UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

PAULO SÉRGIO LOPES DA SILVA

Aplicações do operador omega

Campinas

2021

Paulo Sérgio Lopes da Silva

Aplicações do operador omega

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Paulo Sérgio Lopes da Silva e orientada pelo Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38a	Silva, Paulo Sérgio Lopes da, 1986- Aplicações do operador omega / Paulo Sérgio Lopes da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2021. Orientador: José Plínio de Oliveira Santos. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Funções geradoras. 2. Partições (Matemática). 3. Partition analysis. I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Applications of omega operator
Palavras-chave em inglês:
Generating functions
Partitions (Mathematics)
Partition analysis
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Robson da Silva
Elen Viviani Pereira Spreafico
Data de defesa: 18-05-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-9920-1915
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6322238937515101

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de maio de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Prof(a). Dr(a). ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

“[...] *pois, se entre as ocupações dos homens, puramente homens, há alguma que seja solidamente boa e importante ouso crer que é a que escolhi. Todavia pode ocorrer que eu me engane, e talvez não passe de um pouco de cobre e de vidro o que tomo por ouro e diamantes. (Descates, Discurso do método)*

Resumo

Nesta dissertação estudaremos um elegante método de obter funções geradoras. Em especial para o número de partições de um inteiro não negativo cujas partes estão submetidas à inequações diofantinas. Este método foi originalmente desenvolvido por Percy Macmahon cuja trajetória acadêmica relatamos em nosso primeiro capítulo. No segundo capítulo apresentamos os conceitos matemáticos básicos para o desenvolvimento da teoria, partições e funções geradoras. Sobre partições apresentamos algumas propriedades que serão demonstradas por meio de provas bijetivas, pelo gráfico de Ferrers ou por funções geradoras. No terceiro capítulo apresentamos e desenvolvemos o operador omega que é o objeto central neste trabalho, finalizamos este capítulo apresentando algumas aplicações.

Palavras-chave: *Partition Analisys*, funções geradoras, partição.

Abstract

In this dissertation we'll study the smart method to obtain generating function. In special to the number of partition of integer non-negative where the parts are subject to Diophantine inequalities. This method was developed by Percy Macmahon whose academic trajectory we relate in the first chapter. The second chapter shows the background to the theory development, partition and generating function. About partitions, the feature we prove using bijective proof, Ferrers' graphic and generation function. The third chapter introduce the omega operation who is the core of this work, in the end o chapter some aplications will shown.

Keywords: Partition Analisys, generating function, partition.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MEC	Ministério da Educação
BNCC	Base Nacional Curricular Comum

Lista de símbolos

$p(n)$	Número de partições de n
$p(n\|*)$	Número de partições de n sujeita a condição $*$
Ω	Operador Ômega de MacMahon
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais

Sumário

Introdução

Neste trabalho nos dedicaremos a estudar algumas aplicações do operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ introduzido por Percy MacMahon. Este operador age sobre variáveis auxiliares λ obtendo funções geradoras para o número de partições de n quando as partes desta partição estão sujeitas à inequações diofantinas.

Para tanto, apresentaremos no capítulo 1 o recorte biográfico de MacMahon onde iniciamos contando parte de sua infância, mencionamos sua passagem pelo exército e encerramos em sua morte na Inglaterra. No capítulo 2 nos dedicamos a consolidar a matemática que faremos uso na demonstração de alguns resultados, aqui apresentamos o conceito de partições e funções geradoras. E no capítulo 3 formalizamos o operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$. São enunciado e demonstrados diversas proposições e encerramos o capítulo usando este operador para apresentar uma fórmula fechada para o número de triângulos não congruentes de perímetro n dentre outras aplicações.

1 Recorte Histórico

Dedicamos o primeiro capítulo ao recorte histórico da vida e obra do matemático Percy Macmahon.

Percy Alexander Macmahon nasceu em Sliema, Malta em 26 de setembro de 1854 e (GARCIA, 2006) nos diz que não há registros oficiais e nada é conhecido de sua primeira infância.

Aos 16 anos foi admitido na Real Academia Militar em Woolwich (distrito de Greenwich, na Região de Londres), apenas um ano depois de James Joseph Sylvester ser forçado a aposentar-se do cargo de professor por idade.

Até então sua educação tinha sido muito boa, falava francês e alemão, tinha bom conhecimento de latim e grego e uma base de matemática pura e aplicada.

Filho de pai militar, que faleceu poucos meses antes dele ter ingressado em Woolwich e segundo (OCONNOR; ROBERTSON, 2003) sempre foi destinado à carreira militar.

Em março de 1873, Macmahon foi enviado para Madras, na India como tenente.

A sua participação no exercito contempla passagens por Lucknow, Dinapore (atualmente Bangladesh), Multan (atualmente Paquistão) e Meerut entre outras cidades da Índia. Em dezembro de 1877 iniciou um tratamento médico que durou 18 meses, a natureza da enfermidade é desconhecida.

No inicio de 1878 Macmahon retornou para Inglaterra e deu-se início a uma sequência de eventos que o tornam mais matemático do que soldado.

Após passar pelo curso avançado para oficiais de artilharia em Woolwich, na qual tinha ingressado em 1880, foi promovido à patente de capitão e em 1881 integrou o posto de instrutor na Academia Militar Real, onde conheceu Alfred George Greenhill.

Macmahon e Greenhill passam a trabalhar em conjunto e publicam diversos artigos. Para exemplificar citamos o artigo (INSTITUTION, 1879) onde Macmahon teria resolvido uma equação cúbica simétrica descrevendo a trajetória balística de um projétil.

Em 1883, Macmahon se torna membro da Academia Britânica para o Avanço da Ciência (*British Association for the Advancement of Science*) e da Sociedade Matemática de Londres (*London Mathematical Society*) e em 1896 membro da Real Sociedade de Astronomia (*Royal Astronomical Society*). Esta última causa certa estranheza, uma vez que seu envolvimento com a astronomia é limitado ao testemunho de um eclipse total quando era um soldado na Índia. De qualquer modo, MacMahon é eleito presidente da

Real Sociedade de Astronomia por dois anos, de 1917 a 1919.

O primeiro título honorífico concedido a MacMahon foi em 1897. Nesta ocasião Trinity College lhe outorgou o título de Doutor Honris Causa. Em 1900 recebeu a Medalha Real pelo número e variedade de suas contribuições para a matemática. Recebeu em 1923 a medalha De Morgan que é a mais alta condecoração da Sociedade de Matemática de Londres.

Em 1904 a reunião da Academia Britânica para o Avanço da Ciência ocorreu em Cambridge; a universidade tinha o hábito de conferir a distintos membros títulos honoríficos. Nesta ocasião Joseph Larmor indicou MacMahon para receber este título e em 17 de agosto o conselho de Cambridge laureou Percy Alexander MacMahon com grau de doutor em ciências, *honoris causa*.

Percy Macmahon durante sua vida publicou em áreas como funções simétricas, aspectos combinatórios de probabilidade, teoria dos invariantes e teoria das permutações. Nesta última se tornou o mais ativo autor no período de 1886 a 1918, e este fato chama a atenção, pois quando Macmahon deu início aos estudos de partições, por volta de 1880, este tema já estava bem consolidado, Euler já tinha publicado o livro *Introductio in analysin infinitorum* (EULER, 1748) que discutia e estabelecia métodos de como obter $p(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Textos introdutórios (podemos citar (SANTOS, 2014), (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007), (ANDREWS, 1976)) definem uma partição de um inteiro n como foi dada por Euler, sendo uma sequência finita não crescente de inteiros positivos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ tal que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$, o que em outras palavras seria $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$ onde $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$. Mas, para além disso MacMahon definiu a partição de $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$ considerando $\lambda_1 * \lambda_2 * \cdots * \lambda_r$ onde cada símbolo $*$ pode ser substituído por qualquer um dos elementos dos conjunto $\{=, >, <, \leqslant, \geqslant\}$. E o desenvolvimento dessa teoria pode ser encontrada em (MACMAHON, 1896), (MACMAHON, 1899) e na compilação destes e outros artigos do autor (MACMAHON, 2001).

Combinatory Analysis é uma coleção, em dois volumes, de todas as publicações em funções simétricas e teoria das partições de Macmahon sendo publicados em 1915 e em 1916. Estes livros se tornaram os mais importantes e influentes trabalhos do autor, mesmo não se tratando de produto destinado ao ensino como de costume. No decorrer do texto existem raros exemplos e nenhum exercício. A importância deste livro é devida às generalizações e ideias que ali estão contidas.

Para exemplificar a grandeza desta obra, em 1963 o matemático Thomas H. Southard revisou um encadernado dos dois volumes que a partir de 1960 passou a ser publicado por AMS Chesea Publishing e disse que “este trabalho se provará como um adendo à literatura moderna”.

Mesmo sendo um clássico, a linguagem adotada na escrita não foi bem recebida, críticos diziam que "a álgebra das funções simétricas dificultava ou problematizava a leitura", palavras do próprio autor. Isto o forçou a escrever outro livro em 1920 intitulado Introduction to Combinatory Analysis que tinha o propósito, como o título já dizia, ser uma introdução para o livro que o precedia.

No prefácio de (MACMAHON, 1920) o autor diz que o objetivo do livro já estaria atingido se trouxesse clareza à leitura do livro (MACMAHON, 2001) e, de fato o propósito foi cumprido, pois em uma revisão deste livro na revista Nature pode-se ler que há uma grande vantagem nesta introdução por seu gradual desenvolvimento da teoria por meio de estágios simples o qual aguçaria o apetite do leitor para o volume (referindo-se ao livro Combinatory Analysis) que o espera (WRINCH, 1921).

Percy Alexander MacMahon faleceu no Natal de 1929 aos 75 anos em Springfield, Essex, deixando uma filha do primeiro casamento e uma segunda esposa viúva.

2 Conceitos Iniciais

Estudaremos neste capítulo, um importante conceito da teoria aditiva dos números: as partições de inteiros positivos. Por estarmos interessados principalmente em aspectos combinatórios, especial ênfase será dada as suas representações gráficas e no uso de funções geradoras.

2.1 Partições

Suponha a situação de distribuirmos três objetos iguais em três potes diferentes. Então teremos as seguintes distribuições: $3+0+0$, $0+3+0$, $0+0+3$, $2+1+0$, $2+0+1$, $1+2+0$, $1+0+2$, $0+2+1$, $0+1+2$, e $1+1+1$.

Mas se considerarmos os potes idênticos, podemos observar que as distribuições $3+0+0$, $0+3+0$ e $0+0+3$ na verdade se resumem a uma única, que é a de um pote conter os três objetos e os demais nenhuma.

O mesmo podemos dizer para as distribuições $2+1+0$, $2+0+1$, $1+2+0$, $1+0+2$, $0+2+1$ e $0+1+2$ que podem ser resumidas em um pote com dois objetos, um pote com um objeto e um pote vazio.

E por fim $1+1+1$ é a distribuição de um objeto em cada pote. Concluímos assim que existem 3 maneira de distribuirmos três objetos iguais em três potes idênticos.

Advertimos o leitor que o exposto acima é apenas uma breve motivação para a definição que segue.

Definição 1. *Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n. Denotaremos por $p(n)$ o número de partições de n, isto é, o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes da partição, onde a ordem destas partes não importa.*

Por esta definição podemos representar uma partição λ de n por $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ convenciona-se que a única partição de 0 é o conjunto vazio $\varnothing$, e então $p(0) = 1$. A fim de dirimir ambiguidades esclarecemos que zero não é considerada como parte de uma partição.

Vemos que a solução do problema motivacional se resume em encontrar $p(3)$ que é dado pela Tabela 1. Se tivermos que distribuir 5 objetos idênticos em 5 potes iguais, esta poderá ser feita de 7 formas diferentes, uma vez que $p(5) = 7$.

Tabela 1 – Valores de $p(n)$ para alguns inteiros n.

$p(2) = 2$	$p(3) = 3$	$p(4) = 5$	$p(5) = 7$
2	3	4	5
$1+1$	$2+1$	$3+1$	$4+1$
	$1+1+1$	$2+2$	$3+2$
		$2+1+1$	$3+1+1$
		$1+1+1+1$	$2+2+1$
			$2+1+1+1$
			$1+1+1+1+1$

Fonte: Produzida pelos autores.

Mas se dispormos de uma quantidade menor de potes? Suponha que tenhamos apenas 3 potes, de quantas formas podemos distribuir os 5 objetos sem que não haja potes vazios? Se olharmos para as partições apresentadas na Tabela 1 veremos que existem apenas 2 partições constituída por 3 partes. Concluímos que esta distribuição pode ser feita de 2 formas diferentes.

Suponha que desejamos distribuir 5 objetos de modo que um pote tenha 3 unidades e os demais potes tenham menos que 3 unidades, de quantas formas poderemos fazê-lo? Basta contarmos, nas partições de 5, aquelas que tenham 3 como maior parte. Vemos que são 2 partições, e isto nos indica que podemos fazer a distribuição desejada de duas formas.

Podemos ver que os dois problemas acima tiveram a mesma resposta. Na realidade isto não foi uma coincidência, pois o número de partições de n em $k \leqslant n$ partes é igual ao número de partições de n onde k é a maior parte. Esta afirmação trata-se de uma proposição cuja demonstração é tão simples quanto bela.

Definição 2. *Sejam n um número inteiro não negativo e $k \leqslant n$ inteiro positivo, denotaremos por $q_k(n)$ o número de partições de n em exatamente k partes e $p_k(n)$ o número de partições de n onde k é a maior parte.*

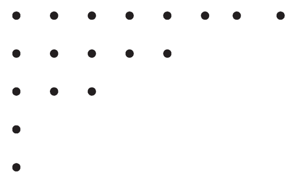
Se observarmos a Tabela 1 obtemos $p_1(5) = 1 = q_1(5)$, $p_2(5) = 2 = q_2(5)$, $p_3(5) = 2 = q_3(5)$, $p_4(5) = 1 = q_4(5)$ e $p_5(5) = 1 = q_5(5)$

O matemático britânico Norman Macleod Ferrers trouxe à luz uma representação gráfica para uma partição que apresentaremos abaixo.

Uma partição $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$ de um inteiro positivo n pode ser representada graficamente por meio de um arranjo de n pontos no plano constituído de s linhas em ordem não crescente. Em cada linha deste arranjo colocamos um número de pontos igual a cada uma de suas partes.

A título de exemplo na Figura 1 temos o gráfico de Ferrers da partição $8 + 5 + 3 + 1 + 1$.

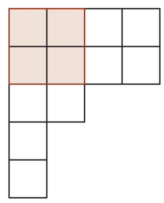
Figura 1 – Uma partição de 18



Fonte: Produzida pelos autores.

Muitas vezes, dependendo do uso que se está fazendo, é conveniente representar graficamente uma partição utilizando quadrados no lugar dos pontos acima. A representação assim obtida é chamada de *diagrama de Young* (em referência ao matemático inglês Alfred Young, que as estudou por volta de 1900) a qual desempenha papel de grande importância em outras áreas da matemática.

Figura 2 – Diagrama de Young para 4+4+2+1+1



Fonte: Produzida pelos autores.

Na Figura 2 destacamos o maior quadrado que podemos colocar "dentro" deste gráfico de modo que seu canto superior esquerdo coincida com o canto superior esquerdo do diagrama de Young. Este maior quadrado possível é chamado de quadrado de Durfee da partição. Dizemos assim que a partição $4+4+2+1+1$ tem quadrado de Durfee de lado 2.

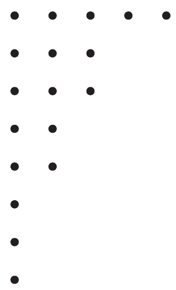
Se no gráfico de Ferrers de uma partição λ de n trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos a representação gráfica de uma outra partição λ' de n, chamada de partição conjugada da partição λ.

Se fizermos uma rotação no gráfico da Figura 1 de modo que as linhas se tornem colunas obtemos a partição conjugada representada na Figura 3.

Podemos ver que, se o gráfico de Ferrers denota uma partição que tem como maior parte j e exatamente i partes, a conjugada desta partição é outra partição que contém i como a maior parte e j partes.

Proposição 1. *Seja n um inteiro não negativo e $k \leqslant n$ um inteiro positivo, então $p_k(n) = q_k(n)$.*

Figura 3 – A partição conjugada



Fonte: Produzida pelos autores.

Demonstração. Seja A o conjunto das partições de n que possuem exatamente k partes e B o conjunto das partições de n onde k é a maior parte. Note que $f : A \to B$ definida por $f(\lambda) = \mu$, onde $\mu \in B$ é a partição obtida a partir de $\lambda \in A$ pela operação conjugação é uma bijeção cuja inversa satisfaz, devido também a operação conjugação, $f^{-1}(\mu) = \lambda$. Podemos então afirmar que $\#A = \#B$ ou seja $p_k(n) = q_k(n)$. □

Afirmações da forma " O número de partições de n do tipo A é igual ao número de partições de n do tipo B" são chamadas de identidades em partições. Faremos a partir de agora a demonstração de várias identidades em partições.

Quando demonstramos um identidade em partições obtendo uma bijeção entre o conjunto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B, chamamos essa demonstração de prova bijetiva.

Sempre que pudermos denotaremos por $p(n|*)$ o número de partições de n satisfazendo a condição $*$.

Proposição 2. *Seja n um inteiro positivo. O número de partições de n com partes menores do que ou iguais a k é igual ao número de partições de n com no máximo k partes.*

Demonstração. Consideraremos o conjunto A formado pelas partições de n com partes menores do que ou iguais a k, B o conjunto das partições de n com no máximo k partes e aplicamos a mesma bijeção da Proposição 1. □

Proposição 3. *Seja n um inteiro positivo. Então, o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes é igual ao número de partições de n em partes maiores do que 1 e inteiros consecutivos não aparecem como partes.*

Demonstração. Consideraremos o conjunto A formado pelas partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes, B o conjunto das partições de n em partes maiores do que 1 e inteiros consecutivos não aparecem como partes e aplicamos a mesma bijeção da Proposição 1. □

Proposição 4. *Para qualquer inteiro positivo n,*

$$p(n|partes\ são\ ímpares) = p(n|partes\ são\ distintas)$$

Demonstração. Faremos uma demonstração bijetiva, para tanto apresentaremos as operações envolvidas.

Operação 1 - De partes ímpares para partes distintas: dada uma partição λ de n em partes ímpares, se esta não possuir partes repetidas, não há nada a fazer; caso contrário, isto é, se em λ há partes repetidas, somamos duas a duas as partes iguais e repetimos este procedimento até obter apenas partes distintas. Como o número de partes decresce a cada operação, repetiremos o procedimento no máximo até restar uma parte.

Operação 2 - De partes distintas para partes ímpares: dada uma partição de n em partes distintas, se esta possuir apenas partes ímpares não há nada a fazer; caso contrário, cada parte par é dividida por 2, originando duas novas partes iguais. Repetimos esta operação até restarem apenas partes ímpares, o que é sempre possível porque, a cada operação de dividir uma parte par em duas, o tamanho das partes pares está diminuindo.

Denotando agora por A e B os conjuntos formados pelas partições de n em partes ímpares e em partes distintas, respectivamente. Podemos ver que $f : A \to B$ definida por $f(\lambda) = \mu$, onde μ é a partição obtida a partir de λ pela operação 1 é uma bijeção, cuja inversa é $f^{-1}(\mu) = \lambda$ devido a operação 2.

□

Proposição 5. *Para qualquer inteiro positivo n,*

$$p(n|partes \in \{1\}) = p(n|partes\ são\ potências\ distintas\ de\ 2)$$

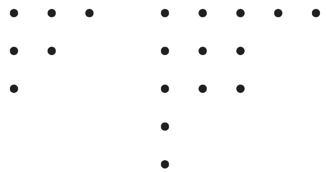
Demonstração. Operação 1 - Das partições formadas por 1's para as partições formadas por potências distintas de 2: Somemos as partes iguais aos pares transformando pares de uns em 2's, depois transformando pares de 2's em 4's em seguida transformando pares de 4's em 8's e assim por diante. Como sequência, o conjunto de partições obtidas tem partes distintas e estas partes estão no conjunto formado pelas potências de 2 $\{1, 2, 4, \cdots\}$.

Operação 2 - Das partições formadas por potências de 2 para partições formadas por partes em $\{1\}$: cada potência de 2, digamos 2^k , é dividida em um par de potências de 2, $2^{k-1} + 2^{k-1}$. Como a única potência de 2 ímpar é $2^0 = 1$, o processo será executado até restarem apenas partes iguais a 1.

Estas duas operações viabilizam a prova bijetiva da proposição. □

Dizemos que uma partição é autoconjugada se ela for igual a sua partição conjugada. Por exemplo, $3 + 2 + 1$ e $5 + 3 + 3 + 1 + 1$ são autoconjugadas, o que pode ser facilmente verificado através de seus respectivos gráficos de Ferrers da Figura 4.

Figura 4 – A partição conjugada

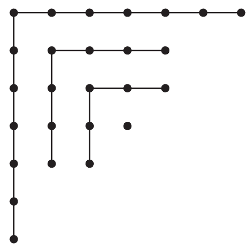


Fonte: Produzida pelos autores.

Proposição 6. *Seja n um inteiro positivo. Então, o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.*

Demonstração. Para ilustrar esta transformação, vamos considerar na Figura 5 o gráfico de Ferrers da partição autoconjugada $7 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1$ de 26:

Figura 5 – Partição autoconjugada de 26



Fonte: Produzida pelos autores.

É claro que o número de pontos em cada uma das "linhas" em formato ⌜ é ímpar e estes números são necessariamente distintos. Neste caso, lendo o número de pontos sobre cada "linha", temos a partição $13 + 7 + 5 + 1$ de 26. Reciprocamente, dados números ímpares distintos, podemos colocá-los numa disposição semelhante a que temos acima, obtendo, desta forma, o gráfico de Ferrers de uma partição autoconjugada.

□

Antes de enunciar a Proposição 7 e fazermos a prova bijetiva, daremos um exemplo de como a operação será. Considere os seguintes números $a = 10$, $b = 5$ e $c = 4$.

Construiremos dois conjuntos de partições: O conjunto A é formado pelas partições de $a - c = 10 - 4 = 6$ em exatamente $b - 1 = 5 - 1 = 4$ partes as quais são menores do que ou iguais a $c = 4$. E o conjunto B é formado pelas partições de $a - b = 10 - 5 = 5$ em exatamente $c - 1 = 4 - 1 = 3$ partes que não são maiores do que $b = 5$. Consultando a Tabela 2

Tabela 2 – Partições de 5 e de 6.

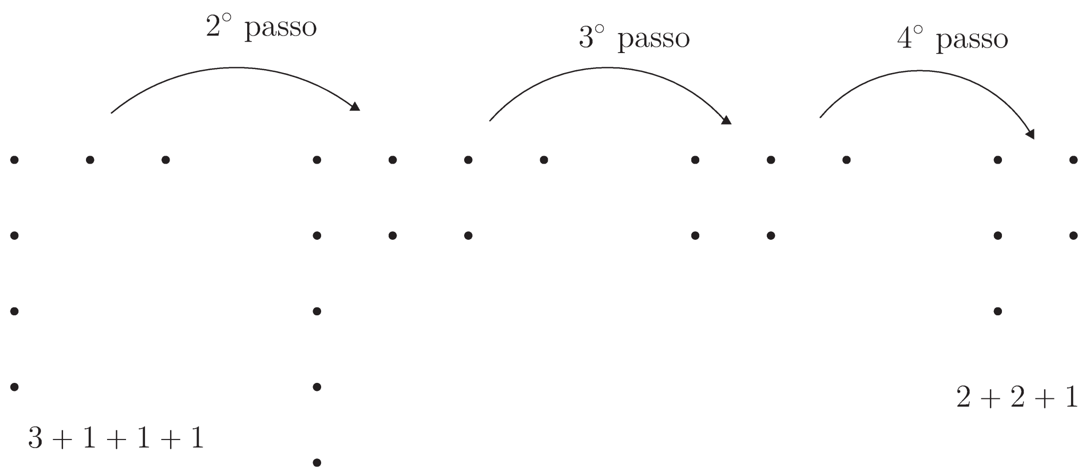
5	6
4+1	5+1
3+2	4+2
3+1+1	4+1+1
2+2+1	3+3
2+1+1+1	3+2+1
1+1+1+1+1	3+1+1+1
	2+2+2
	2+2+1+1
	2+1+1+1+1
	1+1+1+1+1+1

Fonte: Produzida pelos autores.

Podemos ver que as partições do conjunto A são $3 + 1 + 1 + 1$ e $2 + 2 + 1 + 1$ e o do B são $3 + 1 + 1$ e $2 + 2 + 1$. Afirmamos que independente dos valores de a, b e c esses conjuntos sempre têm o mesmo número de elementos.

Para provar façamos: 1º constrói-se o gráfico de Ferrers de uma partição do primeiro grupo; 2º adiciona-se sobre a partição uma linha com exatamente 4 pontos; 3º remove-se a primeira coluna de pontos e 4º obtem-se a conjugada da partição dada.

Figura 6 – Relacionando a 1° partição.

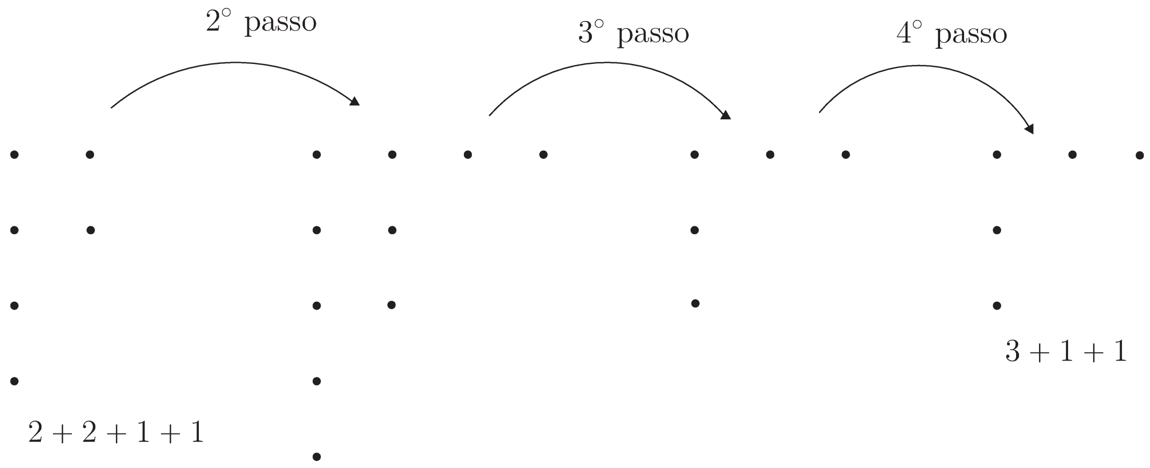


Fonte: Produzida pelos autores.

Podemos ver que na partição original tem $10 - 4 = 6$ pontos, na passagem pelo segundo passo teremos $10 - 4 + 4$ pontos, na passagem pelo terceiro passo temos $10 - 5$ pontos e como no quarto passo tomamos apenas o conjugado continuamos com uma partição de 5.

Agora fazendo o mesmo processo para a partição $2 + 2 + 1 + 1$ obtemos a Figura 7.

Figura 7 – Relacionando a 2° partição.



Fonte: Produzida pelos autores.

Usaremos este procedimento para provar a seguinte proposição:

Proposição 7. *Cosiderando interios positivos a, b e c de modo que $a > b \geqslant c$. O número de partições de $a - c$ em exatamente $b - 1$ partes menores do que ou iguais a c é igual ao número de partições de $a - b$ em, $c - 1$ partes menores do que ou iguais a b.*

Demonstração. Construímos o gráfico de Ferrers de uma partição que pertença ao primeiro grupo de partições descrito na proposição. Em seguida acrescentamos uma linha acima do gráfico com exatamente c pontos, temos daí uma partição de a em exatamente b partes. Após feito isso removemos a primeira coluna do gráfico, nos restando uma partição de $a - b$ cuja maior parte é igual a $c - 1$ e em no máximo b partes. Para finalizarmos tomamos a partição conjugada. Assim obtendo uma partição de $a - b$ em $c - 1$ partes menores do que ou iguais a b. □

Nossos esforços agora serão concentrados em obter uma fórmula para $p(n)$ qualquer que seja n inteiro não negativo. Para darmos o primeiro passo nessa jornada apresentaremos os números pentagonais.

Construiremos a sequência do número de pontos sobre as arestas dos pentágonos nos inspirando na visão geométrica apresentada na Figura 8 que justifica a nomenclatura.

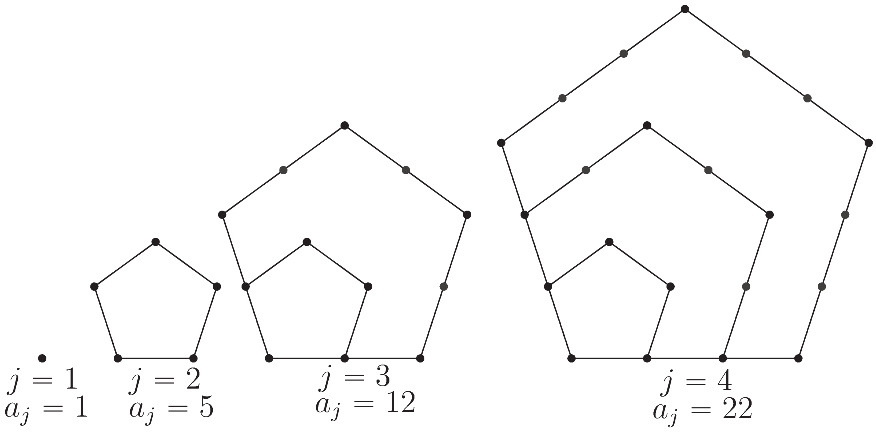
Podemos ver que a sequência desejada é

$$(1,\ 5,\ 12,\ 22,\ \cdots),$$

e afirmamos que o n-ésimo termo é dado pela recorrência

$$a_{n+1} = a_n + 3n + 1. \tag{2.1}$$

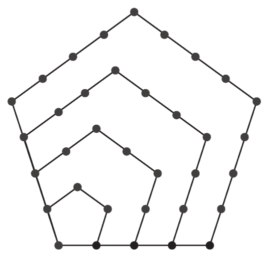
Figura 8 – Números pentagonais.



Fonte: Produzida pelos autores.

Apenas para comparação podemos notar que $a_5 = a_4 + 16 = 22 + 13 = 35$ o que corresponde com a representação geométrica na Figura 9.

Figura 9 – Quinto número pentagonal.



Fonte: Produzida pelos autores.

Para resolvermos a recorrência 2.1 vamos usar a técnica da soma telescópica que pode ser encontrado em (LIMA et al., 1997),

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 4 \\ a_3 &= a_2 + 7 \\ a_4 &= a_3 + 10 \\ a_5 &= a_4 + 13 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_n &= a_{n-1} + (3n - 2) \end{aligned}$$

Somando todas as igualdades e cancelando os termos comuns em ambos os lados da igualdade temos

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (3i + 1)$$

Onde o somatório da direita é a soma de $n - 1$ termos da progressão aritmética $a_n = 3n + 1$. Efetuando devidamente os cálculos obtemos a solução

$$a_n = \frac{n}{2} (3n - 1)$$

Após a demonstração do termo geral para os números pentagonais apresentaremos o teorema que o relaciona com partições, nosso ponto de partida é a definição abaixo.

Definição 3. *Seja n um número inteiro não negativo. Denotaremos por $q_p(n)$ o número de partições de n em um número par de partes distintas e por $q_i(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas.*

Como exemplo vejamos as partições de 12 cujas partes são distintas,

$q_p(12) = 7$	$q_i(12) = 8$
$11 + 1$	12
$10 + 2$	$9 + 2 + 1$
$9 + 3$	$8 + 3 + 1$
$8 + 4$	$7 + 4 + 1$
$7 + 5$	$7 + 3 + 2$
$6 + 3 + 2 + 1$	$6 + 5 + 1$
$5 + 4 + 2 + 1$	$6 + 4 + 2$
	$5 + 4 + 3$

partições de 10 em partes distintas

$q_p(10) = 5$	$q_i(10) = 5$
$9 + 1$	10
$8 + 2$	$7 + 2 + 1$
$7 + 3$	$6 + 3 + 1$
$6 + 4$	$5 + 4 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$5 + 3 + 2$

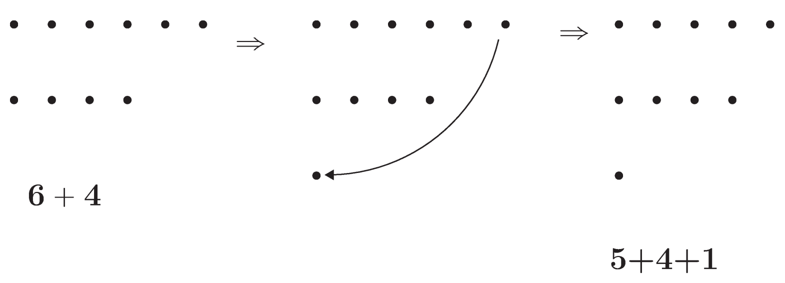
e as partições de 7 em partes distintas.

$q_p(7) = 3$	$q_i(7) = 2$
$6 + 1$	7
$5 + 2$	$4 + 2 + 1$
$4 + 3$	

Com os três exemplos acima podemos ver que $q_p(10) = q_i(10) = 5$ ou seja $q_p(10) - q_i(10) = 0$ mas quando $n = 12$ e $n = 7$ a diferença tem módulo 1. Motivado por este exemplo faremos uma relação 1-1 para verificarmos a relação que apresentaremos na próxima proposição.

Vejamos a transformação realizada no gráfico de $6 + 4$ na Figura 10.

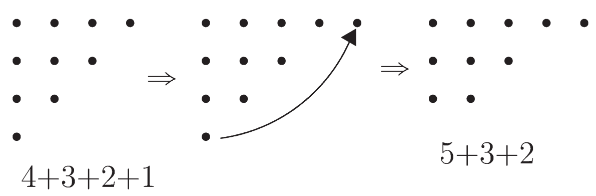
Figura 10 – Transformação na partição $6 + 4$.



Fonte: Produzida pelos autores.

Este procedimento transformou a partição $6 + 4$ com um número par de partes distintas em $5+4+1$ que é uma partição formada por um número ímpar de partes distintas. Mas nem sempre é possível fazer esta transformação. Vejamos, por exemplo, $4 + 3 + 2 + 1$. Neste caso faremos a transformação contrária ilustrada na Figura 11

Figura 11 – Transformação na partição $4 + 3 + 2 + 1$.



Fonte: Produzida pelos autores.

Ao observarmos as figuras acima temos a sensação de que já estabelecemos a desejada relação. Quando aplicamos esta transformação nas partições quando $n = 10$ chegamos à correspondência apresentada na Tabela 3.

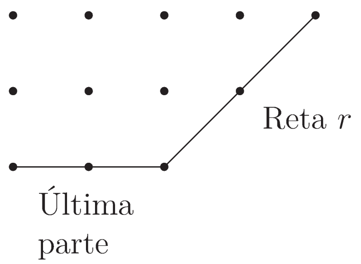
Tabela 3 – Correspondência entre as partições com número de partes pares e ímpares para $n = 10$

$9+1$	$\longrightarrow$	10
$8+2$	$\longrightarrow$	$7+2+1$
$7+3$	$\longrightarrow$	$6+3+1$
$6+4$	$\longrightarrow$	$5+4+1$
$4+3+2+1$	$\longrightarrow$	$5+3+2$

Fonte: Produzida pelos autores.

Note que nem todas as partições estão sujeitas à esta transformação. Vejamos na Figura 12 que, quando a reta que passa pelos últimos pontos das primeiras partições também passa pelo último ponto da última parte, não é possível aplicar a transformação.

Figura 12 – Transformação na partição $5+4+3$.



Fonte: Produzida pelos autores.

Este fato ocorre quando a última parte p tem o mesmo número de pontos da reta r, como na Figura 12 ou quando a última partição tem um ponto a mais que r como em Figura 13. Note que nestes casos r denota o número de partes da partição, então podemos obter os valores de n onde estas partições ocorrem. Por definição, n é a soma das partes logo

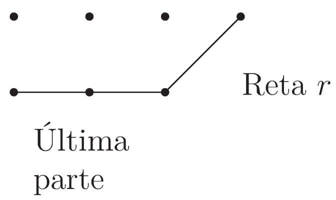
$$n = p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (p + (r-1)) = \frac{(2p+r-1)\cdot r}{2} \tag{2.2}$$

Caso r seja par teremos $q_p(n) - q_i(n) = 1$ pois as partições em partes pares superarão o número de partes ímpares em uma unidade, mas se r for ímpar então $q_p(n) - q_i(n) = -1$, uma vez que o número de partes ímpares superará o número de partes pares um uma unidade.

Teremos o valor n onde esses casos ocorrem se aplicarmos $p = r$ e $p = r + 1$. Assim

$$n = \frac{r(3r \pm 1)}{2}$$

Figura 13 – Transformação na partição $4 + 3$.



Fonte: Produzida pelos autores.

Acabamos de demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja n um número natural não nulo. Então*

$$q_p(n) - q_i(n) = \begin{cases} (-1)^r \ \textit{se}\ n = \dfrac{r(3r \pm 1)}{2} \\ 0 \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Esta proposição é conhecida como o teorema dos números pentagonais de Euler.

Exemplo 1. *Calculemos o valor de $q_p(n) - q_i(n)$ para $0 \leqslant r \leqslant 5$.*

$$n = \frac{0(3 \cdot 0 \pm 1)}{2} = 0 \Rightarrow q_p(0) - q_i(0) = (-1)^0 = 1$$

$$n = \frac{1(3 \cdot 1 \pm 1)}{2} = 1 \text{ e } 2 \Rightarrow q_p(1) - q_i(1) = q_p(2) - q_i(2) = (-1)^1 = -1$$

$$n = \frac{2(3 \cdot 2 \pm 1)}{2} = 5 \text{ e } 7 \Rightarrow q_p(5) - q_i(5) = q_p(7) - q_i(7) = (-1)^2 = 1$$

$$n = \frac{3(3 \cdot 3 \pm 1)}{2} = 12 \text{ e } 15 \Rightarrow q_p(12) - q_i(12) = q_p(15) - q_i(15) = (-1)^3 = -1$$

$$n = \frac{4(3 \cdot 4 \pm 1)}{2} = 22 \text{ e } 26 \Rightarrow q_p(22) - q_i(22) = q_p(26) - q_i(26) = (-1)^4 = 1$$

$$n = \frac{5(3 \cdot 5 \pm 1)}{2} = 35 \text{ e } 40 \Rightarrow q_p(35) - q_i(35) = q_p(40) - q_i(40) = (-1)^5 = -1$$

E evidentemente $q_p(n) - q_i(n) = 0$ se $n \in \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39\}$

Na próxima seção apresentaremos a fórmula de recorrência usada pelo general Macmahon para calcular o valor de $p(n)$ com $0 \leqslant n \leqslant 200$. Este feito memorável foi retratado em uma sena do filme The man how knew infinity em uma disputa com Srinivasa Ramanujan. Apenas à título de curiosidade a equação criada por Ramanujan foi a Equação 2.3 para obter $p(200) = 3,972,999,029,387.975$

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24}\right)}} \right]_{x=n} \tag{2.3}$$

onde

$$A_k = \sum_{\substack{0 \leqslant h \leqslant k-1 \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{\frac{-2\pi i n h}{k}}$$

e $\omega_{h,k}$ é uma determinada raiz 24° da unidade.

Trabalhar com esta equação não esta dentro dos objetivos desta dissertação, mas faço minha as palavra do autor donde a retiramos (WILF, 2000) "Feel free to verify this on your own".

A próxima proposição nos dará uma ideia do quão rápido é o crescimento de $p(n)$.

Iniciamos verificando que $p(n)$ é uma função crescente, ou seja, $p(n) > p(n-1)$, $\forall n \geqslant 2$. Note que, de cada partição de $n-1$, obtemos uma partição de n ao adicionarmos uma nova linha ao gráfico de Ferrers consistindo de um único ponto. Inversamente, cada partição de n possuindo em seu diagrama uma linha formada por um único ponto resulta numa partição de $n-1$ se removermos esta última linha. Acabamos de provar a seguinte relação.

$$p(n) = p(n-1) + p(n|\text{não há parte igual a } 1) \tag{2.4}$$

Para $n \geqslant 2$ a partição n é uma partição de n que não possui partes iguais a 1, ou seja $p(n|\text{não há parte igual a } 1) > 0$ mostrando que $p(n) > p(n-1)$.

Note que $p(n-2) = p(n|\text{existe ao menos uma parte } 2)$, pois ao removermos uma parte 2 das partições enumeradas por $p(n|\text{existe ao menos uma parte } 2)$ obtemos partições de $n-2$ e, inversamente, acrescentando uma parte 2 em qualquer partição de $n-2$, obtemos partições de n com ao menos uma parte 2.

Note também que podemos transformar cada partição com partes maiores do que 1 em uma única partição com pelo menos uma parte 2, bastando dividir a menor parte λ_s (que é maior do que 1) em uma parte 2 e $s-2$ partes iguais a 1, provando que

$$\begin{aligned} p(n-2) &= p(n|\text{não há parte igual a 1}) \\ &+ p(n-2|\text{menor parte} > 1 \text{ é } < 2 + \text{número de partes 1}). \end{aligned}$$

Vemos assim que

$$p(n-2) \geqslant p(n|\text{não há parte igual a 1}) \tag{2.5}$$

uma vez que $p(n-2|\text{menor parte} > 1 \text{ é } < 2 + \text{número de partes 1}) \geqslant 0$.

Combinando a Equação 2.4 com a Equação 2.5 chegamos à

$$p(n) \leqslant p(n-1) + p(n-2) \tag{2.6}$$

Para demonstrar a próxima proposição usaremos a segunda forma do princípio da indução matemática.

Proposição 9. *Para todo inteiro $n \geqslant 0$, temos $p(n) \leqslant F_{n+1}$ onde F_{n+1} é o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração. É fácil ver que $p(0) = F_1 = p(1) = F_2$. Supondo que $p(n) \leqslant F_{n+1}$ é valido para $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n$ então

$$\begin{aligned} p(n+1) &\leqslant p(n) + p(n-1) \quad (\text{ devido a Equação 2.6}) \\ &\leqslant F_{n+1} + F_n \quad (\text{ devido a hipótese de indução}) \\ &= F_{n+2} \end{aligned}$$

□

2.2 Funções Geradoras

Em nosso ensino básico aprendemos rudimentos da teoria de polinômios. Aprendemos, por exemplo que

$$p_1 = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

$$p_2 = 1 + x^2 + x^4 + x^6$$

$$p_3 = 1 + x^3 + x^6 + x^9$$

são polinômios cujo produto é feito distribuindo cada parcela de um polinômio sobre as parcelas do outro, da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 &= \left(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + x^6\right) \cdot \left(1 + x^3 + x^6 + x^9\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 + x^1 \cdot 1 \cdot 1 + x^2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x^3 + x^1 \cdot x^2 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdots \\
&= 1 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 \cdots
\end{aligned}$$

Se observarmos a Tabela 1 vemos que o polinômio resultante acima é da forma

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 \cdots \tag{2.7}$$

Suponha agora que queremos multiplicar os mesmo polinômios p_1, p_2, p_3 anteriores com o polinômio $p_4 = 1 + x^4 + x^8 + x^{12}$, teríamos

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \left(1 + x^4 + x^8 + x^{12}\right) \\
&= 1 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 \cdots
\end{aligned}$$

E mais uma vez comparando com a Tabela 1 concluímos que

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + p(4)x^4 + 6x^5 + 9x^6 \cdots \tag{2.8}$$

Desejamos agora multiplicar o polinômio $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ pelo polinômio $p_5 = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}$. Obtemos o resultado

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \left(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}\right) \\
&= 1 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 10x^6 \cdots
\end{aligned}$$

E repetindo os passos anteriores chegamos em

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + p(4)x^4 + p(5)x^5 + 10x^6 \cdots \tag{2.9}$$

Evidentemente os produtos obtidos em 2.7, 2.8 e 2.9 não são coincidência. Este processo de obter um polinômio onde o monômio de grau n tem como coeficientes $p(n)$ é devido a Euler. Ele associou a propriedade da potência $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ao modo de escrever os expoentes dos polinômios:

$$p_1 = 1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1}$$

$$p_2 = 1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2}$$

$$p_3 = 1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3}$$

$$p_4 = 1 + x^4 + x^{4+4} + x^{4+4+4} + x^{4+4+4+4}$$

Então, para constituirmos o coeficiente da parcela x^4 em $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5$ é preciso somar os seguintes monômios

x^4, $x^3 \cdot x^1 = x^{3+1}$, x^{2+2}, $x^2 \cdot x^{1+1} = x^{2+1+1}$ e $x^{1+1+1+1}$

Como cada parcela tem como expoente uma partição de 4 e coeficiente 1 segue que ao somarmos todas, o coeficiente será o número de partições, ou seja,

$$x^4 + x^{3+1} + x^{2+2} + x^{2+1+1} + x^{1+1+1+1} = 5x^4 = p(4)x^4$$

Afim de generalizar este processo daremos uma série de definições e a partir daqui a teoria se tornará mais densa.

Definição 4. *Seja α uma sequência infinita de números reais.*

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

Por P_r denotaremos a classe de todas as sequências α e estas serão chamadas de série formal.

Se tomarmos $\beta \in P_r$ onde $\beta = [b_0, b_1, b_3, \ldots]$ definimos a adição de séries formais como sendo a série formal

$$\alpha + \beta = [a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots]$$

a multiplicação por

$$\alpha\beta = [a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, \sum_{j=0}^{n} a_jb_{n-j}, \ldots]$$

e dado um número real k, o produto por escalar é definido por

$$k \cdot \alpha = [k \cdot a_0, k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3, \ldots]$$

Exemplo 2. *Considerando $\alpha = [1, 1, 1, \ldots]$, $\beta = [1, 2, 3, \ldots]$ e $k = 3$. Então*

$\alpha + \beta = [1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, \ldots]$, $\alpha\beta = [1 \cdot 1, 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1, 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1, \ldots]$ e $k\alpha = [3 \cdot 1, 3 \cdot 1, 3 \cdot 1, 3 \cdot 1, \ldots] = [3, 3, 3, 3, \ldots]$

Exemplo 3. *Considerando $\alpha = [1, -1, 0, 0, 0, \ldots]$ e $\beta = [1, 1, 1, 1, \ldots]$ então*

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= [1, -1, 0, 0, 0, \ldots] \cdot [1, 1, 1, 1, \ldots] \\
&= [1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1, \ldots] \\
&= [1, 0, 0, 0, 0 \ldots]
\end{aligned}$$

Definição 5. *Dada uma série formal $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$, a função geradora para esta série formal é*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

Observe que as operações definidas para as séries formais são preservadas quando escritas na forma de função geradora. Se $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ então

$$\alpha + \beta = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j,$$

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} \right) x^j \text{ e}$$

$$k \cdot \alpha = k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (k \cdot a_j)\, x^j.$$

Refaremos o Exemplo 2 usando a notação de funções geradoras.

Exemplo 4. *Considerando $\alpha = 1 + 1x + 1x^2 + \ldots$, $\beta = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ e $k = 3$. Então*

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \left(1 + 1x + 1x^2 + \ldots\right) + \left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots\right) \\ &= (1+1) + (1+2)x + (1+3)x^2 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \left(1 + 1x + 1x^2 + \cdots\right) \cdot \left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots\right) \\ &= (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x + (1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1)x^2 \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \cdot \alpha &= 3 \cdot \left(1 + 1x + 1x^2 + \ldots\right) \\ &= 3 + 3x + 3x^2 \ldots\ . \end{aligned}$$

Já o Exemplo 3 na notação de função geradora nos diz $(1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) = 1$ ou seja

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\ , \tag{2.10}$$

Proposição 10. *Seja $f(x)$ a função geradora para a série formal $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, \cdots]$ então a função geradora para a série formal $\beta = [0a_0, 1a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ra_r, \ldots]$ é $xf'(x)$ onde $f'(x)$ é a derivada da função geradora $f(x)$ em relação a x.*

Demonstração. Por hipótese

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

note que a derivada é

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$$

se multiplicarmos por x,

$$\begin{aligned} xf'(x) &= a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + \ldots \\ &= 0a_0 + 1a_1x^1 + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + \ldots \ . \end{aligned}$$

Mostrando que $xf'(x)$ é a função geradora para β.

□

Quando estudamos séries formais, questões de convergência e o valor de x não são levadas em consideração, pois temos interesse combinatório apenas. A construção da teoria de séries formais aqui vista superficialmente é apresentada no artigo (NIVEN, 1969).

A sequência de exemplos que segue foi inspirada em (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007).

Exemplo 5. *Determinar a função geradora para* $\beta = [0, 1, 2, 3, 4, \ldots]$.

A Equação 2.10 nos diz que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

para aplicarmos a Proposição 10 precisamos derivar em ambos os lados chegando à

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1-x) - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \ldots \ ,$$

logo

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^3 + \ldots$$

Portanto a função geradora para $\beta = [0, 1, 2, 3, 4, \cdots]$ é $g(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Exemplo 6. *Encontrar a função geradora para* $\alpha = [0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots]$

Observemos com cuidado a função geradora

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

qual o coeficiente de cada monômio se a derivássemos?

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (1-x)^2 - x \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots$$

Simplificando

$$g'(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots$$

para finalizar multiplicamos por x

$$xg'(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \dots$$

Exemplo 7. *Encontremos a função geradora da* $\alpha = [1, 0, 1, 0, 1, \dots]$

Tomemos novamente a Equação 2.10 e troquemos x por x^2

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \cdots$$

donde segue

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + 0x + x^2 + 0x^3 + x^4 + 0x^5 + x^6 + 0x^7 + x^8 + \dots$$

Veja que este exemplo nos fornece uma informação muito importante, se generalizarmos para um expoente $m \in \mathbb{N}$ concluímos que

$$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^{1m} + x^{2m} + x^{3m} + x^{4m} + \dots \tag{2.11}$$

Estamos interessados em usar funções geradoras para obter uma expressão para $p(n)$, mas antes vejamos o apêndice A e façamos uma tabela com o número de partições de n constituídas apenas de partes pares distintas.

Tabela 4 – Partições de n em partes pares distintas.

n	Nº de partições
1	0
2	1
3	0
4	1
5	0
6	2
7	0
8	2
9	0
10	3

Fonte: Produzida pelos autores.

E façamos o produto

$$\prod_{k=1}^{5}(1+x^{2k}) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1+x^{10})$$
$$= 1+x^2+x^4+2x^6+2x^8+3x^{10}+3x^{12}+\cdots$$

Observe que este produto parece ser a função geradora para as partições de n em partes pares distintas. E de fato é. Investigando a parcela $3x^{10}$ vemos que as possibilidades de obtê-la são as seguintes: x^{10}, $x^8 \cdot x^2 = x^{8+2}$ e $x^6 \cdot x^4 = x^{6+4}$ onde os expoentes são as partições de 10 em partes pares distintas. Mas quando vamos investigar a parcela $3x^{12}$ vemos que as possibilidades neste produto são: $x^{10} \cdot x^2 = x^{10+2}$, $x^8 \cdot x^4 = x^{8+4}$, $x^6 \cdot x^4 \cdot x^2 = x^{6+4+2}$ porém esta faltando a partição 12 que é uma partição de 12 em partes pares distintas. Essa patologia ocorreu devido a ausência do fator $(1+x^{12})$ no produto. Afim de corrigir este problema estendemos o produto para todos os números naturais.

Concluímos pelo exposto acima que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}) \tag{2.12}$$

é a função geradora para partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes pares distintas.

Raciocinando analogamente obtemos que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k+1}) \tag{2.13}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes ímpares distintas,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^2}) \tag{2.14}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes que são quadrados perfeitos distintss e

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^3}) \tag{2.15}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes que são cubos distintos.

Vejamos agora a Tabela 5 das partições de n em partes pares não necessariamente distintas e em seguida calculemos o produto $\displaystyle\prod_{k=1}^{5}\frac{1}{1-x^{2k}}$

Tabela 5 – Partições de n em partes pares.

n	Nº de partições
1	0
2	1
3	0
4	2
5	0
6	3
7	0
8	5
9	0
10	7

Fonte: Produzida pelos autores.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{5}\frac{1}{1-x^{2k}} &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^6}\cdot\frac{1}{1-x^8}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\\
&= \big(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots\big)\cdot\big(1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+\cdots\big)\\
&\quad\cdot\big(1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+\cdots\big)\cdot\big(1+x^8+x^{16}+x^{24}+x^{32}+\cdots\big)\\
&\quad\cdot\big(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40}+\cdots\big)\\
&= 1+x^2+2x^4+3x^6+5x^8+7x^{10}+10x^{12}+13x^{14}\cdots
\end{aligned}$$

E como podemos ver $\prod_{k=1}^{5}\frac{1}{1-x^{2k}}$ é a função geradora para as partições de $0 \leqslant n \leqslant 10$ em partes pares. Como queremos obter uma função geradora válida para todos os naturais, estendemos indefinidamente o produto, obtendo

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k}}$$

De modo análogo,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}} \tag{2.16}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes ímpares,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k^2}} \tag{2.17}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ em partes que são quadrados perfeitos,

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-x^p} \tag{2.18}$$

é a função geradora para as partições de $n \in \mathbb{N}$ onde as partes são números primos.

Uniremos os raciocínios usados em 2.7, 2.8 e 2.9 com a função geradora 2.10. Reescreveremos as funções geradoras

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \ldots, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = 1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2} + \ldots, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots = 1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + \ldots . \tag{2.21}$$

Se multiplicarmos 2.19, 2.20 e 2.21 obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{1-x^k} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \\
&= \left(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \cdots\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2} + \cdots\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + \cdots\right) \\
&= 1 + x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \cdots \\
&= p(0) + p(1)x^1 + p(2)x^2 + p(3)x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \cdots
\end{aligned}$$

Podemos ver que $\displaystyle\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{1-x^k}$ é a função geradora para $p(n)$ com $0 \leqslant n \leqslant 3$ uma vez que 2.19 controla a presença de $1'$s na partição de n, 2.20 controla a presença de $2'$s na partição de n e como esperado 2.21 controla o número de $3'$s em $p(n)$.

Como desejamos uma função geradora para $p(n)$ para todo n natural devemos expandir o produto, assim

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \tag{2.22}$$

Funções geradoras nos auxiliam em provar proposições que relacionam subconjuntos de partições, vejamos:

Proposição 11. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. A função geradora das partições de n em partes distintas é $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$. Enquanto que a função geradora das partições de n em partes ímpares é $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$. Para provarmos esta proposição devemos mostrar

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

e de fato é, veja

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x^k)(1-x^k)}{1-x^k}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{2k}}{(1-x^{2k})(1-x^{2k-1})}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}\end{aligned}$$

A passagem da segunda para a terceira igualdade é devido a equivalência entre os produtos abaixo:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\cdots(1-x^k)\cdots=$$
$$(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots(1-x^{2k})\cdot(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots(1-x^{2k-1})\cdots$$

□

Proposição 12. *O número de partições de n em partes distintas, nenhuma sendo múltipla de 3, é igual ao número de partições de n em partes da forma* $(6k-1)$ *ou* $(6k-5)$.

Demonstração. Sabemos que a função geradora de partições em partes distintas não divisíveis por 3 é $\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{3k-1})(1+x^{3k-2})$ segue daí que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{3k-1})(1+x^{3k-2}) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+x^{3k-1})(1+x^{3k-2})(1-x^{3k-1})(1-x^{3k-2})}{(1-x^{3k-1})(1-x^{3k-2})}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{6k-2})(1-x^{6k-4})}{(1-x^{3k-1})(1-x^{3k-2})}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^{6k-2})(1-x^{6k-4})}{(1-x^{6k-1})(1-x^{6k-4})(1-x^{6k-2})(1-x^{6k-5})}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6k-1})(1-x^{6k-5})}
\end{aligned}$$

Note que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{3k-1})(1-x^{3k-2}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{3(2k)-1})(1-x^{3(2k-1)-1})(1-x^{3(2k)-2})(1-x^{3(2k-1)-2})$$

□

Exemplo 8. *Vamos expandir o produto* $\prod_{n=1}^{k}(1-x^n)$ *para* $k=1$, $k=3$, $k=5$, $k=7$ *e* $k=\infty$

$$\prod_{n=1}^{1}(1-x^n) = (1-x)$$

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{3}(1-x^n) &= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\\
&= 1-x^1-x^2+[(-x^2)\cdot(-x)+(-x^3)]\cdots\\
&= 1-x^1-x^2+[(x^{2+1})+(-x^3)]\cdots\\
&= 1+(-1)x^1+(-1)x^2+0x^3\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{5}(1-x^n) &= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\\
&= 1-x^1-x^2+[(-x^2)\cdot(-x)+(-x^3)]+[(-x)\cdot(-x^3)+(-x^4)]\\
&+ [(-x)\cdot(-x^4)+(-x^2)\cdot(-x^3)+(-x^5)]\cdots\\
&= 1-x^1-x^2+[x^{2+1}+(-x^3)]+[x^{3+1}+(-x^4)]\\
&+ [x^{4+1}+x^{3+2}+(-x^5)]\cdots\\
&= 1+(-1)x^1+(-1)x^2+0x^3+0x^4+1x^5\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{7}(1-x^n) &= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\\
&= 1-x^1-x^2+[(-x^2)\cdot(-x)+(-x^3)]+[(-x)\cdot(-x^3)+(-x^4)]\\
&+ [(-x)\cdot(-x^4)+(-x^2)\cdot(-x^3)+(-x^5)]+[(-x^6)+(-x^5)\cdot(-x)+\\
&+ (-x^4)\cdot(-x^2)+(-x^3)\cdot(-x^2)\cdot(-x)]+[(-x^7)+(-x^6)\cdot(-x)+\\
&+ (-x^5)\cdot(-x^2)+(-x^4)\cdot(-x^3)+(-x^4)\cdot(-x^2)\cdot(-x)]\cdots\\
&= 1-x^1-x^2+[x^{2+1}+(-x^3)]+[x^{3+1}+(-x^4)]+[-x^5+x^{4+1}+x^{3+2}]\\
&+ [-x^6+x^{5+1}+x^{4+2}-x^{3+2+1}]+[-x^7+x^{6+1}+x^{5+2}+x^{4+3}-x^{4+2+1}]\cdots\\
&= 1+(-1)x^1+(-1)x^2+0x^3+0x^4+1x^5+0x^6+1x^7\cdots
\end{aligned}
$$

Podemos ver pelos exemplos que o coeficiente de x é formado pelo número de partições de n em um número par de partes distintas, subtraído do número de partições de n em um número ímpar de partes distintas. E já vemos no Exemplo 1 que este valor é dado pela Proposição 8.

Fazendo a expansão para $n=\infty$ teremos,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}\cdots$$

Segue daí a proposição.

Proposição 13.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(x^{\frac{j(3j-1)}{2}}+x^{\frac{j(3j+1)}{2}}\right).$$

Encerramos este capítulo apresentando a fórmula de recorrência dada por Euler para o valor exato de $p(n)$.

Teorema 1. *Para todo inteiro positivo n temos*

$$p(n)=\sum_{j\in\mathbb{N}}(-1)^{j+1}p\left(n-\frac{j(3j\pm 1)}{2}\right)$$

Demonstração. Pela Equação 2.22 temos que

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$$

e pelo Proposição 13

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(x^{\frac{j(3j-1)}{2}}+x^{\frac{j(3j+1)}{2}}\right),$$

multiplicando esta duas equações

$$\left(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} \cdots\right) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+5} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+7} \cdots = 1,$$

fazendo $n = n - 1$ na segunda parcela, $n = n - 2$ na terceira parcela, $n = n - 5$ na quarta parcela, e assim por diante teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} p(n-2)x^n + \sum_{n=5}^{\infty} p(n-5)x^n + \sum_{n=7}^{\infty} p(n-7)x^n \cdots = 1,$$

como o coeficiente de x^n no lado direito é zero segue que

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \cdots = 0$$

donde obtemos o resultado

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \cdots \; .$$

□

Exemplo 9. *Usando os valores da Tabela 1 e da Tabela 2 calculemos $p(7)$.*

Usando o Teorema 1 vemos que

$$\begin{aligned} p(7) &= p(7-1) + p(7-2) - p(7-5) - p(7-7) + p(7-12) + p(7-15) + \cdots \\ &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) + p(-5) + p(-8) + \cdots \\ &= 11 + 7 - 2 - 1 + 0 + 0 \cdots \\ &= 15. \end{aligned}$$

3 Partition Analysis

Apresentamos agora o chamado operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ introduzido por MacMahon em (MACMAHON, 2001). Este operador age sobre variáveis auxiliares λ obtendo funções geradoras para o número de partições de n quando as partes desta partição estão sujeitas à inequações diofantinas.

Como motivação evocamos a Definição 1, que nos fornece a definição de partição $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_i$ mas desta vez sujeitamos as partes às seguintes inequações diofantinas:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geqslant \alpha_2 \\ \alpha_2 &\geqslant \alpha_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{i-1} &\geqslant \alpha_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

E desejamos obter a função geradora $\sum x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i}$ que respeite as inequações 3.1. Para este fim vamos considerar a função algébrica em x com i variáveis $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i$ auxiliares.

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x\right)} \tag{3.2}$$

Calcularemos a função geradora como fizemos no Exemplo 7, substituindo, na Equação 2.10, x por $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x$ de cada um dos fatores.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda_1 x} &= 1 + \lambda_1 x + \lambda_1^2 x^2 + \cdots + \lambda_1^{\alpha_1} x^{\alpha_1} + \cdots, \\ \frac{1}{1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x} &= 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}x + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 x^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\alpha_2} x^{\alpha_2} + \cdots, \\ \frac{1}{1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x} &= 1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}x + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2 x^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\alpha_3} x^{\alpha_3} + \cdots, \\ &\vdots \\ \frac{1}{1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x} &= 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^2 x^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^{\alpha_i} x^{\alpha_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-\lambda_1 x)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)} \cdots \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x\right)} = \\
&= \left(1+\lambda_1 x+\lambda_1^2 x^2+\cdots+\lambda_1^{\alpha_1}x^{\alpha_1}+\cdots\right)\times \\
&\times \left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 x^2+\cdots+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\alpha_2} x^{\alpha_2}+\cdots\right)\times \\
&\times \left(1+\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x+\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^2 x^2+\cdots+\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\alpha_3} x^{\alpha_3}+\cdots\right)\cdots \\
&\times \left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^2 x^2+\cdots+\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^{\alpha_i} x^{\alpha_i}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Se efetuamos a multiplicação acima como proposto na Definição 5 obtemos a função geradora:

$$\sum \lambda_1^{\alpha_1}x^{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\alpha_2} x^{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\alpha_3} x^{\alpha_3}\cdots\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^{\alpha_i} x^{\alpha_i}\ ,$$

ou ainda

$$\sum \lambda_1^{\alpha_1-\alpha_2}\lambda_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\lambda_{i-1}^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\lambda_i^{\alpha_i}x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i}\ . \tag{3.3}$$

Note que a relação 3.1 estará completamente satisfeita na função geradora 3.3 se nos livrarmos das parcelas onde pelo menos uma das variáveis auxiliares possuir expoente negativo e subsequentemente colocar

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_i=1$$

obtendo a função geradora desejada.

$$\sum x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i}$$

Definição 6. *A ação descrita acima será denotada pelo prefixo* $\underset{\geqslant}{\Omega}$ *e chamado de operador* `omega`.

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x\right)} = \sum x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i}$$

Apresentamos agora algumas propriedades do operador `omega`.

Proposição 14. *Seja $\underset{\geqslant}{\Omega}$ o operador descrito acima aplicado na variável auxiliar λ então*

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})\,(1-A_1A_2x^{p_1+p_2})}$$

Demonstração. Neste início vamos partir da Equação 2.11 fazendo as devidas substituições.

$$\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=\frac{1}{1-\lambda A_1x^{p_1}}\cdot\frac{1}{1-A_2\lambda^{-1}x^{p_2}}$$

$$=(1+\lambda A_1x^{p_1}+\lambda^2A_1^2x^{2p_1}+\lambda^3A_1^3x^{3p_1}+\lambda^4A_1^4x^{4p_1}+\cdots)\cdot$$

$$\cdot(1+\lambda^{-1}A_2x^{p_2}+\lambda^{-2}A_2^2x^{2p_2}+\lambda^{-3}A_2^{-3}x^{3p_2}+\lambda^{-4}A_2^4x^{4p_2}+\cdots)$$

Esta passagem precisa receber uma atenção especial. Aqui efetuaremos a multiplicação entre os dois fatores que estão entre parentese e em seguida eliminaremos as parcelas que possuírem λ com expoente negativo que é a primeira parte onde $\underset{\geqslant}{\Omega}$ opera.

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=1+\lambda A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+\lambda^2A_1^2x^{2p_1}+\lambda A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+$$

$$+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+\lambda^3A_1^3x^{3p_1}+\lambda^2A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+\lambda A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+$$

$$+\lambda^4A_1^4x^{4p_1}+\lambda^3A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+\lambda^2A_1^4A_2^2x^{4p_1+2p_2}+\lambda A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_3}+A_1^4A_2^4x^{4(p_1+p_2)}\cdots$$

Aqui faremos $\lambda=1$ que é a segunda ação do operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$. A partir deste ponto o operador foi aplicado em sua totalidade. Segue então que as próximas passagens serão apenas simplificações dos resultados obtidos abaixo.

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+A_1^4A_2^4x^{4(p_1+p_2)}+$$

$$+A_1x^{p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_3}+$$

$$+A_1^2x^{2p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^4A_2^2x^{4p_1+2p_2}+$$

$$+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+$$

$$+A_1^4x^{4p_1}+\cdots$$

Colocando convenientemente alguns termos em evidência chegamos

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=1\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)+$$

$$+A_1x^{p_1}\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)+$$

$$+A_1^2x^{2p_1}\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)+$$

$$+A_1^3x^{3p_1}\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)+$$

$$+A_1^4x^{4p_1}\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)+\cdots$$

Evidenciando as parcelas comuns

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=\left(1+A_1x^{p_1}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}\cdots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2(p_1+p_2)}+A_1^3A_2^3x^{3(p_1+p_2)}+\cdots\right)$$

E finalizamos

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})\left(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2}\right)}=\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})(1-A_1A_2x^{p_1+p_2})}$$

□

Proposição 15. *Seja* $\underset{\geqslant}{\Omega}$ *o operador descrito acima aplicado na variável auxiliar* λ *então*

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})(1-A_1A_2x^{p_1+p_2})(1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3})}$$

Demonstração. Faremos algo semelhante à proposição anterior.

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})}\cdot\frac{1}{\left(1-\lambda_1^{-1}\lambda_2A_2x^{p_2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\lambda_2^{-1}A_3x^{p_3}\right)}=\\
&=(1+\lambda_1A_1x^{p_1}+\lambda_1^2A_1^2x^{2p_1}+\lambda_1^3A_1^3x^{3p_1}+\lambda_1^4A_1^4x^{4p_1}+\cdots)\cdot\\
&\cdot(1+\lambda_1^{-1}\lambda_2A_2x^{p_2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^2A_2^2x^{2p_2}+\lambda_1^{-3}\lambda_2^3A_2^3x^{3p_2}+\lambda_1^{-4}\lambda_2^4A_2^4x^{4p_2}+\cdots)\cdot\\
&\cdot(1+\lambda_2^{-1}A_3x^{p_3}+\lambda_2^{-2}A_3^2x^{2p_3}+\lambda_2^{-3}A_3^3x^{3p_3}+\lambda_2^{-4}A_3^4x^{4p_3}+\cdots)\cdot
\end{aligned}$$

Efetuando a multiplicação e eliminando as parcelas cujo o expoente na variável auxiliar seja negativo.

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\begin{aligned}
&1+\lambda_1A_1x^{p_1}+\lambda_2A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}+\lambda_1^2A_2^2x^{2p_2}+\lambda_1\lambda_2A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+\\
&+\lambda_1A_1^2A_2A_3x^{2p_1+p_2+p_3}+\lambda_2^2A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+\lambda_2A_1^2A_2^2A_3x^{2p_1+2p_2+p_3}+\\
&+A_1^2A_2^2A_3^2x^{2p_1+2p_2+2p_3}+\lambda_1^3A_1^3x^{3p_1}+\lambda_1^2\lambda_2A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+\lambda_1^2A_1^3A_2A_3x^{3p_1+3p_2+p_3}+\\
&+\lambda_1\lambda_2^2A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+\lambda_1\lambda_2A_1^3A_2^2A_3x^{3p_1+2p_2+p_3}+\lambda_1A_1^3A_2^2A_3^2x^{3p_1+2p_2+2p_3}+\\
&+\lambda_2^3A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+\lambda_2^2A_1^3A_2^3A_3x^{3p_1+3p_2+p_3}+\lambda_2A_1^3A_2^3A_3^2x^{3p_1+3p_2+2p_3}+\\
&+A_1^3A_2^3A_3^3x^{3p_1+3p_2+3p_3}+\lambda_1^4A_1^4x^{4p_1}+\lambda_1^3\lambda_2A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+\lambda_1^3A_1^4A_2A_3x^{4p_1+p_2+p_3}+\\
&+\lambda_1^2\lambda_2^2A_1^4A_2^2x^{4p_1+2p_2}+\lambda_1^2\lambda_2A_1^4A_3x^{4p_1+2p_2+p_3}+\lambda_1^2A_1^4A_2^2A_3^2x^{4p_1+2p_2+2p_3}+\\
&+\lambda_1\lambda_2^3A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+\lambda_1\lambda_2^2A_1^4A_2^3A_3x^{4p_1+3p_2+p_3}+\lambda_1\lambda_2A_1^4A_2^3A_3^2x^{4p_1+3p_2+2p_3}+\\
&+\lambda_1A_1^4A_2^3A_3^3x^{4p_1+3p_2+3p_3}+\lambda_2^4A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\lambda_2^3A_1^4A_2^4A_3x^{4p_1+4p_2+p_3}+\\
&+\lambda_2^2A_1^4A_2^4A_3^2x^{4p_1+4p_2+2p_3}+\lambda_2A_1^4A_2^4A_3^3x^{4p_1+4p_2+3p_3}+A_1^4A_2^4A_3^4x^{4p_1+4p_2+4p_3}+\cdots
\end{aligned}$$

Faremos $\lambda_1=\lambda_2=1$ e colocaremos em evidência alguns termos

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$1\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+$$
$$+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)+$$
$$A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+$$
$$+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)+$$
$$A_1^2A_2^2A_3^2x^{2p_1+2p_2+2p_3}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+$$
$$+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)+$$
$$A_1^3A_2^3A_3^3x^{3p_1+3p_2+3p_3}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+$$
$$+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)+$$
$$A_1^4A_2^4A_3^4x^{4p_1+4p_2+4p_3}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+$$
$$+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)+$$

Que pode ser simplificado por

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+$$
$$+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+$$
$$+A_1^4x^{4p_1}+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)\cdot$$
$$(1+A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}+A_1^2A_2^2A_3^2x^{2p_1+2p_2+2p_3}+A_1^3A_2^3A_3^3x^{3p_1+3p_2+3p_3}+$$
$$A_1^4A_2^4A_3^4x^{4p_1+4p_2+4p_3}\cdots)$$

Ou seja,

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$(1+A_1x^{p_1}+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^2x^{2p_1}+A_1^2A_2x^{2p_1+p_2}+A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}+$$
$$+A_1^3x^{3p_1}+A_1^3A_2x^{3p_1+p_2}+A_1^3A_2^2x^{3p_1+2p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+A_1^4x^{4p_1}+$$
$$+A_1^4A_2x^{4p_1+p_2}+A_1^4A_2^3x^{4p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}+\cdots)\cdot\frac{1}{1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}}$$

Simplificando mais uma vez

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\begin{aligned}&1\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}\cdots)+\\&A_1A_2x^{p_1+p_2}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}\cdots)+\\&A_1^2A_2^2x^{2p_1+2p_2}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}+\cdots)+\\&A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}+\cdots)+\\&A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}\cdot(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+\cdots)\cdot\frac{1}{1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}}\end{aligned}$$

Donde segue

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\begin{aligned}&(1+A_1x^{p_1}+A_1x^{2p_1}+A_1^3x^{3p_1}+A_1^4x^{4p_1}\cdots)\cdot\\&(1+A_1A_2x^{p_1+p_2}+A_1^3A_2^3x^{3p_1+3p_2}+A_1^4A_2^4x^{4p_1+4p_2}\cdots)\cdot\frac{1}{1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}}\end{aligned}$$

Provando

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1A_1x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$\frac{1}{1-A_1x^{p_1}}\cdot\frac{1}{1-A_1A_2x^{p_1+p_2}}\cdot\frac{1}{1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}}$$

□

Vemos facilmente que as demonstrações acima, apesar de simples, são demasiadamente longas. O objetivo delas é fazer uma passo a passo de como elas funcionam e quais são as ideias ali aplicadas. Essas demonstrações serão substituídas por suas versões mais intuitivas, o leitor perceberá que uma demonstração é cópia fiel da outra.

Re-demonstraremos a Proposição 14.

Demonstração.

$$\begin{aligned}\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda A_1x^{p_1})(1-\frac{A_2}{\lambda}x^{p_2})}&=\underset{\geqslant}{\Omega}\sum_{i,j\geqslant 0}\lambda^{i-j}A_1^iA_2^jx^{ip_1+jp_2}\\&=\sum_{i\geqslant j\geqslant 0}A_1^iA_2^jx^{ip_1+jp_2}\\&=\sum_{j,k\geqslant 0}A_1^{j+k}A_2^jx^{(j+k)p_1+jp_2}\\&=\sum_{j,k\geqslant 0}(A_1x^{p_1})^k\left(A_1A_2x^{p_1+p_2}\right)^j\\&=\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})\,(1-A_1A_2x^{p_1+p_2`})}\end{aligned}$$

□

Agora re-demonstraremos a Proposição 15.

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1 x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2 A_2}{\lambda_1}x^{p_2}\right)\left(1-\frac{A_3}{\lambda_2}x^{p_3}\right)}=$$

$$=\underset{\geqslant}{\Omega}\sum_{i,j,k\geqslant 0}\lambda_1^{i-j}\lambda^{j-k}A_1^i A_2^j A_3^k x^{ip_1+jp_2+kp_3}$$

$$=\sum_{\substack{i\geqslant j\\ j\geqslant k\\ k\geqslant 0}} A_1^i A_2^j A_3^k x^{ip_1+jp_2+kp_3}$$

$$=\sum_{k,m,n\geqslant 0} A_1^{k+m+n}A_2^{k+n}A_3^k x^{(k+m+n)p_1+(k+n)p_2+kp_3}$$

$$=\sum_{k,m,n\geqslant 0}(A_1x^{p_1})^m\left(A_1A_2x^{p_1+p_2}\right)^n\left(A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3}\right)^k$$

$$=\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})(1-A_1A_2x^{p_1+p_2})(1-A_1A_2A_3x^{p_1+p_2+p_3})}$$

Agora podemos fazer uma generalização deste resultado como sugerido por (MACMAHON, 2001).

Proposição 16. *Seja $\underset{\geqslant}{\Omega}$ o operador descrito acima, então:*

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1 x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}A_2x^{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}A_nx^{p_n}\right)\left(1-\frac{A_{n+1}}{\lambda_n}x^{p_{n+1}}\right)}=$$

$$\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})(1-A_1A_2x^{p_1+p_2})\cdots(1-A_1A_2\ldots A_{n+1}x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n+1}})}$$

Demonstração. Observe que

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda_1 A_1 x^{p_1})\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}A_2x^{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}A_nx^{p_n}\right)\left(1-\frac{A_{n+1}}{\lambda_n}x^{p_{n+1}}\right)}=$$

$$\underset{\geqslant}{\Omega}\sum_{k_i\geqslant 0}\lambda_1^{k_1-k_2}A_1^{k_1}x^{k_1p_1}\cdot\lambda_2^{k_2-k_3}A_2^{k_2}x^{k_2p_2}\cdots\lambda_n^{k_{n+1}-k_n}A_n^{k_n}x^{k_np_n}\cdot A_{n+1}^{k_{n+1}}x^{k_{n+1}p_{n+1}}=$$

$$\sum_{\substack{k_i\geqslant k_{i+1}\\ 1\leqslant i\leqslant n}}A_1^{k_1}x^{k_1p_1}\cdot A_2^{k_2}x^{k_2p_2}\ldots A_n^{k_n}x^{k_np_n}\cdot A_{n+1}^{k_{n+1}}x^{k_{n+1}p_{n+1}}$$

Considerando $k_i = k_{i+1}+m_{i+1}$ e $m_{i+1}\geqslant 0$

$$\sum_{m_i\geqslant 0}(A_1x_1^{p_1})^{m_2}\left(A_1A_2x^{p_1+p_2}\right)^{m_3}\cdots\left(A_1A_2\ldots A_{n+1}x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}=$$

$$\frac{1}{(1-A_1x^{p_1})\left(1-A_1A_2x_1^{p_1+p_2}\right)\cdots(1-A_1A_2\ldots A_{n+1}x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n+1}})}$$

□

O operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ como visto até o momento nos fornece uma função geradora para partições cujas partes cumprem as restrições propostas na Equação 3.1. Veremos na próxima proposição que ao passo que aumentamos o número de variáveis auxiliares também aumentamos o número de condições as quais submetemos as partes da partição desejada.

Proposição 17. *Tomemos λ e μ variáveis auxiliares sujeitas ao operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ então*

$$\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}}\underset{\geqslant}{\overset{\mu}{\Omega}}\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{i-2}\lambda_i}{\lambda_{i-1}^2}\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)}=\frac{1}{(1-x)\,(1-x^2)\cdots(1-x^i)}$$

Demonstração. Para eliminarmos a variável auxiliar μ usamos a Proposição 16 assumindo $p_1=1$ e $p_k=0$ para $2\leqslant k\leqslant i$, $A_1=\lambda_1$, $A_2=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1^2}$, $A_k=\dfrac{\lambda_{k-2}\lambda_k}{\lambda_{k-1}^2}$ para $3\leqslant k\leqslant i$

Donde segue que

$$\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}}\underset{\geqslant}{\overset{\mu}{\Omega}}\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{i-2}\lambda_i}{\lambda_{i-1}^2}\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)}$$
$$=\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}}\frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x\right)}$$

Para encerrar a demonstração basta tomar $A_k=1=p_k$ para todo k, chegando em

$$=\frac{1}{(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\cdots(1-x^i)}$$

□

Veja que a demonstração está completa, mas ela omitiu um detalhe importante, as restrições diofantinas que as partes se sujeitam. Para encontrá-las examinemos o termo geral na expansão

$$(\lambda_1\mu_1 x)^{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)^{\alpha_3}\cdots\left(\frac{\lambda_{i-2}\lambda_i}{\lambda_{i-1}^2}\frac{\mu_i}{\mu_i-1}\right)^{\alpha_i} \tag{3.4}$$

da expressão

$$\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_{i-2}\lambda_i}{\lambda_{i-1}^2}\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)}.$$

Ao simplificarmos Equação 3.4 chegamos em

$$\lambda_1^{\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3}\cdots\lambda_{i-2}^{\alpha_{i-2}-2\alpha_{i-1}+\alpha_i}\lambda_{i-1}^{\alpha_{i-1}-2\alpha_i}\lambda_i^{\alpha_i}\mu_1^{\alpha_1-\alpha_2}\cdots\mu_{i-1}^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\mu_i^{\alpha_i}x^{\alpha_1}$$

E por meio da ação de $\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}}$ e de $\underset{\geqslant}{\overset{\mu}{\Omega}}$ as parcelas que restam estão sujeitas às restrições

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 2\alpha_2 \ , \\ \alpha_2 + \alpha_4 \geqslant 2\alpha_3 \ , \\ \vdots \\ \alpha_{i-2} + \alpha_i \geqslant 2\alpha_{i-1} \ , \\ \alpha_{i-1} \geqslant 2\alpha_i \ , \\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_i \ . \end{cases}$$

Outra informação implícita é que se fixarmos α_1, o número de maneira de escolher inteiros que cumpram às restrições, é igual ao número de partições de α_1 em até i partes.

Exemplo 10. *Se tomarmos* $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 4$ *e* $i = 4$ *obtemos à seguinte tabela;*

Tabela 6 – Soluções para o exemplo.

α_1	α_2	α_3	α_4	Partição de α_1 correspondente
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	0	2
2	1	0	0	1+1
3	0	0	0	3
3	1	0	0	2+1
3	2	1	0	1+1+1
4	0	0	0	4
4	1	0	0	3+1
4	2	0	0	2+2
4	2	1	0	2+1+1
4	3	2	1	1+1+1+1

Fonte: Produzida pelos autores.

Para estabelecer uma relação 1-1 entre os valores de α_i e as partições de α_1 basta observar os expoentes de μ_i, ou seja, as partes são dadas por $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_3$ $\alpha_3 - \alpha_4$ e α_4.

Antes de generalizarmos este processo vamos apresentar mais alguns casos particulares.

Proposição 18. *Seja* λ *uma variável sujeita à ação de* $\underset{\geqslant}{\Omega}$, *então*

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x^2\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x^2\right)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2i-1})}$$

Demonstração. Basta tomar $A_k = 1$, $p_1 = 1$ e $p_k = 2$ para todo $k = 2, 3, 4 \cdots$ na Proposição 16.

□

Neste caso vemos que o termo geral de

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x^2\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x^2\right)}$$

é $x^{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_i}$ cujas partes α estão sujeitas às condições

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_i$$

A tabela abaixo nos fornece as soluções quando $i = 3$ e $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = j$ para $1 \leqslant j \leqslant 6$

Tabela 7 – Soluções para o exemplo.

α_1	α_2	α_3	j
1	0	0	1
2	0	0	2
1	1	0	3
3	0	0	3
2	1	0	4
4	0	0	4
1	1	1	5
3	1	1	5
5	0	0	5
2	1	1	6
2	2	0	6
4	1	0	6
6	0	0	6

Fonte: Produzida pelos autores.

Podemos extrair desta tabela uma importante informação, o número de partições de j em partes ímpares menores que $2i - 1$. Exemplificando, suponha $j = 5$ então possui 3 partições em partes ímpares menores que ou iguais a 5, de fato 5, $3+1+1$ e $1+1+1+1+1$.

Vemos intuitivamente que podemos resolver sistema de inequações diofantinas usando partições. De fato, se desejamos obter uma função geradora para a soma

$$\sum x^{\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2+\theta_3\alpha_3+\cdots\theta_i\alpha_i} \tag{3.5}$$

onde $\theta_i \in \mathbb{Z}$ sujeito à relação diofantina

$$\sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2 + \sigma_3\alpha_3 + \cdots \sigma_i\alpha_i \geqslant 0 \tag{3.6}$$

para todo σ_i inteiro então inserimos uma variável auxiliar λ_1 e usamos o operador `omega` da seguinte forma:

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1^{\sigma_1}x^{\theta_1})\,(1-\lambda_1^{\sigma_2}x^{\theta_2})\cdots(1-\lambda_1^{\sigma_i}x^{\theta_i})} \tag{3.7}$$

Mas se desejarmos obter a soma da Equação 3.5 e além da restrição 3.6 tenhamos outra da forma

$$\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3 + \cdots \tau_i\alpha_i \geqslant 0 \tag{3.8}$$

para todo τ_i inteiros, inserimos outra variável auxiliar λ_2 em 3.7

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1^{\sigma_1}\lambda_2^{\tau_1}x^{\theta_1})\,(1-\lambda_1^{\sigma_2}\lambda_2^{\tau_2}x^{\theta_2})\cdots(1-\lambda_1^{\sigma_i}\lambda_2^{\tau_i}x^{\theta_i})} \tag{3.9}$$

E assim por diante, inserimos uma nova variável auxiliar a cada nova inequação restritiva.

Exemplo 11. *Criar uma função geradora que tenha como termo geral* $\sum x^{\alpha_1+5\alpha_2+5\alpha_3+\cdots+5\alpha_i}$ *e que cumpra a restrição* $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_i$.

Observando o problema obtemos os valores $\theta_1 = 1$ e $\theta_i = 5$ para $i \geqslant 2$. Agora reescreveremos a desigualdade $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_i$ de modo a ficar evidente os valores de σ.

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 \geqslant \alpha_2 & \iff & 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{i-1} + 0\cdot\alpha_i \geqslant 0\\
\alpha_2 \geqslant \alpha_3 & \iff & 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{i-1} + 0\cdot\alpha_i \geqslant 0\\
 & \vdots & \\
\alpha_{i-1} \geqslant \alpha_i & \iff & 0\cdot\alpha_1 - 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 1\cdot\alpha_{i-1} - 1\cdot\alpha_i \geqslant 0
\end{array}$$

Vê-se que teremos $i-1$ variáveis auxiliares λ que serão dispostas de modo que λ_1 controla a primeira inequação, λ_2 controla a segunda inequação e assim por diante. Montado a função geradora

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1^1\lambda_2^0\lambda_3^0\cdots\lambda_{i-1}^0x^1)\left(1-\lambda_1^{-1}\lambda_2^1\lambda_3^0\cdots\lambda_{i-1}^0x^5\right)\cdots\left(1-\lambda_1^0\lambda_2^0\lambda_3^0\cdots\lambda_{i-1}^{-1}x^5\right)} =$$

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x^5\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\lambda_{i-1}}x^5\right)}$$

Cuja solução é

$$\frac{1}{(1-x^1)(1-x^6)(1-x^{11})\cdots(1-x^{5i-4})}$$

Podemos então concluir que o conjunto de soluções deste exemplo, para $j = \alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 + \cdots + 5\alpha_i$, possui a mesma cardinalidade do conjunto de partições de j em partes da forma $5i-4$.

Exemplo 12. *Examinemos o conjunto de soluções inteiras* $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i\}$ *da soma* $\sum x^{\alpha_1+4\alpha_2}$ *submetida às inequações diofantinas abaixo.*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \geqslant 2\alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{i-2} + \alpha_i \geqslant 2\alpha_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \geqslant 2\alpha_i \\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_i \end{cases}$$

Temos do exemplo que $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 4$ e demais iguais a zero. Reescrevendo as condições obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 0 \Rightarrow 1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 \cdots 0\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 \geqslant 0 \Rightarrow 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 - 2\cdot\alpha_3 + 1\cdot\alpha_4 \cdots 0\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i-2} - 2\alpha_{i-1} + \alpha_i \geqslant 0 \Rightarrow 0\cdot\alpha_1 + \cdots + 1\cdot\alpha_{i-2} - 2\cdot\alpha_{i-1} + 1\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \alpha_{i-1} - 2\alpha_i \geqslant 0 \Rightarrow 0\cdot\alpha_1 + \cdots + 0\cdot\alpha_{i-2} + 1\cdot\alpha_{i-1} - 2\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \geqslant 0 \Rightarrow 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{i-1} + 0\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \geqslant 0 \Rightarrow 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{i-1} + 0\cdot\alpha_i \geqslant 0 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} - \alpha_i \geqslant 0 \Rightarrow 0\cdot\alpha_1 - 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 1\cdot\alpha_{i-1} - 1\cdot\alpha_i \geqslant 0 \end{cases}$$

E montando a função geradora

$$\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}}\underset{\geqslant}{\overset{\mu}{\Omega}} \frac{1}{(1-\lambda_1^1\mu_1^1x^1)\left(1-\lambda_1^{-2}\lambda_2^1\mu_1^{-1}\mu_2^1x^4\right)\left(1-\lambda_1^1\lambda_2^{-2}\lambda_3^1\mu_2^{-1}\mu_1^1x^0\right)\cdots\left(1-\lambda_{i-2}^1\lambda_{i-1}^{-2}\mu_{i-1}^{-1}\right)}$$

Resolvendo-a,

$$\underset{\geqslant}{\overset{\lambda}{\Omega}} \frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x^5\right)\left(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x^5\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}x^5\right)}$$

cuja solução já é conhecida por nós.

$$\frac{1}{(1-x^1)(1-x^6)(1-x^{11})\cdots(1-x^{5i-4})}\ .$$

Após chegarmos a este resultado vemos que o número de soluções do exemplo acima é o número de partições de $\alpha_1+4\alpha_2$ em partes da forma $5m+1$ que são menores do que ou iguais a $5i-4$.

Nos dedicaremos agora em resolver algumas aplicações da teoria apresentada.

Proposição 19. *Seja $p(m,n)$ é o número de partições de n em no máximo m partes. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

Demonstração. Desejamos encontrar a forma fechada para a função geradora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n$. Afim de fazermos uso da teoria aqui apresentada reescreveremos a função geradora.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n = \sum_{\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_m\geqslant 0} x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}$$

Em outras palavras desejamos encontrar a função geradora para $\sum x^{1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+\cdots+1\cdot\alpha_m}$ onde as partes estão sujeitas as seguintes inequações diaofantinas.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{m-1} + 0\cdot\alpha_m \geqslant 0\\
\alpha_2 \geqslant \alpha_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 + \cdots + 0\cdot\alpha_{m-1} + 0\cdot\alpha_m \geqslant 0\\
&\ \vdots\\
\alpha_{m-1} \geqslant \alpha_m \quad &\Longleftrightarrow \quad 0\cdot\alpha_1 - 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + \cdots + 1\cdot\alpha_{m-1} - 1\cdot\alpha_m \geqslant 0
\end{aligned}$$

Basta agora resolver

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n = \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1^1\lambda_2^0\cdots\lambda_{m-1}^0x^1)(1-\lambda_1^{-1}1\lambda_2^1\cdots\lambda_{m-1}^0x^1)\cdots(1-\lambda_1^0\lambda_2^0\cdots\lambda_{m-1}^{-1}x^1)}\ ,$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n = \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{1}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\lambda_{m-1}}\right)}\ ,$$

aplicando a Proposição 16 chegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(m,n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}\ .$$

□

Lema 1. *Se a é um inteiro não negativo então:*

$$\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda^{-a}}{(1 - A\lambda)\left(1 - \frac{B}{\lambda}\right)} = \frac{A^a}{(1-A)(1-AB)}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda^{-a}}{(1 - A\lambda)\left(1 - \frac{B}{\lambda}\right)} &= \underset{\geqslant}{\Omega} \sum_{m\geqslant 0, n\geqslant 0} \lambda^{-a}(A\lambda)^m (B\lambda^{-1})^n \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \sum_{m\geqslant 0, n\geqslant 0} A^m B^n \lambda^{m-n-a} \\
&= \sum_{n,k\geqslant 0} A^{a+n+k} B^n \\
&= \sum_{n,k\geqslant 0} A^a A^k (AB)^n \\
&= A^a \frac{1}{(1-A)(1-AB)} \\
&= \frac{A^a}{(1-A)(1-AB)} .
\end{aligned}$$

Da segunda para a terceira passagem usamos o fato de

$$m - n - a \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant n + a \Rightarrow m = n + a + k,\ \ k \geqslant 0 \ .$$

□

Proposição 20. *Seja n um número inteiro n e $\Delta(n)$ o número de triângulos não congruentes de perímetro n e lados inteiros. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) x^n = \frac{x^3}{(1-x^4)(1-x^2)(1-x^3)}$$

Demonstração. Dado um inteiro positivo n, considere $\Delta(n)$ o número de triângulos não congruentes de perímetro n e lados inteiros, vamos usar o operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ para obter a função geradora e as inequações diofantinas que usaremos são as da condição de existência de triângulos.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n)x^n &= \sum_{\substack{a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant 1 \\ a_2+a_3 \leqslant a_1}} x^{a_1+a_2+a_3} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \sum_{a,a_2,a_3 \geqslant 0} x^{a_1+a_2+a_3} \lambda_1^{a_1-a_2} \lambda_2^{a_2-a_3} \lambda_3^{a_2+a_3-a_1-1} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}x)(1-\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}x)(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x)} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-\frac{1}{\lambda_3}x)(1-\lambda_2 x^2)(1-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}x)} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-\frac{1}{\lambda_3}x)(1-x^2)(1-\lambda_3 x^3)} \\
&= \frac{x^3}{(1-x^4)(1-x^2)(1-x^3)}
\end{aligned}
$$

□

Proposição 21. *Seja $Q_m(n)$ é o número de partições de n em exatamente m partes distintas. Então*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)x^n = \frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} .
$$

Demonstração. Note que, se $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ é uma partição de n em exatamente m partes distintas, então estas partes estão sujeitas às seguintes inequações diofantinas:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \geqslant \alpha_2 + 1 &\Rightarrow 1 \cdot \alpha_1 - 1 \cdot \alpha_2 \cdots 0 \cdot \alpha_m \\
\alpha_2 \geqslant \alpha_3 + 1 &\Rightarrow 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 \cdots 0 \cdot \alpha_m \\
&\vdots \\
\alpha_m \geqslant 1 &\Rightarrow 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 \cdots 0 \cdot \alpha_m
\end{aligned}
$$

Note que na passagem da segunda igualdade para a terceira a baixo usamos o Lema 1 para a variável λ_1, na passagem da terceira para a quarta igualdade usamos o Lema 1 para a variável λ_2 e assim por diante. Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)x^n &= \underset{\geqslant}{\Omega} \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m \geqslant 0} \lambda_1^{\alpha_1-\alpha_2-1}\lambda_2^{\alpha_2-\alpha_3-1}\cdots\lambda_m^{\alpha_m-1}x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-\lambda_1 x)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x\right)} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{x\lambda_2^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-x)\left(1-\lambda_2 x^2\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x\right)} \\
&= \underset{\geqslant}{\Omega} \frac{x\cdot x^2\lambda_3^{-1}\cdots\lambda_m^{-1}}{(1-x)(1-x^2)\left(1-\lambda_3 x^3\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}x\right)} \\
&\vdots \\
&= \frac{x\cdot x^2\cdots x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} \\
&= \frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} \; .
\end{aligned}
$$

□

4 Considerações Finais

Esta dissertação almejou apresentar aspectos basilares da Partition Analysis, obra prima produzida por Percy Macmahon, para tanto buscamos referências bibliográfica sólidas para embasar o estudo histórico da carreira deste proeminente matemático. Durante a elaboração nós percebemos que as pesquisas de Macmahon não se restringiam apenas à partições, seus resultado em Teoria dos Invariantes lhe rendeu elogios de Arthur Cayley e de James Joseph Sylvester.

Durante a jornada de escrita desenvolvemos teorias preliminares como partições e funções geradoras, neste momento nos deparamos com a encruzilhada de “ escrever um texto conciso e profundamente teórico” ou “abdicar de aspectos matemáticos de escrita e focar em um público mais abrangente”, pois existem referências bibliográficas sobre estes temas já consolidadas por sua elegância. Diante deste impasse decidiu-se pela prodigalidade de ambas opções, afim de tornar a leitura um deleite assim como foi sua escrita.

As aplicações do operador $\underset{\geqslant}{\Omega}$ encontradas e apresentadas, nos levam a concordar com (WRINCH, 1921) quando diz que “ aguça o apetite do leitor para o próximo volume”.

Para pesquisas futuras, nos focaremos em teorias que não foram apresentadas aqui como funções geradoras em várias variáveis, identidades do tipo série-produto e os polinômios gaussianos.

Finalizo dizendo que cheguei a Ítaca (Konstantinos Kaváfis) e todos meu votos foram atendidos.

Referências

ANDREWS, G. E. *The theory of partitions*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1976. Citado na página 16.

EULER, L. *Introductio in analysin infinitorum*. [S.l.]: MM Bousquet, 1748. v. 1. Citado na página 16.

GARCIA, P. *The life and work of Major Percy Alexander MacMahon*. Tese (Doutorado) — Open University, Milton Keynes, England, 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1607.01321.pdf>. Acesso em: 3 jul. 2020. Citado na página 15.

INSTITUTION, G. B. A. R. A. *Minutes of proceedings of the Royal Artillery Institution*. Woolwich, Eng., :The Institution„ 1879. v.11 (1879-1881). 880 p. Https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/162751. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/272275>. Citado na página 15.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 2. Citado na página 26.

MACMAHON, P. A. Xvi. memoir on the theory of the partition of numbers.—part i. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, The Royal Society London, n. 187, p. 619–673, 1896. Citado na página 16.

_____. Viii. memoir on the theory of the partitions of numbers.—part ii. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, The Royal Society London, n. 192, p. 351–401, 1899. Citado na página 16.

_____. *Introduction to Combinatory Analisys*. Cambridge: Cambridge University Press, 1920. v. 71. Citado na página 17.

_____. *Combinatory Analysis, Volumes I and II*. Cambridge: American Mathematical Soc., 2001. v. 137. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 45 e 51.

NIVEN, I. Formal power series. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 76, n. 8, p. 871–889, 1969. Citado na página 36.

OCONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Percy Alexander MacMahon*. 2003. MacTutor History of Mathematics Archive. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/MacMahon/>. Acesso em: 3 jul. 2020. Citado na página 15.

SANTOS, J. P. de O. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Citado na página 16.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. *Introdução à análise combinatória*. Rio de Janeiro: Ciencia Moderna, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 36.

WILF, H. S. Lectures on integer partitions. *unpublished), avaiable at: http://www. cis. upenn. edu/ wilf*, 2000. Citado na página 31.

WRINCH, D. An introduction to combinatory analysis. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 107, n. 2690, p. 357–358, 1921. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 61.