



Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

DAVID LEVI DA SILVA MACÊDO

Identities Polinomiais em Representações de Álgebras de Lie e Crescimento das Codimensões

CAMPINAS

2019

David Levi da Silva Macêdo

Identities Polinomiais em Representações de Álgebras de Lie e Crescimento das Codimensões

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO DAVID LEVI DA
SILVA MACÊDO E ORIENTADA PELO PROF. DR.
PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M151i Macêdo, David Levi da Silva, 1992-
Identidades polinomiais em representações de álgebras de Lie e crescimento das codimensões / David Levi da Silva Macêdo. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebras associativas. 2. Lie, Álgebra de. 3. Representações de álgebras. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Polynomial identities of representations of Lie algebras and growth of the codimensions

Palavras-chave em inglês:

Associative algebras

Lie algebras

Representations of algebras

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]

Adriano Adrega de Moura

Lucio Centrone

Irina Sviridova

Alexei Nikolaevich Krassilnikov

Data de defesa: 21-08-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-8151-0843>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3432177281707815>

**Tese de Doutorado defendida em 21 de agosto de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof(a). Dr(a). IRINA SVIRIDOVA

Prof(a). Dr(a). ALEXEI NIKOLAEVICH KRASSILNIKOV

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que tem concedido em minha vida.

Aos meus pais, Maria José e Maurilo Macêdo, meu irmão Efraim, e toda minha família, que me apoiaram sempre desde o início dos meus estudos.

Aos professores do meu ensino fundamental e médio que contribuíram muito para minha formação, tanto acadêmica quanto pessoal. Em especial, os professores Neto, Samuel, Socorro e Valda, por terem organizado um cursinho pré-vestibular para nossa turma na época sem nenhum retorno financeiro.

Aos professores do CCET-UFRN que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica durante a graduação. Em especial, aos grandes amigos Léo, Ruan e Raphael Moreira do grupo PET-Matemática da UFRN.

Aos amigos do mestrado e do doutorado em Matemática. Em especial, os amigos Alan de Araújo, Claudemir Fideles, Antônio Marcos (Pajé), José Luando e Francisco Vieira.

Aos professores do departamento de Matemática da UFCG que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica durante o mestrado. Principalmente aos professores Diogo Diniz e Antônio Brandão que foram meus orientadores e influenciaram bastante em meu ingresso no doutorado.

Gostaria de agradecer imensamente ao meu orientador, Professor Plamen Emilov Koshlukov, que com muita paciência, compartilhou seus conhecimentos e experiências e me indicou o caminho para poder concluir a tese de doutorado.

Gostaria de agradecer também à banca examinadora da defesa, por terem dedicado seu tempo para ler e corrigir a tese, além de me concederem ótimas sugestões e conselhos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. O trabalho contou também com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) número de processo 140690/2017-4.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre identidades polinomiais de representações de álgebras de Lie, as quais são um caso particular das identidades fracas. Essas identidades estão relacionadas a pares da forma (A, L) , onde A é uma álgebra associativa envolvente para a álgebra de Lie L . Primeiramente, obtemos uma caracterização dos ideais de identidades fracas com crescimento polinomial das codimensões em termos da sua sequência de cocaracteres, sobre um corpo de característica zero. Além disso, provamos que os pares $(UT_2, UT_2^{(-)})$, $(E, E^{(-)})$ e (M_2, sl_2) geram variedades de pares com crescimento quase polinomial. Aqui E denota a álgebra de Grassmann de dimensão infinita com unidade, UT_2 a subálgebra associativa de M_2 (matrizes 2×2 sobre um corpo K) formada pelas matrizes triangulares superiores e sl_2 a subálgebra de Lie de $M_2^{(-)}$ composta pelas matrizes de traço zero. Em um segundo momento da tese, mostramos que toda variedade de pares de tipo associativo é gerada pelo envelope de Grassmann de um superpar finitamente gerado. Como consequência obtemos que toda variedade de pares especial, que não contém pares da forma (R, sl_2) , é formada por pares com álgebra de Lie solúvel. Por fim, estabelecemos um exemplo de par que contradiz uma conjectura devida a Amitsur, a qual é válida no caso associativo, em alguns casos para álgebras de Lie e de Jordan, e em identidades de representações de álgebras de Lie de dimensão finita.

Abstract

In this thesis we study polynomial identities of representations of Lie algebras, which are a particular case of weak identities. These identities are related to pairs of the form (A, L) where A is an associative enveloping algebra for the Lie algebra L . First we obtain a characterization of ideals of weak identities with polynomial growth of codimensions in terms of their cocharacter sequence, over a field of characteristic zero. Moreover we prove that the pairs $(UT_2, UT_2^{(-)})$, $(E, E^{(-)})$ and (M_2, sl_2) generate varieties of pairs with almost polynomial growth. Here E denotes the infinite dimensional Grassmann algebra with 1. Also UT_2 is the associative subalgebra of M_2 (the 2×2 matrices over the field K) consisting of the upper triangular matrices and sl_2 is the Lie subalgebra of $M_2^{(-)}$ consisting of the traceless matrices. Second we show that any variety of pairs of associative type is generated by the Grassmann envelope of a finitely generated superpair. As a corollary we obtain that any special variety of pairs which does not contain pairs of type (R, sl_2) , consists of pairs with a solvable Lie algebra. Finally we give an example of a pair that contradicts a conjecture due to Amitsur. The Amitsur's conjecture is valid in the associative case, and also in some classes of Lie and Jordan algebras, and in identities of finite dimensional representations of Lie algebras.

Conteúdo

Introdução	10
1 Conceitos Preliminares	16
1.1 Álgebras associativas e de Lie	16
1.2 Pares livres	24
1.3 Identidades polinomiais	27
1.3.1 Polinômios multi-homogêneos e multilineares	30
1.3.2 Identidades associativas e de Lie	32
1.4 Representações de grupos	33
1.4.1 Representações de S_n	35
1.4.2 S_n -ações nos polinômios multilineares	40
1.4.3 Pares especiais e de tipo associativo	46
1.4.4 A ação do grupo geral linear	47
2 Crescimento Polinomial das Codimensões	51
2.1 Crescimento lento das codimensões	52
2.2 Uma caracterização por diagramas de Young	57
2.3 Crescimento quase polinomial	64
2.3.1 O par $(UT_2, UT_2^{(-)})$	64
2.3.2 O par $(E, E^{(-)})$	72
2.3.3 O par (M_2, sl_2)	73
2.3.4 Outros exemplos	79
3 Pares Graduados e a Conjectura de Amitsur	83
3.1 Pares G-graduados e identidades fracas graduadas	84
3.1.1 Superpares e supervarietades	87

3.2	Superpares finitamente gerados	91
3.3	Um exemplo de não integralidade do expoente	98
3.3.1	Limitação superior	104
3.3.2	Limitação inferior	106
Bibliografia		112

Introdução

A teoria de álgebras com identidades polinomiais (ou PI-teoria) é uma parte importante da teoria de anéis e álgebras. Seus objetos de estudo são as chamadas PI-álgebras, ou álgebras com identidades polinomiais. As álgebras de matrizes, as de dimensão finita e as comutativas fazem parte dessa classe e seu estudo é significativo, tendo em vista as diversas aplicações dessas estruturas. São três as principais linhas de pesquisa sobre PI-álgebras. A primeira (e a mais clássica) estuda as propriedades de uma álgebra (ou um anel) sabendo-se que ela satisfaz alguma identidade polinomial. Em outras palavras, se A é uma álgebra que satisfaz alguma identidade polinomial, o que podemos dizer sobre a estrutura de A ? A segunda linha representa-se por pesquisas sobre as classes de álgebras que satisfazem um dado sistema de identidades polinomiais; tais classes são chamadas de *variedades de álgebras*. A terceira estuda as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra interessante. Gostaríamos de deixar claro que tal divisão não é definitiva nem exata e que os problemas na PI-teoria, na maioria das vezes, estão interligados, bem como usam métodos e técnicas provenientes de diversas partes da Álgebra, da Combinatória e outras áreas da Matemática.

Os primeiros estudos sobre PI-álgebras, ainda de forma implícita, apareceram em trabalhos de Sylvester no século XIX, e posteriormente com Dehn [11] e Wagner [54] nas décadas de 20 e 30. Mas foi a partir de 1948, com o artigo de Kaplansky [29], que se teve um interesse de forma mais intensa na área. Dois anos após o trabalho de Kaplansky, Amitsur e Levitzki [1] mostraram usando métodos combinatórios que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade de grau minimal para a álgebra das matrizes de ordem n . Esse resultado contribuiu para um novo caminho dentro da PI-teoria, que seria descrever as identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra. O trabalho de Amitsur e Levitzki foi de extrema importância não apenas pelo seu resultado principal mas também por introduzir de maneira essencial métodos da combinatória no estudo de álgebras com

identidades polinomiais. Tais métodos foram aperfeiçoados mais adiante. Atualmente eles incluem a teoria das representações do grupo simétrico e geral linear (muito utilizados neste trabalho também), a teoria dos invariantes dos grupos clássicos, etc., e representam uma das fundamentais ferramentas na teoria.

Denote por $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre unitária em um conjunto enumerável de variáveis X . As identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra associativa formam um ideal em $K\langle X \rangle$, chamado de T-ideal. É de fácil verificação que os T-ideais são invariantes por endomorfismos de $K\langle X \rangle$. Mais ainda, todo ideal de $K\langle X \rangle$, invariante por endomorfismos, é o T-ideal de alguma álgebra. A correspondência entre T-ideais e álgebras não é biunívoca, pois álgebras não isomorfas podem ter o mesmo ideal de identidades (o exemplo mais trivial sendo K e $K \oplus K$), mas existe uma correspondência biunívoca entre T-ideais e variedades. Uma variedade de álgebras é uma classe de álgebras que satisfazem um dado conjunto de identidades. Esse conceito foi introduzido por Birkhoff [7] e Malcev [38], e se tornou uma linguagem natural na teoria de identidades. Vale ressaltar que a correspondência entre T-ideais e variedades é do tipo da conhecida correspondência de Galois, isto é, inverte as inclusões.

Um dos principais e mais difíceis problemas na PI-teoria é descrever um T-ideal em função de um conjunto gerador (também chamado de base). Uma base de identidades concretas para a álgebra das matrizes $M_n(K)$ de ordem n sobre o corpo K é conhecida somente quando $n \leq 2$, ver [45] para $\text{char} K = 0$, e [35, 9] para $\text{char} K = p > 2$. Specht [51], em 1950, conjecturou que sobre um corpo de característica zero todo T-ideal próprio em $K\langle X \rangle$ é finitamente gerado, como T-ideal. Essa conjectura ficou conhecida como *Problema de Specht*, e motivou um grande desenvolvimento na teoria de identidades polinomiais, onde inicialmente se consideravam álgebras sobre corpos de característica zero.

O Problema de Specht foi resolvido apenas em 1987 por Kemer, como pode ser visto em [30]. Sua prova é baseada em uma teoria sofisticada sobre T-ideais, e envolve os conceitos de superidentidades e produtos tensoriais graduados com a álgebra de Grassmann, chamados de envelopes de Grassmann. Nesse trabalho, além da solução do problema de Specht, Kemer também mostrou que toda variedade não trivial de álgebras associativas é gerada pelo envelope de Grassmann de uma superálgebra de dimensão finita. Um resultado semelhante é válido para amplas classes de álgebras não associativas. Mais

precisamente, Mishchenko e Zaicev [60] mostraram que toda variedade de álgebras de Lie de tipo associativo é gerada pelo envelope de Grassmann de uma superálgebra finitamente gerada.

Apesar de sua grande importância, o trabalho de Kemer nos garante apenas finitude da base dos T-ideais. Além disso, em característica positiva, o problema de Specht tem resposta negativa, como pode ser visto nos trabalhos de Belov [3, 4], Grishin [21] e Shchigolev [49], no caso de álgebras associativas. Para álgebras de Lie, o primeiro contra-exemplo foi dado por Vaughan-Lee em [58].

Trabalhar com identidades ordinárias, como regra, quase sempre é complicado. Portanto estudam-se outros tipos de identidades polinomiais nos ambientes associativo e não associativo, tais como identidades polinomiais com traço, com involução e identidades polinomiais graduadas. Vamos destacar um tipo de identidade envolvendo álgebras associativas e não associativas que são as identidades fracas. Um polinômio f em $K\langle X \rangle$ é dito uma identidade polinomial fraca de um par (A, L) , onde A é uma álgebra associativa envolvente da álgebra de Lie L , quando ele se anula em A para qualquer substituição por elementos de L . Nesse caso, o ideal de identidades fracas é chamado de ideal fraco e é invariante por endomorfismos do par livre $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$, onde $\mathcal{L}(X)$ é a álgebra de Lie livre. Essas identidades foram introduzidas em 1973 por Razmyslov [44] e foram cruciais na descrição das identidades da álgebra matricial $M_2(K)$, bem como da álgebra de Lie simples $sl_2(K)$. No mesmo trabalho Razmyslov determinou base finita de identidades para a álgebra de Lie $sl_2(K)$ das matrizes de ordem 2 de traço zero, bem como das identidades fracas do par $(M_2(K), sl_2(K))$ (tudo isso em característica zero). Generalizações de identidades fracas mostraram-se bastante importantes em vários estudos de álgebras não associativas: de Lie, de Jordan. Destacamos também a importância das identidades fracas nos estudos realizados por Razmyslov no seu livro [45] e, mais tarde, em vários trabalhos de Iltyakov [25] e Vasilovsky [57, 56].

O método de investigação das identidades (ordinárias ou fracas) depende da característica do corpo. Se o corpo base é de característica zero, então todas identidades seguem das multilineares. Nessa situação, podemos fazer uso de uma importante ferramenta que é a teoria de representações do grupo simétrico S_n , ou numa linguagem alternativa, as representações polinomiais do grupo geral linear. Muitas vezes, é possível obter uma base das identidades usando a descrição das representações irredutíveis de S_n . Em

outras palavras, associa-se ao T-ideal, ou ideal de identidades fracas, uma sequência de caracteres de S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, chamada de sequência de cocaracteres. Essa sequência, juntamente com a chamada sequência de codimensões, é usada para medir o crescimento das identidades de uma álgebra ou do par em questão. Denotamos por P_n o espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n em $x_1, \dots, x_n$ em $K\langle X \rangle$, este espaço tem como base os monômios $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, $\sigma \in S_n$, onde S_n denota o grupo simétrico. Este espaço é módulo (à esquerda) sobre S_n , e ainda $P_n \cong KS_n$, onde KS_n denota o módulo regular à esquerda. Se A é uma álgebra com T-ideal $Id(A)$ então $Id(A) \cap P_n$ é um submódulo de P_n e $P_n(A) = P_n / (P_n \cap Id(A))$ herda a estrutura de S_n -módulo. O cocaracter de A é o caracter de $P_n(A)$, e a n -ésima codimensão de A é $c_n(A) = \dim P_n(A)$.

Uma PI-álgebra é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial. No caso associativo, o estudo do crescimento de T-ideais teve início com o importante teorema de Regev [46] que estabelece que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra associativa é limitada exponencialmente. Mais precisamente Regev demonstrou que se A satisfaz uma identidade de grau d então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$, para todo n . Ressaltamos que este resultado foi essencial para a obtenção de outro teorema importante (no mesmo trabalho de Regev): o produto tensorial de duas álgebras PI de novo é PI. O teorema de Regev mostra que o estudo do cocaracter e das codimensões de uma PI-álgebra A pode ser mais viável do que trabalhar com $P_n \cap Id(A)$: temos $\dim P_n = n!$ e por consequência as identidades multilineares tornam-se “quase” todo P_n quando $n \rightarrow \infty$, pois $(d-1)^{2n}$ tem crescimento muito mais lento que $n!$

Por outro lado, para álgebras de Lie existem exemplos de crescimento mais que exponencial ([53, 43]). Giambruno e Zaicev, em 1999, resolveram em afirmativo a conjectura de Amitsur que o expoente da taxa de crescimento de qualquer T-ideal associativo próprio é um inteiro, chamado de expoente da PI-álgebra ([16, 19]). Formalmente, $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(A)^{1/n})$, quando esse último limite existe. Análogos desse resultado foram obtidos por Zaicev [59] para álgebras de Lie de dimensão finita e por Gordienko [20] para identidades de representações de álgebras de Lie de dimensão finita, o qual é um caso particular de identidades fracas. Além disso, existem contraexemplos da não validade da conjectura de Amitsur no ambiente de álgebras de Lie ([61, 17]). São conhecidos exemplos de álgebras onde o expoente existe e não é inteiro, ou nem existe.

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico das codimensões fracas, com

ênfase no caso de representações de álgebras de Lie, e a validade da conjectura de Amitsur para ideais fracos, quando o corpo é de característica zero. A tese está estruturada assim.

O primeiro capítulo contém uma parte dos resultados básicos necessários nos capítulos seguintes. Iniciamos com o conceito de álgebra enfatizando duas grandes classes: associativas e de Lie. Assim, estabelecemos a noção de par associativo-Lie, o qual é o principal objeto de estudo deste trabalho. Obtemos vários exemplos que serão importantes ao longo do texto. Definimos também os conceitos de par relativamente livre, identidades de pares, variedades de pares e discutimos esses conceitos nos ambientes associativo e de Lie. Em seguida, fazemos um breve resumo da teoria de representações de grupos, tanto para um grupo qualquer quanto para o grupo simétrico S_n , e estabelecemos os conceitos de codimensões e PI expoente. Definimos os pares especiais e de tipo associativo. Por fim, discutimos sobre a teoria de representações do grupo geral linear.

No segundo capítulo obtemos propriedades com relação ao crescimento polinomial das codimensões de identidades fracas, onde consideramos um corpo de característica zero. Mais precisamente, vemos que alguns resultados não se mantêm quando deixamos o ambiente de Lie e estamos trabalhando no ambiente associativo-Lie. Além disso, estabelecemos uma caracterização para o crescimento polinomial das codimensões por meio das representações irredutíveis de S_n . Uma caracterização análoga foi obtida por Kemer [31] para álgebras associativas e por Benediktovich e Zaleskii [5] para álgebras de Lie. Obtemos as codimensões, cocaracteres e o expoente para os pares $(UT_2, UT_2^{(-)})$, $(E, E^{(-)})$ e (M_2, sl_2) , os quais estão relacionados com algumas representações das correspondentes álgebras de Lie. Em seguida, mostramos que esses pares geram variedades com crescimento quase polinomial das codimensões. Ressaltamos que as álgebras de Lie $UT_2^{(-)}$ e $E^{(-)}$ não possuem crescimento quase polinomial das codimensões. Mostramos também a existência de pares que não possuem crescimento quase polinomial das codimensões fracas, mas as álgebras de Lie desses pares, quando vistas como álgebras de Lie, possuem crescimento quase polinomial das codimensões de Lie.

No terceiro e último capítulo estabelecemos uma teoria análoga à de álgebras graduadas para o caso de pares. Assim, definimos identidades fracas graduadas para os chamados pares graduados. Considerando pares $\mathbb{Z}_2$ -graduados, chamados de superpares, e com base na teoria desenvolvida por Kemer [30], obtemos que toda variedade de pares de tipo associativo é gerada pelo envelope de Grassmann de um superpar finitamente

gerado. Consequentemente, obtemos que toda variedade de pares especial, que não contém pares da forma (R, sl_2) , é formada por pares com uma álgebra de Lie solúvel. Por fim, estabelecemos um exemplo de par associativo-Lie em que o expoente, caso exista, não pode ser um número inteiro.

Uma boa parte dos resultados contidos nos capítulos 2 e 3 é nova. Destacamos aqui a caracterização para crescimento polinomial das codimensões de um par associativo-Lie, bem como o cálculo das codimensões e dos cocaracteres dos pares mencionados acima, e os fatos acerca do crescimento (Capítulo 2). Os resultados do Capítulo 3 mencionados acima também são novos. Os resultados dos dois capítulos estão em fase final de elaboração e serão submetidos em breve para publicação.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Em todo o capítulo K denotará um corpo e todos os espaços vetoriais e álgebras serão sobre K . Parte dos conceitos, resultados e propriedades que introduziremos aqui não exige restrições sobre o corpo. Por outro lado, nossos principais resultados exigem álgebras sobre corpos de característica zero. Portanto, fixaremos o corpo K de característica zero, a menos que se mencione o contrário.

Para mais detalhes sobre os conceitos abordados nesse capítulo indicamos [19], [13] e [45].

1.1 Álgebras associativas e de Lie

Definição 1.1.1 *Uma K -álgebra (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) consiste de um par $(A, *)$, onde A é um K -espaço vetorial e $*$: $A \times A \rightarrow A$ é uma operação bilinear.*

A operação $*$ é chamada multiplicação (ou produto) da álgebra A , a qual denotaremos por justaposição ab , $a, b \in A$. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, o produto $a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2 \cdots a_{n-1})a_n$, para quaisquer $a_i \in A$. Um subconjunto β de A é uma *base* da álgebra se é uma base do espaço vetorial A e definimos a *dimensão de A* , denotada usualmente $\dim A$ (ou $\dim_K A$, quando há necessidade de destacar qual o corpo), como sendo a dimensão de A vista como espaço vetorial.

Definição 1.1.2 *Dizemos que uma álgebra A é:*

- i) Associativa se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$. Nesse caso, também temos uma estrutura de anel para A ;*

- ii) *Comutativa* se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$;
- iii) *Unitária (ou com unidade)* se o produto possui um elemento neutro, ou seja, se existe $1_A \in A$ tal que $a1_A = 1_Aa = a$ para todo $a \in A$. O elemento 1_A é chamado de unidade da álgebra A , e usualmente o denotaremos simplesmente por 1 ;
- iv) *Nilpotente* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o produto de quaisquer n elementos com qualquer disposição de parênteses é nulo (se A é associativa isto equivale a $a_1a_2 \cdots a_n = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$ e escrevemos $A^n = 0$). O menor valor de n que satisfaz esta condição é dito o índice (ou classe) de nilpotência de A .

Vejamos alguns exemplos que serão importantes ao longo do texto.

Exemplo 1.1.3 O espaço vetorial $M_n(K)$ (ou simplesmente M_n) das matrizes de ordem n sobre o corpo K com a multiplicação usual de matrizes é uma álgebra associativa e unitária, cuja unidade é a matriz identidade I_n . Nessa álgebra é importante destacar as matrizes elementares E_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, em que E_{ij} é a matriz com entrada 1 na coordenada (i, j) e as demais entradas são nulas. Essas matrizes formam uma base para $M_n(K)$, e $E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$, o que determina o produto em M_n . Aqui δ_{jp} é o símbolo de Kronecker, $\delta_{jp} = 0$ se $j \neq p$ e $\delta_{jj} = 1$.

Exemplo 1.1.4 Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. A álgebra de Grassmann, denotada por E , é definida como a álgebra associativa e unitária com base $\{1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \cdots e_{i_l} \mid i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_l, l \geq 1\}$ cujo produto é dado por $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$, $i, j \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que este produto é bem definido. Podemos escrever $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços gerados pelos monômios de tamanho par (juntamente com 1) e ímpar, respectivamente. Temos que $ax = xa$, para $a \in E_0$ e $x \in E$, e $yz = -zy$, para $z, y \in E_1$. No caso em que $\text{char}K = 2$, E é uma álgebra comutativa.

Exemplo 1.1.5 Seja V um espaço vetorial. O espaço vetorial $\text{End}_K(V)$ (ou simplesmente $\text{End}(V)$) de todos os operadores lineares de V munido da composição de operadores dada por

$$(\varphi \circ \psi)(v) = \varphi(\psi(v)),$$

$\varphi, \psi \in \text{End}_K(V)$ e $v \in V$, é uma álgebra associativa e com unidade. Se $\dim V = n$ sabemos que $\text{End}_K(V) \cong M_n(K)$. Mais ainda, o conhecido teorema de Skolem e Noether

[23, Teorema 4.3.1, p. 99] garante que os isomorfismos entre essas duas álgebras são dados apenas por escolha da base em V .

Exemplo 1.1.6 *Seja G um grupo. O espaço KG de todas as combinações lineares formais $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, $\lambda_g \in K$, é uma álgebra com base formada pelos elementos de G e produto induzido pela multiplicação entre os elementos do grupo. Esta álgebra é chamada de álgebra de grupo.*

Exemplo 1.1.7 *Sejam A e B álgebras sobre K . O produto*

$$(x_1 \otimes y_1) \cdot (x_2 \otimes y_2) = x_1 x_2 \otimes y_1 y_2,$$

$x_1, x_2 \in A$ e $y_1, y_2 \in B$, torna o espaço tensorial $A \otimes B$ uma álgebra chamada de produto tensorial entre A e B . Se A e B são álgebras com bases $\beta_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $\beta_2 = \{w_j \mid j \in J\}$, respectivamente, então o conjunto $\beta = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é uma base de $A \otimes B$. Além disso, se A e B possuírem unidade, então $1_A \otimes 1_B$ é a unidade do produto tensorial.

Definição 1.1.8 *Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço B de A é uma subálgebra se é fechado com respeito à multiplicação, ou seja, $BB \subseteq B$. Um subespaço I de A é um ideal (bilateral) de A se $IA \subseteq I$ e $AI \subseteq I$. No caso em que I satisfaz apenas $AI \subseteq I$ ou $IA \subseteq I$, dizemos que I é ideal à esquerda ou ideal à direita, respectivamente.*

Exemplo 1.1.9 *O espaço $UT_n(K)$ (ou simplesmente UT_n) das matrizes triangulares superiores de ordem n com entradas em K é uma subálgebra associativa de $M_n(K)$.*

Exemplo 1.1.10 *Dada uma álgebra associativa A o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in A\}$$

é uma subálgebra de A chamada de centro de A . Não é difícil ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares). Quanto à álgebra de Grassmann, temos que $Z(E) = E_0$, quando $\text{char} K \neq 2$, e $Z(E) = E$ se $\text{char} K = 2$, pois neste caso E é comutativa.

Exemplo 1.1.11 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . O espaço vetorial quociente A/I munido do produto $(a + I)(b + I) = ab + I$, para quaisquer $a, b \in A$, é uma álgebra chamada de álgebra quociente de A por I .*

Exemplo 1.1.12 *Seja A uma álgebra associativa e $S \subseteq A$ (não vazio). Definimos a subálgebra gerada por S , denotada por $\langle S \rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S . Verifica-se que $\langle S \rangle$ é gerado, como espaço vetorial, pelo conjunto $\{s_1 s_2 \cdots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$.*

Definição 1.1.13 *Dada uma álgebra associativa e unitária A , definimos o radical de Jacobson de A , denotado por $J(A)$, como sendo a interseção de todos os ideais maximais à direita (ou à esquerda) de A . Se $J(A) = 0$, dizemos que A é semissimples.*

Aqui comentamos que a definição anterior pode ser modificada para o caso de álgebras associativas não necessariamente unitárias. De modo geral, $J(A)$ é a interseção de todos anuladores de A -módulos à direita (ou à esquerda) irredutíveis, ou ainda a interseção dos ideais primitivos de A (veja [23], Cap. 1). (Considerando A como anel apenas não altera $J(A)$.)

Exemplo 1.1.14 *O radical de Jacobson da álgebra UT_n , $n > 1$, consiste das matrizes estritamente triangulares superiores, isto é, das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal principal.*

Dentre as classes de álgebras estudadas nesse trabalho, vamos destacar as associativas e mais um tipo especial de álgebra ainda não mencionado anteriormente.

Definição 1.1.15 *Seja L uma álgebra. Dizemos que L é uma álgebra de Lie, e denotamos sua operação por $(x, y) \mapsto [x, y]$ (colchete ou comutador), se satisfaz*

$$i) \quad [a, a] = 0, \text{ para todo } a \in L;$$

$$ii) \quad [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \text{ para quaisquer } a, b, c \in L.$$

A relação (ii) é chamada de identidade de Jacobi. Note que, se $\text{char} K \neq 2$, (i) é equivalente a $[a, b] = -[b, a]$ e chamamos essa relação de anticomutatividade (ou antissimetria).

Uma álgebra de Lie L não é necessariamente associativa, já que $[[a, a], b] = 0$ mas $[a, [a, b]]$ nem sempre é nulo. Pela identidade de Jacobi, L é associativa se, e somente se, o colchete de três elementos de L é nulo. Além disso, segue de (i) que se $L \neq 0$ e $\text{char} K \neq 2$, L não possui unidade (e que não faz sentido falar sobre unidade em álgebras de Lie).

Dizemos que uma álgebra de Lie L é *abeliana* se $[a, b] = 0$ para quaisquer $a, b \in L$. Quando L não possui ideais próprios e $\dim L > 1$ é dita *simples*.

De acordo com a definição feita no início dessa seção para o produto de n elementos, temos no caso de álgebras de Lie os comutadores normados à esquerda. Em outras palavras dada uma álgebra de Lie L um *comutador de Lie* de tamanho n é definido indutivamente por

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1, \quad [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n], \quad n > 2,$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in L$.

Exemplo 1.1.16 *Seja A uma álgebra associativa. Denote por $A^{(-)}$ o espaço vetorial A munido do produto $[a, b] = ab - ba$. Verifica-se facilmente que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Em particular, dado V um espaço vetorial, temos que $\text{End}(V)^{(-)}$ é uma álgebra de Lie que denotaremos por $\mathfrak{gl}(V)$.*

Exemplo 1.1.17 *O espaço $UT_n^{(-)}$ é uma subálgebra de Lie de $M_n^{(-)}$.*

Exemplo 1.1.18 *O espaço vetorial $sl_n(K)$ (ou simplesmente sl_n) das matrizes de ordem n com traço 0 munido do produto $[a, b] = ab - ba$ é uma subálgebra de Lie de $M_n(K)^{(-)}$. Observe que $sl_n(K)$ com o produto usual de matrizes não é uma subálgebra de $M_n(K)$, pois o produto (usual) de matrizes de traço zero não é necessariamente uma matriz de traço zero.*

Tome L uma álgebra de Lie e S, T subconjuntos de L . Denotamos por $[S, T]$ o subespaço de L gerado por $\{[s, t] \mid s \in S, t \in T\}$. Definimos indutivamente a sequência de ideais de L

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(1)} = L' = [L, L], \quad L^{(2)} = [L', L'], \quad \dots, \quad L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}], \quad k \in \mathbb{N},$$

chamada de *série derivada*. A álgebra L' é chamada de *álgebra derivada* de L e dizemos que L é *solúvel* se $L^{(n)} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Também definimos a *série central*

descendente por

$$L^0 = L, \quad L^1 = L' = [L, L], \quad L^2 = [L', L], \dots, \quad L^k = [L^{k-1}, L], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observe que L é nilpotente se, e somente se, $L^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.19 As álgebras de Lie abelianas e a álgebra $UT_n^{(-)}$ são solúveis. Por outro lado, a álgebra de Lie $sl_n(K)$ não é solúvel.

Exemplo 1.1.20 Dada uma álgebra de Lie L o conjunto

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, z] = 0, \text{ para todo } z \in L\}$$

é um ideal de L chamado de centro de L . Se L é abeliana então $Z(L) = L$. Por outro lado, se L é simples então $Z(L) = 0$.

De modo natural definimos a noção de *homomorfismo de álgebras* como sendo uma transformação linear $\varphi: A \rightarrow B$ que preserva o produto, ou seja, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para quaisquer $a, b \in A$. Quando φ é injetor, sobrejetor ou bijetor, dizemos que é um *monomorfismo*, *epimorfismo* ou *isomorfismo*, respectivamente. Se $A = B$, chamamos φ de *endomorfismo*. Se existir um isomorfismo $\varphi: A \rightarrow B$ entre as álgebras A e B , dizemos que as duas álgebras são *isomorfas* e denotamos $A \simeq B$.

Se $\varphi: A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então o núcleo $Ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ de φ é um ideal de A , e a imagem $Im(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ de φ é uma subálgebra de B . Além disso, o conhecido teorema sobre o isomorfismo afirma que $A/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$.

Ao longo do texto trabalharemos com homomorfismos de álgebras associativas e de Lie. Então, por simplicidade, chamaremos apenas de homomorfismos, ficando subentendida a estrutura considerada de acordo com a situação.

Definição 1.1.21 Dada uma coleção de álgebras $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, dizemos que uma álgebra A é um produto subdireto das álgebras A_γ , $\gamma \in \Gamma$, se A pode ser imersa no produto direto $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ de modo que $\pi_\gamma(A) = A_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, onde $\pi_\gamma: A \rightarrow A_\gamma$ é a projeção em A_γ .

Definição 1.1.22 *Seja L uma álgebra de Lie. Um homomorfismo (de álgebras de Lie) $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é chamado de representação da álgebra de Lie L em V . A dimensão de V é dita a dimensão da representação.*

Exemplo 1.1.23 *Dado um elemento x em uma álgebra de Lie L , considere a transformação linear $\text{ad } x: L \rightarrow L$ dada por $\text{ad } x = [y, x]$. A aplicação $\text{ad}: x \in L \rightarrow \text{ad } x \in \mathfrak{gl}(L)$ define uma representação de L em L chamada de representação adjunta.*

Observação 1.1 *Observe que usamos a representação adjunta à direita de L , ou seja, no caso da adjunta consideramos uma ação à direita, diferentemente do que fazemos no caso de aplicações em geral em que consideramos a ação à esquerda. Escolhemos esta notação para fins de compatibilidade: os comutadores estão normados à esquerda.*

Dada $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de L , o espaço V possui naturalmente uma estrutura de L -módulo, o qual é chamado de módulo da representação. Vamos dizer que ρ é *irredutível* se V é um L -módulo irredutível. Quando V é soma direta de submódulos irredutíveis ρ é dita *completamente redutível*.

Vejam os dois resultados clássicos da teoria de álgebras de Lie que podem ser encontrados em [24, p. 12, p. 28].

Teorema 1.1.24 (Engel) *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que, para todo $x \in L$, o operador linear $\text{ad } x$ é nilpotente. Então L é nilpotente.*

Teorema 1.1.25 (Weyl) *Seja $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie L semissimples. Então ρ é completamente redutível.*

Definição 1.1.26 *Seja A uma álgebra associativa. Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$ dizemos que A é uma álgebra envolvente de L . Uma álgebra associativa unitária $U = U(L)$ é uma álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie L , se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa unitária B e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi: L \rightarrow B^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi: U \rightarrow B$ que estende φ , ou seja, $\psi|_L = \varphi$.*

O próximo teorema garante uma base para a álgebra universal envolvente a partir de uma base da álgebra de Lie L .

Teorema 1.1.27 (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Toda álgebra de Lie L possui, a menos de isomorfismo, uma única álgebra universal envolvente $U(L)$. Se $\{v_i \mid i \in I\}$ é uma base de L ordenada (por uma ordem no conjunto de índices I), então temos que $\{v_{i_1} \cdots v_{i_p} \mid i_1 \leq \cdots \leq i_p, i_k \in I, p = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma base de $U(L)$.*

Demonstração: Veja [13], Teorema 1.3.2, p. 11. ■

Vejamos então a noção de par associativo-Lie.

Definição 1.1.28 *Um par formado por uma álgebra de Lie L e uma álgebra associativa A em que L é uma subálgebra de $A^{(-)}$ e L gera A como álgebra associativa (se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$ exigimos que $L \cup \{1_A\}$ seja o conjunto gerador de A) é dito um par associativo-Lie (ou simplesmente par) e denotado por (A, L) .*

Vamos dizer que um par (A_2, L_2) é um *subpar associativo-Lie* de um par (A_1, L_1) se L_2 é uma subálgebra de Lie de L_1 e A_2 é uma subálgebra associativa de A_1 . Um *homomorfismo de um par* (A_1, L_1) em um par (A_2, L_2) é um homomorfismo de álgebras associativas $\psi: A_1 \rightarrow A_2$ tal que $\psi(L_1) \subseteq L_2$. Dizemos que ψ é injetor se for um homomorfismo associativo injetor e é sobrejetor se $\psi(A_1) = A_2$ e $\psi(L_1) = L_2$. Naturalmente definimos um *isomorfismo de pares* como sendo um homomorfismo de pares que é biunívoco.

Sejam $\{(A_i, L_i) \mid i \in I\}$ um conjunto de pares e $\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} L_i$ produtos diretos de álgebras associativas e de Lie, respectivamente. Claramente $L = \prod_{i \in I} L_i$ é uma subálgebra de Lie de $(\prod_{i \in I} A_i)^{(-)}$. Seja A a subálgebra associativa de $\prod_{i \in I} A_i$ gerada por L . O par (A, L) é chamado de *produto direto* dos pares (A_i, L_i) , $i \in I$.

Exemplo 1.1.29 *Dada uma álgebra de Lie L , pelo Teorema 1.1.27, temos que $(U(L), L)$ é um par associativo-Lie, ou seja, sempre é possível obter um par associativo-Lie a partir de qualquer álgebra de Lie.*

Vamos destacar um caso particular de pares associativo-Lie, o qual é obtido a partir de uma representação de uma álgebra de Lie da seguinte forma. Dada $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie L , podemos considerar o par $(A, \rho(L))$, onde A é a subálgebra associativa de $\text{End}(V)$ gerada por $\rho(L)$.

Exemplo 1.1.30 *Dada A uma álgebra associativa, então $(A, A^{(-)})$ é um par associativo-Lie. Vamos destacar os pares $(UT_2, UT_2^{(-)})$ e $(E, E^{(-)})$. Esses pares estão relacionados*

a representações. De fato, para $(UT_2, UT_2^{(-)})$ basta considerar a identidade $Id: UT_2^{(-)} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, onde $\dim V = 2$.

No caso de $(E, E^{(-)})$, tome $\rho: E^{(-)} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$, onde $\rho(x)y = xy$ para quaisquer $x, y \in E$. Essa aplicação está bem definida e é um homomorfismo injetor de álgebras de Lie. Essa mesma aplicação define um homomorfismo injetor de álgebras associativas entre E e $End(E)$. Assim, a subálgebra associativa gerada pela imagem de ρ é a própria imagem $\rho(E^{(-)}) \simeq E$, donde segue que $(E, E^{(-)})$ está relacionado a essa representação.

Exemplo 1.1.31 Dada $\rho: sl_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação da álgebra de Lie sl_2 , temos que $\rho(sl_2) \simeq sl_2$, pois sl_2 é simples. Assim, identificando sl_2 com sua imagem, podemos associar a essa representação o par (A, sl_2) , onde A é a subálgebra associativa de $End(V)$ gerada por sl_2 . No caso em que $\dim V = 2$, temos o par (M_2, sl_2) e a representação associada é irredutível.

1.2 Pares livres

Agora vejamos o conceito de par livre, o qual é de fundamental importância para o conceito de identidades polinomiais fracas, um dos principais objetos de estudo deste trabalho. O par livre desempenha o papel da álgebra associativa livre, isto é, ele será o ambiente onde trabalharemos.

Dado um par associativo-Lie (A, L) em que L é gerada como álgebra de Lie por um conjunto Y , temos que A é gerada como álgebra associativa pelo mesmo conjunto Y (ou por $Y \cup \{1_A\}$ se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$). De fato, como (A, L) é um par associativo-Lie, temos que A possui um conjunto gerador composto por elementos da forma $a_1 a_2 \cdots a_n$, $a_i \in L$ (ou $a_1 a_2 \cdots a_n$, $a_i \in L \cup \{1_A\}$, se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$). Mas cada um desses a_i 's é combinação de comutadores de elementos de Y e daí, expandindo esse comutadores, obtemos que A é gerada por Y como álgebra associativa. Nesse caso dizemos que o par (A, L) é gerado por Y .

Definição 1.2.1 Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe de pares associativo-Lie e $(A, L) \in \mathfrak{B}$ um par gerado por um conjunto Y . Dizemos que o par (A, L) é livre na classe $\mathfrak{B}$, livremente gerado pelo conjunto Y , se satisfaz a propriedade universal dos pares livres: para todo par $(B, M) \in \mathfrak{B}$, qualquer aplicação $h: Y \rightarrow M$ pode ser estendida a um (único)

homomorfismo de pares $\varphi: (A, L) \rightarrow (B, M)$. A cardinalidade do conjunto Y é chamada de posto de (A, L) .

Definição 1.2.2 *Sejam $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras e $A \in \mathfrak{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X . Dizemos que a álgebra A é livre na classe $\mathfrak{B}$, livremente gerada pelo conjunto X , se para toda álgebra $B \in \mathfrak{B}$, qualquer aplicação $h: X \rightarrow B$ pode ser estendida a um (único) homomorfismo de álgebras $\varphi: A \rightarrow B$. A cardinalidade do conjunto X é chamada de posto de A .*

Vejamos então duas álgebras livres que serão importantes ao longo do trabalho: a álgebra associativa livre e a álgebra de Lie livre.

Considere $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Seja $K\langle X \rangle$ o K -espaço vetorial tendo como base 1 e o conjunto de todas palavras em X . Considere o produto em $K\langle X \rangle$ definido sobre as palavras por

$$(x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m},$$

e depois estendido por linearidade a $K\langle X \rangle$. Temos que $K\langle X \rangle$ é uma álgebra associativa unitária, a qual é livre na classe das álgebras associativas unitárias. Essa álgebra é chamada de *álgebra associativa livre unitária* (ou simplesmente álgebra associativa livre), seus elementos de *polinômios associativos* e toda palavra de variáveis em X um *monômio associativo*.

Proposição 1.2.3 (Teorema de Witt) *Seja $\mathcal{L}(X)$ a subálgebra de Lie de $K\langle X \rangle^{(-)}$ gerada pelo conjunto X . A álgebra $\mathcal{L}(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. Além disso, $U(\mathcal{L}(X)) = K\langle X \rangle$.*

Demonstração: Veja [19], Teorema 12.2.2, p. 310; e [13], Teorema 1.3.5, p. 14. ■

A álgebra $\mathcal{L}(X)$ é chamada de *álgebra de Lie livre* e seus elementos de *polinômios de Lie*. Todo comutador $[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$, $n \in \mathbb{N}$, de variáveis em X com qualquer distribuição de colchetes é dito um *monômio de Lie*. Observe que todo polinômio de Lie pode ser considerado como associativo (pois $\mathcal{L}(X) \subseteq K\langle X \rangle$), mas nem todo polinômio associativo é de Lie.

Exemplo 1.2.4 *O polinômio $[x_1, [x_2, x_3]]$ é de Lie. Por outro lado, $[x_1x_2, x_3]$ é um polinômio associativo, mas não é de Lie.*

Aqui recordamos que uma base da álgebra associativa livre $K\langle X \rangle$ consiste das palavras (isto é, dos monômios associativos). Tal fato não tem análogo no caso de $\mathcal{L}(X)$, pois monômios de Lie podem ser linearmente dependentes. Por exemplo,

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3].$$

A construção de uma base do espaço vetorial $\mathcal{L}(X)$ foi explicitada apenas por volta de 1950, por Marshall Hall [22], e de maneira independente, por Anatoly Shirshov [50]. No próximo resultado a distribuição de colchetes em elementos de uma base de $\mathcal{L}(X)$ não é muito relevante. Assim, utilizaremos uma notação simplificada para os comutadores de tamanho $n \geq 2$.

Proposição 1.2.5 *Escolha uma base da álgebra de Lie livre $\mathcal{L}(X)$*

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots,$$

formada pelas variáveis $x_1, x_2, \dots$ e alguns comutadores, os quais possuem algumas restrições sobre os índices nas variáveis e distribuição de colchetes que estamos omitindo. Ordenamos essa base de forma que $x_1 < x_2 < \dots$, as variáveis precedem os comutadores de tamanho 2, os quais precedem os comutadores de tamanho 3, e assim por diante. Dentre os comutadores de mesmo tamanho, ordenamos de acordo com a ordem das variáveis. Então o espaço vetorial $K\langle X \rangle$ possui uma base

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c$$

onde $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$ na ordenação da base de $\mathcal{L}(X)$.

Demonstração: Veja [13], Proposição 4.4.3, p. 42. ■

Considere a álgebra associativa livre $K\langle X \rangle$ e a álgebra de Lie livre $\mathcal{L}(X)$. Temos que toda aplicação de X em uma álgebra de Lie L se estende a um homomorfismo $\varphi: \mathcal{L}(X) \rightarrow$

L . Pela Proposição 1.2.3, temos que $U(\mathcal{L}(X)) = K\langle X \rangle$ e então para todo par associativo-Lie (A, L) em que A é unitária obtemos uma extensão de φ a um homomorfismo de álgebras associativas $\bar{\varphi}: K\langle X \rangle \rightarrow A$. Como $\bar{\varphi}(\mathcal{L}(X)) \subseteq L$, segue que toda aplicação do conjunto gerador X do par $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ tem uma extensão a um homomorfismo de pares $\bar{\varphi}: (K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X)) \rightarrow (A, L)$. Assim, o par $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ é livre na classe de todos os pares associativo-Lie formados por álgebras associativas unitárias. Esse par é chamado de *par livre* gerado por X .

1.3 Identidades polinomiais

Nesta seção definimos as identidades polinomiais para um par associativo-Lie e estabelecemos alguns conceitos e resultados importantes para os próximos capítulos. De modo semelhante, definem-se identidades para álgebras associativas e de Lie. Para esses casos, fazemos um breve resumo. Uma abordagem mais detalhada pode ser encontrada em [13, Caps. 1 e 2] e [19, Cap. 1].

Definição 1.3.1 *Um polinômio $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é uma identidade (fraca) do par (A, L) se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ na álgebra A para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$. Nesse caso, dizemos que (A, L) satisfaz f ou que $f \equiv 0$ em (A, L) .*

No caso em que o par associativo-Lie é obtido a partir de uma representação ρ , dizemos que f é uma *identidade da representação* ρ .

Exemplo 1.3.2 *O polinômio $[x \circ y, z] \equiv 0$, onde $x \circ y = xy + yx$, é uma identidade fraca do par (M_2, sl_2) . Em outras palavras, podemos dizer que $[x \circ y, z] \equiv 0$ é identidade de uma representação de sl_2 de dimensão 2.*

Para justificar o enunciado do exemplo acima, observamos que se $a, b \in sl_2$ então a e b são de traço 0. Pode ser visto por cálculo direto que $a \circ b$ é uma matriz escalar. Mas matrizes escalares comutam com quaisquer matrizes. (Assim obtivemos que $[x \circ y, z]$ é uma identidade fraca para o nosso par, e ainda devemos substituir elementos de sl_2 apenas para x e y ; para z podemos substituir qualquer elemento de M_2 . Mais adiante não precisaremos considerar tais situações.)

Dado um par (A, L) , um dos principais pontos de estudo é estabelecer o conjunto de todas as identidades fracas desse par e tentar encontrar um conjunto gerador dessas identidades. Nesse sentido vejamos algumas definições e resultados.

Definição 1.3.3 *Um ideal I da álgebra associativa $K\langle X \rangle$ é chamado ideal de identidades fracas (ou ideal fraco) se $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e quaisquer $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{L}(X)$. Em outras palavras, I é um ideal bilateral de $K\langle X \rangle$ invariante por todos endomorfismos do par livre $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$.*

Dado um par (A, L) , considere o conjunto

$$Id(A, L) = \{f \in K\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } (A, L)\}$$

de todas as identidades de (A, L) . Temos que se $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ é identidade do par (A, L) , então $af(g_1, \dots, g_n)b \equiv 0$ é também identidade do par (A, L) , quaisquer que sejam $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{L}(X)$ e $a, b \in K\langle X \rangle$. Então $Id(A, L)$ é um ideal de identidades fracas. Reciprocamente, dado um ideal fraco I de $K\langle X \rangle$, podemos encontrar um par correspondente a esse ideal. De fato, basta observar que

$$Id(K\langle X \rangle/I, \mathcal{L}(X)/\mathcal{L}(X) \cap I) = I.$$

É fácil ver que a interseção de uma família de ideais de identidades fracas é um ideal fraco. Assim, dado $S \subseteq K\langle X \rangle$ não vazio, definimos o *ideal de identidades fracas gerado* por S , denotado por $\langle S \rangle^F$, como sendo a interseção de todos os ideais de identidades fracas de $K\langle X \rangle$ que contêm S . Assim, $\langle S \rangle^F$ é o menor ideal fraco de $K\langle X \rangle$ que contém S . Dado $f \in \langle S \rangle^F$, dizemos que f é consequência dos polinômios de S .

O ideal de identidades fracas gerado por $S \subseteq K\langle X \rangle$ é o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto $\{h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2 \in K\langle X \rangle, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{L}(X)\}$.

Exemplo 1.3.4 *Considere o par $(M_2(K), sl_2(K))$, com $\text{char} K = 0$, ou K um corpo infinito de característica $p \neq 2$. A identidade*

$$[x \circ y, z] \equiv 0$$

gera todas as identidades fracas desse par, ou seja, $Id(M_2(K), sl_2(K)) = \langle [x \circ y, z] \rangle^F$.

Este resultado foi demonstrado por Razmyslov em característica 0 [44], veja também [45], e em [34] o mesmo foi obtido para corpos infinitos de característica diferente de 2.

Um par associativo-Lie determina um ideal fraco em $K\langle X \rangle$. Reciprocamente, muitos pares podem corresponder ao mesmo ideal fraco de $K\langle X \rangle$. Isso motiva a definição de variedade de pares associativo-Lie.

Definição 1.3.5 *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq K\langle X \rangle$, a classe de todos os pares (A, L) tais que $f \equiv 0$ em (A, L) , para todo $f \in S$, é chamada de variedade de pares associativo-Lie determinada por S , a qual denotamos por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$.*

Uma variedade $\mathcal{W}$ é dita uma *subvariedade* de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Se $\mathcal{V}$ é uma classe de pares, seja $Id(\mathcal{V})$ a interseção de todos os ideais fracos $Id(A, L)$ com $(A, L) \in \mathcal{V}$. A variedade de pares definida por $Id(\mathcal{V})$ é chamada de variedade gerada por $\mathcal{V}$ e denotada por $var\mathcal{V}$. Se $\mathcal{V} = \{(A, L)\}$, então denotamos $var\mathcal{V}$ simplesmente por $var(A, L)$. Observe que a variedade definida por S é igual a variedade definida por $\langle S \rangle^F$.

Os dois Teoremas a seguir trazem uma caracterização das variedades e sua relação com os ideais fracos.

Teorema 1.3.6 (Birkhoff) *Uma classe não vazia de pares associativo-Lie forma uma variedade se, e somente se, satisfaz:*

- i) Se $(A, L) \in \mathcal{V}$ e $\varphi: (B, M) \rightarrow (A, L)$ é um monomorfismo, então $(B, M) \in \mathcal{V}$, ou seja, todo subpar de um par em $\mathcal{V}$ pertence a $\mathcal{V}$;*
- ii) Se $(A, L) \in \mathcal{V}$ e $\varphi: (A, L) \rightarrow (B, M)$ é um epimorfismo, então $(B, M) \in \mathcal{V}$;*
- iii) Se $\{(A_\gamma, L_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de pares associativo-Lie e $(A_\gamma, L_\gamma) \in \mathcal{V}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então o produto direto desses pares pertence a $\mathcal{V}$.*

Demonstração: Análoga à feita em [13], Teorema 2.3.2, p. 24. ■

Definição 1.3.7 *Um par $\mathcal{F}_Y(\mathcal{V})$ na variedade $\mathcal{V}$ é chamado de par relativamente livre de $\mathcal{V}$ gerado pelo conjunto Y se $\mathcal{F}_Y(\mathcal{V})$ é um par livre na classe $\mathcal{V}$.*

Os pares relativamente livres são descritos em termos dos pares livres.

Teorema 1.3.8 *Sejam X um conjunto não vazio, $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ o par livre gerado por X e $\mathcal{V}$ uma variedade de pares com ideal correspondente $I = Id(\mathcal{V}) \subseteq K\langle X \rangle$. Então*

$$\mathcal{F}_X(\mathcal{V}) = (K\langle X \rangle/I, \mathcal{L}(X)/\mathcal{L}(X) \cap I)$$

é um par relativamente livre de $\mathcal{V}$ gerado por $\bar{X} = \{x + I \mid x \in X\}$. Além disso, quaisquer dois pares relativamente livres em $\mathcal{V}$ gerados por conjuntos de mesma cardinalidade são isomorfos.

Demonstração: A demonstração é semelhante à feita em [19], Teorema 1.2.4, p. 4, e em [13], Proposição 2.2.5, p. 23. ■

Teorema 1.3.9 *Existe uma correspondência biunívoca entre os ideais fracos em $K\langle X \rangle$ e as variedades de pares associativo-Lie. Nesta correspondência a variedade $\mathcal{V}$ corresponde ao ideal fraco $Id(\mathcal{V})$ e um ideal fraco I corresponde a variedade $\mathcal{V}(I)$.*

Demonstração: Análoga à feita em [19], Teorema 1.2.5, p. 5. ■

1.3.1 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Dado um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, definimos o seu grau, denotado por $\deg f$, como sendo o maior dos graus dos monômios de f , onde o grau de um monômio (palavra) é o comprimento do monômio.

Definição 1.3.10 *Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é homogêneo de grau b em x_i , se é uma combinação linear de monômios tais que em cada monômio de f , a variável x_i aparece b vezes. Denotamos $\deg_{x_i} f = b$. Se $f(x_1, \dots, x_n)$ é homogêneo de grau b_i em x_i , para todo $i = 1, \dots, n$, dizemos que $f(x_1, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo de grau $(b_1, \dots, b_n)$. Um polinômio multi-homogêneo de grau $(1, \dots, 1)$ é chamado de multilinear de grau n .*

Um exemplo importante de polinômio multilinear é

$$St_m = St_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)},$$

o qual é chamado de *polinômio standard* de grau m . Aqui S_m é o grupo simétrico que permuta $\{1, 2, \dots, m\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ . Observe que St_m é um polinômio que alterna nas suas m variáveis.

Observação 1.2 *Se existe m tal que St_m é identidade para um par (A, L) , então St_{m+l} também é identidade para o par (A, L) , para todo $l \geq 1$.*

Observação 1.3 *Dado um polinômio $f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n) \in K\langle X \rangle$ multilinear em $x_1, \dots, x_r$, definimos o operador alternador $\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_r}$ nas variáveis $x_1, \dots, x_r$ como sendo*

$$\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_r} f = \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^\sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}, y_1, \dots, y_n).$$

Quando $f = [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]$ verifica-se facilmente que

$$\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_{2k}} [x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] = 2^k St_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}).$$

Observação 1.4 *Tome (A, L) um par com L gerada por um conjunto B como espaço vetorial e $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio multilinear. Não é difícil ver que $f \equiv 0$ em (A, L) se, e somente se, $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$ para quaisquer $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$.*

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo. Suponha que f não é multilinear, ou seja, existe alguma variável em f com grau maior que 1, vamos supor $\deg_{x_1} f > 1$. Considere o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

Temos que se f é uma identidade para o par (A, L) , então $h \equiv 0$ em (A, L) . Usando que $\deg_{x_1} f > 1$, mostra-se que h é um polinômio não nulo e, além disso, $\deg_{y_1} h$ é menor que $\deg_{x_1} f$. Indutivamente podemos repetir esse processo até que a primeira variável tenha grau 1. Fazendo isto para todas as variáveis obtemos um polinômio multilinear que é consequência de f , e continua sendo uma identidade para o par (A, L) . Esse processo é chamado de *linearização*. O leitor provavelmente lembra que na álgebra linear este foi o método de obter uma forma bilinear a partir da respectiva forma quadrática, o procedimento aqui é, essencialmente, o mesmo. Portanto na literatura esse processo é chamado também de *polarização*, enquanto o procedimento oposto (a “obtenção” de

uma forma quadrática a partir de uma forma bilinear) é chamado de *restituição*, ou *simetrização*.

Teorema 1.3.11 *Seja I um ideal de identidades fracas em $K\langle X \rangle$.*

- i) Se K é um corpo infinito e $f \in I$, então toda componente multi-homogênea de f também pertence a I . Assim, todo ideal fraco de $K\langle X \rangle$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*
- ii) Se K é um corpo de característica zero, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Análoga à feita em [19], Teoremas 1.3.2 e 1.3.8, pp. 6 e 8. ■

1.3.2 Identidades associativas e de Lie

Agora vamos considerar um breve apanhado da teoria de identidades polinomiais para os ambientes associativo e de Lie.

De modo análogo ao ambiente associativo-Lie, iniciando com a álgebra livre associativa $K\langle X \rangle$ ou de Lie $\mathcal{L}(X)$, podemos definir as noções de identidades polinomiais e variedades para álgebras associativas e de Lie. Quando a álgebra satisfizer uma identidade não trivial será chamada de PI-álgebra. Nesses casos, o ideal de identidades é chamado de T -ideal e tem a propriedade de ser invariante pelos respectivos endomorfismos de $K\langle X \rangle$ ou $\mathcal{L}(X)$. O T -ideal associativo gerado por um subconjunto S de $K\langle X \rangle$ será denotado por $\langle S \rangle^T$. No caso de Lie denotaremos o T -ideal de Lie gerado por um subconjunto S de $\mathcal{L}(X)$ por $\langle S \rangle_{\mathcal{L}}^T$.

Denotaremos os T -ideais de identidades por $Id(B)$, onde B é uma álgebra associativa ou de Lie, ficando subentendidas as estruturas consideradas, ou seja, $Id(B) \subseteq K\langle X \rangle$ se B é associativa, e $Id(B) \subseteq \mathcal{L}(X)$ se B é uma álgebra de Lie. No caso de variedades (associativas ou de Lie) geradas por alguma álgebra usaremos notações semelhantes às usadas no caso associativo-Lie.

Exemplo 1.3.12 *A álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$.*

Relembramos que o comutador acima é normado à esquerda. Isto é, $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$. Sempre que escrevemos comutadores de comprimento ≥ 3 , a omissão de colchetes significa que o comutador é normado à esquerda.

Exemplo 1.3.13 *A álgebra associativa UT_2 satisfaz a identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$. Por outro lado, $UT_2^{(-)}$ como álgebra de Lie satisfaz $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \equiv 0$.*

Todas as propriedades obtidas nas seções anteriores, o Teorema de Birkhoff e os Teoremas 1.3.9 e 1.3.11, são enunciados, e seguem de forma semelhante para os ambientes associativo e de Lie. Além disso, temos o seguinte resultado no caso associativo.

Teorema 1.3.14 *Seja A uma PI-álgebra associativa finitamente gerada sobre um corpo qualquer. Então $J(A)$ é nilpotente.*

Demonstração: Veja [19], Teorema 1.11.14, p. 35. ■

1.4 Representações de grupos

Nesta seção fazemos um breve resumo da teoria de representações do grupo simétrico e do grupo geral linear na teoria de identidades polinomiais nos ambientes associativo, de Lie e associativo-Lie. Mais detalhes sobre a teoria de representações e identidades para os ambientes associativo e de Lie podem ser encontrados em [19, Caps. 2, 4, 6 e 12].

Definição 1.4.1 *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma representação de G em V é um homomorfismo de grupos $\rho: G \rightarrow GL(V)$, onde $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares invertíveis do espaço vetorial V . A dimensão (ou grau) de ρ é a dimensão do espaço vetorial V .*

Abaixo consideraremos apenas o caso de dimensão finita, isto é, assumiremos que $\dim V < \infty$. Tal restrição é condizente com os nossos objetivos.

Uma representação de um grupo determina unicamente um KG -módulo (ou G -módulo) de dimensão finita. De fato, se $\rho: G \rightarrow GL(V)$ é uma representação de G , V torna-se um G -módulo definindo $gv = \rho(g)v$, para todo $v \in V$, $g \in G$. Reciprocamente, se M é um KG -módulo de dimensão finita então $\rho: G \rightarrow GL(M)$ dada por $\rho(g)(m) = gm$, para $g \in G$, $m \in M$, é uma representação de G em M .

Assim, dada uma representação $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ de G em V , dizemos que V é o *módulo da representação*.

Definição 1.4.2 *Uma representação $\rho: G \rightarrow GL(V)$ é irreduzível se V é um G -módulo irreduzível (ou simples). Dizemos que ρ é completamente redutível se V é soma direta de submódulos irreduzíveis.*

Teorema 1.4.3 (Maschke) *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica de K . Se $\rho: G \rightarrow GL(V)$ é uma representação de dimensão finita, então ρ é completamente redutível.*

Demonstração: Veja [10], Teorema 10.8, p. 41. ■

Exemplo 1.4.4 *Considere a representação*

$$\begin{aligned} \sigma: \quad G &\longrightarrow GL(KG) \\ g &\longmapsto \sigma_g \end{aligned},$$

onde $\sigma_g: KG \rightarrow KG$ é definida por $\sigma_g(\alpha) = g\alpha$. Chamamos essa representação de *representação regular à esquerda de G* .

Observação 1.5 *Dado um grupo G finito com $\text{char} K$ não dividindo a ordem de G , a quantidade de representações irreduzíveis e não isomorfas de G é finita e é menor ou igual à quantidade de classes de conjugação (órbitas por conjugação) do grupo G (veja [26], Cap. 5, Seção 3).*

Uma ferramenta importante na teoria de representações é fornecida pela teoria de caracteres.

Definição 1.4.5 *Tome $\rho: G \rightarrow GL(V)$ uma representação de dimensão finita. Então o caracter de ρ é a função $\chi_\rho: G \rightarrow K$ dada por $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$, para $g \in G$, onde $\text{tr}(\rho(g))$ é o traço da transformação linear $\rho(g)$.*

Teorema 1.4.6 *Nas condições do Teorema de Maschke (Teorema 1.4.3), todo caracter de um grupo G é soma de caracteres irreduzíveis.*

Demonstração: Veja [48], p. 227. ■

Suponha G um grupo finito com característica de K não dividindo a ordem de G . Então o número de G -caracteres irredutíveis também é finito. Sejam $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_q$ esses caracteres irredutíveis. Dado χ um caracter de G , pelo resultado anterior, existem inteiros não negativos $n_1, n_2, \dots, n_q$ tais que

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + \dots + n_q\chi_q, \quad (1.1)$$

onde $n_1, \dots, n_q$ são as respectivas multiplicidades. No caso particular em que χ corresponde a representação regular de G , n_i é exatamente igual ao grau de cada representação irredutível correspondente a χ_i , $i = 1, \dots, q$.

Dados dois caracteres

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + \dots + n_{q_1}\chi_{q_1} \quad e \quad \chi' = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \dots + m_{q_2}\chi_{q_2},$$

dizemos que χ está contido em χ' , e escrevemos $\chi \subseteq \chi'$, se $q_1 \leq q_2$ e $n_i \leq m_i$ para todo $i = 1, \dots, q_1$.

1.4.1 Representações de S_n

Agora vamos desenvolver alguns resultados da teoria das representações do grupo simétrico, a qual será importante para se obter os S_n -módulos irredutíveis, ou seja, as representações irredutíveis do grupo simétrico S_n . A partir de agora K denotará um corpo de característica zero.

Definição 1.4.7 *Dado n um inteiro não negativo, definimos uma partição de n como sendo uma r -upla de inteiros não negativos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ e $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$. Denotamos $\lambda \vdash n$.*

É bem conhecido que o número de partições de n , denotado por $p(n)$, coincide com o número de classes de conjugações do grupo S_n .

Vamos associar a uma partição $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$ um diagrama D_λ , chamado de *diagrama de Young*, o qual corresponde ao conjunto $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$. Temos então que D_λ possui exatamente n quadrados, dispostos em

r filas horizontais, chamadas de *linhas*, em que a i -ésima linha possui n_i quadrados. Assim teremos também filas verticais que chamaremos de *colunas*. Como exemplo, considerando $n = 10$ e $\lambda = (5, 2, 2, 1) \vdash n$, temos o diagrama

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}.$$

Definimos o *diagrama conjugado* de um diagrama D_λ como sendo o diagrama $D_{\lambda'}$ obtido trocando-se as linhas de D_λ por suas colunas e as suas colunas por suas linhas. A partição conjugada de λ será a partição λ' do diagrama $D_{\lambda'}$.

Tome λ uma partição de n . Uma *tabela de Young* T_λ do diagrama D_λ consiste em preencher os quadrados com os números $1, 2, \dots, n$ sem repetição. Uma tabela T_λ é dita *standard* se os valores crescem da esquerda para direita, em cada linha, e de cima para baixo, em cada coluna.

Definição 1.4.8 Dada uma tabela de Young T_λ definimos o estabilizador de linhas R_{T_λ} como sendo o subgrupo de S_n formado por todas as permutações que fixam, como conjunto, as entradas de cada uma linha de T_λ . Analogamente, o estabilizador de colunas C_{T_λ} é o subgrupo de S_n que fixa as colunas.

Exemplo 1.4.9 Se $\lambda = (2, 2) \vdash 4$ e

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array},$$

temos $R_{T_\lambda} = \langle (13) \rangle \times \langle (24) \rangle$ e $C_{T_\lambda} = \langle (12) \rangle \times \langle (34) \rangle$.

Vamos considerar uma ordem parcial no conjunto de partições. Tomamos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q) \vdash m$, então $\lambda \geq \mu$ se, e somente se, $p \geq q$ e $\lambda_i \geq \mu_i$, para todo $i = 1, \dots, q$. Na linguagem dos diagramas, $\lambda \geq \mu$ significa que D_μ é um subdiagrama de D_λ .

Dada uma tabela T_λ , definimos os elementos da álgebra de grupo KS_n :

$$R^{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma, \quad C^{T_\lambda} = \sum_{\pi \in C_{T_\lambda}} (-1)^\pi \pi,$$

$$e_{T_\lambda} = R^{T_\lambda} C^{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\pi \in C_{T_\lambda}} (-1)^\pi \sigma \pi \quad e \quad e_{T_\lambda}^* = C^{T_\lambda} R^{T_\lambda} = \sum_{\pi \in C_{T_\lambda}} \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} (-1)^\pi \pi \sigma,$$

onde $(-1)^\pi$ denota o sinal da permutação π .

O próximo teorema descreve, a menos de isomorfismo, as representações irredutíveis do grupo simétrico S_n .

Teorema 1.4.10 *Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash n$ e T_λ considere o KS_n -módulo $M_\lambda = KS_n e_{T_\lambda}$. Temos que*

- i) M_λ é um KS_n -módulo irredutível;*
- ii) Se $\mu \vdash n$, então M_λ e M_μ são isomorfos se, e somente se, $\lambda = \mu$.*

Demonstração: Veja [26], Capítulo 5, Seção 4. ■

O elemento e_{T_λ} ($e_{T_\lambda}^*$) é múltiplo escalar de um idempotente em KS_n e é chamado de idempotente essencial de KS_n .

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p(n)}$ são todas as partições de $n \in \mathbb{N}$ e $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \dots, T_{\lambda_{p(n)}}$ são algumas tabelas de Young standard correspondentes aos diagramas $D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \dots, D_{\lambda_{p(n)}}$, respectivamente, então, pelo resultado anterior, temos que $M_{\lambda_1}, M_{\lambda_2}, \dots, M_{\lambda_{p(n)}}$ são S_n -módulos irredutíveis dois a dois não isomorfos. Além disso, como o número de partições de n é igual ao número de classes de conjugação do grupo S_n , pela Observação 1.5, segue que existem no máximo $p(n)$ S_n -módulos irredutíveis, dois a dois não isomorfos. Assim, $M_{\lambda_1}, M_{\lambda_2}, \dots, M_{\lambda_{p(n)}}$ são exatamente todos os S_n -módulos irredutíveis, a menos de isomorfismo.

Dada λ uma partição de n , temos então um S_n -módulo irredutível M_λ e consequentemente um caracter irredutível χ_λ . Pela equação 1.1, segue que se χ é o caracter de uma representação de S_n , então

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (1.2)$$

onde os m_λ 's são as respectivas multiplicidades.

Lema 1.4.11 *Seja T_λ uma tabela de Young associada a uma partição $\lambda \vdash n$. Tome M um S_n -módulo tal que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$, onde $M_1, \dots, M_k$ são S_n -módulos irredutíveis com caracter χ_λ . Então k é igual ao número máximo de elementos linearmente independentes $g \in M$ tais que $\sigma g = g$, para todo $\sigma \in R_{T_\lambda}$.*

Demonstração: Veja [19], Teorema 2.4.2, p. 52. ■

Em outras palavras, o lema anterior nos garante uma forma de determinar as multiplicidades m_λ , $\lambda \vdash n$, na decomposição 1.2. Basta encontrar o número máximo de elementos linearmente independentes invariantes por R_{T_λ} associados a partição λ .

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \vdash n$, seja d_λ o número de tabelas standard do diagrama D_λ . Se M_λ é um S_n -módulo irredutível associado a partição λ , temos que a dimensão de M_λ é d_λ ([8], Teorema 4.6), a qual também é denotada por $\deg \chi_\lambda$. Nesse sentido, vamos descrever uma fórmula para se calcular o valor d_λ para uma partição λ de n .

Definição 1.4.12 *Sejam $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$ e $(i_0, j_0) \in D_\lambda$. Definimos o gancho de (i_0, j_0) em D_λ como sendo o conjunto*

$$\{(i_0, j) \mid j_0 \leq j \leq n_{i_0}\} \cup \{(i, j_0) \mid i_0 \leq i \leq c_{j_0}\},$$

onde c_{j_0} é o número de células da coluna j_0 .

Assim, o gancho de (i_0, j_0) em D_λ são as células que estão à direita e na mesma linha de (i_0, j_0) , juntamente com as células que estão abaixo e na mesma coluna de (i_0, j_0) , e a própria célula (i_0, j_0) . Não é difícil ver que o número de células do gancho de (i_0, j_0) em D_λ é

$$h_{i_0 j_0} = n_{j_0} + c_{j_0} - i_0 - j_0 + 1.$$

Teorema 1.4.13 (Fórmula do Gancho) *Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r) \vdash n$. O número $ST(\lambda)$ de tabelas Standard do diagrama D_λ é dado por*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in D_\lambda} h_{ij}}.$$

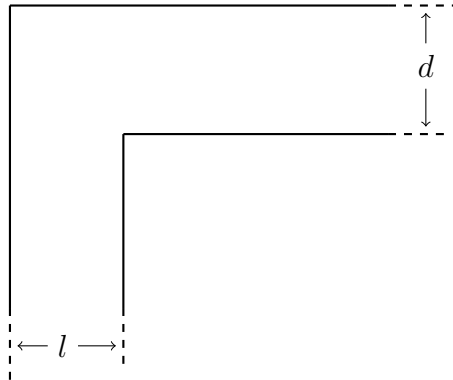
Demonstração: Veja [27], Teorema 20.1, p. 77. ■

Dados inteiros $d, l \geq 0$, definimos o *gancho infinito* como sendo

$$H(d, l) = \bigcup_{n \geq 1} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}.$$

Então $H(d, l)$ pode ser visto como o conjunto de todos os diagramas contidos no diagrama

dado pela seguinte forma



Dizemos que uma partição λ pertence ao gancho $H(d, l)$, e denotamos por $\lambda \in H(d, l)$, se o correspondente diagrama de Young D_λ está contido em $H(d, l)$. Analogamente, se M é um S_n -módulo com caracter $\chi(M) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, então escrevemos $\chi(M) \subseteq H(d, l)$ se $\lambda \in H(d, l)$ para toda partição $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Com base na fórmula do gancho, podemos obter relações entre os graus de diagramas contidos uns nos outros ou em algum gancho infinito.

Lema 1.4.14 *Tome $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n'$ tais que $\mu \leq \lambda$. Se $n - n' \leq c$, então $d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu$.*

Demonstração: Veja [19], Lema 6.2.4, p. 148. ■

Lema 1.4.15 *Existem constantes $C, r > 0$ tais que*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(d, l)}} d_\lambda \leq C n^r (d + l)^n.$$

Em particular, se $\lambda \in H(k, 0)$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $d_\lambda \leq C n^r k^n$.

Demonstração: Veja [19], Lema 6.2.5, p. 148. ■

Aqui cabe um comentário importante. Quando se trabalha com representações de grupos finitos, muitas vezes exigimos que o corpo base seja algebricamente fechado e de característica 0. Por exemplo, se considerarmos o grupo cíclico de ordem 4, ele possui apenas duas representações irredutíveis sobre os reais (de grau 1) mas quatro sobre os complexos.

No caso do grupo simétrico, é bem conhecido que é suficiente trabalhar sobre os racionais. Isto é, “todas” representações irredutíveis sobre um corpo de característica zero aparecem sobre o corpo dos racionais.

Pelo teorema de Maschke (Teorema 1.4.3) a álgebra de grupo $\mathbb{Q}S_n$ é semissimples, e portanto, soma direta de álgebras simples. De dimensão finita, e do teorema de Wedderburn segue que ela é soma direta de álgebras matriciais sobre anéis de divisão, de dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$. O que nós queremos dizer é que tais anéis de divisão, no caso de $\mathbb{Q}S_n$, necessariamente coincidem com $\mathbb{Q}$. Veja Observação 1.6.

1.4.2 S_n -ações nos polinômios multilineares

Seja P_n o espaço dos polinômios multilineares em $x_1, \dots, x_n$ na álgebra associativa livre $K\langle X \rangle$. Tome (A, L) um par associativo-Lie. Dados $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ e $\sigma \in S_n$, definindo

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

segue que o espaço vetorial P_n tem uma estrutura de S_n -módulo à esquerda e ainda $P_n \simeq KS_n$ como S_n -módulos. Uma vez que $Id(A, L)$ é invariante por permutação de variáveis, $P_n \cap Id(A, L)$ é um S_n -submódulo de P_n . Assim, o S_n -módulo quociente

$$P_n(A, L) = P_n / (P_n \cap Id(A, L))$$

possui uma estrutura de S_n -módulo à esquerda. A dimensão desse módulo é dita n -ésima *codimensão fraca* do par (A, L) e será denotada por $c_n(A, L)$.

O estudo do comportamento assintótico da sequência de codimensões fracas $\{c_n(A, L)\}_{n \in \mathbb{N}}$ será um dos principais tópicos abordados nesse trabalho. Com base no seu crescimento, podemos dizer que a sequência é limitada polinomialmente, exponencialmente, de crescimento intermediário ou mais que exponencial.

Definição 1.4.16 *Dado $n \geq 1$, o caracter de $P_n(A, L)$ é dito o n -ésimo cocaracter fraco de (A, L) e será denotado por $\chi_n(A, L)$.*

Temos uma decomposição da forma

$$\chi_n(A, L) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A, L) \chi_\lambda, \quad (1.3)$$

onde $m_\lambda(A, L)$ é a multiplicidade associada ao caracter irredutível χ_λ . Se $\mathcal{V}$ é variedade de pares tal que $\mathcal{V} = \text{var}(A, L)$, então definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A, L)$ e $\chi_n(\mathcal{V}) = \chi_n(A, L)$.

O próximo teorema auxilia no cálculo do n -ésimo cocaracter.

Teorema 1.4.17 *Seja (A, L) um par com n -ésimo cocaracter $\chi_n(A, L)$ dado como em 1.3. Para uma partição $\lambda \vdash n$, a multiplicidade $m_\lambda(A, L)$ é igual a zero se, e somente se, para toda tabela T_λ de D_λ e para todo polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$, $e_{T_\lambda} f \equiv 0$ (ou equivalentemente $e_{T_\lambda}^* f \equiv 0$) é uma identidade do par (A, L) .*

Demonstração: Análoga à feita em [19], Teorema 2.4.5, p. 55. ■

Segue imediatamente do teorema anterior que se existem $f = f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$, uma tabela T_λ de D_λ e $a_1, \dots, a_n \in L$ tais que $e_{T_\lambda} f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, então $m_\lambda(A, L) > 0$.

Se $\dim L = k < \infty$, então $m_\lambda(A, L) = 0$ quando λ é uma partição com mais de k linhas. De fato, basta observar que nesse caso $e_{T_\lambda} f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio multilinear que alterna em um conjunto de pelo menos $k + 1$ variáveis e daí deve se anular na base de L .

Vejamos mais dois resultados importantes para os próximos capítulos.

Teorema 1.4.18 *Se $f \in P_n$, existem um conjunto finito de polinômios $g_1, \dots, g_r \in P_n$ e partições $\lambda(1), \dots, \lambda(r)$ de n tais que $KS_n f = KS_n e_{T_{\lambda(1)}} g_1 + \dots + KS_n e_{T_{\lambda(r)}} g_r$.*

Demonstração: Veja [19], Teorema 2.4.7, p. 57. ■

Lema 1.4.19 *Sejam $\lambda \vdash n$, T_λ uma tabela de Young de λ e $f = e_{T_\lambda} g$, onde $g(x_1, \dots, x_n)$ é algum polinômio multilinear em $x_1, \dots, x_n$. Se $\lambda \in H(d, l)$, então existem uma decomposição de $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ em uma união disjunta*

$$X_n = X_1 \cup \dots \cup X_{d'} \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{l'},$$

em que $d' \leq d$, $l' \leq l$, e um polinômio multilinear $f' = f'(x_1, \dots, x_n)$ tal que

- f' é simétrico nas variáveis de cada conjunto X_i , $1 \leq i \leq d'$;
- f' alterna nas variáveis de cada conjunto Y_j , $1 \leq j \leq l'$;
- $KS_n f = KS_n f'$;

- os inteiros $d', l', |X_1|, \dots, |X_{d'}|, |Y_1|, \dots, |Y_{l'}|$ são unicamente determinados por λ e não dependem da escolha da tabela T_λ ;
- a decomposição de X_n é unicamente definida por T_λ e não depende de g .

Demonstração: Veja [19], Lema 2.4.6, p. 60. ■

Faremos um breve resumo sobre as codimensões no ambiente associativo e de Lie.

Sejam V_n o espaço dos polinômios de Lie multilineares em $x_1, \dots, x_n$ na álgebra de Lie livre $\mathcal{L}(X)$, A uma álgebra associativa e L uma álgebra de Lie. De modo análogo ao caso associativo-Lie, definimos os S_n -módulos

$$P_n(A) = P_n / (P_n \cap \text{Id}(A)) \quad e \quad V_n(L) = V_n / (V_n \cap \text{Id}(L));$$

suas codimensões $c_n(A)$ e $c_n(L)$; e seus cocaracteres

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A) \chi_\lambda \quad e \quad \chi_n(L) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(L) \chi_\lambda,$$

onde $m_\lambda(A)$ e $m_\lambda(L)$ são as respectivas multiplicidades associativa e de Lie associadas aos caracteres irredutíveis χ_λ . Se $\mathcal{V}_1 = \text{var}(A)$ e $\mathcal{V}_2 = \text{var}(L)$ definimos $c_n(\mathcal{V}_1) = c_n(A)$, $\chi_n(\mathcal{V}_1) = \chi_n(A)$, $c_n(\mathcal{V}_2) = c_n(L)$ e $\chi_n(\mathcal{V}_2) = \chi_n(L)$.

Observação 1.6 *As S_n -representações, em característica 0, são absolutamente irredutíveis, ou seja, permanecem irredutíveis sob uma extensão do corpo K . Assim, as codimensões (fraca, associativa ou de Lie) não mudam sob uma extensão do corpo base (veja [19], Teorema 4.1.9, p. 93, bem como os comentários no final da subseção anterior).*

Os três tipos de codimensões e as multiplicidades podem ser relacionadas.

Observação 1.7 *Seja (A, L) um par associativo-Lie. Dada $\lambda \vdash n$, temos que*

$$m_\lambda(L) \leq m_\lambda(A, L) \leq m_\lambda(A).$$

Consequentemente,

$$c_n(L) \leq c_n(A, L) \leq c_n(A) \quad e \quad \chi_n(L) \subseteq \chi_n(A, L) \subseteq \chi_n(A). \quad (1.4)$$

De fato, seja $k = m_\lambda(L)$. Pelo Lema 1.4.11, existem $f_1, \dots, f_k$ polinômios de Lie que são linearmente independentes módulo $Id(L)$. Tome $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \equiv 0 \pmod{Id(A, L)},$$

ou seja, $f \in \mathcal{L}(X) \cap Id(A, L) = Id(L)$. Pela independência linear, segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Portanto, $f_1, \dots, f_k$ são linearmente independentes módulo $Id(A, L)$. Novamente pelo Lema 1.4.11, segue que $m_\lambda(A, L) \geq k = m_\lambda(L)$. Com o mesmo argumento, usando que $Id(A) \subseteq Id(A, L)$, obtemos a outra desigualdade.

Considere um par (A, L) com sequência de codimensões exponencialmente limitada. Então a sequência de raízes $\sqrt[n]{c_n(A, L)}$, $n = 1, 2, \dots$, é limitada e podemos considerar os limites

$$\underline{\exp}(A, L) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A, L)} \quad e \quad \overline{\exp}(A, L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A, L)},$$

chamados de *expoente inferior e superior* de (A, L) , respectivamente. Se eles coincidem, temos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A, L)} = \underline{\exp}(A, L) = \overline{\exp}(A, L),$$

chamado de *expoente fraco* do par (A, L) e denotado por $\exp(A, L)$. Nesse caso, se $\mathcal{V} = \text{var}(A, L)$, definimos $\exp(\mathcal{V}) = \exp(A, L)$.

Se (A, L) é um par em que A é uma PI-álgebra, temos que $\{c_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é exponencialmente limitada pelo teorema de Regev (veja [19], Teorema 4.2.4, p. 95). Assim, pela desigualdade 1.4, também podemos definir o expoente inferior e superior de (A, L) nesse caso. Em particular, quando o par é da forma $(A, \rho(L))$, em que ρ é uma representação de dimensão finita, obtemos os expoentes inferior e superior de ρ denotados por $\underline{\exp}(\rho)$ e $\overline{\exp}(\rho)$, respectivamente. Caso eles coincidam, temos o *expoente da representação* ρ denotado por $\exp(\rho)$.

Analogamente, se A e L são álgebras associativas e de Lie, respectivamente, com sequências de codimensões exponencialmente limitadas, podemos considerar os expoentes inferior e superior de A

$$\underline{\exp}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \quad e \quad \overline{\exp}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

chamados de *expoente inferior e superior (associativo) de A* , respectivamente; e os expoentes inferior e superior de L

$$\underline{\exp}(L) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(L)} \quad e \quad \overline{\exp}(L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(L)},$$

chamados de *expoente inferior e superior (de Lie) de L* , respectivamente. Se $\underline{\exp}(A) = \overline{\exp}(A)$ obtemos o *expoente (associativo) de A* dado pelo limite $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Se $\underline{\exp}(L) = \overline{\exp}(L)$ obtemos o *expoente (de Lie) de L* dado pelo limite $\exp(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(L)}$.

Denotando $\mathcal{V}_1 = \text{var}(A)$ e $\mathcal{V}_2 = \text{var}(L)$, definimos $\exp(\mathcal{V}_1) = \exp(A)$ e $\exp(\mathcal{V}_2) = \exp(L)$, se os expoentes existem. Dado um par (A, L) , pela desigualdade 1.4, temos

$$\exp(L) \leq \exp(A, L) \leq \exp(A),$$

quando esses expoentes existem.

Dada uma variedade $\mathcal{V}$ (associativa, Lie, pares), definimos o *crescimento de $\mathcal{V}$* como sendo o crescimento da sequência $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n \in \mathbb{N}}$ de codimensões.

Definição 1.4.20 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade (associativa, Lie, pares). Dizemos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se existem constantes C e r tais que $c_n(\mathcal{V}) \leq Cn^r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Se $\mathcal{V} = \text{var}(A, L)$ é uma variedade de pares com crescimento polinomial, segue que $\overline{\exp}(A, L) \leq 1$.

Definição 1.4.21 *Dizemos que uma variedade de pares $\mathcal{V}$ tem crescimento quase polinomial se não possui crescimento polinomial, mas toda subvariedade própria possui crescimento polinomial.*

Vejamos alguns resultados sobre a existência do expoente.

Teorema 1.4.22 ([16]) *Seja A um PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica zero. Então $\exp(A)$ existe e é um inteiro não negativo.*

Teorema 1.4.23 ([59]) *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Então $\exp(L)$ existe e é um inteiro não negativo.*

Teorema 1.4.24 ([20]) *Seja $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie em um espaço de dimensão finita sobre um corpo K de característica zero. Então $\exp(\rho)$ existe e é um inteiro não negativo.*

Agora considere os seguintes exemplos que serão importantes para os próximos capítulos.

Exemplo 1.4.25 (Veja [36, 42].) *Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo de característica zero. Temos que*

- i) O T -ideal de identidades associativas de E é gerado pela identidade $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$;*
- ii) $c_n(E) = 2^{n-1}$ e então $\exp(E) = 2$;*
- iii) $\chi_n(E) = \sum_{\lambda \in H(1,1)} \chi_\lambda$.*

Exemplo 1.4.26 (Veja [37].) *Considere a álgebra $UT_2(K)$ sobre um corpo de característica zero. Temos que*

- i) O T -ideal de identidades associativas de $UT_2(K)$ é gerado pela identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$;*
- ii) $c_n(UT_2(K)) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ e então $\exp(UT_2(K)) = 2$;*
- iii) $\chi_n(UT_2(K)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(UT_2) \chi_\lambda$, onde $m_\lambda(UT_2) = q + 1$ se*

$$\lambda = (p + q, p), \quad p \geq 1, \quad q \geq 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = (p + q, p, 1), \quad p \geq 1, \quad q \geq 0.$$

Nos outros casos $m_\lambda(UT_2(K)) = 0$, exceto no caso $m_{(n)}(UT_2(K)) = 1$.

Exemplo 1.4.27 (Veja [12].) *Considere a álgebra de Lie $sl_2(K)$ sobre um corpo de característica zero. Temos que*

$$\chi_n(sl_2(K)) = \sum \chi_\lambda,$$

onde a soma percorre todas partições $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \vdash n$ tais que $\lambda_2 \neq 0$, para $n > 1$, e pelo menos um dos inteiros $\lambda_1 - \lambda_2$ e $\lambda_2 - \lambda_3$ é ímpar.

Observação 1.8 Dada A uma álgebra associativa, considere o par $(A, A^{(-)})$. Nesse caso, temos que $\text{Id}(A, A^{(-)}) = \text{Id}(A)$, mas $\text{Id}(A, A^{(-)})$ ser finitamente gerado como ideal fraco não implica $\text{Id}(A)$ finitamente gerado como T -ideal associativo, e vice-versa. Por outro lado, as codimensões e cocaracteres associativo e fraco são iguais, ou seja, $c_n(A, A^{(-)}) = c_n(A)$ e $\chi_n(A) = \chi_n(A, A^{(-)})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que se $\text{Id}(A, A^{(-)}) \neq \{0\}$ ($\text{Id}(A) \neq \{0\}$) então ambos expoentes associativo e fraco existem (pelo Teorema 1.4.22). Nesse caso, temos que $\exp(A, A^{(-)}) = \exp(A)$.

1.4.3 Pares especiais e de tipo associativo

Na classe de todos os pares associativo-Lie vamos destacar dois tipos importantes de pares, os pares especiais e de tipo associativo.

Definição 1.4.28 Dizemos que um par associativo-Lie (A, L) é especial se a álgebra associativa A é uma PI-álgebra. Uma variedade de pares é dita especial se é gerada por um par especial.

Exemplo 1.4.29 Todo par da forma $(A, A^{(-)})$ com $\text{Id}(A, A^{(-)}) \neq \{0\}$ é um par especial.

Exemplo 1.4.30 Todo par (A, L) em que A tem dimensão finita é um par especial. Em particular, qualquer par da forma $(A, \rho(L))$ em que ρ é uma representação de dimensão finita é especial.

Definição 1.4.31 Dizemos que um par associativo-Lie (A, L) é de tipo associativo se existem inteiros $d, l \geq 0$ tais que $\chi_n(A, L) \subseteq H(d, l)$, para todo $n \geq 1$. Uma variedade de pares é dita de tipo associativo se é gerada por um par de tipo associativo.

Observe que todo par especial é de tipo associativo. De fato, tome (A, L) um par especial. Como A é uma PI-álgebra, existem inteiros $d, l \geq 0$ tais que $\chi_n(A) \subseteq H(d, l)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja [19], Teorema 4.5.1, p. 105). Além disso, por 1.4, temos que $\chi_n(A, L) \subseteq \chi_n(A)$, para todo $n \geq 1$, e a afirmação segue.

Lema 1.4.32 Sejam (A, L) um par especial e

$$\chi_n(A, L) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A, L) \chi_\lambda \quad (1.5)$$

seu cocaracter. Suponha que existe uma constante C e um inteiro $k \geq 1$ tal que $m_\lambda(A, L) \neq 0$ em 1.5 se, e somente se, $n - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq C$. Então existe um polinômio $f = f(x)$ tal que

$$c_n(A, L) \leq f(n)k^n,$$

para todo $n = 1, 2, \dots$.

Demonstração: Como A é uma PI-álgebra, se

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A) \chi_\lambda$$

é seu cocaracter, então existem constantes C e k tais que

$$\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A) \leq Cn^k$$

para todo $n \geq 1$ (veja [19], Teorema 4.9.3, p. 117). Assim, como $m_\lambda(A, L) \leq m_\lambda(A)$, segue que a soma $\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(A, L)$ é polinomialmente limitada. Portanto, basta encontrar uma limitação superior da forma $f(n)k^n$ para o grau $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$ com $m_\lambda(A, L) \neq 0$ em 1.5, mas isso segue do Lema 1.4.14 e da fórmula do gancho. ■

1.4.4 A ação do grupo geral linear

Esta subseção tem como base [13, Cap. 12, Seção 4]. As demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas em [27, Cap. 8].

Dado um espaço vetorial W , o grupo geral linear, denotado por $GL(W)$, é o grupo das transformações lineares invertíveis de W . Quando $\dim(W) = m < \infty$, escrevemos $GL_m = GL_m(K) = GL(W)$ e identificamos GL_m com o grupo das matrizes invertíveis de ordem m com entradas no corpo K , fixada uma base.

Definição 1.4.33 *Seja φ uma representação de dimensão finita do grupo geral linear GL_m , digamos*

$$\varphi: GL_m \rightarrow GL_s,$$

para algum s . A representação φ é dita polinomial se as entradas $(\varphi(g))_{pq}$ da matriz $\varphi(g)$ de ordem s são polinômios nas entradas a_{kl} de g para $g \in GL_m$, $k, l = 1, \dots$,

m e $p, q = 1, \dots, s$. Uma representação polinomial φ é homogênea de grau d se os polinômios $(\varphi(g))_{pq}$ são homogêneos de grau d . Um GL_m -módulo W é polinomial, se a representação correspondente é polinomial. De modo análogo, definimos módulos polinomiais homogêneos.

Fixemos o espaço vetorial U_m com base $\{x_1, \dots, x_m\}$ e com a ação canônica de GL_m . Assumimos que $K\langle U_m \rangle = K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ é a álgebra associativa livre gerada por $\{x_1, \dots, x_m\}$. O espaço $K\langle U_m \rangle$ é um GL_m -módulo à esquerda quando munido da ação

$$gf(x_1, \dots, x_m) = f(g(x_1), \dots, g(x_m)), \quad g \in GL_m, \quad f(x_1, \dots, x_m) \in K\langle U_m \rangle.$$

Proposição 1.4.34 *i) $K\langle U_m \rangle$ é soma direta dos GL_m -submódulos $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$, onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ é a componente homogênea de grau n em $K\langle U_m \rangle$;*

ii) Para todo ideal fraco I de $K\langle X \rangle$, os espaços vetoriais $I \cap K\langle U_m \rangle$ e $I \cap (K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ são submódulos de $K\langle U_m \rangle$;

iii) Todo submódulo W de $K\langle U_m \rangle$ é a soma direta de suas componentes homogêneas $W \cap (K\langle U_m \rangle)^{(n)}$.

Teorema 1.4.35 *i) Toda representação polinomial de GL_m é soma direta de subrepresentações polinomiais homogêneas irredutíveis;*

ii) Todo GL_m -módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geq 0$ é isomorfo a um submódulo de $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$.

De forma similar às representações de S_n irredutíveis, as representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau n de GL_m são descritas pelas partições de n em não mais que m partes e pelos diagramas de Young.

Teorema 1.4.36 *i) As GL_m -representações irredutíveis de grau $n \geq 0$ não isomorfas, estão em correspondência biunívoca com as partições $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de n . Denotamos por $W_m(\lambda)$ o GL_m -módulo irredutível correspondente a λ ;*

ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n . O GL_m -módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$. Mais ainda, $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ pode ser escrito na forma

$$(K\langle U_m \rangle)^{(n)} \simeq \sum d_\lambda W_m(\lambda);$$

em que d_λ é a dimensão do S_n -módulo irredutível M_λ e a soma percorre todas as partições λ de n em não mais que m partes.

Uma representação de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ é polinomial, se o é em cada GL_{m_i} , para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Como consequência, obtemos a descrição completa das representações irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$.

Teorema 1.4.37 *Fixados inteiros $n_1, \dots, n_s > 0$, as representações polinomiais irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$, duas a duas não isomorfas, são da forma $W_{m_1}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes W_{m_s}(\lambda_s)$ com λ_i partição de n_i em não mais que m_i partes, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.*

Existe uma estreita relação entre as representações polinomiais irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ e as representações irredutíveis de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$. Para entender essa relação, podemos supor, sem perda de generalidade, $s = 1$.

Agora definimos a ação à direita de S_n em $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ por

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} \sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(n)}}, \quad x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in (K\langle U_m \rangle)^{(n)}, \quad \sigma \in S_n.$$

Observe que a ação à esquerda de S_n em P_n é uma ação que permuta as variáveis enquanto a ação à direita troca as posições das mesmas.

Observação 1.9 *Munido da ação acima, $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ é um S_n -módulo à direita.*

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $q_1, \dots, q_k$ as alturas das colunas do diagrama D_λ , ou seja, $k = \lambda_1$ e $q_j = \lambda'_j$. Denotamos por $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$, $q = q_1$, o polinômio de $K\langle U_m \rangle$ definido por

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_q) = \prod_{j=1}^k s_{q_j}(x_1, \dots, x_{q_j}),$$

onde $s_p(x_1, \dots, x_p)$ é o polinômio standard.

Teorema 1.4.38 *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ a componente homogênea de grau n em $K\langle U_m \rangle$.*

i) O elemento $s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$ definido anteriormente gera um GL_m -submódulo irredutível de $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$;

ii) Todo $W_m(\lambda) \subseteq (K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ é gerado por um elemento não nulo

$$w_\lambda(x_1, \dots, x_q) = s_\lambda(x_1, \dots, x_q) \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma, \quad \alpha_\sigma \in K.$$

O elemento $w_\lambda(x_1, \dots, x_q)$ é chamado de vetor de peso máximo de $W_m(\lambda)$, é único a menos de multiplicação por constante e está contido no espaço vetorial unidimensional dos elementos homogêneos de multigrado $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ em $W_m(\lambda)$;

iii) Se os GL_m -submódulos W' e W'' de $(K\langle U_m \rangle)^{(n)}$ são isomorfos a $W_m(\lambda)$ e possuem vetores de peso máximo w' e w'' , respectivamente, então a função $\phi_\alpha: w' \rightarrow \alpha w''$, $0 \neq \alpha \in K$, pode ser estendida unicamente a um isomorfismo de GL_m -módulos. Todo isomorfismo $W' \simeq W''$ é obtido dessa forma.

Proposição 1.4.39 *Sejam $m \geq n$, $\lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subseteq K\langle U_m \rangle$. O conjunto $M = W_m(\lambda) \cap P_n$ de todos os elementos multilineares de $W_m(\lambda)$ é um S_n -submódulo de P_n isomorfo a M_λ . Todo submódulo M_λ de P_n pode ser obtido dessa forma.*

Uma consequência da proposição anterior é que a linearização completa do vetor de peso máximo w_λ gera o S_n -módulo $W_m(\lambda) \cap P_n \simeq M_\lambda$.

Capítulo 2

Crescimento Polinomial das Codimensões

O estudo do crescimento das codimensões (associativas, de Lie, fracas) é uma importante tarefa na obtenção de propriedades das identidades polinomiais. Por exemplo, quando o crescimento é polinomial, podemos concluir que a dimensão das “não identidades” é pequena, ou seja, a grosso modo, podemos dizer que a estrutura em questão possui “muitas identidades” e assim, torna-se relativamente fácil o estudo das componentes multilineares do objeto relativamente livre. Em característica zero, Kemer [31] obteve uma caracterização das álgebras associativas com crescimento polinomial das codimensões em termos da sua sequência de cocaracteres. Um resultado análogo foi obtido por Benediktovich e Zalesskii [5] para álgebras de Lie, e Mishchenko [41] obteve outra equivalência relacionada a variedades de álgebras de Lie que possuem álgebra derivada nilpotente. Como consequência dos resultados de Gordienko [20], em identidades de representações de dimensão finita essa caracterização também pode ser obtida. Para pares associativo-Lie em geral pouco se sabe a respeito.

Uma outra característica importante é o crescimento quase polinomial. Como consequência dos resultados de Kemer [32], as únicas álgebras associativas gerando variedades com crescimento quase polinomial são E e UT_2 . Para o caso de Lie, Drensky [12] obteve que sl_2 gera uma variedade de crescimento quase polinomial, a qual é a única álgebra de Lie conhecida não solúvel com tal propriedade.

Na primeira e segunda seção deste capítulo estaremos interessados em estudar o comportamento das codimensões fracas quando o seu crescimento é polinomial. Veremos

que algumas propriedades do ambiente de Lie não se mantêm quando trabalhamos com identidades fracas. Além disso, vamos obter uma caracterização análoga à obtida por Kemer, Benediktovich e Zalesskii. Com base nessa caracterização, na terceira seção será possível obter exemplos importantes de variedades de pares com crescimento quase polinomial. Por fim, na última seção obteremos pares que no ambiente de Lie têm crescimento quase polinomial, mas no ambiente associativo-Lie não possuem tal propriedade.

Em todo capítulo K denotará um corpo de característica zero.

2.1 Crescimento lento das codimensões

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{N}_t$ as variedades de álgebras de Lie formadas pelas álgebras abelianas e nilpotentes (com classe de nilpotência $t + 1$), respectivamente. Denotamos por $\mathcal{N}_t\mathcal{A}$ a variedade de álgebras de Lie formada por todas álgebras que possuem subálgebra derivada nilpotente, com classe de nilpotência $t + 1$. Essa variedade pode ser vista como o produto das variedades $\mathcal{A}$ e $\mathcal{N}_t$ [2, Cap. 4]. Como veremos abaixo, as variedades desse tipo estão relacionadas com o crescimento polinomial das codimensões de Lie.

O teorema a seguir foi obtido por S. Mishchenko.

Teorema 2.1.1 ([39], Teorema 2.2, p. 33) *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras de Lie. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial;*
- ii) Para algum $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_2\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_s\mathcal{A}$;*
- iii) Existe uma constante q tal que*

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq q}} m_\lambda(\mathcal{V}) \chi_\lambda,$$

para todo $n \geq 1$.

Tome $t \in \mathbb{N}$. Analogamente ao caso de álgebras de Lie, definimos $\mathcal{W}_t$ como sendo a variedade de pares associativo-Lie determinada pela identidade

$$[[x_1, x_2], \dots, [x_{2t+1}, x_{2t+2}]] \equiv 0.$$

Em outras palavras $\mathcal{W}_t$ é a variedade formada pelos pares (A, L) onde L possui a álgebra derivada L' nilpotente de classe $t + 1$ ($L \in \mathcal{N}_t\mathcal{A}$). Veremos que as condições (i) e (ii) do Teorema 2.1.1 não são equivalentes para variedades de pares associativo-Lie.

Dados $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ e L uma álgebra de Lie, seja

$$L_f = \{z \in L \mid zf(\text{ad } y_1, \dots, \text{ad } y_n) = 0, \text{ para quaisquer } y_1, \dots, y_n \in L\},$$

onde $y \text{ad } x = [y, x]$ é a ação correspondente a representação adjunta à direita de L (ver Exemplo 1.1.23 e Observação 1.1).

Lema 2.1.2 *Tome $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo com $\deg_{x_i} f \leq 2, i = 1, \dots, n$. Então L_f é um ideal de L .*

Demonstração: Claramente L_f é um subespaço de L . Tome $b \in L_f$ e $c \in L$ quaisquer. Vamos mostrar que $[b, c] \in L_f$. Como $\text{char} K = 0$, podemos supor f multilinear. Pela identidade de Jacobi, temos que

$$[[[b, c], y_1], \dots, y_m] = [[[b, y_1], \dots, y_m], c] - [[b, [y_1, c]], \dots, y_m] - \dots - [[[b, y_1], y_2], \dots, [y_m, c]]$$

para quaisquer $y_1, \dots, y_m \in L$ e daí

$$\begin{aligned} [b, c]f(\text{ad } y_1, \dots, \text{ad } y_n) &= [bf(\text{ad } y_1, \dots, \text{ad } y_n), c] - \\ &\quad - bf(\text{ad } [y_1, c], \text{ad } y_2, \dots, \text{ad } y_n) - \dots - bf(\text{ad } y_1, \dots, \text{ad } [y_n, c]). \end{aligned}$$

Como $b \in L_f$, a expressão anterior é nula. Logo, $[b, c] \in L_f$. ■

Observação 2.1 *Seja I um ideal de uma álgebra de Lie L de dimensão finita. Suponha que L/I é nilpotente e $\text{ad } x|_I$ é nilpotente, para todo $x \in L$. Então L é nilpotente.*

De fato, como L/I é nilpotente, dado $x \in L$, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y(\text{ad } x)^n \in I$, para todo $y \in L$. Sendo $\text{ad } x|_I$ nilpotente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y(\text{ad } x)^n(\text{ad } x)^m = 0$, ou seja, $y(\text{ad } x)^{n+m} = 0$, para todo $y \in L$. A afirmação segue do Teorema de Engel.

Lema 2.1.3 *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que L satisfaz a identidade $[x_1, \dots, x_n, y, y] \equiv 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então L é nilpotente.*

Demonstração: Por hipótese, temos que L^n satisfaz $x(\text{ad } y)^2 \equiv 0$, ou seja, $\text{ad } y|_{L^n}$ é nilpotente, para todo $y \in L$. Além disso, L/L^n é nilpotente. Logo, pela Observação 2.1, obtemos que L é nilpotente. ■

Proposição 2.1.4 ([40]) *O lema anterior também é válido sem a hipótese de dimensão finita.*

Teorema 2.1.5 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie. Suponha que exista inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(\mathcal{V}) < 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$, onde $[a]$ denota a parte inteira do número real a , isto é, $[a]$ é o maior número inteiro k tal que $k \leq a$. Então*

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_c, \quad \text{para algum } c \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Demonstração: Sejam $k, r \in \mathbb{N}$, $r \leq k$, e considere as transposições $\delta_i = (2i-1, 2i) \in S_{2k}$, $i = 1, \dots, r$. Seja $H_r^k = \langle \delta_1, \dots, \delta_r \rangle$ o subgrupo de S_{2k} gerado por $\delta_1, \dots, \delta_r$. Observe que H_r^k é um grupo abeliano, pois as transposições δ_i são disjuntas e comutam.

Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n(\mathcal{V}) < 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ e tome $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Podemos ver H_k^k como subgrupo de S_{n-1} . Considere então os elementos de $\mathcal{L}(X)$

$$[x_n, x_{\sigma(n-1)}, \dots, x_{\sigma(1)}], \quad \sigma \in H_k^k.$$

Temos $|H_k^k| = 2^k$. Assim, como $c_n(\mathcal{V}) < 2^k$, existem $\lambda_\sigma \in K$, $\sigma \in H_k^k$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{\sigma \in H_k^k} \lambda_\sigma [x_n, x_{\sigma(n-1)}, \dots, x_{\sigma(1)}] \equiv 0$$

módulo $\text{Id}(\mathcal{V})$. Se n é ímpar, temos $2k = n-1$ e substituímos $x_n = [x, t]$. Se n é par, temos $2k+1 = n-1$ e $\sigma(2k+1) = 2k+1$ para todo $\sigma \in H_k^k$. Nesse caso, substituímos $x_n = x$ e $x_{\sigma(n-1)} = t$. Em ambos os casos, obtemos

$$f = \sum_{\sigma \in H_k^k} \lambda_\sigma [x, t, x_{\sigma(2k)}, \dots, x_{\sigma(1)}] \equiv 0 \quad (2.2)$$

módulo $\text{Id}(\mathcal{V})$.

Consideramos duas possibilidades:

Caso 1: Suponha $\lambda_\sigma = -\lambda_{\sigma\delta_k}$ para todo $\sigma \in H_k^k$. Então, usando a identidade

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] - [z_1, z_2, z_4, z_3] = [[z_1, z_2], [z_3, z_4]],$$

obtemos de f que

$$\sum_{\sigma \in H_{k-1}^k} \lambda'_\sigma [[[[x, t], [x_{2k}, x_{2k-1}]], x_{\sigma(2k-2)}], \dots, x_{\sigma(1)}] \equiv 0$$

módulo $Id(\mathcal{V})$, para alguns $\lambda'_\sigma \in K$. Observe que nesse caso agrupamos os termos de modo a eliminar as permutações de H_k^k que aparecem a permutação δ_k . Assim, na verdade temos $\lambda'_\sigma = \lambda_\sigma$ para todo $\sigma \in H_{k-1}^k$, onde usamos uma nova notação para diferenciar que agora estamos com escalares correspondentes ao grupo H_{k-1}^k .

Caso 2: Suponha $\lambda_\sigma \neq -\lambda_{\sigma\delta_k}$ para algum $\sigma \in H_k^k$. Como duas permutações δ_i e δ_j não permutam os mesmos valores para $i \neq j$, tomando $x_{\sigma(2k)} = x_{\sigma(2k-1)} = y_1$ em cada permutação $\sigma \in H_k^k$ do somatório 2.2, obtemos que

$$\sum_{\sigma \in H_{k-1}^k} \lambda'_\sigma [[[x, t](\text{ad } y_1)^2, x_{\sigma(2k-2)}], \dots, x_{\sigma(1)}] \equiv 0$$

módulo $Id(\mathcal{V})$, para alguns $\lambda'_\sigma \in K$, os quais não são todos nulos, pois temos $\lambda'_\sigma = \lambda_\sigma + \lambda_{\sigma\delta_k}$ para pelo menos um $\sigma \in H_{k-1}^k$.

Repetindo o argumento com $\delta_{k-1}, \dots, \delta_1$, obtemos que $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade da forma $[x, t]\bar{g}$, onde $\bar{g}$ é um monômio associativo g em $\text{ad } [x_{i+1}, x_i]$ ou $\text{ad } y_i$ com grau menor ou igual a 2 em suas variáveis.

Agora vamos aplicar indução no número de variáveis com grau 2 em g . Se não existir variável de grau 2, então

$$[x, t]\bar{g} = [[x, t], [x_{2k}, x_{2k-1}], \dots, [x_2, x_1]] \equiv 0$$

e obtemos 2.1.

Suponha que existe pelo menos uma variável de grau 2, então podemos escrever $g = f_1 f_2$, com $f_1 = h z^2$, onde z é variável de grau 2 e h não possui variáveis de grau 2. Denote por $\bar{f}_1$ e $\bar{f}_2$ as correspondentes avaliações de f_1 e f_2 por $\text{ad } [x_{i+1}, x_i]$ e/ou $(\text{ad } y_i)$, ou seja, $\bar{g} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$.

Tome $(A, L) \in \mathcal{V}$ um par qualquer. Cada variável em f_2 correspondente a uma substituição por $\text{ad } [x_{i+1}, x_i] = [\text{ad } x_{i+1}, \text{ad } x_i]$ troque por um comutador da forma $[z_{i+1}, z_i]$. Obtemos assim a partir de f_2 um polinômio associativo p nas variáveis z_i 's. Seja $\bar{p}$ as avaliações de p da forma $z_i \rightarrow \text{ad } x_i$. Temos então que $\bar{p} = \bar{f}_2$. Assim, temos que $[x, t]\bar{f}_1\bar{p} = [x, t]\bar{f}_1\bar{f}_2 \equiv 0$ em L , e daí segue que $\bar{L} = L/L_p$ satisfaz a identidade $[x, t]\bar{f}_1 \equiv 0$, ou seja, satisfaz

$$[x, t]\text{ad } [x_{2k}, x_{2k-1}] \cdots \text{ad } [x_p, x_{p-1}](\text{ad } y_1)^2 \equiv 0$$

para algum $p \in \mathbb{N}$. Logo $\bar{L}'$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.1.3. Assim, pela Observação 2.1.4, segue que $\bar{L}$ possui álgebra derivada nilpotente. Desse modo, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que L satisfaz

$$[x, t]\text{ad } [z_1, z_2] \cdots \text{ad } [z_{2r-1}, z_{2r}]\bar{p} \equiv 0,$$

ou seja,

$$[x, t]\text{ad } [z_1, z_2] \cdots \text{ad } [z_{2r-1}, z_{2r}]\bar{f}_2 \equiv 0,$$

o qual possui uma variável a menos de grau 2. Aplicando indução o resultado segue. ■

Corolário 2.1.6 *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de pares associativo-Lie com crescimento polinomial das codimensões, então*

$$\mathcal{W}_2 \not\subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_c, \text{ para algum } c \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Para a inclusão $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_c$, basta observar que se $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n \in \mathbb{N}}$ é polinomialmente limitada, então $\mathcal{V}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1.5.

Observe que $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]]$ é identidade fraca para o par $(UT_2, UT_2^{(-)})$ e daí $(UT_2, UT_2^{(-)}) \in \mathcal{W}_2$. Por outro lado, pela Observação 1.8, temos que $2 = \exp(UT_2) = \exp(UT_2, UT_2^{(-)})$ e daí se $(UT_2, UT_2^{(-)}) \in \mathcal{V}$, então

$$2 = \exp(UT_2, UT_2^{(-)}) \leq \exp(\mathcal{V}) \leq 1,$$

uma contradição. Logo, $(UT_2, UT_2^{(-)}) \notin \mathcal{V}$ e o resultado segue. ■

Com base no Corolário 2.1.6 e Teorema 2.1.1, é natural se pensar que a condição 2.3 é equivalente ao crescimento polinomial das codimensões fracas. Porém isso não é válido.

Exemplo 2.1.7 Considere $\mathcal{V} = \text{var}(E, E^{(-)})$. Temos que $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]] \in \text{Id}(\mathcal{V})$, donde $\text{Id}(\mathcal{W}_2) \subseteq \text{Id}(\mathcal{V})$, ou seja, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}_2$. Além disso, se $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$, então $(UT_2, UT_2^{(-)}) \in \mathcal{V}$ e daí $(UT_2, UT_2^{(-)})$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$, o que é uma contradição. Assim, $\mathcal{V}$ satisfaz 2.3 com $c = 2$. Por outro lado, $\exp(\mathcal{V}) = \exp(E, E^{(-)}) = \exp(E) = 2$, ou seja, $\mathcal{V}$ não tem crescimento polinomial.

2.2 Uma caracterização por diagramas de Young

Considere $I = \text{Id}(E, E^{(-)})$ e $J = \langle [x, y, z], [xy, y, z] \rangle^F$. O par $(E, E^{(-)})$ satisfaz as identidades $[x, y, z] \equiv 0$ e $[xy, y, z] \equiv 0$, donde $J \subseteq I$. Vamos mostrar que $I = J$. De fato, pela igualdade $[xy, y] = [x, y]y$, temos

$$0 \equiv [[xy, y], z] = [[x, y]y, z] = [x, y]yz - z[x, y]y \equiv [x, y]yz - [x, y]zy,$$

módulo J , e daí

$$[x, y][z, y] \equiv 0 \pmod{J}.$$

Linearizando essa identidade, obtemos

$$[x, y_1][z, y_2] \equiv -[x, y_2][z, y_1] \pmod{J}.$$

Assim, combinando essa identidade com $[x, y, z] \equiv 0$, segue que todo polinômio em $P_n/(P_n \cap J)$ é combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \quad i_1 < \cdots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_{2m}, \quad 2m + k = n.$$

Daí a igualdade $I = J = \langle [x, y, z], [xy, y, z] \rangle^F$ segue como no ambiente associativo ([19], Teorema 4.1.8, p. 90). Repare que no caso de álgebras associativas basta considerar apenas o primeiro dos dois polinômios; no caso de identidades fracas, o segundo não é consequência do primeiro.

Se $\lambda = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k)$ é uma partição de $k \in \mathbb{N}$, denotamos $\lambda = (1^k)$ e

$$e_{(1^k)} = e_{T_\lambda} = \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau \tau.$$

Lema 2.2.1 *Seja $r + l + 1 = k$ e $\{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_l, t\} = \{1, \dots, k\}$. Então*

$$e_{(1^k)}[[x_{i_1} \cdots x_{i_r}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_t] = 0$$

em $K\langle X \rangle$.

Demonstração: Veja [19], Lema 7.1.1, p. 164. ■

Lema 2.2.2 *Uma variedade $\mathcal{V}$ de pares associativo-Lie satisfaz uma identidade standard se, e somente se, $(E, E^{(-)}) \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração: Supondo $St_m \in Id(\mathcal{V})$ para algum $m \in \mathbb{N}$, consideramos os geradores $e_1, \dots, e_m \in E$. Temos que $St_m(e_1, \dots, e_m) = m!e_1 \cdots e_m \neq 0$. Logo $(E, E^{(-)}) \notin \mathcal{V}$.

Agora suponha $(E, E^{(-)}) \notin \mathcal{V}$. Então tome $f = f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ tal que $f \in Id(\mathcal{V})$ mas $f \notin Id(E, E^{(-)})$. Como $Id(E, E^{(-)}) = Id(E)$, temos que $f \notin Id(E)$.

O ideal $Id(E)$ é gerado, como T-ideal, pelo polinômio $[x_1, x_2, x_3]$. Então todo elemento de $Id(E)$ é uma combinação linear de polinômios do tipo

$$u[[p, q], r]v, \tag{2.4}$$

onde u, v, p, q, r são monômios associativos nas variáveis de X .

Para quaisquer monômios associativos p, q, a, b , pela identidade de Jacobi e anticomutatividade, temos

$$[[p, q], ab] = [[p, q], a]b + a[[p, q], b].$$

Desse modo, em todo polinômio do tipo 2.4 podemos tomar r como um monômio de grau um. Em outras palavras, todo elemento de $Id(E) = Id(E, E^{(-)})$ pode ser escrito como combinação linear de produtos do tipo

$$a[[x_{i_1} \cdots x_{i_k}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_r]b, \tag{2.5}$$

onde a e b são monômios associativos de grau ≥ 0 em X . Além disso, P_n é gerado, módulo

$P_n \cap Id(E, E^{(-)}) = P_n \cap Id(E)$, por elementos do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \quad (2.6)$$

onde

$$i_1 < \cdots < i_k, \quad j_1 < \cdots < j_{2m}, \quad 2m + k = n. \quad (2.7)$$

Assim, como $f \in P_n$ e $f \notin Id(E)$, escrevemos f como combinação de polinômios do tipo 2.5 e 2.6 e um dos polinômios do tipo 2.6 deve ter coeficiente não nulo. Sem perda de generalidade, podemos assumir que esse polinômio é da forma

$$x_1 \cdots x_k [x_{k+1}, x_{k+2}] \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

e aparece com coeficiente 1 em f . Substituindo x_i por $[x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, k$, obtemos uma nova identidade $g = g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ de $\mathcal{V}$. Dessa forma, todos os elementos do tipo 2.6 satisfazendo 2.7 pertencem a $Id(E)$ a menos que $i_1 = 1, \dots, i_k = k, j_1 = k + 1, \dots, j_{2m} = n$, pois $Id(E)$ é gerado por $[[x_1, x_2], x_3]$. Assim

$$g = [x_1, y_1] \cdots [x_k, y_k] [x_{k+1}, x_{k+2}] \cdots [x_{n-1}, x_n] + h,$$

onde h é multilinear em $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$ e pertencente a $Id(E) = Id(E, E^{(-)})$. Renomeando as variáveis escrevemos

$$g = [x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] + h,$$

onde $h \in P_{2q}$ é combinação linear de polinômios do tipo 2.5. Observamos aqui que se $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l, r\} \subseteq \{1, \dots, 2q\}$ e

$$e = \sum_{\sigma \in S_{\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l, r\}}} (-1)^\sigma \sigma,$$

então $e_{(1^{2q})} = ce$, para algum $c \in KS_{2q}$.

Assim, se $w = a[[x_{i_1} \cdots x_{i_k}, x_{j_1} \cdots x_{j_l}], x_r]b$ é um polinômio multilinear do tipo 2.5 aparecendo em h , pelo Lema 2.2.1, temos que $e_{(1^{2q})}w = cew = 0$. Além disso, pela

Observação 1.3,

$$e_{(1^{2q})}[x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] = 2^q St_{2q}.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{1}{2^q} e_{(1^{2q})} g = \frac{1}{2^q} e_{(1^{2q})} [x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] = St_{2q}$$

é uma identidade de $\mathcal{V}$. ■

Dados um KS_n -módulo irredutível M e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$ uma partição associada a esse módulo, definimos $H(\lambda) = H(M) = n - \lambda_1$, $h(\lambda) = h(M) = s$ e $H^-(\lambda) = H^-(M) = n - h(\lambda)$, ou seja, no diagrama D_λ , $H(\lambda)$ é o número de quadrados fora da primeira linha, $h(\lambda)$ é o tamanho da primeira coluna e $H^-(\lambda)$ o número de quadrados fora da primeira coluna.

Tome $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie. Fixado $n \in \mathbb{N}$, temos uma quantidade finita de submódulos irredutíveis na decomposição do KS_n -módulo $P_n/(P_n \cap Id(\mathcal{V}))$, pois a dimensão desse módulo é finita. Assim, podemos obter um subconjunto $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{V}} = \{M_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ é o conjunto de todos os módulos irredutíveis ($\neq 0$) dois a dois não isomorfos em cada decomposição para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que se $\mathbb{N}_0$ é finito, ou seja, $\Gamma_{\mathcal{V}}$ é finito, temos $c_n(\mathcal{V}) = 0$, para n suficientemente grande.

Nesse sentido, a partir de agora consideramos apenas variedades $\mathcal{V}$ tais que $\mathbb{N}_0$ é infinito.

Lema 2.2.3 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie e $\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ seu cocaracter. Suponha que $St_m \in Id(\mathcal{V})$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Dados $n > m$ e $\lambda \vdash n$, temos que $m_\lambda = 0$ se $H^-(\lambda) = n - h(\lambda) < \frac{n}{m} - 1$.*

Demonstração: Seja M_λ um S_n -módulo irredutível não nulo associado a alguma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ na decomposição de $\chi_n(\mathcal{V})$. Então M_λ é gerado por um polinômio multilinear g que alterna em λ_1 conjuntos de variáveis, dentre esses vamos considerar C o conjunto composto por $h(\lambda) = s$ variáveis. Os elementos de C são as variáveis correspondentes a primeira coluna de λ , as quais alternam em g .

Vamos mostrar que todo monômio de g contém pelo menos um submonômio formado por m variáveis em C , daí g pertence ao ideal fraco gerado por St_m e o lema segue.

Suponha por absurdo o contrário. Então g possui pelo menos um monômio da forma

$$m_1 w_1 m_2 w_2 m_3 \cdots w_{k-1} m_k w_k m_{k+1}$$

em que cada w_i é um monômio nas variáveis de C com comprimento no máximo $m - 1$, $i = 1, \dots, k$, e os m_j 's são monômios nas variáveis fora de C . Além disso, para qualquer $j \in \{2, \dots, k\}$, m_j não pode ser a palavra vazia. Obtemos então que

$$n - s \geq k - 1 \quad e \quad s \leq k(m - 1). \quad (2.8)$$

Por hipótese, temos as desigualdades

$$n > m(n - s + 1) \quad e \quad s > \frac{(m - 1)n}{m} + 1 > \frac{(m - 1)n}{m}. \quad (2.9)$$

Combinando 2.8 e 2.9, obtemos

$$n > m(k - 1 + 1) = mk \quad e \quad \frac{(m - 1)n}{m} < k(m - 1)$$

e daí $mk > n > mk$, uma contradição. ■

O lema anterior diz que se uma variedade satisfaz uma identidade standard, então na decomposição do seu cocaracter o número de quadrados fora da primeira coluna não é limitado. Por outro lado, sob certas hipóteses, vejamos que o mesmo não acontece com o número de quadrados fora da primeira linha.

Lema 2.2.4 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie e considere o conjunto $\Gamma_{\mathcal{V}} = \{M_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, onde $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito dos naturais. Se $n - h(M_n) \rightarrow \infty$, $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dim M_n < n^k$, para todo $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, então o conjunto $H = \{H(M_n) \mid M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}\}$ é finito.*

Demonstração: Dados $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$ uma partição associada a $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, sejam $a_n = \lambda_1$ e $b_n = h(\lambda) = s$.

Suponha por contradição que H é infinito, então $H(M_n) \rightarrow \infty$, $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$. Vamos separar o raciocínio em dois casos:

1º caso: Suponha que $\min\{a_n, b_n\}$ não é limitado, ou seja, a primeira linha e a primeira coluna das tabelas associadas aos módulos $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$ crescem indefinidamente, $n \in \mathbb{N}_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda \vdash n$, considere a partição $\mu = (a_n, 1^{b_n-1}) \vdash p = a_n + b_n - 1$ e M_p o S_p -módulo irredutível associado a μ . Pela fórmula do gancho para a dimensão das representações irredutíveis, segue que $\dim M_p = d_\mu \leq d_\lambda = \dim M_n$ e

$$\dim M_p = d_\mu = \frac{(a_n + b_n - 1)!}{(a_n + b_n - 1)(a_n - 1)!(b_n - 1)!} = \frac{(a_n + b_n - 2)!}{(a_n - 1)!(b_n - 1)!} = \binom{a_n + b_n - 2}{a_n - 1}.$$

Além disso, pela desigualdade das médias geométrica e aritmética, temos

$$(a_n + b_n - 2)^2 = ((a_n - 1) + (b_n - 1))^2 \geq 2(a_n - 1)(b_n - 1) > n,$$

onde a última desigualdade segue para valores de a_n e b_n suficientemente grandes, o que podemos supor já que $\min\{a_n, b_n\}$ não é limitado. Para esses valores de a_n e b_n , seja $c = a_n - 1$ ou $c = b_n - 1$ conforme $\min\{a_n, b_n\}$ igual a a_n ou b_n , respectivamente. Então

$$\dim M_n \geq \dim M_p = d_\mu \geq \frac{[\sqrt{n}]!}{(c!)^2},$$

o que contradiz $\dim M_n < n^k$.

2° caso: Suponha que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\min\{a_n, b_n\} < t$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Em particular, vamos considerar $\mathbb{N}'_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ tal que $b_n < t$, $n \in \mathbb{N}'_0$. Dados $n \in \mathbb{N}'_0$ e $\lambda \vdash n$ partição associada ao módulo $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, seja $c_n = \lambda_2$ e tome $\mu = (a_n, c_n) \vdash q = a_n + c_n$ com módulo associado M_q . Observe que podemos supor $c_n \neq 0$, pois H é infinito. Como no caso anterior, temos que $\dim M_q = d_\mu \leq d_\lambda = \dim M_n$ e $q \leq n$. Além disso, pela fórmula do gancho,

$$\dim M_q = d_\mu = \frac{(a_n + c_n)!}{\frac{(a_n+1)!c_n!}{a_n-c_n+1}} = \frac{(a_n + c_n)!(a_n - c_n + 1)}{(a_n + 1)a_n!c_n!} \geq \frac{(a_n + c_n)!}{na_n!c_n!} = \binom{a_n + c_n}{c_n} \frac{1}{n}$$

Assim, se $c_n^2 \geq n/2$ para algum $n \in \mathbb{N}'_0$, então

$$\dim M_n = d_\lambda \geq d_\mu = \dim M_q > 2^{c_n-1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} 2^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1}$$

e temos uma contradição.

Suponha então $c_n^2 < n/2$ para todo $n \in \mathbb{N}'_0$. Como $b_n < t$, ou seja, o número de linhas das tabelas associadas aos M_n , $n \in \mathbb{N}'_0$, é limitado por t , segue que $n - h(M_n) \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}'_0$. Daí, como H é infinito, devemos ter que $c_n \rightarrow \infty$. Tomamos então $n \in \mathbb{N}'_0$

suficientemente grande tal que $c_n > b_n$. Temos que $a_n + c_n^2 > a_n + b_n c_n > n$ e daí

$$a_n + c_n > a_n > n - c_n^2 > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

Considere $n \in \mathbb{N}'_0$ suficientemente grande tal que $c_n > k + 2$, então

$$\dim M_q \geq \binom{a_n + c_n}{c_n} \frac{1}{n} > \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k + 2} \frac{1}{n} > n^k,$$

uma contradição.

Em ambos os casos obtemos contradições, logo H é finito. ■

Com base nos resultados anteriores obtemos a seguinte caracterização de variedades de pares com crescimento polinomial.

Teorema 2.2.5 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie. São equivalentes:*

- i) $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial;*
- ii) Existe uma constante q tal que*

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq q}} m_\lambda(\mathcal{V}) \chi_\lambda,$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Suponha que $c_n(\mathcal{V}) < n^k$ para todo $n \geq 1$ e algum $k \in \mathbb{N}$, e considere o conjunto $\Gamma_{\mathcal{V}}$. Então $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$ e daí $(E, E^{(-)}) \notin \mathcal{V}$, pois $\exp(E, E^{(-)}) = \exp(E) = 2$. Pelo Lema 2.2.2, segue que $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard.

Assim, pelo Lema 2.2.3, se

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathcal{V}) \chi_\lambda \tag{2.10}$$

é o cocaracter de $\mathcal{V}$, então $n - h(M_n) \rightarrow \infty$, $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, ou seja, o número de quadrados fora da primeira coluna não é limitado na decomposição 2.10. Além disso, para cada $M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}$, temos que $\dim M_n \leq c_n(\mathcal{V}) < n^k$.

Pelo Lema 2.2.4, temos que $H = \{H(M_n) \mid M_n \in \Gamma_{\mathcal{V}}\}$ é finito, ou seja, o número de quadrados fora da primeira linha é limitado, e então basta tomar $q = \max H$.

Reciprocamente, suponha (ii). Como $|\lambda| - \lambda_1 \leq q$, temos que $\lambda_1 \geq n - q$ e, pela fórmula do gancho, obtemos

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{(n-q)!} \leq n^q.$$

Além disso, temos que $P_n \simeq KS_n$ e a multiplicidade de χ_λ no caracter da representação regular de S_n é igual ao seu grau $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Assim, $m_\lambda(\mathcal{V}) \leq d_\lambda \leq n^q$ em $\chi_\lambda(\mathcal{V})$ e

$$c_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathcal{V}) d_\lambda \leq \sum_{\lambda \vdash n} n^q n^q \leq q^2 n^{2q},$$

pois q^2 é uma limitação superior para o número de partições $\lambda \vdash n$ com $n - \lambda_1 \leq q$. Daí segue (i). ■

2.3 Crescimento quase polinomial

Agora vamos estudar o comportamento das codimensões em pares relacionados às álgebras E , UT_2 e sl_2 sobre o corpo K , o qual podemos supor algebricamente fechado, pela Observação 1.6. Mais precisamente, vamos considerar os pares $(E, E^{(-)})$, $(UT_2, UT_2^{(-)})$ e (M_2, sl_2) que, como vimos nos Exemplos 1.1.30 e 1.1.31, são pares associados a uma representação da respectiva álgebra de Lie. Mostraremos nas subseções a seguir que esses três pares geram variedades com crescimento quase polinomial das codimensões. Assim o principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1 *Os pares associativo-Lie $(E, E^{(-)})$, $(UT_2, UT_2^{(-)})$ e (M_2, sl_2) geram variedades de pares com crescimento quase polinomial das codimensões.*

2.3.1 O par $(UT_2, UT_2^{(-)})$

Considere o par $(UT_2, UT_2^{(-)})$. Pela Observação 1.8 e Exemplo 1.4.26, temos que $\exp(UT_2, UT_2^{(-)}) = \exp(UT_2) = 2$ e

$$\chi_n(UT_2, UT_2^{(-)}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(UT_2, UT_2^{(-)}) \chi_\lambda,$$

onde $m_\lambda(UT_2, UT_2^{(-)}) = q + 1$ se

$$\lambda = (p + q, p), \quad p \geq 1, \quad q \geq 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = (p + q, p, 1), \quad p \geq 1, \quad q \geq 0.$$

Nos outros casos $m_\lambda(UT_2, UT_2^{(-)}) = 0$, exceto no caso $m_{(n)}(UT_2, UT_2^{(-)}) = 1$.

Sejam $I = Id(UT_2, UT_2^{(-)})$ e $J = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^F$. O par $(UT_2, UT_2^{(-)})$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$ e daí $J \subseteq I$. Vejamos que $I = J$. Para isso, considere os polinômios em P_n na forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m} [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m-1}}] \quad (2.11)$$

onde $\{i_1, \dots, i_m, k, j_1, \dots, j_{n-m-1}\} = \{1, \dots, n\}$ e

$$i_1 < \cdots < i_m, \quad j_1 < \cdots < j_{n-m-1}, \quad k > j_1, \quad m \neq n - 1.$$

Vejamos que $P_n/(P_n \cap J)$ é gerado por esses polinômios. Observe que podemos ordenar variáveis seguidas de um comutador, ou seja,

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(t)} [z, w] \equiv x_1 \cdots x_t [z, w] \pmod{J},$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_t, z, w \in X$. Assim, módulo J , todo polinômio multilinear pode ser escrito como combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_t} [x_{j_1}, \dots, x_{j_m}], \quad i_1 < \cdots < i_t, \quad m + t = n.$$

Além disso, temos a identidade

$$0 \equiv [x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_3, x_4][x_1, x_2] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = [x_1, x_2, x_3, x_4] - [x_1, x_2, x_4, x_3]$$

e, usando a identidade de Jacobi e anticomutatividade, podemos ordenar os índices em cada comutador como desejado.

Agora vejamos que os polinômios em 2.11 são linearmente independentes módulo I e assim obtemos $I = J$. Tome então $P = \{i_1, \dots, i_m\}$, $Q = \{j_1, \dots, j_{n-m-1}\}$, $X_{P,Q,k} = x_{i_1} \cdots x_{i_m} [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m-1}}]$ e suponha que existe combinação linear nula de elementos

do tipo 2.11 módulo I , ou seja, existem $\alpha_{P,Q,k} \in K$ tais que

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P,Q,k} \alpha_{P,Q,k} X_{P,Q,k} \in I.$$

Substitua $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ pela matriz elementar E_{11} , x_k por E_{12} e as variáveis $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m-1}}$ por E_{22} . Então $X_{P,Q,k} = E_{12}$ e todos os outros $X_{P',Q',k'}$ são nulos para $(P', Q', k') \neq (i_1, \dots, j_1, \dots, j_{n-m-1}, k)$, donde obtemos a independência linear.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, considere o módulo $P_n(UT_2, UT_2^{(-)})$. Com base na decomposição de $\chi_n(UT_2, UT_2^{(-)})$ vamos determinar os geradores dos módulos irredutíveis associados às partições com multiplicidades não nulas.

Se $\lambda = (n)$, o correspondente vetor de peso máximo $f_{T_\lambda} = x^n$ não é identidade para $(UT_2, UT_2^{(-)})$, pois $f_{T_\lambda}(E_{11}) = E_{11} \neq 0$. Então x^n é o gerador correspondente a $\lambda = (n)$.

Dados $p \geq 1$ e $q \geq 0$, considere agora $\lambda = (p+q, p)$ e T_λ^i , $i = 0, \dots, q$, a tabela

$i+1$	$i+2$	$\dots$	$i+p-1$	$i+p+1$	1	$\dots$	i	$i+2p+1$	$\dots$	n
$i+p+2$	$i+p+3$	$\dots$	$i+2p$	$i+p$						

Associamos a T_λ^i o polinômio

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2) = y_1^i \underbrace{\bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1}_{p-1} [y_2, y_1] \underbrace{\bar{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} y_1^{q-i} \quad (2.12)$$

em que “ $-$ ” e “ $\sim$ ” significam alternância nas variáveis correspondentes.

Observe que o polinômio $a_{p,q}^{(i)}$ é obtido do idempotente essencial correspondente a T_λ^i identificando todos os elementos em cada linha de λ .

Vamos mostrar que os $q+1$ polinômios $a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2)$, $i = 0, \dots, q$, são linearmente independentes módulo I . Suponha o contrário, então existem $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i a_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Tome $t = \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$, então

$$\alpha_t a_{p,q}^{(t)} + \sum_{i < t} \alpha_i a_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Associamos a T_λ^i o polinômio

$$b_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, y_3) = y_1^i \underbrace{\hat{y}_1 \cdots \tilde{y}_1}_{p-1} \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \underbrace{\hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} y_1^{q-i} \quad (2.13)$$

em que “ $\wedge$ ”, “ $-$ ” e “ $\sim$ ” significam alternância nas variáveis correspondentes.

Usaremos argumentos análogos ao caso anterior. Vejamos que os $q + 1$ polinômios $b_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, y_3)$, $i = 0, \dots, q$, são linearmente independentes módulo I . Suponha o contrário, então existem $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i b_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Tome $t = \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$, então

$$\alpha_t b_{p,q}^{(t)} + \sum_{i < t} \alpha_i b_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Substituindo y_1 por $y_1 + y_4$,

$$\begin{aligned} & \alpha_t (y_1 + y_4)^t \underbrace{(\widehat{y_1 + y_4}) \cdots (\widetilde{y_1 + y_4})}_{p-1} (\overline{y_1 + y_4}) \bar{y}_2 \bar{y}_3 \underbrace{\hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} (y_1 + y_4)^{q-t} + \\ & + \sum_{i < t} \alpha_i (y_1 + y_4)^i \underbrace{(\widehat{y_1 + y_4}) \cdots (\widetilde{y_1 + y_4})}_{p-1} (\overline{y_1 + y_4}) \bar{y}_2 \bar{y}_3 \underbrace{\hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} (y_1 + y_4)^{q-i} \equiv 0 \pmod{I}. \end{aligned}$$

Vamos considerar então g a componente de grau $t + p$ em y_1 e grau $q - t$ em y_4 . Fazendo a substituição

$$y_1 = E_{11}, \quad y_2 = E_{22}, \quad y_3 = E_{12} + E_{22} \quad e \quad y_4 = E_{22}$$

temos que

$$y_1 y_4 = E_{11} E_{22} = 0.$$

Assim, o único termo com substituição não nula em g é

$$\alpha_t y_1^t \hat{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2 y_4^{q-t}.$$

Como $y_1 y_2 = E_{11} E_{22} = 0$, segue que

$$0 = \alpha_t E_{11} (E_{12} + E_{22}) E_{22} = \alpha_t E_{12},$$

uma contradição. Como $m_{(p+q,p,1)}(UT_2, UT_2^{(-)}) = q + 1$, segue que os polinômios da forma 2.13 geram todas as cópias distintas do mesmo módulo irredutível associado a $\lambda = (p + q, p, 1)$ na decomposição de $P_n(UT_2, UT_2^{(-)})$.

Teorema 2.3.2 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie com $\mathcal{V} \subsetneq \text{var}(UT_2, UT_2^{(-)})$. Então existe uma constante N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \vdash n$ temos $m_\lambda(\mathcal{V}) \leq N$. Além disso, $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. Portanto o par $(UT_2, UT_2^{(-)})$ gera uma variedade de crescimento quase polinomial.*

Demonstração: Seja $I = \text{Id}(UT_2, UT_2^{(-)})$. Como $\mathcal{V} \subsetneq \text{var}(UT_2, UT_2^{(-)})$, existe partição $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda(\mathcal{V}) < m_\lambda(UT_2, UT_2^{(-)})$. Sejam $a_{p,q}^{(i)}$ e $b_{p,q}^{(i)}$, $i = 0, \dots, q$, os polinômios construídos anteriormente. Então

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i a_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}, \text{ e } \alpha_i \neq 0 \text{ para algum } i; \quad (2.14)$$

ou

$$\sum_{i=0}^q \beta_i b_{p,q}^{(i)} \equiv 0 \pmod{I}, \text{ e } \beta_i \neq 0 \text{ para algum } i. \quad (2.15)$$

Relembre que

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2) = y_1^i \underbrace{\bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1}_{p-1} [y_2, y_1] \underbrace{\bar{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} y_1^{q-i} \quad (2.16)$$

e

$$b_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, y_3) = y_1^i \underbrace{\hat{y}_1 \cdots \tilde{y}_1}_{p-1} \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \underbrace{\hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1} y_1^{q-i}. \quad (2.17)$$

Pela identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ e substituindo y_3 por $[y_2, y_1]$ em 2.15, obtemos de 2.15 a relação 2.14.

Suponha então que

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_1^i \bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_2, y_1] \bar{y}_2 \cdots \tilde{y}_2 y_1^{q-i} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Seja $J = Id(UT_2)$ o T-ideal associativo de UT_2 . Como $J = I$, temos que

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_1^i \bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_2, y_1] \bar{y}_2 \cdots \tilde{y}_2 y_1^{q-i} \equiv 0 \pmod{J}.$$

No que segue vamos usar algumas vezes consequências associativas, as quais serão admissíveis quando consideramos identidades módulo o T-ideal J .

Tome $t = \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$. Substituindo y_2 por $y_3 + y_4$, obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha_t y_1^t \bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_3 + y_4, y_1] \overline{(y_3 + y_4)} \cdots \widetilde{(y_3 + y_4)} y_1^{q-t} + \\ & + \sum_{i < t} \alpha_i y_1^i \bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_3 + y_4, y_1] \overline{(y_3 + y_4)} \cdots \widetilde{(y_3 + y_4)} y_1^{q-i} \equiv 0 \pmod{J}. \end{aligned}$$

Considere a componente homogênea g de grau 1 em y_4 . Substitua y_3 por y_1^2 e y_4 por y_2 em g . Obtemos

$$\begin{aligned} f = f(y_1, y_2) &= \alpha_t y_1^t \underbrace{\bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_2, y_1]}_{p-1} \underbrace{\overline{y_1^2} \cdots \widetilde{y_1^2}}_{p-1} y_1^{q-t} + \\ & + \sum_{i < t} \alpha_i y_1^i \underbrace{\bar{y}_1 \cdots \tilde{y}_1 [y_2, y_1]}_{p-1} \underbrace{\overline{y_1^2} \cdots \widetilde{y_1^2}}_{p-1} y_1^{q-i} \equiv 0 \pmod{J}. \end{aligned}$$

Seja $N = \deg f = p - 1 + 2(p - 1) + q + 2 = 3p + q - 1$. Expandindo os alternadores na expressão anterior, segue que

$$\alpha_t y_1^{t+2(p-1)} [y_2, y_1] y_1^{p-1+q-t} \equiv \sum_{i < t+2(p-1)} \alpha'_i y_1^i [y_2, y_1] y_1^{N-i-2} \pmod{J},$$

para alguns coeficientes $\alpha'_i \in K$. Identificando $y_2 = [z, y_1]$ e ainda usando a igualdade $[[z, y_1], y_1] = zy_1^2 - 2y_1zy_1 + y_1^2z$, segue que

$$\alpha_t y_1^{t+2p} z y_1^{N-t-2p} \equiv \sum_{i < t+2p} \gamma_i y_1^i z y_1^{N-i} \pmod{J},$$

para alguns coeficientes $\gamma_i \in K$. Seja $M = t + 2p$. Lembre que $\alpha_t \neq 0$, então podemos reescrever a equivalência anterior na forma

$$y_1^M z y_1^{N-M} \equiv \sum_{i < M} \delta_i y_1^i z y_1^{N-i} \pmod{J}, \quad \delta_i \in K. \quad (2.18)$$

Vamos mostrar que $m_\lambda(\mathcal{V}) \leq N$ para toda partição λ . Pela decomposição do cocaracter de $(UT_2, UT_2^{(-)})$, basta considerar os dois casos $\lambda = (p+q, p)$ e $\lambda = (p+q, p, 1)$. Considere $\lambda = (p+q, p, 1)$. O caso $q < N$ está resolvido, pois $m_\lambda(UT_2, UT_2^{(-)}) = q + 1$. Suponha $q \geq N$. Então podemos substituir z por

$$\underbrace{\hat{y}_1 \cdots \tilde{y}_1}_{p-1} \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \underbrace{\hat{y}_2 \cdots \tilde{y}_2}_{p-1}$$

e aplicar a relação 2.18 para todo polinômio $b_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, y_3)$ tal que $i \geq M$. Obtemos que

$$b_{p,q}^{(i)} \equiv \sum_{j < M} \delta_j b_{p,q}^{(j)} \pmod{J}$$

e, lembrando que $J = I$, segue que

$$b_{p,q}^{(i)} \equiv \sum_{j < M} \delta_j b_{p,q}^{(j)} \pmod{I}$$

Portanto, $m_\lambda(\mathcal{V}) \leq M - 1 \leq N$. O caso $\lambda = (p+q, p)$ é feito de maneira análoga.

Por fim, vejamos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. Linearizando 2.18, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_N} y_{1\sigma(1)} \cdots y_{1\sigma(M)} z y_{1\sigma(M+1)} \cdots y_{1\sigma(N)} &\equiv \\ &\equiv \sum_{i < M} \sum_{\sigma \in S_N} \delta_i y_{1\sigma(1)} \cdots y_{1\sigma(i)} z y_{1\sigma(i+1)} \cdots y_{1\sigma(N)} \pmod{J}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Identifique $z = [y_3, y_4]$, multiplique 2.19 pela direita por $y_{21} \cdots y_{2M}$ e alterne y_{1i} com y_{2i} , para $i = 1, \dots, M$. As variáveis à direita (e à esquerda) do comutador $[y_3, y_4]$ podem ser ordenadas. Desse modo, aparece um novo comutador além de $[y_3, y_4]$ nos termos do lado direito de 2.19. Assim, pela identidade $[x_1, x_2][x_3, x_4]$, segue que

$$\bar{y}_{11} \hat{y}_{12} \cdots \tilde{y}_{1M} [y_3, y_4] \bar{y}_{21} \hat{y}_{22} \cdots \tilde{y}_{2M} y_{1M+1} \cdots y_{1N} \equiv 0 \pmod{J}.$$

Multiplicando pela esquerda por $y_{2M+1} \cdots y_{2N}$ e alternando y_{1j} com y_{2j} , para $j = M+1, \dots, N$, segue que

$$\bar{y}_{11} \hat{y}_{12} \cdots \tilde{y}_{1N} [y_3, y_4] \bar{y}_{21} \hat{y}_{22} \cdots \tilde{y}_{2N} \equiv 0 \pmod{J}.$$

Usando que $J = I$, obtemos

$$\bar{y}_{11}\hat{y}_{12}\cdots\tilde{y}_{1N}[y_3, y_4]\bar{y}_{21}\hat{y}_{22}\cdots\tilde{y}_{2N} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Isso mostra que se $\lambda = ((N+1)^2)$, então $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$.

De modo análogo, identificando $z = \bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_5$ em 2.19 e usando a identidade

$$\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_5[z_1, z_2] \equiv 0,$$

obtemos a identidade

$$\check{y}_{11}\hat{y}_{12}\cdots\tilde{y}_{1N}\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_5\check{y}_{21}\hat{y}_{22}\cdots\tilde{y}_{2N} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Assim, se $\lambda = ((N+1)^2, 1)$, então $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$.

Portanto, se λ é partição de n tal que $\lambda_2 \geq N+1$ então $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$. Assim, o cocaracter de $\mathcal{V}$ tem a forma

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq N}} m_\lambda(\mathcal{V}) \chi_\lambda.$$

Pelo Teorema 2.2.5, segue que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. ■

2.3.2 O par $(E, E^{(-)})$

Considere o par $(E, E^{(-)})$. Como visto no início da seção anterior, temos que $Id(E, E^{(-)}) = \langle [x, y, z], [xy, y, z] \rangle^F$ e, pela Observação 1.8 e Exemplo 1.4.25, temos também $\exp(E, E^{(-)}) = \exp(E) = 2$ e $\chi_n(E, E^{(-)}) = \sum_{\lambda \in H(1,1)} \chi_\lambda$.

Agora vejamos geradores dos módulos irredutíveis na decomposição do cocaracter do par $(E, E^{(-)})$. Dado $k \in \mathbb{N}$, tome $\lambda = (k, 1^{n-k})$ partição de n tal que $m_\lambda(E, E^{(-)}) = 1 \neq 0$ na decomposição de $\chi_n(E, E^{(-)})$. Considere o vetor de peso máximo

$$f_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = x_1^{k-1} St_{n-k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}).$$

Fazendo a substituição

$$\bar{x}_1 = 1 + e_1, \bar{x}_2 = e_2, \bar{x}_3 = e_3, \dots, \bar{x}_{n-k+1} = e_{n-k+1},$$

temos que $\bar{x}_1^{k-1} = (1 + e_1)^{k-1} = 1 + (k-1)e_1$ e

$$St_{n-k+1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-k+1}) = (n-k+1)!e_1e_2 \cdots e_{n-k+1}.$$

Daí

$$f_k(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-k+1}) = (n-k+1)!e_1e_2 \cdots e_{n-k+1} \neq 0.$$

Portanto, f_k não é identidade fraca do par $(E, E^{(-)})$ e então gera o módulo irredutível associado a $\lambda = (k, 1^{n-k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.3 *Seja $\mathcal{V}$ variedade de pares associativo-Lie com $\mathcal{V} \subsetneq \text{var}(E, E^{(-)})$. Então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. Portanto o par $(E, E^{(-)})$ gera uma variedade com crescimento quase polinomial.*

Demonstração: Como $\mathcal{V}$ é uma subvariedade própria, temos que $(E, E^{(-)}) \notin \mathcal{V}$. Pelo Lema 2.2.2, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $St_m \equiv 0$ é identidade em $\mathcal{V}$. Assim, pela Observação 1.2, temos que $St_{m+l} \in Id(\mathcal{V})$, para todo $l \geq 1$.

Pela forma dos geradores na decomposição do cocaracter de $(E, E^{(-)})$, obtemos $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$ para toda partição $\lambda = (1^p)$, com $p \geq m$. Além disso, multiplicando cada vetor de peso máximo associado a essas partições por uma potência da variável x_1 , segue que $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$ quando $\lambda = (k, 1^{n-k})$, $k \geq 1$ e $n-k \geq m$. Portanto, o número de quadrados fora da primeira linha na decomposição do cocaracter de $\mathcal{V}$ é limitado por m . Pelo Teorema 2.2.5, o resultado segue. ■

2.3.3 O par (M_2, sl_2)

Nesta subseção usaremos resultados obtidos por Drensky [14] e Razmyslov [44]. Uma boa parte desses resultados pode ser encontrada, com descrição bem detalhada, no livro [2, Caps. 5 e 6].

Como foi visto no Exemplo 1.3.4, a identidade $[x \circ y, z] \equiv 0$ gera todas as identidades fracas de (M_2, sl_2) . Além disso, como pode ser encontrado em [14], $m_\lambda(M_2, sl_2) = 1$ e

$\lambda_4 = 0$ para toda partição λ de n na decomposição do cocaracter de (M_2, sl_2) , ou seja,

$$\chi_n(M_2, sl_2) = \sum_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \vdash n} \chi_\lambda. \quad (2.20)$$

Agora vejamos propriedades na decomposição do cocaracter e sequência de codimensões do par (M_2, sl_2) .

Considere

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a base canônica de sl_2 . Temos as seguintes relações

$$he = e, \quad eh = -e, \quad hf = -f, \quad fh = f, \quad ef = E_{11}, \quad fe = E_{22},$$

$$[e, f] = h, \quad [e, h] = -2e, \quad [f, h] = 2f,$$

e daí

$$\begin{aligned} St_3(e, f, h) &= efh - ehf - feh - hfe + fhe + hef \\ &= ef + ef + fe + fe + fe + ef = 3I_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, dado qualquer polinômio associativo multilinear $f \in K\langle X \rangle$, temos a identidade $[St_3(x, y, z), f]$ para o par (M_2, sl_2) .

Lema 2.3.4 *Seja A uma PI-álgebra associativa semissimples sobre um corpo algebricamente fechado K com identidade polinomial de grau d . Então A é um produto subdireto de álgebras matriciais sobre o corpo K com ordem limitada por $d/2$.*

Demonstração: Veja [19], Seções 1.11 e 1.12. ■

Lema 2.3.5 *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado K . Suponha que existe um L -módulo V fiel e irredutível. Então L é abeliana ou contém alguma subálgebra isomorfa a sl_2 .*

Demonstração: Veja [2], Seção 6.4.2, p. 188. ■

Lema 2.3.6 *Para a sequência das codimensões do par (M_2, sl_2) , temos a desigualdade $c_{n+1}(M_2, sl_2) \geq c_n(M_2, sl_2)$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Tome $I = Id(M_2, sl_2)$. Basta mostrar que dados polinômios $f_1, \dots, f_k$ em $x_1, \dots, x_n$ que são linearmente independentes módulo I , então os polinômios $f_1 x_{n+1}, \dots, f_k x_{n+1}$ são linearmente independentes módulo I . De fato, tome $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tais que

$$g = g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i x_{n+1} \equiv 0 \pmod{I},$$

$a_1, \dots, a_n$ elementos arbitrários em sl_2 e $a_{n+1} = h = E_{11} - E_{22} \in sl_2$. Então

$$0 = g(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(a_1, \dots, a_n) \right) a_{n+1} = b a_{n+1},$$

onde $b = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(a_1, \dots, a_n) \in M_2$, e como a matriz a_{n+1} é invertível, segue $b = 0$. Os elementos $a_1, \dots, a_n$ são arbitrários, logo $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ é uma identidade para (M_2, sl_2) , ou seja,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \equiv 0 \pmod{I}.$$

Como $f_1, \dots, f_k$ são linearmente independentes módulo I , segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ e o lema está provado. ■

Proposição 2.3.7 *O expoente de (M_2, sl_2) existe e é igual a 3.*

Demonstração: Observe que o par (M_2, sl_2) é especial e $\chi_n(M_2, sl_2) \subseteq H(3, 0)$, $n \geq 1$. Assim, pelo Lema 1.4.32, segue que

$$c_n(M_2, sl_2) \leq f(n)3^n, \quad n \geq 1, \tag{2.22}$$

para algum polinômio $f(x)$.

Por outro lado, por 2.21, o polinômio

$$g_k = St_3(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \cdots St_3(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$$

de grau $3k$ não é identidade fraca para (M_2, sl_2) , para todo $k \geq 1$. Considerando a ação de S_{3k} em P_{3k} , obtemos que g_k gera um S_{3k} -módulo irreduzível com caracter χ_λ , onde $\lambda = (k, k, k)$. Temos que $d_\lambda \geq \frac{3^{3k}}{(3k)^3}$ (veja [19], Lema 5.10.1, p. 139) e daí

$$c_{3k}(M_2, sl_2) \geq d_\lambda \geq \frac{3^{3k}}{(3k)^3}.$$

Pelo Lema 2.3.6, obtemos que $c_n(M_2, sl_2) \geq \frac{3^n}{n^3}$, para todo $n \geq 1$.

Combinando essa desigualdade com 2.22, o resultado segue. $\blacksquare$

Tome $\lambda = (p + q + r, p + q, p) \vdash n = 3p + 2q + r$ partição qualquer na decomposição 2.20. O polinômio

$$f_{T_\lambda}(x_1, x_2, x_3) = St_3(x_1, x_2, x_3)^p St_2(x_1, x_2)^q x_1^r = \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \cdots \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3}_p \underbrace{[x_1, x_2] \cdots [x_1, x_2]}_q x_1^r \quad (2.23)$$

gera o módulo irredutível associado a partição λ [14].

Como as codimensões não mudam sob extensões do corpo K , a partir de agora vamos supor K algebricamente fechado.

Exemplo 2.3.8 (Veja [52].) *Seja $\rho: sl_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação da álgebra de Lie sl_2 . Suponha que ρ é fiel, irredutível e de dimensão finita n . Então o polinômio*

$$\delta x_4 St_3(ad x_1, ad x_2, ad x_3) - x_4 St_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \quad (2.24)$$

é uma identidade para ρ , onde $\delta = \frac{n^2-1}{8}$. Em particular, para o par (M_2, sl_2) que corresponde a uma representação irredutível de sl_2 de grau 2, temos a identidade

$$\frac{3}{8} x_4 St_3(ad x_1, ad x_2, ad x_3) - x_4 St_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0. \quad (2.25)$$

Lema 2.3.9 *Seja $\rho: sl_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita da álgebra de Lie sl_2 . Considere o par (A, sl_2) correspondente a essa representação e $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ a decomposição de V em soma de irredutíveis. Se $Id(M_2, sl_2) \subseteq Id(A, sl_2)$, então cada V_i , $i = 1, \dots, l$, corresponde a uma representação de dimensão 2 e $Id(A, sl_2) = Id(M_2, sl_2)$.*

Demonstração: Seja ρ_i a representação irredutível correspondente a V_i , $i = 1, \dots, l$. Como sl_2 é simples, ρ_i é fiel, $i = 1, \dots, l$. Pelas identidades 2.24 e 2.25, segue que representações fiéis e irredutíveis de sl_2 com dimensão maior que 2 não podem satisfazer todas as identidades de (M_2, sl_2) . Além disso, $Id(A, sl_2) \subseteq Id(\rho_i)$, $i = 1, \dots, l$. Assim, se $\dim V_i \geq 3$, para algum $i \in \{1, \dots, l\}$, obtemos uma contradição, pois nesse caso

$$Id(M_2, sl_2) \subseteq Id(A, sl_2) \subseteq Id(\rho_i).$$

Portanto, V é soma de representações irredutíveis de dimensão 2. Consequentemente, $Id(M_2, sl_2) = Id(A, sl_2)$. ■

Teorema 2.3.10 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie com $\mathcal{V} \subsetneq var(M_2, sl_2)$. Então*

$$St_3(x, y, z)^M = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \cdots \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}_{M \text{ triplas}} \equiv 0$$

e

$$\underbrace{[x, y] \cdots [x, y]}_{2M \text{ comutadores}} \equiv 0$$

são identidades em $\mathcal{V}$, para algum $M \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $I = Id(\mathcal{V})$ o ideal de identidades fracas da variedade $\mathcal{V}$ e considere $(A, L) = (K\langle X \rangle / I, \mathcal{L}(X) / \mathcal{L}(X) \cap I)$ o par relativamente livre da variedade $\mathcal{V}$. Temos que

$$Id(M_2) \subseteq Id(M_2, sl_2) \subsetneq I.$$

Como M_2 é uma PI-álgebra associativa, existe $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ não nulo tal que $f(g_1, \dots, g_n) \in Id(M_2)$, para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$ e daí

$$f(g_1, \dots, g_n) \in I, \quad \text{para quaisquer } g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle.$$

Portanto, $A = K\langle X \rangle / I$ é uma PI-álgebra associativa.

Como na decomposição do cocaracter de (M_2, sl_2) temos no máximo três linhas em cada tabela de Young, vamos considerar o subpar (A_1, L_1) de (A, L) gerado por três elementos x, y, z . Em outras palavras, (A_1, L_1) é o par relativamente livre de $\mathcal{V}$ com posto igual a 3. Como A_1 é uma PI-álgebra associativa finitamente gerada, segue que o seu radical $J = J(A_1)$ é um ideal nilpotente. Além disso, $A_2 = A_1 / J$ é semissimples e, pelo Lema 2.3.4, é um produto subdireto de álgebras de matrizes $M_{n_\gamma}(K)$, $\gamma \in \Gamma$, sobre K cujas ordens são limitadas. Para cada $\gamma \in \Gamma$, seja V_γ o espaço vetorial tal que $End_K(V_\gamma) \simeq M_{n_\gamma}(K)$. Observe que $M_{n_\gamma}(K)$ age em V_γ de forma irredutível e fiel. Considere o quociente $L_2 = L_1 / (L_1 \cap J)$. Assim, dado $\gamma \in \Gamma$, a imagem de L_2 (por meio da projeção π_γ do produto subdireto) em cada M_{n_γ} age em V_γ de forma irredutível e fiel, pois A_2 é gerada por L_2 . Pelo Lema 2.3.5, essa imagem é abeliana ou possui subálgebra

isomorfa a sl_2 . No segundo caso, obtemos um subpar (R, sl_2) de (A_1, L_1) correspondente a uma representação de sl_2 de dimensão finita, donde

$$Id(M_2, sl_2) \subseteq Id(\mathcal{V}) = Id(A_1, L_1) \subseteq Id(R, sl_2)$$

Pelo Lema 2.3.9, devemos ter igualdade nas inclusões anteriores, uma contradição, pois $\mathcal{V}$ é uma subvariedade própria de $var(M_2, sl_2)$. Portanto, toda imagem de L_2 em cada componente M_{n_γ} é abeliana, $\gamma \in \Gamma$, donde segue que a álgebra derivada L'_1 de L_1 está contida em J .

Agora basta observar que $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ pertence ao ideal associativo de A_1 gerado por L'_1 e daí $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})^M = 0$, onde $M \in \mathbb{N}$ é tal que $J^M = 0$. Portanto,

$$St_3(x, y, z)^M = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \cdots \bar{x}\bar{y}\bar{z}}_{M \text{ triplas}} \equiv 0 \quad (2.26)$$

é identidade para o par relativamente livre (A, L) e, conseqüentemente, identidade na variedade $\mathcal{V}$.

Para a segunda identidade observe que $[x^2, y] \equiv 0$ é identidade para o par (M_2, sl_2) e daí

$$x[x, y] + [x, y]x = x^2y - xyx + xyx - yx^2 \equiv 0 \quad (2.27)$$

$$y[x, y] + [x, y]y = yxy - y^2x + xy^2 - yxy \equiv 0 \quad (2.28)$$

são identidades para (M_2, sl_2) . Usando 2.27 e 2.28, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{y}[\overline{x, y}] &= \bar{x}\bar{y}[x, y] - \bar{x}[x, y]\bar{y} + [x, y]\bar{x}\bar{y} = \\ &= [x, y][x, y] - x[x, y]y + y[x, y]x + [x, y][x, y] \\ &\equiv [x, y][x, y] + [x, y]xy - [x, y]yx + [x, y][x, y] = 3[x, y][x, y] \end{aligned} \quad (2.29)$$

módulo $Id(M_2, sl_2) \subseteq Id(\mathcal{V})$. Tomando $z = [x, y]$ e usando 2.26 e 2.29, obtemos

$$0 \equiv \underbrace{\bar{x}\bar{y}[\overline{x, y}] \cdots \bar{x}\bar{y}[\overline{x, y}]}_{M \text{ triplas}} \equiv 3^M \underbrace{[x, y][x, y] \cdots [x, y][x, y]}_{2M \text{ comutadores}}.$$

módulo $Id(\mathcal{V})$ e o resultado segue. ■

Corolário 2.3.11 *Seja $\mathcal{V}$ variedade de pares associativo-Lie e suponha que $\mathcal{V}$ é uma subvariedade própria de $\text{var}(M_2, \text{sl}_2)$. Então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. Portanto o par (M_2, sl_2) gera uma variedade com crescimento quase polinomial.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.10, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$St_3(x, y, z)^M = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \cdots \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}_{M \text{ triplas}} \equiv 0$$

e

$$St_2(x, y)^{2M} = \underbrace{[x, y] \cdots [x, y]}_{2M \text{ comutadores}} \equiv 0$$

são identidades em $\mathcal{V}$. Pela forma dos geradores em 2.23, essas identidades implicam que se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é partição tal que $\lambda_2 - \lambda_3 \geq 2M$ ou $\lambda_3 \geq M$, então $m_\lambda(\mathcal{V}) = 0$ na decomposição do cocaracter de $\mathcal{V}$. Assim, as multiplicidades $m_\lambda(\mathcal{V}) \neq 0$ correspondem as partições tais que $\lambda_3 < M$ e $\lambda_2 - \lambda_3 < 2M$. Portanto,

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq C}} m_\lambda(\mathcal{V}) \chi_\lambda$$

onde $C = 4M$. O resultado segue do Teorema 2.2.5. ■

2.3.4 Outros exemplos

Vejamos agora dois exemplos de pares em que a álgebra de Lie em questão tem crescimento quase polinomial das codimensões, mas o par não possui essa propriedade.

Seja $L = \text{span}_K\{h, e\}$ a álgebra de Lie solúvel não abeliana de dimensão 2 com multiplicação dada por $[h, e] = e$. Considere a ação à esquerda de L no anel de polinômios $K[t]$ definida por

$$h(f) = tf', \quad e(f) = tf, \tag{2.30}$$

onde f' é a derivada usual em t . Então o espaço vetorial

$$B = L + K[t] = \text{span}_K\{h, e, 1, t, t^2, \dots\}$$

é uma álgebra de Lie de dimensão infinita se definirmos a seguinte multiplicação

$$[\lambda h + \mu e + f, \alpha h + \beta e + g] = (\lambda\beta - \mu\alpha)e + \lambda h(g) + \mu e(g) - \alpha h(f) - \beta e(f).$$

Em particular, $K[t]$ é um ideal abeliano de B de codimensão 2 e $B^{(3)} = 0$, ou seja, B é solúvel. Observe também que $B' = \text{span}_K\{e\} + K[t]$ é uma álgebra de Lie não nilpotente.

Teorema 2.3.12 *Considere a álgebra de Lie B dada anteriormente.*

- i) O expoente de Lie de B existe e temos $\exp(B) = 2$. Além disso, B gera uma variedade de álgebras de Lie com crescimento quase polinomial.*
- ii) Seja (A, B) um par associativo-Lie formado pela álgebra de Lie B . Então a variedade de pares associativo-Lie $\mathcal{V} = \text{var}(A, B)$ possui subvariedade própria $\mathcal{W}$ com crescimento não polinomial.*

Demonstração: Para (i) veja [19], Teorema 12.4.4, p. 324; e [39], Teorema 5.4.

Agora vejamos (ii). Temos que $\exp(B) = 2$ e daí, pela desigualdade $c_n(A, B) \geq c_n(B)$, segue que (A, B) não possui crescimento polinomial das codimensões. Considere a subálgebra de Lie de B dada por

$$M = \text{span}_K\{h, 1, t, t^2, \dots\},$$

e seja C a subálgebra associativa de A gerada por M . Então (C, M) é um subpar de (A, B) . Tome $\mathcal{W} = \text{var}(C, M)$. Vamos mostrar que $\mathcal{W}$ é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$ com crescimento não polinomial.

Dados quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$, considere a partição $\lambda = (p + q, p)$. Um vetor de peso máximo associado é $f(x_1, x_2) = St_2(x_1, x_2)^p x_1^q$ e

$$f(t, h) = [t, h]^{pt^q} = (-t)^{pt^q} \neq 0.$$

Então $m_\lambda(\mathcal{W}) \neq 0$. Como p é arbitrário, pelo Teorema 2.2.5, segue que $\mathcal{W}$ não possui crescimento polinomial. Agora observe que $g = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ é identidade fraca para (C, M) , mas

$$g(h, e, h, t) = [[h, e], [h, t]] = [e, t] = t^2 \neq 0,$$

ou seja, $g \in Id(\mathcal{W}) \setminus Id(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{W}$ é subvariedade própria.

■

Seja $H = span_K\{x, y, z\}$ a chamada álgebra de Heisenberg, ou seja, H é a álgebra de Lie de dimensão 3 com base x, y, z , e multiplicação dada por $[x, y] = z$ e todos os outros comutadores da base são iguais a zero. Considere a ação à esquerda de H no anel de polinômios $K[t]$

$$x(f) = f', \quad y(f) = tf, \quad z(f) = f$$

e defina a multiplicação em

$$C = H + K[t] = span_K\{x, y, z, 1, t, t^2, \dots\}$$

como segue

$$\begin{aligned} & [\alpha x + \beta y + \gamma z + f, \lambda x + \mu y + \nu z + g] = \\ & (\alpha\mu - \beta\lambda)z + \alpha x(g) + \beta y(g) + z(g) - \lambda x(f) - \mu y(f) - \nu z(f) = \\ & (\alpha\mu - \beta\lambda)z + \alpha g' - \lambda f' + \beta tg - \mu tf + f - g. \end{aligned}$$

Então C é uma álgebra de Lie de dimensão infinita com $C^{(3)} = 0$. Além disso, $C' = span_K\{z\} + K[t]$ é uma álgebra de Lie não nilpotente.

Teorema 2.3.13 *Considere a álgebra de Lie C dada anteriormente.*

- i) O expoente de Lie C existe e temos $\exp(C) = 3$. Além disso, C gera uma variedade de álgebras de Lie com crescimento quase polinomial.*
- ii) Seja (A, C) um par associativo-Lie formado pela álgebra de Lie C . Então a variedade de pares associativo-Lie $\mathcal{V} = var(A, C)$ possui subvariedade própria $\mathcal{W}$ com crescimento não polinomial.*

Demonstração: Para (i) veja [19], Teorema 12.4.4, p. 324; e [39], Teorema 5.4.

Agora vejamos (ii). Temos que $\exp(C) = 3$ e daí, pela desigualdade $c_n(A, C) \geq c_n(C)$, segue que (A, B) não possui crescimento polinomial das codimensões. Considere a subálgebra C' de C e seja D a subálgebra associativa de A gerada por C' . Então (D, C') é um subpar de (A, C) . Tome $\mathcal{W} = var(D, C')$. Vamos mostrar que $\mathcal{W}$ é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$ com crescimento não polinomial.

Agora vejamos (ii). Dados quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$, considere a partição $\lambda = (p + q, p)$ e o vetor de peso máximo associado $f(x_1, x_2) = St_2(x_1, x_2)^p x_1^q$. Temos que

$$f(t, z) = [t, z]^{pt^q} = t^p t^q \neq 0.$$

Então $m_\lambda(\mathcal{W}) \neq 0$. Como p é arbitrário, pelo Teorema 2.2.5, segue que $\mathcal{W}$ não possui crescimento polinomial. Agora observe que $g = g(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ é identidade fraca para (D, C') , mas

$$g(x, y, z, t) = [[x, y], [z, t]] = [z, t] = -t \neq 0,$$

ou seja, $g \in Id(\mathcal{W}) \setminus Id(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{W}$ é subvariedade própria.

■

Capítulo 3

Pares Graduados e a Conjectura de Amitsur

Em geral, não é um trabalho fácil calcular a sequência de codimensões associativa, de Lie ou fraca. Para contornar essa dificuldade, se a sequência é exponencialmente limitada, podemos definir o expoente da estrutura considerada, o qual nos fornece uma estimativa para o crescimento das identidades. Em característica zero, Giambruno e Zaicev (veja por exemplo [19]) mostraram que o expoente associativo sempre existe e é um inteiro. Zaicev [59] obteve o mesmo resultado para álgebras de Lie de dimensão finita. Para álgebras de Lie em geral existem contraexemplos da não integralidade do expoente [61, 17]. No ambiente associativo-Lie, Gordienko [20] também obteve que o expoente existe e é um inteiro no caso de identidades para representações de álgebras de Lie de dimensão finita. Porém, no caso geral não se sabe nada a respeito.

Dentre os contraexemplos da não integralidade do expoente para álgebras de Lie, vamos destacar o obtido por Giambruno e Zaicev em [18], o qual envolve superálgebras de Lie e envelope de Grassmann. Tais conceitos têm sua importância pois, no ambiente associativo, Kemer [33] obteve que toda variedade é gerada pelo envelope de Grassmann de uma superálgebra finitamente gerada. O mesmo resultado é válido para variedades de Lie de tipo associativo, o qual foi obtido por Zaicev e Mishchenko em [60].

Nesse sentido, vamos estabelecer na primeira seção os conceitos de pares graduados, superpares e envelope de Grassmann para um superpar, os quais servirão de base para as próximas seções. Optamos por incluir esses conceitos aqui, e não no capítulo preliminar, pois eles serão usados apenas neste capítulo. Na segunda seção, vamos obter

que toda variedade de pares de tipo associativo é gerada pelo envelope de Grassmann de um superpar finitamente gerado. Com base nesse resultado, estabeleceremos uma caracterização das variedades de pares especiais que não contêm pares associados a representações da álgebra de Lie sl_2 .

A última seção do capítulo será dedicada a obter um exemplo de par associativo-Lie tal que o expoente, se existir, não é inteiro. Obtemos assim um contraexemplo para a conjectura de Amitsur no ambiente de pares associativo-Lie. Para isso, utilizaremos ideias de [18, 15].

Ao longo do capítulo K denotará um corpo de característica zero.

3.1 Pares G -graduados e identidades fracas graduadas

No início da seção faremos um breve resumo sobre álgebras graduadas por um grupo. Para mais detalhes indicamos [19, Cap. 3]. De modo semelhante, será possível definir par graduado e, conseqüentemente, definiremos as identidades fracas graduadas.

Vamos denotar por G um grupo abeliano, com notação aditiva.

Definição 3.1.1 *Sejam A uma álgebra sobre K e G um grupo. Dizemos que A é G -graduada (ou simplesmente graduada) se A pode ser escrita como soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, onde $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$, para quaisquer $g, h \in G$.*

Pela definição, um elemento $a \in A$ é escrito de forma única como soma finita $a = \sum_{g \in G} a_g$, onde $a_g \in A^{(g)}$. Os subespaços $A^{(g)}$ são chamados de *componentes homogêneas* de A . Um elemento $a \in A$ é *homogêneo* (ou *homogêneo de grau g*) se $a \in A^{(g)}$, e denotamos por $|a|_G = g$ (ou simplesmente por $|a| = g$). Se A possui unidade, não é difícil ver que $1_A \in A^{(0)}$, onde 0 é o elemento neutro de G .

Se $G = \mathbb{Z}_2$ temos apenas duas componentes A_0 e A_1 , as quais são chamadas de componente par e ímpar, respectivamente. Naturalmente, os elementos de A_0 são chamados de pares e os elementos de A_1 de ímpares.

Definição 3.1.2 *Dada uma álgebra $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ G -graduada, um subespaço $B \subseteq A$ é dito homogêneo ou graduado se $B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A^{(g)})$.*

De modo semelhante define-se subálgebra, ideal e quociente graduado. Quando B é uma subálgebra homogênea de A , vemos facilmente que $(B \cap A^{(g)})(B \cap A^{(h)}) \subseteq (B \cap A^{(g+h)})$, para quaisquer $g, h \in G$, e daí temos uma G -graduação para B a partir da G -graduação de A , e dizemos que B herda a G -graduação de A .

No que segue, com abuso de notação, usaremos (A, L) para denotar também um par formado por duas estruturas algébricas A e L que não necessariamente é um par associativo-Lie.

Definição 3.1.3 *Um par (A, L) (não necessariamente associativo-Lie) é dito G -graduado (ou simplesmente graduado) se $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ é uma álgebra associativa G -graduada e L é um subespaço homogêneo gerador de A como álgebra associativa (se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$ exigimos que $L \cup \{1_A\}$ seja o conjunto gerador de A).*

Na definição anterior, se (A, L) é um par associativo-Lie, então L é uma subálgebra de Lie homogênea de $A^{(-)}$. Nesse caso, dizemos que (A, L) é um *par associativo-Lie graduado*.

Um par G -graduado (B, M) é dito *subpar G -graduado ou homogêneo* de um par G -graduado (A, L) se M e B são subespaços homogêneos de L e A , respectivamente. Definimos *homomorfismo graduado* entre pares graduados como sendo um homomorfismo entre as álgebras associativas em questão que preserva cada componente homogênea.

Exemplo 3.1.4 *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra associativa graduada. Então o par $(A, A^{(-)})$ é naturalmente um par associativo-Lie graduado.*

Observação 3.1 *Definimos par livre graduado em uma classe de pares graduados de modo análogo ao caso ordinário para pares associativo-Lie trocando apenas homomorfismo por homomorfismo graduado.*

Sejam $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre, $\mathcal{L}(X)$ a álgebra de Lie livre e G um grupo abeliano finito. Escrevemos $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)}$, onde $X^{(g)}$ são conjuntos dois a dois disjuntos. Se uma variável x pertence a $X^{(g)}$, dizemos que x é homogênea de grau g , e escrevemos $|x| = g$ ou denotamos x por x^g .

Se $m = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n} \in K\langle X \rangle$ (ou $m = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] \in \mathcal{L}(X)$) é um monômio, definimos o G -grau homogêneo de m como sendo $|m| = |x_{i_1}| + |x_{i_2}| + \cdots + |x_{i_n}|$. Dado $g \in G$, denote por $K\langle X \rangle^{(g)}$ o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado por todos os monômios associativos que

têm G -grau homogêneo g e por $\mathcal{L}(X)^{(g)}$ o subespaço de $\mathcal{L}(X)$ gerado pelos monômios de Lie que têm G -grau homogêneo g .

Portanto

$$K\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \rangle^{(g)} \quad e \quad \mathcal{L}(X) = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}(X)^{(g)}$$

são G -gradações para $K\langle X \rangle$ e $\mathcal{L}(X)$, respectivamente. Além disso, $\mathcal{L}(X)$ é uma subálgebra de Lie homogênea de $K\langle X \rangle$ (mais precisamente de $K\langle X \rangle^{(-)}$). Temos então um par associativo-Lie graduado $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ chamado de *par livre G -graduado*.

Definição 3.1.5 *Seja $(A, L) = (\bigoplus_{g \in G} A^{(g)}, \bigoplus_{g \in G} L^{(g)})$ um par associativo-Lie graduado. Um polinômio $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é chamado de identidade fraca graduada (ou identidade graduada) do par (A, L) se*

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \text{para quaisquer } a_1, a_2, \dots, a_n \in \bigcup_{g \in G} L^{(g)},$$

onde $a_s \in L^{(|x_s|)}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Analogamente define-se identidade graduada para uma álgebra associativa (de Lie) graduada, onde os polinômios pertencem à álgebra associativa (de Lie) livre graduada.

Exemplo 3.1.6 *Dada uma álgebra associativa graduada $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, se $f \in K\langle X \rangle$ é identidade graduada para A , então é identidade fraca graduada do par associativo-Lie $(A, A^{(-)})$.*

Como no caso de identidades polinomiais fracas, também temos nesse contexto a ideia de ideal fraco graduado.

Definição 3.1.7 *Seja $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ o par livre G -graduado. Um ideal I de $K\langle X \rangle$ é dito um ideal fraco graduado se é invariante por endomorfismos graduados de $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$. Dado $S \subseteq K\langle X \rangle$ não vazio definimos o ideal fraco graduado gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais fracos graduados de $K\langle X \rangle$ que contêm o conjunto S .*

O conjunto $Id_G(A, L)$ de todas as identidades graduadas de um par associativo-Lie G -graduado (A, L) é um ideal fraco graduado de $K\langle X \rangle$. Não é difícil ver que um ideal I é um ideal fraco graduado de $K\langle X \rangle$ se, e somente se, $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in I$, para quaisquer $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ e $g_i \in \mathcal{L}(X)^{(|x_i|)}$, $i = 1, \dots, n$.

Observação 3.2 *Em característica zero, todo ideal fraco graduado é gerado por seus polinômios multilineares.*

3.1.1 Superpares e supervariiedades

A partir de agora consideramos apenas $G = \mathbb{Z}_2$. Nesse caso, representamos X da forma $X = Y \cup Z$, onde Y e Z são conjuntos disjuntos correspondentes às variáveis de grau 0 e 1 em $\mathbb{Z}_2$, respectivamente. Assim, obtemos uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação do par livre $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ em que

$$K\langle X \rangle = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \quad e \quad \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1,$$

onde $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K}_1$ são os subespaços de $K\langle X \rangle$ gerados pelos monômios que têm $\mathbb{Z}_2$ -grau homogêneo 0 e 1, respectivamente, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}_1 = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}(X)$. Denotaremos $K\langle X \rangle = K\langle Y, Z \rangle$ e $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y, Z)$. O conjunto das identidades graduadas de um par associativo-Lie graduado (A, L) será denotado por $Id_2(A, L)$.

Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma álgebra associativa $\mathbb{Z}_2$ -graduada, dizemos que A é uma superálgebra e denotamos seu ideal de identidades graduadas por $Id_2(A)$. Para o caso de Lie, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.8 *Uma álgebra L é dita uma superálgebra de Lie se é $\mathbb{Z}_2$ -graduada, ou seja, $L = L_0 \oplus L_1$ com*

$$[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_2,$$

e seu colchete satisfaz as seguintes identidades

$$i) [a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a] \text{ (super antissimetria);}$$

$$ii) (-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|}[b, [c, a]] + (-1)^{|b||c|}[c, [a, b]] = 0 \text{ (superidentidade de Jacobi)}$$

para quaisquer $a, b, c \in L_0 \cup L_1$ (isto é, a, b, c são elementos homogêneos).

Note que a componente L_0 é uma álgebra de Lie e L_1 tem uma estrutura natural de L_0 -módulo. As definições de subálgebra, ideal e álgebra quociente homogênea para superálgebras de Lie são análogas aos casos da seção anterior. Em um primeiro momento chamaremos as subálgebras de subsuperálgebras. Além disso, definimos superálgebra solúvel e nilpotente do mesmo modo que para álgebras de Lie.

Toda superálgebra associativa é uma álgebra associativa. Porém, uma superálgebra de Lie não necessariamente é uma álgebra de Lie. Apesar disso, será comum chamar uma superálgebra de Lie de uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

Definição 3.1.9 *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra associativa. Definindo o supercolchete*

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba, \quad a, b \in A_0 \cup A_1,$$

temos que $A = A_0 \oplus A_1$ é uma superálgebra de Lie, a qual denotamos por $A^{(\sim)}$.

Definição 3.1.10 *Um par $\mathbb{Z}_2$ -graduado (A, L) é dito um superpar se L é uma subsuperálgebra de Lie de $A^{(\sim)}$ (ver Definição 3.1.9).*

Com abuso de linguagem, usaremos apenas subálgebra de Lie para nos referimos a uma subsuperálgebra de Lie.

Exemplo 3.1.11 *Com abuso de notação, seja $\mathcal{L}(X)$ a subálgebra de Lie de $K\langle X \rangle^{(\sim)}$ gerada por X . Então $(K\langle X \rangle, \mathcal{L}(X))$ é um superpar chamado de superpar livre.*

Observe que nem sempre um superpar é um par associativo-Lie. Mesmo assim, um superpar envolve superálgebras associativa e de Lie que são $\mathbb{Z}_2$ -graduadas. Além disso, no caso associativo as definições de $\mathbb{Z}_2$ -gradação e superálgebra coincidem, em particular para a álgebra associativa livre $K\langle X \rangle$.

Definimos então, de modo análogo ao caso de pares associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduados, identidades polinomiais e o conjunto $Id_2(A, L)$ de todas identidades para um superpar (A, L) . Também chamaremos essas identidades de graduadas, ficando subentendida a estrutura considerada: pares graduados ou superpares. Note que usamos a mesma notação para o ideal de identidades de um superpar, pois o mesmo se comporta da mesma forma que um ideal fraco graduado, com a ressalva de que consideramos endomorfismos do superpar livre.

Exemplo 3.1.12 *O par (M_2, sl_2) é um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado com as $\mathbb{Z}_2$ -gradações naturais de M_2 e sl_2 . Por outro lado, com as mesmas gradações, esse par não é um superpar. De fato, considerando a base natural $\{e, f, h\}$ de sl_2 e M_2 com supercolchete, temos que*

$$[e, f] = ef + fe = I_2 \notin sl_2.$$

Definição 3.1.13 *Dado um conjunto não vazio $S = S_0 \cup S_1$, $S_0 \subseteq \mathcal{K}_0$, $S_1 \subseteq \mathcal{K}_1$, a classe de todos os superpares $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$, tais que $f \equiv 0$ em (A, L) , para todo $f \in S$, é chamada de supervarietade de superpares determinada por S .*

Dada uma supervarietade $\mathcal{V}$, o conjunto $I = Id_2(\mathcal{V})$ de todas identidades graduadas é um ideal fraco graduado. Além disso, o superpar

$$\mathcal{F}_{Y,Z}(\mathcal{V}) = (K\langle Y, Z \rangle / I, \mathcal{L}(Y, Z) / \mathcal{L}(Y, Z) \cap I)$$

é livre em $\mathcal{V}$ e é dito o superpar relativamente livre de $\mathcal{V}$ com geradores pares livres Y e geradores ímpares livres Z . Observe que nesse caso estamos considerando $\mathcal{L}(Y, Z)$ como subálgebra de $K\langle Y, Z \rangle^{(\sim)}$ com supercolchete.

Observação 3.3 *Nas definições anteriores podemos iniciar com um par graduado por um grupo G qualquer, definir variedade de pares associativo-Lie graduada de modo análogo e então obter o par relativamente livre graduado.*

Dadas duas superálgebras $A = A_0 \oplus A_1$ e $L = L_0 \oplus L_1$ associativa e de Lie, respectivamente, e $E = E_0 \oplus E_1$ a álgebra de Grassmann, obtemos duas novas álgebras associativa e de Lie

$$G(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1) \quad e \quad G(L) = (L_0 \otimes E_0) \oplus (L_1 \otimes E_1)$$

chamadas de envelopes de Grassmann de A e L , respectivamente. Observe que se A é unitária, então $G(A)$ é unitária com $1_{G(A)} = 1_A \otimes 1_E$. Suponha que (A, L) é um superpar e considere $G_A(L)$ a subálgebra associativa de $A \otimes E$ gerada por $G(L)$ (se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$ exigimos que $G(L) \cup \{1_A \otimes 1_E\}$ seja o conjunto gerador de $G_A(L)$). Então $G_A(L)$ é gerada por produtos de elementos da forma

$$(l_1 \otimes x_1) \cdots (l_k \otimes x_k) = l_1 \cdots l_k \otimes x_1 \cdots x_k,$$

em que $x_j \in E_0 \cup E_1$, $l_j \in L_0 \cup L_1$ (ou $l_j \in L_0 \cup L_1 \cup \{1_A\}$) e $|l_j| = |x_j|$, $j = 1, \dots, k$, donde $|l_1 \cdots l_k| = |x_1 \cdots x_k|$. Assim, podemos dividir o conjunto gerador de $G_A(L)$ em dois conjuntos $G_A(L)_0 \subseteq A_0 \otimes E_0$ e $G_A(L)_1 \subseteq A_1 \otimes E_1$. Temos então que

$$G_A(L) = G_A(L)_0 \oplus G_A(L)_1$$

é uma subálgebra associativa homogênea de $G(A)$ e $G(L)$ é um subespaço homogêneo de $G_A(L)$. Vejamos que $G(L)$ é subálgebra de Lie de $G_A(L)^{(-)}$. Dados $a \otimes x$ e $b \otimes y$ em $G(L)$ elementos homogêneos, pela definição do colchete em $G_A(L)^{(-)}$, temos que

$$\begin{aligned} [a \otimes x, b \otimes y] &= (a \otimes x)(b \otimes y) - (b \otimes y)(a \otimes x) \\ &= ab \otimes xy - ba \otimes yx. \end{aligned}$$

Se $|a \otimes x| = 0$, então $x \in E_0 \subseteq Z(E)$ e $a \in L_0$, donde $[a, b] = ab - ba$ em $A^{(\sim)}$ e então

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes xy - ba \otimes xy = [a, b] \otimes xy \in G(L).$$

De modo análogo, temos o mesmo se $|b \otimes y| = 0$. Por fim, se $|a \otimes x| = |b \otimes y| = 1$, então $xy = -yx$ e $[a, b] = ab + ba$ em $A^{(\sim)}$, donde

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes xy + ba \otimes xy = [a, b] \otimes xy \in G(L).$$

Dizemos que o par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado $(G_A(L), G(L))$ é o *envelope de Grassmann do superpar* (A, L) e o denotaremos por $G(A, L)$.

Recordamos aqui uma maneira direta de definir superálgebra em qualquer contexto. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras, não necessariamente associativas, e seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada. Não exigimos que A seja associativa, nem $A \in \mathcal{V}$. A álgebra A é chamada de uma $\mathcal{V}$ -superálgebra se $G(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ é uma álgebra pertencente à variedade $\mathcal{V}$. Se trocarmos variedade de álgebras por variedade de pares associativo-Lie, A por um par $\mathbb{Z}_2$ -graduado (A, L) e $G(A)$ por $G(A, L)$ obtemos uma forma geral de definir superpares.

Assim fica (mais uma vez) claro que no caso associativo, superálgebras são simplesmente álgebras $\mathbb{Z}_2$ -graduadas.

Observação 3.4 *Sejam (A, L) um par associativo-Lie e $E = E_0 \oplus E_1$ a álgebra de Grassmann. Considere os espaços vetoriais*

$$B = (A \otimes E_0) \oplus (A \otimes E_1) \quad e \quad M = (L \otimes E_0) \oplus (L \otimes E_1).$$

Vejamos que (B, M) é um superpar. De fato, como A é gerada por L ($L \cup \{1_A\}$), todo elemento de B é combinação de elementos do tipo $s_1 \cdots s_k \otimes x \in B$ em que $s_i \in L$

$(s_i \in L \cup \{1_A\})$ e $x \in E_0 \cup E_1$. Temos que

$$s_1 \cdots s_k \otimes x = (s_1 \otimes x)(s_2 \otimes 1) \cdots (s_k \otimes 1),$$

e daí todo elemento de B é combinação de produtos de elementos de M , ou seja, B é subálgebra de $A \otimes E$ gerada por M como álgebra associativa. Não é difícil ver também que M é subespaço homogêneo de B . Resta mostrar que M é subálgebra de Lie de $B^{(\sim)}$. Para isso, tome $a \otimes x$ e $b \otimes y$ elementos homogêneos em M . Pela definição do colchete em $B^{(\sim)}$, temos que

$$\begin{aligned} [a \otimes x, b \otimes y] &= (a \otimes x)(b \otimes y) - (-1)^{|a \otimes x||b \otimes y|}(b \otimes y)(a \otimes x) \\ &= ab \otimes xy - (-1)^{|a \otimes x||b \otimes y|}ba \otimes yx \end{aligned}$$

Se $|a \otimes x| = 0$, então $x \in E_0 \subseteq Z(E)$ e daí

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes xy - ba \otimes yx = ab \otimes xy - ba \otimes xy = [a, b] \otimes xy \in M.$$

De modo análogo, temos o mesmo se $|b \otimes y| = 0$. Por fim, se $|a \otimes x| = |b \otimes y| = 1$, então $xy = -yx$ e daí

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes xy + ba \otimes yx = ab \otimes xy - ba \otimes xy = [a, b] \otimes xy \in M.$$

Portanto, (B, M) é um superpar.

3.2 Superpares finitamente gerados

Denote por $P_{k,m}$ o espaço dos polinômios multilineares em $K\langle Y, Z \rangle$ nas variáveis $y_1, \dots, y_k \in Y$, $z_1, \dots, z_m \in Z$. Definimos um isomorfismo linear $\sim: P_{k,m} \rightarrow P_{k,m}$ da seguinte forma. Dado $f \in P_{k,m}$, escrevemos f na forma

$$f = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0, w_1, \dots, w_n)}} \alpha_{\sigma, W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

onde $w_0, w_1, \dots, w_m$ são monômios (alguns possivelmente vazios) em $y_1, \dots, y_k$ e $\alpha_{\sigma, W} \in K$. Então

$$\tilde{f} = \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ W=(w_0, w_1, \dots, w_m)}} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma, W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \cdots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

Recordamos que Kemer considerou uma construção análoga no caso de álgebras associativas $\mathbb{Z}_2$ -graduadas, veja [30], ou ainda [19, p. 81]. Nós seguimos a exposição de [19, pp. 81–82, 110–112], adaptada para o nosso caso.

Lema 3.2.1 *Seja $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$ um superpar e tome $f \in P_{k,m}$. Então*

i) f é identidade graduada de $G(A, L)$ se, e somente se, $\tilde{f}$ é identidade graduada de (A, L) ;

ii) $\tilde{\tilde{f}} = f$.

Demonstração: A segunda condição segue diretamente da definição. Para mostrar (i), tome $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k \in L_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m \in L_1$ elementos homogêneos arbitrários de L e $g_1, \dots, g_k \in E_0, h_1, \dots, h_m \in E_1$ elementos arbitrários de E . Fixe um monômio

$$w = a_0(y_1, \dots, y_k) z_{\sigma(1)} a_1(y_1, \dots, y_k) z_{\sigma(2)} \cdots z_{\sigma(m)} a_m(y_1, \dots, y_k)$$

e calcule o seu valor $\bar{w}$ em $\bar{y}_1 \otimes g_1, \dots, \bar{y}_k \otimes g_k, \bar{z}_1 \otimes h_1, \dots, \bar{z}_m \otimes h_m$. Como $g_1, \dots, g_k$ pertencem ao centro de E e $h_1, \dots, h_m$ anticomutam, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{w} &= a_0(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \bar{z}_{\sigma(1)} \cdots \bar{z}_{\sigma(m)} a_m(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(m)} \\ &= (-1)^\sigma a_0(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \bar{z}_{\sigma(1)} \cdots \bar{z}_{\sigma(m)} a_m(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m. \end{aligned}$$

Dessa igualdade e da definição de $\sim$, segue que

$$\begin{aligned} &f(\bar{y}_1 \otimes g_1, \dots, \bar{y}_k \otimes g_k, \bar{z}_1 \otimes h_1, \dots, \bar{z}_m \otimes h_m) \\ &= \tilde{f}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) \otimes g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_m. \end{aligned}$$

Assim, f é identidade para $G(A, L)$ se, e somente se, $\tilde{f} \equiv 0$ é identidade para (A, L) . ■

Dada $\mathcal{V}$ uma variedade de pares associativo-Lie, seja $\mathcal{V}^*$ a classe de todos superpares (A, L) tais que $G(A, L) \in \mathcal{V}$.

Lema 3.2.2 *Para toda variedade de pares associativo-Lie $\mathcal{V}$ a classe $\mathcal{V}^*$ é uma supervarietade.*

Demonstração: Seja $S = Id(\mathcal{V})$ o ideal fraco de todas identidades de $\mathcal{V}$, ou seja, $(B, M) \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $g \equiv 0$ em (B, M) , para todo $g \in S$. Como $char K = 0$, podemos considerar apenas os polinômios multilineares em S .

Tome (A, L) um superpar e $C = G(A, L)$ seu envelope de Grassmann. Como visto anteriormente, C é $\mathbb{Z}_2$ -graduado. Assim, C satisfaz uma identidade multilinear $g \equiv 0$ de grau n se, e somente se, C satisfaz a família de 2^n identidades graduadas $f \equiv 0$ em que todo f é obtido de g substituindo algumas k ($0 \leq k \leq n$) variáveis por indeterminadas pares e as demais $n - k$ variáveis por indeterminadas ímpares.

Pelo Lema 3.2.1, $C = G(A, L)$ satisfaz uma identidade graduada multilinear $f \equiv 0$ se, e somente se, (A, L) satisfaz uma identidade graduada multilinear $\tilde{f} \equiv 0$. Podemos então iniciar com as identidades multilineares S da variedade $\mathcal{V}$ e construir um conjunto de identidades graduadas W tal que

$$(A, L) \in \mathcal{V}^* \text{ se e somente se } G(A, L) \in \mathcal{V}$$

o que é equivalente a $h \equiv 0$ em (A, L) para todo $h \in W$. Em outras palavras $\mathcal{V}^*$ é uma supervarietade determinada pelo conjunto W . ■

Outra forma de obter que $\mathcal{V}^*$ é uma supervarietade é pelo Teorema de Birkhoff, o qual também é válido nesse ambiente. Pelo teorema anterior, podemos considerar o superpar relativamente livre de $\mathcal{V}^*$.

Lema 3.2.3 *Seja*

$$f = f(y_1^1, \dots, y_1^{p_1}, \dots, y_k^1, \dots, y_k^{p_k}, z_1^1, \dots, z_1^{q_1}, \dots, z_m^1, \dots, z_m^{q_m})$$

um polinômio multilinear nas variáveis $y_1^1, \dots, y_k^{p_k}, z_1^1, \dots, z_m^{q_m}$ tal que f é simétrico em cada conjunto $\{y_i^1, \dots, y_i^{p_i} \mid 1 \leq i \leq k\}$ e alterna em cada conjunto $\{z_j^1, \dots, z_j^{q_j} \mid 1 \leq j \leq m\}$. Dada uma variedade de pares associativo-Lie $\mathcal{V}$, denote por $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Y,Z}(\mathcal{V}^)$ o superpar relativamente livre da supervarietade $\mathcal{V}^*$ em que $Y = \{u_1, \dots, u_k\}$ e $Z = \{w_1, \dots, w_m\}$. Considerando todos y_i^p como variáveis pares e todos z_j^q como variáveis ímpares obtemos o*

polinômio multilinear $\tilde{f}$. Se

$$\tilde{f}(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{u_k, \dots, u_k}_{p_k}, \underbrace{w_1, \dots, w_1}_{q_1}, \dots, \underbrace{w_m, \dots, w_m}_{q_m}) = 0 \quad (3.1)$$

em $\mathcal{F}$, então $f \equiv 0$ é uma identidade fraca de $\mathcal{V}$.

Demonstração: Da definição da transformação $\sim$, segue que o polinômio

$$\tilde{f}(y_1^1, \dots, y_1^{p_1}, \dots, y_k^1, \dots, y_k^{p_k}, z_1^1, \dots, z_1^{q_1}, \dots, z_m^1, \dots, z_m^{q_m})$$

é simétrico em cada conjunto de variáveis $\{y_i^1, \dots, y_i^{p_i}\}$, $1 \leq i \leq k$, e $\{z_j^1, \dots, z_j^{q_j}\}$, $1 \leq j \leq m$. Como os elementos $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$ são geradores livres de $\mathcal{F}$, a igualdade 3.1 diz que

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_1, \dots, y_k, \dots, y_k, z_1, \dots, z_1, \dots, z_m, \dots, z_m) \equiv 0$$

é uma identidade graduada de $\mathcal{V}^*$.

Agora denote por $S = (S_A, S_L)$ o par relativamente livre da variedade $\mathcal{V}$ no conjunto enumerável de geradores $\{\bar{y}_i^j, \bar{z}_i^j \mid i, j = 1, 2, \dots\}$. Pela Observação 3.4, podemos considerar o superpar $(B, M) = (B_0 \oplus B_1, M_0 \oplus M_1)$, onde

$$M_0 = S_L \otimes E_0, \quad M_1 = S_L \otimes E_1, \quad B_0 = S_A \otimes E_0, \quad B_1 = S_A \otimes E_1.$$

Considere $G(B, M) = (G_A(M), G(M))$ o envelope de Grassmann do superpar (B, M) . Então

$$\begin{aligned} G(M) &= (M_0 \otimes E_0) \oplus (M_1 \otimes E_1) \subseteq S_L \otimes R, \\ G_A(M) &\subseteq G(B) = (B_0 \otimes E_0) \oplus (B_1 \otimes E_1) \subseteq S_A \otimes R, \end{aligned}$$

onde $R = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ é uma álgebra associativa comutativa. Assim, se um polinômio multilinear g se anula em qualquer substituição de S_L em S_A , então se anula em toda substituição de $S_L \otimes R$ em $S_A \otimes R$ e daí g é identidade fraca do par $G(B, M)$. Em outras palavras, $G(B, M)$ satisfaz todas identidades fracas de S , ou seja, $G(B, M) \in \mathcal{V}$.

Então $(B, M) \in \mathcal{V}^*$. Em particular,

$$\tilde{f}(\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{c_k, \dots, c_k}_{p_k}, \underbrace{d_1, \dots, d_1}_{q_1}, \dots, \underbrace{d_m, \dots, d_m}_{q_m}) = 0, \quad (3.2)$$

para quaisquer $c_1, \dots, c_k \in M_0, d_1, \dots, d_m \in M_1$. Tome

$$\begin{aligned} c_i &= \bar{y}_i^1 \otimes a_i^1 + \dots + \bar{y}_i^{p_i} \otimes a_i^{p_i}, \quad i = 1, \dots, k, \\ d_j &= \bar{z}_j^1 \otimes b_j^1 + \dots + \bar{z}_j^{q_j} \otimes b_j^{q_j}, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

em M tais que $a_1^1, \dots, a_1^{p_1}, \dots, a_k^1, \dots, a_k^{p_k}, b_1^1, \dots, b_1^{q_1}, \dots, b_m^1, \dots, b_m^{q_m}$ são monômios da álgebra de Grassmann E escritos em geradores distintos, $a_i^p \in E_0, b_j^q \in E_1$ (assim $a_1^1 \dots a_k^{p_k} b_1^1 \dots b_m^{q_m} \neq 0$). Calculamos o lado esquerdo da expressão 3.2. Como $(a_i^p)^2 = (b_j^q)^2 = 0$, usando a simetria de $\tilde{f}$ nos conjuntos $\{y_i^1, \dots, y_i^{p_i}\}$ e $\{z_j^1, \dots, z_j^{q_j}\}$, obtemos que

$$\tilde{f}(c_1, \dots, d_m) = p_1! \dots p_k! q_1! \dots q_m! \tilde{f}(\bar{y}_1^1, \dots, \bar{y}_1^{p_1}, \dots, \bar{z}_1^1, \dots, \bar{z}_m^{q_m}) \otimes a_1^1 \dots a_1^{p_1} \dots b_m^1 \dots b_m^{q_m}.$$

Pelo Lema 3.2.1, $\tilde{f} = f$. Assim, $f(\bar{y}_1^1, \dots, \bar{z}_m^{q_m}) = 0$ em $\mathcal{F}$. Lembre que os elementos $\bar{y}_i^j, \bar{z}_i^j$ são geradores livres de S , e S é o par relativamente livre de $\mathcal{V}$. Segue então que $f \equiv 0$ em $\mathcal{V}$. ■

Teorema 3.2.4 *Para toda variedade não trivial de pares associativo-Lie $\mathcal{V}$ de tipo associativo existe um superpar $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$ tal que $\mathcal{V} = \text{var}(G(A, L))$.*

Demonstração: Pela hipótese de $\mathcal{V}$ ser de tipo associativo, existem inteiros k, m tais que o n -ésimo cocaracter $\chi_n(\mathcal{V})$ de $\mathcal{V}$ pertence ao gancho $H(k, m)$, para todo $n = 1, 2, \dots$. Como no Lema 3.2.3, considere a supervariety $\mathcal{V}^*$ e seu superpar relativamente livre $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Y,Z}(\mathcal{V}^*)$ em k geradores pares livres $u_1, \dots, u_k$ e m geradores ímpares livres $w_1, \dots, w_m$. Vamos mostrar que $\mathcal{V}$ é gerada por $G(\mathcal{F})$.

Claramente $G(\mathcal{F}) \in \mathcal{V}$ pela definição de $\mathcal{V}^*$. Vejamos então que $\mathcal{V}$ satisfaz todas as identidades de $G(\mathcal{F})$.

Seja $f \equiv 0$ uma identidade multilinear de $G(\mathcal{F})$ de grau n . Pelo Teorema 1.4.18, f é equivalente a um sistema de identidades da forma

$$e_{T_\lambda} g \equiv 0, \quad (3.3)$$

onde $g = g(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio multilinear em $x_1, \dots, x_n$, λ é uma partição de n e T_λ é alguma tabela de Young correspondente a λ . Assim, é suficiente mostrar a afirmação para o caso em que f é da forma 3.3.

Se $\lambda \notin H(k, m)$, então f é identidade para $\mathcal{V}$, pois $\chi_n(\mathcal{V})$ pertence ao gancho $H(k, m)$. Suponha $\lambda \in H(k, m)$. Pelo Lema 1.4.19, podemos assumir que f é polinômio em $k' \leq k$ conjuntos de variáveis simétricas $\{y_i^1, \dots, y_i^{p_i}\}$, $1 \leq i \leq k'$, e em $m' \leq m$ conjuntos de variáveis alternantes $\{z_j^1, \dots, z_j^{q_j}\}$, $1 \leq j \leq m'$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $k = k'$ e $m = m'$. Então o polinômio

$$f = f(y_1^1, \dots, y_1^{p_1}, \dots, y_k^1, \dots, y_k^{p_k}, z_1^1, \dots, z_1^{q_1}, \dots, z_m^1, \dots, z_m^{q_m})$$

satisfaz as hipóteses do Lema 3.2.3. De fato, se consideramos todos y_i^p como variáveis pares e todos z_j^q como variáveis ímpares, então $f \equiv 0$ pode ser visto como uma identidade graduada de $G(\mathcal{F})$. Daí, pelo Lema 3.2.1, o superpar $\mathcal{F}$ satisfaz a identidade graduada $\tilde{f}$. Em particular

$$\tilde{f}(\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{u_k, \dots, u_k}_{p_k}, \underbrace{w_1, \dots, w_1}_{q_1}, \dots, \underbrace{w_m, \dots, w_m}_{q_m}) = 0.$$

Aplicando o Lema 3.2.3 obtemos que $f \equiv 0$ é identidade de $\mathcal{V}$ e temos o teorema. ■

Como uma consequência do resultado anterior, obteremos que variedades de pares especiais que não possuem pares envolvendo representações da álgebra de Lie sl_2 são solúveis. Nesse sentido vejamos alguns resultados.

Lema 3.2.5 *Seja $\mathcal{V} = \text{var}(B, M)$ uma variedade de pares associativo-Lie tal que (B, M) é um par especial. Então todo par em $\mathcal{V}$ é especial. Em particular, como $\mathcal{V} = \text{var}(G(A, L))$ para algum superpar $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$, segue que $G_A(L)$ é uma PI-álgebra.*

Demonstração: De fato, tome $0 \neq f = f(x_1, \dots, x_n)$ polinômio multilinear em $Id(B)$ e $(C, N) \in \mathcal{V}$. Seja $\beta = \{b_1 \cdots b_k \mid b_i \in N, k \in \mathbb{N}\}$ ($\beta = \{1_C, b_1 \cdots b_k \mid b_i \in N, k \in \mathbb{N}\}$ se C é unitária e $1_C \notin \langle N \rangle$) um conjunto gerador de C como espaço vetorial. Como $Id(B)$ é T-ideal, segue que

$$f(g_1, \dots, g_n) \in Id(B) \subseteq Id(B, M) \subseteq Id(C, N),$$

para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$. Em particular, para $g_i = x_{i_1} \cdots x_{i_{k_i}}$, $i = 1, \dots, n$, obtemos que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in \beta$. Portanto $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para C . ■

Seja $B = B_0 \oplus B_1$ uma superálgebra associativa e suponha que B é uma PI-álgebra. Então, como E é PI, temos que $B \otimes E$ é uma PI-álgebra pelo teorema de Regev [46]. Considere o envelope de Grassmann $G(B)$, $J = Id(G(B))$ e $I = Id(B \otimes E)$. Temos que $0 \neq I \subseteq J$.

Lema 3.2.6 *Tome $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$ um superpar tal que $G(A, L)$ é um par especial. Então A é uma PI-álgebra.*

Demonstração: Considere $B = G_A(L)$ como anteriormente. Então

$$G(B) = (G_A(L)_0 \otimes E_0) \oplus (G_A(L)_1 \otimes E_1)$$

é uma álgebra associativa tal que seu ideal de identidades $J = Id(G(B))$ contém o T-ideal $I = Id(B \otimes E) \neq 0$. Relembre que $G_A(L)_0 \subseteq A_0 \otimes E_0$ e $G_A(L)_1 \subseteq A_1 \otimes E_1$.

Considere $a = l_1 \cdots l_k \in A$, onde $l_i \in L_0 \cup L_1$ ($l_i \in L_0 \cup L_1 \cup \{1_A\}$ se A é unitária e $1_A \notin \langle L \rangle$), um elemento qualquer do conjunto gerador (como espaço vetorial) de A . Se $|l_j| = 0$ tome $e_{j_1} e_{j_2} \in E_0$ e considere o elemento $l_j \otimes e_{j_1} e_{j_2} \in L_0 \otimes E_0$. Se $|l_j| = 1$ tome $e_{j_1} \in E_1$ e considere o elemento $l_j \otimes e_{j_1} \in L_1 \otimes E_1$. Fazendo isso para cada $j = 1, \dots, k$ e escolhendo os elementos e_i 's distintos, obtemos um elemento

$$a \otimes c = l_1 \cdots l_k \otimes z_1 \cdots z_k \in G_A(L)_0 \cup G_A(L)_1,$$

onde $z_j = e_{j_1} e_{j_2}$, se $|l_j| = 0$, e $z_j = e_{j_1}$, se $|l_j| = 1$.

Agora tome $0 \neq f = f(x_1, \dots, x_n)$ multilinear em $I \subseteq J$ e $a_1, \dots, a_n$ elementos quaisquer do conjunto gerador de A como espaço vetorial. Como anteriormente, podemos construir elementos $a_1 \otimes c_1, \dots, a_n \otimes c_n$ em $G_A(L)_0 \cup G_A(L)_1$ de modo que $c_1 \cdots c_n \neq 0$. Os elementos $a_i \otimes c_i \otimes c_i$, $i = 1, \dots, n$, pertencem a $A_0 \otimes E_0 \otimes E_0$ ou $A_1 \otimes E_1 \otimes E_1$. Além disso, os elementos $c_i \otimes c_i$ pertencem à álgebra comutativa $(E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$, $i = 1, \dots, n$. Assim, como f é identidade para $G(B)$, segue que

$$0 = f(a_1 \otimes c_1 \otimes c_1, \dots, a_n \otimes c_n \otimes c_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes (c_1 \otimes c_1) \cdots (c_n \otimes c_n)$$

e daí $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Como os elementos $a_1, \dots, a_n$ são arbitrários, segue que f é identidade para A e então A é uma PI-álgebra. ■

Teorema 3.2.7 *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade especial de pares associativo-Lie e suponha que K é um corpo algebricamente fechado. Se $(R, sl_2) \notin \mathcal{V}$ para todo par (R, sl_2) associado a uma representação de sl_2 , então $\mathcal{V}$ é variedade de pares solúvel.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{V}$ é de tipo associativo. Logo, pelo Teorema 3.2.4, segue que $\mathcal{V} = \text{var}(G(A, L))$, onde $(A, L) = (A_0 \oplus A_1, L_0 \oplus L_1)$ é um superpar relativamente livre de posto finito. Em particular, A é uma superálgebra associativa finitamente gerada. Pelo Lema 3.2.5, temos que $G_A(L)$ é uma PI-álgebra associativa e daí, pelo Lema 3.2.6, A é uma PI-álgebra. Assim, o radical de Jacobson $J = J(A)$ é um ideal nilpotente.

Considere a álgebra $\bar{A} = A/J$ que é semissimples (semiprimitiva) e PI e, pelo Lema 2.3.4, é um produto subdireto de álgebras de matrizes $M_{n_\gamma}(K)$, $\gamma \in \Gamma$, sobre K . Pelo teorema de Amitsur e Levitzki, $M_n(K)$ não satisfaz identidades de grau menor que $2n$, logo as ordens n_γ são limitadas. Então o quociente $\bar{L} = L/(L \cap J)$ pode ser imerso em um produto direto de superálgebras (contidas nas álgebras matriciais $M_{n_\gamma}(K)$) de dimensão finita. Os pares associativo-Lie formados pelas componentes pares dessas superálgebras pertencem à variedade $\mathcal{V}$ e são compostos por álgebras de dimensão limitada. Além disso, essas componentes pares não podem conter sl_2 , pois caso contrário teríamos um par $(R, sl_2) \in \mathcal{V}$ associado a uma representação de sl_2 com espaço V_γ tal que $\text{End}_K(V_\gamma) \simeq M_{n_\gamma}(K)$. Logo cada uma dessas componentes pares é solúvel.

Uma superálgebra de Lie $B = B_0 \oplus B_1$ é solúvel se, e somente se, B_0 é solúvel (veja [28], Proposição 1.3.3, p. 25). Assim, cada parcela na imersão de $\bar{L}$ é solúvel com grau de solubilidade limitado, donde $\bar{L}$ é solúvel. Como J é nilpotente, segue que L é solúvel e daí $G(L)$ é solúvel. O corolário está provado. ■

3.3 Um exemplo de não integralidade do expoente

Nesta seção apresentaremos um exemplo da não integralidade do expoente para um determinado par associativo-Lie. Para isso, faremos uso fortemente da transformação $\sim$ definida na seção anterior.

Inicialmente faremos um breve resumo de algumas notações, definições e resultados necessários, os quais são obtidos de modo análogo a seção 10.4 em [19] considerando o grupo $G = \mathbb{Z}_2$.

Dados $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$, considere $P_{k,n-k}$ o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis pares $y_1, \dots, y_k$ e ímpares $z_1, \dots, z_{n-k}$ em $K\langle Y, Z \rangle$. Então a interseção $P_{k,n-k} \cap Id_2(A, L)$ consiste de todas identidades multilineares graduadas de um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado (ou superpar) (A, L) com grau k nas variáveis pares e grau $n-k$ nas variáveis ímpares. Temos uma estrutura de $S_k \times S_{n-k}$ -módulo para o quociente

$$P_{k,n-k}(A, L) = \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \cap Id_2(A, L)},$$

o seu $(k, n-k)$ -cocaracter fraco graduado $\chi_{k,n-k}(A, L)$ e a decomposição em irredutíveis

$$\chi_{k,n-k}(A, L) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} m_{\lambda,\mu} \chi_\lambda \otimes \chi_\mu, \quad (3.4)$$

onde $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ é o caracter irredutível associado a um par de partições (λ, μ) . Este caracter irredutível é obtido a partir do produto tensorial de representações de S_k e S_{n-k} . Temos $\deg(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu) = d_\lambda d_\mu$. Com relação às codimensões, sendo $c_{k,n-k}(A, L) = \dim(P_{k,n-k}(A, L))$ a $(k, n-k)$ -codimensão fraca do módulo $P_{k,n-k}(A, L)$, então a codimensão fraca graduada é dada por

$$c_n^{\mathbb{Z}_2}(A, L) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{k,n-k}(A, L).$$

Quando (A, L) é um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado, também temos a seguinte desigualdade

$$c_n(A, L) \leq c_n^{\mathbb{Z}_2}(A, L), \quad (3.5)$$

para todo $n \geq 1$ (veja [19], Lema 10.1.2, p. 256).

Observação 3.5 *Se B é uma álgebra (associativa ou de Lie) $\mathbb{Z}_2$ -graduada, obtemos de modo análogo as codimensões e cocaracteres (associativos ou de Lie) graduados para B .*

Nesse caso graduado temos um análogo ao Teorema 1.4.17.

Teorema 3.3.1 *Seja (A, L) um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado (ou superpar) com cocaracter $\chi_{k,n-k}(A, L)$ dado em 3.4. Para duas partições $\lambda \vdash k$ e $\mu \vdash n-k$, $m_{\lambda,\mu} = 0$*

se, e somente se, para quaisquer tabelas de Young T_λ e T_μ e para todo polinômio $f = f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) \in P_{k,n-k}$, o par (A, L) satisfaz a identidade graduada $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f \equiv 0$.

Demonstração: Veja [19], Cap. 10, Seções 10.4 e 10.5. ■

O restante desta seção utiliza ideias dos artigos de Giambruno e Zaicev [15, 18], onde foram construídos um exemplo de uma álgebra de Lie especial L e de uma superálgebra de Lie tais que $\liminf(c_n(L)^{1/n})$ e $\limsup(c_n(L)^{1/n})$ existem e ambos estão no intervalo aberto $(6, 7)$ (e no caso da superálgebra coincidem). Como consequência, eles não são inteiros.

Agora introduzimos o objeto de estudo dessa seção. Seja $A = M_4(K)$ a álgebra das matrizes 4×4 com $\mathbb{Z}_2$ -graduação dada pelas componentes

$$A_0 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad e \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde P, Q, S e T são matrizes 2×2 . Podemos então considerar a superálgebra de Lie $A^{(\sim)}$ e sua subálgebra de Lie homogênea $L = L_0 \oplus L_1$ em que

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^t \end{pmatrix} \mid X \in M_2(K), \quad tr X = 0 \right\},$$

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \mid Y, Z \in M_2(K), \quad Y^t = Y, Z^t = -Z^t \right\}, \quad (3.7)$$

onde t é a transposta e tr é a função traço. Observe que $\dim(L) = 7$, $\dim(L_0) = 3$ e $\dim(L_1) = 4$.

Sejam R a subálgebra associativa de A gerada por L . Observe que R é unitária, pois o elemento

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_0$$

satisfaz $h^2 = I_4 = 1_R$ e nesse caso $1_R \in \langle L \rangle$. Além disso, R é o espaço vetorial gerado por

$\beta = \{a_1 \cdots a_k \mid a_i \in L_0 \cup L_1, k \in \mathbb{N}\}$. Podemos decompor $\beta = \beta_0 \cup \beta_1$ onde β_0 e β_1 são formados pelos elementos com grau par e ímpar em A , respectivamente. Assim, tomando R_0 e R_1 os subespaços gerados por β_0 e β_1 , respectivamente, obtemos uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação $R = R_0 \oplus R_1$ em que L é uma subálgebra homogênea de $R^{(\sim)}$. Vamos considerar então o superpar (R, L) e denotar seu envelope de Grassmann por

$$(B, M) = G(R, L) = (G_A(L), G(L)) = (B_0 \oplus B_1, M_0 \oplus M_1),$$

onde $M_0 = L_0 \otimes E_0$, $M_1 = L_1 \otimes E_1$, $B_0 \subseteq R_0 \otimes E_0$ e $B_1 \subseteq R_1 \otimes E_1$. Dados inteiros $n \geq k \geq 0$, fixe as decomposições dos $(k, n-k)$ -ésimos cocaracteres graduados

$$\chi_{k,n-k}(B, M) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} m_{\lambda,\mu} \chi_\lambda \otimes \chi_\mu \quad (3.8)$$

e

$$\chi_{k,n-k}(R, L) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} \tilde{m}_{\lambda,\mu} \chi_\lambda \otimes \chi_\mu. \quad (3.9)$$

Observação 3.6 *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra associativa. Como $(A, A^{(-)})$ é um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado e $\text{Id}_2(A, A^{(-)}) = \text{Id}_2(A)$, dados inteiros $n \geq k \geq 0$, temos que $m_{\lambda,\mu}(A, A^{(-)}) = m_{\lambda,\mu}(A)$ nas decomposições dos $(k, n-k)$ -cocaracteres graduados fraco e associativo, respectivamente.*

Observação 3.7 *Sendo A uma K -álgebra associativa, temos que $M_n(K) \otimes A \simeq M_n(A)$ como álgebras.*

Dada uma tabela T_λ , $\lambda \vdash n$, relembre que $e_{T_\lambda}^*$ denota um elemento de KS_n definido na subseção 1.4.1.

Lema 3.3.2 *Consideramos os polinômios $\mathbb{Z}_2$ -graduados $f = f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ e $h = h(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m)$ em que $y_1, \dots, y_l$ e $z_1, \dots, z_m$ são variáveis ímpares e pares, respectivamente. Se $f = e_{T_\mu} h$ para alguma tabela T_μ de $\mu \vdash m$, onde $e_{T_\mu} \in KS_m$ e S_m age nas variáveis $z_1, \dots, z_m$, então $\tilde{f} = \pm e_{T_{\mu'}}^* h$, onde $\mu' \vdash m$ é a partição conjugada de μ .*

Demonstração: Veja [19], Lema 4.8.6, p. 113. ■

Lema 3.3.3 *Sejam (A_1, L_1) um par associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado e (A_2, L_2) um subpar associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado. Então*

$$m_{\lambda, \mu}(A_2, L_2) \leq m_{\lambda, \mu}(A_1, L_1)$$

para quaisquer $\lambda \vdash k$, $\mu \vdash n - k$, nas decomposições de cada cocaracter graduado.

Demonstração: Temos que $Id_2(A_1, L_1) \subseteq Id_2(A_2, L_2)$. Além disso, temos de modo semelhante o resultado do Lema 1.4.11 para representações de $S_k \times S_{n-k}$. Assim, basta usar o mesmo argumento da Observação 1.7. ■

Lema 3.3.4 *Na decomposição 3.8, temos que*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} m_{\lambda, \mu} \leq Cn^r,$$

para algumas constantes C e r não dependentes de n .

Demonstração: Pela Observação 3.7, o par (B, M) pode ser visto como um subpar associativo-Lie de $(M_{2,2}(E), M_{2,2}(E)^{(-)})$, onde

$$M_{2,2}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix} \mid X, U \in M_2(E_0), Y, Z \in M_2(E_1) \right\}.$$

é uma PI-álgebra associativa pelo teorema de Regev: $M_{2,2}(E) \subseteq M_4(E) \cong M_4(K) \otimes E$ e $M_4(K)$ e E são ambas PI [46]. Além disso, essa álgebra possui uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação natural com componentes

$$M_{2,2}(E)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \mid X, U \in M_2(E_0) \right\},$$

$$M_{2,2}(E)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \mid Y, Z \in M_2(E_1) \right\},$$

e daí, pela Observação 3.6, temos uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação para $(M_{2,2}(E), M_{2,2}(E)^{(-)})$. Com essa graduação, (B, M) é um subpar associativo-Lie $\mathbb{Z}_2$ -graduado. Novamente pela

Observação 3.6, temos que

$$\chi_{k,n-k}(M_{2,2}(E), M_{2,2}(E)^{(-)}) = \chi_{k,n-k}(M_{2,2}(E)). \quad (3.10)$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Por [6], as multiplicidades no $\mathbb{Z}_2$ -cocaracter associativo

$$\chi_{k,n-k}(M_{2,2}(E)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} \bar{m}_{\lambda,\mu} \chi_\lambda \otimes \chi_\mu \quad (3.11)$$

são polinomialmente limitadas e

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} \bar{m}_{\lambda,\mu} \leq Cn^r,$$

para algumas constantes C e r . Finalmente, pelo Lema 3.3.3 e igualdade 3.10, temos que

$$m_{\lambda,\mu} \leq \bar{m}_{\lambda,\mu}$$

para quaisquer $\lambda \vdash k$, $\mu \vdash n - k$ e o lema segue. ■

Agora temos as seguintes relações entre as multiplicidades em 3.8 e 3.9.

Lema 3.3.5 $\tilde{m}_{\lambda,\mu} \neq 0$ se, e somente se, $m_{\lambda,\mu'} \neq 0$, para quaisquer $\lambda \vdash k$, $\mu \vdash n - k$.

Demonstração: Suponha $\tilde{m}_{\lambda,\mu} \neq 0$ e tome $g = g(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) \in P_{k,n-k}$ tal que $g \notin Id_2(R, L)$ e $K(S_k \times S_{n-k})g$ é um $S_k \times S_{n-k}$ -módulo irredutível de $P_{k,n-k}$ com caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$. Então existem tabelas T_λ e T_μ tais que

$$f = f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) = e_{T_\lambda} e_{T_\mu} g = e_{T_\mu} e_{T_\lambda} g.$$

não é identidade para (R, L) . (Repare que e_{T_λ} e e_{T_μ} comutam pois eles permutam conjuntos disjuntos de variáveis.) Tome

$$h = h(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) = e_{T_\lambda} g(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}),$$

então $f = e_{T_\mu} h$. Pela Observação 3.3.2 e como $\sim$ não altera $y_1, \dots, y_k$, obtemos que

$$\tilde{f} = \pm e_{T_\mu}^* e_{T_\lambda} g = e_{T_\lambda} e_{T_\mu}^* g(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}).$$

O polinômio $\tilde{f}$ gera um $S_k \times S_{n-k}$ -submódulo irredutível de $P_{k,n-k}$ com caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_{\mu'}$. Além disso, pelo Lema 3.2.1, $\tilde{f}$ não é identidade graduada de (B, M) . Portanto, $m_{\lambda, \mu'} \neq 0$.

Analogamente, $m_{\lambda, \mu'} \neq 0$ implica $m_{\lambda, \mu} \neq 0$, pois $\mu'' = \mu$, o que completa a demonstração. ■

3.3.1 Limitação superior

Agora vamos definir a noção de peso para uma partição. Dada $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$ uma partição de um inteiro m , seguindo [15, p. 626] definimos o peso de μ como sendo

$$wt(\mu) = -\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t.$$

Vejamos então algumas propriedades dos cocaracteres na decomposição de $\chi_{k,n-k}(R, L)$.

Lema 3.3.6 *Dadas partições λ e μ tais que $\tilde{m}_{\lambda, \mu} \neq 0$, temos que*

$$i) \quad \lambda_4 = 0 \text{ e } \mu_5 = 0;$$

$$ii) \quad wt(\mu) \leq 1, \text{ ou seja,}$$

$$\mu_1 + 1 \geq \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Demonstração: O item (i) segue diretamente de $\dim(L_0) = 3$ e $\dim(L_1) = 4$.

Para mostrar (ii), observe que $L_1 = L^{(-1)} \oplus L^{(1)}$, onde $L^{(-1)}$ e $L^{(1)}$ são os espaços formados pelas matrizes triangulares inferiores e superiores em L_1 , respectivamente. Temos que $\dim(L^{(-1)}) = 1$ e $\dim(L^{(1)}) = 3$. Denote por β uma base de L_1 que seja união de bases de $L^{(-1)}$ e $L^{(1)}$.

Tome $f = f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k})$ um polinômio multilinear que não se anula em (R, L) e suponha que f gera um $S_k \times S_{n-k}$ -submódulo irredutível H de $P_{k,n-k}$ com caracter $\chi_{\lambda, \mu}$, $\lambda \vdash k$ e $\mu \vdash n - k$. Podemos assumir $f = e_{T_\lambda} e_{T_\mu} g$, para algumas tabelas T_λ e T_μ das partições λ e μ , respectivamente. Como $e_{T_\mu} = R^{T_\mu} C^{T_\mu}$ é um idempotente essencial, segue que

$$h = h(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) = C^{T_\mu} f$$

ainda gera o submódulo $H \not\subseteq Id_2(R, L)$. O polinômio h alterna em cada subconjunto de $\{z_1, \dots, z_{n-k}\}$ consistindo das variáveis correspondentes a alguma coluna de T_μ .

Seja φ uma substituição no par (R, L) tal que $\varphi(h) \neq 0$. Para que h assuma um valor não nulo, devemos avaliar variáveis distintas em cada coluna de T_μ por elementos distintos de β , ou seja, cada coluna é avaliada em no máximo um elemento de $L^{(-1)}$ e não mais que três elementos de $L^{(1)}$. Ademais, o produto entre dois elementos de $L^{(-1)}$ (ou $L^{(1)}$) é nulo, pelas regras do produto matricial.

Suponha que $wt(\mu) \geq 2$ e seja k o número de quadrados fora da primeira linha em μ . Então

$$k - \mu_1 = wt(\mu) \geq 2 \Rightarrow \mu_1 + 2 \leq k \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 + 2 \leq k - \mu_2.$$

Assim, a partir da terceira linha temos pelo menos dois quadrados a mais que o valor $\mu_1 - \mu_2$. A menos de uma reordenação por uma permutação em alguma coluna, podemos assumir que esses dois quadrados a mais são correspondentes a dois elementos em $L^{(1)}$. Então devemos ter pelo menos dois elementos consecutivos de $L^{(1)}$ em cada monômio de $\varphi(h)$, ou seja, $\varphi(h) = 0$, uma contradição. ■

Lema 3.3.7 *Se λ, μ são partições tais que $\tilde{m}_{\lambda, \mu} \neq 0$ em 3.9, então existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, q_1, q_2$ não dependentes de k e $n - k$ tais que*

$$d_\lambda \leq \alpha_1 n^{q_1} 3^k \tag{3.12}$$

e

$$d_\mu \leq \alpha_2 n^{q_2} (2\sqrt{3})^{n-k}. \tag{3.13}$$

Demonstração: Basta usar o Lema 3.3.6 e aplicar argumentos análogos ao Lema 6 em [15]. ■

Lema 3.3.8 *Existem constantes α_3 e q_3 não dependentes de n tais que*

$$c_n^{\mathbb{Z}_2}(B, M) \leq \alpha_3 n^{q_3} (3 + 2\sqrt{3})^n,$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Usando os Lemas 3.3.5, 3.3.7 e 3.3.4, o resultado segue de modo análogo ao Lema 7 em [15]. ■

Como consequência imediata do Lema 3.3.8 obtemos uma limitação superior para $\overline{\exp}(B, M)$.

Lema 3.3.9 $\overline{\exp}(B, M) \leq (3 + 2\sqrt{3})$.

Demonstração: Pela desigualdade 3.5, temos que

$$c_n(B, M) \leq c_n^{\mathbb{Z}_2}(B, M),$$

para todo $n \geq 1$. Assim, pelo Lema 3.3.8, segue que

$$\overline{\exp}(B, M) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(B, M)} \leq 3 + 2\sqrt{3},$$

e a demonstração está completa. ■

3.3.2 Limitação inferior

Relembre que estamos considerando o superpar (R, L) em que

$$L = L_0 \oplus L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^t \end{pmatrix} \mid \text{tr} X = 0 \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \mid Y^t = Y, Z^t = -Z^t \right\},$$

onde X , Y e Z são matrizes 2×2 , e seu envelope de Grassmann $(B, M) = G(R, L)$.

Considere

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

uma base da componente L_0 . Novamente consideramos $L^{(1)}$ e $L^{(-1)}$ os blocos triangulares superior e inferior da componente L_1 , respectivamente. Temos as seguintes relações

$$he = e, \quad eh = -e, \quad hf = -f, \quad fh = f,$$

$$ef = E_{11} + E_{44}, \quad fe = E_{22} + E_{33},$$

e daí

$$\begin{aligned} St_3(e, f, h) &= efh - ehf - feh - hfe + fhe + hef \\ &= ef + ef + fe + fe + fe + ef = 3I_4 \end{aligned} \quad (3.14)$$

em R_0 . Assim, temos que

$$\underbrace{\bar{e}f\bar{h} \cdots \tilde{e}f\tilde{h}}_{3q \text{ triplas}} v = 3^q v \quad (3.15)$$

para qualquer $v \in R$ (em particular, para $v \in R_1$) e $q \geq 1$.

Sejam $a, b, c \in L^{(1)}$ elementos linearmente independentes e

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \in L^{(-1)}$$

um elemento não nulo. Então $D \in M_2(K)$, $D^t = -D$ e, como

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} XD & 0 \\ 0 & DX \end{pmatrix},$$

segue que os elementos $u_1 = [a, d]$, $u_2 = [b, d]$, $u_3 = [c, d]$ são linearmente independentes e portanto formam uma base de L_0 . Assim, escrevendo cada u_i , $i = 1, 2, 3$, na base $\{e, f, g\}$, não é difícil ver que

$$St_3(u_1, u_2, u_3) = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 = \alpha I_4$$

para algum $0 \neq \alpha \in K$ e daí $St_3(u_1, u_2, u_3)v = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 v = \alpha v$, para todo $v \in R$. Além disso, multiplicando d por um escalar adequado, podemos supor $\alpha = 1$. Desse modo,

$$St_3(u_1, u_2, u_3)v = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 v = [\bar{a}, d][\bar{b}, d][\bar{c}, d]v = v$$

e, aplicando $St_3(u_1, u_2, u_3)^{q+1}$ em v , obtemos

$$\underbrace{[\bar{a}, d][\bar{b}, d][\bar{c}, d] \cdots [\tilde{a}, d][\tilde{b}, d][\tilde{c}, d]}_{3q+3} v = v, \quad (3.16)$$

para todo $q \geq 1$. Observe também que, como $[d, d] = 0$,

$$[\bar{a}, d][\tilde{b}, d][\bar{c}, d] \cdots [\tilde{a}, d][\tilde{b}, d][\tilde{c}, d]v = [\bar{a}, d][\bar{b}, d][\bar{c}, d] \cdots [\tilde{a}, d][\tilde{b}, d][\tilde{c}, d]v,$$

ou seja, o polinômio do lado esquerdo em 3.16 pode ser visto como um polinômio alternando nos conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{a, b, c, d\}$.

Repetindo o argumento anterior e usando 3.16, para todo $q \geq 1$ podemos construir uma expressão em a, b, c, d, v contendo q conjuntos alternantes $\{a, b, c, d\}$, um conjunto alternante $\{a, b, c\}$, $2q + 3$ entradas d e um v .

Assim, obtemos um polinômio multilinear em variáveis ímpares de grau $6q + 7$ ($= 4q + 3 + 2q + 3 + 1$)

$$f_q = f_q(t_1^1, t_2^1, t_3^1, z_1^1, z_2^1, z_3^1, \dots, t_1^{q+1}, t_2^{q+1}, t_3^{q+1}, z_1^{q+1}, z_2^{q+1}, z_3^{q+1}, z)$$

que alterna em cada conjunto $\{t_1^i, t_2^i, t_3^i, z_1^{i+1}\}$, $1 \leq i \leq q$, e no conjunto $\{t_1^{q+1}, t_2^{q+1}, t_3^{q+1}\}$. Além disso, para toda substituição φ tal que

$$\varphi(t_1^i) = a, \quad \varphi(t_2^i) = b, \quad \varphi(t_3^i) = c, \quad 1 \leq i \leq q + 1,$$

$$\varphi(z) = v, \quad \varphi(z_j^i) = d, \quad 1 \leq i \leq q + 1, \quad 1 \leq j \leq 3,$$

onde v é um elemento arbitrário de L_1 , temos que $\varphi(f_q) \neq 0$. Seja g_q a simetrização do polinômio f_q em cada um dos quatro conjuntos de variáveis

$$\begin{aligned} &\{t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^q\}, \quad \{t_2^1, t_2^2, \dots, t_2^q\}, \quad \{t_3^1, t_3^2, \dots, t_3^q\}, \\ &\{z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2, z_3^2, \dots, z_1^q, z_2^q, z_3^q, z_1^{q+1}\}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

cujas cardinalidades são q , q , q e $3q$, respectivamente. Então a substituição φ nos diz que g_q também não é identidade do par (B, L) .

Com abuso de notação, seja $P_{0,6q+7}$ o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis aparecendo no polinômio g_q , ou f_q . Tome $m = 6q$ e seja S_m o grupo simétrico agindo nas variáveis dos quatro conjuntos em 3.17. Então, considerando $P_{0,6q+7}$ como um S_m -módulo, g_q gera um S_m -submódulo irredutível de $P_{0,6q+7}$ com caracter χ_ν , onde $\nu = (3q, q^3)$.

Agora observe que $\varphi(g_q) \in R_1$, pois o grau de g_q é ímpar e L é um subespaço homogêneo de M . Daí, tomando $v = \varphi(g_q)$ em 3.15, obtemos que o polinômio

$$h_q = \bar{y}_1^1 \bar{y}_2^1 \bar{y}_3^1 \cdots \bar{y}_1^q \bar{y}_2^q \bar{y}_3^q g_q$$

não é identidade graduada do superpar (R, L) , onde os y_j^i 's são variáveis pares. De fato,

$\psi(h_q) \neq 0$, onde ψ é a substituição

$$\psi(t_j^i) = \varphi(t_j^i), \quad \psi(z_j^i) = \varphi(z_j^i), \quad \psi(z) = \varphi(z),$$

$$\psi(y_1^1) = \cdots = \psi(y_1^q) = e, \quad \psi(y_2^1) = \cdots = \psi(y_2^q) = f, \quad \psi(y_3^1) = \cdots = \psi(y_3^q) = h.$$

Como anteriormente, considerando a simetrização s_q de h_q nos três conjuntos de variáveis $\{y_1^i \mid 1 \leq i \leq q\}$, $\{y_2^i \mid 1 \leq i \leq q\}$, $\{y_3^i \mid 1 \leq i \leq q\}$, obtemos que s_q gera um S_{3q} -submódulo irredutível de $P_{3q,6q+7}$ com caracter χ_λ em que $\lambda = (q^3)$.

Com base no polinômio s_q construído anteriormente, obtemos o seguinte lema.

Lema 3.3.10 *Para todo $q \geq 1$, existe um polinômio multilinear p_q de grau $3q$ nas variáveis pares e grau $6q+7$ nas variáveis ímpares, o qual gera um $S_{3q} \times S_{6q+7}$ -submódulo irredutível de $P_{3q,6q+7}$ com caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ tal que*

- i) p_q não é identidade graduada do superpar (R, L) , ou seja, $\tilde{m}_{\lambda,\mu} \neq 0$ em 3.8;
- ii) $\lambda = (q^3)$ é um diagrama retangular;
- iii) $\mu \geq \nu$, onde $\nu = (3q, q^3) \vdash 6q$.

Demonstração: O polinômio s_q construído anteriormente gera um $S_{3q} \times S_{6q}$ -submódulo de $P_{3q,6q+7}$ com caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ como nas condições do lema. Então basta considerar a representação induzida de $S_{3q} \times S_{6q}$ em $S_{3q} \times S_{6q+7}$ e tomar uma componente irredutível cujo caracter é $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$. ■

Lema 3.3.11 *Para todo $q \geq 1$ e $n = 9q + 7$, existem constantes $\alpha_4 > 0$ e q_4 tais que*

$$c_n(B, M) \geq \alpha_4 n^{q_4} (3^{\frac{5}{3}})^n.$$

Demonstração: Pelo Lema 3.3.10, temos que $\tilde{m}_{\lambda,\mu} \neq 0$ em 3.9, onde $\lambda = (q^3)$ e $\mu \vdash 6q+7$ é tal que $\mu \geq \nu = (3q, q^3)$. Pelo Lema 3.3.5, $m_{\lambda,\mu'} \neq 0$ em 3.8, onde μ' é a partição conjugada de μ . Assim, $\mu' \geq \nu' = (4^q, 1^{2q})$ e $P_{3q,6q+7}$ contém um $S_{3q} \times S_{6q+7}$ módulo N com caracter $\chi_\lambda \otimes \chi_{\mu'}$. Seja f polinômio com grau $3q$ nas variáveis pares e grau $6q+7$ nas variáveis ímpares que não é identidade graduada de (B, M) e gera o módulo N . Então f também não é identidade de (B, M) no sentido não graduado.

Agora basta seguir de modo análogo ao Lema 10 em [15]. ■

Lema 3.3.12 *Entre as sequências de codimensões do par (B, M) temos a desigualdade $c_{n+1}(B, M) \geq c_n(B, M)$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Basta mostrar que dados $f_1, \dots, f_k$ polinômios linearmente independentes módulo $Id(B, M)$ nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, então $f_1 x_{n+1}, \dots, f_k x_{n+1}$ são linearmente independentes módulo $Id(B, M)$. De fato, tome $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tais que

$$g = g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i x_{n+1} \equiv 0 \pmod{Id(B, M)}$$

Dados $a_1, \dots, a_n \in M$, tome $a_{n+1} = E_{11} - E_{22} - E_{33} + E_{44} \in M$. Então

$$0 = g(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(a_1, \dots, a_n) \right) a_{n+1} = b a_{n+1},$$

onde $b = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(a_1, \dots, a_n) \in B$. A matriz a_{n+1} é invertível, logo $b = 0$. Como os elementos $a_1, \dots, a_n$ são arbitrários, segue que $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ é identidade para (B, M) , ou seja,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i \equiv 0 \pmod{Id(B, M)}.$$

Pela independência linear, temos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ e o resultado segue. ■

Lema 3.3.13 $\underline{\exp}(B, M) > 3^{5/3}$.

Demonstração: Combinando os Lemas 3.3.11 e 3.3.12, obtemos constantes $\alpha_5 > 0$ e q_5 tais que

$$c_n(B, M) > \alpha_5 n^{q_5} (3^{5/3})^n$$

para todo $n \geq 1$. Assim,

$$\underline{\exp}(B, M) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(B, M)} > 3^{5/3}$$

e o resultado segue. ■

Combinando os Lemas 3.3.9 e 3.3.13, obtemos a não integralidade do expoente do par associativo-Lie (B, M) .

Teorema 3.3.14 *Seja (R, L) o superpar tal que R e L são superálgebras como em 3.6 e 3.7. O envelope de Grassmann $(B, M) = G(R, L)$ é um par associativo-Lie tal que o expoente, se existir, não é inteiro. De fato, temos que*

$$6,24 \simeq 3^{\frac{5}{3}} \leq \underline{\exp}(B, M) \leq \overline{\exp}(B, M) \leq 3 + 2\sqrt{3} \simeq 6,46.$$

Observação 3.8 *Não sabemos se $\underline{\exp}(B, M) < \overline{\exp}(B, M)$ (isto é, o expoente não existe), ou temos a igualdade (então o expoente existe mas não é inteiro).*

Bibliografia

- [1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463, (1950).
- [2] Yu. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [3] A. Ya. Belov, *Counterexamples to the Specht problem*, Mat. Sb. **191**, No. 3, 13–24 (2000) (Russian); English translation: Sb. Math. **191**, 329–340, (2000).
- [4] A. Ya. Belov, *On non-Specht varieties*. Fundam. Prikl. Mat. **5**, No. 1, 47–66 (1999) (Russian).
- [5] I. I. Benediktovich, A. E. Zalesskii, *T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of the sequence of codimensions* (Russian), Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk, **no. 3**, 5–10, 139, (1980).
- [6] A. Berele, *Cocharacter sequences for algebras with Hopf algebra actions*, J. Algebra **185**, 869–885, (1996).
- [7] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Camb. Philos. Soc. **31**, 433–454, (1935).
- [8] H. Boerner, *Representations of Groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [9] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53–67, (2004).
- [10] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, New York, 1962.

- [11] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme* (German), Math. Ann. **85**, 184–194, (1922).
- [12] V. Drensky, *Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras*, Mat. Sb. **115 (157)**, 98–115, (1980) (Russian); English translation: Math. USSR, Sb. **43**, 85–101 (1982).
- [13] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 2000.
- [14] V. Drensky, L. Vladimirova, *Varieties of pairs of algebras with a distributive lattice of subvarieties*, Serdica **12**, no. **2**, 166–170, (1986).
- [15] A. Giambruno, M. Zaicev, *Non-integrality of the PI-exponent of special Lie algebras*, Adv. Appl. Math. **51**, no. **5**, 619–634, (2013).
- [16] A. Giambruno, M. Zaicev, *On Codimension Growth of Finitely Generated Associative Algebras*, Adv. Math. **140**, 145–155, (1998).
- [17] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, *Codimensions of algebras and growth functions*, Adv. Math. **217**, 1027–1052, (2008).
- [18] A. Giambruno, M. Zaicev, *On codimension growth of finite-dimensional Lie superalgebras*, J. Lond. Math. Soc. **85**, 534–548, (2012).
- [19] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. 122, Providence, RI, 2005.
- [20] A. S. Gordienko, *Codimensions of polynomial identities of representations of Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **141 (10)**, 3369–3382, (2013).
- [21] A. V. Grishin, *Examples of T -spaces and T -ideals of characteristic 2 without the finite basis property* (Russian), Fundam. Prikl. Mat. **5**, no. **1**, 101–118, (1999).
- [22] M. Hall, *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 575–581, (1950).
- [23] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*. The Carus Math. Monographs 15, MAA, 1973.
- [24] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.

- [25] A. V. Il'tyakov, *Specht Ideals of Identities of Certain Simple Nonassociative Algebras*. Algebra and Logic, v. 24, **no. 3**, 210–228, (1985).
- [26] N. Jacobson, Basic Algebra II. 2 Ed., Dover, New York, 2009.
- [27] G. D. James, Representation Theory of the Symmetric Groups, Springer Lecture Notes in Mathematics 692, Springer, 1978.
- [28] V. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26**, 8–96, (1977).
- [29] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 496–500, (1948).
- [30] A. Kemer, Ideals of Identities of Associative Algebras, Transl. Math. Monogr. 87, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1988.
- [31] A. Kemer, *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht* (Russian), Sibirsk. Mat. Zh. **19**, 54–69, (1978); English translation: Siberian Math. J. **19**, 37–48, (1978).
- [32] A. R. Kemer, *Varieties of finite rank*, Proc. 15-th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsk, Vol 2, p. 73, 1979, (Russian).
- [33] A. R. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48**, **no. 5**, 1042–1059, (1984) (Russian); English translation: Math. USSR Izv. v. **25**, 359–374, (1985).
- [34] P. Koshlukov, *Weak polynomial identities for the matrix algebra of order two*, J. Algebra **188**, 610–625 (1997).
- [35] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$* , J. Algebra **241**, 410–434, (2001).
- [36] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429–438, (1973).
- [37] Yu. N. Malcev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices* (Russian), Algebra Logika **10**, 393–400, (1971). English translation: Algebra Logic **10**, 242–247, (1973).

- [38] A. I. Malcev, *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik* (German), Rec. Mat. Moscou, n. Ser. **1**, 323–335, (1936).
- [39] S. P. Mishchenko, *Growth of varieties of Lie algebras* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **45**, 25–45, (1990); English translation: Russian Math. Surveys **45**, 27–52, (1990).
- [40] S. P. Mishchenko, *Varieties of Lie algebras with weak growth of the sequence of codimensions* (Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., no. **5**, 63–66, (1982); English translation: Mosc. Univ. Math. Bull. **37**, No. 5, 78–82 (1982).
- [41] S. P. Mishchenko, *Varieties of polynomial growth of Lie algebras over a field of characteristic zero* (Russian), Mat. Zametki **40**, 713–721, (1986); English translation: Math. Notes **40**, 901–905 (1986).
- [42] J. B. Olson, A. Regev, *An application of representation theory to PI-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **55**, 253–257, (1976).
- [43] V. M. Petrogradskii, *On types of superexponential growth of identities of PI Lie algebras*, Fundam. Prikl. Mat. **1**, 989–1007, (1995) (Russian).
- [44] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic 0* (Russian), Algebra i Logika **12**, 83–113, (1973); Translation: Algebra Logic **12**, 43–63, (1983).
- [45] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations of Math. Monographs 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [46] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$* , Israel J. Math. **11**, 131–152, (1972).
- [47] H. Robbins, *A remark on Stirling's formula*, Amer. Math. Monthly **62**, 26–29, (1955).
- [48] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics vol. 80, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [49] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely based T-spaces* (Russian), Mat. Sb. **191**, No. **3**, 143–160 (2000); English translation: Sb. Math. **191**, no. **3-4**, 45–476, (2000).
- [50] A.I. Shirshov, *On bases of free Lie algebras* (Russian), Algebra i Logika **1**, 14–19 (1962).

- [51] W. Specht, *Gesetze in ringen*, I. Math. Z. **52**, 557–589, (1950).
- [52] I. M. Trishin, *Identities of irreducible representations of a three-dimensional simple Lie algebra* (Russian), Algebra i Logika **22**, no. 3, 316–342, (1983); English translation: Algebra Logic **22**, 229–250 (1983).
- [53] I. B. Volichenko, *On the variety of Lie algebras $\mathcal{AN}_2$ over a field of characteristic zero* (Russian), Dokl. Akad. Nauk Byeloruss. SSR **26**, 1063–1066, (1981).
- [54] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme* (German), Math. Ann. **113**, 528–567, (1936).
- [55] A. Ya. Vais, *Special varieties of Lie algebras*, Algebra Logika **28**, No. 1, 29–40 (1989) (Russian); English translation: Algebra Logic **28**, 17–24, (1981).
- [56] S. Vasilovsky, *A finite basis for polynomial identities of the Jordan algebras of bilinear form*, Siberian Adv. Math. **1**, no. 4, 1–43, (1991).
- [57] S. Yu. Vasilovsky, *The basis of identities of a three-dimensional simple Lie algebra over an infinite field*, Algebra i Logika **28**, no. 5, 534–554, (1989) (Russian); English translation, Algebra and Logic **28**, no. 5, 355–368, (1989).
- [58] M. R. Vaughan-Lee, *Varieties of Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **21**, 297–308, (1970).
- [59] M. Zaicev, *Integrality of exponents of growth of identities of finite-dimensional Lie algebras* (Russian), Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat. **66**, No. 3, 23–48 (2002); English translation: Izv. Math. **66**, 463–478, (2002).
- [60] M. Zaicev, S. P. Mishchenko, *On the polynomial growth of the colength of varieties of Lie algebras* (Russian), Algebra Logika **38**, no. 2, 161–175, 253, (1999); English translation: Algebra Logic **38**, no. 2, 84–92, (1999).
- [61] M. Zaicev, S. P. Mishchenko, *An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent*, Algebra J. Math. Sci. New York **93**, 977–982, (1999).