1) \\ \leq \frac{k(k-1)}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\rho'_2}{m}, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1 \mid \mu_{1,2} = 1, N_{A_2}^+ < k, \mu_{G_2,u} = m, w_{1,2}(0) \in G_1) \mathbb{P}^u(\mu_2 = m-1) \\ \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \frac{k(k-1)\rho'_2}{2m} e^{-u\Lambda} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^{m-1}}{(m-1)!} \\ = (1 + \beta/2) \frac{k(k-1)\rho'_2 e^{-u\Lambda}}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^m}{m!} \\ < (1 + \beta/2) \frac{k(k-1)\rho'_2 e^{-u\Lambda}}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u \operatorname{cap}(G_2))^m}{m!} \\ = (1 + \beta/2) \frac{k(k-1)\rho'_2}{2u \operatorname{cap}(G_2)} e^{-u(\Lambda - \operatorname{cap}(G_2))}. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Por sua vez, a partir de (3.2.24) e (3.2.27), e utilizando os resultados em (3.2.33) e (3.2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^u(N_{1,2}^{A_2} = 1, N_{A_2}^+ < k \mid \mu_{1,2} = 1) &\leq \left[\frac{k(k-1)\rho_2}{2u \operatorname{cap}(G_2)} + (1 + \beta/2) \frac{k(k-1)\rho'_2}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \right] e^{-u(\Lambda - \operatorname{cap}(G_2))} \\ &= \frac{k(k-1)}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \left[\rho_2 + (1 + \beta/2)\rho'_2 \right] e^{-u(\Lambda - \operatorname{cap}(G_2))}. \end{aligned}$$

Reunindo ainda os resultados expressos em (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23), além do resultado acima, finalmente conseguimos estabelecer uma cota para a probabilidade do evento $\{\mu_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A_2} = 1\}$. Especificamente, para $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$ e supondo $\Delta_G > 4 \operatorname{diam}(G_2)$, então existem constantes positivas e finitas $\rho_2, \rho'_2, \beta, c_1, c_2$ e c_3 , tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^u(\mu_{1,2} = 1, N_{1,2}^{A_2} = 1) &\leq 2u \exp \left\{ -u \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \operatorname{cap}(G_1) \operatorname{cap}(G_2) \right\} \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \operatorname{cap}(G_1) \operatorname{cap}(G_2) \\ &\quad \times \left\{ c_3 \frac{\alpha}{k} \frac{u}{(u_2 - u_1)} + \frac{k(k-1)}{2u \operatorname{cap}(G_2)} \left[\rho_2 + (1 + \beta/2)\rho'_2 \right] e^{-u(\Lambda - \operatorname{cap}(G_2))} \right\}, \end{aligned}$$

para todo u pertencente ao conjunto $D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2)$, para quaisquer constantes u_1 e u_2 tais que $0 < u_1 < u_2 < +\infty$, e

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Este fato, juntamente com a observação em (3.2.20) e com a expressão (3.2.18), nos permite finalmente estabelecer, a partir de (3.2.9), uma cota para a covariância (representada pela expressão (3.2.1)) entre os eventos A_1 e A_2 . Usando a desigualdade $1 - e^{-x} \leq x$, quando $x \geq 0$, e fazendo $k = 1$, postulamos este resultado agora através do teorema seguinte.

Mais especificamente, este teorema estabelece, em um certo sentido, uma cota para a covariância (ou em outras palavras, para a dependência) entre dois eventos crescentes com relação ao entrelaçamento restrito à G no nível u e suportados em subconjuntos finitos e disjuntos do espaço \mathbb{Z}^d , sendo esta cota válida, de certa maneira, para a maioria dos níveis u do processo. Formalizamos isto enunciando o

Teorema 3.2.5. Sejam G_1 e G_2 dois subconjuntos disjuntos e finitos de \mathbb{Z}^d (com $d \geq 3$), e tais que nenhum deles separa o outro do infinito. Considere A_1 e A_2 dois eventos suportados respectivamente em G_1 e G_2 , e crescentes com relação ao entrelaçamento aleatório restrito à $G = G_1 \cup G_2$. Denote $\Gamma := \text{cap}(G_1) \text{cap}(G_2)$, defina ainda a distância entre os conjuntos G_1 e G_2 ,

$$\Delta_G := \inf_{x \in G_1, y \in G_2} \|x - y\|,$$

ou seja, a menor distância (segundo a norma Euclidiana) entre pontos dos dois conjuntos, e suponha que $\Delta_G > 4 \max\{\text{diam}(G_1), \text{diam}(G_2)\}$. Então, para quaisquer constantes u_1 e u_2 tais que $0 \leq u_1 < u_2 < \infty$, e $\alpha > 1$, existem constantes positivas e finitas c_1 , c_2 e c_3 (com c_2 dependendo de d e dos diâmetros de G_1 e de G_2) tais que

$$\begin{aligned} & \left| E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1, u}) \mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2, u}) \right] - E_u \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mu_{G_1, u}) \right] E_u \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mu_{G_2, u}) \right] \right| \\ & \leq 4u\Gamma \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} \left[4u\Gamma \frac{c_1}{\Delta_G^{d-2}} + \frac{c_3\alpha u}{(u_2 - u_1)} \exp \left\{ -u\Gamma \frac{c_2}{\Delta_G^{d-2}} \right\} \right], \end{aligned}$$

para todo u pertencente a um conjunto $D_{u_1, u_2, \alpha} \subset (u_1, u_2)$ tal que

$$\lambda(D_{u_1, u_2, \alpha}) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

onde λ denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

Capítulo 4

Uma Nova Cota para a Covariância

Neste capítulo, descrevemos primeiramente o processo da sopa de minhocas, que foi originalmente introduzido no sentido de se obter uma maneira para simular as excursões realizadas, em determinados conjuntos, pelas trajetórias dos passeios aleatórios do processo de entrelaçamentos. Em seguida, descrevemos a técnica dos *soft local times* e uma construção alternativa do processo de entrelaçamentos aleatórios que utiliza tal técnica. Por fim, introduzimos o então denominado processo das colheiradas de minhocas, a partir do qual, juntamente com a técnica dos *soft local times*, pudemos estabelecer uma outra cota para a covariância entre os eventos crescentes no processo de entrelaçamentos.

4.1 O Processo da Sopa de Minhocas: Introdução e Definições

Considere dois subconjuntos disjuntos C e V do espaço \mathbb{Z}^d , tais que V e ∂C são finitos, novamente assumindo que a dimensão d é pelo menos igual a três. Se o conjunto C for finito, assumiremos que o conjunto V separa C do infinito (veja uma ilustração na figura 4.1).

Abordaremos agora o contexto introduzido por Popov e Teixeira em [14], seção 5.2, onde os autores investigam os traços deixados no conjunto C pelas trajetórias dos passeios aleatórios que compõem o processo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d a partir do instante de suas primeiras visitas ao conjunto V , observando que essas trajetórias realizam várias excursões entre C e V antes de divergirem para o infinito (o que de fato ocorre quase certamente, pois os passeios são transientes neste caso). Na figura 4.1 temos ilustradas as excursões de duas trajetórias.

No sentido de simular estas excursões dos passeios aleatórios, os autores introduzem em [14] um novo processo baseado em um processo pontual de Poisson específico, o qual descreveremos agora.

Considere o seguinte espaço de excursões entre C e V ,

$$\begin{aligned} \Sigma_C = \{ \Delta \} \cup & \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) : x_n \in \mathbb{Z}^d, \quad n = 1, \dots, k, \quad \|x_{i+1} - x_i\| = 1, \right. \\ & \left. i = 1, \dots, k-1, \quad x_1 \in \partial C, \quad x_j \notin V, \quad j = 2, \dots, k-1, \quad x_k \in V \right\} \\ & \cup \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{Z}^d, \quad n \geq 1, \quad \|x_{i+1} - x_i\| = 1, \quad i \geq 1, \right. \\ & \left. x_1 \in \partial C, \quad x_j \notin V, \quad j \geq 2 \right\} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

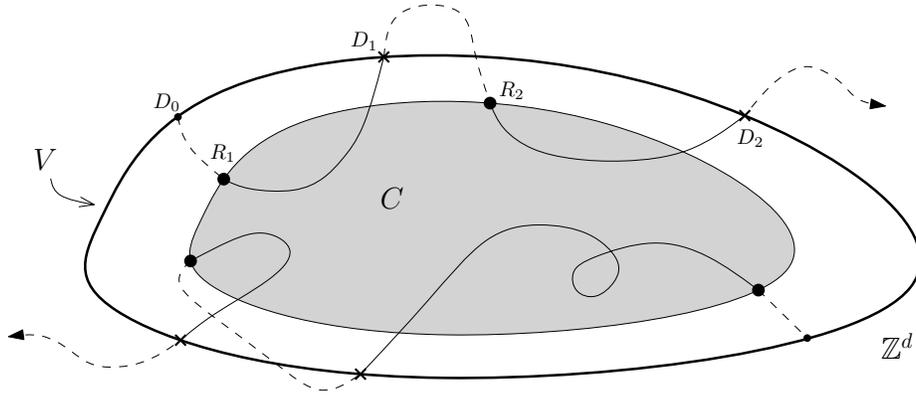


Figura 4.1: Nesta ilustração, o conjunto V é representado pela curva que cerca o conjunto C , separando-o do infinito. Os trechos sólidos das trajetórias representam as excursões que se iniciam na fronteira de C e terminam em V . Os tempos de parada $\{D_k\}_k$ e $\{R_k\}_k$ serão definidos mais adiante, na subseção 4.3.1.

onde, seguindo a notação original do artigo citado acima, Δ denota um elemento distinto deste espaço que representa o fato de uma trajetória (de um passeio aleatório) ter divergido para o infinito.

Adicionalmente, considere que o espaço Σ_C é dotado da σ -álgebra \mathcal{S}_C gerada pelas coordenadas canônicas em Σ_C , com a medida

$$\mu_C(\cdot) = \sum_{x \in \partial C} P_x[(X_0, X_1, \dots, X_{H_V}) \in \cdot] + \delta_\Delta(\cdot) \quad (4.1.2)$$

definida em $(\Sigma_C, \mathcal{S}_C)$, onde P_x é a lei do passeio aleatório simples $\{X_n\}_{n \geq 0}$ partindo de x , e H_V é o instante da primeira visita deste passeio ao conjunto V , como representado na expressão (2.1.1).

Popov e Teixeira ([14]) definem então um processo pontual de Poisson em

$$(\Sigma_C \times \mathbb{R}_+, \mathcal{S}_C \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$$

com medida de intensidade igual a $\mu_C \otimes \lambda_+$, onde λ_+ representa a medida de Lebesgue em \mathbb{R}_+ , dando origem assim ao chamado processo da sopa de minhocas.

Complementando a caracterização deste processo, considere o espaço de medidas pontuais

$$\Theta = \left\{ \eta = \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{T} gerada pelos mapeamentos $\eta \mapsto \eta(D)$, para $D \in \mathcal{S}_C \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, e denote por \mathbb{Q} a lei do processo pontual de Poisson mencionado acima, sobre (Θ, \mathcal{T}) .

De maneira análoga ao que ocorre no processo de entrelaçamentos aleatórios, agora sob a lei \mathbb{Q} os elementos η em Θ podem ser vistos como configurações aleatórias de excursões de passeios aleatórios simples entre C e V , com seus respectivos índices $v_i \in \mathbb{R}_+$, veja a figura 4.2 para uma ilustração.

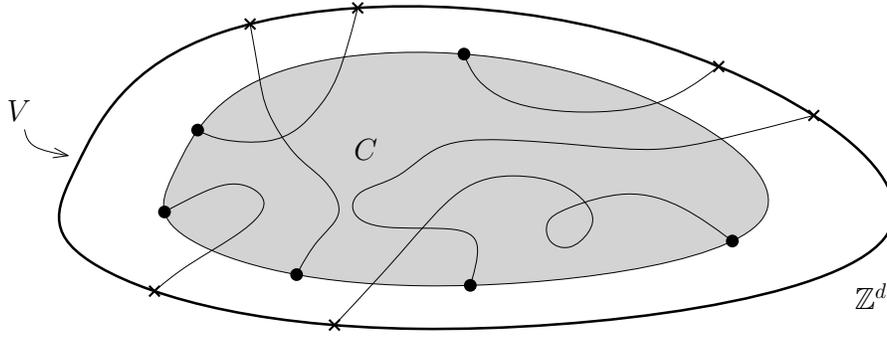


Figura 4.2: Ilustração de uma realização da configuração η em Θ , sob a lei \mathbb{Q} .

Mais ainda, para uma constante $v > 0$, denote por \mathbb{Q}^v a lei deste processo de Poisson agora restrito à $\Sigma_C \times [0, v]$, de tal forma que neste processo serão consideradas apenas excursões com índices menores do que ou iguais a v , ou seja, a lei \mathbb{Q}^v do processo no nível v estará definida sobre o espaço

$$\Theta_v = \left\{ \eta = \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i \in [0, v] \right\}. \quad (4.1.3)$$

De forma geral, denotaremos por η_v um elemento de Θ_v cuja lei será \mathbb{Q}^v , para $v > 0$.

Assim como discutimos no modelo de entrelaçamentos aleatórios, a partir destas definições observamos que os processos em todos os níveis $v \in \mathbb{R}_+$ ficam acoplados de modo que fica caracterizada uma relação de ordem parcial entre os elementos de Θ . Vejamos como isto pode ser postulado precisamente: Se η e η' são duas configurações de excursões em Θ , escrevemos $\eta \leq \eta'$ se todas as excursões presentes em η também estão presentes em η' . Assim, se uma excursão está presente na configuração deste processo no nível v , então (por construção) esta excursão também estará presente na configuração no nível v' para qualquer v' tal que $v \leq v'$, e escrevemos portanto $\eta_v \leq \eta_{v'}$ sempre que $v \leq v'$, caracterizando assim a ordenação dos elementos decorrente do acoplamento mencionado (veja a figura 4.3).

4.2 A Fórmula de Russo para a Sopa de Minhocas

Se $A \in \mathcal{T}$ é um evento suportado em C , dizemos que este evento é crescente com relação ao processo da sopa de minhocas se, para $\eta, \eta' \in \Theta$,

$$\mathbf{1}_A(\eta) \leq \mathbf{1}_A(\eta') \quad \text{sempre que} \quad \eta \leq \eta',$$

ou seja, se o evento A ocorre sob uma determinada configuração de excursões, então este evento continuará ocorrendo se mais excursões forem acrescentadas à configuração inicial.

Dado este contexto, podemos estabelecer nosso objetivo preliminar nesta seção: estamos interessados em determinar uma expressão para a derivada da probabilidade de um evento crescente com relação ao processo da sopa de minhocas no nível v , com respeito ao parâmetro v , ou seja,

$$\frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A),$$

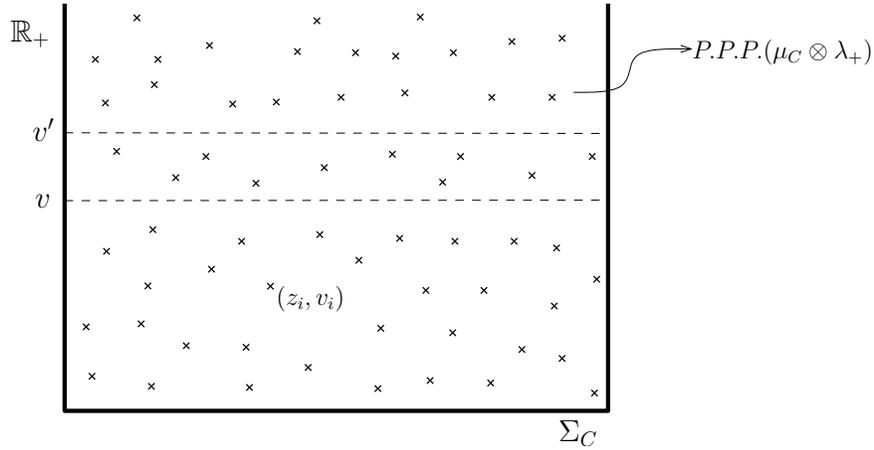


Figura 4.3: O processo pontual de Poisson em $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+$, e o acoplamento entre os processos em $\Sigma_C \times [0, v]$, para todos os níveis $v > 0$.

caracterizando assim a fórmula de Russo para este processo.

Nossa primeira tarefa será verificar, através da proposição 4.2.1 a seguir, a analiticidade de $\mathbb{Q}^v(A)$, como função do nível v em \mathbb{R}_+ , garantindo assim a conseqüente diferenciabilidade desta função.

Denote por M_{η_v} a quantidade (aleatória) de excursões que compõem a configuração η_v do processo no nível v , sob a lei \mathbb{Q}^v . Por definição, esta quantidade tem distribuição Poisson com parâmetro igual a

$$\lambda_+([0, v])\mu_C(\Sigma_C) = v(|\partial C|+1) < \infty.$$

Com isso, de maneira exatamente análoga àquilo que foi discutido na seção 2.4.1, podemos enunciar e demonstrar a seguinte

Proposição 4.2.1. Se $C \subset \mathbb{Z}^d$ é finito ou tal que sua fronteira ∂C é finita, $d \geq 3$, e A é um evento suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas, então a probabilidade de A sob a lei \mathbb{Q}^v do processo no nível v , denotada por $\mathbb{Q}^v(A)$, é uma função analítica de v no intervalo $[0, +\infty)$.

Demonstração. Para obter o resultado estabelecido por esta proposição, basta basicamente imitar a demonstração da proposição 2.4.1.

Aplicando a fórmula da probabilidade total e usando o fato que

$$M_{\eta_v} \sim \text{Poisson}(v(|\partial C|+1)),$$

podemos escrever

$$\mathbb{Q}^v(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{Q}^v(A \mid M_{\eta_v} = m)P(M_{\eta_v} = m) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(A) \frac{e^{-v(|\partial C|+1)} [v(|\partial C|+1)]^m}{m!},$$

onde os termos $Q_m(A) = \mathbb{Q}^v(A \mid M_{\eta_v} = m)$ dependem apenas da quantidade m de excursões na configuração, e não do nível v .

Denotando por a_m os termos $Q_m(A)$, com $m = 1, 2, \dots$, e por b a quantidade $|\partial C|+1$, escrevemos

$$\mathbb{Q}^v(A) = e^{-vb} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m b^m}{m!} v^m,$$

e utilizamos exatamente os mesmos argumentos que aparecem na demonstração da proposição 2.4.1 para concluir que a expressão acima é uma função analítica de v em \mathbb{R} , e em particular em \mathbb{R}_+ , conforme enunciado pela presente proposição. \square

Portanto, conforme já mencionamos, a probabilidade $\mathbb{Q}^v(A)$ é de fato diferenciável como função de v em \mathbb{R}_+ . Vamos então estabelecer algumas expressões para esta derivada, calculando, assim como antes, as derivadas à direita e à esquerda de $\mathbb{Q}^v(A)$,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{Q}^{v+h}(A) - \mathbb{Q}^v(A)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{Q}^v(A) - \mathbb{Q}^{v-h}(A)}{h}.$$

Começaremos investigando a derivada à direita. Para isso, suponha que $v \geq 0$ e também que $0 < h < (|\partial C|+1)^{-1}$.

Observando que $\mathbb{Q}^{v+h}(A) = \mathbb{Q}(\eta_{v+h} \in A)$ e denotando por $E_{\mathbb{Q}^v}(\cdot)$ a esperança sob a lei \mathbb{Q}^v , então de acordo com a fórmula da esperança total

$$\mathbb{Q}^{v+h}(A) = E_{\mathbb{Q}^v}[\mathbb{Q}^{v+h}(A | \eta_v)] = E_{\mathbb{Q}^v}[\mathbb{Q}(\eta_{v+h} \in A | \eta_v)].$$

Reproduzindo exatamente os mesmos argumentos e cálculos apresentados na seção 2.4.2, onde discutimos este mesmo problema no contexto dos entrelaçamentos aleatórios, podemos concluir que

$$\mathbb{Q}^{v+h}(A | \eta_v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta_v \in A, \\ P_{z^*}(\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A)h(|\partial C|+1)e^{-h(|\partial C|+1)} + U_h & \text{se } \eta_v \notin A, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{v+h}(A | \eta_v) &= P_{z^*}(\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A)h(|\partial C|+1)e^{-h(|\partial C|+1)}\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}} \\ &\quad + U_h\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}} + \mathbf{1}_{\{\eta_v \in A\}}. \end{aligned}$$

onde $U_h = o(h)$ quando $h \downarrow 0$, e P_{z^*} representa a medida de probabilidade sob a lei de uma excursão $z^* \in \Sigma_C$ de um passeio aleatório simples, que denotamos \mathbb{P}_{z^*} . Além disso, seguindo a mesma argumentação, é possível ver que a esperança $E_{\mathbb{Q}^v}[U_h\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}}]$ é também igual a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$.

A partir disto, tomando a esperança com respeito à lei \mathbb{Q}^v , obtemos

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}^v}[\mathbb{Q}^{v+h}(A | \eta_v)] &= E_{\mathbb{Q}^v}[P_{z^*}(\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A)\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}}]h(|\partial C|+1)e^{-h(|\partial C|+1)} \\ &\quad + E_{\mathbb{Q}^v}[U_h\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}}] + \mathbb{Q}^v(A), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{Q}^{v+h}(A) - \mathbb{Q}^v(A)}{h} &= (|\partial C|+1)E_{\mathbb{Q}^v}[P_{z^*}(\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A)\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}}] \\ &= (|\partial C|+1)E_{\eta_v \oplus z^*}[\mathbf{1}_{\{\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A\}}\mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}}], \end{aligned}$$

onde $\eta_v \oplus z^*$ representa a superposição da configuração η_v com a excursão z^* , e $E_{\eta_v \oplus z^*}(\cdot)$ denota a esperança com relação à lei produto $\mathbb{Q}^v \times \mathbb{P}_{z^*}$.

Para investigar, por outro lado, a derivada à esquerda de $\mathbb{Q}^v(A)$, precisamos antes definir as excursões pivotais positivas para o evento crescente A neste processo. Analogamente ao caso dos entrelaçamentos aleatórios, dizemos que a excursão $z \in \Sigma_C$ (com seu respectivo índice $v' \leq v$) é pivotal positiva para o evento A na configuração η_v se z está presente em η_v e

$$\mathbf{1}_A(\eta_v) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\eta_v - \delta_{(z,v')}) = 0,$$

ou seja, o evento A ocorre na presença de z no nível v , mas deixa de ocorrer quando z é retirada da configuração. Denotando por $N_{\eta_v}^+$ o número de excursões pivotais positivas para A na configuração η_v , novamente temos

$$N_{\eta_v}^+ = N_{\eta_v}^+ \mathbf{1}_A(\eta_v),$$

pois as excursões pivotais positivas (assim como as trajetórias pivotais positivas nos entrelaçamentos) somente são identificadas quando o evento A está ocorrendo no processo de nível v .

Suponha agora que $v \geq 0$ e que $0 < h < v$, e observe que

$$\mathbb{Q}^{v-h}(A) = \mathbb{Q}(\eta_{v-h} \in A),$$

de tal maneira que, novamente utilizando a fórmula da esperança total,

$$\mathbb{Q}^{v-h}(A) = E_{\mathbb{Q}^v}[\mathbb{Q}^{v-h}(A \mid \eta_v)] = E_{\mathbb{Q}^v}[\mathbb{Q}(\eta_{v-h} \in A \mid \eta_v)].$$

Mais uma vez repetindo o desenvolvimento apresentado na seção 2.4.2, podemos ver que

$$\mathbb{Q}^{v-h}(A) = \mathbb{Q}^v(A) - \frac{h}{v} E_{\mathbb{Q}^v} \left[N_{\eta_v}^+ \left(1 - \frac{h}{v} \right)^{N_{\eta_v}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{\eta_v}^+ \geq 1\}} \right] - U_h' - U_h'',$$

onde U_h' e U_h'' são iguais a $o(h)$ quando $h \downarrow 0$, de tal forma que, novamente utilizando o Teorema de Convergência Monótona,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{Q}^v(A) - \mathbb{Q}^{v-h}(A)}{h} = \frac{1}{v} E_{\mathbb{Q}^v}(N_{\eta_v}^+).$$

A partir disto, temos finalmente estabelecido o

Teorema 4.2.2. Sob as hipóteses da proposição 4.2.1,

$$\frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A) = \frac{1}{v} E_{\mathbb{Q}^v}(N_{\eta_v}^+) \tag{4.2.1}$$

$$= (|\partial C| + 1) E_{\eta_v \oplus z^*} \left[\mathbf{1}_{\{\eta_v + \delta_{(z^*)} \in A\}} \mathbf{1}_{\{\eta_v \notin A\}} \right]. \tag{4.2.2}$$

Podemos mencionar ainda que expressões análogas às expressões (2.4.34) e (2.4.35) podem também ser obtidas neste novo contexto, seguindo a construção da seção 2.4.4.

Mais uma vez de maneira exatamente análoga ao que já foi discutido no caso dos entrelaçamentos aleatórios, em particular lembrando aquilo que foi apresentado na seção 3.1, podemos

mostrar que o número esperado de excursões pivotais positivas para o evento crescente A suportado em C , no nível v , será uma quantidade “pequena”, para a “maioria” dos valores do parâmetro v .

Especificamente, para v_1 e v_2 tais que $0 < v_1 < v_2 < \infty$, teremos

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A) dv = \mathbb{Q}^{v_2}(A) - \mathbb{Q}^{v_1}(A),$$

de onde segue que

$$0 \leq \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A) dv \leq 1.$$

Com isso, definindo o conjunto

$$F_{v_1, v_2, \zeta} = \left\{ v \in (v_1, v_2) : \frac{d}{dv} \mathbb{Q}^v(A) \leq \frac{\zeta}{v_2 - v_1} \right\} \subset (v_1, v_2),$$

para alguma constante $\zeta > 1$, podemos mostrar que

$$\lambda(F_{v_1, v_2, \zeta}) > (v_2 - v_1) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right). \quad (4.2.3)$$

Portanto,

$$E_{\mathbb{Q}^v}(N_{\eta_v}^+) \leq \frac{v\zeta}{v_2 - v_1}, \quad \forall v \in F_{v_1, v_2, \zeta},$$

o que implica

$$\mathbb{Q}^v(N_{\eta_v}^+ \geq k) \leq \frac{v\zeta}{k(v_2 - v_1)}, \quad \forall v \in F_{v_1, v_2, \zeta},$$

para $k \in \mathbb{N}$, onde $F_{v_1, v_2, \zeta}$ satisfaz (4.2.3).

Para maiores detalhes sobre as suposições que devem ser satisfeitas e permitem estabelecer esta argumentação, bem como os detalhes sobre o próprio desenvolvimento destes argumentos, veja a seção 3.1.

Estes últimos resultados, entretanto, não serão exatamente suficientes para promover a investigação que pretendemos neste momento. Estamos interessados em estudar novamente a covariância entre eventos crescentes no modelo de entrelaçamentos aleatórios, utilizando desta vez o processo da sopa de minhocas. Para isso, queremos explorar, em um certo sentido, o comportamento “conjunto” (ou mais especificamente, a “pivotalidade conjunta”) de uma coleção de excursões em Σ_C . Neste sentido, precisaremos implementar uma pequena modificação a partir do modelo da sopa de minhocas, introduzindo a noção daquilo que denominaremos “colheiradas de minhocas”. Antes disso, no entanto, precisaremos discutir o conceito dos *soft local times* de uma cadeia de Markov, introduzido por Popov e Teixeira, [14].

4.3 Os *Soft Local Times*

Popov e Teixeira definem em [14] os *soft local times* de um processo estocástico, no sentido de construir um método para obter uma dominação estocástica aproximada entre os traços (ou imagens) de duas cadeias, definidas no mesmo espaço de estados.

Em princípio, a técnica dos *soft local times* consiste basicamente em se realizar uma simulação de um processo estocástico a partir de uma realização de um determinado processo pontual de Poisson.

Para tornar isso mais preciso, conforme estabelecido na seção 4 de [14], denote por Σ um determinado espaço métrico, considere um espaço de medida $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$, onde \mathcal{B} é a σ -álgebra de Borel de subconjuntos de Σ e μ é uma medida de Radon em Σ (ou seja, uma medida para a qual todo conjunto compacto em Σ possui medida finita), e considere ainda o espaço de medidas pontuais

$$L = \left\{ \eta = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{(z_i, v_i)} : z_i \in \Sigma, v_i \in \mathbb{R}_+, \text{ e } \eta(K) < \infty \text{ para todo } K \text{ compacto} \right\},$$

dotado da σ -álgebra \mathcal{D} gerada pelos mapeamentos $\eta \mapsto \eta(S)$, para $S \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Por fim, considere um processo pontual de Poisson em (L, \mathcal{D}) , com medida de intensidade igual a $\mu \otimes dv$ e cuja lei é denotada por \mathbf{Q} , onde dv denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}_+ .

É possível então simular uma cadeia de Markov $\{Z_k\}_{k \geq 1}$ em Σ a partir deste processo de Poisson. Especificamente, suponha que $g(x, y)$ é uma função não-negativa \mathcal{B} -mensurável em ambas as coordenadas, e tal que

$$\int g(x, y) \mu(dy) = 1,$$

ou seja, g é uma função de densidade com respeito à μ (na segunda coordenada), e assuma que a cadeia de Markov a qual queremos simular possui densidade de transição dada por

$$P(Z_{k+1} = z \mid Z_k) = g(Z_k, z) \mu(dz), \text{ para } k \geq 1,$$

e que, além disso, a variável aleatória Z_1 é distribuída de acordo com a densidade $g(Z_0, z) \mu(dz)$, onde Z_0 é um elemento simbólico em Σ . Desta forma, $g(Z_0, z) \mu(dz)$ caracteriza a lei inicial da cadeia.

Assim como é introduzido em [14], defina então as quantidades

$$\xi_1 = \inf \left\{ t \geq 0 : \exists i \in \mathcal{I} \text{ tal que } tg(Z_0, z_i) \geq v_i \right\}$$

e

$$G_1(z) = \xi_1 g(Z_0, z), \text{ para } z \in \Sigma,$$

e denote por (z_1, v_1) o único ponto do processo pontual $\{(z_i, v_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ tal que $G_1(z_1) = v_1$, de tal forma que z_1 será distribuído como Z_1 , veja a proposição 4.1 de [14].

Mais do que isso, é possível definir iterativamente as sequências $\{\xi_n\}$, $\{G_n(\cdot)\}$ e $\{(z_n, v_n)\}$, para $n \geq 1$,

$$\xi_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \exists (z_i, v_i) \notin \{(z_k, v_k)\}_{k=1}^{n-1} \text{ tal que } G_{n-1}(z_i) + tg(z_{n-1}, z_i) \geq v_i \right\},$$

$$G_n(z) = G_{n-1}(z) + \xi_n g(z_{n-1}, z), \text{ para } z \in \Sigma,$$

e denotando por (z_n, v_n) o único ponto do processo pontual $\{(z_i, v_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ tal que

$$(z_n, v_n) \notin \{(z_k, v_k)\}_{k=1}^{n-1} \text{ e } G_n(z_n) = v_n.$$

De acordo com a proposição 4.3 de [14], a sequência $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ obtida através deste procedimento possuirá a mesma lei que a cadeia $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$, e além disso será independente da sequência $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Veja a figura 4.4 para uma ilustração deste procedimento, observando que cada curva G_n passa por um, e apenas um, ponto do processo pontual.

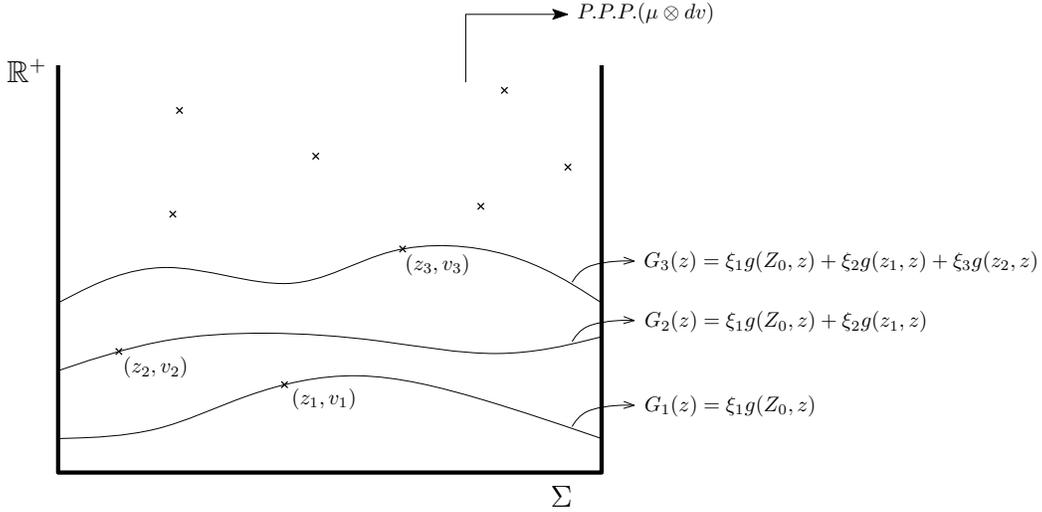


Figura 4.4: A construção das sequências $\{\xi_n\}$, $\{G_n\}$ e $\{(z_n, v_n)\}$. Cada curva G_n passa por um, e apenas um, ponto do processo pontual.

Finalmente, G_n será o chamado *soft local time* da cadeia de Markov, com respeito à medida μ , até o tempo n .

Adicionalmente, através deste procedimento é ainda possível simular não somente uma cadeia, mas uma coleção de cadeias de Markov independentes no mesmo espaço Σ . Denote então por $\{\{Z_k^j\}_{k \geq 1}, j = 1, 2, \dots\}$ esta coleção cuja simulação é de interesse, de tal forma que, para cada $j = 1, 2, \dots$, as cadeias de Markov $\{Z_k^j\}_{k \geq 1}$ são independentes e possuem densidades de transição dadas por

$$P(Z_{k+1}^j = z \mid Z_k^j) = g(Z_k^j, z)\mu(dz), \text{ para } k \geq 0,$$

em que o caso $k = 0$, assim como antes, é interpretado como uma notação para as distribuições iniciais de cada uma das cadeias. Estas leis iniciais podem ser distintas, dependendo da escolha dos elementos simbólicos Z_0^j .

Para apresentar esta construção, no entanto, necessitamos de algumas outras considerações. Denote por Δ um estado distinto de Σ , como discutido por exemplo logo após (4.1.1), tal que

$$\mu(\{\Delta\}) = 1 \quad \text{e} \quad g(\Delta, \cdot) = \mathbf{1}_{\{\Delta\}}(\cdot).$$

Neste sentido, Δ será um estado absorvente das cadeias, o qual é denominado “cemitério”. Além disso, considere a ordenação lexicográfica definida por

$$(j, k) \preceq (j', k') \iff j < j', \text{ ou } j = j' \text{ e } k \leq k'.$$

Defina então $G_0^k := 0$, para todo $k = 1, 2, \dots$, denote por T_Δ^m o tempo de primeira visita à Δ pela m -ésima cadeia $\{Z_k^m\}_k$, e para cada $m = 1, 2, \dots$ fixo e $n = 1, 2, \dots, T_\Delta^m$, defina iterativamente as variáveis

$$\xi_n^m = \inf \left\{ t \geq 0 : \exists (z_i, v_i) \notin \{(z_k^j, v_k^j)\}_{(j,k) \leq (m,n-1)} \text{ tal que} \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{m-1} G_{T_\Delta^j}^j(z_i) + G_{n-1}^m(z_i) + tg(z_{n-1}^m, z_i) \geq v_i \right\}, \quad (4.3.1)$$

os *soft local times* da m -ésima cadeia,

$$G_n^m(z) = G_{n-1}^m(z) + \xi_n^m g(z_{n-1}^m, z), \quad \text{para } z \in \Sigma, \quad (4.3.2)$$

e o ponto (z_n^m, v_n^m) tal que

$$(z_n^m, v_n^m) \notin \{(z_k^j, v_k^j)\}_{(j,k) \leq (m,n-1)} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m-1} G_{T_\Delta^j}^j(z_n^m) + G_n^m(z_n^m) = v_n^m. \quad (4.3.3)$$

Veja a figura 4.5 para uma ilustração e observe que, neste procedimento, o mesmo processo pontual de Poisson é utilizado para gerar todas as seqüências $\{\xi_n^m\}$, $\{G_n^m\}$ e $\{(z_n^m, v_n^m)\}$.

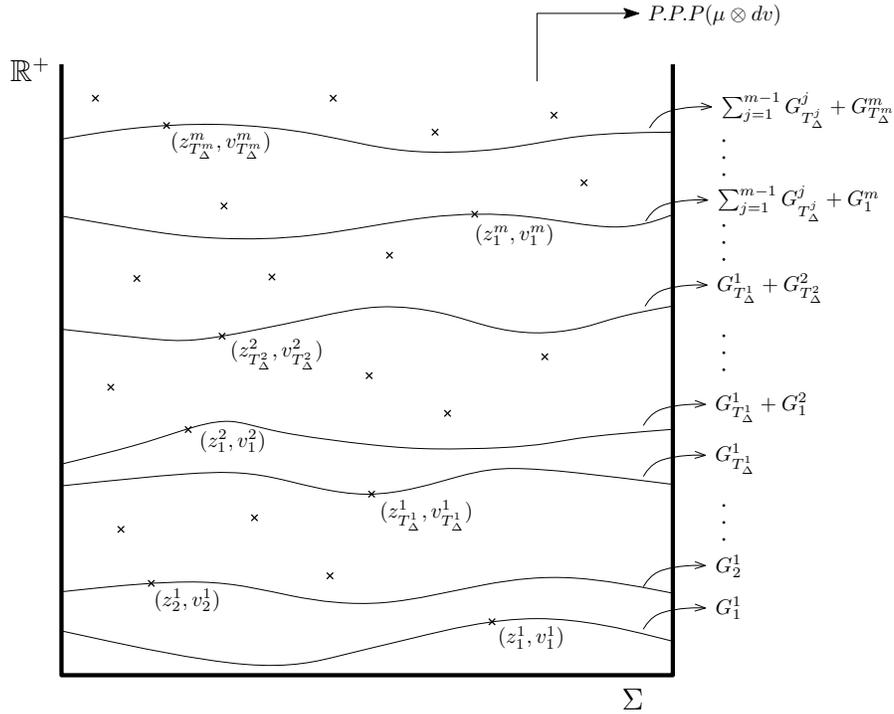


Figura 4.5: A construção das seqüências $\{\xi_n^m\}$, $\{G_n^m\}$ e $\{(z_n^m, v_n^m)\}$. A função $G_k^j(\cdot)$ denota o *soft local time* da j -ésima cadeia, até o tempo k .

Com isso, se $g(Z_0^m, \cdot)$ denota a densidade inicial para cada $m = 1, 2, \dots$, onde novamente os elementos Z_0^m são simbólicos, então a coleção $\{\{z_n^m\}_{n \leq T_\Delta^m}, m \geq 1\}$ possuirá a mesma lei que a

coleção de cadeias de Markov $\{\{Z_n^m\}_{n \leq T_\Delta^m}, m \geq 1\}$, e será independente de $\{\{\xi_n^m\}_{n \leq T_\Delta^m}, m \geq 1\}$, e além disso todas as variáveis ξ_n^m nesta última coleção serão independentes e indenticamente distribuídas, exponenciais com parâmetro unitário, veja a proposição 4.10 de [14]. Ou seja, desta forma é possível simular a coleção de cadeias de Markov independentes com a densidade de transição desejada, a partir no mesmo processo pontual de Poisson η , observando que cada cadeia começa a ser simulada a partir do momento em que a cadeia anterior é absorvida pelo cemitério Δ .

4.3.1 Os *Soft Local Times* e os Entrelaçamentos Aleatórios

Na seção 5.2 de [14], Popov e Teixeira utilizam a técnica dos *soft local times* para simular as excursões sucessivas pelo conjunto $C \subset \mathbb{Z}^d$, de trajetórias de passeios aleatórios simples independentes até que esses passeios divirjam para o infinito, estabelecendo assim uma construção alternativa do processo de entrelaçamentos aleatórios restrito à C . Discutiremos esta construção agora.

Para abordar este problema, considere novamente que C e V são dois subconjuntos disjuntos de \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$) tais que V e a fronteira ∂C são finitos, assumindo que, no caso em que C é finito, o conjunto V o separa do infinito (veja a figura 4.1).

Antes de prosseguir, é preciso caracterizar os instantes sucessivos de entrada e saída das excursões entre C e V . Para uma trajetória unilateral infinita w no espaço W_+ (como definido em (2.2.4)), denote por θ_k o operador de *shift* temporal, tal que

$$\theta_k(w(n)) = w(k+n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e defina $D_0 = 0$ e os tempos de parada

- $R_1 = H_C$;
- $D_1 = R_1 + H_V \circ \theta_{R_1}$;
- $R_2 = D_1 + H_C \circ \theta_{D_1}$;
- $D_2 = R_2 + H_V \circ \theta_{R_2}$;

e assim por diante (veja a figura 4.1 para uma ilustração). Adicionalmente, defina (para a mesma trajetória w) o tempo de parada

$$T^C = \inf\{k \geq 1 : R_k = \infty\},$$

ou seja, o primeiro instante em que a trajetória diverge para o infinito, de tal forma que este tempo de parada será igual ao tempo de primeira visita ao estado Δ , pela cadeia em Σ_C , no contexto em que o cemitério Δ representa justamente a divergência do passeio aleatório para o infinito, conforme discutido na definição de Σ_C em (4.1.1).

Relembrando a definição de $\mu_{G,u}$ dada em (2.2.7), e denotando por M_u^V a quantidade (aleatória) de trajetórias de passeios aleatórios que se iniciam na fronteira de V no processo de entrelaçamentos restrito à V no nível $u > 0$, observando que

$$M_u^V \sim \text{Poisson}(u \text{cap}(V)), \quad (4.3.4)$$

podemos escrever

$$\mu_{V,u} = \sum_{i=1}^{M_u^V} \delta_{(w_i, u_i)},$$

representando uma realização do processo de entrelaçamentos aleatórios no nível u , restrito à V , ou seja, uma configuração de trajetórias w_i infinitas de passeios aleatórios independentes que se iniciam na fronteira de V , com índices u_i menores do que ou iguais a u , para $i = 1, \dots, M_u^V$.

Denote então por $T_i^C = T^C(w_i)$ o primeiro instante em que a i -ésima trajetória em $\mu_{V,u}$ diverge para o infinito, e por $X_j^i = X_j(w_i)$ o estado da i -ésima trajetória no instante j . Com isso, é possível caracterizar as excursões entre C e V dos passeios aleatórios, escrevendo (para $i \in \{1, 2, \dots, M_u^V\}$ fixo)

$$Z_k^i = (X_{R_k}^i, X_{R_k+1}^i, \dots, X_{D_k}^i), \text{ para } k = 1, 2, \dots, T_i^C - 1, \quad \text{e} \quad Z_{T_i^C}^i = \Delta,$$

onde Δ representa a divergência de uma trajetória de passeio aleatório para o infinito, de modo que Z_k^i será um elemento do espaço Σ_C definido em (4.1.1), ou seja, Z_k^i é a k -ésima excursão do i -ésimo passeio aleatório na configuração $\mu_{V,u}$.

Essencialmente, Popov e Teixeira ([14]) mostram que a sequência $Z_1^i, Z_2^i, Z_3^i, \dots$, para cada i fixo, é uma cadeia de Markov em Σ_C com uma determinada densidade de transição com respeito à medida μ_C (definida em (4.1.2)), de modo que, desta forma, é possível empregar a técnica dos *soft local times* (utilizando a densidade de transição correta) para construir as sequências $\{\xi_{i,k}^C\}$, $\{G_{i,k}^C\}$ e $\{(z_{i,k}^C, v_{i,k}^C)\}$, para $i = 1, \dots, M_u^V$ e $k = 1, \dots, T_i^C$, como em (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3), obtendo assim a simulação desejada das excursões dos passeios aleatórios do processo de entrelaçamentos restrito à V no nível $u > 0$, veja a Proposição 4.10 de [14]. Mais especificamente, a densidade de transição mencionada será tal que, para (x_0, x_1, \dots, x_m) e (y_0, y_1, \dots, y_n) pertencentes à Σ_C ,

$$g\left((x_0, x_1, \dots, x_m), (y_0, y_1, \dots, y_n)\right) = P_{x_m}\left(X_{\tilde{H}_C} = y_0\right), \quad (4.3.5)$$

ou seja, a densidade depende das excursões de partida e de chegada apenas através do último sítio da excursão de partida e do primeiro sítio da excursão de chegada.

Como um resultado desta construção, obtém-se o *soft local time* acumulado até a M_u^V -ésima trajetória,

$$G_u^C = \sum_{i=1}^{M_u^V} G_{i, T_i^C}^C, \quad (4.3.6)$$

o qual tentaremos empregar mais adiante no contexto do modelo das colheiradas de minhocas que introduziremos agora, no sentido de atacar o problema da covariância que mencionamos recorrentemente.

4.4 O Processo das Colheiradas de Minhocas

Como mencionamos anteriormente, introduziremos nesta seção um novo processo, o qual denominamos processo das colheiradas de minhocas, construído basicamente a partir do processo da sopa de minhocas. Para isso, considere novamente os conjuntos V e C conforme foram introduzidos

na seção 4.1 e posteriormente utilizados na subseção 4.3.1 durante a construção alternativa dos entrelaçamentos aleatórios através dos *soft local times*.

Levando em conta esta construção (apresentada na subseção 4.3.1), e considerando algum $x \in \partial C$ e $z \in \Sigma_C$ tal que $X_0(z) = x$, ou seja, tal que x é o ponto na fronteira de C de onde parte a excursão z , definimos, assim como é feito em [14],

$$F_i^C(x) := G_{i, T_i^C}^C(z), \quad (4.4.1)$$

como sendo a contribuição da i -ésima trajetória (na construção do entrelaçamento aleatório em C) para o *soft local time* acumulado, avaliado em trajetórias que se iniciam em x . Observe que, devido à (4.3.5), $G_{i, T_i^C}^C(z)$ realmente dependerá de z apenas através x , em concordância com a notação utilizada em (4.4.1). Além disso, defina $\pi^C(x)$ como sendo o valor esperado de $F_1^C(x)$, ou seja,

$$\pi^C(x) := E\left(F_1^C(x)\right), \quad (4.4.2)$$

observando que nesta definição poderíamos utilizar $F_i^C(x)$ no lugar de $F_1^C(x)$, para qualquer i , de modo que o valor esperado seria o mesmo.

Mais ainda, definindo

$$\rho_i^C(x) := \sum_{k=1}^{T_i^C} \mathbf{1}_{\{x\}}(X_{R_k}^i), \quad x \in \partial C, \quad (4.4.3)$$

como sendo o número de vezes em que a i -ésima trajetória (do entrelaçamento em C construído através dos *soft local times*) inicia uma de suas excursões pelo conjunto C partindo do ponto $x \in \partial C$, é demonstrado em [14] que

$$E\left(\rho_1^C(x)\right) = \pi^C(x), \quad \forall x \in \partial C.$$

A partir disto, podemos concluir em particular que

$$\pi^C(x) < \infty, \quad \forall x \in \partial C, \quad (4.4.4)$$

pois, de acordo com a expressão anterior, $\pi^C(x)$ será menor do que ou igual ao número esperado de visitas ao sítio x por uma trajetória de passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d , o que por sua vez é finito em decorrência de estarmos sempre considerando uma dimensão d maior do que ou igual a três, caso no qual o referido passeio é transiente.

Para introduzir então o processo das colheiradas de minhocas, precisaremos antes apresentar uma caracterização alternativa do processo da sopa de minhocas descrito na seção 4.1. Especificamente, consideraremos a partir de agora que o processo da sopa de minhocas será caracterizado por um processo pontual de Poisson em $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ com medida de intensidade igual a $\mu_C \otimes \lambda_+ \otimes \lambda_+$. Observe que com esta nova descrição, o modelo possuirá dois parâmetros reais positivos (e não mais apenas um, como antes) regulando a quantidade de excursões (ou minhocas) no processo.

Neste novo cenário estaremos particularmente interessados no processo da sopa de minhocas restrito à $\Sigma_C \times [0, v] \times [0, u]$ com $v, u \geq 0$, e iremos nos referir a este processo como sendo o processo

nos níveis v e u . Observe que neste contexto, quando $u = 1$ teremos o equivalente ao processo da sopa de minhocas no nível v segundo a caracterização da seção 4.1.

Mais precisamente, o processo da sopa de minhocas nos níveis v e u será um processo sobre o espaço de medidas pontuais

$$\Theta^{v,u} = \left\{ \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i, u_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i \in [0, v], u_i \in [0, u] \right\},$$

e cuja lei denotaremos $\mathbb{Q}^{v,u}$.

Sem mais adiamentos, vamos agora finalmente definir o processo das colheiradas de minhocas.

Considere $n \in \mathbb{N}$ e $h > 0$ fixos, e ainda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Defina então o espaço de medidas pontuais

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k^u = \left\{ \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i, u_i)} : z_i \in \Sigma_C, u_i \in [0, u], \right. \\ \left. (k-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x_i) < v_i \leq kh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x_i), \text{ onde } x_i = X_0(z_i) \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Um elemento η_k^u de \mathcal{M}_k^u será denominado uma k -colheirada de minhocas de nível u .

Adicionalmente, defina a medida pontual

$$\tilde{\eta}^{n,u} = \eta_1^u + \eta_2^u + \dots + \eta_n^u$$

pertencente ao espaço de medidas pontuais

$$\tilde{\Theta}^{n,u} = \left\{ \tilde{\eta}^{n,u} = \sum_{k=1}^n \eta_k^u : \eta_k^u \in \mathcal{M}_k^u, k = 1, \dots, n \right\}. \quad (4.4.6)$$

O processo das colheiradas de minhocas nos níveis $n \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathbb{R}_+$ será então um processo sobre o espaço de medidas pontuais $\tilde{\Theta}^{n,u}$, determinado pelo processo pontual de Poisson em $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ que caracteriza o processo da sopa de minhocas. Denotaremos especificamente por $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}$ a lei de um elemento $\tilde{\eta}^{n,u}$ em $\tilde{\Theta}^{n,u}$.

Desta maneira, uma k -colheirada (de minhocas) de nível u será essencialmente uma coleção de excursões z_i em Σ_C determinadas pelo (anteriormente referido) processo pontual de Poisson em $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, com respectivos índices u_i entre zero e u , e v_i entre $(k-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x_i)$ (exceto) e $kh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x_i)$ (inclusive), onde $x_i = X_0(z_i)$, veja a figura 4.6.

Observe que a introdução do conceito das colheiradas provoca uma pequena mudança no modelo da sopa de minhocas no que diz respeito à sua parametrização. Originalmente o modelo possui dois parâmetros reais positivos v e u que, de forma semelhante ao que ocorre no modelo de entrelaçamentos aleatórios, regula a quantidade de excursões que compõem a sopa, de modo que quanto maiores forem (individualmente) os valores destes parâmetros, maior será a quantidade esperada de excursões no processo. Mais especificamente, estes parâmetros geram um acoplamento entre os processos para todos os pares de níveis reais não-negativos, de tal maneira que, ao aumentar os valores de v e/ou u , podemos incluir novas excursões na sopa, uma a uma. Agora, com a implementação das colheiradas neste processo, estamos de certa maneira “discretizando” um dos parâmetros responsáveis por essa regulagem (o parâmetro v), que será então substituído

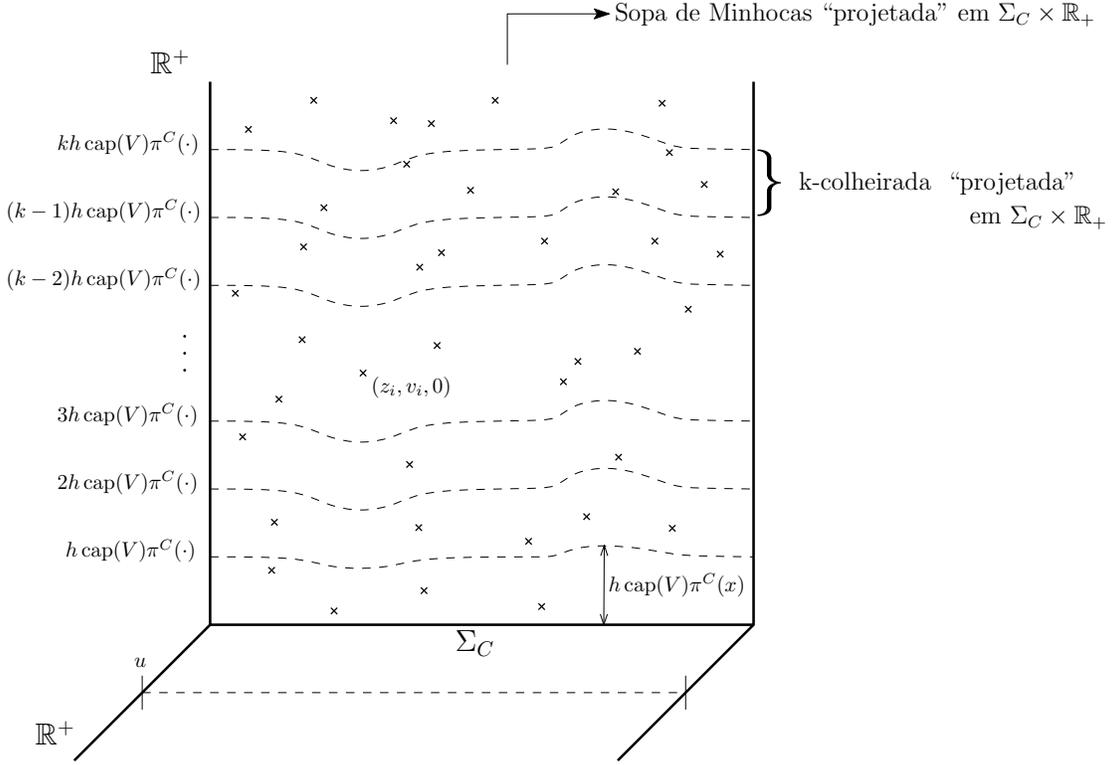


Figura 4.6: As colheiradas no processo da sopa de minhocas. Nesta ilustração, os pontos correspondentes ao processo da sopa de minhocas, bem como as colheiradas, estão “projetados” no “plano vertical” $\Sigma_C \times \mathbb{R}_+$. A k -colheirada η_k^u , por exemplo, possui 6 excursões nesta ilustração.

pelo parâmetro $n \in \mathbb{N}$, o qual corresponde ao número de colheiradas que compõem o processo, e assim estaremos acoplando os processos para todos os níveis u reais não-negativos e para todos os níveis n naturais (veja a figura 4.6 novamente). Neste novo cenário, mantendo fixo o parâmetro u , ao aumentar o valor do parâmetro n incluiremos no processo uma coleção de excursões, todas simultaneamente, ou seja, acrescentaremos uma “colheirada” de minhocas na sopa.

A partir desta construção, para qualquer $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos identificar uma relação de ordem parcial entre os elementos do espaço \mathcal{M}_k^u da seguinte maneira: se $\eta_k^u, \omega_k^u \in \mathcal{M}_k^u$, diremos que $\omega_k^u \leq \eta_k^u$ se, e somente se, todas as excursões (minhocas) que compõem ω_k^u também estiverem presentes em η_k^u .

Utilizando esta relação, é possível então identificar também no espaço $\tilde{\Theta}^{n,u}$ uma relação de ordem parcial: se $\tilde{\eta}^{n,u}, \tilde{\omega}^{n,u} \in \tilde{\Theta}^{n,u}$, diremos que $\tilde{\omega}^{n,u} \leq \tilde{\eta}^{n,u}$ se, e somente se, $\omega_k^u \leq \eta_k^u$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Para estudar estas relações de ordem de forma um pouco mais geral, considere o espaço de medidas pontuais

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \tilde{\eta} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(z_i, v_i, u_i)} : z_i \in \Sigma_C, v_i, u_i \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

sobre o qual o processo da sopa de minhocas (descrito nesta seção) está definido, considerando-o dotado da σ -álgebra $\tilde{\mathcal{T}}$ gerada pelos mapeamentos $\tilde{\eta} \mapsto \tilde{\eta}(D)$, para $D \in \mathcal{S}_C \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Fica claro então que haverá uma relação de ordem parcial também em $\tilde{\Theta}$, de tal forma que, para $\eta, \eta' \in \tilde{\Theta}$, diremos que $\eta \leq \eta'$ se, e somente se, todas as excursões em η também estiverem em η' .

Como mencionamos a pouco, observe que desta forma os processos de colheiradas de minhocas ficarão acoplados para todos os níveis u não-negativos e para todos os níveis n naturais, de tal maneira que poderemos escrever

$$\tilde{\eta}^{n,u} \leq \tilde{\eta}^{n',u'}, \quad \text{sempre que } n \leq n' \text{ e } u \leq u'.$$

Analogamente àquilo que foi definido no início da seção 4.2 (no contexto do processo da sopa de minhocas caracterizado naquela seção), se agora A for um evento em $\tilde{\mathcal{T}}$ suportado no conjunto C , diremos que este evento é crescente com relação ao processo da sopa de minhocas se, para $\eta, \eta' \in \tilde{\Theta}$, ocorrer

$$\mathbf{1}_A(\eta) \leq \mathbf{1}_A(\eta'), \quad \text{sempre que } \eta \leq \eta'.$$

Considere a partir de agora, portanto, um evento A suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas, conforme definido no parágrafo anterior.

Para $k \leq n$ e $u > 0$, dizemos que a k -colheirada η_k^u é pivotal positiva para o evento A na configuração $\tilde{\eta}^{n,u} \in \tilde{\Theta}^{n,u}$ se todas as excursões de η_k^u estão presentes em $\tilde{\eta}^{n,u}$ e

$$\mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u} - \eta_k^u) = 0,$$

ou seja, o evento A ocorre sob a configuração $\tilde{\eta}^{n,u}$ do processo das colheiradas nos níveis n e u (na presença de todas as excursões de η_k^u), mas deixa de ocorrer se retiramos simultaneamente da configuração todas as excursões desta colheirada.

De maneira semelhante, dizemos que a excursão $z \in \Sigma_C$ (com respectivos índices $u' \leq u$ e $v' \leq nh \text{ cap}(V) \pi^C(X_0(z))$) é pivotal positiva para o mesmo evento A na configuração $\tilde{\eta}^{n,u} \in \tilde{\Theta}^{n,u}$ se z está presente em $\tilde{\eta}^{n,u}$ e além disso

$$\mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u} - \delta_{(z,v',u')}) = 0,$$

ou seja, o evento A ocorre sob a configuração $\tilde{\eta}^{n,u}$ do processo nos níveis n e u (na presença da excursão z), mas deixa de ocorrer se retiramos esta excursão da configuração.

Neste contexto, denotaremos então por $N_{n,u}^{col}$ o número de colheiradas pivotais positivas para o evento A em $\tilde{\eta}^{n,u}$, observando que

$$N_{n,u}^{col} = N_{n,u}^{col} \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}), \quad (4.4.7)$$

Precisamente, não existirão colheiradas pivotais positivas para A em $\tilde{\eta}^{n,u}$ se o evento A não estiver ocorrendo sob esta configuração de excursões. Adicionalmente, denotaremos por $N_{n,u}^+$ o número de excursões pivotais positivas para A em $\tilde{\eta}^{n,u}$, observando de forma análoga que

$$N_{n,u}^+ = N_{n,u}^+ \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}). \quad (4.4.8)$$

Queremos determinar agora uma expressão para a diferença entre as probabilidades do evento A sob as leis do processo em dois valores consecutivos do parâmetro discreto n , mantendo fixo o parâmetro $u > 0$, isto é, procuramos uma expressão para

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n-1,u}(A),$$

para n natural e $u > 0$ fixo. Posteriormente iremos determinar também uma expressão para a derivada parcial da probabilidade $\tilde{Q}^{n,u}(A)$ com respeito à u .

Para investigar a diferença mencionada, observe primeiramente que a probabilidade de que este evento ocorra sob a configuração nos níveis $n - 1$ e u , ou seja, $\tilde{Q}^{n-1,u}(A)$, pode ser escrita como

$$\tilde{Q}^{n-1,u}(A) = P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A),$$

e utilizando a fórmula da esperança total,

$$P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A) = E_{\tilde{Q}^{n,u}}[P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A \mid \tilde{\eta}^{n,u})].$$

No caso em que o evento não ocorre nos níveis n e u , ou seja, $\tilde{\eta}^{n,u} \notin A$, claramente se diminuirmos o nível n para $n - 1$ (mantendo u fixo), então o evento (sendo crescente) continuará não ocorrendo, e portanto

$$P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A \mid \tilde{\eta}^{n,u}) = 0, \quad \text{se } \tilde{\eta}^{n,u} \notin A.$$

Por outro lado, dado que $\tilde{\eta}^{n,u} \in A$, ou seja, dado que o evento A ocorre nos níveis n e u , a probabilidade condicional de que o evento deixe de ocorrer ao diminuirmos o nível discreto para $n - 1$ (mantendo u fixo) será exatamente igual a probabilidade de que a n -colheirada η_n^u seja pivotal positiva para A nesta configuração (nos níveis n e u), pois esta colheirada é justamente aquela que é retirada da configuração quando diminuimos o nível discreto desta maneira. Como os “volumes” das regiões correspondentes a todas as colheiradas são iguais (por construção), então esta última probabilidade, por sua vez, corresponderá especificamente à proporção de colheiradas pivotais positivas para A em $\tilde{\eta}^{n,u}$ dentre as n colheiradas presentes no processo nos nível n e u , de modo que

$$P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \notin A \mid \tilde{\eta}^{n,u}) = \frac{N_{n,u}^{col}}{n}, \quad \text{se } \tilde{\eta}^{n,u} \in A.$$

A partir disto, podemos escrever

$$P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A \mid \tilde{\eta}^{n,u}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{\eta}^{n,u} \notin A, \\ 1 - \frac{N_{n,u}^{col}}{n} & \text{se } \tilde{\eta}^{n,u} \in A, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$P(\tilde{\eta}^{n-1,u} \in A \mid \tilde{\eta}^{n,u}) = \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}) - \frac{N_{n,u}^{col}}{n} \mathbf{1}_A(\tilde{\eta}^{n,u}).$$

Tomando a esperança com respeito à lei $\tilde{Q}^{n,u}$ nesta última expressão, e utilizando (4.4.7), finalmente obtemos

$$\tilde{Q}^{n,u}(A) - \tilde{Q}^{n-1,u}(A) = \frac{1}{n} E_{\tilde{Q}^{n,u}}(N_{n,u}^{col}), \quad (4.4.9)$$

para n natural e $u > 0$ fixo.

É interessante observar que na expressão (4.4.9) temos aquilo que seria o equivalente a uma “derivada parcial discreta” (com respeito à n) da probabilidade do evento crescente no modelo das colheiradas de minhocas, expressa em termos do número esperado de colheiradas pivotais positivas para o evento e dos níveis $n \in \mathbb{N}$ e $u > 0$ neste modelo.

4.4.1 A Fórmula de Russo para o Processo das Colheiradas

Vamos estabelecer agora, conforme comentamos antes, uma expressão para a derivada parcial da probabilidade $\tilde{Q}^{n,u}(A)$ com respeito ao parâmetro u , determinando assim aquilo que denominaremos a fórmula de Russo (com respeito à u) para o processo das colheiradas de minhocas. Precisamente, para um evento A em $\tilde{\mathcal{T}}$, suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas (no sentido discutido nesta seção 4.4), determinaremos uma expressão para

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{Q}^{n,u}(A),$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Para abordar esta questão, verificaremos antes de tudo que a probabilidade $\tilde{Q}^{n,u}(A)$, vista como função de $u \in \mathbb{R}_+$, é uma função analítica, e portanto diferenciável (em u , naturalmente). Para isso, denote por $M^{n,u}$ a quantidade de excursões presentes na configuração $\tilde{\eta}^{n,u}$ (do processo das colheiradas) com níveis n e u , de tal forma que, por construção, esta variável aleatória possuirá distribuição Poisson com parâmetro igual a

$$\mu_C \otimes \lambda_+(\mathcal{R}(C, n)) \lambda_+([0, u]) = \mu_C \otimes \lambda_+(\mathcal{R}(C, n)) u,$$

onde a região $\mathcal{R}(C, n)$ é dada por

$$\mathcal{R}(C, n) := \{(z, v) : z \in \Sigma_C, 0 \leq v \leq nh \operatorname{cap}(V) \pi^C(X_0(z))\}.$$

Mas definindo os conjuntos

$$\chi_y := \{z \in \Sigma_C : X_0(z) = y\} \quad \text{para cada } y \in \partial C,$$

podemos então calcular

$$\begin{aligned} \mu_C \otimes \lambda_+(\mathcal{R}(C, n)) &= \int_{\Sigma_C} nh \operatorname{cap}(V) \pi^C(X_0(z)) \mu_C(dz) \\ &= nh \operatorname{cap}(V) \int_{\Sigma_C} \pi^C(X_0(z)) \mu_C(dz) \\ &= nh \operatorname{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \int_{\chi_y} \pi^C(X_0(z)) \mu_C(dz) \\ &= nh \operatorname{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} [\pi^C(y) \mu_C(\chi_y)] \\ &= nh \operatorname{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \pi^C(y), \end{aligned}$$

pois, utilizando a definição da medida μ_C apresentada em (4.1.2), temos

$$\mu_C(\chi_y) = P_y[(X_0, X_1, \dots, X_{H_V}) \in \chi_y] = 1, \quad \forall y \in \partial C.$$

Além disso, observando a afirmação estabelecida em (4.4.4), podemos concluir que o parâmetro da distribuição Poisson desta variável $M^{n,u}$ será então uma constante finita dada por uc_n , onde

$$c_n := nh \operatorname{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \pi^C(y) < \infty. \quad (4.4.10)$$

Assim, de forma análoga ao que já foi discutido na seção 2.4.1 (no contexto dos entrelaçamentos aleatórios) e também na seção 4.2 (no contexto da sopa de minhocas) podemos de fato estabelecer a analiticidade sugerida, através da

Proposição 4.4.1. Se $C \subset \mathbb{Z}^d$ é finito ou tal que sua fronteira ∂C é finita, $d \geq 3$, e A é um evento suportado em C e crescente com relação ao processo da sopa de minhocas (no sentido da seção 4.4), então a probabilidade de A sob a lei $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}$ do processo das colheiradas nos níveis $n \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathbb{R}_+$, denotada por $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$, é uma função analítica de u no intervalo $[0, +\infty)$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é praticamente idêntica à demonstração da proposição 2.4.1, a qual inclusive já foi de certa forma replicada quando demonstramos a proposição 4.2.1. Seguiremos, portanto, a mesma linha das argumentações apresentadas na demonstração desta segunda proposição.

Utilizando o fato previamente observado de que

$$M^{n,u} \sim \text{Poisson}(uc_n),$$

podemos através da fórmula da probabilidade total estabelecer a expressão

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A \mid M^{n,u} = m) P(M^{n,u} = m) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_m(A) \frac{e^{-uc_n} (uc_n)^m}{m!},$$

notando que os termos $\tilde{Q}_m(A) = \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A \mid M^{n,u} = m)$ dependem apenas da quantidade m de excursões em $\tilde{\eta}^{n,u}$, e não especificamente dos parâmetros n e u . Desta forma, se denotamos estes termos por a_m , para $m = 1, 2, \dots$, podemos então escrever

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) = e^{-uc_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m (c_n)^m}{m!} u^m,$$

e assim como fizemos na demonstração da proposição 4.2.1, basta utilizar mais uma vez os mesmos argumentos da demonstração da proposição 2.4.1 para concluir que a série de potências que aparece nesta última expressão é analítica em $u \in \mathbb{R}$, e que portanto esta própria expressão, sendo o produto de duas funções analíticas, será de fato uma função analítica em $u \in \mathbb{R}$, e em particular em $u \in \mathbb{R}_+$, conforme queríamos demonstrar. \square

Esta proposição nos permitirá, conseqüentemente, estabelecer uma expressão para a derivada parcial de $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$ com respeito à u , a partir apenas do cálculo, por exemplo, de sua derivada parcial à esquerda, como iremos fazer agora. Neste sentido, suponha então que $n \in \mathbb{N}$ é fixo, e adicionalmente considere $u \geq 0$ e $0 < \delta < u$. Sob estas suposições, observe que

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u-\delta}(A) = P(\tilde{\eta}^{n,u-\delta} \in A),$$

e aplicando a fórmula da esperança total podemos escrever

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u-\delta}(A) = E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}} [\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u-\delta}(A \mid \tilde{\eta}^{n,u})] = E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}} [P(\tilde{\eta}^{n,u-\delta} \in A \mid \tilde{\eta}^{n,u})].$$

A partir desta expressão, repetindo mais uma vez os argumentos desenvolvidos na seção 2.4.2 (onde calculamos a derivada à esquerda de $\mathbb{P}^u(A)$ no modelo de entrelaçamentos), é possível concluir que

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u-\delta}(A) = \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \frac{\delta}{u} E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}} \left[N_{n,u}^+ \left(1 - \frac{\delta}{u}\right)^{N_{n,u}^+ - 1} \mathbf{1}_{\{N_{n,u}^+ \geq 1\}} \right] - \tilde{U}'_\delta - \tilde{U}''_\delta,$$

onde \tilde{U}'_δ e \tilde{U}''_δ são ambos iguais a $o(\delta)$ quando $\delta \downarrow 0$, de modo que, aplicando o Teorema de Convergência Monótona, obtemos uma expressão para a derivada parcial à esquerda de $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u-\delta}(A)}{\delta} = \frac{1}{u} E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}}(N_{n,u}^+),$$

estabelecendo assim o seguinte

Teorema 4.4.2. Sob as hipóteses da proposição 4.4.1,

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) = \frac{1}{u} E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}}(N_{n,u}^+), \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

onde $N_{n,u}^+$ denota o número de excursões pivotais positivas para A no processo das colheiradas de minhocas nos níveis $n \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathbb{R}_+$, e $E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}}$ denota a esperança sob a lei deste mesmo processo.

Complementando esta investigação mostraremos que, em um certo sentido, deverá ser ampla a região onde é pequena esta derivada parcial, seguindo o mesmo raciocínio e as argumentações da seção 3.1, os quais também foram posteriormente empregados na seção 4.2.

Em primeiro lugar, utilizando o teorema 4.4.2 e a expressão (4.4.10), observamos que

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) \leq \frac{1}{u} E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}}(M^{n,u}) = c_n < \infty, \quad \forall u > 0,$$

de onde podemos concluir que a derivada $\frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$, como função de u , é limitada em $(0, \infty)$. Mais ainda, como $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$ é analítica em $u \in \mathbb{R}_+$, então esta derivada parcial (como função de u) será contínua em \mathbb{R}_+ . Se fixamos duas constantes u_1 e u_2 tais que $0 < u_1 < u_2 < \infty$, sabemos então que a derivada $\frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$ será integrável no intervalo $[u_1, u_2]$, e portanto empregando mais uma vez o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema de Newton-Leibniz) teremos

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) du = \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u_2}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u_1}(A), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e consequentemente

$$0 \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) du \leq 1,$$

pois $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$ é uma função não-decrescente de u , uma vez que o evento A é crescente.

Definindo o conjunto

$$\tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta := \left\{ u \in (u_1, u_2) : \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) \leq \frac{\zeta}{u_2 - u_1} \right\} \subset (u_1, u_2), \quad (4.4.11)$$

para alguma constante $\zeta > 1$, então

$$\lambda_+ \left((\tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C \right) = \frac{u_2 - u_1}{\zeta} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{1}_{(\tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C}(u) \frac{\zeta}{u_2 - u_1} du < \frac{u_2 - u_1}{\zeta} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u} \tilde{Q}^{n, u}(A) du \leq \frac{u_2 - u_1}{\zeta},$$

de tal forma que

$$\lambda_+ \left(\tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta \right) = (u_2 - u_1) - \lambda_+ \left((\tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C \right) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right). \quad (4.4.12)$$

Mais uma vez através da igualdade estabelecida pelo teorema 4.4.2, finalmente concluímos que

$$E_{\tilde{Q}^{n, u}}(N_{n, u}^+) \leq \frac{u\zeta}{u_2 - u_1}, \quad (4.4.13)$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e todo $u \in \tilde{F}_{u_1, u_2, n}^\zeta$.

4.4.2 Investigando as Colheiradas Pivotalis Positivas

De maneira também semelhante ao que já discutimos em outros cenários, agora neste novo contexto é possível explorar, e de certa forma caracterizar, o comportamento do número esperado de colheiradas pivotalis positivas para o evento crescente A . Vejamos, portanto, como isto pode ser precisamente desenvolvido.

Observe que a probabilidade do evento A sob a lei do processo das colheiradas nos níveis n e u , dado o número de excursões $M^{n, u}$ presentes no processo, dependerá apenas desta própria quantidade de excursões, a qual por sua vez é determinada pela lei da variável $M^{n, u}$. Por outro lado, como

$$M^{n, u} \sim \text{Poisson}(uc_n),$$

onde c_n é estabelecido em (4.4.10), fica então claro que

$$\tilde{Q}^{n, u}(A) = \tilde{Q}^{n', u'}(A) \quad (4.4.14)$$

sempre que $uc_n = u'c_{n'}$, pois neste caso as leis de $M^{n, u}$ e $M^{n', u'}$ serão iguais. Com efeito, para $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\tilde{Q}^{n, u}(A \mid M^{n, u} = m) = \tilde{Q}^{n', u'}(A \mid M^{n', u'} = m)$$

o que é equivalente a escrever

$$\frac{\tilde{Q}^{n, u}(A, M^{n, u} = m)}{P(M^{n, u} = m)} = \frac{\tilde{Q}^{n', u'}(A, M^{n', u'} = m)}{P(M^{n', u'} = m)}.$$

Como os denominadores em ambos os lados são idênticos quando $uc_n = u'c_{n'}$ (e portanto se cancelam neste caso), então somando esta expressão para todo $m \in \mathbb{N}$ obtemos de fato a expressão (4.4.14).

Em particular, para que uc_{n-1} seja igual a $u'c_n$, a constante u' deverá ser tal que

$$u(n-1)h \text{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \pi^C(y) = u'nh \text{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \pi^C(y).$$

Mas como

$$0 < h \operatorname{cap}(V) \sum_{y \in \partial C} \pi^C(y) < \infty,$$

teremos então $u' = u\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, de tal forma que

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n-1,u}(A) = \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u(1-\frac{1}{n})}(A), \quad \text{para quaisquer } n \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}_+.$$

Note que, de maneira geral, pela definição de c_n em (4.4.10), a condição $uc_n = u'c_{n'}$ será equivalente à condição $un = u'n'$.

Com isso, temos mostrado portanto que

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u(1-\frac{1}{n})}(A) = \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n-1,u}(A) = \frac{1}{n} E_{\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}}(N_{n,u}^{col}), \quad (4.4.15)$$

onde a segunda igualdade decorre da expressão (4.4.9).

Novamente considerando um intervalo (u_1, u_2) em \mathbb{R}_+ com $0 < u_1 < u_2 < \infty$, defina agora o conjunto

$$\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta := \left\{ u \in (u_1, u_2) : \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n,u(1-\frac{1}{n})}(A) \leq \frac{\zeta}{n(u_2 - u_1)} \right\} \subset (u_1, u_2), \quad (4.4.16)$$

para uma constante ζ real, que agora é definida como sendo maior do que u_2 . Mostraremos que a medida de Lebesgue do complementar deste conjunto (com respeito ao intervalo (u_1, u_2)) é menor do que ou igual a $(u_2 - u_1)u_2/\zeta$.

Por absurdo, suponha que

$$\lambda_+ \left((\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C \right) > \frac{(u_2 - u_1)u_2}{\zeta}.$$

Isto implica que existe uma sequência crescente e finita com pelo menos $\frac{(u_2 - u_1)u_2/\zeta}{u_2/n}$ pontos no complementar do conjunto $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta$, digamos $u^{(i)}$ tais que $u_1 \leq u^{(1)} < u^{(2)} < u^{(3)} < \dots \leq u_2$, com os pontos subsequentes afastados uns dos outros por uma distância maior do que ou igual a $\frac{u_2}{n}$. Por sua vez, cada um destes pontos $u^{(i)}$ é tal que

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{n, u^{(i)}}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n, u^{(i)}(1-\frac{1}{n})}(A) > \frac{\zeta}{n(u_2 - u_1)},$$

pois estes são justamente pontos em $(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C$.

Observe neste momento que

$$u^{(i)} - u^{(i)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{u^{(i)}}{n} \leq \frac{u_2}{n}, \quad \forall i \geq 1,$$

e como a probabilidade $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,u}(A)$, além de obviamente assumir valores em $[0, 1]$, é não-decrescente em u (para n fixo), pois o evento A é crescente, então deveríamos ter

$$\sum_{i \geq 1} \left[\tilde{\mathbb{Q}}^{n, u^{(i)}}(A) - \tilde{\mathbb{Q}}^{n, u^{(i)}(1-\frac{1}{n})}(A) \right] \leq 1.$$

No entanto, sob nossas atuais suposições temos

$$\sum_{i \geq 1} [\tilde{Q}^{n,u^{(i)}}(A) - \tilde{Q}^{n,u^{(i)}(1-\frac{1}{n})}(A)] > \frac{(u_2 - u_1)u_2/\zeta}{u_2/n} \frac{\zeta}{n(u_2 - u_1)} = 1,$$

o que constitui, portanto, uma contradição.

Com isso, concluímos que de fato

$$\lambda_+((\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C) \leq \frac{(u_2 - u_1)u_2}{\zeta},$$

e conseqüentemente

$$\lambda_+(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta) = (u_2 - u_1) - \lambda_+((\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta)^C) \geq (u_2 - u_1)\left(1 - \frac{u_2}{\zeta}\right), \quad (4.4.17)$$

justificando, inclusive, a escolha de $\zeta > u_2$.

Utilizando (4.4.15), podemos finalmente afirmar que

$$E_{\tilde{Q}^{n,u}}(N_{n,u}^{col}) \leq \frac{\zeta}{u_2 - u_1},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e todo $u \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta$, onde $0 < u_1 < u_2 < \infty$, $\zeta > u_2$ e $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta$ está definido em (4.4.16) e satisfaz (4.4.17).

Como a variável $N_{n,u}^{col}$ assume valores em $\{0, 1, \dots, n\}$ (e é portanto não-negativa), então para qualquer k real tal que $1 \leq k \leq n$, de acordo com a desigualdade de Markov temos

$$\tilde{Q}^{n,u}(N_{n,u}^{col} \geq k) \leq \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)}, \quad \forall u \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^\zeta. \quad (4.4.18)$$

Tentaremos utilizar estas conclusões agora, no desenvolvimento de nosso estudo sobre a covariância mencionada anteriormente.

4.5 As Colheiradas de Minhocas e os *Soft Local Times*: Uma Outra Cota para a Covariância

Nesta seção pretendemos estabelecer, agora em termos das colheiradas de minhocas e dos *soft local times*, o problema que citamos de forma recorrente sobre a covariância entre eventos crescentes no processo de entrelaçamentos aleatórios, e com isso tentaremos caracterizar uma possível solução para este problema.

Considere em princípio dois subconjuntos disjuntos de \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$), denotando-os C_1 e C_2 , de tal forma que o conjunto C_1 e o complementar do conjunto C_2 sejam finitos, e denote por V um terceiro conjunto, também finito e disjunto dos dois anteriores, separando C_1 de C_2 . Ou seja, qualquer trajetória em \mathbb{Z}^d que segue de C_1 para C_2 (e vice-versa) deve necessariamente cruzar o conjunto V (veja um exemplo na figura 4.7, à esquerda).

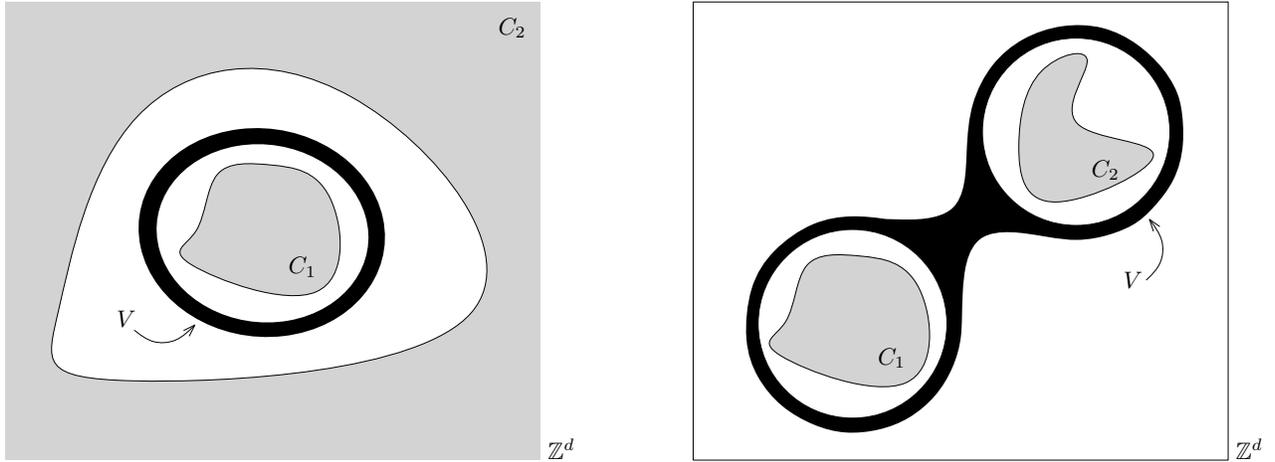


Figura 4.7: Os conjuntos C_1 , C_2 e V em \mathbb{Z}^d . À esquerda, C_1 e o complementar de C_2 são finitos, e à direita C_1 e C_2 são finitos. Em ambos os casos, o conjunto V é finito e separa C_1 de C_2 .

Para esta escolha do conjunto V , conforme discutido na demonstração da proposição 5.3 de [14], considere os espaços Σ_{C_1} , Σ_{C_2} e $\Sigma_{C_1 \cup C_2}$ definidos de acordo com (4.1.1), e as respectivas medidas μ_{C_1} , μ_{C_2} e $\mu_{C_1 \cup C_2}$ definidas de acordo com (4.1.2), observando que

$$\Sigma_{C_1 \cup C_2} = \Sigma_{C_1} \dot{\cup} \Sigma_{C_2}, \quad \text{e} \quad \mu_{C_1 \cup C_2} = \mu_{C_1} + \mu_{C_2}. \quad (4.5.1)$$

Definindo um processo pontual de Poisson η em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$ com medida de intensidade igual a $\mu_{C_1 \cup C_2} \otimes dv$, e observando que este processo restrito à Σ_{C_1} e à Σ_{C_2} dá origem a dois processos pontuais de Poisson independentes com intensidades respectivamente iguais a $\mu_{C_1} \otimes dv$ e $\mu_{C_2} \otimes dv$, Popov e Teixeira ([14]) mostram então que é possível construir três processos de entrelaçamentos aleatórios $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$, $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$, em \mathbb{Z}^d , utilizando a técnica dos *soft local times* a partir do mesmo processo pontual de Poisson η (eventualmente restrito à Σ_{C_1} ou à Σ_{C_2}), de tal forma que $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$ sejam cópias independentes de $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$.

Estudaremos nesta seção, no entanto, uma pequena modificação neste cenário, conforme descreveremos a seguir.

Vamos considerar a partir de agora que os conjuntos disjuntos C_1 e C_2 são ambos finitos, e que o conjunto V , além de finito e disjunto dos dois anteriores, separa C_1 de C_2 e também os separa do infinito (veja uma ilustração na figura 4.7, à direita). Note que, desta maneira, qualquer trajetória em \mathbb{Z}^d que segue de C_1 para C_2 (e vice-versa) ainda deverá cruzar o conjunto V , como antes. Além disso, levaremos em conta agora um processo pontual de Poisson no espaço $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ com medida de intensidade igual a $\mu_{C_1 \cup C_2} \otimes dv \otimes dv$ (relembre o processo da sopa de minhocas segundo a caracterização da seção 4.4). Nos concentraremos então neste processo especificamente restrito à $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+ \times [0, t]$, para algum $t > 0$, de tal forma que, ao projetar no espaço $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$ todos os pontos deste processo (restrito) teremos então um processo pontual de Poisson η^* em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$ com medida de intensidade igual a $(\mu_{C_1 \cup C_2} \otimes dv)t$ (veja a figura 4.8).

Analogamente ao que foi discutido nos primeiros parágrafos, observe que, para a nossa atual escolha dos conjuntos C_1 , C_2 e V , as relações estabelecidas em (4.5.1) continuarão válidas, e note

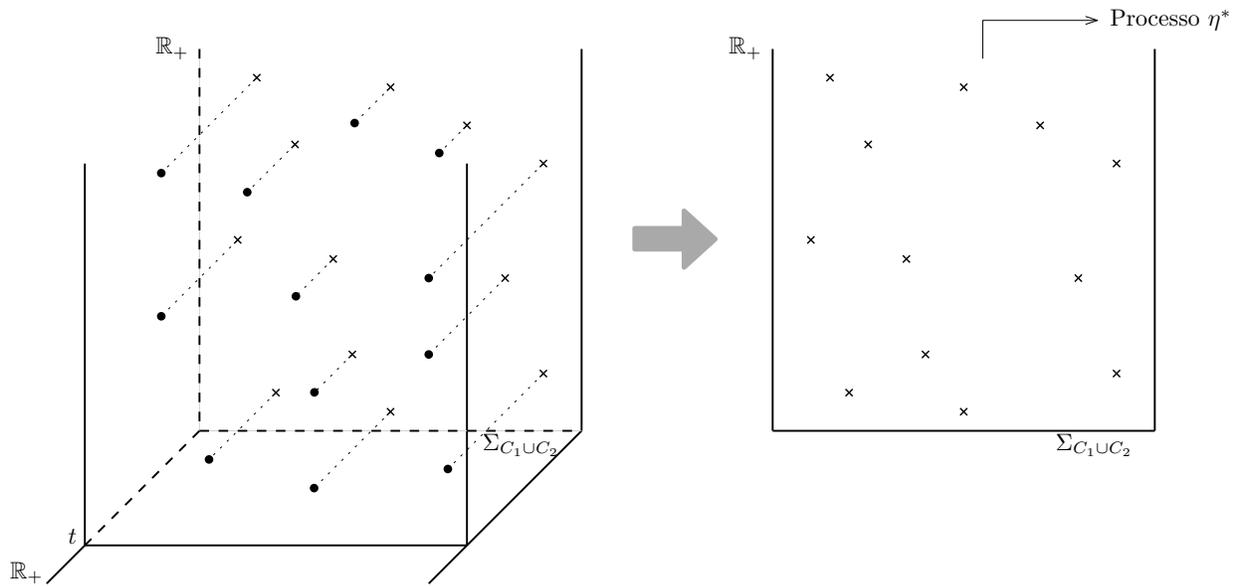


Figura 4.8: O processo pontual de Poisson em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+ \times [0, t]$ (à esquerda) e sua projeção em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$, dando origem ao processo η^* (à direita).

ainda que este processo η^* restrito à Σ_{C_1} e à Σ_{C_2} também dará origem a dois processos pontuais de Poisson independentes com intensidades agora respectivamente iguais a $(\mu_{C_1} \otimes dv)t$ e $(\mu_{C_2} \otimes dv)t$. Assim como antes (analogamente à demonstração da proposição 5.3 de [14]) será ainda possível construir os três processos de entrelaçamentos aleatórios $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$, $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$, utilizando novamente a técnica dos *soft local times*, agora através do processo pontual de Poisson η^* , de tal forma que $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$ sejam novamente cópias independentes de $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$.

Isto é de fato possível porque, com alguns pequenos ajustes na demonstração da Proposição 4.1 de [14], e conseqüentemente adaptando os resultados das Proposições 4.3 e 4.10 do mesmo artigo, é possível mostrar que a técnica dos *soft local times* (caracterizada por (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3)) empregada a partir do processo η^* (o qual possui intensidade $(\mu_{C_1 \cup C_2} \otimes dv)t$ e não $\mu_{C_1 \cup C_2} \otimes dv$) ainda funcionará como antes, com a única exceção de que, agora, os termos ξ_n^m (dados em (4.3.1)) que compõem os *soft local times* serão independentes e identicamente distribuídos, exponenciais com parâmetro exatamente igual a t , e não mais igual a 1. Assim, os *soft local times* acumulados (como em (4.3.6)), obtidos na construção que nos leva à simulação dos entrelaçamentos aleatórios a partir de η^* , agora dependerão em particular do parâmetro t .

Denotaremos então por $G_{v,t}^{C_1}$, $G_{v,t}^{C_2}$ e $G_{v,t}^{C_1 \cup C_2}$ os *soft local times* acumulados obtidos a partir do processo η^* na construção dos processos $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$, $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$, respectivamente restritos à C_1 , C_2 e $C_1 \cup C_2$, considerando que $G_{v,t}^{C_1}$ é acumulado até a $M_{v,1}^V$ -ésima trajetória e que $G_{v,t}^{C_2}$ e $G_{v,t}^{C_1 \cup C_2}$ são ambos acumulados até a $M_{v,2}^V$ -ésima trajetória, onde $M_{v,1}^V$ e $M_{v,2}^V$ são variáveis aleatórias independentes e distribuídas como M_v^V em (4.3.4) (naturalmente substituindo o parâmetro u naquela expressão por v). Assim, o *soft local time* acumulado $G_{v,t}^{C_1}$, por exemplo, será dado por

$$G_{v,t}^{C_1} = \sum_{i=1}^{M_{v,1}^V} G_{i,T_i^C}^{C,t},$$

onde os *soft local times* $G_{i, \mathcal{I}_i^C}^{C,t}$ são construídos como em (4.3.2), com a característica de que, agora, os termos ξ_n^m que os compõem serão distribuídos exponencialmente com parâmetro t , como mencionamos antes.

Nosso interesse neste contexto reside essencialmente no estudo e caracterização da relação de dependência (ou seja, covariância) entre dois eventos crescentes com relação ao processo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d , e suportados em C_1 e C_2 , os quais denotaremos respectivamente por A_1 e A_2 .

Para abordar esta questão, pretendemos agora utilizar o processo da sopa de minhocas, e em particular o conceito das colheiradas de minhocas, introduzido na seção 4.4.

Antes de tudo, levando em conta a definição de $\pi^C(\cdot)$ dada em (4.4.2) (considerando agora o conjunto $C = C_1, C_2, C_1 \cup C_2$) precisamos observar que

$$\pi^{C_1 \cup C_2}(x) = \pi^{C_1}(x), \quad \forall x \in \partial C_1, \quad (4.5.2)$$

$$\text{e } \pi^{C_1 \cup C_2}(x) = \pi^{C_2}(x), \quad \forall x \in \partial C_2, \quad (4.5.3)$$

o que de fato é válido de acordo com a seguinte argumentação: para $C = C_1, C_2, C_1 \cup C_2$, relembando a definição de $\rho_i^C(x)$ dada em (4.4.3), já discutimos que

$$E(\rho_1^C(x)) = \pi^C(x), \quad \forall x \in \partial C,$$

e como o conjunto V está definido de tal forma a separar C_1 de C_2 , fazendo com que qualquer trajetória que segue de um conjunto para o outro necessariamente cruze o conjunto V , então

$$E(\rho_1^{C_1}(x)) = E(\rho_1^{C_1 \cup C_2}(x)), \quad \forall x \in \partial C_1,$$

$$\text{e } E(\rho_1^{C_2}(x)) = E(\rho_1^{C_1 \cup C_2}(x)), \quad \forall x \in \partial C_2,$$

que é exatamente o que afirmam as expressões (4.5.2) e (4.5.3).

Com isso, considerando uma amplitude positiva e fixa h , $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, observe que se os *soft local times* $G_{vt,t}^{C_1}(z)$ e $G_{vt,t}^{C_1 \cup C_2}(z)$ estiverem simultaneamente assumindo seus valores entre

$$(n-1)h \text{cap}(V)\pi^{C_1}(x) \quad \text{e} \quad nh \text{cap}(V)\pi^{C_1}(x)$$

para todo $z \in \Sigma_{C_1}$, e além disso se a colheirada de minhocas de nível t em Σ_{C_1} correspondente à esta região (ou seja, a n -colheirada η_n^t de nível t , conforme definida logo após (4.4.5)) não for pivotal positiva para o evento A_1 , então a ocorrência ou não deste evento será equivalente tanto sob o processo \mathcal{I}^{vt} quanto sob o processo \mathcal{I}_1^{vt} . O mesmo irá ocorrer para os *soft local times* $G_{vt,t}^{C_2}(z)$ e $G_{vt,t}^{C_1 \cup C_2}(z)$ em Σ_{C_2} , com relação ao evento A_2 . Precisamente, observando (4.5.2) e (4.5.3), se denotamos por $\mathbb{A}_{vt}^{n,t}$ o evento

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{vt}^{n,t} := & \left\{ (n-1)h \text{cap}(V)\pi^{C_1}(x) < G_{vt,t}^{C_1}(z), G_{vt,t}^{C_1 \cup C_2}(z) \leq nh \text{cap}(V)\pi^{C_1}(x), \quad \forall z \in \Sigma_{C_1} \right\} \\ & \cap \left\{ (n-1)h \text{cap}(V)\pi^{C_2}(x) < G_{vt,t}^{C_2}(z), G_{vt,t}^{C_1 \cup C_2}(z) \leq nh \text{cap}(V)\pi^{C_2}(x), \quad \forall z \in \Sigma_{C_2} \right\}, \end{aligned}$$

onde $x = X_0(z)$ para cada $z \in \Sigma_{C_1 \cup C_2}$, então aquilo que queremos dizer pode ser traduzido como

$$\begin{aligned}
& \mathbb{A}_{vt}^{n,t} \cap \left\{ \eta_n^{t,C_1} \text{ não é pivotal positiva para } A_1 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_1} \right\} \\
& \quad \cap \left\{ \eta_n^{t,C_2} \text{ não é pivotal positiva para } A_2 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_2} \right\} \\
& \subseteq \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) = \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \right\} \cap \left\{ \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) = \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right\} \\
& \subseteq \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right\}, \tag{4.5.4}
\end{aligned}$$

onde η_n^{t,C_1} e η_n^{t,C_2} são, respectivamente, a n -colheirada de minhocas de nível t do processo das colheiradas em Σ_{C_1} e a n -colheirada de nível t do processo em Σ_{C_2} , ambas com amplitude h , lembrando que $\tilde{\eta}^{n,t}$ denota uma configuração em $\tilde{\Theta}^{n,t}$ conforme definido em (4.4.6) (naturalmente substituindo u por t naquela expressão, e Σ_C por Σ_{C_1} ou Σ_{C_2} , dependendo do caso, na expressão (4.4.5)). Veja uma ilustração deste cenário na figura 4.9.

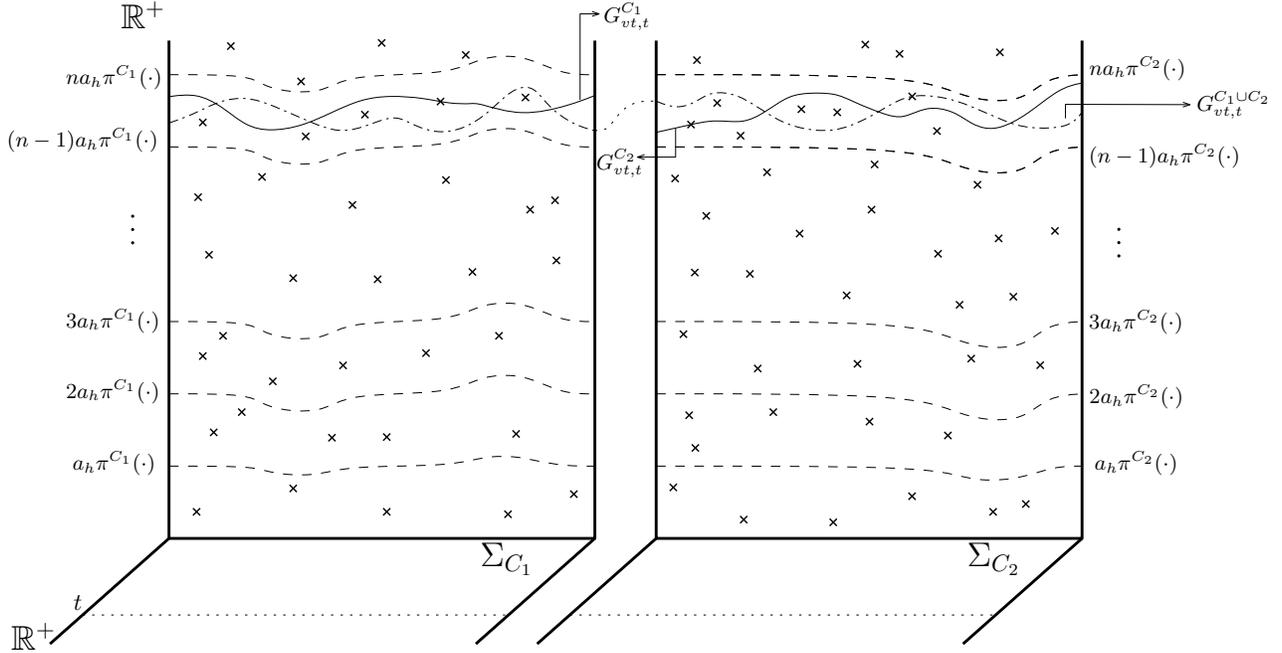


Figura 4.9: O processo pontual de Poisson η^* em $\Sigma_{C_1 \cup C_2} \times \mathbb{R}_+$, as colheiradas η_n^{t,C_1} e η_n^{t,C_2} de nível t projetadas em $\Sigma_{C_1} \times \mathbb{R}_+$ e em $\Sigma_{C_2} \times \mathbb{R}_+$, e os *soft local times* acumulados. Nesta figura, denotamos $a_h = h \text{cap}(V)$.

Agora observe que, no nível vt do processo de entrelaçamentos, a covariância entre os eventos crescentes A_1 e A_2 , respectivamente suportados em C_1 e C_2 , pode ser caracterizada por

$$\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2) := \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \right] - \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \right] \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \right],$$

onde \mathbb{E}_{vt} denota a esperança com respeito à lei do processo de entrelaçamentos aleatórios no ní-

vel $vt > 0$. Como os entrelaçamentos \mathcal{I}_1^u e \mathcal{I}_2^u são cópias independentes de \mathcal{I}^u , então

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{vt}(A_1, A_2) &= \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \right] - \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \right] \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right] \\ &= \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \right] - \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right] \\ &= \mathbb{E}_{vt} \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) - \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right] \end{aligned}$$

Além disso, denotando por B o evento

$$B = \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \neq \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right\},$$

e levando em conta o fato que

$$\left| \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) - \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right| \leq 1,$$

naturalmente podemos escrever

$$\begin{aligned} |\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)| &\leq \mathbb{E}_{vt} \left[\left| \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) - \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right| \mathbf{1}_B \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{vt} \left[\left| \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) - \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right| \mathbf{1}_{B^c} \right] \\ &\leq P \left[\mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) \neq \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Em vista da expressão (4.5.4), para estimar $\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)$ precisaríamos então estimar as probabilidades de $\mathbb{A}_{vt}^{n,t}$ e dos eventos

$$\mathbb{B}_1^{n,t} := \left\{ \eta_n^{t,C_1} \text{ não é pivotal positiva para } A_1 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_1} \right\} \quad (4.5.6)$$

$$\text{e } \mathbb{B}_2^{n,t} := \left\{ \eta_n^{t,C_2} \text{ não é pivotal positiva para } A_2 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_2} \right\}, \quad (4.5.7)$$

ou seja, deveríamos procurar especificamente por cotas inferiores razoáveis para estes três eventos.

Entretanto, a estimação da probabilidade do evento $\mathbb{A}_{vt}^{n,t}$, em particular, dependerá de alguns resultados que em geral não são válidos para os conjuntos C_1 , C_2 e $C_1 \cup C_2$ arbitrários, conforme discutido na seção 6 de [14]. Neste contexto, assim como é feito no trabalho mencionado, precisaremos lidar com estes conjuntos “inflados” e “suavizados” em um certo sentido, para os quais os resultados citados serão realmente aplicáveis. Para estabelecer esta situação, defina antes o conjunto

$$B(C, r) = \bigcup_{x \in C} B(x, r),$$

para qualquer conjunto $C \subset \mathbb{Z}^d$ e $r > 0$, onde a bola discreta $B(x, r)$ centrada em x e com raio igual a r , assim como já foi discutido neste texto, é dada por

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y - x\| \leq r\},$$

utilizando a norma euclidiana.

Consideraremos então, a partir de agora, os conjuntos C_1 e C_2 finitos, em \mathbb{Z}^d , com respectivos diâmetros iguais a r_1 e r_2 , ou seja,

$$\text{diam}(C_i) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in C_i\} = r_i, \quad i = 1, 2,$$

e adicionalmente denotaremos por s a distância entre os dois conjuntos,

$$s = \inf\{\|x_1 - x_2\| : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$

De acordo com a proposição 6.1 de [14], existirá uma constante s_0 tal que, para qualquer $s \geq s_0$ e um conjunto C particularmente igual a C_1 ou C_2 , haverá então um conjunto $C^{(s)}$ tal que

$$C \subseteq C^{(s)} \subseteq B(C, s/5), \quad (4.5.8)$$

e é neste sentido que estarão inflados os conjuntos com os quais vamos lidar.

Finalmente, defina o conjunto separador V como

$$V = \left\{x \in \mathbb{Z}^d : \gamma_6 s \leq \min_{y \in C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}} \|x - y\| \leq s/2\right\}, \quad (4.5.9)$$

onde a constante γ_6 existe e pertence ao intervalo $(0, \frac{1}{10})$, novamente de acordo com a proposição 6.1 de [14]. Veja a figura 4.10 para uma ilustração deste cenário.

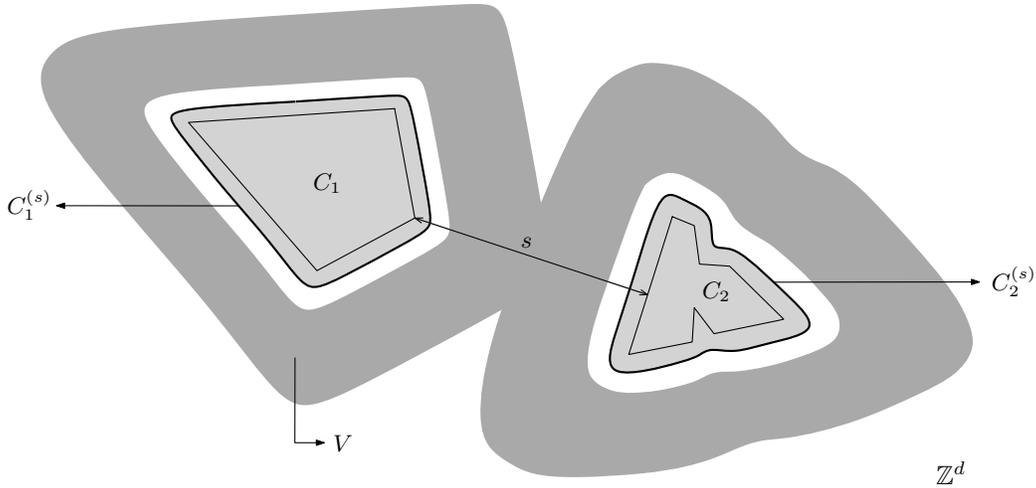


Figura 4.10: Uma ilustração dos conjuntos $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ e V , conforme estabelecidos em (4.5.8) e (4.5.9).

Vamos construir uma relação equivalente àquela expressa em (4.5.4), agora considerando os conjuntos $C_1^{(s)}$ e $C_2^{(s)}$. Para isso, denote por $G_{v,t}^{C_1^{(s)}}$, $G_{v,t}^{C_2^{(s)}}$ e $G_{v,t}^{C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}}$ os *soft local times* acumulados, assim como antes obtidos na construção dos processos $(\mathcal{I}_1^u)_{u \geq 0}$, $(\mathcal{I}_2^u)_{u \geq 0}$ e $(\mathcal{I}^u)_{u \geq 0}$, porém agora respectivamente restritos à $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ e $C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$. Também analogamente àquilo que foi discutido antes, defina agora o evento $\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}$ como

$$\left\{ (n-1)h \operatorname{cap}(V) \pi^{C_1^{(s)}}(x) < G_{vt,t}^{C_1^{(s)}}(z), G_{vt,t}^{C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}}(z) \leq nh \operatorname{cap}(V) \pi^{C_1^{(s)}}(x), \quad \forall z \in \Sigma_{C_1^{(s)}} \right\} \\ \cap \left\{ (n-1)h \operatorname{cap}(V) \pi^{C_2^{(s)}}(x) < G_{vt,t}^{C_2^{(s)}}(z), G_{vt,t}^{C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}}(z) \leq nh \operatorname{cap}(V) \pi^{C_2^{(s)}}(x), \quad \forall z \in \Sigma_{C_2^{(s)}} \right\},$$

e também os eventos

$$\mathbb{B}_1^{n,t,(s)} := \left\{ \eta_n^{t,C_1^{(s)}} \text{ não é pivotal positiva para } A_1 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_1^{(s)}} \right\} \quad (4.5.10)$$

$$\text{e } \mathbb{B}_2^{n,t,(s)} := \left\{ \eta_n^{t,C_2^{(s)}} \text{ não é pivotal positiva para } A_2 \text{ em } \tilde{\eta}^{n,t}, \text{ sobre } \Sigma_{C_2^{(s)}} \right\}, \quad (4.5.11)$$

analogamente à (4.5.6) e (4.5.7).

Com isso, da mesma forma como fizemos em (4.5.4), podemos afirmar que

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_1^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_2^{n,t,(s)} \\ & \subseteq \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1^{(s)}) = \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1^{(s)}) \right\} \cap \left\{ \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2^{(s)}) = \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2^{(s)}) \right\}. \end{aligned}$$

Mas como os eventos A_1 e A_2 são suportados respectivamente em C_1 e C_2 , e além disso $C_1 \subseteq C_1^{(s)}$ e $C_2 \subseteq C_2^{(s)}$ (por construção), então

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{A_\ell}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_\ell^{(s)}) = \mathbf{1}_{A_\ell}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_\ell) \\ \text{e } & \mathbf{1}_{A_\ell}(\mathcal{I}_\ell^{vt} \cap C_\ell^{(s)}) = \mathbf{1}_{A_\ell}(\mathcal{I}_\ell^{vt} \cap C_\ell), \end{aligned}$$

para $\ell = 1, 2$, de tal forma que

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_1^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_2^{n,t,(s)} \\ & \subseteq \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) = \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \right\} \cap \left\{ \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) = \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right\} \\ & \subseteq \left\{ \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}^{vt} \cap C_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\mathcal{I}_1^{vt} \cap C_1) \mathbf{1}_{A_2}(\mathcal{I}_2^{vt} \cap C_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Assim, utilizando a expressão (4.5.12), para estimar agora a covariância $\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)$ precisaremos então estimar as probabilidades dos eventos $\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}$, $\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}$ e $\mathbb{B}_2^{n,t,(s)}$.

Investigaremos inicialmente as probabilidades dos eventos expressos em (4.5.10) e em (4.5.11). Para isso, considerando $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$ fixos, e para $\ell = 1, 2$, denote por $N_{n,t}^{col,\ell}$ o número de colheiradas pivotais positivas para o evento A_ℓ na configuração $\tilde{\eta}^{n,t}$ (ou seja, no processo das colheiradas de níveis $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}_+$) em $\Sigma_{C_\ell^{(s)}}$, conforme a notação introduzida antes de (4.4.7). Adicionalmente, para constantes $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $u_1 < u_2$ e algum $\zeta > u_2$, defina os conjuntos $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}$ e $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$ exatamente como em (4.4.16), apenas substituindo o evento A respectivamente por A_1 e A_2 , de tal forma que

$$\lambda_+ \left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (\ell)} \right) > (u_2 - u_1) \left(1 - \frac{u_2}{\zeta} \right), \quad \ell = 1, 2.$$

Utilizando então a fórmula da probabilidade total, para qualquer k tal que $1 \leq k \leq n$, a probabilidade de que $\eta_n^{t,C_1^{(s)}}$ seja pivotal positiva para A_1 em $\tilde{\eta}^{n,t}$, ou seja, a probabilidade do complementar do evento $\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C\right) &= P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C \mid N_{n,t}^{col,1} \geq k\right) P\left(N_{n,t}^{col,1} \geq k\right) \\ &\quad + P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C \mid N_{n,t}^{col,1} < k\right) P\left(N_{n,t}^{col,1} < k\right) \\ &\leq P\left(N_{n,t}^{col,1} \geq k\right) + P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C \mid N_{n,t}^{col,1} < k\right). \end{aligned}$$

Mas de acordo com (4.4.18), sob a lei $\tilde{\mathbb{Q}}^{n,t}$,

$$P(N_{n,t}^{col,1} \geq k) \leq \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)}, \quad \text{para todo } t \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}, \text{ e qualquer } k \in [1, n].$$

Por outro lado, temos

$$P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C \mid N_{n,t}^{col,1} < k\right) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C \mid N_{n,t}^{col,1} = i\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \frac{i}{n} = \frac{\lfloor k \rfloor (\lfloor k \rfloor + 1)}{2n} \leq \frac{k(k+1)}{2n},$$

para qualquer $k \in [1, n]$, de tal maneira que

$$P\left(\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}\right)^C\right) \leq \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)} + \frac{k(k+1)}{2n},$$

para todo $t \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}$, e qualquer $k \in [1, n]$.

Empregando exatamente o mesmo raciocínio, fica claro que

$$P\left(\left(\mathbb{B}_2^{n,t,(s)}\right)^C\right) \leq \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)} + \frac{k(k+1)}{2n},$$

para todo $t \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$, e qualquer $k \in [1, n]$.

Observando então o fato que $\mathbb{B}_1^{n,t,(s)}$ e $\mathbb{B}_2^{n,t,(s)}$ são independentes (pois estes eventos estão definidos respectivamente em termos dos processos de Poisson restritos à $\Sigma_{C_1^{(s)}}$ e à $\Sigma_{C_2^{(s)}}$, os quais são independentes), podemos concluir que

$$P\left(\mathbb{B}_1^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_2^{n,t,(s)}\right) \geq \left(1 - \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)} - \frac{k(k+1)}{2n}\right)^2, \quad (4.5.13)$$

para qualquer $k \in [1, n]$ e todo $t \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$.

No que diz respeito ao tamanho (ou comprimento) da intersecção $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$, observe que, de acordo com (4.4.17),

$$\lambda_+\left(\left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}\right)^C \cup \left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}\right)^C\right) \leq \lambda_+\left(\left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}\right)^C\right) + \lambda_+\left(\left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}\right)^C\right) \leq \frac{(u_2 - u_1)u_2}{\zeta} + \frac{(u_2 - u_1)u_2}{\zeta},$$

de modo que

$$\lambda_+\left(\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}\right) \geq (u_2 - u_1) - 2\frac{(u_2 - u_1)u_2}{\zeta} = (u_2 - u_1)\left(1 - \frac{2u_2}{\zeta}\right). \quad (4.5.14)$$

Note que neste contexto a constante ζ que é utilizada na definição dos conjuntos $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)}$ e $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$ deverá ser escolhida de tal forma que $\zeta > 2u_2$, e quanto maior for o valor de ζ , mais ampla será a região $\tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$.

Para completar nossa investigação, resta então estimar agora a probabilidade do evento

$$\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)} = \left\{ (n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) < G_{vt,t}^C(z) \leq nh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x), \right. \\ \left. \forall z \in \Sigma_C, \quad C = C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)} \right\},$$

para $n \in \mathbb{N}$ e $h > 0$ fixos.

É justamente nesta etapa que precisaremos recorrer a alguns resultados relacionados à estimação de grandes desvios, estabelecidos em [14]. Serão particularmente úteis os lemas 6.2 e 6.3 daquele artigo, os quais permanecerão válidos para a escolha específica dos conjuntos $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ e V que adotamos no presente trabalho. Por uma questão de integralidade, enunciamos estes lemas a seguir, com as referidas adaptações.

Lema 4.5.1. (Lema 6.2 de [14], adaptado) Para o conjunto C sendo igual a $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ ou $C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$, e para o conjunto V conforme definido em (4.5.9), temos, para todo $x \in \partial C$,

- (i) $\gamma_{12}s^{-1} \operatorname{cap}(V)^{-1} \leq \pi^C(x) \leq \gamma_{13}s^{-1} \operatorname{cap}(V)^{-1}$;
- (ii) $E(F_1^C(x))^2 \leq \gamma_{14}s^{-d} \operatorname{cap}(V)^{-1}$.

Lema 4.5.2. (Lema 6.3 de [14], adaptado) Para o conjunto C sendo igual a $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$ ou $C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$, e para o conjunto V conforme definido em (4.5.9), temos, para todo $x \in \partial C$,

$$P(F_1^C(x) > u\gamma_7s^{-(d-1)}) \leq \gamma_{15}s^{d-2} \operatorname{cap}(V)^{-1} \exp\{-\gamma_{16}u\}, \quad \text{para qualquer } u \geq 2$$

(supondo sem perda de generalidade que $\gamma_{16} \leq 1$).

A constante γ_7 empregada neste último lema tem sua existência estabelecida pela proposição 6.1 de [14] e está relacionada à estimativas de probabilidades de primeira visita dos passeios aleatórios simples em \mathbb{Z}^d . Em particular, γ_7 será estritamente positiva e menor do que $\gamma_6/2$, onde γ_6 é a constante utilizada na definição do conjunto separador V em (4.5.9). As outras constantes γ_{12} , γ_{13} , γ_{14} , γ_{15} e γ_{16} , presentes nos resultados, também são estritamente positivas e dependem apenas da dimensão d .

Utilizando estes dois lemas e denotando por $\psi_C^x(\lambda)$ a função geradora de momentos de $F_1^C(x)$, ou seja,

$$\psi_C^x(\lambda) = E(e^{\lambda F_1^C(x)}), \quad \text{para } C = C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}, \quad x \in \partial C,$$

é possível mostrar, como é feito em [14], que

$$\psi_C^x(\lambda) - 1 \leq \lambda\pi^C(x) + c_8\lambda^2s^{-d} \operatorname{cap}(V)^{-1}, \quad (4.5.15)$$

para $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\gamma_7^{-1}\gamma_{16}s^{d-1}$, e também que

$$\psi_C^x(-\lambda) - 1 \leq -\lambda\pi^C(x) + c_9\lambda^2s^{-d} \operatorname{cap}(V)^{-1}, \quad (4.5.16)$$

para $\lambda \geq 0$, onde c_8 e c_9 são constantes positivas que também dependem apenas da dimensão d .

Para prosseguir, devemos ainda observar alguns outros resultados, que em seguida serão bastante úteis. Primeiramente, de forma bem geral, se $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função geradora de momentos denotada por ψ , e N é uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro igual a θ , independente desta sequência, então

$$E\left(\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^N Y_i\right\}\right) = \exp\{\theta(\psi(\lambda) - 1)\}. \quad (4.5.17)$$

De fato, pela fórmula da esperança total

$$E\left(\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^N Y_i\right\}\right) = E_N\left(E\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^N Y_i\right\} \mid N\right]\right),$$

e em particular

$$E\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^N Y_i\right\} \mid N = n\right] = E\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^n Y_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[\exp\{\lambda Y_i\}\right] = \psi(\lambda)^n.$$

Com isso, finalmente temos

$$E_N\left(\psi(\lambda)^N\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda)^n \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!} = \exp\{\theta(\psi(\lambda) - 1)\}.$$

Adicionalmente, observe também que se Y for uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com parâmetro igual a $t > 0$, então tY também será uma variável aleatória com distribuição exponencial, porém com parâmetro unitário. Isso nos permite afirmar portanto que, quase certamente,

$$tG_{vt,t}^C = G_{vt}^C, \quad \text{para } C = C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}, \quad (4.5.18)$$

onde G_{vt}^C é o *soft local time* acumulado original, como em (4.3.6).

Por fim, também será útil caracterizar a esperança de $G_{vt,t}^C$. No caso do *soft local time* original, Popov e Teixeira mostram em [14], seção 5, que

$$E\left(G_v^C(z)\right) = v \operatorname{cap}(V) \pi^C(X_0(z)), \quad \text{para qualquer } z \in \Sigma_C.$$

Por outro lado, com algumas pequenas adaptações na demonstração do teorema 4.6 deste mesmo trabalho, é possível mostrar que

$$E\left(G_{vt,t}^C(z)\right) = (vt) \operatorname{cap}(V) \frac{\pi^C(X_0(z))}{t} = v \operatorname{cap}(V) \pi^C(X_0(z)), \quad \text{para qualquer } z \in \Sigma_C. \quad (4.5.19)$$

Esta informação é particularmente interessante pois nos permite impor condições sobre o valor da amplitude h , como faremos adiante, de tal maneira que a estimação de grandes desvios que pretendemos realizar seja, de certa forma, mais eficaz.

Retomando a discussão original, e denotando por $\mathcal{C}^{(s)}$ o conjunto $\{C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}\}$, note que a probabilidade do evento $\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}$ pode ser escrita como

$$P\left(\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}^{(s)}} \bigcup_{x \in \partial C} \{G_{vt,t}^C \geq nh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\} \cup \{G_{vt,t}^C \leq (n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\}\right),$$

e é neste sentido que precisaremos majorar as probabilidades dos eventos

$$\left\{G_{vt,t}^C(z) \geq nh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right\} \quad \text{e} \quad \left\{G_{vt,t}^C(z) \leq (n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right\},$$

para $z \in \Sigma_C$ e $x = X_0(z) \in \partial C$.

Para desenvolver a estimação destas probabilidades de forma razoável utilizando a teoria de grandes desvios, será necessário impor condições para que o valor esperado de $G_{vt,t}^C$ respeite a relação

$$(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) < E\left(G_{vt,t}^C(z)\right) < nh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)$$

para todo $z \in \Sigma_C$. Mas de acordo com (4.5.19) isto significa precisamente que

$$(n-1)h < v < nh,$$

e para satisfazer esta última relação para todo $v > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ fixos, vamos assumir a partir de agora que $h = \frac{v}{n - \frac{1}{2}}$.

Utilizando então (4.5.18), (4.5.17), e o fato que as contribuições F_i^C (conforme definidas em (4.4.1)) são independentes e identicamente distribuídas, além da desigualdade de Markov, obtemos, para $z \in \Sigma_C$, $x = X_0(z) \in \partial C$, e $C = C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$,

$$\begin{aligned} P\left(G_{vt,t}^C \geq nh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) &= P\left(G_{vt}^C \geq tnh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) \\ &= P\left(\lambda \sum_{i=1}^{M_{vt,\ell}^V} F_i^C(x) \geq \lambda tnh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) \\ &\leq \frac{E\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{M_{vt,\ell}^V} F_i^C(x)\right\}\right]}{\exp\left\{\lambda tnh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right\}} \\ &= \exp\left\{-\lambda tnh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) + vt \operatorname{cap}(V)(\psi_C^x(\lambda) - 1)\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\lambda tnh \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) + vt \operatorname{cap}(V)\lambda \pi^C(x) + c_8 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\ &= \exp\left\{\operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\lambda t(v - nh) + c_8 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\ &\leq \exp\left\{c_{10} s^{-1} \lambda t\left(v - n \frac{v}{n - 1/2}\right) + c_8 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\ &= \exp\left\{c_{10}\left(1 - \frac{n}{n - 1/2}\right) vt \lambda s^{-1} + c_8 vt \lambda^2 s^{-d}\right\}, \end{aligned}$$

onde a segunda e a última desigualdades são respectivamente decorrentes da expressão (4.5.15) e do Lema 4.5.1(i). Observe que o índice ℓ em $M_{vt,\ell}^V$ será igual a 1 quando $C = C_1^{(s)}$ e igual a 2 quando $C = C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$.

Por outro lado, utilizando agora a expressão (4.5.16), de forma exatamente análoga podemos calcular

$$\begin{aligned}
P\left(G_{vt,t}^C \leq (n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) &= P\left(G_{vt}^C \leq t(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) \\
&= P\left(-\lambda \sum_{i=1}^{M_{vt,\ell}^V} F_i^C(x) \geq -\lambda t(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\right) \\
&\leq \frac{E\left[\exp\{-\lambda \sum_{i=1}^{M_{vt,\ell}^V} F_i^C(x)\}\right]}{\exp\{-\lambda t(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\}} \\
&= \exp\left\{\lambda t(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) + vt \operatorname{cap}(V)(\psi_C^x(-\lambda) - 1)\right\} \\
&\leq \exp\left\{\lambda t(n-1)h \operatorname{cap}(V)\pi^C(x) - vt \operatorname{cap}(V)\lambda \pi^C(x) \right. \\
&\quad \left. + c_9 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\
&= \exp\left\{\operatorname{cap}(V)\pi^C(x)\lambda t((n-1)h - v) + c_9 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\
&\leq \exp\left\{c_{10} s^{-1} \lambda t\left((n-1)\frac{v}{n-1/2} - v\right) + c_9 vt \lambda^2 s^{-d}\right\} \\
&= \exp\left\{c_{10}\left(1 - \frac{n}{n-1/2}\right) vt \lambda s^{-1} + c_9 vt \lambda^2 s^{-d}\right\},
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato que

$$\frac{n-1}{n-1/2} - 1 = 1 - \frac{n}{n-1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Relembrando que os conjuntos C_1 e C_2 (sobre os quais estão respectivamente suportados os eventos A_1 e A_2) possuem diâmetros iguais a r_1 e r_2 e estão afastados um do outro por uma distância igual a s , fica claro que a fronteira de $C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$ estará contida em uma bola centrada em algum ponto de $C_1 \cup C_2$ e de raio igual a $\alpha(r_1 + r_2 + s)$, para algum $\alpha > 1$, de tal forma que, para $C = C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_1^{(s)} \cup C_2^{(s)}$, a cardinalidade da fronteira ∂C será menor do que ou igual a uma constante vezes $(r_1 + r_2 + s)^d$.

Assim, desde que a constante λ satisfaça as condições que garantem a validade das expressões (4.5.15) e (4.5.16), utilizando o *union bound* podemos escrever

$$\begin{aligned}
P\left(\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}\right) &\geq 1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp\left\{-c_{10}\frac{1}{2n-1}vt\lambda s^{-1} + c_{12}vt\lambda^2 s^{-d}\right\} \\
&\geq 1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp\left\{-c_{10}\frac{1}{2n}vt\lambda s^{-1} + c_{12}vt\lambda^2 s^{-d}\right\},
\end{aligned}$$

onde a constante positiva c_{11} depende apenas da dimensão d , e $c_{12} := \max\{c_8, c_9\}$. Escolhendo então λ especificamente igual a $\alpha_n s^{d-1}$, com uma constante α_n pequena, dependendo de n (além da dimensão d), tal que

$$0 < \alpha_n < \left(\frac{\gamma_{16}}{2}\right) \wedge \left(\frac{c_{10}}{c_{12}}\frac{1}{2n}\right), \quad (4.5.20)$$

teremos de fato garantida a validade de (4.5.15) e (4.5.16), de modo que

$$P\left(\mathbb{A}_{vt}^{n,t,(s)}\right) \geq 1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp\left\{-\left(c_{10}\alpha_n \frac{1}{2n} - c_{12}\alpha_n^2\right) vts^{d-2}\right\},$$

onde

$$\left(c_{10}\alpha_n \frac{1}{2n} - c_{12}\alpha_n^2\right) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

justamente devido à definição de α_n .

Reunindo esta conclusão e o fato representado pelas expressões (4.5.13) e (4.5.14), e observando que são independentes os eventos $\mathbb{A}_v^{n,t,(s)}$ e $\mathbb{B}_1^{n,t,(s)} \cap \mathbb{B}_2^{n,t,(s)}$, podemos a partir das expressões (4.5.5) e (4.5.12) concluir que

$$\begin{aligned} |\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)| &\leq 1 - \left(1 - \frac{\zeta}{k(u_2 - u_1)} - \frac{k(k+1)}{2n}\right)^2 \\ &\quad \times \left(1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp\left\{-\left(c_{10}\alpha_n \frac{1}{2n} - c_{12}\alpha_n^2\right) vts^{d-2}\right\}\right), \end{aligned}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $k \in [1, n]$, todo $v \in \mathbb{R}_+$ e todo $t \in \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{u_1, u_2, n}^{\zeta, (2)}$, onde $0 < u_1 < u_2 < \infty$, $\zeta > 2u_2$, α_n satisfaz (4.5.20) e as constantes c_{10} , c_{11} e c_{12} são estritamente positivas e dependem apenas da dimensão d .

Escolhendo especificamente as constantes $u_1 = 1$ e $u_2 = 1 + \delta$, para um $\delta > 0$ pequeno, e além disso fazendo $k = \sqrt[3]{n}$, teremos então

$$\begin{aligned} |\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)| &\leq 1 - \left(1 - \frac{\zeta}{\delta \sqrt[3]{n}} - \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n} + 1)}{2n}\right)^2 \\ &\quad \times \left(1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp\left\{-\left(c_{10}\alpha_n \frac{1}{2n} - c_{12}\alpha_n^2\right) vts^{d-2}\right\}\right), \end{aligned}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, todo $v \in \mathbb{R}_+$ e todo $t \in \tilde{L}_\delta^\zeta := \tilde{L}_{1, 1+\delta, n}^{\zeta, (1)} \cap \tilde{L}_{1, 1+\delta, n}^{\zeta, (2)}$, onde $\zeta > 2(1 + \delta)$ e o conjunto $\tilde{L}_\delta^\zeta \subset (1, 1 + \delta)$ é tal que

$$\lambda_+(\tilde{L}_\delta^\zeta) \geq \delta \left(1 - \frac{2(1 + \delta)}{\zeta}\right), \quad (4.5.21)$$

de acordo com (4.5.14).

Agora observe que, para qualquer $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_\varepsilon$,

$$\frac{\zeta}{\delta \sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n} + 1)}{2n} \leq \varepsilon.$$

De outra forma, podemos escrever

$$n_\varepsilon := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\zeta}{\delta \sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n} + 1)}{2n} \leq \varepsilon \right\}.$$

Adicionalmente, definimos

$$N_\varepsilon := \max \left\{ n_\varepsilon, \left\lceil \frac{c_{10}}{c_{12}\gamma_{16}} \right\rceil \right\},$$

de tal maneira que

$$\left(\frac{\gamma_{16}}{2}\right) \wedge \left(\frac{c_{10}}{c_{12}} \frac{1}{2N_\varepsilon}\right) = \frac{c_{10}}{c_{12}} \frac{1}{2N_\varepsilon},$$

e portanto $\alpha_{N_\varepsilon} := \frac{c_{10}}{c_{12}} \frac{1}{2N_\varepsilon^2}$ satisfaz (4.5.20), com $n = N_\varepsilon$.

Levando isto em conta, e utilizando $n = N_\varepsilon$ nesta última cota que determinamos para a covariância, podemos finalmente estabelecer o teorema seguinte, que apresenta então uma outra caracterização da covariância entre os eventos crescentes no modelo de entrelaçamentos aleatórios, conforme havíamos nos proposto a investigar. Neste teorema, as constantes c_{10} , c_{11} , c_{12} , c_{13} e γ_{16} são estritamente positivas e dependem apenas da dimensão d .

Teorema 4.5.3. Sejam C_1 e C_2 dois subconjuntos finitos e disjuntos de \mathbb{Z}^d ($d \geq 3$), com diâmetros respectivamente iguais a r_1 e r_2 , e afastados um do outro por uma distância igual a s . Considere então A_1 e A_2 , eventos crescentes com respeito ao processo de entrelaçamentos aleatórios em \mathbb{Z}^d , respectivamente suportados em C_1 e C_2 . Fixando $\delta > 0$ e $\zeta > 2(1 + \delta)$, então para qualquer $\varepsilon \in (0, 1)$, definindo

$$n_\varepsilon := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\zeta}{\delta \sqrt[3]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n} + 1)}{2n} \leq \varepsilon \right\} \quad \text{e} \quad N_\varepsilon := \max \left\{ n_\varepsilon, \left\lceil \frac{c_{10}}{c_{12}\gamma_{16}} \right\rceil \right\},$$

teremos

$$|\text{Cov}_{vt}(A_1, A_2)| \leq 1 - (1 - \varepsilon)^2 \times \left(1 - c_{11}(r_1 + r_2 + s)^d \exp \left\{ -c_{13} \frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon^4} vts^{d-2} \right\} \right),$$

para todo $v \in \mathbb{R}_+$ e todo $t \in \tilde{L}_\delta^\zeta \subset (1, 1 + \delta)$, desde que a distância s seja tal que o segundo fator do produto nesta cota seja positivo, e onde

$$\lambda_+(\tilde{L}_\delta^\zeta) \geq \delta \left(1 - \frac{2(1 + \delta)}{\zeta} \right).$$

O fator elevado ao quadrado que aparece na cota estabelecida por este resultado pode ser visto, de certa maneira, como parte do custo na estimação que desenvolvemos quando tentamos contornar o uso do chamado termo de *sprinkling*, o qual foi introduzido em [22] e utilizado por exemplo na estimação construída em [14]. Observe ainda que a intenção de se diminuir o termo ε nesta estimação, sob o propósito de tornar esta cota mais precisa, provoca por outro lado uma penalização bastante significativa no termo exponencial, através do conseqüente aumento do termo N_ε .

Referências Bibliográficas

- [1] Ahlfors, Lars V.: *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 3ª edição, 1979.
- [2] Bollobas, Bela e Riordan, Oliver: *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Černý, Jiří e Teixeira, Augusto: *From Random Walk Trajectories to Random Interlacements*. Disponível em http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/extra/2011_XV_ebp/attach/a_teixeira_j_cerny_notas.pdf. Lecture Notes: XV Brazilian School of Probability, 2011.
- [4] Doyle, Peter G. e Snell, J. Laurie: *Random Walks and Electric Networks*. Disponível em arXiv:math/0001057v1, 2000.
- [5] Durrett, Richard: *Probability: Theory and examples*. Duxbury Advanced Series. Brooks/Cole – Thomson Learning, 3ª edição, 2005.
- [6] Dynkin, Evgenii B. e Yushkevich, Aleksandr A.: *Markov processes: theorems and problems*. Plenum Press, 1969.
- [7] Grimmett, Geoffrey: *Percolation*. Springer, 2ª edição, 1999.
- [8] Hoel, Paul G., Port, Sidney C. e Stone, Charles J.: *Introduction to stochastic processes*. The Houghton Mifflin Series in Statistics. Houghton Mifflin Company, 1972.
- [9] Lawler, Gregory F.: *Intersections of random walks*. Probability and Its Applications. Birkhäuser Boston, 1991.
- [10] Lawler, Gregory F. e Limic, Vlada: *Random walk: a modern introduction*. Cambridge University Press, 2010.
- [11] Li, Xinyi e Sznitman, Alain-Sol: *A lower bound for disconnection by random interlacements*. Disponível em arXiv:1310.2177v2.
- [12] Lima, Elon Lages: *Curso de Análise, Volume 1*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 12ª edição, 2009.
- [13] Lima, Elon Lages: *Análise Real, Volume 1: Funções de Uma Variável*. Coleção Matemática Universitária. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 10ª edição, 2010.

- [14] Popov, Serguei e Teixeira, Augusto: *Soft local times and decoupling of random interlacements*. To appear in J. Eur. Math. Soc., também disponível em arXiv:1212.1605.
- [15] Resnick, Sidney I.: *Extreme values, regular variation, and point processes*. Applied Probability. Springer–Verlag, 1987.
- [16] Resnick, Sidney I.: *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser Boston, 1992.
- [17] Resnick, Sidney I.: *A probability path*. Birkhäuser Boston, 1999.
- [18] Rudin, Walter: *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill International Editions – Mathematics Series. McGraw–Hill, 3ª edição, 1976.
- [19] Shiryaev, Albert N.: *Probability*, volume 95 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York Inc., 2ª edição, 1996.
- [20] Sidoravicius, Vladas e Sznitman, Alain-Sol: *Connectivity bounds for the vacant set of random interlacements*. Em *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, volume 46(4), páginas 976–990, 2010.
- [21] Spitzer, Frank: *Principles of random walk*. D. Van Nostrand Company Inc., 1964.
- [22] Sznitman, Alain-Sol: *Vacant set of random interlacements and percolation*. *Annals of Mathematics* (2), 171(3):2039–2087, 2010.