UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JAMIELLI TOMAZ PEREIRA

Generalização das Condições de Otimalidade para Problemas de Controle Ótimo com Restrições Mistas

Campinas

2020

Jamielli Tomaz Pereira

Generalização das Condições de Otimalidade para Problemas de Controle Ótimo com Restrições Mistas

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Roberto Andreani

Coorientador: Valeriano Antunes de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Jamielli Tomaz Pereira e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414g

Pereira, Jamielli Tomaz, 1991-
Generalização das condições de otimalidade para problemas de controle ótimo com restrições mistas / Jamielli Tomaz Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Roberto Andreani.
Coorientador: Valeriano Antunes de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Controle ótimo. 2. Condições de qualificação. 3. Condições de otimalidade. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Oliveira, Valeriano Antunes de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Generalization of optimality conditions for optimal control problems with mixed constraints
Palavras-chave em inglês:
Optimal control
Constraint qualifications
Optimality conditions
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutora em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Geraldo Nunes Silva
José Mario Martínez Pérez
Leonardo Delarmelina Secchin
Jose Alberto Ramos Flor
Data de defesa: 03-04-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-1642-2024
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/2961411469597684

Tese de Doutorado defendida em 03 de abril de 2020 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). GERALDO NUNES SILVA

Prof(a). Dr(a). JOSÉ MARIO MARTÍNEZ PÉREZ

Prof(a). Dr(a). LEONARDO DELARMELINA SECCHIN

Prof(a). Dr(a). JOSE ALBERTO RAMOS FLOR

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Àqueles que não tem o privilégio de sonhar

Agradecimentos

Não dá para elaborar agradecimentos apenas destes quatro anos de doutorado, para chegar até aqui houve uma construção de mais de 28 anos. Por isso, meu agradecimento se inicia com os meus avós, com histórias de vida de superação e garra, venceram a miséria e se superaram para criar seus filhos da maneira que podiam. Comiam o que a terra lhes dava, sem acesso as facilidades das diferentes tecnologias. Sou muito grata aos meus pais Carlos e Lucimar, que seguindo o exemplo de seus pais sempre batalharam para criar minha irmã e eu da melhor maneira que podiam. Meu pai que trabalhou dia e noite, e minha mãe que estava presente o tempo todo lidando com todo serviço diário de uma casa e criação de duas filhas. Com vocês eu aprendi a ser esforçada e guerreira, isso me ajudou a superar estes 10 anos de vida acadêmica, anos bem desafiadores. Agradeço também a minha irmã Janaina, que compartilhou a vida comigo. Maninha, você como minha irmã mais velha foi a minha primeira orientadora, eu seguia os seus passos, com você eu aprendi a falar, andar, brincar e até estudar, as suas tarefas "avançadas" me motivavam a aprender mais, você foi e sempre será minha companheira de vida. Muito obrigada pelo apoio incondicional de vocês, obrigada por acreditarem em mim e obrigada pela paciência que sempre tiveram comigo. O agradecimento se estende a toda minha família que esteve com meus pais, minha irmã e eu, compartilhando as alegrias, tristezas e obrigações. Meu muito obrigada a vocês de coração.

Ao longo do ensino básico muitas pessoas e fatos foram essenciais para que eu chegasse a universidade. Gostaria de agradecer a todos os meus professores e colegas da educação básica. Agradeço também a oportunidade de fazer aulas de ballet clássico, estas aulas me ensinaram disciplina e perseverança, eu com certeza precisei disso ao longo destes 10 anos de vida acadêmica. Sou grata aos amigos que trago até hoje desta época de escola básica, Ingrid, Lucas, Victor, Gustavo e Arthur, com eles eu aprendi a estudar em grupo, além também dos amigos Paulo Henrique e Evertton. Muito obrigada a vocês por todos os momentos de amizade, de diversão, de comilança e de estudos. A Ingrid, em particular, me apresentou mais de perto as oportunidades da universidade, com ela eu dei os meus primeiros passos acadêmicos com o projeto de iniciação científica do ensino médio, muito obrigada Ingrid e Alessandro, meu orientador.

Agradeço ao meu marido José Herelis. Ele enfrentou comigo estes 10 anos turbulentos de graduação, mestrado e doutorado. Não sei quem é mais guerreiro você ou eu, afinal são momentos críticos e desesperadores. Muito obrigada pelo companheirismo, pelo amor, pelo apoio, pela paciência, pelos debates, por tudo, tudo mesmo. Você com certeza tem uma parcela de culpa enorme nesta conquista. Eu te amo muito! O agradecimento se estende a toda família Carnaúba, muito obrigada pelo apoio e acolhimento.

O agradecimento agora vai para os principais responsáveis pela realização deste trabalho, meus orientadores. Começo agradecendo ao Geraldo, que aceitou me orientar no meu primeiro ano de graduação e me apresentou o Valeriano que me orientou na iniciação científica pelos outros três anos de graduação. Muito obrigada Valeriano pela orientação, pelos momentos de aprendizagem e amadurecimento. E obrigada também, por me apresentar ao Nino. Obrigada a você Nino, pela orientação e por todos os momentos de discussão. Sou muito grata a vocês, Valeriano e Nino, por conduzirem tão bem o trabalho, sempre que eu discutia com vocês me sentia motivada a continuar e aprender cada vez mais.

Agradeço também tudo que a Unesp de Rio Preto me proporcionou nos 4 anos de graduação. Agradeço toda a sua estrutura para que eu pudesse viver minha graduação da melhor forma possível. Começo agradecendo ao programa de moradia estudantil, que me proporcionou uma casa e meios de viver. A moradia estudantil me deu companheiros e amigos, que me ensinaram a viver de maneira coletiva com pessoas de diferentes contextos. As pessoas da moradia me ajudaram e muito a superar os desafios da vida e do curso. Muito obrigada a todos, em especial as meninas do 1D. Agradeço o PET matemática pelo acolhimento e por todos os momentos de aprendizado, fazer parte deste grupo com certeza foi muito importante para a conquista deste título de doutora. Muito obrigada a todos do grupo e a Gorete, nossa tutora. Agradeço também todos os professores maravilhosos do Ibilce que foram muito importantes na minha formação. Durante a graduação eu convivi com pessoas de todos os cursos praticamente, sou grata a todos que influenciaram nestes anos, em especial agradeço aos meus amigos de turma que estiveram comigo do começo ao final do curso, compartilhando vários momentos de aprendizado e desespero comigo. Muitíssimo obrigada Ibilce.

Agradeço a Unicamp por tudo. Até hoje eu olho para este lugar deslumbrada com a sua estrutura, este lugar é magnífico e inspirador para quem quer estudar e conviver com as diferenças. Muito obrigada por estes 6 anos. Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação na Unicamp. Sou grata a todas as pessoas que me acolheram e que eu convivi nestes 6 anos de Unicamp. A pós graduação não é o melhor momento da vida para fazer amigos, já que na maior parte do tempo ficamos solitários, mas eu felizmente tive o apoio de várias pessoas e sou muito grata a elas. Sou grata aos meus companheiros de disciplinas, em especial a Fernanda, às meninas que dividiram casa comigo, aos colegas do grupo de otimização, aos companheiros de predinho, a todos os amigos do Ibilce que também se tornaram amigos da Unicamp, em especial Fred, Wender e Mayara, e aos meus vizinhos e amigos Angelica e Reginaldo. Agradeço também ao IMECC e ao programa de pós graduação em matemática aplicada do IMECC, aos funcionários da Unicamp, em especial aos da secretaria, limpeza, informática e logística.

Agradeço aos membros da banca, Geraldo, Mario, Leonardo, Alberto, Paulo,

Estevão e Elizabeth por aceitaram o convite.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) sob o Processo 2015/25610-1. Através deste incentivo tornaram possível a conclusão deste doutorado.

"Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos"

(Isaac Newton)

Resumo

Temos por objetivo principal nesta tese de doutorado a generalização de condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, o celebrado Princípio do Máximo de Pontryagin, e de segunda ordem para problemas de controle ótimo com restrições de igualdade e desigualdade. As restrições consideradas são do tipo mistas, envolvendo ambas as variáveis de estado e de controle. O princípio do máximo foi estudado no contexto não suave, fizemos uso do subdiferencial limite (de Mordukhovich) e do subdiferencial de Clarke. As condições necessárias de otimalidade são obtidas sob novas qualificações de restrições do tipo posto constante, que generalizam a condição de posto completo.

Palavras-chave: controle ótimo. qualificação de restrições. condições necessárias de otimalidade.

Abstract

The main objective in this Ph.D.'s thesis is the generalization of first-order, the celebrated Pontryagin Maximum Principle, and second-order necessary optimality conditions for optimal control problems with equality and inequality constraints. The constraints to be considered are of mixed type, involving both the state and control variables. The maximum principle has been studied in the nonsmooth setting, the limiting (Mordukhovich's) subdifferential and the Clarke's subdifferential have been used. The necessary optimality conditions are obtained under new constraint qualifications of constant rank type, that generalizes the full rank condition.

Keywords: optimal control. constraint qualifications. necessary optimality conditions.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relações entre as qualificações de restrições. 24
Figura 2 – Exemplo 2.1 (i) 26
Figura 3 – Exemplo 2.1 (ii) 26
Figura 4 – Exemplo de uma função semicontínua inferior em x_0, mas que não é semicontínua inferior em x_1. 28
Figura 5 – Exemplo 2.2 (i) 29
Figura 6 – Exemplo 2.2 (ii) 29
Figura 7 – Exemplo 2.3 30
Figura 8 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso convexo, autônomo e sem a divisão do controle. 57
Figura 9 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não convexo, autônomo e sem a divisão do controle. 57
Figura 10 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não autônomo e com a divisão do controle. 58
Figura 11 – Atualização das relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não autônomo e com a divisão do controle. 70
Figura 12 – Atualização das relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não convexo, autônomo e sem a divisão do controle. . . . 71

Lista de abreviaturas e siglas

KKT	Karush-Kuhn-Tucker
CQ	*Constraint Qualification*
LICQ	*Linear Independence Constraint Qualification*
MFCQ	*Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification*
CRCQ	*Constant Rank Constraint Qualification*
LI	Linearmente Independente
RCRCQ	*Relaxed Constant Rank Constraint Qualification*
PLI	Positivamente Linearmente Independente
PLD	Positivamente Linearmente Dependente
CPLD	*Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification*
RCPLD	*Relaxed Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification*
q.t.	quase todo
CI	Condição de Interioridade
PC	Condição de Posto Completo
PC1	Condição de Posto Completo dada por $\bar{\Upsilon}_1(t)$
PC2	Condição de Posto Completo dada por $\bar{\Upsilon}_2(t)$
PC3	Condição de Posto Completo dada por $\bar{\Upsilon}_3(t)$
PC4	Condição de Posto Completo dada por $\bar{\Upsilon}_4(t)$
CCQ	*Calibrated Constraint Qualification*
MFC	*Mangasarian-Fromovitz Condition*
WBCQ	*Weak Basic Constraint Qualification*
CR	Condição de Regularidade
CPCI	Condição de Posto Constante para o Problema de Controle Ótimo com Restrições de Igualdade

CPCID	Condição de Posto Constante para o Problema de Controle Ótimo com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Lista de símbolos

$B(x, r)$	Bola aberta de centro x e raio r
B	Bola fechada unitária centrada na origem
$\text{span}\{v_i\}_{i=1}^p$	Subespaço gerado pela família de vetores $\{v_i\}_{i=1}^p, v_i \in \mathbb{R}^q \ \forall i$
$\lvert \cdot \rvert$	Norma euclidiana ou a norma matricial induzida
$x \cdot y$	Produto interno usual entre $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$
$N_C^P(x)$	Cone normal proximal a C em x
$N_C(x)$	Cone normal limite a C em x
$x_i \overset{C}{\to} x$	$x_i \to x$ e $x_i \in C \, \forall \, i$
$epi\, f$	Epígrafo da f
$\text{int}\{C\}$	Interior de C
$\text{fr}\{C\}$	Fronteira de C
$dom\, f$	domínio (efetivo) da f
$\partial^P f(x)$	Subdiferencial proximal de f em x
$\partial f(x)$	Subdiferencial limite de f em x
$\partial_P^\infty f(x)$	Subdiferencial proximal assintótico de f em x
$\partial^\infty f(x)$	Subdiferencial limite assintótico de f em x
$x_i \overset{f}{\to} x$	$x_i \to x$ e $f(x_i) \to f(x) \, \forall \, i$
$f^0(x, v)$	Derivada direcional generalizada de f em x na direção v
$\bar{\partial} f(x)$	Subdiferencial de Clarke
$\text{co}(C)$	Envoltório convexo do conjunto C
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente de f
$\nabla F(x)$	Jacobiana de F
$\Psi_C(x)$	Função indicadora do conjunto C no ponto x

$Gr\, F$	Gráfico de uma multifunção F
$\mathcal{L}$	Subconjuntos de Lebesgue do intervalo $[0, 1]$
$\mathcal{B}^n$	Conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$	σ-álgebra produto
$W^{1,1}(T; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções absolutamente contínuas
$L^\infty(T; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções essencialmente limitadas
$L^1(T; \mathbb{R}^p)$	Espaço das funções integráveis
I	Matriz identidade
A^+	Pseudoinversa de Moore-Penrose de A

Sumário

1 INTRODUÇÃO 18

2 PRELIMINARES 20
2.1 O Problema de Programação Não Linear 20
2.1.1 Qualificações de Restrições 22
2.2 Análise Não Suave 25
2.3 Princípio do Máximo Não Suave 35

3 RESULTADOS AUXILIARES 39

4 CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE DE PRIMEIRA ORDEM PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES MISTAS 48
4.1 Problema de Controle Ótimo com Restrições Mistas 49
4.2 Hipóteses Básicas 51
4.3 Qualificações de Restrições 51
4.4 Generalização da Condição de Posto Completo 58
4.4.1 Problema com Restrições Mistas de Igualdade 58
4.4.1.1 Caso Linear 58
4.4.1.2 Caso Não Linear 64
4.4.2 Problema com Restrições Mistas de Igualdade e Desigualdade 71

5 CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE DE SEGUNDA ORDEM PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES MISTAS 76
5.1 Problema de Controle Ótimo com Restrições Mistas 77
5.2 Condição Necessária de Segunda Ordem 79
5.3 Generalização da Condição Necessária de Segunda Ordem 80

6 CONCLUSÃO 82

REFERÊNCIAS 83

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS 87

1 Introdução

Na teoria de otimização, as qualificações de restrições (CQ, do inglês *Constraint Qualification*) são reconhecidamente importantes. Em um problema de programação não linear clássico com restrições de igualdade e desigualdade, em que as funções são suaves, sabemos que as soluções ótimas satisfazem regras de multiplicadores de Lagrange. Por exemplo, a de Fritz John, que é uma condição necessária de otimalidade genuína. Entretanto, esta regra permite que o multiplicador associado à função objetivo seja nulo, de modo que perdemos informações importantes do problema. Uma regra em que tal multiplicador seja não nulo é crucial, para que todas as informações sobre o problema sejam levadas em consideração. Essa regra, que nem sempre é válida, é conhecida como condição de Karush-Kuhn-Tucker (ou condição de KKT). As qualificações de restrições desempenham um papel fundamental para garantir a validade da condição de KKT.

As qualificações de restrições são igualmente importantes em outros tipos de problemas de otimização. Em particular, na teoria de controle ótimo. Assim como acontece com a condição de KKT que não é, em geral, válida em minimizadores, precisa-se assumir alguma qualificação de restrição. No caso de problemas de controle ótimo com restrições mistas[1] de igualdade e desigualdade, geralmente, o princípio do máximo não é uma condição necessária de otimalidade. Alguma hipótese de regularidade (qualificação de restrição) deve ser assumida sob as restrições. Entretanto, a bibliografia para este assunto em controle ótimo não é tão rica como para problemas de otimização em dimensão finita.

O objetivo deste trabalho é propor qualificações de restrições no contexto de controle ótimo de modo que generalizem ou sejam uma alternativa às qualificações de restrições já existentes, expandindo assim o número de problemas que esta importante ferramenta do controle ótimo, o princípio do máximo, pode ser aplicada. Três qualificações de restrições são propostas. Uma condição de regularidade que generaliza a condição de posto completo para o problema de controle ótimo com restrições lineares mistas de igualdade e duas condições do tipo posto constante que generalizam uma condição de posto completo para o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade e para o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade e desigualdade. É de grande importância prática a validade do princípio do máximo sob condições de posto constante, pois dessa forma o resultado pode ser aplicado para problemas com restrições redundantes. Na prática durante o processo de modelagem, restrições redundantes podem aparecer e não é tão simples constatar a presença das redundâncias, principalmente se as restrições forem não lineares. Além disso, generalizamos também a condição necessária de otimalidade de segunda ordem para o problema de controle ótimo com restrições mistas

[1] As restrições de igualdade e desigualdade envolvem as variáveis de estado e de controle.

de igualdade.

A fim de atingir este objetivo são apresentados o problema de programação não linear, as qualificações de restrições no contexto de dimensão finita importantes para o desenvolvimento deste trabalho, algumas demonstrações da condição de KKT e da condição necessária de segunda ordem. O problema de controle ótimo considerado neste trabalho tem dados possivelmente não suaves. Segundo Clarke [1] dados não suaves surgem naturalmente no cenário de controle ótimo. Apresentamos então algumas definições e resultados de análise não suave como pré-requisito. É feita também uma revisão bibliográfica sobre as qualificações de restrições no contexto de controle ótimo e as várias versões do princípio do máximo para problemas de controle ótimo no contexto não suave com e sem restrições mistas de igualdade e desigualdade.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. No capítulo seguinte são dadas as preliminares. No Capítulo 3 apresentamos resultados auxiliares. No Capítulo 4, definimos o problema principal, apresentamos as qualificações de restrições da literatura e as três qualificações de restrições que generalizam condições de posto completo para três problemas de controle ótimo com restrições mistas. No Capítulo 5 generalizamos a condição necessária de segunda ordem. E para finalizar, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões e trabalhos futuros.

2 Preliminares

Neste capítulo veremos algumas teorias básicas para o estudo das condições necessárias de otimalidade para o problema de controle ótimo com restrições mistas, que é o foco principal deste trabalho. As teorias básicas são programação não linear, análise não suave e o princípio do máximo não suave.

O problema de programação não linear é relevante para o trabalho, mesmo sendo de dimensão finita, pois a teoria que propomos estudar em controle ótimo é baseada na teoria de programação não linear. Em programação não linear a condição de KKT nem sempre é válida sobre minimizadores na presença de restrições e precisamos assumir uma hipótese de regularidade sob as restrições, a qualificação de restrição. Isso também acontece no controle ótimo. Precisamos assumir uma hipótese (no contexto de dimensão infinita) sob as restrições para garantir a validade do princípio do máximo. Sob uma qualificação de restrição, a condição de KKT e o princípio do máximo são condições necessárias de otimalidade para os problemas de programação não linear e de controle ótimo, respectivamente. Diferentemente da programação não linear, que já tem uma teoria avançada em qualificações de restrições (ver [2–7]), isso não acontece com controle ótimo, que tem pouquíssimas qualificações de restrições (ver [8–16]), ainda bem restritivas.

A teoria de análise não suave é também fundamental, pois o problema principal deste trabalho está no contexto não suave. Desse modo precisaremos conhecer algumas definições e propriedades.

O problema de controle ótimo, foco do trabalho, tem restrições mistas de igualdade e desigualdade, mas será importante também conhecer o problema sem restrições e seu princípio do máximo. Este princípio do máximo também será usado nas demonstrações dos resultados para os problemas com restrições.

2.1 O Problema de Programação Não Linear

As principais referências para esta seção são Ribeiro e Karas [17], Andreani, Echagüe e Schuverdt [18] e Andreani, Martínez e Schuverdt [3].

Um problema de programação não linear pode ser posto como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = 0, \\ & g(x) \leqslant 0, \end{array} \qquad (PNL)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são funções de classe C^2. O conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0, g(x) \leqslant 0\}$$

é o conjunto viável. Um ponto x^* é viável se $x^* \in \Omega$.

Definição 2.1. *Seja $x^* \in \Omega$. Uma restrição de desigualdade $g_i, i \in \{1, \ldots, p\}$, é dita ativa em x^* se $g_i(x^*) = 0$. Vamos denotar por $I(x^*)$ o conjunto de índices das restrições de desigualdade ativas em um ponto viável x^*, isto é,*

$$I(x^*) = \{i \in \{1, \ldots, p\} | g_i(x^*) = 0\}.$$

Definição 2.2. *Dizemos que $x^* \in \Omega$ é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leqslant f(x)$ para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$.*

Definição 2.3. *(Condição de KKT) Seja $x^* \in \Omega$. A condição de KKT é satisfeita em x^* se existem vetores $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tais que*

$$\begin{aligned} -\nabla f(x^*) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla g_i(x^*), \\ \mu_i^* &\geqslant 0, \ i = 1, \ldots, p, \\ \mu_i^* g_i(x^*) &= 0, \ i = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Definição 2.4. *(Condição de Segunda Ordem Forte) [18] Seja $x^* \in \Omega$. A condição de segunda ordem forte é satisfeita em x^* se existem vetores $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ tais que são válidas a condição de KKT e*

$$d^\top [\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla^2 g_i(x^*)] d \geqslant 0,$$

para toda direção $d \in \mathbb{R}^n$ no seguinte cone crítico forte:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^n : &\nabla h_i(x^*)^\top d = 0, \ i = 1, \ldots, m, \\ &\nabla g_j(x^*)^\top d = 0, \ j \in I^+(x^*), \\ &\nabla g_j(x^*)^\top d \leqslant 0, \ j \in I^0(x^*)\}, \end{aligned}$$

onde

$$I^+(x^*) = \{j \in I(x^*) : \mu_j > 0\} \text{ e } I^0(x^*) = \{j \in I(x^*) : \mu_j = 0\}.$$

Definição 2.5. *(Condição de Segunda Ordem Fraca) [18] Seja $x^* \in \Omega$. A condição de segunda ordem fraca é satisfeita em x^* se existem vetores $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ tais que são válidas a condição de KKT e*

$$d^\top [\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla^2 g_i(x^*)] d \geqslant 0,$$

para toda direção $d \in \mathbb{R}^n$ no seguinte cone crítico fraco:

$$T(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_i(x^*)^\top d = 0, \ i = 1, \ldots, m, \nabla g_j(x^*)^\top d = 0, \ j \in I(x^*)\}.$$

Observação 2.1. *A condição de segunda ordem forte implica a condição de segunda ordem fraca.*

2.1.1 Qualificações de Restrições

As qualificações de restrições (CQ) são condições impostas sob as restrições de igualdade e desigualdade de (PNL) para garantir que um minimizador satisfaz a condição de KKT. Ou seja, para problemas que satisfazem alguma qualificação de restrição, a condição de KKT é uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem. Existem várias qualificações de restrição na literatura (ver [2–5, 7, 19, 20]). As de interesse para este trabalho são: qualificação de restrição de independência linear (LICQ), qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ), qualificação de restrição de posto constante (CRCQ), qualificação de restrição de posto constante relaxada (RCRCQ), qualificação de restrição de dependência linear positiva constante (CPLD) e qualificação de restrição de dependência linear positiva constante relaxada (RCPLD). Algumas referências destas qualificações de restrições são [2], [5], [6] e [4].

A qualificação de restrição pode ou não ser de segunda ordem. Se for, garante que um minimizador satisfaz as condições de segunda ordem forte e fraca, definidas acima. Isto é, as condições de segunda ordem forte e fraca são condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para problemas que satisfazem alguma qualificação de restrição de segunda ordem. Já foi mostrado na literatura, ver [18, 20], que LICQ e CRCQ são qualificações de restrição de segunda ordem.

Definição 2.6. *Dizemos que a qualificação de restrição de independência linear (LICQ) é satisfeita em $x^* \in \Omega$ quando o conjunto formado pelos gradientes das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade ativas é linearmente independente, isto é,*

$$\{\nabla h_i(x^*)\}_{i=1}^m \cup \{\nabla g_i(x^*)\}_{i \in I(x^*)} \text{ é LI.}$$

A LICQ é a qualificação de restrição mais conhecida da literatura e também a mais restritiva.

Definição 2.7. *A qualificação de restrição de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) é satisfeita em $x^* \in \Omega$ quando os gradientes das restrições de igualdade são linearmente independentes e existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla h_i(x^*)^\top d = 0 \text{ e } \nabla g_j(x^*)^\top d < 0,$$

para todo $i = \{1, \ldots, m\}$ e $j \in I(x^*)$.

Para problemas com restrições de igualdade e desigualdade, pedir MFCQ é pedir menos que LICQ. Para problemas com restrições de igualdade apenas, as condições LICQ e MFCQ são iguais.

Definição 2.8. *Dada uma família de funções diferenciáveis $\{f_i(x) : i = 1, \ldots, r\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dizemos que a condição de posto constante vale em $x^* \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se,*

para qualquer subconjunto $K \subset \{i \in \{1,\dots,r\} : f_i(x^*) = 0\}$*, a família de gradientes*

$$\{\nabla f_i(x)\}_{i\in K}$$

permanece com o posto constante em alguma vizinhança do ponto x^**.*

Definição 2.9. *Dada a família de funções diferenciáveis* $\{h_i(x),\ i = 1,\dots,m; g_j(x),\ j = 1,\dots,p\}$ *associada ao problema (PNL), dizemos que um ponto viável* $x^* \in \Omega$ *satisfaz a qualificação de restrição de posto constante (CRCQ) se, e somente se, a condição de posto constante vale em* x^**.*

A CRCQ, definida por Janin em [5], é uma condição mais fraca do que LICQ e alternativa à MFCQ. Uma versão relaxada de CRCQ foi definida e provada ser uma qualificação de restrição por Minchenko e Stakhovski em [6].

Definição 2.10. *[6] Dizemos que a qualificação de restrição de posto constante relaxada (RCRCQ) é satisfeita em* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *se existe uma vizinhança de* x^* *tal que para qualquer subconjunto de índices* $J = \{1,\dots,m\} \cup K$*, onde* $K \subset I(x^*)$*, a família de vetores gradientes* $\{\nabla h_i(x)\}_{i=1}^m \cup \{\nabla g_j(x)\}_{j\in K}$ *tem o mesmo posto em todos os pontos* x *na vizinhança de* x^**.*

Teorema 2.1. *[4] Seja* $I \subset \{1,\dots,m\}$ *um conjunto de índices tal que* $\{\nabla h_i(x)\}_{i\in I}$ *é uma base para o* $\operatorname{span}\{\nabla h_i(x)\}_{i=1}^m$*. Um ponto viável* x^* *satisfaz RCRCQ se, e somente se, existe uma vizinhança* $N(x^*)$ *de* x^* *tal que*

- $\{\nabla h_i(x)\}_{i=1}^m$ *tem o mesmo posto para cada* $x \in N(x^*)$*,*
- *para cada* $J \subset I(x^*)$*, se* $(\{\nabla h_i(x^*)\}_{i\in I}, \{\nabla g_i(x^*)\}_{i\in J})$ *é linearmente dependente, então* $(\{\nabla h_i(x)\}_{i\in I}, \{\nabla g_i(x)\}_{i\in J})$ *é linearmente dependente para cada* $x \in N(x^*)$*.*

Definição 2.11. *Sejam* $x \in \mathbb{R}^n, I_0 \subset I(x), J_0 \subset \{1,\dots,m\}$*. Dizemos que o conjunto dos gradientes* $\{\nabla g_i(x)\}_{i\in I_0} \cup \{\nabla h_j(x)\}_{j\in J_0}$ *é positivamente linearmente dependente (PLD) se existem escalares* $\{\alpha_j\}_{j\in J_0}, \{\beta_i\}_{i\in I_0}$ *tais que* $\beta_i \geqslant 0$ *para todo* $i \in I_0$*,* $\sum_{j\in J_0} |\alpha_j| + \sum_{i\in I_0} \beta_i > 0$*, e*

$$\sum_{j\in J_0} \alpha_j \nabla h_j(x) + \sum_{i\in I_0} \beta_i \nabla g_i(x) = 0.$$

Caso contrário, dizemos que o conjunto de gradientes $\{\nabla g_i(x)\}_{i\in I_0} \cup \{\nabla h_j(x)\}_{j\in J_0}$ *é positivamente linearmente independente (PLI).*

Observação 2.2. *MFCQ é equivalente a condição dos gradientes das restrições ativas serem PLI.*

Definição 2.12. *Um ponto viável* x^* *é dito satisfazer a qualificação de restrição de dependência linear positiva constante (CPLD) se para quaisquer* $I_0 \subset I(x), J_0 \subset \{1,\dots,m\}$ *tais que o conjunto de gradientes* $\{\nabla g_i(x^*)\}_{i\in I_0} \cup \{\nabla h_j(x^*)\}_{j\in J_0}$ *é positivamente linearmente*

dependente, existe uma vizinhança $N(x^*)$ *de* x^* *tal que, para qualquer* $x \in N(x^*)$*, o conjunto* $\{\nabla g_i(x)\}_{i\in I_0} \cup \{\nabla h_j(x)\}_{j\in J_0}$ *é linearmente dependente.*

A CPLD é uma condição mais fraca que CRCQ e MFCQ. Uma versão relaxada de CPLD foi definida e estabelecida ser uma qualificação de restrição em [4].

Definição 2.13. *Seja* $I \subset \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $\{\nabla h_i(x)\}_{i\in I}$ *é uma base para o* $\operatorname{span}\{\nabla h_i(x)\}_{i=1}^m$*. Dizemos que a qualificação de restrição de dependência linear positiva constante relaxada (RCPLD) vale em um ponto viável* x^* *se existe uma vizinhança* $B(x^*, r)$ *de* x^* *tal que*

- $\{\nabla h_i(x)\}_{i=1}^m$ *tem o mesmo posto para cada* $x \in N(x^*)$*,*
- *para cada* $J \subset I(x^*)$*, se* $(\{\nabla h_i(x^*)\}_{i\in I}, \{\nabla g_i(x^*)\}_{i\in J})$ *é positivo linearmente dependente, então* $(\{\nabla h_i(x)\}_{i\in I}, \{\nabla g_i(x)\}_{i\in J})$ *é linearmente dependente para cada* $x \in N(x^*)$*.*

RCPLD é implicada por LICQ, MFCQ, CRCQ, RCRCQ e CPLD.

Teorema 2.2. *Se* $x^* \in \Omega$ *é um minimizador local do problema (PNL) e alguma qualificação de restrição definida acima é satisfeita em* x^**, então as definições 2.3, 2.4 e 2.5 são satisfeitas em* x^**. Ou seja, a condição de KKT é uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem e as condições de segunda ordem forte e fraca são condições necessárias de otimalidade de segunda ordem.*

A seguir, na Figura 1, temos um esquema para resumir as qualificações de restrições definidas nesta seção e suas relações.

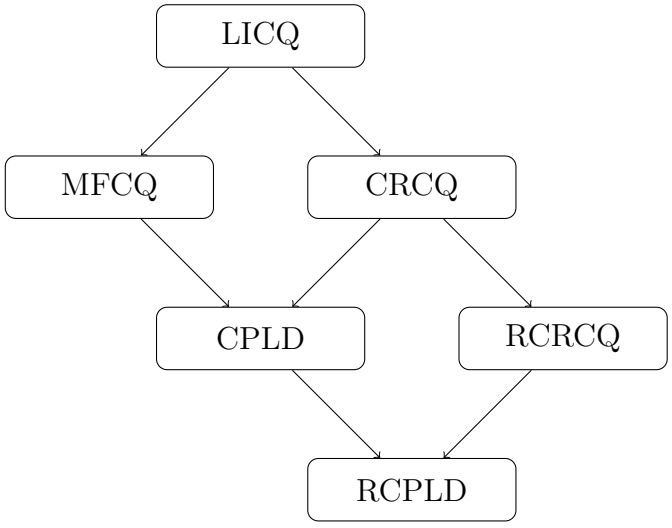

Figura 1 – Relações entre as qualificações de restrições.

2.2 Análise Não Suave

A análise não suave é a teoria que desenvolve um "cálculo diferencial" para funções que não são diferenciáveis no sentido usual e para conjuntos que não são variedades suaves clássicas. Este assunto tem desempenhado um papel importante em várias áreas de aplicação como otimização, cálculo das variações, equações diferenciais, mecânica e teoria de controle. Entre aqueles que participam do seu desenvolvimento estão: J. Borwein, A. D. Ioffe, B. Mordukhovich, R. T. Rockafellar, R. B. Vinter e F. H. Clarke.

A análise não suave teve início com as contribuições de Rockafellar no desenvolvimento da análise convexa, na década de 1960. Na década seguinte iniciou-se um desejo de estendê-la para contextos não convexos. Em 1973, um avanço importante ocorreu com a teoria de F. H. Clarke de gradientes generalizados e em 1976, com o cone normal limite introduzido por B. Mordukhovich. E começa, então, o campo de análise não suave que fornece uma ponte para as condições necessárias de otimalidade. O livro do Clarke [21] de 1983 cobriu muitos avanços importantes da década anterior e suas aplicações para a derivação de condições necessárias em controle ótimo.

O cone normal proximal, o cone normal limite e seu envoltório convexo (o cone normal de Clarke), junto com seus subdiferenciais associados, a saber, o subdiferencial proximal, subdiferencial limite e o subdiferencial de Clarke (o gradiente generalizado), respectivamente, e a teoria que envolve estes cones e subdiferenciais, serão necessários para estabelecer o princípio do máximo no contexto não suave. Neste capítulo serão apresentadas construções básicas de análise não suave e resultados de cálculo, que serão relevantes para a teoria que envolve os problemas de controle ótimo. A referência utilizada neste capítulo foi Vinter [22], onde também podem ser encontradas as demonstrações de todos os resultados apresentados.

Cones Normais

Vamos definir o cone normal proximal e o cone normal limite, bem como estabeleceremos algumas de suas propriedades.

Definição 2.14. *Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$, o cone normal proximal a C em x, escrito como $N_C^P(x)$, é o conjunto*

$$N_C^P(x) := \{p \in \mathbb{R}^k : \exists\, M > 0 \text{ tal que } p \cdot (y - x) \leqslant M|y - x|^2 \ \forall y \in C\}.$$

Os elementos em $N_C^P(x)$ são chamados normais proximais a C em x.

A proposição abaixo dá uma interpretação geométrica de normais proximais.

Proposição 2.1. *Tome um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e pontos $x \in C$ e $p \in \mathbb{R}^k$. Então p é um normal proximal a C em x se, e somente se, existe um ponto $z \in \mathbb{R}^k$ e um fator de*

escala $r > 0$ tais que

$$|z - x| = \min\{|z - y| : y \in C\} \text{ e } p = r(z - x).$$

Definição 2.15. *Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$, o cone normal limite a C em x, escrito como $N_C(x)$, é o conjunto*

$$N_C(x) := \{p \in \mathbb{R}^k : \text{ existem } x_i \xrightarrow{C} x, p_i \to p \text{ tais que } p_i \in N_C^P(x_i) \ \forall i\}.$$

Os elementos em $N_C(x)$ são chamados normais limites a C em x.

Definimos, abaixo, o epígrafo de uma função.

Definição 2.16. *O conjunto*

$$epi\, f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : \alpha \geqslant f(x)\}$$

é o epígrafo da f.

Exemplo 2.1. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x = 0$, temos:*

(i) se $f(x) = |x|$, então $N^P_{epi\, f}(0,0) = N_{epi\, f}(0,0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant -|x|\}$.

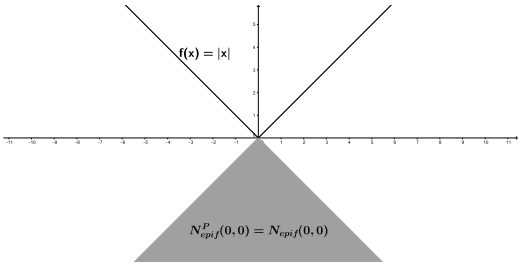

Figura 2 – Exemplo 2.1 (i)

(ii) se $f(x) = -|x|$, então $N^P_{epi\, f}(0,0) = \{(0,0)\}$ e $N_{epi\, f}(0,0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -|x|\}$.

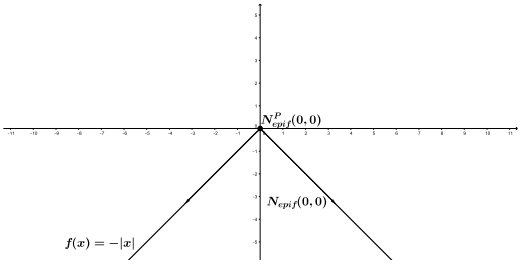

Figura 3 – Exemplo 2.1 (ii)

Segue, agora, algumas propriedades dos cones normais:

Proposição 2.2. *Tome um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$. Então:*

(i) $N_C^P(x)$ *e* $N_C(x)$ *são cones em* $\mathbb{R}^k$*, contendo o* $\{0\}$ *e* $N_C^P(x) \subset N_C(x)$*;*

(ii) $N_C^P(x)$ *é convexo;*

(iii) a multifunção $y \to N_C(y) : C \to \mathbb{R}^k$ *tem um gráfico fechado, no sentido que, para quaisquer sequências* $y_i \overset{C}{\to} y$ *e* $p_i \to p$ *tais que* $p_i \in N_C(y_i)$ *para todo* i*, temos* $p \in N_C(y)$*.*

Proposição 2.3. *Tome um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in C$. Então:*

(i) $x \in \text{int}\{C\}$ *implica* $N_C(x) = \{0\}$*;*

(ii) $x \in \text{fr}\{C\}$ *implica que* $N_C(x)$ *contém elementos não nulos.*

Proposição 2.4. *Tome subconjuntos $C_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $C_2 \subset \mathbb{R}^n$, e um ponto $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$. Então*

$$N^P_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) = N^P_{C_1}(x_1) \times N^P_{C_2}(x_2), \tag{2.1}$$

$$N_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2). \tag{2.2}$$

No caso convexo, os cones normais coincidem.

Proposição 2.5. *Tome um conjunto convexo fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $\bar{x} \in C$. Então*

$$N_C^P(\bar{x}) = N_C(\bar{x}) = \{\xi : \xi \cdot (x - \bar{x}) \leqslant 0 \ \forall x \in C\}.$$

O cone normal limite é o mais utilizado em aplicações na otimização, por conta das suas propriedades analíticas superiores. Muitas dessas propriedades são consequências do fato que o cone normal limite tem um gráfico fechado, quando considerado como uma multifunção do ponto base.

Subdiferenciais

Para prosseguimento precisaremos definir semicontinuidade inferior de uma função.

Definição 2.17. *Uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferior em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^k$ se*

$$f(x_0) \leqslant \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Dizemos simplesmente que f é semicontínua inferior se o é em todos os pontos de seu domínio.

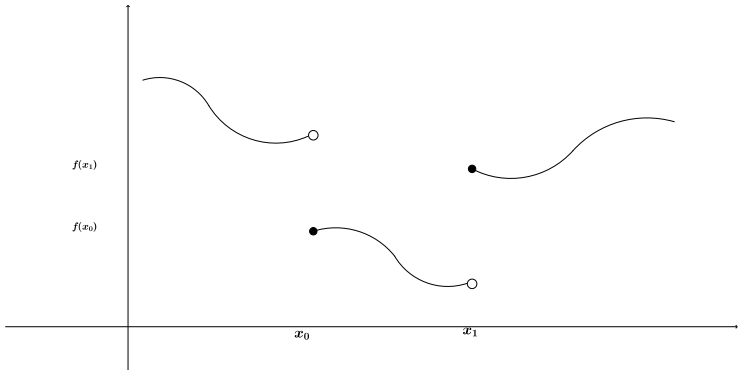

Figura 4 – Exemplo de uma função semicontínua inferior em x_0, mas que não é semicontínua inferior em x_1.

Teorema 2.3. *Uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferior se, e somente se, epi f é fechado.*

Tomaremos sempre uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pois o conjunto epígrafo destas funções é fechado. Isto será importante já que os subgradientes serão definidos em termos do cone normal ao epígrafo da f.

Definição 2.18. *O domínio efetivo de uma função f em $S \subset \mathbb{R}^k$, que denotamos por dom f, é a projeção em $\mathbb{R}^k$ do epígrafo de f:*

$$dom\, f = \{x \,|\, \exists\, \mu, (x, \mu) \in epi\, f\} = \{x \,|\, f(x) < \infty\}.$$

Definição 2.19. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $x \in dom\, f$.*

(i) O subdiferencial proximal de f em x, escrito como $\partial^P f(x)$, é o conjunto

$$\partial^P f(x) := \{\xi : (\xi, -1) \in N^P_{epi\, f}(x, f(x))\}.$$

Os elementos do $\partial^P f(x)$ são chamados subgradientes proximais.

(ii) O subdiferencial limite de f em x, escrito como $\partial f(x)$, é o conjunto

$$\partial f(x) := \{\xi : (\xi, -1) \in N_{epi\, f}(x, f(x))\}.$$

Os elementos do $\partial f(x)$ são chamados subgradientes limite.

Exemplo 2.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x = 0$, temos:*

(i) $f(x) = |x|$, então $\partial^P f(x) = \partial f(x) = [-1, 1]$.

(ii) $f(x) = -|x|$, então $\partial^P f(x) = \varnothing$ e $\partial f(x) = \{-1\} \cup \{1\}$.

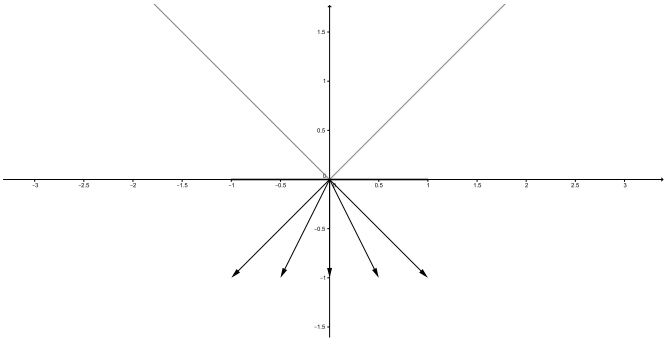

Figura 5 – Exemplo 2.2 (i)

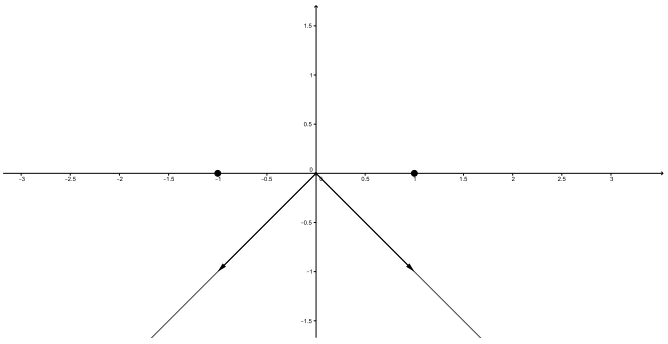

Figura 6 – Exemplo 2.2 (ii)

Subdiferenciais vazios ou ilimitados são um alerta que a inclinação da função em uma bola arbitrariamente pequena sobre o ponto base é ilimitado. Quando isso ocorre gostaríamos de saber a direção dessa inclinação arbitrariamente grande. Esta informação é expressa pela "assintótica" dos subdiferenciais já definidos.

Definição 2.20. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $x \in dom\, f$.*

(i) O subdiferencial proximal assintótico de f em x, escrito como $\partial_P^\infty f(x)$, é

$$\partial_P^\infty f(x) := \{\xi : (\xi, 0) \in N_{epi\, f}^P(x, f(x))\}.$$

Os elementos do $\partial_P^\infty f(x)$ são chamados subgradientes proximais assintóticos.

(ii) O subdiferencial limite assintótico de f em x, escrito como $\partial^\infty f(x)$, é

$$\partial^\infty f(x) := \{\xi : (\xi, 0) \in N_{epi\, f}(x, f(x))\}.$$

Os elementos do $\partial^\infty f(x)$ são chamados subgradientes limite assintóticos.

Exemplo 2.3. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sgn\{x\}|x|^{1/2}$ e o ponto $x = 0$, temos:*

$$N_{epi\, f}(0, 0) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}.$$

Assim

$$\partial f(x) = \varnothing \text{ e } \partial^\infty f(x) = [0, \infty).$$

O cálculo do $\partial^\infty f(x)$ nos revela que a inclinação "infinita" próximo a x é positiva.

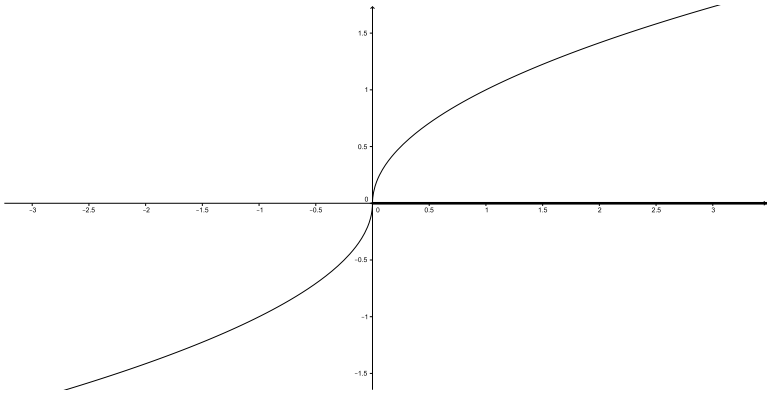

Figura 7 – Exemplo 2.3

Proposição 2.6. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $x \in dom f$. Então:*

(i) $\partial f(x)$ é um conjunto fechado, isto é, dadas sequências $x_i \xrightarrow{f} x$ e $\xi_i \to \xi$ tais que $\xi_i \in \partial f(x_i)$ para todo i, então $\xi \in \partial f(x)$;

(ii) $\partial^\infty f(x)$ é um cone fechado. Em particular, dadas sequências $x_i \xrightarrow{f} x$ e $\xi_i \to \xi$ tais que $\xi_i \in \partial^\infty f(x_i)$ para todo i, então $\xi \in \partial^\infty f(x)$.

Para funções convexas, as definições de subdiferencial limite e proximal coincidem.

Proposição 2.7. *Tome uma função convexa semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $\bar{x} \in dom\, f$. Então*

$$\partial^P f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = \{\xi : \xi \cdot (x - \bar{x}) \leqslant f(x) - f(\bar{x}) \ \forall x \in \mathbb{R}^k\}.$$

Subgradientes de Funções Lipschitz

Definição 2.21. *Uma função f em um conjunto $S \subset \mathbb{R}^k$ é dita ser Lipschitz se existe um $K \geqslant 0$ para o qual*

$$|f(x') - f(x)| \leqslant K|x - x'| \ \forall \ x, x' \in S.$$

Como funções Lipschitz são um caso especial de função semicontínua inferior, tudo que vimos até aqui vale. Funções Lipschitz são encontradas muito frequentemente em aplicações de Análise Não Suave, em particular neste trabalho em que as funções consideradas são Lipschitz. Assim, é importante explorar sua estrutura e abordagens alternativas para aproximação local.

A propriedade Lipschitz diz que a função tem uma inclinação limitada. Assim, não é surpresa que os subdiferenciais de funções Lipschitz sejam conjuntos limitados e o subdiferencial limite assintótico seja o conjunto trivial $\{0\}$.

Proposição 2.8. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^k$. Assuma que f é Lipschitz em uma vizinhança de x com K a constante de Lipschitz. Então:*

(i) $\partial f(x)$ *é não vazio e* $\partial f(x) \subset KB$;

(ii) $\partial^\infty f(x) = \{0\}$.

Agora examinamos uma abordagem alternativa para definir subdiferencial de função Lipschitz baseada em ideias de aproximações convexas e dualidade. Esta abordagem é importante, pois fornecerá novas representações de subdiferenciais que são extremamente úteis nas aplicações.

Iniciamos definindo a derivada direcional generalizada de uma função localmente Lipschitz.

Definição 2.22. *Tome uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ e pontos $x \in \mathbb{R}^k$ e $v \in \mathbb{R}^k$. Assuma que f é Lipschitz em uma vizinhança de x. A derivada direcional generalizada de f em x na direção v, escrita como $f^0(x, v)$, é o número*

$$f^0(x, v) := \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} t^{-1}[f(y + tv) - f(y)].$$

Proposição 2.9. *Tome uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^k$. Assuma que f é Lipschitz em um vizinhança de x com constante de Lipschitz K. Então a função $v \to f^0(x, v)$ com domínio $\mathbb{R}^k$ tem as seguintes propriedades.*

(i) Possui valor-finito, é Lipschitz com constante de Lipschitz K e positivamente homogênea, no sentido que

$$f^0(x, \alpha v) = \alpha f^0(x, v) \ \forall \ v \in \mathbb{R}^k \ e \ \alpha \geqslant 0.$$

(ii) É convexa.

Definição 2.23. *O subdiferencial de Clarke de f em x é o conjunto*

$$\bar{\partial} f(x) := \{\xi : f^0(x, v) \geqslant \xi \cdot v \ \forall v \in \mathbb{R}^k\}.$$

$\bar{\partial} f(x)$ é um conjunto (para x fixo) não vazio, compacto e convexo. Os elementos do $\bar{\partial} f(x)$ são uniformemente limitados na norma euclidiana pela constante de Lipschitz de f em uma vizinhança de x.

A derivada direcional generalizada pode ser interpretada como a função suporte do $\bar{\partial} f(x)$:

Proposição 2.10. *Tome uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitz em uma vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^k$. Então*

$$f^0(x, v) = \max\{v \cdot \xi : \xi \in \bar{\partial} f(x)\} \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^k.$$

O subdiferencial de Clarke comuta com -1:

Proposição 2.11. *Tome uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitz em uma vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^k$. Então*

$$\bar{\partial}(-f)(x) = -\bar{\partial} f(x).$$

Observação 2.3. *A proposição acima não é válida para os subdiferenciais proximal e limite, este fato é ilustrado pelo Exemplo 2.2.*

A proposição seguinte traz a relação entre o subdiferencial limite e o subdiferencial de Clarke. Antes, definimos um conjunto importante para a relação.

Definição 2.24. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^k$. O envoltório convexo de S, denotado por $\text{co}(S)$, é o conjunto das interseções de todos os conjuntos convexos contendo S.*

Proposição 2.12. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitz em uma vizinhança de algum ponto $x \in \mathbb{R}^k$. Então*

$$\bar{\partial} f(x) = \text{co}\partial f(x).$$

De acordo com o Teorema de Rademacher [27], se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é Lipschitz em uma vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^k$, então f é diferenciável em quase todos os pontos nesta vizinhança (em relação à medida k-dimensional de Lebesgue). Pelo teorema seguinte, o envoltório convexo do conjunto de limites de derivadas na vizinhança coincide com o envoltório convexo do subdiferencial limite em x. Este é um teorema interessante, pois relaciona os conceitos moderno e clássico de derivadas, além disso, fornece uma ferramenta computacional para o envoltório convexo do subdiferencial limite de grande poder.

Observação 2.4. *Note que se f é diferenciável em x e Lipschitz em uma vizinhança de x, então*

$$\nabla f(x) \in co\partial f(x).$$

Teorema 2.4. *Tome uma função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}^k$ e qualquer subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ tendo medida de Lebesgue nula. Assuma que f é Lipschitz em uma vizinhança de x. Então*

$$\bar{\partial} f(x) = co\partial f(x) = co\{\xi : \exists x_i \to x, x_i \notin \Omega, \nabla f(x_i) \text{ existe e } \nabla f(x_i) \to \xi\}.$$

Observação 2.5. *Se uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é continuamente diferenciável próximo a um ponto $\bar{x}$, então $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$.*

Cálculo Subdiferencial

Nesta seção apresentamos algumas regras para o cálculo de subdiferencial, úteis para estimar os subdiferenciais limite. Seria interessante que estas regras fossem aplicadas a funções semicontínuas inferiores gerais, mas isto nem sempre ocorre. Alguma hipótese de regularidade será imposta, que diferirá de regra para regra, sendo que em cada caso esta hipótese elimina certos tipos de interação do subdiferencial limite assintótico. Para nosso caso de maior interesse, quando as funções são Lipschitz, estas hipóteses de regularidade são automaticamente satisfeitas.

A propriedade, "se f atinge seu valor mínimo em $\bar{x} \in dom\, f$, então $\{0\}$ está contido no subdiferencial de f em $\bar{x}$", é um conceito de subdiferencial útil no campo da otimização, e felizmente vale.

Proposição 2.13. *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $x \in dom\, f$. Assuma que x atinge o valor mínimo de f sobre uma vizinhança de x; então*

$$0 \in \partial^P f(x).$$

Note que pela Proposição 2.2 (i), temos $N_C^P(x) \subset N_C(x)$. Como os subdiferenciais proximal e limite são definidos em termos dos cones normais proximal e limite, respectivamente, temos $\partial^P f(x) \subset \partial f(x)$, portanto pela proposição anterior $0 \in \partial f(x)$.

Proposição 2.14 (Regra da Soma Básica)**.** *Tome funções $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^k$ e um ponto $x \in (int\, C) \cap (dom\, f)$. Assuma que f é semicontínua inferior e g é de classe C^2 em uma vizinhança de x. Então,*

$$\begin{aligned}
&\partial^P(f + g + \Psi_C)(x) = \partial^P f(x) + \{\nabla g(x)\},\\
&\partial(f + g + \Psi_C)(x) = \partial f(x) + \{\nabla g(x)\},\\
&\partial^\infty(f + g + \Psi_C)(x) = \partial^\infty f(x).
\end{aligned}$$

Aqui $\Psi_C : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ denota a função indicadora do conjunto C, definida por

$$\Psi_C(x) := \begin{cases} 0, \text{ se } x \in C,\\ \infty, \text{ se } x \notin C. \end{cases}$$

Segue, abaixo, um corolário do Teorema do Princípio de Função Marginal, veja [22]. Apresentamos o corolário, pois ele é o mais utilizado. Este teorema e seu corolário são importantes, pois algumas das regras de cálculo apresentadas, a saber, o Subgradiente Parcial Limite, a Regra da Soma, a Regra da Cadeia, são consequências do Princípio de Função Marginal.

Corolário 2.1. *Tome uma função semicontínua inferior $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $(\bar{x}, \bar{u}) \in dom\, F$. Assuma que $\bar{x}$ minimiza $x \to F(x, \bar{u})$ em alguma vizinhança de $\bar{x}$. Suponha que*

$$\{\eta : (0, \eta) \in \partial^\infty F(\bar{x}, \bar{u})\} = \{0\}.$$

Então existe um ponto $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$(0, \xi) \in \partial F(\bar{x}, \bar{u}).$$

Teorema 2.5 (Subgradiente Limite Parcial)**.** *Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in dom\, f$. Assuma que*

$$(0, \eta) \in \partial^\infty f(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \eta = 0.$$

Então:

$$\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}) \subset \{\xi : \text{ existe } \eta \text{ tal que } (\xi, \eta) \in \partial f(\bar{x}, \bar{y})\}$$
$$\partial^\infty_x f(\bar{x}, \bar{y}) \subset \{\xi : \text{ existe } \eta \text{ tal que } (\xi, \eta) \in \partial^\infty f(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Teorema 2.6 (Regra da Soma)**.** *Tome funções semicontínuas inferior $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, i = 1, ..., m$, e um ponto $\bar{x} \in \cap_i dom\, f_i$. Defina $f = f_1 + \ldots + f_m$. Assuma que*

$$v_i \in \partial^\infty f_i(\bar{x}), i = 1, \ldots, m \ e \ \sum_i v_i = 0 \Rightarrow v_i = 0 \ \forall i.$$

Então

$$\partial f(\bar{x}) \subset \partial f_1(\bar{x}) + \ldots + \partial f_m(\bar{x})$$

e

$$\partial^\infty f(\bar{x}) \subset \partial^\infty f_1(\bar{x}) + \ldots + \partial^\infty f_m(\bar{x}).$$

É possível obter uma estimativa do cone normal ao gráfico de uma aplicação Lipschitz por meio de uma aplicação da Regra da Soma.

Proposição 2.15. *Tome uma aplicação semicontínua inferior $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um ponto $u \in \mathbb{R}^n$. Assuma que G é Lipschitz em uma vizinhança de u. Então*

$$N_{Gr\, G}(u, G(u)) \subset \{(\xi, -\eta) : \xi \in \partial(\eta \cdot G)(u), \eta \in \mathbb{R}^m\}.$$

Teorema 2.7 (Regra da Cadeia)**.** *Tome uma função localmente Lipschitz $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, uma função semicontínua inferior $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e um ponto $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ tais que $G(\bar{u}) \in dom\, g$. Defina a função semicontínua inferior $f(u) := g \circ G(u)$. Assuma que*

$$\text{o único vetor } \eta \in \partial^\infty g(G(\bar{u})) \text{ tal que } 0 \in \partial(\eta \cdot G)(\bar{u}) \text{ é } \eta = 0.$$

Então

$$\partial f(\bar{u}) \subset \{\xi : \text{ existe } \eta \in \partial g(G(\bar{u})) \text{ tal que } \xi \in \partial(\eta \cdot G)(\bar{u})\}$$

e

$$\partial^\infty f(\bar{u}) \subset \{\xi : \text{ existe } \eta \in \partial^\infty g(G(\bar{u})) \text{ tal que } \xi \in \partial(\eta \cdot G)(\bar{u})\}.$$

Como corolários da Regra da Cadeia, temos a Regra do Máximo e a Regra do Produto.

Teorema 2.8 (Regra do Máximo)**.** *Tome funções localmente Lipschitz* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ *e um ponto* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$*. Defina* $f(x) = \max_i f_i(x)$ *e* $\Lambda := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geqslant 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$*. Então*

$$\partial f(\bar{x}) \subset \{\partial(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i)(\bar{x}) : \lambda \in \Lambda, \ \text{e } \lambda_i = 0 \text{ se } f_i(\bar{x}) < f(\bar{x})\}.$$

Teorema 2.9 (Regra do Produto)**.** *Tome funções localmente Lipschitz* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ *e um ponto* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$*. Defina* $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)$*. Então*

$$\partial f(\bar{x}) \subset \partial(\sum_{i}^{m} \Pi_{j \neq i} f_j(\bar{x}) f_i)(\bar{x}).$$

2.3 Princípio do Máximo Não Suave

A origem dos problemas de controle ótimo se deve a sua formulação como problemas de cálculo das variações. Entretanto, sua solução não foi obtida no contexto clássico de cálculo das variações. Segundo Pesch e Plail [28], no início da Guerra Fria, as duas superpotências, Estados Unidos e União Soviética, se empenharam em resolver problemas de controle ótimo. Um deles foi o problema de interceptação em tempo mínimo de uma aeronave de caça.

Os matemáticos que trabalharam com o problema de controle ótimo nos Estados Unidos, Magnus R. Hestenes (1906-1991), Rufus P. Isaacs (1914-1981) e Richard E. Bellman (1920-1984), fizeram avanços na teoria, mas não deram uma demonstração rigorosa do princípio do máximo. Hestenes trabalhou com o problema de interceptação em tempo mínimo em 1950. Ele o reformulou como um problema de cálculo das variações e aplicou os resultados já conhecidos, sendo esta a primeira formulação do princípio do máximo. Ele considerou as variáveis divididas em estado e controle, mas precisou de hipóteses fortes como funções controle contínuas e assumindo valores em um domínio aberto. Isaacs e Bellman obtiveram resultados de programação dinâmica em que o princípio do máximo estava oculto, mas eles não reconheceram as consequências e conexões das teorias.

Já os matemáticos que trabalharam com o problema de interceptação em tempo mínimo na União Soviética, Lev Semyonovich Pontryagin (1908-1988), Vladimir Grigor'evich Boltyanski (1925-) e Revaz Valerianovich Gamkrelidze (1927-), não ficaram atrelados ao cálculo das variações. Pontryagin teve as primeiras ideias, Gamkrelidze e Boltyanski as completaram. No Congresso Internacional de Matemática em Edinburgh, em agosto de 1958, foi apresentada a demonstração do princípio do máximo e, em seguida, na Federação Internacional de Controle Automático, em 1960, em Moscou, foram discutidas

as relações entre o princípio do máximo e o cálculo das variações. Antes disso, de acordo com os matemáticos da União Soviética, as condições do cálculo das variações não eram conhecidas durante o desenvolvimento do princípio do máximo.

Pontryagin considerou o comportamento de um objeto que muda de estado com o tempo, e pode ser controlado. De acordo com Gamkrelidze [29], para representar a variável de estado foi escolhida a letra x, e para representar o controle foi escolhida a letra u, pois é a primeira letra da palavra controle em Russo "upravlenie". O controle foi assumido ser contínuo por partes e pertencente a um conjunto U fechado, estas hipóteses eram importantes para aplicações. Depois que Pontryagin et al. [30] demonstraram o princípio do máximo, que é o conjunto de condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo, o controle ótimo emergiu como um distinto campo de pesquisa na década de 1950. Desde então, segundo Clarke [31], busca-se estender a aplicabilidade do princípio do máximo, que é uma ferramenta importante em muitas áreas. Isto é feito, por exemplo, enfraquecendo hipóteses ou estendendo os tipos de problemas para os quais o resultado se aplica.

No início da década de setenta, o progresso foi dificultado pela ausência de uma ferramenta analítica adequada para investigar propriedades locais de funções não suaves. Com o avanço da análise não suave foi possível continuar estendendo a aplicabilidade do princípio do máximo. Ele foi então estendido para o contexto não suave, que aparece com frequência em aplicações. Nesta seção, vamos considerar o problema de controle ótimo no contexto de análise não suave, que é mais geral que o de Pontryagin.

Considere o problema (P) abaixo, que é essencialmente a forma original de Clarke [32], em que foi mostrada a primeira versão do princípio do máximo não suave, apresentado em seguida. Para mais versões do princípio do máximo não suave ver [33].

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ q.t.\ t \in T, \\ & u(t) \in U(t) \ q.t.\ t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in C, \end{array} \tag{P}$$

em que $T := [0, 1]$, $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz, $f : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^m$ mensurável com relação a (t, x, u) e localmente Lipschitz em relação a x com constante de Lipschitz igual a $k(t, u)$, a multifunção $U : T \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ tem gráfico $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ mensurável e $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado. A função estado $x \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n)$ e a função controle $u : T \to \mathbb{R}^m$ é mensurável.

Definição 2.25. *$(\bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador local se minimiza o custo sobre todo (x, u) viável satisfazendo $(x(t), u(t)) \in (\bar{x}(t) + \varepsilon B) \times (\bar{u}(t) + \varepsilon B)$, para algum $\varepsilon > 0$.*

Teorema 2.10 (Princípio do Máximo Não Suave)**.** *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador para (P). Se f é Lipschitz em x próximo a $\bar{x}$ e se $t \to k(t, \bar{u}(t))$ é integrável, então existem $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geqslant 0$ satisfazendo, para quase todo $t \in T$, a condição de não trivialidade*

$$\|p\|_\infty + \lambda \neq 0,$$

a condição de fronteira e de transversalidade

$$(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1)),$$

a equação adjunta

$$-\dot{p}(t) \in \text{co}\partial_x(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

e a condição de Weierstrass

$$\max_{u \in U(t)} p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u(t)) \text{ é atingido em } u = \bar{u}(t).$$

Os componentes λ e p são referidos como o multiplicador custo e o arco adjunto ou coestado, respectivamente.

As conclusões do teorema são conhecidas das teorias clássicas de programação não linear e cálculo das variações. A condição de não trivialidade dos multiplicadores nos garante informações da dinâmica (equação diferencial) ou da função objetivo; a condição de de fronteira e de transversalidade está relacionada com a restrição $(x(0), x(1)) \in C$ e com o funcional objetivo l, que depende do estado nos pontos de fronteira; a equação adjunta (ou de coestado) nada mais é do que a Equação de Euler-Lagrange, que já era esperada por se tratar da condição necessária de um problema que busca uma função como solução, assim como no problema de cálculo das variações; e a condição de Weierstrass (ou de máximo) é a condição que dá nome ao teorema, Princípio do Máximo.

Em seguida, é colocado um princípio do máximo não suave, dado por Vinter e de Pinho em [34]. Ele é mais fraco do que o anterior, pois não vale a condição de Weierstrass, mas sim uma condição mais fraca. Este princípio do máximo é usado nas demonstrações deste trabalho.

Teorema 2.11. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador de (P). Suponha que para algum $\varepsilon > 0$ as hipóteses abaixo são satisfeitas*

($\bar{h}$1) A função $f(\cdot, x, u)$ é Lebesgue mensurável para cada (x, u) e existe uma função integrável k_f tal que, para quase todo $t \in [0, 1]$,

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u')| \leqslant k_f(t)|(x, u) - (x', u')|$$

para todos $(x, u), (x', u') \in (\bar{x} + \varepsilon B) \times (\bar{u} + \varepsilon B)$.

($\bar{h}2$) O gráfico de U é um conjunto Borel mensurável e $U_\varepsilon(t) := (\bar{u}(t) + \varepsilon B) \cap U(t)$ é fechado em quase todo $t \in [0,1]$.

($\bar{h}3$) C é fechado e l é localmente Lipschitz em uma vizinhança de $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Então existem $\lambda \geqslant 0$, $p \in W^{1,1}([0,1]; \mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in L^1([0,1]; \mathbb{R}^m)$ tais que, para quase todo $t \in [0,1]$,

(i) $\lambda + \|p\|_\infty \neq 0$;

(ii) $(-\dot{p}(t), \zeta(t)) \in \operatorname{co} \partial_{x,u}\{p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\}$;

(iii) $\zeta(t) \in \operatorname{co} N_{U(t)}(\bar{u}(t))$;

(iv) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

3 Resultados Auxiliares

As quatro proposições que seguem são resultados que usamos nas demonstrações nos próximos capítulos com frequência.

Proposição 3.1. *Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma família de funções $\{F^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}_{a\in A}$ continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$. Suponha que existam $K > 0$ e uma função crescente $\theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ com $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tais que para todo $a \in A$,*

$$|\nabla F^a(x_0)| \leqslant K \ \ e \ |\nabla F^a(x) - \nabla F^a(x')| \leqslant \theta(|x - x'|)$$

para todo $x, x' \in x_0 + \alpha B$. Então F^a é continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a.

Demonstração. Primeiro, queremos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (independente de a) tal que para $x, x' \in x_0 + \alpha B$ e para todo $a \in A$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |F^a(x) - F^a(x')| < \varepsilon.$$

De fato, sejam $x, x' \in x_0 + \alpha B$. Pela Desigualdade do Valor Médio (ver apêndice Teorema A.1), para cada $a \in A$,

$$|F^a(x) - F^a(x')| \leqslant \sup_{0<t<1} |\nabla F^a(tx + (1-t)x')||x - x'|. \tag{3.1}$$

Por hipótese, existe $K > 0$ tal que $|\nabla F^a(x_0)| \leqslant K$ para todo $a \in A$. Seja $z = tx + (1-t)x'$. Então,

$$|z - x_0| = |tx + (1-t)x' - tx_0 - (1-t)x_0| \leqslant t|x - x_0| + (1-t)|x' - x_0| < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Seja $\varepsilon_1 = 1$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < \theta(s) < 1$ quando $0 < s < \delta_1$. Segue que

$$|\nabla F^a(z)| - |\nabla F^a(x_0)| \leqslant |\nabla F^a(z) - \nabla F^a(x_0)| \leqslant \theta(|z - x_0|) < \varepsilon_1 = 1,$$

desde que $\alpha < \delta_1$. Caso contrário, bastaria redefinir o α dado a priori. Portanto, existe $K_l > 0$ tal que $|\nabla F^a(tx + (1-t)x')| \leqslant K_l$ para $0 < t < 1$ e para todo $a \in A$. Assim, por (3.1),

$$|F^a(x) - F^a(x')| \leqslant K_l|x - x'|.$$

Como o lado direito não depende de a, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K_l}$. Resta mostrar que $\nabla F^a(\cdot)$ é contínua em $x_0 + \alpha B$ uniformemente em a, mas isso segue diretamente da hipótese da existência da função $\theta(\cdot)$ com $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, que satisfaz

$$|\nabla F^a(x) - \nabla F^a(x')| \leqslant \theta(|x - x'|),$$

com o lado direito já não dependendo de a. □

Proposição 3.2. *Considere a matriz $A : T \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Suponha que existam $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que $\det(A(t)) \geqslant K_1$ e $|A(t)| < K_2$, para todo $t \in T$. Então, existe $c > 0$ tal que $|A(t)^{-1}| \leqslant c$ para todo $t \in T$.*

Demonstração. Sejam $\{\sigma_i(A(t))\}_{i=1}^n$, $\sigma_1(A(t)) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n(A(t))$ os valores singulares[1] de $A(t)$. Pelas hipóteses, $\prod_{i=1}^{n} \sigma_i(A(t)) \geqslant K_1$ e $\sigma_n(A(t)) < K_2$, para todo $t \in T$. Assim,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i(A(t))} \leqslant \frac{1}{K_1} \Rightarrow 1 \leqslant \frac{\prod_{i=1}^n \sigma_i(A(t))}{K_1} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_1(A(t))} \leqslant \frac{\prod_{i\neq 1} \sigma_i(A(t))}{K_1} \leqslant \frac{K_2^{n-1}}{K_1},$$

para todo $t \in T$. Defina $c := \dfrac{K_2^{n-1}}{K_1}$. Portanto, $|A(t)^{-1}| \leqslant c$ para todo $t \in T$. □

Proposição 3.3. *Considere as matrizes $(A, B) : T \to \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times k}$, com $m \leqslant k$. Seja $C(t) := \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \end{bmatrix}$. Suponha que existam $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que $\det(B(t)B(t)^\top) \geqslant K_1$ e $|A(t)| + |B(t)| < K_2$, para todo $t \in T$. Então,*

(i) existe $c_1 > 0$ tal que $|(B(t)B(t)^\top)^{-1}| \leqslant c_1$ para todo $t \in T$,

(ii) existe $c_2 > 0$ tal que $|(C(t)C(t)^\top)^{-1}| \leqslant c_2$ para todo $t \in T$.

Demonstração. (i) Temos $|B(t)B(t)^\top| = |B(t)|^2 < K_2^2$ para todo $t \in T$. Dessa forma as hipóteses da Proposição 3.2 estão satisfeitas, logo existe c_1 tal que $|(B(t)B(t)^\top)^{-1}| \leqslant c_1$ para todo $t \in T$.

(ii) Sejam $\{\sigma_i(C(t))\}_{i=1}^{p(t)}$, $\sigma_1(C(t)) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{p(t)}(C(t))$, os valores singulares de $C(t)$. Pelo Teorema A.3 do apêndice, $\{\sigma_i(C(t))^2\}_{i=1}^{p(t)}$ são os autovalores e valores singulares de $C(t)C(t)^\top$. Então, queremos mostrar que existe $c_2 > 0$ tal que $\dfrac{1}{\sigma_1(C(t))^2} \leqslant c_2$ para todo $t \in T$.

De fato, aplicando o Teorema de Weyl (Teorema A.4 do apêndice) para $C(t)C(t)^\top = A(t)A(t)^\top + B(t)B(t)^\top$ e $i, j = 1$, temos para todo $t \in T$,

$$\sigma_1(C(t))^2 \geqslant \sigma_1(A(t))^2 + \sigma_1(B(t))^2 \geqslant \sigma_1(B(t))^2 \Rightarrow \frac{1}{\sigma_1(C(t))^2} \leqslant \frac{1}{\sigma_1(B(t))^2},$$

onde $\sigma_1(A(t))^2 \geqslant 0$ é o menor autovalor de $A(t)A(t)^\top$. Por (i), temos $\dfrac{1}{\sigma_1(B(t))^2} \leqslant c_1$ para todo $t \in T$, portanto definindo $c_2 := c_1$, $\dfrac{1}{\sigma_1(C(t))^2} \leqslant c_2$ para todo $t \in T$, como queríamos.

□

[1] As preliminares sobre decomposição em valores singulares de uma matriz podem ser encontradas no apêndice.

Proposição 3.4. *Considere a matriz $B : T \to \mathbb{R}^{m\times k}$. Suponha que exista $c > 0$ tal que $|(B(t)B(t)^\top)^{-1}| \leqslant c$ para todo $t \in T$. Então existe $K > 0$ tal que $\det(B(t)B(t)^\top) \geqslant K$ para todo $t \in T$.*

Demonstração. Sejam $\{\sigma_i(B(t))\}_{i=1}^{p(t)}$, $\sigma_1(B(t)) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{p(t)}(B(t))$ os valores singulares de $B(t)$. Pelo Teorema A.3 do apêndice, $\{\sigma_i(B(t))^2\}_{i=1}^{p(t)}$ são os autovalores e valores singulares de $B(t)B(t)^\top$. Por hipótese, existe $c > 0$ tal que $\dfrac{1}{\sigma_1(B(t))^2} \leqslant c$ para todo $t \in T$, assim $\sigma_1(B(t))^2 \geqslant \dfrac{1}{c} \Rightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{p(t)} \sigma_i(B(t))^2 \geqslant \sigma_1(B(t))^{2p(t)} \geqslant \dfrac{1}{c^{p(t)}}$ para todo $t \in T$. Além disso, temos $p(t) \leqslant min\{m, k\}$, logo $\dfrac{1}{c^{p(t)}} \geqslant \dfrac{1}{c^m}$. Portanto, $\det(B(t)B(t)^\top) \geqslant K$ para todo $t \in T$, onde $K := \dfrac{1}{c^m}$. □

O teorema abaixo é um resultado clássico da literatura e sua demonstração pode ser encontrada em de Pinho e Vinter [35].

Teorema 3.1 (Teorema da Aplicação Inversa Uniforme)**.** *Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, n-vetores x_0 e y_0, e uma família de funções $\{F^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{a\in A}$ satisfazendo $y_0 = F^a(x_0)$ para todo $a \in A$. Suponha que:*

(i) F^a é continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a.

(ii) Existe uma função crescente monótona $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ com $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tal que

$$|\nabla F^a(x) - \nabla F^a(x')| \leqslant \theta(|x - x'|) \text{ para todos } x, x' \in x_0 + \alpha B, a \in A.$$

(iii) $\nabla F^a(x_0)$ é não singular para cada $a \in A$ e existe $c > 0$ tal que

$$|[\nabla F^a(x_0)]^{-1}| \leqslant c \text{ para todo } a \in A.$$

Então existem números $\varepsilon \in (0, \alpha)$ e $\delta > 0$ e uma família de funções continuamente diferenciáveis $\{G^a : y_0 + \delta B \to x_0 + \varepsilon B\}_{a\in A}$, Lipschitz com constante K comum, tal que

$$\begin{aligned} F^a(G^a(y)) &= y \text{ para todo } y \in y_0 + \delta B, a \in A, \\ G^a(F^a(x)) &= x \text{ para todo } x \in x_0 + \varepsilon B, a \in A. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Os números ε e δ dependem somente de $\alpha, \theta(\cdot)$ e c.
Além disso, se A é um conjunto Borel e $a \mapsto F^a(x)$ é Borel mensurável para cada $x \in x_0 + \alpha B$, então $a \mapsto G^a(y)$ é Borel mensurável para cada $y \in y_0 + \delta B$.

Observação 3.1. *De (3.2) temos $\nabla G^a(F^a(x))\nabla F^a(x) = I \ \forall x \in x_0 + \varepsilon B \Rightarrow \nabla G^a(y) = \nabla F^a(G^a(y))^{-1} \ \forall y \in y_0 + \delta B, a \in A, \ y = F^a(x), x \in x_0 + \varepsilon B$.*

Observação 3.2. *Como pode ser visto no Passo 1 da demonstração do Teorema da Aplicação Inversa Uniforme em [35], $\nabla F^a(x)$ é não singular em $x_0 + \varepsilon' B$ para cada $a \in A$ e $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$.*

Demonstração. Por hipótese, $\nabla F^a(x_0)$ é não singular para cada $a \in A$. Daí, para $u \in y_0 + \delta B$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned}\nabla F^a(G^a(u)) &= \nabla F^a(x_0) + [\nabla F^a(G^a(u)) - \nabla F^a(x_0)] \\ &= [I - (-(\nabla F^a(G^a(u)) + \nabla F^a(x_0))(\nabla F^a(x_0))^{-1})]\nabla F^a(x_0).\end{aligned}$$

Se mostramos que $[I-(-(\nabla F^a(G^a(u))+\nabla F^a(x_0))(\nabla F^a(x_0))^{-1})]$ é não singular provamos que $\nabla F^a(G^a(u))$ é não singular, assim a afirmação é comprovada. Para isso aplicaremos o Lema A.1 do apêndice.

Se tomamos $F = -(\nabla F^a(G^a(u)) + \nabla F^a(x_0))(\nabla F^a(x_0))^{-1}$, vamos mostrar que $|F| < 1$. De fato,

$$|F| = |(\nabla F^a(G^a(u)) - \nabla F^a(x_0))(\nabla F^a(x_0))^{-1}| = |\nabla F^a(G^a(u)) - \nabla F^a(x_0)||(\nabla F^a(x_0))^{-1}|.$$

Tomemos $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ de modo que $\theta(\varepsilon') < \dfrac{1}{2c}$. Pelas hipóteses (ii) e (iii) do Teorema 3.1, temos $|(\nabla F^a(x_0))^{-1}| \leqslant c$ e $|\nabla F^a(G^a(u)) - \nabla F^a(x_0)| \leqslant \theta(\varepsilon')$, para todo $a \in A$ e $u \in y_0 + \delta' B$ com $\delta' \in (0, \delta)$. Logo,

$$|F| < \frac{1}{2c} \cdot c = \frac{1}{2} < 1,$$

como queríamos. Está então provada a observação. □

Os três lemas técnicos abaixo são generalizações de dois lemas estabelecidos por Andreani et al. em [3] no contexto de programação não linear. O último lema é de importância fundamental para os resultados que generalizamos neste trabalho. No primeiro resultado usaremos a notação do Teorema 3.1.

Lema 3.1. *Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, n-vetores x_0 e y_0, e uma família de funções $\{F^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{a\in A}$, $F^a = (f_1^a, \ldots, f_n^a)$, satisfazendo $y_0 = F^a(x_0)$ para todo $a \in A$ e todas as hipóteses do Teorema 3.1.*

Seja $\{f^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}_{a\in A}$, f^a continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a. Suponha que para todo $x \in x_0 + \alpha B$ e $a \in A$, $\nabla f^a(x)$ é combinação linear de $\nabla f_1^a(x), \ldots, \nabla f_{q^a}^a(x)$ para algum $q^a \in \{1, \ldots, n-1\}$. Para todo $u \in F^a(x_0 + \varepsilon B)$ e $a \in A$, defina

$$\varphi^a(u) := f^a(G^a(u)). \tag{3.3}$$

Então, para todo $u \in F^a(x_0 + \varepsilon B)$, para todo $a \in A$ e $j = q^a + 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(u) = 0. \tag{3.4}$$

Demonstração. Vamos denotar $G^a = (g_1^a, \ldots, g_n^a)$. Aplicando a regra da cadeia em (3.3) temos, para $u \in F^a(x_0 + \varepsilon B)$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(u) &= \frac{\partial f^a}{\partial x_1}(G^a(u))\frac{\partial g_1^a}{\partial u_j}(u) + \ldots + \frac{\partial f^a}{\partial x_n}(G^a(u))\frac{\partial g_n^a}{\partial u_j}(u) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^a}{\partial u_j}(u) & \ldots & \frac{\partial g_n^a}{\partial u_j}(u) \end{pmatrix} \cdot \nabla f^a(G^a(u)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\nabla \varphi^a(u) = \nabla G^a(u)^\top \nabla f^a(G^a(u)) = \nabla F^a(G^a(u))^{-\top} \nabla f^a(G^a(u)) \\ \Rightarrow &\nabla F^a(G^a(u))^\top \nabla \varphi^a(u) = \nabla f^a(G^a(u)) \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} \nabla f_1^a(G^a(u)) & \ldots & \nabla f_n^a(G^a(u)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_1}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_n}(u) \end{pmatrix} = \nabla f^a(G^a(u)) \\ \Rightarrow &\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_1}(u)\nabla f_1^a(G^a(u)) + \ldots + \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_n}(u)\nabla f_n^a(G^a(u)) = \nabla f^a(G^a(u)). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Temos $u \in F^a(x_0 + \varepsilon B)\ \forall a \in A \Rightarrow G^a(u) \in x_0 + \varepsilon B \subset x_0 + \alpha B\ \forall a \in A$, então por hipótese $\nabla f^a(G^a(u))$ é escrito como combinação linear de $\nabla f_1^a(G^a(u)), \ldots, \nabla f_{q^a}^a(G^a(u))$.

Pela Observação 3.2 temos $\nabla F^a(G^a(u))$ não singular, então $\nabla f_1^a(G^a(u))$, ..., $\nabla f_n^a(G^a(u))$ são linearmente independentes para cada $a \in A$. Portanto, pela unicidade da combinação linear, $\dfrac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(u) = 0$ para todo $j = q^a + 1, \ldots, n$ e $a \in A$. □

Lema 3.2. *Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, n-vetores x_0 e y_0 e uma família de funções $f_1^a, \ldots, f_{q^a}^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a, onde, para cada $a \in A$, $0 < q^a \leqslant n - 1$ é um inteiro. Defina $F_{q^a}^a = (f_1^a, \ldots, f_{q^a}^a)$ com $F_{q^a}^a(x_0) = (f_1^a(x_0), \ldots, f_{q^a}^a(x_0)) = z_0^a \in \mathbb{R}^{q^a}$ para todo $a \in A$, onde $y_0 = (z_0^a, w_0^a) \in \mathbb{R}^{q^a} \times \mathbb{R}^{n-q^a}$. Suponha que:*

(a) Existe uma função monótona crescente $\hat{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ com $\hat{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tal que

$$|\nabla F_{q^a}^a(x) - \nabla F_{q^a}^a(x')| \leqslant \hat{\theta}(|x - x'|) \text{ para todo } x, x' \in x_0 + \alpha B, a \in A.$$

Existe $c_2 > 0$ tal que $|\nabla F_{q^a}^a(x_0)| \leqslant c_2$.

(b) Os gradientes $\nabla f_1^a(x_0), \ldots, \nabla f_{q^a}^a(x_0)$ são linearmente independentes para cada $a \in A$.

(c) Existe $c_1 > 0$ tal que, para todo $a \in A$,

$$|[\nabla F_{q^a}^a(x_0) \nabla F_{q^a}^a(x_0)^\top]^{-1}| \leqslant c_1.$$

Então, para cada $a \in A$, existe uma família de funções $f^a_{q^a+1}, \ldots, f^a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$, uniformemente em a, de modo que $F^a = (f^a_1, \ldots, f^a_{q^a}, f^a_{q^a+1}, \ldots, f^a_n)$ satisfaz $F^a(x_0) = y_0$ para todo $a \in A$, e todas as hipóteses do Teorema 3.1.

Demonstração. Sejam $\xi^a_{q^a+i} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n - q^a$, de modo que, para todo $a \in A$, $\{\nabla f^a_1(x_0), \ldots, \nabla f^a_{q^a}(x_0), \xi^a_{q^a+1}, \ldots, \xi^a_n\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^n$, $|\xi^a_{q^a+i}| = 1, i = 1, \ldots, n - q^a$, $(\xi^a_i)^\top \xi^a_j = 0$ para $i \neq j$, $i, j = q^a + 1, \ldots, n$ e

$$\begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1})^\top \\ \vdots \\ (\xi^a_n)^\top \end{bmatrix} \nabla F^a_{q^a}(x_0)^\top = 0 \text{ e } \nabla F^a_{q^a}(x_0) \begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1}) & \ldots & (\xi^a_n) \end{bmatrix} = 0.$$

Então, basta tomar $f^a_{q^a+i}(x) = (\xi^a_{q^a+i})^\top (x - x_0) + (w^a_0)_i, i = 1, \ldots, n - q^a$, que teremos $F^a(x_0) = (f^a_1(x_0), \ldots, f^a_{q^a}(x_0), f^a_{q^a+1}(x_0), \ldots, f^a_n(x_0)) = (z^a_0, w^a_0) = y_0$ e todas as hipóteses do Teorema 3.1 satisfeitas. De fato,

(i) $f^a_{q^a+i}, i = 1, \ldots, n - q^a$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a, pois são funções lineares e $|\xi^a_{q^a+i}| = 1 \ \forall a \in A, i = 1, \ldots, n - q^a$.

(ii) Sejam $x, x' \in x_0 + \alpha B$ e $a \in A$, então

$$|\nabla F^a(x) - \nabla F^a(x')| = \left| \begin{bmatrix} \nabla F^a_{q^a}(x) - \nabla F^a_{q^a}(x') \\ 0 \end{bmatrix} \right| = |\nabla F^a_{q^a}(x) - \nabla F^a_{q^a}(x')|,$$

e por hipótese existe uma função monótona crescente $\hat{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ com $\hat{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tal que

$$|\nabla F^a_{q^a}(x) - \nabla F^a_{q^a}(x')| \leqslant \hat{\theta}(|x - x'|) \text{ para todo } x, x' \in x_0 + \alpha B, a \in A.$$

(iii) Como tomamos $\xi^a_{q^a+i}, i = 1, \ldots, n - q^a$, de modo que, para todo $a \in A$, o conjunto $\{\nabla f^a_1(x_0), \ldots, \nabla f^a_{q^a}(x_0), \xi^a_{q^a+1}, \ldots, \xi^a_n\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^n$, temos $\nabla F^a(x_0)$ não singular para cada $a \in A$. Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla F^a(x_0) \nabla F^a(x_0)^\top &= \begin{bmatrix} \nabla F^a_{q^a}(x_0) \nabla F^a_{q^a}(x_0)^\top & \nabla F^a_{q^a}(x_0) \begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1}) & \ldots & (\xi^a_n) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1})^\top \\ \vdots \\ (\xi^a_n)^\top \end{bmatrix} \nabla F^a_{q^a}(x_0)^\top & \begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1})^\top \\ \vdots \\ (\xi^a_n)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\xi^a_{q^a+1}) & \ldots & (\xi^a_n) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \nabla F^a_{q^a}(x_0) \nabla F^a_{q^a}(x_0)^\top & 0 \\ 0 & I_{n-q^a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos $\det(\nabla F^a(x_0) \nabla F^a(x_0)^\top) = \det(\nabla F^a_{q^a}(x_0) \nabla F^a_{q^a}(x_0)^\top)$ para cada $a \in A$. Pela hipótese (c) e pela Proposição 3.4, existe $K > 0$ tal que $\det(\nabla F^a(x_0) \nabla F^a(x_0)^\top) > K$

para todo $a \in A$. Portanto, usando a hipótese (a), segue da Proposição 3.2 que existe $m > 0$ tal que $|(\nabla F^a(x_0)\nabla F^a(x_0)^\top)^{-1}| \leqslant m$ para todo $a \in A$.
Para finalizar a demonstração resta mostrar que existe $c > 0$ tal que $|(\nabla F^a(x_0))^{-1}| \leqslant c$ para todo $a \in A$. Sejam $\sigma_n^a \geqslant \ldots \geqslant \sigma_1^a$ os valores singulares de $\nabla F^a(x_0)$. Temos $\dfrac{1}{(\sigma_1^a)^2} \leqslant m$, daí

$$(\det(\nabla F^a(x_0)))^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^a\right)^2 = \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i^a)^2 \geqslant (\sigma_1^a)^{2n} \geqslant \frac{1}{m^n} \Rightarrow \det(\nabla F^a(x_0)) \geqslant \sqrt{\frac{1}{m^n}}. \tag{3.6}$$

Note que

$$|\nabla F^a(x_0)|^2 \leqslant |\nabla F^a_{q^a}(x_0)|^2 + \sum_{i=1}^{n-q^a} |\xi_{q^a+i}|^2 \leqslant c_2^2 + n - q^a \Rightarrow |\nabla F^a(x_0)| \leqslant \sqrt{c_2^2 + n - q^a}. \tag{3.7}$$

De (3.6), (3.7) e Proposição 3.2 temos o que restava mostrar.

□

Lema 3.3. *Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, n-vetores x_0 e y_0 e famílias de funções $f^a, f_1^a, \ldots, f_{q^a}^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a, onde, para cada $a \in A$, $0 < q^a \leqslant n-1$ é um inteiro. Defina $F_{q^a}^a = (f_1^a, \ldots, f_{q^a}^a)$ de modo que $F_{q^a}^a(x_0) = (f_1^a(x_0), \ldots, f_{q^a}^a(x_0)) := z_0 \in \mathbb{R}^q$ para todo $a \in A$, onde $y_0 = (z_0, w_0)$, e as hipóteses (a)-(c) do Lema 3.2 são satisfeitas. Além disso, suponha que $\nabla f^a(x)$ é combinação linear de $\nabla f_1^a(x), \ldots, \nabla f_{q^a}^a(x)$ para todo $x \in x_0 + \alpha B$ e $a \in A$. Em particular,*

$$\nabla f^a(x_0) = \sum_{i=1}^{q^a} \lambda_i^a \nabla f_i^a(x_0). \tag{3.8}$$

Então, existem $\rho, \sigma > 0$ e uma família de funções $\{\varphi^a : z_0 + \sigma B \to \mathbb{R}\}_{a\in A}$, φ^a continuamente diferenciável em $z_0 + \sigma B$ para todo $a \in A$, tal que para todo $x \in x_0 + \rho B$, temos $(f_1^a(x), \ldots, f_{q^a}^a(x)) \in z_0 + \sigma B$ e

$$f^a(x) = \varphi^a(f_1^a(x), \ldots, f_{q^a}^a(x)) \ \forall a \in A.$$

Além disso, para todo $i = 1, \ldots, q^a$,

$$\lambda_i^a = \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_i}(f_1^a(x_0), \ldots, f_{q^a}^a(x_0)) \ \forall a \in A. \tag{3.9}$$

Os números ρ e σ dependem somente de $\alpha, \hat{\theta}$, c_1 e c_2.

Demonstração. Considere, para cada $a \in A$, $f^a_{q^a+1}, \ldots, f^a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$, uniformemente em a. Daí considere $F^a = (f^a_1, \ldots, f^a_n)$ de modo que as hipóteses do Teorema 3.1 estejam satisfeitas. No lema anterior mostramos uma maneira de se fazer isto. Então, pelo Lema 3.1, é possível definir, para cada $a \in A$, $\varphi^a : y_0 + \delta B \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, tal que para todo $u = (f^a_1(x), \ldots, f^a_n(x)) \in F^a(x_0 + \varepsilon B)$ e $a \in A$, $\varphi^a(u) = f^a(G^a(u)) = f^a(x)$ e $\dfrac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(u) = 0, j = q^a + 1, \ldots, n$. Logo φ^a, para cada $a \in A$, não depende de $u_{q^a+1}, \ldots, u_n$ para todo $u = (f^a_1(x), \ldots, f^a_n(x)) \in F^a(x_0 + \varepsilon B)$ e $a \in A$. Pela continuidade uniforme de $f^a_1, \ldots, f^a_n$ existem $\rho \in (0, \alpha)$, $\sigma, \beta > 0$, tais que

(i) $(z_0 + \sigma B) \times (w_0 + \beta B) \subset F^a(x_0 + \varepsilon B)$, para todo $a \in A$.

(ii) $\forall x \in x_0 + \rho B, (f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) \in z_0 + \sigma B$, para todo $a \in A$.

(iii) $\forall u \in (z_0 + \sigma B) \times (w_0 + \beta B)$, existe $\tilde{\varphi}^a : z_0 + \sigma B \to \mathbb{R}, \tilde{\varphi}^a$ continuamente diferenciável tal que $\varphi^a(u) = \tilde{\varphi}^a(u_1, \ldots, u_{q^a})$ para todo $a \in A$.

Assim, por (ii), (iii) e (3.3), temos

$(f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) \in z_0 + \sigma B$ e $\tilde{\varphi}^a(f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) = \varphi^a(F^a(x)) = f^a(x)$ para todo $a \in A$.

Logo,

$$f^a(x) = \tilde{\varphi}^a(f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) \ \forall x \in x_0 + \rho B \text{ e } a \in A. \tag{3.10}$$

Tome, a partir de agora, $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Aplicando a regra da cadeia em (3.10), temos

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_1}(f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) \nabla f^a_1(x) + \ldots + \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_{q^a}}(f^a_1(x), \ldots, f^a_{q^a}(x)) \nabla f^a_{q^a}(x) = \nabla f^a(x).$$

Então, no ponto x_0, temos

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_1}(f^a_1(x_0), \ldots, f^a_{q^a}(x_0)) \nabla f^a_1(x_0) + \ldots + \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_{q^a}}(f^a_1(x_0), \ldots, f^a_{q^a}(x_0)) \nabla f^a_{q^a}(x_0) = \nabla f^a(x_0).$$

Pela hipótese de que $\nabla f^a_1(x_0), \ldots, \nabla f^a_{q^a}(x_0)$ são linearmente independentes para cada $a \in A$ e de (3.8) segue a validade de (3.9) para todo $i = 1, \ldots, q^a$ e $a \in A$. □

Teorema 3.2 (Teorema da Função Implícita Uniforme)**.** *[36] Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$, um número $\alpha > 0$, uma família de funções $\{\psi^a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{a \in A}$, e um ponto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tal que $\psi^a(u_0, v_0) = 0$ para todo $a \in A$. Suponha que*

(i) ψ^a é continuamente diferenciável em $(u_0, v_0) + \alpha B$ para todo $a \in A$, uniformemente em a.

(ii) exista uma função monótona crescente $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *com* $\theta(s) \downarrow 0$ *quando* $s \downarrow 0$ *tal que, para todo* $a \in A$ *e* $(u, v) \neq (u', v') \in (u_0, v_0) + \alpha B$,

$$|\nabla\psi^a(u, v) - \nabla\psi^a(u', v')| \leqslant \theta(|(u, v) - (u', v')|).$$

(iii) $\nabla_v\psi^a(u_0, v_0)$ *é não singular para cada* $a \in A$ *e exista* $c > 0$ *tal que, para todo* $a \in A$,

$$|[\nabla_v\psi^a(u_0, v_0)]^{-1}| \leqslant c.$$

Então existem $\delta \geqslant 0$ *e uma família de funções continuamente diferenciáveis* $\{\phi^a : u_0 + \delta B \to v_0 + \alpha B\}_{a\in A}$ *Lipschitz com constante de Lipschitz* k *comum tais que, para todo* $a \in A$,

(a) $v_0 = \phi^a(u_0)$,

(b) $\psi^a(u, \phi^a(u)) = 0$ *para todo* $u \in u_0 + \delta B$,

(c) $\nabla_u\phi^a(u_0) = -[\nabla_v\psi^a(u_0, v_0)]^{-1}\nabla_u\psi^a(u_0, v_0)$.

Os números δ *e* k *dependem de* θ, c *e* α *somente.*

Além disso, se A *é um conjunto Borel e* $a \mapsto \psi^a(u, v)$ *é uma função mensurável Borel para cada* $(u, v) \in (u_0, v_0) + \alpha B$, *então* $a \mapsto \phi^a(u)$ *é uma função mensurável Borel para cada* $u \in u_0 + \delta B$.

4 Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem para Problemas de Controle Ótimo com Restrições Mistas

O princípio do máximo pode não ser uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem para o problema de controle ótimo na presença de restrições mistas de igualdade e desigualdade. Por isso, além das hipóteses básicas, precisamos supor uma condição para as restrições de modo a estabelecer a validade do princípio do máximo no minimizador. Esta condição é conhecida como qualificação de restrições. A qualificação de restrições mais encontrada na literatura envolve uma condição de posto completo da matriz jacobiana das restrições com relação ao controle irrestrito e usa-se o teorema da função implícita como abordagem principal para as demonstrações.

O princípio do máximo para problemas com restrições mistas "regulares", que satisfazem uma condição do tipo Mangasarian-Fromovitz, foi primeiramente estabelecido por Dubovitskii e Milyutin no início da década de 60, depois de provar a validade do princípio do máximo para problemas com restrições de fase em [37], mas não foi publicado. As demonstrações feitas nos trabalhos de Dubovitskii e Milyutin usam resultados complexos de matemática. Como o problema de controle ótimo surge no contexto de aplicações, a tentativa dos trabalhos futuros foi de simplificar as demonstrações e resultados para serem amplamente entendidos e usados.

O primeiro trabalho provando o princípio do máximo para um problema com restrições mistas geral sob a hipótese de posto completo foi o de Neustadt e Makowsky em [38]. Antes dele, muitos trabalhos foram publicados lidando com casos particulares, por exemplo, Gamkrelidze [39], Hestenes [8] e Virsan [40]. Os trabalhos [12, 13, 41, 42], por exemplo, consideram a hipótese de posto completo com dados não suaves. Sob uma condição do tipo Mangasarian-Fromovitz, o princípio do máximo foi estabelecido por Dmitruk em [11], Arutyunov em [43] e permitindo dados não suaves por Clarke e de Pinho em [15]. O princípio do máximo foi provado sob uma condição de interioridade que requer hipóteses de convexidade em [44] e com dados não suaves em [14]. No contexto não suave, Clarke e de Pinho em [15] e Li e Ye em [16] provaram a validade do princípio do máximo sob a qualificação de restrições calibrada e a qualificação de restrições básica fraca, respectivamente.

Neste capítulo, definimos o problema de controle ótimo com restrições mistas e as hipóteses básicas. Temos as qualificações de restrições no contexto de controle ótimo

estabelecidas na literatura. E por último faremos a generalização da condição de posto completo da literatura. A primeira generalização é da condição de posto completo de [12] para o problema só com restrições mistas de igualdade, e a segunda generalização é da condição de posto completo, dada também em [12], para o problema com restrições mistas de igualdade e desigualdade.

4.1 Problema de Controle Ótimo com Restrições Mistas

As referências usadas nesta e na próxima seção são [45] e [46].

Vamos definir nosso problema de interesse, o problema de controle ótimo com restrições mistas. São dados o intervalo $T := [0,1]$, as funções $(f,g,b) : T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{k_u}\times\mathbb{R}^{k_v} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_b}$, o funcional $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a multifunção $V : T \rightrightarrows \mathbb{R}^{k_v}$ e o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. A variável, chamada de função controle, é composta por duas componentes, u o controle irrestrito e v o controle restrito, são funções mensuráveis $u : T \to \mathbb{R}^{k_u}$ e $v : T \to \mathbb{R}^{k_v}$ com $v(t) \in V(t)$ para quase todo $t \in T$.

O problema de controle ótimo com restrições mistas consiste em encontrar uma função controle $(u(t), v(t))$ de modo que minimiza o funcional

$$l(x(0), x(1))$$

sobre todos os arcos $x(t)$, chamados de trajetória de estado, satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \text{ q.t. } t \in T,\\
&g(t, x(t), u(t), v(t)) \leqslant 0 \text{ q.t. } t \in T,\\
&b(t, x(t), u(t), v(t)) = 0 \text{ q.t. } t \in T,\\
&(x(0), x(1)) \in C.
\end{aligned}$$

Um componente básico de um problema de controle ótimo é o sistema de controle que associa cada variável de controle $(u(t), v(t))$ com a variável de estado $x(t)$ por meio de uma equação diferencial e uma condição de contorno

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)),\ (x(0), x(1)) \in C,$$

onde $t \in T := [0,1]$ é o tempo, com 0 e 1 o tempo inicial e final, respectivamente.

No problema de controle ótimo com restrições mistas, a variável de controle está associada com a variável de estado pelo sistema de controle e pelas restrições mistas de desigualdade e igualdade, $g(t, x(t), u(t), v(t)) \leqslant 0$ e $b(t, x(t), u(t), v(t)) = 0$, respectivamente.

Outro componente de um problema de controle ótimo é o funcional objetivo. Neste trabalho vamos considerar o funcional na forma conhecida como Forma de Mayer,

$$l(x(0), x(1)).$$

Segundo [47], este formato não é restritivo, pois os problemas com custo integral podem ser facilmente reformulados. No Resultado A.1 do apêndice é apresentada uma maneira de se fazer isso.

O problema de controle ótimo pode ser escrito de várias formas diferentes, com diferentes funcionais objetivo, com controle restrito ou controle irrestrito, com condições de contorno fixas ou não, com ou sem restrições de igualdade e desigualdade, entre outras variações. Neste trabalho o problema de interesse principal é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \text{ q.t. } t \in T, \\ & g(t, x(t), u(t), v(t)) \leqslant 0 \text{ q.t. } t \in T, \\ & b(t, x(t), u(t), v(t)) = 0 \text{ q.t. } t \in T, \\ & v(t) \in V(t) \text{ q.t. } t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in C. \end{array} \tag{P}$$

Ao longo do trabalho vamos supor que $k_u \geqslant m_g + m_b$.

Vamos estabelecer definições e notações que serão usadas posteriormente.

Definição 4.1. *Um processo é uma tripla (x, u, v) compreendida por um arco $x \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n)$ e funções mensuráveis $u : T \to \mathbb{R}^{k_u}$ e $v : T \to \mathbb{R}^{k_v}$ satisfazendo as restrições de (P).*

Definição 4.2. *Um processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um minimizador local fraco se, para algum $\varepsilon > 0$, o processo minimiza o custo sobre todos os processos (x, u, v) satisfazendo $(x(t), u(t), v(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$ q.t. $t \in T$, onde*

$$\Omega_\varepsilon(t) := (\bar{x}(t) + \varepsilon B) \times (\bar{u}(t) + \varepsilon B) \times ((\bar{v}(t) + \varepsilon B) \cap V(t)).$$

Definição 4.3. *A função Hamiltoniana $H : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \to \mathbb{R}$ relacionada com (P) é definida como*

$$H(t, x, p, r, q, u, v) := p \cdot f(t, x, u, v) + r \cdot g(t, x, u, v) + q \cdot b(t, x, u, v).$$

Definição 4.4. *Dado um processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$, o conjunto $\mathcal{I}_a(t) = \{i \in \{1, \ldots, m_g\} \mid \bar{g}_i(t) = 0\}$ é o conjunto das restrições ativas das desigualdades em t e $\mathcal{I}_c(t) = (\mathcal{I}_a(t))^c$ é o complementar. Considere $q_a(t)$ e $q_c(t)$ as cardinalidades de $\mathcal{I}_a(t)$ e $\mathcal{I}_c(t)$, respectivamente. Note que $q_a(t) + q_c(t) = m_g$.*

Denotaremos $I = \{1, \ldots, m_g\}$ e $J = \{1, \ldots, m_b\}$.

Dados qualquer matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um subconjunto de índices $\mathcal{K} \subset \{1, \ldots, m\}$, a matriz obtida de M depois de remover as linhas com índices não pertencentes a $\mathcal{K}$ será denotada como $M^{\mathcal{K}}$.

A notação $r \geqslant 0$ para $r \in \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) significa que cada componente de r é não negativo e a notação $(b, g)(\cdot)$ significa $(b(\cdot), g(\cdot))$.

$(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um processo de (P) e $\bar{\phi}(t)$ é a função ϕ avaliada em $(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$. E $\nabla\phi(t, x, u, v) := \nabla_{x,u,v}\phi(t, x, u, v)$.

4.2 Hipóteses Básicas

As hipóteses básicas são ditas satisfeitas em um processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que as seguintes condições são válidas:

(H1) A função $f(\cdot, x, u, v)$ é Lebesgue mensurável para cada (x, u, v) e existe uma função integrável k_f tal que, para quase todo $t \in T$,

$$|f(t, x, u, v) - f(t, x', u', v')| \leqslant k_f(t)|(x, u, v) - (x', u', v')|$$

para todo $(x, u, v), (x', u', v') \in \Omega_\varepsilon(t)$.

(H2) O gráfico de V é um conjunto Borel mensurável e $V_\varepsilon(t) := (\bar{v}(t) + \varepsilon B) \cap V(t)$ é fechado em quase todo $t \in T$.

(H3) C é fechado e l é localmente Lipschitz em uma vizinhança de $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

(H4) $(b, g)(\cdot, x, u, v)$ é mensurável para cada (x, u, v) e $g(\cdot, \bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ está em $L^\infty(T, \mathbb{R}^{m_g})$.

(H5) $(b, g)(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável em $(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) + \varepsilon B$ para quase todo $t \in T$ e existe uma função integrável $L_{b,g}$ tal que, para quase todo $t \in T$,

$$|(b, g)(t, x, u, v) - (b, g)(t, x', u', v')| \leqslant L_{b,g}(t)|(x, u, v) - (x', u', v')|$$

para todo $(x, u, v), (x', u', v') \in \Omega_\varepsilon(t)$.

(H6) Existem $k_{b,g} > 0$ e uma função crescente $\tilde{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ com $\tilde{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tais que, para quase todo $t \in T$,

$$|\nabla_x(\bar{b}, \bar{g})(t)| + |\nabla_u(\bar{b}, \bar{g})(t)| + |\nabla_v(\bar{b}, \bar{g})(t)| \leqslant k_{b,g},$$
$$|\nabla_{x,u,v}(b, g)(t, x, u, v) - \nabla_{x,u,v}(b, g)(t, x', u', v')| \leqslant \tilde{\theta}(|(x, u, v) - (x', u', v')|)$$

para todo $(x, u, v) \neq (x', u', v')$ pertencente a $\Omega_\varepsilon(t)$.

4.3 Qualificações de Restrições

Nesta seção, apresentamos as qualificações de restrições no contexto de controle ótimo da literatura. Definimos e comparamos as seguintes qualificações de restrições:

condição de interioridade (CI), condição de posto completo (PC), qualificação de restrição calibrada (CCQ), condição de Mangasarian-Fromovitz (MFC) e qualificação de restrição básica fraca (WBCQ).

Para quase todo $t \in T$, sejam $w(t) = (u(t), v(t))$ e $W(t) = \mathbb{R}^{k_u} \times V(t)$.

A primeira qualificação de restrição que apresentamos, é dada por de Pinho, Vinter e Zheng em [14].

Definição 4.5. *A condição de interioridade é satisfeita no processo $(\bar{x}, \bar{w})$, se existe um escalar positivo δ tal que:*

$$\delta B \subset \{(b(t, \bar{x}(t), W(t)), g(t, \bar{x}(t), W(t)) + z) : z \in \mathbb{R}^{m_g}, z \geqslant 0\}$$

para quase todo $t \in T$.

Observação 4.1. *A demonstração do princípio do máximo para o problema (P) sob a condição de interioridade requer uma hipótese a mais. É assumido que o conjunto $\{(f(t,x,w), b(t,x,w), g(t,x,w)) : w \in W(t)\}$ é convexo para cada $t \in T$.*

Há diferentes versões da condição de posto completo para (P). Seguem abaixo as versões para dados mensuráveis.

Definição 4.6. *A condição de posto completo é satisfeita no processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ se existe $K > 0$ tal que $\det(\bar{\Upsilon}_i(t)\bar{\Upsilon}_i(t)^\top) \geqslant K$ para quase todo $t \in T$, $i = 1, 2, 3$ ou 4. Cada $\Upsilon_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ ou 4 define uma versão diferente da condição. Hestenes em [8] e Neustadt em [9] consideram*

$$\bar{\Upsilon}_1(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{b}(t) \\ \nabla_u \bar{g}(t) \end{bmatrix}.$$

Osmolovskii em [10] considera

$$\bar{\Upsilon}_2(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{b}(t) \\ \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_\beta(t)}(t) \end{bmatrix},$$

onde $\mathcal{I}_\beta(t) = \{i \in \{1, \ldots, m_g\} : \ \bar{g}_i(t) \geqslant -\beta\}$, $\beta > 0$ fixo. A matriz considerada por de Pinho e Ilchmann em [12] é

$$\bar{\Upsilon}_3(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{b}(t) & 0 \\ \nabla_u \bar{g}(t) & \operatorname{diag}\{-\bar{g}_i(t)\}_{i=1}^{m_g} \end{bmatrix}.$$

E por último, de Pinho em [13] considera

$$\bar{\Upsilon}_4(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{b}(t) \\ \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \end{bmatrix}.$$

Observação 4.2. *(a) Se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_1(t)$, então vale com $\bar{\Upsilon}_2(t)$.*

Esta afirmação segue usando as mesmas ideias da demonstração da Proposição A.1 2. do apêndice. Ver detalhes em [12].

(c) Se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_3(t)$, então vale com $\bar{\Upsilon}_4(t)$.

(b) Se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_2(t)$, então vale com $\bar{\Upsilon}_3(t)$.

Esta afirmação segue da Proposição A.1 1. do apêndice. Ver detalhes na Observação 3.4 (b) em [12].

(c) Se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_3(t)$, então vale com $\bar{\Upsilon}_4(t)$.

Segue diretamente da Proposição A.1 3. do apêndice.

Segue abaixo um exemplo, dado em [12], em que a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_4(t)$, mas não vale com $\bar{\Upsilon}_3(t)$.

Exemplo 4.1. *Considere o problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & x(1) \\ \textit{sujeito a} & \dot{x}(t) = u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & u_1(t) + u_2(t)u_3(t) \leqslant 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & tu_1(t) + u_2(t)u_3(t) - t \leqslant 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & x(0) = 0. \end{array}$$

É fácil ver que $\bar{x} = \bar{u_1} = \bar{u_2} = \bar{u_3} = 0$ é um minimizador para o problema e

$$\mathcal{I}_a(t) = \begin{cases} \{1\} \ \textit{se}\ t \neq 0, \\ \{1, 2\} \ \textit{se}\ t = 0. \end{cases}$$

Usando a notação da Proposição A.1 temos

$$A(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, t \in (0, 1], \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, t = 0. \end{cases}$$

$$N(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \end{bmatrix}, t \in (0, 1], \\ \textit{não existe}, t = 0. \end{cases}$$

$$B(t) = \begin{cases} -t, t \in (0, 1], \\ \textit{não existe}, t = 0. \end{cases}$$

$$J(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{bmatrix}, t \in (0, 1], \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, t = 0. \end{cases}$$

A condição (i) da Proposição A.1 é satisfeita, pois

$$\det(A(t)A(t)^\top) = \begin{cases} 1, t \in (0,1], \\ 0, t = 0. \end{cases}$$

As condições (ii) e (iii) não valem, pois $t \mapsto J(t)$ é contínua e

$$\det(B(t)B(t)^\top) = \det(J(t)J(t)^\top) = t^2 \text{ para todo } t \in (0,1].$$

A qualificação de restrição abaixo foi dada originalmente em [15], para problemas com dados possivelmente não suaves (inclusive as restrições mistas). Entretanto, trabalham com a noção de solução ótima de raio R, que é diferente da usada nesta tese. Para detalhes, ver [15]. Tal condição foi reescrita em [47] com uma definição de mínimo mais próxima da que estamos utilizando neste trabalho. As definições dadas em [15] e [47] são descritas em termos da subdiferencial limite, para dados não suaves. A seguir temos a sua versão para o caso suave.

Definição 4.7. *A qualificação de restrição calibrada (CCQ) é satisfeita no processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ se existe uma constante M tal que, para quase todo $t \in T$, $(x,u,v) \in \Omega_\epsilon(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$, $\gamma_i \geqslant 0, \gamma_i g_i(t, x(t), u(t), v(t)) = 0$ $i = 1, \ldots, m_g$,*

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x b(t,x,u,v)^\top \\ \nabla_u b(t,x,u,v)^\top \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \nabla_x g(t,x,u,v)^\top \\ \nabla_u g(t,x,u,v)^\top \end{bmatrix} \gamma \Rightarrow |(\gamma, \lambda)| \leqslant M|\beta|.$$

Observação 4.3. *(a) Na definição acima α não desempenha nenhuma função, mas esta condição foi definida em um contexto em que α é necessário.*

(b) Se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_4(t)$, então a qualificação de restrição calibrada é satisfeita.

De fato, se a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_4(t)$, então existe $K > 0$ tal que $\det(\bar{\Upsilon}_4(t)\bar{\Upsilon}_4(t)^\top) \geqslant K$ para quase todo $t \in T$. Sejam $\sigma_1(\bar{\Upsilon}_4(t)) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{m_b+q_a(t)}(\bar{\Upsilon}_4(t))$ os valores singulares de $\bar{\Upsilon}_4(t)$. Temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m_b+q_a(t)} \sigma_i(\bar{\Upsilon}_4(t))^2 \geqslant K \Rightarrow 1 &\geqslant \frac{K}{\prod_{i=1}^{m_b+q_a(t)} \sigma_i(\bar{\Upsilon}_4(t))^2} \\ \Rightarrow \sigma_1(\bar{\Upsilon}_4(t))^2 &\geqslant \frac{K}{\prod_{i\neq 1} \sigma_i(\bar{\Upsilon}_4(t))^2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por (H6), $\sigma_{m_b+q_a(t)}(\bar{\Upsilon}_4(t)) \leqslant k_{b,g}$. Além disso,

$$\prod_{i\neq 1} \sigma_i(\bar{\Upsilon}_4(t))^2 \leqslant \sigma_{m_b+q_a(t)}(\bar{\Upsilon}_4(t))^{2(m_b+q_a(t)-1)}.$$

Então,

$$\frac{1}{\prod_{i\neq 1} \sigma_i(\bar{\Upsilon}_4(t))^2} \geqslant \frac{1}{k_{b,g}^{2(m_b+q_a(t)-1)}}.$$

Desta última desigualdade e de (4.1), temos

$$\sigma_1(\bar{\Upsilon}_4(t))^2 \geqslant \frac{K}{k_{b,g}^{2(m_b+q_a(t)-1)}} := K_1.$$

Como $\Upsilon_4(t)$ é contínua em $\Omega_\epsilon(t)$ (com respeito a (x,u,v)), para quase todo $t \in T$, então os autovalores de $\Upsilon_4(t)$ são contínuos em $\Omega_\epsilon(t)$, para quase todo $t \in T$. Logo, se $\sigma_1(\bar{\Upsilon}_4(t))^2 \geqslant K_1$, então existe K_4 tal que $\sigma_1(\Upsilon_4(t)^2) \geqslant K_4$ em $\Omega_\epsilon(t)$, para quase todo $t \in T$.

Sejam $(x,u,v) \in \Omega_\epsilon(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$, $\gamma_i \geqslant 0, \gamma_i g_i(t,x(t),u(t),v(t)) = 0,\ i = 1,\ldots,m_g$. Seja $\gamma = (\gamma_{q_a}, \gamma_{q_c}) \in \mathbb{R}^{q_a(t)} \times \mathbb{R}^{q_c(t)}$. Sem perda de generalidade podemos reordenar as restrições de modo que $\nabla_u g(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \\ \nabla_u g^{\mathcal{I}_c(t)}(t) \end{bmatrix}$. Então, para quase todo $t \in T$,

$$\left|\nabla_u b(t)^\top \lambda + \nabla_u g(t)^\top \gamma\right|^2 =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^\top & \gamma_{q_a}^\top & \gamma_{q_c}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_u b(t) \\ \nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \\ \nabla_u g^{\mathcal{I}_c(t)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_u b(t)^\top & \nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t)^\top & \nabla_u g^{\mathcal{I}_c(t)}(t)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma_{q_a} \\ \gamma_{q_c} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^\top & \gamma_{q_a}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_u b(t) \\ \nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_u b(t)^\top & \nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma_{q_a} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{m_b+q_a(t)} \sigma_i(\Upsilon_4(t))^2 z_i^2,$$

onde $|z| = |(\gamma_{q_a}, \lambda)| = |(\gamma, \lambda)|$. Como $\sigma_1(\Upsilon_4(t))$ é o menor autovalor de $\Upsilon_4(t)$ temos, $\left|\nabla_u b(t)^\top \lambda + \nabla_u g(t)^\top \gamma\right|^2 \geqslant \sigma_1(\Upsilon_4(t))^2 |(\gamma,\lambda)|^2$. Logo $\left|\nabla_u b(t)^\top \lambda + \nabla_u g(t)^\top \gamma\right|^2 \geqslant K_4 |(\gamma,\lambda)|^2$, pois $\sigma_1(\Upsilon_4(t))^2 \geqslant K_4$. Defina $M := \frac{1}{\sqrt{K_4}}$ e temos o que queríamos mostrar.

(c) *Se consideramos o problema só com restrições de igualdade, CCQ e posto completo são equivalentes, isto é, se a qualificação de restrição calibrada é satisfeita, então a condição de posto completo vale com $\bar{\Upsilon}_1(t)$.*

De fato, se a qualificação de restrição calibrada é satisfeita, existe uma constante M tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x \bar{b}(t)^\top \\ \nabla_u \bar{b}(t)^\top \end{bmatrix} \lambda \Rightarrow |\lambda| \leqslant M|\beta|,$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$. Assim,

$$\left|\nabla_u \bar{b}(t)^\top \lambda\right|^2 \geqslant \frac{1}{M^2}|\lambda|^2 \Rightarrow \lambda^\top \bar{\Upsilon}_1(t) \bar{\Upsilon}_1(t)^\top \lambda \geqslant \frac{1}{M^2}\lambda^\top\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda^\top \left(\bar{\Upsilon}_1(t)\bar{\Upsilon}_1(t)^\top - \frac{1}{M^2} I\right) \lambda \geqslant 0.$$

A desigualdade acima implica que a matriz $\bar{\Upsilon}_1(t)\bar{\Upsilon}_1(t)^\top - \frac{1}{M^2}I$ *é semidefinida positiva, logo seus autovalores são não negativos, isto é,* $\sigma_m(\bar{\Upsilon}_1(t))^2 - \frac{1}{M^2} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_1(\bar{\Upsilon}_1(t))^2 - \frac{1}{M^2} \geqslant 0$. *Portanto,* $\sigma_1(\bar{\Upsilon}_1(t))^2 \geqslant \frac{1}{M^2} \Rightarrow \sigma_1(\bar{\Upsilon}_1(t))^{2m} \geqslant \frac{1}{M^{2m}}$. *Como* $\prod_{i=1}^{m} \sigma_i(\Upsilon_1(t))^2 \geqslant \sigma_1(\Upsilon_1(t))^{2m}$, *então* $\det(\Upsilon_1(t)\Upsilon_1(t)^\top) \geqslant \frac{1}{M^{2m}}$. *Defina* $K := \frac{1}{M^{2m}}$ *e temos o que queríamos.*

(d) CCQ também é definida em [15] para problemas mais gerais em que o controle não é dividido na parte restrita e irrestrita. Clarke, Ledyaev e de Pinho em [48] mostraram que a condição de interioridade implica a qualificação de restrição calibrada para estes problemas mais gerais.

Definimos abaixo a condição de Mangasarian-Fromovitz.

Definição 4.8. *A condição de Mangasarian-Fromovitz (MFC) é satisfeita se para cada* $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$, $\gamma_i(t) \geqslant 0, \gamma_i(t)g_i(t, x(t), w(t)) = 0$ $i = 1, \ldots, m_g$,

$$\nabla_w b(t, x, w)^\top \lambda + \nabla_w g(t, x, w)^\top \gamma \in -N_{W(t)}(w) \Rightarrow \gamma = \lambda = 0.$$

A condição de Mangasarian-Fromovitz para dados não suaves, dada por Clarke e de Pinho em [15], deve ser satisfeita em todos os *cluster points* admissíveis, definidos a seguir.

Definição 4.9. *Dizemos que* $(t, \bar{x}(t), w)$ *é um cluster point admissível de* $(\bar{x}, \bar{w})$ *se existe uma sequência* $\{t_i\} \subset [0, 1]$ *convergindo para* t *e processos correspondentes* (x_i, w_i) *tais que* $\lim x_i = \bar{x}(t)$ *e* $\lim w_i = \lim \bar{w}(t_i) = w$.

Observação 4.4. *(a) A demonstração do princípio do máximo para o problema (P) sob a condição de Mangasarian-Fromovitz foi feita para o problema autônomo (as restrições não dependem de* t*) ou para problemas com a jacobiana em relação as restrições contínua em relação a* t. *Além disso requer outras hipóteses, ver [15]. Sob estas hipóteses, a condição de Mangasarian-Fromovitz implica a qualificação de restrição calibrada (Proposição 4.6 de Clarke e de Pinho [15]).*

(b) É fácil ver que a qualificação de restrição calibrada implica a condição de Mangasarian-Fromovitz.

A qualificação de restrição mais recente da literatura foi dada por Li e Ye em [16].

Definição 4.10. *A qualificação de restrição básica fraca (WBCQ) é satisfeita no processo* $(\bar{x}, \bar{w})$, *se* $(x, w) \in \Omega_\epsilon(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$, $\gamma_i(t) \geqslant 0, \gamma_i(t)g_i(x(t), w(t)) = 0$ $i = 1, \ldots, m_g$,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \nabla_x b(x, w)^\top \\ \nabla_w b(x, w)^\top \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \nabla_x g(x, w)^\top \\ \nabla_w g(x, w)^\top \end{bmatrix} \gamma \right\} + \{0\} \times N_W(w) \Rightarrow \alpha = 0.$$

Observação 4.5. *(a) WBCQ não é por si só uma qualificação de restrição, é necessário supor que M é calmness em $(0, x, w)$, onde*

$$M(y_1, y_2) := \{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times W : g(x, w) + y_1 \leqslant 0, b(x, w) + y_2 = 0\}.$$

Ver detalhes em [16].

(b) A demonstração do princípio do máximo para o Problema (P) sob a qualificação de restrição básica fraca mais calmness de M foi feita sob hipóteses adicionais, ver [16], além disso o problema considerado é autônomo, isto é, as restrições não dependem de t.

(c) A condição de Mangasarian-Fromovitz implica a qualificação de restrição básica fraca mais calmness de M, ver [16].

A fim de comparar as qualificações de restrições definidas nesta seção, dividimos em casos. Casos que consideram o conjunto da Observação 4.1 convexo ou não convexo, casos que consideram o problema (P) autônomo ou não autônomo e casos que consideram apenas um controle ou o controle dividido, isto é, há dois controles, o restrito e o irrestrito. No caso convexo, autônomo e sem a divisão do controle, as relações entre as qualificações de restrições são como na Figura 8 e no caso não convexo, autônomo e sem a divisão do controle, as relações são mostradas pela Figura 9. A Figura 10 estabelece as relações entre as qualificações de restrições no caso não autônomo e com a divisão do controle.

Na figura 10, PC1, PC2, PC3 e PC4 representam as condições de posto completo (Definição 4.6) com $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ e $i = 4$, respectivamente.

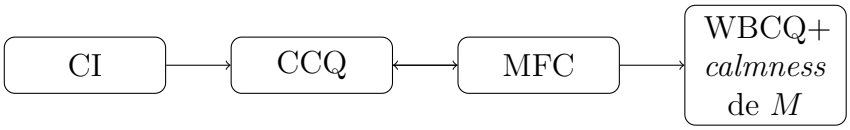

Figura 8 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso convexo, autônomo e sem a divisão do controle.

Figura 9 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não convexo, autônomo e sem a divisão do controle.

Figura 10 – Relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não autônomo e com a divisão do controle.

4.4 Generalização da Condição de Posto Completo

Nesta seção vamos trabalhar com condições do tipo posto constante que generalizam a condição de posto completo. Embora a qualificação de restrição básica fraca seja implicada pela condição de posto constante que vamos definir, a obtenção do princípio do máximo sob WBCQ precisa de hipóteses adicionais, a condição de *calmness* e a compacidade de um certo conjunto definido ao longo do processo ótimo. Além disso, o princípio do máximo é demonstrado apenas para problemas autônomos. Assim, os resultados de Li e Ye estabelecidos em [16] não podem ser comparados diretamente com os que são obtidos nesta seção.

Primeiro tratamos o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade lineares. Diferente do que acontece em programação não linear, em que linearidade é uma qualificação de restrição, em controle ótimo isso não ocorre. Por isso estabelecemos uma condição de regularidade que as restrições lineares devem satisfazer. Em seguida, tratamos o problema geral de controle ótimo com restrições mistas de igualdade e com restrições mistas de igualdade e desigualdade, considerando uma qualificação de restrição do tipo posto constante.

4.4.1 Problema com Restrições Mistas de Igualdade

Vamos considerar $m_g = 0$ e obter o princípio do máximo para problemas com restrições mistas de igualdade apenas.

4.4.1.1 Caso Linear

Considere a restrição mista de igualdade sendo linear nas variáveis x, u e v, isto é,

$$b(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v - b(t), \tag{4.2}$$

onde $(A, B, C) : T \to \mathbb{R}^{m_b \times n} \times \mathbb{R}^{m_b \times k_u} \times \mathbb{R}^{m_b \times k_v}$ e $b : T \to \mathbb{R}^{m_b}$ são funções Lebesgue mensuráveis.

Abaixo temos um exemplo de problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade lineares em que o princípio do máximo não é válido.

Exemplo 4.2.

$$\begin{aligned} &\textit{minimizar} && x(1) \\ &\textit{sujeito a} && \dot{x}(t) = u_1(t) \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ &&& x(t) + u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ &&& u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T. \end{aligned}$$

O único processo é $(x, u_1, u_2) = (0, 0, 0)$*, logo é ótimo. As condições do princípio do máximo são escritas como:*

$$\begin{aligned} &\|p\|_\infty + \lambda \neq 0, \\ &-\dot{p}(t) = q_1(t) \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ &p(t) + q_1(t) + q_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ &2q_1(t) + 2q_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ &(p(0), -p(1)) = \lambda(0, 1). \end{aligned}$$

É fácil ver que o sistema acima não tem solução.

O exemplo acima nos mostra que, quando temos restrições mistas, condições de regularidade são necessárias para a validade do princípio do máximo, mesmo no caso linear.

Definição 4.11. *A condição de regularidade (CR) para o caso linear é dita satisfeita se*

(i) $\mathrm{Im}([\, A(t) \ \ C(t)\,]) \subset \mathrm{Im}(B(t))$ *q.t.* $t \in T$*;*

(ii) existe $k_B > 0$ *tal que* $\sigma_1(B(t)) \geqslant k_B$ *q.t.* $t \in T$*,*

em que $\sigma_1(B(t))$ *é o menor valor singular de* $B(t)$*.*

Observação 4.6.

(a) A condição de regularidade para o caso linear (i) é equivalente a $\mathrm{Im}(A(t)) \subset \mathrm{Im}(B(t))$ *e* $\mathrm{Im}(C(t)) \subset \mathrm{Im}(B(t))$ *q.t.* $t \in T$*.*

(b) Note que quando $\det(B(t)B(t)^\top) \geqslant K$ *e* $|B(t)| < K_2$ *q.t.* $t \in T$ *para* $K, K_2 > 0$*, então* $B(t)$ *tem posto completo, assim* $\mathrm{Im}([\, A(t) \ \ C(t)\,]) \subset \mathbb{R}^{m_b} = \mathrm{Im}(B(t))$ *e* $\prod_{i=1}^{m_b} \sigma_i(B(t))^2 \geqslant K$ *q.t.* $t \in T \Rightarrow \sigma_1(B(t))^2 \geqslant \dfrac{K}{\prod_{i \neq 1} \sigma_i(B(t))^2} \geqslant \dfrac{K}{K_2^{2(m_b-1)}}$ *q.t.* $t \in T$*. Logo a condição de posto completo implica a condição de regularidade para o caso linear.*

Seguem abaixo exemplos em que a condição de regularidade para o caso linear vale, enquanto a condição de posto completo não vale.

Exemplo 4.3. *Considere*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ q.t. } t \in T.$$

A condição de posto completo não é válida. Mas a condição de regularidade para o caso linear vale, pois $\mathrm{Im}(A(t)) \subset \mathrm{Im}(B(t))$ *q.t.* $t \in T$ *e existe* $k_B = \sqrt{10}$ *satisfazendo a condição (ii).*

Exemplo 4.4. *Sejam*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \text{ q.t. } t \in T,$$

$$B(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} & \text{q.t. } t \in [0, 1/2], \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t & t \end{bmatrix} & \text{q.t. } t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

$$C(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{q.t. } t \in [0, 1/2], \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} & \text{q.t. } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

É fácil ver que a condição de posto completo não é válida. Mas a condição de regularidade para o caso linear vale, pois $\mathrm{Im}([\,A(t) \;\; C(t)\,]) \subset \mathrm{Im}(B(t))$ *q.t.* $t \in T$ *e a condição (ii) é satisfeita com* $k_B = 1/4$.

A seguir, vamos estabelecer a validade do princípio do máximo para o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade lineares. A técnica de demonstração consiste em definir um problema auxiliar sem restrições com o mesmo minimizador de (P) com $m_g = 0$ e $b(t, x, u, v)$ dado como em (4.2), e aplicar o Teorema 2.11.

Teorema 4.1. *Seja* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ *um minimizador fraco para (P) com* $m_g = 0$ *e* $b(t, x, u, v)$ *dado por (4.2). Se, para algum* $\varepsilon > 0$, *(H1)-(H6) (veja Seção 4.2) e a condição de regularidade para o caso linear estão satisfeitas, então existem* $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n), q \in L^1(T; \mathbb{R}^{m_b}), \zeta \in L^1(T; R^{k_v})$ *e* $\lambda \geqslant 0$ *tais que, para quase todo* $t \in T$,

(i) $\|p\|_\infty + \lambda \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$,

(iii) $\zeta(t) \in \mathrm{co}N_{V(t)}(\bar{v}(t))$,

(iv) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Além disso, para alguma função integrável K_m, $|q(t)| \leqslant K_m(t)|p(t)|$ *q.t.* $t \in T$.

Demonstração. Considere o problema auxiliar abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t), v(t)) \text{ q.t. } t \in T, \\ & (u(t), v(t)) \in U_\varepsilon(t) \times V_\varepsilon(t) \text{ q.t. } t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in C, \end{array} \tag{P_{aux}}$$

onde

$$F(t, x, u, v) = f(t, x, u + B(t)^+[A(t)(\bar{x}(t) - x) + B(t)(\bar{u}(t) - u) + C(t)(\bar{v}(t) - v)], v),$$

e

$$U_\varepsilon(t) \times V_\varepsilon(t) = (\bar{u}(t) + \varepsilon B) \times ((\bar{v}(t) + \varepsilon B) \cap V(t)) \text{ q.t. } t \in T.$$

Então $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um minimizador fraco de (P_{aux}). De fato, é claro que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é viável para (P_{aux}). Suponha que, dado $0 < \delta < \min\{\varepsilon/4, k_B\varepsilon/(4k_{b,g})\}$, existe um processo $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ de (P_{aux}) com $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\delta(t)$ q.t. $t \in T$ e $l(\tilde{x}(0), \tilde{x}(1)) < l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$. Tome

$$\hat{u}(t) = \tilde{u}(t) + B(t)^+[A(t)(\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)) + B(t)(\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)) + C(t)(\bar{v}(t) - \tilde{v}(t))] \text{ q.t. } t \in T.$$

Temos

$$\begin{aligned} |\hat{u}(t) - \bar{u}(t)| &\leqslant |\tilde{u}(t) - \bar{u}(t)| + |B(t)^+A(t)||\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)| \\ &\quad + |B(t)^+B(t)||\tilde{u}(t) - \bar{u}(t)| + |B(t)^+C(t)||\tilde{v}(t) - \bar{v}(t)| \\ &\leqslant \delta + |B(t)^+A(t)|\delta + |B(t)^+B(t)|\delta + |B(t)^+C(t)|\delta \\ &\leqslant \delta + [\sigma_1(B(t))]^{-1}|A(t)|\delta + \delta + [\sigma_1(B(t))]^{-1}|C(t)|\delta \\ &\leqslant \delta + \frac{k_{b,g}}{k_B}\delta + \delta + \frac{k_{b,g}}{k_B}\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por isso $(\tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$ q.t. $t \in T$. Note que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) \text{ q.t. } t \in T.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\hat{u}(t) + C(t)\tilde{v}(t) &= A(t)\tilde{x}(t) + B(t)B(t)^+A(t)(\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)) \\ &\quad + B(t)\tilde{u}(t) + B(t)B(t)^+B(t)(\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)) \\ &\quad + B(t)B(t)^+C(t)(\bar{v}(t) - \tilde{v}(t)) + C(t)\tilde{v}(t) \\ &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + C(t)\bar{v}(t) = b(t), \end{aligned}$$

onde a condição de regularidade para o caso linear (i) e o fato que $B(t)B(t)^+$ é um projetor ortogonal na $\mathrm{Im}(B(t))$ q.t. $t \in T$ foi usado na última igualdade acima. Assim, $(\tilde{x}, \hat{u}, \tilde{v})$ é um processo para (P) com $m_g = 0$ e $b(t, x, u, v)$ dado por (4.2) com $(\tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$

q.t. $t \in T$ e $l(\tilde{x}(0), \tilde{x}(1)) < l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$. Isso contradiz a otimalidade de $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ em (P) com $m_g = 0$ e $b(t, x, u, v)$ dado por (4.2). Portanto, pela contrapositiva, temos $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ minimizador fraco de (P_{aux}).

Aplicamos o princípio do máximo, Teorema 2.11, para problemas sem restrições. Segue que existem $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n)$, $(\zeta_1, \zeta_2) \in L^1(T; \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v})$ e $\lambda \geqslant 0$ tais que, para quase todo $t \in T$,

$$\begin{aligned}
&\|p\|_\infty + \lambda \neq 0,\\
&(-\dot{p}(t), \zeta_1(t), \zeta_2(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p(t) \cdot F(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))\},\\
&(\zeta_1(t), \zeta_2(t)) \in \mathrm{co}N_{U_\varepsilon(t)}(\bar{u}(t)) \times \mathrm{co}\, N_{V_\varepsilon(t)}(\bar{v}(t)),\\
&(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda\partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1)).
\end{aligned}$$

Usando a Regra da Cadeia Não Suave, Teorema 2.7, temos

$$\mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p \cdot F(t,x,u,v)\} = \mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p \cdot f(t, x, u + B(t)^+[A(t)(\bar{x}(t) - x) + B(t)(\bar{u}(t) - u) + C(t)(\bar{v}(t) - v)], v)\} \subset \left\{\left(\theta_1 - (B(t)^+A(t))^\top\theta_2, \theta_2 - (B(t)^+B(t))^\top\theta_2, \theta_3 - (B(t)^+C(t))^\top\theta_2\right) : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p \cdot f(t,x,u,v)\}\right\}.$$

Portanto, por um teorema de seleção adequado (ver apêndice), vemos que existem funções mensuráveis θ_1, θ_2 e θ_3 tais que

$$(-\dot{p}(t), \zeta_1(t), \zeta_2(t)) = \left(\theta_1(t) + A(t)^\top q(t), \theta_2(t) + B(t)^\top q(t), \theta_3(t) + C(t)^\top q(t)\right) \text{ q.t. } t \in T$$

com

$$(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))\} \text{ q.t. } t \in T,$$

onde $q(t) = -(B(t)^+)^\top\theta_2(t)$ q.t. $t \in T$. Além disso, $N_{U_\varepsilon(t)}(\bar{u}(t)) = \{0\}$ e $N_{V_\varepsilon(t)}(\bar{v}(t)) = N_{V(t)}(\bar{v}(t))$. Assim, $\zeta_1(t) = 0$ q.t. $t \in T$, e definindo $\zeta(t) = \zeta_2(t)$ q.t. $t \in T$, obtemos

$$(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v}H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \text{ q.t. } t \in T$$

e

$$\zeta(t) \in \mathrm{co}N_{V(t)}(\bar{v}(t)) \text{ q.t. } t \in T.$$

De (H1), da Proposição 2.8 e da condição de regularidade para o caso linear (ii) segue que

$$|q(t)| = |(B(t)^+)^\top\theta_2(t)| \leqslant k_B^{-1}k_f(t)|p(t)| \text{ q.t. } t \in T.$$

Defina $K_m := k_B^{-1}k_f(t)$ e temos o resultado que queríamos provar. □

Abaixo temos dois exemplos ilustrativos. Em ambos, a condição de posto completo não é satisfeita, e a qualificação de restrição básica fraca (WBCQ), ver Definição 4.10, não é aplicada, pois os problemas são não autônomos.

Exemplo 4.5. *Considere o seguinte problema de controle ótimo com restrições mistas lineares de igualdade:*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & x(1) \\ \textit{sujeito a} & \dot{x}(t) = tu_1(t)^2 + u_2(t)^2 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & x(t) + u_1(t) + u_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & 2x(t) + 2u_1(t) + 2u_2(t) = 0 \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in \{0\} \times \mathbb{R}. \end{array}$$

Temos $\dot{x}(t) = tu_1^2(t) + u_2^2(t) \geqslant 0$ *q.t.* $t \in T$*, logo* x *é crescente. Como* $x(0) = 0$ *temos* $x(1) \geqslant 0$*, então o menor valor que* $x(1)$ *pode assumir é zero. Se* $x(1) = 0$*, então* $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow tu_1^2(t) + u_2^2(t) = 0 \Rightarrow u_1(t) = u_2(t) = 0$ *q.t.* $t \in T$*. Assim o minimizador deve ser* $(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = (0, 0, 0)$*, pois é o único processo com* $x(1) = 0$*.*

Como vimos no Exemplo 4.3, a condição de regularidade para o caso linear é válida. Para este problema, $H(t, x, p, q_1, q_2, u_1, u_2) = p(tu_1^2 + u_2^2) + q_1(x + u_1 + u_2) + q_2(2x + 2u_1 + 2u_2)$*. Aplicando as conclusões do Teorema 4.1, temos*

$$(-\dot{p}(t), 0, 0) = (q_1 + 2q_2, q_1 + 2q_2, q_1 + 2q_2) \ \textit{e} \ -p(1) = \lambda.$$

Portanto, o teorema vale com $p(t) = -1$*,* $\lambda = 1$*,* $q_1(t) = q_2(t) = 0$ *q.t.* $t \in T$*.*

Exemplo 4.6. *Vamos considerar o problema de controle ótimo com restrições lineares mistas de igualdade abaixo:*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & x(1) \\ \textit{sujeito a} & \dot{x}(t) = x(t) + 2u_1(t) + 2u_2(t) \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & A(t)x(t) + B(t)u(t) = b(t) \ \textit{q.t.}\ t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in \{1\} \times \mathbb{R}_+, \end{array}$$

onde as matrizes $A(t)$ *and* $B(t)$ *são dadas como no Exemplo 4.4 e*

$$b(t) = \begin{bmatrix} (1 - 2t)\exp(t)/2 \\ (t - 2t^2)\exp(t)/2 \end{bmatrix} \ \textit{q.t.}\ t \in T.$$

Seja $(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) = ((1 - t)\exp(t), 0, -\exp(t)/2)$ *q.t.* $t \in T$*. Este é um processo para o problema. Como* $x(1) \in \mathbb{R}_+$ *e* $\bar{x}(1) = 0$ *vemos que é um processo ótimo. Como vimos no Exemplo 4.4, a condição de regularidade para o caso linear vale. As condições do princípio do máximo são satisfeitas, por exemplo, com* $\lambda = 1$*,* $p(t) = \exp(t-1)$*,* $q_1(t) = -2\exp(t-1)$ *e* $q_2(t) = 0$ *q.t.* $t \in T$*.*

Observação 4.7. *Note que nos exemplos acima o conjunto de multiplicadores não é um singleton.*

4.4.1.2 Caso Não Linear

Nesta subseção vamos propor uma condição de posto constante para o problema geral de controle ótimo com restrições mistas de igualdade que generaliza a condição de posto completo. Além disso, generaliza a condição de posto constante proposta por Andreani, de Oliveira, Pereira e Silva em [49]. Os resultados desta subseção não dependem da subseção anterior, mas as condições impostas se relacionam. Para problemas com restrições mistas de igualdade lineares, a condição de posto constante, desta subseção, implica a condição de regularidade.

Definição 4.12. *Seja* $posto(\nabla_u \bar{b}(t)) = \rho(t)$. *A condição de posto constante para o problema de controle ótimo com restrições de igualdade (CPCI) é satisfeita no processo* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ *se existem* $K > 0$ *e uma submatriz contendo* $\rho(t)$ *linhas de* $\nabla_u \bar{b}(t)$, *digamos*

$$\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t), \quad \mathcal{P}(t) = \{i_1, \ldots, i_{\rho(t)}\} \subset J$$

tais que

(i) $det(\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t) \nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t)^\top) \geqslant K$ *q.t.* $t \in T$,

(ii) $\{\nabla b_k(t, x, u, v)\} \cup \{\nabla b_{i_j}(t, x, u, v)\}_{j=1}^{\rho(t)}$ *tem posto constante igual a* $\rho(t)$ *em* $\Omega_\varepsilon(t)$, *para cada* $k \in J \backslash \mathcal{P}(t)$ *e q.t.* $t \in T$.

Observação 4.8. *(a) Para o problema com restrições mistas de igualdade lineares, a condição de posto constante, definida acima, implica a condição de regularidade.*

De fato, se a condição de posto constante é satisfeita pelo item (ii) da definição acima $\mathrm{Im}([\, A(t) \quad C(t)\,]) \subset \mathrm{Im}([\, A(t) \quad B(t) \quad C(t)\,]) = \mathrm{Im}(\nabla b(t, x, u, v)) = \mathrm{Im}(\nabla_u b(t, x, u, v)) = \mathrm{Im}(B(t))$ *q.t.* $t \in T$. *Além disso, pelo item (i) da condição de posto constante, Proposição 3.2 e o Teorema de Weyl (Teorema A.4) existe* $k_B > 0$ *tal que* $\sigma_1(B(t)) \geqslant k_B$ *q.t.* $t \in T$.

(b) A condição de posto constante proposta em [49] vale só para problemas em que o posto da jacobiana das restrições com relação ao controle irrestrito é constante para quase todo $t \in T$. *Já para CPCI ser válida o posto de* $\nabla_u \bar{b}(t)$ *pode ser diferente para cada* t.

Agora, provaremos a validade do princípio do máximo para (P) com $m_g = 0$ sob CPCI. A técnica de demonstração consiste em definir um problema de controle ótimo auxiliar sem restrições, para o qual há um princípio do máximo válido na literatura, e mostrar que o minimizador para este problema auxiliar é o mesmo minimizador de (P) usando os lemas técnicos do capítulo anterior.

Teorema 4.2. *Seja* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ *um minimizador fraco para (P) com* $m_g = 0$. *Se, para algum* $\varepsilon > 0$, *as hipóteses (H1)-(H6) e a condição de posto constante (Definição 4.12) são*

satisfeitas, então existem $p \in W^{1,1}(T;\mathbb{R}^n), q \in L^1(T;\mathbb{R}^{m_b}), \zeta \in L^1(T;R^{k_v})$ *e* $\lambda \geqslant 0$ *tais que, para quase todo* $t \in T$*,*

(i) $\|p\|_\infty + \lambda \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$,

(iii) $\zeta(t) \in \mathrm{co}N_{V(t)}(\bar{v}(t))$,

(iv) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda\partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Além disso, para alguma função integrável K_m, $|q(t)| \leqslant K_m(t)|p(t)|$ *q.t.* $t \in T$.

Demonstração. Defina $\delta_i : T \to \mathbb{R}$ sendo

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } i \in \mathcal{P}(t), \\ 0, \text{ se } i \in J\backslash\mathcal{P}(t), \end{cases} \tag{4.3}$$

e $\Sigma_b(t) := \mathrm{diag}\{\delta_i(t)\}_{i=1}^{m_b}$. Considere as matrizes seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_x(t) &= \Sigma_b(t)\nabla_x \bar{b}(t), \\ \bar{\Gamma}_u(t) &= \Sigma_b(t)\nabla_u \bar{b}(t), \\ \bar{\Gamma}_v(t) &= \Sigma_b(t)\nabla_v \bar{b}(t). \end{aligned}$$

Seja $\mu : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \times \mathbb{R}^{m_b} \to \mathbb{R}^{m_b}$ definida como

$$\mu(t, x, u, v, \eta) = \Sigma_b(t) b(t, \bar{x}(t) + x, \bar{u}(t) + u + \bar{\Gamma}_u(t)^\top \eta, \bar{v}(t) + v) + (I_{m_b} - \Sigma_b(t))\eta.$$

Escolha $S_0 \subset T$ sendo o maior subconjunto tal que cada uma das hipóteses (H1)-(H6) e a condição de posto constante não valem para cada $t \in S_0$. Por hipótese, S_0 tem medida de Lebesgue nula. Assim, existe um conjunto Borel S_1, que é a interseção de uma coleção enumerável de conjuntos abertos, tal que $S_0 \subset S_1$ e $S_1\backslash S_0$ tem medida nula (ver [50]). Logo S_1 é um conjunto Borel de medida nula. Defina $S := T\backslash S_1$, um conjunto Borel de medida total.

μ satisfaz as hipóteses do Teorema da Função Implícita Uniforme (Teorema 3.2). De fato, para todo $t \in S$, $\mu(t, 0, 0, 0, 0) = 0$. Defina $\Omega_\vartheta(t) = (0 + \vartheta B) \times (0 + \vartheta B) \times ((0 + \vartheta B) \cap V(t)) \times (0 + \vartheta B)$ para algum $\vartheta \in (0, \epsilon)$. Temos que $\mu(t, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, 0, 0, 0) + \vartheta B$, uniformemente em t, por (H5) e pela Proposição 3.1. A segunda hipótese do teorema é satisfeita por (H6). Se as restrições são ordenadas de tal maneira que os índices pertencentes ao conjunto $\mathcal{P}(t)$ venham primeiro temos

$$\bar{\Gamma}(t) := \frac{\partial \mu}{\partial \eta}(t, 0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t) \nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t)^\top & 0 \\ 0 & I_{m_b - \rho(t)} \end{pmatrix},$$

de modo que $det(\bar{\Gamma}(t)) = det(\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t)\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t)^\top) \geqslant K$, pelo item (i) da Definição 4.12. Daí pela Proposição 3.2, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\bar{\Gamma}(t)^{-1}| \leqslant C. \tag{4.4}$$

O Teorema da Função Implícita Uniforme assegura a existência de $\sigma \in (0, \epsilon), \delta \in (0, \epsilon)$ e uma aplicação $d : T \times (\sigma B) \times (\sigma B) \times (\sigma B) \to \delta B$ em que $d(\cdot, x, u, v)$ é uma função mensurável para (x, u, v) fixado, as funções $\{d(t, \cdot, \cdot, \cdot) : t \in T\}$ são Lipschitz com constante de Lipschitz comum K_d, $d(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável para t fixo e $d(t, 0, 0, 0) = 0$ para quase todo $t \in T$. Além disso, para todo $(x, u, v) \in \sigma B \times \sigma B \times \sigma B$ e para quase todo $t \in T$,

$$\mu(t, (x, u, v), d(t, x, u, v)) = 0, \tag{4.5}$$

$$\nabla_{x,u,v} d(t, 0, 0, 0) = -(\bar{\Gamma}(t))^{-1}(\bar{\Gamma}_x(t), \bar{\Gamma}_u(t), \bar{\Gamma}_v(t)). \tag{4.6}$$

Escolha $\sigma_1, \delta_1 > 0$ tais que

$$\begin{cases} \sigma_1 \in (0, \min\{\sigma, \varepsilon/2\}), \\ \delta_1 \in (0, \min\{\delta, \varepsilon/2\}), \\ \sigma_1 + k_{b,g}\delta_1 \in (0, \varepsilon/2), \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $k_{b,g}$ é dado por (H6).

A partir daqui sem perda de generalidade, consideramos a função implícita d definida em $T \times (\sigma_1 B) \times (\sigma_1 B) \times (\sigma_1 B)$ e tomando valores em $\delta_1 B$.

Considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t), v(t)) \text{ q.t. } t \in T \\ & (u(t), v(t)) \in U_{\sigma_1}(t) \times V_{\sigma_1}(t) \text{ q.t. } t \in T \\ & (x(0), x(1)) \in C, \end{array} \tag{P_{aux}}$$

onde

$$F(t, x, u, v) = f(t, x, u + \bar{\Gamma}_u(t)^\top d(t, x - \bar{x}(t), u - \bar{u}, v - \bar{v}(t)), v)$$

e

$$U_{\sigma_1}(t) \times V_{\sigma_1}(t) = (\bar{u}(t) + \sigma_1 B) \times (V(t) \cap (\bar{v}(t) + \sigma_1 B)) \text{ q.t. } t \in T.$$

Observe que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um minimizador local fraco para (P_{aux}). De fato, $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ é um processo para (P_{aux}), pois o é para (P) com $m_g = 0$. Suponha que dado $\alpha \in (0, \sigma_1)$, existe um processo de (P_{aux}) $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\alpha(t)$ q.t. $t \in T$, com custo menor, isto é, $l(\tilde{x}(0), \tilde{x}(1)) < l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$. Tome

$$\hat{u}(t) = \tilde{u}(t) + \bar{\Gamma}_u(t)^\top d(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t)) \text{ q.t. } t \in T.$$

Vamos mostrar que $(\tilde{x}, \hat{u}, \tilde{v})$ é admissível para (P) com $m_g = 0$, com custo menor, o que contradiz o fato de $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ ser um processo ótimo de (P). Então, concluiremos que $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{u})$ é minimizador fraco para (P_{aux}). Temos

$$\begin{aligned}|\hat{u}(t) - \bar{u}(t)| &= |\tilde{u}(t) + \bar{\Gamma}_u(t)^\top d(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t)) - \bar{u}(t)| \\ &\leqslant |\tilde{u}(t) - \bar{u}(t)| + |\bar{\Gamma}_u(t)||d(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t))| \\ &\leqslant \sigma_1 + k_{b,g}\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por isso, $(\tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$ q.t. $t \in T$. Note que

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= F(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \\ &= f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t) + \bar{\Gamma}_u(t)^\top d(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t)), \tilde{v}(t)) \\ &= f(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) \text{ q.t. } t \in T.\end{aligned}$$

Além disso, pela equação (4.5),

$$\mu(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t), d(t, \tilde{x}(t) - \bar{x}(t), \tilde{u}(t) - \bar{u}(t), \tilde{v}(t) - \bar{v}(t))) = 0,$$

o que implica,

$$b^{\mathcal{P}(t)}(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0.$$

Resta mostrar que $b_i(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$ q.t. $t \in T$, $i \in J \backslash \mathcal{P}(t)$. Para isso aplicaremos o Lema 3.3. Fixemos, arbitrariamente, $i \in J \backslash \mathcal{P}(t)$.

No Lema 3.3, vamos identificar t com a, S com A, $(0, 0, 0)$ com x_0, εB com $x_0 + \alpha B$, (x, u, v) com x, e

$$\begin{aligned}f^t(x, u, v) &= b_i(t, \bar{x}(t) + x, \bar{u}(t) + u, \bar{v}(t) + v), \\ f^t_j(x, u, v) &= b_j(t, \bar{x}(t) + x, \bar{u}(t) + u, \bar{v}(t) + v), \ j \in \mathcal{P}(t).\end{aligned}$$

Por (H5), (H6) e pela Proposição 3.1, $f^t(x, u, v)$ e $f^t_j(x, u, v)$ $j \in \mathcal{P}(t)$ são continuamente diferenciáveis em εB para todo $t \in S$, uniformemente em t. De forma direta, por (H6), identificando $F^t_{\rho(t)}(x, u, v) = b^{\mathcal{P}(t)}(t, \bar{x}(t) + x, \bar{u}(t) + u, \bar{v}(t) + v)$, a hipótese (a) do Lema 3.2 é satisfeita. A condição (i) da Definição 4.12 implica que $\{\nabla_u \bar{b}_j(t)\}_{j \in \mathcal{P}(t)}$ são linearmente independentes para todo $t \in S$, daí $\{\nabla \bar{b}_j(t)\}_{j \in \mathcal{P}(t)}$ são linearmente independentes para todo $t \in S$. De fato,

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \nabla \bar{b}_{i_1}(t) + \ldots + \alpha_{\rho(t)} \nabla \bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} \nabla_x \bar{b}_{i_1}(t) \\ \nabla_u \bar{b}_{i_1}(t) \\ \nabla_v \bar{b}_{i_1}(t) \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{\rho(t)} \begin{bmatrix} \nabla_x \bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t) \\ \nabla_u \bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t) \\ \nabla_v \bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \alpha_1 \nabla_u \bar{b}_{i_1}(t) + \ldots + \alpha_{\rho(t)} \nabla_u \bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\rho(t)} = 0.\end{aligned}$$

Assim a hipótese (b) do Lema 3.2 está satisfeita. A hipótese (c) do Lema 3.2 também é satisfeita pela hipótese (H6), condição (i) da Definição 4.12 e Proposição 3.3.

Além disso, da condição (ii) da Definição 4.12, $\{\nabla b_{i_1}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v),\ldots,\nabla b_{i_{\rho(t)}}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v),\nabla b_i(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v)\}$ tem posto constante igual a $\rho(t)$ em εB para todo $t\in S$, isto é, $\nabla b_i(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v)$ é combinação linear de $\nabla b_{i_1}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v),\ldots,\nabla b_{i_{\rho(t)}}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v)$ para todo $(x,u,v)\in\varepsilon B$ e $t\in S$.

Desse modo, todas as hipóteses do Lema 3.3 estão satisfeitas, então podemos aplicá-lo. Assim, existem $\rho,\delta>0$ e uma família de funções $\varphi_i^t : z_0+\delta B\to\mathbb{R},\varphi_i^t$ continuamente diferenciável em $z_0+\delta B$ para todo $t\in S$, com $z_0=(\bar{b}_{i_1}(t),\ldots,\bar{b}_{i_{\rho(t)}}(t))=(0,\ldots,0)$, tais que para todo $(x,u,v)\in\rho B\times\rho B\times\rho B$ temos $(b_{i_1}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v),\ldots,b_{i_{\rho(t)}}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v))\in z_0+\delta B$ e

$$b_i(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v)=$$
$$\varphi_i^t(b_{i_1}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v),\ldots,b_{i_{\rho(t)}}(t,\bar{x}(t)+x,\bar{u}(t)+u,\bar{v}(t)+v)),t\in S.$$

Note que, se $\varepsilon/2<\rho$, $(\tilde{x}(t)-\bar{x}(t),\hat{u}(t)-\bar{u}(t),\tilde{v}(t)-\bar{v}(t))\in\sigma_1 B\times(\sigma_1+k_{b,g}\delta_1)B\times\sigma_1 B\subset(\varepsilon/2)B\times(\varepsilon/2)B\times(\varepsilon/2)B\subset\rho B\times\rho B\times\rho B$ e aplica-se o resultado do Lema 3.3, então para todo $t\in S$,

$$\begin{aligned}
b_i(t,\tilde{x}(t),\hat{u}(t),\tilde{v}(t)) &= \varphi_i^t(b_{i_1}(t,\tilde{x}(t),\hat{u}(t),\tilde{v}(t)),\ldots,b_{i_{\rho(t)}}(t,\tilde{x}(t),\hat{u}(t),\tilde{v}(t)))\\
&= \varphi_i^t(0,\ldots,0)\\
&= \varphi_i^t(b_{i_1}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)),\ldots,b_{i_{\rho(t)}}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)))\\
&= b_i(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se não, diminui-se o σ_1 ou δ_1.

Portanto, como $i\in J\backslash\mathcal{P}(t)$ foi fixado arbitrariamente, $b_i(t,\tilde{x}(t),\hat{u}(t),\tilde{v}(t))=0$ para todo $i\in J\backslash\mathcal{P}(t)$ e para quase todo $t\in T$, assim, $(\tilde{x},\hat{u},\tilde{v})$ é admissível para (P). Como $l(\tilde{x}(0),\tilde{x}(1))<l(\bar{x}(0),\bar{x}(1))$, temos uma contradição à otimalidade de $(\bar{x},\bar{u},\bar{v})$ em (P). Pela contrapositiva, segue que existe $\alpha\in(0,\sigma_1)$ tal que para todo processo de (P_{aux}) em Ω_α tem-se $l(\tilde{x}(0),\tilde{x}(1))\geqslant l(\bar{x}(0),\bar{x}(1))$, isto é, o processo til é um minimizador local fraco de (P_{aux}). Aplicamos o princípio do máximo, Teorema 2.11, para problemas sem restrições mistas, assim como (P_{aux}). Segue que existem $p\in W^{1,1}(T;\mathbb{R}^n),(\zeta_1,\zeta_2)\in L^1(T;\mathbb{R}^{k_u}\times\mathbb{R}^{k_v})$ e $\lambda\geqslant 0$ tais que, para quase todo $t\in T$,

$$\begin{aligned}
&\|p\|_\infty+\lambda\neq 0,\\
&(-\dot{p}(t),\zeta_1(t),\zeta_2(t))\in\operatorname{co}\partial_{x,u,v}\{p(t)\cdot F(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t))\},\\
&(\zeta_1(t),\zeta_2(t))\in\operatorname{co}N_{U_{\sigma_1(t)}}(\bar{u}(t))\times\operatorname{co}N_{V_{\sigma_1(t)}}(\bar{v}(t)),\\
&(p(0),-p(1))\in N_C(\bar{x}(0),\bar{x}(1))+\lambda\partial l(\bar{x}(0),\bar{x}(1)).
\end{aligned}$$

Usando a Regra da Cadeia Não Suave, Teorema 2.7, temos

$$\begin{aligned}&\mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p\cdot F(t,x,u,v)\} = \mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p\cdot f(t,x,u+\bar{\Gamma}_u(t)^\top d(t,x-\bar{x}(t),u-\bar{u},v-\bar{v}(t)),v)\}\\ &\subset\left\{\left(\theta_1-\theta_2\bar{\Gamma}_u(t)^\top\bar{\Gamma}(t)^{-1}\bar{\Gamma}_x(t),\theta_2-\theta_2\bar{\Gamma}_u(t)^\top\bar{\Gamma}(t)^{-1}\bar{\Gamma}_u(t),\theta_3-\theta_2\bar{\Gamma}_u(t)^\top\bar{\Gamma}(t)^{-1}\bar{\Gamma}_v(t)\right):\right.\\ &\left.(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in\mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p\cdot f(t,x,u,v)\}\right\}.\end{aligned}$$

Portanto, por um teorema de seleção adequado (ver apêndice), existem funções mensuráveis θ_1, θ_2 e θ_3 tais que

$$(-\dot{p}(t),\zeta_1(t),\zeta_2(t)) = \left(\theta_1(t)+\tilde{q}(t)\bar{\Gamma}_x(t),\theta_2(t)+\tilde{q}(t)\bar{\Gamma}_u(t),\theta_3(t)+\tilde{q}(t)\bar{\Gamma}_v(t)\right)\ \text{q.t. } t\in T$$

com $(\theta_1(t),\theta_2(t),\theta_3(t))\in\mathrm{co}\partial_{x,u,v}\{p(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t))\}$ q.t. $t\in T$, onde

$$\tilde{q}(t) = -\theta_2(t)\bar{\Gamma}_u(t)^\top\bar{\Gamma}(t)^{-1}\ \text{q.t. } t\in T.$$

Além disso, $N_{U_{\sigma_1(t)}}(\bar{u}(t))=\{0\}$ e $N_{V_{\sigma_1(t)}}(\bar{v}(t)) = N_{V(t)}(\bar{v}(t))$. Assim, $\zeta_1(t)=0$ q.t. $t\in T$, e definindo $\zeta(t)=\zeta_2(t)$ q.t. $t\in T$, obtemos

$$\zeta(t)\in\mathrm{co}N_{V(t)}(\bar{v}(t))\ \text{q.t. } t\in T.$$

Se definimos as coordenadas de $q\in R^{m_b}$ como

$$\begin{cases} q_j=\tilde{q}_j, j\in\mathcal{P}(t)\\ q_j=0, j\in J\backslash\mathcal{P}(t),\end{cases}$$

então $q\in L^1(T;\mathbb{R}^{m_b})$, e

$$(-\dot{p}(t),0,\zeta(t))\in\mathrm{co}\partial_{x,u,v}H(t,\bar{x}(t),p(t),q(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t))\ \text{q.t. } t\in T.$$

Temos $|q(t)|=|\tilde{q}^{\mathcal{P}(t)}(t)|$ q.t. $t\in T$. De (H1), da Proposição 2.8, de (H6) e (4.4) segue que

$$|q(t)|=|\tilde{q}^{\mathcal{P}(t)}(t)|\leqslant|\tilde{q}(t)|=|-\theta_2(t)\bar{\Gamma}_u(t)^\top\bar{\Gamma}(t)^{-1}|\leqslant k_{b,g}Ck_f(t)|p(t)|\ \text{q.t. } t\in T.$$

Defina $K_m(t):=k_{b,g}Ck_f(t)$ q.t. $t\in T$ e temos o resultado que queríamos provar. □

Abaixo temos um exemplo de um problema não linear em que a condição de posto constante é satisfeita enquanto a condição de posto completo não é válida. A qualificação de restrição básica fraca (WBCQ), ver Definição 4.10, não é aplicável pois o problema é não autônomo.

Exemplo 4.7. *Considere o seguinte problema.*

$$\begin{aligned}&\textit{minimizar} && -x(1)\\ &\textit{sujeito a} && \dot{x}(t)=x(t)+u_1(t)u_2(t)\ \textit{q.t. } t\in T,\\ &&& (t+1)u_1(t)-t^2-t=0\ \textit{q.t. } t\in T,\\ &&& u_1(t)^2-t^2=0\ \textit{q.t. } t\in T,\\ &&& (x(0),x(1))\in\{0\}\times[-1,1].\end{aligned}$$

Seja $(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) = (t^2 \exp(t-1), t, 2\exp(t-1))$ *q.t.* $t \in T$. *Temos* $\bar{x}(1) = 1$, *de modo que o processo é ótimo. A condição de posto constante é satisfeita em* $(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$. *De fato,*

$$\nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) = \begin{bmatrix} t+1 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix}$$

e $\text{posto}(\nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))) = 1$ *q.t.* $t \in T$. *Tomando* $\mathcal{P}(t) = \{1\}$ *q.t.* $t \in T$, *temos* $\det(\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t) \nabla_u \bar{b}^{\mathcal{P}(t)}(t)^\top) = (t+1)^2 \geqslant 1$ *q.t.* $t \in T$. *É claro que*

$$\{\nabla b_2(t, x, u_1, u_2)\} \cup \{\nabla b_1(t, x, u_1, u_2)\} = \{(0, 2u_1, 0), (0, t+1, 0)\}$$

tem posto constante igual a 1 *em* $\Omega_\varepsilon(t)$ *q.t.* $t \in T$. *Pelo Teorema 4.2, o princípio do máximo é válido. De fato, as condições (i)-(iv) são verificadas com* $\lambda = 1$, $p(t) = q_1(t) = q_2(t) = 0$ *q.t.* $t \in T$.

Relação da CPCI com outras qualificações de restrições

Vamos comparar a CPCI com as qualificações de restrições dadas na seção anterior.

A primeira relação que vemos, e que está de acordo com o nosso principal objetivo ao propor uma condição de posto constante, é que CPCI generaliza posto completo. Esta relação pode ser facilmente comprovada pela Observação 3.2. A figura abaixo é a atualização da Figura 10, que relaciona as qualificações de restrições para o caso não autônomo e com a divisão do controle. Note que, para o problema de controle ótimo somente com restrições de igualdadade, as condições de posto completo (Definição 4.6), PC1, PC2, PC3 e PC4 são equivalentes.

Figura 11 – Atualização das relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não autônomo e com a divisão do controle.

No caso de problemas autônomos e sem restrições abstratas para o controle v, CPCI implica WBCQ+*calmness* de M. De fato, da CPCI temos

$$posto([\nabla_x b(x,u)\ \nabla_u b(x,u)]) = posto(\nabla_u b(x,u))$$

em $\Omega_\epsilon(t)$ e q.t. $t \in T$, então as colunas de $\nabla_x b(x,u)$ são geradas pelas colunas de $\nabla_u b(x,u)$ em $\Omega_\epsilon(t)$ e q.t. $t \in T$. Logo, para cada $\lambda \in \mathbb{R}^{m_b}$, se $\nabla_u b(x,u)^\top \lambda = 0$, então $\alpha = \nabla_x b(x,u)^\top \lambda = 0$. Portanto, CPCI implica WBCQ. Além disso, CPCI implica a CRCQ clássica da programação não linear. Se CPCI é válida o posto da jacobiana das restrições se mantém em uma vizinhança do minimizador, então vale a CRCQ clássica da programação não linear. Pela Proposição 6.2 de Li e Ye [51], CRCQ clássica da programação não linear implica *calmness*. Portanto, CPCI implica *calmness*.

Assim, a Figura 9 pode ser atualizada pelo esquema seguinte:

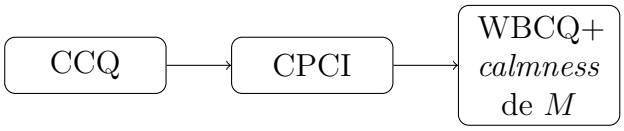

Figura 12 – Atualização das relações entre as qualificações de restrições em controle ótimo no caso não convexo, autônomo e sem a divisão do controle.

4.4.2 Problema com Restrições Mistas de Igualdade e Desigualdade

Nesta seção vamos considerar o problema (P) e obter o princípio do máximo que generaliza os resultados estabelecidos por de Pinho e Ilchmann em [12] e por Andreani, de Oliveira, Pereira e Silva em [49].

A notação seguinte será usada na sequência:

$$G(t) = \operatorname{diag}\{-\bar{g}_i(t)\}_{i=1}^{m_g} \text{ q.t. } t \in T.$$

Definição 4.13. *Seja* $\operatorname{posto}\left(\begin{bmatrix} \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \\ \nabla_u \bar{b}(t) \end{bmatrix}\right) = \rho(t)$. *A condição de posto constante para o problema de controle ótimo com restrições de igualdade e desigualdade (CPCID) é satisfeita no processo* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ *se existem* $K > 0$ *e subconjuntos de índices* $J_1(t) = \{i_1, \ldots, i_{\rho_1(t)}\} \subset \mathcal{I}_a(t)$ *e* $J_2(t) = \{j_1, \ldots, j_{\rho_2(t)}\} \subset J$, $J_2(t) \neq \varnothing$, *com* $q_c(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t) = \rho(t)$ *q.t.* $t \in T$, *tais que*

(i) $\det(\Gamma(t)\Gamma(t)^\top) \geqslant K$ *q.t.* $t \in T$, *onde*

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_c(t)}(t) & G^{\mathcal{I}_c(t)}(t) \\ \nabla_u \bar{g}^{J_1(t)}(t) & 0 \\ \nabla_u \bar{b}^{J_2(t)}(t) & 0 \end{bmatrix} \text{ q.t. } t \in T;$$

(ii) para cada $i \in \mathcal{I}_a(t) \backslash J_1(t)$, $\{\nabla g_i(t,x,u,v)\} \cup \{\nabla b_j(t,x,u,v)\}_{j \in J_2(t)}$ *e para cada* $i \in J \backslash J_2(t)$ $\{\nabla b_i(t,x,u,v)\} \cup \{\nabla b_j(t,x,u,v)\}_{j \in J_2(t)}$ *tem posto constante igual a* $\rho_2(t)$ *em* $\Omega_\varepsilon(t)$ *q.t.* $t \in T$.

Observação 4.9.

(a) Note que o problema deve ter pelo menos uma restrição de igualdade para que a condição de posto constante, definida acima, possa ser satisfeita, dado que é exigido $J_2(t) \neq \varnothing$.

(b) Se a condição de posto completo para $\bar{\Upsilon}_3(t)$ *é satisfeita, então a condição de posto constante também é.*

A técnica de demonstração empregada aqui para demonstrar as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para (P) sob a condição dada pela Definição

4.13 consiste em transformar as restrições de desigualdade em igualdade, introduzindo variáveis de folga, e obter um problema auxiliar com restrições de igualdade que satisfaz a CPCI, dada pela Definição 4.12, e aplicar o Teorema 4.2.

Teorema 4.3. *Seja $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ um minimizador fraco para (P). Se, para algum $\varepsilon > 0$, as hipóteses (H1)-(H6) e a condição de posto constante (Definição 4.13) são satisfeitas, então existem $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n), q \in L^1(T; \mathbb{R}^{m_b}), r \in L^1(T; R^{m_g}), \zeta \in L^1(T; R^{k_v})$ e $\lambda \geqslant 0$ tais que, para quase todo $t \in T$,*

(i) $\|p\|_\infty + \lambda \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$,

(iii) $\zeta(t) \in \mathrm{co} N_{V(t)}(\bar{v}(t))$,

(iv) $r_i(t) \leqslant 0$ *e* $r_i(t) g_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) = 0$, $i = 1, \ldots, m_g$,

(v) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Além disso, para alguma função integrável K_m, $|(q(t), r(t))| \leqslant K_m(t)|p(t)|$ q.t. $t \in T$.

Demonstração. Para cada $j \in \{1, \ldots, m_g\}$ definimos as funções auxiliares $\delta_j : T \to \mathbb{R}$ como

$$\delta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in J_1(t), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $\Delta : T \to \mathbb{R}^{m_g \times m_g}$ como

$$\Delta(t) = \mathrm{diag}\{\delta_j(t)\}_{j=1}^{m_g}.$$

Considere o problema de controle ótimo auxiliar como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \text{ q.t. } t \in T, \\ & g(t, x(t), u(t), v(t)) + G(t)w(t) + \Delta(t)z(t) = 0 \text{ q.t. } t \in T, \\ & b(t, x(t), u(t), v(t)) = 0 \text{ q.t. } t \in T, \\ & (u(t), v(t), w(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{k_u} \times V(t) \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_g}_+ \text{ q.t. } t \in T, \\ & (x(0), x(1)) \in C, \end{array} \qquad (P_{aux})$$

onde $w, z : T \to \mathbb{R}^{m_g}$ são funções de controle auxiliares, que supomos serem mensuráveis.

Para cada $j \in \{1, \ldots, m_g\}$, definindo $\bar{w}_j(t) = 1$ e $\bar{z}_j(t) = -g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$ q.t. $t \in T$, o processo $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z})$ é um processo ótimo local de (P_{aux}). De fato, é claro que é viável para (P_{aux}). Seja $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{z})$ um processo arbitrário de (P_{aux}) e $\varepsilon > 0$ com $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{w}(t), \tilde{z}(t)) \in \Omega_\varepsilon(t) \times (\bar{w}(t) + \varepsilon B) \times \left((\bar{z}(t) + \varepsilon B) \cap \mathbb{R}^{m_g}_+\right)$ q.t. $t \in T$. Vamos mostrar que $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ é viável para (P). É suficiente mostrar que as restrições de

desigualdade são satisfeitas, pois todas as outras claramente são. Fixe um $t \in T$ arbitrário. Para $j \in J_1(t)$, temos

$$g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) - \bar{g}_j(t)\tilde{w}_j(t) + \delta_j(t)\tilde{z}_j(t) = 0 \Rightarrow g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = -\tilde{z}_j(t) \leqslant 0.$$

Para $j \in \mathcal{I}_a(t) \backslash J_1(t)$, temos

$$g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) - \bar{g}_j(t)\tilde{w}_j(t) + \delta_j(t)\tilde{z}_j(t) = 0 \Rightarrow g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0.$$

Para $j \in \mathcal{I}_c(t)$, temos

$$g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) - \bar{g}_j(t)\tilde{w}_j(t) + \delta_j(t)\tilde{z}_j(t) = 0 \Rightarrow g_j(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \bar{g}_j(t)\tilde{w}_j(t) < 0,$$

pois $\tilde{w}(t) \in \bar{w}(t) + \varepsilon B$ juntamente com $\bar{w}_j(t) = 1$, $j \in \{1, \ldots, m_g\}$, e $0 < \varepsilon < 1$ implica que $\tilde{w}_j(t) > 0$, $j \in \{1, \ldots, m_g\}$. Por isso, $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ é viável para (P) com $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$ q.t. $t \in T$. Pela otimalidade local de $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$, temos $l(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) \leqslant l(\tilde{x}(0), \tilde{x}(1))$.

Aplicaremos o Teorema 4.2. Para tanto, as hipóteses (H1)-(H6) e a CPCI (Definição 4.12) devem ser satisfeitas em $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z})$ para (P_{aux}). Defina $\psi : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_g} \to \mathbb{R}^{m_b+m_g}$ como

$$\psi(t, x, u, v, w, z) = \begin{bmatrix} g(t, x, u, v) + G(t)w + \Delta(t)z \\ b(t, x, u, v) \end{bmatrix}.$$

As hipóteses (H1)-(H6) são imediatas. Vamos checar a CPCI. Temos

$$\nabla_{u,w}\psi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{w}(t), \bar{z}(t)) = \begin{bmatrix} \nabla_u g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) & G(t) \\ \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla\psi(t, x, u, v, w, z) = \begin{bmatrix} \nabla g(t, x, u, v) & G(t) & \Delta(t) \\ \nabla b(t, x, u, v) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da Definição 4.13, temos

$$\text{posto}(\nabla_{u,w}\psi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{w}(t), \bar{z}(t))) = q_c(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t) = \rho(t) \text{ q.t. } t \in T.$$

Note que $\Gamma(t)$ da Definição 4.13 é uma submatriz contendo $\rho(t)$ linhas de $\nabla_{u,w}\bar{\psi}(t)$ q.t. $t \in T$. Então a condição (i) da Definição 4.12 para o problema (P_{aux}) segue da condição (i) da Definição 4.13. Vamos denotar por $\mathcal{J}(t)$ o conjunto de índices das linhas de $\nabla\psi(t, x, u, v, w, z)$ correspondentes às linhas de $\Gamma(t)$, isto é, correspondente a $\mathcal{I}_c(t) \cup J_1(t) \cup J_2(t)$. Se $\{\nabla\psi_i(t, x, u, v, w, z)\} \cup \{\nabla\psi_j(t, x, u, v, w, z)\}_{j \in \mathcal{J}(t)}$ tem posto igual a $\rho(t)+1$ para algum $i \in \{1, \ldots, m_g + m_b\} \backslash \mathcal{J}(t)$ e algum $(x, u, v, w, z) \in \Omega_\varepsilon(t) \times (\bar{w}(t) + \varepsilon B) \times \left((\bar{z}(t) + \varepsilon B) \cap \mathbb{R}^{m_g}_+\right)$ q.t. $t \in T$, então contradiz a condição (ii) da Definição 4.13. Portanto, a condição (ii) da CPCI é satisfeita.

Segue do Teorema 4.2 que existem $p \in W^{1,1}(T;\mathbb{R}^n)$, $(r,q) \in L^1(T;\mathbb{R}^{m_g}\times\mathbb{R}^{m_b})$, $(\zeta_1,\zeta_2) \in L^1(T;\mathbb{R}^{k_v}\times\mathbb{R}^{m_g})$ e $\lambda \geqslant 0$ tais que, para quase todo $t \in T$,

$$\lambda + \|p\|_\infty \neq 0; \tag{4.8}$$

$$(-\dot{p}(t), 0, \zeta_1(t), 0, \zeta_2(t)) \in \mathrm{co}\partial_{x,u,v,w,z}\{p(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)) + q(t)\cdot b(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)) + r(t)\cdot[g(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)) + G(t)\bar{w}(t) + \Delta(t)\bar{z}(t)]\}; \tag{4.9}$$

$$(\zeta_1(t),\zeta_2(t)) \in \mathrm{co}\, N_{V(t)}(\bar{v}(t)) \times \mathrm{co}\, N_{\mathbb{R}^{m_g}_+}(\bar{z}(t)); \tag{4.10}$$

$$(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0),\bar{x}(1)) + \lambda\partial l(\bar{x}(0),\bar{x}(1)). \tag{4.11}$$

Além disso, para alguma função integrável K_m,

$$|(r(t),q(t))| \leqslant K_m|p(t)| \text{ q.t. } t \in T. \tag{4.12}$$

De (4.9), temos $G(t)r(t) = 0 \Rightarrow r_i(t)\bar{g}_i(t) = 0$, $i \in I$, e $\Delta(t)r(t) = \zeta_2(t)$ q.t. $t \in T$. De (4.10), vemos que $\zeta_2(t) \leqslant 0$ q.t. $t \in T$. Então $r_i(t) \leqslant 0$ para $i \in J_1(t)$ q.t. $t \in T$. Além disso, sabemos da demonstração do Teorema 4.2 que $r_i(t) = 0$ para $i \in I\backslash J_1(t)$ e $q_j(t) = 0$ para $j \in J\backslash J_2(t)$ q.t. $t \in T$. Portanto, as condições (i) a (v) seguem de (4.8)-(4.11). □

Observação 4.10. *Se $m_b = 0$, a técnica usada nesta esta demonstração vale somente se $\nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_a(t)}(t)$ tem posto completo q.t. $t \in T$.*

A CPCID é satisfeita na solução ótima do problema de controle ótimo do exemplo abaixo, ao passo que a condição de posto completo de [12] (condição da Definição 4.6 com $\bar{\Upsilon}_3(t)$) não é satisfeita.

Exemplo 4.8. *Considere o seguinte problema de controle ótimo:*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & \exp(x(1)) \\ \textit{sujeito a} & \dot{x}(t) = x(t) - v(t) \ \textit{q.t. } t \in T, \\ & 2u_1(t) - v(t) \leqslant 0 \ \textit{q.t. } t \in T, \\ & u_1(t) + u_2(t) + v(t) = 0 \ \textit{q.t. } t \in T, \\ & -u_1(t) + u_2(t) + 2v(t) = 0 \ \textit{q.t. } t \in T, \\ & v(t) \in \mathbb{R}_+ \ \textit{q.t. } t \in T, \\ & (x(0),x(1)) \in \{1\}\times\mathbb{R}_+. \end{array}$$

Seja $(\bar{x}(t),\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t),\bar{v}(t)) = ((1-t)\exp(t), \exp(t)/2, -3\exp(t)/2, \exp(t))$ q.t. $t \in T$. Temos $\bar{x}(1) = 0$, de modo que o processo é ótimo. Nesse caso, $\mathcal{I}_a(t) = \{1\}$ q.t. $t \in T$. Temos

$$\mathrm{posto}\left(\begin{bmatrix} \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_a(t)}(t) \\ \nabla_u \bar{b}(t) \end{bmatrix}\right) = \mathrm{posto}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \ \textit{q.t. } t \in T.$$

Vamos tomar $J_1(t) = \varnothing$ *e* $J_2 = \{1, 2\}$ *q.t.* $t \in T$*. Então,*

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \nabla_u \bar{g}^{\mathcal{I}_c(t)}(t) & G^{\mathcal{I}_c(t)}(t) \\ \nabla_u \bar{g}^{J_1(t)}(t) & 0 \\ \nabla_u \bar{b}^{J_2(t)}(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ q.t. } t \in T$$

e $\det(\Gamma(t)\Gamma(t)^\top) = 4$ *q.t.* $t \in T$*, de modo que a condição (i) da Definição 4.13 é satisfeita. Vamos checar a condição (ii). Seja* $i \in \mathcal{I}_a(t) \backslash J_1(t)$*, isto é,* $i = 1$*. Então* $\{\nabla g_1(t, x, u, v)\} \cup \{\nabla b_j(t, x, u, v)\}_{j \in J} = \{(0, 2, 0, -1), (0, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2)\}$ *tem posto constante igual a* $\rho_2(t) = 2$ *em* $\Omega_\varepsilon(t)$ *q.t.* $t \in T$*. Portanto, a condição de posto constante é satisfeita. O princípio do máximo é verificado com* $\lambda = 1$*,* $p(t) = r(t) = q_1(t) = q_2(t) = 0$ *q.t.* $t \in T$*.*

5 Condições Necessárias de Otimalidade de Segunda Ordem para Problemas de Controle Ótimo com Restrições Mistas

A condição necessária de segunda ordem afirma que uma certa forma quadrática deve ser não negativa em um cone crítico, que consiste de todas as direções tangentes ao conjunto factível. O estudo das condições necessárias de segunda ordem para os problemas de controle ótimo começou com Hestenes em [8] que considerou um problema geral, mas o controle considerado pertencia ao espaço das funções contínuas por partes (o que não é natural para problemas de controle ótimo) e era assumida a hipótese de normalidade, que assegurava a unicidade dos multiplicadores. As contribuições seguintes consideraram o controle em espaços mais gerais e nem todas assumem a unicidade dos multiplicadores. Na literatura há duas maneiras clássicas de obter condições necessárias de segunda ordem para problemas de controle ótimo. A primeira consiste em considerar um problema de otimização com restrições abstratas e a segunda consiste em trabalhar com variações do controle e do estado. As condições necessárias de segunda ordem para problemas de controle ótimo com restrições mistas de igualdade usando a primeira abordagem foram obtidas por Stefani e Zezza [52], que considera o controle limitado, e por Bonnans e Hermant [53] considerando a variável de controle contínua. Utilizando a segunda abordagem, as condições necessárias de segunda ordem foram estabelecidas por Milyutin e Osmolovskii [54] que consideram o controle contínuo por partes, por de Pinho e Rosenblueth [36] que consideram o controle contínuo por partes e supõe a unicidade dos multiplicadores, por Hoehener [55] considerando o controle uma função mensurável essencialmente limitada, e por Osmolovskii [56] que faz uma demonstração mais simples considerando o controle uma função mensurável essencialmente limitada. Em todos estes resultados é imposto que as restrições devem satisfazer alguma condição de posto completo.

No capítulo anterior obtemos uma condição de posto constante que generaliza a condição de posto completo dada em [12] e a condição de posto constante dada em [49]. E provamos ser uma qualificação de restrição de primeira ordem para o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade. Neste capítulo, generalizamos as condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade. Vamos mostrar que a condição de posto constante é também uma qualificação de restrição de segunda ordem, assim como em programação não linear, em que CRCQ (Definição 2.9) é uma qualificação de restrição de segunda ordem (ver [18]).

5.1 Problema de Controle Ótimo com Restrições Mistas

A referência principal usada neste capítulo foi Osmolovskii [56].

Vamos definir o problema de controle ótimo com restrições mistas de interesse neste capítulo. São dados o intervalo $T := [0,1]$, as funções $(f,b) : T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{k_u} \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m_b}$, o funcional $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e as funções $(F,K) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_F} \times \mathbb{R}^{n_K}$. O problema consiste em encontrar uma função controle $u(t)$ de modo que minimiza o funcional

$$J(x(0),x(1))$$

sobre todos os arcos $x(t)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\\ &b(t,x(t),u(t)) = 0,\\ &F(x(0),x(1)) \leqslant 0,\ K(x(0),x(1)) = 0.\end{aligned}$$

Neste capítulo o problema de interesse principal é o seguinte:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & J(x(0),x(1))\\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\\ & b(t,x(t),u(t)) = 0,\\ & F(x(0),x(1)) \leqslant 0, K(x(0),x(1)) = 0,\\ & (x(0),x(1)) \in \mathcal{P}, (t,x(t),u(t)) \in \mathcal{Q},\end{array} \tag{Q}$$

onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são conjuntos abertos.

Vamos estabelecer definições e notações que serão usadas posteriormente.

Definição 5.1. *Um processo é um par (x,u) compreendido pela variável de estado $x \in W^{1,1}(T;\mathbb{R}^n)$ absolutamente contínua e pela variável de controle $u \in L^\infty(T;\mathbb{R}^{k_u})$ mensurável limitada satisfazendo as restrições de (Q). Além disso, o gráfico da função $(x(t),u(t))$ está no conjunto $\mathcal{Q}$ com uma certa 'margem', isto é, para o par (x,u) existe um conjunto compacto $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ tal que $(t,x(t),u(t)) \in \mathcal{C}$ para quase todo $t \in T$.*

Definição 5.2. *Um processo $(\bar{x},\bar{u})$ é um minimizador local fraco se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x(0),x(1)) \geqslant J(\bar{x}(0),\bar{x}(1))$ para todos os processos (x,u) satisfazendo a condição $(x(t),u(t)) \in \Omega_\varepsilon(t)$, onde*

$$\Omega_\varepsilon(t) := (\bar{x}(t) + \varepsilon B) \times (\bar{u}(t) + \varepsilon B).$$

Hipóteses Básicas

Vamos supor válidas todas as hipóteses básicas do capítulo anterior. Por conveniência, apresentamo-as novamente aqui, adaptando ao presente contexto. As hipóteses

básicas são ditas satisfeitas em um processo $(\bar{x}, \bar{u})$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que as seguintes condições são válidas:

(h1) A função $f(\cdot, x, u)$ é Lebesgue mensurável para cada (x, u) e existe uma função integrável k_f tal que, para quase todo $t \in T$,

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u')| \leqslant k_f(t)|(x, u) - (x', u')|$$

para todo $(x, u), (x', u') \in \Omega_\varepsilon(t)$.

(h2) $b(\cdot, x, u)$ é mensurável para cada (x, u).

(h3) $b(t, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável em $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \varepsilon B$ para quase todo $t \in T$ e existe uma função integrável L_b tal que, para quase todo $t \in T$,

$$|b(t, x, u) - b(t, x', u')| \leqslant L_b(t)|(x, u) - (x', u')|$$

para todo $(x, u), (x', u') \in \Omega_\varepsilon(t)$.

(h4) Existem $k_b > 0$ e uma função crescente $\tilde{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ com $\tilde{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ tais que, para quase todo $t \in T$,

$$\begin{aligned} &|\nabla_x \bar{b}(t)| + |\nabla_u \bar{b}(t)| \leqslant k_b, \\ &|\nabla_{x,u} b(t, x, u) - \nabla_{x,u} b(t, x', u')| \leqslant \tilde{\theta}(|(x, u) - (x', u')|) \end{aligned}$$

para todo $(x, u) \neq (x', u')$ pertencente a $\Omega_\varepsilon(t)$.

Além disso, as funções dadas J, F e K são duas vezes continuamente diferenciáveis em $\mathcal{P}$, e as funções dadas f e b são duas vezes continuamente diferenciáveis em $\mathcal{Q}$.

Qualificação de Restrição

Definição 5.3. *A condição de posto completo é satisfeita se os gradientes com relação ao controle $\nabla_u b_i(t, x, u), i = 1, \ldots, m_b$, são linearmente independentes em cada ponto $(t, x, u) \in \mathcal{Q}$ tal que $b(t, x, u) = 0$.*

Definição 5.4. *A função Hamiltoniana $H : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}^{k_u} \to \mathbb{R}$ relacionada com (Q) é definida como*

$$H(t, x, p, q, u) := p \cdot f(t, x, u) + q \cdot b(t, x, u).$$

Definição 5.5. *A função Lagrangiana dos pontos de fronteira $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_F} \times \mathbb{R}^{n_K} \to \mathbb{R}$ relacionada com (Q) é definida como*

$$L(x(0), x(1), \alpha_0, \alpha, \beta) := \alpha_0 \cdot J(x(0), x(1)) + \alpha \cdot F(x(0), x(1)) + \beta \cdot K(x(0), x(1)).$$

Observação 5.1. *Vinter em [22] demonstra o princípio do máximo para (Q) sem restrições mistas de igualdade e desigualdade, sem pedir CQ alguma para as funções F e K. A única hipótese é que F e K sejam localmente Lipschitz, o que ocorre aqui, pois supomos que estas funções são de classe C^2.*

Teorema 5.1. *(Princípio do Máximo de Pontryagin) [56] Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco de (Q). Se, para algum $\varepsilon > 0$ todas as hipóteses básicas e a condição de posto completo são satisfeitas, então existem $\alpha_0, \alpha, \beta, p(\cdot), q(\cdot)$ tais que*

$$(i)\ \ \alpha_0 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0, \alpha F(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = 0, \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n_F} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_K} |\beta_j| = 1,$$

$$(ii))\ \ (-\dot{p}(t), 0) = H_{x,u}(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t)),$$

$$(iii)\ \ (p(0), -p(1)) = L_{x(0),x(1)}(\bar{x}(0), \bar{x}(1), \alpha_0, \alpha, \beta).$$

Definição 5.6. *A upla de multiplicadores é definida como*

$$\lambda_0 := (\alpha_0, \alpha, \beta, p(\cdot), q(\cdot)).$$

Denote por Λ_0 o conjunto de todas as uplas λ_0 satisfazendo o Princípio do Máximo de Pontryagin.

5.2 Condição Necessária de Segunda Ordem

Defina

$$\mathcal{W}_2 := W^{1,2}(T, \mathbb{R}^n) \times L^2(T, \mathbb{R}^{k_u}),$$

onde $W^{1,2}(T, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções absolutamente contínuas tal que sua primeira derivada é quadrado integrável, e $L^2(T, \mathbb{R}^{k_u})$ é o espaço das funções quadrado integráveis.

Seja $\mathcal{K}$ o conjunto de todos $(x, u) \in \mathcal{W}_2$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\nabla J(\bar{x}(0), \bar{x}(1))^\top \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} \leqslant 0,\ \ \nabla K(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} = 0,$$

$$\nabla F_i(\bar{x}(0), \bar{x}(1))^\top \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix} \leqslant 0\ \ \forall i \in I_F(\bar{x}(0), \bar{x}(1)),$$

$$\dot{x}(t) = \nabla_{x,u} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \text{ para quase todo } t \in T,$$

$$\nabla_{x,u} b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0 \text{ para quase todo } t \in T,$$

onde $I_F(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) := \{i : F_i(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) = 0\}$ é o conjunto dos índices das restrições de desigualdades ativas no ponto $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$. É fácil ver que $\mathcal{K}$ é um cone convexo no espaço de Hilbert $\mathcal{W}_2$.

Vamos introduzir uma forma quadrática no espaço $\mathcal{W}_2$. Para $\lambda_0 \in \Lambda_0$ e $(x,u) \in \mathcal{W}_2$, definimos

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda_0, x, u) :=& \nabla^2_{x(0),x(1)} L(\bar{x}(0), \bar{x}(1), \alpha_0, \alpha, \beta)(x(0), x(1)) \cdot (x(0), x(1)) \\ &+ \int_0^1 \nabla^2_{x,u} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), \bar{u}(t))(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot (\bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt.\end{aligned}$$

Segue abaixo a condição de segunda ordem para o problema (Q), cuja demonstração foi feita por Osmolovskii em [56].

Teorema 5.2. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um mínimo fraco de (Q). Se as hipóteses básicas e a condição de posto completo são satisfeitas, então o conjunto Λ_0 é não vazio e*

$$\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0} \Omega(\lambda_0, x, u) \geqslant 0 \text{ para todo } (x,u) \in \mathcal{K}.$$

5.3 Generalização da Condição Necessária de Segunda Ordem

Nesta seção vamos generalizar a condição necessária de segunda ordem, Teorema 5.2, estabelecida por Osmolovskii em [56]. Ao invés de supormos a condição de posto completo, Definição 5.3, vamos supor a condição de posto constante, Definição 4.12. Nesta seção, vamos supor que $posto(\nabla_u \bar{b}(t)) = \rho(t) = \rho$ q.t. $t \in T$. Com esta hipótese adicional temos a condição de posto constante proposta por Andreani, de Oliveira, Pereira e Silva em [49].

Teorema 5.3. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um mínimo fraco de (Q). Se as hipóteses básicas e CPCI são satisfeitas, então o conjunto Λ_0 é não vazio e*

$$\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0} \Omega(\lambda_0, x, u) \geqslant 0 \text{ para todo } (x,u) \in \mathcal{K}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 4.2 e da Observação 5.1 que o conjunto Λ_0 é não vazio.

Agora, considere o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & J(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ & b^{\mathcal{J}}(t, x(t), u(t)) = 0, \\ & F(x(0), x(1)) \leqslant 0, K(x(0), x(1)) = 0, \\ & (x(0), x(1)) \in \mathcal{P}, (t, x(t), u(t)) \in \mathcal{Q}, \end{array} \qquad (Q_{aux})$$

onde $\mathcal{J} = \{i_1, \ldots, i_\rho\}$, com $\nabla_u \bar{b}^{\mathcal{J}}(t)$ satisfazendo a condição (i) de CPCI.

$(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo para (Q_{aux}), pois o é para (Q). Vamos mostrar que $(\bar{x}, \bar{u})$ é minimizador fraco para (Q_{aux}). Suponha que dado $\alpha \in (0, \varepsilon)$, existe um processo de (Q_{aux}) $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \in \Omega_\alpha(t)$ q.t. $t \in T$, com custo menor, isto é, $J(\tilde{x}(0), \tilde{x}(1)) < J(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Vamos mostrar que $(\tilde{x}, \tilde{u})$ é admissível para (Q), o que contradiz a otimalidade de $(\bar{x}, \bar{u})$ em (Q). Portanto, $(\bar{x}, \bar{u})$ deve ser minimizador fraco para (Q_{aux}). Para isso, basta mostrar que $b_i(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = 0$ q.t. $t \in T$, $i \in J \backslash \mathcal{J}$. Fazemos isso aplicando o Lema 3.3, análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 4.2.

Além disso, (Q_{aux}) satisfaz a hipótese de que os gradientes com relação ao controle $\nabla_u b_i(t, x, u), i \in \mathcal{J}$, são linearmente independentes em cada ponto $(t, x, u) \in \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é algum conjunto aberto conveniente, tal que $b^{\mathcal{J}}(t, x(t), u(t)) = 0$. Podemos então aplicar o Teorema 5.2, isto é,

$$\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0^{\mathcal{J}}} \Omega^{\mathcal{J}}(\lambda_0, x, u) \geqslant 0 \text{ para todo } (x, u) \in \mathcal{K}^{\mathcal{J}}, \tag{5.1}$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega^{\mathcal{J}}(\lambda_0, x, u) :=& \nabla^2_{x(0),x(1)} L(\bar{x}(0), \bar{x}(1), \alpha_0, \alpha, \beta)(x(0), x(1)) \cdot (x(0), x(1)) \\ &+ \int_0^1 \nabla^2_{x,u} H^{\rho}(t, \bar{x}(t), p(t), q^{\rho}(t), \bar{u}(t))(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot (\bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt,\end{aligned}$$

com $H^{\rho}(t, x, p, q^{\rho}, u) = p \cdot f(t, x, u) + q^{\rho} \cdot b^{\mathcal{J}}(t, x, u)$. E $\mathcal{K}^{\mathcal{J}}$ é igual a $\mathcal{K}$ com $\nabla_{x,u} \bar{b}(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} =$ 0 substituído por $\nabla_{x,u} \bar{b}^{\mathcal{J}}(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0$.

Dado $q^{\rho} \in R^{\rho}$, vamos denotar por $\bar{q} \in R^{m_b}$, o vetor cujas coordenadas estão definidas como

$$\begin{cases} \bar{q}_{i_j} = q^{\rho}_j, j = 1, \ldots, \rho \\ \bar{q}_i = 0, i \in J \backslash \mathcal{J}. \end{cases}$$

Queremos mostrar que $\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0} \Omega(\lambda_0, x, u) \geqslant 0$ para todo $(x, u) \in \mathcal{K}$. Sejam $(x, u) \in \mathcal{K}$, então $(x, u) \in \mathcal{K}^{\mathcal{J}}$. Quando Λ_0 é o conjunto das uplas $\lambda_0 = (\alpha_0, \alpha, \beta, p, \bar{q})$, vamos denotá-lo por $\Lambda_0^{\bar{q}}$, temos

$$\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0} \Omega(\lambda_0, x, u) \geqslant \max_{\lambda_0 \in \Lambda_0^{\bar{q}}} \Omega(\lambda_0, x, u).$$

Além disso, como $H(t, x, p, \bar{q}, u) = H^{\rho}(t, x, p, q^{\rho}, u)$, segue que

$$\max_{\lambda_0 \in \Lambda_0^{\bar{q}}} \Omega(\lambda_0, x, u) = \max_{\lambda_0 \in \Lambda_0^{\mathcal{J}}} \Omega^{\mathcal{J}}(\lambda_0, x, u).$$

Portanto, por (5.1) segue o resultado que queríamos provar.

□

6 Conclusão

Neste trabalho, obtemos generalizações do princípio do máximo para problemas de controle ótimo com restrições mistas sob novas qualificações de restrições. Para problemas com restrições lineares mistas de igualdade, consideramos uma condição de regularidade, que é mais fraca do que a condição de posto completo. Para problemas com restrições não lineares mistas de igualdade, assumimos uma condição de posto constante, que é mais fraca do que a condição de posto completo e para problemas com restrições não lineares mistas de igualdade e desigualdade, consideramos uma condição de posto constante, que é mais fraca do que uma das condições de posto completo da literatura. Também generalizamos a condição necessária de otimalidade de segunda ordem para um problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade sob uma condição de posto constante.

Os próximos passos do trabalho serão propor uma condição de regularidade para o problema de controle ótimo com restrições lineares mistas de igualdade e desigualdade e o problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade e desigualdade, que generalize a condição de posto completo, que considera apenas as restrições ativas do problema e estabelecer a validade do princípio do máximo sob estas condições propostas. Estabelecer as condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para um problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdade e desigualdade sob a condição de posto constante proposta, tendo em vista que posto constante é uma qualificação de restrição de segunda ordem para o problema de programação não linear. Além disso, para aprimoramento do tema, uma proposta de trabalho futuro é a generalização de outras qualificações de restrições conhecidas em programação não linear para o contexto de controle ótimo.

Referências

1 CLARKE, F. H. Nonsmooth analysis in systems and control theory. *Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer*, p. 6271–6285, 2009.

2 BAZARAA, M.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006.

3 ANDREANI, R.; MARTíNEZ, J. M.; SCHUVERDT, M. L. On the relation between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint qualification. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 125, p. 473–485, 2005.

4 ANDREANI, R.; HAESER, G.; SCHUVERDT, M. L.; SILVA, P. J. S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming, Series A*, v. 135, p. 255–273, 2012.

5 JANIN, R. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Mathematical Programming Studies*, v. 21, p. 110–126, 1984.

6 MINCHENKO, L.; STAKHOVSKI, S. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization.*, v. 60, p. 429–440, 2011.

7 ANDREANI, R.; HAESER, G.; SCHUVERDT, M. L.; SILVA, P. J. S. Two new weak constraint qualifications and applications. *SIAM Journal on Optimization*, v. 22, p. 1109–1135, 2012.

8 HESTENES, M. R. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York: John Wiley, 1966.

9 NEUSTADT, L. W. *Optimization*. Princeton: Princeton University Press, 1976.

10 OSMOLOVSKII, N. P. Second order conditions for a weak local minimum in an optimal control problem (necessity and sufficiency). *Soviet Mathematics Doklady*, v. 16, p. 1480–1484, 1975.

11 DMITRUK, A. V. Maximum principle for the general optimal control problem with phase and regular mixed constraints. *Computational Mathematics and Modeling*, v. 4, p. 364–377, 1993.

12 DE PINHO, M. R.; ILCHMANN, A. Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints. *Nonlinear Analysis*, v. 48, p. 1179–1196, 2002.

13 DE PINHO, M. R. Mixed constrained control problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 278, p. 293–307, 2003.

14 DE PINHO, M. R.; VINTER, R. B.; ZHENG, H. A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 18, p. 189–205, 2001.

15 CLARKE, F. H.; PINHO, M. R. de. Optimal control problems with mixed constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 48, p. 4500–4524, 2010.

16 LI, A.; YE, J. J. Necessary optimality conditions for optimal control problems with nonsmooth mixed state and control constraints. *Set-Valued and Variational Analysis*, v. 24, p. 449–470, 2015.

17 RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

18 ANDREANI, R.; ECHAGüE, C. E.; SCHUVERDT, M. L. Constant-rank condition and second-order constraint qualification. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 146, p. 255–266, 2010.

19 BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear Programming*. Massachusetts: Athena Scientific, 1995.

20 NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer, 2006.

21 CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1983.

22 VINTER, R. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.

23 KURDILA, A. J.; ZABARANKIN, M. *Convex Functional Analysis*. Basel: Birkhäuser, 2005.

24 ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1970.

25 ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. *Real Analysis*. Asia: Pearson Education, 2010.

26 LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. New York: Springer, 2008.

27 RADEMACHER, H. Über partiele und totale differenzierbarkeit von funktionen mehrerer variabeln und über die transformation der doppelintegrable. *Mathematische Annalen*, v. 79, p. 340–359, 1919.

28 PESCH, H. J.; PLAIL, M. The maximum principle of optimal control: A history of ingenious ideas and missed opportunities. *Control and Cybernetics*, v. 38, p. 973–995, 2009.

29 GAMDRELIDZE, R. V. Hamiltonian form of the maximum principle. *Control and Cybernetics*, v. 38, p. 959–971, 2009.

30 PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISHCHENKO, E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley, 1962.

31 CLARKE, F. H. The maximum principle in optimal control then and now. *Control and Cybernetics*, v. 34, p. 709–722, 2005.

32 CLARKE, F. H. Maximum principles without differentiability. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 81, p. 219–222, 1975.

33 CLARKE, F. H.; DE PINHO, M. R. The nonsmooth maximum principle. *Control and Cybernetics*, v. 38, p. 1151–1167, 2009.

34 DE PINHO, M. R.; VINTER, R. B. An Euler-Lagrange inclusion for optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, p. 1191–1198, 1995.

35 DE PINHO, M. R.; VINTER, R. B. Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 212, p. 493–516, 1997.

36 DE PINHO, M. R.; ROSENBLUETH, J. F. Mixed constraints in optimal control: an implicit function theorem approach. *Journal of Mathematical Control and Information*, v. 24, p. 197–218, 2007.

37 DUBOVITSKII, A. Y.; MILYUTIN, A. A. Constrained extremum problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v. 149, p. 759–762, 1963.

38 MAKOWSKI, K.; NEUSTADT, L. W. Optimal control problems with mixed control-phase variable equality and inequality contraints. *SIAM Journal on Control*, v. 12, p. 184–228, 1974.

39 GAMKRELIDZE, R. V. Optimal control processes with restricted phase coordinates. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Ser. Mat.*, v. 24, p. 315–356, 1960.

40 VIRSAN, C. Necessary conditions for optimal control problems with equality-type mixed constraint. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquées*, v. 16, p. 127–147, 1971.

41 PáLES, Z.; ZEIDAN, V. First and second order necessary conditions for optimal control problems with constraints. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 346, p. 421–453, 1994.

42 DE PINHO, M. R. On the weak maximum principle for optimal control problems with state dependent control constraints. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, v. 30, p. 2481–2488, 1997.

43 ARUTYUNOV, A. V. *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

44 SCHWARZKOPF, A. B. Optimal controls with equality state constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 19, p. 455–468, 1976.

45 DE PINHO, M. R. *Optimal Control for Problems with Differential Algebraic Constraints*. Tese (Doutorado) — University of London, 1993.

46 DE PINHO, M. R.; ROSENBLUETH, J. F. Necessary conditions for constrained problems under mangasarian-fromowitz conditions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 47, p. 535–552, 2008.

47 DE PINHO, M. R. On necessary conditions for implicit control systems. *Online Journal Pure and Applied Functional Analysis.*, v. 1, p. 185–196, 2016.

48 CLARKE, F.; LEDYAEV, Y.; PINHO, M. R. de. An extension of the Schwarzkopf multiplier rule in optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 49, p. 599–610, 2011.

49 ANDREANI, R.; DE OLIVEIRA, V. A.; PEREIRA, J. T.; SILVA, G. N. A weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints under a constant rank condition. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2020.

50 RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1964.

51 LI, A.; YE, J. J. Necessary optimality conditions for implicit control systems with applications to control of differential algebraic equations. *Set-Valued and Variational Analysis*, v. 26, p. 179–203, 2018.

52 STEFANI, G.; ZEZZA, P. Optimality conditions for a constrained control problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 34, p. 635–359, 1996.

53 BONNANS, J.; HERMANT, A. Second-order analysis for optimal control problems with pure state constraints and mixed control-state constraints. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, v. 26, p. 561–598, 2009.

54 MILYUTIN, A. A.; OSMOLOVSKII, N. P. *Calculus of Variations and Optimal Control*. Providence: American Mathematical Society, 1998.

55 HOEHENER, D. Variational approach to second-order optimality conditions for control problems with pure state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 50, p. 1139–1173, 2012.

56 OSMOLOVSKII, N. P. On second-order necessary conditions for broken extremals. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 164, p. 379–406, 2015.

57 CHOROBURA, A. P. *Condições de otimalidade para problemas com um e com vários objetivos: abordagem através do formalismo de Dubovitskii-Milyutin*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2015.

58 LIMA, E. L. *Análise no Espaço R^n*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

59 NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Applied Linear Algebra (2nd Ed.)*. Englewood Cliffs: NJ: Prentice-Hall, 1977.

60 MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2000.

61 STEWART, G. W. *Introduction to Matrix Computations*. Orlando, Florida: Academic Press, 1973.

62 HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis (2nd Ed.)*. New York: Cambridge University Press, 2013.

63 GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations (3rd Ed.)*. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.

APÊNDICE A – Definições e resultados

Observação A.1. *[57] As formas de Lagrange e de Bolza podem ser transformadas na forma de Mayer.*

1. *Forma de Lagrange ⇒ Forma de Mayer*

   Demonstração. Considere o funcional na forma de Lagrange:

   $$\int_0^1 L(t, x(t), u(t), v(t))dt.$$

   Introduzimos uma nova variável de estado $x_{n+1}(t)$ tal que $\dot{x}_{n+1}(t) = L(t, x(t), u(t), v(t))$. Temos,

   $$\int_0^1 L(t, x(t), u(t), v(t))dt = \int_0^1 \dot{x}_{n+1}dt = x_{n+1}(1) - x_{n+1}(0).$$

   Considerando $l(x(0), x(1)) = x_{n+1}(1) - x_{n+1}(0)$ temos o funcional na forma de Mayer. □

2. *Forma de Bolza ⇒ Forma de Mayer*

   Demonstração. Considere o funcional na forma de Bolza:

   $$\int_0^1 L(t, x(t), u(t), v(t))dt + s(x(0), x(1)).$$

   Analogamente ao caso anterior temos,

   $$\int_0^1 L(t, x(t), u(t), v(t))dt + s(x(0), x(1)) = x_{n+1}(1) - x_{n+1}(0) + s(x(0), x(1)).$$

   Considerando $l(x(0), x(1)) = x_{n+1}(1) - x_{n+1}(0) + s(x(0), x(1))$ segue que o funcional está na forma de Mayer. □

Teorema A.1 (Desigualdade do Valor Médio)**.** *[58] Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se o segmento de reta fechado $[a, a + h]$ está contido em U e f é diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(a, a + h)$, então*

$$|f(a + h) - f(a)| \leqslant |h| \sup_{0<t<1} |\nabla f(a + th)|.$$

Definição A.1 (Decomposição em Valores Singulares)**.** *Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = U\Sigma V^\top$ é sua decomposição em valores singulares, onde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes ortogonais e $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1(A), \ldots, \sigma_p(A), 0, \ldots, 0\}$ com $\text{posto}(A) = p$, $\sigma_p(A) \geqslant \ldots \geqslant \sigma_1(A) > 0$ os valores singulares de A.*

Definição A.2 (Pseudoinversa)**.** *A matriz $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definida como $A^+ = V\Sigma^+U^\top$ é chamada a pseudoinversa de Moore-Penrose de A, onde*

$$\Sigma^+ = \operatorname{diag}\{\sigma_1(A)^{-1}, \ldots, \sigma_p(A)^{-1}, 0, \ldots, 0\}.$$

Teorema A.2. *(i) $AA^+A = A$ e $A^+AA^+ = A^+$;*

(ii) $(AA^+)^\top = AA^+$ e $(A^+A)^\top = A^+A$;

(iii) $(A^+)^\top = (A^\top)^+$ e $(A^+)^+ = A$;

(iv) Para todo $b \in \mathbb{R}^m$, AA^+b é a projeção ortogonal de b na $\operatorname{Im}(A)$;

(v) $|A| = \sigma_p$ e $|A^+| = \sigma_1^{-1}$;

(vi) Se $n = m$, então $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{p} \sigma_i$.

Estas e outras propriedades podem ser encontradas em Noble e Daniel [59].

Teorema A.3 (Relações de A com $AA^\top$)**.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

(1) [60] Os valores singulares não nulos de A são as raízes quadradas positivas dos autovalores não nulos de $AA^\top$.

(2) [60] Os autovalores de $AA^\top$ são reais e não negativos para cada A.

(3) [61] Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os autovalores de $AA^\top$ (que é hermitiana). Então os valores singulares de $AA^\top$ são $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|$.

Teorema A.4 (Teorema de Weyl)**.** *[62] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hermitianas e denote os respectivos autovalores de A, B e $A+B$ por $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$, $\{\lambda_i(B)\}_{i=1}^n$, e $\{\lambda_i(A+B)\}_{i=1}^n$, cada um ordenado algebricamente como $\lambda_{min} = \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = \lambda_{max}$. Então*

$$\lambda_i(A+B) \leqslant \lambda_{i+j}(A) + \lambda_{n-j}(B), \ j = 0, 1, \ldots, n-i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Também

$$\lambda_{i-j+1}(A) + \lambda_j(B) \leqslant \lambda_i(A+B), \ j = 1, \ldots, i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Lema A.1. *[63] Se $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $|F| < 1$, então $I - F$ é não singular.*

Proposição A.1. *[12] Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $t \in T$, $m(t), q(t), l(t) \in \mathbb{N}_0$, $m(t) + q(t) = n \leqslant k$, e considere*

$$J(t) := \begin{bmatrix} A(t) & 0 & 0 \\ N(t) & 0 & B(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(k+l(t)+q(t))},$$

com

$$A(t) \in \mathbb{R}^{m(t)\times k},\ N(t) \in \mathbb{R}^{q(t)\times k},\ B(t) \in \mathbb{R}^{q(t)\times q(t)}.$$

Então as seguintes condições:

(i) $\exists\ c_A > 0 :\ \det(A(t)A(t)^\top) \geqslant c_A\ q.t.\ t \in T,$

(ii) $\exists\ c_B > 0 :\ \det(B(t)B(t)^\top) \geqslant c_B\ q.t.\ t \in T,$

(iii) $\exists\ c > 0 :\ \det(J(t)J(t)^\top) \geqslant c\ q.t.\ t \in T,$

estão relacionadas como segue

1. *(i), (ii) e* $N \in L^\infty \Rightarrow$ *(iii),*
2. *(iii)* $\Rightarrow$ *(i),*
3. *(iii)* $\not\Rightarrow$ *(ii).*

Seleção mensurável

As definições e resultados abaixo são dados por Vinter em [22].

Definição A.3. *Tome uma multifunção* $\Gamma : I \rightrightarrows \mathbb{R}^k$*. Dizemos que uma função* $x : I \to \mathbb{R}^k$ *é uma seleção mensurável para* Γ *se*

(i) x *é mensurável Lebesgue, e*

(ii) $x(t) \in \Gamma(t)\ q.t.\ t \in I.$

Teorema A.5. *Seja* $\Gamma : I \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ *uma multifunção não vazia. Assuma que* Γ *é fechada e mensurável. Então* Γ *tem uma seleção mensurável.*

Teorema A.6 (Teorema de Seleção Mensurável de Aumann)**.** *Seja* $\Gamma \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ *uma multifunção não vazia. Assuma que*

$$Gr\,\Gamma \text{ é } \mathcal{L} \times \mathcal{B}^k \text{ mensurável.}$$

Então Γ *tem uma seleção mensurável.*

Teorema A.7 (Teorema de Seleção Generalizado de Filippov)**.** *Considere uma multifunção não vazia* $U : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *e uma função* $g : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo*

(a) o conjunto $Gr\,U$ *é* $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ *mensurável;*

(b) a função g *é* $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ *mensurável.*

Então para qualquer função mensurável $v : I \to \mathbb{R}^n$*, a multifunção* $U' : I \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *definida por*

$$U'(t) := \{u \in U(t) : g(t,u) = v(t)\}$$

tem um gráfico $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ *mensurável. Além disso, se*

$$v(t) \in \{g(t,u) : u \in U(t)\} \ \textit{q.t.}\ t \in I$$

então existe uma função mensurável $u : I \to \mathbb{R}^m$ *satisfazendo*

$$u(t) \in U(t) \ \textit{q.t.}\ t \in I,$$

$$g(t,u(t)) = v(t) \ \textit{q.t.}\ t \in I.$$