



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

SERGIO ANDRES CORDOBA PAREJA

**n -Larguras e Números de Entropia de
Operadores Multiplicadores de Séries Múltiplas
de Walsh**

Campinas

2020

Sergio Andres Cordoba Pareja

**n -Larguras e Números de Entropia de Operadores
Multiplicadores de Séries Múltiplas de Walsh**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

Este exemplar corresponde à versão
final da Tese defendida pelo aluno Ser-
gio Andres Cordoba Pareja e orien-
tada pelo Prof. Dr. Sergio Antonio
Tozoni.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C812n Cordoba Pareja, Sergio Andres, 1990-
n-Larguras e números de entropia de operadores multiplicadores de séries
múltiplas de Walsh / Sergio Andres Cordoba Pareja. – Campinas, SP : [s.n.],
2020.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Multiplicadores (Análise matemática). 2. n-Larguras. 3. Funções de
Walsh. 4. Entropia. 5. Teoria da aproximação. I. Tozoni, Sergio Antonio. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Estimates for n-widths and entropy numbers of multiplier operators
of multiple Walsh series

Palavras-chave em inglês:

Multipliers (Mathematical analysis)

n-Widths

Walsh functions

Entropy

Approximation theory

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Sergio Antonio Tozoni [Orientador]

Dicesar Lass Fernandez

Sahibzada Waleed Noor

Mario Henrique de Castro

Thaís Jordão

Data de defesa: 17-12-2020

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9886-221X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8598581051744762>

**Tese de Doutorado defendida em 17 de dezembro de 2020 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). DICESAR LASS FERNANDEZ

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof(a). Dr(a). MARIO HENRIQUE DE CASTRO

Prof(a). Dr(a). THAÍS JORDÃO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais...

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por ter me dado forças e capacidades para alcançar esta nova etapa na minha vida.

Ao professor Sergio Antonio Tozoni por ter me orientado neste trabalho, por seus valiosos conselhos e apoio contínuo que me proporcionou durante esses quatro anos.

Aos professores Dicesar Lass Fernandez, Mario Henrique de Castro, Sahibzada Waleed Noor e a professora Thaís Jordão, por participarem da banca e pelas valiosas sugestões que contribuíram para melhorar este trabalho.

À toda minha família pelo apoio, que mesmo com a distância se fez presente em todos os momentos. Em especial à minha mãe Yoslany, meu pai Jesus Orlando, meu irmão Jhon Mario e minha tia Elsa. Agradeço também a minha avó, Emigdia, que não está mais entre nós, mas continua sendo minha força na vida.

À minha noiva, Maria Paula Meneses, que esteve presente quase todo meu doutorado. Agradeço pelo amor e apoio incondicional, sempre me incentivando a continuar.

Aos amigos do Imecc, especialmente Carlos, Juan Carlos, Fabian, Robert, Rodrigo, Blas por toda a ajuda nos estudos, pelo companheirismo e pelos bons momentos que proporcionaram durante estes quatro anos.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), número do processo 141171/2019-7, cujo apoio financeiro tornou possível a realização e apresentação deste trabalho em eventos e congressos.

Para terminar, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

As séries de Walsh formam um sistema ortonormal completo de $L^2[0, 1)$ que pode ser aplicado em diferentes situações, tais como: transmissão de dados, filtração, enriquecimento de imagem, análise de sinais e reconhecimento de padrão.

A teoria das n -larguras foi introduzida por Kolmogorov na década de 1930 e a teoria dos números de entropia foi introduzida e estudada por Pietsch em [36]. Desde então, muitos trabalhos têm visado obter estimativas assintóticas para n -larguras e números de entropia de diferentes classes de conjuntos. Neste trabalho usamos estimativas para médias de Levy para estudar n -larguras e números de entropia de operadores multiplicadores de séries múltiplas de Walsh limitados de L^p em L^q , $1 \leq p, q \leq \infty$. Na primeira parte, estudamos estimativas inferiores e superiores para n -larguras e números de entropia de operadores multiplicadores gerais. Na segunda parte, aplicamos estes resultados para operadores multiplicadores específicos, associados a conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis no sentido diádico sobre I^d , $I = [0, 1)$. Em particular, demonstramos que as estimativas estudadas são exatas em termos de ordem em diversas situações.

Palavras-chave: Operadores multiplicadores, séries múltiplas de Walsh, n -larguras, números de entropia, teoria da aproximação.

Abstract

The Walsh functions form a complete orthonormal system of $L^2[0, 1)$ that can be applied in different situations, such as: data transmission, filtering, image enhancement, signal analysis and pattern recognition.

The theory of n -widths was introduced by Kolmogorov in the 1930s and the theory of entropy numbers was introduced and studied by Pietsch in [36]. Since then, many works aim to find estimates for n -widths and entropy numbers of different classes of sets. In this work we study n -widths and entropy numbers of bounded multiplier operators of multiple Walsh series from L^p to L^q , $1 \leq p, q \leq \infty$. In the first part, upper and lower bounds are studied for n -widths and entropy numbers of general multiplier operators. In the second part, we apply these results to specific multiplier operators, associated with sets of finitely and infinitely differentiable functions, in the dyadic sense, on I^d , $I = [0, 1)$. In particular, we show that, the estimates have order sharp in various situations.

Keywords: Multipliers operators, multiple Walsh series, n -widths, entropy numbers, approximation theory.

Lista de símbolos

$\vee, \wedge$:	Máximo e mínimo entre números ou funções, p. 21;
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$:	Conjunto dos números inteiros positivos, dos números inteiros não negativos, respectivamente, p. 21;
$\mathbb{Z}$:	Conjunto dos números inteiros, p. 21;
$L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$:	Ver Definição 1.1.3, p. 21;
$\ \cdot\ _p$:	Ver Definição 1.1.3, p. 21;
$[f \mathcal{F}]$:	Esperança condicional de f , ver Definição 1.2.1, p. 23;
λ :	Medida de Lebesgue sobre $[0, 1)$, p. 24;
$I_{n,i}$:	Intervalos diádicos, ver Definição 1.3.3, p. 24;
$\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$:	Sistema de Rademacher, ver Definição 1.3.4, p. 24;
$\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$:	Sistema de Walsh, ver Definição 1.3.4, p. 24;
$\oplus$:	Soma Diádica, ver Definições 1.3.2, 1.3.8, 1.3.20, 1.3.21, p. 24 e 26;
I^d :	Conjunto $I \times I \times \cdots \times I$, d-vezes, $I = [0, 1)$;
$\mathbb{N}_0^d$:	Conjunto $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$, d-vezes;
$\mathbb{R}^d$:	Conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, d-vezes;
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$:	Elementos de $\mathbb{R}^d$;
$\mathbf{n}, \mathbf{m}$:	Elementos de $\mathbb{N}_0^d$;
$\{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$:	Sistema de Walsh em I^d , ver Definição 1.3.16, p. 25;
$f * g$:	Convolução entre as funções f e g , ver Definições 1.3.10 e 1.3.23, p. 25 e 26;
$a_k(f)$:	k -ésimo coeficiente de Walsh-Fourier da função f , ver Definição 1.3.12, p. 25;
$S_n f$:	Somas parciais da série de Walsh-Fourier da função f , ver Definição 1.3.12, p. 25;
D_n :	Núcleo de Direchlet, ver Definição 1.3.13, p. 25;

$I_n(\mathbf{x})$:	Retângulo diádico d -dimensional, ver Definição 1.3.14, p. 25;
$\hat{f}(\mathbf{k})$:	$\mathbf{k}$ -ésimo coeficientes de Walsh-Fourier da função f , ver Definição 1.3.18, p. 26;
$ \mathbf{k} , \mathbf{k} _*$:	Norma euclidiana e norma do máximo do elemento $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, respectivamente, ver Notação 1.3.19, p. 26;
$D_R(\mathbf{x}), D_R^*(\mathbf{x})$:	Núcleo esférico de Direchlet em I^d e Núcleo quadrado de Direchlet em I^d , respectivamente, ver Definição 1.3.26, p. 28;
$S_R f, S_R^* f$:	Soma parcial esférica e Soma parcial quadrada da série de Walsh-Fourier de f , respectivamente, ver Definição 1.3.27, p. 28;
A_l, A_l^* :	Ver Definição 1.4.1, p. 31;
$\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_l^*$:	Ver Definição 1.4.1 e Notação 2.2.1, p. 30 e 51;
$\mathcal{T}_N, \mathcal{T}_N^*$:	Ver Definição 1.4.1 e Notação 2.2.1, p. 30 e 51;
$\bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l$:	Soma direta dos espaços vetoriais $\mathcal{H}_l$, ver Definição 1.4.1 e Notação 2.2.1, p. 30 e 51;
d_l :	Dimensão do espaço $\mathcal{H}_l$, ver Definição 1.4.1 e Notação 2.2.1, p. 30 e 51;
d_l^* :	Dimensão do espaço $\mathcal{H}_l^*$, ver Definição 1.4.1 e Notação 2.2.1, p. 30 e 51;
$\lambda_{\mathbf{k}}, \lambda_{\mathbf{k}}^*$:	Ver Observações 1.4.10 e 2.2.2, p. 36 e 51;
Λ, Λ^* :	Operadores multiplicadores arbitrários definidos sobre I^d e Ω^d , ver Observações 1.4.10 e 2.2.2, p. 36 e 51;
$d_n f(x)$:	Ver Definição 1.5.1, p. 36;
$f^{[1]}(x)$:	Derivada diádica da função f , ver Definição 1.5.1, p. 36;
$\hat{f}(t)$:	Transformada de Walsh, ver Observação 1.5.2, p. 36;
$\mathcal{F}(f)(t)$:	Transformada de Fourier, ver Observação 1.5.2, p. 36;
$d_{n,q} f(\mathbf{x})$:	Ver Definição 1.5.6, p. 38;
$\partial^q f / \partial x^q$:	q -ésima derivada parcial diádica de f , ver Definição 1.5.6, p. 38;
X_n :	Subespaço n -dimensional de um espaço X , ver Notação 1.6.1, p. 43;
$E(x, X_n)$:	Ver Notação 1.6.1, p. 43;
$E(A, X_n)$:	Ver Definição 1.6.2, p. 43;

- $d_n(A, X)$: n -largura de Kolmogorov de A em X , ver Definição 1.6.3, p. 44;
- $d^n(A, X)$: n -largura de Gel'fand de A em X , ver Definição 1.6.4, p. 44;
- $b_n(A, X)$: n -largura de Bernstein de A em X , ver Definição 1.6.7, p. 45;
- $\mathcal{L}(X, Y)$: Espaço Vetorial dos operadores lineares contínuos de X em Y , ver Notação 1.7.5, p. 46;
- B_X : Bola unitária fechada e centrada na origem no espaço X , ver Notação 1.7.6, p. 46;
- U_p : Bola unitária fechada e centrada na origem do espaço L^p , ver Notação 1.7.6, p. 46;
- $d_n(T)$: n -largura de Kolmogorov do operador T , ver Definição 1.7.7, p. 46;
- $d^n(T)$: n -largura de Gel'fand do operador T , ver Definição 1.7.8, p. 46;
- $K(X, Y)$: Espaço Vetorial dos operadores lineares compactos de X em Y , ver Notação 1.7.10, p. 46;
- T' : Adjunto do operador T , ver Definição 1.7.11, p. 46;
- $e_k(A)$: k -ésimo número de entropia do conjunto A , ver Definição 1.8.1, p. 47;
- $e_k(T)$: k -ésimo número de entropia do operador T , ver Definição 1.8.3, p. 47;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Espaço de probabilidade, ver p. 49;
- $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$: Sistema ortonormal completo de funções reais, ver p. 49;
- $\{\phi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$: Sistema ortonormal completo de funções reais, ver p. 49;
- $\mathcal{T}_{M_1, M_2}, \mathcal{T}_{M_1, M_2}^*$: Ver Notação 2.2.1, p. 51;
- $\Lambda_n, \tilde{\Lambda}_n$: Operadores multiplicadores arbitrários definidos para funções sobre Ω^d , ver Observação 2.2.3 p. 52;
- $\|\cdot\|_{\Lambda_n, p}, \|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)}, :$ Ver Observação 2.2.3, p. 52;
- $B_{\Lambda_n, p}^n, B_{(\Lambda_n, p)}^n$: Ver Observação 2.2.3, p. 52;
- $B_p^n, B_{(p)}^n$: Ver Observação 2.2.3, p. 52;
- $\|\cdot\|_{\Lambda_n^*, p}, \|\cdot\|_{(\Lambda_n^*, p)}$: Ver Observação 2.2.4, p. 53;
- $B_{\Lambda_n^*, p}^n, B_{(\Lambda_n^*, p)}^n$: Ver Observação 2.2.4, p. 53;
- $B_{n, p}^*, B_{(n, p)}^*$: Ver Observação 2.2.4, p. 53;

$\Lambda_n^*, \tilde{\Lambda}_n^*$:	Operadores multiplicadores arbitrários definidos para funções sobre Ω^d , ver Observação 2.2.4 p. 53;
$\ \cdot\ _{(2)}$:	Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, ver Notação 2.2.5, p. 53;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Produto interno em $\mathbb{R}^n$, ver Notação 2.2.5, p. 53;
$\mathbb{S}^{n-1}$:	Esfera unitária Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, ver Notação 2.2.5, p. 53;
$M(\mathbb{R}^n, \ \cdot\)$:	Média de Levy de uma norma $\ \cdot\ $ definida em $\mathbb{R}^n$, ver Definição 2.2.6, p. 53;
$d\gamma(x)$:	Medida Gaussiana sobre $\mathbb{R}^n$, p. 53;
$d\sigma(x)$:	Medida de Lebesgue sobre S^{n-1} , p. 53;
$\delta_i^m(\theta)$:	Ver Lema 2.2.8, p. 54;
$\ll, \gg, \asymp$:	Ver introdução do Capítulo 3, p. 62;
$(a)_+$:	Ver introdução do Capítulo 3, p. 62;
$[x]$:	Ver introdução de Capítulo 3, p. 62;
$\ \cdot\ ^\circ$:	Norma dual de uma norma $\ \cdot\ $ em $\mathbb{R}^n$, p. 62;
$\theta_{N_k, N_{k+1}}$:	Dimensão do espaço $\mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}$, ver Teorema 3.2.1, p. 68;
ϱ_{m_k} :	Ver Teorema 3.2.1, p. 68;
N_{k+1} :	$\min\{l \in \mathbb{N} : 2 \lambda(l) \leq \lambda(N_k) \}$, onde $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ver Observação 3.2.2, p. 74;
M :	$\lceil \log(\theta_{N_1, N_2})/\epsilon \rceil$, $\epsilon > 0$, ver Observação 3.2.2, p. 74;
m_k :	$\lceil 2^{-\epsilon k}(\theta_{N_1, N_2}) \rceil + 1$, $\epsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots, M$, ver Observação 3.2.2, p. 74;
$\theta_{N_k, N_{k+1}}^*$:	Dimensão do espaço $\mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}^*$, ver Observação 3.2.3, p. 75;
M^* :	$\lceil \log(\theta_{N_1, N_2}^*)/\epsilon \rceil$, $\epsilon > 0$, ver Observação 3.2.3, p. 75;
m_k^* :	$\lceil 2^{-\epsilon k}(\theta_{N_1, N_2}^*) \rceil + 1$, $\epsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots, M^*$, ver Observação 3.2.3, p. 75;
$K_{\epsilon, p}$:	Ver Definição 3.2.4, p. 75;
$K_{\epsilon, p}^*$:	Ver Definição 3.2.4, p. 75;
$\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$:	Operadores multiplicadores específicos, ver introdução do Capítulo 4, p. 78;

$\Lambda_*^{(1)}, \Lambda_*^{(2)}:$	Operadores multiplicadores específicos, ver introdução do Capítulo 4, p. 78;
$\zeta_n:$	Ver Teorema 4.1.4, p. 85;
$\vartheta_n:$	Dimensão do espaço $\mathcal{T}_n$, ver Teorema 4.2.3, p. 89;
$\omega_n:$	$\vartheta_n - \vartheta_n^{1-r/d} - 1$, $r \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, ver Teorema 4.2.3, p. 89;
$\mathcal{R}:$	$\gamma \left(\frac{d2^{d-1}\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \right)^{r/d}$, ver Teorema 4.2.3, p. 89;
$\vartheta_n^*:$	Dimensão do espaço $\mathcal{T}_n^*$, ver Observação 4.2.5, p. 100;
$\omega_n^*:$	$\vartheta_n^* - (\vartheta_n^*)^{1-r/d} - 1$, $r \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, ver Observação 4.2.5, p. 100;
$\mathcal{R}_*:$	γ , ver Observação 4.2.5, p. 100;
$K^\circ:$	O conjunto polar de um subconjunto compacto K , ver Definição 5.1.1, p. 102;
$\text{Vol}_n(K):$	Volume do conjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$, ver Teorema 5.1.2, p. 102;
$\mathcal{V}_n:$	Ver Teorema 5.1.4, p. 102;
$\chi_k^{(q)}, \chi_{k,q}^*:$	Ver Observação 5.2.1, p. 106;
$A_{n,k}:$	Ver Observação 6.2.1, p. 116;
$\mathcal{C}:$	$\gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)2^{d-1}d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)}$, ver Teorema 6.2.2, p. 116;
$\mathcal{C}_*:$	$\gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{r} \right)^{r/(d+r)}$, ver Observação 6.2.4, p. 124;

Sumário

	Introdução	16
I	REFERENCIAIS TEÓRICOS	20
1	PRELIMINARES	21
1.1	Conceitos básicos	21
1.2	Martingais	22
1.3	Séries de Walsh	23
1.4	Operadores multiplicadores sobre I^d	30
1.5	Derivada diádica	36
1.6	n -Larguras	43
1.7	Propriedades básicas e relações entre as n -larguras	45
1.8	Números de entropia	47
II	RESULTADOS	48
2	ESTIMATIVAS PARA MÉDIAS DE LEVY	49
2.1	Sistemas ortonormais completos	49
2.2	Estimativas para médias de Levy	51
3	ESTIMATIVAS INFERIORES E SUPERIORES GERAIS PARA n - LARGURAS	62
3.1	Estimativas inferiores para n -larguras	62
3.2	Estimativas superiores para n -larguras	68
4	n -LARGURAS DE OPERADORES ESPECÍFICOS	78
4.1	n -Larguras de operadores do primeiro tipo	78
4.2	n -Larguras de operadores do segundo tipo	87
5	ESTIMATIVAS INFERIORES E SUPERIORES GERAIS PARA NÚ- MEROS DE ENTROPIA	102
5.1	Estimativas inferiores para números de entropia	102
5.2	Estimativas superiores para números de entropia	106
6	NÚMEROS DE ENTROPIA DE OPERADORES ESPECÍFICOS	111
6.1	Números de entropia de operadores do primeiro tipo	111

6.2	Números de entropia de operadores do segundo tipo	115
7	CONCLUSÕES	125
7.1	Estimativas assintoticamente exatas para operadores de primeiro e segundo tipo	125
	REFERÊNCIAS	127

Introdução

As funções de Walsh estão definidas no intervalo unitário $[0, 1)$ e elas formam um sistema ortonormal completo em $L^2[0, 1)$ (ver [34, 42]). Este sistema pode ser aplicado em diferentes situações, tais como: transmissão de dados, filtração, enriquecimento de imagem, análise de sinais e reconhecimento de padrão. As funções de Walsh são fáceis para implementar em computadores de alta velocidade e podem ser usadas com pouco espaço de armazenagem. Isto é devido em parte ao fato que as funções de Walsh assumem somente os valores $+1$ e -1 (ver [1]).

O sistema de Walsh é também interessante do ponto de vista teórico. Primeiro, é o sistema não trivial mais simples em análise harmônica, mas compartilha muitas propriedades com o sistema trigonométrico. Segundo, tem sido usado para resolver alguns problemas fundamentais em análise, como por exemplo o problema da base (ver [42]). Terceiro, esse sistema tem tido um papel importante no desenvolvimento de outras áreas da matemática. Por exemplo, o teorema fundamental da teoria dos martingais (desigualdades L^p para a função quadrática) foi demonstrado primeiramente por Paley [34] para o sistema de Walsh. Os espaços de Banach com a propriedade UMD, (ver [50]), foram caracterizados através da convergência das séries de Walsh. Foi demonstrado em [50] que um espaço de Banach X tem a propriedade UMD se e somente se as séries de Walsh-Fourier de funções $f \in L_X^p[0, 1)$ convergem em L_X^p para algum $1 < p < \infty$.

A teoria unidimensional das funções de Walsh não tem sido suficiente, em consequência a análise multidimensional de Walsh, pelo menos para o caso bidimensional, tem sido desenvolvida. Na análise de Fourier, vários problemas são estudados ou métodos são desenvolvidos, primeiro no caso trigonométrico e depois no caso de Walsh, mas isso foi invertido em alguns casos, ver por exemplo [31, 32], [44, 45], [30, 49]. Vários trabalhos que envolvem séries múltiplas de Walsh, foram primeiramente estudados para séries múltiplas trigonométricas, ver por exemplo [16, 13, 15, 12, 39, 40, 53].

A teoria de n -larguras foi introduzida na década de 1930 pelo matemático russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov. Até 1960, apenas dois artigos haviam sido publicados na direção da pesquisa abordada neste trabalho, de autoria de Rudin e Stechkin. Após 1960 houve um aumento significativo de interesse na área. Destacamos a seguir alguns matemáticos importantes que trabalharam ou trabalham com n -larguras: Chui, Micchelli, Pinkus, Dyn, Tichomirov, DeVore, Triebel, Wozniakowski, Traub, Kashin, dentre outros.

Os estudos sobre estimativas assintóticas para as n -larguras de Kolmogorov das classes de Sobolev no círculo foram realizados por vários matemáticos importantes, como Rudin, Stechkin, Gluskin, Ismagilov, Maiorov, Makovoz e Scholz em [14, 19, 26, 27,

[41, 43, 48], eles foram iniciados por Kolmogorov [22] em 1936 e completados por Kashin [20, 21] em 1977. Diversas técnicas foram aplicadas nesses diferentes casos, dentre os quais destacamos uma técnica de discretização devido a Maiorov e o Teorema de Borsuk. Observando a evolução histórica do estudo de n -larguras, é possível notar que tem sido uma prática comum usar diferentes técnicas em demonstrações de limites inferiores e superiores e em estimativas para classes de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis (ver, por exemplo [37]). Um dos objetivos deste trabalho é dar um tratamento unificado no estudo de n -larguras de conjuntos de funções determinados por operadores multiplicadores de séries múltiplas de Walsh.

Os números de entropia estão intimamente relacionados ao conceito de entropia métrica desenvolvido por Kolmogorov por volta de 1930. A teoria dos números de entropia e seu estudo sistemático foi introduzido por Pietsch em [36]. O estudo dos operadores lineares limitados entre espaços de Banach é uma parte clássica da análise funcional e de particular interesse são os operadores compactos. Em geral, a medida de um operador linear limitado compacto pode ser dada por sua sequência de números de entropia. De fato, é verdade que um operador entre espaços de Banach é compacto se e somente se a sequência de seus números de entropia convergir para 0.

Em grande parte, muito do desenvolvimento posterior da teoria de entropia foi proporcionado pela mudança de contexto, de espaços métricos para espaços vetoriais normados, espaços quase-Banach e de Banach, o que deu um novo impulso à teoria, tanto abstratamente, quanto no nível de aplicações. Em particular, os trabalhos de Pietsch promoveram o desenvolvimento dos números de entropia, ao passo que Triebel e outros estudaram exaustivamente os números de entropia de mergulhos entre espaços de Sobolev.

Os números de entropia têm muitas aplicações na teoria de espaços de funções e teoria espectral [10], processamento de sinais e imagens [7, 9], teoria da probabilidade [52], entre outros. Em [2] foram obtidas estimativas para os números de entropia da classe de Sobolev no toro. A maioria dos trabalhos recentes que envolvem números de entropia visam obter estimativas superiores e inferiores para tais números.

Iniciamos o Capítulo 1 apresentando conceitos básicos referentes à teoria da medida, às funções de Walsh sobre $I = [0, 1)$ e ao conceito de derivada de uma função no sentido diádico, juntamente com algumas de suas propriedades. Introduzimos as funções de Walsh sobre I^d e apresentamos a definição de derivada parcial diádica de uma função definida em I^d . Em seguida, introduzimos os conceitos básicos referentes às n -larguras de Kolmogorov, Gel'fand e de Bernstein, enunciando as principais propriedades de tais n -larguras. Finalmente, expomos o conceito de números de entropia e suas principais propriedades. A maioria das demonstrações dos resultados abordados neste capítulo foram omitidas por se encontrarem em [1, 4, 5, 11, 28, 29, 34, 35, 37, 42, 46, 53].

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ um conjunto ortonormal

completo de funções reais de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que existem constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $0 < k_1 < k_2$, verificando $k_1 \leq \|\phi_m\|_\infty \leq k_2$, para todo $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. A partir do conjunto $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, construímos, na Seção 2.1, um conjunto ortonormal de funções reais $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d}$ de $L^2(\Omega^d, \mathcal{A}^d, \mu^d)$. Utilizamos esta construção para definir as funções de Walsh sobre $[0, 1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, e sobre um produto finito de esferas l -dimensionais. Na Seção 2.2 consideramos normas especiais sobre $\mathbb{R}^n$ introduzidas a partir de operadores multiplicadores de séries múltiplas associados a um sistema ortonormal completo abstrato, de funções reais, uniformemente limitado sobre $L^\infty(\Omega^d, \mathcal{A}^d, \mu^d)$. Feito isso, demonstramos o Teorema 2.2.13, que nos fornece estimativas inferiores e superiores para médias de Levy dessas normas. As referências relacionadas ou utilizadas de alguma forma neste capítulo foram [11, 23, 24, 25, 36, 46, 51].

No Capítulo 3 usamos o Teorema 2.2.13 como principal ferramenta na demonstração dos Teoremas 3.1.5 e 3.2.1, os quais nos fornecem estimativas inferiores e superiores para n -larguras de operadores multiplicadores de séries múltiplas, associados ao sistema ortonormal completo estudado no capítulo anterior e limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. As referências relacionadas ou utilizadas de alguma forma neste capítulo foram [23, 24, 33, 46, 51].

No Capítulo 4, aplicando as estimativas gerais obtidas no capítulo anterior, estudamos estimativas para n -larguras de Kolmogorov de conjuntos de funções sobre Ω^d . Sejam $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana e $|\cdot|_*$ é a norma do máximo sobre $\mathbb{R}^d$ e onde a função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\log_2 t)^{-\xi}$, $t > 1$, e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi \geq 0$, e sejam $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde a função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, com $\gamma > 0$, $r > 0$. Estudamos estimativas superiores e inferiores para as n -larguras dos operadores multiplicadores associados à essas sequências. Várias das estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem.

No caso em que o sistema ortonormal considerado é o sistema de Walsh sobre I^d , demonstramos que os conjuntos $\Lambda^{(1)}U_p$, $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis e $\Lambda^{(2)}U_p$, $\Lambda_*^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis, no sentido diádico. Com analogia com o caso clássico, podemos dizer que se $\xi = 0$, $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são classes de tipo Sobolev.

Iniciamos o Capítulo 5 usando o Teorema 2.2.13 como principal ferramenta na demonstração dos Teoremas 5.1.4 e 5.2.3, os quais nos fornecem estimativas inferiores e superiores para números de entropia de operadores multiplicadores de séries múltiplas. Referências importantes e utilizadas de alguma forma neste capítulo foram [24, 33, 36, 38, 46, 47].

No Capítulo 6, aplicamos os resultados do capítulo precedente na obtenção

de estimativas para números de entropia de conjuntos de funções sobre Ω^d , associados aos operadores multiplicadores específicos $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda_*^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$ estudados no Capítulo 4. Várias das estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem.

Os resultados obtidos nesta tese generalizam os estudos realizados para o sistema trigonométrico sobre o toro realizados em [23] e [47] (ver Observações 1.4.8, 3.2.8, 4.2.7, 6.2.6) e permanecem válidos para o sistema ortonormal completo das funções de Walsh definidas sobre um produto de d -esferas $\mathbb{S}^l \times \cdots \times \mathbb{S}^l$ (ver Observação 3.2.7).

Acreditamos que os resultados demonstrados neste trabalho, a partir do Capítulo 2, sejam novos. Os resultados obtidos neste trabalho para n -larguras de operadores multiplicadores de séries múltiplas se encontram publicados em [8].

Parte I

Referenciais teóricos

1 Preliminares

Neste capítulo estudamos alguns conceitos preliminares e alguns resultados básicos sobre espaços L^p , séries de Walsh, operadores multiplicadores, derivada diádica e n -larguras. Inicialmente com ajuda de [11, 28] fazemos uma exposição resumida dos espaços L^p e martingais. Num segundo momento, expomos o conceito de séries de Walsh e seus principais teoremas de convergência. Os resultados desta seção foram estudados em [1, 29, 34, 42, 35]. Num terceiro momento, introduzimos a definição de derivada de uma função no sentido diádico e alguns resultados importantes, as referências importantes e utilizadas de alguma forma nesta seção foram [4, 5, 53]. Num quarto momento, tratamos o conceito de n -largura, abordando os diferentes tipos existentes, suas principais propriedades, bem como as relações existentes entre elas. Finalmente, expomos o conceito de números de entropia e suas principais propriedades. As referências relacionadas ou utilizadas de alguma forma nestas últimas seções foram [37, 46]. As demonstrações dos resultados abordados neste capítulo serão na sua totalidade omitidas por se encontrarem nas referências.

1.1 Conceitos básicos

Notação 1.1.1. Para $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Notação 1.1.2. Sejam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ e $I = [0, 1)$. Para um conjunto qualquer E , denotamos $E^d := E \times E \times \dots \times E$ (d -vezes); assim, $\mathbb{N}_0^d = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ e $I^d = I \times I \times \dots \times I = [0, 1) \times [0, 1) \times \dots \times [0, 1)$.

Definição 1.1.3. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, ou seja, X é um conjunto não vazio, $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ uma medida. Se $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|f\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Seja $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que são limitadas quase sempre, ou seja, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ quase sempre. Para cada $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$, definimos

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} = \inf\{\beta \geq 0 : |f(x)| \leq \beta \text{ } \mu\text{-q.t.p.}\} < \infty.$$

Observação 1.1.4. *As seguintes propriedades são satisfeitas para $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- (a) $\|f\|_p \geq 0$;
- (b) $\|f\|_p = 0$ se e só se $f(x) = 0$ quase sempre;
- (c) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$;
- (d) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Estas propriedades mostram que a função $\|\cdot\|_p$ é uma seminorma em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Para obter uma norma, utilizamos uma relação de equivalência em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ da seguinte maneira: dadas $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, definimos $f \sim g$ se $f = g$ μ -q.t.p.. É claro que esta é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Seja $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $L^p(X)$) o conjunto de todas as classes de equivalência com respeito à essa relação. Dadas $[f], [g] \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \lambda[f] = [\lambda f].$$

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas, e que $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ com estas operações, é um espaço vetorial. Se definimos $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ para cada $[f] \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, podemos verificar facilmente que a função $\|\cdot\|_p$ está bem definida e é uma norma em $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Observação 1.1.5. *Os espaços $L^p(X)$, para $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, isto é, espaços vetoriais normados completos com norma $\|\cdot\|_p$. O espaço $L^2(X)$ é um espaço de Hilbert (isto é, é um espaço vetorial com produto interno e completo) onde o produto interno de $f, g \in L^2(X)$ é dado por $\int_X f \bar{g} d\mu$.*

Notação 1.1.6. *Denotaremos por $\mathcal{B}$ a σ -álgebra de Borel sobre I^d , ν a medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}$ e denotaremos $L^p = L^p(I^d) = L^p(I^d, \mathcal{B}, \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Vamos admitir conhecimento prévio por parte do leitor dos teoremas básicos de Teoria da Medida, tais como as desigualdades de Hölder e de Minkowski, dentre outras. Iremos enunciar o teorema que caracteriza os espaços duais dos espaços $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Teorema 1.1.7. *(Teorema de representação de Riesz, [11], p. 190) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida μ -finita, e seja $1 \leq p < \infty$. Então o dual de $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ é isometricamente isomorfo a $L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$, onde $1 < q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$.*

1.2 Martingais

Considere $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, isto é, um espaço de medida com $\mu(\Omega) = 1$. Sejam $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{F}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{A}$. Como a função f não

é necessariamente $\mathcal{F}$ mensurável, podemos indagar se é possível encontrar uma função g , $\mathcal{F}$ mensurável, que satisfaz

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Tomamos $\nu(A) = \int_A f d\mu$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Então ν e $\mu|_{\mathcal{F}}$ são medidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ e ν é absolutamente contínua com respeito a $\mu|_{\mathcal{F}}$, com $\mu|_{\mathcal{F}}$ positiva e finita. A existência e unicidade de $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ em q.t.p. segue do Teorema de Radon-Nikodym.

Definição 1.2.1. *Nas condições acima, definimos a função g como sendo a esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{F}$ e denotamos $g = E[f|\mathcal{F}]$.*

Agora, consideremos $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência não decrescente de sub- σ -álgebras de $\mathcal{A}$.

Definição 1.2.2. *Consideramos uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Se f_n é $\mathcal{F}_n$ mensurável, a sequência de funções é dita adaptada à sequência $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adaptada. Nessas condições,

- *se $f_n = E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita um martingal,*
- *se $f_n \leq E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita um submartingal,*
- *se $f_n \geq E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita um supermartingal,*

com respeito à $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 1.2.3. *Definimos $\mathcal{F}_\infty$ como a σ -álgebra gerada pelo conjunto $\cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$.*

Observação 1.2.4. *Se $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, então $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $f_n = E[f|\mathcal{F}_n]$ é um martingal. Dado um martingal, se existe uma função f que satisfaz a igualdade acima para todo n , dizemos que o martingal é fechado por f .*

Teorema 1.2.5. *(de Convergência de Martingais) Sejam $p \in [1, \infty)$ e $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. O martingal $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fechado por f , isto é, $f_n = E[f|\mathcal{F}_n]$, converge em q.t.p. e em $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ para $f_\infty = E[f|\mathcal{F}_\infty]$.*

1.3 Séries de Walsh

Nesta seção apresentaremos os conceitos de sistema de Rademacher, sistema de Walsh, a expansão diádica, a soma diádica e suas propriedades, e as séries de Walsh.

Definição 1.3.1. *Dado $n \in \mathbb{N}_0$, existe uma única sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, onde $n_k \in \{0, 1\}$ para $k \in \mathbb{N}_0$, que satisfaz*

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k n_k.$$

Chamamos seus elementos de coeficientes binários de n . Observamos que $n_k = 0$ exceto para um número finito de índices.

Definição 1.3.2. Dados $n, m \in \mathbb{N}_0$ e $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ os coeficientes binários de n e m , respectivamente, definimos a soma diádica de n e m por

$$n \oplus m = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |n_k - m_k|.$$

Definição 1.3.3. Denominamos por intervalos diádicos os conjuntos da forma

$$I_{n,i} = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right), n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i < 2^n.$$

Se $n \in \mathbb{N}_0$ e $x \in I_{n,i}$, então denotaremos $I_n(x) = I_{n,i}$.

Definição 1.3.4. O sistema de Rademacher $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $r_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, é dado por

$$r_n(x) = (-1)^i, \text{ para cada } x \in I_{n+1,i}, 0 \leq i < 2^{n+1}.$$

O sistema de Walsh (ou Walsh-Paley) $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é definido por

$$\psi_n = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k},$$

onde n_k são os coeficientes binários de n . Observemos que o produto é finito pois $n_k = 0$ para k suficientemente grande. Além disso, notamos que $\psi_0 = 1$ por definição e que o produto de funções de Walsh é uma função de Walsh. Cada função de Walsh é uma função simples mensurável e toma apenas os valores 1 e -1 .

Observação 1.3.5. Se $n, m \in \mathbb{N}_0$ e $x \in [0, 1)$, então $\psi_{n \oplus m}(x) = \psi_n(x) \psi_m(x)$.

Definição 1.3.6. A topologia diádica é a topologia em $[0, 1)$ gerada pelos intervalos diádicos.

Vamos considerar o espaço de medida $([0, 1), \mathcal{B}, \lambda)$, onde $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel sobre $[0, 1)$ e λ é a medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}$.

Definição 1.3.7. Dado $x \in [0, 1)$, podemos escrever $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$, onde $x_k \in \{0, 1\}$. A sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é chamada de expansão diádica de x .

Definição 1.3.8. A soma diádica de dois números $x, y \in [0, 1)$ é definida em termos de suas expansões diádicas por

$$x \oplus y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x_k - y_k|.$$

A distância diádica $d(x, y) = x \oplus y$, com $x, y \in [0, 1)$, é uma métrica e $\oplus$ é uma operação binária em $[0, 1)$ que satisfaz $x \oplus x = 0$. Esta métrica gera a topologia diádica.

Proposição 1.3.9. ([42], p. 10) Dados $x, y \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, então

$$\psi_n(x \oplus y) = \psi_n(x)\psi_n(y).$$

Definição 1.3.10. Sejam $f, g \in L^1[0, 1)$. A convolução entre as funções f e g é definida por

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t)g(x \oplus t)d\lambda(t).$$

Teorema 1.3.11. ([42], p. 6) As funções de Walsh $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ formam um conjunto ortonormal completo em $L^2[0, 1)$.

Definição 1.3.12. Os coeficientes de Walsh-Fourier de uma função $f \in L^1[0, 1)$ são definidos por

$$a_n(f) = \int_0^1 f\psi_n d\lambda,$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e a série de Walsh-Fourier (ou simplesmente, de Walsh) de f é definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\psi_n.$$

As somas parciais desta série são definidas por $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\psi_k$, para $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3.13. Definimos o núcleo de Dirichlet de ordem n , para $n \in \mathbb{N}$, por

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k.$$

Agora, vamos generalizar os conceitos de intervalo diádico, de função de Walsh, coeficientes de Walsh, série de Walsh e núcleo de Dirichlet.

Definição 1.3.14. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in I^d$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Definimos o retângulo diádico d -dimensional $I_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ por

$$I_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := I_{n_1}(x_1) \times \dots \times I_{n_d}(x_d).$$

Observação 1.3.15. Temos que a σ -álgebra gerada pelos intervalos diádicos d -dimensionais coincide com a σ -álgebra de Borel usual de I^d .

Definição 1.3.16. Sejam $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in I^d$. Definimos a função de Walsh $\psi_{\mathbf{n}}$ em I^d por

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \psi_{n_1}(x_1) \dots \psi_{n_d}(x_d).$$

Observação 1.3.17. Em I^d consideramos a medida de Lebesgue $d\nu(\mathbf{x}) = d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_d)$. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ denotamos por $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ o produto interno usual $x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$.

Definição 1.3.18. Dada $f \in L^1(I^d)$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, definimos os coeficientes de Walsh-Fourier de f por

$$\widehat{f}(\mathbf{m}) = \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}),$$

e definimos a série de Walsh-Fourier da função f por

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} \widehat{f}(\mathbf{m}) \psi_{\mathbf{m}}. \quad (1.1)$$

Para aplicações posteriores usaremos apenas a convergência da série (1.1) em $L^2(I^d)$.

Notação 1.3.19. Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Denotamos por $|\mathbf{x}| = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$ e $|\mathbf{x}|_* = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}$, as normas euclidiana e a do máximo do elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Definição 1.3.20. Dados $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, definimos a soma diádica de $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ por

$$\mathbf{n} \oplus \mathbf{m} = (n_1 \oplus m_1, n_2 \oplus m_2, \dots, n_d \oplus m_d).$$

Definição 1.3.21. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I^d$, definimos a soma diádica de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_d \oplus y_d).$$

Observação 1.3.22. Se $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I^d$, então $\psi_{\mathbf{n} \oplus \mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ e $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y})$.

Definição 1.3.23. Sejam $f : I^d \rightarrow \mathbb{C}$ e $\mathbf{y} \in I^d$. Denotaremos por $\bar{f}$ e $\tau^{\mathbf{y}} f$ as funções de I^d em $\mathbb{C}$ definidas por $\bar{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$ e por $\tau^{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y})$. O produto de convolução de duas funções f e g de $L^1(I^d)$, denotado por $f * g$, é definido por

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{I^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}).$$

Teorema 1.3.24. (Desigualdade de Young, [11], p. 241) Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $f \in L^q(I^d)$ e $g \in L^p(I^d)$, então $f * g \in L^s(I^d)$, onde $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Além disso, temos que

$$\|f * g\|_{L^s(I^d)} \leq \|f\|_{L^q(I^d)} \|g\|_{L^p(I^d)}.$$

Proposição 1.3.25. Sejam $f, g \in L^1(I^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{y} \in I^d$. Então:

$$a) \widehat{(f + g)}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{g}(\mathbf{m}), \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d;$$

$$b) \widehat{\lambda f}(\mathbf{m}) = \lambda \widehat{f}(\mathbf{m}), \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d;$$

$$c) \widehat{\tau^{\mathbf{y}}(f)}(\mathbf{m}) = \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) \widehat{f}(\mathbf{m});$$

$$d) \widehat{(\psi_{\mathbf{k}} f)}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m} \oplus \mathbf{k}), \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d;$$

$$e) \widehat{f}(\mathbf{0}) = \int_{I^d} f(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x});$$

$$f) \sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\widehat{f}(\mathbf{m})| \leq \|f\|_{L^1(I^d)};$$

$$g) (\widehat{f * g})(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m})\widehat{g}(\mathbf{m}), \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d.$$

Demonstração. a)

$$\begin{aligned} (\widehat{f + g})(\mathbf{m}) &= \int_{I^d} (f + g)(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) + \int_{I^d} g(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{g}(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (\widehat{\lambda f})(\mathbf{m}) &= \int_{I^d} \lambda f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \lambda \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \lambda \widehat{f}(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau^{\mathbf{y}} f})(\mathbf{m}) &= \int_{I^d} (\tau^{\mathbf{y}} f)(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{z}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) d\nu(\mathbf{z}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{z}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) d\nu(\mathbf{z}) \\ &= \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) \widehat{f}(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (\widehat{\psi_{\mathbf{k}} f})(\mathbf{m}) &= \int_{I^d} (\psi_{\mathbf{k}} f)(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k} \oplus \mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \widehat{f}(\mathbf{k} \oplus \mathbf{m}). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\mathbf{0}) &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\mathbf{m})| &= \left| \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \right| \\
&\leq \int_{I^d} |f(\mathbf{x})| |\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})| d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{I^d} |f(\mathbf{x})| d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \|f\|_{L^1(I^d)},
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\widehat{f}(\mathbf{m})| \leq \|f\|_{L^1(I^d)}.$$

g)

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(\mathbf{m}) &= \int_{I^d} (f * g)(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{I^d} \left[\int_{I^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) \right] \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{I^d} \int_{I^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{I^d} f(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}) \int_{I^d} g(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \widehat{f}(\mathbf{m}) \int_{I^d} g(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \widehat{f}(\mathbf{m}) \widehat{g}(\mathbf{m}).
\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.26. Seja $R \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$. Os núcleos de Dirichlet esférico D_R e quadrado D_R^* em I^d são definidos respectivamente por

$$D_R := \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{m}| \leq R}} \psi_{\mathbf{m}} \quad \text{e} \quad D_R^* := \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{m}|_* \leq R}} \psi_{\mathbf{m}}.$$

Definição 1.3.27. Dada $f \in L^1(I^d)$, $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, definimos a R -ésima soma parcial esférica e soma parcial quadrada de Walsh-Fourier da função f , respectivamente por,

$$S_R(f) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{m}| \leq R}} \widehat{f}(\mathbf{m}) \psi_{\mathbf{m}} = f * D_R \quad \text{e} \quad S_R^*(f) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{m}|_* \leq R}} \widehat{f}(\mathbf{m}) \psi_{\mathbf{m}} = f * D_R^*.$$

Observação 1.3.28. Consideremos o Espaço de Hilbert complexo $L^2(I^d)$, munido do produto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\nu(\mathbf{x}),$$

com $f, g \in L^2(I^d)$. A família $\{\psi_{\mathbf{m}} : \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$, é um sistema ortonormal de $L^2(I^d)$. De fato:

i) $\langle \psi_{\mathbf{m}}, \psi_{\mathbf{k}} \rangle = 0$, se $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$, pois

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{m}} \rangle &= \int_{I^d} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_I \psi_{k_1}(x_1) \psi_{m_1}(x_1) d\lambda(x_1) \cdots \int_I \psi_{k_d}(x_d) \psi_{m_d}(x_d) d\lambda(x_d) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } k_i \neq m_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, d\}, \\ 1, & \text{se } k_i = m_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, d\}. \end{cases} \end{aligned}$$

ii) $\|\psi_{\mathbf{m}}\|_{L^2(I^d)} = 1$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, pois

$$\begin{aligned} \|\psi_{\mathbf{k}}\|_{L^2(I^d)}^2 &= \int_{I^d} |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})|^2 d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \int_{I^d} |\psi_{k_1}(x_1)|^2 \cdots |\psi_{k_d}(x_d)|^2 d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_d) \\ &= \int_I d\lambda(x_1) \cdots \int_I d\lambda(x_d) = 1 \end{aligned}$$

Teorema 1.3.29. *Seja $f \in L^p(I^d)$ com $1 \leq p < \infty$, então a sequência $\{S_{2^n}^* f\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um martingal fechado por f e portanto convergente a f em q.t.p. e em $L^p(I^d)$.*

Demonstração. Segue de [35], que para cada $\mathbf{x} \in I^d$,

$$S_{2^n}^* f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\nu(I_n(x_1) \times \cdots \times I_n(x_d))} \int_{I_n(x_1) \times \cdots \times I_n(x_d)} f(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}),$$

e que $S_{2^n}^* f = E[f|\mathcal{F}_n]$ q.t.p., onde $\mathcal{F}_n$ é a σ -álgebra gerada pelos retângulos diádicos $I_n(x_1) \times \cdots \times I_n(x_d)$, $\mathbf{x} \in I^d$, de medida $2^{-n} \times \cdots \times 2^{-n}$. Como a σ -álgebra gerada por $\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ é a σ -álgebra de Borel sobre I^d , o resultado segue do Teorema de Convergência de Martingais (Teorema 1.2.5). $\square$

Corolário 1.3.30. *As funções de Walsh $\{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ formam um conjunto ortonormal completo em $L^2(I^d)$.*

Demonstração. Já foi visto que o conjunto é ortonormal. Para mostrar que é completo, seja $f \in L^2(I^d)$ tal que $\hat{f}(\mathbf{k}) = 0$ para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$. Neste caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_{I^d} f S_{2^n}^*(f) d\nu = \int_{I^d} f \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq 2^n}} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} d\nu = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq 2^n}} \hat{f}(\mathbf{k}) \int_{I^d} f \psi_{\mathbf{k}} d\nu = 0.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima e usando o Teorema 1.3.29, obtemos

$$\|f\|_2^2 = \int_{I^d} f \cdot f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} f S_{2^n}^* f d\nu = 0,$$

e portanto $f = 0$ q.t.p.. $\square$

Corolário 1.3.31. *Se $f, g \in L^1(I^d)$ satisfazem $\hat{f}(\mathbf{m}) = \hat{g}(\mathbf{m})$, para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, então $f = g$ em quase todo ponto.*

Demonstração. Vamos considerar o caso geral em que $f \in L^1(I^d)$ e que $\hat{f}(\mathbf{m}) = 0$ para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, e vamos demonstrar que $f = 0$ q.t.p.. De fato, como $\hat{f}(\mathbf{m}) = 0$ para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$S_{2^n}^*(f) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq 2^n}} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.2)$$

Do Teorema 1.3.29, temos que $S_{2^n}^*(f)$ converge para f em $L^1(I^d)$, então temos que

$$\|f - S_{2^n}^*(f)\|_1 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

mas de (1.2) seque que $\|f\|_1 = 0$, ou seja $f = 0$ q.t.p.. Assim, o resultado do corolário segue se consideramos $h = f - g$ e aplicamos o resultado anterior. $\square$

Observação 1.3.32. *Segue como consequência do Corolário 1.3.30 e de resultados de Análise Funcional que se $f \in L^2(I^d)$ então*

$$\|f\|_{L^2(I^d)}^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\langle f, \psi_{\mathbf{m}} \rangle|^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\hat{f}(\mathbf{m})|^2 \quad (\text{Identidade de Plancherel}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|\mathbf{m}| \leq n} \hat{f}(\mathbf{m}) \psi_{\mathbf{m}} \right\|_{L^2(I^d)} = 0,$$

enquanto que se $f, g \in L^2(I^d)$, então

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{I^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\nu(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} \langle f, \psi_{\mathbf{m}} \rangle \overline{\langle g, \psi_{\mathbf{m}} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{m}) \overline{\hat{g}(\mathbf{m})} \quad (\text{Identidade de Parseval}). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.33. *([29, 42]) Sejam $1 < p < \infty$, $f \in L^p(I^d)$ e $S_n^*(f) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{m}|_* \leq n}} \hat{f}(\mathbf{m}) \psi_{\mathbf{m}}$,*

com $n \in \mathbb{N}$. Então temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{q.t.p. } \mathbf{x} \in I^d.$$

1.4 Operadores multiplicadores sobre I^d

Definição 1.4.1. *Para $l, N \in \mathbb{N}_0$ definimos*

$$A_l = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d : |\mathbf{k}| \leq l\}, \quad A_l^* = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d : |\mathbf{k}|_* \leq l\},$$

$$\mathcal{H}_l = [\psi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}], \quad \mathcal{H}_l^* = [\psi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in A_l^* \setminus A_{l-1}^*],$$

$$d_l = \dim \mathcal{H}_l, \quad d_l^* = \dim \mathcal{H}_l^*$$

$$\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l, \quad \mathcal{T}_N^* = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l^*,$$

onde $A_{-1} = \emptyset$ e $[f_j : j \in \Gamma]$ denota o espaço vetorial gerado pelas funções $f_j : I^d \rightarrow \mathbb{R}$, com j pertencente ao conjunto de índices Γ .

Definição 1.4.2. Um polinômio diádico em I^d é uma função da forma

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

onde $a_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, é uma sequência de números reais finitamente suportada em $\mathbb{N}_0^d$, isto é, $a_{\mathbf{m}} \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$. O grau de P é o maior valor de $|q_1| + \dots + |q_d|$ tal que $a_{\mathbf{q}} \neq 0$, onde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Denotamos por $\mathcal{H}$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios diádicos. Observamos que $\mathcal{H}$ é o espaço vetorial real gerado pelas funções $\{\psi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d\}$.

Proposição 1.4.3. O conjunto $\mathcal{H}$ dos polinômios diádicos é denso em $L^p(I^d)$, para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Seja $f \in L^p(I^d)$ com $1 \leq p < \infty$. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos o polinômio diádico

$$S_{2^n}^*(f) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}|_* \leq 2^n}} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} \in \mathcal{H}.$$

Do Teorema 1.3.29, segue que $S_{2^n}^*(f)$ converge à f em q.t.p. e em $L^p(I^d)$, ou seja

$$\|f - S_{2^n}^*(f)\|_p \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

isto é, o espaço vetorial real $\mathcal{H}$ é denso em $L^p(I^d)$, para $1 \leq p < \infty$. □

Observação 1.4.4. O problema do círculo de Gauss tem mais de um século, é uma questão simples de contagem com consequências muito complexas. Consiste em contar os pontos de coordenadas inteiras contidos num círculo de raio R e de centro na origem de $\mathbb{R}^2$. Este número pode ser escrito na forma

$$N(R) = \pi R^2 + E(R),$$

onde $E(R)$ é um termo de erro. Gauss demonstrou de uma forma bastante elementar, que existe uma constante $C > 0$ e um número $0 < \theta \leq 1$ tal que $E(R) \leq CR^\theta$ para todo $R > 0$.

Uma grande quantidade de conteúdo matemático tem sido construído em torno desse problema. Os trabalhos mais recentes nesta direção têm se concentrado em encontrar

valores cada vez menores para o expoente θ . Em [18] foi demonstrado que a estimativa $E(R) \leq CR^\theta$ é verdadeira para qualquer $\theta > 131/208$.

Para $d \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ seja $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq R\}$. A quantidade de pontos de coordenadas inteiras contida na bola B_R é dada por

$$N_d(R) = \text{Vol}(B_R) + E_d(R),$$

onde $E_d(R)$ denota o termo do erro. Como

$$\text{Vol}(B_R) = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} R^d,$$

segue que

$$N_d(R) = \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right) R^d + E_d(R).$$

Denotemos

$$\theta_d = \inf\{\alpha : E_d(R) = \mathcal{O}(R^\alpha)\}.$$

Para $d = 1$ temos $\theta_1 = 0$ e é conhecido que para $d \geq 4$ temos $\theta_d = d - 2$. O valor de θ_d continua em aberto nos casos $d = 2$ e $d = 3$. É conhecido que $1/2 \leq \theta_2 \leq 1$ e pelo que vimos acima $\theta_2 \leq 131/208$. Para o caso $d = 3$ é conhecido que $1 \leq \theta_3 \leq 2$. Foi demonstrado em [6] que a estimativa $E_3(R) \leq CR^\theta$ é válida para $\theta = 29/22$ e em [17] que é válida para $\theta = 21/16$ e desta forma $\theta_3 \leq 21/16 < 29/22$.

Não é difícil verificar que, existe uma constante C_d , dependente somente de d , tal que, para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$2^{-d}N_d(l) \leq \#A_l \leq 2^{-d}N_d(l) + d2^{-d}N_{d-1}(l) + C_d l^{d-2}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & 2^{-d}(N_d(l) - N_d(l-1)) \leq \#A_l - \#A_{l-1} \\ & \leq 2^{-d}(N_d(l) - N_d(l-1)) + d2^{-d}(N_{d-1}(l) - N_{d-1}(l-1)) + C_d l^{d-2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Observação 1.4.5. Vamos procurar justificar agora a segunda desigualdade em (1.3).

Consideremos $d = 2$. O número de elementos de A_l é o número de elementos que estão na bola B_l e no interior do primeiro quadrante, mais os elementos que estão na interseção de B_l com os semi-eixos positivos $0x$ e $0y$.

Quando multiplicamos $\#A_l$ por 4, obtemos o número de elementos que estão em B_l e no interior dos quatro quadrantes de $\mathbb{R}^2$, mais duas vezes o número de elementos que estão em B_l e nos eixos coordenados, mais uma vez a origem $(0,0)$. Assim

$$4(\#A_l) = N_2(l) + 2N_1(l) + 1.$$

Suponhamos agora $d = 3$. Sejam $P_1 = \text{plano } xy$, $P_2 = \text{plano } xz$, $P_3 = \text{plano } yz$ e seja P_i^+ o semi-plano positivo do plano P_i . Sejam $E_1 = \text{eixo } 0x$, $E_2 = \text{eixo } 0y$, $E_3 = \text{eixo } 0z$, e seja E_i^+ o semi-eixo positivo do eixo E_i .

O número de elementos de A_l é o número de elementos que estão na bola B_l e no interior do primeiro octante, mais os elementos que estão na interseção de B_l com os semi-planos coordenados positivos $0xy$, $0xz$ e $0yz$.

Quando multiplicamos $\#A_l$ por $2^3 = 8$, obtemos o número de elementos que estão em B_l e no interior dos 8 octantes de $\mathbb{R}^3$. Os elementos que estão no interior de $B_l \cap P_i^+$ ($i = 1, 2, 3$) são considerados 4 vezes em $N_3(l)$ e mais 4 vezes em $N_2(l)$. Os elementos de $B_l \cap E_i^+ \setminus \{(0, 0, 0)\}$ são considerados duas vezes em $N_3(l)$, duas vezes em dois dos planos P_i e duas vezes em $N_1(l)$. A origem é considerada 1 vez em $N_i(l)$ para cada $i = 1, 2, 3$. Assim obtemos

$$2^3 (\#A_l) = N_3(l) + 3N_2(l) + 3N_1(l) + 1.$$

Em particular, para a norma do máximo $|\cdot|_*$ temos:

$$\begin{aligned} 8(\#A_l) &= 2^3(l+1)^3 = [(2l+1) + 1]^3 \\ &= (2l+1)^3 + 3(2l+1)^2 + 3(2l+1) + 1 \\ &= N_3^*(l) + 3N_2^*(l) + 3N_1^*(l) + 1. \end{aligned}$$

Proposição 1.4.6. Dado $d \geq 2$ seja $\theta = 132/208$ se $d = 2$, $\theta = 21/16$ se $d = 3$ e $\theta = d - 2$ se $d \geq 4$. Então existem constantes positivas C' e C , tal que, para todos $l, N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} - C'l^\theta \leq d_l \leq \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} + C'l^\theta, \quad (1.5)$$

$$\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}N^d \leq \dim \mathcal{T}_N \leq \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}N^d + CN^{d-1} \quad (1.6)$$

e

$$\frac{1}{\dim \mathcal{T}_N} \geq \frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}}, \quad (1.7)$$

onde $F = 2^{1-d}\pi^{d/2}/(d\Gamma(d/2))$. Em particular $d_l \asymp l^{d-1}$ e $\dim \mathcal{T}_N \asymp N^d$.

Demonstração. Pela observação anterior

$$\begin{aligned} N_d(l) - N_d(l-1) &= \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}l^d + E_d(l) \right) - \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}(l-1)^d + E_d(l-1) \right) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}(l^d - (l-1)^d) + (E_d(l) - E_d(l-1)). \end{aligned}$$

Temos que

$$l^d - (l-1)^d = dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2}l^{d-2} + \frac{d(d-1)(d-2)}{3}l^{d-3} - \dots \pm 1,$$

assim

$$dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2}l^{d-2} \leq l^d - (l-1)^d \leq dl^{d-1}$$

e portanto

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} - \frac{\pi^{d/2}(d-1)}{\Gamma(d/2)}l^{d-2} + E_d(l) - E_d(l-1) \leq N_d(l) - N_d(l-1).$$

Por hipótese

$$|E_d(l) - E_d(l-1)| \leq |E_d(l)| + |E_d(l-1)| \leq C_1 l^\theta$$

e logo

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} - C_2 l^\theta \leq N_d(l) - N_d(l-1) \leq \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} + C_1 l^\theta, \quad (1.8)$$

pois $d-2 \leq \theta < d-1$. Assim, usando (1.8) e (1.4) obtemos

$$\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} - C_3 l^\theta \leq \#A_l - \#A_{l-1} = d_l. \quad (1.9)$$

Novamente usando (1.8) e (1.4),

$$\begin{aligned} d_l &= \#A_l - \#A_{l-1} \\ &\leq 2^{-d}(N_d(l) - N_d(l-1)) + d2^{-d}(N_{d-1}(l) - N_{d-1}(l-1)) + C_d l^{d-2} \\ &\leq \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} + 2^{-d}C_1 l^\theta + \frac{d2^{1-d}\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}l^{d-2} + C_4 l^\alpha + C_d l^{d-2} \\ &\leq \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}l^{d-1} + C_5 l^\theta, \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde α verifica $d-3 \leq \theta_{d-1} < \alpha < d-2$. As estimativas em (1.5) seguem de (1.9) e (1.10).

Agora como $E_d(N) \leq C_6 N^\theta \leq C_6 N^{d-1}$, $N_d(N) = (2\pi^{d/2}/(d\Gamma(d/2)))N^d + E_d(N)$ e $\dim \mathcal{T}_N = \#A_N$ segue por (1.3) que

$$\left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)N^d \leq \dim \mathcal{T}_N$$

e

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{T}_N &\leq \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)N^d + 2^{-d}C_7 N^\theta + \left(\frac{d2^{1-d}\pi^{(d-1)/2}}{(d-1)\Gamma((d-1)/2)}\right)N^{d-1} + C_8 N^{d-2} \\ &\leq \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right)N^d + C_9 N^{d-1}. \end{aligned}$$

Temos que $\dim \mathcal{T}_N \leq FN^d + C_9 N^{d-1}$ e assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dim \mathcal{T}_N} &\geq \frac{1}{FN^d + C_9 N^{d-1}} = \frac{1}{FN^d} \left(\frac{1}{1 - \frac{C_9}{FN}} \right) = \frac{1}{FN^d} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-C_9}{FN} \right)^j \\ &= \frac{1}{FN^d} \left(1 - \frac{C_9}{FN} + \frac{C_9^2}{F^2 N^2} - \dots \right) \geq \frac{1}{FN^d} \left(1 - \frac{C_9}{FN} \right) \\ &= \frac{1}{FN^d} - \frac{C_9}{F^2 N^{d+1}}, \end{aligned}$$

o que demonstra (1.7). Segue como consequência de (1.5) e (1.6) que $d_l \asymp l^d$ e $\dim \mathcal{T}_N \asymp N^d$. $\square$

Observação 1.4.7. *Seja $B_R^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}|_* \leq R\}$ e N_d^* a quantidade de pontos de coordenadas inteiras contida na bola B_R^* . Temos que $N_d^*(l) = (2l+1)^d$ e $\#A_l^* = (l+1)^d$. Podemos então verificar facilmente que existe uma constante C , tal que, para todos $l, N \in \mathbb{N}$*

$$dl^{d-1} \leq d_l^* \leq dl^{d-1} + Cl^{d-2}.$$

e

$$N^d \leq \dim \mathcal{T}_N^* \leq N^d + CN^{d-1}.$$

Observação 1.4.8. *Quando trabalhamos com o toro tomamos*

$$\begin{aligned} A_l &= \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}| \leq l\}, & A_l^* &= \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_* \leq l\}, \\ \mathcal{H}_l &= [e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}], & \mathcal{H}_l^* &= [e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l^* \setminus A_{l-1}^*], \\ d_l &= \dim \mathcal{H}_l, & d_l^* &= \dim \mathcal{H}_l^*, & \mathcal{T}_N &= \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l, & \mathcal{T}_N^* &= \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l^*, \end{aligned}$$

para $l, N \in \mathbb{N}$ e temos que

$$d_l = \#A_l - \#A_{l-1} = N_d(l) - N_d(l-1), \quad d_l^* = \#A_l^* - \#A_{l-1}^* = N_d^*(l) - N_d^*(l-1),$$

e

$$\dim \mathcal{T}_N = N_d(N), \quad \dim \mathcal{T}_N^* = N_d^*(N).$$

Portanto, usando a Proposição 1.4.6 e a Observação 1.4.7, segue que existe uma constante C , dependendo somente de d tal que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - Cl^\theta &\leq d_l \leq \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + Cl^\theta, \\ \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d &\leq \dim \mathcal{T}_N \leq \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} N^d + CN^{d-1}, \\ d2^d l^{d-1} &\leq d_l^* \leq d2^d l^{d-1} + Cl^{d-2} \end{aligned}$$

e

$$2^d N^d \leq \dim \mathcal{T}_N^* \leq 2^d N^d + CN^{d-1}.$$

Definição 1.4.9. *Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ uma sequência de números reais e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para toda $\varphi \in L^p(I^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(I^d)$ com expansão formal em séries de Walsh-Fourier dada por*

$$f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}},$$

tal que $\|\Lambda\|_{p,q} := \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de $L^p(I^d)$ em $L^q(I^d)$, com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$, onde U_p denota a bola unitária fechada $\{\varphi \in L^p(I^d) : \|\varphi\|_p \leq 1\}$ do espaço $L^p(I^d)$.

Observação 1.4.10. *Seja $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$ sejam*

$$\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|), \quad \lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*).$$

Neste trabalho estudaremos operadores multiplicadores associados às sequências do tipo $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ e $\Lambda_ = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$. Para $\varphi \in \mathcal{H} = [\psi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d]$, temos que*

$$\Lambda\varphi = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad \Lambda_*\varphi = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \lambda_{\mathbf{k}}^* \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}.$$

Recordamos que se $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ temos que $\mathcal{H}$ é denso em $L^p(I^d)$. Sendo assim, se $\sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_p \leq 1\} < \infty$, então o operador Λ pode ser estendido a toda função $\varphi \in L^p(I^d)$ e é limitado de $L^p(I^d)$ em $L^q(I^d)$.

1.5 Derivada diádica

Nesta seção apresentaremos a definição de derivada diádica de uma função definida em $[0, 1)$. Também, apresentaremos o conceito de derivada parcial diádica para funções definidas em I^d , algumas propriedades e faremos algumas observações que nos serão úteis no Capítulo 4 sobre aplicações. As referências para esta seção são [4, 5, 42, 53].

Definição 1.5.1. *(Derivada diádica) Sejam f uma função definida em $[0, 1)$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Consideremos*

$$d_n f(x) := \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j-1})),$$

para cada $x \in [0, 1)$. Diremos que f é diferenciável no sentido diádico em x , se o limite

$$f^{[1]}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n f(x)$$

existe e é finito. Chamaremos $f^{[1]}(x)$ de derivada diádica de f em x . Derivadas de ordem superior são definidas indutivamente para $m = 2, 3, \dots$, por

$$f^{[m]} := (f^{[m-1]})^{[1]}.$$

Observação 1.5.2. *Como cada função de Walsh é localmente constante, a "derivada clássica" definida por*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

induz um operador diferenciável no qual não se pode distinguir uma função de Walsh de outra.

O domínio das funções de Walsh pode ser estendido de $[0, 1)$ para $[0, \infty)$ e o conjunto de índices de $\mathbb{N}_0$ para $[0, \infty)$. Além disso a soma diádica também pode ser estendida ao intervalo $[0, \infty)$. Observamos que este não é objetivo do nosso trabalho e que

estas extensões podem ser encontradas em [42], Capítulo 9. Dessa forma pode-se definir para $x, t \in [0, \infty)$, a transformada de Walsh de uma função integrável $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\hat{f}(t) := \int_0^\infty f(x) \psi_t(x) d\lambda(x),$$

que é análoga à transformada de Fourier clássica

$$\mathcal{F}(f)(t) := \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{ixt} dx.$$

Se pode demonstrar que em condições ideais tem-se inversão, isto é,

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(t) \psi_t(x) d\lambda(t),$$

para $x \in [0, \infty)$. Lembrando que a derivada clássica e a transformada de Fourier satisfazem

$$\mathcal{F}(f')(t) = it\mathcal{F}(f)(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$ e f uma função suave, a derivada diádica dada na Definição 1.5.1 foi definida de forma que se verifique uma fórmula análoga:

$$\hat{df}(t) = t\hat{f}(t),$$

para $t \in [0, \infty)$, onde df é a derivada da função f e vale $df = f^{[1]}$ sobre $[0, 1)$.

Observação 1.5.3. A derivada diádica satisfaz algumas das propriedades usuais da derivada clássica, mas não todas. Por exemplo, a função $\chi_{\mathbb{Q}}$ é descontínua em todo ponto, mas ela é diadicamente diferenciável em todo ponto.

Teorema 1.5.4. ([42], p. 40) Se f é contínua no sentido clássico em $[0, 1)$ e diadicamente diferenciável em q.t.p. de $[0, 1)$, então f é constante.

Observação 1.5.5. Toda função de Walsh é diferenciável no sentido diádico em $[0, 1)$, e a derivada diádica de ψ_k de ordem m , com $k = 0, 1, 2, \dots$ e $m \in \mathbb{N}$, é dada por

$$\psi_k^{[m]} = k^m \psi_k. \quad (1.11)$$

Para verificar essa igualdade, sejam $m = 1$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Seja $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ a representação em coeficientes binários de k . Notemos que

$$1 - (-1)^{k_j} = 2k_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Podemos verificar pela definição de função de Radamacher que $r_i(2^{-j-1}) = -1$ se $i = j$ e $r_i(2^{-j-1}) = 1$ se $i \neq j$. Assim pela definição da função de Walsh ψ_k , temos que $\psi_k(2^{-j-1}) = (-1)^{k_j}$. Assim, pela Proposição 1.3.9, obtemos que

$$\begin{aligned} \psi_k(x) - \psi_k(x \oplus 2^{-j-1}) &= \psi_k(x) - \psi_k(2^{-j-1})\psi_k(x) \\ &= \psi_k(x) - (-1)^{k_j}\psi_k(x) \\ &= (1 - (-1)^{k_j})\psi_k(x) \\ &= 2k_j\psi_k(x), \end{aligned}$$

para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Logo, da definição de derivada diádica, segue que

$$d_n \psi_k(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_j 2^j \right) \psi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Como a soma do lado direito de (1.12) é igual a k para n suficientemente grande, então temos que (1.11) é verdadeira para $m = 1$. Portanto, procedendo por indução verificamos que (1.11) é válida para m arbitrário.

Seja $\mathbf{e}_q = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ o vetor de $\mathbb{R}^d$ com 1 na q -ésima coordenada e zero nas demais coordenadas.

Definição 1.5.6. *Seja f uma função definida em I^d e para $n, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq d$, $\mathbf{x} \in I^d$, seja*

$$d_{n,q}f(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})].$$

Se o limite de $d_{n,q}f(\mathbf{x})$, quando n tende para infinito, existe e é finito, dizemos que f tem derivada parcial diádica de primeira ordem em $\mathbf{x}$ com respeito à q -ésima coordenada de $\mathbf{x}$ e denotamos

$$\frac{\partial}{\partial x_q} f(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,q}f(\mathbf{x}).$$

Derivadas parciais diádicas de ordem superior são definidas sucesivamente por

$$\frac{\partial^r}{\partial x_q^r} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_q^{r-1}} f(\mathbf{x}) \right), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Lema 1.5.7. *Sejam $r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$ e $\mathbf{x} \in I^d$. Então a função de Walsh $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ tem derivadas parciais diádicas de ordem r no ponto $\mathbf{x}$ e que são dadas por*

$$\frac{\partial^r}{\partial x_q^r} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = (k_q)^r \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (1.13)$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_q, \dots, k_d)$, $1 \leq q \leq d$.

Demonstração. Vamos verificar a igualdade para $r = 1$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$ fixo. Temos que para

$$1 \leq q \leq d$$

$$\begin{aligned}
d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} [\psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_q}(x_q) \dots \psi_{k_d}(x_d) - \psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_q}(x_q \oplus 2^{-j-1}) \dots \psi_{k_d}(x_d)] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} \psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_{q-1}}(x_{q-1}) \psi_{k_{q+1}}(x_{q+1}) \dots \psi_{k_d}(x_d) [\psi_{k_q}(x_q) - \psi_{k_q}(x_q \oplus 2^{-j-1})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} \psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_{q-1}}(x_{q-1}) \psi_{k_{q+1}}(x_{q+1}) \dots \psi_{k_d}(x_d) (2k_q^j \psi_{k_q}(x_q)) \\
&= \psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_{q-1}}(x_{q-1}) \psi_{k_{q+1}}(x_{q+1}) \dots \psi_{k_d}(x_d) \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j \right) \psi_{k_q}(x_q) \\
&= \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j \right), \tag{1.14}
\end{aligned}$$

onde $\{k_q^j\}_{j=0}^{\infty}$ são os coeficientes binários de k_q . Como a soma em (1.14) para n suficientemente grande é igual a k_q , então (1.13) é verdadeira para $r = 1$. Portanto, procedendo por indução verificamos que (1.13) é válida para $r \in \mathbb{N}$. $\square$

O conceito de derivada parcial diádica pode ser generalizado para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ e $m \in \mathbb{Z}$ (ver [4]). Agora, apresentamos uma fórmula de derivada parcial diádica do produto de funções de Walsh que é chamada de regra do produto.

Lema 1.5.8. *Seja $\{\mathbf{k}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{N}_0^d$, $m \in \mathbb{N}$. Então para $1 \leq q \leq d$ e $\mathbf{x} \in I^d$ temos que*

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left(\prod_{i=0}^m \psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}) \right) = \left(\bigoplus_{i=0}^m \mathbf{k}_i \right)_q \prod_{i=0}^m \psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}).$$

Demonstração. Como $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{k} \oplus \mathbf{j}}(\mathbf{x})$, então

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left(\prod_{i=0}^m \psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_q} \psi_{\bigoplus_{i=0}^m \mathbf{k}_i}(\mathbf{x}),$$

e portanto de (1.13) segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left(\prod_{i=0}^m \psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}) \right) = \left(\bigoplus_{i=0}^m \mathbf{k}_i \right)_q \prod_{i=0}^m \psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{x}).$$

$\square$

Teorema 1.5.9. *Seja $f \in L^1(I^d)$ tal que*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty,$$

onde k_q é a q -ésima componente do vetor $\mathbf{k}$. Então, para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ existe a derivada parcial diádica de primeira ordem de f em $\mathbf{x}$ com respeito à q -ésima coordenada e

$$\frac{\partial}{\partial x_q} f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Além disso, $f, \partial f / \partial x_q \in L^p(I^d)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq d$, e a convergência acima ocorre na norma de $L^p(I^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Como $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \geq n_0}} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right| \leq \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \geq n_0}} |\hat{f}(\mathbf{k})| < \epsilon,$$

para todo $\mathbf{x} \in I^d$. Logo a série

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

converge uniformemente para uma função $g \in L^\infty(I^d)$. Podemos então concluir que $\hat{f}(\mathbf{k}) = \hat{g}(\mathbf{k})$, para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, e assim

$$\int_{I^d} (f - g) \psi_{\mathbf{k}} d\nu = \hat{f}(\mathbf{k}) - \hat{g}(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d.$$

Como $\{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ é um conjunto ortonormal completo em $L^2(I^d)$ então temos que $f = g$ q.t.p.. Agora para cada $\mathbf{x} \in I^d$,

$$\begin{aligned} d_{n,q}g(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1}) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \hat{f}(\mathbf{k}) (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \hat{f}(\mathbf{k}) \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}_q 2^{-j-1})) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Por outro lado, sejam

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

e

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) k_q \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Logo de (1.14), segue que

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) - S_n(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) k_q \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) k_q \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) \left(k_q - \sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde $\{k_q^j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ são os coeficientes binários de k_q . Como

$$k_q - \sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j = \sum_{j=0}^{\infty} k_q^j 2^j - \sum_{j=0}^{n-1} k_q^j 2^j = \sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j,$$

logo,

$$S(\mathbf{x}) - S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) \left(\sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Então, segue que

$$|S(\mathbf{x}) - S_n(\mathbf{x})| \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} |\hat{f}(\mathbf{k})| \left| \sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j \right|.$$

Agora, consideremos $\epsilon > 0$, e seja $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \geq s}} k_q |\hat{f}(\mathbf{k})| < \epsilon. \quad (1.15)$$

Para cada $k_q \in \{1, \dots, s\}$ seja $M_{k_q} \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_q = \sum_{j=0}^{\infty} k_q^j 2^j = \sum_{j=0}^{M_{k_q}} k_q^j 2^j.$$

Então para $M = \max\{M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_s}\}$ e $n > M$, temos

$$0 \leq \sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} k_q^j 2^j = 0. \quad (1.16)$$

Consequentemente, de (1.15) e (1.16), segue que

$$\begin{aligned} |S(\mathbf{x}) - S_n(\mathbf{x})| &\leq \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \leq s}} \left| \sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j \right| |\hat{f}(\mathbf{k})| + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \geq s}} \left| \sum_{j=n}^{\infty} k_q^j 2^j \right| |\hat{f}(\mathbf{k})| \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \geq s}} k_q |\hat{f}(\mathbf{k})| < \epsilon. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\mathbf{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) k_q \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_q} g(\mathbf{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,q} g(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) d_{n,q} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{k}) k_q \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Como $f = g$ em q.t.p., então temos $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_q = \partial g(\mathbf{x})/\partial x_q$, para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ e assim obtemos o resultado desejado. $\square$

Corolário 1.5.10. *Sejam $f \in L^1(I^d)$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} (k_q)^r |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty.$$

Então para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$, a derivada parcial diádica de ordem r , com respeito à q -ésima coordenada, de f em $\mathbf{x}$, existe e é dada por

$$\frac{\partial^r}{\partial x_q^r} f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} (k_q)^r \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Além disso, $f, \partial f/\partial x_q, \dots, \partial^r f/\partial x_q^r \in L^p(I^d)$, para $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq d$, e a convergência acima ocorre na norma de $L^p(I^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado para $r = 2$ e o resto de casos segue de forma indutiva. De fato, como $k_q \leq (k_q)^2$, então temos que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q |\hat{f}(\mathbf{k})| \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} (k_q)^2 |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty,$$

portanto segue pelo Teorema 1.5.9 que para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ existe a derivada parcial diádica de primeira ordem de f em $\mathbf{x}$ com respeito à q -ésima coordenada e

$$\frac{\partial}{\partial x_q} f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Agora, consideremos a função g dada por $g(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x})/\partial x_q$. Vimos que $\hat{g}(\mathbf{k}) = k_q \hat{f}(\mathbf{k})$ e logo

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q |\hat{g}(\mathbf{k})| &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q |k_q \hat{f}(\mathbf{k})| \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} (k_q)^2 |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.5.9, temos que para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ existe a derivada parcial diádica de primeira ordem de g em $\mathbf{x}$ com respeito à q -ésima coordenada, isto é, para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ existe a derivada parcial diádica de segunda ordem de f em $\mathbf{x}$ com respeito à q -ésima coordenada e

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{\partial}{\partial x_q} f(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_q} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} k_q \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} (k_q)^2 \hat{f}(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

e o resultado segue. $\square$

1.6 n -Larguras

Nesta seção abordaremos resultados básicos sobre n -larguras. Apresentaremos conceitos referentes às n -larguras de Kolmogorov, Gel'fand e Bernstein, exibindo algumas de suas propriedades, bem como as relações entre elas. As referências para esta seção são [37, 46].

Notação 1.6.1. *Seja X um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_X$ e X_n um subespaço n -dimensional de X . Para cada $x \in X$, $E(x, X_n)$ denotará a distância do subespaço n -dimensional X_n ao ponto x definida por*

$$E(x, X_n) = \inf \{ \|x - y\|_X : y \in X_n \}.$$

Se existir $y^ \in X_n$ tal que $E(x, X_n) = \|x - y^*\|_X$, diremos que y^* é a melhor aproximação de x em X_n .*

Vamos supor agora que em vez de um único elemento x , nos é dado um subconjunto A de X . Nessas condições a seguinte pergunta se faz necessário.

Quão bem um subconjunto n -dimensional X_n de X pode aproximar o subconjunto A ?

A resposta para essa pergunta encontra-se na definição abaixo.

Definição 1.6.2. *Se X é um espaço vetorial normado, X_n um subespaço n -dimensional de X e A um subconjunto qualquer de X , chamamos de desvio de A em X_n ao número*

$$E(A, X_n) = \sup \{ E(x, X_n) : x \in A \} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X.$$

O número $E(A, X_n)$ mede quanto o "pior elemento" de A pode ser aproximado por X_n . Para o subconjunto $A \subset X$ dado, nós indagamos o quão bem podemos aproximá-lo por um subespaço n -dimensional de X e para tal objetivo consideramos a possibilidade de permitir que os subespaços n -dimensionais X_n variem dentro de X . Essa idéia foi apresentada primeiramente por Kolmogorov em 1936 e será nosso principal objeto de estudo ao longo desta seção.

Definição 1.6.3. *Sejam X um espaço vetorial normado e $A \subset X$. A n -largura de Kolmogorov de A em X é dada por*

$$d_n(A) = d_n(A; X) = \inf\{E(A; X_n) : X_n \text{ é um subespaço } n\text{-dimensional de } X\},$$

ou seja,

$$d_n(A) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X.$$

Alguns autores preferem a expressão " n -diâmetro" no lugar de " n -largura", nós no entanto usaremos o último termo ao longo deste trabalho.

Uma vez definida $d_n(A; X)$, dizemos que um subespaço n -dimensional $X_n \subset X$ é um subespaço ótimo para $d_n(A; X)$ se tivermos $d_n(A; X) = E(A; X_n)$. Geralmente é muito difícil, na verdade quase impossível, obtermos um subespaço ótimo para $d_n(A; X)$ para todos os subconjuntos $A \subset X$, já que muito esforço é necessário na obtenção para escolhas específicas de A e X . Nosso objetivo nesse sentido é analisar as escolhas de A e X de modo que $d_n(A; X)$ e X_n possam ser encontrados ou pelo menos caracterizados.

Para isso é de extrema importância determinarmos o comportamento assintótico de $d_n(A; X)$ quando fazemos $n \rightarrow \infty$, já que um subespaço ótimo X_n em geral pode não ser obtido explicitamente, ou em caso positivo, o esforço computacional envolvido em sua determinação pode ser demasiadamente inviável. Em muitos casos, subespaços n -dimensionais bastante simples podem aproximar A de forma assintótica ótima (isto é, fazendo $n \rightarrow \infty$). Nesse sentido, a n -largura nos diz o quão bem um subespaço n -dimensional dado pode aproximar A assintoticamente.

Definição 1.6.4. *Sejam X um espaço vetorial normado e $A \subset X$. A n -largura de Gel'fand de A em X é definida por*

$$d^n(A) = d^n(A; X) = \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\|_X,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X .

Um subespaço L^n de X é de codimensão n se existirem n funcionais lineares linearmente independentes $f_1, f_2, \dots, f_n \in X'$ (X' denota o dual algébrico de X), tais que

$$L^n = \{x \in X : f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Se L^n é um subespaço de codimensão n de X para o qual $d^n(A; X) = \sup\{\|x\|_X : x \in A \cap L^n\}$, então L^n é chamado um subespaço ótimo para $d^n(A; X)$.

Definição 1.6.5. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X . Dizemos que A é convexo se para quaisquer $x, y \in A$ e $\alpha \in [0, 1]$, tivermos*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in A.$$

Definição 1.6.6. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X . Dizemos que A é centralmente simétrico se A é simétrico com relação à origem 0 , em outras palavras, se para todo $x \in A$ tivermos $-x \in A$.*

Definição 1.6.7. *Sejam X um espaço vetorial normado e A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X . A n -largura de Bernstein de A em X é definida por*

$$b_n(A) = b_n(A; X) = \sup_{X_{n+1}} \sup\{\lambda : \lambda B \cap X_{n+1} \subset A\};$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços $(n+1)$ -dimensionais X_{n+1} de X e B denota a bola unitária fechada e centrada na origem em X .

1.7 Propriedades básicas e relações entre as n -larguras

Vale observarmos aqui que ao longo de toda esta seção os subconjuntos A de X de nosso interesse, dos quais estaremos calculando as respectivas n -larguras, serão considerados fechados, convexos e centralmente simétricos.

Teorema 1.7.1. *Sejam X, Y, Z espaços lineares normados, A e B subconjuntos não vazios de X , $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Então,*

- (a) $d_n(\alpha A) = |\alpha| d_n(A)$;
- (b) $d_n(A) = d_n(b(A))$, onde $b(A) = \{\alpha x : x \in A, |\alpha| \leq 1\}$, é o envólucro balanceado de A ;
- (c) $d_n(B) \leq d_n(A)$ se $B \subset A$;
- (d) $d_n(A) \geq d_{n+1}(A)$;
- (e) se $X \subset Y$, X tem a norma induzida de Y e $A \subset X$, temos

$$d_n(A; X) \geq d_n(A; Y);$$

- (f) $d_{m+n}(C+D; U+V) \leq d_m(C; U) + d_n(D; V)$, onde U e V são subespaços de Z , $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \{0\}$.

Teorema 1.7.2. *Seja X um espaço linear normado, A, B subconjuntos não vazios de X , $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Então,*

- (a) $d^n(\alpha A) = |\alpha| d^n(A)$;
- (b) $d^n(A) = d^n(b(A))$, onde $b(A) = \{\alpha x : x \in A, |\alpha| \leq 1\}$, é o envólucro balanceado de A ;
- (c) se $B \subset A$, então $d^n(B) \leq d^n(A)$;

(d) $d^n(A) \geq d^{n+1}(A)$.

Proposição 1.7.3. *Assumimos que X e Y são espaços lineares normados, X é um subespaço de Y com a norma induzida de Y e $A \subset X$. Então,*

$$d^n(A, X) = d^n(A, Y), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposição 1.7.4. *Sejam X um espaço linear normado e A um subespaço fechado, convexo e centralmente simétrico de X . Então, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,*

(a) $d_n(A) \geq b_n(A)$;

(b) $d^n(A) \geq b_n(A)$.

Notação 1.7.5. *Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial das transformações lineares contínuos de X em Y , onde X e Y são espaços vetoriais normados.*

Notação 1.7.6. *Ao que segue, dado um espaço linear normado X , B_X denotará a bola unitária fechada e centrada na origem em tal espaço, em outras palavras $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$. Quando $X = L^p(I^d)$, denotaremos a bola B_X por U_p , isto é, $U_p = \{f \in L^p(I^d) : \|f\|_p \leq 1\}$.*

Definição 1.7.7. *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$d_n(T) = d_n(T(B_X), Y) = \inf_{Y_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in Y_n} \|T(x) - y\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços n -dimensionais Y_n de Y .

Definição 1.7.8. *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$d^n(T) = d^n(T(B_X), Y) = \inf_{L^n} \sup_{x \in L^n \cap B_X} \|T(x)\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de X de codimensão no máximo n .

Observação 1.7.9. *Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $d_n(T)$, $d^n(T)$ satisfazem os resultados precedentes já vistos.*

Notação 1.7.10. $K(X, Y)$ denotará o espaço vetorial das transformações lineares compactos de X em Y , isto é, das transformações $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tais que o fecho do conjunto $T(B_X) = \{Tx : \|x\|_X \leq 1\}$ é compacto em Y .

Definição 1.7.11. *Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definimos o operador $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$, chamado adjunto de T , por*

$$\langle T'y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle,$$

para todo $x \in X, y' \in Y'$, onde

$$\langle x', x \rangle = x'(x),$$

para $x \in X$ e $x' \in X'$.

Teorema 1.7.12. *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $n \in \mathbb{N}$, então $d_n(T) = d^n(T')$.*

1.8 Números de entropia

Nesta seção, exibiremos o conceito de entropia, abordando algumas de suas propriedades.

Definição 1.8.1. *Sejam X um espaço de Banach e $A \subset X$. O k -ésimo número de entropia do conjunto A é definido por*

$$e_k(A) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (x_i + \epsilon B_X), \quad x_1, \dots, x_{2^{k-1}} \in X \right\}.$$

Proposição 1.8.2. *Sejam X e Y espaços de Banach, A, B subconjuntos não vazios de X , com $B \subset A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$,*

- i) $e_n(A, X) \geq e_{n+1}(A, X)$;
- ii) $e_n(\alpha A, X) = |\alpha| e_n(A, X)$;
- iii) $e_n(B, X) \leq e_n(A, X)$;
- iv) Se $X \subset Y$ e $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$, então $e_n(A, X) \geq e_n(A, Y)$.

Definição 1.8.3. *Sejam X e Y espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos o k -ésimo número de entropia do operador T como sendo*

$$e_k(T) = e_k(T(B_X), Y).$$

Proposição 1.8.4. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $T, L \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $W \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Então*

- i) $\|T\| = e_1(T) \geq e_2(T) \geq \dots \geq 0$;
- ii) $e_{k+l-1}(W \circ T) \leq e_k(W) e_l(T)$, para todo $k, l \in \mathbb{N}$;
- iii) $e_{k+l-1}(T + L) \leq e_k(T) + e_l(L)$, para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.8.5. *Sejam X, X_1, Y, Y_1 espaços de Banach tais que X é isométrico a um quociente de X_1 e que Y é isométrico a um subespaço de Y_1 . Denotamos por $L : X_1 \rightarrow X$ a aplicação quociente e por $J : Y \rightarrow Y_1$ a inclusão isométrica. Então para todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos*

$$e_k(T) = e_k(T \circ L) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} e_k(T) \leq e_k(J \circ T) \leq e_k(T).$$

Parte II

Resultados

2 Estimativas para Médias de Levy

Na primeira seção deste capítulo, a partir de um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$, onde $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade, construímos um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega^d)$. Na segunda seção consideramos operadores multiplicadores de séries múltiplas sobre $L^2(\Omega^d)$, associados a um sistema ortonormal completo qualquer, limitado uniformemente em $L^\infty(\Omega^d)$, e estudamos médias de Levy de normas sobre $\mathbb{R}^n$ definidas através dos operadores multiplicadores. Feito isso, demonstramos um importante teorema que nos fornece estimativas superiores e inferiores para as médias de Levy de tais normas. Este Teorema será usado como ferramenta principal, nos próximos capítulos, no estudo de estimativas gerais para n -larguras e números de entropia de operadores multiplicadores.

Em [51] este estudo foi feito para o sistema de Walsh clássico sobre $[0, 1)$ e em [23, 24, 46] para operadores multiplicadores sobre espaços homogêneos e sobre o toro. Os resultados de estimativas para médias de Levy estão publicados em [8].

2.1 Sistemas ortonormais completos

Consideremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ um conjunto ortonormal completo de funções reais ou complexas de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Vamos supor que existem constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $0 < k_1 < k_2$, tal que $k_1 \leq \|\phi_m\|_\infty \leq k_2$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Para $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$ definimos a função $\phi_{\mathbf{m}} : \Omega^d \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \phi_{m_1}(x_1) \dots \phi_{m_d}(x_d), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega^d.$$

Sejam $\mathcal{A}^d = \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$ e $\mu^d = \mu \times \dots \times \mu$ (d -vezes) respectivamente, a σ -álgebra produto e a medida produto sobre Ω^d . Tomamos $K_1 = k_1^d$, $K_2 = k_2^d$ e temos que $K_1 \leq \|\phi_{\mathbf{m}}\|_\infty \leq K_2$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$.

Proposição 2.1.1. *Seja $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ um subconjunto ortonormal completo em $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de funções reais ou complexas. Então $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d}$ é um subconjunto ortonormal completo em $L^2(\Omega^d, \mathcal{A}^d, \mu^d)$.*

Demonstração. Consideremos o caso $d = 2$. É fácil verificar que o conjunto $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^2}$ é ortonormal, vamos demonstrar que é completo. Seja $f \in L^2(\Omega^2, \mathcal{A}^2, \mu^2)$, tal que

$$\langle f, \phi_{\mathbf{m}} \rangle = 0, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^2.$$

Vamos demonstrar que $f = 0$ quase sempre. Para todo $\mathbf{m} = (n, m) \in \mathbb{N}_0^2$ temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, \phi_{\mathbf{m}} \rangle &= \int_{\Omega^2} f(\mathbf{x}) \overline{\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})} d\mu^2(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Omega^2} f(x, y) \overline{\phi_n(x) \phi_m(y)} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x, y) \overline{\phi_m(y)} d\mu(y) \right) \overline{\phi_n(x)} d\mu(x). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ é um subconjunto ortonormal completo de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, então a função $x \mapsto \int_{\Omega} f(x, y) \overline{\phi_m(y)} d\mu(y)$ é zero quase sempre para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Consideremos o conjunto

$$E_m = \left\{ x \in \Omega : \int_{\Omega} f(x, y) \overline{\phi_m(y)} d\mu(y) \neq 0 \right\}.$$

Logo, cada E_m é um conjunto de medida zero, e portanto

$$E = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_m$$

é também um conjunto de medida zero. Então, para $x \in \Omega \setminus E$, temos que

$$\int_{\Omega} f(x, y) \overline{\phi_m(y)} d\mu(y) = 0,$$

para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Novamente, usando a hipótese, segue que $f(x, \cdot)$ é zero, quase sempre, para qualquer $x \in \Omega \setminus E$. Como $|f|^2$ é uma função integrável, sua integral concorda com as integrais iteradas, e assim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} |f(x, y)|^2 d\mu^2(x, y) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x, y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega \setminus E} \int_{\Omega} |f(x, y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) = 0, \end{aligned}$$

e portanto $f = 0$ em $L^2(\Omega^2)$.

Caso $d \geq 2$: O caso geral obtemos por indução em d e usando o caso $d = 2$ como verdadeiro.

□

Observação 2.1.2. Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega^d)$, munido do produto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mu^d(\mathbf{x}), \quad f, g \in L^2(\Omega^d).$$

Pela Proposição 2.1.1, o conjunto $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega^d)$, isto é:

$$(i) \quad \langle \phi_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{m}} \rangle = 0, \text{ se } \mathbf{k} \neq \mathbf{m};$$

- (ii) $\|\phi_{\mathbf{m}}\|_{L^2(\Omega^d)} = 1$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$;
- (iii) Se $f \in L^2(\Omega^d)$ e $\langle f, \phi_{\mathbf{m}} \rangle = \hat{f}(\mathbf{m}) = 0$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, então $f = 0$.

Logo se $f \in L^2(\Omega^d)$ então

$$\|f\|_{L^2(\Omega^d)}^2 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\hat{f}(\mathbf{m})|^2 \quad (\text{Identidade de Plancherel}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{|\mathbf{m}| \leq n} \hat{f}(\mathbf{m}) \phi_{\mathbf{m}} \right\|_{L^2(\Omega^d)} = 0,$$

enquanto que se $f, g \in L^2(\Omega^d)$, então

$$\int_{\Omega^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mu^d(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\mathbf{m}) \overline{\hat{g}(\mathbf{m})} \quad (\text{Identidade de Parseval}).$$

2.2 Estimativas para médias de Levy

Nesta seção, definimos o conceito de média de Levy de uma norma arbitrária definida sobre $\mathbb{R}^n$ e demonstramos um teorema que nos fornece estimativas inferiores e superiores para a média de Levy de normas, introduzidas na seção anterior.

A partir desse momento, em todo esse trabalho, $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d}$ será um sistema ortonormal completo qualquer de funções reais de $L^2(\Omega^d, \mathcal{A}^d, \mu^d)$ para o qual existem constantes $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $0 < K_1 < K_2$ tal que $K_1 \leq \|\phi_{\mathbf{m}}\|_{\infty} \leq K_2$ para qualquer $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$. Este sistema ortonormal não precisa ser necessariamente construído como o sistema da Proposição 2.1.1.

Notação 2.2.1. Sejam A_l e A_l^* , $l \in \mathbb{N}_0$, como na Definição 1.4.1. Dados $N, M_1, M_2 \in \mathbb{N}_0$, com $M_1 < M_2$, usaremos as seguintes notações

$$\mathcal{H}_l = [\phi_{\mathbf{m}} : \mathbf{m} \in A_l \setminus A_{l-1}], \quad \mathcal{H}_l^* = [\phi_{\mathbf{m}} : \mathbf{m} \in A_l^* \setminus A_{l-1}^*],$$

$$d_l = \dim \mathcal{H}_l, \quad d_l^* = \dim \mathcal{H}_l^*,$$

$$\mathcal{T}_{M_1, M_2} = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l, \quad \mathcal{T}_{M_1, M_2}^* = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l^*.$$

Observamos que as estimativas na Proposição 1.4.6 e na Observação 1.4.7 permanecem válidas nesse caso mais geral.

Observação 2.2.2. Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ uma sequência de números reais e sejam $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Definimos um operador multiplicador, que será também denotado por Λ , e definimos o que significa esse operador ser limitado de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, como na

Definição 1.4.9, trocando as funções $\{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ pelas funções $\{\phi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$. Para $\varphi \in \mathcal{H} = [\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d]$,

$$\Lambda\varphi = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}.$$

Fixada uma função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, consideraremos operadores multiplicadores Λ e Λ^* , associados às sequências $\{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ e $\{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = (|\mathbf{k}|_*)$, respectivamente.

Observação 2.2.3. Sejam $n = \dim \mathcal{T}_{M_1, M_2}$ e $A_l \setminus A_{l-1} = \{\mathbf{m}_j^l : 1 \leq j \leq d_l\}$ onde os elementos $\mathbf{m}_j^l$ são escolhidos de forma que $|\mathbf{m}_j^l| \leq |\mathbf{m}_{j+1}^l|$ para $1 \leq j \leq d_l - 1$. Assim $\{\phi_{\mathbf{m}_j^l} : 1 \leq j \leq d_l\}$ é uma base de $\mathcal{H}_l$. Vamos considerar a base ortonormal $\Upsilon = \Upsilon_{M_1, M_2} = \{\phi_j^l = \phi_{\mathbf{m}_j^l} : M_1 + 1 \leq l \leq M_2, 1 \leq j \leq d_l\}$ de $\mathcal{T}_{M_1, M_2}$ munida da ordem $\phi_1^{M_1+1}, \dots, \phi_{d_{M_1+1}}^{M_1+1}, \phi_1^{M_1+2}, \dots, \phi_{d_{M_1+2}}^{M_1+2}, \dots, \phi_1^{M_2}, \dots, \phi_{d_{M_2}}^{M_2}$. Denotamos

$$\xi_k = \phi_t^{l+1}, \quad k = t + \sum_{j=M_1+1}^l d_j, \quad 1 \leq t \leq d_{l+1}, \quad M_1 \leq l < M_2.$$

Assim $\Upsilon = \{\xi_k\}_{k=1}^n$. Seja $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_{M_1, M_2}$ o isomorfismo coordenado definido por

$$J(\alpha) = J(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k.$$

Consideremos uma função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\lambda(t) \neq 0$, para $t \geq 0$, e seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ a sequência de multiplicadores definida por $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$. Consideramos $\{\lambda_j^l = \lambda_{\mathbf{m}_j^l} : M_1 + 1 \leq l \leq M_2, 1 \leq j \leq d_l\}$ munido da ordem $\lambda_1^{M_1+1}, \dots, \lambda_{d_{M_1+1}}^{M_1+1}, \lambda_1^{M_1+2}, \dots, \lambda_{d_{M_1+2}}^{M_1+2}, \dots, \lambda_1^{M_2}, \dots, \lambda_{d_{M_2}}^{M_2}$. Denotamos

$$\lambda_k = \lambda_t^{l+1} = \lambda_{\mathbf{m}_t^{l+1}} = \lambda(|\mathbf{m}_t^{l+1}|), \quad k = t + \sum_{j=M_1+1}^l d_j, \quad 1 \leq t \leq d_{l+1}, \quad M_1 \leq l < M_2$$

e tomamos $\Lambda_n = \{\lambda_k\}_{k=1}^n$. Consideramos agora o operador multiplicador Λ_n definido sobre $\mathcal{T}_{M_1, M_2}$ por

$$\Lambda_n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j \xi_j.$$

Também, definimos o operador multiplicador $\tilde{\Lambda}_n$ sobre $\mathbb{R}^n$, por

$$\tilde{\Lambda}_n(\alpha) = \tilde{\Lambda}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\lambda_1 \alpha_1, \dots, \lambda_n \alpha_n).$$

Dada $\varphi \in \mathcal{T}_{M_1, M_2}$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\|\varphi\|_{\Lambda_n, p} = \|\Lambda_n \varphi\|_p.$$

A aplicação $\mathcal{T}_{M_1, M_2} \ni \varphi \rightarrow \|\varphi\|_{\Lambda_n, p}$ é uma norma sobre $\mathcal{T}_{M_1, M_2}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n, p)} = \|J(\alpha)\|_{\Lambda_n, p} = \|\Lambda_n J(\alpha)\|_p,$$

e temos que a aplicação $\mathbb{R}^n \ni \alpha \rightarrow \|\alpha\|_{(\Lambda_n, p)}$ é uma norma sobre $\mathbb{R}^n$. Denotamos

$$B_{\Lambda_n, p}^n = B_{\Lambda, p}^n = \{\varphi \in \mathcal{T}_{M_1, M_2} : \|\varphi\|_{\Lambda_n, p} \leq 1\},$$

$$B_{(\Lambda_n, p)}^n = B_{(\Lambda, p)}^n = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha\|_{(\Lambda_n, p)} \leq 1\}.$$

Se Λ_n é o operador identidade I , escrevemos $\|\cdot\|_{I, p} = \|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{(I, p)} = \|\cdot\|_{(p)}$, $B_{I, p}^n = B_p^n$ e $B_{(I, p)}^n = B_{(p)}^n$. Observamos que $\|\cdot\|_{(2)}$ é a norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.2.4. Sejam $n = \dim \mathcal{T}_{M_1, M_2}^*$ e $A_l^* \setminus A_{l-1}^* = \{\mathbf{m}_j^l : 1 \leq j \leq d_l^*\}$ onde os elementos $\mathbf{m}_j^l$ são escolhidos de forma que $|\mathbf{m}_j^l| \leq |\mathbf{m}_{j+1}^l|$ para $1 \leq j \leq d_l^* - 1$. De modo análogo ao que foi feito na Observação 2.2.3, podemos definir funções ϕ_j^l , ξ_k , operadores Λ_n^* e $\tilde{\Lambda}_n^*$, normas $\|\cdot\|_{\Lambda^*, p}$, $\|\cdot\|_{(\Lambda^*, p)}$ e conjuntos $B_{\Lambda_n^*, p}^n$, $B_{(\Lambda_n^*, p)}^n$, $B_{n, p}^*$ e $B_{(n, p)}^*$.

Notação 2.2.5. Seja $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach n -dimensional e $B_E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária em E . Além disso, seja

$$\|x\|_{(2)} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

a norma Euclidiana do elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

o produto interno entre os elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Denotamos

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{(2)} = 1\}$$

a esfera unitária Euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.6. A média de Levy de uma norma $\|\cdot\|$ definida em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$M(\|\cdot\|) = M(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) := \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|^2 d\sigma(x) \right)^{1/2},$$

onde $d\sigma(x)$ denota a medida de Lebesgue normalizada sobre $\mathbb{S}^{n-1}$.

Em seguida, citaremos alguns lemas e teoremas que necessitaremos para demonstrar as estimativas para médias de Levy da norma $\|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)}$.

Lema 2.2.7. ([46], p. 58) Seja $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ e $\tilde{f}$ a extensão de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \|x\|_{(2)}^2 f\left(\frac{x}{\|x\|_{(2)}}\right).$$

Então,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x)$$

onde $d\gamma(x) = e^{-\pi\|x\|_{(2)}^2} dx$ denota a medida Gaussiana sobre $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.2.8. (Kwapień, [25], p. 585) Seja $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ a sequência das funções de Rademacher definida na Definição 1.3.4. Para $\theta \in [0, 1)$ e $m = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n$, seja

$$\delta_i^m(\theta) = m^{-1/2}(r_{(i-1)m}(\theta) + \dots + r_{im-1}(\theta)).$$

Nestas condições, se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$h(x_1, \dots, x_n)e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \rightarrow 0$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^n |x_k| \rightarrow 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 h((2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))) d\lambda(\theta).$$

Lema 2.2.9. (Desigualdade de Khintchine, [36], p. 41) Sejam $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ a sequência de funções de Rademacher e $1 \leq p < \infty$. Então existem constantes positivas $b(p)$ e $c(p)$ tais que, para toda escolha de escalares $\{c_s\}_{s=0}^{n-1}$ temos

$$b(p) \left(\sum_{s=0}^{n-1} |c_s|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{s=0}^{n-1} r_s(\theta) c_s \right|^p d\lambda(\theta) \right)^{1/p} \leq c(p) \left(\sum_{s=0}^{n-1} |c_s|^2 \right)^{1/2},$$

onde $b(1) \geq 1/2$ e $c(p) = 2^{1/2} \Gamma((1+p)/2) / \Gamma(1/2) \asymp p^{1/2}$, quando $p \rightarrow \infty$.

Teorema 2.2.10. (Desigualdade de Jensen, [11], p. 109) Sejam $(X, \mathcal{M}, \nu)$ um espaço de medida, com $\nu(X) = 1$, $g : X \rightarrow (a, b)$, $g \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$ e F uma função convexa definida em (a, b) . Então

$$F\left(\int_X g d\nu\right) \leq \int_X F \circ g d\nu.$$

Teorema 2.2.11. (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, [11], p. 200) Sejam $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dois espaços com medidas semi-finitas (em particular σ -finitas), $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e para cada $0 \leq t \leq 1$ sejam p_t e q_t tais que

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Seja T um operador linear limitado de $L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma)$ em $L^{q_t}(Y, \mathcal{N}, \nu)$, para $t = 0, 1$, e tal que

$$\|Tf\|_{q_t} \leq D_t \|f\|_{p_t}, \quad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \quad t = 0, 1.$$

Então,

$$\|Tf\|_{q_t} \leq D_0^{1-t} D_1^t \|f\|_{p_t}, \quad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma), \quad t \in [0, 1].$$

Lema 2.2.12. Sejam $t_n \in \mathcal{T}_{M_1, M_2} = \bigoplus_{k=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_k$, $n = \dim \mathcal{T}_{M_1, M_2}$ e $K = \max\{K_2^2, 1\}$. Então,

$$\|t_n\|_{\infty} \leq K n^{1/p} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad (2.1)$$

$$\|t_n\|_2 \leq K n^{1/p-1/2} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2; \quad (2.2)$$

$$\|t_n\|_q \leq K n^{1/2-1/q} \|t_n\|_2, \quad 2 \leq q \leq \infty. \quad (2.3)$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{T}_{M_1, M_2}$. Então

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} \hat{f}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}, \quad \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega^d} f(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}).$$

Temos que

$$|\hat{f}(\mathbf{k})| \leq \int_{\Omega^d} |f(\mathbf{x})| |\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})| d\mu^d(\mathbf{x}) \leq K_2 \|f\|_1,$$

e assim

$$\|f\|_{\infty} \leq \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} \|\hat{f}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}\|_{\infty} \leq K_2 \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} |\hat{f}(\mathbf{k})| \leq K_2^2 \|f\|_1 n.$$

Desta forma, se I denota o operador identidade sobre $\mathcal{T}_{M_1, M_2}$, então

$$\|I(f)\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \leq n K_2^2 \|f\|_1 \quad \text{e} \quad \|I(f)\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \leq 1 \|f\|_{\infty}.$$

Podemos então aplicar o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin ao operador I , com

$$\begin{cases} D_0 = n K_2^2, \\ D_1 = 1, \\ q_0 = q_1 = \infty, \\ p_0 = 1, p_1 = \infty, \end{cases}$$

ou seja, $q_t = \infty$ e $1/p_t = 1 - t$. Logo, $D_0^{1-t} D_1^t = n^{1-t} K_2^{2(1-t)} = n^{1/p_t} K_2^{2/p_t}$ e fazendo $p = p_t$, obtemos

$$\|f\|_{\infty} = \|I(f)\|_{\infty} \leq n^{1/p} K_2^{2/p} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

o que demonstra (2.1). Agora temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} \|\hat{f}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}\|_2^2 = \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \|\phi_{\mathbf{k}}\|_2^2 \\ &\leq \sum_{\mathbf{k} \in A_{M_2} \setminus A_{M_1}} (K_2 \|f\|_1)^2 = n K_2^2 \|f\|_1^2 \end{aligned}$$

e logo

$$\|f\|_2 \leq n^{1/2} K_2 \|f\|_1.$$

Desta forma

$$\|I(f)\|_2 = \|f\|_2 \leq n^{1/2} K_2 \|f\|_1 \quad \text{e} \quad \|I(f)\|_2 = \|f\|_2 \leq 1 \|f\|_2.$$

De modo análogo, aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin ao par de desigualdades acima com $D_0 = n^{1/2} K_2$, $D_1 = 1$, $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ e $q_0 = q_1 = 2$, ou seja

$q_t = 2$ e $1/p_t = 1 - t/2$, temos $D_0^{1-t} D_1^t = (nK_2^2)^{(1-t)/2} = n^{1/p_t-1/2} K_2^{2/p_t-1}$ e fazendo $p_t = p$ obtemos

$$\|I(f)\|_2 = \|f\|_2 \leq n^{1/p-1/2} K_2^{2/p-1} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

o que demonstra (2.2). Usando (2.1), obtemos

$$\|I(f)\|_\infty \leq n^{1/2} K_2 \|f\|_2 \quad \text{e} \quad \|I(f)\|_2 \leq 1 \|f\|_2.$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, obtemos

$$\|f\|_q \leq n^{1/2-1/q} K_2^{1-2/q} \|f\|_2, \quad 2 \leq q \leq \infty,$$

o que demonstra (2.3). □

Teorema 2.2.13. *Seja $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função monótona, seja $n = \dim \mathcal{T}_{M_1, M_2}$ e considere o sistema ortonormal $\Upsilon_{M_1, M_2} = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ e o operador multiplicador Λ_n sobre $\mathcal{T}_{M_1, M_2}$ definidos na Observação 2.2.3. Se $t \mapsto |\lambda(t)|$ é não-crescente então existe uma constante absoluta $C > 0$, tal que:*

(i) se $2 \leq p < \infty$, então

$$n^{-1/2} \left(\sum_{j=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)}) \leq C p^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2};$$

(ii) se $1 \leq p \leq 2$, então

$$\frac{K_1}{2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)}) \leq n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2};$$

(iii) se $p = \infty$, então

$$n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, \infty)}) \leq C (\log_2 n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2};$$

(iv) se $p = 2$, então

$$n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, 2)}) \leq n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2}.$$

Se $t \mapsto |\lambda(t)|$ é não-decrescente, então obtemos as estimativas em (i), (ii), (iii) e (iv), permutando $\lambda(l)$ por $\lambda(l-1)$.

Demonstração. Consideremos $t \mapsto |\lambda(t)|$ não-crescente. Vamos inicialmente obter as estimativas em (iv). Para $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1^{M_1+1}, \dots, x_{d_{M_1+1}}^{M_1+1}, \dots, x_1^{M_2}, \dots, x_{d_{M_2}}^{M_2}) \in \mathbb{R}^n$, temos da Observação 2.2.3

$$\begin{aligned}
\|x\|_{(\Lambda_n, 2)}^2 &= \|\Lambda_n J(x)\|_2^2 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j \right\|_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 |x_j|^2 \|\xi_j\|_2^2 \\
&= \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \sum_{j=1}^{d_l} |\lambda_j^l|^2 (x_j^l)^2 \\
&\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} \left(\sup_{1 \leq j \leq d_l} \lambda(|\mathbf{m}_j^l|) \right)^2 \sum_{j=1}^{d_l} (x_j^l)^2 \\
&\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{j=1}^{d_l} (x_j^l)^2,
\end{aligned}$$

e assim

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n, 2)}^2 d\sigma(x) \leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{j=1}^{d_l} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (x_j^l)^2 d\sigma(x). \quad (2.4)$$

Mas

$$1 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(2)}^2 d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (x_1^2 + \dots + x_n^2) d\sigma(x) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_j^2 d\sigma(x) = n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_j^2 d\sigma(x),$$

para $j = 1, \dots, n$, donde

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_j^2 d\sigma(x) = \frac{1}{n}, \quad (2.5)$$

para $j = 1, \dots, n$. Assim, de (2.4) e (2.5), obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n, 2)}^2 d\sigma(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{j=1}^{d_l} 1 = \frac{1}{n} \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l.$$

Consequentemente,

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, 2)}) = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n, 2)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \leq n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2}.$$

De modo análogo, obtemos que

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, 2)}) \geq n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2},$$

e portanto obtemos (iv).

Como a propriedade (iv) é válida e $M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)})$ é uma função monótona crescente de p , para $1 \leq p \leq \infty$, pois as normas $\|\cdot\|_p$ são monótonas crescentes em p , então seguem as estimativas inferiores em (i) e (iii) e a estimativa superior em (ii).

Passamos agora à demonstração da estimativa superior em (i) e da estimativa inferior em (ii). Para uma função arbitrária $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})$, consideramos a extensão $\tilde{f}$ para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, como foi definida no Lema 2.2.7. Tomando $f(x) = \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $h(x) = \tilde{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos que

$$h(x) = \|x\|_{(2)}^2 f\left(\frac{x}{\|x\|_{(2)}}\right) = \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2.$$

Assim, segue do Lema 2.2.7 que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\sigma(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\gamma(x). \quad (2.6)$$

Notemos que se $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \|x\|_{(\Lambda_n, p)} &= \|\Lambda_n J(x)\|_p \leq \|\Lambda_n J(x)\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j \right\|_\infty \\ &= \sup_{\mathbf{y} \in \Omega^d} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j(\mathbf{y}) \right| \leq K_2 \left(\sup_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \right) \sum_{j=1}^n |x_j|. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} h(x) e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} &= \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2 e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \\ &\leq \left(K_2 \left(\sup_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2 e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^n |x_k| \rightarrow 0$. Portanto, segue do Lema 2.2.8 que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\gamma(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 h((2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))) d\lambda(\theta) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \|(2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\lambda(\theta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

De (2.6) e (2.7) vem que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\sigma(x) &= \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\gamma(x) \\ &= \frac{1}{n} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \|(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))\|_{(\Lambda_n, p)}^2 d\lambda(\theta). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \|(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))\|_{(\Lambda_n, p)}^2 &= \|\Lambda_n J(\delta_1^m(\theta), \dots, \delta_n^m(\theta))\|_p^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^m(\theta) \xi_j \right\|_p^2 \\ &= \left(\int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^m(\theta) \xi_j(\mathbf{x}) \right|^p d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{2/p}, \end{aligned}$$

então, segue que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_{(\Lambda_{n,p})}^2 d\sigma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} n^{-1} \int_0^1 \left(\int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^m(\theta) \xi_j(\mathbf{x}) \right|^p d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{2/p} d\lambda(\theta).$$

Agora, para $\mathbf{x} \in \Omega^d$, sejam

$$\varphi_{(j-1)m+i}(\mathbf{x}) = m^{-1/2} \xi_j(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_{(j-1)m+i} = \lambda_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $m = 1, 2, \dots$. Lembrando as definições de $\delta_j^m(\theta)$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^m(\theta) \xi_j(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j m^{-1/2} \xi_j(\mathbf{x}) (r_{(j-1)m}(\theta) + \dots + r_{jm-1}(\theta)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \varphi_{(j-1)m+i}(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_{(j-1)m+i} r_{(j-1)m+i-1}(\theta) \\ &= \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta). \end{aligned}$$

Assim, para $1 \leq p \leq \infty$

$$M^2(\|\cdot\|_{(\Lambda_{n,p})}) = \lim_{m \rightarrow \infty} n^{-1} \int_0^1 \left(\int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right|^p d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{2/p} d\lambda(\theta). \quad (2.8)$$

Seja $2 \leq p \leq \infty$. De (2.8), da Desigualdade de Jensen e do Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned} M(\|\cdot\|_{(\Lambda_{n,p})}) &= n^{-1/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \left(\int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right|^p d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{2/p} d\lambda(\theta) \right)^{1/2} \\ &\leq n^{-1/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega^d} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right|^p d\lambda(\theta) \right) d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Agora, pela Desigualdade de Khintchine,

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_{n,p})}) \leq n^{-1/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega^d} (c(p))^p \left(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j|^2 \right)^{p/2} d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{1/p}. \quad (2.9)$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nm} |\varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j|^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |\varphi_{(j-1)m+i}(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_{(j-1)m+i}|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |\xi_j(\mathbf{x}) \lambda_j m^{-1/2}|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n m |\xi_j(\mathbf{x}) \lambda_j m^{-1/2}|^2 = \sum_{j=1}^n m |\lambda_j|^2 |\xi_j(\mathbf{x})|^2 m^{-1} \\ &\leq \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{j=1}^{d_l} |\xi_j(\mathbf{x})|^2 \leq K_2^2 \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l. \end{aligned}$$

De forma análoga obtemos que

$$\sum_{j=1}^{nm} \left| \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j \right|^2 \geq K_1^2 \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l$$

Logo, segue que

$$K_1^2 \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \leq \sum_{j=1}^{nm} \left| \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j \right|^2 \leq K_2^2 \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l. \quad (2.10)$$

Assim, por (2.9) e (2.10)

$$\begin{aligned} M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, p)}) &\leq n^{-1/2} c(p) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega^d} \left(K_2^2 \sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{p/2} d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^{1/p} \\ &= K_2 n^{-1/2} c(p) \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} \\ &\leq C p^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde a constante universal C da última desigualdade é obtida do fato que $c(p) \asymp p^{1/2}$. Obtemos assim a estimativa superior de (i).

Por outro lado, consideremos $1 \leq p \leq 2$. Como $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$, então em (2.8) com $p = 1$ e fazendo

$$g(\theta) = \int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right| d\mu^d(\mathbf{x}),$$

temos pela Desigualdade de Jensen,

$$\begin{aligned} M^2(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, 1)}) &= n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right| d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^2 d\lambda(\theta) \\ &= n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 (g(\theta))^2 d\lambda(\theta) \\ &\geq n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |g(\theta)| d\lambda(\theta) \right)^2 \\ &= n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \int_{\Omega^d} \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right| d\mu^d(\mathbf{x}) d\lambda(\theta) \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$M^2(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, 1)}) \geq n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{nm} \varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j r_{j-1}(\theta) \right| d\lambda(\theta) d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Khintchine, segue que

$$\begin{aligned}
M^2(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) &\geq n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega^d} b(1) \left(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_j(\mathbf{x}) \tilde{\lambda}_j|^2 \right)^{1/2} d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^2 \\
&= n^{-1} \lim_{m \rightarrow \infty} (b(1))^2 \left(\int_{\Omega^d} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j(\mathbf{x}) \lambda_j|^2 \right)^{1/2} d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^2 \\
&\geq K_1^2 n^{-1} (b(1))^2 \left(\int_{\Omega^d} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2} d\mu^d(\mathbf{x}) \right)^2 \\
&\geq n^{-1} \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) \geq n^{-1/2} \left(\frac{K_1}{2} \right) \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2}.$$

Uma vez que a média de Levy é uma função monótona crescente de p , para $1 \leq p \leq 2$,

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \geq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) \geq n^{-1/2} \left(\frac{K_1}{2} \right) \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l)|^2 d_l \right)^{1/2}.$$

Obtemos assim a estimativa inferior em (ii).

Finalmente, considere $p = \infty$ e seja $q = \log_2 n$. Do Lema 2.2.12 e da estimativa superior obtida em (2.1), temos

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) &= \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\Lambda_n J(x)\|_\infty^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\
&\leq K \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} n^{2/q} \|\Lambda_n J(x)\|_q^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\
&= K n^{1/q} M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,q)}) \\
&\leq C_1 q^{1/2} n^{1/q} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} \\
&= C_1 (\log_2 n)^{1/2} (2^q)^{1/q} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2} \\
&= 2C_1 (\log_2 n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} |\lambda(l-1)|^2 d_l \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Tomando então $C = 2C_1$, obtemos a estimativa superior em (iii). $\square$

Observação 2.2.14. O Teorema 2.2.13 permanece válido se considerarmos $n = \dim \mathcal{T}_{M_1, M_2}^*$, o operador Λ_n^* definido na Obsevação 2.2.4 no lugar do operador Λ_n e trocarmos d_l por d_l^* .

3 Estimativas inferiores e superiores gerais para n -larguras

Neste capítulo estudamos estimativas inferiores e superiores para n -larguras de operadores multiplicadores gerais de séries múltiplas, associados ao sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega^d)$ estudado no capítulo anterior e limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Demonstramos estimativa inferior para as n -larguras de Kolmogorov e Gel'fand e estimativa superior somente para a n -largura de Kolmogorov de tais operadores. Em [51] foram estudadas estas estimativas para o sistema de Walsh clássico sobre $[0, 1]$ e em [23, 24, 46] estimativas análogas para operadores multiplicadores sobre espaços homogêneos e sobre o toro. Os resultados neste capítulo sobre n -larguras estão publicados em [8].

Usamos as terminologias $a_n \asymp b_n$, $a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$ para duas sequências (a_n) e (b_n) , para indicar a existência de constantes universais C_1, C_2, C_3 e C_4 satisfazendo $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n$, $a_n \geq C_3 b_n$ e $a_n \leq C_4 b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, respectivamente. Se $a \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ e $a \leq x < a + 1$, escrevemos $[x] = a$. Para $a \in \mathbb{R}$ denotamos $(a)_+ = a$ se $a > 0$ e $(a)_+ = 0$ se $a \leq 0$.

3.1 Estimativas inferiores para n -larguras

Nesta seção, demonstramos a limitação inferior para n -larguras de Kolmogorov e Gel'fand de operadores multiplicadores gerais de séries múltiplas, limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Denotamos por U_p a bola unitária fechada $\{f \in L^p(\Omega^d) : \|f\|_p \leq 1\}$ de $L^p(\Omega^d)$.

Definição 3.1.1. *Sejam $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e E o espaço de Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ com bola unitária B_E . Se $\langle x, y \rangle$ denota o produto interno usual dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, então a norma dual de $\|\cdot\|$ é definida por*

$$\|x\|^\circ = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in B_E\}.$$

O espaço dual $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^\circ)$ de E será denotado por E°

Sejam $n = \dim \mathcal{T}_N$, $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l$, $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ a base ortonormal de $\mathcal{T}_N$ definida na Observação 2.2.3, $\Lambda_n = \{\lambda_k\}_{k=1}^n$, $\lambda_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, e consideremos os operadores multiplicadores Λ_n e Λ_n^{-1} de $\mathcal{T}_N$ em $\mathcal{T}_N$ definidos por

$$\Lambda_n \left(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j, \quad \text{e} \quad \Lambda_n^{-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} x_j \xi_j.$$

Observação 3.1.2. Os operadores Λ_n , J , $\tilde{\Lambda}_n$ comutam entre si, isto é, $\Lambda_n \circ J = J \circ \tilde{\Lambda}_n$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\Lambda_n \circ J(x) = \Lambda_n \left(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j$$

e

$$J \circ \tilde{\Lambda}_n(x) = J(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j.$$

Portanto, $\Lambda_n \circ J = J \circ \tilde{\Lambda}_n$.

Observação 3.1.3. Os operadores J^{-1} , Λ_n , $\tilde{\Lambda}_n$ comutam entre si, isto é, $J^{-1} \circ \Lambda_n = \tilde{\Lambda}_n \circ J^{-1}$. De fato, para $f \in \mathcal{T}_N$, $f = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ temos

$$J^{-1} \circ \Lambda_n(f) = J^{-1} \left(\Lambda_n \left(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) \right) = J^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \xi_j \right) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$$

e

$$\tilde{\Lambda}_n \circ J^{-1}(f) = \tilde{\Lambda}_n \left(J^{-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j \xi_j \right) \right) = \tilde{\Lambda}_n(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n).$$

Portanto, $J^{-1} \circ \Lambda_n = \tilde{\Lambda}_n \circ J^{-1}$.

Teorema 3.1.4. ([33]) Seja $E^\circ = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^\circ)$. Para cada $0 < \rho < 1$, existe um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \rho n$, tal que

$$\|x\|_{(2)} \leq CM(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^\circ)(1 - \rho)^{-1/2} \|x\|$$

para todo $x \in F_k$, onde $C > 0$ é uma constante absoluta.

Teorema 3.1.5. Sejam $1 \leq q \leq p \leq 2$, $0 < \rho < 1$, $n = \dim \mathcal{T}_N$, $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l$, $d_k = \dim \mathcal{H}_k$, $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \rightarrow |\lambda(t)|$ é uma função não-crescente e seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ a sequência de multiplicadores $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ satisfazendo $\lambda_{\mathbf{k}} \neq 0$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que

$$\min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q)\} \geq C(1 - \rho)^{1/2} k_{q,n},$$

onde

$$k_{q,n} = \begin{cases} (1 - 1/q)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2}, & q > 1, \\ (n/\log_2 n)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2}. & q = 1. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_N$ o isomorfismo coordenado dado por $J(x) = J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n = J^{-1}(\mathcal{T}_N)$. Usando o fato que J é um isomorfismo coordenado e portanto preserva produto interno, obtemos

$$\|x\|_{(\Lambda_n, q)}^\circ = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in B_{(\Lambda_n, q)}^n\} = \sup\left\{\left|\int_{\Omega^d} J(x)J(y)d\mu^d\right| : y \in B_{(\Lambda_n, q)}^n\right\}.$$

Temos

$$J(B_{(\Lambda_n, q)}^n) = J(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{(\Lambda_n, q)}^n \leq 1\}) = \{J(x) \in \mathcal{T}_N : \|\Lambda_n J(x)\|_q \leq 1\},$$

e fazendo $f = \Lambda_n J(x)$, isto é, $J(x) = \Lambda_n^{-1} f$, obtemos

$$J(B_{(\Lambda_n, q)}^n) = \{\Lambda_n^{-1} f \in \mathcal{T}_N : \|f\|_q \leq 1, f \in \mathcal{T}_N\} = \{\Lambda_n^{-1} f \in \mathcal{T}_N : f \in B_q^n\} = \Lambda_n^{-1}(B_q^n).$$

Assim,

$$\|x\|_{(\Lambda_n, q)}^\circ = \sup \left\{ \left| \int_{\Omega^d} J(x) J(y) d\mu^d \right| : J(y) \in \Lambda_n^{-1}(B_q^n) \right\}. \quad (3.1)$$

Como $\Lambda_n(J(y)) \in B_q^n$, segue que $\Lambda_n(J(y)) = J(\bar{y})$, com $\bar{y} \in B_q^n$, onde $B_q^n = J^{-1}(B_q^n)$. Obtemos assim da expressão (3.1)

$$\begin{aligned} \|x\|_{(\Lambda_n, q)}^\circ &= \sup \left\{ \left| \int_{\Omega^d} J(x) J(y) d\mu^d \right| : J(y) \in \Lambda_n^{-1}(B_q^n) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\Omega^d} J(x) (\Lambda_n^{-1} J(\bar{y})) d\mu^d \right| : J(\bar{y}) \in B_q^n \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\Omega^d} (\Lambda_n^{-1} J(x)) J(\bar{y}) d\mu^d \right| : J(\bar{y}) \in B_q^n \right\}, \end{aligned}$$

donde a última igualdade é verdadeira, pois se $J(x) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ e $J(\bar{y}) = \sum_{m=1}^n \bar{y}_m \xi_m$, então $\Lambda_n^{-1} J(\bar{y}) = \sum_{m=1}^n \lambda_m^{-1} \bar{y}_m \xi_m$ e $\Lambda_n^{-1} J(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} x_j \xi_j$. Logo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^d} J(x) \Lambda_n^{-1} J(\bar{y}) d\mu^d &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_m^{-1} x_j \bar{y}_m \int_{\Omega^d} \xi_m(\mathbf{x}) \xi_j(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} x_j \bar{y}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_j^{-1} x_j \bar{y}_m \int_{\Omega^d} \xi_j(\mathbf{x}) \xi_m(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Omega^d} \Lambda_n^{-1} J(x) J(\bar{y}) d\mu^d. \end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} \|x\|_{(\Lambda_n, q)}^\circ &= \sup \left\{ \left| \int_{\Omega^d} (\Lambda_n^{-1} J(x)) J(\bar{y}) d\mu^d \right| : J(\bar{y}) \in B_q^n \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|\Lambda_n^{-1} J(x)\|_{q'} \|J(\bar{y})\|_q : J(\bar{y}) \in B_q^n \right\} \\ &\leq \|\Lambda_n^{-1} J(x)\|_{q'} = \|x\|_{(\Lambda_n^{-1}, q')}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $1/q + 1/q' = 1$. Tomando agora $0 < \rho < 1$, podemos garantir pelo Teorema 3.1.4, a existência de um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$ com $\dim F_k = k > \rho n$, satisfazendo

$$\|x\|_{(2)} \leq C' M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n, q)}^\circ) (1 - \rho)^{-1/2} \|x\|_{(\Lambda_n, q)},$$

para todo $x \in F_k$. De (3.2), vem que

$$\|x\|_{(2)} \leq C' M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1}, q')})(1 - \rho)^{-1/2} \|x\|_{(\Lambda_n, q)},$$

para todo $x \in F_k$. Assim, tomando

$$\epsilon = (C')^{-1} (1 - \rho)^{1/2} (M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1}, q')}))^{-1}, \quad (3.3)$$

temos que para todo $x \in F_k$,

$$\epsilon \|x\|_{(2)} \leq \|x\|_{(\Lambda_n, q)}.$$

Por outro lado, se $x \in B_{(\Lambda_n, q)}^n \cap F_k$, então $x \in F_k$ e $\|x\|_{(\Lambda_n, q)} \leq 1$, logo

$$\epsilon \|x\|_{(2)} \leq \|x\|_{(\Lambda_n, q)} \leq 1.$$

Como $\|x\|_{(2)} = \|J(x)\|_2$, assim $\epsilon \|J(x)\|_2 = \epsilon \|x\|_{(2)} \leq 1$, e temos que $\epsilon x \in B_{(2)}^n = J^{-1}(B_2^n)$, o que implica $x \in \epsilon^{-1} B_{(2)}^n$. Portanto,

$$B_{(\Lambda_n, q)}^n \cap F_k \subset \epsilon^{-1} B_{(2)}^n,$$

e logo

$$\epsilon B_{(\Lambda_n, q)}^n \cap F_k \subset B_{(2)}^n. \quad (3.4)$$

Além disso, estimando a média de Levy $M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1}, q')})$ pelo Teorema 2.2.13 (note que isto é possível pois $t \rightarrow |\lambda(t)|^{-1}$ é uma função monótona não-decrescente), obtemos

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n^{-1}, q')}) \leq C_1 n^{-1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{1/2} \begin{cases} (q')^{1/2}, & q' < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q' = \infty. \end{cases}$$

Agora, de (3.3) e como $1/q + 1/q' = 1$, com $1 \leq q \leq 2$, vem que

$$\epsilon \geq C_2 (1 - \rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \begin{cases} (1 - 1/q)^{-1/2}, & 1 < q \leq 2, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & q = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Como $\Lambda U_2 \subset \Lambda U_p$, já que $1 \leq q \leq p \leq 2$, usando propriedades de n -larguras temos

$$\min\{d_{[\rho n - 1]}(\Lambda U_p, L^q), d^{[\rho n - 1]}(\Lambda U_p, L^q)\} \geq b_{[\rho n - 1]}(\Lambda U_p, L^q) \geq b_{[\rho n - 1]}(\Lambda U_2, L^q). \quad (3.6)$$

Como $\dim F_k = k > \rho n = (\rho n - 1) + 1 \geq [\rho n - 1] + 1$, então segue da definição de n -largura de Bernstein

$$\begin{aligned} b_{[\rho n - 1]}(\Lambda U_2, L^q) &\geq b_{k-1}(\Lambda U_2, L^q) \\ &= \sup_{\substack{L_k \subset L^q \\ \dim L_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(U_q \cap L_k) \subset \Lambda U_2\} \\ &\geq \sup_{\substack{L_k \subset L^q \cap \mathcal{T}_N \\ \dim L_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(U_q \cap L_k) \subset \Lambda U_2\} \\ &= \sup_{\substack{L_k \subset L^q \cap \mathcal{T}_N \\ \dim L_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(B_q^n \cap L_k) \subset \Lambda_n B_2^n\}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que

$$B_q^n \cap L_k = (U_q \cap \mathcal{T}_N) \cap L_k = U_q \cap L_k.$$

Por outro lado, lembrando que $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_N$ é um isomorfismo coordenado, e das Observações 3.1.2 e 3.1.3, e de (3.4), segue que

$$\begin{aligned} b_{[\rho n-1]}(\Lambda U_2, L^q) &\geq b_{k-1}(\Lambda U_2, L^q) \\ &\geq \sup_{\substack{L_k \subset L^q \cap \mathcal{T}_N \\ \dim L_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(B_q^n \cap L_k) \subset \Lambda_n B_2^n\} \\ &= \sup_{\substack{J^{-1}(L_k) \subset \mathbb{R}^n \\ \dim L_k = k}} \{\beta > 0 : J^{-1}(\beta(B_q^n \cap L_k)) \subset J^{-1}\Lambda_n B_2^n\} \\ &= \sup_{\substack{J^{-1}(L_k) \subset \mathbb{R}^n \\ \dim J^{-1}(L_k) = k}} \{\beta > 0 : \beta(J^{-1}(B_q^n) \cap J^{-1}(L_k)) \subset \tilde{\Lambda}_n J^{-1}B_2^n\} \\ &= \sup_{\substack{\tilde{L}_k \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \tilde{L}_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(B_{(q)}^n \cap \tilde{L}_k) \subset \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n\} \\ &= \sup_{\substack{\tilde{L}_k \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \tilde{L}_k = k}} \{\beta > 0 : \tilde{\Lambda}_n^{-1} \beta(B_{(q)}^n \cap \tilde{L}_k) \subset B_{(2)}^n\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\tilde{\Lambda}_n^{-1}(B_{(q)}^n) = B_{(\Lambda_n, q)}^n$ e assim,

$$\begin{aligned} b_{[\rho n-1]}(\Lambda U_2, L^q) &\geq \sup_{\substack{\tilde{L}_k \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \tilde{L}_k = k}} \{\beta > 0 : \tilde{\Lambda}_n^{-1} \beta(B_{(q)}^n \cap \tilde{L}_k) \subset B_{(2)}^n\} \\ &= \sup_{\substack{\tilde{L}_k \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \tilde{L}_k = k}} \{\beta > 0 : \beta(B_{(\Lambda_n, q)}^n \cap \tilde{L}_k) \subset B_{(2)}^n\} \\ &\geq \sup \{\beta > 0 : \beta(B_{(\Lambda_n, q)}^n \cap F_k) \subset B_{(2)}^n\} \\ &\geq \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente por (3.6)

$$\min\{d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q), d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q)\} \geq \epsilon,$$

e de (3.5) segue o resultado desejado. $\square$

Corolário 3.1.6. *Nas condições do teorema anterior temos que*

$$d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) \geq C'(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \zeta_n,$$

onde

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2, 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2, q = 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Demonstração. No Teorema anterior temos o resultado para $1 \leq q \leq p \leq 2$. Consideremos agora $1 \leq p < q \leq 2$. Como $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$ então $U_2 \subset U_q \subset U_p$, e portanto do Teorema 3.1.5,

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) &\geq d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_q, L^q) \\ &\geq C n^{1/2} (1-\rho)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} (1-1/q)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim obtemos o resultado para $1 \leq p \leq 2$ e $1 < q \leq 2$. Seja $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Como $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$, então de (3.7)

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) &= \inf_{X_n} \sup_{f \in \Lambda U_p} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_q \\ &\geq \inf_{X_n} \sup_{f \in \Lambda U_p} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_2 \\ &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^2) \\ &\geq C n^{1/2} \frac{(1-\rho)^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Sejam $2 \leq p < \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ e seja Λ' o operador adjunto de Λ . Assim, como $\Lambda \in \mathcal{L}(L^p, L^q)$, então $\Lambda' \in \mathcal{L}((L^q)', (L^p)') = \mathcal{L}((L^q)', L^{p'})$, onde $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$. Logo usando propriedades de n -larguras, temos

$$d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) = d_{[\rho n-1]}(\Lambda : L^p \rightarrow L^q) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda' : (L^q)' \rightarrow L^{p'}).$$

Se $2 \leq q < \infty$, então $(L^q)' = L^{q'}$ e $1 < p' \leq 2$, $1 < q' \leq 2$. Portanto como $\Lambda = \Lambda'$, do Teorema 3.1.5

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^q) &= d^{[\rho n-1]}(\Lambda : L^{q'} \rightarrow L^{p'}) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_{q'}, L^{p'}) \\ &\geq C (1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} (1-1/p')^{1/2}, \end{aligned}$$

quando $p' \leq q'$. O caso $q' < p'$ obtemos como em (3.7). Agora, seja $q = \infty$, então $1 < p' \leq 2$ e $L^1 \subset (L^\infty)'$. Como $U_{p'} \subset U_1$, segue pelo Teorema 3.1.5 que

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_p, L^\infty) &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda : L^p \rightarrow L^\infty) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda : (L^\infty)' \rightarrow L^{p'}) \\ &\geq d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_1, L^{p'}) \geq d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_{p'}, L^{p'}) \\ &\geq C (1-\rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} (1-1/p')^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora, seja $2 \leq q \leq \infty$, $p = \infty$. Se $2 \leq q < \infty$, então

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_\infty, L^q) &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda : L^\infty \rightarrow L^q) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda : L^{q'} \rightarrow (L^\infty)') \\ &= d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_{q'}, (L^\infty)') = d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_{q'}, L^1). \end{aligned}$$

A última igualdade segue da Proposição 1.7.3 e do fato que $\Lambda U_{q'} \subset L^1 \subset (L^\infty)'$. Portanto, do Teorema 3.1.5,

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_\infty, L^q) &= d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_{q'}, L^1) \\ &\geq C(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} (\log_2 n)^{-1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Se $p = q = \infty$, como $L^1 \subset (L^\infty)'$, usando propriedades de n -larguras e do fato que $\Lambda U_1 \subset L^1 \subset (L^\infty)'$, obtemos

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_\infty, L^\infty) &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda : L^\infty \rightarrow L^\infty) = d^{[\rho n-1]}(\Lambda B_{(L^\infty)'}, (L^\infty)') \\ &\geq d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_1, (L^\infty)') = d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_1, L^1). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.1.5

$$\begin{aligned} d_{[\rho n-1]}(\Lambda U_\infty, L^\infty) &\geq d^{[\rho n-1]}(\Lambda U_1, L^1) \\ &\geq C(1-\rho)^{1/2} n^{1/2} (\log_2 n)^{-1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

completando assim o caso $p = \infty$, $2 \leq q \leq \infty$. O caso $1 \leq p \leq 2$, $q = 1$ segue diretamente do Teorema 3.1.5. Completamos assim a demonstração do Corolário. $\square$

Observação 3.1.7. O Teorema 3.1.5 e o Corolário 3.1.6 continuam válidos se trocarmos $\mathcal{T}_N$ por $\mathcal{T}_N^* = \bigoplus_{l=1}^N \mathcal{H}_l^*$, d_k por d_k^* e Λ por Λ_* .

3.2 Estimativas superiores para n -larguras

Nesta seção, demonstramos a limitação superior para a n -largura de Kolmogorov de operadores multiplicadores arbitrários de séries múltiplas, limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$.

Teorema 3.2.1. *Seja $\lambda : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função não-crescente e seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$. Suponhamos que $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e que o operador Λ é limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$. Sejam $\{N_k\}_{k=0}^\infty$ e $\{m_k\}_{k=0}^M$ sequências de números naturais tais que $M \in \mathbb{N}$, $N_k < N_{k+1}$, $N_0 = 0$ e $\sum_{k=0}^M m_k \leq \beta$, para um número $\beta \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$, tal que*

$$d_\beta(\Lambda U_p, L^q) \leq C \left(\sum_{k=1}^M |\lambda(N_k)| \varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^\infty |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \right),$$

onde

$$\varrho_{m_k} = \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{(m_k)^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} = \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s, \quad k \geq 1.$$

Demonstração. Sejam $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ com $M_1 < M_2$. Denotamos $\mathcal{T}_{0,M_2} = \mathcal{T}_{M_2} = \bigoplus_{l=0}^{M_2} \mathcal{H}_l$ e para $M_1 \geq 1$, $\mathcal{T}_{M_1,M_2} = \bigoplus_{l=M_1+1}^{M_2} \mathcal{H}_l$. Escrevemos $n = \dim \mathcal{T}_{M_1,M_2} = \sum_{k=M_1+1}^{M_2} d_k$, $B_p^n := U_p \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}$, $B_{(p)}^n := J^{-1}(B_p^n)$, $\lambda_0 = 0$, e fixamos $0 < \rho < 1$. Então pelo Teorema 3.1.4, existe um subespaço F_k de $\mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \rho n$, tal que, para todo $x \in F_k$, temos

$$\|x\|_{(2)} \leq C_1 M(\|\cdot\|_{(q)})(1 - \rho)^{-1/2} \|x\|_{(q)}^\circ.$$

Se $m = n - k$, então

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{n - k} = \frac{1}{1 - \frac{k}{n}},$$

e como $k > \rho n$, então $k/n > \rho n/n = \rho$. Assim, $1 - k/n < 1 - \rho$, logo, $(1 - k/n)^{-1} > (1 - \rho)^{-1}$, o que implica que $n/m > (1 - \rho)^{-1}$. Então

$$(1 - \rho)^{-1/2} < \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2},$$

portanto,

$$\|x\|_{(2)} \leq C_1 M(\|\cdot\|_{(q)}) \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \|x\|_{(q)}^\circ.$$

Agora, pelo Teorema 2.2.13 para $\Lambda_n = \text{Id}$, temos

$$M(\|\cdot\|_{(q)}) \leq C_2 n^{-1/2} \left(\sum_{l=M_1+1}^{M_2} d_l \right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

assim,

$$M(\|\cdot\|_{(q)}) \leq C_2 \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e consequentemente para $x \in F_k$

$$\|x\|_{(2)} \leq C_3 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \|x\|_{(q)}^\circ \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Pelas propriedades de n -larguras para operadores temos $d_n(T) = d^n(T')$, e como J é um isomorfismo coordenado, segue que

$$\begin{aligned} d_m(B_{(2)}^n, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})) &= \inf_{\tilde{Y}_m} \sup_{x \in B_{(2)}^n} \inf_{y \in \tilde{Y}_m} \|x - y\|_{(q)} \\ &= \inf_{J(\tilde{Y}_m)} \sup_{J(x) \in J(B_{(2)}^n)} \inf_{J(y) \in J(\tilde{Y}_m)} \|J(x) - J(y)\|_q \\ &= \inf_{Y_m} \sup_{f \in B_2^n} \inf_{g \in Y_m} \|f - g\|_q \\ &= d_m(B_2^n, L^q \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d_m(B_2^n, L^q \cap \mathcal{T}_{M_1, M_2}) &= d_m(B_2^n, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})) \\
&= d_m(\text{Id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(2)}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})) \\
&= d^m(\text{Id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})' \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(2)})') \\
&= d^m(\text{Id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)}^\circ) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(2)})) \\
&= d^m((B_{(q)}^n)^\circ, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(2)})) \\
&= \inf_{L_m} \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^\circ \cap L_m} \|x\|_{(2)} \\
&\leq \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^\circ \cap F_k} \|x\|_{(2)} \\
&\leq C_3 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \sup_{x \in (B_{(q)}^n)^\circ \cap F_k} \|x\|_{(q)}^\circ \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\leq C_3 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde L_m são subespaços de $\mathbb{R}^n$ de codimensão m , isto é, $\dim L_m = n - m = k$ e Id é o operador identidade. Assim

$$d_m(B_2^n, L^q \cap \mathcal{T}_{M_1, M_2}) \leq C_3 \left(\frac{n}{m}\right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (3.8)$$

Seja agora $B_p^{N_k, N_{k+1}} := U_p \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}$ e para $f \in \Lambda U_p \subset L^2(\Omega^d)$ (pois Λ é limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$), seja $S_N(f)$ a N -ésima soma parcial esférica de Fourier de f , isto é,

$$S_N(f) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{k}| \leq N}} \hat{f}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}, \quad \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega^d} f(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}).$$

Tomemos para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(f) &:= S_{N_{k+1}}(f) - S_{N_k}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{j}| \leq N_{k+1}}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} - \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^d \\ |\mathbf{j}| \leq N_k}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} - \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_k}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}},
\end{aligned}$$

e

$$\vartheta_{N_0, N_1}(f) = S_{N_1}(f).$$

Como,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s}^{\infty} \vartheta_{N_k, N_{k+1}}(f) &= \vartheta_{N_s, N_{s+1}}(f) + \vartheta_{N_{s+1}, N_{s+2}}(f) + \cdots \\
&= \sum_{k=s}^{\infty} \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \hat{f}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} = f - S_{N_s}(f).
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \vartheta_{N_k, N_{k+1}}(f) \right\|_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \|f - S_{N_s}(f)\|_2 = 0.$$

Logo, dada $f \in \Lambda U_p \subset L^2(\Omega^d)$, temos

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_{N_k, N_{k+1}}(f),$$

onde a convergência da série ocorre na norma de $L^2(\Omega^d)$. Mas $f = \Lambda\varphi$, $\varphi \in U_p$ e podemos então reescrever a equação acima da forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_{N_k, N_{k+1}} \circ \Lambda(\varphi).$$

Consequentemente,

$$\Lambda U_p \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\vartheta_{N_k, N_{k+1}} \circ \Lambda) U_p \quad (3.9)$$

Mas, para cada $\varphi \in U_p$, temos que

$$\Lambda\varphi \sim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \hat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}},$$

e assim

$$\begin{aligned} \vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\Lambda\varphi) &= \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \left(\int_{\Omega^d} \Lambda\varphi(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}) \right) \phi_{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \left(\int_{\Omega^d} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}) \right) \phi_{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \hat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} \right) \\ &= \Lambda \left(\sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \hat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} \right) = \Lambda \left(\vartheta_{N_{k+1}, N_k}(\varphi) \right). \end{aligned}$$

Assim, $\vartheta_{N_k, N_{k+1}} \circ \Lambda(U_p) = \Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}}(U_p)$ e obtemos então de (3.9)

$$\Lambda U_p \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}}) U_p. \quad (3.10)$$

Agora, dada $\varphi \in U_p$, observando que $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função não-

crescente, temos que

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}})\varphi\|_2 &= \left\| \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{j}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} \right) \right\|_2 \\
&= \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\lambda(\mathbf{j})|^2 |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} |\lambda(l-1)|^2 \sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq |\lambda(N_k)| \left(\sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \sum_{\mathbf{j} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \\
&= |\lambda(N_k)| \left\| \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}} \right\|_2 \\
&= |\lambda(N_k)| \|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2^2 &= \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} \|\widehat{\varphi}(\mathbf{j}) \phi_{\mathbf{j}}\|_2^2 \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \|\phi_{\mathbf{j}}\|_2^2 \\
&\leq \sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} (K_2 \|\varphi\|_1)^2 \\
&= K_2^2 \|\varphi\|_1^2 \#(A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}) \\
&= K_2^2 \|\varphi\|_1^2 \sum_{s=N_k+1}^{N_k} \dim \mathcal{H}_s \\
&= \theta_{N_k, N_{k+1}} K_2^2 \|\varphi\|_1^2,
\end{aligned}$$

assim, obtemos que

$$\|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2 \leq \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2} K_2 \|\varphi\|_1.$$

Por outro lado, para $p = 2$ temos $\varphi \in U_2 \subset L^2(\Omega^d)$ e assim

$$\|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2 = \left(\sum_{\mathbf{j} \in A_{N_{k+1}} \setminus A_{N_k}} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^d} |\widehat{\varphi}(\mathbf{j})|^2 \right)^{1/2} = \|\varphi\|_2.$$

Consequentemente, obtemos o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2 \leq \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2} K_2 \|\varphi\|_1, \\ \|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2 \leq \|\varphi\|_2. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin a este sistema de desigualdades, vem que

$$\|\vartheta_{N_k, N_{k+1}}(\varphi)\|_2 \leq \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} K_2^{2/p-1} \|\varphi\|_p \leq \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} K_2^{2/p-1}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Seja $K = \max\{K_2^2, 1\}$. Assim, de (3.11) segue que

$$\left\| \frac{(\Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}})\varphi}{K |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2}} \right\|_2 \leq 1,$$

de onde $(\Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}})\varphi \in K |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k, N_{k+1}}$ ou seja

$$(\Lambda \circ \vartheta_{N_k, N_{k+1}})U_p \subset K |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k, N_{k+1}},$$

e obtemos assim de (3.10)

$$\Lambda U_p \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} K |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} B_2^{N_k, N_{k+1}}. \quad (3.12)$$

Agora, pelo Lema 2.2.12, observando que $2 \leq q \leq \infty$ e $\theta_{N_k, N_{k+1}} = \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s$, temos para $\varphi \in B_2^{N_k, N_{k+1}}$

$$\|\varphi\|_q \leq K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2-1/q} \|\varphi\|_2 \leq K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2-1/q},$$

de onde $\varphi \in K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k, N_{k+1}}$ e portanto $B_2^{N_k, N_{k+1}} \subset K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k, N_{k+1}}$. Logo, de (3.12) segue que

$$\begin{aligned} \Lambda U_p &\subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} |\lambda(N_k)| B_2^{N_k, N_{k+1}} \\ &= \bigoplus_{k=0}^M K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} |\lambda(N_k)| B_2^{N_k, N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} |\lambda(N_k)| B_2^{N_k, N_{k+1}} \\ &\subset \bigoplus_{k=0}^M K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} |\lambda(N_k)| B_2^{N_k, N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} K |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} (K \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_k, N_{k+1}}) \\ &\subset C_4 \left(\bigoplus_{k=0}^M \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} |\lambda(N_k)| B_2^{N_k, N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} B_q^{N_k, N_{k+1}} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente, do Teorema 1.7.1, (3.13) e (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda U_p, L^q) &\leq C_4 \left(\sum_{k=0}^M |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} d_{m_k}(B_2^{N_k, N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} d_0(B_q^{N_k, N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k, N_{k+1}}) \right) \\ &\leq C \sum_{k=0}^M |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/2} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{m_k} \right)^{1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \\ &\quad + C \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\ &= C \left(\sum_{k=0}^M |\lambda(N_k)| \varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \right), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida pois para todo espaço de Banach X , $d_0(B_X, X) \leq 1$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 3.2.2. Vamos agora melhorar a estimativa obtida no teorema anterior, especificando as sequências N_k e m_k . Seja $N \in \mathbb{N}$, definimos $N_1 = N$ e

$$N_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N} : \nu |\lambda(l)| \leq |\lambda(N_k)|\},$$

onde $\nu > 1$ é um número fixo. Usaremos $\nu = 2$ pois tal escolha será suficiente para nossas aplicações. Como $N_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N} : 2 |\lambda(l)| \leq |\lambda(N_k)|\}$, segue que $2 |\lambda(N_{k+1})| \leq |\lambda(N_k)|$ e portanto

$$|\lambda(N_{k+1})| \leq 2^{-k} |\lambda(N)|.$$

Para $\epsilon > 0$, definimos

$$M = \left\lceil \frac{\log_2(\theta_{N_1, N_2})}{\epsilon} \right\rceil, \quad m_k = \lfloor 2^{-\epsilon k} \theta_{N_1, N_2} \rfloor + 1, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

e $m_0 = \theta_{N_0, N_1} = \theta_{0, N}$. Assim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M m_k &= \sum_{k=1}^M \left(\lfloor 2^{-\epsilon k} \theta_{N_1, N_2} \rfloor + 1 \right) \\ &= M + \theta_{N_1, N_2} \sum_{k=1}^M 2^{-\epsilon k} \\ &\leq M + \theta_{N_1, N_2} \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-\epsilon})^k \\ &\leq \frac{\log_2(\theta_{N_1, N_2})}{\epsilon} + \theta_{N_1, N_2} \frac{1}{1 - 2^{-\epsilon}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{1 - 2^{-\epsilon}} \right) \theta_{N_1, N_2} \\ &= C_\epsilon \theta_{N_1, N_2}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde C_ϵ depende somente de ϵ . Seja

$$\beta = \sum_{k=0}^M m_k = m_0 + \sum_{k=1}^M m_k = \sum_{s=0}^N \dim \mathcal{H}_s + \sum_{k=1}^M m_k$$

e $d_\beta := d_\beta(\Lambda U_p, L^q)$. Então aplicando o Teorema 3.2.1, temos

$$\begin{aligned} d_\beta &\leq C \sum_{k=1}^M |\lambda(N_k)| \varrho_{m_k} + C \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda(N_k)| \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\ &\leq 2C |\lambda(N)| \sum_{k=1}^M 2^{-k} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{m_k^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\quad + 2C |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\ &\leq 2C |\lambda(N)| \sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\quad + 2C |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Observação 3.2.3. Observamos que o Teorema 3.2.1 permanece válido se trocarmos $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$ e $\theta_{N_k, N_{k+1}}$ por $\theta_{N_k, N_{k+1}}^*$. Observamos também que, se trocarmos na Observação 3.2.2

- M por $M^* = \lceil \log_2(\theta_{N_1, N_2}^*)/\epsilon \rceil$, onde $\theta_{N_k, N_{k+1}}^* = \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_l^*$;
- m_k por $m_k^* = \lceil 2^{-\epsilon k} \theta_{N_1, N_2}^* \rceil + 1$;
- m_0 por $m_0^* = \theta_{N_0, N_1}^* = \theta_{0, N}^*$;
- β por $\beta^* = \sum_{k=0}^{M^*} m_k^* = m_0^* + \sum_{k=1}^{M^*} m_k^*$;
- d_β por $d_{\beta^*}(\Lambda_* : L^p \rightarrow L^q)$, obtemos de modo análogo

$$d_{\beta^*} \leq 2C |\lambda(N)| \sum_{k=1}^{M^*} 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{(\theta_{N_k, N_{k+1}}^*)^{1/p}}{(\theta_{N_1, N_2}^*)^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}}^*)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ + 2C |\lambda(N)| \sum_{k=M^*+1}^{\infty} 2^{-k} (\theta_{N_k, N_{k+1}}^*)^{1/p-1/q}.$$

Definição 3.2.4. Sejam N_k, M como na observação anterior. Dizemos que $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \in K_{\epsilon, p}$, para $\epsilon > 0$ e $1 \leq p \leq 2$, se $|\lambda(k+1)| \leq |\lambda(k)|$, $N_k < N_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e se para todo $N \in \mathbb{N}$ tivermos

$$\sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \leq C_{\epsilon, p} \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2}.$$

De modo análogo, dizemos que $\Lambda_* = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \in K_{\epsilon, p}^*$, para $\epsilon > 0$ e $1 \leq p \leq 2$, se $|\lambda(k+1)| \leq |\lambda(k)|$, $N_k < N_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e se para todo $N \in \mathbb{N}$ tivermos

$$\sum_{k=1}^{M^*} 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{(\theta_{N_k, N_{k+1}}^*)^{1/p}}{(\theta_{N_1, N_2}^*)^{1/2}} \leq C_{\epsilon, p}^* (\theta_{N_1, N_2}^*)^{1/p-1/2}.$$

As constantes $C_{\epsilon, p}$ e $C_{\epsilon, p}^*$ dependem somente de ϵ e p .

Uma consequência imediata de tal definição e da Observação 3.2.2 é o seguinte corolário.

Corolário 3.2.5. Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ e $\theta_{N_k, N_{k+1}}$ como no Teorema 3.2.1, sejam também $\epsilon > 0$, $N_k, M, \{m_k\}_{k=0}^M$ e β como na Observação 3.2.2 e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Suponhamos que $\Lambda \in K_{\epsilon, p}$, para $\epsilon > 0$ fixo. Então existe uma constante $C_{\epsilon, p} > 0$, dependendo somente de ϵ e p , tal que

$$d_\beta(\Lambda U_p, L^q) \leq C_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ + C_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}.$$

Observação 3.2.6. O Corolário 3.2.5 permanece válido, se trocarmos Λ por Λ_* , λ_k por λ_k^* , $\theta_{N_k, N_{k+1}}$ por $\theta_{N_k, N_{k+1}}^*$ e $K_{\epsilon, p}$ por $K_{\epsilon, p}^*$.

Observação 3.2.7. As funções de Walsh sobre $\mathbb{S}^l$ foram introduzidas em [3]. Consideremos a esfera unitária l -dimensional real $\mathbb{S}^l = \{x \in \mathbb{R}^{l+1} : x_1^2 + \dots + x_{l+1}^2 = 1\}$ munida da medida de Lebesgue normalizada dx . Para $l = 2$, seja $\xi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ a função definida por $\xi(\theta_1, \theta_2) = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \sin \theta_2)$. Para $k, j \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq j \leq 2^k$, sejam $I_j^{k,2} = [(j-1)2^{-k+1}\pi, j2^{-k+1}\pi)$ e $I_j^{k,1} = [a_{j-1}^k, a_j^k)$, $1 \leq j \leq 2^k - 1$, $I_{2^k}^{k,1} = [a_{2^k-1}^k, a_{2^k}^k]$, onde $0 = a_0^k < a_1^k < \dots < a_{2^k}^k = \pi$ e

$$\int_{a_{j-1}^k}^{a_j^k} \sin t \, dt = \int_{I_j^{k,1}} \sin t \, dt = 2^{-k+1}, \quad 1 \leq j \leq 2^k.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\mathcal{G}_k = \{I_j^{k-1,1} \times I_l^{k,2} : 1 \leq j \leq 2^{k-1}, 1 \leq l \leq 2^k\};$$

$$\mathcal{A}_k = \{\xi(G) : G \in \mathcal{G}_k\}, \mathcal{A}_0 = \{\mathbb{S}^2\};$$

$$\mathcal{C}_k = \{0, 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 1\} \times \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\};$$

$$\mathcal{B}_k = \mathcal{C}_k \setminus \mathcal{C}_{k-1}, k \geq 2, \mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_1.$$

Sejam $n = (n_1, n_2), m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_0^2$. Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \in \mathcal{B}_k$, definimos $n < m$ se e só se $n_1 < m_1$ ou $n_1 = m_1$ e $n_2 < m_2$. Se $n \in \mathcal{B}_k$ e $m \in \mathcal{B}_l$ para $k \neq l$, definimos $n < m$ se e só se $k < l$. A relação $\leq$ definida por $n \leq m$ se e só se $n = m$ ou $n < m$ é um orden total sobre $\mathbb{N}_0^2$. Para $k \in \mathbb{N}_0$ e $x \in \mathbb{S}^2$, sejam

$$R_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} (-1)^{j+1} \chi_{\xi(I_j^{k+1,1} \times [0, 2\pi))}, \quad R_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} (-1)^{j+1} \chi_{\xi([0, \pi] \times I_j^{k+1,2})},$$

onde χ_A é a função característica do conjunto $A \subset \mathbb{S}^2$. Se $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$ com $n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$, então para $i = 1, 2$, definimos

$$\psi_n^{(i)}(x) = R_{n_1}^{(i)}(x) R_{n_2}^{(i)}(x) \cdots R_{n_k}^{(i)}(x), \quad \psi_0^{(i)} = 1.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, a função de Walsh ψ_n é definida por $\psi_n(x) = \psi_{m_1}^{(1)}(x) \psi_{m_2}^{(2)}(x)$ onde $(m_1, m_2) = m = i^{-1}(n)$ e $i : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}$ é a função definida por $i(m) = \#\{k \in \mathbb{N}_0^2 : k \leq m\}$. Para a definição das funções de Walsh sobre $\mathbb{S}^l$, $l \geq 3$, ver [3].

Sejam $X = \mathbb{S}^l \times \mathbb{S}^l \times \dots \times \mathbb{S}^l$ e $d\mu(x)$ a medida produto $dx_1 \times \dots \times dx_n$ (d -vezes). Para $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in X$, definimos a função de Walsh $\psi_{\mathbf{n}}$ sobre X por

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \psi_{n_1}(x_1) \cdots \psi_{n_d}(x_d).$$

Foi demonstrado em [3] que o conjunto $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo em $L^2(\mathbb{S}^l, dx)$. Segue pela Proposição 2.1.1 que $\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(X, \mu)$ e portanto os resultados deste capítulo e dos seguintes valem para esse sistema.

Observação 3.2.8. Considere $A_l, A_l^*, \mathcal{H}_l, \mathcal{H}_l^*, d_l, d_l^*, \mathcal{T}_N$ e $\mathcal{T}_N^*$ como na Observação 1.4.8, $l \in \mathbb{N}$. Para cada $l \in \mathbb{N}$ seja $B_l \subset A_l \setminus A_{l-1}$ com exatamente $(d_l - 1)/2$ elementos e tal que se $\mathbf{k} \in B_l$, então $-\mathbf{k} \notin B_l$. Tomamos $B = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l$ e temos que $\mathbb{Z}^d = B \cup (-B) \cup \{0\}$ e $A_l \setminus A_{l-1} = B_l \cup (-B_l) \cup \{0\}$. O sistema trigonométrico $\{\sqrt{2} \sin(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\}_{\mathbf{m} \in B} \cup \{\sqrt{2} \cos(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\}_{\mathbf{m} \in B} \cup \{1\}$ sobre o toro $\mathbb{T}^d$, é um sistema ortonormal completo $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d}$ em $L^2(\mathbb{T}^d)$ (ver [46]) que verifica

$$1 \leq \|\phi_{\mathbf{m}}\|_{\infty} \leq \sqrt{2}, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d.$$

O subespaço $\mathcal{H}_l$ é o subespaço gerado pelas funções $\sqrt{2} \sin(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})$ e $\sqrt{2} \cos(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})$ para $\mathbf{m} \in B_l$ se $l > 0$, $\mathcal{H}_0 = \{1\}$, e $\dim \mathcal{H}_l = d_l$. O mesmo acontece quando trocamos $\mathcal{H}_l$ por $\mathcal{H}_l^*$ e d_l por d_l^* .

Portanto, todos os resultados obtidos nesta tese são válidos para o sistema trigonométrico. Eles generalizam os resultados para o sistema trigonométrico sobre o toro obtidos em [23] e [47].

4 n -Larguras de operadores específicos

Neste capítulo, aplicamos os resultados dos capítulos precedentes na obtenção de estimativas para n -larguras de Kolmogorov de conjuntos de funções sobre Ω^d , associados a operadores multiplicadores específicos.

Sejam $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde a função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\log_2 t)^{-\xi}$, $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi \geq 0$ e sejam $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde a função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, com $\gamma > 0$, $r > 0$. Estudamos estimativas superiores e inferiores para as n -larguras dos operadores multiplicadores associados a essas sequências. Várias das estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem.

No caso em que o sistema ortonormal considerado é o sistema de Walsh $\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d}$ sobre I^d , os conjuntos $\Lambda^{(1)}U_p$, $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis e $\Lambda^{(2)}U_p$, $\Lambda_*^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis, no sentido diádico. Com analogia com o caso clássico, podemos dizer que se $\xi = 0$, $\Lambda^{(1)}U_p$ e $\Lambda_*^{(1)}U_p$ são classes de tipo Sobolev.

Estudos análogos aos realizados neste capítulo para operadores multiplicadores de funções definidas sobre espaços homogêneos e sobre o toro foram realizados em [23, 24, 46]. Os resultados deste capítulo sobre n -larguras se encontram publicados em [8].

4.1 n -Larguras de operadores do primeiro tipo

Nesta seção obtemos estimativas inferiores e superiores para n -larguras de Kolmogorov dos operadores multiplicadores $\Lambda^{(1)}$ e $\Lambda_*^{(1)}$.

Proposição 4.1.1. *Seja $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, com $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, onde $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\log_2 t)^{-\xi}$ para $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi > 0$. Então $\Lambda^{(1)}$ é um operador limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$.*

Demonstração. Dada $\varphi \in U_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\varphi_n = \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^n \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}.$$

Temos que

$$\Lambda^{(1)}\varphi_n = \sum_{l=2}^n \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}},$$

e assim como $|\widehat{\varphi}(\mathbf{k})| \leq K_2 \|\varphi\|_1 \leq K_2$ e $d_l \asymp l^{d-1}$, então para $m, n \in \mathbb{N}$ com $n < m$, segue pela Proposição 1.4.6 que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^{(1)}\varphi_m - \Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 &= \int_{\Omega^d} \left| \Lambda^{(1)}\varphi_m(\mathbf{x}) - \Lambda^{(1)}\varphi_n(\mathbf{x}) \right|^2 d\mu^d(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\Omega^d} \left(\sum_{l=n+1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mu^d(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{l=n+1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \sum_{j=n+1}^m \sum_{\mathbf{r} \in A_j \setminus A_{j-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{r}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \widehat{\varphi}(\mathbf{r}) \int_{\Omega^d} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) d\mu^d(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{l=n+1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}^2 |\widehat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \\
&\leq K_2^2 \sum_{l=n+1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}}^2 \\
&\leq K_2^2 \sum_{l=n+1}^m |\lambda(l-1)|^2 \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} 1 \\
&= K_2^2 \sum_{l=n+1}^m |\lambda(l-1)|^2 d_l \\
&\leq C_1 \sum_{l=n+1}^m (l-1)^{-2\gamma} (\log_2(l-1))^{-2\xi} l^{d-1} \\
&\leq C_2 \sum_{l=n+1}^m l^{-2\gamma+d-1} (\log_2 l)^{-2\xi} \\
&\leq C_2 \sum_{l=n}^m l^{-2\gamma+d-1}. \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Agora, se $f(x) = x^{-a}$, onde $a > 1$, então

$$\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-a} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right) = \frac{1}{a-1} < \infty.$$

Desta forma, como $\int_1^\infty f(x) dx$ converge, então pelo Teste da Integral, a série numérica $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty n^{-a}$ também converge. Assim, tomando $\gamma > d/2$, temos que $a = -(-2\gamma + d - 1) > 1$ e portanto a série $\sum_{l=1}^\infty l^{-2\gamma+d-1}$ converge. Segue então que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{(1)}\varphi_m - \Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 = 0,$$

e assim $\{\Lambda^{(1)}\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega^d)$, e portanto é convergente em $L^2(\Omega^d)$. Escrevemos

$$\Lambda^{(1)}\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{(1)}\varphi_n = \sum_{l=2}^\infty \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}, \tag{4.2}$$

onde a convergência ocorre na norma de $L^2(\Omega^d)$. Logo, temos de (4.1)

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{(1)}\varphi\|_2^2 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{(1)}\varphi_n \right\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda^{(1)}\varphi_n\|_2^2 \\ &\leq C_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n l^{-2\gamma+d-1} = C_2 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2\gamma+d-1} = C.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda^{(1)}\varphi\|_2 \leq C,$$

o que garante a limitação do operador $\Lambda^{(1)}$ de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$. $\square$

Observação 4.1.2. De modo análogo é possível demonstrar que o operador $\Lambda_*^{(1)}$ é limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$.

Teorema 4.1.3. Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador definido na Proposição 4.1.1. Então para $\gamma > \max\{d/2, d/p\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$, e todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)+} (\log_2 m)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 m)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Como $\gamma > d/2$, segue da Proposição 4.1.1 que o operador multiplicador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$, condição necessária para aplicar o Corolário 3.2.5. Sejam M , N_k , m_k , ϵ e β como na Observação 3.2.2.

Fixemos $\delta > 0$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2 : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\lambda_1(t) = t^{-\gamma}$ e $\lambda_2(t) = t^{-\gamma-\delta}$. Sejam $a > 1$ e $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $2\lambda(b) = \lambda(a)$, $2\lambda_1(b_1) = \lambda_1(a)$ e $2\lambda_2(b_2) = \lambda_2(a)$. Como $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ são decrescentes temos $b, b_1, b_2 > a$. Segue que $b_1 = 2^{1/\gamma}a$ e que $b_2 = 2^{1/(\gamma+\delta)}a$. Além disso,

$$\begin{aligned}b_1^{-\gamma} &= \lambda_1(b_1) = 2^{-1}\lambda_1(a) = 2^{-1}a^{-\gamma} \\ &= 2^{-1}a^{-\gamma}(\log_2 a)^{-\xi}(\log_2 a)^{\xi} \\ &= 2^{-1}\lambda(a)(\log_2 a)^{\xi} \\ &= \lambda(b)(\log_2 a)^{\xi} \\ &= b^{-\gamma}(\log_2 b)^{-\xi}(\log_2 a)^{\xi} \\ &= b^{-\gamma} \left(\frac{\log_2 a}{\log_2 b} \right)^{\xi},\end{aligned}$$

assim,

$$b_1 = b \left(\frac{\log_2 b}{\log_2 a} \right)^{\xi/\gamma}.$$

Como $b > a$ temos que $(\log_2 b / \log_2 a) > 1$, e portanto $b_1 > b$. De igual maneira demonstramos que $b > b_2$. Consequentemente

$$2^{1/(\gamma+\delta)}a = b_2 < b < b_1 = 2^{1/\gamma}a. \quad (4.3)$$

Assim tomando $a = N_k$, segue de (4.3) que

$$2^{1/(\gamma+\delta)}N_k < b < 2^{1/\gamma}N_k. \quad (4.4)$$

Por outro lado,

$$N_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N} : 2|\lambda(l)| \leq |\lambda(N_k)|\},$$

e $2\lambda(b) = \lambda(N_k)$. Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $b \in (l-1, l]$. Como λ é decrescente, então

$$2\lambda(l-1) > 2\lambda(b) = \lambda(N_k),$$

o que implica que $l-1 \notin \{l \in \mathbb{N} : 2\lambda(l) \leq \lambda(N_k)\}$. Além disso,

$$2\lambda(l) \leq 2\lambda(b) = \lambda(N_k),$$

portanto $l \in \{l \in \mathbb{N} : 2\lambda(l) \leq \lambda(N_k)\}$. Logo pela definição de ínfimo, $l = N_{k+1}$ e como $b \in (l-1, l]$, segue que

$$N_{k+1} - 1 < b \leq N_{k+1}.$$

Notemos que $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência crescente, pois em caso contrário $N_{k+1} = N_k = m \in \mathbb{N}$. Como $2\lambda(N_{k+1}) \leq \lambda(N_k)$, então, $2\lambda(m) \leq \lambda(m)$, o que é um absurdo. Portanto $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência crescente, o que implica que

$$N_k \leq N_{k+1} - 1 < b \leq N_{k+1} < b + 1.$$

Assim de (4.4),

$$2^{1/(\gamma+\delta)}N_k < N_{k+1} < 2^{1/\gamma}N_k + 1, \quad k \geq 1. \quad (4.5)$$

Como a função $f(x) = x^{d-1}$ é crescente, temos

$$\int_{j-1}^j x^{d-1} dx \leq j^{d-1} \leq \int_j^{j+1} x^{d-1} dx. \quad (4.6)$$

Agora, lembrando que $d_l = \dim \mathcal{H}_l \asymp l^{d-1}$ e usando (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \theta_{N_k, N_{k+1}} &= \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s \asymp \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} s^{d-1} \leq \sum_{s=0}^{N_{k+1}-1} s^{d-1} + N_{k+1}^{d-1} \\ &\leq \sum_{s=0}^{N_{k+1}-1} \int_s^{s+1} x^{d-1} dx + N_{k+1}^{d-1} \\ &\leq \int_0^{N_{k+1}} x^{d-1} dx + N_{k+1}^{d-1} \\ &\leq N_{k+1}^d + N_{k+1}^{d-1} \asymp N_{k+1}^d. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Novamente, usando (4.6)

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k, N_{k+1}} &= \sum_{j=N_{k+1}}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_j \asymp \sum_{j=N_{k+1}}^{N_{k+1}} j^{d-1} \geq \sum_{j=N_{k+1}}^{N_{k+1}} \int_{j-1}^j x^{d-1} dx \\
&= \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1} dx \geq \int_{(N_{k+1}+N_k)/2}^{N_{k+1}} x^{d-1} dx \\
&\asymp N_{k+1}^d - \left(\frac{N_{k+1} + N_k}{2} \right)^d = N_{k+1}^d - \frac{N_{k+1}^d}{2^d} \left(1 + \frac{N_k}{N_{k+1}} \right)^d \\
&= N_{k+1}^d - \frac{N_{k+1}^d}{2^d} \left[1 + d \left(\frac{N_k}{N_{k+1}} \right) + \frac{d(d-1)}{2!} \left(\frac{N_k}{N_{k+1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{N_k}{N_{k+1}} \right)^d \right] \\
&\geq N_{k+1}^d \left[1 - 2^{-d} \left(1 + d 2^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!} 2^{-2/(\gamma+\delta)} + \dots + 2^{-d/(\gamma+\delta)} \right) \right] \\
&= N_{k+1}^d (1 - C_{\gamma, \delta, d}), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue por (4.5). Observemos agora que

$$\begin{aligned}
2^d &= 1 + d + \frac{d(d-1)}{2!} + \dots + d + 1 \\
&> 1 + d 2^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!} 2^{-2/(\gamma+\delta)} + \dots + 2^{-d/(\gamma+\delta)},
\end{aligned}$$

donde

$$1 > 2^{-d} \left(1 + d 2^{-1/(\gamma+\delta)} + \frac{d(d-1)}{2!} 2^{-2/(\gamma+\delta)} + \dots + 2^{-d/(\gamma+\delta)} \right) = C_{\gamma, \delta, d},$$

e obtemos de (4.8) que

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} \gg N_{k+1}^d. \tag{4.9}$$

Segue então de (4.7) e (4.9) que

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} \asymp N_{k+1}^d, \quad k \geq 1. \tag{4.10}$$

Fixando $N_1 = N$, segue do lado direito de (4.5) que

$$N_2 \leq 2^{1/\gamma} N + 1,$$

$$N_3 \leq 2^{1/\gamma} N_2 + 1 \leq 2^{1/\gamma} (2^{1/\gamma} N + 1) + 1 \leq 2^{2/\gamma} N + 1 + 2^{1/\gamma}$$

e, indutivamente, podemos concluir que

$$N_{k+1} \leq 2^{k/\gamma} N + (1 + 2^{1/\gamma} + \dots + 2^{(k-1)/\gamma}) \leq C_\gamma 2^{k/\gamma} N.$$

Do lado esquerdo de (4.5), segue que $2^{1/(\gamma+\delta)} N \leq N_2$, $2^{2/(\gamma+\delta)} N \leq N_3$, e usando indução obtemos que

$$2^{k/(\gamma+\delta)} N \leq N_{k+1},$$

donde

$$2^{k/(\gamma+\delta)} N \leq N_{k+1} \leq C_\gamma 2^{k/\gamma} N, \quad k \geq 1. \tag{4.11}$$

Seja $M = [\epsilon^{-1} \log_2 \theta_{N_1, N_2}]$ como na Observação 3.2.2. Então usando (4.10) e (4.11) temos que $\theta_{N_1, N_2} \asymp N^d$ e como $N^d \asymp n$, segue que $\log_2 \theta_{N_1, N_2} \asymp \log_2 n$. Assim

$$M \asymp \epsilon^{-1} \log_2 N \asymp \epsilon^{-1} \log_2 n.$$

Logo, por (4.10) e (4.11)

$$\begin{aligned} \sigma &= |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\ &\ll N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} (2^{k/\gamma} N)^{d(1/p-1/q)} \\ &= N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} (\log_2 N)^{-\xi} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}, \end{aligned}$$

e como $M \asymp \epsilon^{-1} \log_2 N$, segue que existe uma constante positiva C tal que $M \geq [C\epsilon^{-1} \log_2 N]$, assim

$$\sigma \ll N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} (\log_2 N)^{-\xi} \sum_{k=[C\epsilon^{-1} \log_2 N]}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}. \quad (4.12)$$

Se $|b| < 1$ temos que $\sum_{k=M}^{\infty} b^k = b^M \sum_{k=0}^{\infty} b^k = b^M / (1-b)$. Como $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e $\gamma > d/p$, temos $0 \leq 1/p - 1/q \leq 1$ e $1 - (d/\gamma)(1/p - 1/q) > 0$. Assim

$$\begin{aligned} \sum_{k=[C\epsilon^{-1} \log_2 N]}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))} &\asymp 2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))C\epsilon^{-1} \log_2 N} \frac{1}{1 - 2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}} \\ &= (2^{\log_2 N})^{-C\epsilon^{-1}(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))} \frac{1}{1 - 2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}} \\ &\ll N^{-C\epsilon^{-1}(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))} \end{aligned}$$

e consequentemente para $\gamma/d > (1/p - 1/q)$, obtemos de (4.12)

$$\sigma \ll N^{-\gamma+d(1/p-1/q)-C\epsilon^{-1}(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))} (\log_2 N)^{-\xi}.$$

Tomando

$$0 < \epsilon < \frac{C(1 - (d/\gamma)(1/p - 1/q))}{d(1/p - 1/q)},$$

temos

$$\sigma \ll N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi}. \quad (4.13)$$

Agora, demonstraremos que $\Lambda^{(1)} \in K_{\epsilon, p}$, para algum $\epsilon > 0$. Segue do fato que $M \asymp \epsilon^{-1} \log_2 N$, de (4.10) e de (4.11) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} &= \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1} \log_2 N} 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \\ &\ll \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1} \log_2 N} 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{(2^{k/\gamma} N)^{d/p}}{(2^{1/(\gamma+\delta)} N)^{d/2}} \\ &\ll N^{d(1/p-1/2)} \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1} \log_2 N} 2^{-k(1-\epsilon/2-d/\gamma p)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como $1 - d/\gamma p > 0$, pois $\gamma > d/p$, temos que $t = -(1 - \epsilon/2 - d/\gamma p) < 0$ se $0 < \epsilon/2 < 1 - d/\gamma p$ e consequentemente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\log_2 N} 2^{-k(1-\epsilon/2-d/\gamma p)} &= \sum_{k=1}^{C\epsilon^{-1}\log_2 N} (2^t)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^t)^k = \frac{1}{1-2^t} \\ &= \frac{1}{1-2^{-(1-\epsilon/2-d/\gamma p)}}. \end{aligned}$$

Segue então de (4.14) que

$$\sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \leq C_{\epsilon, p} N^{d(1/p-1/2)}. \quad (4.15)$$

De (4.10) e (4.11) temos que existe uma constante universal C_1 satisfazendo $C_1 2^{d/(\gamma+\delta)} N^d \leq \theta_{N_1, N_2}$ e como $1/p > 1/2$ já que $1 \leq p \leq 2$, segue que

$$N^{d(1/p-1/2)} \leq C_1^{-(1/p-1/2)} 2^{-d(1/p-1/2)/(\gamma+\delta)} \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2}.$$

Portanto de (4.15)

$$\sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \leq C'_{\epsilon, p} \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2}, \quad (4.16)$$

isto é $\Lambda^{(1)} \in K_{\epsilon, p}$. Segue assim do Corolário 3.2.5 que, para $1 \leq p \leq 2$,

$$\begin{aligned} d_{\beta}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) &\ll |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &+ |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/p}. \end{aligned}$$

De (4.13) obtemos

$$d_{\beta}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ll |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} + N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi}.$$

Para $1 \leq k \leq M$ temos de (4.10), (4.11), da definição de M , e do fato que $n \asymp N^d$

$$\begin{aligned} \theta_{N_k, N_{k+1}} &\ll (2^{k/\gamma} N)^d \leq (2^{M/\gamma} N)^d \\ &\leq 2^{(dC \log_2 N)/\gamma \epsilon} N^d \\ &= N^{d+dC/\gamma \epsilon} = (N^d)^{1+C/\gamma \epsilon} \\ &\ll n^{1+C/\gamma \epsilon}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}} \ll \log_2 n^{1+C/\gamma \epsilon} = \left(1 + \frac{C}{\gamma \epsilon}\right) \log_2 n \ll \log_2 n$$

e segue que $\sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2} \ll (\log_2 n)^{1/2}$, donde

$$d_{\beta}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ll |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} + N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi}.$$

Além disso, de (4.10) e (4.11), temos que $\theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \ll N^{d(1/p-1/2)}$ e portanto

$$d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll N^{-\gamma} N^{d(1/p-1/2)} (\log_2 N)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} + N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi}.$$

Agora, como $n \asymp N^d$, segue que $N^{-\gamma} \asymp n^{-\gamma/d}$, $N^{d(1/p-1/2)} \asymp n^{1/p-1/2}$ e $(\log_2 N)^{-\xi} \asymp (\log_2 N^d)^{-\xi} \asymp (\log_2 n)^{-\xi}$. Consequentemente

$$d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} (\log_2 n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (4.17)$$

Da Observação 3.2.2 vem que

$$\beta = \sum_{s=0}^N \dim \mathcal{H}_s + \sum_{j=1}^M m_j \asymp n + \sum_{j=1}^M 2^{-\epsilon j} \theta_{N_1, N_2}.$$

Como $n \asymp N^d$ e $M \asymp \epsilon^{-1} \log_2 N$, segue da definição de β , de (4.10) e (4.11) que

$$\beta \ll N^d + 2^{d/\gamma} N^d \sum_{j=1}^{[C\epsilon^{-1} \log_2 N]} (2^{-\epsilon})^j \ll N^d,$$

isto é, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $\beta \leq C_2 N^d$. Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_2 N^d \leq m \leq C_2 (N+1)^d$. Segue das propriedades de n -larguras e de (4.17) que

$$\begin{aligned} d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) &\leq d_{C_2 N^d}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \\ &\leq d_\beta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \\ &\ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} (\log_2 n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Mas, $N^d \asymp n$ e assim $C_3 n \leq m \leq C_2 (N+1)^d \leq C_4 N^d \leq C_5 n$, donde $m \asymp n$ e portanto

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll m^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} (\log_2 m)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 m)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

para $1 \leq p \leq 2$. O caso $2 \leq p \leq \infty$, segue do fato $\Lambda^{(1)}U_p \subset \Lambda^{(1)}U_2$. $\square$

Teorema 4.1.4. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.1.1. Então para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d} (\log_2 n)^{-\xi} \zeta_n,$$

onde

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2, 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2, q = 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $k, N \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim \mathcal{H}_k$ e $n = \dim \mathcal{T}_N$. Sabemos que $d_k \asymp k^{d-1}$ e $n \asymp N^d$. Assim

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k \right)^{-1/2} &\asymp \left(\sum_{k=1}^N (k^{-\gamma} (\log_2 k)^{-\xi})^{-2} k^{d-1} \right)^{-1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N k^{2\gamma+d-1} (\log_2 k)^{2\xi} \right)^{-1/2} \\ &\gg \left(\sum_{k=1}^N N^{2\gamma+d-1} (\log_2 N)^{2\xi} \right)^{-1/2} = (N^{-\gamma-d/2}) (\log_2 N)^{-\xi} \\ &\asymp n^{-\gamma/d-1/2} (\log_2 n)^{-\xi}, \end{aligned}$$

e assim aplicando o Corolário 3.1.6 para $\rho = 1/2$ obtemos

$$\begin{aligned} d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) &\geq C n^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k \right)^{-1/2} \zeta_n \\ &\gg n^{1/2} n^{-\gamma/d-1/2} (\log_2 n)^{-\xi} \zeta_n \\ &= n^{-\gamma/d} (\log_2 n)^{-\xi} \zeta_n. \end{aligned}$$

Agora sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$ e $[(n-3)/2] \leq m \leq [(n-2)/2]$. Então $n \leq 2m+3 \leq 5m$ e assim

$$\begin{aligned} d_m(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) &\geq d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \\ &\gg n^{-\gamma} (\log_2 n)^{-\xi} \zeta_n \\ &\geq (5m)^{-\gamma} (\log_2 5m)^{-\xi} \zeta_n \\ &\asymp m^{-\gamma} (\log_2 m)^{-\xi} \zeta_m, \end{aligned}$$

e portanto o corolário está demonstrado. $\square$

Observação 4.1.5. Efetuando simples adaptações nas demonstrações é possível mostrar que os Teoremas 4.1.3 e 4.1.4 permanecem válidos quando trocarmos o operador $\Lambda^{(1)}$ por $\Lambda_*^{(1)}$.

Observação 4.1.6. Os resultados desta seção são válidos, em particular, para o sistema de Walsh $\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d}$ sobre I^d ou o sistema de Walsh sobre $\mathbb{S}^l \times \cdots \times \mathbb{S}^l$ ou se é considerado o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$.

Seja $\varphi \in L^1(I^d)$ e seja $m \in \mathbb{N}$, $\gamma > m + d$. Se $\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}$, então

$$\lambda(|\mathbf{k}|) \leq \lambda(l-1) \leq (l-1)^{-\gamma} \leq Cl^{-\gamma}$$

e $k_q \leq l$ para todo $1 \leq q \leq d$ e assim

$$|\lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m = \lambda(|\mathbf{k}|) |\hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m \leq Cl^{-\gamma} \|\varphi\|_1 k_q^m \leq Cl^{-\gamma+m} \|\varphi\|_1.$$

Então,

$$\sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m \leq C \|\varphi\|_1 \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} l^{-\gamma+m} \leq C' l^{-\gamma+m+d-1},$$

e como $-\gamma + m + d - 1 < -1$, temos que

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m \leq C' \sum_{l=2}^{\infty} l^{-\gamma+m+d-1} < \infty.$$

Logo, pelo Corolário 1.5.10 a derivada parcial diádica $\partial^m(\Lambda^{(1)}\varphi)/\partial x_q^m$ existe e

$$\frac{\partial^m}{\partial x_q^m}(\Lambda^{(1)}\varphi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) k_q^m \psi_{\mathbf{k}}.$$

Portanto, a derivada parcial diádica $\partial^m(\Lambda^{(1)}\varphi)/\partial x_q^m(\mathbf{x})$ existe para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$ e todo $1 \leq q \leq d$, se $\gamma > m + d$, isto é, $\Lambda^{(1)}\varphi$ é uma função que possui derivadas parciais até ordem m , no sentido diádico, para toda $\varphi \in L^1(I^d)$, e a série converge na norma de L^p , para $1 \leq p \leq \infty$. Portanto o conjunto $\Lambda^{(1)}U_p$ é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis, no sentido diádico, para qualquer $r > 0$, $\xi \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$.

De modo análogo podemos mostrar que $\Lambda_*^{(1)}U_p$ também é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis, no sentido diádico, para qualquer $r > 0$, $\xi \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$.

4.2 n -Larguras de operadores do segundo tipo

Nesta seção, obtemos estimativas inferiores e superiores para n -larguras de Kolmogorov dos operadores $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$.

Proposição 4.2.1. *Seja $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, com $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, onde $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma, r > 0$. Então $\Lambda^{(2)}$ é um operador multiplicador limitado de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, para $1 \leq p, q \leq \infty$.*

Demonstração. Demonstraremos a limitação do operador $\Lambda^{(2)}$ para $p = 1$ e $q = \infty$ e os demais casos seguirão de imediato das desigualdades entre as normas de $L^p(\Omega^d)$ e $L^q(\Omega^d)$. Dada $\varphi \in U_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\varphi_n = \hat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^n \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}.$$

Temos que

$$\Lambda^{(2)}\varphi_n = \hat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^n \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}},$$

e assim como $d_l \asymp l^{d-1}$ e $|\hat{\varphi}(\mathbf{k})| \leq K_2 \|\varphi\|_1 \leq K_2$, então para $n, m \in \mathbb{N}$, com $n < m$ e $\mathbf{x} \in \Omega^d$,

$$\begin{aligned}
\left| \Lambda^{(2)} \varphi_m(\mathbf{x}) - \Lambda^{(2)} \varphi_n(\mathbf{x}) \right| &= \left| \sum_{l=1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^n \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right| \\
&= \left| \sum_{l=n+1}^m \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right| \\
&\leq \sum_{l=n+1}^m K_2 \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \\
&\leq K_2 \sum_{l=n+1}^m \lambda(l-1) \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} 1 \\
&= K_2 \sum_{l=n+1}^m \lambda(l-1) \#(A_l \setminus A_{l-1}) \\
&= K_2 \sum_{l=n+1}^m e^{-\gamma(l-1)^r} d_l \\
&\leq C_1 \sum_{l=n}^m e^{-\gamma l^r} l^{d-1}.
\end{aligned}$$

Para $a \in \mathbb{N}$, $b > 0$ e $r > 0$, segue do Teorema de L'Hôpital que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx^r}} = 0.$$

Portanto, dado $C > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $x \geq n_0$,

$$\frac{x^a}{e^{bx^r}} \leq C. \quad (4.18)$$

Assim, tomando $a = d + 1$ e $b = \gamma$, obtemos para todo $l \geq n_0$ que $e^{-\gamma l^r} \leq C l^{-d-1}$. Consequentemente, se $n \geq n_0$ e $\mathbf{x} \in \Omega^d$,

$$\left| \Lambda^{(2)} \varphi_m(\mathbf{x}) - \Lambda^{(2)} \varphi_n(\mathbf{x}) \right| \leq C' \sum_{l=n}^m l^{-2}. \quad (4.19)$$

Logo,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left| \Lambda^{(2)} \varphi_m(\mathbf{x}) - \Lambda^{(2)} \varphi_n(\mathbf{x}) \right| = 0,$$

assim $\{\Lambda^{(2)} \varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto convergente em $\mathbb{R}$.

Escrevemos

$$\Lambda^{(2)} \varphi(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{(2)} \varphi_n(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

para todo $\mathbf{x} \in \Omega^d$. Logo para todo $\mathbf{x} \in \Omega^d$, por (4.19) temos

$$\left| \Lambda^{(2)} \varphi(\mathbf{x}) \right| = \left| \hat{\varphi}(\mathbf{0}) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \right| \leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} = C_2.$$

Portanto,

$$\|\Lambda^{(2)}\varphi\|_\infty \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^d} |\Lambda^{(2)}\varphi(\mathbf{x})| \leq C_2,$$

o que garante a limitação do operador $\Lambda^{(2)}$ de $L^1(\Omega^d)$ em $L^\infty(\Omega^d)$ e consequentemente de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, para $1 \leq p, q \leq \infty$. $\square$

Observação 4.2.2. De modo análogo podemos demonstrar que o operador $\Lambda_*^{(2)}$ é limitado de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, para $1 \leq p, q \leq \infty$.

Teorema 4.2.3. Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador multiplicador definido na Proposição 4.2.1. Consideremos as sequências $\vartheta_n = \dim \mathcal{T}_n$, $\omega_n = \vartheta_n - \vartheta_n^{1-r/d} - 1$ e seja

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2, 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2, q = 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Então,

$$d_{[\omega_n]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\gamma(n+1)^r} \zeta_n, \quad 0 < r \leq d, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.21)$$

$$d_{\vartheta_n-2}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg n^{-r/2+d/2} e^{-\gamma(n+1)} \zeta_n, \quad r \geq d, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}n^{r/d}} \zeta_n, \quad 0 < r \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.23)$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d2^{d-1}\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \right)^{r/d}.$$

Demonstração. Sejam $N \in \mathbb{N}$, $n = \dim \mathcal{T}_N$ e $\theta, \eta, r \in \mathbb{R}$, $\theta, \eta, r > 0$. Se $\eta \geq r - 1$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N e^{\theta k^r} k^\eta &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\theta r} k^{1-r} k^\eta e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\theta r} k^{1-r+\eta} \right) e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} \\ &\leq (\theta r)^{-1} N^{1-r+\eta} \sum_{k=1}^N e^{\theta k^r} \theta r k^{r-1} \ll N^{1-r+\eta} \int_1^{N+1} e^{\theta x^r} \theta r x^{r-1} dx \\ &\ll N^{1-r+\eta} e^{\theta(N+1)^r}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

e se $\eta < r - 1$ temos

$$\sum_{k=1}^N e^{\theta k^r} k^\eta \ll e^{\theta(N+1)^r}. \quad (4.25)$$

Agora,

$$\begin{aligned} (N+1)^r &= N^r(1+N^{-1})^r = N^r \left(1 + r \frac{1}{N} + \frac{r(r-1)}{2!} \frac{1}{N^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \frac{1}{N^3} + \dots \right) \\ &= N^r + rN^{r-1} \left(1 + \frac{(r-1)}{2!} \frac{1}{N} + \frac{(r-1)(r-2)}{3!} \frac{1}{N^2} + \dots \right) \\ &= N^r + rN^{r-1}S_N \leq N^r + C_r N^{r-1}, \end{aligned}$$

onde S_N é a soma de uma série que passa a ser alternada a partir de um determinado termo e portanto converge. Assim se $0 < r \leq 1$

$$e^{\theta(N+1)^r} \leq e^{\theta(N^r + C_r N^{r-1})} = e^{\theta C_r N^{r-1}} e^{\theta N^r} \leq e^{\theta C_r} e^{\theta N^r} = C e^{\theta N^r},$$

e segue então de (4.24) que se $\eta \geq r-1$,

$$\sum_{k=1}^N e^{\theta k^r} k^\eta \ll N^{1-r+\eta} e^{\theta N^r}, \quad 0 < r \leq 1. \quad (4.26)$$

Da Proposição 1.4.6 temos que

$$\left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right) N^d \leq n \leq \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right) N^d + C_1 N^{d-1}.$$

Logo

$$N^r \leq \left(\frac{d2^{d-1}\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \right)^{r/d} n^{r/d} \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned} n^{r/d} &\leq \left(\left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right) N^d + C_1 N^{d-1} \right)^{r/d} \\ &= \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right)^{r/d} N^r \left(1 + \frac{C_1}{C_d N} \right)^{r/d}, \end{aligned}$$

onde $C_d = 2^{1-d}\pi^{d/2}/(d\Gamma(d/2))$. Temos que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{C_1}{C_d N} \right)^{r/d} &= 1 + \frac{r}{d} \frac{C_1}{C_d N} + \frac{(r/d)(r/d-1)}{2!} \left(\frac{C_1}{C_d N} \right)^2 \\ &\quad + \frac{(r/d)(r/d-1)(r/d-2)}{3!} \left(\frac{C_1}{C_d N} \right)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{r}{d} \frac{C_1}{C_d N} \left(1 + \frac{r/d-1}{2} \frac{C_1}{C_d N} + \frac{(r/d-1)(r/d-2)}{3!} \left(\frac{C_1}{C_d N} \right)^2 + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{r}{d} \frac{C_1}{C_d N} S_N, \end{aligned}$$

onde S_N é a soma de uma série que passa a ser alternada a partir de um determinado termo e logo é convergente. Portanto para $r > 0$,

$$n^{r/d} \leq \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right)^{r/d} N^r \left(1 + \frac{r}{d} \frac{C_1}{C_d N} S_N \right) \leq \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \right)^{r/d} N^r + C_2 N^{r-1}. \quad (4.28)$$

Assim, usando (4.27), (4.28) e o fato de que $n \asymp N^d$, obtemos

$$-\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2^{1-d}\pi^{d/2}}\right)^{r/d} \gamma n^{r/d} \leq -\gamma N^r \leq -\left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2^{1-d}\pi^{d/2}}\right)^{r/d} \gamma n^{r/d} + C'_2 \gamma n^{(r-1)/d}.$$

Denotando $\mathcal{R} = \gamma(d2^{d-1}\Gamma(d/2)/\pi^{d/2})^{r/d}$ vem que

$$-\mathcal{R}n^{r/d} \leq -\gamma N^r \leq -\mathcal{R}n^{r/d} + C_3 n^{(r-1)/d}, \quad (4.29)$$

para todo $r > 0$, onde a constante C_3 depende somente de r, d e γ . As estimativas acima são mantidas se colocarmos $N + 1$ no lugar de N . Seja $\rho = 1 - n^{-r/d}$. Segue de (4.26) e do fato que $d_l \asymp l^{d-1}$, que se $0 < r \leq 1$,

$$\begin{aligned} (1 - \rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} &\asymp (n^{-r/d})^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N e^{2\gamma l^r} l^{d-1} \right)^{-1/2} \\ &\gg n^{-r/2d+1/2} (N^{d-r} e^{2\gamma N^r})^{-1/2} \\ &= n^{-r/2d+1/2} N^{(r-d)/2} e^{-\gamma N^r} \\ &= n^{-r/2d+1/2} (N^d)^{(r-d)/2d} e^{-\gamma N^r} \\ &\gg n^{-r/2d+1/2} n^{r/2d-1/2} e^{-\gamma N^r} \\ &= e^{-\gamma N^r}, \end{aligned}$$

segue assim do Corolário 3.1.6 e (4.29) que

$$\begin{aligned} d_{[n-n^{1-r/d}-1]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &= d_{[\rho n-1]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \\ &\gg C(1 - \rho)^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \zeta_n \\ &\gg e^{-\gamma N^r} \zeta_n \\ &\gg e^{-\mathcal{R}n^{r/d}} \zeta_n. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como $\omega_N = \vartheta_N - \vartheta_N^{1-r/d} - 1$, onde $\vartheta_N = \dim \mathcal{T}_N = n$, obtemos

$$d_{[\omega_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}} \zeta_{\vartheta_N},$$

e como $\vartheta_N = \dim \mathcal{T}_N \asymp N^d$, segue que $(\log_2 \vartheta_N)^{-1/2} \asymp (\log_2 N^d)^{-1/2} = (d \log_2 N)^{-1/2} \asymp (\log_2 N)^{-1/2}$, donde $\zeta_{\vartheta_N} \asymp \zeta_N$ e assim

$$d_{[\omega_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}} \zeta_N, \quad 0 < r \leq 1. \quad (4.31)$$

Agora, seja $0 < r \leq d$. Então

$$\begin{aligned} (1 - n^{-r/d})^{r/d} &= 1 - \frac{r}{d} n^{-r/d} + \frac{r(r-d)}{2!d^2} (n^{-r/d})^2 - \frac{r(r-d)(r-2d)}{3!d^3} (n^{-r/d})^3 + \dots \\ &= 1 - n^{-r/d} \frac{r}{d} \left(1 - \frac{(d-r)}{2!d} n^{-r/d} + \frac{(d-r)(2d-r)}{3!d^2} (n^{-r/d})^2 + \dots \right) \\ &= 1 - n^{-r/d} S_n. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \frac{d-r}{2!d} \leq \frac{1}{2}, \\
 & \bullet \quad \frac{(d-r)(2d-r)}{3!d^2} = \frac{d-r}{2d} \frac{2d-r}{3d} \leq \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \\
 & \bullet \quad \frac{(d-r)(2d-r)(3d-r)}{4!d^3} = \frac{d-r}{2d} \frac{2d-r}{3d} \frac{3d-r}{4d} \leq \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \\
 & \bullet \quad \frac{(d-r)(2d-r)(3d-r) \cdots (kd-r)}{(k+1)!d^k} = \frac{d-r}{2d} \frac{2d-r}{3d} \frac{3d-r}{4d} \cdots \frac{kd-r}{(k+1)d} \\
 & \leq \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \cdots \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 0 \leq S_n & \leq \frac{r}{d} \left(1 - \frac{1}{2}n^{-r/d} + \frac{1}{3}(n^{-r/d})^2 - \frac{1}{4}(n^{-r/d})^3 + \cdots \right) \\
 & < \frac{r}{d} \sum_{k=0}^{\infty} (n^{-r/d})^k = \frac{r}{d} \frac{1}{1 - n^{-r/d}},
 \end{aligned}$$

e como para $n \geq 2$, temos $1/(1-n^{-r/d}) \leq 1/(1-2^{-r/d})$, segue que $S_n \leq r/(d(1-2^{-r/d})) = C_r$.

Obtemos portanto de (4.32), para $0 < r \leq d$ e $n \geq 2$, que

$$(1 - n^{-r/d})^{r/d} \geq 1 - C_r n^{-r/d}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\omega_N + 1)^{r/d} &= (n - n^{1-r/d})^{r/d} = n^{r/d} (1 - n^{-r/d})^{r/d} \\
 &\geq n^{r/d} (1 - n^{-r/d} C_r) = \vartheta_N^{r/d} - C_r,
 \end{aligned}$$

e assim

$$e^{-\mathcal{R}(\omega_N+1)^{r/d}} \leq e^{-\mathcal{R}(\vartheta_N^{r/d}-C_r)} \ll e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}}. \quad (4.33)$$

Segue então de (4.31) que para $0 < r \leq 1$

$$d_{[\omega_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}} \zeta_N \gg e^{-\mathcal{R}(\omega_N+1)^{r/d}} \zeta_N. \quad (4.34)$$

Agora, consideremos $0 < r \leq 1$ e seja $f(x) = (N+x)^r$. Temos que f é claramente contínua em $[0, 1]$, derivável em $(0, 1)$ e assim pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)$. Logo

$$(N+1)^r - N^r = r(N+c)^{r-1} < rN^{r-1} \leq r.$$

Portanto como $1 < e^{\gamma(N+1)^r}/e^{\gamma N^r} \leq e^{\gamma r}$, segue que

$$1 < \frac{e^{-\gamma N^r}}{e^{-\gamma(N+1)^r}} \leq e^{\gamma r}. \quad (4.35)$$

De (4.29), (4.30), (4.31) e (4.35) temos

$$d_{[\omega_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\gamma(N+1)^r} \zeta_{N+1} \gg e^{-\gamma N^r} \zeta_N \gg e^{-\mathcal{R}n^{r/d}} \zeta_N = e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}} \zeta_N,$$

e logo usando (4.34) obtemos

$$d_{[\omega_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d}} \zeta_N \gg e^{-\mathcal{R}(\omega_{N+1})^{r/d}} \zeta_N. \quad (4.36)$$

Agora, se $k \in \mathbb{N}$ e $[\omega_N] < k \leq [\omega_{N+1}]$, então segue das propriedades das n -larguras, de (4.35) e de (4.36) que

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg d_{[\omega_{N+1}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}(\omega_{N+1})^{r/d}} \zeta_N \gg e^{-\mathcal{R}k^{r/d}} \zeta_N \gg e^{-\mathcal{R}k^{r/d}} \zeta_k,$$

e assim fica demonstrado (4.23).

Se $0 < r \leq d$, segue pelo Corolário 3.1.6 e por (4.24) que

$$\begin{aligned} d_{[\omega_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\asymp (n^{-r/d})^{1/2} n^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N e^{2\gamma l^r} l^{d-1} \right)^{-1/2} \zeta_n \\ &\gg n^{-r/2d+1/2} (N^{d-r} e^{2\gamma(N+1)^r})^{-1/2} \zeta_n \\ &\asymp e^{-\gamma(N+1)^r} \zeta_N. \end{aligned}$$

Se $r > d$, usando (4.25) obtemos

$$d_{[\omega_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg N^{-r/2+d/2} e^{-\gamma(N+1)^r} \zeta_N.$$

Como $\vartheta_N - 2 < \omega_N < \vartheta_N - 1$, então $[\omega_N] = \vartheta_N - 2$ e assim

$$d_{\vartheta_N-2}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg N^{-r/2+d/2} e^{-\gamma(N+1)^r} \zeta_N.$$

Portanto obtemos (4.21) e (4.22), concluindo a demonstração. $\square$

Teorema 4.2.4. *Sejam $\Lambda^{(2)}$ e ϑ_k como no Teorema 4.2.3. Então para $\gamma > 0$, $0 < r \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$, e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{R}n^{r/d}} n^{(1-r/d)(1/p-1/2)_+} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \quad (4.37)$$

e para todo $r > 1$ e todo $n \in \mathbb{N}$

$$d_{\vartheta_n}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma n^r} \begin{cases} n^{(d-1)(1/p-1/q)}, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ n^{(d-1)(1/2-1/q)}, & 2 \leq p, q \leq \infty, \end{cases} \quad (4.38)$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d2^{d-1}\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \right)^{r/d}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente $0 < r \leq 1$. Nosso intuito é utilizar o Corolário 3.2.5. Para isso devemos ter $\Lambda^{(2)}$ limitado de $L^1(\Omega^d)$ em $L^2(\Omega^d)$, o que é garantido pela Proposição 4.2.1. Sejam $M, N_k, m_k, \epsilon, \beta$ como na Observação 3.2.2. Por outro lado, seja $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda(x) = e^{-\gamma x^r}$, para $\gamma > 0$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, seja $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $2\lambda(x_k) = \lambda(N_k)$. Então temos

$$x_k = \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{1/r}.$$

Da definição de N_{k+1} temos que $N_k < x_k \leq N_{k+1} < x_k + 1$. Portanto

$$\left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{1/r} \leq N_{k+1} < \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{1/r} + 1. \quad (4.39)$$

Temos que

$$\begin{aligned} N_{k+1}^r &< \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \left[1 + \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{-1/r} \right]^r \\ &= \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \left[1 + r \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{-1/r} + \frac{r(r-1)}{2!} \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{-2/r} + \dots \right] \\ &\leq \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right) + C_1 \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{1-1/r}. \end{aligned}$$

Como $0 < r \leq 1$, temos $1 - 1/r \leq 0$, de onde $(N_k^r + \ln 2/\gamma)^{1-1/r} \leq 1$ e portanto

$$N_{k+1}^r \leq N_k^r + C_2.$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \leq N_{k+1}^r \leq N_k^r + C_2. \quad (4.40)$$

Agora, usando (4.40) de forma recorrente e o fato de que $N_1 = N$, obtemos

$$N^r + k \frac{\ln 2}{\gamma} \leq N_{k+1}^r \leq N^r + C_2 k. \quad (4.41)$$

De (4.39), obtemos

$$N_{k+1} \asymp \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{1/r} = N_k \left(1 + \frac{\ln 2}{\gamma} N_k^{-r} \right)^{1/r}.$$

Como para N_k suficientemente grande temos

$$\left| \frac{\ln 2}{\gamma} N_k^{-r} \right| < 1,$$

segue que

$$N_{k+1} \asymp N_k \left(1 + \frac{\ln 2}{r\gamma} N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2\gamma^2} N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3\gamma^3} N_k^{-3r} + \dots \right)$$

e assim

$$N_{k+1} - N_k \asymp N_k \left(\frac{\ln 2}{r\gamma} N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2\gamma^2} N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3\gamma^3} N_k^{-3r} + \dots \right)$$

onde a série binomial acima passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Logo,

$$N_{k+1} - N_k \asymp N_k^{1-r},$$

e de modo análogo é possível mostrarmos que

$$N_{k+1}^d - N_k^d \asymp N_k^{d-r} \text{ e } N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1} \asymp N_k^{d-r-1}.$$

Como a função $f(x) = x^{d-1}$ é crescente, temos

$$\int_{j-1}^j x^{d-1} dx \leq j^{d-1} \leq \int_j^{j+1} x^{d-1} dx. \quad (4.42)$$

Lembrando que $d_l \asymp l^{d-1}$ e usando (4.42), obtemos

$$\begin{aligned} \theta_{N_k, N_{k+1}} &= \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} d_l \asymp \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} l^{d-1} = \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}-1} l^{d-1} + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\ &\leq \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}-1} \int_l^{l+1} x^{d-1} dx + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\ &= \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1} dx + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\ &\asymp (N_{k+1}^d - N_k^d) + (N_{k+1}^{d-1} - N_k^{d-1}) \\ &\asymp N_k^{d-r} + N_k^{d-r-1} = N_k^{d-r} (1 + N_k^{-1}) \asymp N_k^{d-r} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_{N_k, N_{k+1}} &= \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} d_l \asymp \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} l^{d-1} \geq \sum_{l=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{l-1}^l x^{d-1} dx \\ &= \int_{N_k}^{N_{k+1}} x^{d-1} dx \asymp N_{k+1}^d - N_k^d \asymp N_k^{d-r}, \end{aligned}$$

logo

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} \asymp N_k^{d-r}. \quad (4.43)$$

Obtemos de (4.41) e (4.43) que para todo $\epsilon > 0$ e k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{r/(d-r)} &\asymp \left(\frac{N_k^{d-r}}{N^{d-r}} \right)^{r/(d-r)} = N^{-r} N_k^r \\ &\leq N^{-r} (N^r + C_2(k-1)) \\ &\leq N^{-r} (N^r + C_2 k) = 1 + C_2 k N^{-r}. \end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, existe $k_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $2^{\delta k} \geq 1 + C_2 k N^{-r}$, se $k \geq k_\delta$. Assim, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que para $k \geq k_\delta$

$$\left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{r/(d-r)} \leq C_3 2^{\delta k},$$

e logo tomando $\delta' = \delta(d-r)/r$, obtemos que para $k \geq k_\delta$

$$\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \leq C_4 2^{\delta' k}. \quad (4.44)$$

Suponhamos $1 \leq p \leq 2$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{k_\delta-1} 2^{-k(1-\epsilon/2)} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p} \\ &\quad + C_4^{1/p} \sum_{k=k_\delta}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} 2^{(\delta'/p)k} \\ &\leq C'_{\epsilon, p, \delta} + C_4^{1/p} \sum_{k=k_\delta}^M 2^{-k(1-\epsilon/2-\delta'/p)} \\ &\leq C_5, \end{aligned}$$

onde a constante C_5 depende somente de ϵ , p e δ , e ϵ e δ são escolhidos de forma que $\epsilon/2 + \delta'/p < 1$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} &= \sum_{k=1}^M 2^{-k(1-\epsilon/2)} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p} \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \\ &\leq C_5 \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2}, \end{aligned}$$

e assim $\Lambda^{(2)} \in K_{\epsilon, p}$. Portanto pelo Corolário 3.2.5 temos

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) &\leq C_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\quad + C_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Agora, por (4.43) e (4.44) segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} &= |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/q} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}}{\theta_{N_1, N_2}} \right)^{1/p-1/q} \\
&\leq C_6 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} 2^{\delta'' k} \\
&= C_6 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} (2^{-(1-\delta'')})^k \\
&= C_6 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} (2^{-(1-\delta'')})^{M+1} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-(1-\delta'')})^j \\
&= C_6 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} (2^{-(1-\delta'')})^{M+1} \frac{1}{1 - 2^{-(1-\delta'')}} \\
&\leq C_7 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} (2^{-(1-\delta'')})^{M+1},
\end{aligned}$$

onde $\delta'' = \delta'(1/p - 1/q)$, $\delta'' < 1$. Na Observação 3.2.2 temos que $M = \lceil \epsilon^{-1} \log_2 \theta_{N_1, N_2} \rceil = \epsilon^{-1} \log_2 \theta_{N_1, N_2}$ e $\theta_{N_1, N_2} = N^{d-r}$, portanto

$$\begin{aligned}
|\lambda(N)| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} &\leq C_7 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} (2^{-(1-\delta'')})^{C_8(\log_2 \theta_{N_1, N_2})/\epsilon} \\
&\leq C_7 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} (2^{\log_2 \theta_{N_1, N_2}})^{-C_8(1-\delta'')/\epsilon} \\
&= C_7 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} \theta_{N_1, N_2}^{-C_8(1-\delta'')/\epsilon} \\
&\leq C_9 |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/q)} N^{-(d-r)C_8(1-\delta'')/\epsilon} \\
&= C_9 |\lambda(N)| N^{(d-r)[(1/p-1/q)-C_8(1-\delta'')/\epsilon]} \\
&\leq C_9 |\lambda(N)|,
\end{aligned}$$

se $(1/p - 1/q) - C_8(1 - \delta'')/\epsilon < 0$, ou seja $0 < \epsilon < C_8(1 - \delta'')/(p^{-1} - q^{-1})$. Então de (4.43) e (4.45) segue que

$$\begin{aligned}
d_{\beta}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\leq C'_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \theta_{N_1, N_2}^{1/p-1/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\quad + C'_{\epsilon, p} |\lambda(N)| \\
&\leq C'_{\epsilon, p} C_{10} |\lambda(N)| N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= C'_{\epsilon, p} C_{10} e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

logo

$$d_{\beta}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (4.46)$$

Usando (4.41) e (4.43), obtemos

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} \asymp N_k^{d-r} = (N_k^r)^{(d-r)/r} \leq (N^r + C_2(k-1))^{(d-r)/r},$$

e como $M \leq \epsilon^{-1} \log_2 \theta_{N_1, N_2}$, $\theta_{N_1, N_2} \asymp N^{d-r}$, $N^d \asymp n$, $n = \vartheta_N = \dim \mathcal{T}_N$ e $1 \leq k \leq M$, então

$$\begin{aligned} \log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}} &\ll \frac{d-r}{r} \log_2(N^r + C_2(k-1)) \ll \log_2(N^r + C_2M) \\ &\ll \log_2\left(N^r + \frac{C_2 \log_2 \theta_{N_1, N_2}}{\epsilon}\right) \ll \log_2\left(N^r + \frac{C_2 \log_2 N^{d-r}}{\epsilon}\right) \\ &= \log_2(N^r + C_{11} \log_2 N) \leq \log_2(N^r + C_{11}N) \\ &\ll \log_2(N^{r+1}) \asymp \log_2 N^d \asymp \log_2 n. \end{aligned}$$

Assim de (4.46)

$$d_\beta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (4.47)$$

Segue da Observação 3.2.2, de (3.14) e de (4.43), que

$$\begin{aligned} \beta &= m_0 + \sum_{k=1}^M m_k = \sum_{s=0}^N \dim \mathcal{H}_s + \sum_{k=1}^M m_k \\ &\leq n + C_\epsilon \theta_{N_1, N_2} \leq n + C_{12} N^{d-r} \end{aligned}$$

e como $N^d \asymp n$, obtemos que $\beta \leq n + C_{13} n^{1-r/d}$. Logo por Teorema 1.7.1 e (4.47) temos

$$d_{[n+C_{13}n^{1-r/d}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (4.48)$$

Tomamos $\vartheta_N = n = \dim \mathcal{T}_N$, $\tau_N = n + C_{13} n^{1-r/d}$ e por (4.29) temos

$$-\gamma N^r \leq -\mathcal{R} n^{r/d} + \overline{C}_3 n^{(r-1)/d}.$$

Como $0 < r \leq 1$, temos que $\overline{C}_3 n^{(r-1)/d} \leq \overline{C}_3$, portanto $-\gamma N^r \leq -\mathcal{R} n^{r/d} + \overline{C}_3$. Assim,

$$\begin{aligned} -\gamma N^r + \mathcal{R} \tau_N^{r/d} &\leq -\mathcal{R} n^{r/d} + \mathcal{R} \tau_N^{r/d} + \overline{C}_3 \\ &= -\mathcal{R} \vartheta_N^{r/d} + \mathcal{R} \tau_N^{r/d} + \overline{C}_3 \\ &= -\mathcal{R} \vartheta_N^{r/d} + \mathcal{R} (\vartheta_N + C_{13} \vartheta_N^{1-r/d})^{r/d} + \overline{C}_3 \\ &= -\mathcal{R} \vartheta_N^{r/d} + \mathcal{R} \vartheta_N^{r/d} (1 + C_{13} \vartheta_N^{-r/d})^{r/d} + \overline{C}_3 \\ &= \mathcal{R} \vartheta_N^{r/d} (-1 + (1 + C_{13} \vartheta_N^{-r/d})^{r/d}) + \overline{C}_3. \end{aligned}$$

Para N suficientemente grande temos que $|C_{13} N^{-r/d}| < 1$ e assim

$$\begin{aligned} (1 + C_{13} \vartheta_N^{-r/d})^{r/d} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/d)(r/d-1) \dots (r/d-k+1)}{k!} (C_{13} \vartheta_N^{-r/d})^k \\ &\leq 1 + C_{13} \frac{r}{d} \vartheta_N^{-r/d} S_N, \end{aligned}$$

onde S_N é a soma de uma série binomial alternada. Portanto,

$$-\gamma N^r + \mathcal{R}\tau_N^{r/d} \leq -\mathcal{R}\vartheta_N^{r/d} \left(C_{13} \frac{r}{d} \vartheta_N^{-r/d} S_N \right) = \frac{\mathcal{R}C_{13}r}{d} S_N \leq C_{14}. \quad (4.49)$$

Seja agora $l \in \mathbb{N}$ tal que $[\tau_N] \leq l \leq [\tau_{N+1}]$. Para $0 < r \leq 1$, segue de (4.35) que

$$1 < \frac{e^{-\gamma N^r}}{e^{-\gamma(N+1)^r}} \leq e^{\gamma r}.$$

Assim, usando o Teorema 1.7.1, (4.48) e (4.49)

$$\begin{aligned} d_l(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\leq d_{[\tau_N]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \\ &\ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \vartheta_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\gamma(N+1)^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \vartheta_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\gamma(N+1)^r} (N^d)^{(d-r)(1/p-1/2)/d} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \vartheta_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\gamma(N+1)^r} (\vartheta_N)^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \vartheta_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\mathcal{R}(\tau_{N+1})^{r/d}} (\tau_N)^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \tau_N)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll e^{-\mathcal{R}l^{r/d}} l^{(1-r/d)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 l)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado para $0 < r \leq 1$ e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. O caso $2 \leq p \leq \infty$ segue do fato que $\Lambda U_p \subset \Lambda U_2$.

Para o caso $r > 1$ aplicamos o Teorema 3.2.1 ao invés do Corolário 3.2.5. Observamos que a função $f(x) = (k+x)^r$ é contínua em $[0, 1]$, derivável em $(0, 1)$ e assim pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 \leq c \leq 1$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)$, ou seja $(k+1)^r - k^r = r(k+c)^{r-1}$, e como $r > 1$ obtemos $(k+1)^r - k^r \geq rk^{r-1}$. Mostrarmos então que $e\lambda(k+1) \leq e^{-\gamma rk^{r-1}+1}\lambda(k)$. Como $e^{-\gamma rk^{r-1}+1}$ é uma função decrescente na variável k , existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\gamma rk^{r-1}} \leq 1$, para todo $k \geq a$. Tomamos $N \geq a$, $N_0 = 0$, $N_1 = N$, $N_{k+1} = N + k$, $M = 0$, $\beta = m_0 = n = \vartheta_N$. Então aplicando o Teorema 3.2.1 para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, obtemos

$$d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(N_k) \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(N+k-1) \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}.$$

Temos que $\lambda(N+1) \leq e^{-1}\lambda(N)$ e que $\lambda(N+2) \leq e^{-1}\lambda(N+1) \leq e^{-2}\lambda(N)$. Assim, usando indução sobre k , obtemos $\lambda(N+k) \leq e^{-k}\lambda(N)$. Então

$$d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \lambda(N) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k-1)} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \ll \lambda(N) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q}.$$

Mas, como

$$\theta_{N_k, N_{k+1}} = \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s = \sum_{s=N+k}^{N+k} \dim \mathcal{H}_s = \dim \mathcal{H}_{N+k},$$

segue que

$$\begin{aligned} d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\ll \lambda(N) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} (\dim \mathcal{H}_{N+k})^{1/p-1/q} \\ &\ll \lambda(N) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} ((N+k)^{d-1})^{1/p-1/q} \\ &\ll \lambda(N) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} (Nk)^{(d-1)(1/p-1/q)} \\ &= \lambda(N) N^{(d-1)(1/p-1/q)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} k^{(d-1)(1/p-1/q)}. \end{aligned}$$

Se $a_k = e^{-k} k^{(d-1)(1/p-1/q)}$ então $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1}/a_k = 1/e$. Assim $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} k^{(d-1)(1/p-1/q)} < \infty$ e portanto, para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$

$$d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \lambda(N) N^{(d-1)(1/p-1/q)} = e^{-\gamma N^r} N^{(d-1)(1/p-1/q)}.$$

Logo para $2 \leq p, q \leq \infty$, obtemos

$$d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \leq d_{\vartheta_N}(\Lambda^{(2)}U_2, L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-1)(1/2-1/q)}$$

o que demonstra (4.38), completando a demonstração. $\square$

Observação 4.2.5. Efetuando simples adaptações nas demonstrações podemos mostrar que os Teoremas 4.2.3 e 4.2.4 permanecem válidos quando trocarmos o operador $\Lambda^{(2)}$ por $\Lambda_*^{(2)}$, ϑ_k por $\vartheta_k^* = \dim \mathcal{T}_k^*$, ω_k por $\omega_k^* = \vartheta_k^* - (\vartheta_k^*)^{1-r/d} - 1$ e $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}_* = \gamma$.

Observação 4.2.6. Todos os resultados deste capítulo e também dos capítulos anteriores permanecem válidos para o sistema de funções múltiplas de Walsh sobre I^d ou para o sistema de Walsh sobre $\mathbb{S}^l \times \cdots \times \mathbb{S}^l$.

Seja $\varphi \in L^1(I^d)$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}$, então $\lambda(|\mathbf{k}|) \leq \lambda(l-1) = e^{-\gamma(l-1)^r}$ e $k_q \leq l$ para todo $1 \leq q \leq d$. Assim temos que

$$|\lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m = \lambda(|\mathbf{k}|) |\hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m \leq e^{-\gamma(l-1)^r} l^m \|\varphi\|_1.$$

Seja $C_1 > 0$ uma constante tal que $e^{-\gamma(l-1)^r} l^{m+d+1} \leq C_1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Então temos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} |\lambda_{\mathbf{k}} \hat{\varphi}(\mathbf{k})| k_q^m &\leq \|\varphi\|_1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} e^{-\gamma(l-1)^r} l^m \\ &\leq C_2 \|\varphi\|_1 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\gamma(l-1)^r} l^m l^{d-1} \\ &\leq C_1 C_2 \|\varphi\|_1 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, segue pelo Corolário 1.5.10 que as derivadas parciais diádicas de ordem m de $\Lambda^{(2)}\varphi$ existem e

$$\frac{\partial^m}{\partial x_q^m}(\Lambda^{(2)}\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \frac{\partial^m}{\partial x_q^m} \psi_{\mathbf{k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) k_q^m \psi_{\mathbf{k}}.$$

Assim, a derivada parcial diádica $\partial^m(\Lambda^{(2)}\varphi)/\partial x_q^m(\mathbf{x})$ existe para quase todo $\mathbf{x} \in I^d$, todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $1 \leq q \leq d$, isto é, $\Lambda^{(2)}\varphi$ têm derivada parcial diádica de qualquer ordem para toda $\varphi \in L^1(I^d)$, e a série acima converge na norma de L^p , $1 \leq p \leq \infty$. Portanto podemos concluir que o conjunto $\Lambda^{(2)}U_p$ é um conjunto de funções infinitamente diferenciáveis, no sentido diádico, para qualquer $\gamma, r > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$.

De modo análogo podemos mostrar que $\Lambda_*^{(2)}U_p$ é um conjunto de funções infinitamente diferenciáveis, no sentido diádico, para qualquer $\gamma, r > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Observação 4.2.7. Todos os resultados desta tese permanecem válidos para o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$, mas para obtermos os resultados para o toro temos que usar as informações contidas nas Observações 1.4.8 e 3.2.8.

Para o toro, os resultados da Seção 4.1, permanecem válidos exatamente como estão enunciados e os da Seção 4.2 permanecem válidos trocando as constantes $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_*$ por

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \right)^{r/d}, \quad \mathcal{R}_* = \gamma 2^{-r}.$$

5 Estimativas inferiores e superiores gerais para números de entropia

Neste capítulo estudamos estimativas inferiores e superiores para números de entropia de operadores multiplicadores gerais de séries múltiplas, associados a um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega^d)$ uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega^d)$, e que são limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Um estudo como este, para operadores multiplicadores de funções definidas sobre espaços homogêneos e sobre o toro foram realizados em [24, 46, 47].

5.1 Estimativas inferiores para números de entropia

Nesta seção, demonstramos a limitação inferior para números de entropia de operadores multiplicadores gerais de séries múltiplas, limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Definição 5.1.1. *O conjunto polar de um subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ é definido por*

$$K^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{y \in K} |\langle x, y \rangle| \leq 1 \right\},$$

e a norma $\|\cdot\|_{K^\circ}$ é definida por

$$\|x\|_{K^\circ} = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 5.1.2. *(Desigualdade de Urysohn, [38], p. 6) Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Temos que*

$$\left(\frac{\text{Vol}_n(K)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K^\circ} d\sigma(x),$$

onde $\text{Vol}_n(A)$ denota o volume de um subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 5.1.3. *([38], p. xi) Seja V um subconjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(\frac{\text{Vol}_n(V) \text{Vol}_n(V^\circ)}{(\text{Vol}_n(B_{(2)}^n))^2} \right)^{1/n} \geq C.$$

Teorema 5.1.4. *Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ um operador multiplicador, onde $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, para alguma função $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é não-crescente. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p e q , tal que, para todos $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \sum_{l=1}^N \dim \mathcal{H}_l$,*

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n} \mathcal{V}_n,$$

onde

$$\mathcal{V}_n = \begin{cases} 1, & p < \infty, q > 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p < \infty, q = 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, q > 1, \\ (\log_2 n)^{-1}, & p = \infty, q = 1. \end{cases}$$

Em particular, se $k = n$, então

$$e_n(\Lambda U_p, L^q) \geq C |\lambda(N)| \mathcal{V}_n. \quad (5.1)$$

Demonstração. Se para algum $1 \leq l \leq N$, $\lambda(l) = 0$, então a demonstração é trivial. Vamos supor que $\lambda(l) \neq 0$, para todo $1 \leq l \leq N$. Agora, se Λ_n é o operador identidade, segue pela desigualdade (3.2), que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{(q)}^\circ \leq \|x\|_{(q')},$$

onde $1/q + 1/q' = 1$. Assim se tomarmos $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{(q')}$, $1 \leq q \leq 2$, pelos Teoremas 5.1.2 e 2.2.13, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(q)}^\circ d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(q')} d\sigma(x) \\ &\leq \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(q')}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} = M(\|\cdot\|_{(q')}) \\ &\leq C_1 \begin{cases} (q')^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=1}^N d_l \right)^{1/2}, & 2 \leq q' < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{l=1}^N d_l \right)^{1/2}, & q' = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $d_l = \dim \mathcal{H}_l$, então $(\sum_{l=1}^N d_l)^{1/2} = (\sum_{l=1}^N \dim \mathcal{H}_l)^{1/2} = n^{1/2}$, segue que

$$\left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \leq C_1 \begin{cases} (q')^{1/2}, & 1 < q \leq 2, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = 1, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $1/q + 1/q' = 1$, ou seja, $2 \leq q' \leq \infty$. Da mesma forma, para todo $2 \leq p \leq \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{Vol}_n((B_{(p)}^n)^\circ)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)} d\sigma(x) \leq \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_{(p)}^2 d\sigma(x) \right)^{1/2} \\ &= M(\|\cdot\|_{(p)}) \leq C_2 \begin{cases} p^{1/2}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & p = \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pela Proposição 5.1.3 existe uma constante absoluta $C_3 > 0$ tal que

$$\left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(p)}^n) \text{Vol}_n((B_{(p)}^n)^\circ)}{(\text{Vol}_n(B_{(2)}^n))^2} \right)^{1/n} \geq C_3,$$

e assim por (5.3)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(p)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} &\geq C_3 \left(\frac{\text{Vol}_n((B_{(p)}^n)^\circ)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{-1/n} \\ &\geq C_4 \begin{cases} p^{-1/2}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Seja $x_1, x_2, \dots, x_{N(\epsilon)}$, uma ϵ -rede minimal para $\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$ com cardinalidade $N(\epsilon)$. Então

$$\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n \subset \bigcup_{k=1}^{N(\epsilon)} (x_k + \epsilon B_{(q)}^n).$$

Comparando os volumes obtemos

$$\text{Vol}_n(\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n) \leq \epsilon^n N(\epsilon) \text{Vol}_n(B_{(q)}^n)$$

e consequentemente

$$\left(\frac{\text{Vol}_n(\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \leq \epsilon (N(\epsilon))^{1/n} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n}. \quad (5.5)$$

Se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $X \subset \mathbb{R}^n$, então $\text{Vol}_n(T(X)) = (\det T)(\text{Vol}_n X)$, onde $\det T$ denota o determinante da matriz do operador T . Temos então que

$$\frac{(\text{Vol}_n(\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n))^{1/n}}{(\text{Vol}_n(B_{(2)}^n))^{1/n}} = (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \frac{(\text{Vol}_n(B_{(p)}^n))^{1/n}}{(\text{Vol}_n(B_{(2)}^n))^{1/n}}. \quad (5.6)$$

Assim por (5.4), (5.5), (5.6) e (5.2), temos que

$$\begin{aligned} C_4 (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \begin{cases} p^{-1/2}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty. \end{cases} &\leq (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(p)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \\ &= \left(\frac{\text{Vol}_n(\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \leq \epsilon (N(\epsilon))^{1/n} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)} \right)^{1/n} \\ &\leq C_1 \epsilon (N(\epsilon))^{1/n} \begin{cases} (q')^{1/2}, & 1 < q \leq 2, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tomando $N(\epsilon) = 2^{k-1}$, obtemos da definição de números de entropia

$$\epsilon = e_k(\tilde{\Lambda}_n B_{(p)}^n, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})) = e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N).$$

Das Proposições 1.8.2 e 1.8.5 temos que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q) \geq 2^{-1} e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N),$$

e assim para $2 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq 2$, temos que

$$\begin{aligned} e_k(\Lambda U_p, L^q) &\geq C_4 C_1^{-1} (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} (N(\epsilon))^{-1/n} (q')^{-1/2} p^{-1/2} \\ &\geq C_5 (2^{k-1})^{-1/n} (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \\ &\geq C_5 2^{1/n} 2^{-k/n} (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \\ &\geq C_5 2^{-k/n} (\det \tilde{\Lambda}_n)^{1/n} \\ &\geq C_5 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que para $\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}$ temos $l-1 \leq |\mathbf{k}| \leq l$ e portanto $\lambda(l) \leq \lambda(|\mathbf{k}|) \leq \lambda(l-1)$. Logo, para $2 \leq p < \infty$, $1 < q \leq 2$ temos que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Consideramos agora $1 \leq p < 2$ e $1 < q \leq 2$. Observe que $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2$ e assim $U_2 \subset U_p$. Portanto

$$\begin{aligned} e_k(\Lambda U_2, L^q) &= \inf \left\{ \epsilon > 0 : \Lambda U_2 \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} (x_j + \epsilon U_q) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \epsilon > 0 : \Lambda U_p \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} (x_j + \epsilon U_q) \right\} \\ &= e_k(\Lambda U_p, L^q) \end{aligned}$$

e portanto, pelo caso anterior, segue que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq e_k(\Lambda U_2, L^q) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Para o caso em que $1 \leq p < \infty$ e $2 < q \leq \infty$, temos que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$ e $U_q \subset U_2$ e assim da Proposição 1.8.2, segue que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq e_k(\Lambda U_p, L^2) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Concluimos portanto que para $p < \infty$ e $q > 1$, temos

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C 2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n}.$$

Fazendo uma análise semelhante nos outros casos, obtemos as estimativas desejadas.

Para demonstrar (5.1), assumimos que $k = n$. Como $t \mapsto |\lambda(t)|$ é não-crescente, então $|\lambda(1)| \geq |\lambda(2)| \geq \dots \geq |\lambda(N)|$ e desta forma

$$\prod_{k=1}^N |\lambda(K)|^{d_k} \geq \prod_{k=1}^N |\lambda(N)|^{d_k} = |\lambda(N)|^{\sum_{k=1}^N d_k} = |\lambda(N)|^n,$$

e conseqüentemente

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C |\lambda(N)| \mathcal{V}_n,$$

concluindo assim a demonstração. $\square$

Observação 5.1.5. O Teorema 5.1.4 permanece válido se trocarmos Λ por Λ^* , $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda_{\mathbf{k}}^*$, $\mathcal{H}_l$ por $\mathcal{H}_l^*$ e d_l por d_l^* .

5.2 Estimativas superiores para números de entropia

Nesta seção, demonstramos a limitação superior para números de entropia de operadores multiplicadores arbitrários de séries múltiplas, limitados de $L^p(\Omega^d)$ em $L^q(\Omega^d)$.

Observação 5.2.1. Consideremos uma sequência de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda(|\mathbf{k}|)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$. Para $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q \leq \infty$ fixos, definimos

$$\chi_k^{(q)} = \chi_k = 3 \sup_{N \geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} \text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n},$$

onde $n = \dim \mathcal{T}_N$. Observamos que χ_k depende de k, q e da função λ . Temos que se λ é uma função limitada, então

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} &\leq \left(\prod_{j=1}^N \left(\sup_{1 \leq j \leq N} |\lambda(j)| \right)^{d_j} \right)^{1/n} \\ &\leq \left(\left(\sup_{1 \leq j \leq N} |\lambda(j)| \right)^{\sum_{j=1}^N d_j} \right)^{1/n} \\ &= \sup_{1 \leq j \leq N} |\lambda(j)|, \end{aligned} \quad (5.8)$$

assim

$$\chi_k^{(q)} \leq 3 \sup_{N \geq 1} (2^{-k+1})^{1/n} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \right)^{1/n} \sup_{1 \leq j \leq N} |\lambda(j)|,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (5.4) e como $B_{(q)}^n \subset B_{(2)}^n$ para $2 \leq q \leq \infty$, obtemos

$$1 \leq \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \right)^{1/n} \leq C \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (5.9)$$

De modo análogo, definindo

$$\chi_{k,q}^* = \chi_k^* = 3 \sup_{N \geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} \text{Vol}_n(B_{(n,2)}^*)}{\text{Vol}_n(B_{(n,q)}^*)} \prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j^*} \right)^{1/n},$$

onde $n = \dim \mathcal{T}_N^*$, podemos mostrar que

$$1 \leq \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(n,2)}^*)}{\text{Vol}_n(B_{(n,q)}^*)} \right)^{1/n} \leq C \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Lema 5.2.2. ([33]) *Seja $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach n -dimensional e seja*

$$M^* = M^*(E) = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma(x).$$

Então existe uma constante positiva C , tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$e_m(B_{(2)}^n, E) \leq C \begin{cases} (n/m)^{1/2} M^*, & m \leq n, \\ e^{-m/n} M^*, & m > n. \end{cases}$$

Teorema 5.2.3. *Seja $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto |\lambda(t)|$ é uma função não-crescente e seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$. Suponhamos que $\Lambda \in K_{\epsilon, 2}$, para algum $\epsilon > 0$. Seja χ_k como na Observação 5.2.1, sejam $M, N_l, \theta_{N_l, N_{l+1}}$ e m_l como na Observação 3.2.2 e seja $\eta = k + \sum_{l=1}^M m_l$, onde $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq 2$, temos*

$$e_\eta(\Lambda U_p, L^q) \leq C \chi_k^{(2)},$$

e para $2 \leq p, q \leq \infty$ temos

$$\begin{aligned} e_\eta(\Lambda U_p, L^q) &\leq C \chi_k^{(q)} + C |\lambda(N)| \left(\begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq j \leq M} (\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \right) \\ &\quad + \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j} \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Demonstração. Como $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$ se $1 \leq q \leq 2$ e $U_p \subset U_2$ para $2 \leq p \leq \infty$, pela Proposição 1.8.2 é suficiente demonstrar apenas para $p = 2$ e $q \geq 2$. Para $p = 2$, segue de (3.13) que

$$\Lambda U_2 \subset C_1 \left(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{l=1}^M |\lambda(N_l)| B_2^{N_l, N_{l+1}} + \bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}} \right),$$

onde $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{j=0}^N \mathcal{H}_j$. Usando as Proposições 1.8.2 e 1.8.4 obtemos

$$\begin{aligned} e_\eta(\Lambda U_2, L^q) &= e_{k+\sum_{l=1}^M m_l}(\Lambda U_2, L^q) \\ &\leq C_1 e_{k+(\sum_{l=1}^M m_l)+1-1} \left(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{l=1}^M |\lambda(N_l)| B_2^{N_l, N_{l+1}} \right. \\ &\quad \left. + \bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \right) \\ &\leq C_1 \left(e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) + \sum_{l=1}^M |\lambda(N_l)| e_{m_l}(B_2^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}}) \right. \\ &\quad \left. + e_1 \left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Usando novamente as propriedades dos números de entropia, obtemos

$$\begin{aligned}
& e_{1+1-1} \left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}} \right) \\
& \leq e_1 \left(|\lambda(N_{M+1})| \theta_{N_{M+1}, N_{M+2}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+1}, N_{M+2}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+1}, N_{M+2}} \right) \\
& + e_{1-1+1} \left(\bigoplus_{l=M+2}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}} \right) \\
& \leq e_1 \left(|\lambda(N_{M+1})| \theta_{N_{M+1}, N_{M+2}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+1}, N_{M+2}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+1}, N_{M+2}} \right) \\
& + e_1 \left(|\lambda(N_{M+2})| \theta_{N_{M+2}, N_{M+3}}^{1/2-1/q} B_q^{N_{M+2}, N_{M+3}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_{M+2}, N_{M+3}} \right) \\
& + e_{1-1+1} \left(\bigoplus_{l=M+3}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}} \right) \\
& \leq \dots \\
& \leq \sum_{l=M+1}^{\infty} e_1 \left(|\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}} \right) \\
& = \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} e_1(B_q^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}}) \\
& = \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q}. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Portanto, por (5.11) e (5.12) temos que

$$\begin{aligned}
e_{\eta}(\Lambda U_2, L^q) & \leq C_1 \left(e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) + \sum_{l=1}^M |\lambda(N_l)| e_{m_l}(B_2^{N_l, N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l, N_{l+1}}) \right. \\
& \left. + \sum_{l=M+1}^{\infty} |\lambda(N_l)| \theta_{N_l, N_{l+1}}^{1/2-1/q} \right). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Vamos demonstrar primeiramente que

$$e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) \leq \chi_k. \tag{5.14}$$

Seja $n = \dim \mathcal{T}_N$ e tomemos $\varphi \in U_2 \cap \mathcal{T}_N$. Então

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = |\lambda(N)|^{-1} \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \lambda(|\mathbf{k}|) \frac{\hat{\varphi}(\mathbf{k})}{\lambda(|\mathbf{k}|)} |\lambda(N)| \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = |\lambda(N)|^{-1} \Lambda_n \psi,$$

onde

$$\psi = \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \frac{\hat{\varphi}(\mathbf{k})}{\lambda(|\mathbf{k}|)} |\lambda(N)| \phi_{\mathbf{k}}.$$

Mas

$$\|\psi\|_2^2 = \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} \frac{|\hat{\varphi}(\mathbf{k})|^2}{|\lambda(|\mathbf{k}|)|^2} |\lambda(N)|^2 \leq \sum_{|\mathbf{k}| \leq N} |\hat{\varphi}(\mathbf{k})|^2 = \|\varphi\|_2^2 \leq 1,$$

onde a primeira desigualdade segue do fato de λ ser uma função não-crescente. Logo

$$\varphi = |\lambda(N)|^{-1} \Lambda_n \psi, \quad \psi \in B_2^n,$$

de onde $B_2^n \subset |\lambda(N)|^{-1} \Lambda_n B_2^n$, portanto $|\lambda(N)| B_2^n \subset \Lambda_n B_2^n$ e consequentemente $|\lambda(N)| B_{(2)}^n \subset \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n$. Como $U_q \subset U_2$ para $q \geq 2$ temos que

$$|\lambda(N)| B_{(q)}^n \subset |\lambda(N)| B_{(2)}^n \subset \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n. \quad (5.15)$$

Suponhamos que $\Theta = \{z_j\}_{1 \leq j \leq m}$ seja um subconjunto χ_k -separado maximal de $\tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$, ou seja, $\|z_i - z_j\|_{(q)} \geq \chi_k$ para todo $i \neq j$. Pela maximalidade, segue que Θ é uma χ_k -rede de $\tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n$ em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$. Observe que as bolas

$$z_j + \frac{\chi_k}{2} B_{(q)}^n, \quad 1 \leq j \leq m$$

são mutuamente disjuntas. Aplicando (5.15) temos que

$$\tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n + \frac{\chi_k}{2} B_{(q)}^n \subset \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n + \frac{|\lambda(N)|}{2} B_{(q)}^n \subset \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n + \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n \subset \frac{3}{2} \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n,$$

e assim

$$\bigcup_{j=1}^m \left(z_j + \frac{\chi_k}{2} B_{(q)}^n \right) \subset \frac{3}{2} \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n,$$

sendo que a união acima é disjunta. Logo comparando os volumes obtemos

$$\left(\frac{\chi_k}{2} \right)^n m \cdot \text{Vol}_n(B_{(q)}^n) \leq \text{Vol}_n \left(\frac{3}{2} \tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n \right) \leq \frac{3^n}{2^n} \left(\prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right) \text{Vol}_n(B_{(2)}^n),$$

e portanto temos

$$m \leq \left(\frac{3}{\chi_k} \right)^n \frac{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \left(\prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right). \quad (5.16)$$

Mas pela definição de χ_k

$$\chi_k \geq 3 \left(\frac{2^{-k+1} \text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n}$$

e obtemos assim que

$$\left(\frac{3}{\chi_k} \right)^n \leq 2^{k-1} \left(\frac{\text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{-1}. \quad (5.17)$$

Assim, de (5.16) e (5.17) concluímos que a cardinalidade m de uma rede Θ χ_k -separada para o conjunto $\tilde{\Lambda}_n B_{(2)}^n$ pode ser estimada por $m \leq 2^{k-1}$ e assim da definição de número de entropia é obtida (5.14).

Agora encontraremos um limitante superior para

$$\sum_{j=1}^M |\lambda(N_j)| e_{m_j}(B^{N_j, N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j, N_{j+1}}) + \sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda(N_j)| \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q}. \quad (5.18)$$

Aplicando o Lema 5.2.2 ao espaço de Banach $E_j = (\mathbb{R}^{\theta_{N_j, N_{j+1}}}, \|\cdot\|_{(q)})$ e a m_j , obtemos

$$e_{m_j}(B_2^{N_j, N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j, N_{j+1}}) = e_{m_j}(B_{(2)}^{N_j, N_{j+1}}, E_j) \ll M^*(E_j) \frac{\theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2}}{m_j^{1/2}}.$$

Como $m_j = \lceil 2^{-\epsilon_j \theta_{N_1, N_2}} \rceil + 1 \geq 2^{-\epsilon_j \theta_{N_1, N_2}}$ e $M^*(E_j) \leq M(E_j)$ segue que

$$e_{m_j}(B_2^{N_j, N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j, N_{j+1}}) \ll \frac{\theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} 2^{\epsilon_j/2} M(E_j).$$

Assim, aplicando o Teorema 2.2.13, obtemos

$$e_{m_j}(B_2^{N_j, N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j, N_{j+1}}) \ll \frac{\theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} 2^{\epsilon_j/2} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e desta forma, como $\lambda(N_j) \leq \lambda(N) 2^{-j+1}$ por definição e $\Lambda \in K_{\epsilon, 2}$, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M |\lambda(N_j)| e_{m_j}(B_2^{N_j, N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j, N_{j+1}}) \\ & \ll |\lambda(N)| \sum_{j=1}^M 2^{-j(1-\epsilon/2)} \frac{\theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2}}{\theta_{N_1, N_2}^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ & \ll |\lambda(N)| \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq j \leq M} (\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

e

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda(N_j)| \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q} \leq |\lambda(N)| \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j+1} \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q} \ll |\lambda(N)| \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j} \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q}. \quad (5.20)$$

Finalmente, de (5.13), (5.14), (5.19) e (5.20), obtemos (5.10). $\square$

Observação 5.2.4. O Teorema 5.2.3 permanece válido quando trocamos Λ por Λ^* , $\lambda_{\mathbf{k}}$ por $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, χ_k por χ_k^* , M por M^* , $\theta_{N_l, N_{l+1}}$ por $\theta_{N_l, N_{l+1}}^*$, $K_{\epsilon, 2}$ por $K_{\epsilon, 2}^*$ e η por $\eta^* = k + \sum_{l=1}^{M^*} m_l^*$, $k \in \mathbb{N}$.

6 Números de entropia de operadores específicos

Neste capítulo, aplicamos os resultados do capítulo precedente na obtenção de estimativas para números de entropia de conjuntos de funções sobre Ω^d , associados a operadores multiplicadores específicos.

Vamos considerar os mesmos operadores multiplicadores estudados no Capítulo 4, isto é, os operadores $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\log_2 t)^{-\xi}$, $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi \geq 0$ e $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ e $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}^*\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(|\mathbf{k}|_*)$, onde $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, com $\gamma > 0$, $r > 0$, $t \geq 0$.

Obtemos estimativas superiores e inferiores para os números de entropia dos conjuntos $\Lambda^{(1)}U_p$, $\Lambda_*^{(1)}U_p$, $\Lambda^{(2)}U_p$ e $\Lambda_*^{(2)}U_p$ em $L^q(\Omega^d)$, e várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem. Foi visto no Capítulo 4 que esses conjuntos, quando o sistema considerado é o sistema de Walsh $\{\psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$ sobre I^d , são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis ou infinitamente diferenciáveis, no sentido diádico.

Em [24, 46, 47] estudos como este foram realizados para operadores de funções definidas sobre espaços homogêneos e sobre o toro.

6.1 Números de entropia de operadores do primeiro tipo

Nesta seção, obtemos estimativas inferiores e superiores para números de entropia dos operadores multiplicadores $\Lambda^{(1)}$ e $\Lambda_*^{(1)}$.

Lema 6.1.1. *Para $\gamma, \xi > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, seja $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por*

$$g(x) = -\frac{k}{x} - \frac{\gamma}{d} \log_2 x - \xi \log_2(\log_2 x).$$

Então existem constantes $C_1, C_2, \overline{C} > 0$ dependendo somente de γ, ξ, d tais que o máximo da função g é assumido em um ponto x_k satisfazendo

$$C_1 k \leq x_k \leq C_2 k, \quad k \geq 1$$

e

$$g(x_k) \leq \overline{C} - \frac{\gamma}{d} \log_2 k - \xi \log_2(\log_2 k).$$

Demonstração. Temos que

$$g'(x) = \frac{k}{x^2} - \frac{\gamma}{dx \ln 2} - \frac{\xi}{\ln 2(\log_2 x)} \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{x} \left(\frac{k}{x} - \frac{\gamma}{d \ln 2} - \frac{\xi}{(\ln 2)^2(\log_2 x)} \right),$$

e assim $g'(x) = 0$ se e somente se

$$x = k(\ln 2)^2 d \frac{\log_2 x}{(\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi}. \quad (6.1)$$

Seja

$$f(x) = x - k(\ln 2)^2 d \frac{\log_2 x}{(\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi}, \quad x \geq 2.$$

Então $g'(x) = 0$ se e somente se $f(x) = 0$. Para k suficientemente grande a função f assume valores positivos e negativos, f' é crescente, e existe $x_0 > 2$ tal que $f'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para $x > x_0$, $f(2) < 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Portanto, f possui um único ponto crítico que é ponto de mínimo local e também global. Das considerações é possível concluir que f se anula em um único ponto x_k e consequentemente g' se anula somente em x_k . Verificamos também que para k suficientemente grande e para x pequeno $g'(x) > 0$ e que para x grande $g'(x) < 0$. Assim x_k é o único ponto crítico de g que é um ponto de máximo global e portanto $g(x_k)$ é o valor máximo absoluto de g .

Seja agora $h(x) = \log_2 x / ((\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi)$. Então

$$h'(x) = \frac{d\xi}{x(\ln 2)((\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi)^2} > 0, \quad x \geq 2.$$

Logo, h é crescente em $[2, \infty)$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1/(\gamma \ln 2)$ concluímos que $h(2) \leq h(x) \leq 1/(\gamma \ln 2)$, isto é,

$$\frac{1}{(\ln 2)\gamma + d\xi} \leq \frac{\log_2 x}{(\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi} \leq \frac{1}{\gamma(\ln 2)}$$

e portanto

$$\frac{d(\ln 2)^2}{\gamma(\ln 2) + d\xi} k \leq k(\ln 2)^2 d \frac{\log_2 x}{(\ln 2)(\log_2 x)\gamma + d\xi} \leq k \frac{(\ln 2)d}{\gamma}.$$

Assim, por (6.1), existem constantes C_1, C_2 que dependem somente de d, γ, ξ , satisfazendo

$$C_1 k \leq x_k \leq C_2 k, \quad k \geq 1.$$

Seja então, $C_1 \leq C \leq C_2$ tal que $x_k = Ck$. Assim

$$\begin{aligned} g(x_k) &= g(Ck) = -\frac{k}{Ck} - \frac{\gamma}{d} \log_2(Ck) - \xi \log_2(\log_2 Ck) \\ &\leq \bar{C} - \frac{\gamma}{d} \log_2 k - \xi \log_2(\log_2 k), \end{aligned}$$

onde $\bar{C}$ é tomada satisfazendo $\bar{C} \geq -1/C$. □

Teorema 6.1.2. *Seja $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, com $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, onde $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\log_2 t)^{-\xi}$, $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, com $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi \geq 0$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & 1 \leq p \leq \infty, q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty, \end{cases} \quad (6.2)$$

e

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi} \mathcal{V}_k \quad (6.3)$$

onde $\mathcal{V}_k$ está definido no Teorema 5.1.4.

Demonstração. Por (5.1) temos

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg |\lambda(N)| \mathcal{V}_n$$

onde $n = \dim \mathcal{T}_N$. Como $n \asymp N^d$, $\lambda(N) = N^{-\gamma}(\log_2 N)^{-\xi} \asymp n^{-\gamma/d}(\log_2 n)^{-\xi}$ e assim

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\log_2 n)^{-\xi} \mathcal{V}_n.$$

Agora, se $k \in \mathbb{N}$, $\dim \mathcal{T}_{N-1} \leq k \leq \dim \mathcal{T}_N$, obtemos das propriedades dos números de entropia e da desigualdade acima que

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \geq e_{\dim \mathcal{T}_N}(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\log_2 n)^{-\xi} \mathcal{V}_n$$

Mas, $n \asymp N^d \asymp (N-1)^d \asymp \dim \mathcal{T}_{N-1} \leq k \leq \dim \mathcal{T}_N = n$, donde $k \asymp n$. Obtemos assim (6.3) da desigualdade acima.

Por outro lado, como $|\lambda(N)| < 1$ e $n \asymp N^d$, então

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \left(\prod_{j=2}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \geq \left(\prod_{j=2}^N |\lambda(N)|^{d_j} \right)^{1/n} \\ &= \left(|\lambda(N)|^{\sum_{j=2}^N d_j} \right)^{1/n} \\ &\geq |\lambda(N)| = N^{-\gamma}(\log_2 N)^{-\xi} \\ &\asymp n^{-\gamma/d}(\log_2 n)^{-\xi}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Além disso

$$\begin{aligned} \log_2 \sigma_n &= \log_2 \left(\prod_{j=2}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^N d_j \log_2 |\lambda(j)| \\ &\leq -\frac{\gamma}{n} \sum_{j=2}^N d_j \log_2 j - \frac{\xi}{n} \sum_{j=2}^N d_j \log_2(\log_2 j) + C_1 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Da Proposição 1.4.6, temos que $d_j \geq E j^{d-1} - C_2 j^\theta$, onde $E = 2^{1-d} \pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$, $d-2 \leq \theta < d-1$ e C_2 é uma constante positiva. Sejam

$$f(x) = E x^{d-1} \log_2 x - C_2 x^\theta \log_2 x \quad \text{e} \quad g(x) = E x^{d-1} \log_2(\log_2 x) - C_2 x^\theta \log_2(\log_2 x).$$

Temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=3}^N d_j \log_2 j \geq \frac{1}{n} \sum_{j=3}^N f(j) \geq \frac{1}{n} \int_2^N f(x) dx$$

e

$$\frac{1}{n} \sum_{j=3}^N d_j \log_2(\log_2 j) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=3}^N g(j) \geq \frac{1}{n} \int_2^N g(x) dx.$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} \int_2^N f(x)dx &= E \left(\frac{x^d}{d} \log_2 x - \frac{1}{d^2 \ln 2} x^d \right) \Big|_2^N - C_2 \left(\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \log_2 x - \frac{1}{(\theta+1)^2 \ln 2} x^{\theta+1} \right) \Big|_2^N \\ &\geq E \frac{N^d}{d} \log_2 N - C_2 \frac{N^{\theta+1}}{\theta+1} \log_2 N + C_3, \end{aligned}$$

e de igual maneira

$$\int_2^N g(x)dx \geq E \frac{N^d}{d} \log_2(\log_2 N) - C_2 \frac{N^{\theta+1}}{\theta+1} \log_2(\log_2 N) + C_4.$$

Da Proposição 1.4.6, temos que $1/n \geq 1/(FN^d) - C/(F^2N^{d+1})$, onde $F = E/d$, e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=3}^N d_j \log_2 j &\geq \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}} \right) \left(\frac{E}{d} N^d \log_2 N \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}} \right) \left(\frac{C_2}{\theta+1} N^{\theta+1} \log_2 N + C_3 \right) \\ &\geq \log_2 N + C_5, \end{aligned} \tag{6.6}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=3}^N d_j \log_2(\log_2 j) &\geq \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}} \right) \left(\frac{E}{d} N^d \log_2(\log_2 N) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}} \right) \left(\frac{C_2}{\theta+1} N^{\theta+1} \log_2(\log_2 N) + C_4 \right) \\ &\geq \log_2(\log_2 N) + C_6. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Desta forma, obtemos de (6.5), (6.6) e (6.7)

$$\begin{aligned} \log_2 \sigma_n &\leq -\gamma \log_2 N - \gamma C_5 - \xi \log_2(\log_2 N) - \xi C_6 + C_1 \\ &= -\gamma \log_2 N - \xi \log_2(\log_2 N) + C_7 \end{aligned}$$

e portanto, como $N^d \asymp n$,

$$\begin{aligned} \sigma_n &\leq 2^{C_7} 2^{-\gamma \log_2 N} 2^{-\xi \log_2(\log_2 N)} \ll 2^{(\log_2 N)^{-\gamma}} 2^{(\log_2(\log_2 N))^{-\xi}} \\ &= N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi} \asymp n^{-\gamma/d} (\log_2 n)^{-\xi}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

De (6.4) e (6.8), vem que

$$\sigma_n \asymp n^{-\gamma/d} (\log_2 n)^{-\xi}. \tag{6.9}$$

Seja $2 \leq q < \infty$. De (5.9) e (6.9), obtemos

$$\begin{aligned} \chi_k &= 3 \sup_{\bar{N} \geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} \text{Vol}_{\bar{n}}(B_{(2)}^{\bar{n}})}{\text{Vol}_{\bar{n}}(B_{(q)}^{\bar{n}})} \prod_{j=1}^{\bar{N}} |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/\bar{n}} \\ &\asymp \sup_{\bar{N} \geq 1} 2^{-k/\bar{n}} \sigma_{\bar{n}} \asymp \sup_{\bar{N} \geq 1} 2^{-k/\bar{n}} \bar{n}^{-\gamma/d} (\log_2 \bar{n})^{-\xi}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

onde $\bar{n} = \dim \mathcal{T}_{\bar{N}}$. Definimos

$$g(x) = -\frac{k}{n} - \frac{\gamma}{d} \log_2 x - \xi \log_2(\log_2 x).$$

Segue então de (6.10) e do Lema 6.1.1, que para $2 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \chi_k &\asymp \sup_{\bar{N} \geq 1} 2^{g(\bar{n})} = 2^{\sup_{\bar{N} \geq 1} g(\bar{n})} \asymp 2^{g(x_k)} \\ &\leq 2^{\bar{C} - (\gamma/d) \log_2 k - \xi \log_2(\log_2 k)} \\ &\asymp k^{-\gamma/d} (\log_2 k)^{-\xi}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por outro lado, segue de (4.16), para $p = 2$, que $\Lambda^{(1)} \in K_{\epsilon, 2}$. Desta forma aplicando o Teorema 5.2.3 e observando que $\sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j} \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q} \ll 1$ (ver (4.13)), vem de (6.11) que para $2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q < \infty$,

$$e_{\eta}(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ll \chi_k + \lambda(N) q^{1/2} \ll k^{-\gamma/d} (\log_2 k)^{-\xi} + N^{-\gamma} (\log_2 N)^{-\xi} q^{1/2}. \quad (6.12)$$

Seja $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in [n_k, n_{k+1})$. Então $2^{g(n_k)} \asymp 2^{g(x_k)} \asymp \chi_k$ e $n_k \asymp x_k \asymp k$. Aplicamos o Teorema 5.2.3 para k e $N = [(n_k)^{1/d}] \asymp k^{1/d}$ e assim $n = \dim \mathcal{T}_N \asymp n_k \asymp k$. Da Observação (3.2.2), de (4.10), (4.11) e do fato de que $n \asymp N^d$, temos

$$\eta = k + \sum_{j=1}^M m_j \asymp k + \sum_{j=1}^M 2^{-\epsilon_j} \theta_{N_1, N_2} \asymp k + N^d \asymp k + n \asymp k,$$

e segue de (6.12)

$$e_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d} (\log_2 k)^{-\xi} q^{1/2}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad 2 \leq q < \infty. \quad (6.13)$$

Para $2 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$, usando (5.9), obtemos com raciocínio inteiramente análogo que

$$e_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d} (\log_2 k)^{-\xi} (\log_2 k)^{1/2}. \quad (6.14)$$

De (6.13) e (6.14), finalmente obtemos (6.2) concluindo a demonstração. $\square$

Observação 6.1.3. O Teorema 6.1.2 permanece válido se trocarmos o operador $\Lambda^{(1)}$ pelo operador $\Lambda_*^{(1)}$, fazendo simples adaptações na demonstração.

Observação 6.1.4. Todos os resultados deste capítulo e também do capítulo anterior permanecem válidos para o sistema de funções múltiplas de Walsh sobre I^d ou para o sistema de Walsh sobre $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^l$ ou se é considerado o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$.

6.2 Números de entropia de operadores do segundo tipo

Nesta seção obtemos estimativas inferiores e superiores para números de entropia dos operadores $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda_*^{(2)}$.

Observação 6.2.1. Sejam $\gamma, r \in \mathbb{R}$, $\gamma, r > 0$. Para $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \dim \mathcal{T}_N$, seja

$$A_{N,k} = -\frac{1}{n} \left(k \ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^N l^r d_l \right).$$

Sabemos da Proposição 1.4.6 que $d_l \asymp l^{d-1}$ e $n \asymp N^d$, logo

$$\sum_{l=1}^N l^r d_l \asymp \sum_{l=1}^N l^{r+d-1} \asymp \int_0^N x^{d+r-1} dx \asymp N^{d+r},$$

e assim

$$A_{N,k} \asymp -\frac{k}{N^d} - \frac{N^{d+r}}{N^d} = -\frac{k}{N^d} - N^r = g(N), \quad (6.15)$$

onde $g(x) = -kx^{-d} - x^r$.

Temos que $x_k = (d/r)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$ é o único ponto crítico da função g e que $g'(x) > 0$ para $x < x_k$ e $g'(x) < 0$ para $x > x_k$. Portanto g assume máximo absoluto em x_k . Para todo $r > 0$ e $x > 1$, temos

$$-dkx^{-d-1} \leq k[(x+1)^{-d} - x^{-d}] \leq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq (x+1)^r - x^r \leq rx^{r-1},$$

e assim

$$g(x+1) = -k(x+1)^{-d} - (x+1)^r \geq -kx^{-d} - x^r - rx^{r-1} = g(x) - rx^{r-1}.$$

Como g é decrescente em $[x_k, +\infty)$, segue que

$$g(x) - rx^{r-1} \leq g(x+1) \leq g(x+t) \leq g(x), \quad x \geq x_k, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Seja $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \leq \bar{N} \leq x_k + 1$. Então

$$g(x_k) - rx_k^{r-1} \leq g(\bar{N}) \leq \sup_N g(N) \leq g(x_k),$$

isto é,

$$-C_1 k^{r/(d+r)} - C_2 k^{(r-1)/(d+r)} \leq \sup_N g(N) \leq -C_1 k^{r/(d+r)},$$

com $C_1 = (d+r)d^{-d/(d+r)}r^{-r/(d+r)}$ e $C_2 = r^{(d+1)/(d+r)}d^{(r-1)/(d+r)}$. Assim, obtemos de (6.15) que

$$\sup_N A_{N,k} \asymp \sup_N g(N) \asymp k^{r/(d+r)}.$$

Teorema 6.2.2. Seja $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d}$, com $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$, onde $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, com $\gamma > 0$ e $0 < r \leq 1$ se $d \geq 4$, $0 < r \leq 76/208$ se $d = 2$ e $0 < r \leq 11/16$ se $d = 3$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-Ck^{r/(d+r)}} \mathcal{V}_k \quad (6.16)$$

onde

$$C = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)2^{d-1}d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)}$$

e $\mathcal{V}_k$ está definido no Teorema 5.1.4.

Demonstração. Primeiramente temos

$$2^{-k/n} \left(\prod_{l=1}^N |\lambda(l)|^{d_l} \right)^{1/n} = e^{-(k \ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^N l^r d_l)/n} = e^{A_{N,k}},$$

onde $A_{N,k}$ é como na observação anterior, $n = \dim \mathcal{T}_N$. Obtemos assim do Teorema 5.1.4 que

$$e_k(\Lambda^{(2)}, L^q) \gg e^{A_{N,k}} \mathcal{V}_n. \quad (6.17)$$

Pela Proposição 1.4.6 temos que

$$d_l \leq \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^\theta,$$

onde $d - 2 \leq \theta < d - 1$, logo

$$\sum_{l=1}^N l^r d_l \leq \sum_{l=1}^N \left(\frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d+r-1} + C_1 l^{\theta+r} \right).$$

Tomamos

$$f(x) = \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} x^{d+r-1} + C_1 x^{\theta+r},$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N l^r d_l &\leq \sum_{l=1}^N f(l) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \\ &\leq \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)} (N+1)^{d+r} + C_2 (N+1)^{\theta+r+1}. \end{aligned}$$

Da Proposição 1.4.6 temos que $n \geq (2^{1-d} \pi^{d/2} / d \Gamma(d/2)) N^d$ e assim

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{n} \sum_{l=1}^N l^r d_l &\leq \frac{d \Gamma(d/2) \gamma}{2^{1-d} \pi^{d/2} N^d} \sum_{l=1}^N l^r d_l \\ &\leq \frac{d \Gamma(d/2) \gamma}{2^{1-d} \pi^{d/2} N^d} \left(\frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)} (N+1)^{d+r} + C_2 (N+1)^{\theta+r+1} \right) \\ &= \frac{d \gamma}{(d+r)} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^d (N+1)^r + C_3 \left(1 + \frac{1}{N} \right)^d (N+1)^{\theta+r+1-d}. \end{aligned}$$

Como $(1 + 1/N)^d = 1 + b_1/N + b_2/N^2 + \dots + 1/N^d \leq (1 + C_4/N)$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{n} \sum_{l=1}^N l^r d_l &\leq \frac{d \gamma}{(d+r)} \left(1 + \frac{C_4}{N} \right) (N+1)^r + C_3 \left(1 + \frac{C_4}{N} \right) (N+1)^{\theta+r+1-d} \\ &\leq \frac{d \gamma}{(d+r)} (N+1)^r + C_5 \left(1 + \frac{1}{N} \right)^r N^{r-1} + C_6 (N+1)^{\theta+r+1-d} \\ &\leq \frac{d \gamma}{(d+r)} (N+1)^r + C_7, \end{aligned}$$

se $0 \leq r \leq d - \theta - 1$. Para $d \geq 4$ podemos tomar $\theta = d - 2$ e assim $0 < r \leq 1$. Para $d = 2$ tomamos $\theta = 132/208$ e temos que $0 < r \leq 1 - 132/208 = 76/208$. Para $d = 3$ tomando $\theta = 21/16$ obtemos $0 < r \leq 2 - 21/16 = 11/16$.

Agora

$$\begin{aligned} (N+1)^r &= N^r \left(1 + \frac{1}{N}\right)^r \\ &= N^r \left[1 + \frac{r}{N} \left(1 + \frac{(r-1)}{2} \frac{1}{N} + \frac{(r-1)(r-2)}{3!} \frac{1}{N^2} + \cdots\right)\right] \\ &= N^r + rN^{r-1}S_N \leq N^r + C_r N^{r-1} \leq N^r + C_8, \end{aligned}$$

já que $0 < r \leq 1$. Assim

$$\frac{\gamma}{n} \sum_{l=1}^N l^r d_l \leq \frac{d\gamma}{d+r} (N^r + C_8) + C_7 = \frac{d\gamma}{d+r} N^r + C_9. \quad (6.18)$$

Segue também da Proposição 1.4.6 que

$$\frac{k}{n} \leq \frac{d\Gamma(d/2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}N^d}. \quad (6.19)$$

Então de (6.18) e (6.19),

$$A_{N,k} \geq -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}} N^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} N^r - C_9. \quad (6.20)$$

Seja agora

$$g(x) = -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}} x^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} x^r - C_9.$$

Verificamos que a função g atinge o seu máximo absoluto em

$$x_k = \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}.$$

De forma análoga ao que foi feito na Observação 6.2.1, podemos constatar que existe uma constante C_{10} tal que

$$g(x) - C_{10} \leq g(x+t) \leq g(x), \quad x \geq x_k, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e assim

$$g(x_k) - C_{10} \leq \sup_N g(N+1) \leq g(x_k).$$

Portanto, segue de (6.20) que

$$\sup_N A_{N,k} \geq \sup_N g(N+1) \geq g(x_k) - C_{10}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
g(x_k) &= k^{r/(d+r)} \left[-\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}\pi^{d/2}} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{-d/(d+r)} \right] \\
&\quad - k^{r/(d+r)} \left[\frac{d\gamma}{d+r} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} \right] - C_9 \\
&= \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} \left[-\frac{r\gamma}{d+r} - \frac{d\gamma}{d+r} \right] - C_9 \\
&= -\gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)2^{d-1}d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} - C_9 \\
&= -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} - C_9,
\end{aligned}$$

e assim

$$\sup_N A_{N,k} \geq -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} - C_{11}.$$

Segue então de (6.17) que

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \mathcal{V}_n.$$

Da Observação 6.2.1, temos $N \asymp k^{1/(d+r)}$ e assim $n \asymp N^d \asymp k^{d/(d+r)}$, de onde $\log_2 n \asymp \log_2 k$ e portanto

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \mathcal{V}_k.$$

□

Teorema 6.2.3. *Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador considerado no teorema anterior e $0 < r \leq 1$ se $d \geq 4$, $0 < r \leq 76/208$ se $d = 2$ e $0 < r \leq 11/16$ se $d = 3$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty, \end{cases}$$

onde $\mathcal{C}$ é a constante no enunciado do Teorema 6.2.2.

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 6.2.2, vamos tomar $\theta = 132/208$ se $d = 2$, $\theta = 21/16$ se $d = 3$ e $\theta = d - 2$ se $d \geq 4$. Desta forma teremos $0 < r \leq d - \theta - 1$. Usando (4.43) e (4.44), obtemos que $\theta_{N_k, N_{k+1}} \leq C_1 2^{\delta' k} N^{d-r}$ e assim para $1 \leq k \leq M$, da Observação 3.2.2 e do fato de que $n \asymp N^d$, segue que

$$\begin{aligned}
\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}} &\leq \log_2 C_1 + \delta' k + (d - r) \log_2 N \\
&\leq \log_2 C_1 + C_2 \delta' \log_2 \theta_{N_1, N_2} + (d - r) \log_2 N \\
&\leq \log_2 C_1 + C_3 (d - r) \log_2 N + (d - r) \log_2 N \\
&\leq C_4 \log_2 N \leq C_5 \log_2 n.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{1 \leq k \leq M} (\log_2 \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2} \leq C_6 (\log_2 n)^{1/2}. \quad (6.21)$$

Para $2 \leq q \leq \infty$, obtemos de (5.9)

$$\begin{aligned}
\chi_k &= 3 \sup_{n \geq 1} \left(\frac{2^{-k+1} \text{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\text{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \\
&\leq 3C \sup_{n \geq 1} (2^{-k+1})^{1/n} \left(\prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&\leq C_7 \sup_{n \geq 1} 2^{-k/n} \left(\prod_{j=1}^N |\lambda(j)|^{d_j} \right)^{1/n} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_{n \geq 1} (e^{\ln 2})^{-k/n} e^{-\gamma/n \sum_{j=1}^N j^r d_j} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_N e^{-(k \ln 2 + \gamma \sum_{j=1}^N j^r d_j)/n} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\
&= C_7 \sup_N e^{A_{N,k}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Usando (5.9), de modo análogo, podemos mostrar que

$$\chi_k \geq C_8 \sup_N e^{A_{N,k}},$$

e assim

$$e^{\sup_N A_{N,k}} \ll \chi_k \ll e^{\sup_N A_{N,k}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (6.22)$$

Pela Proposição 1.4.6, temos $d_l \geq (2^{1-d} \pi^{d/2} / \Gamma(d/2)) l^{d-1} - C l^\theta$. Tomando

$$f(x) = \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} x^{d+r-1} - C x^{\theta+r},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^N l^r d_l &\geq \sum_{l=1}^N \left(\frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d+r-1} - C l^{\theta+r} \right) = \sum_{l=1}^N f(l) \\
&\geq \int_0^N f(x) dx = \frac{2^{1-d} \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)(d+r)} N^{d+r} - \frac{C}{\theta+r+1} N^{\theta+r+1}. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Da Proposição 1.4.6, temos que $1/n \geq 1/(F N^d) - \bar{C}/(F^2 N^{d+1})$, onde $F = 2^{1-d} \pi^{d/2} / (d \Gamma(d/2))$, e assim

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{F N^d} - \frac{\bar{C} k}{F^2 N^{d+1}}.$$

Pela Observação 6.2.1, temos que $\sup_N A_{N,k}$ é atingido quando N verifica $N \asymp k^{1/(d+r)}$ e portanto existe uma constante absoluta C_9 satisfazendo

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{F N^d} - C_9 k^{(r-1)/(d+r)}$$

e como $0 < r \leq 1$, vem que

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{FN^d} - C_9 = \frac{d\Gamma(d/2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}}N^{-d} - C_9. \quad (6.24)$$

Usando mais uma vez que $1/n \geq 1/(FN^d) - \bar{C}/(F^2N^{d+1})$ e (6.23), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{n} \sum_{l=1}^N l^r d_l &\geq \left(\frac{\gamma}{FN^d} - \frac{\bar{C}\gamma}{F^2N^{d+1}} \right) \left(\frac{2^{1-d}\pi^{d/2}}{(d+r)\Gamma(d/2)} N^{d+r} - \frac{C}{\theta+r+1} N^{\theta+r+1} \right) \\ &= \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}\gamma}{F(d+r)\Gamma(d/2)} N^r - \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}\gamma\bar{C}}{F^2(d+r)\Gamma(d/2)} N^{r-1} \\ &\quad - \frac{\gamma C}{F(\theta+r+1)} N^{\theta+r+1-d} + \frac{\gamma C\bar{C}}{F^2(\theta+r+1)} N^{\theta+r-d} \\ &\geq \frac{2^{1-d}\pi^{d/2}\gamma}{F(d+r)\Gamma(d/2)} N^r - C_{10} \\ &= \frac{d\gamma}{d+r} N^r - C_{10}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

pois $0 < r \leq d-1-\theta$. Assim, de (6.24) e (6.25) segue que

$$A_{N,k} = -\frac{k}{n} \ln 2 - \frac{\gamma}{n} \sum_{l=1}^N l^r d_l \leq -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}} N^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} N^r + C_{11}. \quad (6.26)$$

Seja

$$g_1(x) = -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}} x^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} x^r + C_{11}.$$

Podemos verificar facilmente que o valor máximo absoluto da função g_1 é atingido em

$$x_k = \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$$

e assim

$$\begin{aligned} \sup_N A_{N,k} &\leq \sup_N g_1(N) \leq g_1(x_k) \\ &= \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2^{1-d}r\gamma\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} \left[-\frac{\gamma r}{d+r} - \frac{d\gamma}{d+r} \right] + C_{11} \\ &= -\gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)2^{d-1}d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} + C_{11} \\ &= -\mathcal{C}k^{r/(d+r)} + C_{11}. \end{aligned}$$

Segue então de (6.22) que

$$\chi_k \ll \begin{cases} e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ e^{\sup_N A_{N,k}} (\log_2 n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (6.27)$$

Quando $q = \infty$, usando (6.26) e que $n \asymp N^d$, obtemos

$$\begin{aligned} \chi_k &\ll e^{\sup_N A_{N,k}} (\log_2 n)^{1/2} = \sup_N e^{A_{N,k} + 1/2 \ln(\log_2 N)} \\ &\leq \sup_N e^{-\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}} N^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r} N^r + \frac{1}{2} \ln(\log_2 N) + C_{11}}. \end{aligned}$$

Consideremos a função g_2 dada por

$$g_2(x) = -\frac{d\Gamma(d/2)(\ln 2)k}{2^{1-d}\pi^{d/2}}x^{-d} - \frac{d\gamma}{d+r}x^r + \frac{1}{2}\ln(\log_2 x) + C_{11}.$$

De modo análogo ao que foi feito no Lema 6.1.1, a função g_2 atinge o seu valor máximo absoluto em um ponto $\bar{x}_k$ tal que $\bar{C}_1 x_k \leq \bar{x}_k \leq \bar{C}_2 x_k$, de onde $\sup_N g_2(N)$ é obtido quando $N \asymp \bar{x}_k \asymp x_k \asymp k^{1/(d+r)}$. Portanto, para $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \chi_k &\ll \sup_n e^{A_{N,k}} (\log_2 N)^{1/2} \ll \sup_N e^{A_{N,k}} (\log_2 k^{1/(d+r)})^{1/2} \\ &\ll \sup_N e^{A_{N,k}} (\log_2 k)^{1/2} = e^{\sup_N A_{N,k}} (\log_2 k)^{1/2} \\ &\leq e^{-Ck^{r/(d+r)} + C_{11}} (\log_2 k)^{1/2} \ll e^{-Ck^{r/(d+r)}} (\log_2 k)^{1/2}, \end{aligned}$$

e por (6.27) segue que

$$\chi_k \ll e^{-Ck^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \quad (6.28)$$

Vimos na demonstração do Teorema 4.2.4 que $\Lambda^{(2)} \in K_{\epsilon,2}$ para algum $\epsilon > 0$. Assim aplicando o Teorema 5.2.3, obtemos

$$\begin{aligned} e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\ll \chi_k + |\lambda(N)| \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq j \leq M} (\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}})^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty, \end{cases} \\ &\quad + |\lambda(N)| \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j} \theta_{N_j, N_{j+1}}^{1/2-1/q}. \end{aligned}$$

Também vimos na demonstração do Teorema 4.2.4 que

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p-1/q} \ll 1 \quad (6.29)$$

e que $\log_2 \theta_{N_j, N_{j+1}} \ll \log_2 n$. Como $\log_2 n \asymp \log_2 N^d \asymp \log_2 k^{d/(d+r)} \asymp \log_2 k$, então

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll \chi_k + \lambda(N) \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

No Teorema 5.2.3, k e N são considerados independentes. Assim, fixado um inteiro k , tomamos N como sendo o único inteiro tal que

$$\left(\frac{C}{\gamma}\right)^{1/r} k^{1/(d+r)} \leq N < \left(\frac{C}{\gamma}\right)^{1/r} k^{1/(d+r)} + 1.$$

Então temos que

$$\lambda(N) = e^{-\gamma N^r} \leq e^{-Ck^{r/(d+r)}},$$

e logo por (6.28) e pela estimativa acima, segue que

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-Ck^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Considerando o resultado do Teorema 5.2.3 para $1 \leq q < 2$, obtemos

$$e_\eta(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-Ck^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \quad (6.30)$$

Da Observação 3.2.2, de (3.14), (4.43) e de $N \asymp k^{1/(d+r)}$, segue que

$$\begin{aligned} \eta &= k + \sum_{j=1}^M m_j \leq k + \sum_{j=1}^M 2^{-\epsilon_j} \theta_{N_1, N_2} \leq k + C_{12} \theta_{N_1, N_2} \\ &\leq k + C_{13} N^{d-r} \leq k + C_{14} k^{(d-r)/(d+r)}, \end{aligned}$$

e assim, da Proposição 1.8.2 e de (6.30), obtemos

$$e_{[k+C_{14}k^{(d-r)/(d+r)}]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-Ck^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \quad (6.31)$$

Seja $\xi_k = k + C_{14}k^{(d-r)/(d+r)}$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-k^{r/(d+r)} + \xi_k^{r/(d+r)}) &= \mathcal{C}(-k^{r/(d+r)} + k^{r/(d+r)}(1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)})^{r/(d+r)}) \\ &= \mathcal{C}k^{r/(d+r)}(-1 + (1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)})^{r/(d+r)}) \\ &= \mathcal{C}k^{r/(d+r)} \left(\frac{rC_{14}}{d+r} k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2} k^{-4r/(d+r)} + \dots \right) \\ &= \mathcal{C} \left(\frac{rC_{14}}{d+r} k^{-r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2} k^{-3r/(d+r)} + \dots \right) \\ &\leq C_{15} \end{aligned}$$

portanto

$$-Ck^{r/(d+r)} \leq C_{15} - \mathcal{C}\xi_k^{r/(d+r)},$$

e logo

$$e^{-Ck^{r/(d+r)}} \leq e^{C_{15}} e^{-\mathcal{C}\xi_k^{r/(d+r)}} \ll e^{-\mathcal{C}\xi_k^{r/(d+r)}}.$$

Segue então de (6.31)

$$e_{[\xi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{C}\xi_k^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \quad (6.32)$$

Agora temos que

$$\begin{aligned} \xi_k^{r/(d+r)} &= k^{r/(d+r)}(1 + C_{14}k^{-2r/(d+r)})^{r/(d+r)} \\ &= k^{r/(d+r)} \left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r} k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2} k^{-4r/(d+r)} + \dots \right) \end{aligned}$$

e como consequência

$$\xi_k^{r/(d+r)} \geq k^{r/(d+r)} \left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r} k^{-2r/(d+r)} - \frac{rdC_{14}^2}{2(d+r)^2} k^{-4r/(d+r)} + \dots \right)$$

e

$$\xi_{k+1}^{r/(d+r)} \leq (k+1)^{r/(d+r)} \left(1 + \frac{rC_{14}}{d+r} (k-1)^{-2r/(d+r)} \right).$$

Verificamos facilmente que $0 < (k+1)^{r/(d+r)} - k^{r/(d+r)} \leq r/(d+r)$, assim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi_{k+1}^{r/(d+r)} - \xi_k^{r/(d+r)} \\ &\leq (k+1)^{r/(d+r)} - k^{r/(d+r)} + C_{16} \leq \frac{r}{d+r} + C_{16} = C_{17} \end{aligned}$$

e portanto

$$1 \leq \frac{e^{-C\xi_k^{r/(d+r)}}}{e^{-C\xi_{k+1}^{r/(d+r)}}} \leq C_{18}. \quad (6.33)$$

Seja agora l um inteiro satisfazendo $[\xi_k] \leq l \leq [\xi_{k+1}]$. Pela Proposição 1.8.2, (6.32) e (6.33) temos

$$\begin{aligned} e_l(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\leq e_{[\xi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \\ &\ll e^{-C\xi_k^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \\ &\ll e^{-C\xi_{k+1}^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \xi_k)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \\ &\leq e^{-Cl^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2(l+1))^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases} \\ &\leq e^{-Cl^{r/(d+r)}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ (\log_2 l)^{1/2}, & 2 \leq p \leq \infty, q = \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

Observação 6.2.4. Fazendo simples adaptações nas demonstrações dos Teoremas 6.2.2 e 6.2.3, podemos mostrar que os resultados desses teoremas permanecem válidos quando trocarmos o operador $\Lambda^{(2)}$ pelo operador $\Lambda_*^{(2)}$ e a constante $\mathcal{C}$ pela constante

$$\mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{r} \right)^{r/(d+r)}.$$

Observação 6.2.5. Todos os resultados desta seção são válidos, em particular, para o sistema de funções múltiplas de Walsh sobre I^d ou para o sistema de Walsh sobre $\mathbb{S}^l \times \cdots \times \mathbb{S}^l$.

Observação 6.2.6. Os resultados da Seção 6.1, para o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$, permanecem válidos exatamente como estão enunciados. Os da Seção 6.2, permanecem válidos trocando as constantes $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_*$ pela constantes (ver Observação 4.2.7)

$$\mathcal{C} = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)}, \quad \mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{r2^d} \right)^{r/(d+r)}.$$

7 Conclusões

Finalmente, vamos apresentar os resultados onde as estimativas são obtidas assintoticamente exatas em termos de ordem.

Sejam $\Lambda^{(1)}, \Lambda_*^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \Lambda_*^{(2)}$ os operadores multiplicadores definidos nas introduções dos Capítulos 4 e 6. Consideremos esses operadores definidos para um sistema ortonormal completo abstrato $\{\phi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d}$ como na Seção 2.2 do Capítulo 2. Em particular, esse pode ser o sistema de Walsh sobre $[0, 1)^d$ estudado no Capítulo 1, o sistema de Walsh sobre um produto $\mathbb{S}^l \times \cdots \times \mathbb{S}^l$ de d esferas l -dimensionais (ver Observação 3.2.7).

7.1 Estimativas assintoticamente exatas para operadores de primeiro e segundo tipo

Os resultados abaixo são verdadeiros para todas as situações descritas acima, para n -larguras de Kolmogorov, quando $\gamma, \xi, r \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\xi \geq 0$, $0 < r \leq 1$, e para números de entropia quando $\gamma, \xi, r \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\xi > 0$ e $0 < r \leq 1$ se $d \geq 4$, $0 < r \leq 76/208$ se $d = 2$ e $0 < r < 11/16$ se $d = 3$.

Corolário 7.1.1. *Para $p, q \in \mathbb{R}$, $2 \leq p, q < \infty$, e todo $k \in \mathbb{N}$ temos,*

$$d_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp d_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi}, \quad \gamma > d/2,$$

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}$$

e

$$d_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}_*k^{r/d}},$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d2^{d-1}\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2}} \right)^{r/d} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_* = \gamma.$$

Corolário 7.1.2. *Para $p, q \in \mathbb{R}$, $2 \leq p, q < \infty$, e todo $k \in \mathbb{N}$ temos,*

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp e_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi}, \quad \gamma > d/2,$$

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}$$

e

$$e_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}_*k^{r/(d+r)}},$$

onde

$$\mathcal{C} = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)2^{d-1}d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{r} \right)^{r/(d+r)}.$$

Corolário 7.1.3. *Se é considerado o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$ (ver Observação 3.2.8), então para $p, q \in \mathbb{R}$, $2 \leq p, q < \infty$, e todo $k \in \mathbb{N}$ temos,*

$$d_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp d_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi}, \quad \gamma > d/2,$$

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}$$

e

$$d_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}_*k^{r/d}},$$

onde

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \right)^{r/d} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_* = \gamma 2^{-r}.$$

Corolário 7.1.4. *Se é considerado o sistema trigonométrico sobre o toro $\mathbb{T}^d$ (ver Observação 3.2.8), então para $p, q \in \mathbb{R}$, $2 \leq p, q < \infty$, e todo $k \in \mathbb{N}$ temos,*

$$e_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp e_k(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\log_2 k)^{-\xi}, \quad \gamma > d/2,$$

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}k^{r/(d+r)}}$$

e

$$e_k(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{C}_*k^{r/(d+r)}},$$

onde

$$\mathcal{C} = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)d\Gamma(d/2)(\ln 2)}{2r\pi^{d/2}} \right)^{r/(d+r)} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_* = \gamma^{d/(d+r)} \left(\frac{(d+r)(\ln 2)}{r2^d} \right)^{r/(d+r)}.$$

Referências

- [1] Barrett, R., Gordon, J.A., Brammer, D., *Walsh Functions: an introduction. In the Proceedings of the Symposium Theory and Applications of Walsh Functions*. Hatfield Polytechnic Symposium, England, 1971. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 21.
- [2] Belinsky, E. S., *Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative*, *J. Approx. Theory* **93** (1998), 114-127. Citado na página 17.
- [3] Bordin, B., Kushpel, A., Tozoni, S., *Approximate characteristics of multiplier operators on the sphere*, in: K. Kopotun, T. Lyche, M. Neamtu (Eds.), *Trends in Approximation Theory*, Vanderbilt University Press, Nashville, 2001, p. 39-48. Citado na página 76.
- [4] Butzer, P. L., Engels, W., *Dyadic calculus and sampling theorems for functions with multidimensional domain I. General Theory*, *Inf. and Control* **52** (1982), 333-351. Citado 4 vezes nas páginas 17, 21, 36 e 39.
- [5] Butzer, P. L., Wagner, H. J., *Walsh series and the concept of a derivative*, *Applic. Anal.* **3** (1973), 29-46. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 36.
- [6] Chamizo, F., Iwaniec, H., *On the sphere problem*, *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995) 417-429. Citado na página 32.
- [7] Cohen, A., Daubechies, I., Guleryuz, O. G., Orchard, M. T., *On the importance of combining wavelet-based nonlinear approximation with coding strategies*, *IEEE Trans. Inform. Theory* **48** (2002), 1895-1921. Citado na página 17.
- [8] Córdoba, S. A., Tozoni, S. A., *Estimates for n -widths of multiplier operators of multiple Walsh series*, *J. Math. Anal. Appl.* **479** (2019), 1292-1323. Citado 4 vezes nas páginas 19, 49, 62 e 78.
- [9] Donoho, D. L., *Unconditional bases and bit-level compression*, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **3** (1996), 388-392. Citado na página 17.
- [10] Edmunds, D. E., Triebel, H., *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996. Citado na página 17.
- [11] Folland, G. B., *Real analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 17, 18, 21, 22, 26 e 54.
- [12] Gát, G., *Summation of Walsh-Fourier series, convergence and divergence*, *Bull. TICMI* **18** (2014), 65-74 Citado na página 16.

- [13] Ghodadra, B. L., *Order of magnitude of multiple Walsh-Fourier coefficients of functions of bounded p -variation*, *Int. J. Pure Appl. Math.* **82** (2013), 399-408. Citado na página 16.
- [14] Gluskin, E. D., *A certain problem concerning diameters*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **219** (1974), 527-530. Citado na página 17.
- [15] Goginava, U., *Almost everywhere summability of multiple Walsh-Fourier series*, *J. Math. Anal. Appl.* **287** (2003), 90-100. Citado na página 16.
- [16] Goginava, U., *Marcinkiewicz-Fejer means of d -dimensional Walsh-Fourier series*, *J. Math. Anal. Appl.* **307** (2005) 206-218. Citado na página 16.
- [17] Heath-Brown, D. R., *Lattice points in the sphere*, Number theory in progress Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1977), 883-892, de Gruyter, Berlin, 1999. Citado na página 32.
- [18] Huxley, M. N., *Exponential sums and lattice points III*, *Proc. London Math. Soc.* **87** (2003) 591-609. Citado na página 32.
- [19] Ismagilov, R. S., *Diameters of sets in normed linear spaces, and the approximation of functions by trigonometric polynomials*, *Uspehi Mat. Nauk* **29** (1974), 161-178. Citado na página 17.
- [20] Kashin, B. S., *On Kolmogorov diameters of octahedra*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **214** (1974), 1024-1026. Citado na página 17.
- [21] Kashin, B. S., *Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, *Math. USSR Izv.* **11** (1977), 317-333. Citado na página 17.
- [22] Kolmogorov, A., *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, *Ann. of Math.* **37** (1936), 107-110. Citado na página 17.
- [23] Kushpel, A., Stábile, R. L. B., Tozoni, S. A., *Estimates for n -widths of sets of smooth functions on the torus $\mathbb{T}^d$* , *J. Approx. Theory* **183** (2014), 45-71. Citado 6 vezes nas páginas 18, 19, 49, 62, 77 e 78.
- [24] Kushpel, A., Tozoni, S. A., *Entropy and widths of multiplier operators on two point homogeneous spaces*, *Constr. Approx.* **35** (2012), 137-180. Citado 6 vezes nas páginas 18, 49, 62, 78, 102 e 111.
- [25] Kwapien, S., *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, *Studia Math.* **44** (1972), 583-595. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 54.

- [26] Maiorov, V. E., *Discretization of the problem of diameters*, *Uspehi Mat. Nauk* **30** (1975), 179-180. Citado na página 17.
- [27] Makovoz, J. I., *Diameters of Sobolev classes and splines deviating least from zero*, *Mat. Zametki* **26** (1979), 805-812. Citado na página 17.
- [28] Milaré, G. H., *Estimativas para Entropia de Operadores Multiplicadores de Séries de Walsh*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- [29] Moricz, F., *On the convergence of double orthogonal series*, *Analysis Math.* **2** (1976), 287-304. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 30.
- [30] Muscalu, C., Tao, T., Thiele, C., *Uniform estimates on multi-linear operators with modulation symmetry*, *J. Anal. Math.* **88** (2002), 255-309. Citado na página 16.
- [31] Muscalu, C., Tao, T., Thiele, C., *L^p estimates for the biest. I. The Walsh case*, *Math. Ann.* **329** (2004), 401-426. Citado na página 16.
- [32] Muscalu, C., Tao, T., Thiele, C., *L^p estimates for the biest. II. The Fourier case*, *Math. Ann.* **329** (2004) 427-461. Citado na página 16.
- [33] Pajor, A., Tomczak-Jaegermann, N., *Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 637-642. Citado 3 vezes nas páginas 18, 63 e 107.
- [34] Paley, R. E. A. C., *A remarkable series of orthogonal functions*, *Proc. London Math. Soc.* **34** (1932), 241-279. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 21.
- [35] Persson, L. E., *On an Aproximation of 2-dimensional Walsh-Fourier series in Martingale Hardy space*, *Ann. Funct. Anal.* **9** (2018), 137-150. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 29.
- [36] Pietsch, A., *Operator Ideals*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 17, 18 e 54.
- [37] Pinkus, A., *n -Widths in Approximation Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 43.
- [38] Pisier, G., *The volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 102.
- [39] Plotnikov, M. G., *Coefficients of convergent multiple Walsh-Paley series*, *Sb. Math.* **203** (2012), 1295-1309. Citado na página 16.

- [40] Plotnikov, M. G., *Multiple Walsh series and Zygmund sets*, *Math. Notes* **95** (2014), 686-696. Citado na página 16.
- [41] Rudin, W., *L^2 -approximation by partial sums of orthogonal developments*, *Duke Math. J.* **19** (1952), 1-4. Citado na página 17.
- [42] Schipp, F., Wade, W. R., Simon, P., *Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*. Adam Hilger, New York, 1990. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 21, 25, 30, 36 e 37.
- [43] Scholz, R., *Durchmesserüberschätzungen für die Einheitskugel des Sobolev-Raumes $W_q^\gamma(U)$ in $L_p(U)$* , *Applicable Anal.* **5** (1976), 257-264. Citado na página 17.
- [44] Sjölin, P., *An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series*, *Ark. Mat.* **7** (1968), 551-570. Citado na página 16.
- [45] Sjölin, P., *Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series*, *Ark. Mat.* **9** (1971), 65-90. Citado na página 16.
- [46] Stábile, R. L. B., *Estimativas para n -larguras e Números de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves sobre o Toro $\mathbb{T}^d$* . Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Citado 11 vezes nas páginas 17, 18, 21, 43, 49, 53, 62, 77, 78, 102 e 111.
- [47] Stábile, R. L. B., Tozoni, S. A., *Estimates for entropy numbers of sets of smooth functions on the torus $\mathbb{T}^d$* , *J. Approx. Theory* **235** (2018), 92-115. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 77, 102 e 111.
- [48] Stechkin, S. R., *The best approximation of given classes of function*, *Uspehi Mat. Nauk* **9** (1954), 133-134. Citado na página 17.
- [49] Thiele, C., *The quartile operator and pointwise convergence of Walsh series*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 5745-5766. Citado na página 16.
- [50] Tozoni, S. A., *Weighted inequalities for vector operators on martingales*, *J. Math. Anal. Appl.* **191** (1995), 229-249. Citado na página 16.
- [51] Tozoni, S. A., *Médias de Levy e n -larguras de operadores multiplicadores de séries de Walsh*. Manuscrito, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 49 e 62.
- [52] van der Vaart, A. W., Wellner, J. A., *Weak Convergence and Empirical Processes*. Springer-Verlag, New York, 1996. Citado na página 17.
- [53] Weisz, F., *Convergence of double Walsh-Fourier series and Hardy spaces*, *Approx. Theory Appl.* **17** (2001), 32-44. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 21 e 36.