



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ANA PAULA CRUZ DE FREITAS

Estruturas Complexas em Variedades flag reais

Campinas

2016

Ana Paula Cruz de Freitas

Estruturas Complexas em Variedades flag reais

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Ana Paula Cruz de Freitas e orientada pelo Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140741/2014-3

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F884e Freitas, Ana Paula Cruz de, 1985-
Estruturas complexas em variedades flag reais / Ana Paula Cruz de Freitas.
– Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Variedades complexas. 2. Variedades bandeira. 3. Lie, Grupos semi-
simples de. 4. Lie, Álgebra de. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Complex structures on real flag manifolds

Palavras-chave em inglês:

Complex manifolds

Flag manifolds

Semi-simple Lie groups

Lie algebras

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]

Caio José Colleti Negreiros

Lino Anderson da Silva Grama

Mauro Moraes Alves Patrão

Lonardo Rabelo

Data de defesa: 23-05-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de maio de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETI NEGREIROS

Prof(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Prof(a). Dr(a). MAURO MORAES ALVES PATRÃO

Prof(a). Dr(a). LONARDO RABELO

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Aos meus pais,
Ana Lucia e Jorge.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter sido o meu refúgio e a minha fortaleza durante todos esses anos. Agradeço por enviar as pessoas certas para cooperar com a realização desse sonho.

Agradeço aos meus pais, Jorge e Ana Lucia, pelo apoio durante toda a minha vida acadêmica. Por eles terem entendido o quão importante é o estudo, apesar de não terem tido a oportunidade de viver essa experiência. Agradeço por me incentivar, por acreditar e pelos sacrifícios feitos durante todos esses anos. Espero que a alegria dessa vitória seja apenas o começo da retribuição por tudo o que devo a eles.

Agradeço ao meu namorado, Ailton, pelo companheirismo, amor, dedicação e paciência. Por ter estado comigo no período mais difícil dessa etapa, a primeira qualificação. Sem ele seria extremamente difícil viver com a pressão da qualificação e a distância da minha família. Agradeço, além de tudo isso, pela ajuda nas correções da tese.

Agradeço ao meu orientador, Luiz San Martin, pela crucial ajuda na obtenção desse trabalho. Me sinto honrada por ter tido a oportunidade de conhecer não apenas um grande matemático, mas um excelente professor e ser humano.

Agradeço ao meu orientador de mestrado, José Nelson Barbosa, pelos ensinamentos, por ter acreditado em mim e por ter sido o grande pivô da minha ida para Unicamp.

Agradeço aos colegas, Rodrigo, Thais, Kamila, Steve, Leandro Tavares e Leandro Morgado pela ajuda com os estudos na primeira qualificação e pelos momentos agradáveis.

Agradeço às companheiras de sala do predinho, Lidiane, Adriana e Cláudia por todo apoio que me deram e pelos momentos incríveis que tivemos.

Agradeço ao casal Thiago e Débora pelo apoio e pelos momentos vividos.

Agradeço aos amigos e vizinhos, Marcos, Rose, Kakau, Neu, Eliete, Juliana Honda, Lali, Dona Dezinha, Dona Rosa, meus avós Zé Carlos e Lucia e a todos que eu não citei, mas que foram essenciais para realização dessa conquista.

Aos funcionários do Imecc e da Unicamp, em especial, aos funcionários da seção de pósgraduação do Imecc.

Agradeço à Capes e ao CNPq por ter financiado esse trabalho.

Resumo

Seja $F_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade flag real, tal que a álgebra de Lie \mathfrak{g} do Grupo G é uma forma real normal de uma álgebra de Lie simples complexa. Uma estrutura pseudo-complexa J em uma variedade flag F_Θ é dada por aplicações lineares $J : T_x F_\Theta \rightarrow T_x F_\Theta$ para cada $x \in G/P_\Theta$, tais que $J_x^2 = -Id$. A estrutura pseudo-complexa J é dita invariante pela ação do grupo G se seus elementos são aplicações holomorfas em relação a J , isto é, se para todo $g \in G$ e todo $x \in G/P_\Theta$ vale $dg_x \circ J_x = J_{g(x)} \circ dg_x$. Neste trabalho, estudamos a existência e a integrabilidade de estruturas pseudo-complexas invariantes em F_Θ . Mostramos que, diferentemente do caso complexo onde as estruturas pseudo-complexas invariantes são bem conhecidas, existem variedades flag reais que não admitem tais estruturas. Para as estruturas pseudo-complexas invariantes existentes, analisamos a sua integrabilidade. Provamos que apenas algumas variedades flags da álgebra de Lie C_l admitem estruturas complexas invariantes.

Palavras-chave: Variedade flag, Grupos de Lie semi-simples, Álgebras de Lie, Variedades complexas.

Abstract

Let $F_\Theta = G/P_\Theta$ be a real flag manifold such that the Lie algebra \mathfrak{g} of G is a split real form of a complex simple Lie algebra. An almost complex structure J on the flag manifold F_Θ is given by linear applications $J : T_x F_\Theta \rightarrow T_x F_\Theta$ for each $x \in G/P_\Theta$, such that $J_x^2 = -Id$. The almost complex structure J is said invariant under the action of the group G if its elements are holomorphic applications about J , that is, if for every $g \in G$ and all $x \in G/P_\Theta$ then $dg_x \circ J_x = J_{g(x)} \circ dg_x$. In this work, we study the existence of invariant almost complex and complex structures on F_Θ . We show that, contrary to the complex case where the invariant almost complex structures are well known, some real flag manifolds do not admit such structures. We also verified if the invariant almost complex structures are complex structures. We prove that only some flag manifolds of the Lie algebra C_l admit complex structures.

Keywords: Flag manifold, Semi-simple Lie groups, Lie algebras, Complex manifolds. .

Lista de tabelas

Tabela 1	– Estruturas pseudo-complexas invariantes em flags reais	14
Tabela 2	– Estruturas complexas invariantes em $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$	58
Tabela 3	– Estruturas complexas invariantes em $\mathbb{F}_{\{\lambda_3-\lambda_4, 2\lambda_4\}}$	60
Tabela 4	– Estruturas complexas invariantes no flag $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$ de C_3	108
Tabela 5	– Estruturas integráveis em C_3	109
Tabela 6	– Estruturas integráveis em C_7	109

Sumário

	Introdução	12
1	PRELIMINARES	16
1.1	Teoria semissimples real	16
1.2	Variedades complexas	30
1.3	Grupos de Lie complexos	33
2	CLASSES DE M-EQUIVALÊNCIA	36
2.1	Diagrama $A_l, l \geq 1$	38
2.2	Diagrama de $B_l, l \geq 2$	39
2.3	Diagrama $C_l, l \geq 3$	41
2.4	Diagrama $D_l, l \geq 4$	42
2.5	Diagrama G_2	43
2.6	Diagramas E_6, E_7 e E_8	43
2.7	Diagrama F_4	44
3	ESTRUTURAS PSEUDO-COMPLEXAS INVARIANTES EM VA- RIEDADES FLAGS REAIS	45
3.1	Estruturas pseudo-complexas M -invariantes	45
3.2	Flags de $A_l, l \geq 1$	47
3.2.1	Flags de A_3	47
3.3	Flags de $B_l = \mathfrak{so}(l, l + 1), l \geq 2$	48
3.4	Flags de $C_l = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$	52
3.4.1	Flags de C_4	58
3.5	Flags de $D_l = \mathfrak{so}(l, l)$	60
3.5.1	Flags de D_4	65
3.6	Flags de G_2	72
3.7	Flags de F_4	73
3.8	Flags de E_6, E_7 e E_8	73
4	ESTRUTURAS PSEUDO-COMPLEXAS INVARIANTES EM GRAS- MANNIANAS REAIS	74
4.1	Formas diferenciais e cohomologia de De Rham	74
4.2	Variedade simplética	82
4.3	Estruturas complexas invariantes e representações	97
4.4	Formas simpléticas em espaços homogêneos	100

4.5	A não existência de estrutura pseudo-complexa em Grassmanniana real	101
5	INTEGRABILIDADE DAS ESTRUTURAS PSEUDO-COMPLEXAS	104
5.1	Flags de A_l	104
5.2	Flags de B_l	105
5.3	Flags de C_l	107
5.3.1	Flags de C_4	109
5.4	Flags de D_l	111
5.4.1	Flags de D_4	113
5.5	Flags de G_2	121
	REFERÊNCIAS	122

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a existência e a integrabilidade de estruturas pseudo-complexas invariantes em variedades flag reais $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. Iremos considerar o caso em que a álgebra de Lie \mathfrak{g} do grupo G é uma forma real normal de uma álgebra de Lie simples complexa.

Uma variedade flag de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço quociente $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, onde G é um grupo conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} e P_Θ é um subgrupo parabólico. Se $K \subset G$ é um subgrupo compacto maximal e $K_\Theta = K \cap P_\Theta$, então o flag \mathbb{F}_Θ pode ser escrito na forma $\mathbb{F}_\Theta = K/K_\Theta$.

Uma forma real de uma álgebra \mathfrak{g} semissimples complexa é uma álgebra real cuja álgebra complexificada é a álgebra \mathfrak{g} . Uma forma real \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} é normal se, para qualquer decomposição de Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, existe em \mathfrak{s} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_0 .

Uma estrutura pseudo-complexa J em uma variedade flag real $\mathbb{F}_\Theta = K/K_\Theta$ é um campo tensorial que é, para todo ponto x de \mathbb{F}_Θ , um endomorfismo no espaço tangente $T_x\mathbb{F}_\Theta$ tal que $J^2 = -1$, onde 1 denota a aplicação identidade de $T_x\mathbb{F}_\Theta$. A estrutura pseudo-complexa J é dita K -invariante se, para todo $g \in K$ e todo $x \in \mathbb{F}_\Theta$, temos $dg_x \circ J_x = J_{g(x)} \circ dg_x$.

Existe uma extensa literatura sobre a geometria invariante das variedades flag complexas. Ver por exemplo, (ARVANITOEORGOS, 2006), (MONK, 1959), (BURSTALL; RAWNSLEY, 1990), (BURSTALL; SALAMON, 1987), (NEGREIROS, 1988), (MARTIN; NEGREIROS, 2003), (MARTIN; SILVA, 2006), (WANG; ZILLER, 1985), (PATRAO et al., 2012), (FULTON; HARRIS, 1991), (HELGASON, 1978), (GRAMA; NEGREIROS; OLIVEIRA, 2015), (GUTIERREZ, 2000), (SILVA, 2003), (COHEN; NEGREIROS; MARTIN, 2002), (ARVANITOEORGOS, 1993) e (PILCA, 2012). Uma questão natural que surge é de como seria a geometria invariante em variedades flag reais. Em (PATRAO; MARTIN, 2015), San Martin-Patrão deram um grande passo para solucionar esse problema. Nesse trabalho eles descreveram a representação de isotropia de K_Θ dos flags reais, ou seja, eles obtiveram uma decomposição do espaço tangente ao flag, na origem, em componentes K_Θ -invariantes e irreduzíveis

$$T_{b_\Theta}\mathbb{F}_\Theta = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Essa decomposição é essencial para encontrar geometrias K -invariantes sobre \mathbb{F}_Θ .

Vale salientar uma diferença muito importante na representação de isotropia de K_Θ entre o caso real e o caso complexo. No flag real, ocorrem casos em que duas componentes K_Θ -invariantes e irreduzíveis são equivalentes. No caso complexo, como

já se sabe, esse fato não ocorre. Conseqüentemente, no caso complexo, as componentes K_Θ -invariantes e irredutíveis, na representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , são invariantes pelas estruturas pseudo-complexas. No flag real, ocorrem casos em que $JV_i = V_j$, para V_i e V_j componentes K_Θ -invariantes e irredutíveis equivalentes.

Nosso objetivo foi investigar a existência de estruturas pseudo-complexas K -invariantes em \mathbb{F}_Θ e, nos casos existentes, verificar se tais estruturas são complexas.

As estruturas pseudo-complexas invariantes dos grupos complexos são bem conhecidas e completamente descritas por um conjunto de sinais $\{\varepsilon_\alpha\}_\alpha$, onde α é uma raiz. Mais precisamente, olhando para essas estruturas no complexificado de $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, temos $JX_\alpha = i\varepsilon_\alpha X_\alpha$, com $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha} = \pm 1$, para todo $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$.

No caso real, provamos que a maior parte dos flags não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. O que ocorre é que uma estrutura complexa invariante por $K_\Theta = M.(K_\Theta)_0$, deve ser invariante tanto pela componente conexa de K_Θ , $(K_\Theta)_0$, como pelo grupo M . Uma condição necessária para que um flag real admita estruturas complexas K_Θ -invariantes é que toda classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ tenha um número par de elementos. Duas raízes α e β estão em uma mesma classe de M -equivalência se as representações de M sobre \mathfrak{g}_α e \mathfrak{g}_β são equivalentes. A condição de M -equivalência é necessária e suficiente para obtermos estruturas complexas M -invariantes, mas não é suficiente para obtermos estruturas K_Θ -invariantes. Com essa condição, descartamos a possibilidade de muitos flags admitirem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Para alguns casos, excluimos a possibilidade de existência de tais estruturas usando a orientabilidade ou dimensão do flag, uma vez que uma condição necessária para que uma variedade admita estruturas pseudo-complexas é que ela seja orientável e tenha dimensão par.

Para os flags que admitiam estruturas complexas M -invariantes, analisamos se essas estruturas também eram invariantes por $(K_\Theta)_0$. Por fim, para os flags que admitiam estruturas complexas K_Θ -invariantes, verificamos se essas estruturas eram integráveis.

A proposição seguinte é um resumo dos resultados obtidos no capítulo 3 desse trabalho. Todas as variedades flag reais que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são descritas abaixo.

Proposição 0.1. *Se $F_\Theta = G/P_\Theta$ é uma variedade flag real que admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes, então F_Θ é uma das variedades abaixo:*

Das variedades flag reais que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes, provamos que apenas alguns flags da álgebra C_l admitem estruturas integráveis. Seja F_Θ uma variedade flag de C_l , $l \geq 4$, com $\Theta = \{\lambda_{d+1} - \lambda_{d+2}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e d par. Defina $W_R = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{k}_\alpha$ e $W_j = \sum_{\alpha \in \Pi_j} \mathfrak{k}_\alpha$, onde $R = \{\lambda_i \pm \lambda_j : i < j \leq d\} \cup \{2\lambda_i : 1 \leq i \leq d\}$ e

Tabela 1 – Estruturas pseudo-complexas invariantes em flags reais

Diagrama	Flags que admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes
A_3	Flag maximal
B_2	Flag maximal
B_3	$\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}$
$C_{2n}, n \geq 2$	Flag maximal
$C_l, l \geq 3$	$\Theta = \{\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n+2}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$
$D_l, l \geq 4$	Flag maximal
D_4	$\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$
D_4	$\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$
D_4	$\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$
G_2	Flag maximal

$\Pi_j = \{\lambda_j \pm \lambda_k : 1 \leq j \leq d \text{ e } k \geq d+1\}$. Os subespaços W_j são K_Θ -invariantes e irredutíveis e $T_{b_\Theta}F_\Theta = W_R \oplus \sum_{j=1}^d W_j$. O estudo das estruturas complexas invariantes, nesse caso, ficou restrito às componentes W_j , uma vez que uma estrutura M -invariante em W_R também é K_Θ -invariante.

Obtemos que as estruturas pseudo-complexas invariantes nessas variedades são dadas por sinais $\varepsilon_{kj} = \pm 1$, em cada componente W_j , $1 \leq j \leq d$. As estruturas integráveis são aquelas em que os sinais em duas componentes W_j e W_s são iguais ou os sinais são opostos e deve-se impor uma determinada condição na componente W_R .

Enunciaremos agora o principal resultado desse trabalho. A demonstração é a junção de todos os resultados obtidos nos capítulos 3 e 5.

Teorema 0.1. *Em variedades flag reais só existem estruturas complexas nos flags F_Θ de C_l , $l \geq 4$, onde $\Theta = \{\lambda_{d+1} - \lambda_{d+2}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e d é par. Uma estrutura pseudo-complexa invariante em F_Θ é integrável se, e somente se, para duas componentes W_j e W_s , $1 \leq j, s \leq d$, temos $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ks}$ ou $\varepsilon_{kj} = -\varepsilon_{ks}$ e $JA_{js} = \varepsilon_{ks}S_{js}$, onde ε_{kj} e ε_{ks} são sinais nas componentes W_j e W_s , respectivamente. A tabela acima contém os únicos flags que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes.*

Estamos considerando aqui $\{A_{kj}, S_{kj}\}$ uma base do espaço $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$, em que $A_{kj} = E_{kj} - E_{jk}$ e $S_{kj} = i(E_{kj} + E_{jk})$. A condição na componente W_R , mencionada acima, é justamente $JA_{js} = \varepsilon_{ks}S_{js}$.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira.

O capítulo 1 foi dedicado ao estudo da teoria semissimples real, variedades complexas e grupos de Lie complexos. Esses assuntos formam a base para o nosso trabalho.

No capítulo 2, descrevemos as classes de M -equivalência para cada diagrama. Esse conceito foi de fundamental importância para obtenção dos resultados descritos nesse

trabalho. Esse capítulo foi baseado no terceiro capítulo de (PATRAO; MARTIN, 2015).

O capítulo 3 foi dedicado ao estudo das estruturas pseudo-complexas invariantes nas variedades flag reais. Verificamos, para todos os diagramas reais, quais variedades flag admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Usamos a condição necessária das classes de M -equivalência para analisar a existência de estruturas invariantes por M . Para as estruturas M -invariantes existentes, verificamos se essas são K_Θ -invariantes.

No capítulo 4 nós demonstramos, usando a teoria de geometria simplética, que as Grassmannianas reais não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Nas duas primeiras seções, apresentaremos alguns conceitos de Geometria Invariante, tais como: formas diferenciais, cohomologia de De Rham e variedades simpléticas. As seções 4.3 e 4.4 foram dedicadas ao estudo das estruturas complexas invariantes, representações e formas simpléticas em espaços homogêneos. Por fim, usamos os conceitos das seções anteriores para mostrar, na seção 4.5, a não existência de estruturas complexas invariantes em Grassmannianas reais.

No capítulo 5, verificamos se as estruturas pseudo-complexas K -invariantes obtidas no capítulo 3 são integráveis. Usamos para isso o tensor de Nijenhuis e a Identidade de Jacobi.

1 Preliminares

Neste capítulo, descreveremos as ferramentas básicas para o entendimento desse trabalho. Falaremos sobre a teoria das álgebras semissimples reais, variedades complexas e grupos de Lie complexos. A primeira seção será dedicada ao estudo da teoria semissimples real. Esta parte introdutória pode ser encontrado nos livros (KNAPP, 2013) e (MARTIN, 1999). As seções 1.4 e 1.5, baseadas no capítulo 14 de (MARTIN, 2015), serão dedicadas ao estudo das variedades complexas e grupos de Lie complexos.

1.1 Teoria semissimples real

Uma álgebra de Lie real é um espaço vetorial real \mathfrak{g} munido de um produto $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que:

1. é bilinear;
2. é antissimétrico, ou seja, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$;
3. respeita a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Este produto é chamado de comutador ou colchete de Lie. Dizemos que um subespaço \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie se ele é fechado pelo colchete.

Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie \mathfrak{g} se satisfaz $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definimos a representação adjunta como uma aplicação $ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ tal que dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad(X)Y = [X, Y]$. Através da identidade de Jacobi, $ad(X)$ é um tipo particular de derivação e é chamada de derivação interna. O conjunto destas derivações internas é a imagem da aplicação adjunta da álgebra de Lie.

Um ideal \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie que satisfaz $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Daí, dado um ideal \mathfrak{h} podemos obter a álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ das classes laterais de \mathfrak{h} .

Queremos definir a álgebra de Lie semissimples, objeto que estudaremos a partir de então. Primeiramente, define-se a série derivada de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} como o conjunto de subespaços encaixados

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \dots$$

definidos indutivamente como

$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] = \{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}\}.$$

A cada um destes elementos da série derivada damos o nome de álgebra derivada. Dizemos que \mathfrak{g} é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas é nula, ou seja, existe $k_0 > 0$ inteiro tal que $\mathfrak{h}^{(k_0)} = 0$.

Definição 1.1. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semissimples se \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além do 0.*

A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(ad(X)ad(Y)).$$

Um resultado básico da teoria de álgebras de Lie diz que uma álgebra de Lie é semissimples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada. Um homomorfismo entre álgebras de Lie é uma aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que satisfaz $\varphi[X, Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Quando φ é um homomorfismo inversível que opera em \mathfrak{g} , dizemos que φ é um automorfismo. O conjunto dos automorfismos $Aut(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie é um subgrupo fechado do grupo $Gl(\mathfrak{g})$ das transformações inversíveis. Sabendo que a exponencial de uma derivação é um automorfismo, então o conjunto $Int(\mathfrak{g})$ das exponenciais das representações $ad(X)$ é denominado automorfismo interno da álgebra. Quando a álgebra é semissimples, então todo automorfismo é automorfismo interno, ou seja, $Int(\mathfrak{g})$ é a componente da identidade de $Aut(\mathfrak{g})$.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semissimples real \mathfrak{g} . Tomando $g \in G$, a conjugação C_g é um automorfismo de G dado por $C_g(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Definimos a representação adjunta no grupo G como $Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$ tal que $Ad(g) = d(C_g)_1$. Sabendo que $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é a aplicação exponencial de \mathfrak{g} e $e : gl(\mathfrak{g}) \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$ é a exponencial de transformações lineares, seguem as seguintes equações:

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(Ad(g)X); \quad (1.1)$$

$$Ad(\exp(X)) = e^{ad(X)}. \quad (1.2)$$

Decomposição de Cartan e de Iwasawa

A partir de agora, nosso estudo irá se restringir às álgebras de Lie \mathfrak{g} semissimples reais e não-compactas. Uma álgebra de Lie é dita não-compacta se sua forma de Cartan-Killing não é negativa semi-definida.

Um automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é dito uma involução quando $\theta^2 = Id$. Podemos associá-la a uma forma bilinear não-degenerada

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle,$$

definida para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Observe que toda involução admite apenas autovalores 1 e -1 . Denote por \mathfrak{k} e \mathfrak{s} os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 , respectivamente. Estes conjuntos possuem as seguintes relações:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}.$$

A álgebra \mathfrak{g} pode ser escrita como a soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, porém note que \mathfrak{s} não é subálgebra de \mathfrak{g} , pois caso contrário, deveríamos ter que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = 0$ e \mathfrak{s} seria um ideal abeliano (solúvel), contradizendo o fato de \mathfrak{g} ser semissimples. Temos, também, que \mathfrak{k} não é ideal de \mathfrak{g} , pois $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. A subálgebra de Lie \mathfrak{k} é chamada de componente compacta da decomposição de Cartan, uma vez que \mathfrak{k} é compacta em diversos casos.

Uma involução θ é chamada de involução de Cartan se sua forma bilinear associada é um produto interno em \mathfrak{g} . Neste caso, a decomposição de \mathfrak{g} como soma direta de \mathfrak{k} e \mathfrak{s} é dita uma decomposição de Cartan para \mathfrak{g} .

Proposição 1.1. *Se $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, então $ad(X)$ é antissimétrica e $ad(Y)$ é simétrica em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. Deste modo, \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ e em relação à forma de Cartan-Killing.*

Esta Proposição nos diz que, para uma a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, então a forma de Cartan-Killing é negativa semi-definida em \mathfrak{k} e positiva semi-definida em \mathfrak{s} . De fato, se $X, X' \in \mathfrak{k}$, então

$$\langle X, X' \rangle = \langle X, \theta X' \rangle = -\langle X, X' \rangle_\theta \leq 0,$$

pois $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é um produto interno, implicando que a forma de Cartan-Killing é negativa semi-definida em \mathfrak{k} . Um cálculo análogo mostra que a forma de Cartan-Killing é positiva semi-definida em \mathfrak{s} . As decomposições de Cartan não são únicas. Veja que dado uma involução de Cartan θ e um automorfismo φ de \mathfrak{g} , a aplicação $\varphi\theta\varphi^{-1}$ também é uma involução de Cartan, pois $(\varphi\theta\varphi^{-1})^2 = Id$ e

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle = -\langle \varphi X, \varphi \theta Y \rangle = -\langle \varphi X, \varphi \theta \varphi^{-1}(\varphi Y) \rangle = \langle \varphi X, \varphi Y \rangle_{\varphi\theta\varphi^{-1}}$$

e, portanto, temos a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \varphi\mathfrak{k} \oplus \varphi\mathfrak{s}$.

Podemos tomar K como o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{k} e S como o conjunto obtido da exponencial de \mathfrak{s} , isto é, $S = \{expX | X \in \mathfrak{s}\}$, lembrando que como \mathfrak{s} não é uma subálgebra de Lie, não podemos afirmar que S é subgrupo de Lie.

Proposição 1.2. *O mapa $K \times \mathfrak{s} \rightarrow G$ dado por $(k, X) \mapsto k \exp(X)$ é um difeomorfismo. Assim, em nível de grupo, a decomposição de Cartan de G é $G = KS$.*

Proposição 1.3. *Dado $k \in K$, então \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são invariantes por $Ad(k)$. Além disso, $Ad(k)$ é uma isometria em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ associada a uma involução de Cartan.*

Proposição 1.4. *$Ad(K)$ é um subgrupo compacto de $Gl(\mathfrak{g})$ de transformações lineares ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$.*

Corolário 1.1. *O subgrupo K é compacto se, e somente se, o centro de G é finito. Além disso, K é sempre fechado.*

Este último corolário mostra porque geralmente chama-se o subgrupo K de subgrupo compacto de G .

Na teoria de álgebra de Lie complexa, podemos decompor um espaço através dos espaços de pesos associados à uma subálgebra de Cartan, que resultará em elementos complexos. Aqui, queremos proceder de modo que obtenhamos uma decomposição análoga, porém com valores reais. Para tal, considere uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, ou seja, que não está contida propriamente em nenhuma outra subálgebra abeliana de \mathfrak{s} . A existência de \mathfrak{a} está garantida pelo fato de \mathfrak{s} conter subálgebras de dimensão 1, que são abelianas, e pelo fato de \mathfrak{s} ter dimensão finita.

Seja $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de \mathfrak{a} e considere o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid ad(H)X = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Quando $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ para $\alpha \neq 0$, então dizemos que α é uma raiz (restrita) de \mathfrak{g} em relação a \mathfrak{a} . Observe que a existência destes funcionais reais ocorre devido ao fato de que $ad(H)$, para $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, é uma matriz simétrica em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e, portanto, todos os seus autovalores são reais. Denote por Π o conjunto de todas as raízes de \mathfrak{g} . Tomando $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid ad(H)X = 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$, como o subespaço de peso associado à raiz nula, então a álgebra \mathfrak{g} se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.3)$$

Veja que dada duas raízes $\alpha, \beta \in \Pi$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Isto segue da identidade de Jacobi, pois se $H \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, então

$$ad(H)[X, Y] = [ad(H)X, Y] + [X, ad(H)Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y].$$

Lema 1.1. *O centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} é $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, onde \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} .*

Pela definição, o subespaço de peso nulo é $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Portanto, a partir da fórmula 1.3 tem-se que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (1.4)$$

Proposição 1.5. *Sejam \mathfrak{a} e \mathfrak{a}' duas subálgebras abelianas maximais de \mathfrak{s} . Então, existe φ um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} , ou seja, $\varphi = e^{ad(X_1)} \dots e^{ad(X_i)}$, com $X_i \in \mathfrak{k}$ para todo i , tal que $\varphi(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}$.*

A partir desta última Proposição, definimos o posto real de uma álgebra de Lie como a dimensão comum das subálgebras abelianas maximais em \mathfrak{s} .

As câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) são as componentes conexas do conjunto

$$\bar{\mathfrak{a}} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) \neq 0, \text{ para toda raiz } \alpha \in \Pi\},$$

que é um conjunto aberto e denso. Os elementos de $\bar{\mathfrak{a}}$ são chamados elementos regulares. Escolhendo uma das câmaras de Weyl como a câmara positiva \mathfrak{a}^+ , definimos o conjunto das raízes positivas como

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H) > 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}.$$

Considere os seguintes subespaços:

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad e \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Observe que o subespaço \mathfrak{n} é uma subálgebra de Lie, pois se $\alpha, \beta \in \Pi^+$, então pode-se ocorrer duas possibilidades

1. Se $\alpha + \beta$ é raiz positiva, então sabe-se que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{n}$;
2. Se $\alpha + \beta$ não é raiz, então $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$, implicando que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0 \in \mathfrak{n}$.

Do mesmo modo, vale que \mathfrak{n}^- é álgebra de Lie. Estas subálgebras se relacionam pela equação $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$, pois se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $H \in \mathfrak{a}$, então

$$ad(H)(\theta X) = [H, \theta X] = \theta[\theta H, X] = -\theta[H, X] = -\theta ad(H)X = -\alpha(H)(\theta X),$$

logo, como θ é um automorfismo, $\theta\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, implicando que $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$. Note que $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}^- = 0$.

Proposição 1.6. *Sejam $\kappa(X) = \frac{X + \theta X}{2}$ e $\sigma(X) = \frac{X - \theta X}{2}$ as projeções de $X \in \mathfrak{g}$ em \mathfrak{k} e \mathfrak{s} , respectivamente. Então as restrições de $\kappa|_{\mathfrak{n}}$ e $\sigma|_{\mathfrak{n}}$ são injetoras sobre suas imagens. Mais ainda, temos que $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \kappa(\mathfrak{n})$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$ são somas ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$.*

Podemos então construir a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Teorema 1.1. *Considere o terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ associado a \mathfrak{g} . Então, a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie \mathfrak{g} é dada por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

onde \mathfrak{n} é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra solúvel.

Demonstração. A partir da equação 1.4 e como $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{k}$ temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^{-}.$$

Para $X \in \mathfrak{n}^{-}$ temos

$$X = X + \theta X - \theta X \in \mathfrak{k} + \mathfrak{n},$$

pois $\theta X \in \mathfrak{n}$ e $\theta(X + \theta X) = \theta X + X$, implicando que $X + \theta X \in \mathfrak{k}$. Assim, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Pela Proposição anterior, segue que $\dim(\mathfrak{s}) = \dim(\mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})) = \dim(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) = \dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})$ e, pela decomposição de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

A subálgebra \mathfrak{n} é claramente nilpotente, pois o conjunto das raízes positivas Π^{+} é um conjunto finito.

Agora, a subálgebra $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é solúvel pois $[\mathfrak{n}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{n}$ e

$$[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$$

implicando que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})'$ é nilpotente. Logo, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é solúvel. \square

Ao contrário da decomposição de Cartan, a decomposição de Iwasawa se escreve como soma direta de subálgebras de \mathfrak{g} . Definindo K , A e N como os subgrupos conexos gerados por \mathfrak{k} , \mathfrak{a} e \mathfrak{n} , respectivamente, o seguinte teorema fornece a decomposição de Iwasawa a nível do grupo de Lie.

Teorema 1.2. *O mapa $K \times A \times N \rightarrow G$ dado por $(k, h, l) \mapsto khl$ é um difeomorfismo. Logo, a decomposição de Iwasawa do grupo G é definido como $G = KAN$.*

Sistema de raízes e o Grupo de Weyl

Seja Π o conjunto das raízes (restritas) de \mathfrak{g} . Então, o conjunto Π gera o dual \mathfrak{a}^{*} . De fato, observe que o aniquilador do gerado de Π é gerado pelo seguinte conjunto

$$\langle \Pi \rangle^0 = \langle \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) = 0, \text{ para toda raiz } \alpha \in \Pi\} \rangle.$$

Logo, pela decomposição 1.3, $\langle \Pi \rangle^0 = 0$, pois a única possibilidade de $\alpha(H) = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$, é tomando $H = 0$.

Assim, a partir do seguinte resultado de álgebra linear, tem-se que o subespaço gerado por Π é exatamente \mathfrak{a}^{*} .

Proposição 1.7. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial de V . Então*

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V$$

onde $W^0 = \{f \in V^0 \mid f(w) = 0, \text{ para todo } w \in W\}$ é o aniquilador de W .

A forma de Cartan-Killing, quando restrita a \mathfrak{a} , é um produto interno. Assim, para cada raiz $\alpha \in \Pi$, existe um elemento $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que

$$\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle.$$

Como Π gera \mathfrak{a}^* , esta expressão define um isomorfismo entre \mathfrak{a} e \mathfrak{a}^* que associa cada $H \in \mathfrak{a}$ com $\langle H, \cdot \rangle = \alpha \in \mathfrak{a}^*$. Definiremos um produto interno no dual \mathfrak{a}^* por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha).$$

A reflexão de um elemento $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ é uma aplicação $r_\alpha : \mathfrak{a}^* \rightarrow \mathfrak{a}^*$ tal que

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Definição 1.2. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Um sistema de raízes do espaço vetorial E é um conjunto $\Pi \subset E$ que satisfaz*

1. Π é finito, gera E e não contém 0;
2. Para todo $\alpha \in \Pi$ existe uma reflexão r_α em relação a α tal que $r_\alpha(\Pi) = \Pi$;
3. Para todos $\alpha, \beta \in \Pi$, $r_\alpha(\beta) - \beta$ é um múltiplo inteiro de α .

Proposição 1.8. *O conjunto $\Pi \subset \mathfrak{a}^*$ é um sistema de raízes.*

Temos a seguinte propriedade sobre o conjunto Π das raízes:

Proposição 1.9. *Se $\alpha \in \Pi$, então $t\alpha$ também é raiz somente quando t é ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$ ou ± 2 .*

Dada uma escolha do par (θ, \mathfrak{a}) , definimos o grupo de Weyl como o grupo \mathcal{W} gerado pelas reflexões r_α , para toda raiz $\alpha \in \Pi$.

Proposição 1.10. *Todo grupo de Weyl é finito.*

Defina os seguintes subgrupos de Lie:

$$M^* = \text{Norm}_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K \mid \text{Ad}(g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\};$$

$$M = \text{Centr}_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K \mid \text{Ad}(g)|_{\mathfrak{a}} = \text{Id}_{\mathfrak{a}}\}.$$

A partir destes subgrupos, o seguinte teorema fornece uma maneira equivalente de se definir o grupo de Weyl.

Teorema 1.3. *O grupo de Weyl \mathcal{W} é isomorfo à M^*/M .*

Este teorema relaciona duas construções para o grupo de Weyl de origens diferentes. Quando definido através das reflexões, ele depende de um sistema de raízes Π sem fazer nenhuma menção ao grupo, enquanto que quando definido pelo quociente M^*/M , é necessário conhecer o grupo G .

Um subconjunto das raízes positivas $\Sigma \subset \Pi^+$ é dito sistema simples de raízes associado à câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ se:

1. Σ gera \mathfrak{a}^* ;
2. Toda raiz positiva é uma combinação linear de raízes de Σ , tal que os coeficientes desta combinação são não-negativos.

Proposição 1.11. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ o terno associado à \mathfrak{g} . Então,*

1. *Toda câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ admite uma escolha Σ de sistema de raízes simples;*
2. *O grupo de Weyl \mathcal{W} é transitivo no conjunto dos sistemas simples de raízes, isto é, se Σ e Σ' são sistemas de raízes, então existe único $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(\Sigma) = \Sigma'$;*
3. *O grupo de Weyl é gerado pelo conjunto $\{r_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ das reflexões simples em torno das raízes de Σ .*

O terceiro item desta Proposição diz que dado um elemento $w \in \mathcal{W}$, podemos escrevê-lo como o produto $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, onde cada um dos r_{α_i} são reflexões em torno de raízes simples $\alpha_i \in \Sigma$.

Quando escrevemos w desta forma, dizemos que esta é uma decomposição em termo de reflexões de raízes simples de w . As decomposições em raízes simples de w não são únicas, mas podemos escolher decomposições que contenham o menor número possível de reflexões. Para tal, seja $w \in \mathcal{W}$ e considere o conjunto

$$\Pi_w = w(\Pi^-) \cap \Pi^+$$

das raízes positivas que são levadas em negativas pelo elemento w^{-1} . Denote por $l(w)$ o número de elementos do conjunto Π_w . Uma decomposição em raízes simples de w é dita minimal se a quantidade de reflexões simples de w é a menor possível dentre todas decomposições existentes. Quando escrevemos $w = r_1 \cdots r_k$ numa decomposição minimal, onde $r_i = r_{\alpha_i}$ para $\alpha_i \in \Sigma$, tem-se que $k = l(w)$.

Explicitamente, dada a decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_{l(w)}$, o conjunto Π_w é formado pelas seguintes raízes

$$\Pi_w = \{\alpha_1, r_1\alpha_2, \cdots, r_1 \cdots r_{l(w)-1}\alpha_{l(w)}\}.$$

Também temos que, se $w \in \mathcal{W}$ e $\alpha \in \Sigma$, então

$$l(wr_\alpha) = \begin{cases} l(w) + 1, & \text{se } w(\alpha) > 0 \\ l(w) - 1, & \text{se } w(\alpha) < 0 \end{cases}.$$

Agora, seja $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto qualquer. Será a partir da escolha deste subconjunto que definiremos as subálgebras parabólicas e, conseqüentemente, as variedades flag. Definimos $\langle \Theta \rangle \subset \Pi$ como o conjunto gerado por Θ , ou seja, se $\alpha, \beta \in \langle \Theta \rangle$ são raízes tais que $k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \in \Pi$ para $k_\alpha, k_\beta \in \mathbb{Z}$, então $k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \in \langle \Theta \rangle$. Seja também $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$, o conjunto das raízes positivas geradas por Θ .

Vamos definir alguns subgrupos que posteriormente serão úteis. Seja $\Theta \subset \Sigma$, então definimos \mathcal{W}_Θ como o subgrupo de \mathcal{W} gerado pelas reflexões em torno de raízes $\alpha \in \Theta$, isto é,

$$\mathcal{W}_\Theta = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Theta \rangle$$

e definimos \mathcal{W}^Θ como o subconjunto de \mathcal{W} dado por

$$\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W} \mid l(wr_\alpha) = l(w) + 1, \text{ para todo } \alpha \in \Theta\}, \quad (1.5)$$

que também pode ser definida como

$$\mathcal{W}^\Theta = \{w \in \mathcal{W} \mid w(\Theta) \subset \Pi^+\}.$$

O conjunto \mathcal{W}^Θ é denominado de conjuntos dos representantes minimais das classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$, pois cada classe $w\mathcal{W}_\Theta$ possui apenas um único elemento de \mathcal{W}^Θ de comprimento minimal, como pode ser observado a partir da definição.

É possível descrever uma relação de ordem parcial no grupo de Weyl \mathcal{W} da seguinte maneira:

Definição 1.3. *Sejam $w, w' \in \mathcal{W}$. Dizemos que $w' \leq w$ se, e somente se, dada decomposição minimal $w = r_1 \cdots r_n$, então w' possui uma decomposição minimal $w' = r_{i_1} \cdots r_{i_l}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n$. Tal relação de ordem é chamada ordem de Bruhat-Chevalley. Em particular, denota-se por $w' < w$ quando $w' \leq w$ e $w' \neq w$.*

Seja Σ um sistema simples relacionado à câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ . Assim, $-\Sigma$ é um sistema simples de raízes relacionado à câmara negativa $-\mathfrak{a}^+$. Pela Proposição anterior, existe apenas um elemento $w_0 \in \mathcal{W}$ tal que $w_0\Sigma = -\Sigma$. Este elemento w_0 é chamado de involução principal e satisfaz $w_0^2 = Id$, ou seja, é involutivo. É importante notar que a involução principal w_0 é o elemento maximal de \mathcal{W} em relação a ordem de Bruhat-Chevalley.

Subgrupo e subálgebra parabólica

Considere a escolha $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ sobre a álgebra de Lie \mathfrak{g} . A subálgebra semissimples $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo Θ associada à escolha de $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é a subálgebra definida por

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha$$

e as subálgebras nilpotentes $\mathfrak{n}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)^-$ são dadas por

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad e \quad \mathfrak{n}(\Theta)^- = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

As subálgebras $\mathfrak{n}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)^-$ são nilpotentes, pois $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Denota-se por $\mathfrak{a}(\Theta)$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}(\Theta)$ gerado por $\{H_\alpha | \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$, onde $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ é o elemento que se associa com a raiz α no dual \mathfrak{a}^* , isto é, $\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$. O complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ será denotada como a subálgebra \mathfrak{a}_Θ , ou seja, $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$.

Define-se a subálgebra parabólica minimal como escrita pela seguinte soma direta

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

e a subálgebra parabólica de tipo Θ como

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

Observe que as subálgebras parabólicas são, de fato, subálgebras de \mathfrak{g} , decorrendo da propriedade $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. A subálgebra parabólica minimal pode ser escrita como $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\emptyset$, ou seja, é a subálgebra parabólica do tipo $\Theta = \emptyset$.

No nível de grupo, definimos o subgrupo parabólico P_Θ do tipo Θ como o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G , isto é,

$$P_\Theta = \{g \in G | Ad(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

Lema 1.2. *A álgebra de Lie de P_Θ é \mathfrak{p}_Θ .*

Definimos como subgrupo parabólico minimal o subgrupo $P = P_\emptyset$, que é o normalizador de \mathfrak{p} em G . A seguinte Proposição fornece uma decomposição para este subgrupo.

Proposição 1.12. *Dados $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ escolhidos sobre uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , o subgrupo parabólico de tipo Θ é descrito pelo produto $P = MAN$, onde $M = Centr_K(\mathfrak{a})$.*

Podemos generalizar a Proposição anterior para um subgrupo parabólico do tipo Θ .

Teorema 1.4. *Dados $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ escolhidos sobre uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , então a subálgebra e o subgrupo parabólico de tipo Θ se decompõem como*

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \quad e \quad P_\Theta = K_\Theta AN,$$

onde, $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}_\Theta)$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{k} e

$$K_\Theta = Centr_K(\mathfrak{a}_\Theta) = \{k \in K | Ad(k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = Id|_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$$

é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ no subgrupo K .

Formas reais normais

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial real obtido por restrição dos escalares a \mathbb{R} , isto é, o realificado de V

Seja, agora, V um espaço vetorial real e $V_{\mathbb{C}}$ o seu complexificado. Os elementos de $V_{\mathbb{C}}$ se escrevem como $u + iv$, $u, v \in V$. Escrevendo os elementos de $V_{\mathbb{C}}$ desta maneira, fica da a conjugação $\sigma : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$

$$\sigma(u + iv) = \overline{u + iv} = u - iv.$$

Esta conjugação satisfaz $\sigma^2 = Id$ e é antilinear (ou sesquilinear) em $V_{\mathbb{C}}$ no sentido que σ é linear sobre os reais e

$$\sigma(zw) = \bar{z}w, \quad \text{com } z \in \mathbb{C}, w \in V_{\mathbb{C}}.$$

Assim,

$$V = \{w \in V_{\mathbb{C}} : \sigma(w) = w\}.$$

Definição 1.4. *Seja U um espaço vetorial complexo. Uma conjugação em U é uma transformação antilinear σ que satisfaz $\sigma^2 = Id$.*

Um espaço vetorial complexo U com uma conjugação σ pode ser visto como o complexificado de um espaço vetorial real.

Os espaços vetoriais complexos estão em bijeção com os espaços reais providos de uma transformação linear J em que $J^2 = -Id$. De maneira semelhante, existe uma bijeção entre as conjugações de um espaço vetorial complexo V e seus subespaços reais que se complexificam em V .

O realificado de um espaço vetorial complexo pode, por sua vez, ser complexificado.

Passando agora às álgebras de Lie, uma estrutura complexa J em uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} é dita adaptada se ela comuta com $ad(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, isto é, se

$$[JX, Y] = [X, JY] = J[X, Y] \tag{1.6}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Uma estrutura complexa adaptada satisfaz a condição mais fraca

$$[JX, JY] = -[X, Y], \tag{1.7}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em geral, a condição 1.7 não implica 1.6. Agora, se a estrutura complexa é dada pela multiplicação por i de uma álgebra complexa, então é adaptada. Reciprocamente, definindo a multiplicação por escalares complexos através de J , \mathfrak{g} passa a ser uma álgebra de Lie complexa.

Na análise dos subespaços reais de uma álgebra complexa \mathfrak{g} , as conjugações que interessam são aquelas que satisfazem

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]. \quad (1.8)$$

Uma transformação antilinear inversível de \mathfrak{g} que satisfaz 1.8 é chamada de antiautomorfismo. Um antiautomorfismo de \mathfrak{g} é um automorfismo da realificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Além do mais, o subespaço real dos pontos fixos para um antiautomorfismo é uma subálgebra do realificado de \mathfrak{g} , pois, se X e Y são fixos por σ , então 1.8 mostra de imediato que $[X, Y]$ também é fixo por σ . Dessa forma, dado um antiautomorfismo em \mathfrak{g} , a álgebra real

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$$

tem por complexificada a álgebra complexa \mathfrak{g} .

Definição 1.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra complexa. Uma forma real de \mathfrak{g} é uma subálgebra \mathfrak{g}_0 de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação σ que satisfaz 1.8. Se isso ocorre, \mathfrak{g} é o complexificado de \mathfrak{g}_0 .*

Exemplo 1.1. *Em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, seja σ dada por $\sigma(A) = -\bar{A}^t$. Então, σ é um antiautomorfismo. A álgebra de seus pontos fixos é*

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : A = -\bar{A}^t\},$$

que é, portanto, uma forma real de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Proposição 1.13. *Seja \mathfrak{h} uma álgebra complexa e sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$ as formas de Cartan-Killing de \mathfrak{h} e $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$, respectivamente. Então, para $X, Y \in \mathfrak{h}$,*

$$\langle X, Y \rangle^{\mathbb{R}} = 2\operatorname{Re}\langle X, Y \rangle,$$

onde Re significa a parte real de um número complexo.

Com a Proposição acima, concluímos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é degenerada se isso ocorrer com $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$. Vice-versa, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é degenerada, então $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$ também não é degenerada.

Portanto, uma álgebra complexa é semissimples se, e somente se, sua realificada também é. Dessa forma, se uma das álgebras \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, for semissimples, o mesmo ocorre com as demais.

Sem expor os detalhes, fazemos uma classificação preliminar da álgebras simples através do resultado abaixo:

Teorema 1.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra real simples. Então, \mathfrak{g} é:*

- (i) *uma forma real de uma álgebra complexa simples; ou*
- (ii) *é o realificado de uma álgebra complexa simples.*

Abelianos maximais e formas reais normais

Da mesma forma que com as álgebras complexas, as álgebras semissimples reais se decompõem em subespaços de pesos associados às subálgebras de Cartan. Em geral, os pesos de uma subálgebra de Cartan assumem valores complexos. Por essa razão, a teoria de sistemas de raízes, para álgebras reais, não é desenvolvida via subálgebras de Cartan. Esse papel é desempenhado pelas subálgebras abelianas maximais contidas na parte simétrica de suas decomposições de Cartan. De maneira mais precisa, sejam \mathfrak{g} uma álgebra semissimples real,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

uma decomposição de Cartan. Seja, também, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana que é maximal no sentido em que \mathfrak{a} não está contida em nenhuma subálgebra abeliana contida em \mathfrak{s} .

Definição 1.6. *O posto real de uma álgebra semissimples real é a dimensão comum das álgebras abelianas maximais contidas em \mathfrak{s} .*

Em geral, o posto real de uma álgebra de Lie é menor que o seu posto, já que as subálgebras abelianas maximais em \mathfrak{s} nem sempre são subálgebras de Cartan. Essa diferença entre o posto e o posto real permite distinguir uma classe especial de formas reais.

Definição 1.7. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semissimples complexa. Uma forma real \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} é normal se para qualquer decomposição de Cartan*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

existe em \mathfrak{s} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_0 . Em outras palavras, uma forma real é normal se o seu posto coincide com o seu posto real.

As formas reais normais das álgebras semissimples complexas formam o oposto das formas reais compactas no sentido em que, por um lado, os pesos da álgebra complexa assumem valores puramente imaginários nas subálgebras de Cartan das formas reais compactas, enquanto que os mesmos pesos assumem valores reais nas subálgebras de Cartan das formas reais normais.

Proposição 1.14. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semissimples complexa. Então, \mathfrak{g} admite uma forma real normal.*

Exemplo 1.2. *A álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é uma forma real normal de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é dada por $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ com \mathfrak{k} a subálgebra das matrizes antissimétricas e \mathfrak{s} o subespaço das matrizes simétricas. Além disso, a subálgebra \mathfrak{h} das matrizes diagonais é de Cartan e está contida em \mathfrak{s} e, assim, o posto real de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ coincide com o seu posto.*

Variedades flag reais

Seja G um grupo de Lie conexo não-compacto e semissimples com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Dada uma escolha de $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$, uma variedade flag do tipo Θ é o espaço homogêneo de G sobre um subgrupo parabólico do tipo Θ , ou seja, é $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. A origem b_Θ da variedade flag é a classe lateral $1 \cdot P_\Theta$. No caso de $\Theta = \emptyset$, denotamos esta variedade por \mathbb{F} e a chamamos de variedade flag maximal, e sua origem será b_0 .

Proposição 1.15. *O subgrupo K age transitivamente na variedade flag \mathbb{F}_Θ .*

Órbitas em \mathfrak{s}

Podemos realizar a variedade flag dentro do subespaço (euclidiano) \mathfrak{s} . Seja $\Theta \subset \Sigma$, então existe H_Θ no fecho da câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ tal que

$$\Theta = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H_\Theta) = 0\}.$$

A existência de H_Θ , que não é única, se baseia no fato de Σ ser uma base para \mathfrak{a}^* . Então, tem-se uma base dual $\{H_\alpha \in \mathfrak{a}^+ \mid \alpha \in \Sigma\}$ de \mathfrak{a}^+ com $\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle_\theta$, bastando tomar $H_\Theta = \sum_{\beta \in \Sigma \setminus \Theta} H_\beta$.

Pela decomposição de Iwasawa e pelo Teorema 1.4, a variedade flag pode ser descrita como

$$\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = KAN/K_\Theta AN \cong K/K_\Theta.$$

Agora, lembrando que a adjunta de K é invariante por \mathfrak{s} , a órbita $Ad(K)H_\Theta$ está contida em \mathfrak{s} , uma vez que $H_\Theta \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. A isotropia desta ação é K_{H_Θ} e coincide com K_Θ . Logo,

$$Ad(K)H_\Theta \cong K/K_\Theta \cong \mathbb{F}_\Theta.$$

Portanto, a variedade flag pode ser imersa em \mathfrak{s} como uma órbita por $Ad(K)$ de H_Θ . A variedade flag maximal \mathbb{F} é órbita por $Ad(K)$ de um elemento regular $H \in \mathfrak{a}$, pois todo elemento regular satisfaz $\{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) = 0\} = \emptyset = \Theta$. A partir desta realização, uma variedade flag também pode ser denotada como \mathbb{F}_{H_Θ} .

Observação 1.1. *Para todo $X \in \mathfrak{s}$, X pertence a órbita por $Ad(K)$ de algum $H \in \mathfrak{a}$. De fato, todo $X \in \mathfrak{s}$ está contido numa subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a}' e, pela Proposição 1.5, existe $k \in K$ e $H \in \mathfrak{a}$ tal que $Ad(k)H = X$. Assim, toda órbita de $Ad(K)$ que passa por $X \in \mathfrak{s}$ se identifica como a variedade flag \mathbb{F}_Θ , particionando o espaço \mathfrak{s} .*

Proposição 1.16. *Toda variedade flag é compacta.*

1.2 Variedades complexas

Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é holomorfa se ela é diferenciável sobre \mathbb{C} ou, de forma equivalente, se f , vista como uma aplicação de \mathbb{R}^{2n} , é diferenciável e sua diferencial df_x em cada ponto é uma transformação linear complexa, isto é, comuta com a multiplicação por $i = \sqrt{-1}$. Uma **variedade complexa** M é definida por um atlas cujas cartas assumem valores em \mathbb{C}^n e pelas transformações de coordenadas que são aplicações holomorfas entre abertos de \mathbb{C}^n .

As variedades complexas são, em particular, variedades reais, interpretando \mathbb{C}^n como \mathbb{R}^{2n} . Se M é uma variedade complexa, então cada espaço tangente $T_x M$ é (tem a estrutura de) um espaço vetorial complexo.

As variedades complexas podem ser vistas como variedades reais munidas de uma estrutura adicional dada por uma estrutura pseudo-complexa, que amplia o conceito de variedade complexa.

Antes de definir as estruturas pseudo-complexas em M , seja V um espaço vetorial real. Uma estrutura complexa, $J : V \rightarrow V$, é uma transformação linear em V tal que $J^2 = -Id$. Se o espaço vetorial V admite uma estrutura complexa então $\dim V$ é par, pois os autovalores de J são $\pm i$ e eles aparecem aos pares.

Definição 1.8. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma **estrutura pseudo-complexa** numa variedade diferenciável M é um tensor J tal que, para cada $x \in M$, o valor J_x em x é uma aplicação linear $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ que satisfaz $J_x^2 = -Id$.*

A estrutura J é diferenciável se para todo campo de vetores diferenciável X o campo de vetores JX também é diferenciável.

Deve-se observar que se M admite uma estrutura pseudo-complexa, então $\dim M$ é par, pois seus espaços tangentes têm dimensão par.

Se M é uma variedade complexa, então os espaços tangentes $T_x M$ são espaços vetoriais sobre \mathbb{C} . Nesse caso a multiplicação por i em cada $T_x M$ define uma estrutura pseudo-complexa em M . Variedades complexas são, portanto, pseudo-complexas. Já a caracterização das variedades pseudo-complexas que são complexas é dada pelo **teorema de Newlander-Nirenberg**. Esse teorema utiliza o **tensor de Nijenhuis** da estrutura J , que é definido por

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY], \quad (1.9)$$

onde X e Y são campos de vetores em M .

Teorema 1.6. *Seja M uma variedade pseudo-complexa com estrutura J . Então, M é uma variedade complexa se, e só se, $N_J = 0$. Nesse caso a multiplicação por i em $T_x M$*

coincide com J .

Uma estrutura pseudo-complexa J é dita **integrável** se o tensor de Nijenhuis é identicamente nulo. O teorema de Newlander-Nirenberg diz que as estruturas integráveis são exatamente as provenientes das estruturas complexas.

No contexto de variedades pseudo-complexas, uma **aplicação holomorfa** entre as variedades M e N munidas de estruturas pseudo-complexas, J^M e J^N , é uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ tal que $df_x \circ J_x^M = J_{f(x)}^N \circ df_x$ para todo $x \in M$. Isto é, as diferenciais df_x são aplicações lineares complexas.

Seja agora $M = G/H$ um espaço homogêneo, onde G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado. Uma estrutura pseudo-complexa J em G/H é **invariante** pela ação de G se seus elementos são aplicações holomorfas em relação a J , isto é, se para todo $g \in G$ e todo $x \in G/H$ vale

$$dg_x \circ J_x = J_{g(x)} \circ dg_x.$$

Uma estrutura invariante J é completamente determinada pelo seu valor na origem $x_0 = 1.H$, pois se $x \in G/H$ é dado por $x = gx_0$, então $J_x = dg_{x_0} \circ J_{x_0} \circ (dg_{x_0})^{-1}$. Além do mais, a estrutura complexa J_{x_0} no espaço vetorial $T_{x_0}M$ é invariante pela representação de isotropia, no sentido em que $J_{x_0} = dh_{x_0} \circ J_{x_0} \circ (dh_{x_0})^{-1}$ se $h \in H$.

Reciprocamente, seja J_0 uma estrutura complexa no espaço vetorial $T_{x_0}M$, isto é, $J_0 : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$ satisfaz $J_0^2 = -Id$. Suponha que J_0 seja invariante pela representação de isotropia, o que significa que $J_0 = dh_{x_0} \circ J_0 \circ (dh_{x_0})^{-1}$ se $h \in H$. Então, a expressão

$$J_x = dg_{x_0} \circ J_0 \circ (dg_{x_0})^{-1}, \quad x = gx_0 \in G/H \quad (1.10)$$

define uma estrutura pseudo-complexa em G/H invariante por G . Isso porque a expressão para J_x em (1.10) não depende do elemento $g \in G$ tal que $x = gx_0$, pois J_0 é invariante pela representação de isotropia. Uma estrutura pseudo-complexa definida por esse procedimento é \mathcal{C}^∞ .

É possível mostrar que o tensor de Nijenhuis N_J se anula se, e só se, ele se anula na origem x_0 de G/H . Vale, portanto, o seguinte critério para que uma estrutura pseudo-complexa invariante seja complexa.

Proposição 1.17. *Uma estrutura pseudo-complexa no espaço homogêneo G/H é complexa se, e só se, o tensor de Nijenhuis N_J se anula na origem $x_0 = 1.H$ de G/H .*

Em suma tanto a construção das estruturas pseudo-complexas invariantes quanto o critério para decidir se elas são complexas ou não, se reduzem a uma análise do que acontece na origem do espaço homogêneo. Essa análise depende apenas da representação de isotropia e, em muitos exemplos, é feita via cálculos puramente algébricos.

Antes de apresentar alguns exemplos, convém fazer o seguinte comentário sobre o segundo membro de (1.9), que define o tensor de Nijenhuis. Ele envolve colchetes de Lie de campos de vetores que em princípio dependem dos valores dos campos nas vizinhanças de um ponto. No entanto, essa dependência é cancelada entre os quatro colchetes de tal forma que $N_J(X, Y)$ depende apenas dos valores de X e Y num ponto dado, isto é, N_J é de fato um tensor.

Existe, portanto, uma certa liberdade na escolha dos campos de vetores no cálculo do tensor de Nijenhuis. Num espaço homogêneo G/H uma escolha natural são os campos de vetores \tilde{X} , $X \in \mathfrak{g}$, já que esses campos geram o espaço tangente em cada ponto.

Exemplo 1.3. *Seja $G = SU(n)$ e $H = T \subset SU(n)$ o toro maximal formado pelas matrizes diagonais de $SU(n)$. O quociente $SU(n)/T$ se identifica à variedade de flags $(W_1 \subset \cdots \subset W_n)$ de subespaços de \mathbb{C}^n com $\dim W_j = j$.*

A álgebra de Lie \mathfrak{t} de T é dada pelas matrizes diagonais de traço 0 com entradas puramente imaginárias. A representação adjunta de T decompõe $\mathfrak{su}(n)$ em espaços invariantes como

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{j < k} V_{jk},$$

onde V_{jk} é o subespaço das matrizes em $\mathfrak{su}(n)$ com entradas não-nulas apenas nas posições j, k e k, j . O subespaço $\sum_{j < k} V_{jk}$ se identifica ao espaço tangente na origem de G/H .

Um subespaço V_{jk} tem dimensão 2 e é gerado por

$$A_{jk} = E_{jk} - E_{kj} \quad S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj}),$$

onde E_{jk} são as matrizes básicas. As representações adjuntas ρ_{jk} de T e de \mathfrak{t} em V_{jk} são irredutíveis. Em relação à base $\{A_{jk}, S_{jk}\}$, a representação de \mathfrak{t} é dada pela matriz

$$\rho_{jk}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{jk}(X) \\ \alpha_{jk}(X) & 0 \end{pmatrix}$$

se $X = \text{diag}\{ia_1, \dots, ia_n\}$, onde $\alpha_{jk}(X) = a_j - a_k$. Dessa expressão segue que se $(j, k) \neq (r, s)$, então a representação em V_{jk} não é equivalente à representação em V_{rs} .

Daí que, conforme foi discutido no exemplo acima, as estruturas complexas em V , invariante por T , são somas de estruturas complexas invariantes em cada V_{jk} .

Por outro lado, um cálculo simples com matrizes 2×2 mostra que em cada V_{jk} existem apenas duas estruturas complexas invariantes, que são dadas por $\pm J_{jk}$, onde em relação à base

$$J_{jk}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, as estruturas complexas $Ad(T)$ -invariantes em V são somas diretas de transformações lineares da forma

$$J = \sum_{j < k} \delta_{jk} J_{jk}, \text{ com } \delta_{jk} = \pm 1.$$

A quantidade dessas estruturas complexas é finita e igual a 2^N , onde $N = \frac{n(n-1)}{2}$ é o número de subespaços V_{jk} .

O tensor de Nijenhuis na origem é uma aplicação bilinear anti-simétrica em V a valores em V . Para calculá-lo é melhor trabalhar no espaço $V_{\mathbb{C}}$ gerado por E_{jk} , $j \neq k$, que é o complexificado de V . Tanto J quanto N_J se complexificam a $V_{\mathbb{C}}$ de tal forma que se $j < k$, então

$$J_{jk} E_{jk} = i E_{jk} \quad J_{jk} E_{kj} = -i E_{kj}.$$

Portanto, se $j \neq k$ então J é dada por $J_{jk} E_{jk} = i \varepsilon_{jk} E_{jk}$, isto é, J é determinada pelos sinais $\varepsilon_{jk} = \pm 1$, $j \neq k$, com a restrição que $\varepsilon_{kj} = -\varepsilon_{jk}$. O tensor de Nijenhuis satisfaz $N_J(E_{jk}, E_{ks}) = 0$ se $[E_{jk}, E_{rs}] = 0$, isto é, se $\{j, k\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Por outro lado,

$$N_J(E_{jk}, E_{ks}) = i(\varepsilon_{js}(1 + \varepsilon_{jk}\varepsilon_{ks}) - \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ks})E_{js},$$

que não se anulam se, e só se, $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ks} \neq \varepsilon_{js}$. Por exemplo, se J é dado por $\varepsilon_{jk} = +1$ para $j < k$, então J é uma estrutura complexa integrável. Da mesma forma, se ω é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$, então a estrutura complexa dada por $\varepsilon_{jk} = +1$ se $\omega(j) < \omega(k)$ é integrável. É possível verificar que essas são as únicas integráveis.

A descrição das estruturas complexas em $SU(n)/T$, apresentada no exemplo anterior, se estende às chamadas variedades flag generalizadas complexas, que são dadas pelo quociente de um grupo compacto por seu toro maximal. Da mesma forma existem finitas estruturas integráveis, que estão em bijeção com as câmaras de Weyl na álgebra de Lie \mathfrak{t} do toro.

1.3 Grupos de Lie complexos

Um grupo de Lie complexo é um grupo cujo conjunto subjacente é uma variedade complexa e de tal forma que o produto é uma aplicação diferenciável e holomorfa em relação à estrutura complexa da variedade.

No entanto, olhando sob a perspectiva de que uma variedade complexa é uma variedade real com uma estrutura adicional, define-se um grupo de Lie complexo como sendo um grupo de Lie real munido de uma estrutura pseudo-complexa integrável tal que o produto é uma aplicação holomorfa.

Essa abordagem aos grupos complexos se encaixa nas discussões acima sobre estruturas pseudo-complexas e complexas invariantes em espaços homogêneos.

Para ver isso tome, em primeiro lugar, um grupo de Lie complexo G e seja J a estrutura complexa dada pela multiplicação por i em cada espaço tangente. Como o produto p é uma aplicação holomorfa, as translações à esquerda E_g e à direita D_g , $g \in G$, são também aplicações holomorfas. Isso significa que para quaisquer $g, h \in G$ valem $J_{gh} \circ d(E_g)_h = d(E_g)_h \circ J_h$ e $J_{hg} \circ d(D_g)_h = d(D_g)_h \circ J_h$. Em outras palavras, J é uma estrutura bi-invariante, isto é, invariante à esquerda e à direita.

Deve-se considerar então estruturas pseudo-complexas em G que são bi-invariantes. A bi-invariância se reflete na ação de $G \times G$ em G por $(g, h) = gxh^{-1}$. Essa ação é transitiva e o grupo de isotropia na identidade $1 \in G$ é a diagonal

$$\Delta_G = \{(g, g) \in G \times G : g \in G\}$$

de tal forma que G se identifica a $G \times G / \Delta_G$. A representação de isotropia $\rho : \Delta_G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ é dada pela adjunta $\rho(g, g) = \text{Ad}(g) = (dC_g)_1$.

Portanto, uma estrutura pseudo-complexa J bi-invariante em G é dada por uma estrutura complexa $J_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que comuta com as adjuntas:

$$J_1 \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(g) \circ J_1. \quad (1.11)$$

Em $g \in G$ a estrutura pseudo-complexa é dada por

$$J_g = d(E_g)_1 \circ J_1 \circ d(E_g)_1^{-1} = d(D_g)_1 \circ J_1 \circ d(D_g)_1^{-1}. \quad (1.12)$$

O próximo passo é olhar a integrabilidade dessas estruturas pseudo-complexas, isto é, o anulamento do tensor de Nijenhuis. Aqui, a situação se trivializa pois a bi-invariância implica automaticamente na integrabilidade da estrutura.

De fato, a comutatividade $J_1 \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(g) \circ J_1$, $g \in G$, aplicada a $g = e^{tX}$, $X \in \mathfrak{g}$, implica (derivando em relação a t) que

$$J_1 \circ \text{ad}(X) = \text{ad}(X) \circ J_1 \quad (1.13)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. O significado disso é que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie sobre o corpo dos complexos, no sentido em que se J_1 for interpretado como multiplicação por i , então a igualdade 1.13 diz que $i[X, Y] = [X, iY]$. Como, além do mais,

$$i[X, Y] = -i[Y, X] = -[Y, iX] = [iX, Y],$$

segue que \mathfrak{g} tem uma estrutura de espaço vetorial complexo de tal forma que o colchete $[\cdot, \cdot]$ é bilinear sobre \mathbb{C} .

Mantendo a interpretação de que J_1 é a multiplicação por i em \mathfrak{g} , o tensor de Nijenhuis na identidade se torna

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J_1[X, Y] - [J_1X, Y] - [X, J_1Y] - J_1[J_1X, J_1Y] \\ &= i[X, Y] - [iX, Y] - [X, iY] - i[iX, iY], \end{aligned}$$

com $X, Y \in \mathfrak{g}$. O último termo dessa igualdade se anula na origem, isto é, $(N_J)_1 = 0$ na origem. Pela invariância (por exemplo, à esquerda de J) se conclui que N_J é identicamente nulo.

Esses comentários mostram a seguinte caracterização dos grupos complexos.

Teorema 1.7. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e suponha que exista uma aplicação $J_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ com $J_1^2 = -Id$ tal que $J_1 \circ Ad(g) = Ad(g) \circ J_1$, para todo $g \in G$. Então, existe uma estrutura complexa em G que o torna um grupo de Lie complexo. Nesse caso, \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie complexa.*

Além do mais, se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie complexa e G é conexo, então G é um grupo complexo.

Exemplos clássicos de grupos de Lie complexos são dados pelos grupos de matrizes $Gl(n, \mathbb{C})$, $Sl(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ e $SO(n, \mathbb{C})$, cujas álgebras de Lie são complexas.

2 Classes de M -equivalência

Neste capítulo vamos apresentar as classes de M -equivalência. A partir desse conceito, obtemos uma condição necessária para que uma variedade flag real admita estruturas pseudo-complexas invariantes. Este capítulo foi baseado em (PATRAO; MARTIN, 2015).

Classes de M -equivalência

Seja $M = \text{cent}_K(\mathfrak{a}) = \{g \in K : \text{Ad}(g)|_{\mathfrak{a}} = \text{Id}_{\mathfrak{a}}\}$ o centralizador de \mathfrak{a} em K . O grupo M está contido em $K_{\Theta} = M(K_{\Theta})_0$ e deixa invariante cada espaço de raiz \mathfrak{g}_{α} . Portanto, faz sentido falarmos em representação do grupo M em \mathfrak{g}_{α} .

Nesse parte do trabalho, determinaremos os pares de subespaços de raízes \mathfrak{g}_{α} e \mathfrak{g}_{β} cujas representações de M sobre esses espaços são equivalentes.

Definição 2.1. *Duas raízes α e β são ditas M -equivalentes, que denotaremos por $\alpha \sim_M \beta$, se as representações de M sobre os espaços de raízes \mathfrak{g}_{α} e \mathfrak{g}_{β} são equivalentes.*

Se \mathfrak{g} é uma forma real normal de uma álgebra de Lie semissimples complexa, então M é o subgrupo abeliano discreto

$$M = \{\langle m_{\gamma} = \exp(\pi i H_{\gamma}^{\vee}) \rangle : \gamma \in \Pi\},$$

onde $H_{\gamma}^{\vee} = \frac{H_{\gamma}}{\langle \gamma, \gamma \rangle}$ é uma co-raiz associada a γ e H_{γ} é definido por $\gamma(H) = \langle H_{\gamma}, H \rangle$, $H \in \mathfrak{a}$.

Como M tem a forma descrita acima, obtemos uma condição necessária e suficiente para que duas raízes sejam M -equivalentes.

Proposição 2.1. *As raízes α e β são M -equivalentes se, e somente se, para toda raiz $\gamma \in \Pi$ temos*

$$\frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \equiv_2 \frac{2\langle \gamma, \beta \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}.$$

Demonstração. Seja γ uma raiz e $m_{\gamma} = \exp(\pi i H_{\gamma}^{\vee})$. Se $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\beta}$, então

$$\begin{aligned} \text{Ad}(m_{\gamma})X &= e^{\text{ad}(\pi i H_{\gamma}^{\vee})}X = e^{\pi i \alpha(H_{\gamma}^{\vee})}X, \\ \text{Ad}(m_{\gamma})Y &= e^{\text{ad}(\pi i H_{\gamma}^{\vee})}Y = e^{\pi i \beta(H_{\gamma}^{\vee})}Y. \end{aligned}$$

Segue que $\alpha \sim_M \beta$ se, e somente se, para toda raiz γ , existe um isomorfismo linear $P : \mathfrak{g}_{\alpha} \rightarrow \mathfrak{g}_{\beta}$, com $PX = Y$ e $\text{Ad}(m_{\gamma}) \circ PX = P \circ \text{Ad}(m_{\gamma})X$. Isto é, $e^{\pi i \alpha(H_{\gamma}^{\vee})} = e^{\pi i \beta(H_{\gamma}^{\vee})}$, que é equivalente a

$$\frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} = \frac{2\langle \gamma, \beta \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

□

Como consequência desse resultado, obtemos uma condição necessária para que duas raízes sejam equivalentes.

Corolário 2.1. *Se $\alpha \sim_M \beta$, então $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.*

Demonstração. Suponha que $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$. Temos então as seguintes possibilidades para os números de Killing:

1. Se α e β têm o mesmo comprimento e o ângulo entre eles é 60° ou 120° , então

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \pm 1,$$

mostrando que α e β não são M -equivalentes.

2. O ângulo entre α e β é 45° ou 135° . Se α é uma raiz longa, então

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \pm 1$$

e α e β não são M -equivalentes. Caso β seja uma raiz longa, intercalamos os papéis de α e β e obtemos o mesmo resultado.

3. Se o ângulo entre α e β é 30° ou 150° , então

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \pm 1, \pm 3,$$

mostrando que α e β não são M -equivalentes.

□

Com esses resultados, podemos encontrar as classes de M -equivalências para cada diagrama de Dynkin.

Observações:

1. $\alpha \sim_M (-\alpha)$.

De fato, para toda raiz $\gamma \in \Pi$, temos

$$\frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \equiv_2 \frac{2\langle \gamma, -\alpha \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}.$$

Da proposição 2.1, concluímos que $\alpha \sim_M (-\alpha)$. Portanto, reduzimos o nosso trabalho a checar apenas a classe de M -equivalência de raízes positivas.

2. $\alpha \sim_M \beta \Leftrightarrow w\alpha \sim_M w\beta$, onde w é um elemento do grupo de Weyl \mathcal{W} .

Para toda raiz $\alpha, \beta \in \Pi$ e todo elemento $w \in \mathcal{W}$, temos que $\langle w\alpha, w\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$. Isto é, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é invariante pelos elementos do grupo de Weyl. Pela proposição 2.1, obtemos $\alpha \sim_M \beta \Leftrightarrow w\alpha \sim_M w\beta$. Sendo assim, é necessário encontrar a classe de M -equivalência de uma única raiz, no caso em que o diagrama de Dynkin só contém ligações simples. Se o diagrama de Dynkin de uma álgebra tiver ligações múltiplas, devemos encontrar a classe de M -equivalência de uma raiz curta e de uma raiz longa. As outras classes podem ser obtidas pelos elementos do grupo de Weyl \mathcal{W} .

Vejamos agora as classes de M -equivalência para cada diagrama de Dynkin.

2.1 Diagrama $A_l, l \geq 1$

Usaremos a representação canônica de A_l onde as raízes positivas são $\lambda_i - \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l + 1$. Temos dois casos a considerar:

$A_l, l \neq 3$

As classes de M -equivalência de raízes positivas são conjuntos unitários, isto é, duas raízes positivas distintas não são M -equivalentes.

Como o grupo de Weyl é transitivo no conjunto de raízes, basta fixar uma raiz α e checar que qualquer raiz $\beta \neq \alpha$ não é M -equivalente a α .

Suponha que $l > 3$ e tome $\alpha_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$. As raízes positivas ortogonais a α são $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ com $3 \leq i < j$. Pelo Corolário 2.1 é suficiente verificar que as raízes ortogonais a α não são M -equivalentes a α .

1. Se $j < l + 1$ então $\langle \gamma, \alpha_{ij} \rangle \neq 0$, mas $\langle \gamma, \alpha_{12} \rangle = 0$, onde $\gamma = \lambda_j - \lambda_{j+1}$. Temos

$$\frac{2\langle \gamma, \alpha_{12} \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{2\langle \gamma, \alpha_{ij} \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} = \pm 1.$$

Pela Proposição 2.1, obtemos que $\lambda_1 - \lambda_2$ não é M -equivalente a $\lambda_i - \lambda_j$, $3 \leq i < j$.

2. Para $i > 3$ temos $\langle \gamma, \lambda_i \pm \lambda_j \rangle \neq 0$ e $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$, onde $\gamma = \lambda_{i-1} - \lambda_i$. Novamente, concluímos que $\lambda_1 - \lambda_2$ não é M -equivalente a $\lambda_3 - \lambda_j$, $3 < j$.

3. Para $i = 3$ e $j = l + 1$ tem-se que $\lambda_4 - \lambda_{l+1}$ é uma raiz ortogonal a $\lambda_1 - \lambda_2$, mas não é ortogonal a $\lambda_3 - \lambda_{l+1}$.

A_3

As classes de M -equivalência de raízes positivas são:

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}, \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4\} \text{ e } \{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3\}.$$

Nesse caso, a única raiz ortogonal a $\alpha_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ é $\alpha_{34} = \lambda_3 - \lambda_4$ e portanto, pelo Corolário 2.1, $\lambda_3 - \lambda_4$ é a única candidata a ser M -equivalente a $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$. Para ver que de fato $\lambda_1 - \lambda_2 \sim_M \lambda_3 - \lambda_4$, note que a raiz $\gamma = \lambda_i - \lambda_j$, com $(i, j) \neq (1, 2)$ ou $(3, 4)$, não é ortogonal a $\lambda_1 - \lambda_2$ nem a $\lambda_3 - \lambda_4$. De modo que os números de Killing, $\frac{2\langle \gamma, \alpha_{12} \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}$ e $\frac{2\langle \gamma, \alpha_{34} \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}$, são ± 1 , isto é, a condição da Proposição 2.1 é satisfeita, mostrando que $\lambda_3 - \lambda_4 \sim_M \lambda_1 - \lambda_2$. Aplicando o grupo de Weyl (grupo de permutação), vemos que as classes de M -equivalência são como indicadas.

2.2 Diagrama de B_l , $l \geq 2$

Usaremos a representação canônica de $B_l = \mathfrak{so}(l, l+1)$, onde as raízes positivas são $\lambda_i \pm \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l$ e λ_i , $1 \leq i \leq l$. Essas são as raízes longas e curtas, respectivamente.

As classes de M -equivalência dependem do posto l , de acordo com os seguintes casos:

 B_l , $l \geq 5$

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são

$$\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\} \text{ e } \{\lambda_i\}, \quad 1 \leq i < j \leq l.$$

Nós encontraremos as classes de M -equivalência de uma raiz longa e de uma raiz curta. Para obtermos as classes de M -equivalência restantes, usaremos os elementos do grupo de Weyl.

Tomamos a raiz longa $\lambda_1 - \lambda_2$. Devemos checar a M -equivalência somente para as raízes ortogonais a ela, isto é, $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_i \pm \lambda_j$ e λ_i com $3 \leq i < j$. As raízes λ_i , $3 \leq i$ não são M -equivalentes a $\lambda_1 - \lambda_2$. De fato, $\lambda_i \pm \lambda_{i+1}$ é uma raiz pois $l \geq 5$. Agora, $\langle \lambda_i, \lambda_i \pm \lambda_{i+1} \rangle \neq 0$ e o número de Killing $\langle (\lambda_i \pm \lambda_{i+1})^\vee, \lambda_i \rangle = \pm 1$ porque λ_i é uma raiz curta. Como $\langle \lambda_i, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$, a condição da Proposição 2.1 é violada por $\gamma = \lambda_i \pm \lambda_{i+1}$. O mesmo argumento usado no caso A_l mostra que $\lambda_i \pm \lambda_j$, $3 \leq i < j$, não é M -equivalente a $\lambda_1 - \lambda_2$ (quando $l \geq 5$). Por outro lado, $\lambda_1 - \lambda_2 \sim_M \lambda_1 + \lambda_2$ porque para cada raiz γ vale $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = \pm \langle \gamma, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle$. Segue que $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$ é uma classe de M -equivalência. Para concluir este caso, notamos que $w \in \mathcal{W}$ age sobre λ_i por uma permutação seguida por uma mudança de sinal, isto é, $w\lambda_i = \pm \lambda_j$, para algum índice j .

Portanto, $\lambda_i - \lambda_j \sim_M \lambda_i + \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l$, e os conjuntos $\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\}$ são as únicas classes de M -equivalência contendo uma raiz longa.

Pelo que foi descrito anteriormente, nenhuma raiz longa é M -equivalente a uma raiz curta λ_i . Finalmente, duas raízes curtas λ_i e λ_j , $i \neq j$, não são M -equivalentes. Por exemplo, $\gamma = \lambda_i + \lambda_k$, $k \neq i, j$, satisfaz $\langle \gamma^\vee, \lambda_i \rangle = 1$ enquanto $\langle \gamma^\vee, \lambda_j \rangle = 0$.

B_4

As classes de M -equivalência das raízes positivas são

$$\{\lambda_i\}, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\},$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\},$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}.$$

A diferença do caso geral é que $\lambda_3 - \lambda_4 \sim_M \lambda_1 - \lambda_2$. De fato, se λ_i é uma raiz curta, então $\langle \lambda_i^\vee, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle$ e $\langle \lambda_i^\vee, \lambda_3 - \lambda_4 \rangle$ são iguais a 0 ou a 2. Também, se γ é uma raiz longa diferente de $\lambda_1 - \lambda_2$ e $\lambda_3 - \lambda_4$, então $\langle \gamma^\vee, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle$ e $\langle \gamma^\vee, \lambda_3 - \lambda_4 \rangle$ são iguais a ± 1 .

Novamente, o mesmo argumento mostra que uma raiz longa e uma raiz curta, assim como duas raízes curtas, não são M -equivalentes.

B_3

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3\}, \quad \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2\} \quad \text{e} \quad \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\}.$$

Aqui, $\lambda_3 \sim_M \lambda_1 - \lambda_2$. O ponto é que se $\gamma \neq \lambda_1 - \lambda_2$ é uma raiz longa, então $\langle \gamma^\vee, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = \pm 1$ e, como γ não pode ser ortogonal a λ_3 , temos que $\langle \gamma^\vee, \lambda_3 \rangle = \pm 1$. Por outro lado, se γ é curta, então $\langle \gamma^\vee, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle$ e $\langle \gamma^\vee, \lambda_3 \rangle$ são pares.

B_2

As classes de M -equivalência das raízes positivas longas e curtas são

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\} \quad \text{e} \quad \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

respectivamente.

2.3 Diagrama C_l , $l \geq 3$

Na realização canônica de $C_l = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ as raízes positivas são escritas como $\lambda_i \pm \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l$ e $2\lambda_i$, $1 \leq i \leq l$. Essas são as raízes curtas e longas, respectivamente.

Aqui, cada duas raízes longas $2\lambda_i$ e $2\lambda_j$ são M -equivalentes. De fato, para cada raiz γ o número de Killing $\langle \gamma^\vee, 2\lambda_i \rangle$ é par (0 ou ± 2). De fato, se γ é uma raiz curta, então $\langle \gamma^\vee, 2\lambda_i \rangle$ é ou 0 (raízes ortogonais) ou ± 2 (número de Killing entre uma raiz curta e uma raiz longa). Por outro lado, duas raízes longas são ou iguais ou ortogonais.

Como nos diagramas anteriores, as classes de M -equivalência crescem para postos menores. Para C_l , a exceção é quando $l = 4$.

C_l , $l \neq 4$

As classes de M -equivalência são

$$\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\} \text{ e } \{2\lambda_1 \cdots, 2\lambda_l\}.$$

As raízes ortogonais à raiz curta $\lambda_1 - \lambda_2$ são $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_i \pm \lambda_j$ e $2\lambda_i$ com $3 \leq i < j$. Como no caso B_l (com $l \geq 5$), as raízes $\lambda_i \pm \lambda_j$, $3 \leq i < j$, não são M -equivalentes a $\lambda_1 - \lambda_2$. Por outro lado, se $3 \leq i$, então $\gamma = \lambda_1 - \lambda_j$, com $j \neq i$, viola o critério da Proposição 2.1 para a M -equivalência entre $\lambda_1 - \lambda_2$ e $2\lambda_i$. De fato, $\langle \gamma^\vee, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = \pm 1$ (raízes não-ortogonais de mesmo comprimento) e $\langle \gamma^\vee, 2\lambda_i \rangle = 0$.

Como as raízes longas são equivalentes a cada outra, segue que $\lambda_1 - \lambda_2$ não é M -equivalente a cada raiz longa. Portanto, obtemos as classes afirmadas acima.

Esses argumentos continuam verdadeiros se $l = 3$. (Diferentemente de B_3 , em C_3 raízes longas não são M -equivalentes a raízes curtas.)

C_4

As classes de M -equivalência são

$$\{2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3, 2\lambda_4\},$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\},$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}.$$

Isto é visto como em B_4 , onde $\lambda_3 - \lambda_4 \sim_M \lambda_1 - \lambda_2$.

2.4 Diagrama D_l , $l \geq 4$

Na realização canônica de $D_l = \mathfrak{so}(l, l)$ as raízes positivas são escritas como $\lambda_i \pm \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq l$.

D_l , $l > 4$

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são

$$\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\}, \quad 1 \leq i < j \leq l.$$

Isto é verificado por argumentos similares ao caso B_l , simplificado pelo fato que as raízes têm o mesmo comprimento.

Primeiro, a única raiz M -equivalente a $\lambda_1 - \lambda_2$ é $\lambda_1 + \lambda_2$. Com efeito, as raízes ortogonais a $\lambda_1 - \lambda_2$ são $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_i \pm \lambda_j$, $3 \leq i < j$. A raiz $\lambda_i \pm \lambda_j$, com $3 \leq i < j$, não é M -equivalente a $\lambda_1 - \lambda_2$ pelas seguintes razões.

1. Se $j < l$ e $\gamma = \lambda_j - \lambda_{j+1}$, então $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$ e $\langle \gamma, \lambda_i \pm \lambda_j \rangle \neq 0$ o que implica $\langle \gamma^\vee, \lambda_i \pm \lambda_j \rangle = \pm 1$. Assim, pela Proposição 2.1, $\lambda_1 - \lambda_2$ não é M -equivalente a $\lambda_i \pm \lambda_j$.
2. Se $i > 3$ e $\gamma = \lambda_{i-1} - \lambda_i$, então $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$ e $\langle \gamma^\vee, \lambda_i \pm \lambda_j \rangle = \pm 1$.
3. Como $l > 4$, $\lambda_4 - \lambda_l$ é uma raiz satisfazendo $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$ e $\langle \gamma^\vee, \lambda_3 \pm \lambda_l \rangle = \pm 1$.

Finalmente, $\lambda_1 - \lambda_2 \sim_M \lambda_1 + \lambda_2$, pois $\langle \gamma, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle = 0$ se, e somente se, $\langle \gamma, \lambda_1 + \lambda_2 \rangle = 0$ para cada raiz γ . Além disso, se γ não é ortogonal a ambas as raízes, então os números de Killing são ± 1 , uma vez que as raízes têm o mesmo comprimento.

Como o grupo de Weyl é transitivo sobre o conjunto de raízes, obtemos as classes de equivalência afirmadas acima.

D_4

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}, \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\} \text{ e } \{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}.$$

Neste caso, além de $\lambda_1 + \lambda_2$, as raízes $\lambda_3 - \lambda_4$ e $\lambda_3 + \lambda_4$ são M -equivalentes a $\lambda_1 - \lambda_2$ (ver a discussão para B_4). Portanto, uma aplicação do grupo de Weyl produz as classes afirmadas.

2.5 Diagrama G_2

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são os pares

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2\}, \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2\} \text{ e } \{\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\},$$

onde α_1 e α_2 são as raízes simples, com α_1 a raiz longa.

A razão disto é que esses são os únicos pares de raízes positivas ortogonais a cada outra. Além disso, se duas raízes não são ortogonais, então seus números de Killing são ímpares (± 1 ou ± 3).

2.6 Diagramas E_6 , E_7 e E_8

Para esses diagramas as classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são conjuntos unitários.

Como esses diagramas possuem ligações simples, é suficiente encontrar uma raiz positiva que não é M -equivalente a outra raiz positiva.

Em cada um dos diagramas E_6 , E_7 e E_8 escolhamos a raiz de altura máxima μ . Para checar que $\{\mu\}$ é uma classe de M -equivalência provamos:

- **Afirmção:** Para todo $\beta > 0$ com $\langle \mu, \beta \rangle = 0$, existe $\gamma \neq \beta$ tal que $\langle \mu, \gamma \rangle = 0$ e $\langle \beta, \gamma \rangle \neq 0$.

Da afirmação obtemos $\langle \gamma^\vee, \mu \rangle = 0$ e $\langle \gamma^\vee, \beta \rangle$ é ímpar, pois os diagramas possuem somente ligações simples. Portanto, pela Proposição 2.1, nenhuma raiz β ortogonal a μ é M -equivalente a μ . Pelo Corolário 2.1, concluímos que $\{\mu\}$ é uma classe de M -equivalência.

Agora, as raízes ortogonais à raiz de altura máxima μ têm a seguinte descrição simples: denote por $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ o sistema simples de raízes e $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ os pesos fundamentais, definido por

$$\langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{ij}.$$

É conhecido que nos diagramas E_6 , E_7 e E_8 a raiz de altura máxima $\mu = \omega_i$ para algum peso fundamental. (A fórmula para μ em termos dos pesos fundamentais pode ser obtida pelos diagramas de Weyl afim. A raiz extra é precisamente $-\mu$). Seja $\alpha = b_1\alpha_1 + \dots + b_l\alpha_l$, $b_i \geq 0$, uma raiz positiva. Como $\mu = \omega_i$, temos, por definição

$$\langle \alpha, \mu \rangle = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2} a_i b_i.$$

Desse modo, $\langle \alpha, \mu \rangle = 0$ se, e somente se, $a_i b_i = 0$. Portanto, as raízes ortogonais a μ são aquelas geradas por $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$. Este conjunto de raízes é um sistema de raiz cujo diagrama de Dynkin é o subdiagrama de Σ dado por $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$. Um olhar para os diagramas de Dynkin afim fornece os diagramas $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$, ou seja,

- $\Sigma \setminus \{\alpha_i\} = A_5$ se $\Sigma = E_6$.
- $\Sigma \setminus \{\alpha_i\} = D_6$ se $\Sigma = E_7$.
- $\Sigma \setminus \{\alpha_i\} = E_7$ se $\Sigma = E_8$.

Agora, é claro que em cada um dos sistemas de raízes gerados por $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$ (A_5 , D_6 ou E_7), a conclusão da afirmação é válida, isto é, dado β existe γ com $\langle \beta, \gamma \rangle \neq 0$. Isto conclui a prova que as classes de M -equivalência sobre as raízes positivas são conjuntos unitários.

2.7 Diagrama F_4

As 24 raízes positivas de F_4 decompõem-se nas seguintes classes de M -equivalência:

- 12 unitárias, $\{\alpha\}$ com α percorrendo o conjunto das raízes curtas.
- 3 conjuntos de raízes longas $\{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4\}$, $\{\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4\}$ e $\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4\}$.

Sejam $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ os pesos fundamentais.

O peso fundamental ω_4 é também a raiz positiva curta:

$$\omega_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

Verificaremos a classe de M -equivalência de ω_4 pelo mesmo método usado nos casos E'_i s. O conjunto das raízes ortogonais ao peso fundamental ω_4 é gerado por $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, que é um diagrama de Dynkin B_3 . Agora, se β é uma raiz de B_3 , então existe uma raiz γ (em B_3) tal que $\langle \gamma^\vee, \beta \rangle$ é ímpar. Segue, pela Proposição 2.1 e seu Corolário 2.1, que ω_4 é uma classe de M -equivalência. Isto resulta nas classes de raízes curtas.

Para as raízes longas, primeiramente relembremos que elas formam o sistema de raízes D_4 . Agora, se γ é uma raiz curta e α é uma raiz longa, então $\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle$ é par. Portanto, para checar se $\alpha \sim_M \beta$, para duas raízes longas α e β , é suficiente testar a condição da Proposição 2.1 quando γ é também uma raiz longa. Isto significa que duas raízes longas são M -equivalentes se, e somente se, elas são equivalentes como raízes de D_4 . Como nenhuma raiz curta é M -equivalente a uma raiz longa, concluímos que as classes de D_4 são também classes de M -equivalência em F_4 . Esses são os três conjuntos com quatro raízes ortogonais como afirmado. (Para obter esses conjuntos, começamos com a raiz de altura máxima $\omega_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. Então, o primeiro conjunto é ω_1 junto com as raízes longas ortogonais a ele. Os próximos dois conjuntos são obtidos aplicando a reflexão r_{α_1} e depois r_{α_2}).

3 Estruturas pseudo-complexas invariantes em variedades flags reais

Neste capítulo, verificaremos a existência de estruturas pseudo-complexas invariantes nas variedades flag reais. Percebemos que, ao contrário do caso complexo, existem variedades flag reais que não admitem estruturas pseudo-complexas invariantes.

3.1 Estruturas pseudo-complexas M -invariantes

Seja H_Θ um elemento do abeliano maximal tal que a subálgebra parabólica, $\mathfrak{p}_\Theta = \sum_{\lambda \geq 0} \mathfrak{g}_\lambda$, é a soma dos auto-espacos \mathfrak{g}_λ , de $\text{ad}(H_\Theta)$, associados a auto-valores λ não negativos. Então, o nilradical de \mathfrak{p}_Θ é

$$\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{g}_\lambda = \sum_{\alpha(H_\Theta) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

sendo que $\alpha(H_\Theta) > 0$ se, e somente se, $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$. O centralizador de H_Θ é dado por $\mathfrak{z}_\Theta = \sum_{\lambda=0} \mathfrak{g}_\lambda$ enquanto que a subálgebra \mathfrak{n}_Θ^- complementa $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{z}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$ em \mathfrak{g} , isto é, vale

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{z}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+.$$

Em relação a álgebra compacta \mathfrak{k} essa decomposição tem o seguinte significado: $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}_\Theta$ enquanto que o complementar de \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{g} é dado por $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{n}_\Theta^- + \mathfrak{n}_\Theta^+)$. (Por exemplo, no caso das Grassmannianas, \mathfrak{z}_Θ é a parte diagonal em blocos, \mathfrak{n}_Θ^+ é a parte triangular superior (em blocos) e \mathfrak{n}_Θ^- a triangular inferior). O espaço tangente a \mathbb{F}_Θ na origem se identifica tanto a \mathfrak{m}_Θ quanto a \mathfrak{n}_Θ^- (o primeiro pela ação de K e o segundo pela ação de G).

Segue abaixo uma condição necessária e suficiente para que uma variedade flag admita estruturas pseudo-complexas M -invariantes.

Proposição 3.1. *Se uma variedade Flag \mathbb{F}_Θ , de uma forma real normal, admite uma estrutura pseudo-complexa invariante por K , então toda classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ (ou, o que é a mesma coisa em $\Pi^- \setminus \langle \Theta \rangle$) tem um número par de elementos.*

Demonstração. De fato, se $\alpha \in \Pi^- \setminus \langle \Theta \rangle$, então $\mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{n}_\Theta^-$ e $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (pois \mathfrak{g} é uma forma real normal). O subespaço $J\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_\Theta^-$ é diferente de \mathfrak{g}_α pois $J^2 = -Id$. Pelo Lema 4.8, como J é M -invariante, temos que $J\mathfrak{g}_\alpha$ é M -invariante e a representação de M em $J\mathfrak{g}_\alpha$ é equivalente à representação em \mathfrak{g}_α . Segue daí que $J\mathfrak{g}_\alpha$ está contido no subespaço $V_\alpha = \sum_{\beta \sim_M \alpha} \mathfrak{g}_\beta$. Aplicando o mesmo raciocínio às raízes β que são M -equivalentes a α ,

conclui-se que $JV_\alpha = V_\alpha$. Como $J^2 = -Id$, segue que $\dim V_\alpha$ é par e, portanto, o número de raízes M -equivalentes a α é par, pois cada espaço de raízes tem dimensão um. \square

Essa condição não é suficiente para que exista estrutura complexa invariante por K_Θ . Entretanto, veremos no resultado abaixo que essa condição é necessária e suficiente para construir estruturas complexas M -invariantes.

Proposição 3.2. *Uma variedade Flag \mathbb{F}_Θ , de uma forma real normal, admite estruturas M -invariantes se, e somente se, toda classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ tem um número par de elementos. As estruturas complexas M -invariantes são construídas por soma direta de estruturas complexas em cada $V_{[\alpha]}$, com $[\alpha]$ percorrendo as classes de M -equivalência. Essas estruturas são parametrizadas pelo quociente $Gl(d, \mathbb{R})/Gl(d/2, \mathbb{C})$, onde $d = \dim V_{[\alpha]}$.*

Demonstração. De fato, tome uma classe de M -equivalência $[\alpha]$. Então, o subespaço $V_{[\alpha]} = \sum_{\beta \sim_M \alpha} \mathfrak{g}_\beta$ tem dimensão par pois numa forma real normal os subespaços de raízes têm dimensão um. Além do mais, se $m \in M$ e $X \in \mathfrak{g}_\beta$, então $\text{Ad}(m)X = \pm X$ com o mesmo sinal para toda raiz $\beta \sim_M \alpha$. Isso implica que a restrição de $\text{Ad}(m)$ a $V_{[\alpha]}$ é Id ou $-Id$. Daí, que toda estrutura complexa em $V_{[\alpha]}$ é M -invariante. Dessa forma, as estruturas complexas M -invariantes são construídas por soma direta de estruturas complexas em cada $V_{[\alpha]}$, com $[\alpha]$ percorrendo as classes de M -equivalência. Em cada $V_{[\alpha]}$ existem infinitas estruturas complexas. Elas são parametrizadas pelo quociente $Gl(d, \mathbb{R})/Gl(d/2, \mathbb{C})$, onde $d = \dim V_{[\alpha]}$. Isso porque se J é uma estrutura complexa em $V_{[\alpha]}$, então a matriz de J em alguma base é da forma

$$\begin{pmatrix} 0_{d/2} & -1 \\ 1 & 0_{d/2} \end{pmatrix}.$$

Daí que as conjugadas gJg^{-1} , $g \in Gl(d, \mathbb{R})$, dão todas as estruturas complexas. Por outro lado, $gJg^{-1} = J$ se, e só se, $g \in Gl(d/2, \mathbb{C})$. \square

Exemplo 3.1. *Se $\dim V_{[\alpha]} = 2$ e $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $V_{[\alpha]}$, então se define uma estrutura complexa $J = J_{\{v_1, v_2\}}$ por $Jv_1 = v_2$ e $Jv_2 = -v_1$, isto é, J é a transformação linear que na base $\{v_1, v_2\}$ tem matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como o conjunto das bases está em bijeção com $Gl(2, \mathbb{R})$, segue que cada $g \in Gl(2, \mathbb{R})$ define uma estrutura complexa no espaço de dimensão 2. Se $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = -bv_1 + av_2$, temos $J_{\{w_1, w_2\}} = J_{\{v_1, v_2\}}$ e daí que se $g \in Gl(d, \mathbb{R})$ e

$$h = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in Gl(1, \mathbb{C}),$$

então g e gh definem a mesma estrutura complexa no espaço de dimensão 2. Isto é, as estruturas complexas no espaço de dimensão 2 estão parametrizadas por $Gl(2, \mathbb{R})/Gl(1, \mathbb{C})$.

Observação: $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}) / \mathrm{Gl}(d/2, \mathbb{C})$ tem duas componentes conexas, pois $\mathrm{Gl}(d/2, \mathbb{C})$ é conexo. No caso em que $d = 2$, $\mathrm{Gl}^+(2, \mathbb{R}) / \mathrm{Gl}(1, \mathbb{C}) = \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2) \approx \mathbb{R}^2$. Por isso o conjunto das estruturas complexas num espaço de dimensão 2 é a união disjunta de duas cópias de \mathbb{R}^2 .

Observação: Como nos flags maximais $K_\Theta = M$, a condição necessária da Proposição 3.1 também é suficiente para obtermos estruturas complexas K_Θ -invariantes nos flags maximais.

Definição 3.1. *Seja \mathbb{F}_Θ uma variedade flag real, associada a uma forma real normal de uma álgebra de Lie semissimples complexa. A dimensão da variedade flag \mathbb{F}_Θ pode ser vista como o número de elementos do conjunto $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$, ou equivalentemente, como o número de elementos do conjunto $\Pi^- \setminus \langle \Theta \rangle$.*

Vejamos agora quais os flags admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes.

3.2 Flags de A_l , $l \geq 1$

$$A_l, l \geq 1 \quad \circ_1 - \circ_2 - \cdots - \circ_{l-1} - \circ_l$$

Assim como no caso das classes de M -equivalência, iremos considerar dois casos:

A_l , $l \neq 3$

Para A_l , $l \neq 3$, temos que as classes de M -equivalência de raízes positivas são conjuntos unitários, isto é, contém apenas um elemento. Sendo assim, toda classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ tem um número ímpar de elementos e, pela Proposição 3.1, os flags de A_l , $l \neq 3$, não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes.

Em suma,

Proposição 3.3. *Os flags de A_l , $l \neq 3$, não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes.*

3.2.1 Flags de A_3

A álgebra A_3 possui sete flags a serem considerados: o flag maximal, os três flags minimais (Grassmannianas) e os flags $\mathbb{F}(1, 2)$, $\mathbb{F}(1, 3)$ e $\mathbb{F}(2, 3)$, descritos por $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3\}$ e $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2\}$, respectivamente. Mostraremos o resultado abaixo usando a condição necessária dada pela Proposição 3.1 e a Proposição 4.17.

Proposição 3.4. *O único flag da álgebra A_3 que admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes é o flag maximal.*

1. O flag maximal

As classes de M -equivalências em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ têm exatamente dois elementos. Pela Proposição 3.1, \mathbb{F}_\emptyset admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes e essas estruturas são parametrizadas por $\text{Gl}(2, \mathbb{R}) / \text{Gl}(1, \mathbb{C})$.

2. As Grassmannianas

Os flags minimais $\mathbb{F}(1) = Gr_14$, $\mathbb{F}(2) = Gr_24$ e $\mathbb{F}(3) = Gr_34$, descritos por $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$ e $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}$, respectivamente, são Grassmannianas reais. Os flags $\mathbb{F}(1)$, $\mathbb{F}(3)$ têm dimensão ímpar, logo não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Falta analisar o flag $\mathbb{F}(2) = Gr_24$ que é orientável, tem dimensão par e admite estruturas M -invariantes. Para isso, vamos olhar a representação de isotropia do espaço tangente a $\mathbb{F}(2)$ na origem, descrita em (PATRAO; MARTIN, 2015). Temos que o espaço tangente ao flag $\mathbb{F}(2)$ na origem, $T_{b_\Theta} \mathbb{F}(2)$, é decomposto em duas componentes K_Θ -irredutíveis, não equivalentes e bidimensionais. Essas componentes são geradas por $\langle E_{13} + E_{24}, E_{23} - E_{14} \rangle$ e $\langle E_{13} - E_{24}, E_{14} + E_{23} \rangle$ (E_{ij} é a matriz que tem o número 1 na entrada ij e zero nas demais). Uma estrutura invariante por $(K_\Theta)_0$ deve satisfazer, por exemplo, $J(E_{13} + E_{24}) = \lambda(E_{23} - E_{14})$. Entretanto, essa estrutura não é invariante pelo grupo M , uma vez que as raízes $\lambda_1 - \lambda_3$ e $\lambda_2 - \lambda_4$ não são equivalentes às raízes $\lambda_2 - \lambda_3$ e $\lambda_1 - \lambda_4$. Assim, existe $m \in M$ tal que $Ad(m)(E_{13} + E_{24}) = \pm(E_{23} - E_{14})$ e $Ad(m)(E_{23} - E_{14}) = \mp(E_{13} + E_{24})$. Portanto, o flag $\mathbb{F}(2)$ não admite estruturas K -invariantes.

No capítulo 4, demonstraremos que as Grassmannianas reais não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes usando teoria de geometria simplética.

3. $\mathbb{F}(1, 2)$, $\mathbb{F}(1, 3)$ e $\mathbb{F}(2, 3)$

Nesses casos, Θ tem uma única raiz α . Seja β a raiz positiva M -equivalente a α . Logo, $\{\beta\}$ forma uma classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ e, pela Proposição 3.1, $\mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ não admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes.

3.3 Flags de $B_l = \mathfrak{so}(l, l + 1)$, $l \geq 2$

$$B_l, l \geq 2 \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{l-1} / \alpha_l \end{array}$$

Para a análise desses flags deve-se separar alguns casos de dimensão baixa, onde as classes de M -equivalência são diferentes do caso geral.

$$B_2 = \mathfrak{so}(2, 3)$$

As raízes simples são $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2\}$ e as classes de M -equivalência de raízes positivas são $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2\}$ e $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Nesta álgebra temos três tipos de flags que podem ser descritos por $\Theta = \emptyset$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2\}$ e $\Theta = \{\lambda_2\}$. O único flag que possui estruturas pseudo-complexas invariantes é o maximal. De fato, os flags minimais têm dimensão três, portanto não admitem estruturas pseudo-complexas invariantes.

O flag maximal tem estruturas pseudo-complexas invariantes pois as classes de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ possuem dois elementos cada. Essas estruturas são parametrizadas por $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{Gl}(1, \mathbb{C})$.

Em suma,

Proposição 3.5. *O único flag da álgebra $B_2 = \mathfrak{so}(2, 3)$ que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag maximal.*

$$B_3 = \mathfrak{so}(3, 4)$$

As raízes simples são $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3\}$ e as classes de M -equivalência de raízes positivas são $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3\}$, $\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2\}$ e $\{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\}$.

Proposição 3.6. *O único flag da álgebra $B_3 = \mathfrak{so}(3, 4)$ que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag $\mathbb{F}_{\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}}$. Esse flag é a Grassmanniana dos subespaços isotrópicos de dimensão três em \mathbb{R}^7 , isto é, subespaços de dimensão três nos quais a forma quadrática de matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{3 \times 3} \\ 0 & 1_{3 \times 3} & 0 \end{pmatrix}$$

se anula. As estruturas pseudo-complexas K -invariantes nesse flag são parametrizadas por $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para a demonstração do resultado acima, considere os seguintes casos e os argumentos usados:

1. O flag maximal não tem estruturas pseudo-complexas invariantes pois as classes de M -equivalência de raízes positivas possuem um número ímpar de elementos. Outra justificativa seria pela dimensão do flag.

2. Se Θ tem uma única raiz α , então $\langle \Theta \rangle = \{\pm\alpha\}$ e fora de $\langle \Theta \rangle$ existem classes de M -equivalências com três elementos. Portanto, não existe estrutura pseudo-complexa invariante.
3. Se $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3\}$, então $\langle \Theta \rangle = \pm\Theta$ e as classes de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ possuem um ou três elementos. Pela Proposição 3.1, \mathbb{F}_Θ não admite estruturas pseudo-complexas invariantes.
4. Se $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3\}$, então $\langle \Theta \rangle = \pm\{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3\}$. Nesse caso o conjunto $\{\lambda_1\}$ é uma classe de M -equivalência em $\Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$. Portanto, \mathbb{F}_Θ não admite estruturas pseudo-complexas invariantes.
5. Se $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}$, então $\langle \Theta \rangle = \pm\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3\}$. O flag \mathbb{F}_Θ tem dimensão seis. Sendo assim, não podemos descartar a possibilidade de existência das estruturas pseudo-complexas em \mathbb{F}_Θ por sua dimensão. Também não é possível usar a Proposição 3.1, uma vez que as classes de M -equivalência de raízes positivas fora de $\langle \Theta \rangle$ são:

$$\{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3\}, \{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2\} \text{ e } \{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\}.$$

Portanto, a variedade flag \mathbb{F}_Θ admite estruturas M -invariantes. Falta verificar se essas estruturas são invariantes pela componente conexa na identidade de K_Θ , $(K_\Theta)_0$, que é isomorfa ao grupo $\text{SO}(3)$.

Considere a realização de $B_3 = \mathfrak{so}(3, 4)$ em matrizes reais do tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^T & A & B \\ -\beta^T & C & -A^T \end{pmatrix},$$

com A, B, C matrizes 3×3 , β, γ matrizes 1×3 e $B + B^T = C + C^T = 0$. Então, $(K_\Theta)_0$ (respectivamente M) é dado por matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix},$$

com $g \in \text{SO}(3)$ (respectivamente g diagonal com entradas ± 1). Por outro lado, o espaço da raiz curta λ_1 é formado pelas matrizes em que as componentes A, B, C e β são nulas e γ é múltiplo de $e_1 = (1, 0, 0)$. O mesmo vale para as raízes λ_2 e λ_3 com $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, respectivamente. Já os espaços das raízes $\lambda_i + \lambda_j$ têm B como única componente não nula e essa componente tem a seguinte forma para cada raiz

$$\lambda_1 + \lambda_2 : B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 + \lambda_3 : B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 + \lambda_3 : B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sejam $V_c = \sum_i \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e $V_l = \sum_{i,j} \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$. Então, $V_c = \mathbb{R}^3$ e $V_l = \mathfrak{so}(3)$ são ambos subespaços invariantes pela representação adjunta de $K_\Theta = M.SO(3)$. A representação de $SO(3)$ em V_c é isomorfa à representação canônica em \mathbb{R}^3 , enquanto que a representação em V_l é a representação adjunta. Essas duas representações de $SO(3)$ são isomorfas. Um isomorfismo é construído via a identificação de \mathbb{R}^3 com os quatérnios imaginários $\text{Im } \mathbb{H}$: se $p, q \in \mathbb{H}$ então $ad(q)p = [q, p] \in \text{Im } \mathbb{H}$ e $ad(q) \in \mathfrak{so}(3)$ que comuta com as representações de $SO(3)$. Esse isomorfismo também comuta com as representações de M . De fato, tomando a base $\{e_1, e_2, e_3\} = \{i, j, k\} \in \mathbb{R}^3 = \text{Im } \mathbb{H}$, temos

$$ad(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad ad(k) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, o isomorfismo P leva os espaços de raízes \mathfrak{g}_{λ_1} , \mathfrak{g}_{λ_2} e \mathfrak{g}_{λ_3} nos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_2 + \lambda_3}$, $\mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_3}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2}$, respectivamente.

Em suma, existe um isomorfismo $P : V_c \rightarrow V_l$ que comuta tanto com as representações de $(K_\Theta)_0$ quanto com as representações de M . Portanto, existe um isomorfismo $P : V_c \rightarrow V_l$ que comuta com a representação de K_Θ .

Como $\mathfrak{n}_\Theta^+ = V_c \oplus V_l$, pode-se definir para qualquer $a \neq 0$ a aplicação $J_a : \mathfrak{n}_\Theta^+ \rightarrow \mathfrak{n}_\Theta^+$ que é dada por $J_a(X) = aP(X)$ se $X \in V_c$ e $J_a(X) = -aP^{-1}(X)$ se $X \in V_l$. Qualquer J_a é uma estrutura complexa em \mathfrak{n}_Θ^+ invariante por K_Θ . Isso passa às raízes negativas, ou seja, estruturas complexas em \mathfrak{n}_Θ^- . Assim, existe uma família parametrizada por $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de estruturas quase-complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}$.

B_l , $l \geq 4$

As classes de M -equivalência de raízes positivas de B_4 são:

$$\begin{aligned} & \{\lambda_i\}, \quad 1 \leq i \leq 4, \\ & \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}, \\ & \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}, \\ & \{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}. \end{aligned}$$

As classes de M -equivalência de raízes positivas da álgebra B_l , $l \geq 5$, são $\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\}$ e $\{\lambda_i\}$, $1 \leq i < j \leq l$. Usando essas classes, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.7. *Não existe estrutura pseudo-complexa invariante em nenhum flag \mathbb{F}_Θ da álgebra B_l , $l \geq 4$.*

Demonstração. O que acontece é que $\lambda_1 \notin \langle \Theta \rangle$ para qualquer Θ e $\{\lambda_1\}$ é uma classe de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$. Esses fatos podem ser comprovados observando que no caso B_l , $l \geq 4$, as classes de M -equivalência de raízes curtas são formadas por um único elemento e

$$\lambda_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) + \cdots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l.$$

Isto significa que λ_1 é combinação linear de todas as raízes simples e não apenas de um subconjunto Θ de raízes simples. Sendo assim, pela proposição 3.1, obtemos que \mathbb{F}_Θ não admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes. \square

3.4 Flags de $C_l = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$

$$C_l, l \geq 3 \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l$

Para a análise desses flags, deve-se separar o caso $l = 4$ em que as classes de M -equivalência são diferentes do caso geral. As raízes simples são: $\{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$.

$C_l, l \neq 4$

As classes de M -equivalência de raízes positivas são dadas pelos pares $\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\}$ e o conjunto das raízes longas $\{2\lambda_1, \dots, 2\lambda_l\}$.

Para analisar as estruturas pseudo-complexas em \mathbb{F}_Θ , deve-se separar os casos em que a raiz simples longa $2\lambda_l$ pertence ou não a Θ .

Proposição 3.8. *Se $2\lambda_l \notin \Theta$, então \mathbb{F}_Θ admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes se, e somente se, $\Theta = \emptyset$ e l é par, isto é, só no flag maximal e para l par.*

Demonstração. Se $\Theta \neq \emptyset$ e $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ é uma raiz pertencente a Θ , então $\{\lambda_i + \lambda_{i+1}\}$ é uma classe de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$. De fato, para $\Theta \neq \emptyset$ as raízes em $\langle \Theta \rangle$ são da forma $\lambda_i - \lambda_j$ e todas as raízes da forma $\lambda_i + \lambda_j$ não estão em $\langle \Theta \rangle$. Logo, existe uma classe de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$ com um número ímpar de elementos. Pela Proposição 3.1, \mathbb{F}_Θ não admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes.

No caso do flag maximal \mathbb{F}_\emptyset , uma condição necessária e suficiente para que exista estrutura pseudo-complexa K -invariante é que as classes de M -equivalência de raízes positivas (ou negativas) tenham um número par de elementos. Assim, existem estruturas pseudo-complexas K -invariantes em \mathbb{F}_\emptyset se, e somente se, l é par. \square

O caso em que $2\lambda_l \in \Theta$ é um pouco mais elaborado.

Seja i_0 o índice tal que $\{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ é a componente conexa de Θ que contém $2\lambda_l$, isto é, $\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0} \notin \Theta$ e $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \Theta$ se $i \geq i_0$.

Mostraremos agora que a raiz longa $2\lambda_i$ não é gerada por Θ se $i < i_0$.

Lema 3.1. *As raízes longas em $\langle \Theta \rangle$ são $\{2\lambda_{i_0}, \dots, 2\lambda_l\}$.*

Demonstração. Para qualquer i vale a combinação linear

$$2\lambda_i = 2\lambda_l + 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \dots + 2(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) + 2(\lambda_i - \lambda_{i+1}).$$

Logo, se $i \geq i_0$, então $2\lambda_i \in \langle \Theta \rangle$. Por outro lado, se $i < i_0$, temos que $\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0}$ aparece na combinação linear de $2\lambda_i$. Como $\lambda_{i_0-1} - \lambda_{i_0} \notin \Theta$, concluímos que $2\lambda_i \notin \langle \Theta \rangle$ se $i < i_0$. \square

Podemos concluir, a partir desse lema, que uma condição necessária para que \mathbb{F}_Θ tenha estrutura pseudo-complexa invariante é que i_0 seja ímpar, uma vez que $\{2\lambda_1, \dots, 2\lambda_{i_0-1}\}$ é uma classe de M -equivalência de raízes fora de $\langle \Theta \rangle$.

Esses comentários esclarecem como deve ser a componente conexa de Θ que contém $2\lambda_l$. Na verdade, provaremos que essa é a única componente conexa no caso em que \mathbb{F}_Θ admite estrutura pseudo-complexa K -invariante.

Proposição 3.9. *Seja $\{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ a componente conexa de Θ que contém $2\lambda_l$ e suponha que Θ é diferente dessa componente conexa, isto é, que existe $i < i_0 - 1$ tal que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \Theta$. Então, \mathbb{F}_Θ não admite estrutura pseudo-complexa invariante por M .*

Demonstração. Por hipótese, existe um índice i tal que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \Theta$ e $\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \notin \Theta$. Pelo lema 3.1, a raiz longa $2\lambda_{i+1} \notin \langle \Theta \rangle$. Portanto, $\{\lambda_i + \lambda_{i+1}\}$ é uma classe de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$. Pela Proposição 3.1, \mathbb{F}_Θ não admite estrutura pseudo-complexa M -invariante. \square

Em suma,

Proposição 3.10. *Para um flag \mathbb{F}_Θ de $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$, $l \neq 4$, existem estruturas complexas M -invariantes em \mathfrak{m}_Θ se, e somente se, $\Theta = \emptyset$ e l é par ou $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e i_0 é ímpar. Uma estrutura complexa M -invariante em \mathfrak{m}_Θ é dada por soma direta de estruturas complexas nos subespaços $\mathfrak{k}_{\lambda_i - \lambda_j} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_i + \lambda_j}$ e $\mathfrak{k}_{2\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{k}_{2\lambda_{i_0-1}}$, onde para uma raiz α , $\mathfrak{t}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{k}$ e $\{2\lambda_1, \dots, 2\lambda_{i_0-1}\}$ são as raízes longas fora de $\langle \Theta \rangle$.*

Falta verificar se as estruturas complexas M -invariantes em \mathfrak{m}_Θ são invariantes por $(K_\Theta)_0$ quando $\Theta \neq \emptyset$. Se $\Theta = \emptyset$ não há nada para verificar, pois $K_\Theta = M$. Já se $\Theta \neq \emptyset$, então Θ é um diagrama de Dynkin C_p (degenerado se $\Theta = \{2\lambda_l\}$) dado pelas raízes

$$\{\lambda_{d+1} - \lambda_{d+2}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$$

com $d = l - p + 1$. Portanto, \mathfrak{k}_Θ é a subálgebra compacta maximal de $\mathfrak{sp}(p, \mathbb{R})$, isto é, $\mathfrak{k}_\Theta \approx \mathfrak{u}(p)$.

Para obter as estruturas invariantes, vamos olhar os subespaços invariantes e irredutíveis por K_Θ , determinados em (PATRAO; MARTIN, 2015)(seção 5.3).

Seja $W_R = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{k}_\alpha$, onde R é o conjunto de raízes abaixo

$$R = \{\lambda_i \pm \lambda_j : i < j \leq d\} \cup \{2\lambda_i : 1 \leq i \leq d\}.$$

Se $\alpha \in R$ e $\beta \in \Theta$, então $\pm\alpha \pm \beta$ não é raiz. Isso significa que o subespaço W_R é invariante por $\text{Ad}(K_\Theta)$ e $\text{Ad}(g)X = X$, para $g \in (K_\Theta)_0$ e $X \in W_R$. Essa última afirmação pode ser vista observando que $(K_\Theta)_0$ é conexo e dados $Y \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $X \in W_R$, temos $[Y, X] = 0$. Portanto, se J é uma estrutura complexa M -invariante, então sua restrição ao subespaço W_R é automaticamente K_Θ -invariante.

As componentes restantes são dadas por soma de espaços de raízes associados aos conjuntos de raízes Π_j , $1 \leq j \leq d$, descritos por

$$\Pi_j = \{\lambda_j \pm \lambda_k : k \geq d + 1\}.$$

Pelo Lemma 5.11 de (PATRAO; MARTIN, 2015), temos que os subespaços $W_j = \sum_{\alpha \in \Pi_j} \mathfrak{k}_\alpha$ são K_Θ -invariantes e irredutíveis e

$$\mathfrak{m}_\Theta = W_R \oplus \sum_{j=1}^d W_j.$$

Além do mais, se $k \neq j$ então as representações de K_Θ em W_k e em W_j não são equivalentes pois nenhuma raiz de Π_j é M -equivalente a uma raiz de Π_k .

Uma estrutura complexa invariante em \mathfrak{m}_Θ é soma direta de estruturas complexas invariantes em W_R e em W_j com $1 \leq j \leq i_0$. Como foi mencionado acima, qualquer estrutura M -invariante em W_R também é K_Θ -invariante.

Iremos analisar as estruturas invariantes nos subespaços W_j . Para isso, considere o isomorfismo entre a álgebra compacta \mathfrak{k} , formada pelas matrizes simpléticas antissimétricas do tipo

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : \quad A + A^T = B - B^T = 0,$$

e a álgebra $\mathfrak{u}(l)$. O isomorfismo é dado por

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \longmapsto A + iB.$$

Esse isomorfismo leva o espaço $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k}$ no espaço gerado pela matriz anti-simétrica real $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$, enquanto que $\mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ é levado no espaço gerado pela matriz simétrica imaginária $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$.

Como $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$, $\mathfrak{k}_\Theta \approx \mathfrak{u}(m)$, onde m é o número de elementos em Θ . O isomorfismo leva \mathfrak{k}_Θ na álgebra das matrizes anti-hermitianas da forma

$$\mathfrak{k}_\Theta : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

sendo X uma matriz $m \times m$. Olhando os subespaços de raízes se vê que o isomorfismo leva o subespaço W_R no espaço das matrizes

$$W_R : \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com blocos $(l-m) \times (l-m)$ e $m \times m$, enquanto que o subespaço $W = \sum_{j=1}^{i_0} W_j$ é levado, pelo isomorfismo acima, no espaço das matrizes

$$W : \begin{pmatrix} 0 & -\bar{C}^T \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

também com blocos $(l-m) \times (l-m)$ e $m \times m$. Um subespaço W_j é dado por essa última matriz na qual C tem entradas não nulas apenas na coluna j . A representação de $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u}(m)$ em W é dada pela adjunta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{C}^T \\ C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\bar{C}^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{C}^T X \\ XC & 0 \end{pmatrix}.$$

Se C tem entradas não nulas apenas na coluna j , então o mesmo ocorre com XC e daí que os subespaços W_j são, de fato, invariantes.

Pelo isomorfismo acima, temos que os espaços $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k}$ e $\mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$, com $j \leq d$ e $k \geq d+1$, são geradas pelas matrizes tais que $C = E_{kj}$ e $C = iE_{kj}$, respectivamente. Isto é, $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k}$ e $\mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ são os espaços das matrizes geradas pelas matrizes, $(l \times l)$, $A_{kj} = E_{kj} - E_{jk}$ e $S_{kj} = i(E_{kj} + E_{jk})$, respectivamente. Agora é possível verificar quais estruturas complexas M -invariantes são K_Θ -invariantes. Como foi dito anteriormente, vamos analisar apenas a componente W , uma vez que toda estrutura M -invariante é K_Θ -invariante na componente W_R .

Uma estrutura complexa J invariante por M em W é soma direta de estruturas complexas J_{jk} nos espaços de dimensão dois, $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$, com $j \leq d$ e $k \geq d+1$. Em cada um desses espaços, J_{jk} pode ser qualquer estrutura complexa. Para ver quais as possibilidades para as estruturas \mathfrak{k}_Θ -invariantes, tome uma matriz

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_\Theta$$

tal que X é uma matriz diagonal imaginária, ou seja, $X = \{ia_1, \dots, ia_m\}$. Então, $\text{ad}(Y)A_{kj} = a_j S_{kj}$ e $\text{ad}(Y)S_{kj} = -a_j A_{kj}$. Isto é, $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ é invariante por $\text{ad}(Y)$ e a matriz de $\text{ad}(Y)$ na base $\{A_{kj}, S_{kj}\}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_j \\ a_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de $[J_{kj}]$ na base $\{A_{kj}, S_{kj}\}$ deve comutar com a matriz acima. Isso só é possível se $[J_{kj}]$ for uma das matrizes

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

Proposição 3.11. *Se uma estrutura complexa J invariante por M é também invariante por K_Θ , então, para cada índice j, k , com $1 \leq j \leq d < k \leq l$, existe $\varepsilon_{kj} = \pm 1$ tal que $JA_{kj} = \varepsilon_{kj} S_{kj}$ e $JS_{kj} = -\varepsilon_{kj} A_{kj}$.*

Isso reduz as estruturas complexas em W a um número finito de possibilidades. Existem, no entanto, mais restrições. De fato, tome as matrizes

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_\Theta,$$

sendo X uma matriz $m \times m$, dada por $X = E_{ts} - E_{st}$ e

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{C}^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \in W,$$

com $C = E_{sj}$ uma matriz $m \times (l-1)$. Então,

$$\text{ad}(Z)D = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{XC}^T \\ XC & 0 \end{pmatrix}$$

e $XC = E_{tj}$. Isso significa que $\text{ad}(Z)A_{kj} = A_{k_1j}$, onde $k = l - m + s$ e $k_1 = l - m + t$. Da mesma forma, $\text{ad}(Z)S_{kj} = S_{k_1j}$. Se J é invariante, deve-se ter $\text{ad}(Z)J_{kj} = J_{k_1j}\text{ad}(Z)$, o que implica que $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{k_1j}$. Como s e t são arbitrários, se obtém a seguinte condição necessária adicional.

Proposição 3.12. *Seja ε_{kj} , como na Proposição anterior, para $1 \leq j \leq d < k \leq l$. Então, para j fixado e $k_1, k_2 \geq d + 1$ se tem $\varepsilon_{k_1j} = \varepsilon_{k_2j}$. Isto é, os sinais ε_{kj} são os mesmos em todos os subespaços $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ da componente irredutível W_j .*

Esta condição sobre os sinais ε_{kj} também é suficiente. Para provar isso, basta verificar que se J satisfaz a condição, então J é invariante por elementos do tipo

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_\Theta,$$

com $X = i(E_{ts} + E_{st})$. Isso porque, pelas proposições 3.11 e 3.12, J é invariante para os elementos em que X é diagonal e quando X é anti-simétrica real. Falta então verificar para o caso em que X é simétrica imaginária.

As mesmas contas feitas acima mostram que se $C = E_{sj}$, então $\text{ad}(Z)D$ é dada por $XC = iE_{tj}$. O que mostra que $\text{ad}(Z)A_{kj} = S_{k_1j}$ onde $k = l - m + s$ e $k_1 = l - m + t$. Da mesma forma, se $C = iE_{sj}$, então $XC = -E_{tj}$ e, daí, que $\text{ad}(Z)S_{kj} = -A_{k_1j}$. Portanto, se valer a igualdade $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{k_1j}$, então

$$\text{ad}(Z)JA_{kj} = \varepsilon_{kj}\text{ad}(Z)S_{kj} = -\varepsilon_{k_1j}A_{k_1j} = JS_{k_1j} = J\text{ad}(Z)A_{kj}$$

e

$$\text{ad}(Z)JS_{kj} = -\varepsilon_{kj}\text{ad}(Z)A_{kj} = -\varepsilon_{k_1j}S_{k_1j} = JA_{k_1j} = J\text{ad}(Z)S_{kj}.$$

O que mostra que J é de fato invariante por \mathfrak{k}_Θ e, portanto, por K_Θ .

Em suma,

Teorema 3.1. *Um flag \mathbb{F}_Θ de $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$, $l \neq 4$, admite estrutura pseudo-complexa K -invariante se, e somente se, Θ é da forma $\{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e o número de raízes simples fora de Θ é par (isto é, d é ímpar). Em particular, o flag maximal tem estrutura pseudo-complexa invariante se, e somente se, l é par.*

O conjunto das estruturas pseudo-complexas invariantes é parametrizado por

$$\text{Gl}(d-1, \mathbb{R})/\text{Gl}(d-1/2, \mathbb{C}) \times (\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^2)^{(d-1)(d-2)} \times \mathbb{Z}_2^{(d-1)}.$$

A componente $\text{Gl}(d-1, \mathbb{R})/\text{Gl}(d-1/2, \mathbb{C})$ vem das estruturas complexas no espaço gerado pelas raízes longas fora de $\langle \Theta \rangle$. A componente $(\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^2)^{(d-1)(d-2)}$ vem das estruturas nos espaços gerados pelas raízes $\{\lambda_j - \lambda_k, \lambda_j + \lambda_k\}$ fora de $\langle \Theta \rangle$. O conjunto $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^2$ é união disjunta de duas cópias de \mathbb{R}^2 , que é $\text{Gl}(2, \mathbb{R})/\text{Gl}(1, \mathbb{C})$. Já a componente $\mathbb{Z}_2^{(d-1)}$ vem dos sinais ε_{kj} .

Exemplo 3.2. *Pelos resultados vistos, podemos afirmar que o único flag da álgebra C_3 que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$.*

Considere os conjuntos $R = \{\lambda_1 \pm \lambda_2\} \cup \{2\lambda_1, 2\lambda_2\}$, $\Pi_1 = \{\lambda_1 \pm \lambda_3\}$ e $\Pi_2 = \{\lambda_2 \pm \lambda_3\}$. Sejam $W_R = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{k}_\alpha$ e $W_j = \sum_{\alpha \in \Pi_j} \mathfrak{k}_\alpha$. Temos que o espaço tangente na origem

do flag é dado por $\mathfrak{m}_\Theta = W_R \oplus \sum_{j=1}^2 W_j$. Além disso, qualquer estrutura M -invariante em W_R também é K_Θ -invariante. Vamos descrever as estruturas K_Θ -invariantes em $W = \sum_{j=1}^2 W_j$. Se $\{A_{ij}, S_{ij}\}$ é a base do subespaço $\mathfrak{k}_{\lambda_i - \lambda_j} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_i + \lambda_j}$ já definida, então as estruturas complexas invariantes em W são dadas por $JA_{13} = \varepsilon_{13}S_{13}$, $JS_{13} = -\varepsilon_{13}A_{13}$, $JA_{23} = \varepsilon_{23}S_{23}$ e $JS_{23} = -\varepsilon_{23}A_{23}$, onde $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23} = \pm 1$. As estruturas M -invariantes em W_R são da forma: $JA_{12} = \alpha_{12}S_{12}$, $JS_{12} = -(\alpha_{12})^{-1}A_{12}$, $JS_{11} = \alpha_{11}S_{22}$ e $JS_{22} = -(\alpha_{11})^{-1}S_{11}$, em que $S_{ii} = iE_{ii}$ é um gerador do subespaço $\mathfrak{k}_{2\lambda_i}$. Podemos dizer que as estruturas complexas K_Θ -invariantes em $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$ são dadas por

 Tabela 2 – Estruturas complexas invariantes em $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$

Componentes	Estruturas complexas K_Θ -invariantes
W_1	$JA_{31} = \varepsilon_{31}S_{31}$, $JS_{31} = -\varepsilon_{31}A_{31}$, onde $\varepsilon_{31} = \pm 1$
W_2	$JA_{32} = \varepsilon_{32}S_{32}$, $JS_{32} = -\varepsilon_{32}A_{32}$, onde $\varepsilon_{32} = \pm 1$
W_R	$JA_{21} = \alpha_{21}S_{21}$, $JS_{21} = -(\alpha_{21})^{-1}A_{21}$, $JS_{11} = \alpha_{11}S_{22}$, $JS_{22} = -(\alpha_{11})^{-1}S_{11}$

3.4.1 Flags de C_4

A diferença entre o caso $C_l, l \neq 4$, e o caso C_4 é que as classes de M -equivalência são diferentes para as raízes curtas. De fato, são essas as classes de M -equivalência em C_4 .

1. Raízes curtas: $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, $\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}$ e $\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}$.
2. Raízes longas: $\{2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3, 2\lambda_4\}$.

Para analisar as estruturas pseudo-complexas invariantes nos flags de C_4 , vamos separar os casos em que a raiz simples longa $2\lambda_4$ pertence ou não a Θ . No caso em que $2\lambda_4 \notin \Theta$, a única diferença do caso geral é que o conjunto $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$ não contém a raiz $2\lambda_4$ e as classes de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$ contém um número par de elementos. Pela Proposição 3.1, obtemos que \mathbb{F}_Θ admite estruturas complexas M -invariantes.

Proposição 3.13. *Se a raiz $2\lambda_4 \notin \Theta$, então os únicos flags de C_4 que admitem estruturas complexas M -invariantes são o flag maximal e \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$.*

Existem estruturas complexas K_Θ -invariantes no flag maximal, uma vez que $K_\Theta = M$. Para \mathbb{F}_Θ , com $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$, falta verificar se as estruturas M -invariantes são K_Θ -invariantes. Para isso, vamos olhar a representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , que foi descrita em (PATRAO; MARTIN, 2015), na seção 5.3.

As componentes \mathfrak{z}_Θ -invariantes e irredutíveis de \mathbb{F}_Θ são:

$$\begin{aligned}
 V_{\Theta}(-2\lambda_1) &= \mathfrak{g}_{-2\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_1-\lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-2\lambda_2}, \\
 V_{\Theta}(-2\lambda_3) &= \mathfrak{g}_{-2\lambda_3} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3-\lambda_4} \oplus \mathfrak{g}_{-2\lambda_4}, \\
 V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_2) &= \mathfrak{g}_{\lambda_3-\lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4-\lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_3-\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4-\lambda_1}, \\
 V_{\Theta}(-\lambda_3 - \lambda_2) &= \mathfrak{g}_{-\lambda_3-\lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4-\lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3-\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4-\lambda_1}.
 \end{aligned}$$

Essas componentes não são K_{Θ} irredutíveis. De fato, esses subespaços se decompõem nas seguintes componentes irredutíveis:

$$\begin{aligned}
 V_{\Theta}(-2\lambda_1) &= \langle Y_{11} - Y_{22}, Y_{12} \rangle \oplus \langle Y_{11} + Y_{22} \rangle, \\
 V_{\Theta}(-2\lambda_3) &= \langle Y_{33} - Y_{44}, Y_{34} \rangle \oplus \langle Y_{33} + Y_{44} \rangle, \\
 V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_2) &= \langle X_{31} + X_{42}, X_{32} - X_{41} \rangle \oplus \langle X_{32} + X_{41}, X_{42} - X_{31} \rangle, \\
 V_{\Theta}(-\lambda_3 - \lambda_2) &= \langle Y_{31} + Y_{42}, Y_{32} - Y_{41} \rangle \oplus \langle Y_{32} + Y_{41}, Y_{42} - Y_{31} \rangle,
 \end{aligned}$$

onde X_{ji} é um gerador do espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\lambda_j-\lambda_i}$ e Y_{ji} é um gerador do espaço de raiz $\mathfrak{g}_{-\lambda_j-\lambda_i}$. As componentes $\langle Y_{11} + Y_{22} \rangle$, $\langle X_{31} + X_{42}, X_{32} - X_{41} \rangle$ e $\langle X_{32} + X_{41}, X_{42} - X_{31} \rangle$ são equivalentes às componentes $\langle Y_{33} + Y_{44} \rangle$, $\langle Y_{31} + Y_{42}, Y_{32} - Y_{41} \rangle$ e $\langle Y_{32} + Y_{41}, Y_{42} - Y_{31} \rangle$, respectivamente. Os subespaços $\langle Y_{11} - Y_{22}, Y_{12} \rangle$ e $\langle Y_{33} - Y_{44}, Y_{34} \rangle$ não são equivalentes. Sendo assim, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 3.14. *Se a raiz $2\lambda_4 \notin \Theta$, então o único flag da álgebra C_4 que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag maximal.*

Demonstração. Falta mostrar que o flag \mathbb{F}_{Θ} , com $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$, não admite estruturas complexas K_{Θ} -invariantes. Como as componentes $\langle Y_{11} - Y_{22}, Y_{12} \rangle$ e $\langle Y_{33} - Y_{44}, Y_{34} \rangle$ não são equivalentes, uma estrutura complexa $(K_{\Theta})_0$ -invariante em \mathbb{F}_{Θ} deve satisfazer $J(Y_{12}) = \alpha_{12}(Y_{11} - Y_{22})$. Essa estrutura não é M -invariante, uma vez que as raízes $2\lambda_1$, $2\lambda_2$ não são M -equivalentes à raiz $\lambda_1 + \lambda_2$. Logo, não é possível obter uma estrutura K_{Θ} -invariante em \mathbb{F}_{Θ} . \square

Agora vamos considerar o caso em que se $2\lambda_4 \in \Theta$. Com os mesmos argumentos usados no caso geral, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.15. *Se $2\lambda_4 \in \Theta$, então o único flag de C_4 que admite estrutura complexa M -invariante é \mathbb{F}_{Θ} , onde $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$.*

Resta verificar se as estruturas M -invariantes também são K_{Θ} -invariantes. Para isso precisamos saber como é a representação de isotropia de \mathbb{F}_{Θ} .

As componentes K_{Θ} -irredutíveis de \mathbb{F}_{Θ} são:

$$\begin{aligned}
 V_{\Theta}(-2\lambda_1) &= \mathfrak{g}_{-2\lambda_1} \\
 V_{\Theta}(-2\lambda_2) &= \mathfrak{g}_{-2\lambda_2} \\
 V_{\Theta}(\lambda_2 - \lambda_1) &= \mathfrak{g}_{\lambda_2 - \lambda_1} \\
 V_{\Theta}(-\lambda_2 - \lambda_1) &= \mathfrak{g}_{-\lambda_2 - \lambda_1} \\
 V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_1) &= \mathfrak{g}_{\lambda_3 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4 - \lambda_1}, \\
 V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_2) &= \mathfrak{g}_{\lambda_3 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4 - \lambda_2}.
 \end{aligned}$$

As componentes $V_{\Theta}(-2\lambda_1)$ e $V_{\Theta}(\lambda_2 - \lambda_1)$ são equivalentes às componentes $V_{\Theta}(-2\lambda_2)$ e $V_{\Theta}(-\lambda_2 - \lambda_1)$, respectivamente. Já as componentes $V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_1)$ e $V_{\Theta}(\lambda_3 - \lambda_2)$ não são equivalentes. Portanto, apesar da diferença entre as classes de M -equivalências do caso geral e do caso C_4 , estamos nas mesmas condições do caso geral e podemos descrever as estruturas K_{Θ} -invariantes de \mathbb{F}_{Θ} .

O conjunto R , tal que $W_R = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{k}_{\alpha}$ é dada por $R = \{\lambda_1 \pm \lambda_2\} \cup \{2\lambda_1, 2\lambda_2\}$ e as componentes W_1 e W_2 são determinadas pelos conjuntos de raízes

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \{\lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4\}, \\
 \Pi_2 &= \{\lambda_2 \pm \lambda_3, \lambda_2 \pm \lambda_4\}.
 \end{aligned}$$

Abaixo descreveremos as estruturas complexas invariantes em $\mathbb{F}_{\{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}}$.

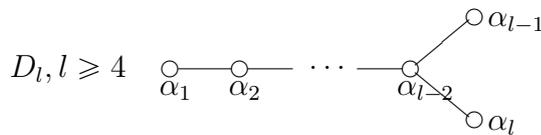
Tabela 3 – Estruturas complexas invariantes em $\mathbb{F}_{\{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}}$

Componentes	Estruturas complexas K_{Θ} -invariantes
W_1	$JA_{31} = \varepsilon_{31}S_{31}$, $JS_{31} = -\varepsilon_{31}A_{31}$, $JA_{41} = \varepsilon_{31}S_{41}$ e $JS_{41} = -\varepsilon_{31}A_{41}$, onde $\varepsilon_{31} = \pm 1$
W_2	$JA_{32} = \varepsilon_{32}S_{32}$, $JS_{32} = -\varepsilon_{32}A_{32}$, $JA_{42} = \varepsilon_{32}S_{42}$ e $JS_{42} = -\varepsilon_{32}A_{42}$, onde $\varepsilon_{32} = \pm 1$
W_R	$JA_{21} = \alpha_{21}S_{21}$, $JS_{21} = -(\alpha_{21})^{-1}A_{21}$, $JS_{11} = \alpha_{11}S_{22}$, $JS_{22} = -(\alpha_{11})^{-1}S_{11}$

Em suma,

Proposição 3.16. *Os únicos flags de C_4 que admitem estruturas pseudo-complexas K_{Θ} -invariantes são o flag maximal e o flag \mathbb{F}_{Θ} , onde $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$.*

3.5 Flags de $D_l = \mathfrak{so}(l, l)$



Para verificar a existência de estruturas pseudo-complexas nas variedades flags de D_l , assim como nos casos anteriores, estudaremos a representação de isotropia

desses flags. Veremos abaixo que os flags de D_l , $l \geq 5$, cumprem a condição necessária para admitir estrutura pseudo-complexa K_Θ -invariante, vista em 3.1, apenas nos casos em que $\Theta = \emptyset$ ou $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$. Por isso, estudaremos abaixo a representação de isotropia das variedades flags de D_l apenas nos casos em que $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$.

Representação de isotropia de D_l

A forma real normal de D_l é $\mathfrak{so}(l, l)$, que é representada pelas matrizes reais da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \text{ onde } B + B^T = C + C^T = 0. \quad (3.1)$$

A parte compacta \mathfrak{k} é dada pelas matrizes dessa forma que são anti-simétricas, isto é, \mathfrak{k} é dado por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \text{ onde } A + A^T = B + B^T = 0.$$

A álgebra \mathfrak{k} se decompõe em dois ideais isomorfos a $\mathfrak{so}(l)$. Eles são dados por

$$\mathfrak{so}(l)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \right\} \quad \mathfrak{so}(l)_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.2)$$

com $A + A^T = 0$.

É imediato verificar as seguintes afirmações:

- 1) Esses subespaços de matrizes são fechados pelo colchete;
- 2) Essas subálgebras são isomorfas a $\mathfrak{so}(l)$ (em ambos os casos o isomorfismo associa $A \in \mathfrak{so}(l)$ à matriz dada);
- 3) $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l)_1 \oplus \mathfrak{so}(l)_2$ e $[\mathfrak{so}(l)_1, \mathfrak{so}(l)_2] = 0$.

Em D_l , tome

$$\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}.$$

O conjunto $\langle \Theta \rangle$ das raízes geradas por Θ é dado por

$$\langle \Theta \rangle = \{\pm(\lambda_i \pm \lambda_j) : i_0 \leq i < j \leq l\}.$$

A álgebra $\mathfrak{g}(\Theta)$ gerada por \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \langle \Theta \rangle$, é dada pelas matrizes (3.1) tais que A, B e C têm a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

isto é, $\mathfrak{g}(\Theta)$ é dada por matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

A álgebra $\mathfrak{g}(\Theta)$ é uma álgebra do tipo D_k que é isomorfa a $\mathfrak{so}(k, k)$, com $k = l - i_0 + 1$.

Com isso, a parte compacta \mathfrak{k}_Θ de $\mathfrak{g}(\Theta)$ se decompõe em $\mathfrak{so}(k)_1 \oplus \mathfrak{so}(k)_2$ da mesma forma que a decomposição de \mathfrak{k} em (3.2).

Agora estudaremos as componentes irredutíveis do espaço tangente a \mathbb{F}_Θ na origem :

1. Se $1 \leq i < j < i_0$, então $\mathfrak{g}_{\lambda_i \pm \lambda_j}$ comuta com $\mathfrak{g}(\Theta)$. Portanto, $V(\lambda_i \pm \lambda_j) = \mathfrak{g}_{\lambda_i \pm \lambda_j}$ e a representação de \mathfrak{k}_Θ é trivial (identicamente nula). Esses espaços de raízes são formados por matrizes (3.1) em que $C = 0$ (pois as raízes que compõem esses espaços são positivas) e A e B têm a forma

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se $1 \leq i < i_0 \leq j$, então $\Pi(\lambda_i \pm \lambda_j) = \{\lambda_i \pm \lambda_s : s \geq i_0\}$ e $V(\lambda_i \pm \lambda_j)$ é formado por matrizes (3.1) em que $C = 0$ (pois $\Pi(\lambda_i \pm \lambda_j)$ só contém raízes positivas). A parte A é triangular superior, se anula fora da linha i e se anula na linha i até a posição $j = i_0 - 1$. Isto é, A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $*$ é a matriz não nula só na linha i . Por fim, $B = X - X^T$, onde X é triangular superior do mesmo formato da A . Isto é, B tem a forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ -* & 0 \end{pmatrix},$$

onde $*$ é matriz não nula só na linha i .

3. A \mathfrak{z}_Θ -componente irredutível do item anterior se decompõe em dois subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 . O subespaço V_1 é dado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^T \end{pmatrix},$$

com A triangular superior, como no item anterior, e $B = A - A^T$. Já em V_2 , A é da mesma forma só que $B = -A + A^T$. (Essa decomposição é semelhante à de \mathfrak{k} .)

As representações de $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(k)_1 \oplus \mathfrak{so}(k)_2$ em V_1 e V_2 não são equivalentes. Isso porque $[\mathfrak{so}(k)_1, V_2] = [\mathfrak{so}(k)_2, V_1] = 0$, enquanto que a representação de $\mathfrak{so}(k)_1$ em V_1 não é trivial (da mesma forma a representação de $\mathfrak{so}(k)_2$ em V_2 não é trivial).

Uma componente $V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$, $1 \leq i < i_0 \leq j$, é dada pela soma direta de espaços de raízes \mathfrak{g}_α com $\alpha \in \Pi(\lambda_i \pm \lambda_{i_0}) = \{\lambda_i \pm \lambda_{i_0}, \lambda_i \pm \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_i \pm \lambda_l\}$. Os subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 dessa componente são gerados por

$$V_1 = \sum_{d=i_0}^l \alpha_d (E_{i,d} - E_{l+d,l+i} + E_{i,l+d} - E_{d,l+i}) \quad e \quad V_2 = \sum_{d=i_0}^l \beta_d (E_{i,d} - E_{l+d,l+i} - E_{i,l+d} + E_{d,l+i}).$$

Para simplificar a notação, denotaremos por:

$$X_d = E_{i,d} - E_{l+d,l+i} + E_{i,l+d} - E_{d,l+i} \quad e \quad Y_d = E_{i,d} - E_{l+d,l+i} - E_{i,l+d} + E_{d,l+i}.$$

Observação 3.1. *Se a dimensão dos subespaços V_1 e V_2 é par, então*

$$\begin{aligned} ad(\mathfrak{k}_\Theta)X_{i_0+j} &= 2X_{i_0+j+1}, \quad \text{se } j \text{ é par} \\ ad(\mathfrak{k}_\Theta)X_{i_0+j} &= -2X_{i_0+j-1}, \quad \text{se } j \text{ é ímpar} \end{aligned}$$

A observação acima será de extrema importância para descartarmos a possibilidade de alguns flags possuírem estruturas pseudo-complexas invariantes.

Para analisar a possibilidade de existência de estruturas pseudo-complexas invariantes, iremos separar os casos D_4 e D_l , $l \geq 5$, uma vez que as classes de M -equivalência de D_4 são diferentes do caso geral.

Estruturas pseudo-complexas invariantes em flags de D_l

D_l , $l \geq 5$

As raízes para este caso são $\pm\lambda_i \pm \lambda_j$, $i \neq j$, e o sistema simples de raiz é dado por $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$, $1 \leq i < j \leq l$.

O flag maximal tem estruturas pseudo-complexas invariantes, pois as classes de M -equivalência têm 2 elementos cada. O conjunto das estruturas complexas K_Θ -invariantes é parametrizado por $(\text{Gl}(2, \mathbb{R})/\text{Gl}(1, \mathbb{C}))^{l(l-1)/2}$.

Para $\Theta \neq \emptyset$ a análise é semelhante ao caso C_l .

Se $\lambda_{l-1} + \lambda_l \notin \Theta$, então não existem estruturas M -invariantes em \mathfrak{m}_Θ , pois nesse caso, as raízes em $\langle \Theta \rangle$ são da forma $\lambda_i - \lambda_j$. Isso implica que existe $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$ (da forma $\lambda_i + \lambda_j$) tal que α não é M -equivalente a nenhuma raiz fora de $\langle \Theta \rangle$.

Já se $\lambda_{l-1} + \lambda_l \in \Theta$, então para existir estrutura M -invariante deve-se ter $\lambda_{l-1} - \lambda_l \in \Theta$, pois essas duas raízes são M -equivalentes. Nesse caso, existem duas possibilidades:

1. $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1} \in \Theta$. Então, para que exista estrutura M -invariante deve-se ter Θ conexo, isto é, Θ da forma $\{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$. Isso porque uma raiz $\lambda_i + \lambda_{i+1} \in \langle \Theta \rangle$ se, e somente se, $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ está na mesma componente conexa de Θ que contém $\lambda_{l-1} + \lambda_l$.
2. $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1} \notin \Theta$. Então, existe estrutura M -invariante se, e só se, $\Theta = \{\lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$, pela mesma razão do item anterior.

Em suma,

Proposição 3.17. *Existem estruturas complexas M -invariantes em \mathfrak{m}_Θ se, e só se, $\Theta = \emptyset$ ou $\Theta = \{\lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$ ou Θ é um subdiagrama conexo D_m à direita do diagrama de Dynkin.*

Falta decidir quais as estruturas M -invariantes são também K_Θ -invariantes. Para isso, vamos olhar a representação de isotropia de D_l feita no início dessa seção.

O resultado abaixo exclui a possibilidade de existência de estruturas pseudo-complexas invariantes observando a dimensão dos subespaços V_1 e V_2 das componentes $V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$, $1 \leq i < i_0 \leq j$.

Proposição 3.18. *Seja \mathbb{F}_Θ uma variedade flag de D_l , com $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\} \neq \emptyset$. Se a dimensão dos subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 das componentes $V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$ for ímpar, isto é, $l - i_0 + 1$ for ímpar, então não existe estrutura pseudo-complexa invariante em \mathbb{F}_Θ .*

Demonstração. Como foi visto acima, os subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 não são K_Θ -equivalentes. Sendo assim, uma estrutura complexa invariante na componente $V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$ deve satisfazer $JV_1 = V_1$ e $JV_2 = V_2$, o que não pode ocorrer, uma vez que esses subespaços têm dimensão ímpar. \square

Nos casos em que os subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 das componentes $V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$ têm dimensão par, temos pela Observação 3.1 que, por exemplo, $ad(\mathfrak{k}_\Theta)X_{i_0} = 2X_{i_0+1}$ e $ad(\mathfrak{k}_\Theta)X_{i_0+1} = -2X_{i_0}$, isto é, a representação adjunta de \mathfrak{k} leva o espaço unidimensional X_{i_0} no espaço X_{i_0+1} . Assim, uma estrutura pseudo-complexa $(K_\Theta)_0$ -invariante em \mathbb{F}_Θ deve satisfazer $JX_{i_0} = \pm X_{i_0+1}$. Essa estrutura é $(K_\Theta)_0$ -invariante, mas não é M -invariante. Essa afirmação pode ser verificada observando que X_d é dado pela soma dos geradores dos espaços $\mathfrak{g}_{\lambda_i \pm \lambda_{i_0}}$ e que $\{\lambda_i \pm \lambda_{i_0}\}$ e $\{\lambda_i \pm \lambda_{i_0+1}\}$ são classes de M -equivalência distintas. Assim, existe $m \in M$ tal que $Ad(m)X_{i_0} = X_{i_0}$ e $Ad(m)X_{i_0+1} = -X_{i_0+1}$. Com isso, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.19. *Seja \mathbb{F}_Θ uma variedade flag de D_l , com $\Theta = \{\lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\} \neq \emptyset$. Se a dimensão dos subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1 e V_2 das componentes*

$V(\lambda_i - \lambda_{i_0})$ for par, isto é, $l - i_0 + 1$ for par, então não existe estrutura pseudo-complexa invariante em \mathbb{F}_Θ .

Demonstração. Como foi argumentado acima, uma estrutura pseudo-complexa $(K_\theta)_0$ -invariante em \mathbb{F}_Θ deve satisfazer $JX_{i_0} = \pm X_{i_0+1}$. Seja $m \in M$ tal que $Ad(m)X_{i_0} = X_{i_0}$ e $Ad(m)X_{i_0+1} = -X_{i_0+1}$. Temos, então, que $J \circ Ad(m)X_{i_0} = \pm X_{i_0+1}$ e $Ad(m) \circ JX_{i_0} = \mp X_{i_0+1}$. Portanto, a estrutura pseudo-complexa J não é M -invariante. \square

Em suma,

Teorema 3.2. *A única variedade flag \mathbb{F}_Θ de D_l , $l \geq 5$, que possui estrutura pseudo-complexa K_Θ -invariante é o flag maximal.*

3.5.1 Flags de D_4

As classes de M -equivalência sobre as raízes positivas em D_4 são:

$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, $\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}$ e $\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}$.

Olhando as classes de M -equivalência de raízes positivas em D_4 e a Proposição 3.1, podemos concluir o seguinte resultado:

Proposição 3.20. *Existem estruturas complexas M -invariantes em \mathfrak{m}_Θ se, e somente se, $\Theta = \emptyset$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 + \lambda_4\}$ ou $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$.*

Estudaremos a representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , para Θ descrito na Proposição acima, pois desejamos verificar se as estruturas complexas M -invariantes são também K_Θ -invariantes.

Representação de Isotropia de D_4

Para a análise da representação de isotropia de D_4 , denotaremos por $X_{ij} = E_{i,j} - E_{l+j,l+i}$ gerador do espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j}$ e por $Y_{ij} = E_{i,l+j} - E_{j,l+i}$ gerador do espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$, onde $E_{i,j}$ é a matriz que tem entrada igual a 1 na posição i, j e zero nas posições restantes.

1. A representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$.

As componentes \mathfrak{z}_Θ -invariantes e irredutíveis $V(\lambda_i \pm \lambda_j)$ são geradas pela soma direta dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i \pm \lambda_j}$ dados pelos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda_1 + \lambda_2) &= \{\lambda_1 + \lambda_2\} \\ \Pi(\lambda_3 + \lambda_4) &= \{\lambda_3 + \lambda_4\} \\ \Pi(\lambda_1 - \lambda_3) &= \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4\} \\ \Pi(\lambda_1 + \lambda_3) &= \{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4\} \end{aligned}$$

A álgebra $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ se decompõe em duas componentes

$$\mathfrak{k}_1 : \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \quad \mathfrak{k}_2 : \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz 2×2 anti-simétrica.

As componente \mathfrak{z}_Θ -invariante e irredutível $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_1 + \lambda_3)$ se decompõem em dois subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes e irredutíveis. Usando a notação acima, obtemos que essa decomposição é feita de seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1 - \lambda_3) &= \langle X_{13} - X_{24}, X_{14} + X_{23} \rangle \oplus \langle X_{13} + X_{24}, X_{14} - X_{23} \rangle, \\ V(\lambda_1 + \lambda_3) &= \langle Y_{13} - Y_{24}, Y_{14} + Y_{23} \rangle \oplus \langle Y_{13} + Y_{24}, Y_{14} - Y_{23} \rangle. \end{aligned}$$

Sejam $V_1 = \langle X_{13} - X_{24}, X_{14} + X_{23} \rangle$, $V_2 = \langle X_{13} + X_{24}, X_{14} - X_{23} \rangle$, $V_3 = \langle Y_{13} - Y_{24}, Y_{14} + Y_{23} \rangle$ e $V_4 = \langle Y_{13} + Y_{24}, Y_{14} - Y_{23} \rangle$. O subespaço V_1 não é equivalente ao subespaço V_4 , assim como o subespaço V_2 não é equivalente ao subespaço V_3 . Isso se deve ao fato de $[\mathfrak{k}_1, V_4] = [\mathfrak{k}_2, V_1] = 0$, enquanto que a representação de \mathfrak{k}_1 sobre V_1 não é trivial (da mesma forma a representação de \mathfrak{k}_2 em V_4 não é trivial). O mesmo ocorrendo com os subespaços V_2 e V_3 , isto é, $[\mathfrak{k}_2, V_3] = [\mathfrak{k}_1, V_2] = 0$ enquanto que a representação de \mathfrak{k}_1 sobre V_3 não é trivial (da mesma forma a representação de \mathfrak{k}_2 em V_2 não é trivial). Usando os mesmos argumentos, obtemos que o subespaço V_1 não é equivalente ao subespaço V_2 , assim como o subespaço V_3 não é equivalente ao subespaço V_4 .

Agora, o subespaço V_1 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_3 e o subespaço V_2 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_4 . De fato, considere a transformação linear $T : V_1 \longrightarrow V_3$, dada por $T(X_{13} - X_{24}) = Y_{13} - Y_{24}$ e $T(X_{14} + X_{23}) = Y_{14} + Y_{23}$. A representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ satisfaz as seguintes igualdades para $V_1, V_3 = \langle Z_\alpha - Z_\beta, Z_\gamma + Z_\delta \rangle$, onde $Z = X, Y$:

$$\begin{aligned} ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\alpha - Z_\beta) &= x(Z_\gamma + Z_\delta), \\ ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\gamma + Z_\delta) &= -x(Z_\alpha - Z_\beta), \\ ad(\mathfrak{k}_2)(Z_\alpha - Z_\beta) &= ad(\mathfrak{k}_2)(Z_\gamma + Z_\delta) = 0. \end{aligned}$$

Assim, a transformação linear T comuta com a representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ . Pela Proposição 4.5 de (PATRAO; MARTIN, 2015), a aplicação T é um operador de intercâmbio para as \mathfrak{k}_Θ -representações sobre V_1 e V_3 . Além disso, os subespaços

$$V_{[(x,y)]} = \{xX + yTX : X \in V_1\},$$

onde $[(x,y)] \in \mathbb{RP}^1$, são os únicos subespaços K_Θ -invariantes em $V_1 \oplus V_3$.

Podemos definir de forma semelhante uma transformação linear $T : V_2 \longrightarrow V_4$, dada por $T(X_{13} + X_{24}) = Y_{23} + Y_{24}$ e $T(X_{14} - X_{23}) = Y_{14} - Y_{23}$. A representação adjunta

de \mathfrak{k}_Θ satisfaz as seguintes igualdades para $V_2, V_4 = \langle Z_\alpha + Z_\beta, Z_\gamma - Z_\delta \rangle$

$$\begin{aligned} ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\alpha + Z_\beta) &= x(Z_\gamma - Z_\delta), \\ ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\gamma - Z_\delta) &= -x(Z_\alpha + Z_\beta), \\ ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\alpha + Z_\beta) &= ad(\mathfrak{k}_1)(Z_\gamma - Z_\delta) = 0. \end{aligned}$$

Essa transformação linear também comuta com a representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ . Portanto, os subespaços V_2 e V_4 são \mathfrak{k}_Θ -equivalentes e os subespaços

$$V_{[(x,y)]} = \{xX + yTX : X \in V_2\},$$

onde $[(x,y)] \in \mathbb{RP}^1$, são os únicos subespaços K_Θ -invariantes em $V_2 \oplus V_4$.

2. A representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

As componentes \mathfrak{z}_Θ -invariantes e irredutíveis $V(\lambda_i \pm \lambda_j)$ são geradas pela soma direta dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i \pm \lambda_j}$ dados pelos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda_1 + \lambda_2) &= \{\lambda_1 + \lambda_2\} \\ \Pi(\lambda_3 - \lambda_4) &= \{\lambda_3 - \lambda_4\} \\ \Pi(\lambda_1 - \lambda_3) &= \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4\} \\ \Pi(\lambda_1 + \lambda_3) &= \{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4\} \end{aligned}$$

As componente \mathfrak{z}_Θ -invariante e irredutível $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_1 + \lambda_3)$ se decompõem em dois subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes e irredutíveis. Usando a notação acima, obtemos que essa decomposição é feita de seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1 - \lambda_3) &= \langle X_{13} - Y_{24}, Y_{14} + X_{23} \rangle \oplus \langle X_{13} + Y_{24}, Y_{14} - X_{23} \rangle, \\ V(\lambda_1 + \lambda_3) &= \langle Y_{13} - X_{24}, X_{14} + Y_{23} \rangle \oplus \langle Y_{13} + X_{24}, X_{14} - Y_{23} \rangle. \end{aligned}$$

Sejam $V_1 = \langle X_{13} - Y_{24}, Y_{14} + X_{23} \rangle$, $V_2 = \langle X_{13} + Y_{24}, Y_{14} - X_{23} \rangle$, $V_3 = \langle Y_{13} - X_{24}, X_{14} + Y_{23} \rangle$ e $V_4 = \langle Y_{13} + X_{24}, X_{14} - Y_{23} \rangle$. O subespaço V_1 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_3 e o subespaço V_2 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_4 . De fato, as transformações lineares $T_1 : V_1 \rightarrow V_3$ e $T_2 : V_2 \rightarrow V_4$, dadas por $T_1(X_{13} - Y_{24}) = Y_{13} - X_{24}$, $T_1(Y_{14} + X_{23}) = X_{14} + Y_{23}$, $T_2(X_{13} + Y_{24}) = Y_{13} + X_{24}$ e $T_2(Y_{14} - X_{23}) = X_{14} - Y_{23}$ são operadores de intercâmbio para as \mathfrak{k}_Θ -representações sobre V_1, V_3 e V_2, V_4 , respectivamente.

3. A representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

A representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, cai no caso feito anteriormente para D_l , $l \geq 5$. A diferença se dá na equivalência entre as componentes $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_2 - \lambda_3)$. Isso ocorre porque em D_4 as classes de M -equivalência contém quatro elementos, já no caso geral tínhamos dois elementos em cada classe de M -equivalência.

Seja $V(\alpha)$ a componente \mathfrak{z}_Θ -irreduzível gerada pelo conjunto de raiz $\Pi(\alpha)$. Os conjuntos de raízes que determinam as componentes \mathfrak{z}_Θ -irreduzíveis, $V(\alpha)$, são:

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda_1 - \lambda_2) &= \{\lambda_1 - \lambda_2\} \\ \Pi(\lambda_1 + \lambda_2) &= \{\lambda_1 + \lambda_2\} \\ \Pi(\lambda_1 - \lambda_3) &= \{\lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4\} \\ \Pi(\lambda_2 - \lambda_3) &= \{\lambda_2 \pm \lambda_3, \lambda_2 \pm \lambda_4\}.\end{aligned}$$

As componentes $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_2 - \lambda_3)$ se decompõem em dois subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes V_1, V_2 e V_3, V_4 , respectivamente. As representações de $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(2)_1 \oplus \mathfrak{so}(2)_2$ em V_1 e V_2 não são equivalentes. Assim como as representações de $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(2)_1 \oplus \mathfrak{so}(2)_2$ em V_3 e V_4 . Falta verificar se as componentes $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_2 - \lambda_3)$ são equivalentes. Para isso, considere a decomposição dessas componentes em subespaços \mathfrak{k}_Θ -invariantes:

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda_1 - \lambda_3) &= \langle X_{13} + Y_{13}, X_{14} + Y_{14} \rangle \oplus \langle X_{13} - Y_{13}, X_{14} - Y_{14} \rangle \\ \Pi(\lambda_2 - \lambda_3) &= \langle X_{23} + Y_{23}, X_{24} + Y_{24} \rangle \oplus \langle X_{23} - Y_{23}, X_{24} - Y_{24} \rangle.\end{aligned}$$

Sejam $V_1 = \langle X_{13} + Y_{13}, X_{14} + Y_{14} \rangle$, $V_2 = \langle X_{13} - Y_{13}, X_{14} - Y_{14} \rangle$, $V_3 = \langle X_{23} + Y_{23}, X_{24} + Y_{24} \rangle$ e $V_4 = \langle X_{23} - Y_{23}, X_{24} - Y_{24} \rangle$. O subespaço V_1 não pode ser equivalente ao espaço V_4 , assim como o subespaço V_2 não é equivalente ao espaço V_3 . Isso se deve ao fato de $[\mathfrak{so}(2)_1, V_4] = [\mathfrak{so}(2)_2, V_1] = 0$, enquanto que a representação de $\mathfrak{so}(2)_1$ sobre V_1 não é trivial (da mesma forma a representação de $\mathfrak{so}(2)_2$ em V_4 não é trivial). O mesmo ocorrendo com os subespaços V_2 e V_3 , isto é, $[\mathfrak{so}(2)_2, V_3] = [\mathfrak{so}(2)_1, V_2] = 0$ enquanto que a representação de $\mathfrak{so}(2)_1$ sobre V_3 não é trivial (da mesma forma a representação de $\mathfrak{so}(2)_2$ em V_2 não é trivial).

O subespaço V_1 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_3 e o subespaço V_2 é \mathfrak{k}_Θ -equivalente ao subespaço V_4 . De fato, considere a transformação linear $T : V_1 \rightarrow V_3$, dada por $T(X_{13} + Y_{13}) = X_{24} + Y_{24}$ e $T(X_{14} + Y_{14}) = -(X_{23} + Y_{23})$. A representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ satisfaz as seguintes igualdades para $V_1, V_3 = \langle X_\alpha + Y_\alpha, X_\beta + Y_\beta \rangle$

$$\begin{aligned}ad(\mathfrak{so}(2)_1)(X_\alpha + Y_\alpha) &= x(X_\beta + Y_\beta), \\ ad(\mathfrak{so}(2)_1)(X_\beta + Y_\beta) &= -x(X_\alpha + Y_\alpha), \\ ad(\mathfrak{so}(2)_2)(X_\alpha + Y_\alpha) &= ad(\mathfrak{so}(2)_2)(X_\beta + Y_\beta) = 0.\end{aligned}$$

Assim, a transformação linear T comuta com a representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ . Pela Proposição 4.5 de (PATRAO; MARTIN, 2015), a aplicação T é um operador de intercâmbio para as \mathfrak{k}_Θ -representações sobre V_1 e V_3 . Além disso, os subespaços

$$V_{[(x,y)]} = \{xX + yTX : X \in V_1\},$$

onde $[(x,y)] \in \mathbb{RP}^1$, são os únicos subespaços K_Θ -invariantes em $V_1 \oplus V_3$.

Podemos definir de forma semelhante uma transformação linear $T : V_2 \longrightarrow V_4$, dada por $T(X_{13} - Y_{13}) = X_{24} - Y_{24}$ e $T(X_{14} - Y_{14}) = -(X_{23} - Y_{23})$. A representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ satisfaz as seguintes igualdades para $V_2, V_4 = \langle X_\alpha - Y_\alpha, X_\beta - Y_\beta \rangle$

$$\begin{aligned} ad(\mathfrak{so}(2)_2)(X_\alpha - Y_\alpha) &= x(X_\beta - Y_\beta), \\ ad(\mathfrak{so}(2)_2)(X_\beta - Y_\beta) &= -x(X_\alpha - Y_\alpha), \\ ad(\mathfrak{so}(2)_1)(X_\alpha - Y_\alpha) &= ad(\mathfrak{so}(2)_1)(X_\beta - Y_\beta) = 0. \end{aligned}$$

Essa transformação linear também comuta com a representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ . Portanto, os subespaços V_2 e V_4 são \mathfrak{k}_Θ -equivalentes e os subespaços

$$V_{[(x,y)]} = \{xX + yTX : X \in V_2\},$$

onde $[(x,y)] \in \mathbb{RP}^1$, são os únicos subespaços K_Θ -invariantes em $V_2 \oplus V_4$.

4. A representação de isotropia de \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4\}$.

Este caso pode ser visto mais detalhadamente em (PATRAO; MARTIN, 2015) (seção 5, página 575).

O espaço tangente a \mathbb{F}_Θ na origem, \mathfrak{m}_Θ , é formada por matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix},$$

onde X é uma matriz 4×4 anti-simétrica. Aqui \mathfrak{k} é a álgebra de Lie das matrizes

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha + \alpha^T = \beta + \beta^T = 0,$$

que é isomorfa a $\mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(4)$. Agora $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3)_1 \oplus \mathfrak{so}(3)_2$. Essas matrizes têm a forma

$$\mathfrak{so}(3)_1 : \begin{pmatrix} A & -B^T \\ B & A \end{pmatrix} \quad \mathfrak{so}(3)_2 : \begin{pmatrix} A & -B^T \\ B & -A \end{pmatrix},$$

com $A + A^T = 0$ onde B é simétrica com $\text{tr}B = 0$ para $\mathfrak{so}(3)_1$, enquanto

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

para $\mathfrak{so}(3)_2$. O espaço tangente ao flag na origem é dado pela soma dos subespaços $V_1 = X \cap \mathfrak{so}(3)_1$ e $V_2 = X \cap \mathfrak{so}(3)_2$. Assim,

$$\mathfrak{n}_\Theta^- = \langle Y_{12} + Y_{34}, Y_{13} - Y_{24}, Y_{14} + Y_{23} \rangle \oplus \langle Y_{12} - Y_{34}, Y_{13} + Y_{24}, Y_{14} - Y_{23} \rangle.$$

A representação adjunta de \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{n}_Θ^- é dada por

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [A, X] & 0 \end{pmatrix},$$

isto é, coincide com a representação adjunta de $\mathfrak{so}(4)$ nele mesmo. Como foi dito anteriormente, a álgebra $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3)_1 \oplus \mathfrak{so}(3)_2$ é semissimples e se decompõe em dois ideais simples. Cada ideal é um subespaço invariante e irredutível. No entanto, as representações de $\mathfrak{so}(4)$ nas componentes irredutíveis não são equivalentes. Isso porque a representação da primeira componente nela mesma é a representação adjunta de $\mathfrak{so}(3)$ enquanto que a representação da primeira componente na segunda componente é trivial. Portanto, os subespaços V_1 e V_2 de $\mathfrak{n}_{\bar{\Theta}}$ não são equivalentes.

5. A representação de isotropia de \mathbb{F}_{Θ} , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

A única componente \mathfrak{z}_{Θ} -invariante e irredutível, $V(\lambda_1 + \lambda_2)$, é formada pelos espaços de raízes \mathfrak{g}_{α} , com α pertencente ao conjunto abaixo:

$$\Pi(\lambda_1 + \lambda_2) = \{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_3 - \lambda_4\}.$$

O espaço tangente na origem do flag se decompõe em dois subespaços \mathfrak{k}_{Θ} -invariantes e irredutíveis de dimensão três e não equivalentes, descrito por

$$\mathfrak{n}_{\bar{\Theta}} = \langle Y_{12} + X_{34}, Y_{13} - X_{24}, X_{14} + Y_{23} \rangle \oplus \langle Y_{12} - X_{34}, Y_{13} + X_{24}, X_{14} - Y_{23} \rangle.$$

6. A representação de isotropia de \mathbb{F}_{Θ} , $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

Este caso é igual ao caso geral, isto é, o caso D_l , $l \geq 5$.

Temos que o espaço tangente ao flag na origem contém uma única componente \mathfrak{z}_{Θ} -invariante e irredutível $V(\lambda_1 - \lambda_2)$, dada por

$$\Pi(\lambda_1 - \lambda_2) = \{\lambda_1 \pm \lambda_2, \lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4\}.$$

Essa componente se decompõe em duas componentes K_{Θ} -invariantes e irredutíveis V_1 e V_2 , geradas por

$$V(\lambda_1 - \lambda_2) = \langle X_{12} + Y_{12}, X_{13} + Y_{13}, X_{14} + Y_{14} \rangle \oplus \langle X_{12} - Y_{12}, X_{13} - Y_{13}, X_{14} - Y_{14} \rangle.$$

As representações de $\mathfrak{k}_{\Theta} = \mathfrak{so}(3)_1 \oplus \mathfrak{so}(3)_2$ em V_1 e V_2 não são equivalentes. Isso porque $[\mathfrak{so}(3)_1, V_2] = [\mathfrak{so}(3)_2, V_1] = 0$, enquanto que a representação de $\mathfrak{so}(3)_1$ em V_1 não é trivial (da mesma forma a representação de $\mathfrak{so}(3)_2$ em V_2 não é trivial).

Estruturas complexas em D_4

Analisaremos a representação de isotropia dos flags de D_4 que admitem estruturas M -invariantes, para verificar se essas estruturas são K_{Θ} -invariantes.

1. Flag maximal.

Esse flag admite estruturas pseudo-complexas K_{Θ} -invariantes, uma vez que $K_{\Theta} = M$.

Dado $X_\alpha \in \mathfrak{m}_\Theta$, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, podemos definir $JX_\alpha = Y_\alpha$, $JX_\alpha = X_\beta$ ou $JX_\alpha = Y_\beta$, onde α é uma raiz M -equivalente à raiz β . Aqui, X_α e Y_α são geradores dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$, respectivamente.

Como cada classe de M -equivalência em D_4 possui quatro elementos, temos várias combinações a serem feitas para estruturas complexas invariantes em \mathbb{F}_\emptyset .

2. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$.

Pela representação de isotropia de K_Θ , obtemos que as estruturas complexas K_Θ -invariantes em \mathbb{F}_Θ são dadas por múltiplos não nulos do operador de intercâmbio entre as componentes K_Θ -equivalentes do espaço tangente ao flag na origem. Isto é,

$$\begin{aligned} JY_{12} &= \lambda_{12}Y_{34}, \\ J(X_{13} - X_{24}) &= a_1T(X_{13} - X_{24}) = a_1(Y_{13} - Y_{24}), \\ J(X_{14} + X_{23}) &= a_2T(X_{14} + X_{23}) = a_2(Y_{14} + Y_{23}), \\ J(X_{13} + X_{24}) &= a_3T(X_{13} + X_{24}) = a_3(Y_{13} + Y_{24}), \\ J(X_{14} - X_{23}) &= a_4T(X_{14} - X_{23}) = a_4(Y_{14} - Y_{23}), \end{aligned}$$

onde Y_{ij} é um gerador do espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$ e T é um o operador de intercâmbio entre as representações de K_Θ sobre $V(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $V(\lambda_1 + \lambda_3)$. Essa é a única possibilidade de obtermos estruturas K_Θ -invariantes em \mathbb{F}_Θ , pois uma estrutura que satisfizesse $JV(\lambda_1 \pm \lambda_3) = V(\lambda_1 \pm \lambda_3)$ seria $(K_\Theta)_0$ -invariante, mas não seria M -invariante.

3. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

Usando o mesmo argumento do item 2, obtemos que uma estrutura complexa K_Θ -invariante J é da forma

$$\begin{aligned} JY_{12} &= \lambda_{12}X_{34}, \\ J(X_{13} - Y_{24}) &= a_1T_1(X_{13} - Y_{24}) = a_1(Y_{13} - X_{24}), \\ J(Y_{14} + X_{23}) &= a_2T_1(Y_{14} + X_{23}) = a_2(X_{14} + Y_{23}), \\ J(X_{13} + Y_{24}) &= a_3T_2(X_{13} + Y_{24}) = a_3(Y_{13} + X_{24}), \\ J(Y_{14} - X_{23}) &= a_4T_2(Y_{14} - X_{23}) = a_4(X_{14} - Y_{23}), \end{aligned}$$

onde T_1 e T_2 são operadores de intercâmbio entre as componentes K_Θ -equivalentes do espaço tangente ao flag na origem.

4. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

Pelos mesmos motivos do item 2, uma estrutura complexa K_Θ -invariante J é da forma

$$\begin{aligned} JX_{12} &= \lambda_{12}Y_{12}, \\ J(X_{13} + Y_{13}) &= a_1T(X_{13} + Y_{13}) = a_1(X_{24} + Y_{24}), \\ J(X_{14} + Y_{14}) &= a_2T(X_{14} + Y_{14}) = -a_2(X_{23} + Y_{23}), \\ J(X_{13} - Y_{13}) &= a_3T(X_{13} - Y_{13}) = a_3(X_{24} - Y_{24}), \\ J(X_{14} - Y_{14}) &= a_4T(X_{14} - Y_{14}) = -a_4(X_{23} - Y_{23}), \end{aligned}$$

onde T é um operador de intercâmbio entre as componentes K_Θ -equivalentes do espaço tangente ao flag na origem.

5. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4\}$.

O espaço tangente a \mathbb{F}_Θ se decompõe em dois subespaços K_Θ -invariantes e irreduzíveis de dimensão três que não são equivalentes. Logo, esse flag não admite estruturas pseudo complexas invariantes.

6. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

Como no item anterior, o espaço tangente a \mathbb{F}_Θ se decompõe em dois subespaços K_Θ -invariantes e irreduzíveis de dimensão três que não são equivalentes. Logo, esse flag não admite estruturas pseudo complexas invariantes.

7. O flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$.

Como no caso geral, esse flag não admite estruturas complexas K_Θ -invariantes, uma vez que o espaço tangente é decomposto em dois subespaços K_Θ -invariantes e irreduzíveis de dimensão três e não equivalentes.

Em suma,

Proposição 3.21. *O flag maximal e os flags F_Θ , onde $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$ e $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, são os únicos flags de D_4 que admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes.*

3.6 Flags de G_2

$$G_2 \begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \circ \\ \swarrow \alpha_2 \end{array}$$

Sejam α_1 e α_2 as raízes simples de G_2 . Nesse caso, existem três variedades flags, \mathbb{F}_\emptyset , $\mathbb{F}_{\{\alpha_1\}}$ e $\mathbb{F}_{\{\alpha_2\}}$. As classes de M -equivalência de raízes positivas são

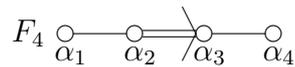
$$\{\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2\}, \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2\} \text{ e } \{\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}.$$

Não existem estruturas M -invariantes nos flags $\mathbb{F}_{\{\alpha_1\}}$ e $\mathbb{F}_{\{\alpha_2\}}$. De fato, $\{\alpha_1 + 2\alpha_2\}$ e $\{2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$ são classes de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$, para $\Theta = \{\alpha_1\}$ e $\Theta = \{\alpha_2\}$, respectivamente. Ou seja, existem classes de M -equivalência com um número ímpar de elementos fora de $\langle \Theta \rangle$. Portanto, esses flags não admitem tais estruturas.

O flag maximal admite estruturas complexas M -invariantes pois existem três classes de M -equivalência, cada uma com dois elementos. Portanto, temos o seguinte resultado:

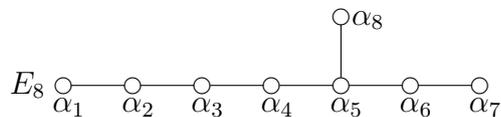
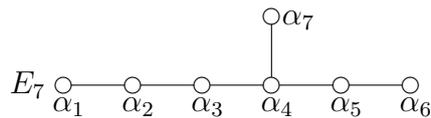
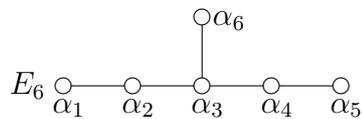
Proposição 3.22. *O flag maximal é o único flag da álgebra G_2 que admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Essas estruturas são parametrizadas por $(Gl(2, \mathbb{R})/Gl(1, \mathbb{C}))^3$.*

3.7 Flags de F_4



Não existem estruturas M -invariantes em nenhum flag \mathbb{F}_Θ de F_4 . De fato, se $\sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ são as raízes simples de F_4 , então $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$ é uma raiz curta gerada por todas as raízes simples e não por um subconjunto Θ de Σ . Além do mais, $\{\alpha\}$ é uma classe de M -equivalência, pois cada raiz curta forma uma classe de M -equivalência em F_4 . Assim, temos que $\{\alpha\}$ é uma classe de M -equivalência fora de $\langle \Theta \rangle$. Pela Proposição 3.1 F_4 não admite estruturas M -invariantes.

3.8 Flags de E_6 , E_7 e E_8



Para esses diagramas, as classes de M -equivalência de raízes positivas são conjuntos unitários. Pela Proposição 3.1 nenhum flag dessas álgebras admite estruturas pseudo-complexas K_Θ -invariantes.

4 Estruturas pseudo-complexas invariantes em Grassmannianas reais

Neste capítulo, mostraremos que as Grassmannianas reais não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes. Para isso, precisaremos de algumas noções de Geometria Invariante. As primeiras três seções, baseada no capítulo 14 de (MARTIN, 2015), foram dedicadas ao estudo das formas diferenciais, cohomologia de De Rham e variedades simplética. Nas seções 4.3 e 4.4, falaremos sobre formas simpléticas e estruturas complexas invariantes em espaços homogêneos. Na última seção, utilizamos os conceitos das seções anteriores para mostrar a não existência de estruturas complexas invariantes em Grassmannianas reais.

4.1 Formas diferenciais e cohomologia de De Rham

Dada uma ação diferenciável do grupo de Lie G na variedade M , uma k -forma diferencial α em M é invariante por G se para todo $g \in G$ vale $g^*\alpha = \alpha$, onde $g^*\alpha$ é o “pull-back” definido por $g^*\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(g_*X_1, \dots, g_*X_k)$.

No caso em que $M = G/H$ é um espaço homogêneo, uma forma diferencial invariante α é completamente determinada por seu valor α_{x_0} na origem $x_0 = 1 \cdot H$ de G/H . A k -forma alternada α_{x_0} é invariante pela representação de isotropia no sentido em que se $h \in H$ e $v_1, \dots, v_k \in T_{x_0}G/H$, então $(dh_{x_0})^*\alpha_{x_0}$, isto é,

$$\alpha_{x_0}(dh_{x_0}v_1, \dots, dh_{x_0}v_k) = \alpha_{x_0}(v_1, \dots, v_k).$$

Num ponto arbitrário $x \in G/H$ a k -forma α_x é dada, por $\alpha_x = (g^{-1})^*\alpha_{x_0}$ se $x = gx_0$, isto é,

$$\alpha_x(w_1, \dots, w_k) = \alpha_{x_0}((dg_{x_0})^{-1}w_1, \dots, (dg_{x_0})^{-1}w_k).$$

Essa expressão independe de $g \in G$ tal que $x = gx_0$, pois α_{x_0} é invariante pela representação de isotropia.

O espaço das k -formas diferenciais em G/H é denotado por $\wedge^k(G/H)$ enquanto que o subconjunto das formas invariantes é denotado por $\wedge_{inv}^k(G/H)$. Esse conjunto é um subespaço vetorial de $\wedge^k(G/H)$ pois $\alpha \mapsto g^*\alpha$ é linear. Além disso, $\wedge_{inv}^k(G/H)$ é uma subálgebra com o produto exterior, já que $g^*(\alpha \wedge \beta) = g^*\alpha \wedge g^*\beta$.

Uma das questões a se discutir sobre uma k -forma diferencial α é sua diferencial exterior $d\alpha$, cuja definição numa variedade diferenciável M é dada por

$$\begin{aligned}
 (d\alpha)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1} X_i \alpha \left(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1} \right) \\
 &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+1} X_i \alpha \left([X_1, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1} \right) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

onde X_1, \dots, X_{k+1} são campos de vetores em M .

No caso de uma forma diferencial invariante α num espaço homogêneo G/H , a expressão 4.1 pode ser simplificada, uma vez que os termos na primeira soma são incorporados na segunda soma.

Lema 4.1. *Seja α uma k -forma diferencial invariante em G/H e $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$. Então,*

$$\tilde{X}\alpha(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k) = \alpha([\tilde{X}, \tilde{X}_1], \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k) + \dots + \alpha(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, [\tilde{X}, \tilde{X}_k]).$$

Proposição 4.1. *Seja α uma k -forma diferencial invariante em G/H . Tome $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{g}$ e sejam $\tilde{X}_i, i = 1, \dots, k$, os campos induzidos em G/H . Então,*

$$(d\alpha)(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha \left([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j], \tilde{X}_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \tilde{X}_{k+1} \right). \quad (4.2)$$

A fórmula 4.2 da diferencial exterior está escrita em termos dos campos de vetores $\tilde{X}, X \in \mathfrak{g}$, apesar da diferencial exterior depender apenas dos valores desses campos num ponto dado. Na origem x_0 do espaço homogêneo isso pode ser explicitado da seguinte forma. Tome um subespaço $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Se $X, Y \in \mathfrak{m}$ então $[\tilde{X}, \tilde{Y}](x_0) = \tilde{Z}(x_0)$ onde $Z = pr_{\mathfrak{m}}[X, Y]$. Usando essa notação a expressão em 4.2 se traduz como

$$(d\alpha)(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha_{x_0} \left([X_i, X_j]_{\mathfrak{m}}, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1} \right), \quad (4.3)$$

se $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{m}$. O segundo membro de 4.3 depende apenas das propriedades algébricas da álgebra de Lie \mathfrak{g} e define uma aplicação linear $d : \wedge^k \mathfrak{m} \rightarrow \wedge^{k+1} \mathfrak{m}$.

Antes de prosseguir deve-se observar que se α é uma forma diferencial invariante, então $d\alpha$ também é invariante, pois $g^*d\alpha = dg^*\alpha = d\alpha$. Isso acarreta, por exemplo, que se $d\alpha$ se anula num ponto então $d\alpha$ é identicamente nula.

A diferencial exterior de formas diferenciais satisfaz $d^2 = 0$ o que dá origem à **cohomologia de De Rham** das variedades diferenciáveis. Uma forma diferencial α é fechada se $d\alpha = 0$ e é exata se $\alpha = d\beta$ para alguma forma β . Como $d^2 = 0$, toda forma exata é fechada. A k -ésima cohomologia de De Rham $\mathcal{H}_{dR}^k(M)$ de uma variedade M é definida como sendo o espaço das k -formas fechadas módulo as exatas, isto é,

$$\mathcal{H}_{dR}^k(M) = \ker d_k / \text{im } d_{k-1},$$

onde d_k é a restrição da diferencial exterior às k -formas. Duas formas diferenciais fechadas α e β são cohomólogas se existe γ tal que $\alpha - \beta = d\gamma$, nesse caso, se escreve $\alpha \sim \beta$. A classe de cohomologia de α é denotada por $[\alpha]$.

Uma cohomologia semelhante pode ser definida para formas invariantes. De fato, se α é uma forma diferencial invariante pela ação do grupo G , então $d\alpha$ também é invariante. Portanto, se $G \times M \rightarrow M$ é uma ação diferenciável, pode-se definir a **cohomologia invariante** $\mathcal{H}_{inv}^k(M, G)$ como sendo o quociente acima em que d_k é interpretado como a diferencial exterior restrita às formas invariantes. No caso de um espaço homogêneo $M = G/H$, essa cohomologia será denotada por $\mathcal{H}_{inv}^k(M, G)$. Para duas formas invariantes e fechadas, α e β , se escreve $\alpha \sim_{inv} \beta$ se $\alpha - \beta = d\gamma$ com γ também invariante. A classe de cohomologia invariante de α é denotada por $[\alpha]_{inv}$.

Sejam α e β formas invariantes fechadas em G/H . É evidente a partir das definições que se $\alpha \sim_{inv} \beta$ então $\alpha \sim \beta$. Isso significa que se $[\alpha]_{inv} = [\beta]_{inv}$, então $[\alpha] = [\beta]$, o que fornece aplicações bem definidas

$$\mathcal{H}_{inv}^k(M, G) \rightarrow \mathcal{H}_{dR}^k(G/H) \quad [\alpha]_{inv} \rightarrow [\alpha]. \quad (4.4)$$

Em geral, essa aplicação não é injetora nem sobrejetora, ou seja, as cohomologias $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H)$ e $\mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$ podem ser diferentes. Um exemplo típico é o caso do grupo abeliano \mathbb{R}^n .

Exemplo 4.1. Tome o espaço homogêneo $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n/\{0\}$ obtido por translações no grupo abeliano \mathbb{R}^n . Se (x_1, \dots, x_n) é um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^n então as k -formas diferenciais se escrevem como

$$\alpha = \sum a_I(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ onde $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $a_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. A diferencial exterior em coordenadas é dada por $d\alpha = \sum da_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Como as 1-formas dx_i são invariantes por translações, segue que α é invariante se, e só se, as funções a_I são constantes. Daí, se α é invariante então $d\alpha = 0$ e, portanto, duas formas invariantes distintas não são cohomologas. Isso significa que $\mathcal{H}_{inv}^k(\mathbb{R}^n) = \wedge_{inv}^k(\mathbb{R}^n)$, que é não nulo. Por outro lado, sabe-se que $k \geq 1$ então $\mathcal{H}_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$ se anula. Portanto, $\mathcal{H}_{inv}^k(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{H}_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$.

No entanto, será mostrado a seguir que se G é compacto então a aplicação 4.4 é um isomorfismo de tal forma que $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H) = \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$.

Suponha, a partir de agora, que G é compacto. A razão pela qual o isomorfismo vale nesse caso vem da possibilidade de integrar formas diferenciais, em relação à medida de Haar de G , e obter formas diferenciais invariantes por G .

Essa integração é feita da seguinte maneira. Seja α uma k -forma diferencial em G/H . Se $g \in G$ então $g^*\alpha$ é uma nova forma diferencial em G/H , cujo valor $(g^*\alpha)_x$ em $x \in G/H$ é um elemento do espaço co-tangente T_x^*G/H . A aplicação $g \in G \mapsto (g^*\alpha)_x \in T_x^*G/H$ assume valores num espaço vetorial. Faz sentido então tomar a sua integral

$$(I\alpha)_x = \int_G (g^*\alpha)_x \mu(dg),$$

onde μ é a medida de Haar de G . A integral existe pois o integrando é uma função contínua de g e G é compacto. (Se $v_1, \dots, v_k \in T_xG/H$ então $(g^*\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{gx}(dg_x(v_1), \dots, dg_x(v_k))$, que depende continuamente de g pois α e a ação $G \times G/H \rightarrow G/H$ são diferenciáveis.)

Se $x \in G/H$ é fixado então $(I\alpha)_x$ é uma forma alternada em T_xG/H , isto é, é um elemento de $\wedge^k T_x^*G/H$. Portanto, $x \mapsto (I\alpha)_x$ define uma seção de $\wedge^k T^*G/H$. Essa seção é diferenciável pois se X_1, \dots, X_k são campos de vetores diferenciáveis em G/H então

$$I\alpha(X_1, \dots, X_k)(x) = \int_G \alpha_{gx} dg_x(X_1(x)), \dots, dg_x(X_k(x)) \mu(dg).$$

O integrando é uma função diferenciável nas variáveis x e g , portanto a integral é diferenciável como função de x .

Em suma, $I\alpha$ é uma k -forma diferencial.

Lema 4.2. $I\alpha$ é G -invariante.

Portanto, $\alpha \mapsto I\alpha$ define uma aplicação no espaço das formas diferenciais cuja imagem é o subespaço das formas invariantes, pois $I\alpha = \alpha$ se α é invariante. Da definição, se vê de imediato que I é linear. A propriedade de I que permite o seu uso em cohomologia é a comutatividade com a diferencial exterior.

Lema 4.3. $I \circ d = d \circ I$.

A partir desse lema pode-se mostrar a injetividade do homomorfismo natural $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H) \rightarrow \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$.

Proposição 4.2. Se G é compacto então o homomorfismo

$$[\alpha]_{inv} \in \mathcal{H}_{inv}^k(G/H) \mapsto [\alpha] \in \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$$

é injetor.

Demonstração. Sejam α e β formas diferenciais invariantes fechadas e suponha que $[\alpha] = [\beta]$. Então, existe γ tal que $\alpha - \beta = d\gamma$. Aplicando I a essa igualdade se obtém, pelo lema anterior,

$$\alpha - \beta = I(\alpha - \beta) = I(d\gamma) = d(I\gamma)$$

e, portanto, $[\alpha]_{inv} = [\beta]_{inv}$, já que $I\gamma$ é uma forma diferencial invariante. \square

Para mostrar a sobrejetividade do homomorfismo deve-se encontrar para cada forma diferencial fechada β uma forma invariante fechada α tal que $[\alpha] = [\beta]$. A candidata é a forma invariante $\alpha = I\beta$, que é fechada se β é fechada, pois $d\alpha = d(I\beta) = I(d\beta) = 0$. A sobrejetividade será então verificada assim que se provar que qualquer forma fechada β é cohomóloga a $I\beta$. Isso será provado com a hipótese adicional de que G é conexo.

Para isso serão usados alguns conceitos e fatos sobre homologia singular de classe \mathcal{C}^1 . Essa homologia é definida sobre o espaço vetorial real

$$C = \bigoplus_{k \geq 0} C_k,$$

onde C_k é o espaço vetorial gerado sobre \mathbb{R} (que é o caso aqui) pelos ciclos de classe \mathcal{C}^1 de dimensão k em $M = G/H$. Sendo que um ciclo de dimensão k é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$, onde Δ_k é o simplexo de dimensão k definido por

$$\Delta_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_k \leq 1\}.$$

O ciclo ρ é de classe \mathcal{C}^1 se ele é a restrição de uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 , $\sigma : U \rightarrow M$ onde $U \subset \mathbb{R}^{k+1}$ é um aberto que contém Δ_{k+1} .

Em C se define operadores fronteira $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ que satisfazem $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Essa composta implica que $im\partial_{k+1} \subset \partial_k$ e com isso a homologia singular de M é definida por

$$\mathcal{H}_k(M) = ker\partial_k / im\partial_{k+1}.$$

Dois ciclos σ_1 e σ_2 de dimensão k são homólogos se existe $\tau \in C_{k+1}$ tal que $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial_{k+1}\tau$, isto é, se $\sigma_1 - \sigma_2 \in im\partial_{k+1}$. A classe de homologia de $\sigma \in C$ é denotada por $[\sigma]$.

Os operadores fronteira ∂_k não serão explicitados aqui. Deve-se observar, no entanto, que eles são definidos de maneira apropriada de tal forma que vale o teorema de Stokes, que se resume na fórmula

$$\int_{\sigma} d\alpha = \int_{\partial_{k+1}\sigma} \alpha. \quad (4.5)$$

Nessa fórmula α é uma k -forma diferencial e $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow M$ é um $(k + 1)$ -ciclo de classe \mathcal{C}^1 .

Antes de prosseguir, deve-se observar que os ciclos diferenciáveis e a correspondente homologia são necessários aqui para dar sentido à integral de uma forma diferencial em relação a um ciclo e conseqüentemente, ter acesso ao teorema de Stokes. Para um ciclo $\sigma : U \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^1 , com $\Delta_{k+1} \subset U$, existe o “pull-back” $\sigma^*\alpha$, que é uma forma volume em $U \subset \mathbb{R}^k$. A integral da forma diferencial α sobre σ é definida como sendo

$$\int_{\sigma} \beta = \int_{\Delta_k} f_{\sigma,\beta}(x)dx,$$

onde dx é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^k e, $f_{\sigma,\beta} : \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida pela expressão

$$\alpha^*\beta = f_{\sigma,\beta}(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k, \tag{4.6}$$

onde $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ é a forma volume de \mathbb{R}^k dada pelo sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) .

O teorema de Stokes mostra que se α é uma k -forma diferencial fechada então

$$\int_{\partial_{k+1}\sigma} \alpha = 0,$$

para todo ciclo σ de dimensão $k + 1$. Portanto, se τ_1 e τ_2 são ciclos homólogos de dimensão k então

$$\int_{\tau_1} \alpha = \int_{\tau_2} \alpha.$$

Para essa igualdade, a integral em relação a α passa ao quociente e define uma aplicação linear $T_{\alpha} : \mathcal{H}_k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_{\alpha}[\sigma] = \int_{\sigma} \alpha.$$

O funcional linear T_{α} depende, na verdade, só da classe de cohomologia α . Isso porque se α e β são k -formas fechadas com $\alpha - \beta = d\gamma$ e σ é um ciclo de dimensão k , então

$$\int_{\sigma} (\alpha - \beta) = \int_{\sigma} d\gamma = \int_{\partial_k\sigma} \gamma$$

e essa última integral se anula se $\partial_k\sigma = 0$. A recíproca dessa afirmação é um dos resultados principais da cohomologia de De Rham, que não será demonstrado aqui.

Proposição 4.3. *Sejam α e β k -formas diferenciais fechadas. Então, $T_{\alpha} = T_{\beta}$ se, e só se, α e β são cohomólogas.*

Antes de concluir a demonstração da sobrejetividade do homomorfismo $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H) \rightarrow \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$, deve-se atentar para esses dois lemas.

O primeiro deles está relacionado à ação de G na homologia singular $\mathcal{H}_k(G/H)$. Se $g \in G$ e $\sigma : \Delta_k \rightarrow G/H$ é um ciclo de classe \mathcal{C}^1 então $g\sigma = g \circ \sigma$ também é um ciclo. Via a composta com ciclos g induz uma aplicação linear em $C = \bigoplus_{k \geq 0} C_k$, também denotada por g . Da teoria de homologia singular sabe-se que g comuta com os operadores ∂_k e, portanto, induz aplicações nos espaços de homologia $\mathcal{H}_k(G/H)$, usualmente denotada por $g_*[\sigma] = [g\sigma]$, $\sigma \in C$.

Lema 4.4. *Se G é conexo então as aplicações $g_* = Id$ para todo $g \in G$.*

Lema 4.5. *Se β é uma forma diferencial e σ um ciclo, então*

$$\begin{aligned} f_{\sigma, I\beta} &= \int_G f_{\sigma, g^*\beta}(x) \mu(dg) \\ &= \int_G f_{g\sigma, \beta}(x) \mu(dg), \end{aligned}$$

onde $f_{\sigma, \alpha}$ foi definido em (4.6).

Agora é possível provar que uma forma diferencial β é cohomóloga a sua média $\alpha = I\beta$, em relação à medida de Haar em G .

Proposição 4.4. *Suponha G compacto e conexo. Dada a forma diferencial β defina, como anteriormente,*

$$I\beta = \int_G (g^*\beta) \mu(dg).$$

Então, β e $I\beta$ são cohomólogas.

Demonstração. Pela Proposição 4.3, deve-se mostrar que $T_{I\beta} = T_\beta$. Se $[\sigma]$ é uma classe de homologia, então por definição,

$$T_{I\beta}[\sigma] = \int_\sigma I\beta = \int_{\Delta_k} f_{\sigma, I\beta}(x) dx.$$

Mas, pelo lema 4.8, $f_{\sigma, I\beta}(x) = \int_G f_{g\sigma, \beta}(x) \mu(dg) dx$, daí

$$T_{I\beta}[\sigma] = \int_{\Delta_k} \int_G f_{g\sigma, \beta}(x) \mu(dg) dx.$$

Pelo teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} T_{I\beta}[\sigma] &= \int_G \left(\int_{\Delta_k} f_{g\sigma, \beta}(x) dx \right) \mu(dg) \\ &= \int_G \left(\int_{g\sigma} \beta \right) \mu(dg) \\ &= \int_G T_\beta[g\sigma] \mu(dg). \end{aligned}$$

Mas, $T_\beta[g\sigma] = T_\beta[\sigma]$, como foi assegurado no lema 4.9. Portanto,

$$T_{I\beta}[\sigma] = \int_G T_\beta[\sigma]\mu(dg) = I_\beta[\sigma],$$

o que conclui a demonstração. \square

Como mencionado anteriormente, o fato de que $I\beta \sim \beta$ implica que o homomorfismo natural $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H) \mapsto \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$ é sobrejetor, já que β é a imagem da forma invariante $I\beta$. Com isso se conclui a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Se G é compacto e conexo então o homomorfismo*

$$[\alpha]_{inv} \in \mathcal{H}_{inv}^k(G/H) \rightarrow [\alpha] \in \mathcal{H}_{dR}^k(G/H)$$

é um isomorfismo.

Pela fórmula 4.3 da diferencial exterior das formas invariantes, se vê que $d : \wedge^k \mathfrak{m} \rightarrow \wedge^{k+1} \mathfrak{m}$ depende apenas de propriedades algébricas da álgebra de Lie, assim como os espaços de cohomologia $\mathcal{H}_{inv}^k(G/H)$. Em particular, esses espaços são de dimensão finita.

Exemplo 4.2. *Um grupo de Lie G compacto e conexo pode ser visto como espaço homogêneo ou $G = G/\{1\}$, com a ação dada por translações à esquerda, ou com $G = G \times G/\Delta_G$ com a ação dada por $(g, h)x = gxh^{-1}$, onde Δ_G é a diagonal. O teorema 4.1 se aplica a ambos os casos, fornecendo isomorfismos da cohomologia de De Rham de G , com a cohomologia das formas invariantes à esquerda (para $G = G/\{1\}$) e a das formas bi-invariantes (para $G = G \times G/\Delta$). Segue que as cohomologias invariantes à esquerda e bi-invariante coincidem.*

A cohomologia invariante à esquerda é definida sobre as formas alternadas na álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , com a diferencial exterior dada por (4.2). Em termos de cohomologia de representações de álgebras de Lie, essa é a cohomologia da representação trivial de \mathfrak{g} . Já a cohomologia bi-invariante é definida no subespaço das formas alternadas em \mathfrak{g} que são fixadas pela representação adjunta que, em geral, é menor que o espaço de todas as formas alternadas.

Exemplo 4.3. *Para $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $n \geq 2$, a representação de isotropia é equivalente à representação canônica de $SO(n)$ em \mathbb{R}^n . Essa representação admite as formas volume invariantes $adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $a \in \mathbb{R}$, pois $\det g = 1$ se $g \in SO(n)$. Essas são as únicas formas invariantes não nulas. Para ver isso tome a base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual da base canônica. Então, uma base do espaço $\wedge^m(\mathbb{R}^n)^*$ das m -formas em \mathbb{R}^n é dada por*

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i_m},$$

com $I = \{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ um multi-índice. A representação de $SO(n)$ é definida por

$$g \cdot \varepsilon_I = g \cdot \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge g \cdot \varepsilon_{i_m}, \quad g \in SO(n),$$

onde $g \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i \circ g^{-1}$ é a representação dual. A representação infinitesimal é

$$X \cdot \varepsilon_I = \frac{d}{dt} e^{tX} \varepsilon_I = \sum_{j=1}^m X \cdot \varepsilon_{i_j} \quad X \in \mathfrak{so}(n),$$

onde $X \cdot \varepsilon_i = -\varepsilon_i \circ X$. Um elemento $\alpha \in \wedge^m(\mathbb{R}^n)^*$ é invariante por $SO(n)$ se, e só se, $X \cdot \alpha = 0$ para todo $X \in \mathfrak{so}(n)$.

Tome a matriz $A_{jk} = E_{kj} - E_{jk} \in \mathfrak{so}(n)$ com $j < k$. Então, $A_{jk} \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_k$, $A_{jk} \cdot \varepsilon_k = \varepsilon_j$ e A_{jk} se anula nos demais elementos da base. Portanto, $A_{jk} \cdot \varepsilon_I = 0$ se $j, k \notin I$ ou se $j, k \in I$. Além do mais, dado um multi-índice I tal que $j \in I$ e $k \notin I$, seja $I_{(jk)}$ o multi-índice obtido de I substituindo j por k , que é colocado na posição correta para manter a ordem crescente dos índices. Então,

$$A_{jk} \cdot \varepsilon_I = (-1)^r \varepsilon_{I_{jk}} \quad e \quad A_{jk} \cdot \varepsilon_I = -(-1)^r \varepsilon_{I_{jk}}$$

onde r é a quantidade de índices $i \in I$ tal que $j < i < k$.

Seja agora $\alpha = \sum_I a_I \varepsilon_I$ tal que $X \cdot \alpha = 0$, $X \in \mathfrak{so}(n)$, e tome um multi-índice I .

Se $m < n$ então existem $j \in I$ e $k \notin I$, de tal forma que

$$A_{jk} \cdot \alpha = (-1)^r (a_{I_{(jk)}} - a_{I_{(jk)}} \varepsilon_I) + \dots,$$

onde o símbolo \dots representa uma combinação linear dos outros elementos da base. Como $A_{jk} \cdot \alpha = 0$ se conclui que $a_I = 0$, mostrando que $\alpha = 0$.

Pelo teorema 4.1, se conclui que $\mathcal{H}^n(S^n) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{H}^m(S^n) = \{0\}$ se $1 \leq m < n$.

Os mesmos argumentos se aplicam ao espaço projetivo

$$\mathbb{R}P^n = SO(n)/\{\pm 1\} \times O(n).$$

A representação de isotropia ρ em \mathbb{R}^n é dada por $\rho(\det g, g) = (\det g)g$. Da mesma maneira, se $1 \leq m < n$ então não existem m -formas invariantes e $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}P^n) = \{0\}$ se $m < n$. Se $m = n$ e $\det g = -1$ então $\det(-g) = (-1)^n \det g = (-1)^{n+1}$ e as formas volume são invariantes se, e só se, n é ímpar. Portanto, $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{R}$ se n é ímpar e todas as cohomologias de De Rham se anulam se n é par.

4.2 Variedade simplética

Uma **forma simplética** ω num espaço vetorial V ($\dim V < \infty$) é uma forma bilinear anti-simétrica que é não degenerada, isto é, para qualquer $x \in V$ existe $y \in V$

tal que $\omega(x, y) \neq 0$. A seguir são listadas algumas propriedades algébricas de um espaço vetorial com uma forma simplética.

1. A propriedade de que ω é não degenerada é equivalente ao fato de que a aplicação linear $\iota : V \rightarrow V^*$, $\iota(x)(\cdot) = \omega(x, \cdot)$, é isomorfismo.

2. Dado $W \subset V$ seja

$$W^\perp = \{y \in V : \forall x \in W, \omega(x, y) = 0\}$$

o seu ortogonal em relação a ω . Então, $W^\perp = \iota^{-1}(W^\circ)$, onde W° é o anulador de W . Como $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$, segue que $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

3. Um subespaço $W \subset V$ é isotrópico se a restrição de ω a $W \times W$ é identicamente nula, isto é, W é isotrópico se, e só se, $W \subset W^\perp$. Existem subespaços isotrópicos não triviais, pois $\omega(x, x) = 0$ para qualquer x e, portanto, o subespaço gerado por $x \in V$ é isotrópico. Além do mais, a fórmula da dimensão, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, implica que $\dim W \leq \dim V/2$ se W é um subespaço isotrópico.

4. Se $W \subset V$ é um subespaço isotrópico tal que $\dim W < \dim V/2$, então W está contido propriamente em W^\perp . Daí que se $x \in W^\perp \setminus W$ então $U = W \oplus \langle x \rangle$ é um subespaço isotrópico com $\dim U = \dim W + 1$.

5. Segue do item anterior, por indução, que existe $W \subset V$ subespaço isotrópico com $\dim W = \dim V/2$ e, portanto, $\dim V$ é par. (Um subespaço isotrópico com dimensão máxima é chamado de subespaço Lagrangeano.)

6. Pode-se escrever ω na seguinte forma canônica: se $\dim V = 2n$ então existe uma base $B = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ tal que

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad \omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j).$$

A matriz de ω em relação a essa base é dada por

$$[\omega]_B = J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n \times n} \\ 1_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por essa matriz segue que, se $\{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n\}$ é a base dual de B , então

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n. \quad (4.7)$$

Uma **forma simplética** numa variedade diferenciável M é uma 2-forma diferencial ω fechada ($d\omega = 0$) e não degenerada, isto é, para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$ existe $w \in T_x M$ tal que $\omega_x(v, w) \neq 0$. Para cada $x \in M$ a forma bilinear ω_x é uma forma simplética no espaço vetorial $T_x M$. Portanto, a existência de uma forma simplética em M

acarreta que $\dim M$ é par. Uma variedade M munida de uma forma simplética é chamada de **variedade simplética**. Um dos resultados clássicos sobre variedades simpléticas é o teorema de Darboux. Esse teorema garante que localmente ω é equivalente à forma simplética canônica 4.7 num espaço vetorial, no sentido em que para todo x a expressão da forma simplética ω nesse sistema de coordenadas é 4.7.

Numa variedade simplética (M, ω) as aplicações $\iota_x(v) = \omega_x(v, \cdot)$ definem um isomorfismo entre os fibrados tangentes TM e cotangentes T^*M . Esse isomorfismo permite definir um dos conceitos básicos da geometria simplética, que são os campos Hamiltonianos.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável ($\mathcal{C}^k, k \geq 1$) com diferencial df_x , $x \in M$. Então $\iota_x^{-1}df_x$ é um vetor tangente em x , o que permite definir um campo de vetores X_f em M , que é dado explicitamente por

$$df_x(\cdot) = \omega(X_f(x), \cdot).$$

O campo X_f é um **campo Hamiltoniano** em M . A função f é chamada de função Hamiltoniana (ou função energia) do campo X_f . Deve-se observar que não se tem unicidade das funções Hamiltonianas, pois de f é uma função Hamiltoniana do campo Hamiltoniano X e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $f + c$ também é uma função Hamiltoniana de X .

A seguir são listadas algumas propriedades dos campos Hamiltonianos, que serão utilizadas posteriormente no estudo de ações de grupos.

1. Seja X um campo Hamiltoniano com fluxo ϕ_t . Então, a derivada de Lie $L_X\omega = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)_{t=0}$ se anula, o que implica que $\phi_t^*\omega = \omega$. De fato, a fórmula de Cartan para a derivada de Lie é dada por

$$L_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_Xd\omega,$$

onde ι_X denota o produto interior, isto é, $\iota_X\omega$ é a 1-forma $\iota_X\omega(\cdot) = \omega(X, \cdot)$. Nessa fórmula o último termo se anula pois $d\omega = 0$. Já $d(\iota_X\omega) = d(df) = 0$, se f é uma função Hamiltoniana de X .

2. Reciprocamente, suponha que X é um campo de vetores em (M, ω) tal que $L_X\omega = 0$. Então, pela fórmula de Cartan, se conclui que a 1-forma diferencial $\iota_X\omega$ é fechada. Se ela for exata, então $\iota_X\omega = df$ e X é um campo Hamiltoniano. Isso ocorre, por exemplo, se a cohomologia de De Rham $\mathcal{H}_{dR}^1(M) = \{0\}$. De qualquer forma, M é localmente difeomorfa a \mathbb{R}^n e, portanto a forma $\iota_X\omega$ é localmente exata se ela for fechada. Daí, existem abertos de M tais que as restrições de X a esses abertos são

campos Hamiltonianos. Por essa razão um campo de vetores X tal que $L_X\omega = 0$ é denominado de campo **localmente Hamiltoniano**.

3. Sejam X e Y os campos Hamiltonianos das funções f_X e f_Y , respectivamente. Então seu colchete de Lie $[X, Y]$ é o campo Hamiltoniano da função $\omega(X, Y)$. A função $\omega(X, Y)$ é chamada de **colchete de Poisson** das funções f_X e f_Y e denotada por $\{f_X, f_Y\}$. Esse colchete é antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

Seja agora $G \times M \rightarrow M$ uma ação diferenciável do grupo de Lie G na variedade simplética (M, ω) . Essa é uma **ação simplética** se os elementos de G preservam ω , isto é, $g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. Nesse caso, a ação infinitesimal da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é dada por campos localmente Hamiltonianos. Isso porque se $X \in \mathfrak{g}$ então o fluxo do campo induzido \tilde{X} é a exponencial e^{tX} . Daí, $L_X\omega = 0$ pois $(e^{tX})^*\omega = \omega$. Reciprocamente, se os campos de vetores $\tilde{X}, X \in \mathfrak{g}$, são localmente Hamiltonianos e G é conexo, então a ação de G é simplética. Uma **ação Hamiltoniana** é uma ação simplética em que os campos de vetores $\tilde{X}, X \in \mathfrak{g}$, são (globalmente) Hamiltonianos.

Nem toda ação simplética é Hamiltoniana (veja o exemplo abaixo). No entanto, vale observar que se G e M são conexos e a ação de G em (M, ω) é simplética então essa ação se levanta a uma ação Hamiltoniana nos recobrimentos universais. De fato, sejam $p: \tilde{G} \rightarrow G$ e $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ os recobrimentos universais. Então, pelo teorema de Lie-Palais, a ação de G em M se levanta a uma ação de \tilde{G} em \tilde{M} de tal forma que $\pi \circ g = p(g) \circ \pi$ para todo $g \in \tilde{G}$. A ação de \tilde{G} preserva a forma simplética $\pi^*\omega$ em \tilde{M} e, portanto, essa ação é Hamiltoniana pois a cohomologia de De Rham de \tilde{M} se anula (veja a Proposição 4.3).

Seja agora $M = G/H$ um espaço homogêneo. Uma 2-forma invariante ω é completamente determinada pelo seu valor ω_0 na origem x_0 de G/H , que é uma forma bilinear antissimétrica em $T_{x_0}G/H$, invariante pela representação de isotropia, isto é, $(dh_{x_0})^*\omega_0 = \omega_0$ para todo $h \in H$. A 2-forma ω é então dada em T_xG/H por

$$\omega_x = (dg_x^{-1})^*\omega_0,$$

onde $g \in G$ é qualquer elemento $gx_0 = x$. Como dg_x^{-1} é isomorfismo, se conclui que se ω_0 é não degenerada então cada ω_x também é não degenerada. Já a diferencial exterior de uma forma invariante num espaço homogêneo foi calculada na Proposição 4.1. No caso de uma 2-forma ela se reduz a

$$(d\omega)(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2], \tilde{X}_3) + \omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_3], \tilde{X}_2) - \omega([\tilde{X}_2, \tilde{X}_3], \tilde{X}_1), \quad (4.8)$$

que coincide com a soma cíclica

$$-\left(\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2], \tilde{X}_3) + \omega([\tilde{X}_2, \tilde{X}_3], \tilde{X}_1) + \omega([\tilde{X}_3, \tilde{X}_1], \tilde{X}_2)\right).$$

Para olhar essa diferencial exterior do ponto de vista da fórmula algébrica (4.3), seja \mathfrak{m} um subespaço complementar à álgebra de Lie \mathfrak{h} de H , denote por $pr_{\mathfrak{m}}$ a projeção sobre \mathfrak{m} em relação à decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ e escreva $[X, Y]_{\mathfrak{m}} = pr_{\mathfrak{m}}[X, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{m}$. Então, $d\omega = 0$ se, e só se,

$$\omega_0([X_1, X_2]_{\mathfrak{m}}, X_3) + \omega_0([X_2, X_3]_{\mathfrak{m}}, X_1) + \omega_0([X_3, X_1]_{\mathfrak{m}}, X_2) = 0, \quad (4.9)$$

para toda terna (X_1, X_2, X_3) de elementos de \mathfrak{m} .

Uma vez feita a escolha do complementar \mathfrak{m} , uma forma simplética em G/H (se existe) é dada por uma forma bilinear anti-simétrica e não degenerada ω_0 em \mathfrak{m} que satisfaz 4.9.

Se ω é uma forma simplética invariante em G/H então a ação de G em G/H é simplética. Essa ação nem sempre é Hamiltoniana, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.4. *Seja G o toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que age em si mesmo por translações. A forma simplética canônica $\omega = dx \wedge dy$ em \mathbb{R}^2 (= álgebra de Lie de T^2) define uma forma simplética invariante em T^2 e, portanto, uma ação simplética. Essa ação não é Hamiltoniana. De fato, os campos invariantes são os campos induzidos em T^2 pelos campos constantes $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, $a, b \in \mathbb{R}$, de \mathbb{R}^2 . Esses campos de vetores não são Hamiltonianos.*

Para ver isso tome, por exemplo, o campo de vetores X induzido $\frac{\partial}{\partial x}$. A 1-forma $\alpha = \iota_X \omega = \omega(\frac{\partial}{\partial x}, \cdot)$ restrita ao aberto de T^2 , representado pelo quadrado $(0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, é dada por dy . Essa 1-forma não é exata, pois se $\alpha = df$ então a função f deve satisfazer $f(x, y) = y + c$ em $(0, 1)^2$ para alguma constante c . Mas, uma função do tipo $y + c$ não se estende a uma função em T^2 , o que mostra que a ação não é Hamiltoniana.

Representação coadjunta

Uma classe fundamental de exemplos de espaços homogêneos com ação Hamiltoniana é dada pelas órbitas da representação co-adjunta Ad^* de G no dual \mathfrak{g}^* da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Essa representação é definida por $\text{Ad}^*(g)\alpha = \alpha \circ \text{Ad}(g^{-1})$, $g \in G$ e $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Sua representação infinitesimal $\text{ad}^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ é dada por $\text{ad}^*(X)\alpha = -\alpha \circ \text{ad}(X)$. A representação Ad^* fornece uma ação de G em \mathfrak{g}^* para a qual os campos de vetores induzidos \tilde{X} , $X \in \mathfrak{g}$, são dados por $\tilde{X} = \text{ad}^*(X)$.

Para $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ seja $G \cdot \alpha = \text{Ad}^*(G)\alpha$ sua órbita pela representação coadjunta. Essa órbita se identifica ao espaço homogêneo G/Z_{α} , onde Z_{α} é o subgrupo fechado

$$Z_{\alpha} = \{g \in G : \alpha \circ \text{Ad}(g^{-1}) = \alpha\}.$$

A álgebra de Lie \mathfrak{z}_{α} de Z_{α} é dada por $\mathfrak{z}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : \alpha \circ \text{ad}(X) = 0\}$, isto é,

$$\mathfrak{z}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, \alpha[X, Y] = 0\}.$$

O espaço tangente a $G \cdot \alpha$ em α é dado por

$$T_\alpha(G \cdot \alpha) = \{ad^*(X)\alpha : X \in \mathfrak{g}\}.$$

A forma simplética de Kirillov-Kostant-Sourianux Ω (abreviada KKS) na órbita coadjunta $G \cdot \alpha$ é definida pela expressão

$$\Omega_\alpha(\tilde{X}(\alpha), \tilde{Y}(\alpha)) = \alpha[X, Y] \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (4.10)$$

Existem duas maneiras equivalentes de interpretar essa expressão como uma forma simplética na órbita coadjunta $G \cdot \alpha$. A primeira é olhar Ω_α como uma forma bilinear anti-simétrica em $T_\alpha(G \cdot \alpha)$, invariante pela representação de isotropia, e com isso definir uma 2-forma invariante em $G \cdot \alpha$. A segunda é definir para cada $\beta \in G \cdot \alpha$ a forma Ω_β como em 4.10 e considerar $\beta \mapsto \Omega_\beta$ como uma 2-forma em $G \cdot \alpha$. Será provado abaixo que as duas interpretações fornecem a mesma 2-forma.

Olhando Ω_α como uma forma bilinear em $T_\alpha(G \cdot \alpha)$ os seguintes itens mostram que Ω_α define uma forma simplética invariante em $G \cdot \alpha = G/Z_\alpha$.

1. Ω_α está bem definida. De fato, tome $X, X_1, Y, Y_1 \in \mathfrak{g}$ tal que $\tilde{X}(\alpha) = \tilde{X}_1(\alpha)$ e $\tilde{Y}(\alpha) = \tilde{Y}_1(\alpha)$. Essas igualdades significam que $\alpha \circ ad(X) = \alpha \circ ad(X_1)$ e $\alpha \circ ad(Y) = \alpha \circ ad(Y_1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha(\tilde{X}_1(\alpha), \tilde{Y}_1(\alpha)) &= \alpha \circ ad(X_1)(Y_1) = \alpha \circ ad(X)(Y_1) \\ &= -\alpha \circ ad(Y_1)(X) = -\alpha \circ ad(Y)(X) \\ &= \Omega_\alpha(\tilde{X}(\alpha), \tilde{Y}(\alpha)). \end{aligned}$$

2. Ω_α é claramente anti-simétrica.
3. Ω_α é não degenerada. De fato, tome $0 \neq v \in T_\alpha G \cdot \alpha$ e escolha $X \in \mathfrak{g}$ tal que $v = \tilde{X}(\alpha)$. Então, $\alpha \circ ad(X) \neq 0$, isto é, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\alpha[X, Y] \neq 0$. Isso significa que $\Omega_\alpha(v, \tilde{Y}(\alpha)) \neq 0$, mostrando que Ω_α não é degenerada.
4. Ω_α é invariante pela representação de isotropia. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $h \in Z_\alpha$, então a representação de isotropia é $dh_\alpha(\tilde{X}(\alpha)) = \widetilde{Ad(h)X}(\alpha)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha(dh_\alpha(\tilde{X}(\alpha)), dh_\alpha(\tilde{Y}(\alpha))) &= \alpha[Ad(h)X, Ad(h)Y] \\ &= \alpha \circ Ad(h)[X, Y] \\ &= \alpha[X, Y], \end{aligned}$$

pois $h \in Z_\alpha$.

5. A 2-forma Ω em $G \cdot \alpha = G/Z_\alpha$ definido por Ω_α é fechada. Isso segue da identidade de Jacobi: se $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ então, pela Proposição 4.1,

$$\begin{aligned} (d\Omega)_\alpha(\tilde{X}(\alpha), \tilde{Y}(\alpha), \tilde{Z}(\alpha)) &= -\Omega_\alpha([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) - \Omega_\alpha([\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X}) - \Omega_\alpha([\tilde{Z}, \tilde{Y}], \tilde{X}) \\ &= -\alpha([[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, Y], X]) = 0. \end{aligned}$$

Com esses itens fica concluída a construção da forma simplética de Kirillov-Kostant-Souriaux Ω numa órbita coadjunta $Ad^*(G)\alpha$. Num elemento $\beta = Ad^*(g)\alpha$ da órbita a forma transladada de Ω_α é dada por

$$\begin{aligned}\Omega_\beta(\tilde{X}(\beta), \tilde{Y}(\beta)) &= (\Omega_\alpha(dg_\beta^{-1}\tilde{X}(\beta), dg_\beta^{-1}\tilde{Y}(\beta))) \\ &= \Omega_\alpha\left(\widetilde{Ad(g^{-1})X(\alpha)}, \widetilde{Ad(g^{-1})Y(\alpha)}\right) \\ &= \alpha[Ad(g^{-1})X, Ad(g^{-1})Y] \\ &= \alpha \circ Ad(g^{-1})[X, Y],\end{aligned}$$

isto é,

$$\omega_\beta(\tilde{X}(\beta), \tilde{Y}(\beta)) = \beta[X, Y]$$

tem a mesma expressão que a usada para definir Ω_α .

Como consequência da construção de Kirillov-Kostant-Souriaux Ω tem-se que uma órbita de uma representação coadjunta tem dimensão par.

Uma das propriedades essenciais da forma de Kirillov-Kostant-Souriaux Ω é que a ação de G nas órbitas coadjuntas são Hamiltonianas, isto é, os campos induzidos \tilde{X} , $X \in \mathfrak{g}$, são Hamiltonianos em relação a Ω , como será mostrado a seguir.

Proposição 4.5. *Seja $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ uma órbita coadjunta. Se $X \in \mathfrak{g}$ então o campo $\tilde{X} = ad^*(X)$ é Hamiltoniano com função Hamiltoniana, $f_X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f_X(\alpha) = \alpha(X) \quad \alpha \in \mathcal{O}.$$

Demonstração. Como f_X é a restrição de uma aplicação linear, sua diferencial $(df_X)_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{O}$, coincide com f_X , isto é, se $\tilde{Y}(\alpha) = ad^*(Y)(\alpha)$, $Y \in \mathfrak{g}$, é um vetor tangente então $(df_X)_\alpha(\tilde{Y}(\alpha)) = (ad^*(Y)(\alpha))(X)$. Daí

$$\begin{aligned}(df_X)_\alpha(\tilde{Y}(\alpha)) &= -\alpha \circ ad(Y)(X) \\ &= \alpha[X, Y] \\ &= \Omega_\alpha(\tilde{X}(\alpha), \tilde{Y}(\alpha)),\end{aligned}$$

o que mostra que \tilde{X} é o campo Hamiltoniano definido por f_X . □

A seguir serão apresentados alguns exemplos de órbitas coadjuntas e suas formas simpléticas.

Exemplo 4.5. *Se a álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é semissimples então sua forma de Cartan-Killing $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$ é não degenerada e define um isomorfismo $K : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ por $K(X)(\cdot) = \mathcal{K}(X, \cdot)$. Esse isomorfismo permuta as representações adjunta e coadjunta, isto é, $KAd(g) = Ad^*(g)K$*

para todo $g \in G$, pois \mathcal{K} é invariante por Ad . Portanto, K aplica difeomorficamente as órbitas adjuntas nas coadjuntas, o que permite transportar a forma simplética de Kirillov-Kostant-Souriaux Ω em formas simpléticas $K^*\Omega$ nas órbitas adjuntas. A ação de G nas órbitas adjuntas também é Hamiltoniana pois os campos induzidos $\tilde{X} = ad(X)$ satisfazem $Kad(X) = ad^*(X)K$, de onde se vê que \tilde{X} é o campo Hamiltoniano da “função altura” $f_X(\cdot) = \mathcal{K}(X, \cdot)$. Em suma, no caso semissimples a representação adjunta se comporta como a representação coadjunta. Esses comentários se estendem a álgebras de Lie que admitem uma forma bilinear invariante não degenerada, como as álgebras reductíveis.

Exemplo 4.6. Como exemplo concreto de um grupo semissimples sejam $G = Sl(2, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Como $Ad(g)X = gXg^{-1}$, o polinômio $\det X$ é constante em cada órbita. Existem três tipos de órbitas: i) as das matrizes nilpotentes contidas no cone duplo $\{X : \det X = 0\}$, que contém três órbitas, a origem e os dois lados do cone; ii) as das matrizes com auto-valores imaginários em que cada órbita é uma folha do hiperbolóide de duas folhas definido por $\det X = c > 0$; iii) os hiperbolóides de uma folha definidos por $\det X = c < 0$.

Nas coordenadas (x, y, z) em relação à base $\{A, H, S\}$, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

o polinômio $\det X = x^2 - y^2 - z^2$. Assim, o cone duplo tem equação $x^2 = y^2 + z^2$ enquanto que os hiperbolóides tem equação $x^2 = y^2 + z^2 = c > 0$ (duas folhas no interior do cone) e $x^2 = y^2 + z^2 = c < 0$ (uma folha exterior ao cone).

Exemplo 4.7. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Heisenberg que tem a base $\{X, Y, Z\}$ que satisfaz $[X, Y] = Z$ e os demais colchetes se anulam. Denote por $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a base dual de $\{X, Y, Z\}$. Então, as órbitas coadjuntas dos elementos $x\alpha + y\beta + z\gamma$ com $z = 0$ são de dimensão 0 enquanto que as demais órbitas são de dimensão 2.

Já a órbita adjunta de, por exemplo X , tem dimensão 1, já que o centralizador de X é subálgebra gerada por $\{X, Y\}$. Essa órbita adjunta não admite forma simplética.

Aplicação momento

Um instrumento útil no estudo de uma ação Hamiltoniana é sua aplicação momento, que permite comparar a ação com a representação coadjunta.

Sejam (M, ω) uma variedade simplética, G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $G \times M \rightarrow M$ uma ação de G em M . Se supõe aqui que essa ação é Hamiltoniana. Para simplificar a exposição se supõe também que M é conexa.

Definição 4.1. Uma aplicação momento de uma ação Hamiltoniana é uma aplicação $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, a função $f_X(x) = \mu(x)(X)$ é uma função Hamiltoniana para \tilde{X} , isto é, $df_X = i_{\tilde{X}}\omega$.

Exemplo 4.8. Seja $M = Ad^*(G)\alpha$ uma órbita coadjunta munida da forma simplética Ω de KKS. Um campo de vetores $\tilde{X} = ad^*(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, é Hamiltoniano para a função $f_X(\beta) = \beta(X)$, $\beta \in Ad^*(G)\alpha$. Portanto, a ação de G na órbita é Hamiltoniana e uma aplicação momento é $\mu = Id$.

Para uma ação Hamiltoniana qualquer existem aplicações momento, pois $\{X_1, \dots, X_N\}$ é uma base de \mathfrak{g} e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ sua base dual de \mathfrak{g}^* então

$$\mu(x) = f_{X_1}(x)\alpha_1 + \dots + f_{X_N}(x)\alpha_N$$

é uma aplicação momento se f_{X_1}, \dots, f_{X_N} são funções Hamiltonianas para os campos induzidos $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N$.

Não se tem unicidade, já que se μ é uma aplicação momento e $\alpha \in \mathfrak{g}$ é uma constante $\bar{\mu}(x) = \mu + \alpha$ também é aplicação momento. Vice-versa, se μ e $\bar{\mu}$ são aplicações momento então $\mu - \bar{\mu}$ é constante, pois M é conexa. Isto é, no caso conexo o conjunto das aplicações momento é um espaço afim cujo espaço vetorial associado é \mathfrak{g}^* .

A seguir, a questão principal que será discutida é a de decidir se as aplicações momento (ou algumas delas) são equivariantes em relação à ação de G em M e a representação coadjunta, isto é, se vale a igualdade

$$\mu(gx) = Ad^*(g)\mu(x),$$

para todo $g \in G$ e $x \in M$. Em geral, pode não existir uma aplicação momento que seja equivariante em relação a Ad^* . As que admitem são chamadas de ações **Hamiltoniana equivariantes**.

Antes de entrar na análise da existência de aplicação momento Ad^* -equivariantes será demonstrada a seguinte propriedade de homomorfismo dessas aplicações.

Proposição 4.6. Suponha que μ é uma aplicação momento Ad^* -equivariante. Então, dados $x \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$, vale

$$\mu(x)[X, Y] = \omega_x(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \{f_X, f_Y\}(x),$$

onde $\{\cdot, \cdot\}$ é o colchete de Poisson e $f_X(x) = \mu(x)(X)$. Essa igualdade significa que a aplicação $\tilde{\mu} : X \rightarrow f_X$ é um homomorfismo entre \mathfrak{g} e o espaço das funções munido com o colchete de Poisson.

Demonstração. Por equivariância

$$\begin{aligned} d\mu_x(\tilde{X}(x)) &= \frac{d}{dt}\mu(e^{tX})_{t=0} = \frac{d}{dt}Ad^*(e^{tX})\mu(x)_{t=0} \\ &= ad^*(X)\mu(x) = -\mu(x)ad(X). \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $Y \in \mathfrak{g}$ a função $f_Y(x) = \mu(x)(Y)$ é Hamiltoniana para \tilde{Y} . Derivando o segundo membro dessa igualdade em relação a x , por linearidade, vale

$$d\mu_x(\tilde{X}(x))(Y) = (df_Y)_x(\tilde{X}(x)) = -\omega_x(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Comparando esses dois cálculos de $d\mu_x(\tilde{X}(x))$ com a segunda, segue que $-\mu(x)[X, Y] = -\omega_x(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

□

Conforme mencionado acima, uma aplicação momento não é, em geral, Ad^* -invariante. O que vale sempre é que dada uma aplicação momento μ existe uma representação afim de G em \mathfrak{g}^* , cuja representação linear subjacente é Ad^* , tal que μ é equivariante para essa representação afim.

Uma **representação afim** de um grupo G num espaço vetorial V é um homomorfismo $A : G \rightarrow Af(V)$, a valores no grupo afim de V . Como $Af(V) = \text{Gl}(V) \times V$, a representação A se escreve como $A(g) = (\rho(g), v(g))$, $g \in G$, com $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ e $v : G \rightarrow V$. A propriedade de homomorfismo de A se traduz em

$$\begin{aligned} (\rho(gh), v(gh)) &= \alpha(gh) = (\rho(g), v(g))(\rho(h), v(h)) \\ &= (\rho(g)\rho(h), \rho(g)v(h) + v(g)). \end{aligned}$$

Portanto, ρ é uma representação linear de G e v deve satisfazer a igualdade

$$v(gh) = \rho(g)v(h) + v(g). \quad (4.11)$$

Vice-versa, se $\rho : G \rightarrow \text{Gl}(V)$ é uma representação linear e $v : G \rightarrow V$ satisfaz 4.11, então $A(g) = (\rho(g), v(g))$ é uma representação afim.

Para definir a representação afim, que torna uma aplicação momento equivariante, são necessários alguns resultados preliminares.

Lema 4.6. *Dada uma ação simplética de G em (M, ω) , suponha que f_X é uma função Hamiltoniana para o campo de vetores \tilde{X} . Então, $f_X \circ g$ é função Hamiltoniana para $\widetilde{Ad(g^{-1})X}$.*

Proposição 4.7. *Seja μ uma aplicação momento para a ação Hamiltoniana de G em M . Então, dado $g \in G$ a expressão*

$$\mu(gx) - Ad^*(g)\mu(x)$$

é constante como função de $x \in M$.

Para $g \in G$ a constante

$$c_\mu(g) = \mu(gx) - Ad^*(g)\mu(x) \quad (4.12)$$

garantida pela Proposição define uma aplicação $c_\mu : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$.

Proposição 4.8. *Dada uma ação Hamiltoniana seja μ uma aplicação momento e defina $c_\mu : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ como em 4.12 (para qualquer $x \in M$). Então,*

$$c_\mu(gh) = Ad^*(g)c_\mu(h) + c_\mu(g).$$

Corolário 4.1. *Dada a aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, defina $A_\mu : G \rightarrow Af(\mathfrak{g}^*)$ por*

$$A_\mu(g) = (Ad^*(g), c_\mu(g)).$$

Então, A_μ é uma representação afim.

Uma outra consequência, que segue quase que imediatamente da definição μ , é a seguinte equivariância de μ .

Corolário 4.2. *Com as notações anteriores, a aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é equivariante em relação a A_μ , isto é,*

$$\mu(gx) = A_\mu(g)\mu(x) \quad x \in M, \quad g \in G.$$

Por esse corolário se vê que a aplicação momento μ é equivariante em relação a Ad^* se, e só se, $c_\mu = 0$. Esta observação é o ponto de partida para investigar a existência de aplicação momento Ad^* -equivariante.

De fato, seja $\bar{\mu} = \mu + \alpha$ com $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento. Então, a definição de c_μ mostra que

$$c_{\bar{\mu}}(g) = c_\mu(g) + \alpha - Ad^*(g)\alpha. \quad (4.13)$$

Dessa igualdade se obtém de imediato o seguinte critério para a existência de uma aplicação momento Ad^* -equivariante.

Proposição 4.9. *Tome uma aplicação momento μ para a ação Hamiltoniana de G em M . Então, a condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação momento equivariante em relação a $Ad^*(g)$ é que exista $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tal que*

$$c_\mu(g) = Ad^*(g)\alpha - \alpha. \quad (4.14)$$

Essa condição admite duas interpretações complementares entre si, uma em termos de equivalência de representações afins e outra via cohomologia de representações de grupos, que serão descritas a seguir.

- **Representações afins equivalentes:** Duas representações afins $A_1, A_2 : G \rightarrow Af(V)$ são equivalentes se existe $T \in Af(V)$ tal que

$$A_1(g) = TA_2(g)T^{-1},$$

para todo $g \in G$. Se $A_1(g) = (\rho_1(g), v_1(g))$, $A_2(g) = (\rho_2(g), v_2(g))$ e $T = (P, \omega)$ então a equivalência se traduz em $\rho_1(g) = P\rho_2(g)P^{-1}$ e

$$v_1(g) = -P\rho_2(g)P^{-1}\omega + Pv_2(g) + \omega.$$

Suponha $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ e que a transformação T que realiza a equivalência seja $T = (id, \omega)$. Então,

$$v_1(g) = -\rho(g)\omega + v_2(g) + \omega,$$

isto é,

$$v_1(g) - v_2(g) = \omega - \rho(g)\omega.$$

Dito isso, sejam $A_\mu = (Ad^*, c_\mu)$ e $A_{\bar{\mu}} = (Ad^*, c_{\bar{\mu}})$ as representações afins definidas pelas aplicações momento μ e $\bar{\mu} = \mu + \alpha$. Conforme foi verificado acima, $c_{\bar{\mu}}(g) - c_\mu(g) = \alpha - Ad^*(g)\alpha$, o que significa que as representações afins A_μ e $A_{\bar{\mu}}$ são equivalentes por $T = (Id, \alpha)$. Já a igualdade 4.14 é satisfeita se, e somente se, A_μ é equivalente à representação linear $(Ad^*, 0)$. Nesse caso, existe uma aplicação momento Ad^* -equivariante.

- **Cohomologia de representações de grupos:** Seja G um grupo e $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ uma representação de G no espaço vetorial V . Defina os espaços $F^0 = F^0(G, V) = V$ e para $q \geq 1$, $F^q = F^q(G, V)$ é o conjunto das aplicações $c : G^q \rightarrow V$. As aplicações lineares $\delta_q : F^q \rightarrow F^{q+1}$, $q \geq 0$, são definidas por $\delta_0 v(g) = v - \rho(g)v$ e

$$\begin{aligned} \delta_q(g_1, \dots, g_{q+1}) &= \rho(g_1)c(g_2, \dots, g_{q+1}) + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i c(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{q+1}) \\ &+ (-1)^{q+1} c(g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

se $q \geq 1$ satisfaz $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$. A q -ésima **cohomologia da representação** é definida por

$$\mathcal{H}^q(\rho) = \frac{\ker \delta_q}{\text{im} \delta_{q-1}}.$$

Os elementos de $\ker \delta_q$ são chamados de cociclos e os de $\text{im} \delta_q$ de cofronteiras. Quando $q = 1$,

$$\delta_1 c(g, h) = \rho(g)c(h) - c(gh) + c(g).$$

Portanto, $c : G \rightarrow V$ é um 1-cociclo se, e só se,

$$c(gh) = \rho(g)c(h) + c(g).$$

A propriedade de c_μ dada na Proposição 4.8 diz que c_μ é um 1-cociclo para a representação Ad^* . Já a relação entre c_μ e $c_{\bar{\mu}}$ de 4.13 diz que

$$c_{\bar{\mu}}(g) - c_\mu(g) = \alpha - Ad^*(g)\alpha = \delta_0\alpha,$$

para a representação Ad^* . Portanto, o critério da Proposição 4.9 se traduz na afirmação de que existe uma aplicação momento Ad^* -equivariante se, e só se, o 1-cociclo c_μ é cohomólogo a 0. Em particular, essa existência é assegurada se $\mathcal{H}^1(Ad^*) = \{0\}$.

Essas duas interpretações da condição da Proposição 4.9, fornece os seguintes critérios para saber se existe uma aplicação momento Ad^* -equivariante.

Proposição 4.10. *Seja $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento da ação Hamiltoniana $G \times M \rightarrow M$. Então, a existência de uma aplicação momento $\bar{\mu}$, que é Ad^* -equivariante, é equivalente a cada uma das afirmações a seguir.*

1. *A representação afim $A_\mu = (Ad^*, c_\mu)$ é equivalente à representação linear $(Ad^*, 0)$.*
2. *O cociclo c_μ é cohomólogo a 0.*

Em relação à unicidade das aplicações momento Ad^* -equivariantes, a igualdade $c_{\bar{\mu}} = c_\mu(g) + \alpha - Ad^*(g)\alpha$ se $\bar{\mu} = \mu + \alpha$, diz que μ e $\bar{\mu}$ são equivariantes se, e só se, $Ad^*(g)\alpha = \alpha$. Portanto, se o conjunto das aplicações momento Ad^* -equivariantes é não vazio, esse conjunto é um espaço afim, cujo espaço vetorial associado é

$$\{\alpha \in \mathfrak{g}^* : \forall g \in G, Ad^*(g)\alpha = \alpha\}.$$

Os critérios estabelecidos na Proposição acima para a existência de aplicações momento Ad^* -equivariantes serão aplicados a seguir para ações Hamiltonianas de certos grupos. Em primeiro lugar, para um grupo compacto G o critério cohomológico se aplica devido ao seguinte fato sobre a 1-cohomologia de uma representação arbitrária de G .

Lema 4.7. *Sejam G um grupo topológico compacto Hausdorff e $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ uma representação contínua de dimensão finita. Suponha que $c : G \rightarrow V$ é um 1-cociclo contínuo para ρ . Então, c é uma cofronteira.*

Esse lema significa que a 1-cohomologia para cociclos contínuos de um grupo compacto para qualquer representação linear é trivial.

Proposição 4.11. *Seja G um grupo compacto. Então, uma ação Hamiltoniana de G admite uma aplicação momento $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que é Ad^* -equivariante. Se G é semissimples então essa aplicação momento é única.*

Esse resultado vale também para os grupos semissimples, mesmo não compactos.

Proposição 4.12. *Seja G um grupo conexo semissimples. Então, uma ação Hamiltoniana de G admite uma aplicação momento Ad^* -equivariante.*

Demonstração. Dada uma aplicação momento μ , seja $A_\mu = (Ad^*, c_\mu)$ sua representação afim e denote por $B_\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{af}(\mathfrak{g}^*)$ a representação infinitesimal, que é dada por $B_\mu = (ad^*, (dc_\mu)_1)$. Mas, a 1-cohomologia de uma álgebra de Lie semissimples é trivial. Daí que B_μ é equivalente à representação linear $(ad^*, 0)$. Isso implica que A_μ é equivalente a $(Ad^*, 0)$ e, portanto, existe uma aplicação momento equivariante. \square

Até agora foram consideradas ações Hamiltonianas não necessariamente transitiva. O caso transitivo apresenta propriedades próximas das órbitas coadjuntas.

Seja $M = G/H$ um espaço homogêneo com forma simplética invariante ω tal que a ação de G é Hamiltoniana. Suponha que μ seja uma aplicação momento Ad^* -equivariante. Se x_0 é a origem de G/H e $x = gx_0$ então $\mu(x) = \mu(gx_0) = Ad^*(g)\mu(x_0)$, o que mostra que a imagem de μ é a órbita coadjunta $Ad^*(G)\mu(x_0)$. Essa órbita pode ser munida da forma simplética Ω de Kirillov-Kostant-Souriaux.

Proposição 4.13. *Se a ação de G em G/H é Hamiltoniana em relação à forma simplética invariante ω e μ é uma aplicação momento Ad^* -equivariante então $\mu^*\Omega = \omega$.*

Tomando, ainda, uma ação Hamiltoniana em G/H com aplicação momento μ que é Ad^* -equivariante, sejam x_0 a origem de G/H e

$$Z_{\mu(x_0)} = \{g \in G : Ad^*(g)\mu(x_0) = \mu(x_0)\}$$

o grupo de isotropia em $\mu(x_0)$ de tal forma que $Ad^*(G)\mu(x_0) = G/Z_{\mu(x_0)}$. Como μ é equivariante, $H \subset Z_{\mu(x_0)}$, pois se $gx_0 = x_0$ então $Ad^*(G)\mu(x_0) = \mu(gx_0) = \mu(x_0)$. Em termos dos espaços homogêneos $Ad^*(G)\mu(x_0) = G/Z_{\mu(x_0)}$ e $M = G/H$, a aplicação momento μ passa a ser a projeção canônica, $G/H \rightarrow G/Z_{\mu(x_0)}$, que à classe lateral gH associa a classe lateral $gZ_{\mu(x_0)}$. Isso implica que μ é uma submersão. Em particular, $\dim G/Z_{\mu(x_0)} \leq \dim M$.

Na verdade, as dimensões são iguais. Isso porque, pela Proposição anterior $\mu^*\Omega = \omega$. Daí que para qualquer produto exterior $\Omega^{k^\wedge} = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ vale $\mu^*\Omega^{k^\wedge} = (-1)^k \omega^{k^\wedge}$. Em particular, se $\dim M = 2k$, então $\omega^{k^\wedge} \neq 0$ e não é possível ter $\dim G/Z_{\mu(x_0)} < 2k$, pois essa igualdade implica $\Omega^{k^\wedge} = 0$, isto é, $0 = \mu^*\Omega^{k^\wedge} = (-1)^k \omega^{k^\wedge}$.

O fato de que $\dim G/Z_{\mu(x_0)} = \dim G/H$ e $H \subset Z_{\mu(x_0)}$ implica que as álgebras de Lie H e $Z_{\mu(x_0)}$ coincidem e, portanto são iguais a

$$\mathfrak{z}_{\mu(x_0)} = \{X \in \mathfrak{g} : ad^*(X)\mu(x_0) = 0\}.$$

Além do mais, a projeção canônica $G/H \rightarrow G/Z_{\mu(x_0)}$ é uma aplicação de recobrimento. Portanto, μ é uma aplicação de recobrimento e M é um recobrimento da órbita coadjunta $Ad^*(g)\mu(x_0)$. Em suma, as ações Hamiltonianas Ad^* -equivariantes em espaços homogêneos não diferem muito das órbitas coadjuntas.

Concluiremos essa seção considerando dois exemplos clássicos em geometria simplética.

Exemplo 4.9. (Grupos abelianos) Se G é um grupo abeliano conexo então $G = \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$. A álgebra de Lie é \mathbb{R}^{m+n} assim como seu dual. As representações adjunta e coadjunta são triviais $Ad(g) = Ad^*(g) = Id$, $g \in G$.

Uma aplicação $c : G \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^{m+n}$ satisfaz a propriedade de cociclo se, e só se, $c(gh) = c(g) + c(h)$. Escrevendo $g \in G$, como $g = (x, y) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, pode-se definir $c_1(x) = c(x, 0)$ e $c_2(y) = c(0, y)$, de tal forma que $c(x, y) = c_1(x) + c_2(y)$. Então, c_1 é um cociclo no toro \mathbb{T}^m que é compacto e abeliano. Portanto, $c_1 = 0$ (veja 4.1). Daí que qualquer cociclo c se escreve como

$$c(x, y) = c_2(y),$$

onde c_2 é uma aplicação linear $c_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$.

A única cofronteira é 0 pois $\delta_0\omega = \omega - Ad^*(g)\omega = \omega - \omega = 0$. Portanto, a 1-cohomologia de G é o espaço das aplicações lineares $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$.

Seja agora a ação Hamiltoniana $G \times M \rightarrow M$. Todas as aplicações momento para essa ação dão o mesmo cociclo, pois dois cociclos são cohomólogos se, e só se, eles coincidem. Em particular, se uma aplicação momento é Ad^* -equivariante, então todas são equivariantes. Nesse caso, $\mu(gx) = Ad^*(g)\mu(x)$, isto é, μ é constante nas órbitas de G .

O caso Ad^* -equivariante é aquele em que as funções Hamiltonianas comutam em relação ao colchete de Poisson. De fato, como na Proposição 4.6, seja $\{\hat{\mu}(X), \hat{\mu}(Y)\} = \hat{\mu}[X, Y] = 0$. Isso significa que existe uma escolha de função Hamiltoniana $\hat{\mu}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, tal que essas funções comutam na álgebra do colchete de Poisson. (Em geral, $\{\hat{\mu}(X), \hat{\mu}(Y)\}$ é função Hamiltoniana para $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} = 0$ e isso permite concluir que $\{\hat{\mu}(X), \hat{\mu}(Y)\}$ é constante, mas não necessariamente nula.)

As órbitas de G em M são ao mesmo tempo subvariedades imersas e espaços homogêneos G/H . Como G é abeliano, G/H também é grupo abeliano e, como G , é produto de um toro por um espaço euclidiano. Quando a ação é Ad^* -equivariante os espaços tangentes às órbitas

$$T_x(Gx) = \{\tilde{X}(x) \in T_x M : X \in \mathfrak{g}\}$$

são subespaços isotrópicos, já que $\omega(\tilde{X}(x), \tilde{Y}(x)) = \{\hat{\mu}(X), \hat{\mu}(Y)\}(x) = 0$.

O que se denomina classicamente de sistema completamente integrável é um campo Hamiltoniano X numa variedade M de dimensão $2n$, como função integrável f , onde as funções g_1, \dots, g_{n-1} são $\{g_i, f\} = \{g_i, g_j\} = 0$. Os campos Hamiltonianos associados a essas funções geram uma álgebra de Lie abeliana de dimensão n . Se os campos são completos então, pelo teorema de Lie-Palais, os seus fluxos definem uma ação Hamiltoniana de \mathbb{R}^n em M , que é Ad^* -equivariante.

Exemplo 4.10. (Fibrados cotangentes) O fibrado cotangente $\pi : T^*M \rightarrow M$ admite uma forma simplética canônica $\omega = d\lambda$, onde λ é a forma de Liouville definida por $\lambda_\alpha(v) = \alpha(\pi_*v)$ para $\alpha \in T^*M$ e $v \in T_\alpha T^*M$. Um difeomorfismo ϕ de M se levanta a um difeomorfismo $\phi^\#$ de T^*M por

$$\phi^\#(\alpha) = (d\phi_x^{-1})^*\alpha = \alpha \circ d\phi_x^{-1},$$

onde $x = \pi(\alpha)$. Da mesma forma, um campo de vetores X em M se levanta a um campo de vetores $X^\#$ em TM cujo fluxo é $\phi_t^\#$, onde ϕ_t é o fluxo de X .

O campo levantado $X^\#$ é Hamiltoniano para a função $f_X : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_X(\alpha) = \alpha(X(x))$ se $x = \pi(\alpha)$.

Uma ação do grupo de Lie G em M se levanta a uma ação em T^*M por $g \cdot \alpha = (dg_x^{-1})^*\alpha = \alpha \circ dg_x^{-1}$, se $x = \pi(\alpha)$ e $g \in G$, cuja ação infinitesimal associa $X \in \mathfrak{g}$ ao campo de vetores $\tilde{X}^\#$, levantamento de \tilde{X} .

Uma aplicação momento da ação de G em T^*M é dada por $\mu(\alpha)(X) = \alpha(\tilde{X}(x))$ se $\alpha \in T^*M$, $X \in \mathfrak{g}$ e $x = \pi(\alpha)$. Essa aplicação momento é Ad^* -equivariante, pois se $x = \pi(\alpha)$ então

$$\begin{aligned} \mu(g \cdot \alpha)(X) &= \alpha(dg_x^{-1}\tilde{X}(gx)) = \alpha(\widetilde{Ad(g)X}(x)) \\ &= \mu(\alpha)Ad(g)X \\ &= Ad^*(g)(\mu(\alpha))(X). \end{aligned}$$

4.3 Estruturas complexas invariantes e representações

Uma transformação linear J em um espaço vetorial real V que satisfaz $J^2 = -Id$ é chamada de estrutura complexa em V . Se V admite uma estrutura complexa J , então a dimensão de V é par, pois os autovalores de J são $\pm i$ e eles aparecem aos pares. Essa J define em V uma estrutura de espaço vetorial complexo, com a multiplicação por escalar dada por

$$(a + ib)X = aX + bJX,$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ e $X \in V$.

Definição 4.2. Seja U um grupo que se representa em V . A estrutura complexa J é invariante por U se $uJ = Ju$, $\forall u \in U$.

Lema 4.8. *Suponha que U seja um grupo que se representa em V e J uma estrutura complexa invariante por U . Seja $W \subset V$ um espaço U -invariante. Então,*

1. JW também é U -invariante.
2. W é irredutível se, e somente se, JW é irredutível.
3. As representações de U em W e JW são equivalentes.
4. Se W é irredutível então $W \cap JW = \{0\}$ ou $JW = W$.
5. Se $\dim W = 1$ então $W \cap JW = \{0\}$.

Demonstração. Tome $u \in U$ e $x \in W$. Então, $uJx = Jux \in JW$, o que mostra que JW é U -invariante.

Suponha que W seja irredutível e seja $A \subset JW$ um subespaço U -invariante. Então, $J^{-1}A = JA \subset W$ também é U -invariante. Portanto, $JA = W$ ou $JA = \{0\}$, o que implica que $A = JW$ ou $A = \{0\}$ e daí que JW é irredutível.

Como J comuta com os elementos de U , a aplicação $J : W \rightarrow JW$ estabelece uma equivalência entre as representações de W e JW . O item (4) segue do fato que $W \cap JW \subset W$ é um subespaço U -invariante.

Para o item (5), deve-se observar que se $\dim W = 1$ então W é irredutível. No entanto, os auto-valores de J são $\pm i$ (pois $J^2 = -Id$) e daí que não pode ocorrer $JW = W$, já que isso implica que J tem auto-valor real. \square

Se U for um grupo compacto, existe em V um produto interno invariante por U . Se consideramos o grupo $\{1, J, J^2 = -Id, J^3 = -J\}$ gerado por J , obtemos também que V admite um produto interno invariante por J , uma vez que esse grupo é finito. Logo V admite um produto interno invariante por U e por J .

Lema 4.9. *Se U é um grupo compacto que se representa em V e J é uma estrutura complexa U -invariante, então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V invariante por U e por J .*

Demonstração. Tome um produto interno (\cdot, \cdot) invariante por J e defina

$$\langle x, y \rangle = \int_U (ux, uy) du.$$

Então, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é U -invariante. Ele também é J -invariante pois

$$\begin{aligned}
 \langle Jx, Jy \rangle &= \int_U (uJx, uJy) du \\
 &= \int_U (Jux, Juy) du = \int_U (ux, uy) du \\
 &= \langle x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

□

A partir desse lema se obtém a seguinte decomposição de V em subespaços invariantes e irredutíveis.

Proposição 4.14. *Seja U um grupo compacto que se representa no espaço V e que admite uma estrutura complexa invariante J . Então, existem subespaços invariantes e irredutíveis V_1, \dots, V_s e W_1, \dots, W_t tais que $JV_i = V_i$, $JW_i \cap W_i = \{0\}$ e*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \oplus (W_1 \oplus JW_1) \oplus \dots \oplus (W_t \oplus JW_t).$$

Demonstração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno invariante do lema anterior.

Se V é irredutível então $s = 1$ e $t = 0$. Já se existe um subespaço próprio $\{0\} \neq A \subset V$ que é invariante por U e J , defina $V_1 = A$ se $JA = A$ ou $W_1 = A$ se $JA \cap A = \{0\}$. Nos dois casos o ortogonal $B = A^\perp$ ou $B = (A \oplus JA)^\perp$ é invariante tanto por U quanto por J . Repetindo o mesmo argumento com B se obtém a decomposição do enunciado. □

Um caso particular, que será muito importante no caso dos flags maximais, é quando os subespaços têm dimensão um.

Corolário 4.3. *Na situação da Proposição anterior, suponha que os subespaços U -invariantes e irredutíveis têm dimensão 1. Então, $s = 0$, isto é,*

$$V = (W_1 \oplus JW_1) \oplus \dots \oplus (W_t \oplus JW_t),$$

com $\dim W_i = \dim JW_i = 1$. As representações de U em W_i e JW_i são equivalentes.

A decomposição do espaço V , dada pela Proposição acima, permite mostrar em diversos casos que V não admite estrutura complexa invariante.

Corolário 4.4. *Suponha que exista um subespaço invariante $W \subset V$ com $\dim W = 1$, de tal forma que a representação de U em W não é equivalente à representação em outro espaço de dimensão 1. Então, não existe estrutura complexa U -invariante em V .*

Demonstração. De fato, as representações em W e JW são equivalentes e $JW \neq W$. □

Usaremos o produto interno invariante dado pelo Lema (4.9) para definir um produto Hermitiano que será de extrema importância para descartarmos a possibilidade das Grassmannianas admitirem estruturas pseudo-complexas invariantes. De fato, seja V um espaço vetorial real irredutível e considere o produto interno invariante citado acima. Defina agora a forma bilinear ω em V por $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$. Como J é isometria e $J^2 = -Id$, isto é, $J^{-1} = -J$, essa forma é anti-simétrica. Com efeito,

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= \langle Ju, v \rangle = \langle u, J^{-1}v \rangle = -\langle Jv, u \rangle \\ &= -\omega(v, u).\end{aligned}$$

O produto interno e ω definem o produto Hermitiano

$$\mathcal{H}(u, v) = \langle u, v \rangle + i\omega(u, v).$$

4.4 Formas simpléticas em espaços homogêneos

Seja G um grupo de Lie e G/L um espaço homogêneo. Suponha que em G/L exista uma forma simplética Ω invariante por G , isto é, a ação de G em G/L é simplética em relação a Ω .

Se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie e $X \in \mathfrak{g}$, denote por \tilde{X} o campo de vetores induzido em G/L . Esses campos (e a forma simplética Ω) definem as formas diferenciais $i_X\Omega = \Omega(\tilde{X}, \cdot)$. Essas formas diferenciais são fechadas. De fato, $L_{\tilde{X}}\Omega = 0$ já que a ação é simplética e daí que $0 = L_{\tilde{X}}\Omega = di_X\Omega + i_Xd\Omega = di_X\Omega$, já que $d\Omega = 0$. A ação de G em G/L é dita Hamiltoniana se para todo $X \in \mathfrak{g}$ a forma diferencial $i_X\Omega$ é exata (isso ocorre, por exemplo, se a primeira cohomologia de De Rham de G/L é trivial).

No caso em que a ação é Hamiltoniana pode-se definir uma aplicação momento $\mu^* : G/L \rightarrow \mathfrak{g}^*$ a valores no dual da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G (veja aplicação momento na seção 2.4).

Quando G é compacto e a ação é Hamiltoniana, um produto interno invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathfrak{g} permite definir $\mu : G/L \rightarrow \mathfrak{g}$ por $\mu^*(x)(\cdot) = \langle \mu(x), \cdot \rangle$. Além do mais, μ pode ser definida como sendo equivariante, isto é, $\mu(gx) = Ad(g)\mu(x)$, $x \in G/L$ e $g \in G$ (veja Proposição 4.12). Como μ é equivariante e a ação de G em G/L é transitiva, segue que a imagem de μ é uma única órbita da ação adjunta $Ad(G)X$ de G em \mathfrak{g} . Nesse caso pode-se provar ainda que a aplicação momento $\mu : G/L \rightarrow Ad(G)X$ é uma aplicação de recobrimento (ver o final da seção 2.4).

Por outro lado, sabe-se que uma órbita adjunta $Ad(G)X$ de um grupo compacto e conexo G ou se reduz a um ponto (quando X pertence ao centro de \mathfrak{g}) ou é uma variedade flag de um grupo semissimples complexo. Nos dois casos, a órbita adjunta é simplesmente

conexa e daí que a aplicação de recobrimento $\mu : G/L \rightarrow Ad(G)X$ é, na verdade, a identidade, isto é, G/L é a própria órbita adjunta.

Toda essa discussão foi feita para dar uma indicação da demonstração do seguinte fato:

Proposição 4.15. *Seja G um grupo compacto e conexo e suponha que em G/L existe uma forma simplética invariante Ω de tal forma que a ação de G em G/L é Hamiltoniana. Então, G/L é uma órbita adjunta de G (flag de grupo complexo). Em particular, G/L é simplesmente conexo.*

Usando os conceitos das primeiras seções, mostraremos que as Grassmannianas reais não admitem estruturas pseudo-complexas K -invariantes.

4.5 A não existência de estrutura pseudo-complexa em Grassmanniana real

Seja $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = K/K_\Theta$ um flag real. O espaço tangente na origem se identifica a \mathfrak{m}_Θ , que é o ortogonal a \mathfrak{t}_Θ em relação à forma de Cartan-Killing de \mathfrak{t} . Qualquer produto interno invariante em \mathfrak{m}_Θ define uma métrica invariante em \mathbb{F}_Θ .

Por outro lado, uma estrutura pseudo-complexa em \mathbb{F}_Θ é dada por $J : \mathfrak{m}_\Theta \rightarrow \mathfrak{m}_\Theta$ com $J^2 = -Id$, que comuta com a representação de isotropia de K_Θ . Sabe-se que para J invariante existe uma decomposição

$$\mathfrak{m}_\Theta = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \oplus (W_1 \oplus JW_1) \oplus \cdots \oplus (W_t \oplus JW_t)$$

em componentes invariantes irredutíveis (pela representação de isotropia) tal que $JV_k = V_k$. Dada essa decomposição, define-se um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathfrak{m}_Θ , invariante pela representação de isotropia de K_Θ , por soma direta de produtos internos invariantes em que os subespaços são dois a dois ortogonais.

Como cada componente V_k é invariante irredutível e $JV_k = V_k$, a restrição de J a V_k é uma estrutura complexa em V_k . Pelo que foi dito na primeira seção, J é isotropia do produto interno em V_j e daí, $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ é uma forma anti-simétrica em V_k .

Em princípio, J não precisa ser isometria num espaço $W_k \oplus JW_k$, pois depende das escolhas dos produtos internos em W_k e JW_k . No entanto, essas escolhas podem ser feitas de forma compatível, tomando, por exemplo, um produto interno $p(\cdot, \cdot)$ em W_k e definindo o produto interno $q(X, Y) = p(JX, JY)$ em JW_k .

Na discussão a seguir, suponha que o produto interno nos espaços $W_k \oplus JW_k$ é escolhido de tal forma que J é uma isometria de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, se obtém uma forma anti-simétrica $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ em \mathfrak{m}_Θ . Essa forma também é invariante pela representação

de isotropia, pois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e J são invariantes. Por translação ω define uma 2-forma em \mathbb{F}_Θ , também denotada por ω .

Em suma, uma estrutura pseudo-complexa invariante por K em \mathbb{F}_Θ pode ser combinada com um produto interno invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para produzir uma 2-forma invariante $\omega = \omega_J$. Essa 2-forma é não-degenerada por construção. Portanto, ω_J é uma forma simplética se, e só se, $d\omega_J = 0$.

Com isso, se obtém a seguinte consequência da Proposição 4.15.

Proposição 4.16. *Seja $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = K/K_\Theta$ um flag cujo grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$ é finito e não trivial ($\neq \{1\}$). Suponha que \mathbb{F}_Θ admita uma estrutura pseudo-complexa invariante J . Então, uma 2-forma ω_J , definida por J , e uma métrica invariante não é simplética, isto é, $d\omega_J \neq 0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $d\omega_J = 0$, isto é, ω_J é uma forma simplética. Então, a ação de K em \mathbb{F}_Θ é simplética. Se o grupo fundamental é finito então a 1-cohomologia $H^1(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z})$ também é finito, isto é, só tem elementos com torsão. Mas isso implica que a 1-cohomologia de De Rham $H_{dR}^1(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{R}) = \{0\}$. Portanto, a ação simplética é, na verdade, uma ação Hamiltoniana. A Proposição 4.15 mostra, então, que \mathbb{F}_Θ é simplesmente conexo, contradizendo a hipótese de que $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) \neq \{1\}$. \square

Exemplo 4.11. *Se \mathfrak{g} é uma forma real normal de uma álgebra simples e \mathbb{F}_Θ é um flag minimal de \mathfrak{g} , então $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}_2$, exceto nos seguintes casos: i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ e \mathbb{F}_Θ é a Grassmanniana Lagrangeana. Nesses dois casos, $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}$ (veja (??), Proposição 4.9). Portanto, tirando essas duas exceções, todo flag minimal de uma forma real normal satisfaz as condições da Proposição acima. Num flag desses, uma eventual estrutura pseudo-complexa invariante dá origem a 2-formas não fechadas.*

Agora, a fórmula da diferencial exterior de uma 2-forma invariante está em 4.8: $d\omega$ é uma 3-forma invariante que na origem é a 3-forma

$$d\omega(X_1, X_2, X_3) = -\omega([X_1, X_2]_{\mathfrak{m}}, X_3) + \omega([X_1, X_3]_{\mathfrak{m}}, X_2) - \omega([X_2, X_3]_{\mathfrak{m}}, X_1), \quad (4.15)$$

com $X_j \in \mathfrak{m}_\Theta$, onde $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ indica a componente \mathfrak{m}_Θ do colchete $[X, Y]$ em \mathfrak{g} .

Uma aplicação dessa fórmula junto com a Proposição 4.16 permite mostrar que certos flags não admitem estruturas pseudo-complexas invariantes. A Proposição a seguir ilustra isso.

Proposição 4.17. *Nenhuma Grassmanniana real $Gr_k(n)$, $n \geq 3$, admite estrutura pseudo-complexa $SO(n)$ -invariante.*

Demonstração. Para $Gr_k(n)$, a decomposição $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{t}_\Theta \oplus \mathfrak{m}_\Theta$ é dada por

$$\mathfrak{t}_\Theta = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \mathfrak{m}_\Theta = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

com os blocos diagonais $k \times k$ e $(n - k) \times (n - k)$. Se $X, Y \in \mathfrak{m}_\Theta$, então um cálculo direto mostra que $[X, Y] \in \mathfrak{t}_\Theta$. Daí que $[X, Y]_{\mathfrak{m}} = 0$ e a fórmula 4.15 mostra que $d\omega = 0$ para qualquer 2-forma ω .

Suponha agora que exista uma estrutura pseudo-complexa invariante J . Então, ω_J é uma forma simplética. Mas, como comentado no exemplo acima $\pi_1(Gr_k(n)) = \mathbb{Z}_2$, o que contradiz a Proposição 4.16. \square

Observação 4.1. *Para uma Grassmanniana a representação de \mathfrak{t}_Θ em \mathfrak{m}_Θ é irredutível. A Proposição acima mostra de uma forma indireta que essa representação irredutível não admite estrutura complexa invariante. (O que aliás é trivial em alguns casos, por exemplo, quando a dimensão $k(n - k)$ é ímpar.)*

Observação 4.2. *As Grassmannianas $Gr_k(n)$ não são orientáveis se n é ímpar e são orientáveis se n é par. Por isso, $Gr_k(n)$ não admite estrutura pseudo-complexa (invariante ou não) se n é ímpar. No entanto, a orientabilidade não diz nada no caso em que n é par.*

5 Integrabilidade das estruturas pseudo-complexas

Neste capítulo, verificamos quais estruturas pseudo-complexas invariantes nos flags reais são integráveis. Concluimos que, de todos os flags reais que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes, apenas algumas variedades flag reais da álgebra C_l admitem estruturas integráveis.

5.1 Flags de A_l

O único flag de A_l que possui estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag maximal de A_3 . As estruturas K_Θ -invariantes nesse flag são as estruturas M -invariantes, pois no flag maximal $K_\Theta = M$. Veremos que esse flag não admite estruturas pseudo-complexas invariantes integráveis.

Flag maximal de A_3

O conjunto das matrizes E_{ij} e $E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$, é uma base de $\mathfrak{sl}(n)$. Usaremos essa base para mostrar que o tensor de Nijenhuis não é identicamente nulo.

As classes de M -equivalência de raízes positivas em A_3 são dadas por:

$$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}, \{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4\} \text{ e } \{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3\}.$$

As estruturas pseudo-complexas M -invariantes levam um espaço de raiz \mathfrak{g}_α no espaço de raiz \mathfrak{g}_β , sendo β a raiz negativa M -equivalente a α .

Seja J uma estrutura complexa M -invariante dada por:

$$\begin{aligned} JE_{21} &= \lambda_{21}E_{43}, \\ JE_{31} &= \lambda_{31}E_{42}, \\ JE_{41} &= \lambda_{41}E_{32}. \end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores E_{21} e E_{31} , obtemos

$$\begin{aligned} N[E_{21}, E_{31}] &= [JE_{21}, JE_{31}] - [E_{21}, E_{31}] - J[E_{21}, JE_{31}] - J[JE_{21}, E_{31}] \\ &= \lambda_{21}\lambda_{31}[E_{43}, E_{42}] - \lambda_{31}J[E_{21}, E_{42}] - \lambda_{21}J[E_{43}, E_{31}] \\ &= \lambda_{31}JE_{41} - \lambda_{21}JE_{41} \\ &= (\lambda_{31} - \lambda_{21})JE_{41}. \end{aligned}$$

Supondo que J seja uma estrutura integrável, temos $\lambda_{31} = \lambda_{21}$. Agora,

$$\begin{aligned}
N[E_{21}, E_{41}] &= [JE_{21}, JE_{41}] - [E_{21}, E_{41}] - J[E_{21}, JE_{41}] - J[JE_{21}, E_{41}] \\
&= \lambda_{21}\lambda_{41}[E_{43}, E_{32}] - \lambda_{41}J[E_{21}, E_{32}] - \lambda_{21}J[E_{43}, E_{41}] \\
&= \lambda_{21}\lambda_{41}E_{42} + \lambda_{41}JE_{31} \\
&= \lambda_{21}\lambda_{41}E_{42} + \lambda_{41}\lambda_{31}E_{42} \\
&= \lambda_{41}(\lambda_{21} + \lambda_{31})E_{42}
\end{aligned}$$

Como estamos supondo J integrável, obtemos $\lambda_{31} = -\lambda_{21}$. Daí $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0$, o que é um absurdo.

Em suma,

Proposição 5.1. *O único flag de A_l que admite estruturas pseudo-complexas K -invariantes é o flag maximal de A_3 . As estruturas pseudo-complexas no flag maximal de A_3 não são integráveis.*

5.2 Flags de B_l

Os únicos flags de B_l que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são o flag maximal de B_2 e o flag \mathbb{F}_Θ de B_3 , onde $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2\}$. Usaremos o tensor de Nijenhuis para mostrar que nenhum desses flags admitem estruturas pseudo-complexas invariantes e integráveis.

B_2

O único flag de B_2 que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag maximal. Analisaremos se essas estruturas são integráveis. Para isso, considere as classes de M -equivalência de raízes negativas que são dadas por

$$\{\lambda_2 - \lambda_1, -\lambda_1 - \lambda_2\} \text{ e } \{-\lambda_1, -\lambda_2\}$$

e as estruturas invariantes de B_2 vistas no capítulo 3.

Sejam $P_1 : \mathfrak{g}_{\lambda_2 - \lambda_1} \rightarrow \mathfrak{g}_{-\lambda_2 - \lambda_1}$ e $P_2 : \mathfrak{g}_{-\lambda_1} \rightarrow \mathfrak{g}_{-\lambda_2}$ operadores de intercâmbio para as representações de isotropia de M , X_{21} , Y_{21} , X_1 e X_2 geradores dos subespaços $\mathfrak{g}_{\lambda_2 - \lambda_1}$, $\mathfrak{g}_{-\lambda_2 - \lambda_1}$, $\mathfrak{g}_{-\lambda_1}$ e $\mathfrak{g}_{-\lambda_2}$, respectivamente. Para $V = \mathfrak{g}_{\lambda_2 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_2 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_2}$, defina $J : V \rightarrow V$ por

$$\begin{aligned}
JX_{21} &= P_1X_{21} = \lambda_{21}Y_{21}, \\
JX_1 &= P_2X_1 = \lambda_1X_2, \\
JY_{21} &= -(\lambda_{21})^{-1}X_{21}, \\
JX_2 &= -(\lambda_1)^{-1}X_1.
\end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e X_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
N[X_{21}, X_1] &= [JX_{21}, JX_1] - [X_{21}, X_1] - J[X_{21}, JX_1] - J[JX_{21}, X_1] \\
&= \lambda_{21}\lambda_1[Y_{21}, X_2] - \lambda_1J[X_{21}, X_2] - \lambda_{21}J[Y_{21}, X_1] \\
&= -(m_{-\lambda_1+\lambda_2, -\lambda_2})\lambda_1JX_1 \\
&= -(m_{-\lambda_1+\lambda_2, -\lambda_2})\lambda_1^2X_2 \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o flag maximal de B_2 não admite estruturas pseudo-complexas invariantes integráveis.

B_3

O único flag de B_3 que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag \mathbb{F}_Θ , com $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2\}$. Mostraremos que tais estruturas não são integráveis. Seja $P : Im \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ o isomorfismo, visto no capítulo 3, que comuta com a representação de K_Θ . Para $a \neq 0$, definimos a estrutura pseudo-complexa invariante J_a em $\mathfrak{n}_\Theta^+ = Im \mathbb{H} \oplus \mathfrak{so}(3)$ por $J_aX = aP(X)$ se $X \in Im \mathbb{H}$ e $J_aX = -a^{-1}P^{-1}(X)$ se $X \in \mathfrak{so}(3)$.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores $i, j \in Im\mathbb{H}$, temos

$$\begin{aligned}
N_a(i, j) &= [J_a(i), J_a(j)] - [i, j] - J_a[J_a(i), j] - J_a[i, J_a(j)] \\
&= [aP(i), aP(j)] - [i, j] - J_a[aP(i), j] - J_a[i, aP(j)] \\
&= a^2[ad(i), ad(j)] - 2k - aJ_a[ad(i), j] - aJ_a[i, ad(j)] \\
&= 2a^2ad(k) - 2k - aJ_a(ad(i)ad(j) - ad(i)ad(j)) \\
&= 2a^2ad(k) - 2k - aJ_a[ad(i), ad(j)] \\
&= 2a^2ad(k) - 2k - 2aJ_a(ad(k)) \\
&= 2a^2ad(k) - 2k - 2a(-a^{-1}P^{-1}(ad(k))) \\
&= 2a^2ad(k) - 2k + 2k \\
&= 2a^2ad(k) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

O que mostra que o tensor de Nijenhuis não é identicamente nulo, logo J_a não é integrável.

Em suma,

Proposição 5.2. *Os únicos flags de B_l que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são o flag maximal de B_2 e o flag \mathbb{F}_Θ de B_3 , onde $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2\}$. Nenhum desses flags admite estruturas integráveis.*

5.3 Flags de C_l

Para a análise da integrabilidade, devemos separar o caso $l = 4$ em que as classes de M-equivalência são diferentes do caso geral. Como foi visto no Teorema 3.1, um flag \mathbb{F}_Θ de C_l , $l \neq 4$, admite uma estrutura pseudo-complexa invariante se $\Theta = \{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e d é ímpar ou \mathbb{F}_Θ é o flag maximal de C_l para l par. No caso C_4 , os flags que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são o flag maximal e o flag \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$.

Flags de C_l , $l \neq 4$

As classes de M-equivalência das raízes curtas e longas são

$$\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j\} \text{ e } \{2\lambda_1, \dots, 2\lambda_l\},$$

respectivamente.

1. **Flag maximal** Sejam X_{si} , Y_{si} e X_j , os geradores dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_s - \lambda_i}$, $\mathfrak{g}_{-\lambda_s - \lambda_i}$ e $\mathfrak{g}_{-2\lambda_j}$, respectivamente. Uma estrutura complexa M -invariante sobre \mathbb{F}_\emptyset é dada por soma direta de estruturas complexas nos subespaços $\mathfrak{g}_{\lambda_j - \lambda_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_j - \lambda_i}$ e $\mathfrak{g}_{-2\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-2\lambda_l}$. Pelo Corolário 4.3, as estruturas complexas M -invariantes no flag maximal são dadas por

$$\begin{aligned} JX_{si} &= \lambda_{si}Y_{si}, \\ JX_j &= \beta_{ji}X_i, \end{aligned}$$

onde $-2\lambda_i$ é uma das raízes M -equivalente à raiz $-2\lambda_j$.

Seja s com $2 \leq s \leq l$, tal que $JX_1 = \beta_{1s}X_s$. Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_1 e X_{s1} , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{s1}, X_1] &= [JX_{s1}, JX_1] - [X_{s1}, X_1] - J[X_{s1}, JX_1] - J[JX_{s1}, X_1] \\ &= \lambda_{s1}\beta_{1s}[Y_{s1}, X_s] - \beta_{1s}J[X_{s1}, X_s] - \lambda_{s1}J[Y_{s1}, X_1] \\ &= -\beta_{1s}(m_{-\lambda_1 + \lambda_s, -2\lambda_s})JY_{s1}. \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

2. **Flag \mathbb{F}_Θ** , $\Theta = \{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e d ímpar.

Existem estruturas pseudo-complexas invariantes integráveis nesses flags.

Obtivemos as estruturas pseudo-complexas invariantes nesse caso (ver capítulo 3), fazendo a decomposição do espaço tangente a \mathbb{F}_Θ , na origem, em componentes que denominamos W_R e W_j . Em W_R , qualquer estrutura M -invariante é também K_Θ -invariante. Esse fato nos levou a analisar apenas as componentes W_j para verificar a existência de estruturas pseudo-complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ . Essa componente é dada pela soma de \mathfrak{k}_α com $\alpha \in \Pi_j$, e $\Pi_j = \{\lambda_j \pm \lambda_k : 1 \leq j \leq d-1, k \geq d\}$.

Definimos a estrutura pseudo-complexa invariante J , em cada subespaço $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$, por $JA_{jk} = \varepsilon_{jk}S_{jk}$ e $JS_{jk} = -\varepsilon_{jk}A_{jk}$, sendo $\{A_{jk}, S_{jk}\}$ a base de $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ determinada no capítulo anterior.

A Proposição abaixo estabelece uma condição suficiente para obtermos estruturas pseudo-complexas invariantes integráveis.

Proposição 5.3. *Sejam ε_{kj} e ε_{ks} sinais nos subespaços $\mathfrak{k}_{\lambda_j - \lambda_k} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_j + \lambda_k}$ e $\mathfrak{k}_{\lambda_k - \lambda_s} \oplus \mathfrak{k}_{\lambda_k + \lambda_s}$ das componentes irredutíveis W_j e W_s , respectivamente. Uma estrutura pseudo-complexa J é integrável se $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ks}$ ou $\varepsilon_{ks} = -\varepsilon_{kj}$ e $JA_{sj} = \varepsilon_{kj}S_{sj}$.*

Demonstração. Temos que $JE_{kj} = i\varepsilon_{kj}E_{kj}$ com a restrição $\varepsilon_{jk} = -\varepsilon_{kj}$. O tensor de Nijenhuis satisfaz $N_J(E_{kj}, E_{rs}) = 0$ se $[E_{kj}, E_{rs}] = 0$, isto é, $\{j, k\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Por outro lado,

$$N_J(E_{jk}, E_{ks}) = -(\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ks} + 1)E_{js} - i(\varepsilon_{ks} + \varepsilon_{jk})JE_{js},$$

que se anula se $\varepsilon_{ks} = -\varepsilon_{jk}$ ou $\varepsilon_{ks} = \varepsilon_{jk}$ e $JE_{js} = i\varepsilon_{ks}E_{js}$. □

Em suma temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Um flag \mathbb{F}_Θ de C_l , $l \neq 4$, admite estruturas pseudo-complexas invariantes se, e somente se, $\Theta = \{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$ e d é ímpar ou \mathbb{F}_Θ é o flag maximal de C_l para l par. O flag maximal de C_l , para l par, não admite estruturas pseudo-complexas integráveis. O flag F_Θ , $\Theta = \{\lambda_d - \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$, admite estrutura invariante integrável se a estrutura pseudo-complexa J satisfaz a condição da Proposição 5.3.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1. *Considere o flag \mathbb{F}_Θ de C_3 , onde $\Theta = \{2\lambda_3\}$. A componente W_R do espaço tangente na origem do flag é dada pela soma de \mathfrak{k}_α , $\alpha \in R$, e tem a seguinte forma: $R = \{\lambda_1 \pm \lambda_2\} \cup \{2\lambda_1, 2\lambda_2\}$. As componentes W_j são determinadas pelos conjuntos de raízes abaixo*

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4\}; \\ \Pi_2 &= \{\lambda_2 \pm \lambda_3, \lambda_2 \pm \lambda_4\}; \end{aligned}$$

As estruturas complexas K_Θ -invariantes em $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$ são dadas na tabela 4.

Tabela 4 – Estruturas complexas invariantes no flag $\mathbb{F}_{\{2\lambda_3\}}$ de C_3

Componentes	Estruturas complexas K_Θ -invariantes
W_1	$JA_{31} = \varepsilon_{31}S_{31}$, $JS_{31} = -\varepsilon_{31}A_{31}$, onde $\varepsilon_{31} = \pm 1$
W_2	$JA_{32} = \varepsilon_{32}S_{32}$, $JS_{32} = -\varepsilon_{32}A_{32}$, onde $\varepsilon_{32} = \pm 1$
W_R	$JA_{21} = \lambda_{21}S_{21}$, $JS_{21} = -(\lambda_{21})^{-1}A_{21}$, $JS_{11} = \lambda_{11}S_{22}$, $JS_{22} = -(\lambda_{11})^{-1}S_{11}$

Pela Proposição 5.3, uma estrutura pseudo-complexa J é integrável se $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{31}$ ou $\varepsilon_{32} = -\varepsilon_{31}$ e $JA_{21} = \varepsilon_{31}S_{21}$.

Tabela 5 – Estruturas integráveis em C_3

W_1	W_2	Condições em W_R
ε_{31}	ε_{31}	sem condições
ε_{31}	$-\varepsilon_{31}$	$JA_{21} = \varepsilon_{31}S_{21}$

Exemplo 5.2. Considere o flag \mathbb{F}_Θ de C_7 para $\Theta = \{\lambda_5 - \lambda_6, \lambda_6 - \lambda_7, 2\lambda_7\}$. A componente W_R de $T_{b_\Theta}\mathbb{F}_\Theta$ é dada pela soma de \mathfrak{k}_α , $\alpha \in R$, onde R é dada por $R = \{\lambda_1 \pm \lambda_2, \lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4, \lambda_2 \pm \lambda_3, \lambda_2 \pm \lambda_4, \lambda_3 \pm \lambda_4\} \cup \{2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3, 2\lambda_4\}$.

As componentes W_j são determinadas pelos conjuntos de raízes

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\lambda_1 \pm \lambda_5, \lambda_1 \pm \lambda_6, \lambda_1 \pm \lambda_7\}, \\ \Pi_2 &= \{\lambda_2 \pm \lambda_5, \lambda_2 \pm \lambda_6, \lambda_2 \pm \lambda_7\}, \\ \Pi_3 &= \{\lambda_3 \pm \lambda_5, \lambda_3 \pm \lambda_6, \lambda_3 \pm \lambda_7\}, \\ \Pi_4 &= \{\lambda_4 \pm \lambda_5, \lambda_4 \pm \lambda_6, \lambda_4 \pm \lambda_7\}. \end{aligned}$$

Atribuiremos os sinais ε_{51} , ε_{52} , ε_{53} e ε_{54} nas componentes W_1 , W_2 , W_3 e W_4 , respectivamente. Cada sinal ε_{5i} , $1 \leq i \leq 4$, admite apenas os valores 1 e -1 .

As estruturas pseudo-complexas integráveis no flag \mathbb{F}_Θ de C_7 , $\Theta = \{\lambda_5 - \lambda_6, \lambda_6 - \lambda_7, 2\lambda_7\}$, é dada na tabela 6.

Tabela 6 – Estruturas integráveis em C_7

W_1	W_2	W_3	W_4	Condições em W_R
ε_{51}	ε_{51}	ε_{51}	ε_{51}	sem condições
ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	$-\varepsilon_{51}$	$-\varepsilon_{51}$	$JA_{i1} = \varepsilon_{51}S_{i1}$, $2 \leq i \leq 4$
ε_{51}	ε_{51}	ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	$JA_{4i} = \varepsilon_{51}S_{4i}$, $i = 1, 2, 3$
ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	$-\varepsilon_{51}$	ε_{51}	$JA_{i1} = \varepsilon_{51}S_{i1}$ e $JA_{4i} = -\varepsilon_{51}S_{4i}$, $i = 2, 3$
ε_{51}	ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	$-\varepsilon_{51}$	$JA_{i1} = \varepsilon_{51}S_{i1}$ e $JA_{i2} = \varepsilon_{51}S_{4i}$, $i = 3, 4$
ε_{51}	ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	ε_{51}	$JA_{3i} = \varepsilon_{51}S_{3i}$, $i = 1, 2$ e $JA_{43} = -\varepsilon_{51}S_{43}$
ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	ε_{51}	ε_{51}	$JA_{21} = \varepsilon_{51}A_{21}$, $JA_{32} = -\varepsilon_{51}S_{32}$ e $JA_{42} = -\varepsilon_{51}S_{42}$
ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	ε_{51}	$-\varepsilon_{51}$	$JA_{21} = \varepsilon_{51}S_{21}$, $JA_{32} = -\varepsilon_{51}S_{32}$, $JA_{41} = \varepsilon_{51}S_{41}$ e $JA_{43} = \varepsilon_{51}S_{43}$

5.3.1 Flags de C_4

Como foi visto no capítulo anterior, os flags de C_4 que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são o flag maximal e o flag \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$.

Considere as classes de M-equivalência de C_4 , vistas no capítulo 4:

$$\begin{aligned} &\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}, \\ &\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}, \\ &\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}, \end{aligned}$$

$$\{2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_3, 2\lambda_4\}.$$

Vamos usar as classes de M -equivalência e o tensor de Nijenhuis para mostrar que o flag maximal de C_4 não admite estruturas pseudo-complexas integráveis.

1. Flag maximal

Sejam X_{ji} , Y_{ji} e X_i geradores dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_j - \lambda_i}$, $\mathfrak{g}_{-\lambda_j - \lambda_i}$ e $\mathfrak{g}_{-2\lambda_i}$, respectivamente. Como foi visto acima, as classes de M -equivalência têm mais de dois elementos. Uma estrutura complexa M -invariante sobre \mathbb{F}_\emptyset é dada por soma direta de estruturas complexas nos subespaços $\mathfrak{g}_{\lambda_2 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_2 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4 - \lambda_3} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4 - \lambda_3}$, $\mathfrak{g}_{\lambda_3 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_4 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4 - \lambda_2}$, $\mathfrak{g}_{\lambda_4 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_4 - \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_3 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda_3 - \lambda_2}$ e $\mathfrak{g}_{-2\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-2\lambda_4}$. Pelo Corolário 4.3, uma estrutura complexa M -invariante no flag maximal leva um espaço de raiz \mathfrak{g}_α num espaço de raiz \mathfrak{g}_β , onde β é uma raiz é M -equivalente a α . Como cada classe de M -equivalência tem quatro elementos, temos algumas possibilidades para considerar. Analisaremos cada um dos casos e aplicaremos o tensor de Nijenhuis para garantir que as estruturas complexas no flag maximal de C_4 não são integráveis. De fato,

A. Se $JX_{21} = \lambda_{21}Y_{21}$, então temos três possibilidades para JX_1 :

a. $JX_1 = \lambda_1X_2$.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e X_1 , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{21}, X_1] &= [JX_{21}, JX_1] - [X_{21}, X_1] - J[X_{21}, JX_1] - J[JX_{21}, X_1] \\ &= \lambda_{21}\lambda_1[Y_{21}, X_2] - \lambda_1J[X_{21}, X_2] - \lambda_{21}J[Y_{21}, X_1] \\ &= -\lambda_1(m_{\lambda_2 - \lambda_1, -2\lambda_2})JY_{21} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

b. $JX_2 = \lambda_2X_4$.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e X_2 , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{21}, X_2] &= [JX_{21}, JX_2] - [X_{21}, X_2] - J[X_{21}, JX_2] - J[JX_{21}, X_2] \\ &= \lambda_{21}\lambda_2[Y_{21}, X_4] - [X_{21}, X_2] - \lambda_2J[X_{21}, X_4] - \lambda_{21}J[Y_{21}, X_2] \\ &= -(m_{\lambda_2 - \lambda_1, -2\lambda_2})Y_{21} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

c. $JX_2 = \lambda_2X_3$.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e X_2 , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{21}, X_2] &= [JX_{21}, JX_2] - [X_{21}, X_2] - J[X_{21}, JX_2] - J[JX_{21}, X_2] \\ &= \lambda_{21}\lambda_2[Y_{21}, X_3] - [X_{21}, X_2] - \lambda_2J[X_{21}, X_3] - \lambda_{21}J[Y_{21}, X_2] \\ &= -(m_{\lambda_2 - \lambda_1, -2\lambda_2})Y_{21} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

B. Se $JX_{21} = \lambda_{21}X_{43}$, então $JY_{21} = \beta_{21}Y_{43}$.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e Y_{21} , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{21}, Y_{21}] &= [JX_{21}, JY_{21}] - [X_{21}, Y_{21}] - J[X_{21}, JY_{21}] - J[JX_{21}, Y_{21}] \\ &= \lambda_{21}\beta_{21}[X_{43}, Y_{43}] - [X_{21}, Y_{21}] - \beta_{21}J[X_{21}, Y_{43}] - \lambda_{21}J[X_{43}, Y_{21}] \\ &= -\lambda_{21}\beta_{21}(m_{\lambda_4-\lambda_3, -\lambda_4-\lambda_3})X_3 - (m_{\lambda_2-\lambda_1, -\lambda_1-\lambda_2})X_1 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

C. Se $JX_{21} = \lambda_{21}Y_{43}$, então $JY_{21} = \beta_{21}X_{43}$:

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{21} e Y_{21} , obtemos

$$\begin{aligned} N[X_{21}, Y_{21}] &= [JX_{21}, JY_{21}] - [X_{21}, Y_{21}] - J[X_{21}, JY_{21}] - J[JX_{21}, Y_{21}] \\ &= \lambda_{21}\beta_{21}[Y_{43}, X_{43}] - [X_{21}, Y_{21}] - \beta_{21}J[X_{21}, X_{43}] - \lambda_{21}J[Y_{43}, Y_{21}] \\ &= -\lambda_{21}\beta_{21}(m_{-\lambda_3-\lambda_4, \lambda_4-\lambda_3})X_3 - (m_{\lambda_2-\lambda_1, -\lambda_1-\lambda_2})X_1 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

2. O flag \mathbb{F}_Θ de C_4 , onde $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$

O resultado da Proposição 5.3 é válido nesse caso, uma vez que as estruturas pseudo-complexas invariantes obtidas nesse flag são dadas de forma semelhante ao caso geral. A componente W_R de \mathbb{F}_Θ é dada pelos espaços de raízes $R = \{\lambda_1 \pm \lambda_2\} \cup \{2\lambda_1, 2\lambda_2\}$ e as componentes W_1 e W_2 são determinadas pelos conjuntos de raízes

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\lambda_1 \pm \lambda_3, \lambda_1 \pm \lambda_4\}, \\ \Pi_2 &= \{\lambda_2 \pm \lambda_3, \lambda_2 \pm \lambda_4\}. \end{aligned}$$

As estruturas pseudo-complexas invariantes são dadas por $JE_{k1} = i\varepsilon_{41}E_{k1}$ e $JE_{k2} = i\varepsilon_{42}E_{k2}$, com $k = 3, 4$. Como visto no caso geral, devemos ter $\varepsilon_{ks} = -\varepsilon_{sk}$.

Assim, uma estrutura em \mathbb{F}_Θ é integrável se, e somente se, $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{42}$ ou $\varepsilon_{42} = -\varepsilon_{41}$ e $JE_{12} = i\varepsilon_{42}E_{12}$.

Em suma,

Teorema 5.2. *Os flags de C_4 que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são o flag maximal e o flag \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$. O flag maximal não admite estruturas pseudo-complexas integráveis. Já o flag \mathbb{F}_Θ , para $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, 2\lambda_4\}$, admite estruturas integráveis se, e somente se, $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{42}$ ou $\varepsilon_{42} = -\varepsilon_{41}$ e $JE_{12} = i\varepsilon_{42}E_{12}$.*

5.4 Flags de D_l

D_l , $l \geq 5$

O único flag de D_l , $l \geq 5$, que admite estrutura pseudo-complexa invariante é o flag maximal. Vamos usar o tensor de Nijenhuis e a identidade de Jacobi para provar

que as estruturas pseudo-complexa invariantes no flag maximal de D_l , $l \geq 5$, **não** são integráveis.

Sejam X_{ij} e Y_{ij} geradores dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$, respectivamente.

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{ij} e Y_{ij} , obtemos:

$$\begin{aligned} N[X_{12}, X_{23}] &= [JX_{12}, JX_{23}] - [X_{12}, X_{23}] - J[X_{12}, JX_{23}] - J[JX_{12}, X_{23}] \\ &= \lambda_{12}\lambda_{23}[Y_{12}, Y_{23}] - m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} X_{13} - \lambda_{23}J[X_{12}, X_{23}] - \lambda_{12}J[Y_{12}, X_{23}] \\ &= -m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} X_{13} - \lambda_{23}m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3} JY_{13} \\ &= \left(-m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3} \right) X_{13}. \end{aligned}$$

Suponhamos que J seja uma estrutura integrável, então $\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = \frac{m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3}}{m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3}}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} N[X_{13}, X_{23}] &= [JX_{13}, JX_{23}] - [X_{13}, X_{23}] - J[X_{13}, JX_{23}] - J[JX_{13}, X_{23}] \\ &= \lambda_{13}\lambda_{23}[Y_{13}, Y_{23}] - [X_{13}, X_{23}] - \lambda_{23}J[X_{13}, Y_{23}] - \lambda_{13}J[Y_{13}, X_{23}] \\ &= -\lambda_{23}m_{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3} JY_{12} - \lambda_{13}m_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3} JY_{12} \\ &= (-\lambda_{23}m_{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3} - \lambda_{13}m_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3}) JY_{12}. \end{aligned}$$

Como estamos supondo J integrável, $\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = -\frac{m_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3}}{m_{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3}}$.

Portanto,

$$\frac{m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3}}{m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3}} = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = -\frac{m_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3}}{m_{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3}}. \quad (5.1)$$

Pela identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= [Y_{23}, [X_{12}, X_{23}]] - [[Y_{23}, X_{12}], X_{23}] - [X_{12}, [Y_{23}, X_{23}]] \\ &= m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} [Y_{23}, X_{13}] + m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2} [X_{23}, Y_{13}] \\ &= m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3} Y_{12} + m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2} m_{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3} Y_{12} \\ &= (m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3} + m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2} m_{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3}) Y_{12}. \end{aligned}$$

Assim,

$$m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3} + m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2} m_{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3} = 0,$$

donde segue

$$\begin{aligned} m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3} m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3} &= -m_{\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2} m_{\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3} \\ &= -m_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3} m_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}}{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3}} = -\frac{m_{\lambda_1+\lambda_3, \lambda_2-\lambda_3}}{m_{\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1-\lambda_3}} = \frac{m_{\lambda_1+\lambda_3, \lambda_2-\lambda_3}}{m_{\lambda_1-\lambda_3, \lambda_2+\lambda_3}}. \quad (5.2)$$

De 5.1 e 5.2, obtemos que $m_{\lambda_1+\lambda_3, \lambda_2-\lambda_3} = 0$, o que é um absurdo pois $\lambda_1 + \lambda_2$ é raiz. Segue que J não pode ser uma estrutura integrável.

Em suma,

Proposição 5.4. *O único flag de D_l , $l \geq 5$, que admite estruturas pseudo-complexas invariantes é o flag maximal. Essas estruturas não são integráveis.*

5.4.1 Flags de D_4

Os únicos flags que admitem estruturas pseudo-complexas invariantes são os flags \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \emptyset$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$, $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$ e $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$. Usaremos o tensor de Nijenhuis e a identidade de Jacobi para provar o seguinte resultado:

Proposição 5.5. *Se J é uma estrutura pseudo-complexa invariante em um flag \mathbb{F}_Θ de D_4 , então J não é integrável.*

Considere as classes de M-equivalência de raízes positivas em D_4 :

$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, $\{\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}$ e $\{\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3\}$.

Denotaremos por X_{ij} e Y_{ij} geradores dos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}$ e $\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}$, respectivamente.

A. Flag maximal

Pelo Corolário 4.3 uma estrutura complexa em \mathbb{F}_\emptyset deve satisfazer $JX_\alpha = \lambda X_\beta$, onde $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ e β é uma raiz M -equivalente a α . Como cada classe de M-equivalência tem quatro elementos, temos algumas possibilidades para as estruturas complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ . Vamos analisar essas possibilidades e aplicar o tensor de Nijenhuis em alguns vetores para verificar a não integrabilidade dessas estruturas. De fato,

1. Se $JX_{12} = \lambda_{12}Y_{12}$, então temos três casos para considerar:

a. $JX_{13} = \lambda_{13}X_{24}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{24} , obtemos

$$\begin{aligned} N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\ &= -\lambda_{12}(\lambda_{13})^{-1}[Y_{12}, X_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{12}, X_{24}] + (\lambda_{13})^{-1}J[X_{12}, X_{24}] \\ &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

b. $JX_{24} = \lambda_{24}Y_{13}$ Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{24} , obtemos

$$\begin{aligned} N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\ &= \lambda_{12}\lambda_{24}[Y_{12}, Y_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{12}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, Y_{13}] \\ &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

c. $JX_{13} = \lambda_{13}Y_{13}$

Temos novamente alguns casos a considerar.

1° caso: $JX_{23} = \lambda_{23}Y_{23}$

Usando o argumento utilizado no caso D_l com $l > 4$, mostramos que o tensor de Nijenhuis não é identicamente nulo.

2° caso: $JX_{23} = \lambda_{23}X_{14}$ Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{23} , obtemos

$$\begin{aligned} N(X_{12}, X_{23}) &= [JX_{12}, JX_{23}] - [X_{12}, X_{23}] - J[JX_{12}, X_{23}] - J[X_{12}, JX_{23}] \\ &= \lambda_{12}\lambda_{23}[Y_{12}, X_{14}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}X_{13} - \lambda_{12}J[Y_{12}, X_{23}] + \lambda_{23}J[X_{12}, X_{14}] \\ &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}X_{13} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

3° caso: $JX_{23} = \lambda_{23}Y_{14}$ Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{23} , obtemos

$$\begin{aligned} N(X_{12}, X_{23}) &= [JX_{12}, JX_{23}] - [X_{12}, X_{23}] - J[JX_{12}, X_{23}] - J[X_{12}, JX_{23}] \\ &= \lambda_{12}\lambda_{23}[Y_{12}, Y_{14}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}X_{13} - \lambda_{12}J[Y_{12}, X_{23}] + \lambda_{23}J[X_{12}, Y_{14}] \\ &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}X_{13} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

2. Se $JX_{12} = \lambda_{12}X_{34}$, então temos três possibilidades:

a. $JX_{13} = \lambda_{13}Y_{13}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{13} , obtemos

$$\begin{aligned} N(X_{12}, X_{13}) &= [JX_{12}, JX_{13}] - [X_{12}, X_{13}] - J[JX_{12}, X_{13}] - J[X_{12}, JX_{13}] \\ &= \lambda_{12}\lambda_{13}[X_{34}, Y_{13}] - \lambda_{12}J[X_{34}, X_{13}] - \lambda_{13}J[X_{12}, Y_{13}] \\ &= -\lambda_{12}\lambda_{13}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}JX_{14} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

b. $JX_{24} = \lambda_{24}Y_{13}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{24} , obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{24}[X_{34}, Y_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[X_{34}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, Y_{13}] \\
&= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

c. $JY_{13} = \beta_{13}Y_{24}$

Temos novamente alguns casos a considerar.

1° caso: $JY_{14} = \lambda_{14}X_{14}$ ou $JY_{14} = \lambda_{14}X_{23}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e Y_{13} , obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, Y_{13}) &= [JX_{12}, JY_{13}] - [X_{12}, Y_{13}] - J[JX_{12}, Y_{13}] - J[X_{12}, JY_{13}] \\
&= \lambda_{12}\beta_{13}[X_{34}, Y_{24}] - \lambda_{12}J[X_{34}, Y_{13}] - \beta_{13}J[X_{12}, Y_{24}] \\
&= \beta_{13}(\lambda_{12}Y_{23} - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_4}JY_{14}) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

2° caso: $JX_{14} = \lambda_{14}X_{23}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{14} , obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{14}) &= [JX_{12}, JX_{14}] - [X_{12}, X_{14}] - J[JX_{12}, X_{14}] - J[X_{12}, JX_{14}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{14}[X_{34}, X_{23}] - \lambda_{12}J[X_{34}, X_{14}] - \lambda_{14}J[X_{12}, X_{23}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{14}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}X_{24} - \lambda_{14}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}JX_{13} \\
&= \lambda_{14}(\lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3} - \lambda_{13}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3})X_{24},
\end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{13} , obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{13}) &= [JX_{12}, JX_{13}] - [X_{12}, X_{13}] - J[JX_{12}, X_{13}] - J[X_{12}, JX_{13}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{13}[X_{34}, X_{24}] - \lambda_{12}J[X_{34}, X_{13}] - \lambda_{13}J[X_{12}, X_{24}] \\
&= -\lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}JX_{14} - \lambda_{13}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14} \\
&= (-\lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3} - \lambda_{13}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4})JX_{14}.
\end{aligned}$$

Supondo J integrável, temos

$$\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}} = \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}}{m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}} = -\frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}}{m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}}. \quad (5.3)$$

Pela identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= [X_{34}, [X_{12}, X_{23}]] + [X_{23}, [X_{34}, X_{12}]] + [X_{12}, [X_{23}, X_{34}]] \\
&= m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}[X_{34}, X_{13}] + m_{\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3-\lambda_4}[X_{12}, X_{24}] \\
&= m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}X_{14} + m_{\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3-\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} \\
&= (m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3} + m_{\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3-\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4})X_{14}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3} m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3} + m_{\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3-\lambda_4} m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4} = 0 \\
&\Rightarrow m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3} m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3} = -m_{\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3-\lambda_4} m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4} \\
&\hspace{15em} = m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3} m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4} \\
&\hspace{10em} \Rightarrow \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}}{m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}} = \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}}{m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}} \tag{5.4}
\end{aligned}$$

De (3) e (4) obtemos que $m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4} = 0$, o que é um absurdo pois $\lambda_1 - \lambda_4$ é raiz. Segue que J não pode ser uma estrutura integrável.

3. Se $JX_{12} = \lambda_{12}Y_{34}$, então tem três possibilidades para considerar:

a. $JX_{24} = \lambda_{24}Y_{24}$

Considerando que os vetores JY_{23} e JY_{14} são linearmente independentes, obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{24}[Y_{34}, Y_{24}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{34}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, Y_{24}] \\
&= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}JY_{23} - \lambda_{24}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_4}JY_{14} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

b. $JX_{24} = \lambda_{24}X_{13}$

Considerando que os vetores JY_{23} e JY_{14} são linearmente independentes, obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{24}[Y_{34}, X_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{34}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, X_{13}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{24}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_3}JY_{14} - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}JY_{23} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

c. $JX_{24} = \lambda_{24}Y_{13}$

Temos novamente alguns casos a considerar.

1° caso: $JX_{14} = \lambda_{14}Y_{14}$ ou $JX_{14} = \lambda_{14}X_{23}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{24} , obtemos

$$\begin{aligned}
N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\
&= \lambda_{12}\lambda_{24}[Y_{34}, Y_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{34}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, Y_{13}] \\
&= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}JY_{23} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

2º caso: $JX_{14} = \lambda_{14}Y_{23}$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{24} , obtemos

$$\begin{aligned}
 N(X_{12}, X_{24}) &= [JX_{12}, JX_{24}] - [X_{12}, X_{24}] - J[JX_{12}, X_{24}] - J[X_{12}, JX_{24}] \\
 &= \lambda_{12}\lambda_{24}[Y_{34}, Y_{13}] - m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}J[Y_{34}, X_{24}] - \lambda_{24}J[X_{12}, Y_{13}] \\
 &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} - \lambda_{12}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}JY_{23} \\
 &= -m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{14} + \lambda_{12}(\lambda_{14})^{-1}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}X_{14},
 \end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e X_{14} , obtemos

$$\begin{aligned}
 N(X_{12}, X_{14}) &= [JX_{12}, JX_{14}] - [X_{12}, X_{14}] - J[JX_{12}, X_{14}] - J[X_{12}, JX_{14}] \\
 &= \lambda_{12}\lambda_{14}[Y_{34}, Y_{23}] - \lambda_{12}J[Y_{34}, X_{14}] - \lambda_{14}J[X_{12}, Y_{23}] \\
 &= -\lambda_{12}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4}JY_{13} - \lambda_{14}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3}JY_{13}.
 \end{aligned}$$

Supondo J integrável, temos

$$\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{14}} = \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}}{m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}} = -\frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3}}{m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4}}. \quad (5.5)$$

Pela identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= [Y_{34}, [X_{12}, X_{24}]] + [X_{24}, [Y_{34}, X_{12}]] + [X_{12}, [X_{24}, Y_{34}]] \\
 &= m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}[Y_{34}, X_{14}] + m_{\lambda_2-\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4}[X_{12}, Y_{23}] \\
 &= m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4}Y_{13} + m_{\lambda_2-\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3}Y_{13} \\
 &= (m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4} + m_{\lambda_2-\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3})Y_{13},
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4} + m_{\lambda_2-\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3} &= 0 \\
 \Rightarrow m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4} &= -m_{\lambda_2-\lambda_4, \lambda_3+\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3} \\
 &= m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3} \\
 \Rightarrow \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}}{m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2-\lambda_4}} &= \frac{m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3}}{m_{\lambda_3+\lambda_4, \lambda_1-\lambda_4}} \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

De (5) e (6) obtemos que $m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2+\lambda_3} = 0$, o que é um absurdo pois $\lambda_1 + \lambda_3$ é raiz. Segue que J não pode ser uma estrutura integrável.

B. Flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4\}$

Como foi visto no capítulo anterior, as estruturas complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} JY_{12} &= \lambda_{12}Y_{34}, \\ J(X_{13} - X_{24}) &= a_1T(X_{13} - X_{24}) = a_1(Y_{13} - Y_{24}), \\ J(X_{14} + X_{23}) &= a_2T(X_{14} + X_{23}) = a_2(Y_{14} + Y_{23}), \\ J(X_{13} + X_{24}) &= a_3T(X_{13} + X_{24}) = a_3(Y_{13} + Y_{24}), \\ J(X_{14} - X_{23}) &= a_4T(X_{14} - X_{23}) = a_4(Y_{14} - Y_{23}). \end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores Y_{12} e $(X_{13} - X_{24})$, obtemos

$$\begin{aligned} N[Y_{12}, (X_{13} - X_{24})] &= [JY_{12}, J(X_{13} - X_{24})] - [Y_{12}, (X_{13} - X_{24})] \\ &\quad - J[JY_{12}, J(X_{13} - X_{24})] - J[JY_{12}, (X_{13} - X_{24})] \\ &= \lambda_{12}a_1[Y_{34}, (Y_{13} - Y_{24})] - [Y_{12}, (X_{13} - X_{24})] \\ &\quad - a_1J[Y_{12}, (Y_{13} - Y_{24})] - \lambda_{12}J[Y_{34}, (X_{13} - X_{24})] \\ &= -m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3}Y_{23} + m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}Y_{14} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, o flag \mathbb{F}_Θ não admite estruturas complexas invariantes integráveis.

C. Flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$

As estruturas complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} JY_{12} &= \lambda_{12}X_{34}, \\ J(X_{13} - Y_{24}) &= a_1T_1(X_{13} - Y_{24}) = a_1(Y_{13} - X_{24}), \\ J(Y_{14} + X_{23}) &= a_2T_1(Y_{14} + X_{23}) = a_2(X_{14} + Y_{23}), \\ J(X_{13} + Y_{24}) &= a_3T_2(X_{13} + Y_{24}) = a_3(Y_{13} + X_{24}), \\ J(Y_{14} - X_{23}) &= a_4T_2(Y_{14} - X_{23}) = a_4(X_{14} - Y_{23}), \end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores Y_{12} e $(Y_{14} - X_{23})$, obtemos

$$\begin{aligned} N[Y_{12}, Y_{14} - X_{23}] &= [JY_{12}, J(Y_{14} - X_{23})] - [Y_{12}, (Y_{14} - X_{23})] \\ &\quad - J[JY_{12}, J(Y_{14} - X_{23})] - J[JY_{12}, Y_{14} - X_{23}] \\ &= \lambda_{12}a_4[X_{34}, (X_{14} - Y_{23})] - [Y_{12}, (Y_{14} - X_{23})] \\ &\quad - a_4J[Y_{12}, (X_{14} - Y_{23})] - \lambda_{12}J[X_{34}, (Y_{14} - X_{23})] \\ &= -\lambda_{12}a_4m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} + m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}Y_{13} \\ &\quad - a_4m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}JY_{24} + \lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}JX_{24}. \end{aligned}$$

Supondo que J é uma estrutura complexa integrável, obtemos do cálculo do tensor de Nijenhuis nos vetores Y_{12} e $(Y_{14} - X_{23})$ que

$$\lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}JX_{24} = \lambda_{12}a_4m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} - m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}Y_{13} + a_4m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}JY_{24}. \quad (5.7)$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores Y_{12} e $(Y_{14} + X_{23})$, obtemos

$$\begin{aligned}
N[Y_{12}, Y_{14} + X_{23}] &= [JY_{12}, J(Y_{14} + X_{23})] - [Y_{12}, (Y_{14} + X_{23})] \\
&- J[Y_{12}, J(Y_{14} + X_{23})] - J[JY_{12}, Y_{14} - X_{23}] \\
&= \lambda_{12}a_2[X_{34}, (X_{14} + Y_{23})] - [Y_{12}, (Y_{14} + X_{23})] \\
&- a_2J[Y_{12}, (X_{14} + Y_{23})] - \lambda_{12}J[X_{34}, (Y_{14} + X_{23})] \\
&= \lambda_{12}a_2m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} - m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}Y_{13} \\
&- a_2m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}JY_{24} - \lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}JX_{24}.
\end{aligned}$$

Como estamos supondo que a estrutura complexa J é integrável, temos

$$\lambda_{12}m_{\lambda_3-\lambda_4, \lambda_2-\lambda_3}JX_{24} = \lambda_{12}a_2m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} - m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_3}Y_{13} - a_2m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}JY_{24}. \quad (5.8)$$

De 5.7 e 5.8, temos

$$\lambda_{12}(a_4 - a_2)m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} + (a_4 + a_2)m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}JY_{24} = 0. \quad (5.9)$$

Pela expressão de $J(X_{13} - Y_{24})$ e $J(X_{13} + Y_{24})$, concluímos que

$$JY_{24} = \frac{1}{2}(a_3 - a_1)Y_{13} + \frac{1}{2}(a_3 + a_1)X_{24}. \quad (5.10)$$

Substituindo a equação 5.10 em 5.9, obtemos

$$\lambda_{12}(a_4 - a_2)m_{\lambda_3-\lambda_4, -\lambda_2-\lambda_3}Y_{24} + \frac{1}{2}(a_4 + a_2)m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_4}((a_3 - a_1)Y_{13} + (a_3 + a_1)X_{24}) = 0. \quad (5.11)$$

Como os vetores Y_{24} , Y_{13} e X_{24} são linearmente independentes, obtemos da equação 5.11 que ou $a_4 = a_2 = 0$ ou $a_3 = a_1 = 0$. Nos dois casos tem-se um absurdo, uma vez que J é invertível.

Portanto, o flag \mathbb{F}_Θ de D_4 , $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\}$, não admite estruturas complexas invariantes integráveis.

D. Flag \mathbb{F}_Θ , $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$

As estruturas complexas invariantes em \mathbb{F}_Θ são da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
JX_{12} &= \lambda_{12}Y_{12}, \\
J(X_{13} + Y_{13}) &= a_1T(X_{13} + Y_{13}) = a_1(X_{24} + Y_{24}), \\
J(X_{14} + Y_{14}) &= a_2T(X_{14} + Y_{14}) = -a_2(X_{23} + Y_{23}), \\
J(X_{13} - Y_{13}) &= a_3T(X_{13} - Y_{13}) = a_3(X_{24} - Y_{24}), \\
J(X_{14} - Y_{14}) &= a_4T(X_{14} - Y_{14}) = -a_4(X_{23} - Y_{23}),
\end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e $(X_{13} + Y_{13})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 N[X_{12}, (X_{13} + Y_{13})] &= [JX_{12}, J(X_{13} + Y_{13})] - [X_{12}, (X_{13} + Y_{13})] \\
 &\quad - J[X_{12}, J(X_{13} + Y_{13})] - J[JX_{12}, (X_{13} + Y_{13})] \\
 &= \lambda_{12}a_1[Y_{12}, (X_{24} + Y_{24})] - [X_{12}, (X_{13} + Y_{13})] \\
 &\quad - a_1J[X_{12}, (X_{24} + Y_{24})] - \lambda_{12}J[Y_{12}, (X_{13} + Y_{13})] \\
 &= \lambda_{12}a_1m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}Y_{14} - m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3}Y_{23} \\
 &\quad - a_1m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14} - \lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3}JY_{23}.
 \end{aligned}$$

Supondo que J é uma estrutura complexa integrável, obtemos do cálculo do tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e $(X_{13} + Y_{13})$ que

$$\lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3}JY_{23} = \lambda_{12}a_1m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}Y_{14} - m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3}Y_{23} - a_1m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14}. \quad (5.12)$$

Aplicando o tensor de Nijenhuis nos vetores X_{12} e $(X_{13} - Y_{13})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 N[X_{12}, (X_{13} - Y_{13})] &= [JX_{12}, J(X_{13} - Y_{13})] - [X_{12}, (X_{13} - Y_{13})] \\
 &\quad - J[X_{12}, J(X_{13} - Y_{13})] - J[JX_{12}, (X_{13} - Y_{13})] \\
 &= \lambda_{12}a_3[Y_{12}, (X_{24} - Y_{24})] - [X_{12}, (X_{13} - Y_{13})] \\
 &\quad - a_3J[X_{12}, (X_{24} - Y_{24})] - \lambda_{12}J[Y_{12}, (X_{13} - Y_{13})] \\
 &= \lambda_{12}a_3m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}Y_{14} + m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3}Y_{23} \\
 &\quad - a_3m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14} - \lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3}JY_{23}.
 \end{aligned}$$

Como estamos supondo que a estrutura complexa J é integrável, obtemos

$$\lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1-\lambda_3}JY_{23} = \lambda_{12}a_3m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}Y_{14} + m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3}Y_{23} - a_3m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14}. \quad (5.13)$$

De 5.12 e 5.13, temos

$$\lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}(a_1 - a_3)Y_{14} - 2m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3}Y_{23} + (a_3 - a_1)m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}JX_{14}. \quad (5.14)$$

Pela expressão de $J(X_{14} - Y_{14})$ e $J(X_{14} + Y_{14})$, concluímos que

$$JX_{14} = \frac{1}{2}(-a_2 - a_4)X_{23} + \frac{1}{2}(a_4 - a_2)Y_{23}. \quad (5.15)$$

Substituindo a equação 5.15 na equação 5.14, temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \lambda_{12}m_{-\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}(a_1 - a_3)Y_{14} + (-2m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3} + \frac{1}{2}(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4})Y_{23} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(-a_4 - a_2)(a_3 - a_1)m_{\lambda_1-\lambda_2, \lambda_2-\lambda_4}X_{23}.
 \end{aligned}$$

Como os vetores Y_{14} , Y_{23} e X_{23} são linearmente independentes, obtemos que $a_1 = a_3$ e $m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3} = 0$. Por outro lado, $\beta_{23} = -\lambda_2 - \lambda_3$ é uma raiz e, portanto, $m_{\lambda_1-\lambda_2, -\lambda_1-\lambda_3} \neq 0$. Temos um absurdo. Logo, o flag \mathbb{F}_Θ de D_4 , $\Theta = \{\lambda_3 - \lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4\}$, não admite estruturas complexas invariantes integráveis.

5.5 Flags de G_2

Como foi visto no capítulo anterior, o flag maximal é o único flag de G_2 que admite estruturas pseudo-complexas invariantes. Vamos mostrar que essas estruturas não são integráveis.

As classes de M-equivalência de raízes positivas têm dois elementos e são dadas por:

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2\}, \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2\}, \{\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}.$$

Dada uma base $\{E_\alpha, E_\beta\}$ do subespaço $V_{[\alpha]} = \sum_{\beta \sim_M \alpha} \mathfrak{g}_\beta$, definimos uma estrutura complexa $J_{\{E_\alpha, E_\beta\}}$ por $JE_\alpha = E_\beta$ e $JE_\beta = -E_\alpha$. Assim, o tensor de Nijenhuis aplicado nos vetores $E_{-\alpha_1-\alpha_2}$ e $E_{-\alpha_2}$ tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} N[E_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] &= [JE_{-\alpha_1-\alpha_2}, JE_{-\alpha_2}] - [E_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] \\ &\quad - J[E_{-\alpha_1-\alpha_2}, JE_{-\alpha_2}] - J[JE_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] \\ &= [E_{-\alpha_1-3\alpha_2}, E_{-2\alpha_1-3\alpha_2}] - [E_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] \\ &\quad - J[E_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{-2\alpha_1-3\alpha_2}] - J[E_{-\alpha_1-3\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] \\ &= -(m_{-\alpha_1-\alpha_2, -\alpha_2})E_{-\alpha_1-2\alpha_2} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que a estrutura pseudo-complexa J , definida acima, não é integrável. Como essa base foi tomada genericamente, concluímos que o flag maximal de G_2 não admite estruturas pseudo-complexas integráveis.

Referências

- ARVANITOYEORGOS, A. New invariant einstein metrics on generalized flag manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 337, n. 2, p. 981–995, 1993.
- _____. *Geometry of flag manifolds*. [S.l.]: World Scientific, 2006. 957–974 p.
- BURSTALL, F.; RAWNSLEY, J. *Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces with Applications to Harmonic Maps of Riemann Surfaces (Lecture Notes in Mathematics, 1424)*. [S.l.]: Springer, 1990.
- BURSTALL, F.; SALAMON, S. Tournaments, flags, and harmonic maps. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 277, n. 2, p. 249–265, 1987.
- COHEN, N.; NEGREIROS, C. J.; MARTIN, L. A. S. (1, 2)-symplectic metrics, flag manifolds and tournaments. *Bulletin of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 34, n. 6, p. 641–649, 2002.
- FULTON, W.; HARRIS, J. *Representation Theory: A First Course, volume 129 of Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1991.
- GRAMA, L.; NEGREIROS, C. J.; OLIVEIRA, A. R. Invariant almost complex geometry on flag manifolds: geometric formality and chern numbers. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, Springer, p. 1–36, 2015.
- GUTIERREZ, M. P. *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*. 2000.
- HELGASON, S. *Differential geometry, lie groups, and symmetric spaces*, acad. Press, London, 1978.
- KNAPP, A. W. *Lie groups beyond an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- MARTIN, L. A. S. *Grupos de lie*. 2015.
- MARTIN, L. A. S.; NEGREIROS, C. J. Invariant almost hermitian structures on flag manifolds. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 178, n. 2, p. 277–310, 2003.
- MARTIN, L. A. S.; SILVA, R. d. C. d. J. Invariant nearly-kähler structures. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 121, n. 1, p. 143–154, 2006.
- MARTIN, L. S. *Algebras de lie*. *Editorial UNICAMP, Campinas, SP*, 1999.
- MONK, D. The geometry of flag manifolds. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 2, p. 253–286, 1959.
- NEGREIROS, C. J. Some remarks about harmonic maps into flag manifolds. *Indiana University Mathematics Journal*, INDIANA UNIV MATH JOURNAL SWAIN HALL EAST 222, BLOOMINGTON, IN 47405, v. 37, n. 3, p. 617–636, 1988.

- PATRAO, M.; MARTIN, L. A. S. The isotropy representation of a real flag manifold: Split real forms. *Indagationes Mathematicae*, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 547–579, 2015.
- PATRAO, M.; MARTIN, L. A. S.; SANTOS, L. J. dos; SECO, L. Orientability of vector bundles over real flag manifolds. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 159, n. 10, p. 2774–2786, 2012.
- PILCA, M. *On formal Riemannian metrics*. [S.l.]: OVIDIUS UNIV PRESS OVIDIUS UNIV, FAC MATHEMATICS & INFO, BD MAMAIA 124, CONSTANTA, 900527, ROMANIA, 2012. 131–144 p.
- SILVA, R. *Estruturas Quase-Hermitianas Invariantes em Espaços Homogêneos de Grupos Semi-simples*. 2003.
- WANG, M. Y.; ZILLER, W. On normal homogeneous einstein manifolds. In: *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 18, n. 4, p. 563–633.