
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrep partições e partições planas

Autor: Mateus Alegri

Doutorado em Matemática Aplicada

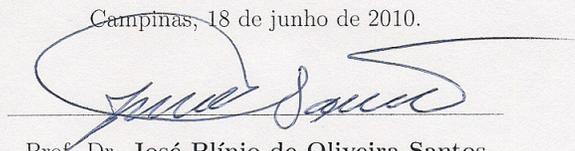
Orientador: **Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos**

Campinas, junho de 2010

Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrepartições e partições planas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Mateus Alegri** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de junho de 2010.



Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Ricardo Dahab (IC-UNICAMP)

Prof. Dr. Émerson do Monte Carmelo (UEM)

Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 5089

Alegri, Mateus

AL25i Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrepartições e partições planas/Mateus Alegri-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : José Plínio de Oliveira Santos

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Identidades combinatórias. 2. Partições (Matemática). 3. Séries hipergeométricas.. I. Santos, J. Plínio O. (José Plínio de Oliveira). II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Combinatorial interpretation for identities involving overpartitions and plane partitions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Combinatorial identities. 2. Partitions (Mathematics). 3. Hypergeometric series.

Área de concentração: Análise combinatória

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Dahab (IC-UNICAMP)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)
Prof. Dr. Emerson Luiz do Monte Carmelo (UEM)

Data da defesa: 18/06/2010

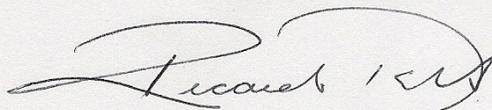
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 18 de junho de 2010 e aprovada

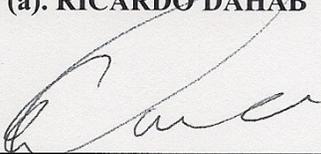
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



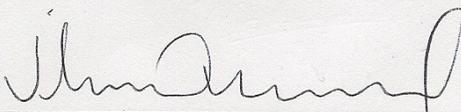
Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



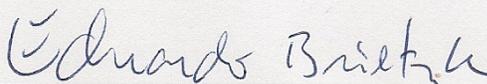
Prof. (a). Dr (a). RICARDO DAHAB



Prof. (a). Dr (a). EMERSON LUIZ DO MONTE CARMELO



Prof. (a). Dr (a). VILMAR TREVISAN



Prof. (a) Dr. (a) EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado o dom da vida.

Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Plínio, meu orientador, que muito me inspirou a trabalhar em combinatória; por seu exemplo, conduta e amor a Matemática. Aos meus Pais Valdomiro e Júlia, minha irmã Anapaula por terem me apoiado. A meu amigo pesquisador Raphael Vilamiu. A amigos que nem me lembro mais, e aqueles que nunca irei esquecer Fábio, Márcio , Vinícius Butterfly, Rogério Mesquita, Mayk. E aos meus novos, colegas de trabalho, do departamento de matemática, os professores da Universidade Federal do Sergipe, campus de Itabaiana, em especial ao casal Éder e Marta, Arlúcio, Halley Gomes, Alan Almeida, Joedson, Samuel, Vagner.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos novas provas bijetivas para identidades relacionadas a partições em partes pares e distintas, generalizações das identidades de Rogers-Ramanujan entre outras. Porém o objetivo principal será trabalhar com sobrepartições de inteiros, dando a estes uma nova interpretação em termos de matrizes de três linhas.

Exibiremos provas bijetivas para algumas classes de sobrepartições, apresentaremos um novo resultado que basicamente é identificar uma sobrepartição com partições planas; sendo este o principal resultado deste trabalho. No final apresentaremos algumas aplicações da representação de partição via matrizes de duas linhas: fórmulas fechadas para algumas classes destas partições.

Palavras chave: partições de inteiros; sobrepartições de inteiros; partições planas; séries hipergeométricas, identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Abstract

In this work, we present new bijective proofs for identities related to partitions into distinct even parts, generalizations of Rogers-Ramanujan identities, among others. The basic aim is to work with overpartitions of integers, give a new interpretation in terms of three-line matrices. We will show bijective proofs for some classes of overpartitions. We will present a new result that is how to identify an overpartition (with some particularities) with plane partitions; which is one of the most important results. At the end we will present some applications of the representation of a partition as a two-line array: closed formulae for some classes of these partitions.

Key words: integer partitions; overpartitions; plane partitions, hypergeometric series, Rogers-Ramanujan identities.

Sumário

1	Preliminares	2
1.1	Partições de um inteiro	2
1.2	Representação gráfica de uma partição: Gráfico de Ferrer e Diagrama de Young	3
1.3	Polinômios Gaussianos	4
1.4	Sobrep partições	8
1.5	Partições Planas	9
1.6	Representando partições como matrizes	10
2	Provas combinatórias para identidades envolvendo partições	13
2.1	Prova bijetiva envolvendo partições em partes pelo menos α	13
2.2	Prova bijetiva envolvendo partições em partes pares e distintas	18
2.3	Uma interpretação combinatória para a identidade de Jackson-Slater	22
2.4	Provas bijetivas para generalizações das identidades de Rogers-Ramanujan	25
2.4.1	Interpretação combinatória para a primeira identidade	26
2.4.2	Interpretação combinatória para a segunda identidade	29
3	Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrep partições	31
3.1	Sobrep partições irrestritas	32
3.2	Sobrep partições com partes $\equiv (l \bmod i)$	38
3.3	Sobrep partições em partes distintas	44
3.4	Sobrep partições em partes pares e distintas	47
3.5	Sobrep partições em partes pares	50
3.6	Sobrep partições irrestritas: outra interpretação	53
3.7	Identidade envolvendo a função Theta de Ramanujan.	55
4	A imersão do conjunto de sobrep partições no conjunto de partições planas	59
4.0.1	Identificando uma partição com uma matriz	59
4.1	Da matriz para o reticulado	60

4.2	Representações matriciais para sobrepartições	61
4.3	Construindo a partição plana a partir da sobrepartição	62
4.4	A imersão	66
5	Fórmulas fechadas para o número de partições de inteiros	76
5.1	O algoritmo	77
5.2	Algumas aplicações	82
	Referências	82

Introdução

Neste trabalho forneceremos provas bijetivas para identidades envolvendo partições e sobrepartições de inteiros. O principal resultado obtido é o de estabelecer uma relação entre sobrepartições e partições planas. No capítulo 1, faremos uma rápida abordagem sobre ferramentas que serão utilizadas neste trabalho.

No capítulo 2 vamos trabalhar de modo análogo à referência [29], exibindo provas bijetivas para partições em partes pares e distintas, partições em que a menor parte é pelo menos α entre outras. Destacamos a seção 2.4, que trata de generalizações das identidades de Rogers-Ramanujan, e destacamos também a seção 2.3 que fornece uma interpretação combinatória para a identidade de Jackson-Slater. A todas essas identidades associamos matrizes de duas linhas.

No capítulo 3, vamos tratar exclusivamente de sobrepartições, buscando interpretações combinatórias e provas bijetivas para algumas classes desta. A primeira seção deste capítulo faz a associação de sobrepartições irrestritas de um inteiro com matrizes de três linhas. Uma prova bijetiva é exibida, e, embora sua demonstração seja simples, ela inspirará outras que virão em seções seguintes deste capítulo.

No capítulo 4, vamos estabelecer uma imersão do conjunto de sobrepartições no conjunto de partições planas. Como uma partição, pode se representada como um diagrama de Young em duas dimensões, o natural, neste caso, é utilizar a representação tridimensional de uma partição plana, inspirada nesta construção e em caminhos no espaço vamos estabelecer um resultado, de forma simples ilustrando com alguns exemplos.

Finalmente, no último capítulo, exibiremos uma fórmula para o cálculo do número de partições para alguns tipos de restrições. Este método é desenvolvido baseado na representação matricial de uma partição. Mesmo sabendo que existe uma fórmula recursiva, usando números pentagonais, que é de simples implementação, demonstraremos uma análoga. Isto é feito tendo em vista a diversidade das restrições, de modo que teremos ferramentas extremamente simples para a obtenção de tais fórmulas. Em particular obtemos fórmulas para partições com restrições do tipo das encontradas na identidades de Rogers-Ramanujan.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo inicial vamos fazer uma breve exposição do conteúdo principal tratado neste trabalho: partições de inteiros, sobrepartições e partições planas, entre outros conceitos.

1.1 Partições de um inteiro

Definição 1.1.1 *Uma partição de um inteiro n é uma soma não ordenada de inteiros positivos tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = n$. Convencionamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$.*

Exemplo 1.1.1 *Para $n = 7$, temos as seguintes partições: 7, 6 + 1, 5 + 2, 5 + 1 + 1, 4 + 3, 4 + 2 + 1, 4 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 1, 3 + 2 + 2, 3 + 2 + 1 + 1, 3 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.*

A função geradora para o número de partições irrestritas, $p(n)$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_{\infty}} \quad (1.1)$$

Onde, $|q| < 1$, e

$$(a; q)_n = \begin{cases} (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{n-1}) & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$(a; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$$

Mencionamos abaixo duas outras expressões equivalentes para a função geradora de partições irrestritas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_n} \quad (1.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n^2} \quad (1.3)$$

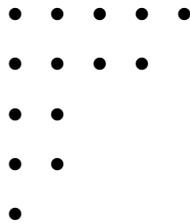
A primeira é creditada a Euler, que aparece na obra "Introductio in Analysis Infinitorum", no capítulo 16 intitulado: "De Partitio Numerorum" ([16]).

A segunda identidade pode ser provada usando "quadrados de Durfee", uma definição que daremos em breve.

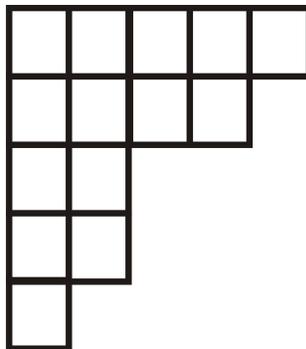
1.2 Representação gráfica de uma partição: Gráfico de Ferrers e Diagrama de Young

Definição 1.2.1 Um gráfico de Ferrers, e um diagrama de Young são maneiras de se representar graficamente uma partição: as partes da partição são exibidas como linhas de pontos ou quadrados, respectivamente.

Exemplo 1.2.1 A partição $5+4+2+2+1$ é representada como:



O diagrama de Young correspondente da partição é:



As representações gráficas de partições são ferramentas poderosas nas demonstrações de várias identidades como por exemplo:

$$p(n|\text{maior parte é } m) = p(n-m|\text{todas as partes são } \leq m).$$

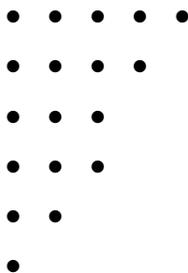
Para demonstrar este fato podemos fazer uma transformação no gráfico de Ferrers de uma partição, apenas removendo a primeira linha. Claramente esta transformação é invertível, o que caracteriza a bijeção.

Outra importante identidade é:

$$p(n|m \text{ partes}) = p(n|\text{maior parte é } m).$$

Podemos demonstrar essa identidade apenas usando a transformação conjugação de um gráfico de Ferrers, que é trocar as linhas por colunas nesta representação.

Exemplo 1.2.2 *A conjugada da partição $6 + 5 + 4 + 2 + 1$ é:*



Muitas outras identidades podem ser obtidas por argumentos semelhantes.

1.3 Polinômios Gaussianos

Nesta seção introduzimos os conhecidos polinômios de Gauss, os quais possuem várias interpretações combinatórias. Aqui apresentamos uma em termos de partições.

Dados $n, m \geq 0$, $n \geq m$, o número de m -combinações de n elementos, $\binom{n}{m}$, é definido como o número de subconjuntos de m elementos de um conjunto de n elementos. Podemos definir um q -análogo deste. Iremos motivar a definição do polinômio Gaussiano utilizando um argumento geométrico.

Sabemos que o número de caminhos no primeiro quadrante que sai da origem e vai para um determinado ponto, digamos, (n, m) , apenas percorrendo os sentidos positivos dos eixos x e y , é $\binom{n+m}{m}$.

É possível saber qual é a área abaixo da curva determinada por estes caminhos apenas introduzindo a variável q , sendo esta designada como incremento de área. Se denotarmos \mathbf{x} para o movimento seguindo o eixo horizontal e \mathbf{y} seguindo o movimento vertical, deste modo x não comuta com y . De fato $yx = qxy$, e também: $yq = qy$, $xq = qx$. A partir disto e usando argumentos combinatórios, pode-se expandir $(x + y)^{n+1} = (x + y)^n(x + y)$ de ambos os lados e chegar na fórmula:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-m})(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^m)} \quad (1.4)$$

Se, por exemplo, $n = m = 2$, teremos 6 caminhos. Mas se além do número, estivermos interessados na área abaixo da curva, obtemos a função geradora: $q^0 + q^1 + 2q^2 + q^3 + q^4$. No caso aq^k pode ser interpretado como se tivéssemos a caminhos com área igual a k .

Usando essa idéia podemos definir o polinômio Gaussiano como em (1.4), para $n \geq m$.

No caso especial acima têm-se:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

Pode-se provar que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n}{m}$$

De fato o polinômio Gaussiano é uma "q-generalização" do número de combinações. Em [5], capítulo 10, o leitor pode encontrar essas construções feitas em detalhes e mais resultados acerca de polinômios Gaussianos.

A simetria, peculiar no tocante ao número de combinações também vale no caso do polinômio Gaussiano:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}$$

Nas referências [5], demonstra-se o resultado:

$$\prod_{j=1}^n (1 + q^j) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

E a partir desta prova-se:

$$\sum_{m=0}^n q^{m^2} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Vamos utilizar os argumentos acima para provar a identidade (1.3). Para tal lançamos mão da seguinte definição:

Definição 1.3.1 *O quadrado de Durfee de uma partição é o maior quadrado existente no canto superior esquerdo de sua representação gráfica via gráfico de Ferrers.*

Exemplo 1.3.1 *A partição $4 + 4 + 3 + 2 + 1$, representada abaixo, possui um quadrado de Durfee de lado 3.*

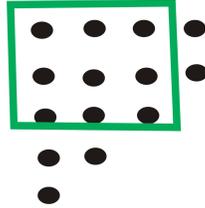


Figura 1.1: Quadrado de Durfee de $4 + 4 + 3 + 2 + 1$

Utilizando a representação do Gráfico de Ferrers citada na seção passada, obtemos funções geradoras para classes de partições pelo polinômio Gaussiano.

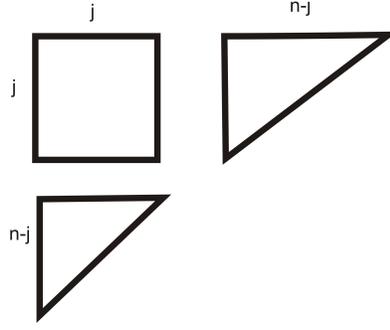
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n | \leq m \text{ partes, cada } \leq n - m) q^n.$$

Então, dada uma partição genérica ela sempre tem um quadrado de Durfee de lado, digamos, j .

E a função geradora para partições em no máximo n partes, cada parte menor do que ou igual a n , é:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

Então essa partição genérica tem a forma:



A contribuição do quadrado de Durfee é q^{j^2} .

A função geradora para a porção superior é

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

Para a porção inferior, esta é gerada por:

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$$

Pela simetria e fazendo j variar na soma, têm-se:

$$\sum_{j=0}^n q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Se tomarmos o limite, fazendo $n \rightarrow \infty$ temos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2 \dots (1-q^j)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}, \text{ o que prova (1.3).}$$

Esta demonstração pode ser encontrada em [1].

Neste trabalho, vamos fazer uso de funções geradoras ordinárias de duas variáveis. No caso de partições, essa função geradora será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p(n, m) q^n z^m = \frac{1}{(zq; q)_{\infty}} \quad (1.6)$$

Onde $p(n, m)$ é o número de partições de n em exatamente m partes. Nota-se que a variável z funciona como um contador do número de partes da partição.

Outra identidade muito útil, que generaliza (1.2), é o teorema q -binomial:

Teorema 1.3.1 (Teorema q -binomial)

Para $|x| < 1$, $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n x^n}{(q; q)_n} = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}}. \quad (1.7)$$

Uma demonstração analítica deste teorema pode ser vista em [5].

1.4 Sobrepartições

Definição 1.4.1 *Uma sobrepartição de um inteiro n é uma partição de n em que a primeira ocorrência de uma parte pode ser marcada.*

Exemplo 1.4.1 *Uma sobrepartição de $n = 53$ é*

$$8 + \bar{7} + 7 + 5 + 5 + \bar{4} + \bar{3} + 3 + 3 + 3 + 2 + \bar{1} + 1 + 1.$$

A função geradora para sobrepartições é:

$$\frac{(-q; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}$$

Esta pode ser associada à equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1; q)_n q^n}{(q; q)_n} = \frac{(-q; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}, \quad (1.8)$$

que pode ser provada via teorema q -binomial, colocando $a = -1$ e $x = q$. Ou também combinatoriamente, notando que o termo geral do somatório é:

$$\frac{(-1; q)_n q^n}{(q; q)_n} = \frac{(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^{n+1})2q^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} \quad (1.9)$$

Para cada n fixado, este termo geral gera sobrepartições em que a maior parte vale n , pois o fator 2 no numerador diz que temos uma parte e a sua cópia, que no caso, temos uma parte marcada e a mesma desmarcada; no denominador teremos partes não marcadas de 1 a n sem restrições.

Algumas identidades relacionadas a sobrepartições vão ser exploradas neste trabalho, onde estudaremos os seus aspectos combinatorias. Como por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^i)_n q^n}{(q^i, q^i)_n} = \frac{(-q; q^i)_{\infty}}{(q; q^i)_{\infty}}.$$

O lado direito desta identidade pode ser interpretada como a função geradora de sobrepartições de n em partes $\equiv 1 \pmod{i}$.

O lado direito da identidade abaixo é a função geradora para sobrepartições em partes distintas :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q; q)_n} \right)^2 = (-q; q)_{\infty}^2.$$

Observação 1.4.1 $(-q; q)_{\infty}^2$ gera sobrepartições em partes distintas, porém uma parte marcada poderá ser igual a uma desmarcada. Por exemplo háverá 3 e $\bar{3}$, e assim por diante.

1.5 Partições Planas

Definição 1.5.1 Uma partição plana de um inteiro n é um arranjo bi-dimensional de inteiros positivos, $\lambda = n_{1,1} + n_{1,2} \dots + n_{l,k}$, onde tem-se obrigatoriamente que:

$$n_{i,j} \geq n_{i,j+1}, n_{i,j} \geq n_{i+1,j}, \text{ e } \sum_{i,j} n_{i,j} = n.$$

Podemos representar partições planas em três dimensões, com o chamado diagrama tri-dimensional de Young. Abaixo temos um exemplo:

Exemplo 1.5.1 A representação tridimensional da partição plana de 19:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

As treze partições planas de 4 são:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 4, & 3 & 1, & 3, & 2 & 2, & 2, & 2 & 1 & 1, & 2 & 1, & 2, \\ & & & 1 & & 2 & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1, & 1 & 1 & 1, & 1 & 1, & 1 & 1, & 1 \\ & & & & 1 & & & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

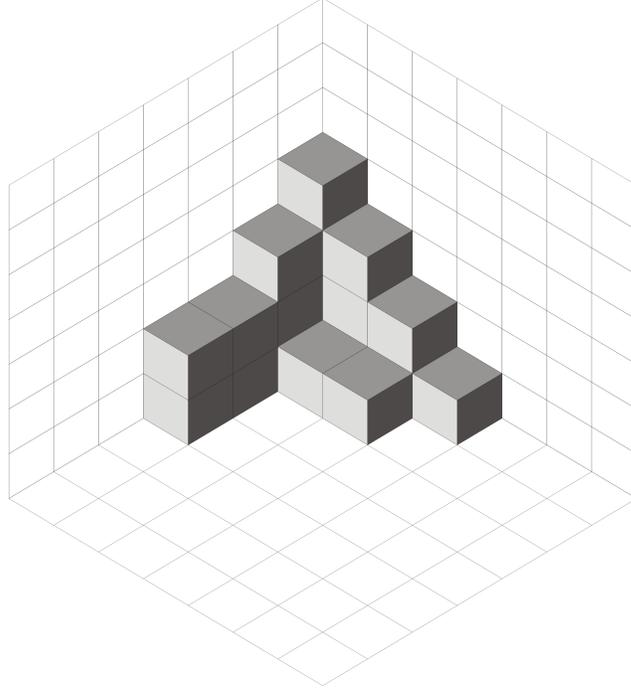


Figura 1.2: Representação gráfica de uma partição plana de 19.

A função geradora para partições planas, que foi primeiramente conjecturada por P. A. MacMahon(1916), é:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q; q^n)^n}. \quad (1.10)$$

Uma demonstração pode ser encontrada na referência [15].

1.6 Representando partições como matrizes

Nesta seção vamos apresentar alguns métodos tratados por Santos, et al, presentes em [29]. O objetivo é encontrar interpretações combinatórias para conjuntos de partições utilizando matrizes de duas linhas. Faremos uso desta idéia no presente trabalho, dando ênfase ao conjunto de sobrepartições, o qual o caracterizaremos como matrizes de 3 linhas com certas restrições.

Considerando o conjunto $A_{k,j} = \{c_t \mathbf{k} + d_t \mathbf{j} | c_t, d_t \geq 0\}$, em [29], Santos et al, provaram os seguintes resultados:

Teorema 1.6.1 *Seja $f(n)$, o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 0$ para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kn}}{(q^j; q^k)_n}. \quad (1.11)$$

Teorema 1.6.2 *O número de partições irrestritas de um dado inteiro positivo n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$A_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 0$, e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$.

Observando as restrições é fácil encontrar c_t em função de d_t , de modo que a matriz A_p pode ser escrita como:

$$A_p = \begin{pmatrix} d_2 + d_3 \dots + d_s & d_3 + d_4 \dots + d_s & \dots & 0 + d_s & 0 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

Notemos que para uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k$, temos obrigatoriamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ d_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \vdots \\ d_{k-1} = \lambda_{k-1} - \lambda_k \\ d_k = \lambda_k \end{array} \right.$$

De modo que se tomarmos uma partição com k partes, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k$, e tomando os d 's como descrito acima, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 + d_3 \dots + d_k = \lambda_1 \\ d_2 + d_3 \dots + d_k = \lambda_2 \\ \vdots \\ d_{k-1} = \lambda_{k-1} \\ d_k = \lambda_k \end{array} \right.$$

De modo que fica fácil compreender que, dada uma certa partição λ , esta é unicamente determinada por d_t .

Por exemplo, a partição $91 + 90 + 79 + 40 + 13 + 2$ é associada à matriz:

$$\begin{pmatrix} 90 & 79 & 40 & 13 & 2 & 0 \\ 1 & 11 & 39 & 27 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Provas combinatórias para identidades envolvendo partições

Introdução

Neste capítulo trabalharemos com interpretações combinatórias para algumas identidades que podem ser relacionadas a partições de inteiros. Vamos proceder de forma análoga ao que feito em [29], buscando interpretações combinatórias para identidades em termos de matrizes de duas linhas. Interpretaremos combinatoriamente indentidades como certas classes de partições como por exemplo: as partes sendo pelo menos α , em partes pares e distintas, entre outras.

Na seção 2.3 daremos uma interpretação combinatória para a conhecida identidade de Jackson-Slater, e a seção 2.4 irá fornecer interpretações para generalizações das duas identidades de Rogers-Ramanujan. A forma com que foi concebida esta generalização é absolutamente trivial, porém, a interpretação, que é feita de forma cuidadosa, é muito interessante.

2.1 Prova bijetiva envolvendo partições em partes pelo menos α

Nesta seção trabalharemos com identidades envolvendo partições em que a menor parte é pelo menos α . Esta interpretação generaliza a que foi feita em [29] para partições irrestritas, bastando tomar $\alpha = 1$ para tal.

Utilizando a fórmula fechada para o cálculo do número de partições irrestritas

dada no quinto capítulo, podemos encontrar uma fórmula para o número de partições em que a menor parte é pelo menos α .

Consideremos a equação abaixo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\alpha n}}{(q, q)_n} = \frac{1}{(q^\alpha; q)_\infty}. \quad (2.1)$$

Este é um caso particular dado pelo teorema q-binomial(1.7), fazendo $a = 0$, e $b = q^\alpha$.

Certamente (2.1) é a função geradora para partições de n em que cada parte é maior do que ou igual a α .

Introduzimos os parâmetros j e k no lado esquerdo da identidade (2.1), a fim de obter uma interpretação combinatória nos padrões de matrizes de duas linhas.

Teorema 2.1.1 *Seja $f_1(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = \alpha$ e para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kan}}{(q^j; q^k)_n} \quad (2.2)$$

Demonstração:

Denotamos por $f_1(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f_1(n)$ e tendo exatamente m partes.

A simples relação abaixo é satisfeita por $f_1(m, n)$:

$$f_1(m, n) = f_1(m, n - km + k - j) + f_1(m - 1, n - \alpha k) \quad (2.3)$$

A fim de provar (2.3), consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

- A. Aquelas em que $d_s > 0$.
- B. Aquelas em que αk é parte.

Para aquelas no conjunto **A**, subtraímos j da menor parte e k das outras, assim teremos partições de $n - k(m - 1) - j$ em m partes, que são enumeradas por $f_1(m, n - km + k - j)$.

E para aquelas partições do conjunto **B**, removemos a parte αk e teremos partições de $n - \alpha k$ em $m - 1$ partes.

Definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m, n) z^m q^n$$

Por (2.3) temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m, n - km + k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m - 1, n - \alpha k) z^m q^n \\ &= q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m, n - km + k - j) (zq^k)^m q^{n-km+k-j} \\ &\quad + zq^{\alpha k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m - 1, n - \alpha k) (z)^{m-1} q^{n-\alpha k}. \end{aligned}$$

Considerando $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(m, n) q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, deste

modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^k)^n + zq^{\alpha k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n.$$

Temos a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{j-k} F(zq^k, q) + zq^{\alpha k} F(z, q); \quad (2.4)$$

e comparando os coeficientes de z^n temos:

$h(n, q) = q^{j-k+kn} h(n, q) + q^{\alpha k} h(n - 1, q)$, podemos colocar esta equação na seguinte forma:

$$h(n, q) = \frac{q^{\alpha k} h(n - 1, q)}{(1 - q^{j-k+kn})}.$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, teremos:

$$h(n, q) = \frac{q^{\alpha nk}}{(q^j, q^k)_n}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\alpha nk} z^n}{(q^j; q^k)_n}.$$

Tomando $z = 1$, temos o resultado:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\alpha k}}{(q^j; q^k)_n}; \text{ o que demonstra o teorema.}$$

Escrevendo o teorema na notação matricial têm-se:

Teorema 2.1.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \end{pmatrix}$$

com $c_s = \alpha$, e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\alpha k}}{(q^j; q^k)_n}$$

Para $j = k = 1$, temos o corolário:

Corolário 2.1.1 *O número de partições de n em que as partes são pelo menos α é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = \alpha$, e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$

Demonstração:

Para estabelecer uma bijeção entre uma dada partição e uma matriz do tipo acima, consideremos:

Seja $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ uma partição de n em que as partes são maiores ou iguais a α .

Notemos que para a dada restrição a matriz que representa a partição será:

$$\begin{pmatrix} d_2 + d_3 \dots + d_s + \alpha & d_3 + d_4 \dots + d_s + \alpha & d_4 \dots + d_s + \alpha & \dots & \alpha \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ d_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \vdots \\ d_{s-1} = \lambda_{s-1} - \lambda_s \\ d_s = \lambda_s - \alpha \end{array} \right.$$

Assim para cada partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, ela fica completamente determinada pelos $d's$, o que caracteriza a bijeção.

Daremos a seguir alguns exemplos de partições deste tipo e suas respectivas representações matriciais.

Exemplo 2.1.1 *Seja $\lambda = 43 + 12 + 8 + 6 + 4 + 4 + 3$, a sua representação seguindo os teoremas acima, será*

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 6 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 31 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.1.2 *Para $n = 10$ e $\alpha = 2$, temos:*

10	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$	$4 + 4 + 2$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$8 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$	$4 + 3 + 2$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$7 + 3$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$4 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$6 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$3 + 3 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$5 + 3 + 2$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 Prova bijetiva envolvendo partições em partes pares e distintas

Nesta seção trabalharemos com uma identidade que envolve partições em partes pares e distintas. Uma interpretação para partições em partes pares e outra para partições em partes distintas foi dada em [29]. A maneira que procedemos nesta seção não foi a de compilar as duas nesta apresentada, mas utilizando a função geradora explicitada abaixo encontramos uma nova interpretação com matrizes de duas linhas. A bijeção encontrada a partir desta interpretação, como era de se esperar, mistura elementos das duas interpretações fornecidas em [29].

A segunda identidade a ser analisada neste capítulo é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q^2; q^2)_n} = (-q^2; q^2)_{\infty} \quad (2.5)$$

Claramente, o lado direito desta identidade é a função geradora para partições em partes pares e distintas.

Teorema 2.2.1 *Seja $f_2(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 2$, para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = 2 + d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{k(n^2+n)}}{(q^{2j}; q^{2k})_n} \quad (2.6)$$

Demonstração:

Denotamos por $f_2(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f_2(n)$ e tendo exatamente m partes.

A relação abaixo é satisfeita por $f_2(m, n)$:

$$f_2(m, n) = f_2(m, n - 2km + 2k - 2j) + f_2(m - 1, n - 2k) \quad (2.7)$$

Para provar (2.7), consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

- A. Aquelas em que $d_s > 0$.
- B. Aquelas em que $2k$ é parte.

Para partições no conjunto \mathbf{A} , subtraímos $2j$ da menor parte e $2k$ das outras, assim teremos partições de $n - 2k(m - 1) - 2j$ em m partes, que são enumeradas por $f_2(m, n - 2km + 2k - 2j)$.

Por conseguinte, para partições do conjunto \mathbf{B} , removemos a parte $2k$ e teremos partições de $n - 2k$ em $m - 1$ partes; o que demonstra (2.7).

Definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m, n) z^m q^n$$

Por (2.7) temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m, n - 2km + 2k - 2j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m - 1, n - 2k) z^m q^n \\ &= q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m, n - 2km + 2k - 2j) (zq^k)^m q^{n-2km+2k-2j} \\ &\quad + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m - 1, n - 2k) (z)^{m-1} q^{n-2k}. \end{aligned}$$

Considerando $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(m, n) q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, deste modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = q^{2j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2k})^n + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n.$$

Temos a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{2j-2k} F(zq^{2k}, q) + zq^{2k} F(zq^{2k}, q) \quad (2.8)$$

Comparando os coeficientes de z^n temos:

$h(n, q) = q^{2j-2k+2kn} h(n, q) + q^{2k} h(n - 1, q)$, podemos colocar esta equação na seguinte forma:

$$h(n, q) = \frac{q^{2k} h(n - 1, q)}{(1 - q^{2j-2k+2kn})}.$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, teremos:

$$h(n, q) = \frac{q^{(2n+1)k}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)k} z^n}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

Fazendo $z = 1$, temos o resultado:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)k}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}.$$

Analogamente, agora de posse da equação funcional (2.8), poderemos encontrar o número $f_2(n)$ utilizando matrizes de duas linhas. Reescrevendo o teorema acima na forma matricial, teremos:

Teorema 2.2.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2$, e $c_t = 2 + d_{t+1}$ é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)k}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}$$

Para um caso particular, $j = k = 1$, temos:

Corolário 2.2.1 *O número de partições de n em que as partes são pares e distintas é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2$, $c_t = 2 + d_{t+1}$, e d_t é par, $t \in \{1, s\}$.

Demonstração:

Para estabelecer uma bijeção entre uma dada partição em partes pares e distintas e uma matriz do tipo acima, consideremos

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$ uma partição de n do tipo descrito acima.

Notemos que para a dada restrição a matriz que representa a partição será:

$$\begin{pmatrix} 2 + 2d_2 & 2 + 2d_3 & \dots & 2 + 2d_s & 2 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

Assim

$$\begin{cases} d_{s-3} = \lambda_{s-3} - 2\lambda_{s-2} + 4\lambda_{s-1} - 4\lambda_s + 2 \\ d_{s-2} = \lambda_{s-2} - 2\lambda_{s-1} + 2\lambda_s - 2 \\ d_{s-1} = \lambda_{s-1} - \lambda_s \\ d_s = \lambda_s - 2 \end{cases}$$

E por recursão podemos encontrar d_1, d_2, \dots, d_s todos em função dos $\lambda's$. Assim para cada partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, esta fica completamente determinada pelos $d's$.

A partir desta representação matricial, dada uma partição podemos encontrar a sua matriz correspondente e vice-versa.

Daremos a seguir alguns exemplos de partições em partes pares e distintas e suas respectivas representações matriciais.

Exemplo 2.2.1 Para $\lambda = 42 + 40 + 36 + 32 + 28 + 26 + 20 + 12 + 10 + 4 + 2$, temos a representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 20 & 22 & 16 & 18 & 12 & 16 & 6 & 8 & 4 & 2 & 2 \\ 22 & 18 & 20 & 14 & 16 & 10 & 14 & 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.2 Para $n = 20$, temos:

20	$\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$	14 + 6	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$
18 + 2	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$	12 + 8	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
16 + 4	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$	10 + 8 + 2	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
14 + 4 + 2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	10 + 6 + 4	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
12 + 6 + 2	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	10 + 8 + 2	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
10 + 6 + 4	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	8 + 6 + 4 + 2	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2.3 Uma interpretação combinatória para a identidade de Jackson-Slater

Nesta seção trabalharemos com a conhecida identidade de **Jackson-Slater**. Esta pode ser interpretada combinatoriamente em termos de partições. Nosso objetivo será o de encontrar novas interpretações combinatórias para esta identidade utilizando matrizes de duas linhas. Segue a identidade abaixo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q, q)_{2n}} = \frac{(q, q^7, q^8; q^8)_{\infty} (q^6, q^{10}; q^8)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \quad (2.9)$$

Esta sendo publicada primeiramente por Jackson em 1928 na página 170 de [17]. Esta identidade é mais conhecida como a equação 39 de Slater([32]).

O coeficiente de q^n da equação acima pode ser interpretado como o número de partições de n em partes congruentes a **2,3,4,5,11,12,13,14**;módulo **16**.

O teorema abaixo fornecerá uma interpretação combinatória para a identidade (2.9):

Teorema 2.3.1 *Seja $f_3(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $2 \leq c_s \leq 2 + d_s$, para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t \geq 4 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_3(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^j; q^k)_{2n}} \quad (2.10)$$

Demonstração:

Denotamos por $f_3(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f_3(n)$ e tendo exatamente m partes.

A relação abaixo é satisfeita por $f_3(m, n)$:

$$\begin{aligned} f_3(m, n) &= f_3(m, n - 2km - j + 2k) + f_3(m, n - 2km - j + k) \\ &\quad - f_3(m, n - 4km - 2j + 3k) + f_3(m - 1, n - 4km - 2k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para provar esta relação vamos dispor destes três conjuntos disjuntos:

A. Partições em que $d_s \neq 0$ e $c_s = 2$.

B. Partições em que $c_s \geq 2 + d_s$ e $d_s > 0$.

C. Partições em que $(2k)$ é parte.

Para aquelas no conjunto **A**, subtraímos j da menor parte e $2k$ das outras, assim teremos partições de $n - 2k(m - 1) - j$ em m partes, que são contadas por $f_3(m, n - km + k - j)$.

Para aquelas partições do conjunto **B** subtraímos $j + k$ da menor parte e $2k$ das restantes, ficando partições de $n - j + k - 2k(m - 1)$ em m partes que são contadas por $f_3(m, n - 2km - j + k)$. Notemos que para estas partições temos que retirar as partições de $n - j + k - 2k(m - 1)$ nas quais é possível subtrair j da menor parte e por conseguinte $4k$ de todas as partes, logo as partições do tipo **B** são enumeradas por: $f_3(m, n - 2km - j + k) - f_3(m, n - 4km - 2j + 3k)$

Finalmente para as partições do conjunto **C**, subtraímos a parte $2k$ e $4k$ das outras ficando com partições de $n + 2k - 4km$ em $m - 1$ partes, que são enumeradas por: $f_3(m - 1, n - 4km - 2k)$

Tendo provado a relação acima, podemos definir:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n) z^m q^n$$

Por (2.11) temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n - 2km - j + 2k) z^m q^n + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n - 2km - j + k) z^m q^n \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n - 4km - 2j + 3k) z^m q^n \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m - 1, n - 4km - 2k) z^m q^n \\ &= q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n - 2km - j + 2k) (zq^{2k})^m q^{n-2km+2k-j} \\ &+ q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n - 2km - j + k) (zq^{2k})^m q^{n-2km+k-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m, n-2km-j+k)(zq^{2k})^m q^{n-2km+k-j} \\
& +zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_3(m-1, n-4km-2k)(z)^{m-1} q^{n-4km-2k}.
\end{aligned}$$

Considerando $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_3(m, n)q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n$,

deste modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n & = q^{j-2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{2k})^n + q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{2k})^n + \\
& -q^{2j-3k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{4k})^n + zq^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^{4k})^n.
\end{aligned}$$

Assim , têm-se a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{j-2k}F(zq^{2k}, q) + q^{j-k}F(zq^{2k}, q) - q^{2j-3k}F(zq^{4k}, q) + zq^{2k}F(zq^{4k}, q). \quad (2.12)$$

Comparando os coeficientes de z^n temos:

$$\begin{aligned}
h(n, q) & = q^{j+2k(n-1)}h(n, q) + q^{j+k(2n-1)}h(n, q) - q^{2j+k(4n-3)}h(n, q) \\
& +q^{4kn-2k}h(n-1, q).
\end{aligned}$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, temos:

$$h(n, q) = \frac{q^{2kn^2}}{(q^j, q^k)_{2n}}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2} z^n}{(q^j; q^k)_{2n}}.$$

Fazendo $z = 1$, temos o resultado:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_3(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^j; q^k)_{2n}}.$$

Observação 2.3.1 *Pode-se encontrar uma regra de vizinhança análoga a enunciada no teorema acima. Esta regra pode ser descrita como: para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas,*

$$c_t \geq 2 + \# \times 4 + \sum_{k=0}^{s-t} d_{t+k},$$

onde $\#$ é o número de partes.

Enunciando o teorema anterior na sua forma matricial, temos:

Teorema 2.3.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \end{pmatrix}$$

com $2 + d_s \geq c_s \geq 2$, e $c_t \geq 4 + 2d_{t+1} + c_{t+1}$ é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_3(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2kn^2}}{(q^j; q^k)_{2n}}.$$

2.4 Provas bijetivas para generalizações das identidades de Rogers-Ramanujan

Em [29], foi fornecida uma nova interpretação combinatória para as identidades de Rogers-Ramanujan. Nosso objetivo é generalizar essa interpretação.

As identidades de Rogers-Ramanujan generalizadas são:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{in^2}}{(q^i, q^i)_n} = \frac{1}{(q^i; q^{5i})_{\infty} (q^{4i}; q^{5i})_{\infty}}. \quad (2.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{i(n^2+n)}}{(q^i, q^i)_n} = \frac{1}{(q^{2i}; q^{5i})_{\infty} (q^{3i}; q^{5i})_{\infty}}. \quad (2.14)$$

Onde o lado direito da primeira é a função geradora para partições com partes congruentes a i e $4i$ módulo $5i$.

O lado direito da segunda é a função geradora para partições com partes congruentes a $2i$ e $3i$ módulo $5i$.

Uma aplicação muito interessante é que podemos fazer uso desta interpretação a fim de encontrar fórmulas fechadas para o cálculo do número de partições com as restrições de que as partes são congruentes a $2i$ e $3i$ módulo $5i$ ou partes congruentes a i e $4i$ módulo $5i$. Isto será objeto de estudo do quinto capítulo, que é devotado a encontrar fórmulas fechadas para classes de partições.

2.4.1 Interpretação combinatória para a primeira identidade

Para o caso de $i = 1$ essas identidades recaem nos casos clássicos da primeira e segunda identidades de Rogers-Ramanujan.

O teorema seguinte nos fornece uma interpretação combinatorial para a generalização da primeira identidade de Rogers-Ramanujan. Tal interpretação é importante pois ela nos dá regras de vizinhança para partições em que as partes são congruas a i e a $4i$ módulo 5.

Teorema 2.4.1 *Seja $f_4(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = i$, para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_4(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kin^2}}{(q^{ij}; q^{ik})_n} \tag{2.15}$$

Demonstração:

Denotamos por $f_4(m, n)$ o número de partições enumeradas por $f_4(n)$ e tendo exatamente m partes.

A relação abaixo é satisfeita por $f_4(m, n)$:

$$f_4(m, n) = f_4(m, n - kim + ki - ji) + f_4(m - 1, n - 2kim + ki). \tag{2.16}$$

A fim de provar (2.16), consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

- A. Aquelas em que $d_s > 0$.
- B. Aquelas em que ki é parte.

Para as partições no conjunto **A**, subtraímos ji da menor parte e ki das outras, assim teremos partições de $n - ki(m - 1) - ji$ em m partes, que são enumeradas por $f_4(m, n - kim + ki - ji)$.

Para aquelas partições do conjunto **B**, removemos a parte ki e subtraímos $2ki$ das outras, assim teremos partições de $n - 2kim + ki$ em $m - 1$ partes, que são enumeradas por $f_4(m - 1, n - 2kim + ki)$

Definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m, n) z^m q^n$$

Por (2.16) temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m, n - kim + ki - ji) z^m q^n + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m - 1, n - 2kim + ki) z^m q^n = \\ &q^{ji-ki} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m, n - kim + ki - ji) (zq^{ki})^m q^{n-kim+ki-ji} + \\ &zq^{ki} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m - 1, n - 2kim + ki) (zq^{2ki})^m q^{n-2kim+ki} \end{aligned}$$

Considerando $h(n, q) = \sum_{m=0}^{\infty} f_4(m, n) q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$, de modo que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = q^{ji-ki} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{ki})^n + zq^{ki} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{2ki})^n.$$

Temos a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{ji-ki} F(zq^{ki}, q) + zq^{ki} F(zq^{2ki}, q). \quad (2.17)$$

Comparando os coeficientes de z^n temos:

$$h(n, q) = q^{j^i - ki + kin} h(n, q) + q^{ki} h(n-1, q)$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, teremos:

$$h(n, q) = \frac{q^{kin^2}}{(q^{ij}, q^{ik})_n}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kin^2} z^n}{(q^{ij}, q^{ik})_n}.$$

Fazendo $z = 1$, temos o resultado:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_4(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kin^2}}{(q^{ij}, q^{ik})_n}.$$

Podemos reescrever o teorema acima na notação matricial:

Teorema 2.4.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \end{pmatrix}$$

com $c_s = i$, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $d_t = il_t$, é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_4(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{kin^2}}{(q^{ij}, q^{ik})_n}$$

Para $j = k = 1$, temos o corolário:

Corolário 2.4.1 *O número de partições de n em que as partes são congruentes a i e $4i$ módulo $5i$ é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\Omega = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = i$, $d_t = il$, onde l é um inteiro não negativo, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$.

Daremos a seguir alguns exemplos de partições deste tipo e suas respectivas representações matriciais.

Exemplo 2.4.1 Para $1 = 2$, temos a equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q^2, q^2)_n} = \frac{1}{(q^2; q^{10})_{\infty} (q^8; q^{10})_{\infty}};$$

O coeficiente de q^n nesta identidade pode ser interpretado como o número de partições de n em partes congruentes a 2 e a 8 módulo 10.

Para $n = 20$ temos:

$18 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$
$12 + 8$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$
$12 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
$8 + 8 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
$8 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.4.2 Interpretação combinatória para a segunda identidade

Agora interpretaremos combinatorialmente a generalização da segunda identidade de Rogers-Ramanujan:

Teorema 2.4.3 Seja $f_5(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j}$ da forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, com $\lambda_t = c_t k + d_t j$, $c_s = 2i$, para λ_t e λ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$ então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_5(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{ki(n^2+n)}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}. \quad (2.18)$$

A demonstração do teorema acima é análoga ao teorema 2.4.1 e a omitiremos. Novamente reescrevendo na forma matricial o teorema anterior, temos:

Teorema 2.4.4 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2i$, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$, é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_5(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{ki(n^2+n)}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}$$

Para $j = k = 1$, temos o corolário:

Corolário 2.4.2 *O número de partições de n em que as partes são congruentes a $2i$ e $3i$ módulo $5i$ é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\Omega = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2i$, $c_t = 2i + c_{t+1} + d_{t+1}$.

Por fim daremos alguns exemplos de partições deste tipo e suas respectivas representações matriciais.

Exemplo 2.4.2 *Para $i = 2$, tem-se a equação:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2(n^2+n)}}{(q^2, q^2)_n} = \frac{1}{(q^4; q^{10})_{\infty} (q^6; q^{10})_{\infty}};$$

onde as partes em que as partes são congruentes a 4 e 6 módulo 10.

Abaixo temos a tabela para $n = 20$ e $i = 2$:

16 + 4	$\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$
14 + 6	$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
6 + 6 + 4 + 4	$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4 + 4 + 4 + 4	$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Capítulo 3

Interpretações combinatórias para identidades envolvendo sobrepartições

Introdução

Neste capítulo vamos trabalhar com sobrepartições. Algumas identidades serão exploradas a fim de encontrar, de forma análoga ao capítulo anterior, interpretações combinatórias para tais. Cada identidade é associada a uma classe de sobrepartições de inteiros. Nosso objetivo é encontrar interpretações para cada classe dessas sobrepartições como matrizes de 3 linhas.

Este capítulo será dividido em seções em que cada trata de uma identidade específica. A primeira seção, e também a mais importante nos fornece uma interpretação combinatória para uma identidade que é relacionada a sobrepartições irrestritas.

A partir desta, no capítulo seguinte encontraremos um forma de imergir o conjunto de sobrepartições no conjunto de partições planas. Os resultados aqui encontrados são os que garantem esta imersão, sendo que esta é obtida olhando para uma representação gráfica, tri-dimensional, da representação matricial da dada sobrepartição. Desta forma podemos "ver" uma sobrepartição como uma partição plana; sendo este o principal resultado deste trabalho.

Nas outras seções, outras identidades serão exploradas e novas interpretações serão fornecidas. Dentre estas estão envolvidas sobrepartições em partes pares, partes pares e distintas, dentre outras. Muitas identidades e inspirações deste capítulo foram obtidas dos trabalhos de Lovejoy, J. ([18], [19], [20], [21], [22] e [23]).

3.1 Sobrepartições irrestritas

Nesta seção devotada a sobrepartições irrestritas, buscaremos interpretações combinatórias em termos de matrizes de três linhas.

A identidade utilizada aqui pode ser obtida como um caso particular do teorema q -binomial. Esta seção é de vital importância para o restante do trabalho, pois para muitas classes de sobrepartições, a interpretação encontrada aqui se revela muito útil e uma fácil ferramenta para se obter outras mais arrojadas que esta.

Dada uma sobrepartição $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, onde a primeira ocorrência de μ_t pode ser marcada, veremos cada parte μ_t desta sobrepartição como uma soma $\mu_t = c_t + d_t + e_t$, onde c_t, d_t, e_t são inteiros não negativos. Esta é uma forma de fazer analogia em que cada parte de uma partição pode ser vista como um vetor com três componentes, no caso $c_t \mathbf{k} + d_t \mathbf{j} + e_t \bar{\mathbf{k}}$. Esta analogia se torna muito séria quando se estabelece bijeções entre matrizes de três linhas e sobrepartições.

Consideremos a identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q)_n q^n}{(q, q)_n} = \frac{(-q, q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}. \quad (3.1)$$

Esta pode ser provada via **teorema q -binomial**(1.7), colocando $b = q$ e $a = -1$.

Como dito no primeiro capítulo, o lado direito é a função geradora para sobrepartições de n . Introduzindo os parâmetros j e k , na soma da identidade 3.1 obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn}}{(q^j, q^k)_n}.$$

Definimos o conjunto $A_{k,j,\bar{k}} = \{ck + dj + e\bar{k}; c, d, e \geq 0\}$.

Teorema 3.1.1 *Seja $s(n)$ o número de sobrepartições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, $e_t = i_t$, $i_t = 0$ ou 1 , $c_s + e_s = 1$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn}}{(q^j; q^k)_n} \quad (3.2)$$

Demonstração:

Denotamos por $s(m, n)$ o número de sobrep partições enumeradas por $s(n)$ e tendo exatamente m partes.

A relação abaixo é satisfeita por $s(m, n)$:

$$s(m, n) = s(m, n - km + k - j) + s(m - 1, n - k) + s(m - 1, n - k - km) \quad (3.3)$$

Consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

- A. Aquelas em que $d_s \geq 0$.
- B. Aquelas em que k é parte.
- C. Aquelas em que \bar{k} é parte.

Para aquelas no conjunto **A**, subtraímos j da menor parte e k das outras, assim teremos partições de $n - k(m - 1) - j$ em m partes, que são enumeradas por $s(m, n - km + k - j)$.

Para aquelas partições do conjunto **B**, em que apenas k é parte, removemos a parte k e teremos partições de $n - k$ em $m - 1$ partes.

Finalmente para aquelas em que, \bar{k} é parte, removemos esta parte e k das demais, sendo estas enumeradas por $s(m - 1, n - k - km)$.

Definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m, n) z^m q^n$$

Pela construção feita acima, temos:

$$\begin{aligned} F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m, n - km + k - j) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m - 1, n - k) z^m q^n \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m, n - k - km) z^m q^n \\ &= q^{j-k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m, n - km + k - j) (zq^k)^m q^{n-km+k-j} \\ &+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m - 1, n - k) z^{m-1} q^{n-k} + \\ &zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s(m - 1, n - k - km) (zq^k)^{m-1} q^{n-k}. \end{aligned}$$

Considerando $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s(m, n)q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n &= q^{j-k+kn} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^k)^n + \\ & zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n + zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)(zq^k)^n. \end{aligned}$$

Deste modo, temos a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{j-k}F(zq^k, q) + zq^kF(z, q) + zq^kF(zq^k, q) \quad (3.4)$$

e comparando os coeficientes de z^n temos:

$h(n, q) = q^{j-k}h(n, q) + q^k h(n-1, q) + q^{k+kn}h(n-1, q)$, podemos colocar esta equação na seguinte forma:

$$h(n, q) = \frac{q^k h(n-1, q) + q^{k+kn} h(n-1, q)}{(1 - q^{j-k+kn})}.$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, teremos:

$$h(n, q) = \frac{(-1, q^k)_n q^{kn}}{(q^j, q^k)_n}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn} z^n}{(q^j, q^k)_n}.$$

Fazendo $z = 1$, temos:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn}}{(q^j, q^k)_n}; \text{ o que demonstra o teorema.}$$

Inferimos o parâmetro \bar{k} para que se possa encontrar uma bijeção entre o conjunto de sobrepartições irrestritas e um conjunto de matrizes de três linhas. Enunciaremos agora o teorema acima na sua forma matricial:

Teorema 3.1.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = 1$, $e_t = i_t$, $i_t = 0$ ou 1 , $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$ é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)q^{nk}}{(q^j; q^k)_n}$$

Para $j = k = 1$, temos o corolário:

Corolário 3.1.1 *O número de sobrep partições de n é igual ao número de matrizes da forma:*

$$A_s = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = 1$, $e_t = 0$ ou 1 , $i_t = 0$ ou 1 , $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$,

$$n = \sum c_t + \sum d_t + \sum l_t$$

Observação 3.1.1 *Temos obrigatoriamente que impor:*

Se μ_t e μ_{t+1} são partes consecutivas sendo ambas marcadas, $\mu_{t+1} = \bar{1}$, então $c_t = 0$.

A razão pela qual é que o c_t correspondente teria que ser negativo, o que não é correto pois coeficientes negativos não fazem parte do conjunto $A_{k,j,\bar{k}}$.

Para ilustrar essa situação considere a sobrepartição $\bar{3} + \bar{1}$, a sua representação matricial, a priori, ficaria:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Porém, pela nossa imposição temos a correta representação de $\bar{3} + \bar{1}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

demonstração do corolário:

Para estabelecer uma bijeção entre uma dada sobrepartição e uma matriz de três linhas do tipo acima, tomemos:

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$ uma sobrepartição de n .

Observemos que c_s é 1 se μ_s não está marcada e $e_s = 1$ caso contrário.

Inserimos o parâmetro i de forma que $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$; notemos que $i_t = 0$ se λ_t não é marcada e $i_t = 1$ caso contrário.

Assim $A_s = a_s$ ou $A_s = b_s$, onde

$$a_s = \begin{pmatrix} 1 + d_2 + \dots + j_1 + \dots + j_{s-1} & \dots & 1 + d_s + j_{s-1} & 1 \\ d_1 & \dots & d_{s-1} & d_s \\ e_1 & \dots & e_{s-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_s = \begin{pmatrix} d_2 + \dots + i_1 + \dots + i_{s-1} & \dots & d_s + i_{s-1} & 0 \\ d_1 & \dots & d_{s-1} & d_s \\ e_1 & \dots & e_{s-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja uma sobrepartição tem uma representação matricial a_s se a última parte é marcada ou b_s caso contrário. Pode-se ver que as duas cumprem as regras de vizinhança estabelecidas no corolário, e que facilmente uma dada matriz que segue estas condições determina uma única sobrepartição. O exemplo abaixo ilustra o fato de como uma sobrepartição pode ser vista como uma matriz de três linhas.

Exemplo 3.1.1 Para $\lambda = \bar{2}0 + 20 + 20 + 18 + 14 + \bar{1}1 + 11 + 7 + 6 + \bar{5} + 5 + 4 + 3 + 2 + \bar{1} + 1$, temos:

$$A_s = \begin{pmatrix} 19 & 20 & 18 & 14 & 10 & 10 & 7 & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz correspondente a sobrepartição λ , com $i_1 = i_6 = i_{10} = i_{15} = 1$ e o restante dos i 's sendo 0.

Abaixo segue uma tabela para $n = 4$ e suas respectivas representações matriciais.

4	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
3 + 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 + 2	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{4}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\bar{3} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$3 + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{3} + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\bar{2} + 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{2} + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{2} + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{1} + 1 + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 Sobrepartições com partes $\equiv (l \bmod i)$

Nesta seção vamos trabalhar com generalizações de conjuntos de sobrepartições. É claro que para $l = i = 1$ temos sobrepartições em partes irrestritas.

No caso $i = 2$ e $l = 1$ temos sobrepartições em partes ímpares, sendo este um caso interessante no qual se tem uma interpretação combinatória bastante simples. Em [25], Ribeiro, A. forneceu uma interessante interpretação, em termos de matrizes de três linhas, para esta classe. Também encontraremos uma interpretação, porém de forma distinta.

A idéia original fora a de fazer uma mudança de variáveis do tipo $q \mapsto q^i$ no teorema q -binomial (1.7) e considerar $x = q^l$ e $a = -1$, a fim de buscar uma interpretação para a nova identidade.

Consideremos a seguinte identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^i)_n q^{ln}}{(q^i, q^i)_n} = \frac{(-q^l, q^i)_{\infty}}{(q^l; q^i)_{\infty}}. \quad (3.5)$$

O lado direito desta identidade pode ser interpretada como a função geradora de sobrepartições de n em partes $\equiv (l \bmod i)$.

O teorema abaixo fornece uma nova interpretação combinatória para a o caso $l = 1$:

Teorema 3.2.1 *Seja $s_1(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, $c_s + e_s = 1$, $e_t = 0$ ou 1 , $d_t \equiv (0 \bmod i)$ e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$; então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_1(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}. \quad (3.6)$$

Demonstração:

Denotamos por $s_1(m, n)$ o número de sobrepartições enumeradas por $s_1(n)$ e tendo exatamente m partes.

A relação abaixo é satisfeita por $s_1(m, n)$:

$$s_1(m, n) = s_1(m, n - kim + ik - ij) + s_1(m - 1, n - k) + s_1(m - 1, n - k - kim). \quad (3.7)$$

Consideremos estes conjuntos disjuntos de partições:

- A. Aquelas em que $d_s \geq 0$.
- B. Aquelas em que k é parte.
- C. Aquelas em que \bar{k} é parte.

Para as partições no conjunto **A**, subtraímos ij da menor parte e ki das outras, assim teremos partições de $n - ki(m - 1) - ij$ em m partes, que são enumeradas por $s(m, n - kim + ik - ij)$.

Para partições no conjunto **B**, em que apenas k é parte, removemos a parte k e teremos partições de $n - k$ em $m - 1$ partes.

Finalmente para aquelas em que, \bar{k} é parte, removemos esta parte e ik das demais, sendo estas enumeradas por $s(m - 1, n - k - kim)$.

Definimos:

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m, n) z^m q^n$$

Pela construção feita acima, temos:

$$\begin{aligned}
F(z, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m, n - kim + ik - ij) z^m q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m - 1, n - k) z^m q^n \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m, n - k - kim) z^m q^n \\
&= q^{ij-ik} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m, n - kim + ik - ij) (zq^{ik})^m q^{n-kim+ik-ij} \\
&+ zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m - 1, n - k) z^{m-1} q^{n-k} + \\
&zq^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_1(m - 1, n - k - kim) (zq^{ik})^{m-1} q^{n-k}.
\end{aligned}$$

Considerando $h(m, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(m, n) q^n$, então $F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n &= q^{ij-ik} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{ik})^n + \\
&zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n + \\
&zq^k \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) (zq^{ik})^n.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{ij-ik} F(zq^{ik}, q) + zq^k F(z, q) + zq^k F(zq^{ik}, q) \quad (3.8)$$

e comparando os coeficientes de z^n temos:

$h(n, q) = q^{ij-ik} h(n, q) + q^k h(n - 1, q) + q^{k+kin} h(n - 1, q)$, podemos colocar esta equação na seguinte forma:

$$h(n, q) = \frac{q^k h(n - 1, q) + q^{k+kin} h(n - 1, q)}{(1 - q^{ij-ik+kin})}.$$

Fazendo n iterações e observando que $h(0, q) = 1$, teremos:

$$h(n, q) = \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij}, q^{ik})_n}$$

Logo,

$$F(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kn} z^n}{(q^{ij}; q^{ik})_n}.$$

Fazendo $z = 1$, temos:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kn}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}; \text{ o que demonstra o teorema.}$$

Como foi feito na primeira seção, vamos modificar a equação funcional que acabamos de obter. A razão pela qual fazemos isto é para se obter uma fácil interpretação combinatória para a identidade em questão.

Assim a nova equação funcional é:

$$F(z, q) = q^{ij-ik} F(zq^{ik}, q) + zq^k F(z, q) + zq^{\bar{k}} F(zq^{ik}, q) \quad (3.9)$$

Podemos estender este resultado para partições em partes congruentes a l módulo i :

Teorema 3.2.2 *Seja $r_1(n)$, o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, $c_s + e_s = l$, $e_t = 0$ ou l , $d_t \equiv (0 \text{ mod } i)$ e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$; então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_1(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})_n q^{kln}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}. \quad (3.10)$$

A partir deste teorema é possível encontrar a equação funcional:

$$F(z, q) = q^{ji-ki} F(zq^{ki}, q) + zq^{\bar{k}l} F(z, q) + zq^{kl} F(zq^{ki}, q)$$

A demonstração deste teorema é análoga ao anterior e a omitiremos. Como feito anteriormente vamos, a seguir, escrever o teorema principal na forma matricial.

Teorema 3.2.3 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = l$, $e_t = 0$ ou l , $d_t \equiv (0 \bmod i)$ e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$; é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} r_1(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{ik})q^{nlk}}{(q^{ij}; q^{ik})_n}$$

Corolário 3.2.1 *O número de sobrepartições de n em partes $\equiv 1 \bmod i$ é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = l$, $e_t = 0$ ou l , $d_t \equiv (0 \bmod i)$ e $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - e_{t+1}$.

Para $i = 2$ e $l = 1$, como dito anteriormente, o lado direito da identidade abaixo é a função geradora para sobrepartições em **partes ímpares**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^2)_n q^n}{(q^2, q^2)_n} = \frac{(-q, q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}}. \quad (3.11)$$

Em [25] a autora forneceu uma interpretação combinatorial para a identidade de número 10 de Slater [32]. Nesta ela interpretou o lado direito da identidade abaixo como a função geradora para sobrepartição em partes ímpares.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q)_{2n} q^{n^2}}{(q^2, q^2)_n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{4n-1})(1 + q^{4n-3})(1 - q^{4n})(1 + q^{2n-1})}{(1 - q^{2n})} \quad (3.12)$$

Nosso objetivo dar uma interpretação diferente a que foi feita em [25], que utilizou o lado esquerdo da identidade acima para se obter a equação funcional e assim encontrar a regra de vizinhança que gerou nas restrições dos coeficientes no conjunto $A_{j,k,\bar{k}}$. Para tal, é claro que basta aplicar $i = 2$ nas hipóteses do teorema principal desta seção para obter o resultado desejado.

Abaixo forneceremos alguns exemplos que ilustram os fatos abordados nessa seção.

Exemplo 3.2.1 Para $\mu = \bar{7} + 7 + 5 + \bar{3} + 3 + \bar{1} + 1 + 1$, temos:

$$A_s = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abaixo segue uma tabela para $n = 5$ e suas respectivas representações matriciais.

5	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{3} + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{5}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
3 + $\bar{1}$ + 1	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{3} + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{1} + 1 + 1 + 1 + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.3 Sobrepartições em partes distintas

Nesta seção trabalharemos com uma identidade que esta relacionada com sobrepartições em partes distintas. A função geradora para tal é:

$$(-q, q)_\infty^2.$$

Nosso objetivo é encontrar uma forma de relacionar partições em partes distintas e matrizes de três linhas de modo a fornecer uma nova interpretação combinatória para a identidade abaixo:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q, q)_n} \right)^2 = (-q; q)_\infty^2 \quad (3.13)$$

Esta segue da equação (2) de Slater [32].

Os resultados a seguir serão obtidos de forma diferente das seções anteriores. De fato, é difícil trabalhar com o lado esquerdo de (3.12) porém é possível conseguir uma interpretação para esta identidade via matrizes de três linhas, e ainda mais, exibiremos uma prova bijetiva que relaciona diretamente uma sobrepartição em partes distintas com uma matriz de três linhas com as restrições adequadas.

Observação 3.3.1 *O lado direito de (3.12) é a função geradora para sobrepartições em partes distintas no sentido de que partes não marcadas não podem se repetir, porém uma parte marcada pode ser igual a outra desmarcada.*

Teorema 3.3.1 *O número de sobrepartições de n em partes distintas é igual ao número de matrizes da forma:*

$$A_s = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = 1$, $e_t = 0$ ou 1 e $i_t = 0$, ou $i_t = -1$, $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} + i_t$.

Demonstração:

Para estabelecer uma bijeção entre uma dada sobrepartição e uma matriz de três linhas do tipo acima, tomemos:

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$ uma sobrepartição de n em partes distintas.

Observemos que c_s é 1 se a última parte não está marcada e $e_s = 1$ se a última parte aparece marcada.

Inserimos o parâmetro i de forma que $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + i_t$; notemos que $i_t = 0$ se μ_t não é marcada e $i_t = -1$ de modo a cancelar o fator 1 em $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} + i_t$ caso a parte apareça marcada.

Assim para a sobrepartição $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, temos duas possibilidades para a matriz representante de μ :

$$a_s = \begin{pmatrix} s + d_2 + \dots + i_1 + \dots + i_{s-1} & \dots & 2 + d_s + i_{s-1} & 1 \\ d_1 & \dots & d_{s-1} & d_s \\ e_1 & \dots & e_{s-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_s = \begin{pmatrix} s - 1 + d_2 + \dots + i_1 + \dots + i_{s-1} & \dots & d_s + i_{s-1} & 0 \\ d_1 & \dots & d_{s-1} & d_s \\ e_1 & \dots & e_{s-1} & 1 \end{pmatrix}$$

A representante será b_s se a última parte for marcada ou será a_s caso contrário.

Dada μ como acima, temos:

Observação 3.3.2 *A observação a ser feita aqui é a mesma da primeira e segunda seções, com respeito a sobrepartições onde as duas últimas partes são do tipo:*

$\mu_{s-1} + \mu_s$ onde μ_{s-1} é marcada e $\mu_s = \bar{1}$. Onde há o problema de que c_{s-1} seja negativo. Lidamos com esse problema inferindo $c_{s-1} = 0$.

Como exemplo, considere a sobrepartição $\bar{3} + \bar{2} + \bar{1}$, a sua matriz correspondente é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

na segunda coluna, pelo teorema anterior, a primeira linha deveria ser -1 , porém por pelo estabelecido acima, $c_2 = 0$.

Exemplo 3.3.1 Para $\mu = 11 + \bar{1}0 + 9 + \bar{8} + \bar{5} + 4 + 3 + 2 + \bar{1} + 1$, temos:

$$A_s = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 4 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz correspondente a sobrepartição μ , com $i_2 = i_5 = i_4 = -1$ e o restante dos i 's sendo 0.

Abaixo segue uma tabela para $n = 6$ e suas respectivas representações matriciais.

6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$3 + \bar{2} + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$5 + 1$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{3} + 2 + 1$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$4 + 2$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$3 + \bar{2} + 1$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$3 + 2 + 1$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$3 + 2 + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$4 + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{3} + 3$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{6}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$4 + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\bar{5} + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{4} + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$5 + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{4} + 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{5} + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\bar{3} + 2 + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\bar{2} + 2 + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{4} + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$4 + \bar{1} + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{3} + 3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{3} + \bar{2} + 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{3} + \bar{2} + \bar{1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

No quinto capítulo forneceremos uma fórmula fechada para o cálculo do número de sobrepartições em partes distintas a partir da fórmula geral desenvolvida neste trabalho.

3.4 Sobrepartições em partes pares e distintas

No primeiro capítulo determinamos uma bijeção entre um conjunto de matrizes de duas linhas e o conjunto de partições em partes pares e distintas. Agora exibiremos uma bijeção entre um conjunto de matrizes de três linhas e o conjunto de sobrepartições em partes pares e distintas. Procederemos de forma análoga à seção anterior para obter uma nova interpretação combinatorial para a identidade que segue.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q^2, q^2)_n} \right)^2 = (-q^2; q^2)_{\infty}^2 \quad (3.14)$$

Esta identidade pode ser obtida de (3.12) fazendo a mudança $q \mapsto q^2$.

Podemos interpretar combinatoriamente o lado direito desta equação como sendo a função geradora para sobrepartições em partes pares e distintas, podendo uma

parte marcada ser igual a uma desmarcada.

Para encontrar uma forma de relacionar uma dada sobrepartição com uma matriz de três linhas, iremos combinar elementos dos resultados obtidos na seção anterior.

Teorema 3.4.1 *O número de sobrepartições de n em partes pares e distintas é igual ao número de matrizes da forma:*

$$A_s = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 0$ ou 2 , $e_s = 0$ ou 2 , $i_t = 0$ ou 2 , $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$.

Demonstração:

Para estabelecermos uma bijeção entre uma dada sobrepartição em partes pares e distintas e uma matriz de três linhas como descrita acima, tomemos:

$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$ uma sobrepartição de n em partes pares e distintas.

Observemos que se $c_s = 2$ então a última parte não está marcada e se $e_s = 2$ então a última parte aparece marcada.

Quando uma parte é marcada, podemos colocar $i_t = 2$, $e_t = 2$ e $i_t = 0$ quando a parte é desmarcada. Deste modo pode-se ver que a regra $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, $e_t = 2$, gera sobrepartições em partes pares e distintas. É fácil ver que dada uma matriz como A_s , se somarmos os elementos de cada coluna, temos sobrepartições em partes pares e distintas. Pelas restrições acima citadas podemos ver que para cada μ uma sobrepartição em partes pares e distintas, esta está univocamente associada a uma matriz do tipo A_s .

Exemplo 3.4.1 *Para $\mu = 22 + \bar{1}8 + 16 + \bar{1}2 + \bar{1}0 + 8 + 4 + 2$, temos:*

$$A_s = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 12 & 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abaixo segue uma tabela para sobrepartições de $n = 12$ em partes pares e distintas e suas respectivas representações matriciais:

12	$\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\bar{6} + 4 + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
10 + 2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{6} + \bar{4} + 2$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
8 + 4	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$6 + 4 + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\bar{6} + 6$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{8} + \bar{2} + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6 + 4 + 2	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$6 + \bar{4} + 2$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{4} + 4 + \bar{2} + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$8 + \bar{2} + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{1}2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\bar{6} + 4 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
10 + $\bar{2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\bar{8} + 4$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\bar{1}0 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{8} + \bar{4}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
$\bar{1}0 + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$8 + \bar{4}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$6 + \bar{4} + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\bar{6} + \bar{4} + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3.5 Sobrepartições em partes pares

Motivado pelo trabalho De Jeremy Lovejoy em [20], onde ele desenvolve funções geradoras para pares de sobrepartições, vamos encontrar uma interpretação combinatória em termos de matrizes de três linhas para tal. Um caso específico do **teorema 1.1.1** desta referência, para $k = 1$, explicita a função geradora para sobrepartições em partes pares. Nesta seção vamos encontrar, novamente uma bijeção entre o conjunto de sobrepartições em partes pares e matrizes de três linhas. Para tal, consideremos a equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^2)_n q^{2n}}{(q^2, q^2)_n} = \frac{(-q^2, q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}}. \quad (3.15)$$

O lado direito desta identidade é a função geradora para sobrepartições em partes pares.

Teorema 3.5.1 *Seja $s_5(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, $c_s = 2$ e $e_s = 0$ ou $c_s = 0$ e $e_s = 2$, $i_t = 0$ ou $i_t = 2$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_5(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{2k})_n q^{2kn}}{(q^{2j}; q^{2k})_n} \quad (3.16)$$

Omitimos a demonstração deste teorema por ser análogo aos anteriores.

$$\text{Seja } h(n, q) = \frac{(-1, q^k)_n q^{2kn}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}$$

Definimos $F(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, q)z^m$

Deste modo a equação funcional gerada pelo teorema é:

$$F(z, q) = q^{2j-2k}F(zq^k, q) + zq^kF(z, q) + zq^kF(zq^{2k}, q). \quad (3.17)$$

Inferimos o parâmetro \bar{k} para que se possa encontrar uma bijeção no conjunto de sobrepartições em partes pares e um conjunto de matrizes de três linhas na equação:

$$F(z, q) = q^{2j-2k}F(zq^k, q) + zq^kF(z, q) + zq^{\bar{k}}F(zq^{2k}, q). \quad (3.18)$$

Considerando $j = k = 1$, podemos enunciar um método para que dada uma partição possamos encontrar a sua matriz representante desta e vice-versa.

Teorema 3.5.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2$ e $e_s = 0$ ou $c_s = 0$ e $e_s = 2$, $i_t = 0$ ou $i_t = 2$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s_5(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)q^{2nk}}{(q^{2j}; q^{2k})_n}$$

Teorema 3.5.3 *O número de sobrepartições de n em partes pares é igual ao número de matrizes da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 2$ e $e_s = 0$ ou $c_s = 0$ e $e_s = 2$, $i_t = 0$ ou $i_t = 2$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t, d_t$ é par, $t \in \{1, s\}$.

Observação 3.5.1 *O mesmo problema operacional que tivemos nas outras seção é também constatado aqui. De fato, para $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{s-1} + \mu_s$ uma sobrepartição onde μ_{s-1} é marcada e $\mu_s = \bar{1}$, temos o problema de que c_{s-1} ser negativo. Para resolver este problema, neste caso infere-se $c_{s-1} = 0$ e deixemos d_{s-1} compensar, como feito anteriormente.*

Por exemplo se tivermos a sobrepartição $\bar{4} + \bar{2}$, a sua representação matricial, obrigatoriamente seria:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Porém números negativos não fazem parte do conjunto dos $A'_{k,j,\bar{k}}$ s, e para evitar isso faz-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Demonstração:

Para estabelecer uma bijeção entre uma dada sobrepartição em partes pares e uma matriz de três linhas do tipo acima, consideremos uma sobrepartição de n :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s .$$

Observemos que c_s é 2 se μ_s não está marcada e $e_s = 2$ caso contrário.

Inserimos o parâmetro i de forma que $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$; compense o fato de $e_s > 0$, de modo que $i_t = 0$ se μ_t não é marcada e $i_t = 2$ no caso desta ser marcada.

Exemplo 3.5.1 *Para $\mu = \bar{20} + 20 + 18 + 18 + \bar{14} + \bar{12} + 10 + 6 + 6 + \bar{4} + \bar{2} + 2$, temos:*

$$A_s = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 & 12 & 8 & 8 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.5.2 *Segue abaixo uma tabela que exhibe as matrizes correspondentes a sobrepartições de $n = 6$ em partes pares.*

6	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\bar{6}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
$4 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{4} + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{4} + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$2 + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\bar{2} + 2 + 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$4 + \bar{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.6 Sobrepartições irrestritas: outra interpretação

Em [29] os autores interpretaram três identidades relacionadas com partições irrestritas de três maneiras distintas. Nosso objetivo aqui, de forma análoga a Santos et al, será de interpretar uma identidade relacionada com sobrepartições irrestritas, em termos de matrizes, de forma distinta a feita na primeira seção. Porém necessitaremos acrescentar mais uma variável para facilitar a interpretação combinatória desta.

Definimos o conjunto: $A_{k,j,\bar{k},j_1} = \{ck + dj + e\bar{k} + bj_1 | c, d, e, b \geq 0\}$.

Como sabemos a função geradora para sobrepartições irrestritas é:

$$\frac{(-1, q)_\infty}{(q; q)_\infty}$$

Ela pode ser encontrada na seguinte equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q, q)_n q^{n \frac{(n+1)}{2}}}{(q, q)_n^2} = \frac{(-q, q)_\infty}{(q; q)_\infty} \quad (3.19)$$

que pode ser obtida de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)_n a^n q^{n\frac{(n+1)}{2}}}{(q, q)_n (bq, q)_n} = \frac{(-aq, q)_{\infty}}{(bq; q)_{\infty}}.$$

Em [3] Entry 1.3.2, página 13, onde tomamos $a = b = 1$.

O próximo teorema nos fornece uma interpretação combinatória para a identidade (3.18):

Teorema 3.6.1 *Seja $s_6(n)$ o número de sobrepartições de n em partes pertencentes a A_{k,j,\bar{k},j_1} da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, $e_t = 0$ ou 1 , $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + e_{t+1} + b_{t+1} + 1$, ou $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + e_{t+1} + b_{t+1}$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_6(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn\frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n^2} \quad (3.20)$$

$$\text{Seja } h(n, q) = \frac{(-1, q^k)_n q^{kn\frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n^2}$$

$$\text{Definimos } F(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, q) z^m$$

Pelo teorema anterior pode se mostrar que:

$$F(z, q) = 2q^{j-k} F(zq^k, q) + zq^k F(zq^k, q) + zq^k F(zq^{2k}). \quad (3.21)$$

Nesta equação funcional trocamos o parâmetro k de $zq^k F(zq^k, q)$ por \bar{k} , e j de um termo de $2q^{j-k} F(zq^k, q)$ por j_1 para facilitar na interpretação combinatória.

Esta equação funcional modificada dada abaixo nos permite a obtenção do teorema 3.6.1.1 que, na sua forma matricial enunciamos a seguir.

$$F(z, q) = q^{j-k} F(zq^k, q) + q^{j_1-k} F(zq^k, q) + zq^{\bar{k}} F(zq^k, q) + zq^k F(zq^{2k}). \quad (3.22)$$

Teorema 3.6.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \\ b_1 \times j_1 & b_2 \times j_1 & b_3 \times j_1 & \dots & b_s \times j_1 \end{pmatrix}$$

com $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + e_{t+1} + b_{t+1} + 1$, ou $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} + e_{t+1} + b_{t+1}$, $e_t = 0$ ou 1 é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s_6(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^k)_n q^{kn \frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n^2}$$

3.7 Identidade envolvendo a função Theta de Ramanujan.

Nesta seção trabalharemos com uma identidade extraída do Ramanujan's Lost Notebook (referência [3], Entry 1.7.4, página 31).

Neste livro, o autor trabalha com diversas identidades e suas propriedades. No primeiro capítulo do volume I ele apresenta uma teoria sobre frações contínuas, que ele chama de **The Rogers-Ramanujan Continued Fraction**. E esta é definida por:

$$R(q) = \frac{q^{1/5}}{1+} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \frac{q^3}{1+} \dots, |q| < 1 \quad (3.23)$$

que apareceu primeiramente em [26] em 1894. Neste artigo Rogers provou que:

$$R(q) = \frac{q^{1/5}(q; q^5)_{\infty}(q^4; q^5)_{\infty}}{(q^2; q^5)_{\infty}(q^3; q^5)_{\infty}} \quad (3.24)$$

A função theta de Ramanujan, $f(a, b)$ é definida como:

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n+1)/2}, \quad |ab| < 1 \quad (3.25)$$

Os casos particulares mais importantes da função theta são:

$$\varphi(q) = f(q, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = (-q; q^2)_{\infty}^2 (q^2; q^2)_{\infty} = \frac{(-q; -q)_{\infty}}{(q; -q)_{\infty}} \quad (3.26)$$

$$\psi(q) = f(q, q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}} \quad (3.27)$$

Pode-se provar que:

$$f(a, b) = a^{n(n+1)/2} b^{n(n+1)/2} f(a(ab)^n, b(ab)^{-n}) \quad (3.28)$$

que é o conhecido **Produto Triplo de Jacobi**. Uma demonstração desta fórmula encontra-se em [2], página 34.

Um dos objetos mais famosos examinados na referência [3] são as **funções Mock Theta**. Ela foi assim denominada por Ramanujan, numa de suas cartas a Hardy, ele define funções mock theta de várias ordens.

Como exemplo, a função mock theta de quarta ordem é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q; q^2)_n q^{n^2}}{(-q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} \quad (3.29)$$

Nota-se facilmente que o denominador de (3.23) é a função geradora para partições em partes congruentes a 2 e 3 módulo 5. É de se esperar que se possa encontrar interpretações combinatórias para essas identidades em termos de matrizes de duas linhas.

Brietzke, E.H.M., Santos, J.P.O e Silva, R., ([14]), recentemente conseguiram interpretações para todas as funções mock theta como matrizes de duas linhas. Como por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q^2)_n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q^2)_n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q; q^2)_{n+1}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2} (-q; q)_n}{(q; q^2)_{n+1}} \quad (3.30)$$

Nesta seção, apresentamos uma interpretação para uma identidade envolvendo a função theta de Ramanujan, no caso $\frac{\varphi(-q^4)}{\varphi(-q)}$.

A identidade a ser explorada nesta seção será:

$$\sum \frac{(-1; q^2)_n q^{n(n+1)/2}}{(q; q)_n (q; q^2)_n} = \frac{\varphi(-q^4)}{\varphi(-q)} = \frac{(q^4; q^4)_{\infty} (-q; q)_{\infty}}{(-q^4; q^4)_{\infty} (q; q)_{\infty}} \quad (3.31)$$

Onde

$$\frac{(q^4; q^4)_{\infty} (-q; q)_{\infty}}{(-q^4; q^4)_{\infty} (q; q)_{\infty}}$$

é a função geradora para sobrepartições em partes não congruas a $0 \pmod{4}$.

Trabalharemos com matrizes de quatro linhas apenas para simplificar a nossa interpretação. O teorema abaixo nos fornece uma interpretação combinatorial para a soma dada em (3.31):

Teorema 3.7.1 *Seja $s_7(n)$ o número de partições de n em partes pertencentes a $A_{k,j,\bar{k}}$ da forma $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, μ_t e μ_{t+1} partes consecutivas, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k} + a_t k_1$, $c_s = 1$ ou 0 $e_t = 0$ ou $e_t = 1$, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_7(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{2k})_n q^{kn \frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n (q^k, q^{2k})_n} \quad (3.32)$$

$$\text{Seja } h(n, q) = \frac{(-1, q^{2k})_n q^{kn \frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n (q^k, q^{2k})_n}$$

$$\text{Definimos } F(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, q) z^m$$

Pelo teorema enunciado acima, pode se mostrar que:

$$F(z, q) = q^{j-k} F(zq^k, q) + q^{-k} F(zq^{2k}, q) + zq^k F(zq^k, q) + zq^k F(zq^{3k}, q). \quad (3.33)$$

Nesta equação funcional trocamos um parâmetro k de $zq^k F(zq^{3k}, q)$ por \bar{k} , e o parâmetro k de $q^{-k} F(zq^{2k}, q)$ por k_1 para facilitar a prova bijetiva que faremos.

A equação funcional modificada dada abaixo nos permite a obtenção do teorema 3.7.3.2 que enunciamos a seguir.

$$F(z, q) = q^{j-k} F(zq^k, q) + q^{-k_1} F(zq^{2k_1}, q) + zq^k F(zq^k, q) + zq^{\bar{k}} F(zq^{3k}, q). \quad (3.34)$$

Teorema 3.7.2 *A função geradora para matrizes da forma:*

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1 \times k & c_2 \times k & c_3 \times k & \dots & c_s \times k \\ d_1 \times j & d_2 \times j & d_3 \times j & \dots & d_s \times j \\ e_1 \times \bar{k} & e_2 \times \bar{k} & e_3 \times \bar{k} & \dots & e_s \times \bar{k} \\ a_1 \times k_1 & a_2 \times k_1 & a_3 \times k_1 & \dots & a_s \times k_1 \end{pmatrix}$$

com $e_t = 0$ ou $e_t = 1$, $c_s = 1$ ou 0 , $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, é dada por:

$$F(1, q) = \sum_{n=0}^{\infty} s_7(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1, q^{2k})_n q^{kn \frac{(n+1)}{2}}}{(q^j, q^k)_n (q^k, q^{2k})_n}.$$

Capítulo 4

A imersão do conjunto de sobrepartições no conjunto de partições planas

Neste capítulo apresentaremos o mais importante resultado deste trabalho: uma forma de identificar uma sobrepartição como uma partição plana.

Para construirmos esta identificação faremos uso de um resultado presente neste trabalho: o de representar uma sobrepartição como uma matriz de três linhas.

Aqui porém faremos uma rápida explanação de como pode-se chegar nesta identificação. Vamos envolver resultados apresentados em [29], conceitos como Polinômios Gaussianos, entre outros.

4.0.1 Identificando uma partição com uma matriz

Em [29], Santos et al, exibiram uma interpretação combinatória para partições irrestritas em termos de matrizes de duas linhas:

Teorema 22: O número de partições irrestritas de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

com $c_s = 0$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$, e a soma de todas as entradas sendo igual a n .

No qual, os autores desenvolvem o lado direito da equação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{nk}}{(q^j, q^k)_n}$$

Sendo j e k os parâmetros que descrevemos nas preliminares deste trabalho.

Por este teorema podemos caracterizar uma partição irrestrita como uma matriz de duas linhas. Para uma partição genérica $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, tem-se a sua correspondente representação matricial:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

Onde $\lambda_t = c_t + d_t$, $t = 1, 2, \dots, s$.

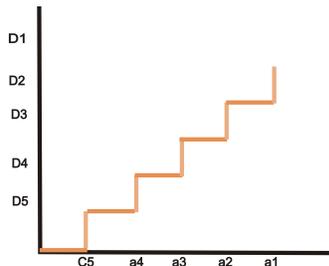
Pode-se associar a matriz A_λ a caminhos no plano. Faremos uma construção semelhante a que George Pólya fez quando interpretou combinatoriamente com argumentos geométricos o Polinômio Gaussiano.

4.1 Da matriz para o reticulado

Exibiremos um método bastante simples para se obter um caminho no plano a partir de uma matriz gerada pelo teorema 22 de [29]. Consideramos a matriz A_λ que representa a partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, ou seja,

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}$$

Vamos iniciar a construção do caminho considerando tomar na matriz as entradas da direita para a esquerda, da seguinte forma: como a última coluna é $\begin{pmatrix} c_s \\ d_s \end{pmatrix}$, andamos c_s unidades no sentido positivo do eixo horizontal e d_s unidades no eixo vertical. Novamente caminharemos c_{s-1} unidades no eixo horizontal e mais d_{s-1} unidades no eixo vertical. Desta maneira, continuamos a construção deste caminho até d_1 . A figura abaixo ilustra o fato:



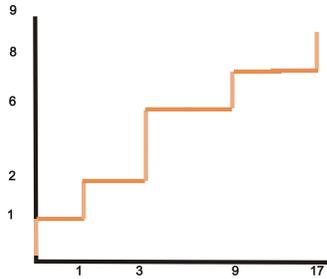
, onde $a_i = c_5 + c_4 + \dots + c_i$.

No caso de $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$, e $\lambda_t = c_t + d_t$.

Exemplo 4.1.1 *Seja $8 + 7 + 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1$ uma partição de 33; a sua representação matricial é:*

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz acima e conseqüentemente a partição $8 + 7 + 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1$ é associado ao caminho:



4.2 Representações matriciais para sobrepartições

Como feito no capítulo 3, podemos fazer uma identificação entre uma matriz de três linhas e uma sobrepartição. Para tal vamos enunciar o resultado que permite fazer esta associação:

Corolário 3.1.1 *A matriz que representa a partição $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$ é:*

$$A_\mu = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

com $c_s + e_s = 1$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1} - i_t$, $e_t = 0$ ou 1, $i_t = 0$ ou 1.

Exemplo 4.2.1 A matriz representante da partição $\bar{6} + \bar{3} + 3 + 2 + \bar{1}$ é:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Construindo a partição plana a partir da sobrepartição

Nosso objetivo agora é construir uma partição plana a partir da representação matricial de uma sobrepartição e assim associar toda sobrepartição a uma partição plana. Para tal vamos utilizar a representação matricial descrita anteriormente.

No caso de partições que relacionávamos com matrizes de duas linhas, associávamos estas a caminhos no plano. Agora vamos associar sobrepartições com caminhos no espaço tridimensional. Estes caminhos serão associados a certas partições planas com certas particularidades.

Dada uma sobrepartição $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$, com $\mu_t = c_t k + d_t j + e_t \bar{k}$, sabendo que a sua matriz representante será:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

De forma análoga ao que foi feito com partições, estabeleceremos nosso caminho da direita para a esquerda seguindo os eixos coordenados.

Dada a matriz como acima, iniciaremos o caminho pela última coluna. Se a última parte não é marcada, andaremos uma unidade no sentido positivo do eixo x e d_s no sentido positivo do eixo y . Se por acaso esta é marcada, andaremos d_s unidades no eixo y e subiremos uma unidade no eixo z . Iniciamos do ponto $(0, 1, 1)$ para evitar ambiguidades e volume nulo.

Como por exemplo consideremos a matriz:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como a última coluna é $(1, 0, 0)^t$, caminhamos 1 unidade na direção positiva de x a partir de $(0, 1, 1)$ considerando o sólido gerado conforme a figura 4.1 temos inicialmente:

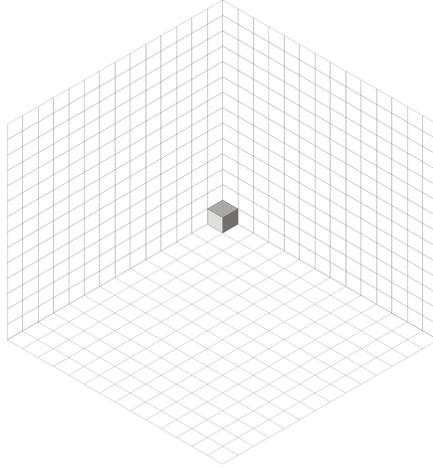
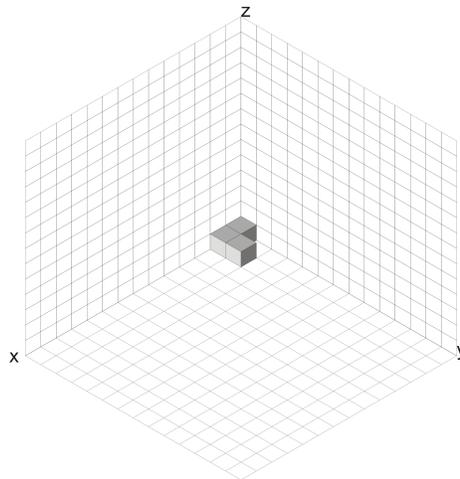
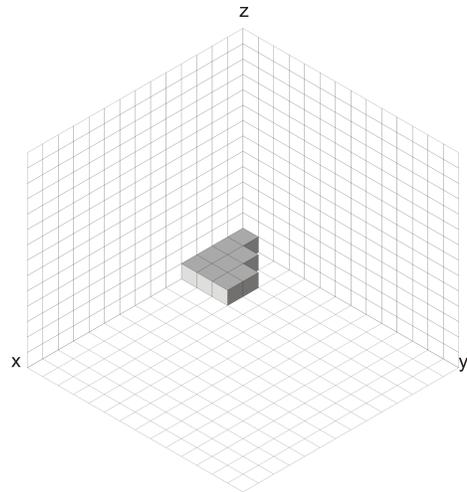


Figura 4.1: primeiro movimento

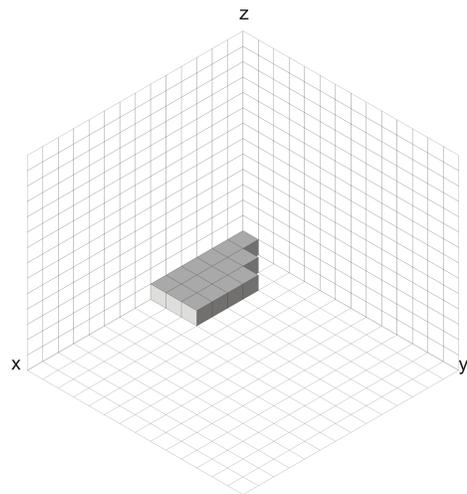
depois andamos uma unidade em x e uma em y , pois a penúltima coluna é: $(1, 1, 0)^t$,



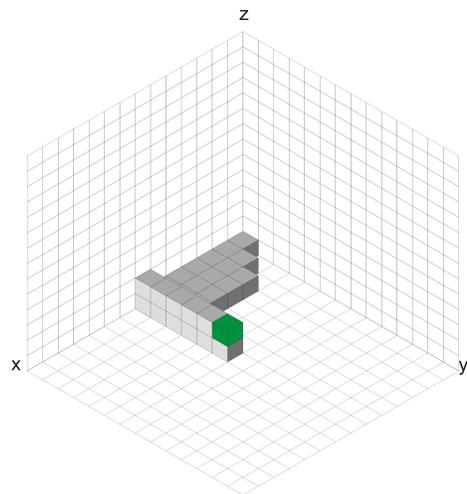
Andamos duas unidades em x e uma em y .



Andamos duas unidades em x e uma em z .



Finalmente mais uma unidade em x e três em y .

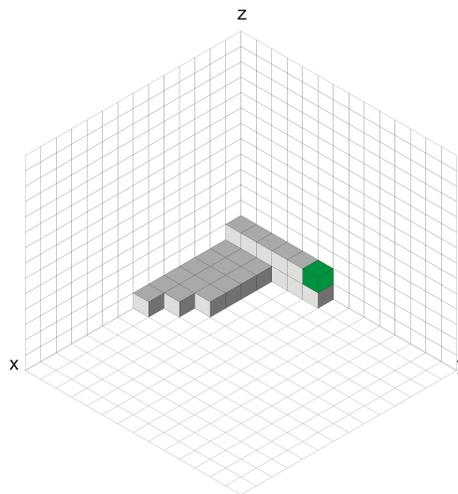


De fato a figura acima não é uma partição plana. Porém se invertermos o posicionamento dos blocos grados a partir das colunas da matriz, de maneira que o

primeira figura se torna a última e assim por diante, teremos uma partição plana. No caso ela será:

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2' \\
 1 & 1 & 1 & & & \\
 1 & 1 & 1 & & & \\
 1 & 1 & 1 & & & \\
 1 & 1 & 1 & & & \\
 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & &
 \end{array}$$

A sua representação gráfica é:



Sendo esta uma partição plana de 27. Uma pergunta natural que surge é: Por que se tem um único cubo colorido de cor distinta dos demais? A resposta é simples e é que na partição com que trabalhamos: $\bar{5} + \bar{3} + 3 + \bar{2} + 1$ a primeira parte é marcada então a sua matriz representante assumirá o valor $e_1 = 1$, sendo que este determinaria um movimento que não seria distinguível. De fato se não coloríssemos esse cubo esta mesma partição plana poderia representar $4 + \bar{3} + 3 + \bar{2} + 1$. Sendo esta uma razão puramente técnica e com a motição de se garantir uma correspondência, que falaremos logo em breve. Esta é a razão pela qual a última parte da partição plana aparece como $2'$.

O exemplo feito acima nos leva a crer que existe uma maneira de associar qualquer sobrepartição de um inteiro n com uma partição plana. A próxima seção será dedicada a isto.

4.4 A imersão

Nesta seção enunciaremos um dos resultados mais importantes deste trabalho, o que garante a imersão do conjunto das sobrepartições no conjunto das partições planas.

Teorema 4.4.1 *Seja S o conjunto de sobrepartições de inteiros. Cada elemento μ de S é associado univocamente a uma partição plana π .*

A verificação da veracidade deste resultado é absolutamente trivial tendo em vista as construções feitas anteriormente. De fato dada $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_s$ podemos associar a esta uma matriz de três linhas

$$A_\mu = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_s \end{pmatrix}$$

Agora podemos considerar os caminhos no primeiro octante do espaço que os coeficientes desta matriz, seguindo os eixos coordenados, poderá fazer. Para tal, como fora estabelecido anteriormente, seguiremos da direita para a esquerda e de cima para baixo e iniciando do ponto $(0, 1, 1)$, por razões técnicas. No caso, começaremos caminhando c_s unidades no eixo x depois d_s no eixo y e em seguida subiremos uma unidade ou nenhuma (na direção do eixo z), desde que e_s só pode ser 1 ou 0. Seguindo desta maneira teremos construído um caminho no espaço.

De fato, graficamente, este caminho não é uma partição plana. Mas se invertermos os cubos gerados por estes movimentos de modo que o último será o primeiro e assim por diante, teremos uma partição plana. Mas ainda teremos um problema: se a primeira parte for marcada, teríamos que subir uma unidade em z , o que não significaria nada em termos de partições planas. Podemos resolver este problema de forma simples, apenas colorindo o último cubo de cor diferente dos demais.

Com isto temos provado que o conjunto das sobrepartições pode ser imerso no conjunto de partições planas.

Dada uma partição plana π construída a partir das regras descritas acima, podemos ver que esta é uma partição onde numa mesma linha os elementos são iguais e dois elementos consecutivos em uma mesma coluna a sua diferença é no máximo 1, ou seja, dado n_{ij} um elemento da partição plana localizado na linha i e coluna j , tem-se: $n_{ij} - n_{i+1j} \leq 1$ e $n_{ij} - n_{ij+1} = 0$. A razão disto é por que e_t só pode ser 0 ou 1. Vemos também que esta sobrepartição é constante se olharmos para os seus elementos dispostos na linhas.

Teorema 4.4.2 *Seja S o conjunto de sobrepartições de inteiros. Cada elemento μ de S é associado univocamente a uma partição plana que é constante em suas linhas e a diferença entre um elemento que está em uma linha e a seguinte é de no máximo 1.*

Abaixo temos um exemplo de uma partição plana que é associada a uma sobrepartição:

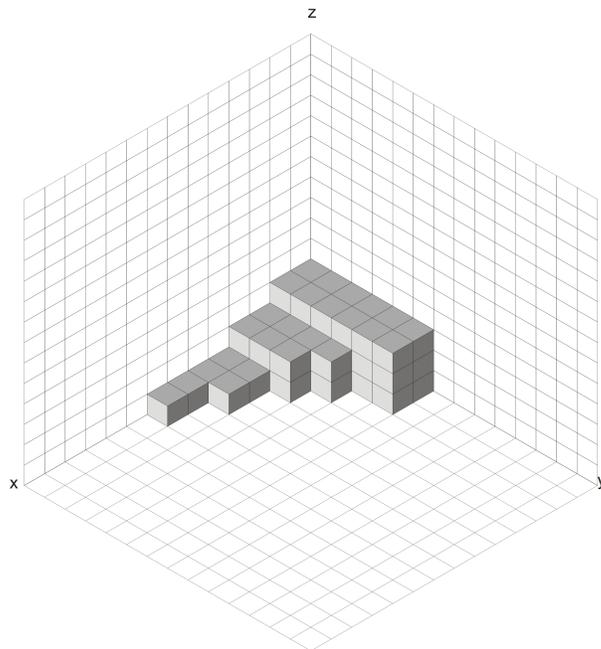
Seja π a partição plana:

```

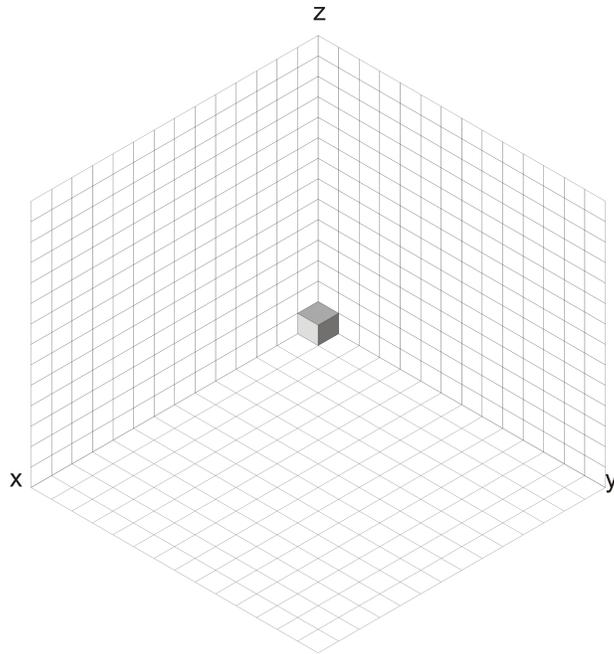
3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3
2 2 2 2
2 2 2
1 1
1 1
1
1

```

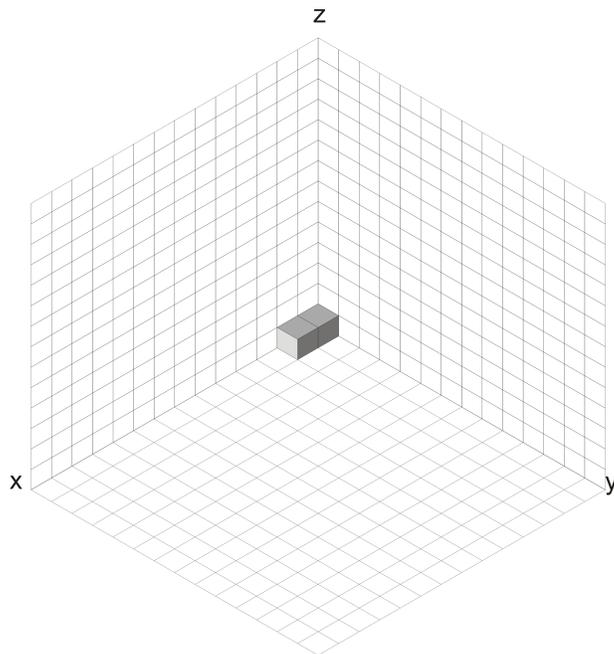
Vê-se que ela é uma partição sem saltos, a partir dela vamos determinar a sobrepartição a ela associada. Graficamente é:



Vamos determinar os caminhos no primeiro octante, e, invertemos a ordem das entradas das camadas. Faremos esta construção passo a passo, tendo primeiramente:

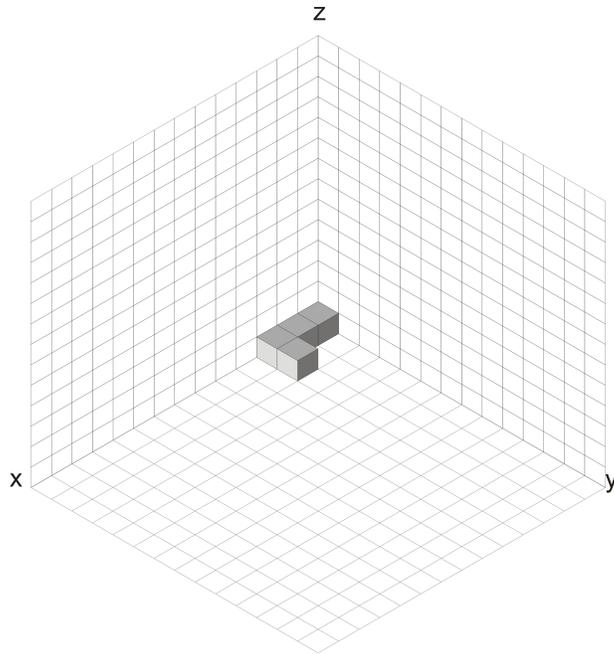


Este primeiro caminho é construído caminhando uma unidade no eixo x , que claramente está relacionado com o vetor $(1, 0, 0)^t$. Temos em seguida:



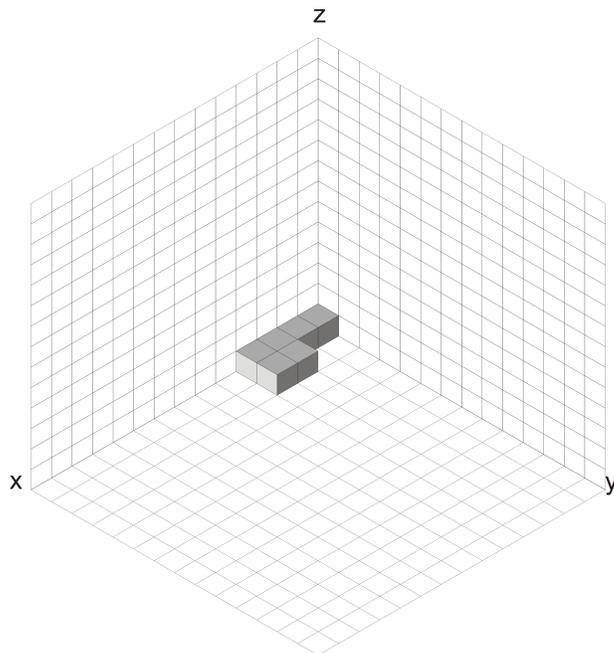
Que também está relacionado a $(1, 0, 0)^t$.

Logo após:



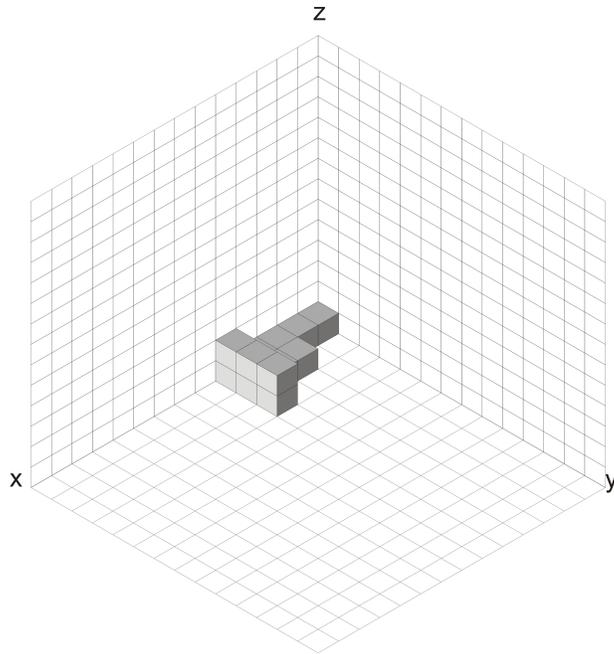
Sendo este movimento relacionado ao vetor $(1, 1, 0)^t$.

Em seguida teremos:

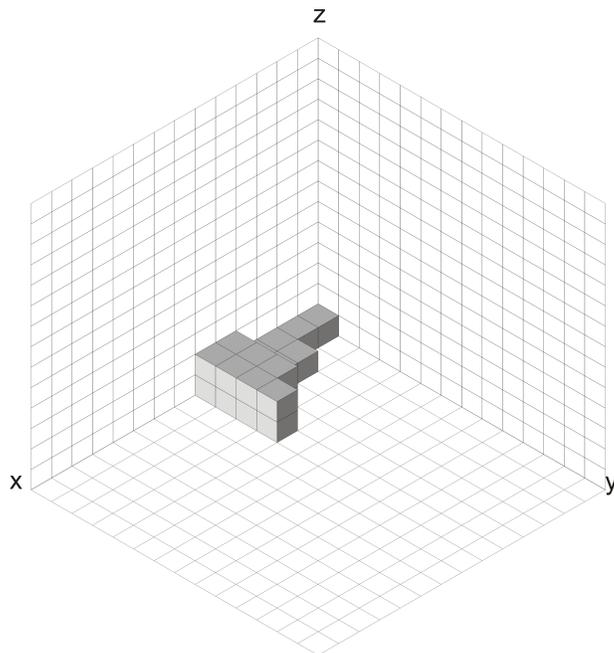


Onde permanecemos ainda na altura $z = 1$, sendo esta parte marcada, e a próxima estará na altura $z = 2$.

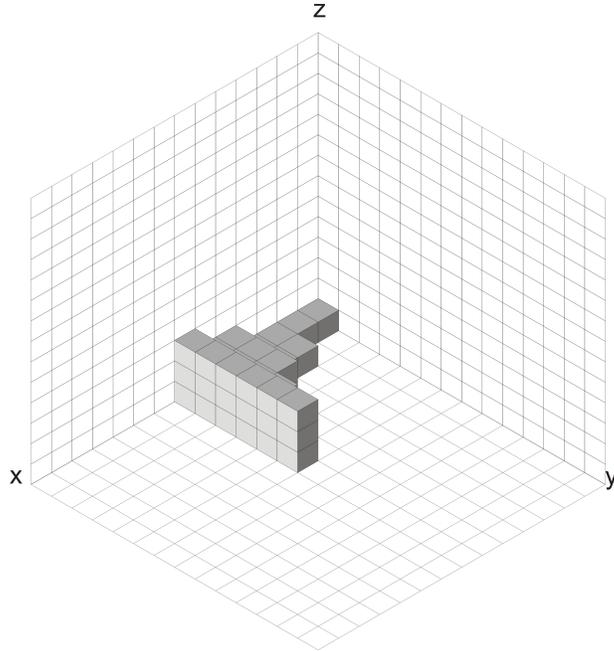
No próximo passo caminharemos mais uma unidade na direção x e mais uma na direção y :



Ainda na altura 2, caminhamos uma unidade no eixo x e uma em y , e subimos uma unidade em z :



E finalmente na altura $z = 3$, caminhamos duas unidades na direção x e mais duas em y , ficando com:



Assim teremos a matriz A_μ associada a partição plana π :

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A menos de ordenação nas suas colunas ela representa a sobrepartição: $4 + \bar{3} + \bar{2} + 2 + 2 + 1 + 1$.

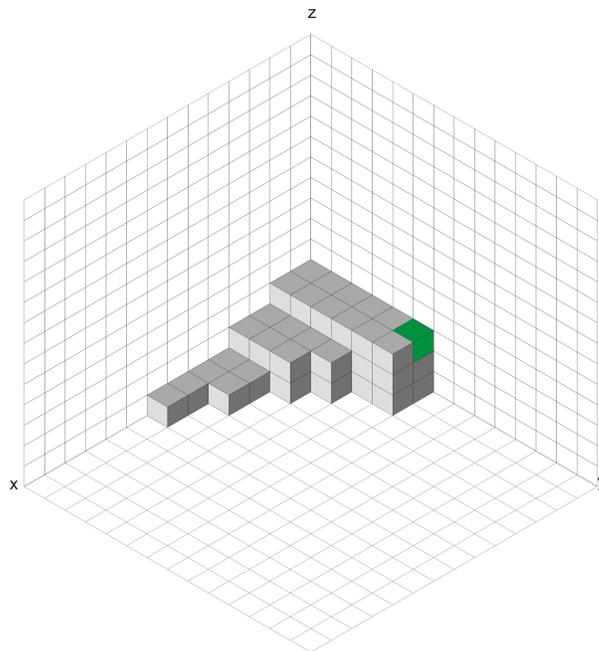
Uma questão pertinente seria a seguinte: E como saberemos se a última parte é marcada?

Para tal teremos que fazer um pequeno ajuste: devemos fazer distinção entre partições planas com o último elemento da primeira linha marcado com ', como no exemplo que seguirá abaixo. Feito isto sempre que vemos um elemento em uma partição plana π da forma n'_{ij} , saberemos que este faz referência a primeira parte de sua sobrepartição correspondente ser marcada.

Podemos exemplificar este fato utilizando o exemplo anterior: a sobrepartição $\bar{4} + \bar{3} + \bar{2} + 2 + 2 + 1 + 1$ é identificada com a partição plana:

3 3 3 3 3 3'
 3 3 3 3 3 3
 2 2 2 2
 2 2 2
 1 1
 1 1
 1
 1

Graficamente temos:



Note que a última parte $3'$ é colocada desta forma para afirmar a condição da primeira parte ser marcada, sendo esta a mesma razão do cubo verde na representação gráfica desta partição plana.

Ainda temos um problemas técnico para resolver: Se $c_t = 0$ para algum $t \leq s$. Este caso só será possível se $c_{t+1} = 1$ ou $c_{t+1} = \bar{1}$. Como por exemplo nas partições: $\bar{2} + \bar{1}$, $\bar{2} + 1$, $2 + \bar{1}$, cujas matrizes representantes são:

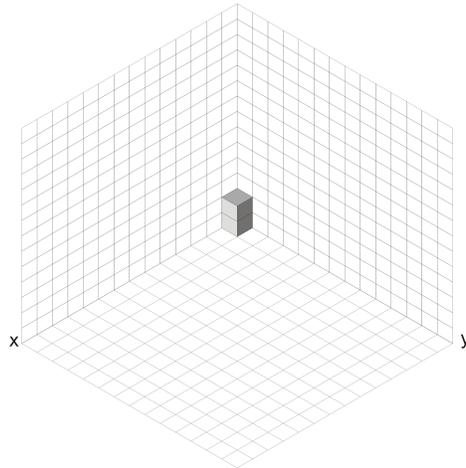
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

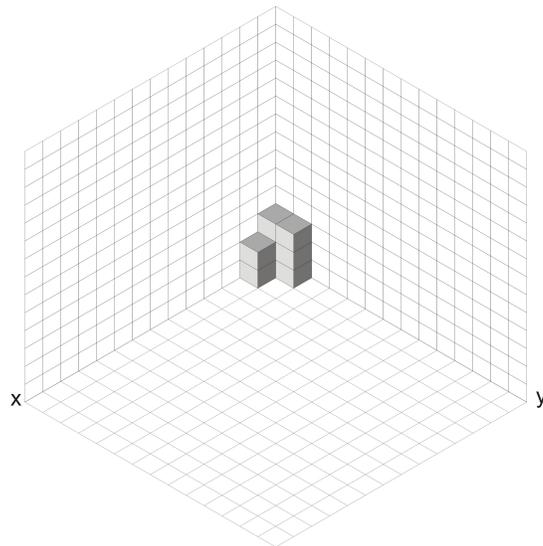
Se $c_t = 0$, considerarmos $c_t = e_t = 1$ na construção da partição plana teremos resolvido este problema. Em contra-partida em toda partição plana em que na construção

da sobrepartição, uma determinada parte sugere uma unidade a mais, como nos exemplos acima, já saberemos a que se refere.

Faremos as construções das partições planas dadas acima. Para a primeira teremos inicialmente:



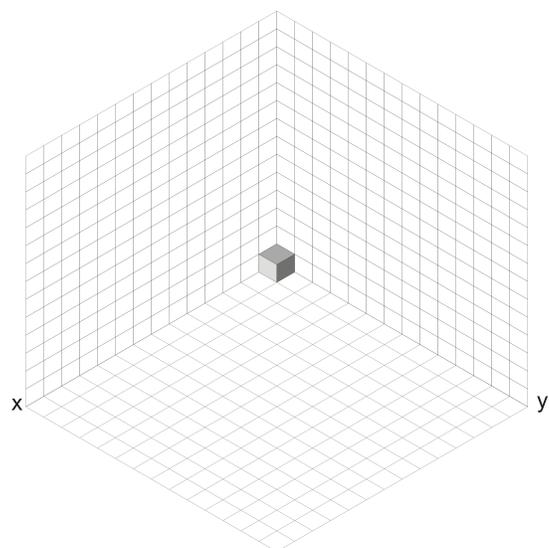
Finalmente teremos:



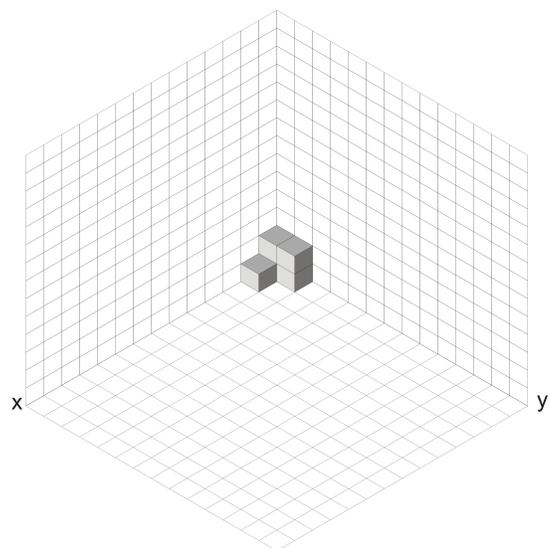
Sendo esta a representação gráfica de:

$$\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ & 2 \end{array}$$

Para a sobrepartição $\bar{2} + 1$, iniciamos com:



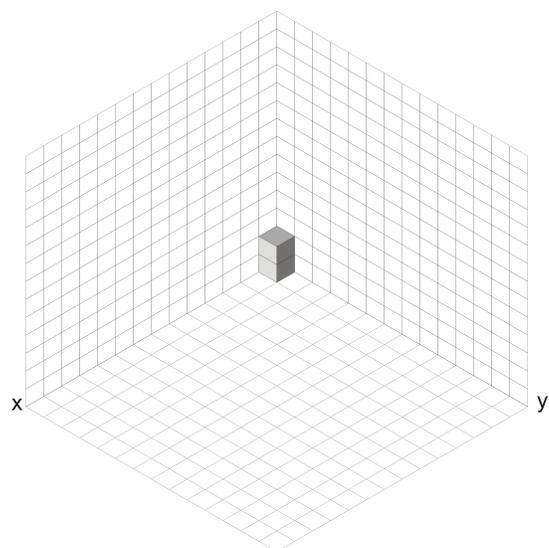
Finalmente teremos:



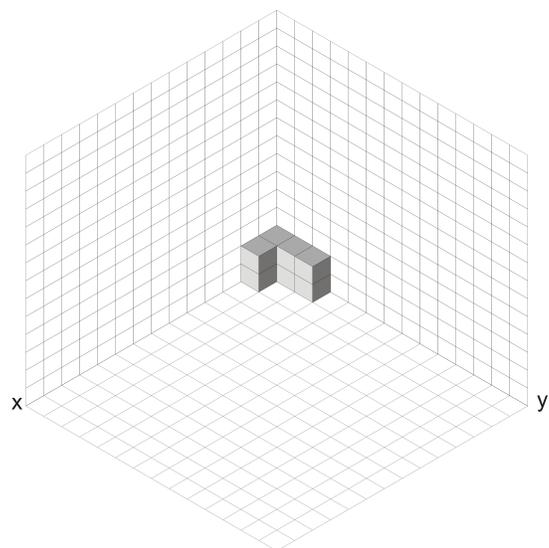
Sendo esta a partição plana:

$$\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \end{array}$$

Para a sobrepartição: $2 + \bar{1}$, temos inicialmente:



Finalmente teremos:



Sendo esta a partição plana:

$$\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 2 \\ 2 \end{array}$$

Capítulo 5

Fórmulas fechadas para o número de partições de inteiros

Neste capítulo vamos exibir uma nova fórmula para número de partições irrestritas de um inteiro. Desenvolveremos um algoritmo que exibe a partição, a partir de sua representação matricial. Isto foi feito de forma a se 'vetorizar' uma partição fazendo uso do teorema 1.6.0.2 presente em [29] e seu corolário.

Neste capítulo não estamos apenas interessados em encontrar uma nova fórmula para $p(n)$, mas fazendo uso dos resultados obtido em [29], desenvolveremos um algoritmo capaz de exibir todas as partições de um dado n . Existe a possibilidade de que este algoritmo seja o mais eficiente para se gerar partições, pela própria proposta do algoritmo em 'vetorizar' uma partição. A prova deste fato será feita de forma detalhada em um próximo trabalho a ser submetido em breve.

Como fora feito nas preliminares, podemos encontrar os d 's em função dos c 's de maneira única, considerando uma representação matricial em termo de duas linhas de uma partição.

O nosso trabalho é encontrar todos os d 's respeitando as restrições abordadas para que tenhamos assim o número de partições de um dado inteiro n em exatamente k partes.

O que devemos fazer agora é contar o número destas matrizes. Então como já descrito acima, agora, uma partição irrestrita é da forma:

$$(d_1 + d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_3 + d_4 \dots + d_k) \dots + d_k = n \quad (5.1)$$

Em posse destas idéias, podemos encontrar uma nova fórmula para se calcular $p(n, k)$, de maneira não-recursiva e bem mais simples do que a fórmula encontrada por Rammanujan, que trabalha com conceitos de análise complexa.

A nova fórmula encontrada é para partições de n em exatamente k partes, onde a última parte, que chamaremos de d_k , vai variar: $1 \leq d_k \leq m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

5.1 O algoritmo

Teorema 5.1.1 *O número de partições de um inteiro n em exatamente k partes,*

$p(n, k) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m + m$, cada ρ_i é:

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1^{(1)}} \left(\left[\frac{n - ik - l_1^{(1)}}{l_1^{(1)}} \right] + \epsilon \right) + \sum_{j_1^{(1)}} \sum_{l_1^{(2)} > l_2^{(2)}} \left(\left[\frac{n - ik - l_1^{(2)} j_1^{(1)} - l_2^{(2)}}{l_2^{(2)}} \right] + \epsilon \right) \\ & \quad + \sum_{j_1^{(2)}, j_2^{(2)}} \sum_{l_1^{(3)} > l_2^{(3)} > l_3^{(3)}} \left(\left[\frac{n - ik - l_1^{(3)} j_1^{(2)} - l_2^{(3)} j_2^{(2)} - l_3^{(3)}}{l_3^{(3)}} \right] + \epsilon \right) + \\ & \dots + \sum_{j_1^{(k-3)}, j_2^{(k-3)}, \dots, j_{k-3}^{(k-3)}} \sum_{l_1^{(k-2)} > \dots > l_{k-2}^{(k-2)}} \left(\left[\frac{n - ik - l_1^{(k-2)} j_1 - l_2^{(k-2)} j_2 \dots - l_{k-2}^{(k-2)}}{l_{k-2}^{(k-2)}} \right] + \epsilon \right) \end{aligned}$$

Onde: $l_u^r = u + 1, \dots, k - 1$, e:

$$j_h^t = 1, 2, \dots, \left[\frac{n - ik - l_1^{t+1} - l_2^{t+1} - \dots - l_{t+1}^{t+1}}{l_h^{t+1}} \right] + \epsilon$$

$$m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$$

ϵ é a função que infere o valor 0, se em $[a]$, $a < 0$, e 1 se $a \geq 0$.

Note que não há razão em se calcular $[a] < 0$, neste caso ϵ será $\epsilon = 0$.

Por exemplo, tome $n = 15$ e $k = 7$, neste caso $m = 2$ e

$$\sum_{l_1} \left(\left[\frac{n - d_k k - l_1}{l_1} \right] + \epsilon \right) = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10, \quad l_1 \text{ varia de } 2 \text{ a } 6; \text{ Para}$$

a segunda soma: $3 \leq l_1 \leq 6$, $2 \leq l_2 \leq 5$, os pares satisfazendo essas desigualdades são: $(3, 2); (4, 2); (4, 3); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5)$, os j 's satisfazendo as

hipóteses são $j_1 = 1, 2$ para $(3, 2)$ e 1 para os outros casos.

Note que $(5, 4); (6, 3); (6, 5)$ não poderá ser contado pela soma, pois ϵ inferirá zero.

$$\text{Então: } \sum_{j_1} \sum_{l_1 > l_2} \left(\left[\frac{n - d_k k - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon \right) = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9,$$

logo $\rho_1 = 19$, e $\rho_2 = 0$,

Portanto: $p(15, 7) = 19 + 2 = 21$.

Demonstração: A partir de (5.1), temos:

$$(d_1 + d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_3 + d_4 \dots + d_k) \dots + d_k = n$$

Note que, de modo geral, em uma partição ela terá partes que são 'carregadas' de outras anteriores, por exemplo, olhe para o segundo e primeiros termos de (5.1). Considere agora, os vetores da forma:

$(d_k, d_{k-1}, \dots, d_2, d_1)$, devemos encontrar vetores dessa forma satisfazendo (5.1).

Para fazer isto, consideremos sequências de vetores como:

$$\begin{array}{ll} (1, 0, \dots, 0, n - k) & (1, 0, \dots, 1, 0, n - k - 3) \\ (1, 0, \dots, 1, n - k - 2) & (1, 0, \dots, 1, 1, n - k - 5) \\ (1, 0, \dots, 2, n - k - 4) & (1, 0, \dots, 1, 2, n - k - 7) \\ (1, 0, \dots, 3, n - k - 6) & (1, 0, \dots, 1, 3, n - k - 9) \end{array}$$

Sem perda de generalidade, para $d_k = 1$, temos:

$$(1, 0, 0, \dots, x, \Delta),$$

x pode variar e permutar em $k - 2$ posições, então teremos a sequência:

$$\begin{array}{lll} (1, 0, \dots, 1, n - k - 2) & (1, 0, \dots, 1, 0, n - k - 3) & (1, 0, \dots, 1, 0, 0, n - k - 4) \\ (1, 0, \dots, 2, n - k - 4) & (1, 0, \dots, 2, 0, n - k - 6) & (1, 0, \dots, 2, 0, 0, n - k - 8) \\ (1, 0, \dots, 3, n - k - 6) & (1, 0, \dots, 3, 0, n - k - 9) & (1, 0, \dots, 3, 0, 0, n - k - 12) \\ (1, 0, \dots, 4, n - k - 8) & (1, 0, \dots, 4, 0, n - k - 12) & (1, 0, \dots, 4, 0, 0, n - k - 16) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (1, 0, \dots, r, n - k - 2r) & \rightarrow (1, 0, \dots, r, 0, n - k - 3r) & \rightarrow (1, 0, \dots, r, 0, 0, n - k - 4r) \end{array}$$

Continuaremos com essa construção até que a condição (5.1) seja satisfeita. Olhando para a sequência formada pela última coordenada destes vetores, esta é uma sequência, formada pelos d' s que satisfazem (5.1), associadas a vetores (que representam partições) com um único elemento não nulo:

$$\begin{array}{ccc}
n - k - 2 & n - k - 3 & n - k - 4 \\
n - k - 4 & n - k - 6 & n - k - 8 \\
n - k - 6 & n - k - 9 & n - k - 12 \\
n - k - 8 & n - k - 12 & n - k - 16 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
n - k - 2r & n - k - 3r & n - k - 4r
\end{array}$$

Não importando qual partição seja, pode-se apenas contar a classe destas partições.

Tomando l_1 a variável que informa a posição de x , na soma geral. Na primeira soma o primeiro l_1 será 2 para $(1, 0, \dots, x, \Delta)$, depois $l_1 = 3$, até $l_1 = k - 1$ para $(1, x, 0, \dots, 0, \Delta)$.

Temos o primeiro termo:

$$\sum_{l_1} \left(\left[\frac{n - ik - l_1}{l_1} \right] + \epsilon \right).$$

Para o segundo, devemos considerar o caso:

$$(i, 0, 0, \dots, x, y, \Delta).$$

Novamente temos:

$$\begin{array}{ccc}
(1, 0, \dots, 1, 1, n - k - 5) & (1, 0, \dots, 2, 1, n - k - 8) & (1, 0, \dots, 3, 1, n - k - 11) \\
(1, 0, \dots, 1, 2, n - k - 7) & (1, 0, \dots, 2, 2, n - k - 10) & (1, 0, \dots, 3, 2, n - k - 13) \\
(1, 0, \dots, 1, 3, n - k - 9) & (1, 0, \dots, 2, 3, n - k - 12) & (1, 0, \dots, 3, 3, n - k - 15) \\
(1, 0, \dots, 1, 4, n - k - 11) & (1, 0, \dots, 2, 4, n - k - 14) & (1, 0, \dots, 3, 4, n - k - 17) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(1, 0, \dots, 1, r, n - k - 2r - 3) & (1, 0, \dots, 2, r, n - k - 2r - 6) & (1, 0, \dots, 3, r, n - k - 2r - 9)
\end{array}$$

De maneira semelhante podemos contar essas permutações, colocando l_1 para controlar as posições de x , e l_2 para y , mas devemos considerar outra variável para controlar a variação de x , digamos j_1 .

Notemos que sempre teremos $l_1 > l_2$, e j_1 depende somente de n , k e l_1 . Então temos:

$$\sum_{j_1} \sum_{l_1 > l_2} \left(\left[\frac{n - ik - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon \right).$$

Análogo ao anterior, a terceira soma trabalha com permutações de x, y , e z não nulos, tal que, o vetor correspondente vem a ser:

$$(1, 0, \dots, x, y, z, \Delta).$$

Novamente temos uma sequência, e uma nova variável para controlar: y . Para tal, devemos considerar j_2 , somente dependendo de n, k, l_1 , e l_2 .

Feito isso, temos:

$$\sum_{j_1, j_2} \sum_{l_1 > l_2 > l_3} \left(\left[\frac{n - ik - k^2 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon \right)$$

E até a soma final, o raciocínio é análogo. Devemos fazê-lo para todos os d'_k s, $1 \leq i = d_k \leq m = \frac{n}{k}$.

Então no final temos:

$$p(n, k) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{m-1} + m$$

O m na soma refere-se a partições da forma: $(i, 0, 0, \dots, 0, n - ik)$, que são contadas separadamente.

Somamos para ρ_1 até ρ_{m-1} , deixando ρ_m , porque, sempre $\rho_m = 0$.

Exemplo 5.1.1 Para $n = 20$, e $k = 5$, sabemos(usando o Maple), que $p(20, 5) = 84$, faremos isso usando a nossa nova fórmula.

Temos que $m = 4$, e a primeira parte da soma, com $i = 1$, têm-se:

$$\sum_{l_1} \left[\frac{15-l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 15, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4.$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[\frac{15-l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 29;$$

$$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[\frac{15-l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 9, \text{ e neste caso } \epsilon \text{ administra } 0 \text{ a duas partes;}$$

Deste modo $\rho_1 = 53$.

Agora faremos o caso $i = 2$, seguindo de forma análoga, temos:

$$\sum_{l_1} \left[\frac{10-l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 10, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4;$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[\frac{10-l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 11;$$

$$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[\frac{10 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 1;$$

Portanto $\rho_2 = 22$.

Na penúltima rodada de contas, temos:

$$i = 3, \sum_{l_1} \left[\frac{5 - l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 4, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4;$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[\frac{5 - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 1$$

$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[\frac{5 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 0$, porém não é necessário que se faça muitas contas, basta notar que em $(3, 1, 1, 1, \Delta)$, Δ ultrapassa 20.

E sempre para $\rho_4 = 0$, mesmo sabendo que temos uma partição do tipo: $(4, 0, 0, 0, 0)$, que é equivalente a partição: $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, porém esse número irá ser contado a parte.

$$\text{Portanto: } p(20, 5) = 53 + 22 + 5 + 0 + 4 = 84.$$

Foram feitas algumas simulações computacionais, utilizando o software Matlab.

Segue abaixo um esquema do algoritmo baseado no teorema anterior, e o código da implementação.

Algoritmo 1 Alegri

Entrada: Inteiros n e k , $k < n$
Saída: Matriz D de k colunas, onde cada linha é uma partição

- 1: $m \leftarrow \lfloor n/k \rfloor$
- 2: $D \leftarrow \begin{pmatrix} n-1k & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n-2k & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-mk & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$
- 3: $M \leftarrow$ número de linhas de D
- 4: $v \leftarrow (1 \ 2 \ \dots \ M)$
- 5: **enquanto** v não estiver vazio **faça**
- 6: $d \leftarrow v_1$ -ésima linha de D
- 7: $v \leftarrow v$ com seu primeiro elemento excluído
- 8: $p \leftarrow$ posição seguinte à do último elemento não nulo de $(d_1 \ \dots \ d_{k-1})$
- 9: **para** $i = p$ à $\min(k-1, d_1)$ **faça**
- 10: $m \leftarrow \lfloor d_1/i \rfloor$
- 11: $E \leftarrow \begin{pmatrix} d_1-j & d_2 & \dots & d_{j-1} & d_j+1 & d_{j+1} & \dots & d_k \\ d_1-2j & d_2 & \dots & d_{j-1} & d_j+2 & d_{j+1} & \dots & d_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1-mj & d_2 & \dots & d_{j-1} & d_j+m & d_{j+1} & \dots & d_k \end{pmatrix}$
- 12: $D \leftarrow \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$
- 13: $M \leftarrow$ número de linhas de D
- 14: **se** $i < k-1$ **então**
- 15: $\tilde{v} \leftarrow (M+1 \ M+2 \ \dots \ M + \lfloor (d_1 - (i+1))/i \rfloor)$
- 16: $v \leftarrow (v \ \tilde{v})$
- 17: **finaliza se**
- 18: **finaliza para**
- 19: **finaliza enquanto**

```

function D = alegri(n,k)

m = floor(double(n)/double(k));
D = [n-(1:m)*k zeros(m,k-2) (1:m)'];
v = 1:size(D,1);

while numel(v)
    d = D(v(1),:);
    v = v(2:end);
    p = find(d(1:end-1),1,'last')+1;

    for i = p:min(k-1,d(1))
        M = floor(d(1)/i);
        E = repmat(d,M,1);
        E(:,1) = E(:,1) - (1:M)*i;
        E(:,i) = E(:,i) + (1:M)';
        N = size(D,1);
        D = [D; E];      %%ok<AGROW>
        if i < k-1
            v = [v N+1:N+floor((d(1)-(i+1))/i)]; %%ok<AGROW>
        end
    end
end
end

```

5.2 Algumas aplicações

Utilizando o algoritmo desenvolvido na seção anterior podemos encontrar fórmulas fechadas para algumas classes de partições e sobrep partições estudadas nos capítulos 2 e 3 deste trabalho. Deste modo pode-se utilizar os corolários abaixo para se obter novas fórmulas para o cálculo do número de partições e sobrep partições com as dadas restrições.

Corolário 5.2.1 *O número de partições de n em exatamente s partes em que cada parte é maior do que ou igual a α é igual ao número de partições de $n - s\alpha$ em no máximo s partes.*

Observando que para uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$, em que cada parte é maior do que ou igual a α , tem-se:

$$(d_1 + d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_2 + d_3 \dots + d_k) + (d_3 + d_4 \dots + d_k) \dots + d_s = n - s\alpha$$

No terceiro capítulo, seção 3, tratamos do caso de sobrep partições em partes distintas.

Neste caso de partições, a relação é válida: $p_d(n, s) = p(n - s)$, onde $p_d(n)$ é o número de partições de n em partes distintas. No caso de sobrep partições teremos apenas uma restrição para cada parte: ela está ou não marcada.

Deste modo, seja $s_d(n)$ o número de sobrep partições em partes distintas.

É fácil ver que

$$s_d(n) = p_d(n) \left(1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right) = 2^n p_d(n) \quad (5.2)$$

Usando a fórmula desenvolvida neste capítulo, é possível calcular o valor de $s_d(n)$ para qualquer n .

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews,G.E.,Eriksson,K. **Integer Partitions**, Cambridge University Press,2004.
- [2] Andrews, G.E.,Berndt,B.C; **Ramanujan’s Lost Notebook**, Part I, Springer Science+Business Media,2009.
- [3] Andrews, G.E.,Berndt,B.C; **Ramanujan’s Lost Notebook**, Part II, Springer Science+Business Media,2009.
- [4] Andrews, G.E., **Partitions: yesterday and today** New Zealand Math. Soc., Wellington (1979).
- [5] Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R.;**Special Functions**, Cambridge University Press,1999.
- [6] Andrews, G.E., The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota, Editor), Vol. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [7] Bailey, W.N., **Some Identities In Combinatory Analisis**,Cambridge, 1942.
- [8] Berndt,B.C; **Ramanujan’s Notebooks**, volI, Springer-Verlag New York Inc.,1985.
- [9] Berndt,B.C; **Ramanujan’s Notebooks**, volII, Springer-VerlagNew York Inc.,1989.
- [10] Berndt,B.C; **Ramanujan’s Notebooks**, volIII, Springer-VerlagNew York Inc.,1991.
- [11] Berndt,B.C; **Ramanujan’s Notebooks**, volIV, Springer-VerlagNew York Inc.,1994.
- [12] Berndt,B.C; **Ramanujan’s Notebooks**, volV, Springer-VerlagNew York Inc.,1998.
- [13] Brietzke,E.H.M.,Santos,J.P.O.,Silva,R. **Bijective profss using two-line matrix representations for partitions**, The Ramanujan Journal , aceito.
- [14] Brietzke,E.H.M.,Santos,J.P.O.,Silva,R. **Combinatorial interpretations as two-line array for the Mock Theta Functions**,The Ramanujan Journal , aceito.

- [15] Edward, A.B., Knuth, D.E., **Enumeration of Plane Partitions**, Journal of Combinatorial Theory(A), (1972), 39-54.
- [16] Euler, L. **De partitione numerorum, Introductio in Analysin Infinitorum, Caput XVI** (1753), in: Leonardi Euleri Opera Omnia, A. Kratzer, F. Rudio (Eds.), Teubner, Leipzig, 1911.
- [17] Jackson, F. H. "Examples of a Generalization of Euler's Transformation for Power Series." Messenger Math. 57, 169-187, 1928.
- [18] Lovejoy, J. **Gordon's theorem for overpartitions**, J. Comb. Theory Ser. A. 103 (2003), 393-401.
- [19] Lovejoy, J., **Overpartitions**, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 1623-1635.
- [20] Lovejoy, J., **Overpartitions Pairs**, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), 781-794.
- [21] Lovejoy, J. **Overpartition theorems of the Rogers-Ramanujan type**, J. London Math. Soc. 69 (2004), 562-574.
- [22] Lovejoy, J. **Overpartitions and real quadratic fields**, J. Number Theory 106 (2004), 178-186.
- [23] Lovejoy, J. **Partitions and overpartitions with attached parts**, Arch. Math. 88 (2007), 316-322.
- [24] Pak, I., **Partition Bijections, a Survey**, Ramanujan Journal, vol. 12, 5-75, 2006.
- [25] Ribeiro, A.C., Aspectos Combinatórios de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan, Ph.D. Thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [26] Rogers, L.J. **On two theorems of combinatory analysis and some allied identities**, Proc. London Math. Soc. 25 (1917), 315-336.
- [27] Rogers, L.J. **Second memoir on the expansion of certain infinite products**, Proc. London Math. Soc. 25 (1894), 318-343.
- [28] Santos, J.P.O., Silva, R., A combinatorial proof for an identity involving partitions with distinct odd parts, South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, aceito.
- [29] Santos, J.P.O., Mondek, P., Ribeiro, A.C., **New two line arrays representing partitions**, Annals of Combinatorics, aceito.

- [30] Sills, A.V. **A Partition Bijection Related to the Rogers-Selberg Identities and Gordon's Theorem**, Journal of Combinatorial Theory Series A(2007).
- [31] Sills, A.V., **Identities of Rogers-Ramanujan-Bailey Type**, International Journal of Number Theory.
- [32] Slater, L.J., **Further identities of the Rogers-Ramanujan type**, Proc. London Math. Soc.(2) 54(1952).