



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
UNICAMP

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

---

Geometria de Weyl e matéria escura

---

*Autor:*

Ronaldo Savioli Sumé Vieira

*e-mail:*

ronaldossv@gmail.com

*Orientador:*

Prof. Dr. Patricio Letelier

*e-mail:*

letelier@ime.unicamp.br

22 de Março de 2010

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da FAPESP.

# GEOMETRIA DE WEYL E MATÉRIA ESCURA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ronaldo Savioli Sumé Vieira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 22 de Março de 2010.

A handwritten signature in blue ink, consisting of several loops and strokes, positioned above a horizontal line.

Prof. Dr. Patricio Letelier

Banca Examinadora:  
Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor  
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin  
Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE** em **MATEMÁTICA**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

**Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio - CRB8 / 7966**

V673g                      Vieira, Ronaldo Savioli Sumé  
                                 Geometria de Weyl e matéria escura / Ronaldo Savioli Sumé  
                                 Vieira – Campinas, [S.P.: s.n.], 2010.

                                 Orientador : Patricio Anibal Letelier Sotomayor  
                                 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,  
                                 Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

                                 1. Geometria diferencial. 2. Weyl, geometria de. 3. Gravitação.  
                                 4. Matéria escura (Astronomia). I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Weyl geometry and dark matter.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential geometry. 2. Weyl geometry. 3. Gravity. 4. Dark matter (Astronomy).

Área de concentração: Geometria Diferencial / Gravitação

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

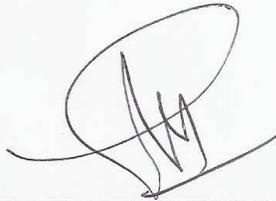
Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor (IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (CCNH-UFABC)  
Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 22/03/2010

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

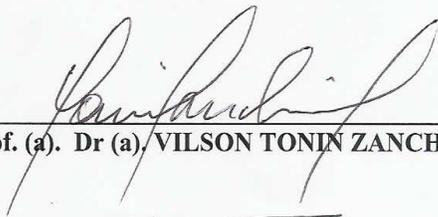
**Dissertação de Mestrado defendida em 22 de março de 2010 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



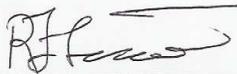
---

**Prof.(a). Dr(a). PATRICIO ANIBAL LETELIER SOTOMAYOR**



---

**Prof. (a). Dr (a). VILSON TONIN ZANCHIN**



---

**Prof. (a). Dr (a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO**

Dedico este trabalho a um amigo que já se foi. Que nunca entendeu por que eu chegava sempre tão tarde em casa, nem por que às vezes não lhe dava atenção. Mas que sempre ficava feliz ao me ver chegar e que, apesar de tudo, sempre me amou, talvez mais do que eu a ele.

Totchy, à sua amizade sincera e verdadeira.

# Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Francisco Canindé e Rosa Maria, por todo o apoio que me deram todos esses anos, em todas as situações, e pela ajuda nos momentos difíceis.

Agradeço ao prof. Patricio Letelier pela orientação neste trabalho e por saber guiar meus pensamentos quando confuso.

Agradeço a todos os meus amigos pelas risadas, pelas discussões (científicas ou não), pelos cafés e, principalmente, pela amizade. Sem eles, não saberia o que fazer.

Agradeço aos funcionários da secretaria e da biblioteca, em especial à Tânia e ao Reginaldo, pela ajuda e pelos esclarecimentos.

Agradeço, por fim, à FAPESP pelo apoio financeiro.

---

# Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo de métricas lorentzianas e da teoria de conexões lineares em variedades diferenciáveis, focando em variedades de Weyl com métricas lorentzianas e conexões de Weyl. Também analisamos algumas teorias físicas baseadas nessa geometria, estendendo a essas teorias o modelo de Kuzmin para um disco fino de matéria. A partir desse estudo e do limite newtoniano das teorias, investigamos se esses resultados suprem a necessidade da presença de matéria escura em galáxias espirais para explicar as curvas de rotação observadas.

---

# Abstract

In this work we study Lorentzian metrics and the theory of linear connections on smooth manifolds, focusing on Weyl manifolds with Lorentzian metrics and Weyl connections. We also analyze some physical theories based on this geometry, extending to these theories the Kuzmin model for a thin disk of matter. From this study and from the Newtonian limit of the theories, we examine if these results supply the necessity of the presence of dark matter in spiral galaxies to explain the observed rotation curves.

---

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Curvas de rotação e matéria escura . . . . .	2
<b>2 Geometria riemanniana e semi-riemanniana</b>	<b>5</b>
2.1 Métricas lorentzianas em espaços vetoriais . . . . .	5
2.1.1 Espaços vetoriais com métrica . . . . .	7
2.2 Geometria riemanniana e semi-riemanniana . . . . .	14
2.2.1 Conexões lineares . . . . .	16
2.2.2 Aceleração e geodésicas . . . . .	19
2.2.3 Conexão riemanniana . . . . .	28
2.2.4 Variedades lorentzianas . . . . .	32
2.3 Geometria de Weyl . . . . .	35
<b>3 Gravitação newtoniana e modelo de Kuzmin</b>	<b>51</b>
3.1 Modelo de Kuzmin . . . . .	53
<b>4 Relatividade geral e modelo de Kuzmin relativístico</b>	<b>57</b>
4.1 Modelo de Kuzmin relativístico . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Teoria integrável de Weyl-Dirac</b>	<b>63</b>
5.1	Gravitação e eletromagnetismo - Hermann Weyl . . . . .	63
5.2	Teoria de Weyl-Dirac . . . . .	64
5.3	Teoria integrável de Weyl-Dirac . . . . .	65
5.3.1	Equações de movimento . . . . .	66
	Observadores na geometria de Weyl . . . . .	70
5.4	Modelos de Kuzmin em Weyl-Dirac integrável . . . . .	72
5.4.1	Gauge de Einstein . . . . .	77
5.4.2	Caso em que $\alpha = 0$ . . . . .	84
	Limite newtoniano . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Conclusões finais</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Formulação lagrangiana de teorias relativísticas</b>	<b>103</b>
A.1	Teoria de campos clássica . . . . .	103
A.2	Relatividade Geral . . . . .	104
A.2.1	Leis de conservação . . . . .	107
A.3	Ação da teoria de Canuto <i>et al.</i> no vácuo . . . . .	108
A.4	Teoria de Israelit . . . . .	111
A.4.1	Leis de conservação . . . . .	113
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>115</b>

# 1

---

## Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo da teoria de conexões lineares sobre variedades diferenciáveis e das propriedades fundamentais das variedades de Weyl com métrica lorentziana. A conexão de Weyl é uma das extensões mais simples da conexão riemanniana, envolvendo apenas um termo de não-metricidade que depende de uma 1-forma diferencial definida sobre a variedade. No entanto, essa pequena mudança introduz conceitos novos com os quais não estamos habituados a trabalhar em geometria riemanniana, como por exemplo a noção de variedade conforme. Na segunda parte do trabalho, estudamos algumas teorias físicas da gravitação baseadas na geometria de Weyl, e suas consequências em escalas galácticas. Em particular, analisamos a possibilidade de essas teorias serem capazes de explicar a anomalia entre as curvas de rotação de galáxias observadas e as previstas pela gravitação newtoniana.

Na seção 1.1 fazemos uma pequena introdução ao problema das curvas de rotação de galáxias espirais e às hipóteses levantadas para explicá-lo.

No capítulo 2 fazemos uma introdução a métricas semi-riemannianas sobre variedades diferenciáveis, com ênfase nas métricas lorentzianas. Apresentamos também um tratamento introdutório das questões de causalidade e orientabilidade temporal em variedades lorentzianas. As características básicas da teoria de conexões lineares em variedades diferenciáveis são apresentadas, sendo feito em seguida um estudo da geometria de Weyl, tema deste trabalho.

No capítulo 3 é feita uma pequena introdução à gravitação newtoniana, com o objetivo de apresentar o modelo de Kuzmin para um disco de matéria.

No capítulo 4 é apresentado o modelo de Kuzmin relativístico, o qual pretendemos estender para as teorias baseadas na geometria de Weyl. Também é feita uma comparação entre os modelos de Kuzmin relativístico e newtoniano.

No capítulo 5 são apresentadas teorias baseadas na geometria de Weyl, e através da construção de modelos de Kuzmin nessas teorias analisamos a possibilidade de que seja

possível explicar por estas as curvas de rotação de galáxias espirais sem a necessidade de matéria escura.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões finais do trabalho.

## 1.1 Curvas de rotação e matéria escura

O texto a seguir não tem a intenção de fazer uma revisão completa sobre as observações de curvas de rotação de galáxias espirais e as hipóteses levantadas para explicá-las, nem do ponto de vista histórico nem do astrofísico, mas apenas de citar brevemente alguns pontos julgados pelo autor convenientes para uma introdução simples do assunto. Não necessariamente os trabalhos citados abaixo são representantes de toda a atividade de pesquisa realizada na área. Estes foram escolhidos no intuito de fornecer evidências de que a gravitação newtoniana é incapaz de explicar o comportamento das curvas de rotação da maioria das galáxias espirais e de introduzir as idéias que levaram à hipótese de halos de matéria escura englobando tais galáxias.

Os primeiros modelos para a massa de galáxias espirais eram baseados em métodos dinâmicos. Mais precisamente, eram derivados das curvas de rotação observadas. John C. Brandt, em 1959, considerou um modelo para a massa de galáxias espirais supondo que toda a matéria se concentrasse no disco galáctico [7]. A massa contida na região do disco determinada por um certo valor  $r$  da distância ao centro era dada por uma integral até  $r$  que envolvia a velocidade circular. Com esse modelo, Brandt estimou a massa da galáxia M31 a partir dos dados observacionais existentes na época. Em 1970, Vera Rubin e Kent Ford publicaram as observações mais precisas da curva de rotação da galáxia M31 para a época [36]. Utilizando o modelo de Brandt, determinaram a distribuição de massa da galáxia supondo que toda a matéria se encontrasse no disco. Segundo essa hipótese, e valendo-se dos dados fotométricos existentes para a distribuição de luminosidade dessa galáxia, os autores chegaram à conclusão de que a razão entre a massa e a luminosidade da galáxia (medidas em termos da massa e da luminosidade solares) integradas até um certo raio  $r$  crescia abruptamente com  $r$  até atingir um valor praticamente constante. Além disso, segundo o modelo, a contribuição do gás para a massa total da galáxia era menor do que 5%.

Ken Freeman, com base nas observações fotométricas que indicavam que o perfil de luminosidade da parte estelar da maioria das galáxias observadas era praticamente dado por uma exponencial decrescente, deduziu que a densidade superficial do disco também deveria seguir o mesmo perfil. Assim, a razão massa/luminosidade do disco seria constante [18]. A

partir dessas considerações e de dados observacionais sobre a distribuição do gás no plano do disco, chegou à conclusão de que para parte das galáxias analisadas haveria grande quantidade de matéria não observada no plano do disco. Segundo Bosma [6], o trabalho de Freeman apresentou pela primeira vez, “de uma maneira elegante”, uma discrepância na massa de uma galáxia, através de um método utilizado até hoje. De fato, tanto o modelo de disco exponencial quanto a hipótese da razão entre a massa e a luminosidade ( $M/L$ ) ser constante ao longo do disco estelar ainda são utilizados hoje em dia (ver, por exemplo, [39]).

Com os dados sobre fotometria e curvas de rotação na época disponíveis, em 1987 Kent [27] publicou um trabalho onde analisava, a partir dos dados de fotometria (utilizando as hipóteses de Freeman) e da distribuição do hidrogênio no disco galáctico, a necessidade de halos de matéria escura para explicar as curvas de rotação de algumas galáxias espirais, inclusive da galáxia M31. No mesmo ano, Athanassoula *et al.* [3], através de uma análise semelhante para um grupo diferente de galáxias espirais, chegaram à conclusão da necessidade da existência de um halo de matéria escura para explicar as curvas de rotação observadas, sugerindo que todas as galáxias espirais precisassem de um halo de matéria escura para ajustar a curva de rotação predita à observada.

Teorias alternativas também foram propostas na tentativa de, através de modificações da gravitação newtoniana em escalas galácticas, tentar explicar as curvas de rotação sem a necessidade da introdução da matéria escura. Entre as mais conhecidas estão a “Modified Newtonian Dynamics” (MOND), teoria proposta por Milgrom [32, 38], que propõe que a lei da gravitação deva mudar para baixas acelerações, e a teoria proposta por Brownstein e Moffat [8], que parte de uma lagrangiana dependendo de um tensor covariante antissimétrico de ordem 3.

Revisões mais completas sobre os resultados observacionais e os métodos de observação de curvas de rotação de galáxias espirais e sobre o problema da matéria escura em galáxias são dadas em [41, 2]. Uma revisão sobre as tentativas atuais de detecção de partículas que representem a matéria escura é encontrada em [1].

## 2

---

# Geometria riemanniana e semi-riemanniana

## 2.1 Métricas lorentzianas em espaços vetoriais

Nesta seção faremos uma breve introdução a métricas em espaços vetoriais, focando o estudo nas propriedades das métricas lorentzianas, com o objetivo de apresentar alguns resultados que serão úteis mais adiante e estabelecer a notação utilizada ao longo do texto. Começamos com algumas definições e teoremas sobre formas bilineares, seguindo [23].

**Definição 2.1.1** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear sobre  $V$  é uma aplicação  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  linear em cada uma de suas componentes, isto é, tal que*

- (i)  $f(\alpha v + u, w) = \alpha f(v, w) + f(u, w) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V;$
- (ii)  $f(u, \alpha v + w) = \alpha f(u, v) + f(u, w) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V$

Daqui para frente,  $V$  denotará um espaço vetorial real de dimensão finita, salvo especificação em contrário.

**Definição 2.1.2** *Seja  $f$  uma forma bilinear sobre  $V$ . Dada uma base ordenada  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ , a matriz de  $f$  com respeito a  $\mathcal{B}$  é a  $n \times n$  matriz  $A$  com elementos  $A_{ij} = f(v_i, v_j)$ .*

Se  $x = \sum_j \alpha_j v_j$ ,  $y = \sum_j \beta_j v_j$ , então  $f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_i A_{ij} \beta_j$ .

Sejam  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$  duas bases ordenadas de  $V$  e  $f$  uma forma bilinear sobre  $V$  com matrizes  $A$  em relação a  $\mathcal{B}$  e  $A'$  com relação a  $\mathcal{B}'$ . Se  $P$  for a matriz de mudança de base de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{B}'$ ,  $u_j = \sum_i P_{ij} v_i$ , então as matrizes de  $f$  com relação a cada base estão relacionadas por

$$A' = P^t A P,$$

onde  $P^t$  é a transposta de  $P$ . Segue que o posto da matriz de  $f$  é o mesmo em relação a qualquer base ordenada de  $V$ .

**Definição 2.1.3** *O posto de uma forma bilinear  $f$ , denotado por  $\text{posto}(f)$ , é igual ao posto da matriz da forma bilinear em relação a qualquer base ordenada.*

**Proposição 2.1.4** *Se  $f$  for uma forma bilinear sobre  $V$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\text{posto}(f) = \dim V$ .
- (ii) Dado  $v$  não nulo em  $V$ , existe  $w$  em  $V$  tal que  $f(v, w) \neq 0$ .
- (iii) Dado  $w$  não nulo em  $V$ , existe  $v$  em  $V$  tal que  $f(v, w) \neq 0$ .

*Demonstração:* Ver [23], p. 312. □

**Definição 2.1.5** *Uma forma bilinear sobre um espaço vetorial  $V$  é dita **não-degenerada** se tiver posto igual à dimensão de  $V$ .*

Faremos agora uma breve exposição sobre formas bilineares simétricas, dando especial atenção às formas bilineares ditas lorentzianas e à estrutura que elas geram em um espaço vetorial.

**Definição 2.1.6** *Uma forma bilinear  $f$  é dita **simétrica** se  $f(u, v) = f(v, u)$  para todos os vetores  $u, v$  de  $V$ .*

Há uma forte ligação entre formas bilineares e formas quadráticas, apresentada a seguir.

**Definição 2.1.7** *Uma **forma quadrática** sobre  $V$  é uma função  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

- (i)  $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ ;
- (ii)  $h(u, v) = \frac{1}{4}[q(u + v) - q(u - v)]$  é uma forma bilinear simétrica em  $V$ .

Dada uma forma bilinear simétrica  $f$  sobre  $V$ , a **forma quadrática associada a  $f$**  é a forma quadrática  $q$  dada por  $q(v) = f(v, v)$ . É fácil ver que

$$f(u, v) = \frac{1}{4}[q(u + v) - q(u - v)] \tag{2.1}$$

Reciprocamente, dada uma forma quadrática  $q$  sobre  $V$ , a função definida acima é uma forma bilinear sobre  $V$ . Desse modo, temos que uma forma bilinear simétrica é completamente determinada por a forma quadrática a ela associada.

**Teorema 2.1.8** *Seja  $V$  um espaço vetorial real  $n$ -dimensional e  $f$  uma forma bilinear simétrica sobre  $V$  que tenha posto  $r$ . Então existe uma base ordenada  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  tal que a matriz de  $f$  nessa base é diagonal e*

$$f(v_i, v_i) = \begin{cases} \pm 1, & \text{para } i = 1, \dots, r; \\ 0, & \text{para } i > r. \end{cases}$$

*Além disso, o número de vetores  $v_j$  para os quais  $f(v_i, v_i) = 1$  é independente da escolha da base. A matriz de  $f$  nessa base é chamada de **forma canônica** de  $f$ .*

*Demonstração:* Ver [23], p. 318. □

**Definição 2.1.9** *O índice de uma forma bilinear simétrica  $f$ ,  $\text{ind}(f)$ , é a dimensão do subespaço gerado pelos vetores  $v_j$  de uma base ordenada tal que a matriz de  $f$  nessa base assuma a forma dada no teorema (2.1.8), com  $f(v_j, v_j) = 1$ .*

Segue do teorema (2.1.8) que o índice de uma forma bilinear simétrica está bem-definido, sendo independente da base escolhida para diagonalizar  $f$ .

**Definição 2.1.10** *Uma forma bilinear simétrica  $f$  sobre  $V$  é dita **positiva (negativa) definida** se  $f(v, v) > 0$  ( $< 0$ )  $\forall v \in V$ . caso contrário,  $f$  é dita **indefinida**.*

Se  $f$  for positiva ou negativa definida, dizemos que  $f$  é **definida**.

### 2.1.1 Espaços vetoriais com métrica

**Definição 2.1.11** *Uma **métrica**  $g$  em um espaço vetorial real  $V$  de dimensão finita é uma forma bilinear simétrica não-degenerada sobre  $V$ . Se  $g$  for positiva definida,  $g$  é denominada um **produto interno**.*

Note que, se  $f$  for negativa definida,  $(-f)$  será positiva definida e vice-versa.

**Teorema 2.1.12** *Seja  $g$  uma métrica em  $V$ . Então a aplicação linear  $V^* \rightarrow V$  que associa a cada vetor  $v \in V$  o funcional linear  $v^* \in V^*$  tal que  $v^* \cdot w = g(w, v)$  para todo  $w \in V$  é um isomorfismo.*

*Demonstração:* A demonstração desse resultado é idêntica ao caso em que  $g$  é um produto interno [31]. Da bilinearidade de  $g$  segue que a aplicação é linear. Como a métrica é não-degenerada, segue do corolário (2.1.4) que a aplicação é injetiva. Como  $V$  e  $V^*$  têm a mesma dimensão, segue do teorema do núcleo-imagem que a aplicação é sobrejetiva, e portanto um isomorfismo. □

Logo, dado  $\varphi \in V^*$ , existe um único vetor  $\tilde{\varphi} \in V$  tal que  $\varphi \cdot v = g(\tilde{\varphi}, v)$  para todo  $v \in V$ .

Dizemos que dois vetores  $v, w \in V$  são *ortogonais com respeito a  $g$* , e escrevemos  $v \perp w$ , se  $g(v, w) = 0$ . Dois subespaços  $W$  e  $Y$  de  $V$  são ditos ortogonais se  $g(w, y) = 0 \forall w \in W, \forall y \in Y$ . Dado um subespaço  $W$  de  $V$ , definimos  $W^\perp := \{v \in V; v \perp w\}$ . Dizemos que  $W$  é *não-degenerado* se  $g|_W$  for não-degenerada. Além disso, dizemos que um vetor  $v$  é *unitário* se  $g(v, v) = \pm 1$ .

**Definição 2.1.13** *Uma base ordenada de  $V$  é dita ortonormal se todos os seus vetores forem unitários e ortogonais.*

Segue do teorema (2.1.8) que todo espaço vetorial com métrica possui uma base ortonormal.

Claramente  $W^\perp$  é um subespaço vetorial de  $V$ . Contudo, diferentemente do caso onde  $V$  é um espaço com produto interno, não temos mais necessariamente que  $V = W \oplus W^\perp$ . Por exemplo, seja  $g$  a métrica em  $\mathbb{R}^2$  dada, na base coordenada usual  $\{e_1, e_2\}$ , por  $g(e_1, e_1) = 1$ ,  $g(e_2, e_2) = -1$ ,  $g(e_1, e_2) = 0$ . Então, se  $W = \text{span}(e_1 + e_2)$ , dado  $v \in V$  é fácil ver, escrevendo  $v$  na base  $\{e_1, e_2\}$ , que  $g(v, e_1 + e_2) = 0$  sse  $v = \alpha(e_1 + e_2)$ . Desse modo, nesse exemplo, temos que  $W^\perp = W$ .

Temos contudo, as seguintes propriedades:

**Lema 2.1.14** *Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita com métrica  $g$ . Então*

- (i)  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ ,
- (ii)  $(W^\perp)^\perp = W$ .

*Demonstração:* (i) - Tome uma base ordenada  $\{u_1, \dots, u_n\}$  tal que  $\{u_1, \dots, u_k\}$  seja base de  $W$ . Temos que  $v \in W^\perp$  sse  $g(v, u_j) = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ . Se  $A$  for a matriz de  $g$  na base acima e  $v = \sum_{j=1}^n v_j u_j$ , então essa condição é equivalente a  $\sum_{j=1}^n A_{ij} v_j = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ . Como  $A$  é não-degenerada, temos que  $\dim(W^\perp) = n - k$ , e o resultado segue.

(ii) - Pela definição de  $W^\perp$ ,  $v \in W$  sse  $v \perp W^\perp$ , isto é, sse  $v \in (W^\perp)^\perp$ . □

O lema a seguir dá condições necessárias e suficientes para que tenhamos  $V = W \oplus W^\perp$  [33].

**Lema 2.1.15** *Um subespaço  $W \subset V$  é não-degenerado se, e somente se,  $V = W \oplus W^\perp$ .*

*Demonstração:* Como  $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim(W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp)$  e  $\dim W + \dim(W^\perp) = \dim V$ , temos que  $V = W \oplus W^\perp$  sse  $W \cap W^\perp = \{0\}$ . Mas  $W \cap W^\perp = \{v \in W; v \perp W\}$  é o subespaço nulo se, e somente se,  $W$  for não-degenerado. □

É imediato do lema acima que  $W$  é não-degenerado se, e somente se,  $W^\perp$  o for. Definimos agora o objeto principal desta seção, uma métrica lorentziana sobre um espaço vetorial, e apresentamos os principais resultados provenientes dessa estrutura. Seguiremos abaixo principalmente a referência [33].

**Definição 2.1.16** *Uma métrica lorentziana sobre  $V$  é uma métrica sobre  $V$  de índice 1. Um espaço vetorial  $V$  com  $\dim V \geq 2$  munido de uma métrica lorentziana é chamado de espaço vetorial lorentziano.*

Uma métrica lorentziana divide um espaço vetorial em três regiões disjuntas:  $g(v, v) < 0$ ,  $g(v, v) = 0$  e  $g(v, v) > 0$ .

**Definição 2.1.17** *Um vetor  $v$  em um espaço vetorial  $V$  com métrica lorentziana  $g$  é dito*

- (i) *tipo-tempo* se  $g(v, v) > 0$ ,
- (ii) *nulo* ou *tipo-luz* se  $g(v, v) = 0$  com  $v \neq 0$ ,
- (iii) *tipo-espaço* se  $g(v, v) < 0$  ou  $v = 0$ .

*O conjunto  $\Lambda$  de todos os vetores tipo-luz de  $V$  é denominado o cone de luz de  $V$  com respeito a  $g$ . O tipo do vetor é denominado seu caráter causal.*

A definição acima é estendida para subespaços de  $V$  da seguinte maneira: Um subespaço  $W$  de  $V$  é dito *tipo-espaço* se  $g|_W$  for negativa definida, *tipo-tempo* se  $g|_W$  for não-degenerada de índice 1, e *tipo-luz* se  $g|_W$  for degenerada. Assim como no caso de vetores, o tipo de subespaço a que  $W$  pertence é denominado seu caráter causal.

**Lema 2.1.18** *Se  $z$  for um vetor tipo-tempo em um espaço vetorial lorentziano  $V$ , então o subespaço  $\text{span}(z)^\perp$  é tipo-espaço e  $V = \text{span}(z) \oplus \text{span}(z)^\perp$*

*Demonstração:* Pelo lema (2.1.15),  $V = \text{span}(z) \oplus \text{span}(z)^\perp$ . Além disso, pelo teorema (2.1.8), temos que  $g|_{\text{span}(z)^\perp}$  é negativa definida (basta tomar uma base ortonormal de  $\text{span}(z)^\perp$ ), e portanto  $\text{span}(z)^\perp$  é tipo-espaço.  $\square$

Segue do lema que um subespaço  $W \subset V$  é tipo-tempo se, e somente se,  $W^\perp$  for tipo-espaço, e que  $W$  é tipo-luz se, e somente se,  $W^\perp$  for tipo-luz.

**Lema 2.1.19** *Seja  $V$  um espaço vetorial lorentziano. Então*

- (i) *Vetores tipo-luz ortogonais são colineares;*
- (ii) *Dois vetores ortogonais que não são tipo-espaço devem ser tipo-luz, e portanto colineares;*
- (iii) *Não existe subespaço bidimensional de  $V$  onde a métrica seja identicamente nula.*

*Demonstração:* (i) - Sejam  $u, v$  vetores tipo-luz ortogonais. Pelo teorema (2.1.8), existem um vetor unitário tipo-tempo  $w$ , vetores tipo-espaço  $\tilde{u}, \tilde{v}$  e constantes não nulas  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $u = aw + \tilde{u}$ ,  $v = bw + \tilde{v}$ . Como  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$  são tipo-espaço, a desigualdade de Schwarz nos dá  $|g(\tilde{u}, \tilde{v})|^2 \leq |g(\tilde{u}, \tilde{u})| \cdot |g(\tilde{v}, \tilde{v})|$ , com igualdade se e somente se os vetores forem colineares. De  $g(u, u) = 0$  temos que  $g(\tilde{u}, \tilde{u}) = -a^2$ , de  $g(v, v) = 0$  temos  $g(\tilde{v}, \tilde{v}) = -b^2$  e de  $g(u, v) = 0$  temos que  $g(\tilde{u}, \tilde{v}) = -ab$ . Logo há a igualdade, e portanto existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{u} = \alpha\tilde{v}$ . De  $g(\tilde{u}, \tilde{v}) = -ab$  segue que  $\alpha = a/b$ , e portanto  $u$  e  $v$  são colineares.

(ii) - Pelo lema (2.1.18) não existem dois vetores tipo-tempo ortogonais. Logo, dois vetores ortogonais que não sejam tipo-espaço devem ser tipo-luz, e portanto colineares pelo item (i).

(iii) - Pelo argumento usado na demonstração do item (i), não pode existir um subespaço com dimensão maior do que 1 onde a métrica seja identicamente nula.  $\square$

É fácil verificar se um subespaço de  $V$  é tipo-espaço. Veremos agora critérios para que um subespaço de  $V$  seja tipo-tempo ou tipo-luz, respectivamente.

**Lema 2.1.20** *Seja  $W$  um subespaço de dimensão  $\geq 2$  de um espaço vetorial lorentziano  $V$ . As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i)  $W$  é tipo-tempo;
- (ii)  $W$  contém dois vetores tipo-luz linearmente independentes;
- (iii)  $W$  contém um vetor tipo-tempo.

*Demonstração:* (iii) $\Rightarrow$ (i) é imediato. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seja  $\{v_1, \dots, v_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ , com  $v_1$  tipo-tempo e  $v_2$  tipo-espaço vetores de  $W$ . Então  $v_1 + v_2$  e  $v_1 - v_2$  são vetores tipo-luz linearmente independentes. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Pelo lema anterior, se  $u$  e  $v$  forem vetores tipo-luz linearmente independentes, então  $g(u, v) \neq 0$ . Logo, ou  $u + v$  ou  $u - v$  será tipo-tempo.  $\square$

**Lema 2.1.21** *Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial lorentziano  $V$ . São equivalentes:*

- (i)  $W$  é tipo-luz
- (ii)  $W$  contém um vetor tipo-luz mas não contém nenhum vetor tipo-tempo;
- (iii)  $W \cap \Lambda = L \setminus \{0\}$ , onde  $L$  é um subespaço unidimensional de  $V$ .

*Demonstração:* (i) $\Rightarrow$ (ii): Como  $W$  é degenerado, contém um vetor tipo-luz. Pelo lema anterior, não pode conter um vetor tipo-tempo. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Segue do lema (2.1.19). (iii) $\Rightarrow$ (i):  $W$  não pode ser tipo-espaço, pois contém um vetor tipo-luz. Pelo lema anterior, também não pode ser tipo-tempo.  $\square$

Dado um vetor  $u \in V$  tipo-tempo, seja

$$C(u) = \{v \in V \text{ tipo-tempo ; } g(v, u) > 0\} \quad (2.2)$$

o *cone temporal* de  $V$  contendo  $u$ . Claramente,  $C(-u)$  é um cone temporal disjunto de  $C(u)$ . Além disso, como  $\text{span}(u)^\perp$  é tipo-espço, temos que o conjunto dos vetores tipo-tempo de  $V$  é dado por  $C(u) \cup C(-u)$ . Além disso, das propriedades da métrica segue que os cones temporais são conjuntos convexos.

**Lema 2.1.22** *Vetores tipo-tempo  $u$  e  $v$  estão no mesmo cone temporal se, e somente se,  $g(u, v) > 0$ .*

*Demonstração:* Tome  $v \in C(u)$  e  $w$  tipo-tempo. Sem perda de generalidade, podemos tomar  $u$  unitário. O argumento é semelhante ao usado na demonstração do lema (2.1.19). Escrevamos  $v = au + \tilde{v}$ ,  $w = bu + \tilde{w}$ , com  $a > 0$  (pois  $g(u, v) > 0$ ) e  $b \neq 0$  constantes não-nulas e  $\tilde{v}, \tilde{w} \perp u$ . Como  $v$  e  $w$  são tipo-tempo, temos que  $a^2 > -g(\tilde{v}, \tilde{v})$  e  $b^2 > -g(\tilde{w}, \tilde{w})$ . Além disso,  $g(v, w) = ab + g(\tilde{v}, \tilde{w})$ , e pela desigualdade de Schwarz  $|g(\tilde{v}, \tilde{w})|^2 \leq |g(\tilde{v}, \tilde{v})| \cdot |g(\tilde{w}, \tilde{w})|$ . Logo,  $g(v, w)$  tem o mesmo sinal de  $ab$ . Como  $a$  é positivo,  $g(v, w)$  tem o mesmo sinal de  $b = g(u, w)$ .  $\square$

Para vetores tipo-tempo vale um análogo da desigualdade de Schwarz, porém com o sinal da desigualdade invertido. Isso permite definir unicamente um ângulo hiperbólico entre tais vetores, em analogia com o caso em que a métrica é definida.

**Definição 2.1.23** *Definimos a **norma** de um vetor em um espaço vetorial lorentziano por*

$$|v| = \begin{cases} \sqrt{g(v, v)}, & \text{se } v \text{ for tipo-tempo;} \\ \sqrt{-g(v, v)}, & \text{se } v \text{ for tipo-espço;} \\ 0, & \text{se } v \text{ for tipo-luz.} \end{cases}$$

**Proposição 2.1.24** *Sejam  $u$  e  $v$  dois vetores tipo-tempo. Então*

- (i)  $|g(u, v)| \geq |u| \cdot |v|$ , sendo a igualdade válida somente se  $u$  e  $v$  forem colineares.
- (ii) Se  $u$  e  $v$  estiverem no mesmo cone temporal, então existe um único número  $\varphi \in [0, \infty)$  tal que  $g(u, v) = |u| \cdot |v| \cosh \varphi$ . Esse número é chamado de **ângulo hiperbólico** entre os vetores  $u$  e  $v$ .
- (iii) Se  $u$  e  $v$  estiverem no mesmo cone temporal, então  $|u| + |v| \leq |u + v|$ , sendo a igualdade válida somente se  $u$  e  $v$  forem colineares.

*Demonstração:* (i) - Escreva  $v = au + \tilde{v}$ , com  $a > 0$  e  $\tilde{v} \perp u$ . Então  $g(v, v) = a^2g(u, u) + g(\tilde{v}, \tilde{v}) > 0$ . Logo,

$$g(u, v)^2 = a^2g(u, u)^2 = (g(v, v) - g(\tilde{v}, \tilde{v}))g(u, u) \geq g(v, v)g(u, u),$$

com a igualdade válida se e somente se  $g(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0$ , isto é, se e somente se  $\tilde{v} = 0$ .

(ii) - Segue de (i), com  $g(u, v) > 0$ .

(iii) -  $(|u| + |v|)^2 = g(u, u) + g(v, v) + 2|u| \cdot |v| \leq g(u, u) + g(v, v) + 2g(u, v) = g(u + v, u + v)$ .

□

**Definição 2.1.25** Dado um vetor tipo-tempo  $u$  em  $V$ , o conjunto

$$\tilde{C}(u) = \{v \in V ; g(v, v) \geq 0, g(v, u) > 0\} \quad (2.3)$$

é chamado de **cone causal** de  $V$  contendo  $u$ .

Note que  $0 \notin \tilde{C}(u)$  e  $C(u) \subset \tilde{C}(u)$  para todo vetor tipo-tempo  $u$ , sendo essa inclusão própria. De fato,  $\tilde{C}(u)$  engloba também os vetores  $v$  do cone de luz tais que  $g(v, u) > 0$ , como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 2.1.26** Seja  $V$  um espaço vetorial lorentziano. Então

(i) Se  $u, v \in V$  não forem tipo-espaço, então estarão no mesmo cone causal se, e somente se  $g(u, v) > 0$  ou forem vetores tipo-luz colineares,  $v = \alpha u$ , com  $\alpha > 0$ ;

(ii) Se  $u$  for tipo-tempo, então  $\tilde{C}(u) = C(u) \cup \Lambda^+(u) = \overline{C(u)} \setminus \{0\}$ , onde  $\Lambda^+(u)$  é o subconjunto de  $\Lambda$  formado pelos vetores  $w \in \Lambda$  tais que  $g(u, w) > 0$  e  $\overline{C(u)}$  é o fecho de  $C(u)$ , onde  $\Lambda$  é o cone de luz de  $g$  (ver def. (2.1.17));

(iii) Cada cone causal é um conjunto convexo;

(iv) Os cones causais são as componentes conexas do conjunto de todos os vetores que não são tipo-espaço em  $V$ .

*Demonstração:* (i) - ( $\Rightarrow$ ) Seja  $w \in V$  tipo-tempo tal que  $u, v \in \tilde{C}(w)$ . Então  $g(u, w) > 0$ ,  $g(v, w) > 0$ . Temos que  $g(u, v) \geq 0$ , por um argumento semelhante ao utilizado na demonstração do lema (2.1.22). Se  $g(u, v) = 0$ , então segue do lema (2.1.19)  $u$  e  $v$  devem ser tipo-luz, com  $u = \alpha v$ , e de  $u, v \in \tilde{C}(w)$  que  $\alpha > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $g(u, v) > 0$ , temos dois casos:

(a)  $u$  é tipo-tempo. Nesse caso, segue da definição do cone causal que  $v \in \tilde{C}(u)$ .

(b)  $u$  e  $v$  são tipo-luz. Seja  $w \in V$  um vetor unitário tipo-tempo tal que  $u \in \tilde{C}(w)$ . Então  $g(u, w) > 0$ . Escrevendo  $u = aw + \tilde{u}$ ,  $v = bw + \tilde{v}$  com  $a > 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $\tilde{u}, \tilde{v} \perp w$ , temos da desigualdade de Schwarz que  $|g(\tilde{u}, \tilde{v})|^2 \leq |g(u, u)| \cdot |g(v, v)| = a^2 \cdot b^2$ , de forma que  $g(u, v) = ab + g(\tilde{u}, \tilde{v})$  tem o mesmo sinal de  $b = g(u, w)$ .

(ii) De (i),  $\tilde{C}(u) = C(u) \cup \{v \in \Lambda ; g(u, v) > 0\} = C(u) \cup \Lambda^+(u)$ . Como  $g$  é contínua,  $\overline{C(u)} = \{v \in V ; g(v, v) \geq 0, g(u, v) \geq 0\} = \{v \in V ; g(v, v) \geq 0, g(u, v) > 0\}$ , e portanto  $\tilde{C}(u) = \overline{C(u)} \setminus \{0\}$ .

(iii) - Se  $v, w \in \tilde{C}(u)$  e  $y = tv + (1 - t)w$ , com  $t \in [0, 1]$ ,

$$g(y, y) = t^2g(v, v) + (1 - t)^2g(w, w) + 2t(1 - t)g(v, w) \geq 0$$

e  $g(y, u) = tg(v, u) + (1 - t)g(w, u) > 0$ . Logo,  $\tilde{C}(u)$  é convexo.

(iv) - Do item anterior, cada cone causal é conexo. Seja  $\mathcal{V}$  o conjunto de todos os vetores de  $V$  que não são tipo-espaço. Da demonstração do item (ii), dado um vetor  $u$  tipo-tempo,  $C(\tilde{u}) \cap \mathcal{V} = C(u)$ ,  $\overline{C(-u)} \cap \mathcal{V} = C(-u)$ . Logo,  $\mathcal{V} = C(u) \cup C(-u)$  é uma cisão não-trivial de  $\mathcal{V}$ , e portanto os cones causais são as componentes conexas de  $\mathcal{V}$ .  $\square$

A próxima proposição nos diz que uma métrica lorentziana é determinada, a menos de um fator multiplicativo, por seu cone de luz. Esse resultado será útil quando formos estudar variedades de Weyl com métrica lorentziana.

**Proposição 2.1.27** *Sejam  $g$  e  $\tilde{g}$  duas métricas lorentzianas em um espaço vetorial  $V$ .  $g$  e  $\tilde{g}$  definem o mesmo cone de luz se, e somente se, existir uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{g} = \lambda g$ . Se  $\dim V > 2$ , então segue que  $g$  e  $\tilde{g}$  terão os mesmos cones causais e  $\lambda > 0$ .*

*Demonstração:* Seja  $u$  um vetor tipo-tempo unitário com respeito a  $g$ , e tome  $v$  unitário com respeito a  $g$  com  $g(u, v) = 0$ . Então, os vetores  $u \pm v$  satisfazem  $g(u \pm v, u \pm v) = 0$ , e portanto também são tipo-luz com respeito a  $\tilde{g}$ . Logo,

$$0 = \tilde{g}(u \pm v, u \pm v) = \tilde{g}(u, u) + \tilde{g}(v, v) \pm 2\tilde{g}(u, v),$$

e portanto  $\tilde{g}(u, v) = 0$ ,  $\tilde{g}(u, u) = -\tilde{g}(v, v)$ . Assim, a forma quadrática associada a  $\tilde{g}$  é um múltiplo da forma quadrática associada a  $g$ , de modo que  $\tilde{g} = \lambda g$  para alguma constante  $\lambda \neq 0$ . Se  $\dim V > 2$ , então  $g$  e  $\tilde{g}$  definem a mesma estrutura causal, logo  $\lambda > 0$ .  $\square$

Trataremos agora brevemente do conceito de isometria entre métricas, particularizando depois para métricas lorentzianas, a fim de posteriormente estender o conceito para variedades lorentzianas.

**Definição 2.1.28** *Uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$  em um espaço vetorial com métrica é uma **isometria** se  $T$  preservar a métrica  $g$ , isto é, se*

$$g(Tu, Tv) = g(u, v) \forall u, v \in V.$$

*Mais geralmente, se  $(V, g)$  e  $(\tilde{V}, \tilde{g})$  forem dois espaços vetoriais de mesma dimensão com métricas  $g$  e  $\tilde{g}$ , respectivamente, definimos uma **isometria de  $V$  em  $\tilde{V}$**  como sendo uma*

aplicação linear  $T : V \rightarrow \tilde{V}$  tal que  $\tilde{g}(Tu, Tv) = g(u, v) \forall u, v \in V$ . Nesse caso, dizemos que  $(V, g)$  e  $(\tilde{V}, \tilde{g})$  são *isométricos*.

Como no caso de operadores unitários [23],  $T : V \rightarrow \tilde{V}$  é uma isometria se, e somente se,  $T$  preservar as formas quadráticas associadas a  $g$  e  $\tilde{g}$ .

**Lema 2.1.29** *Se  $T : (V, g) \rightarrow (\tilde{V}, \tilde{g})$  for uma isometria, então  $T$  é isomorfismo.*

*Demonstração:* Basta provar que  $T$  é injetiva. Como  $T$  é isometria,  $Tv = 0 \Rightarrow \tilde{g}(Tv, Tu) = 0 \forall u \in V \Rightarrow g(v, u) = 0 \forall u \in V \Rightarrow v = 0$ , já que  $\tilde{g}$  e  $g$  são não-degeneradas.  $\square$

**Teorema 2.1.30** *O conjunto das isometrias de um espaço vetorial  $V$  com métrica  $g$  é um subgrupo de Lie mergulhado de  $GL(n, \mathbb{R})$ .*

*Demonstração:* Claramente, a composta de isometrias é uma isometria. Além disso, como toda isometria é um isomorfismo, segue que a inversa de uma isometria é uma isometria. Logo, o conjunto das isometrias de  $(V, g)$  é um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Esse conjunto é dado por

$$\{T \in L(V) ; q(Tu) = q(u) \forall u \in V\},$$

onde  $L(V)$  é o espaço vetorial dos operadores lineares em  $V$  e  $q$  é a forma quadrática associada a  $g$ . Como  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, segue que esse subgrupo é fechado, e portanto é um subgrupo de Lie mergulhado de  $GL(n, \mathbb{R})$  ([29], p. 526).  $\square$

## 2.2 Geometria riemanniana e semi-riemanniana

Primeiramente fixemos a notação utilizada ao longo do texto. Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Para cada  $p \in \mathcal{M}$ ,  $T_p\mathcal{M}$  é o espaço tangente de  $\mathcal{M}$  em  $p$ , e  $T_p^*\mathcal{M}$  o respectivo espaço cotangente.  $T\mathcal{M}$  e  $T^*\mathcal{M}$  são os fibrados tangente e cotangente de  $\mathcal{M}$ , respectivamente.  $T_s^r\mathcal{M}$  denota o fibrado tensorial dos tensores  $r$ -covariantes e  $s$ -contravariantes (ou do tipo  $(r, s)$ ), de modo que  $T_1^0\mathcal{M} = T\mathcal{M}$  e  $T_0^1\mathcal{M} = T^*\mathcal{M}$ . Utilizaremos, seguindo [29, 30],  $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$  para o conjunto das seções suaves de  $T_s^r\mathcal{M}$ . Particularmente, para campos vetoriais, será usado  $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_1^0(\mathcal{M})$ . Um fibrado vetorial  $E$  com base  $\mathcal{M}$  e projeção  $\pi$  será também denotado por  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ . O conjunto das seções suaves de  $E$  será denotado por  $\Gamma(E)$ . Um *referencial local* de  $E$  será um conjunto de seções locais  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  de  $E$  definidas em um aberto  $U \subset \mathcal{M}$  que são base de  $E_p = \pi^{-1}(p)$  para cada  $p \in U$ .

No que segue, seguiremos principalmente [30, 33].

**Definição 2.2.1** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-riemanniana em  $\mathcal{M}$ , ou simplesmente uma métrica em  $\mathcal{M}$ , é um campo tensorial  $g \in \mathcal{T}_0^2(\mathcal{M})$  simétrico e não-degenerado, de índice constante sobre  $\mathcal{M}$ .*

Desse modo uma métrica  $g$  em  $\mathcal{M}$  associa, de modo suave, uma métrica em cada espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ . Embora tenhamos dado o mesmo nome para os dois objetos, a referência a um ou a outro fica geralmente clara pelo contexto. Quando houver ambigüidade, nos referiremos especificamente à *métrica de  $\mathcal{M}$*  ou à *métrica do espaço tangente*. Note que é necessário requerer que o índice de  $g$  seja constante sobre toda a variedade. Se  $\mathcal{M}$  for conexa, então necessariamente o índice de  $g$  é constante sobre  $\mathcal{M}$ , porém nada garante que o índice de  $g$  seja o mesmo em diferentes componentes conexas de  $\mathcal{M}$ .

Se  $g$  for positiva definida sobre  $\mathcal{M}$ , de modo que determine um produto interno em cada espaço tangente de  $\mathcal{M}$ , então  $g$  é dita *riemanniana*. Se  $g$  tiver índice 1 sobre  $\mathcal{M}$ ,  $g$  é dita *lorentziana*. Uma métrica indefinida de índice qualquer recebe o nome de *métrica semi-riemanniana*, e engloba os dois casos anteriores. Da mesma forma, a variedade subjacente será chamada de riemanniana, lorentziana ou semi-riemanniana, conforme o caso. Focaremos nosso estudo em variedades semi-riemannianas e, mais especificamente, variedades lorentzianas. Esse é o caso do formalismo matemático utilizado na relatividade geral e na maior parte das teorias alternativas da gravitação propostas nos últimos anos [46, 13, 14, 11, 25], algumas das quais serão analisadas na segunda parte deste trabalho.

Notemos que toda variedade admite uma métrica riemanniana, obtida através da “colagem” de métricas construídas em abertos coordenados por meio de uma partição da unidade (ver [12], p. 47). Contudo, esse mesmo processo não pode ser aplicado para a construção de uma métrica semi-riemanniana sobre a variedade, pois não é garantido que o campo tensorial resultante seja não-degenerado. Veremos neste capítulo condições suficientes para que uma variedade possua uma métrica lorentziana. Uma caracterização das variedades que admitem métrica lorentziana pode ser encontrada em [33].

Vejamos inicialmente como é estendido o conceito de isometria entre espaços vetoriais para variedades.

**Definição 2.2.2** *Sejam  $(\mathcal{M}, g), (\mathcal{N}, h)$  variedades semi-riemannianas com métricas  $g$  e  $h$ , respectivamente. Dizemos que uma aplicação  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma *isometria* se  $F$  for um difeomorfismo que preserve as métricas de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , isto é, tal que  $F^*h = g$ . Se existir uma isometria entre duas variedades  $(\mathcal{M}, g), (\mathcal{N}, h)$ , estas serão chamadas de *isométricas*.*

A condição  $F^*h = g$  se traduz como: dado  $p \in \mathcal{M}$  e  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$ ,

$$g_p(X, Y) = h_{F(p)}(F_*X, F_*Y),$$

onde  $F_*$  é a *diferencial* de  $F$ .

Veremos adiante que a existência de uma conexão natural em uma variedade semi-riemanniana (a conexão de Levi-Civita) dá um papel fundamental para isometrias entre duas variedades semi-riemannianas. Os objetos geométricos definidos a partir dessa conexão serão preservados por isometrias, de modo que duas variedades isométricas serão tidas como indistinguíveis do ponto de vista da geometria semi-riemanniana. Essa afirmação não é verdade, contudo, para conexões mais gerais, tema do presente estudo. Para prosseguirmos, definimos a seguir uma conexão em  $\mathcal{M}$ , e apresentamos com certo detalhe os fundamentos da teoria de conexões lineares sobre uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$ . Seguiremos de perto o desenvolvimento feito em [30], com pequenas modificações.

### 2.2.1 Conexões lineares

**Definição 2.2.3** *Uma conexão em um fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad (2.4)$$

denotada por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , satisfazendo as três condições abaixo:

(i)  $\nabla_X Y$  é linear em  $X$  sobre  $C^\infty(\mathcal{M})$ :

$$\nabla_{fX_1 + X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall Y \in \Gamma(E), \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$$

(ii)  $\nabla_X Y$  é linear em  $Y$  sobre  $\mathbb{R}$  :

$$\nabla_X (aY_1 + Y_2) = a\nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(E), \forall a \in \mathbb{R}$$

(iii)  $\nabla$  satisfaz a regra do produto

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall Y \in \Gamma(E), \forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$$

$\nabla_X Y$  é chamada de *derivada covariante de  $Y$  na direção de  $X$* .

Segundo a definição acima,  $\nabla$  atua em seções globais de  $T\mathcal{M}$  e de  $E$ . Contudo, temos que a conexão tem um caráter local, como é explicitado nos lemas seguintes:

**Lema 2.2.4** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $E$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $Y \in \Gamma(E)$  e  $p \in \mathcal{M}$ . Então  $\nabla_X Y|_p$  depende somente dos valores de  $X$  e  $Y$  em uma vizinhança arbitrariamente pequena de  $p$ , isto é, se  $X = \tilde{X}$  e  $Y = \tilde{Y}$  em uma vizinhança de  $p$ , então  $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$ .*

*Demonstração:* Ver [30], p. 50. □

**Lema 2.2.5** *Nas notações do lema acima,  $\nabla_X Y|_p$  depende somente do valor de  $X$  em  $p$ .*

*Demonstração:* Ver [30], p. 50. □

Dessa forma,  $\nabla_X Y$  pode de fato ser interpretada como uma derivada direcional. Veremos agora o caso de maior interesse: quando  $E = T\mathcal{M}$ . Uma conexão em  $T\mathcal{M}$  é chamada de *conexão linear*. Frequentemente o adjetivo “linear” será omitido quando não houver perigo de confusão, chamando a conexão em  $T\mathcal{M}$  apenas de “conexão”, ou “conexão em  $\mathcal{M}$ ”. Esse será o caso daqui para a frente, a menos que esteja explícito o contrário.

Se  $\{E_i\}_{i=1}^n$  for um referencial local para  $T\mathcal{M}$  em um aberto  $U \in \mathcal{M}$ , definimos os *coeficientes da conexão* em relação a esse referencial por

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k. \quad (2.5)$$

Na fórmula acima, assim como no restante do texto, é usada a convenção de Einstein, segundo a qual índices repetidos devem ser somados de 1 a  $n$  (onde  $n$  é a dimensão da variedade), a menos que se diga o contrário.

A conexão é completamente determinada por seus coeficientes. De fato, se  $X = X^i E_i$  e  $Y = Y^j E_j$  em  $U$ , então

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k \quad (2.6)$$

em  $U$ . Para um referencial coordenado  $\{\partial_i\}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i (\nabla_i Y^j) \partial_j \\ &= X^i (\partial_i Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde

$$\nabla_i Y^j := \partial_i Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k. \quad (2.8)$$

Uma conexão determina, dessa forma, a derivada covariante de campos vetoriais. Existe uma generalização natural dessa definição para campos tensoriais arbitrários, dada pelo lema seguinte [30]:

**Lema 2.2.6** *Seja  $\nabla$  uma conexão linear em  $\mathcal{M}$ . Então  $\nabla$  define uma única conexão em cada fibrado tensorial  $T_s^r(\mathcal{M})$ , também denotada por  $\nabla$ , tal que:*

- (i) *Em  $T\mathcal{M}$ ,  $\nabla$  coincide com a conexão original.*

(ii) Em  $C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $\nabla$  coincide com a derivação:

$$\nabla_X f = X(f) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

(iii)  $\nabla$  satisfaz a regra do produto com respeito ao produto tensorial:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes \nabla_X G.$$

(iv)  $\nabla$  comuta com contrações:

$$\nabla_X(\text{tr}F) = \text{tr}(\nabla_X F),$$

onde  $\text{tr}$  denota a contração com respeito a algum par de índices.

Essa conexão também satisfaz:

(v) Para  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  e  $\omega$  uma 1-forma,

$$\nabla_X(\omega \cdot Y) = (\nabla_X \omega) \cdot Y + \omega \cdot (\nabla_X Y).$$

(vi) Para  $F \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ , campos vetoriais  $Y_i$  e 1-formas  $\omega^j$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^r F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^s F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s). \end{aligned} \quad (2.9)$$

*Demonstração:* Primeiramente, notemos que as propriedades (i)-(iv) implicam (v) e (vi). Para uma 1-forma  $\omega$  e um campo vetorial  $Y$ ,  $\omega(Y) = \text{tr}(\omega \otimes Y)$ . Logo, por (iv) e (iii),

$$\nabla_X(\omega(Y)) = \text{tr}(\nabla_X(\omega \otimes Y)) = \text{tr}((\nabla_X \omega) \otimes (Y) + \omega \otimes (\nabla_X Y)), \quad (2.10)$$

e portanto a afirmamação (v) segue das anteriores. Para campos tensoriais irredutíveis, (iii) e (v) implicam (vi). Como (vi) define uma conexão em  $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{M})$ , (vi) vale para campos tensoriais arbitrários. Dessa forma, (vi) é a única conexão que satisfaz (i) - (iv).  $\square$

Em coordenadas, temos para uma 1-forma  $\omega = \omega_i dx^i$  e para um campo vetorial  $X = X^j \partial_j$  em um aberto  $U \subset \mathcal{M}$ ,

$$\nabla_X \omega = X^i (\partial_i \omega_k - \omega_j \Gamma_{ik}^j) dx^k. \quad (2.11)$$

Para um campo tensorial  $F \in \mathcal{T}_s^r(U)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_X F &= X^q \left( \partial_q F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + \sum_m \Gamma_{qp}^{i_m} F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots p \dots i_s} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_n \Gamma_{q i_n}^p F_{j_1 \dots p \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \right) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_s} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Temos o seguinte resultado:

**Lema 2.2.7** *Seja  $\nabla$  uma conexão linear em  $M$  e  $F \in \mathcal{T}_s^r(U)$ . Então a aplicação*

$$\nabla F : (\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s, X) \mapsto (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \quad (2.13)$$

*definida em (2.2.6) é um campo tensorial suave  $(r+1)$ -covariante e  $s$ -contravariante.*

*Demonstração:* Ver [30], p. 54. □

Em coordenadas, escrevemos para um tensor do tipo  $(r,s)$

$$\nabla_X F = X^q \nabla_q F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_s} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r},$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_q F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} &= \partial_q F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + \sum_m \Gamma_{qp}^{i_m} F_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots p \dots i_s} - \\ &\quad - \sum_n \Gamma_{q i_n}^p F_{j_1 \dots p \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

é a *derivada covariante parcial* de  $F$  com respeito à coordenada  $q$  nesse sistema de coordenadas.

### 2.2.2 Aceleração e geodésicas

Uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$  permite definir de maneira invariante a derivada direcional de um campo vetorial ao longo de uma curva, e assim calcular a aceleração de uma curva com respeito a essa conexão. O lema abaixo formaliza esse conceito. Aqui,  $\mathfrak{X}(\gamma)$  representa o conjunto dos campos vetoriais suaves sobre a imagem de  $\gamma$  em  $\mathcal{M}$ . Além disso, a menos que dito o contrário,  $I$  e  $J$  serão intervalos da reta.

**Lema 2.2.8** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$  e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo da reta. Para cada curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\nabla$  determina um único operador*

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

satisfazendo:

- (i)  $D_t$  é linear sobre  $\mathbb{R}$ ;
- (ii)  $D_t$  satisfaz a regra do produto

$$D_t(fV) = fD_tV + \dot{f}V \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma), \forall f \in C^\infty(I),$$

onde  $\dot{f}$  é a derivada de  $f$ ;

- (iii) Se  $V$  for induzido por um campo vetorial  $\tilde{V}$  em  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , então

$$D_tV = (\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V});$$

- (iv) Em coordenadas locais, se  $V(t) = V^j(t)\partial_j$ , então

$$(D_tV)(t) = [\dot{V}^k(t) + V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))]\partial_k.$$

*Demonstração:* Ver [30], p. 57. □

**Definição 2.2.9** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva. Então a **aceleração** de  $\gamma$  com respeito a  $\nabla$  é dada pelo campo vetorial  $D_t\dot{\gamma}$  ao longo de  $\gamma$ .*

**Definição 2.2.10** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$ . Uma **geodésica** com respeito a  $\nabla$  é uma curva cuja aceleração com respeito a  $\nabla$  é nula.*

Em coordenadas locais  $(U, (x^i))$ , escrevendo  $x^i \circ \gamma(t) = x^i(t)$ , uma geodésica satisfaz a equação

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t) = 0. \quad (2.15)$$

Definindo a **velocidade** da curva por  $u = \dot{\gamma}$ , de forma que  $u^i = \dot{x}^i$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\dot{u}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))u^i(t)u^j(t) = 0. \quad (2.16)$$

Na definição acima, está implícito que por uma geodésica se entende uma geodésica *parametrizada*. Existe uma família de parametrizações preferenciais para uma geodésica, as

quais permitem que  $D_t\dot{\gamma} = 0$  ao longo de  $\gamma$ . De fato, se  $s = \phi(t)$  for uma reparametrização de  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$ , então

$$D_s\dot{\tilde{\gamma}} = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}\dot{\tilde{\gamma}}, \quad (2.17)$$

como é visto em coordenadas:

$$\frac{d^2\tilde{x}^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\tilde{x}^i}{ds} \frac{d\tilde{x}^j}{ds} = -\frac{\ddot{\phi}}{(\dot{\phi})^2} \frac{dx^k}{ds}. \quad (2.18)$$

Também é facilmente visto que, se existir uma função diferenciável  $\alpha$  tal que

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \alpha(s) \frac{dx^k}{ds}, \quad (2.19)$$

então, a menos de uma constante aditiva, a (única) aplicação  $\phi(t)$  dada pela solução da equação diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\alpha(t) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (2.20)$$

é uma reparametrização local (enquanto for inversível) de uma geodésica.

Desse modo, somos levados à seguinte definição [33]:

**Definição 2.2.11** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva. Então  $\gamma$  é uma **pré-geodésica** se existir uma reparametrização  $\phi : J \rightarrow I$  tal que  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi^{-1} : J \rightarrow \mathcal{M}$  seja uma geodésica.*

Pela observação acima,  $\gamma$  é uma pré-geodésica se, e somente se, satisfizer a relação (2.19) para alguma função  $\alpha$ .

**Definição 2.2.12** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma pré-geodésica em  $\mathcal{M}$ . Um **parâmetro afim** de  $\gamma$  é uma reparametrização de  $\gamma$  que a transforme em uma geodésica.*

Segue da definição acima e de (2.18) que, se  $s$  for um parâmetro afim de  $\gamma$ , então  $z$  também será um parâmetro afim se, e somente se,  $z = as + b$ , com  $a \neq 0$ . Além disso, se  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ , então  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\phi}(t)\dot{\tilde{\gamma}}_{\phi(t)}$ . Dessa forma, a escolha da parametrização de uma curva é equivalente à escolha (em uma métrica riemanniana, por exemplo) da norma da velocidade ao longo da curva. É de se esperar que se  $\gamma$  for uma geodésica, isto é, se sua aceleração for nula, sua parametrização afim seja tal que a norma de sua velocidade seja constante. Contudo, como a aceleração de uma curva depende da conexão tomada em  $\mathcal{M}$ , a norma do vetor velocidade de uma geodésica também dependerá. Veremos que para a conexão de Levi-Civita as geodésicas têm velocidade constante, enquanto que para conexões mais gerais (em particular para a conexão de Weyl) isso deixa de ser verdade.

Uma conexão em  $\mathcal{M}$  permite não só definir a aceleração de curvas, mas também permite comparar vetores em espaços tangentes diferentes. Em  $\mathbb{R}^n$ , dois vetores em pontos diferentes são ditos paralelos se, quando transladados para a mesma origem, forem proporcionais. Em uma variedade diferenciável, sem nenhuma estrutura adicional, não existe uma maneira “natural” de transladar vetores de um espaço tangente a outro, e portanto não é possível comparar vetores em espaços tangentes diferentes. Veremos abaixo que, dotando a variedade de uma conexão, é possível fazer essa comparação.

**Definição 2.2.13** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva. Dizemos que um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  é **paralelo ao longo de  $\gamma$  segundo  $\nabla$**  se  $D_t X = 0$  ao longo de  $\gamma$ .*

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva com  $t_0, t \in I$ . Dada uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$ , definimos o **operador de transporte paralelo**

$$P_{t_0 t} : T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t)}\mathcal{M} \quad (2.21)$$

como sendo o operador linear que associa a um vetor  $V \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$  o vetor  $V(t)$  em  $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$  obtido propagando  $V$  paralelamente - segundo a conexão  $\nabla$  - ao longo de  $\gamma$  (pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias e pelo fato de localmente  $V(t)$  ser a solução de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, temos que  $V(t)$  existe e é único para cada  $t$  - ver [21], p. 79). Além disso, como vetores linearmente independentes são levados por  $P_{t_0 t}$  em vetores linearmente independentes ([21], p. 82),  $P_{t_0 t}$  é um isomorfismo. O lema seguinte nos dá uma relação entre a derivada covariante de um vetor ao longo de uma curva e o respectivo operador de transporte paralelo [30]:

**Lema 2.2.14** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva, com  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Então, nas notações acima,*

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0}. \quad (2.22)$$

*Demonstração:* Seja  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  um referencial paralelo ao longo de  $\gamma$ , com  $E_j(t_0) = E_j$ . Escrevendo  $V(t_0) = V_0^j E_j, V(t) = V^j(t) E_j(t)$  temos que  $D_t V(t) = \dot{V}^j(t) E_j(t)$ , e  $P_{t_0 t}^{-1} V(t) = V^j(t) E_j$ . Logo,

$$\frac{1}{t - t_0} (P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)) = \frac{1}{t - t_0} (V^j(t) - V_0^j) E_j,$$

e a expressão segue. □

Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias [42], temos que dado um vetor  $V_p \in T_p\mathcal{M}$  existe uma única geodésica com posição inicial  $p$  e velocidade inicial  $V_p$ . Também, dada uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  e  $V_p \in T_p\mathcal{M}$  com  $\gamma(t_0) = p$ , existe um único campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  paralelo ao longo de  $\gamma$  tal que  $V(t_0) = V_p$ . Nesse caso, dizemos que o campo vetorial  $V$  é obtido *propagando paralelamente*  $V_p$  ao longo de  $\gamma$ . Note que todos esses conceitos dependem da conexão tomada em  $\mathcal{M}$ , de modo que um campo vetorial paralelo ao longo de uma curva em relação a uma dada conexão não será necessariamente paralelo em relação a outra conexão.

Dessa forma, uma geodésica pode ser indexada pelo vetor no fibrado tangente que a gera (onde implicitamente fica informado o ponto da variedade onde a curva começa). Dado  $V \in T_p\mathcal{M}$ , denotamos por  $\gamma_V$  a geodésica maximal com  $\gamma_V(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_V(0) = V$  daqui por diante. Fazendo  $t \mapsto at$ , segue das observações acima que  $t \mapsto \gamma_V(at)$  também será uma geodésica, com velocidade inicial  $a\dot{\gamma}_V(0) = aV$ . Logo, temos que

$$\gamma_V(at) = \gamma_{aV}(t) \quad (2.23)$$

para  $at$  no domínio de definição de  $\gamma_V$ .

Seja  $\mathcal{E} \subset T\mathcal{M}$  o conjunto de todos os vetores  $V \in T\mathcal{M}$  para os quais a geodésica  $\gamma_V$  esteja definida ao menos em  $[0,1]$ , e defina  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p\mathcal{M}$ . Definimos a *aplicação exponencial* como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{M}, \\ V &\mapsto \gamma_V(1) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $\gamma_V$  é a geodésica com velocidade inicial  $V$ . Em coordenadas locais, com  $u^j = \dot{x}^j$ , a exponencial é dada pelo fluxo de

$$\begin{aligned} \dot{u}^k &= -\Gamma_{ij}^k(x)u^i u^j, \\ \dot{x}^k &= u^k, \end{aligned} \quad (2.25)$$

para  $k = 1, \dots, n$ , avaliado em  $t = 1$ . Da diferenciabilidade do fluxo de uma equação diferencial com respeito aos parâmetros ([42], p. 38), segue que  $\mathcal{E}$  é aberto em  $T\mathcal{M}$  e que  $\exp : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  é suave. Além disso,  $\mathcal{E}_p$  é um aberto de  $T_p\mathcal{M}$  para cada  $p \in \mathcal{M}$ . Também, de (2.23) segue que  $\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t)$ . Também é imediato que, dado  $V \in \mathcal{E}$ ,  $tV \in \mathcal{E} \forall t \in [0,1]$ . Logo, temos provado seguinte teorema [30]:

**Teorema 2.2.15** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$  e  $\exp : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  a aplicação exponencial definida por essa conexão. Então:*

- (i)  $\mathcal{E}$  é aberto em  $T\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}_p$  é um aberto estrelado com relação a 0 para cada  $p \in \mathcal{M}$ .
- (ii) Para cada  $V \in T\mathcal{M}$ ,

$$\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  para o qual a expressão fizer sentido.

- (iii) a aplicação exponencial é suave.

Para cada  $p \in \mathcal{M}$ , defina a aplicação  $\exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{M}$  dada por  $\exp_p(V) = \exp(V) \forall V \in \mathcal{E}_p$ , restrição da aplicação exponencial a  $\mathcal{E}_p$ . Como  $\dot{\gamma}_V(0) = V$ , segue que  $d(\exp_p)(0) = Id : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ , e portanto pelo teorema da aplicação inversa a aplicação exponencial é um difeomorfismo local.

Notemos que a aplicação exponencial não é necessariamente um difeomorfismo global. Isso não ocorre, por exemplo, se duas geodésicas se cruzarem em dois pontos distintos (a exponencial deixa de ser injetora). Seja  $S^2$  a esfera unitária bidimensional com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ . Então, com a conexão riemanniana associada, as geodésicas de  $S^2$  são os “grandes círculos” que cortam a esfera, e portanto se cruzam em mais de um ponto (ver [29], p. 82).

**Definição 2.2.16** *Uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  que seja a imagem de um aberto de  $T_p\mathcal{M}$  estrelado com relação a 0 pelo difeomorfismo  $\exp_p$  é chamada de **vizinhança normal** de  $p$ .*

Seja  $g$  uma métrica semi-riemanniana em  $\mathcal{M}$ . Então, dada uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_p\mathcal{M}$ ,  $F(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i E_i$  é um isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  em  $T_p\mathcal{M}$ . Dada uma vizinhança normal  $\mathcal{U}$  de  $p$ , a aplicação  $\varphi = F^{-1} \circ (\exp_p)^{-1}$  é então um sistema de coordenadas em  $\mathcal{M}$  com domínio  $\mathcal{U}$ , denominado **sistema de coordenadas normais** centrado em  $p$ . Cada base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$  determina um sistema de coordenadas normais diferente. Temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.2.17** *Seja  $(\mathcal{U}, (x^i))$  um sistema de coordenadas normais centrado em  $p \in \mathcal{M}$ . Então*

- (i) Para  $V = V^i \partial_i \in T_p\mathcal{M}$  com relação ao sistema de coordenadas normais, a geodésica  $\gamma_V$  é dada, em  $\mathcal{U}$ , por

$$\varphi \circ \gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n);$$

- (ii)  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ ;

(iii) Em  $p$ , as componentes da métrica são dadas por  $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ , onde  $\varepsilon_i = \pm 1$ , de acordo com o índice da métrica.

*Demonstração:* (i), (ii) e (iii) seguem do fato de  $(\mathcal{U}, (x^i))$  serem coordenadas normais centradas em  $p$ .  $\square$

Dada uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$ , definimos o *tensor de torção* de  $\nabla$  como a aplicação

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \\ \tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

É fácil ver que  $\tau$  é um (2,1)-campo tensorial em  $\mathcal{M}$ . Dizemos que a conexão  $\nabla$  é *simétrica* se sua torção for identicamente nula.

**Lema 2.2.18** *Uma conexão  $\nabla$  é simétrica se, e somente se, seus coeficientes em todo sistema de coordenadas satisfizerem  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .*

*Demonstração:* Em um sistema de coordenadas,  $[\partial_i, \partial_j] = 0 \forall i, j$ . Escrevendo  $\tau(\partial_i, \partial_j) = \tau_{ij}^k \partial_k$ , temos que

$$\tau_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k, \quad (2.27)$$

e o resultado segue.  $\square$

**Lema 2.2.19** *Nas condições da proposição (2.2.17), os coeficientes de uma conexão simétrica em um sistema de coordenadas normais centrado em  $p$  se anulam em  $p$ .*

*Demonstração:* Como  $\ddot{x}^k = 0$  em  $\mathcal{U}$  para  $\gamma_V$  com  $V \in T_p \mathcal{M}$  suficientemente pequeno, temos que  $\Gamma_{ij}^k(p) V^i V^j = 0$  para  $V$  suficientemente pequeno. Como  $((V^i), (W^j)) \mapsto \Gamma_{ij}^k(p) V^i W^j$  é bilinear e simétrica, segue que  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ .  $\square$

Definimos também, dada uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$ , a aplicação

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A aplicação acima é um campo tensorial do tipo (3,1) [30], e é denominada o *tensor de curvatura* (ou *tensor de Riemann*) de  $\nabla$ . Em coordenadas, escrevendo  $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^l \partial_l$ , segue das propriedades da conexão (def. (2.2.3)) que

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^e \Gamma_{ie}^l - \Gamma_{ik}^e \Gamma_{je}^l. \quad (2.29)$$

Seja  $F$  um campo tensorial em  $\mathcal{M}$ . Então, dada uma conexão  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$ , a derivada covariante de  $F$  é definida pela expressão (2.13). Definimos a *derivada covariante segunda* do campo tensorial  $F$  por

$$\nabla\nabla F := \nabla(\nabla F)$$

**Lema 2.2.20** *Seja  $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Então*

$$\nabla\nabla Z(X, Y) - \nabla\nabla Z(Y, X) = -R(X, Y)Z + \nabla_{\tau(X, Y)}Z.$$

*Demonstração:* Notemos que, se  $\omega$  for uma 1-forma,

$$\begin{aligned} \nabla\nabla Z(X, Y) \cdot \omega &= [\nabla_Y(\nabla Z)](X) \cdot \omega \\ &= \nabla_Y(\nabla Z(X) \cdot \omega) - \nabla Z(\nabla_Y X) \cdot \omega - \nabla Z(X) \cdot \nabla_Y \omega \\ &= \nabla_Y(\nabla Z(X) \cdot \omega) - \nabla_{\nabla_Y X} Z \cdot \omega - \nabla_X Z \cdot \nabla_Y \omega \\ &= [(\nabla_Y \nabla_X Z) \cdot \omega + \nabla_X Z \cdot \nabla_Y \omega] - \nabla_{\nabla_Y X} Z \cdot \omega - \nabla_X Z \cdot \nabla_Y \omega \\ &= (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \cdot \omega, \end{aligned}$$

de maneira que

$$\nabla\nabla Z(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla\nabla Z(X, Y) - \nabla\nabla Z(Y, X) &= (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z - (\nabla_{\nabla_Y X} - \nabla_{\nabla_X Y})Z \\ &= (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]})Z - (\nabla_{\nabla_Y X} - \nabla_{\nabla_X Y} + \nabla_{[X, Y]})Z \\ &= -R(X, Y)Z + \nabla_{\tau(X, Y)}Z. \end{aligned}$$

□

Notemos que  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ . Temos o seguinte lema:

**Lema 2.2.21** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$ , e  $R$  seu tensor de curvatura. Então,*

- (i)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ ;
- (ii) *Se  $\nabla$  for simétrica, então*

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0; \tag{2.30}$$

*essa relação é conhecida como primeira identidade de Bianchi, ou identidade de Bianchi algébrica.*

(iii) Se  $\mathcal{M}$  for dotada de uma métrica tal que  $\nabla g = 0$ , então

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z); \quad (2.31)$$

(iv) Se a conexão satisfizer as condições dos itens (ii) e (iii), então

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y). \quad (2.32)$$

*Demonstração:* Ver [30], p. 121. □

Em um referencial local, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) se traduzem, respectivamente, em:

$$R_{ijk}{}^l = -R_{jik}{}^l \quad (2.33)$$

$$R_{ijk}{}^l + R_{kij}{}^l + R_{jki}{}^l = 0 \quad (2.34)$$

$$g_{lm}R_{ijk}{}^l = -g_{lk}R_{ijm}{}^l \quad (2.35)$$

$$g_{lm}R_{ijk}{}^l = -g_{lj}R_{kmi}{}^l \quad (2.36)$$

Se  $\nabla$  for uma conexão simétrica, então temos uma igualdade diferencial para seu tensor de curvatura, conhecida como *segunda identidade de Bianchi* ou *identidade de Bianchi diferencial*. É dada pela seguinte proposição:

**Proposição 2.2.22** *Seja  $\nabla$  uma conexão simétrica em  $\mathcal{M}$ . Então*

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0. \quad (2.37)$$

*Demonstração:* Ver [33], p. 76. Note que basta que a conexão seja simétrica para que seus coeficientes se anulem em  $p$  para um sistema de coordenadas normais centrado nesse ponto (lema (2.2.19)). □

Em coordenadas locais, a equação (2.37) é escrita como

$$\nabla_q R_{ijk}{}^l + \nabla_i R_{jqk}{}^l + \nabla_j R_{qik}{}^l = 0. \quad (2.38)$$

**Definição 2.2.23** *O tensor de Ricci “ $Rc$ ” é o  $(2,0)$ -campo tensorial obtido tomando o traço do tensor de curvatura em relação a sua primeira componente. Em um referencial local, temos*

$$(Rc)_{jk} = R_{ijk}{}^i \quad (2.39)$$

É comum utilizarmos a notação  $(Rc)_{jk} = R_{jk}$  quando não houver perigo de confusão. O tensor de Ricci tem papel fundamental na teoria da relatividade geral e em outras teorias relativísticas da gravitação, como será visto adiante.

Dada uma métrica semi-riemanniana  $g$  em  $\mathcal{M}$ , definimos o *escalar de curvatura* (ou *escalar de Ricci*)  $Rs$  como sendo o traço de  $Rc$  em relação a  $g$ . Em coordenadas,

$$Rs = g^{ij}(Rc)_{ij}. \quad (2.40)$$

Novamente, quando não houver perigo de confusão, denotaremos o escalar de curvatura simplesmente por  $R$ .

**Definição 2.2.24** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade dotada de uma conexão  $\nabla$ . Dizemos que  $\nabla$  é plana se seu tensor de curvatura for identicamente nulo. Se a conexão em  $\mathcal{M}$  já estiver subentendida, diremos simplesmente que  $\mathcal{M}$  é plana.*

### 2.2.3 Conexão riemanniana

As construções acima são válidas para uma conexão arbitrária. Duas conexões distintas em  $\mathcal{M}$ , no entanto, determinam aplicações exponenciais diferentes e tensores de curvatura (e torção) diferentes, a princípio. Vejamos agora uma conexão fundamental em geometria riemanniana e semi-riemanniana, a conexão de Levi-Civita.

**Definição 2.2.25** *Seja  $g$  uma métrica semi-riemanniana em  $\mathcal{M}$ . Uma conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  se, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (2.41)$$

Temos o seguinte resultado [30]:

**Teorema 2.2.26** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $(\mathcal{M}, g)$ . São equivalentes:*

- (i)  $\nabla$  é compatível com  $g$ ;
- (ii)  $\nabla g = 0$ ;
- (iii) Se  $Y$  e  $Z$  forem campos vetoriais ao longo de uma curva  $\gamma$ , então

$$\frac{d}{dt}(g(Y, Z)) = g(D_t Y, Z) + g(Y, D_t Z); \quad (2.42)$$

(iv) Se  $Y$  e  $Z$  forem campos vetoriais paralelos ao longo de uma curva  $\gamma$ , então  $g(Y, Z)$  é constante ao longo de  $\gamma$ .

*Demonstração:* Pelo item (vi) do lema (2.2.6),

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (2.43)$$

Logo, (i) e (ii) são equivalentes. É imediato que (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Para provar que (iv) $\Rightarrow$ (ii), sejam  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\gamma$  uma curva com  $\gamma(0) = p$  e  $Y, Z$  campos vetoriais paralelos ao longo de  $\gamma$ . Então, pela equação (2.43),  $(D_t g)_p(Y, Z) = 0$ . Como  $D_t g = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} g$  e  $Y$  e  $Z$  são arbitrários, segue que  $(\nabla g)_p = 0$ .  $\square$

Temos o seguinte teorema, que nos fornece uma conexão “natural” em uma variedade com métrica semi-riemanniana:

**Teorema 2.2.27** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com métrica semi-riemanniana  $g$ . Existe uma única conexão  $\check{\nabla}$  em  $\mathcal{M}$  simétrica e compatível com  $g$ .*

*Demonstração:* Apresentaremos abaixo uma idéia da demonstração. A demonstração completa do teorema encontra-se em [29], p. 68.

Pode-se mostrar que uma conexão satisfazendo as hipóteses do teorema satisfaz

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) - g(X, [Y, Z])\}. \quad (2.44)$$

o que a determina unicamente (já que  $g$  é não-degenerada).

Dada uma vizinhança coordenada  $U$ , podemos construir nessa vizinhança uma conexão a partir da equação (2.44), cujos coeficientes nesse sistema de coordenadas são

$$\{^i_{jk}\} = g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}), \quad (2.45)$$

onde  $(g^{il})$  é a inversa de  $g_{jk}$ . Essa conexão (definida em  $U$ ) é simétrica e compatível com a métrica (restrita a  $U$ ), e portanto é a única conexão em  $U$  com essas propriedades. Definindo em cada sistema de coordenadas os coeficientes da conexão por (2.45), construímos uma conexão em  $\mathcal{M}$  que satisfaz as condições do teorema (pela unicidade, essa conexão está bem definida).  $\square$

**Definição 2.2.28** *A conexão dada no teorema (2.2.27) é denominada **conexão riemanniana** ou **conexão de Levi-Civita** associada à métrica  $g$ . Os coeficientes dessa conexão em um dado sistema de coordenadas são denominados os **símbolos de Christoffel** em relação a esse sistema de coordenadas.*

A conexão de Levi-Civita é completamente determinada pela métrica, como é visto pela eq. (2.45). Além disso, possui certas propriedades que podem ser consideradas “naturais” ou “intuitivas”, como é descrito a seguir.

Primeiramente, notamos que as geodésicas dessa conexão (isto é, as curvas de aceleração nula) possuem velocidade constante. Isto é, dado um vetor  $V \in T_p\mathcal{M}$  tal que  $g(V, V) = a \neq 0$ , temos que o vetor tangente  $V(t)$  à geodésica gerada por  $V$  será tal que  $g(V(t), V(t)) = a$  para todo  $t$  no domínio da geodésica. Isso, na verdade, é válido para toda conexão compatível com a métrica e segue do item (iv) do teorema (2.2.26), pois o vetor tangente a uma geodésica é paralelo ao longo da geodésica.

Temos também o seguinte lema, que de certa forma torna a conexão de Levi-Civita “natural”:

**Lema 2.2.29** *Sejam  $\varphi : (\mathcal{M}, g) \rightarrow (\mathcal{M}^\clubsuit, g^\clubsuit)$  uma isometria, e  $\check{\nabla}$  e  $\check{\nabla}^\clubsuit$  as conexões riemannianas de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}^\clubsuit$ , respectivamente. Então*

- (i)  $\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit = \check{\nabla}$ ;
- (ii) Se  $\gamma$  for uma curva em  $\mathcal{M}$ ,  $\varphi_*D_tV = D_t^\clubsuit(\varphi_*V)$ ;
- (iii)  $\varphi$  leva geodésicas em geodésicas:  $\varphi \circ \gamma_V = \gamma_{\varphi_*V}$

*Demonstração:* (i) - É imediato ver que  $(\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_XY := \varphi_*^{-1}(\check{\nabla}^\clubsuit)_{\varphi_*X}(\varphi_*Y)$  é uma conexão em  $\mathcal{M}$  (isto é, que satisfaz as condições da definição (2.2.3)). Como

$$\begin{aligned} (\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_XY - (\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_YX &= \varphi_*^{-1}[(\check{\nabla}^\clubsuit)_{\varphi_*X}(\varphi_*Y) - (\check{\nabla}^\clubsuit)_{\varphi_*Y}(\varphi_*X)] \\ &= \varphi_*^{-1}([\varphi_*X, \varphi_*Y]) = \varphi_*^{-1}\varphi_*[X, Y] = [X, Y], \end{aligned}$$

já que  $\varphi$  é difeomorfismo, temos que  $\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit$  é simétrica. Para mostrarmos a compatibilidade com a métrica, notemos que o fato de  $\varphi$  ser uma isometria implica

$$g_p((\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_XY, Z) = g_{\varphi(p)}^\clubsuit(\check{\nabla}^\clubsuit)_{\varphi_*X}(\varphi_*Y), \varphi_*Z).$$

Como  $\check{\nabla}^\clubsuit$  é a conexão riemanniana associada a  $g^\clubsuit$ , temos que

$$\begin{aligned} g_p((\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_XY, Z) + g_p(Y, (\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit)_XZ) &= (\varphi_*X)_{\varphi(p)}g^\clubsuit(\varphi_*Y, \varphi_*Z) \\ &= X_p(g^\clubsuit(\varphi_*Y, \varphi_*Z) \circ \varphi) = X_p(g(Y, Z)). \end{aligned}$$

Logo,  $\varphi^*\check{\nabla}^\clubsuit = \check{\nabla}$ .

(ii) - Segue imediatamente do lema (2.2.8), com cartas  $(\mathcal{U}, (x^i))$  e  $(\varphi(\mathcal{U}), (x^i \circ \varphi))$ , respectivamente.

(iii) - Segue de (ii). □

A conexão riemanniana define em  $\mathcal{M}$  a aplicação exponencial relativa a ela, dada pela eq. (2.24), a qual satisfaz as condições do teorema (2.2.15) e da proposição (2.2.17). Além disso, da eq. (2.45) temos:

**Lema 2.2.30** *Nas condições da proposição (2.2.17), temos que os símbolos de Christoffel e as derivadas parciais primeiras da métrica também se anulam em  $p$ .*

*Demonstração:* A primeira afirmação segue do lema (2.2.19). A segunda segue da identidade

$$\partial_i g_{jk} = \{^l_{ij}\} g_{lk} + \{^l_{ik}\} g_{lj}.$$

□

Em coordenadas locais, no intuito de especificarmos quando estamos utilizando a conexão de Levi-Civita, escrevemos a derivada covariante de um tensor (em analogia com (2.14)) como

$$\overset{\vee}{\nabla}_{\partial_q} F = F^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r; q} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_s} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}, \quad (2.46)$$

onde

$$\begin{aligned} F^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r; q} &= \partial_q F^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} + \sum_m \{^m_{qp}\} F^{i_1 \dots p \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} - \\ &\quad - \sum_n \{^p_{qn}\} F^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots p \dots j_r}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

A conexão de Levi-Civita, por ser simétrica e compatível com a métrica, é tal que seu tensor de curvatura satisfaz todas as propriedades do lema (2.2.21). Além disso, satisfaz também a identidade de Bianchi diferencial (2.37). Temos também uma importante relação, que envolve contrações da segunda identidade de Bianchi:

**Definição 2.2.31** *O tensor de Einstein riemanniano é definido como*

$$G = Rc - \frac{Rs}{2}g. \quad (2.48)$$

*Em coordenadas locais,*

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij}, \quad (2.49)$$

*onde  $Rc$  e  $Rs$  são dados por (2.39) e (2.40), respectivamente.*

**Lema 2.2.32** *Em coordenadas locais,*

$$G_{i;j}^j = 0, \quad (2.50)$$

onde  $G_i^j = g^{kj}G_{ik}$ .

*Demonstração:* Contraindo as identidades de Bianchi (2.38) em  $l$  e  $q$  e depois contraindo a expressão resultante com a métrica em  $k$  e  $i$  e usando (2.35), obtemos a expressão desejada.

□

Das propriedades de simetria do tensor de Riemann, segue que o tensor de Ricci é simétrico. Logo, o tensor de Einstein riemanniano é simétrico. Em relatividade geral, o tensor de Einstein riemanniano é de extrema importância devido à equação de Einstein  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$  [46], que nos dá um conjunto de equações diferenciais parciais para as componentes da métrica em um dado sistema de coordenadas.  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento, que descreve o conteúdo de matéria e energia do espaço-tempo. O lema (2.2.32) fornece, dessa forma, leis de conservação locais para o tensor de energia-momento.

Por fim, vale notar que temos uma caracterização importante das conexões riemannianas planas [30]:

**Teorema 2.2.33** *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade semi-riemanniana com a conexão de Levi-Civita  $\check{\nabla}$  associada a  $g$ . Então  $\check{\nabla}$  é plana se, e somente se, for localmente isométrica ao espaço semi-euclidiano, com o mesmo índice de  $(\mathcal{M}, g)$ .*

*Demonstração:* Ver [30], p. 119. □

## 2.2.4 Variedades lorentzianas

**Definição 2.2.34** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável e  $g$  uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$ . O par  $(\mathcal{M}, g)$  é chamado de *variedade lorentziana*.*

Uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$  determina em cada espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$  uma métrica lorentziana (de espaço vetorial), e portanto uma estrutura causal. Dessa forma, podemos estender os conceitos da seção (2.1) para variedades.

**Definição 2.2.35** *Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  é dita*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{tipo-tempo} & \textit{se } g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) > 0 \forall t \in I; \\ \textit{tipo-espaço} & \textit{se } g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) < 0 \forall t \in I; \\ \textit{tipo-luz} & \textit{se } g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \forall t \in I. \end{array} \right.$$

O tipo da curva definido acima é denominado seu *caráter causal*.

Uma definição análoga pode ser dada para campos vetoriais. Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  é dito *tipo-tempo* se  $g(X_p, X_p) > 0 \forall p \in \mathcal{M}$ . Campos vetoriais tipo-espaço e tipo-luz são definidos da mesma forma.

Note que uma curva arbitrária não necessariamente tem um caráter causal definido, isto é, não necessariamente se encaixa em algum dos casos da definição acima. Contudo, se  $(\mathcal{M}, g)$  for uma variedade lorentziana com a conexão de Levi-Civita associada a  $g$ , então a compatibilidade da conexão com a métrica garante que o vetor velocidade  $V(t)$  de uma geodésica tenha  $g(V(t), V(t))$  constante. Dessa forma, geodésicas da conexão riemanniana (ou “geodésicas riemannianas”) têm caráter causal bem-definido. Uma geodésica cujo vetor tangente seja tipo-tempo é denominada *geodésica tipo-tempo*, com definições análogas para geodésicas tipo-espaço e tipo-luz (estas últimas também conhecidas como *geodésicas nulas*). Esse resultado não é uma característica somente da conexão de Levi-Civita (ou de conexões compatíveis com a métrica): Veremos adiante que conexões de Weyl em uma variedade lorentziana também determinam geodésicas com caráter causal bem-definido.

É interessante saber se é possível definir noções de passado e futuro a partir de uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$ . Cada espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$  possui dois cones temporais, que pela proposição (2.1.26) são componentes conexas distintas do conjunto dos vetores tipo-tempo de  $T_p\mathcal{M}$ . Em cada espaço tangente, portanto, é possível definir uma noção de passado e futuro. A questão é: Será que essa noção pode ser estendida a toda a variedade de uma maneira consistente? Para respondermos a essa pergunta, lançamos mão da seguinte proposição [37]:

**Proposição 2.2.36** *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade lorentziana conexa. O conjunto  $\mathfrak{T}$  de todos os vetores tipo-tempo em  $T\mathcal{M}$  é uma subvariedade aberta. Além disso,  $\mathfrak{T}$  possui ou uma ou duas componentes conexas.*

*Demonstração:* Ver [37], p. 24. □

**Definição 2.2.37** *Uma variedade lorentziana conexa é orientável temporalmente se  $\mathfrak{T}$  possuir duas componentes conexas.*

Nesse caso, é possível definir uma *orientação temporal* para  $\mathcal{M}$  escolhendo uma das componentes conexas de  $\mathfrak{T}$ , denotada por  $\mathfrak{T}^+$ , como sendo o *futuro*. A outra componente conexa,  $\mathfrak{T}^-$ , será o *passado*. Dizemos então que  $\mathcal{M}$  está *orientada temporalmente*.

Sejam  $\mathfrak{T}_p^\pm = \mathfrak{T}^\pm \cap T_p\mathcal{M}$ , e sejam  $\Lambda^\pm = \mathfrak{T}^\pm \cap \Lambda_p$  as componentes do cone de luz  $\Lambda_p \in T_p\mathcal{M}$ , denominadas respectivamente *cone de luz futuro* e *cone de luz passado*. Um vetor

$V \in T_p\mathcal{M}$  aponta para o futuro (passado) se  $V \in \mathfrak{T}_p^+ \cup \Lambda_p^+$  ( $V \in \mathfrak{T}_p^- \cup \Lambda_p^-$ ). Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  aponta para o futuro (passado) se, para cada  $p \in \mathcal{M}$ ,  $X_p$  apontar para o futuro (passado). Analogamente, uma curva causal (isto é, cujo vetor tangente não é tipo-espaço em nenhum ponto) aponta para o futuro (passado) se seu vetor tangente apontar para o futuro (passado) em todo ponto.

Veremos na proposição a seguir uma condição necessária e suficiente para que uma variedade lorentziana (conexa) seja orientável temporalmente. Antes, contudo, veremos algumas conseqüências da orientabilidade temporal.

Se  $\mathcal{M}$  for orientável temporalmente, um *campo vetorial de caráter causal*  $Y$  em  $\mathcal{M}$  (isto é, que em cada ponto define um vetor que não é tipo-espaço) ou aponta para o futuro ou aponta para o passado. Analogamente, uma curva causal ou aponta para o futuro ou para o passado. Isso segue pois “passado” e “futuro” são componentes conexas distintas de  $\mathfrak{T}$ . Notemos que, mudando o sinal do campo vetorial ( $Y \mapsto -Y$ ), seu sentido (passado ou futuro) muda. O mesmo ocorre se percorrermos a curva em sentido contrário.

Temos uma caracterização das variedades orientáveis temporalmente:

**Proposição 2.2.38** *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade conexa com métrica lorentziana. Então  $\mathcal{M}$  é orientável temporalmente se, e somente se, existir um campo vetorial causal  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .*

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Tome uma cobertura  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de  $\mathcal{M}$  por abertos coordenados. Em cada  $U_\alpha$ , tome  $X_\alpha \in \mathfrak{T}^+ \cap U_\alpha$ , e seja  $\{f_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada a  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ . Então  $X = \sum_\alpha f_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{T}^+ \subset \mathfrak{T}$ , pois pelo lema (2.1.22) cada cone temporal é convexo.

( $\Leftarrow$ ) [37] Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  um campo vetorial de caráter causal e defina a aplicação  $\psi : \mathfrak{T} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  dada por  $\psi(p, V) = g(V, X)$ . Do lema (2.1.19) temos que  $\psi$  está bem-definida. Além disso,  $\psi$  é  $C^\infty$  e sobrejetora. Logo,  $\mathfrak{T}$  não é conexo.  $\square$

Na demonstração da proposição acima poderíamos trocar “campo vetorial causal” por “campo vetorial tipo-tempo”, com alterações mínimas na demonstração. Segue então o corolário:

**Corolário 2.2.39** *Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade conexa com métrica lorentziana. Então  $\mathcal{M}$  é orientável temporalmente se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .*

Comentamos no início da seção que toda variedade diferenciável admite métrica riemanniana, mas o mesmo não ocorre para métricas lorentzianas. Abaixo provamos uma condição suficiente para que exista uma métrica lorentziana em uma variedade  $\mathcal{M}$ : a existência de um campo vetorial que não se anule em nenhum ponto de  $\mathcal{M}$ . Segundo [33], prop. (5.37), essa

condição é também suficiente. Intuitivamente, esse campo vetorial determina uma “direção temporal” em cada espaço tangente de  $\mathcal{M}$ . No entanto, como veremos no lema a seguir, os cones de luz não dependem só desse campo vetorial, mas também de uma métrica riemanniana previamente definida em  $\mathcal{M}$ . Desse modo, diferentes métricas riemannianas em  $\mathcal{M}$  determinariam, a princípio, diferentes métricas lorentzianas para um mesmo campo vetorial, com estruturas causais diferentes.

**Lema 2.2.40** *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável com métrica riemanniana  $g$  e  $V$  um campo vetorial que não se anule em nenhum ponto de  $\mathcal{M}$ , unitário segundo  $g$ . Então a métrica  $\tilde{g} = g - 2\varphi \otimes \varphi$  é uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$ , onde  $\varphi$  é a 1-forma dual a  $V$  segundo  $g$ .  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  é orientável temporalmente.*

*Demonstração:* Primeiramente, um comentário. Dado um vetor  $X$  que não se anule em nenhum ponto de  $\mathcal{M}$ , com  $\dim \mathcal{M} = n$ , o campo vetorial  $X/|X|$  é unitário segundo  $g$ . Dito isso, vamos à demonstração do lema.

Seja  $p \in \mathcal{M}$ . Então existem vetores unitários  $E_2, \dots, E_n$  tais que  $V, E_2, \dots, E_n$  seja uma base ortonormal de  $T_p \mathcal{M}$  segundo  $g_p$ . Assim,  $\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij} \forall i, j$ ,  $\tilde{g}(V, E_j) = 0 \forall j$  mas  $\tilde{g}(V, V) = -1$ . Pelo teorema (2.1.8),  $\tilde{g}$  é lorentziana. Pela proposição (2.2.38),  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  é orientável temporalmente.  $\square$

## 2.3 Geometria de Weyl

A geometria de Weyl foi introduzida por Hermann Weyl [47, 34], no intuito de construir uma teoria física que unificasse a gravitação e o eletromagnetismo. Para isso, introduziu uma 1-forma  $A_\mu dx^\mu$  (na notação da geometria diferencial clássica) responsável pela não-metricidade da conexão, como veremos a seguir. Weyl baseou-se na idéia de que “uma verdadeira geometria infinitesimal deveria reconhecer somente um princípio para transferir a magnitude de um vetor para um ponto infinitesimalmente próximo”, e não para pontos arbitrários (no caso, que podem ser ligados por uma curva suave), como na geometria riemanniana. A 1-forma  $A_\mu dx^\mu$  representa, na teoria original de Weyl, o quadripotencial eletromagnético, e sua derivada exterior o campo eletromagnético. Na época em que foi escrito o artigo não existiam as ferramentas da geometria diferencial moderna, sendo a geometria de Weyl escrita primeiramente nessa linguagem em 1970 por Folland [17].

Trataremos aqui apenas de métricas lorentzianas, embora os resultados possam ser adaptados a outros tipos de métricas. Seguiremos principalmente [17].

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável que admite métrica lorentziana. Definimos uma relação de equivalência no conjunto das métricas lorentzianas em  $\mathcal{M}$  da seguinte maneira:

duas métricas lorentzianas  $g$  e  $\tilde{g}$  são ditas *conformemente equivalentes* se estiverem relacionadas por uma transformação conforme, isto é, se existir uma função  $\lambda \in C^\infty(\mathcal{M})$  tal que

$$\tilde{g} = e^{2\lambda}g. \quad (2.51)$$

É fácil ver que a relação binária acima é uma relação de equivalência. A notação com exponencial é uma forma de expressar o fato de que a transformação conforme é positiva e simplifica os cálculos, como será visto adiante.

**Definição 2.3.1** *Uma estrutura conforme em  $\mathcal{M}$  é uma classe de equivalência  $G$  de métricas lorentzianas segundo (2.51). Uma variedade dotada de uma estrutura conforme é dita uma **variedade conforme**.*

Pela proposição (2.1.27), se  $\dim(\mathcal{M}) \geq 3$ , temos que duas métricas lorentzianas pertencem à mesma estrutura conforme se, e somente se, possuírem a mesma *estrutura causal*. Isto é: duas métricas estão relacionadas por uma transformação conforme se, e somente se, definirem em cada espaço tangente os mesmos cones causais. No caso de métricas riemannianas (positivas definidas), uma estrutura conforme preserva os ângulos entre vetores e a razão entre suas normas. Por outro lado, seus comprimentos (absolutos) não estão definidos. Para métricas lorentzianas ocorre o mesmo: se dois vetores tipo-tempo estiverem no mesmo cone temporal, o ângulo hiperbólico entre eles e a relação entre suas normas são preservadas por transformações conformes, mas não suas normas.

**Definição 2.3.2** *Uma Estrutura de Weyl em uma variedade conforme  $(\mathcal{M}, G)$  é uma aplicação  $F : G \rightarrow \mathcal{T}_0^1(\mathcal{M})$  satisfazendo  $F(e^{2\lambda}g) = F(g) + 2d\lambda$ . Uma variedade dotada de uma estrutura de Weyl é chamada de **variedade de Weyl**. Uma métrica  $g$  e uma 1-forma  $\omega$  determinam uma única estrutura de Weyl, definida a partir de  $F(g) = 2\omega$ .*

Dada uma conexão na variedade, um método de compararmos comprimentos de vetores em diferentes pontos é a partir do transporte paralelo segundo essa conexão. No entanto, apesar de cada métrica da estrutura conforme  $G$  de  $\mathcal{M}$  definir a conexão de Levi-Civita associada, essas conexões são diferentes para diferentes métricas de  $G$ . Desse modo, ainda não temos uma conexão linear na variedade que, de certo modo, reproduza as características de sua estrutura de Weyl. Para obtermos essa conexão, é interessante verificar se existe alguma maneira dependente somente da estrutura de Weyl da variedade que permita, de alguma forma, comparar comprimentos e ângulos entre vetores em pontos diferentes. Achada essa estrutura, procuramos então relacioná-la às propriedades desejáveis para uma conexão em uma variedade de Weyl. Isso é feito a seguir.

Seguindo Folland [17], com algumas alterações de notação, temos uma forma consistente de transladar uma métrica (de algum espaço tangente  $T_p\mathcal{M}$ ) ao longo de uma curva. Sem perda de generalidade, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ , e tome uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em  $T_p\mathcal{M}$  vinda da estrutura conforme  $G$ , isto é, tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = h_p$  para alguma métrica  $h \in G$ . Seja  $g \in G$  uma extensão de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  a  $\mathcal{M}$  ( $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ). Definimos a *translação de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  para  $q$  ao longo de  $\gamma$*  como

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_q = \exp \left[ - \int_{\gamma} F(g) \right] g_q. \quad (2.52)$$

Notemos que tal definição é consistente, isto é, independe da extensão tomada em  $G$ . De fato, seja  $\lambda \in C^\infty(\mathcal{M})$  tal que  $\lambda(p) = 0$ . Então  $(e^{2\lambda}g)$  também estende  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , e

$$\int_{\gamma} F(e^{2\lambda}g) = \int_{\gamma} [F(g) + 2d\lambda] = \int_{\gamma} [F(g)] + 2\lambda(q).$$

Assim, temos que a translação de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  para  $q$  ao longo de  $\gamma$  é

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_q &= \exp \left[ - \int_{\gamma} F(g) \right] g_q = \exp \left[ - \int_{\gamma} F(g) - 2\lambda(q) \right] e^{2\lambda(q)} g_q \\ &= \exp \left[ - \int_{\gamma} F(e^{2\lambda}g) \right] (e^{2\lambda}g)_q. \end{aligned}$$

Essa construção permite comparar comprimento de vetores em pontos distintos de  $\mathcal{M}$ . No entanto, a comparação é independente da curva somente se  $F(g)$  for exata ([29], p. 143).

Tendo definido uma estrutura de Weyl em  $\mathcal{M}$  e, a partir dela, a translação de uma métrica de  $T_p\mathcal{M}$  para  $T_q\mathcal{M}$  ao longo de uma curva, buscamos a relação dessa estrutura com estruturas definidas a partir de conexões lineares em  $\mathcal{M}$ . Como no caso de uma variedade com métrica semi-riemanniana, na qual existe uma única conexão simétrica e compatível com a métrica, buscamos uma conexão simétrica em  $\mathcal{M}$  que seja, de alguma forma, compatível com sua estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$ .

**Definição 2.3.3** *Uma conexão linear em uma variedade de Weyl  $\mathcal{M}$  é compatível com a estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$  se o transporte paralelo (ao longo de uma curva arbitrária) de métricas definidas em espaços tangentes definido a partir dessa conexão coincidir com a translação definida acima.*

Mais precisamente, a definição acima significa o seguinte: Sejam  $p, q \in \mathcal{M}$  e  $\gamma$  uma curva em  $\mathcal{M}$  com ponto inicial  $p$  e final  $q$ . Seja  $\nabla$  uma conexão em  $\mathcal{M}$  e  $P_t : (T_0^2)_p\mathcal{M} \rightarrow (T_0^2)_{\gamma(t)}\mathcal{M}$

o operador de transporte paralelo de  $(2,0)$  tensores ao longo de  $\gamma$  definido a partir de  $\nabla$  (ver lema (2.2.6)), que associa a cada tensor  $B$  de  $(T_0^2)_p\mathcal{M}$  o (único) tensor  $B(t)$  em  $(T_0^2)_{\gamma(t)}\mathcal{M}$  obtido propagando paralelamente  $B$  ao longo de  $\gamma$ . A compatibilidade de  $\nabla$  com a estrutura de Weyl  $F$  de  $\mathcal{M}$  se traduz em

$$P_t(g_p) = \exp \left[ - \int_0^t \gamma^*(F(g)) \right] g_{\gamma(t)}$$

para toda métrica  $g \in G$ , ou

$$P_t^{-1}(g_{\gamma(t)}) = \exp \left[ \int_0^t \gamma^*(F(g)) \right] g_p.$$

Seja agora  $\gamma$  a curva integral passando por  $p$  de um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Por uma expressão análoga à (2.22) para  $(2,0)$ -tensores,

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t^{-1} g_{\gamma(t)} - g_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \exp \left[ \int_0^t \gamma^* F(g) \right] - 1 \right) g_p \\ &= \left( \frac{d}{dt} \exp \left[ \int_0^t \gamma^* F(g) \right] \Big|_{t=0} \right) g_p = [F(g) \cdot \dot{\gamma}(0)] g_p = [F(g) \cdot X_p] g_p. \end{aligned}$$

Logo, se a conexão  $\nabla$  for compatível com a estrutura de Weyl  $F$  de  $\mathcal{M}$ , devemos ter  $\nabla g = g \otimes F(g)$  para toda métrica  $g$  pertencente à estrutura conforme  $G$  de  $\mathcal{M}$ . Temos o seguinte lema, que também afirma a proposição recíproca [17]:

**Lema 2.3.4** *Seja  $\nabla$  uma conexão em uma variedade de Weyl  $(\mathcal{M}, G, F)$ .  $\nabla$  é compatível com a estrutura de Weyl  $F$  se, e somente se,  $\nabla g = g \otimes F(g) \forall g \in G$ , onde  $G$  é a estrutura conforme de  $\mathcal{M}$ .*

*Demonstração:* A implicação  $(\Rightarrow)$  já foi demonstrada acima. Para demonstrar  $(\Leftarrow)$ , seja  $\nabla g = g \otimes F(g)$  para alguma métrica  $g \in G$ . Pela forma da estrutura de Weyl essa relação vale para toda métrica de  $G$ , como é facilmente verificado.

Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  uma curva em  $\mathcal{M}$  com pontos inicial e final  $p$  e  $q$ , respectivamente, e tome um referencial  $(E_1, \dots, E_n)$  paralelo ao longo de  $\gamma$  (com respeito a  $\nabla$ ). Seja  $(f^1, \dots, f^n)$  dual a  $(E_1, \dots, E_n)$ . Escrevendo  $g = g_{ij} f^i \otimes f^j$  ao longo de  $\gamma$ , temos que

$$0 = D_t(f^i \cdot E_j) = (D_t f^i) \cdot E_j + f^i \cdot (D_t E_j),$$

pelo lema (2.2.6). Como  $E_j$  é paralelo ao longo de  $\gamma$ ,  $D_t E_j = 0$ . Logo,  $D_t f^i = 0$  para todo  $i$ .

Temos que  $D_t g = \left(\frac{dg_{ij}}{dt}\right) f^i \otimes f^j$ , pelo lema (2.2.8). Desse modo, como  $D_t g = (F(g) \cdot \dot{\gamma}(t))g$ ,

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = (F(g) \cdot \dot{\gamma}(t))g_{ij}.$$

Logo, a solução da equação diferencial acima é dada por

$$g_{ij}(t) = \exp \left[ \int_0^t F(g) \cdot \dot{\gamma}(t') dt' \right] = \exp \left[ \int_0^t \gamma^* F(g) \right] g_{ij}(0)$$

onde  $g_{ij}(t)$  são os coeficientes de  $g_{\gamma(t)}$  com relação a esse referencial.

Transportando paralelamente  $g_p$  ao longo de  $\gamma$ , temos que  $(P_t g)_{ij} = g_{ij}(0)$ , e portanto

$$(P_t g) = \exp \left[ - \int_0^t \gamma^* F(g) \right] g_{\gamma(t)}.$$

□

Assim como para uma variedade com métrica (semi-)riemanniana existe uma única conexão simétrica e compatível com essa métrica, para uma variedade de Weyl existe uma única conexão simétrica compatível com sua estrutura de Weyl [17]:

**Teorema 2.3.5** *Uma variedade de Weyl  $\mathcal{M}$  admite uma única conexão simétrica e compatível com sua estrutura de Weyl. Essa conexão é chamada de **conexão de Weyl** associada à estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$ .*

*Demonstração:* Provemos primeiro a unicidade. Tome  $g$  uma métrica na estrutura conforme  $G$  de  $\mathcal{M}$  e sejam  $F(g) = 2\omega$  e  $\nabla$  uma conexão satisfazendo as hipóteses do teorema. Do lema (2.2.6),

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= 2\omega(X)g(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Como  $\nabla$  é simétrica, temos que  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ . Logo,

$$g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) - 2\omega(X)g(Y, Z) + g(Y, [Z, X]) - g(Y, \nabla_Z X).$$

Permutando ciclicamente  $X, Y$  e  $Z$ , temos também

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y Z, X) &= Y(g(Z, X)) - 2\omega(Y)g(Z, X) + g(Z, [X, Y]) - g(Z, \nabla_X Y); \\ g(\nabla_Z X, Y) &= Z(g(X, Y)) - 2\omega(Z)g(X, Y) + g(X, [Y, Z]) - g(X, \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras expressões e subtraindo a última, obtemos

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + \\ &+ g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) - g(X, [Y, Z])\} - \\ &- \{\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) - \omega(Z)g(X, Y)\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como  $g$  é não-degenerada, temos que  $\nabla_X Y$  está definido pela equação acima, e portanto a unicidade está provada.

Se  $\omega = 0$ , obtemos por (2.53) a conexão de Levi-Civita  $\check{\nabla}$  para  $g$ . Assim, podemos escrever a conexão acima como

$$\nabla_X Y = \check{\nabla}_X Y - \{\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp\}, \quad (2.54)$$

onde  $\omega^\sharp$  é o (único) campo vetorial tal que  $g(\omega^\sharp, Z) = \omega(Z)$ ,  $\forall Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .

Para provarmos a existência, notemos que a expressão (2.54) define uma conexão simétrica em  $\mathcal{M}$ , com

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(\check{\nabla}_X Y, Z) - \omega(X)g(Y, Z) - \omega(Y)g(X, Z) + \omega(Z)g(X, Y).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= g(\check{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \check{\nabla}_X Z) - 2\omega(X)g(Y, Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - 2\omega(X)g(Y, Z). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Logo pelo item (vi) do lema (2.2.6), temos que (2.55) é equivalente a  $(\nabla_X g)(Y, Z) = 2\omega(X)g(Y, Z)$ , isto é, a  $\nabla g = 2g \otimes \omega$ . Vale notar que, por (2.53), é possível mostrar que essa construção é independente da escolha da métrica  $g \in G$ .  $\square$

Segue do teorema acima o seguinte corolário [17]:

**Corolário 2.3.6** *Uma conexão simétrica  $\nabla$  em  $\mathcal{M}$  para a qual existem uma métrica  $g$  e uma 1-forma diferencial  $\omega$  tais que  $\nabla g = 2g \otimes \omega$  é a conexão de Weyl induzida pela estrutura de Weyl determinada por  $F(g) = 2\omega$ .*

A conexão de Weyl é então a conexão procurada, que reproduz as características da estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$ . É a conexão utilizada, então, para comparar comprimentos e ângulos de vetores em diferentes pontos.

Os resultados apresentados acima permitem enunciar o teorema seguinte, o análogo do teorema (2.2.26) que trata de uma conexão compatível com a métrica. O teorema a seguir não foi encontrado na literatura.

**Teorema 2.3.7** *Seja  $\nabla$  uma conexão em  $(\mathcal{M}, g)$  e  $\omega$  uma 1-forma em  $\mathcal{M}$ . São equivalentes:*

(i)

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + 2\omega(X)g(Y, Z); \quad (2.56)$$

(ii)  $\nabla g = 2g \otimes \omega$ ;

(iii) *Se  $Y$  e  $Z$  forem campos vetoriais ao longo de uma curva  $\gamma$ , então*

$$\frac{d}{dt}(g(Y(t), Z(t))) = g(D_t Y, Z) + g(Y, D_t Z) + 2\omega(\dot{\gamma}(t))g(Y, Z); \quad (2.57)$$

(iv) *Se  $Y$  e  $Z$  forem campos vetoriais paralelos ao longo de uma curva  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$ , então*

$$g_{\gamma(t)}(Y, Z) = \exp \left[ \int_0^t 2\omega(\dot{\gamma}(t')) dt' \right] g_{\gamma(0)}(Y, Z) \quad \forall t \in [0, a]; \quad (2.58)$$

(v) *O operador de transporte paralelo (2.21) definido por  $\nabla$  satisfaz, para cada  $t$ ,*

$$g_{\gamma(t)}(P_{t_0 t} V, P_{t_0 t} V) = \exp \left[ \int_{t_0}^t 2\omega(\dot{\gamma}(t')) dt' \right] g_{\gamma(t_0)}(V, V), \quad (2.59)$$

onde  $V \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$ .

*Demonstração:* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) segue do item (vi) do lema (2.2.6). É imediato que (i)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv), pois (iv) é a forma integral da equação diferencial (iii) no caso de  $Y$  e  $Z$  paralelos ao longo de  $\gamma$ . Além disso, (iv) e (v) são equivalentes devido às identidades de polarização (2.1). Mostremos que (iv)  $\Rightarrow$  (ii). Como pelo item (vi) do lema (2.2.6) temos que

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para  $Y$  e  $Z$  paralelos ao longo de  $\gamma$  a equação acima nos dá

$$\frac{d}{dt}g(Y(t), Z(t)) = (D_t g)(Y(t), Z(t)) \quad (2.60)$$

ao longo de  $\gamma$ . Do item (iv), temos que  $\frac{d}{dt}g_{\gamma(t)}(Y(t), Z(t)) = 2\omega(\dot{\gamma}(t))g_{\gamma(0)}(Y_0, Z_0)$ , e como  $D_t g = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} g$ , segue que

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} g)_{\gamma(t)}(Y(t), Z(t)) = 2\omega(\dot{\gamma}(t))g_{\gamma(0)}(Y_0, Z_0), \quad (2.61)$$

e portanto para  $t = 0$

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}g)_{\gamma(0)}(Y_0, Z_0) = 2\omega(\dot{\gamma}(0))g_{\gamma(0)}(Y_0, Z_0). \quad (2.62)$$

Como  $\gamma$  é arbitrária, temos que  $(\nabla_X g)_p(Y, Z) = 2\omega_p(X)g_p(Y, Z)$  para todo  $p \in \mathcal{M}$  e para  $X, Y, Z \in T_p\mathcal{M}$ , e portanto (iv)  $\Rightarrow$  (ii), demonstrando o teorema.  $\square$

A conexão riemanniana é preservada por isometrias (ver lema (2.2.29)). Pretendemos investigar o conceito análogo na geometria de Weyl, isto é, verificar quando uma aplicação entre duas variedades de Weyl preserva a conexão de Weyl. Isso é feito no teorema seguinte, que também não foi encontrado na literatura.

**Teorema 2.3.8** *Sejam  $(\mathcal{M}, G)$ ,  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{G})$  variedades conformes com estruturas de Weyl  $F$  e  $\tilde{F}$ , respectivamente. Seja  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  um difeomorfismo tal que existam  $g \in G$ ,  $\tilde{g} \in \tilde{G}$ , com  $F(g) = 2\omega$  e  $\tilde{F}(\tilde{g}) = 2\tilde{\omega}$ , satisfazendo*

$$\begin{aligned} \varphi^*\tilde{g} &= g, \\ \varphi^*\tilde{\omega} &= \omega. \end{aligned}$$

Então, se  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  forem as conexões de Weyl de  $\mathcal{M}$  e  $\tilde{\mathcal{M}}$ , respectivamente, temos:

(i)

$$\varphi^*\tilde{\nabla} = \nabla,$$

onde

$$(\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y := (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} (\varphi_* Y); \quad (2.63)$$

(ii) Se  $\gamma$  for uma curva em  $\mathcal{M}$  e  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ , temos para um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$

$$\varphi_*(D_t V) = \tilde{D}_t(\varphi_* V),$$

onde  $D_t$  e  $\tilde{D}_t$  são os operadores dados no lema (2.2.8) referentes às curvas  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  (e determinados pelas conexões de Weyl das variedades);

(iii)  $\varphi$  leva geodésicas em geodésicas:  $\varphi \circ \gamma_V = \tilde{\gamma}_{\varphi_* V}$ .

*Demonstração:* (i) - Primeiramente, notemos que  $\varphi^*(e^{2\lambda}\tilde{g}) = e^{2(\lambda \circ \varphi)}g$  e  $\varphi^*(\tilde{\omega} + d\lambda) = \omega + d(\lambda \circ \varphi)$ . Dessa forma, vemos que para toda métrica  $\tilde{h} \in \tilde{G}$ , com  $\tilde{F}(\tilde{h}) = 2\tilde{\xi}$ , existirá uma métrica  $h \in G$ , com  $F(h) = 2\xi$ , tal que  $\varphi^*h = h$  e  $\varphi^*\tilde{\xi} = \xi$ .

A idéia da demonstração é utilizar o resultado do teorema (2.3.5), que garante a unicidade da conexão de Weyl (simétrica e compatível com a estrutura de Weyl). Como no

caso da conexão riemanniana (lema (2.2.29)), é imediato que  $\varphi^*\tilde{\nabla}$  é uma conexão em  $\mathcal{M}$ . Pretendemos então mostrar que  $\varphi^*\tilde{\nabla}$  é simétrica e compatível com a estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$ .

Provemos primeiramente que  $\varphi^*\tilde{\nabla}$  é simétrica. Para isso, utilizamos a simetria de  $\tilde{\nabla}$ , como no caso da conexão riemanniana. Temos que

$$\begin{aligned} (\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y - (\varphi^*\tilde{\nabla})_Y X &= (\varphi^{-1})_* \{ \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y) - \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y}(\varphi_* X) \} \\ &= (\varphi^{-1})_* [\varphi_* X, \varphi_* Y] = (\varphi^{-1})_* \varphi_* [X, Y] = [X, Y], \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade foi usada a simetria de  $\tilde{\nabla}$  e na terceira igualdade o fato de  $\varphi$  ser difeomorfismo. Assim, temos que  $\varphi^*\tilde{\nabla}$  é simétrica. Vejamos agora a compatibilidade com a estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$ .

Para as métricas  $g \in G$ ,  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  do enunciado, com  $F(g) = 2\omega$  e  $\tilde{F}(\tilde{g}) = 2\tilde{\omega}$ , temos  $\varphi^*\tilde{g} = g$  e  $\varphi^*\tilde{\omega} = \omega$ . Dado  $p \in \mathcal{M}$ ,

$$g_p((\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) = g_p((\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y), Z).$$

Como  $g(V, W) = \tilde{g}(\varphi_* V, \varphi_* W)$ ,

$$g_p((\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y), \varphi_* Z).$$

Desse modo,

$$g_p((\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) + g_p(Y, (\varphi^*\tilde{\nabla})_X Z) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y), \varphi_* Z) + \tilde{g}_{\varphi(p)}((\varphi_* Y), \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Z)).$$

Como  $\tilde{\nabla}$  é compatível com a estrutura de Weyl de  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,

$$\begin{aligned} g_p((\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) + g_p(Y, (\varphi^*\tilde{\nabla})_X Z) &= (\varphi_* X)_{\varphi(p)}(\tilde{g}(\varphi_* Y, \varphi_* Z)) - 2\tilde{\omega}_{\varphi(p)}(\varphi_* X)\tilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_* Y, \varphi_* Z) \\ &= X_p(\tilde{g}(\varphi_* Y, \varphi_* Z) \cdot \varphi) - 2\omega_p(X)g_p(Y, Z) \\ &= X_p(g(Y, Z)) - 2\omega_p(X)g_p(Y, Z). \end{aligned}$$

Assim,  $X(g(Y, Z)) = 2\omega(X)g(Y, Z) + g((\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) + g(Y, (\varphi^*\tilde{\nabla})_X Z)$ , e portanto pelo teorema (2.3.7) temos  $(\varphi^*\tilde{\nabla})g = 2g \otimes \omega$ . Segue do fato de  $(\varphi^*\tilde{\nabla})$  ser uma conexão que essa última expressão vale para toda métrica da estrutura conforme de  $\mathcal{M}$ .

Assim, pelo teorema (2.3.5), provamos então que  $\varphi^*\tilde{\nabla} = \nabla$ .

(ii) - De (2.63), temos pelo item (i) que para campos vetoriais  $X$  e  $Y$

$$\nabla_X Y = (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} (\varphi_* Y),$$

e portanto

$$\varphi_* \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} (\varphi_* Y).$$

Assim, como  $\dot{\tilde{\gamma}} = \varphi_* \dot{\gamma}$ , a expressão desejada segue do lema (2.2.8).

(iii) - Segue do item (ii), com  $V = \dot{\gamma}$ . □

Como a estrutura de Weyl é definida a partir de uma estrutura conforme  $G$  em  $\mathcal{M}$ , se essa estrutura conforme vier de uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$  ( $\dim(\mathcal{M}) \geq 3$ ), temos que  $G$  define uma única estrutura causal em  $\mathcal{M}$ , isto é: define, em cada espaço tangente, um cone de luz (e portanto os dois cones temporais associados), como sendo o cone de luz comum a todas as métricas de  $G$  nesse ponto. Diremos que um vetor (ou curva, ou campo vetorial) é *tipo-tempo* (resp. *tipo-espaço*, *tipo luz*) se para alguma métrica  $g \in G$  for tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz). Pelo que foi dito acima, essa definição independe da escolha particular da métrica  $g \in G$ . Assim, como o caráter causal de vetores está bem definido, também está bem-definido o fato de  $\mathcal{M}$  ser (ou não) orientável temporalmente. Uma variedade lorentziana de Weyl  $\mathcal{M}$  será dita *orientável temporalmente* se, para alguma métrica de sua estrutura conforme,  $\mathcal{M}$  for orientável temporalmente (ver prop. (2.2.36) e def. (2.2.37)). Novamente, essa definição independe da escolha particular da métrica na estrutura conforme de  $\mathcal{M}$ . Além disso, para a conexão de Weyl, ou mais geralmente para conexões compatíveis com a estrutura de Weyl de uma variedade lorentziana  $\mathcal{M}$ , geodésicas também têm caráter causal bem-definido. De fato, tomando uma geodésica com vetor inicial  $V$  tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz), o fato de a conexão ser compatível com a estrutura de Weyl de  $\mathcal{M}$  garante, pelo item (iv) do teorema (2.3.7), que o vetor velocidade da geodésica permanecerá tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz).

Em coordenadas locais, podemos escrever os coeficientes da conexão de Weyl como

$$\Gamma_{jk}^i = \{^i_{jk}\} - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j + g_{jk} \omega^i, \quad (2.64)$$

onde  $\{^i_{jk}\}$  são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita de  $g_{ij}$  e  $\omega^i = g^{il} \omega_l$ . Esses coeficientes são invariantes pelo par de transformações

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= e^{2\lambda(x)} g_{ij}; \\ \tilde{\omega}_k &= \omega_k + \partial_k \lambda, \end{aligned} \quad (2.65)$$

o que pode ser visto por computação direta e é evidente de (2.53). Tais transformações receberam o nome de *transformações de gauge* [16], pela analogia feita por Weyl entre a 1-forma  $\omega$  e o quadripotencial eletromagnético [34].

Seja  $g \in G$ ,  $F(g) = 2\omega$ . Definimos a *curvatura do comprimento* como sendo a 2-forma  $W = -d\omega$ . Da definição (2.3.2),  $W$  é independente da métrica escolhida em  $g$ , sendo portanto uma característica da estrutura de Weyl da variedade. Em coordenadas,

$$W_{ij} = \partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j. \quad (2.66)$$

Note que, por (2.52), se  $F(g)$  não for exata então a translação da métrica de  $T_p\mathcal{M}$  para  $T_q\mathcal{M}$  depende da curva escolhida para unir  $p$  e  $q$ . Em outras palavras, se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  for uma curva fechada em  $\mathcal{M}$ , com  $\gamma(a) = p$ , e  $g_p$  for uma métrica em  $T_p\mathcal{M}$  com extensão  $g$  tal que  $F(g) = 2\omega$ , então fazendo a translação de  $g_p$  ao longo de  $\gamma$  temos que

$$P_{ab}(g_p) = \langle, \rangle_p = \exp \left[ -2 \oint_{\gamma} \omega \right] g_p,$$

onde  $\oint_{\gamma} \omega$  não é necessariamente zero. Se  $\gamma$  for o bordo de uma subvariedade bidimensional  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$ , então pelo teorema de Stokes [29] temos

$$\oint_{\gamma} \omega = - \int_{\mathcal{N}} W,$$

e portanto

$$P_{ab}(g_p) = \langle, \rangle_p = \exp \left[ 2 \int_{\mathcal{N}} W \right] g_p.$$

Além disso, para um vetor  $V$  em  $T_p\mathcal{M}$  propagado paralelamente ao longo de  $\gamma$ , temos pelo teorema (2.3.7) que

$$g_p(V(b), V(b)) = \exp \left[ 2 \int_{\gamma} \omega \right] = \exp \left[ -2 \int_{\mathcal{N}} W \right] g_p(V, V) \quad (2.67)$$

para toda métrica  $g \in G$ . Desse modo,  $W$  é uma medida da diferença entre a norma de um vetor e do vetor obtido propagando-o paralelamente através de uma curva fechada, justificando assim o nome “curvatura do comprimento”.

Se  $\omega$  for fechada (isto é, se  $W = 0$ ), então  $\omega$  é localmente exata, e portanto para uma curva fechada suficientemente pequena temos que a integral acima é zero. Nesse caso, as restrições para que  $\omega$  não seja globalmente exata são puramente topológicas [29]. Notemos que, se  $\omega$  for exata, então a translação (2.52) é independente da curva. Além disso, nessas condições

existe  $\tilde{g} \in G$  tal que  $F(\tilde{g}) = 0$ , e portanto  $\nabla\tilde{g} = 0$ . Logo, nesse caso, a conexão de Weyl é a conexão de Levi-Civita de  $\tilde{g}$ . A recíproca também é verdadeira: se, para alguma métrica  $g$  da estrutura conforme,  $\nabla$  for a conexão de Levi-Civita associada a  $g$ , então  $F(g) = 0$ .

**Definição 2.3.9** *Uma variedade de Weyl é dita **integrável** se, para alguma métrica  $g \in G$  (e portanto para toda),  $F(g)$  for uma forma exata.*

Vejam agora a relação entre o tensor de curvatura da geometria de Weyl com o tensor de curvatura da geometria (semi-)riemanniana, quando escolhemos uma métrica  $g \in G$  com  $F(g) = 2\omega$ . Em coordenadas, temos que o tensor de curvatura  $R_{ijk}{}^l$ , o tensor de Ricci  $R_{ij}$  e o escalar de Ricci  $R$  da geometria de Weyl são dados, em termos dos respectivos tensores  $K_{ijk}{}^l, K_{ij}, K$  da estrutura riemanniana de uma métrica  $g \in G$  (com  $F(g) = 2\omega$ ), por :

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^l &= K_{ijk}{}^l + (g_{kj}\omega^l{}_{;i} - \delta_k^l\omega_{j;i} - \delta_j^l\omega_{k;i}) - (g_{ki}\omega^l{}_{;j} - \delta_k^l\omega_{i;j} - \delta_i^l\omega_{k;j}) + \\ &+ [(\delta_j^l g_{ki} - \delta_i^l g_{kj})\omega^m\omega_m + (g_{kj}\omega_i - g_{ki}\omega_j)\omega^l + (\delta_i^l\omega_j - \delta_j^l\omega_i)\omega_k], \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$R_{jk} = \left\{ K_{jk} + g_{jk}\omega^m{}_{;m} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)(\omega_{j;k} + \omega_{k;j}) + (n-2)[\omega_j\omega_k - g_{jk}\omega^l\omega_l] \right\} + \frac{n}{2}W_{jk}, \quad (2.69)$$

onde a expressão entre chaves é simétrica e  $W_{jk}$  é anti-simétrico, e

$$R = K + 2(n-1)\omega^l{}_{;l} - (n-2)(n-1)\omega^l\omega_l. \quad (2.70)$$

Aqui,  $n$  é a dimensão da variedade e o ponto-e-vírgula denota derivação covariante com respeito à conexão de Levi-Civita de  $g$ . Temos portanto o seguinte lema:

**Lema 2.3.10**

$$W = \frac{2}{n} \text{Antissim}(Rc), \quad (2.71)$$

onde  $\text{Antissim}(Rc)$  é a parte anti-simétrica do tensor de Ricci.

**Definição 2.3.11** *Seja  $[T]$  uma família de campos tensoriais de mesmo tipo, indexada pelas métricas  $g \in G$ . Se  $T_g$  e  $T_{\tilde{g}}$  estiverem relacionados por  $T_{\tilde{g}} = e^{m\lambda}T_g$  se  $\tilde{g} = e^{2\lambda}g$ , então  $[T]$  é dita **covariante de gauge**. Definimos o **expoente de Weyl** dessa família por  $\Pi([T]) = m$ . Quando não houver perigo de confusão, chamaremos uma família de campos tensoriais covariante de gauge  $[T]$  simplesmente de um **campo tensorial covariante de gauge**  $T$  (quando necessário indexado pela métrica correspondente), tomando um de seus representantes, onde fica subentendido que estamos nos referindo à família  $[T]$ . Nesse caso,*

denotaremos seu expoente de Weyl por  $\Pi(T)$ . Uma família  $[T]$  covariante de gauge com  $\Pi([T]) = 0$  é dita *invariante de gauge*.

Temos como exemplo de famílias de campos tensoriais covariantes de gauge a própria estrutura conforme  $G = [g]$  de  $\mathcal{M}$ , com  $\Pi([g]) = 2$ . O tensor de curvatura da geometria de Weyl, definido por (2.28), é um invariante de gauge, assim como o tensor de Ricci (2.39), já que dependem somente da conexão. O escalar de Ricci (2.40) (mais precisamente, a família definida pela fórmula (2.40)) é um campo tensorial covariante de gauge com  $\Pi(Rs) = -2$ , pois envolve a contração do tensor de Ricci com a métrica.

**Definição 2.3.12** *Seja  $g \in G$ . O tensor de Einstein da geometria de Weyl é definido como*

$$Q = Rc - \frac{Rs}{2}g, \quad (2.72)$$

onde  $Rc$  é o tensor de Ricci da geometria de Weyl e  $Rs$  o respectivo escalar de curvatura.

Note que, como  $\Pi(Rs) = -2$  e  $\Pi(g) = 2$ , o produto  $Rs \cdot g$  é invariante de gauge, de modo que a definição acima é consistente. Concluimos que  $Q$  é invariante de gauge.

Antes de determinarmos a partir das identidades de Bianchi (2.38) condições análogas a (2.50) para  $Q$ , consideremos a família de campos tensoriais covariantes de gauge dada por

$$R_{ijkm} = g_{il}R_{ijk}{}^l. \quad (2.73)$$

Temos o seguinte lema:

**Lema 2.3.13** *Em coordenadas locais,*

$$R_{ij(km)} = 2W_{ij}g_{km}. \quad (2.74)$$

*Demonstração:* De (2.68),

$$\begin{aligned} R_{ijkm} &= K_{ijk}{}^l + (g_{kj}\omega_{m;i} - g_{mk}\omega_{j;i} - g_{mj}\omega_{k;i}) - (g_{ki}\omega_{m;j} - g_{mk}\omega_{i;j} - g_{mi}\omega_{k;j}) + \\ &\quad + [(g_{jm}g_{ki} - g_{mi}g_{kj})\omega^q\omega_q + (g_{kj}\omega_i - g_{ki}\omega_j)\omega_m + (g_{mi}\omega_j - g_{mj}\omega_i)\omega_k], \end{aligned}$$

de modo que

$$2R_{ij(km)} = R_{ijkm} + R_{ijmkm} = -2g_{mk}\omega_{j;i} + 2g_{mk}\omega_{i;j} = 2g_{mk}W_{ij}.$$

□

Como a conexão de Weyl é simétrica, seu tensor de curvatura satisfaz a identidade de Bianchi diferencial (2.37) e a relação de simetria (2.30). No entanto, as relações (2.35, 2.36) não são geralmente satisfeitas, e portanto não vale o análogo do lema (2.2.32) para o tensor de Einstein da geometria de Weyl. Temos, ao invés disso, a seguinte relação:

**Lema 2.3.14** *Na geometria de Weyl temos as seguintes relações para o tensor de Einstein, que são equivalentes:*

$$(\nabla_i + 2\omega_i)Q_j^i = -g^{ki}(\nabla_k + 2\omega_k)W_{ji}, \quad (2.75)$$

$$g^{ki}\nabla_i Q_{jk} = -g^{ki}\nabla_i W_{jk}, \quad (2.76)$$

para um referencial local.

*Demonstração:* As identidades de Bianchi (2.38), contraídas nos índices  $l$  e  $i$ , dão

$$\nabla_q R_{jk} + \nabla_l R_{jqk}^l - \nabla_j R_{qk} = 0. \quad (2.77)$$

A equação  $\nabla_i g_{jk} = 2\omega_i g_{jk}$  é equivalente a

$$\nabla_i g^{jk} = -2\omega_i g^{jk}. \quad (2.78)$$

Assim, contraindo (2.77) com  $g^{qk}$  e utilizando a relação (2.78),

$$(\nabla_q + 2\omega_q)(g^{qk} R_{jk}) + (\nabla_l + 2\omega_l)(g^{qk} R_{jqk}^l) - (\nabla_j + 2\omega_j)R = 0. \quad (2.79)$$

Utilizando (2.74), podemos escrever o segundo termo como

$$g^{qk} R_{jqk}^l = g^{lm} R_{jm} + 2g_{lm} W_{jm},$$

de forma que (2.79) se simplifica para

$$2(\nabla_q + 2\omega_q)(g^{qk} R_{jk}) - (\nabla_j + 2\omega_j)R + 2g^{lm}(\nabla_l + 2\omega_l)W_{jm} = 0.$$

Juntando termos,

$$g^{qk}(\nabla_q + 2\omega_q)(R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}R) = -g^{lm}(\nabla_l + 2\omega_l)W_{jm},$$

provando (2.75). Como

$$g^{qk}(\nabla_q + 2\omega_q)Q_{jk} = (\nabla_q + 2\omega_q)(g^{qk}Q_{jk}) = \nabla_q(g^{qk}Q_{jk}) + 2\omega_q g^{qk}Q_{jk} = g^{qk}\nabla_q Q_{jk}$$

e

$$g^{qk}(\nabla_q + 2\omega_q)W_{jk} = g^{qk}\nabla_q W_{jk}$$

por (2.78), provamos (2.76). □

Se a geometria for integrável (def. (2.3.9)), temos que  $W = 0$ , e portanto as identidades do lema acima se reduzem a

$$\nabla_i Q^i_j = -2\omega_i Q^i_j, \tag{2.80}$$

$$g^{ik}\nabla_i Q_{kj} = 0. \tag{2.81}$$

### 3

---

# Gravitação newtoniana e modelo de Kuzmin

Uma revisão de gravitação newtoniana pode ser encontrada em [4]. Enunciamos abaixo os resultados mais importantes para o presente trabalho, de modo a garantir uma seqüência lógica para o texto. Também apresentamos o modelo de Kuzmin de um disco fino de matéria, uma primeira aproximação para a modelagem de uma galáxia espiral [4].

Na mecânica newtoniana, a equação de movimento para uma partícula de teste em um referencial inercial é dada pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{x}$  é o vetor posição da partícula,  $\vec{F}$  é a força total que age na partícula e o ponto denota a derivada com respeito ao tempo. Discutimos brevemente a seguir o caso em que  $\vec{F}$  se deve somente à interação gravitacional, apresentando os conceitos essenciais para a continuidade do trabalho. Seguimos [4] nessa apresentação.

Para um sistema composto por duas partículas pontuais de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $r$ , temos que a força que  $m_2$  exerce em  $m_1$  é dada por

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}, \quad (3.2)$$

onde  $G = 6,6742(10) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  [4] é a constante de gravitação universal e  $\hat{r}_{12}$  é o vetor unitário que aponta de  $m_1$  para  $m_2$ .

Na mecânica newtoniana é válido o *princípio de superposição das forças*: *A força resultante em uma partícula pontual gerada por uma distribuição de massa é obtida somando as forças geradas por partículas pontuais.* Ou seja, para uma distribuição de massa

com densidade  $\rho$ , a força em uma partícula de prova de massa  $m$  será dada por

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{x}), \quad (3.3)$$

onde

$$\vec{g}(\vec{x}) := G \int \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3x' \quad (3.4)$$

é o *campo gravitacional* gerado por essa distribuição de matéria. Aqui, estamos implicitamente supondo que a integral em (3.4) existe para todo  $\vec{x}$ . Definindo o *potencial gravitacional* como sendo uma função potencial para  $\vec{g}$ , isto é, tal que

$$\vec{g} = -\nabla\Phi,$$

então a menos de uma constante aditiva temos que

$$\Phi(\vec{x}) := -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x', \quad (3.5)$$

onde também supomos que a integral existe.

Pode-se mostrar [4] que os resultados acima implicam

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.6)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano. Dessa forma, para uma partícula sujeita apenas a forças gravitacionais, a equação (3.1) é reescrita como

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi. \quad (3.7)$$

Desse modo, para interações gravitacionais o problema está completamente determinado dada a densidade de matéria ou, equivalentemente, o potencial gravitacional de um sistema.

Uma característica importante de galáxias espirais é a *curva de rotação*, que é o gráfico da velocidade tangencial de uma partícula de teste percorrendo uma órbita circular no disco galáctico em função da distância ao centro da galáxia. Se o disco galáctico estiver no plano  $z = 0$ , onde  $(R, z, \varphi)$  são coordenadas cilíndricas, a velocidade de rotação ( $v_c$ ) é dada por [4]

$$(v_c)^2 = R \left. \frac{d\Phi}{dR} \right|_{z=0}. \quad (3.8)$$

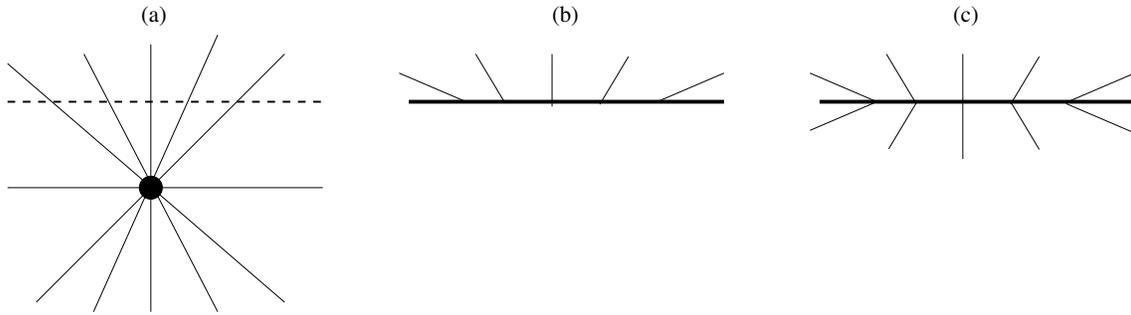


Figura 3.1: Modelo de Kuzmin

### 3.1 Modelo de Kuzmin

O modelo de Kuzmin [4] é um modelo simples de um disco fino de matéria com simetria axial. É obtido do potencial gravitacional para uma partícula pontual a partir de um processo semelhante ao método das imagens da eletrodinâmica [19, 26], da seguinte forma:

O potencial gravitacional gerado por uma massa pontual de massa  $m$  é dado por

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{r}, \quad (3.9)$$

onde  $\Phi$  depende somente da distância  $r$  à massa  $m$ . As linhas de campo desse potencial estão ilustradas na figura (3.1a). Fazemos agora um “corte” na figura pela linha pontilhada, que representa o plano  $z = a$  (onde  $z$  é a coordenada vertical), e eliminemos a região  $z < a$  (figura 3.1b). Agora, refletindo as linhas de campo do potencial em relação a esse plano, obtemos um disco fino de matéria no plano, cujas linhas de campo do potencial estão representadas na figura (3.1c).

Formalmente, o processo descrito acima é dado pela substituição  $z \mapsto |z| + a$ , se escrevermos o potencial (3.9) em coordenadas cilíndricas. Dessa forma, o *potencial de Kuzmin* é dado por (( $R, z, \varphi$ ) são coordenadas cilíndricas)

$$\Phi(R, z) = -\frac{Gm}{\sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}}, \quad (3.10)$$

com  $a > 0$ .

Pela equação (3.6), obtemos a partir do potencial de Kuzmin o perfil de densidade

$$\rho(R, z) = \sigma(R) \cdot \delta(z), \quad (3.11)$$

onde  $\delta(z)$  é a delta de Dirac [10] e

$$\sigma(R) = \frac{ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (3.12)$$

As curvas de rotação no modelo de Kuzmin são dadas por (ver (3.8))

$$v_c = R \frac{\sqrt{Gm}}{(R^2 + a^2)^{3/4}}, \quad (3.13)$$

apresentando comportamento kepleriano, isto é: Para  $R \rightarrow \infty$ ,  $v_c \propto R^{-1/2}$ . Os perfis de densidade (3.12) e as curvas de rotação (3.13) estão exemplificados na figura (3.2).

Veamos agora o que acontece se fizermos uma pequena perturbação radial na trajetória circular de uma partícula. Modelando o disco por um fluido cujas partículas de teste seguem trajetórias circulares, queremos ver sob que condições uma pequena perturbação em uma trajetória “afasta” a partícula de sua trajetória original. O argumento, que reproduzimos aqui, é dado em [28], p. 99.

O momento angular específico de uma partícula de teste em relação ao centro do disco é dado por  $h(r) = r^2\dot{\varphi}$ . Estando o fluido em equilíbrio, em cada ponto a força centrífuga agindo na partícula é balanceada pelo gradiente da pressão no fluido, no referencial da partícula. Suponhamos que uma partícula de massa  $m$  percorrendo uma órbita circular de raio  $r_0$  sofra um deslocamento radial para  $r > r_0$  pequeno o suficiente para que a alteração em seu momento angular específico, inicialmente  $h_0$ , seja desprezível para todos os efeitos. A força centrífuga agindo nessa partícula terá módulo  $\frac{m(h_0)^2}{r^3}$ . Uma condição necessária para que a partícula permaneça “próxima” de sua trajetória original é que essa força centrífuga seja menor em módulo do que a força gerada pelo gradiente de pressão nesse ponto (correspondente à situação de equilíbrio de forças),  $\frac{mh(r)^2}{r^3}$ . Logo, devemos ter  $h(r)^2 - h_0^2 > 0$ , e expandindo  $h(r)$  em primeira ordem em  $(r - r_0)$ ,

$$h \cdot \frac{dh}{dr} > 0. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é conhecida como *critério de estabilidade de Rayleigh*.

Para o modelo de Kuzmin, temos que

$$h = Rv_c = \sqrt{Gm} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/4}} > 0, \quad (3.15)$$

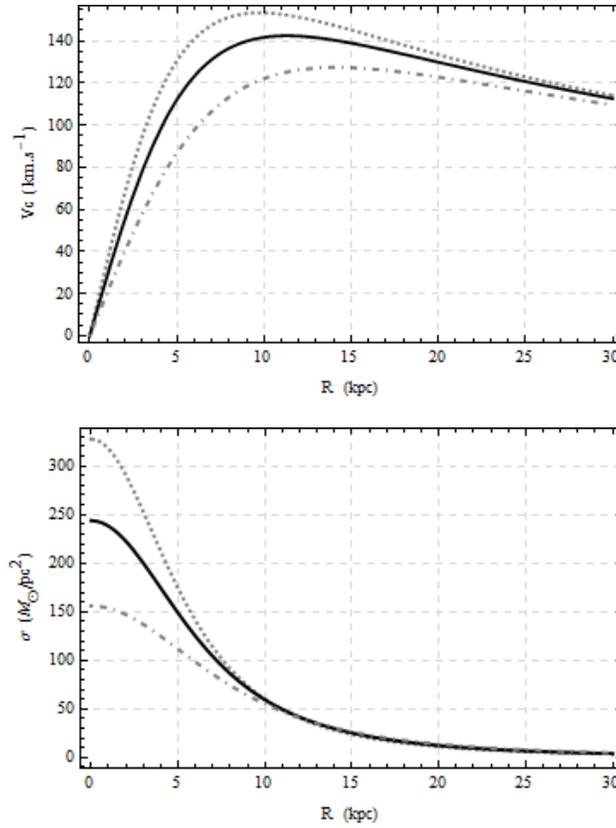


Figura 3.2: (a) - Curvas de rotação do modelo de Kuzmin, para  $m = 2,5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ . A linha cinza pontilhada corresponde a  $a = 6kpc$ , a preta contínua a  $a = 8kpc$  e a cinza com traços e pontos a  $a = 10kpc$ . (b) - Respectiveis perfis de densidade.

e portanto

$$\frac{dh}{dR} = \sqrt{Gm} \frac{2R}{(R^2 + a^2)^{3/4}} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{R^2}{R^2 + a^2} \right) > 0. \quad (3.16)$$

Logo, as órbitas circulares do disco de Kuzmin newtoniano satisfazem o critério de estabilidade de Rayleigh (3.14).

## 4

---

# Relatividade geral e modelo de Kuzmin relativístico

Uma introdução à relatividade geral pode ser encontrada em [24]. Para uma formulação mais rigorosa e mais avançada, ver [46, 22, 37]. No presente trabalho apresentamos apenas os resultados fundamentais para a continuidade do texto.

A relatividade geral é uma teoria da gravitação construída em uma variedade lorentziana quadridimensional (com a conexão riemanniana associada) conexa e (comumente adotado) orientada temporalmente. A essa variedade dá-se o nome de *espaço-tempo*. As equações de campo, que determinam um conjunto de equações diferenciais acopladas para a métrica, são dadas por (ver apêndice A para a formulação lagrangiana)

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein riemanniano (2.2.31),  $T_{\mu\nu}$  é o *tensor de energia-momento*, que descreve o conteúdo de matéria e energia do espaço-tempo,  $\kappa$  é uma constante de acoplamento entre a geometria do espaço-tempo e seu conteúdo de matéria/energia, obtida através do limite newtoniano da relatividade geral [24] como sendo  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , onde  $G$  é a constante da gravitação universal, e  $c$  é a velocidade da luz. A menos que explícito o contrário, adotaremos no que segue as “unidades geométricas”, onde  $G = c = 1$  (ver [46], apêndice F). Os índices gregos  $\mu, \nu$ , etc. variam de 0 a 3, por convenção, sendo “0” a coordenada temporal.

Das equações (4.1) e da identidade de Bianchi (2.2.32) seguem as *leis de conservação* para o tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (4.2)$$

A equação de movimento para uma partícula de teste (cuja massa é pequena o suficiente

para não interferir significativamente na geometria dada pela eq. (4.1)) é dada pela equação das geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \{\mu_{\sigma\nu}\} \frac{dx^\sigma}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi} = 0. \quad (4.3)$$

Mais precisamente, partículas de teste (massivas) percorrem geodésicas tipo-tempo e a luz percorre geodésicas tipo-luz [46, 24]. Para partículas massivas, é usual parametrizarmos as curvas pelo comprimento de arco, de modo que  $g(\dot{x}, \dot{x}) = 1$ , o qual nesse caso é parâmetro afim das geodésicas.

## 4.1 Modelo de Kuzmin relativístico

Nesta seção apresentamos o modelo de Kuzmin relativístico correspondente ao modelo newtoniano do capítulo anterior, proposto por Vogt e Letelier [44]. Na apresentação, seguiremos principalmente esse trabalho. Partimos da métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas [24]

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \tilde{f}}{1 + \tilde{f}} \right)^2 dt^2 - (1 + \tilde{f})^4 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (4.4)$$

onde  $\tilde{f} = \frac{m}{2r}$ . O processo de construção do disco de Kuzmin é análogo ao do caso newtoniano: devemos fazer a substituição  $z \mapsto |z| + a$  em  $f$ . Assim, escrevendo

$$f = \frac{m}{2\sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}}, \quad (4.5)$$

com  $m < 2a$  (para que a métrica não seja degenerada em nenhum ponto), a nova métrica toma a forma

$$ds^2 = \left( \frac{1 - f}{1 + f} \right)^2 dt^2 - (1 + f)^4 [dR^2 + dz^2 + R^2 d\varphi^2], \quad (4.6)$$

onde foi feita a transformação de coordenadas esféricas para coordenadas cilíndricas na parte espacial. Supomos que o sistema de coordenadas cartesiano associado a esse sistema de coordenadas cilíndricas cubra todo o espaço-tempo.

Para uma métrica do tipo (4.6), com  $f = f(R, z)$ , as componentes do tensor de energia-

momento são dadas por [45]

$$\begin{aligned}
T_t^t &= -\frac{1}{2\pi(1+f)^5} \left( f_{,RR} + f_{,zz} + \frac{1}{R} f_{,R} \right) \\
T_r^r &= \frac{1}{4\pi(1-f)(1+f)^5} \left\{ f \left( f_{,zz} + \frac{1}{R} f_{,R} \right) + 2(f_{,R})^2 - (f_{,z})^2 \right\} \\
T_r^z &= -\frac{1}{4\pi(1-f)(1+f)^5} (f f_{,Rz} - 3f_{,R} f_{,z}) \\
T_z^z &= \frac{1}{4\pi(1-f)(1+f)^5} \left\{ f \left( f_{,RR} + \frac{1}{R} f_{,R} \right) + 2(f_{,z})^2 - (f_{,r})^2 \right\} \\
T_\varphi^\varphi &= \frac{1}{4\pi(1-f)(1+f)^5} \{ f(f_{,RR} + f_{,zz}) - ((f_{,R})^2 + (f_{,z})^2) \}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Se as componentes da métrica tiverem termos em  $|z|$ , a estrutura das equações acima permite escrever

$$T_\mu^\nu = H_\mu^\nu \delta(z) + D_\mu^\nu, \tag{4.8}$$

onde  $\delta(z)$  é a distribuição delta de Dirac [10], de forma que o tensor de energia-momento é dado em termos de distribuições [43, 20]. Essa expressão corresponde a um disco fino de matéria (na região  $z = 0$ ) com um halo (região  $z \neq 0$ ) descrito por  $D_\mu^\nu$ .

O tensor de energia-momento “físico”  $Y_\mu^\nu$  do disco, que determina a densidade superficial e a pressão (linear) da matéria (se  $Y_\mu^\nu$  for diagonalizável em uma base com um vetor tipo-tempo e os outros tipo-espaço, com respectivos autovalores  $\lambda_t, \lambda_i, i = 1, 2, 3$ , a densidade  $\sigma$  e as pressões  $P_i$  são definidos como  $\sigma = \lambda_t, P_i = -\lambda_i$ ), é obtido através da integração [20]

$$Y_\mu^\nu = \int H_\mu^\nu ds, \tag{4.9}$$

ao longo do eixo  $z$  das coordenadas, onde  $ds = \sqrt{-g_{zz}} dz$  é o comprimento de arco correspondente. Assim, temos que

$$Y_\mu^\nu = \sqrt{-g_{zz}} H_\mu^\nu \tag{4.10}$$

na hipersuperfície  $z = 0$ .

No caso da métrica para o disco de Kuzmin (4.6), temos que  $D_\mu^\nu = 0$ . Isso é uma consequência do modelo pois, por exemplo, na região  $z > 0$ , temos que a métrica (4.6) é igual à métrica de Schwarzschild para uma massa pontual  $m$  situada em  $z = -a, R = 0$ . O tensor de energia-momento do disco é diagonal nesse sistema de coordenadas, de modo que  $\sigma = Y_0^0, P_i = -Y_i^i, i = r, z, \varphi$  (sem soma). Além disso, a pressão no disco é isotrópica.

Temos [44]

$$\sigma = \frac{4ma}{\pi(m + 2\sqrt{R^2 + a^2})^3}, \quad (4.11)$$

$$P = -\frac{2m^2a}{\pi(m + 2\sqrt{R^2 + a^2})^3(m - 2\sqrt{R^2 + a^2})}. \quad (4.12)$$

Veamos agora qual a velocidade circular de uma partícula de teste no disco medida por um observador parado em relação ao sistema de coordenadas  $(t, R, z, \varphi)$ . Intuitivamente, um observador “trafega” pelo espaço-tempo em uma curva tipo-tempo, e é capaz de medir fenômenos “infinitesimalmente próximos” do ponto onde está. Daremos agora uma definição precisa, seguindo [37].

**Definição 4.1.1** *Um observador é uma curva tipo-tempo  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  apontando para o futuro tal que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$  em  $I$ . A imagem  $\gamma(I)$  é chamada de **linha de mundo** do observador e o parâmetro  $\tau \in I$  é chamado de **tempo próprio** do observador; é o tempo que esse observador mede.  $\dot{\gamma}$  é a **4-velocidade** do observador e  $D_\tau \dot{\gamma}$  é sua **4-aceleração**. Dizemos que um observador está em **queda livre** se sua 4-aceleração for nula.*

Analogamente, definimos um **observador instantâneo** em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  como sendo um vetor tipo-tempo  $Z \in T_p \mathcal{M}$  unitário que aponta para o futuro. Suponha que uma partícula percorra uma curva causal apontando para o futuro  $\alpha : J \rightarrow \mathcal{M}$ , que passe por  $p$  em  $t = 0$ . Então, se  $X = \dot{\alpha}(0)$ , pelo lema (2.1.18) temos que  $X = aZ + S$ , onde  $S$  é tipo-espaço e  $Z$  e  $S$  são ortogonais. Pelo lema (2.1.22),  $a > 0$ . Definimos a **velocidade newtoniana** (ou **velocidade espacial**) de  $\alpha$  medida por  $Z$  como  $V = S/a$ .

Dessa forma, dado um sistema de coordenadas ortogonal  $(t, R, z, \varphi)$  cuja parte espacial seja dada por coordenadas cilíndricas, a **velocidade circular**  $v_c$  de uma partícula que percorre uma curva tipo-tempo (apontando para o futuro e parametrizada pelo comprimento de arco) restrita a  $z = 0, R = \text{constante}$  é, por definição, a norma de sua velocidade newtoniana medida em cada ponto por um observador instantâneo dado por

$$\frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{\partial}{\partial t}$$

(que pode ser interpretado como estando em repouso com respeito à parte espacial do sistema de coordenadas acima).

Escrevendo

$$\dot{\gamma}(\tau) = a(\tau) \frac{\partial}{\partial t} + b(\tau) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

temos que  $a = dt(\dot{\gamma}) = \frac{d}{d\tau}(t \circ \gamma)$ ,  $b = d\varphi(\dot{\gamma}) = \frac{d}{d\tau}(\varphi \circ \gamma)$ . Pela definição acima, como  $|\partial/\partial\varphi| = \sqrt{-g_{\varphi\varphi}}$ , a velocidade circular da curva é dada por

$$v_c = \frac{1}{a\sqrt{g_{tt}}} |b| \left| \frac{\partial}{\partial\varphi} \right| = \sqrt{\frac{-g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} \left| \frac{d\varphi(\dot{\gamma})}{dt(\dot{\gamma})} \right|.$$

Em notação simplificada,

$$\begin{aligned} v_c &= \sqrt{\frac{-g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} \left| \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} \right| \\ &= \sqrt{\frac{-g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para o disco de Kuzmin relativístico, a velocidade circular é dada por [44]

$$(v_c)^2 = \frac{mR^2}{\left(1 - \frac{m}{2\sqrt{R^2+a^2}}\right) \left[(R^2 + a^2)^{3/2} + \frac{m}{2}(a^2 - R^2)\right]}. \quad (4.14)$$

Para escalas galácticas (ver figura 3.2), temos que  $a$  é da ordem de kpc e  $m$  da ordem de  $10^{-6}$  kpc, de modo que  $m/a$  é da ordem de  $10^{-6}$ . Logo, para escalas galácticas, os termos  $\frac{m}{2\sqrt{R^2+a^2}}$  e  $\frac{m}{2}(a^2 - R^2)$  no denominador de (4.14) podem ser desprezados, recuperando assim a expressão newtoniana (3.13). O mesmo raciocínio pode ser utilizado para comparar o perfil de densidade nos dois modelos, e a conclusão é que para valores da ordem dos citados acima os perfis newtoniano e relativístico são indistingüíveis.

Em um espaço-tempo estático descrito por um sistema de coordenadas axial  $(t, R, z, \varphi)$  (supomos que exista um sistema de coordenadas global para a variedade, de modo que nesse caso um espaço-tempo “estático” signifique um no qual a métrica não dependa da coordenada temporal nesse sistema de coordenadas), o momento angular específico (momento angular por unidade de massa) de uma partícula de teste em relação a esse sistema de coordenadas é definido como a quantidade conservada com respeito à coordenada  $\varphi$  da ação  $I = \int ds$ , obtido através da solução das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad (4.15)$$

onde  $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}$ . Mais especificamente, definimos

$$h := -\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (4.16)$$

Dessa forma, obtemos

$$h = -g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \quad (4.17)$$

e, para o caso de uma métrica descrita por

$$ds^2 = e^{\nu(R,z)} dt^2 - e^{\lambda(R,z)} (dR^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2),$$

o momento angular específico de uma partícula de teste (que segue geodésicas) percorrendo uma trajetória circular com  $z$  fixo em torno eixo  $z$  é dado por [44]

$$h = -R^2 e^\lambda \sqrt{\frac{(e^\nu)_{,R}}{e^\nu (R^2 e^\lambda)_{,R} - R^2 e^\lambda (e^\nu)_{,R}}}. \quad (4.18)$$

Segundo [44], as órbitas circulares no modelo de Kuzmin satisfazem o critério de Rayleigh (3.14) para escalas galácticas ( $a/m \gtrsim 10^3$ ).

A curva de rotação para o disco de Kuzmin relativístico (4.14) tem caráter kepleriano, e portanto esse modelo não é capaz de explicar a anomalia nas curvas de rotação de galáxias espirais citada na seção (1.1). Além disso, para valores adequados a escalas galácticas ( $a/m \gtrsim 10^6$ ), as correções relativísticas são desprezíveis, de forma que a relatividade geral e a teoria newtoniana dão o mesmo resultado nesse caso.

---

# Teoria integrável de Weyl-Dirac

Como dito anteriormente, a modificação introduzida por Weyl na relatividade geral foi no intuito de elaborar uma teoria unificada da gravitação e do eletromagnetismo. Para isso, introduziu uma conexão não-métrica ( $\nabla g \neq 0$ ) dependendo de uma 1-forma  $\omega$  [34]. Os detalhes sobre a geometria de Weyl estão apresentados na seção (2.3) e nas referências lá citadas, e pretendemos neste capítulo apresentar algumas teorias físicas baseadas nessa geometria, suas conseqüências e algumas de suas características, assim como as críticas feitas a essas teorias. Posteriormente, estudaremos com mais detalhe a teoria proposta em [25], uma modificação de [14] para o caso em que a geometria é integrável (ver seção 2.3). Notamos que [11] é um caso particular de [25], no caso em que a constante de acoplamento da teoria é nula (caso estudado por Dirac para a geometria não-integrável). Nessa teoria, construiremos discos de Kuzmin para alguns casos especiais, comparando com o caso relativístico as curvas de rotação e os perfis de densidade. Com isso, veremos quais são as condições para que essa teoria possa servir como candidata a explicar a incompatibilidade entre as curvas de rotação observadas e as calculadas pela teoria newtoniana (e, por conseqüência, pela relatividade geral).

## 5.1 Gravitação e eletromagnetismo - Hermann Weyl

Hermann Weyl propôs, em 1918, uma teoria que unificasse a gravitação e o eletromagnetismo. Em seu artigo de 1918, introduziu para isso uma nova geometria, generalização da geometria riemanniana. A 1-forma  $\omega_\mu dx^\mu$  (seção 2.3) representaria o quadripotencial eletromagnético e sua diferencial exterior, a curvatura do comprimento, representaria o campo

eletromagnético. A ação proposta por Weyl para o vácuo foi

$$S = \int R_{ijk}{}^l R^{ijk}{}_l \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x,$$

onde  $R_{ijk}{}^l$  é o tensor de curvatura da geometria de Weyl e  $\mathbf{g} = \det(g_{\mu\nu})$  (ver apêndice A para a formulação lagrangiana de teorias relativísticas). Tal ação é invariante de gauge, e foi considerada por Weyl como a mais simples e mais natural [34]. Essa teoria traz certas dificuldades de ordem prática (as equações de campo são de quarta ordem, enquanto que as equações da relatividade geral - e da mecânica newtoniana - são de segunda ordem), o que tem a ver com a forma escolhida para a lagrangiana. Para uma apresentação mais detalhada da teoria de Weyl, ver [34, 47, 16].

Einstein levantou críticas à teoria de Weyl, mais especificamente ao fato de a geometria não ser integrável (ver def. (2.3.9)). Segundo ele, isso faria com que as linhas espectrais dos elementos químicos dependessem da localização e da história de cada partícula, o que não é observado [34, 40]. Contudo, Weyl replica essa afirmação dizendo que para poder ser feito esse tipo de estudo em sua teoria seria necessário obter as equações de movimento de partículas de teste, o que não havia sido feito em seu artigo. Após o advento da teoria quântica para o elétron Weyl abandonou sua teoria original, aplicando suas idéias na mecânica quântica. As transformações de gauge (2.65) foram substituídas por transformações de fase dependentes das coordenadas e do tempo na função de onda, o que culminou em um formalismo para introduzir fenômenos eletromagnéticos na mecânica quântica [34].

## 5.2 Teoria de Weyl-Dirac

Em 1938, Paul Dirac propôs sua “hipótese dos grandes números”, que dizia basicamente que os números grandes (da ordem de  $10^{39}$ ) adimensionais existentes na natureza como razões entre quantidades físicas deveriam ser funções do tempo cosmológico [15]. Daí, deduziu que a “constante gravitacional”  $G$  deveria ser proporcional a  $t^{-1}$ . Dirac argumentou que sua hipótese, desse modo, era incompatível com a relatividade geral (na qual  $G$  é constante). No entanto, nesse primeiro artigo não formulou uma teoria completa da gravitação: só deu argumentos qualitativos baseados em sua hipótese.

A formulação de uma teoria física baseada em sua hipótese veio somente em 1973, baseada na geometria de Weyl [14]. Para evitar termos quadráticos na lagrangiana, que resultam em EDPs de quarta ordem, Dirac introduziu um campo escalar  $\beta$ , com  $\Pi(\beta) = -1$  (ver def.

(2.3.11)). A ação da teoria no vácuo é dada por [14]

$$S_{Dir} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \beta^2 R + k(\beta^\mu + \beta\omega^\mu)(\beta_\mu + \omega_\mu) + 2\Lambda\beta^4 \right] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (5.1)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura da geometria de Weyl ( $\Pi(R) = -2$ ) e  $k$  é uma constante.  $W_{\mu\nu}$  também foi interpretado como o campo eletromagnético. Trabalhando com  $k = 6$  por simplicidade, obteve equações de campo e equações de movimento para partículas de teste com massa  $m$  e carga  $e$ .

Para eliminar as objeções levantadas sobre a não-integrabilidade do comprimento de vetores propagados paralelamente na teoria, Dirac propôs a existência de duas métricas (representadas aqui por intervalos):  $ds_E$ , às quais as equações de Einstein se referem, e  $ds_A$ , a métrica medida por aparatos experimentais baseados em propriedades atômicas da matéria [14]. Essas métricas estariam relacionadas por uma “transformação de gauge” (eq. (2.65)), hipótese também utilizada por [11].

Em 1977, Canuto *et al.* propuseram uma modificação na teoria de Dirac, a partir da idéia de que fenômenos em diferentes escalas deveriam ser medidos em diferentes “gauges” [11]. Partindo das equações de Einstein no vácuo e aplicando à métrica uma transformação conforme, obtiveram as equações de campo de sua teoria para um gauge arbitrário. Notaram também que essas equações podiam ser deduzidas da ação de Dirac no caso integrável, com  $k = 6$  (ver apêndice A). A ação no vácuo pode então ser escrita como

$$\int e^{-2\omega} R \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x.$$

Veremos na seção seguinte que as equações de Canuto *et al.* podem ser obtidas da modificação proposta por Israelit [25] como um caso particular, pelo menos no vácuo. A diferença se dá somente no modo como o tensor de energia-momento da matéria se acopla ao campo  $\omega$ .

### 5.3 Teoria integrável de Weyl-Dirac

Nesta seção trataremos da modificação da teoria de Dirac proposta por Israelit [25]. Baseado na geometria de Weyl integrável, partiu da mesma ação proposta por Dirac (eq. (5.1)), porém com  $k$  arbitrário, introduzindo também um termo de matéria :

$$S_{Isr} = \int_{\Omega} [\beta^2 R + k(\beta^\mu + \beta\omega^\mu)(\beta_\mu + \omega_\mu) + 2\Lambda\beta^4 + 8\pi L_M] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (5.2)$$

onde o índice subscripto dos campos escalares denota a derivada parcial.

Defina

$$\alpha = k - 6. \quad (5.3)$$

As equações de campo da teoria são (ver [25] e apêndice A)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{T_{\mu\nu}}{\beta^2} - \alpha(Z_\mu Z_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Z^\sigma Z_\sigma) - 2(g_{\mu\nu}b^\sigma{}_{;\sigma} - b_{\mu;\nu}) - 2b_\mu b_\nu - g_{\mu\nu}b^\sigma b_\sigma + \Lambda\beta^2 g_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

$$2\alpha(\beta^2 Z^\nu)_{;\nu} = 16\pi S, \quad (5.5)$$

$$K + k(b^\sigma{}_{;\sigma} + b^\sigma b_\sigma) = -\alpha(\omega^\sigma \omega_\sigma - \omega^\sigma{}_{;\sigma}) - 4\Lambda\beta^2 + \frac{8\pi}{\beta} B, \quad (5.6)$$

onde  $b := \ln(\beta)$ ,  $Z := \omega + b$  e

$$T_{\mu\nu} := -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.7)$$

$$S := -\frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta \omega}, \quad (5.8)$$

$$B := -\frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta \beta}. \quad (5.9)$$

Essas equações estão sujeitas às leis de conservação

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} - S\omega_\mu - B\beta_\mu = 0, \quad (5.10)$$

$$T + S - \beta B = 0, \quad (5.11)$$

onde  $T = T_{\mu}{}^{\mu}$ , que vêm da invariância da ação por difeomorfismos e transformações de gauge, respectivamente. Vale notar que as leis de conservação fazem com que a eq. (5.6) seja satisfeita automaticamente, e portanto o campo  $\beta$  não tem dinâmica (ver [25] e apêndice A).

### 5.3.1 Equações de movimento

Vejamos agora quais são as equações de movimento da teoria para partículas de teste. Suponha que a matéria seja descrita por um fluido composto por partículas de mesma massa  $m$  não interagentes. Assim, se  $u^\nu$  representar uma família de observadores locais (unitários com ralação ao gauge determinado por  $\omega_\mu$ ) em relação aos quais as partículas se encontrem

em repouso, podemos escrever  $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido medida por esses observadores. Definindo uma quantidade  $\rho_N$  como sendo a densidade de número de partículas medida por um observador (unitário com relação ao gauge determinado por  $\omega_\mu$ ) em repouso com relação ao fluido, temos que  $\rho = m\rho_N$ . Supomos que  $S$  (eq. 5.8) seja dado por  $S = q_s\rho_N$ , onde  $q_s$  mede a interação da matéria com  $Z^\mu$ . Analogamente, supõe-se que  $B = b_s\rho_N$ .

Da lei de conservação (5.11), temos que  $m$ ,  $q_s$  e  $b_s$  satisfazem

$$m + q_s - \beta b_s = 0. \quad (5.12)$$

Fisicamente, o número de partículas se conserva. Segundo Israelit e referências em seu artigo, essa propriedade é expressa matematicamente como

$$(\rho_N u^\nu)_{;\nu} = 0,$$

onde a derivação covariante é dada com respeito à conexão de Levi-Civita associada à métrica determinada pelo gauge no qual estamos trabalhando. Queremos que essa expressão seja invariante de gauge, de modo que a expressão “conservação do número de partículas” esteja bem-definida. Notamos que a expressão acima pode ser reescrita como

$$(\rho_N \sqrt{-\mathbf{g}} u^\nu)_{;\nu} = 0.$$

Desse modo, mudando o gauge,  $\sqrt{-\tilde{\mathbf{g}}} = e^{4\lambda} \sqrt{-\mathbf{g}}$ , e  $u^\nu$  deve ser renormalizado de modo que  $\tilde{u}^\nu$  seja unitário nesse gauge. Logo,  $\tilde{u}^\nu = e^{-\lambda} u^\nu$ . Dessa forma, devemos ter  $\tilde{\rho}_N = e^{-3\lambda} \rho_N$ , ou  $\Pi(\rho_N) = -3$ .

Das equações de campo (5.4),  $\Pi(T^{\mu\nu}) = -6$ . Logo,  $\Pi(\rho) = -4$  e, portanto  $\Pi(m) = -1$ . De (5.12),  $\Pi(q_s) = -1$ . As leis de conservação (5.10, 5.11) implicam (ver apêndice A)

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} - T b_{\mu} = S Z_{\mu}, \quad (5.13)$$

o que, para o caso da “nuvem” de partículas, nos dá

$$(\rho u^\nu u_{\mu})_{;\nu} - \rho b_{\mu} = q_s \rho_N Z_{\mu}. \quad (5.14)$$

Como  $\rho = m\rho_N$  e estamos supondo  $(\rho_N u^\nu)_{;\nu} = 0$ , temos que

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = \rho_N u^\nu m_{;\nu}. \quad (5.15)$$

Note que, como  $\Pi(m) = -1$ , para um gauge arbitrário temos que  $m_{;\nu}$  não é necessariamente zero. Segue que

$$u_\mu(\rho u_\nu)_{;\nu} + \rho u^\nu(u_{\mu;\nu}) - \rho b_\mu = q_s \rho_N Z_\mu.$$

Utilizando (5.15) e o fato de que  $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$ , podemos “subir” o índice  $\mu$ , obtendo

$$u^\mu u^\nu m_{;\nu} + m u^\nu(u^\mu_{;\nu}) - m b^\mu = q_s Z^\mu,$$

ou seja,

$$u^\nu(u^\mu_{;\nu}) = \frac{q_s}{m} Z^\mu + b^\mu - u^\mu u^\nu \frac{m_{;\nu}}{m}. \quad (5.16)$$

Para obtermos a forma final das equações de movimento é necessário eliminar  $m_{;\nu}$  da equação acima. Contraindo a expressão acima com  $u_\mu$  e notando que  $u_\mu(u^\mu_{;\nu}) = 0$  (pois  $u_\mu u^\mu = 1$  ao longo das trajetórias) temos

$$\frac{1}{m} u^\nu m_{;\nu} = \frac{q_s}{m} u^\nu Z_\nu + u^\nu b_\nu. \quad (5.17)$$

Substituindo em (5.16), obtemos a equação de movimento para partículas de teste proposta por Israelit [25]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\mu_{\sigma\nu}\} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = (b_\nu + \frac{q_s}{m} Z_\nu) (g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}). \quad (5.18)$$

Notamos que essas equações podem ser obtidas a partir do princípio variacional

$$\delta \int \beta \exp \left[ \frac{q_s}{m} Z \right] ds = 0, \quad (5.19)$$

onde  $s$  é o comprimento de arco no gauge associado a  $\beta$ . Como  $\beta ds$ ,  $\frac{q_s}{m}$  e  $Z$  são invariantes de gauge, a expressão acima é invariante de gauge, e portanto o princípio variacional (assim como as equações de movimento (5.18)) está bem-definido.

Vejamus adiante o que acontece em alguns casos especiais.

1) Suponha que  $\alpha = 0$ . Isso é, para todos os efeitos, equivalente a tomar  $Z = 0$  (ou  $\omega = -b$ ), e portanto  $\omega_\mu = -b_\mu$ . Nesse caso  $S = 0$ . As equações de movimento se reduzem a

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\mu_{\sigma\nu}\} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \omega_\nu \left( g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0, \quad (5.20)$$

que, são pré-geodésicas da geometria de Weyl (ver definição 2.2.11), reparametrizadas de modo que seu vetor tangente tenha norma 1 no gauge especificado. Essas equações podem

ser obtidas a partir de (ver eq. 5.19)

$$\delta \int e^{-\omega} ds = 0. \quad (5.21)$$

A reparametrização

$$\xi(s) = \int^s e^{-\omega} ds' \quad (5.22)$$

nos dá, como é imediato ver, a equação das geodésicas de Weyl (2.15), onde os coeficientes da conexão são dados por (2.64). Dessa forma, o parâmetro  $\xi$ , dado pela equação (5.22), é um parâmetro afim das geodésicas de Weyl. Reciprocamente, dada uma geodésica de Weyl parametrizada por um parâmetro afim  $\xi$  e fixo um gauge  $(g_{\mu\nu}, \omega)$ , a reparametrização

$$s(\xi) = A \int^\xi e^\omega d\xi' \quad (5.23)$$

(com  $A$  constante) é tal que o vetor tangente à curva parametrizada por  $s$  tem norma constante com relação a  $g$ , o que segue diretamente da compatibilidade da conexão com a estrutura de Weyl (ver def. 2.3.3). Assim, escolhendo  $A$  de modo que o vetor tangente à curva tenha norma 1 com respeito a  $g$ , obtemos para a pré-geodésica parametrizada por  $s$  a equação (5.20).

**2)** No gauge em que  $\beta = 1$ , temos que as equações de movimento (5.18) se reduzem a

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\sigma\nu\}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{q_s}{m} \omega_\nu \left( g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0, \quad (5.24)$$

e se supusermos que a lagrangiana das partículas não depende de  $\beta$ , teremos  $b_s = 0$ , e portanto (pela eq. 5.12)  $q_s = -m$ . As equações se reduzem, então, a

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\sigma\nu\}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \omega_\nu \left( g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0, \quad (5.25)$$

as mesmas do caso  $\alpha = 0$ .

Notemos que para que a equação de movimento tome a forma (5.20) a única restrição necessária é que a lagrangiana das partículas não dependa de  $\beta$ , pois nesse caso temos  $b_s = 0$ , de forma que a equação (5.12) nos dá  $q_s = -m$ . Substituindo em (5.18), obtemos (5.20).

## Observadores na geometria de Weyl

Notemos que as equações de movimento (5.18) se referem a curvas parametrizadas (no caso, pelo comprimento de arco de uma métrica específica da estrutura conforme). Segundo [14] e [11], o processo de medida está associado a um “gauge” ou, em outras palavras, à escolha do par  $(g_{\mu\nu}, \omega_\mu)$ . Seguindo essa hipótese, diferentes gauges - ou, como na versão proposta por Canuto *et al.*, diferentes “padrões de escala” (unidades de medida que variam de ponto a ponto) [11] - nos dariam diferentes medidas. Baseando-nos no fato de que as equações de movimento são escritas, para um gauge fixo, de modo que a norma da 4-velocidade da partícula seja igual a 1 nesse gauge, tomamos como um *observador* uma curva tipo-tempo apontando para o futuro (assim como na relatividade geral). A parametrização dessa curva nos determina a unidade de tempo medida por esse observador. Supomos que para que esse observador realize medidas de velocidade seja necessário determinar como o tempo passa para ele, ou seja, determinar o gauge. Isso é feito da seguinte forma: Fixado um gauge  $(g_{\mu\nu}, \omega_\mu)$ , a parametrização da curva é escolhida de forma que o vetor tangente à curva tenha norma 1 com relação a  $g$ . Desse modo, nesse gauge é possível definir a velocidade newtoniana de uma partícula (cuja curva que a representa também é parametrizada de modo que seu vetor tangente tenha norma 1 nesse gauge) da mesma forma que na relatividade geral. Assim, a cada observador está associado um gauge, e o observador realiza medidas nesse gauge. Mudando o gauge, mudamos a parametrização das curvas. Segundo a interpretação dada por Dirac [14] e Canuto *et al.* [11], a mudança de gauge corresponde a uma mudança nas unidades de medida dos observadores, de modo que duas parametrizações diferentes para uma dada curva dão duas formas diferentes com que o tempo passa para o observador associado a essa curva. Assim, a princípio, a medida da velocidade newtoniana dependeria do gauge, propriedade que queremos analisar no que segue. Com essa análise pretendemos também tornar mais clara a noção de “observador” dada neste parágrafo.

Supondo que a interpretação dada acima a respeito do que é um observador na geometria de Weyl (esse conceito pode ser estendido para o caso em que a geometria não é integrável) e de como este realiza medidas esteja correta, e que as equações de movimento para as partículas sejam consistentes (isto é, que a imagem da curva que é solução das equações de movimento seja independente do gauge), vejamos como se relacionam as velocidades newtonianas de uma partícula (representada por uma curva  $\gamma$  que aponta para o futuro cuja parametrização depende do gauge, como explicado acima) medidas por um observador em diferentes gauges. Utilizaremos abaixo, somente nesta seção, a notação da seção (2.3), por acharmos mais conveniente para a apresentação do que segue. A transição entre as notações não deve causar problemas.

Também, como na relatividade geral, definimos um *observador instantâneo* em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  como sendo um vetor tipo-tempo  $Y \in T_p\mathcal{M}$  que aponta para o futuro. Esse observador instantâneo realiza medidas nos gauges em que  $Y$  tem norma 1. Mudando o gauge, está associado a  $Y$  o observador instantâneo  $\tilde{Y}$ , que corresponde ao mesmo observador físico inicial, porém medindo diferentemente a forma como passa o tempo.

Seja  $p \in \mathcal{M}$  de modo que  $\gamma$  passe por  $p$ , e tome um gauge determinado por  $(g, \omega)$ , onde  $g \in G$  é uma métrica pertencente à estrutura conforme  $G$  da variedade de Weyl e  $\omega$  é a 1-forma (não necessariamente exata) associada, com  $F(g) = 2\omega$  (ver seção 2.3). Nesse gauge, suponha que um observador (instantâneo) em  $p$  seja descrito por um vetor tipo-tempo  $Y \in T_p\mathcal{M}$ , de norma 1 com relação a  $g$ . Nesse gauge, a curva  $\gamma$  que representa a trajetória de uma partícula é parametrizada de modo que sua 4-velocidade tenha norma 1. A *velocidade newtoniana* da partícula medida por esse observador nesse gauge é definida então como na relatividade geral (ver seção 4.1): Se  $X = \dot{\gamma}_p \in T_p\mathcal{M}$ , pelo lema (2.1.18) temos que  $X = aY + S$ , com  $a > 0$ , onde  $S$  é tipo-espaço e  $Y$  e  $S$  são ortogonais. A velocidade newtoniana medida por esse observador nesse gauge é, então, dada por  $V := S/a$ . A norma da velocidade newtoniana é então dada por

$$|V| = \sqrt{\frac{-g(S, S)}{a^2}}$$

Suponha agora que esse mesmo observador meça a velocidade newtoniana da partícula em outro gauge dado por  $(\tilde{g}, \tilde{\omega})$ , que está relacionado com  $(g, \omega)$  por  $\tilde{g} = e^{2\lambda}g$ ,  $\tilde{\omega} = \omega + d\lambda$ . Então, no novo gauge, o observador é representado por um vetor  $\tilde{Y}$ , com norma 1 com respeito a  $\tilde{g}$ . Temos, portanto,

$$1 = \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y}) = e^{2\lambda(p)}g(\tilde{Y}, \tilde{Y}),$$

com  $\tilde{Y} = bY$  para  $b > 0$ . Logo, devemos ter

$$\tilde{Y} = e^{-\lambda(p)}Y.$$

No novo gauge, a curva que representa a trajetória da partícula é reparametrizada de modo que  $\tilde{g}(\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}}) = 1$ . Logo, se  $\tilde{X} = \dot{\tilde{\gamma}}_p \in T_p\mathcal{M}$ , devemos ter

$$\tilde{X} = e^{-\lambda(p)}X.$$

Dessa forma, escrevendo  $\tilde{X} = \tilde{a}\tilde{Y} + \tilde{S}$ , com  $\tilde{S}$  tipo-espaço e proporcional a  $S$ , segue que

$$\tilde{S} = e^{-\lambda(p)} S$$

e

$$\tilde{a} = a.$$

Assim, a velocidade newtoniana medida por esse observador no novo gauge é

$$\tilde{V} := \frac{\tilde{S}}{\tilde{a}} = e^{-\lambda} V,$$

que é diferente da velocidade newtoniana no gauge original. Contudo, a norma da velocidade newtoniana medida no novo gauge é dada por

$$|\tilde{V}| = \sqrt{\frac{-\tilde{g}(\tilde{S}, \tilde{S})}{\tilde{a}^2}} = \sqrt{\frac{-g(S, S)}{a^2}} = |V|. \quad (5.26)$$

Assim, a norma da velocidade newtoniana não depende do gauge no qual a medida é realizada. Como a teoria de Israelit, assim como a de Canuto *et al.*, admitem a interpretação acima para os observadores (de fato as equações de movimento são escritas de modo que essa hipótese fica implícita), nessas teorias temos que a equação (5.26) se aplica, e portanto a norma da velocidade newtoniana medida nessa teoria é independente do gauge no qual se encontra o observador. Esse fato tem conseqüências, por exemplo, nas predições de modelos relativísticos de discos galácticos, como será visto adiante. Em particular, a velocidade circular das curvas de rotação para o modelo de Kuzmin construído para o caso particular em que a constante de acoplamento  $\alpha$  da teoria de Israelit é igual a zero (ver equações (5.2), (5.3)) - que é formalmente equivalente à teoria de Canuto *et al.* na maioria dos aspectos - é independente do gauge. Como essa teoria é tal que existe um gauge no qual vale a relatividade geral (determinado pela condição  $\omega = 0$ ), a velocidade circular do modelo de Kuzmin nessa teoria construído a partir do modelo relativístico [44] e a do próprio modelo relativístico são iguais. Mais geralmente, para todo modelo nessa teoria obtido a partir de um modelo relativístico, a velocidade circular será a mesma em ambos.

## 5.4 Modelos de Kuzmin em Weyl-Dirac integrável

Nesta seção construímos modelos de Kuzmin na teoria integrável de Weyl-Dirac [25] e na teoria proposta por Canuto *et al.*, ambas modificações para o caso integrável de [14].

Tratamos de alguns casos particulares de [25], e discutimos a validade dos resultados obtidos para casos mais gerais. A análise das predições dessas teorias ocorre através da comparação dos perfis de densidade e das curvas de rotação obtidas com as respectivas quantidades relativísticas. O termo cosmológico  $\Lambda\beta^4$  é desprezado no restante do trabalho, pois é suposto que não tenha influência em escalas galácticas. Também analisamos o limite newtoniano de um dos casos estudados.

Nos casos especiais analisados abaixo, a métrica possui simetria axial e é escrita na forma isotrópica

$$ds^2 = e^{\nu(R,z)} dt^2 - e^{\lambda(R,z)} (dR^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2) \quad (5.27)$$

e nos restringimos aos casos nos quais  $\omega = \omega(R, z)$ , onde fica implícito que o sistema de coordenadas cartesiano associado ao sistema de coordenadas cilíndricas  $(t, R, z, \varphi)$  cobre todo o espaço-tempo. Além disso, as equações de movimento para partículas de teste são dadas por (5.20):

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\sigma\nu\}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \omega_\nu \left( g^{\mu\nu} - \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0. \quad (5.28)$$

Faremos, antes de construir os modelos de Kuzmin para os casos particulares, considerações gerais sobre quantidades físicas associadas às trajetórias das partículas descritas por (5.20). A velocidade circular medida por um observador instantâneo (unitário em relação ao gauge escolhido, de acordo com a convenção adotada acima) em repouso junto à partícula é dada por (4.13). Notamos, primeiramente, que as equações (5.28) podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left( \{\sigma\nu\}^\mu + g_{\sigma\nu} \omega^\mu \right) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \omega_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0.$$

Considerando o espaço-tempo descrito, em coordenadas cilíndricas  $(t, R, z, \varphi)$ , pela métrica

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{zz} dz^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

para algum gauge, com  $g_{\nu\nu} = g_{\nu\nu}(R, z)$ ,  $\nu = t, R, z, \varphi$  e com respectivo campo  $\omega$  (não importa de quais coordenadas depende), a equação de movimento para a coordenada  $R$  nos dá

$$\ddot{R} + \left( \{\sigma\nu\}^R + g_{\sigma\nu} \omega^R \right) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \omega_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \dot{R} = 0. \quad (5.29)$$

A fim de calcularmos a velocidade newtoniana de partículas fazendo um movimento circular em torno do centro na hipersuperfície  $z = 0$ , fazemos  $R = cte.$  e  $z = 0$  em (5.29):

$$\left( \{\varphi\varphi\}^R + g_{\varphi\varphi} \omega^R \right) (\dot{\varphi})^2 + \left( \{\sigma\nu\}^R + g_{\sigma\nu} \omega^R \right) (\dot{t})^2 = 0,$$

pois  $\{\dot{\varphi}\}^R = 0$ . Assim, temos

$$\frac{(\dot{\varphi})^2}{(\dot{t})^2} = -\frac{\{\dot{t}\}^R + g_{tt}\omega^R}{\{\dot{\varphi}\}^R + g_{\varphi\varphi}\omega^R}. \quad (5.30)$$

Para as geodésicas parametrizadas pelo parâmetro afim  $\xi$  (ver eq. 5.22), temos que as equações das geodésicas de Weyl podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left( \{\dot{\sigma}_\nu\}^\mu + g_{\sigma\nu}\omega^\mu \right) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2\omega_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0.$$

O termo  $2\omega_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds}$  na equação para  $x^\mu = R$  é nulo para a velocidade circular, de modo que a velocidade circular nessa nova parametrização é igual à velocidade circular na parametrização pelo comprimento de arco da métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Façamos uma mudança de gauge do tipo (2.65), a qual preserva a conexão. Temos que

$$\widetilde{\{\dot{\sigma}_\nu\}^\mu} = \{\dot{\sigma}_\nu\}^\mu - g_{\sigma\nu}\lambda^\mu + \delta_\sigma^\mu\lambda_\nu + \delta_\nu^\mu\lambda_\sigma. \quad (5.31)$$

Assim, nesse novo gauge, temos que

$$\frac{(\widetilde{\dot{\varphi}})^2}{(\widetilde{\dot{t}})^2} = -\frac{\widetilde{\{\dot{t}\}^R} + \tilde{g}_{tt}\tilde{\omega}^R}{\widetilde{\{\dot{\varphi}\}^R} + \tilde{g}_{\varphi\varphi}\tilde{\omega}^R} = -\frac{\{\dot{t}\}^R + \tilde{g}_{tt}\tilde{g}^{RR}\tilde{\omega}_R}{\{\dot{\varphi}\}^R + \tilde{g}_{\varphi\varphi}\tilde{g}^{RR}\tilde{\omega}_R}.$$

Como, por (5.31)

$$\widetilde{\{\dot{t}\}^R} = \{\dot{t}\}^R - g_{tt}\lambda^R,$$

temos que

$$\widetilde{\{\dot{t}\}^R} + \tilde{g}_{tt}\tilde{g}^{RR}\tilde{\omega}_R = \{\dot{t}\}^R + g_{tt}\omega^R$$

por (2.65). Analogamente,

$$\widetilde{\{\dot{\varphi}\}^R} + \tilde{g}_{\varphi\varphi}\tilde{g}^{RR}\tilde{\omega}_R = \{\dot{\varphi}\}^R + g_{\varphi\varphi}\omega^R,$$

e portanto

$$\frac{(\widetilde{\dot{\varphi}})^2}{(\widetilde{\dot{t}})^2} = \frac{(\dot{\varphi})^2}{(\dot{t})^2}.$$

Assim, a velocidade circular, definida por  $(v_c)^2 = -\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{(\dot{\varphi})^2}{(\dot{t})^2}$ , é dada por

$$(v_c)^2 = \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{\{\dot{t}\}^R + g_{tt}\omega^R}{\{\dot{\varphi}\}^R + g_{\varphi\varphi}\omega^R}. \quad (5.32)$$

Pelos cálculos acima, essa expressão é invariante de gauge, como de fato deveria ser pelos argumentos geométricos dados no final da seção (5.3.1).

Para a métrica (5.27), temos que

$$\{\overset{R}{tt}\} = \frac{1}{2} \frac{(e^\nu)_{,R}}{e^\lambda}$$

e

$$\{\overset{R}{\varphi\varphi}\} = \frac{1}{2} R(2 + R\lambda_R),$$

de maneira que

$$-\frac{\{\overset{R}{tt}\} + g_{tt}\omega^R}{\{\overset{R}{\varphi\varphi}\} + g_{\varphi\varphi}\omega^R} = \frac{(e^\nu)_{,R} - 2e^\nu\omega_R}{(R^2e^\lambda)_R - 2R^2e^\lambda\omega_R}.$$

A velocidade circular então é dada por

$$(v_c)^2 = \frac{R^2e^\lambda}{e^\nu} \frac{(e^\nu)_{,R} - 2e^\nu\omega_R}{(R^2e^\lambda)_R - 2R^2e^\lambda\omega_R}. \quad (5.33)$$

Como na relatividade geral, definimos o *momento angular específico* da partícula com respeito ao sistema de coordenadas  $(t, R, z, \varphi)$  como a quantidade conservada relacionada à coordenada  $\varphi$  da ação  $\int e^{-\omega} ds$  (ver eq. 4.16), obtido através das equações de Euler-Lagrange (4.15). Obtemos então

$$h := -e^{-\omega} g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}, \quad (5.34)$$

onde  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$  é a componente  $\varphi$  do vetor tangente à curva que representa a trajetória da partícula, parametrizada de forma que este tenha norma 1 com respeito a  $g$ . A expressão acima é invariante de gauge, se tomarmos no novo gauge descrito pela métrica  $\tilde{g}$  a parametrização pelo comprimento de arco de  $\tilde{g}$ .

O fato de que o vetor tangente à curva tem norma 1 significa, para a métrica (5.27), que

$$e^\nu \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - R^2 e^\lambda \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1. \quad (5.35)$$

Juntamente com a equação (5.30) e com  $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds}$ , obtemos para uma partícula de teste em uma trajetória circular ( $R$  constante) em uma hipersuperfície dada por  $z$  constante:

$$h = -e^{-\omega} R^2 e^\lambda \sqrt{\frac{(e^\nu)_{,R} - 2e^\nu\omega_R}{e^\nu [(R^2e^\lambda)_{,R} - 2R^2e^\lambda\omega_R] - R^2e^\lambda [(e^\nu)_{,R} - 2e^\nu\omega_R]}}. \quad (5.36)$$

Vemos, como no caso da velocidade circular, que a expressão é de fato invariante de gauge.

Nos casos que seguem, supomos que no limite de campos fracos e baixas velocidades valham a primeira e a segunda leis de Newton, sendo a modificação que a teoria introduz com relação à relatividade geral de origem gravitacional. Dessa forma, nesse limite, o critério de estabilidade de Rayleigh é dado pela equação (3.14). Supomos, como em [44], que a extensão desse critério ao caso geral seja dada pela mesma equação, isto é:

$$hh_{,R} > 0. \quad (5.37)$$

Abaixo, construímos modelos de Kuzmin para casos particulares da teoria de Israelit. Primeiramente, analisamos o gauge  $\beta = 1$  (chamado por Dirac de *gauge de Einstein* [14]), caso no qual as equações de campo no vácuo são equivalentes às equações de campo da relatividade geral com tensor de energia-momento dado por um campo escalar sem massa. A partir de uma família de soluções para essa equação no caso esfericamente simétrico [9], obtemos uma família de discos de Kuzmin dependentes do parâmetro  $\alpha$  da teoria. Estudamos o comportamento das curvas de rotação e dos perfis de densidade desse modelo em função de  $\alpha$ . Vale notar que, se  $\alpha = 0$ , recuperamos nesse caso a relatividade geral.

Em seguida, estudamos o caso  $\alpha = 0$ . Nesse caso, a teoria de Israelit [25] é praticamente idêntica à modificação proposta por Canuto *et al.* para a teoria de Dirac [11], a diferença aparecendo na forma como o campo  $\omega$  se acopla à matéria. Como ressaltado acima, se  $\omega = 0$  obtemos a relatividade geral. Tendo isso em mente, examinamos as predições feitas por observadores em diferentes gauges (perfis de densidade e curvas de rotação - estas últimas, como já dito, são independentes do gauge) segundo a teoria. Vale aqui ressaltar que essa comparação tem caráter apenas qualitativo, e nos dá apenas uma primeira aproximação para os processos físicos que ocorrem nas galáxias espirais. Também investigamos o que ocorre no limite newtoniano, isto é, no limite de campos fracos e velocidades baixas. Sob certas hipóteses, é possível obter uma modificação nas equações de movimento devida a  $\omega$ , assim como uma equação para esse campo similar à equação de Poisson (3.6). Resolvemos essa equação para alguns casos, obtendo assim as curvas de rotação associadas a algumas distribuições esfericamente simétricas de matéria. Tais resultados são úteis pois nos dão uma idéia do que pode ocorrer para distribuições de matéria mais realistas, caso muito mais difícil de ser abordado.

### 5.4.1 Gauge de Einstein

Com  $\beta = 1$ , as equações de campo da teoria se reduzem a

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \quad (5.38)$$

e

$$2\alpha\omega^\nu{}_{;\nu} = 16\pi S, \quad (5.39)$$

onde

$$8\pi\Theta^{\mu\nu} = \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\omega^\lambda\omega_\lambda - \omega^\mu\omega^\nu\right). \quad (5.40)$$

No vácuo,  $T_{\mu\nu} = 0$  e  $S = 0$ . As equações de campo se reduzem, então, a

$$G_{\mu\nu} = \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\omega^\lambda\omega_\lambda - \omega^\mu\omega^\nu\right), \quad (5.41)$$

$$\omega^\nu{}_{;\nu} = 0. \quad (5.42)$$

Essas equações são as mesmas equações que as para um tensor de energia-momento descrito por um campo escalar sem massa na relatividade geral [46]. Para o caso esfericamente simétrico, uma família de soluções foi encontrada por Buchdahl [9], que em coordenadas cilíndricas isotrópicas é dada por

$$ds^2 = \left(\frac{1-f}{1+f}\right)^{2\gamma} dt^2 - (1-f)^{2-2\gamma}(1+f)^{2+2\gamma}(dR^2 + dz^2 + R^2d\varphi^2), \quad (5.43)$$

$$\omega = 2\lambda \ln\left(\frac{1-f}{1+f}\right), \quad (5.44)$$

onde

$$f = \frac{m}{2\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (5.45)$$

e  $\gamma$  e  $\lambda$  são constantes satisfazendo

$$\gamma^2 = 1 + 2\alpha\lambda^2. \quad (5.46)$$

Para uma métrica do tipo (5.43) e uma função  $\omega$  dada por (5.44) em coordenadas cilíndricas isotrópicas  $(t, R, z, \varphi)$ , com  $f = f(R, z)$ , é possível demonstrar que o tensor de

energia-momento (5.38) é escrito como

$$\begin{aligned}
T_t^t &= -\frac{\gamma - f}{2\pi(1-f)^{3-2\gamma}(1+f)^{3+2\gamma}} \left( f_{,RR} + f_{,zz} + \frac{1}{R} f_{,R} \right), \\
T_r^r &= \frac{1}{4\pi(1-f)^{3-2\gamma}(1+f)^{3+2\gamma}} \left\{ f \left( f_{,zz} + \frac{1}{R} f_{,R} \right) + 2(f_{,R})^2 - (f_{,z})^2 \right\}, \\
T_r^z &= -\frac{1}{4\pi(1-f)^{3-2\gamma}(1+f)^{3+2\gamma}} (f f_{,Rz} - 3f_{,R} f_{,z}), \\
T_z^z &= \frac{1}{4\pi(1-f)^{3-2\gamma}(1+f)^{3+2\gamma}} \left\{ f \left( f_{,RR} + \frac{1}{R} f_{,R} \right) + 2(f_{,z})^2 - (f_{,r})^2 \right\}, \\
T_\varphi^\varphi &= \frac{1}{4\pi(1-f)^{3-2\gamma}(1+f)^{3+2\gamma}} \{ f(f_{,RR} + f_{,zz}) - ((f_{,R})^2 + (f_{,z})^2) \}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Aplicamos o método de Kuzmin à família de soluções (5.43, 5.44), escrevendo a métrica em coordenadas cilíndricas isotrópicas e fazendo a transformação  $z \mapsto |z| + a$  na função  $f$ :

$$f = \frac{m}{2\sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}}.$$

Para que não haja singularidades nem na métrica nem em  $\omega$ , devemos ter  $\frac{m}{2a} < 1$ .

Como na relatividade geral, escrevendo

$$T_\mu^\nu = H_\mu^\nu \delta(z) + D_\mu^\nu, \tag{5.48}$$

o tensor de energia-momento “físico” do disco será dado por

$$Y_\mu^\nu = \sqrt{-g_{zz}} H_\mu^\nu \tag{5.49}$$

na hipersuperfície  $z = 0$ .

Além disso, para  $z \neq 0$ , temos que  $D_\mu^\nu = 0$ , o que pode ser visto através de um argumento análogo ao utilizado no caso relativístico. Como em [45], o tensor de energia-momento é diagonal nesse sistema de coordenadas, com pressão isotrópica. Utilizando o programa MAPLE, calculamos os perfis de densidade e de pressão no disco,  $\sigma = Y_0^0$ ,  $P_i = -Y_i^i$ ,  $i = r, z, \varphi$ . Definindo

$$\tilde{R} = R/m, \quad \tilde{a} = a/m, \quad x = \sqrt{\left(\frac{R}{m}\right)^2 + \left(\frac{a}{m}\right)^2},$$

essas quantidades são escritas como

$$\sigma = \frac{\tilde{a}/m(\gamma - \frac{1}{2x})}{2\pi(1 - \frac{1}{2x})^{2-\gamma}(1 + \frac{1}{2x})^{2+\gamma}x^3}, \quad (5.50)$$

$$P = \frac{\tilde{a}/m}{8\pi(1 - \frac{1}{2x})^{2-\gamma}(1 + \frac{1}{2x})^{2+\gamma}x^4}. \quad (5.51)$$

As expressões para o modelo feito na relatividade geral [44] são obtidas fazendo  $\gamma = 1$  (isto é,  $\alpha = 0$  em (5.46)).

Para que a densidade seja positiva em todo ponto, é necessário que  $\gamma > \frac{1}{2\tilde{a}} = \frac{m}{2a}$ .

Como em [44], é possível calcular a massa total do disco integrando em  $r$  e  $\varphi$  a densidade:

$$M_{GAL} = \int \sigma \sqrt{g_{rr}g_{\varphi\varphi}} dr d\varphi = -a + \frac{1}{4a} \frac{(2a + m)^{\gamma+1}}{(2a - m)^{\gamma-1}}. \quad (5.52)$$

Novamente, para  $\gamma = 1$ , recaímos na fórmula da relatividade geral obtida em [44].

Segundo a expressão (5.33), a velocidade circular no disco é

$$v_c = \tilde{R} \sqrt{\frac{(\gamma - 2\lambda)}{\tilde{R}^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{a}^2}} - (\gamma + 2\lambda) \right) + (\tilde{R}^2 + \tilde{a}^2)^{3/2} \left( 1 - \frac{1}{4(\tilde{R}^2 + \tilde{a}^2)} \right)}}}. \quad (5.53)$$

Para valores típicos de escalas galácticas ( $\frac{m}{a} \sim 10^{-5}$ , ver seção 4.1), fixando o parâmetro  $a$ , é possível encontrar para uma dada escolha de  $\gamma$ ,  $\lambda$  e  $m$  um valor para o parâmetro  $m$  do modelo relativístico de modo que as curvas de rotação dos dois modelos sejam praticamente idênticas. Isso ocorre porque, a menos de um fator multiplicativo, a expressão (5.53) difere da expressão relativística ([44], obtida com  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 0$ ) apenas por um fator aditivo no denominador. A diferença entre as duas configurações (relatividade geral e teoria integrável de Weyl-Dirac no gauge de Einstein) ocorre, nesse caso, no perfil de densidade visto pelo observador parado em relação ao fluido. Dessa forma, é de se esperar que o comportamento qualitativo das curvas de rotação no gauge de Einstein seja parecido com o comportamento das curvas relativísticas, fato ilustrado na figura (5.1). Isso nos indica que, se a teoria proposta em [25] puder explicar a anomalia nas curvas de rotação de galáxias espirais [2, 41] sem a necessidade de matéria escura, ou esse gauge não deve ser o indicado para medir fenômenos nessa escala ou devemos ter  $b_s \neq 0$  em (5.12) - o que dá  $\frac{q_s}{m} \neq -1$  em (5.24). Supondo que a interpretação sobre os observadores na geometria de Weyl dada em (5.3.1) seja válida para a teoria de Israelit, como fica implícito pela apresentação dada em [25], a velocidade circular do modelo de Kuzmin seria independente do gauge. Dessa forma, a con-

clusão a que chegamos é que para  $b_s = 0$  o modelo de Kuzmin não é capaz de produzir curvas de rotação que concordem com os dados observacionais (ver [2, 41]). Contudo, este modelo apresenta algumas características interessantes, como o fato de podermos ter diferentes perfis de densidade para uma mesma curva de rotação. Além disso, a presença do fator  $(\gamma - \frac{1}{2x})$  no numerador da expressão para a densidade nos indica que, para valores de  $\gamma$  próximos de  $\frac{m}{2a}$ , o valor da densidade na região próxima ao centro da galáxia é muito pequeno com relação ao seu valor máximo, formando uma estrutura que se aproxima de um anel de matéria. É o que ocorre para os valores relativos à linha verde tracejada da figura (5.1). Como visto nas figuras (5.1a) e (5.1b), isso pode ser feito sem alterar a curva de rotação. Notamos também que o critério de estabilidade de Rayleigh (5.37) para o momento angular específico (dado pela eq. (5.36)) é satisfeito por todas as curvas traçadas (ver fig. (5.2)).

Vemos que, para certas galáxias como por exemplo a UGC11819 [5], o modelo de Kuzmin relativístico (assim como os respectivos casos para  $\beta = 1$ ) produz curvas de rotação que se adequam aos dados observacionais, ao menos no que se refere à curva de rotação. No entanto, a velocidade circular nesse modelo tem comportamento kepleriano, isto é: longe do centro da galáxia, temos  $v_c \propto r^{-1/2}$ . Desse modo, curvas de rotação planas ou que não decrescem com  $R$  não podem ser explicadas por esse modelo, como dito acima.

As equações desta seção estão escritas em unidades geométricas ( $G = c = 1$ ), de modo que massas têm dimensões de comprimento e velocidades são adimensionais. Para passarmos para outros sistemas de unidades (onde  $G$  e  $c$  têm dimensões), é feita a análise dimensional das quantidades físicas e são utilizados os fatores de conversão convenientes. Na prática, basta substituir  $\pi$  por  $\pi G/c^2$ ,  $m$  por  $\frac{GM}{c^2}$  (onde  $M$  é a massa dada em unidades convencionais) e  $v$  por  $v/c$ . Para mais detalhes, ver [46], apêndice F.

Ilustramos esse procedimento com as grandezas físicas introduzidas nesta seção. A densidade superficial do disco (5.50) e sua pressão (linear) (5.51) em unidades não-geométricas estão relacionadas com os valores em unidades geométricas por

$$\begin{aligned}\sigma_{nao\text{geom}} &= \frac{c^2}{G}\sigma_{\text{geom}}, \\ P_{nao\text{geom}} &= \frac{c^4}{G}P_{\text{geom}}.\end{aligned}\tag{5.54}$$

Tabela 5.1: Valores utilizados na figura 5.1

Curva	$a$ (kpc)	$m$ (pc)	$\gamma$	$\lambda$	$\alpha$
preta (RG) (sólida)	$6,9 \pm 0,2$	$(4,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$	1	0	0
azul (tracejada)	6,9	$3,0 \cdot 10^{-3}$	0,5	-0,5	$-9,375 \cdot 10^{-2}$
vermelha (traço-e-ponto)	6,9	$2,2 \cdot 10^{-3}$	0.1	-1	-0,495
preta (pontilhada)	6,9	$4,68 \cdot 10^{-3}$	1,2	0,132	$3,83 \cdot 10^{-3}$
verde (tracejada)	7,2	0.1	$7,0 \cdot 10^{-6}$	-0,0255	$-3,25 \cdot 10^{-4}$

Assim, escrevendo  $M = \frac{c^2}{G}m$ , temos

$$\sigma = \frac{Ma}{2\pi} \frac{(\gamma - \frac{GM/c^2}{2\sqrt{R^2+a^2}})}{(1 - \frac{GM/c^2}{2\sqrt{R^2+a^2}})^{2-\gamma} (1 + \frac{GM/c^2}{2\sqrt{R^2+a^2}})^{2+\gamma} (R^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$P = \frac{GM^2a}{8\pi} \frac{1}{(1 - \frac{GM/c^2}{2\sqrt{R^2+a^2}})^{2-\gamma} (1 + \frac{GM/c^2}{2\sqrt{R^2+a^2}})^{2+\gamma} (R^2 + a^2)^2}$$

A velocidade circular (5.53) é, desse modo, dada por

$$v_c = c \frac{R}{m} \sqrt{\frac{(\gamma - 2\lambda)}{\frac{R^2}{m^2} \left( \frac{m}{2\sqrt{R^2+a^2}} - (\gamma + 2\lambda) \right) + \frac{1}{m^3} (R^2 + a^2)^{3/2} \left( 1 - \frac{m^2}{4(R^2+a^2)} \right)}},$$

que pode também ser escrita como

$$v_c = c \sqrt{\frac{(\gamma - 2\lambda)}{\left( \frac{m}{2\sqrt{r^2+a^2}} - (\gamma + 2\lambda) \right) + \frac{1}{m} \frac{(r^2+a^2)^{3/2}}{r^2} \left( 1 - \frac{m^2}{4(r^2+a^2)} \right)}}.$$

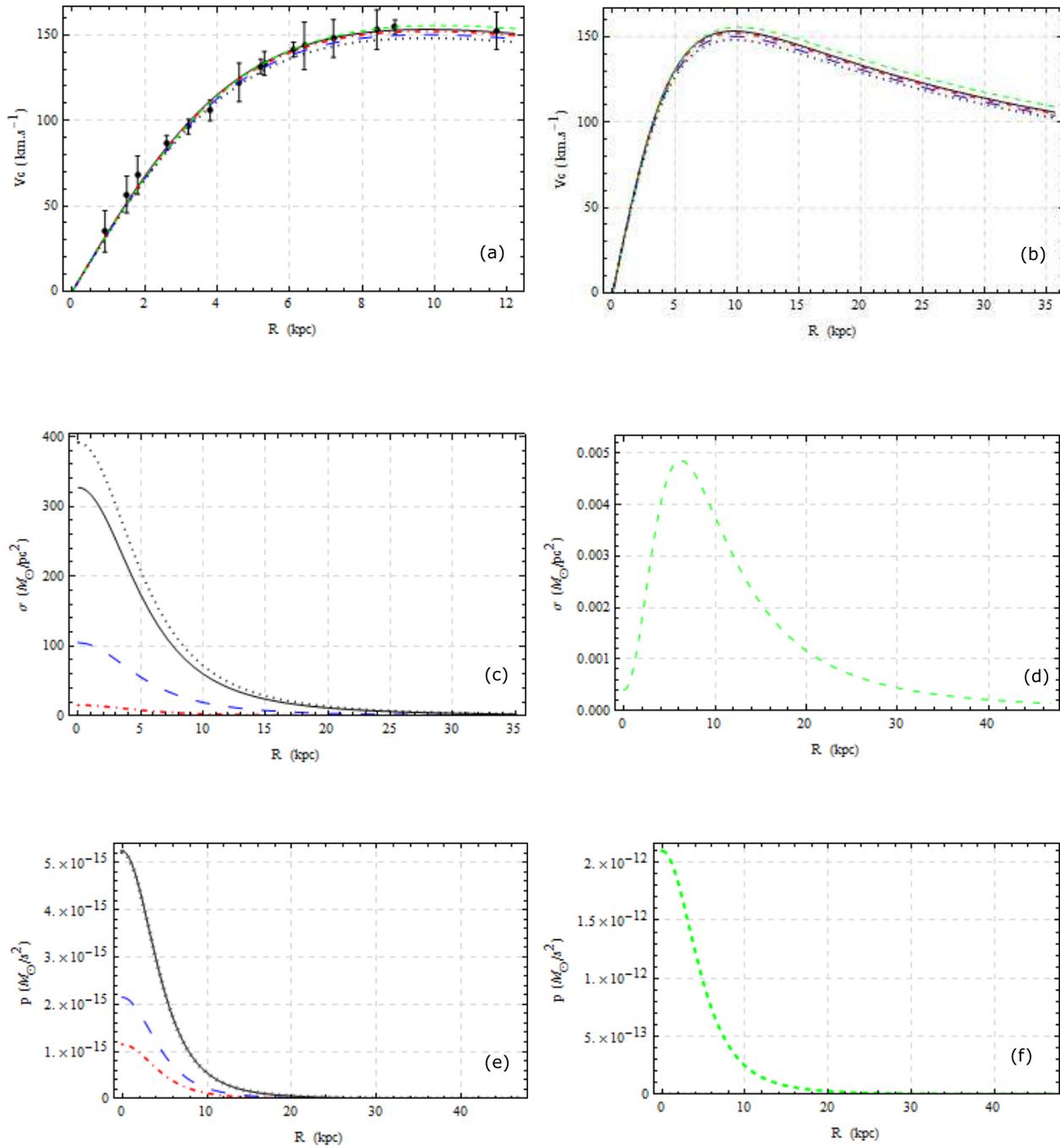


Figura 5.1: Curvas de rotação do modelo de Kuzmin no gauge de Einstein: (a) - curvas de rotação com dados observacionais da galáxia UGC11819 [5]. (b) - curvas de rotação previstas pelo modelo até 35 kpc. (c) e (d) - perfis de densidade. (e) e (f) - pressão isotrópica. As diferentes cores correspondem aos valores citados na tabela 5.1. A curva para o modelo relativístico (preta) foi ajustada, enquanto que as outras foram construídas segundo um critério visual.

Tabela 5.2: Massas totais dos discos da figura 5.1

Curva	Massa total do disco ( $M_{\odot}$ )
preta (RG) (sólida)	$9,8 \cdot 10^{10}$
azul (tracejada)	$3,13 \cdot 10^{10}$
vermelha (traço-e-ponto)	$4,6 \cdot 10^9$
preta (pontilhada)	$1,174 \cdot 10^{11}$
verde (tracejada)	$7,38 \cdot 10^6$

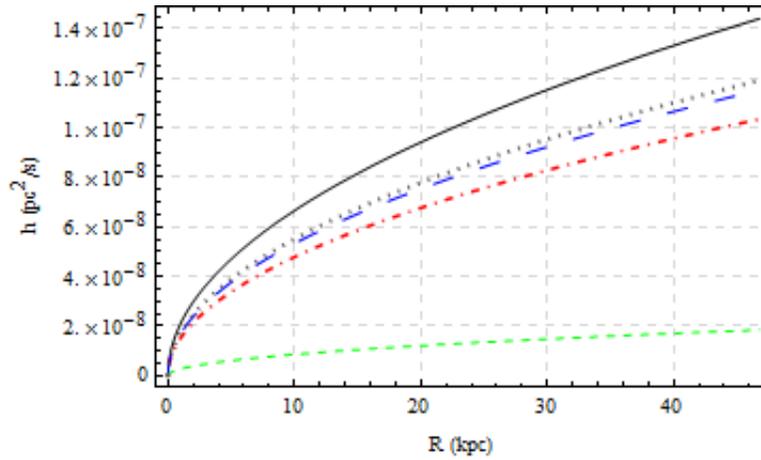


Figura 5.2: Momento angular específico das curvas de rotação da figura 5.1 em função da distância ao centro do disco. Os valores para as diferentes curvas estão especificados na tabela 5.1. Todas as curvas satisfazem o critério de estabilidade de Rayleigh (5.37).

### 5.4.2 Caso em que $\alpha = 0$

Se  $\alpha = 0$ , o que é formalmente equivalente a tomarmos  $Z = 0$  (e portanto  $\beta = e^{-\omega}$ ), as equações de campo (5.4) se reduzem a

$$G_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\omega^\sigma{}_{;\sigma} - \omega_{\mu;\nu}) + 2\omega_\mu\omega_\nu + g_{\mu\nu}\omega^\sigma\omega_\sigma = 8\pi e^{2\omega}T_{\mu\nu}. \quad (5.55)$$

A equação de movimento para as partículas de teste é dada por (5.20), que são geodésicas da geometria de Weyl reparametrizadas de modo que, em cada gauge, a norma de seu vetor tangente seja constante e igual a 1.

No caso da geometria de Weyl integrável (em dimensão 4), as equações (2.69) e (2.70) nos dão que o tensor de Einstein da geometria de Weyl  $Q_{\mu\nu}$  (ver definição (2.72)) é escrito, em função do tensor de Einstein riemanniano  $G_{\mu\nu}$  e da 1-forma  $\omega_\mu$ , em cada gauge, como

$$Q_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2(\omega_{\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\omega^\sigma{}_{;\sigma}) + 2(\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega^\sigma\omega_\sigma). \quad (5.56)$$

Como salientado nos comentários após a definição (2.72), a expressão acima é independente do gauge. Na versão proposta por Canuto *et al.* [11], a forma do acoplamento entre o tensor de energia-momento da matéria e o campo  $\omega$  não fica definida, sendo definido um tensor de energia-momento  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  invariante de gauge, que para  $\omega = 0$  coincide com o tensor de energia-momento da relatividade geral. Na teoria de Israelit [25], como visto na equação acima, o tensor de energia-momento é tal que  $\Pi(T_{\mu\nu}) = -2$ . Dada a interpretação física da densidade e da pressão no fluido como sendo basicamente dadas pelos autovalores de  $T^\mu{}_\nu$ , tal teoria nos diz que essas quantidades físicas não são invariantes de gauge. Como na teoria [11] essas quantidades são covariantes de gauge mas também não necessariamente invariantes, tomamos no que segue essa interpretação, que engloba a suposta em [25]. Para isso, substituímos o lado direito da equação (5.55) por  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ , sem definir como ocorre o acoplamento de  $\omega$  com a matéria. As equações de campo então se tornam

$$Q_{\mu\nu} = 8\pi\mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (5.57)$$

No gauge em que  $\omega = 0$ , temos a relatividade geral. Um modelo de Kuzmin para uma métrica isotrópica já foi obtido nesse caso em [44], e está brevemente descrito na seção (4.1). Assim, partindo desse modelo, analisaremos abaixo se a escolha do gauge (ou, na interpretação dada acima, a escolha do “relógio” e das “régua” do observador) modifica as previsões em escalas galácticas.

Aplicando as identidades de Bianchi (2.80) ou (2.81) às equações de campo (5.57) temos

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu &= -2\omega_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu, \\ g^{\mu\alpha} \nabla_\mu \mathcal{T}_{\alpha\nu} &= 0,\end{aligned}\tag{5.58}$$

que são as leis de conservação para a matéria no caso em que  $\alpha = 0$ . Na teoria de Israelit, para  $\alpha = 0$ , temos que  $S = 0$  (ver eq. (5.5)). Desse modo, a lei de conservação (5.13) nos dá

$$T^\nu{}_{\mu;\nu} + \omega_\mu T = 0.\tag{5.59}$$

Para um campo tensorial  $A^\mu{}_\nu$  simétrico, é fácil mostrar que

$$\nabla_\mu A^\mu{}_\nu = A^\mu{}_{\nu;\mu} - 4\omega_\mu A^\mu{}_\nu + A\omega_\nu,\tag{5.60}$$

onde  $A = A^\mu{}_\mu$ . Dessa forma, utilizando essa equação para o tensor de energia-momento  $T^\mu{}_\nu$  da teoria de Israelit juntamente da lei de conservação (5.59) e com  $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = e^{2\omega} T^\mu{}_\nu$ , obtemos (5.58). Logo, ao menos para  $\alpha = 0$ , a teoria de Israelit é compatível com as identidades de Bianchi. Se supusermos uma relação mais geral para o acoplamento entre o tensor de energia-momento e o campo  $\omega$ , como por exemplo

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = e^{N\omega} T^\mu{}_\nu,\tag{5.61}$$

onde  $N$  é um número inteiro, as leis de conservação advindas das identidades de Bianchi (5.58) nos dão

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu = -(N+2)\omega_\mu \mathcal{T}^\mu{}_\nu.$$

Utilizando (5.60),

$$T^\nu{}_{\mu;\nu} + (N-2)\omega_\nu T^\nu{}_\mu + T\omega_\mu = 0.$$

Canuto *et al.* trabalharam em escalas cosmológicas, e a maneira que utilizaram para determinar o gauge foi supondo válida a “hipótese dos grandes números” de Dirac [15, 14, 11], cuja conseqüência era de que a constante gravitacional  $G$  seria proporcional a  $t^{-1}$ , onde  $t$  é o tempo cosmológico. Como estamos trabalhando com escalas galácticas e consideramos que os discos galácticos são modelados por estruturas estáticas, devemos trabalhar em um gauge de modo que as expressões para a métrica e para o campo escalar  $\omega$  sejam independentes do tempo. Assim, a hipótese dos grandes números de Dirac não nos é útil para determinar o gauge.

A hipótese (5.61) para o acoplamento do tensor de energia-momento com o campo  $\omega$  nos

diz que a densidade e a pressão de um fluido perfeito, medidas por um observador localmente em repouso com relação ao fluido, são dadas em gauges distintos - relacionados por (2.65) - por

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= e^{(N-2)\lambda}\rho; \\ \tilde{p} &= e^{(N-2)\lambda}p\end{aligned}$$

(como salientado anteriorente - seção (5.3.1), definimos um *observador* como uma curva tipo-tempo que aponta para o futuro, e em cada gauge medições são realizadas reparametrizando essa curva e as curvas que representam as trajetórias de partículas de modo que todas tenham norma 1 com respeito à métrica determinada por esse gauge). A velocidade circular (para modelos axissimétricos), como já visto, é invariante de gauge.

### Limite newtoniano

Procuramos agora qual o limite de campos fracos e velocidades baixas da teoria quando  $\alpha = 0$ , e analisamos se este limite está bem-definido e faz sentido fisicamente. Para isso, supomos existente um sistema de coordenadas e um gauge  $(g, \omega)$  tais que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}, \quad (5.62)$$

com  $\varepsilon$  pequeno de modo que possamos desprezar os termos em  $\varepsilon^2$  nas componentes da conexão e na curvatura. Supomos também que  $\omega$  seja pequeno o suficiente para que os termos quadráticos que aparecem nas componentes do tensor de curvatura sejam desprezíveis. Trabalhamos também no limite de velocidades baixas, como será explicitado adiante.

Com essas aproximações, supondo que a norma da velocidade de uma partícula de teste seja igual a 1, temos

$$c^2 \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{ds} \right)^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1.$$

A velocidade newtoniana da partícula é dada por  $v^i := \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt}$ , e a hipótese de velocidades baixas se traduz trabalhando em primeira ordem em  $v^i/c$ . Assim, a equação acima é aproximada por

$$\left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \varepsilon\gamma_{00} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 1,$$

e portanto

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{c^2(1 + \varepsilon\gamma_{00})}.$$

Logo, a equação de movimento (5.20) é aproximada (para as componentes espaciais) por

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \{^i_{00}\} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - \omega_{,i} = 0,$$

já que  $\frac{dx^i}{ds}$  é da ordem de  $v^i/c$  e os símbolos de Christoffel são da ordem de  $\varepsilon$ . Assim,

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + c^2\{^i_{00}\} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \omega_{,i} = 0,$$

e supondo desprezível o termo  $\frac{d^2t}{ds^2}$ ,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2\{^i_{00}\} - \omega_{,i} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

Descartando termos de segunda ordem obtemos

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2\{^i_{00}\} - \omega_{,i} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

Como  $\omega$  é da ordem de  $\varepsilon$ ,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2\{^i_{00}\} - c^2\omega_{,i} = 0.$$

Utilizando que

$$\{^i_{00}\} = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma_{00,i}, \quad (5.63)$$

chegamos à equação de movimento no limite de campos fracos e estáticos e velocidades baixas (limite newtoniano):

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + c^2\nabla\left(\frac{\varepsilon}{2}\gamma_{00} - \omega\right) = 0. \quad (5.64)$$

Vejamos agora qual a expressão para as equações de campo (5.57) nesse limite. Como dito acima, consideramos apenas termos de primeira ordem em  $\varepsilon$  e  $\omega$  na curvatura. Consideramos um espaço-tempo estático, tal que no sistema de coordenadas e no gauge onde a equação (5.62) vale, com  $\omega$  pequeno como especificado acima, esses campos não dependam da coordenada temporal. Primeiramente, notamos que as equações (5.57) podem ser reescritas como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}\right), \quad (5.65)$$

tirando o traço de (5.57). Além disso, por (2.69),

$$R_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\omega^\sigma{}_{;\sigma} + 2\omega_{\mu;\nu} + 2(\omega_\mu\omega_\nu - g_{\mu\nu}\omega^\sigma\omega_\sigma). \quad (5.66)$$

Segundo nossas suposições, o termo entre parênteses pode ser desprezado. Além disso, em primeira ordem em  $\varepsilon$  temos que

$$K_{\mu\nu} = \{\sigma_{\mu\nu}\}_{,\sigma} - \{\sigma_{\sigma\mu}\}_{,\nu} \quad (5.67)$$

e

$$\{\sigma_{\sigma\mu}\} = \frac{1}{2} \ln(-\mathfrak{g})_{,\mu}, \quad (5.68)$$

de modo que

$$K_{\mu\nu} = \{\sigma_{\mu\nu}\}_{,\sigma} - \frac{1}{2} \ln(-\mathfrak{g})_{,\mu\nu}. \quad (5.69)$$

As equações de campo então são escritas como

$$K_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\omega^\sigma{}_{;\sigma} + 2\omega_{\mu;\nu} = 8\pi(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}). \quad (5.70)$$

Segundo nossa convenção para o índice da métrica,  $\omega^\sigma{}_{;\sigma} = -\nabla^2\omega$ . Logo,

$$K_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\nabla^2\omega + 2\omega_{\mu;\nu} = 8\pi(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}). \quad (5.71)$$

Para  $\mu = \nu = 0$ ,

$$\{\sigma_{00}\} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}\gamma_{00,\sigma}, & \text{se } \sigma \neq 0; \\ 0, & \text{se } \sigma = 0. \end{cases} \quad (5.72)$$

Assim,

$$\{\sigma_{00}\}_{,\sigma} = \sum_{j=1}^3 \frac{\varepsilon}{2}\gamma_{00,jj} \quad (5.73)$$

de maneira que

$$K_{00} = \{\sigma_{00}\}_{,\sigma} = \frac{\varepsilon}{2}\nabla^2\gamma_{00}. \quad (5.74)$$

Temos, portanto,

$$\nabla^2(\frac{\varepsilon}{2}\gamma_{00} - \omega) = \frac{8\pi G}{c^2}(\mathcal{T}_{00} - \frac{1}{2}\mathcal{T}), \quad (5.75)$$

as equações de campo no limite de campos fracos e baixas velocidades. Seguindo Canuto *et al.*, supomos que  $\mathcal{T}_{\mu\nu} = e^{N\omega}T_{\mu\nu}$ , onde  $N$  é um inteiro e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento físico. Para uma distribuição de matéria descrita somente pela densidade  $\rho$ , o tensor de

energia-momento é dado por  $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ , e portanto a equação (5.75) nos dá

$$c^2 \nabla^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \gamma_{00} - \omega \right) = 4\pi G e^{N\omega} \rho. \quad (5.76)$$

Na relatividade geral, o limite newtoniano é obtido identificando a perturbação  $\gamma_{00}$  da métrica com o potencial gravitacional [24]. Mais precisamente, escreve-se  $\Phi = \frac{c^2 \varepsilon}{2} \gamma_{00}$ . A equação (5.64), então, nos dá a segunda lei de Newton (3.7) na presença de um campo gravitacional, e a equação (5.76) nos dá a equação de Poisson (3.6). Contudo, quando introduzimos o campo  $\omega$ , é necessário fazer pequenas alterações nessa interpretação. Apresentamos abaixo duas abordagens possíveis, e estudamos suas conseqüências.

**Primeira abordagem:** Expandimos  $e^{N\omega}$  em primeira ordem em seu argumento,

$$e^{N\omega} = 1 + N\omega, \quad (5.77)$$

de forma que

$$c^2 \nabla^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \gamma_{00} - \omega \right) = 4\pi G (1 + N\omega) \rho. \quad (5.78)$$

Supondo que a densidade  $\rho$  seja pequena o suficiente de modo que sejam considerados apenas termos de primeira ordem em  $\omega$  e  $\rho$ , o termo em  $N$  é descartado. Trabalhamos, dessa forma, apenas com o tensor de energia-momento “físico”. Defina então  $\Phi = c^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \gamma_{00} - \omega \right)$ . As equações (5.78) e (5.64) nos dão

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho, \\ \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -\nabla \Phi, \end{aligned} \quad (5.79)$$

isto é, a equação de Poisson e a segunda lei de Newton para uma partícula sujeita a um campo gravitacional.

É interessante notar que tanto a teoria de Israelit [25] no caso em que  $\alpha = 0$  quanto a teoria de Canuto *et al.* admitem a gravitação newtoniana no limite estático de campos fracos e velocidades baixas. Do ponto de vista da consistência da teoria no que diz respeito à confrontação com o grande número de experiências feitas nesse limite, vemos isso como um aspecto positivo. No entanto, buscamos modificações no limite newtoniano da teoria, de modo que ela seja compatível com os casos onde a gravitação newtoniana se aplica mas possa nos dar predições diferentes em escalas onde não há consenso sobre a aplicabilidade plena desta. Como exemplo, citamos o problema que motivou o trabalho em questão: as

curvas de rotação de galáxias. Veremos abaixo uma segunda abordagem para tratarmos as equações (5.64) e (5.76), e estudaremos algumas de suas conseqüências mais simples.

**Segunda abordagem:** Trabalhando com (5.78), supomos que o termo  $N\omega\rho$  não seja desprezível. Isso ocorre se o produto  $N\omega$  não for muito menor do que 1, ou se for suficientemente grande para que efeitos não-lineares não possam ser desprezados. Contudo, supomos desprezíveis correções de segunda ordem em  $N\omega$ . Isso, juntamente com as observações feitas logo antes de iniciarmos o tratamento do limite newtoniano, exclui o acoplamento proposto por Israelit [25], no qual  $N = 2$ .

A equação (5.78) então nos dá apenas uma equação diferencial parcial para os dois campos  $\gamma_{00}$  e  $\omega$ . Isso dificulta tanto a resolução das equações quanto a interpretação física dada a esses campos. Dessa forma, para prosseguirmos em nossa análise, supomos que a equação (5.78) possa ser resolvida separadamente para os dois campos, obtendo assim uma equação que só envolva  $\gamma_{00}$  e outra que só envolva  $\omega$ . Essa hipótese simplifica muito o problema, porém ainda não o determina. Para isso, precisamos de argumentos físicos para identificar esses campos com grandezas físicas conhecidas. Definimos o “potencial newtoniano”  $\Phi$  como sendo o campo que satisfaz a equação de Poisson (3.6). Guiando-nos pelas identificações feitas na relatividade geral, a maneira que propomos para desacoplar a equação (5.78) é definindo  $\Phi$  da mesma maneira que na relatividade geral, isto é, como  $\Phi = \frac{c^2\varepsilon}{2}\gamma_{00}$ . Definimos também  $\Psi = -c^2\omega$ , por conveniência. As equações de campo e de movimento então ficam

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 4\pi G\rho, \\ \nabla^2\Psi &= -\frac{4\pi GN}{c^2}\Psi\rho, \\ \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} &= -\nabla\Phi - \nabla\Psi.\end{aligned}\tag{5.80}$$

Como vemos, as equações de campo determinam  $\Phi$  a menos de um fator aditivo, como na teoria newtoniana, e  $\Psi$  a menos de um fator multiplicativo. Isso nos permite fazer  $\Psi$  pequeno o suficiente (inclusive podendo tomá-lo nulo) de forma a reavermos a gravitação newtoniana nas escalas onde é considerada válida. Contudo, soluções de (5.80) para  $\Psi$  não-triviais podem nos dar predições interessantes, como veremos a seguir.

Estudamos o caso de simetria esférica, isto é, o caso em que  $\rho = \rho(r)$  onde  $r$  é a coordenada radial. Supomos que  $\Phi = \Phi(r)$  e  $\Psi = \Psi(r)$ . Definindo  $j(N) = \frac{4\pi GN}{c^2}$ , a equação para  $\Psi$  é

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\Psi') = -j(N)\rho\Psi\tag{5.81}$$

ou, de modo equivalente,

$$r^2\Psi'' + 2r\Psi' + j(N)r^2\rho\Psi = 0. \quad (5.82)$$

Aqui,  $\Psi' = \frac{d\Psi}{dr}$ . No vácuo ( $\rho = 0$ ), a equação para  $\Psi$  em (5.80) se reduz à equação de Laplace, cuja solução esfericamente simétrica é

$$\Psi_{vac}(r) = -\frac{a}{r} + b, \quad (5.83)$$

com  $a$  e  $b$  constantes determinadas pelas condições de contorno. Se a densidade for constante (mas não nula) igual a  $\rho_0$ , a solução geral de (5.82) é

$$\Psi_+(r) = A_+ \frac{\sin(\xi_+ r)}{\xi_+ r} + B_+ \frac{\cos(\xi_+ r)}{\xi_+ r} \quad (5.84)$$

para  $N$  positivo, onde  $(\xi_+)^2 = j(N)\rho_0$ ,  $\xi_+ > 0$ , e

$$\Psi_-(r) = A_- \frac{\sinh(\xi_- r)}{\xi_- r} + B_- \frac{\cosh(\xi_- r)}{\xi_- r} \quad (5.85)$$

para  $N < 0$ , onde  $(\xi_-)^2 = -j(N)\rho_0$ ,  $\xi_- > 0$ . Já a solução para  $\Phi$  é

$$\Phi(r) = -\frac{a}{r} + b + \frac{2\pi G\rho_0}{3}r^2. \quad (5.86)$$

Devido ao acoplamento entre  $\rho$  e  $\Phi$  nas equações de campo (5.80) (ou, no caso de simetria esférica, (5.82)), a princípio não é fácil encontrar uma fórmula integral para  $\Psi$ , como é feito para o potencial newtoniano (ver capítulo 3 ou [4]). Além disso, as condições de contorno para  $\Psi$  não são conhecidas. De modo a simplificarmos o tratamento do problema, faremos a seguinte aproximação para o caso esfericamente simétrico: a densidade será descrita por um conjunto de esferas concêntricas de densidade constante. Assim,

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq r < R_0; \\ \rho_i, & R_{i-1} \leq r < R_i, \text{ para } i = 1, \dots, n; \\ 0, & r \geq R_n. \end{cases} \quad (5.87)$$

Impondo que os potenciais sejam regulares na origem e usando para  $\Phi$  a condição de

contorno  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ , obtemos

$$\Phi(r) = \begin{cases} b_0 + \frac{2\pi G\rho_0}{3}r^2, & 0 \leq r \leq R_0; \\ -\frac{a_i}{r} + b_i + \frac{2\pi G\rho_i}{3}r^2, & R_{i-1} \leq r \leq R_i, \text{ para } i = 1, \dots, n; \\ -\frac{a_{n+1}}{r}, & r \geq R_n, \end{cases} \quad (5.88)$$

onde os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4\pi GR_0^3}{3}(\rho_0 - \rho_1); \\ a_{i+1} &= a_i + \frac{4\pi GR_i^3}{3}(\rho_i - \rho_{i+1}), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 0; \\ b_{i+1} &= b_i + 2\pi GR_i^2(\rho_i - \rho_{i+1}), \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Para  $N < 0$ , definindo  $\lambda_i = \sqrt{-j(N)\rho_i}$ ,

$$\Psi_-(r) = \begin{cases} p_0 \frac{\sinh(\lambda_0 r)}{\lambda_0 r}, & 0 \leq r \leq R_0; \\ p_i \frac{\sinh(\lambda_i r)}{\lambda_i r} + q_i \frac{\cosh(\lambda_i r)}{\lambda_i r}, & R_{i-1} \leq r \leq R_i, \text{ para } i = 1, \dots, n; \\ -\frac{p_{n+1}}{r} + q_{n+1}, & r \geq R_n, \end{cases} \quad (5.89)$$

Impondo que  $\Psi_-$  seja contínua com derivada contínua, as condições de contorno nos dão

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} p_0 \sinh(\lambda_0 R_0) &= p_1 \sinh(\lambda_1 R_0) + q_1 \cosh(\lambda_1 R_0) \\ p_0 \cosh(\lambda_0 R_0) &= p_1 \cosh(\lambda_1 R_0) + q_1 \sinh(\lambda_1 R_0) \\ \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} [p_i \sinh(\lambda_i R_i) + q_i \cosh(\lambda_i R_i)] &= p_{i+1} \sinh(\lambda_{i+1} R_i) + q_{i+1} \cosh(\lambda_{i+1} R_i) \\ p_i \cosh(\lambda_i R_i) + q_i \sinh(\lambda_i R_i) &= p_{i+1} \cosh(\lambda_{i+1} R_i) + q_{i+1} \sinh(\lambda_{i+1} R_i) \\ &\text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ p_n \frac{\sinh(\lambda_n R_n)}{\lambda_n R_n} + q_n \frac{\cosh(\lambda_n R_n)}{\lambda_n R_n} &= -\frac{p_{n+1}}{R_n} + q_{n+1} \\ p_n \cosh(\lambda_n R_n) + q_n \sinh(\lambda_n R_n) &= q_{n+1} \end{aligned}$$

O sistema fica unicamente determinado ao darmos a condição de contorno no infinito.

Para  $N > 0$ , com  $\xi_i = \sqrt{j(N)\rho_i}$ ,

$$\Psi_+(r) = \begin{cases} c_0 \frac{\sin(\xi_0 r)}{\xi_0 r}, & 0 \leq r \leq R_0; \\ c_i \frac{\sin(\xi_i r)}{\xi_i r} + d_i + \frac{\cos(\xi_i r)}{\xi_i r}, & R_i \leq r \leq R_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n; \\ -\frac{c_{n+1}}{r} + d_{n+1}, & r \geq R_n, \end{cases} \quad (5.90)$$

Impondo que  $\Psi_+$  seja contínua com derivada contínua, as condições de contorno nos dão

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1}{\xi_0} c_0 \sin(\xi_0 R_0) &= c_1 \sin(\xi_1 R_0) + d_1 \cos(\xi_1 R_0) \\ c_0 \cos(\xi_0 R_0) &= c_1 \cos(\xi_1 R_0) - d_1 \sin(\xi_1 R_0) \\ \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} [c_i \sin(\xi_i R_i) + d_i \cos(\xi_i R_i)] &= c_{i+1} \sin(\xi_{i+1} R_i) + d_{i+1} \cos(\xi_{i+1} R_i) \\ c_i \cos(\xi_i R_i) - d_i \sin(\xi_i R_i) &= c_{i+1} \cos(\xi_{i+1} R_i) - d_{i+1} \sin(\xi_{i+1} R_i) \\ &\text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ c_n \frac{\sin(\xi_n R_n)}{\xi_n R_n} + d_n \frac{\cos(\xi_n R_n)}{\xi_n R_n} &= -\frac{c_{n+1}}{R_n} + d_{n+1} \\ c_n \cos(\xi_n R_n) - d_n \sin(\xi_n R_n) &= d_{n+1} \end{aligned}$$

O sistema fica unicamente determinado dando a condição de contorno no infinito.

A velocidade de uma partícula de teste percorrendo uma órbita circular ao redor do centro da distribuição de massa é dada, como em (3.8), por

$$\begin{aligned} (v_c)^2 &= r \frac{d\Phi}{dr} + r \frac{d\Psi}{dr} \\ &= (v_c^\Phi)^2 + (v_c^\Psi)^2. \end{aligned}$$

No vácuo (isto é, para  $r > R_n$ ),  $\Phi$  e  $\Psi$  têm o mesmo comportamento, e portanto para  $r > R_n$  a velocidade circular é proporcional a  $r^{-1/2}$ .

Consideraremos apenas o caso em que  $N < 0$ , pois o caso de  $N$  positivo apresenta soluções oscilatórias. Ilustraremos o procedimento acima com um perfil de densidade dado pelo modelo de Plummer [4], no qual

$$\rho_i = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{R_i^2}{b^2}\right)^{(-5/2)}, \quad (5.91)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema e  $b$  é uma constante. Nas figuras (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6), exemplificamos o perfil de densidade (5.91) e as curvas de rotação para diferentes escolhas de  $N$  e da condição de contorno, com  $n = 200$ ,  $b = 5kpc$ ,  $M = 10^{12}M_\odot$  e  $R_i = 500(i+1)pc$ . Os resultados obtidos nos mostram que, para algumas escolhas dos parâmetros, o campo  $\Psi$

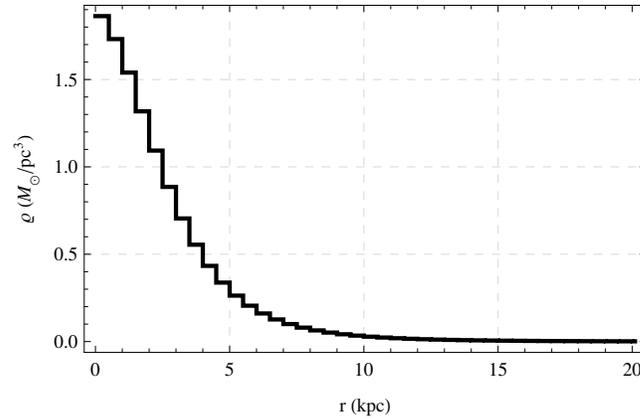


Figura 5.3: Perfil de densidade para o modelo de Plummer (5.91) com  $n = 200$ ,  $b = 5kpc$ ,  $R_i = 500(i + 1)pc$  e  $M = 10^{12}M_{\odot}$ .

reproduz características qualitativas de um halo de matéria escura. Além disso, das curvas de rotação devidas a  $\Psi$  concluímos que as dependências do pico e da extensão de  $v_c^{\Psi}$  com  $N$  são tais que para valores maiores de  $N$  a característica de “halo” começa a ser importante para valores maiores da distância ao centro da distribuição de densidade, e tem extensão maior. Vale lembrar que esse resultado foi testado apenas para valores da ordem dos utilizados nas figuras (5.3) a (5.6). Fixo  $b$ , os mesmos resultados qualitativos são obtidos mantendo o produto  $N.M$  constante. A dependência com o parâmetro  $b$  é brevemente estudada na figura (5.7), indicando que a variação de  $b$  pode ser contrabalançada por uma variação em  $N$ .

Dado o comportamento (5.89) da solução para  $\Psi$ , é de se esperar que essa característica seja válida para outros perfis de densidade esfericamente simétricos também. Contudo, a distribuição esfericamente simétrica de densidade é uma primeira aproximação; para obtermos predições com caráter mais realista, devemos tratar distribuições de densidade axialmente simétricas. Isso, no entanto, está além do escopo deste trabalho.

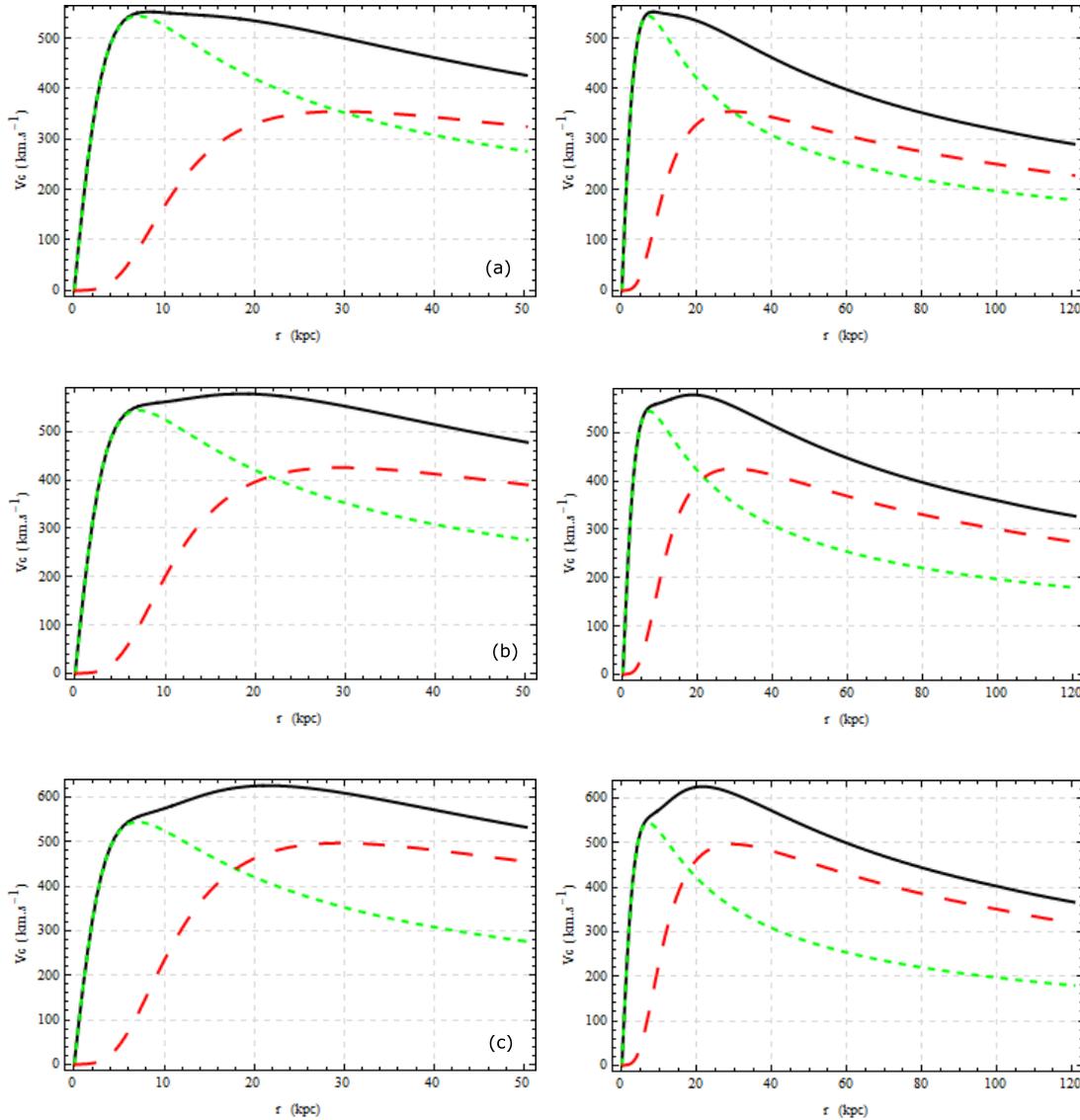


Figura 5.4: Curvas de rotação para o modelo de Plummer (5.91) com  $n = 200$ ,  $b = 5kpc$ ,  $R_i = 500(i+1)pc$ ,  $M = 10^{12}M_{\odot}$  e  $N = 10^7$ . As figuras da direita correspondem às curvas de rotação até 50kpc e, à direita de cada uma, são apresentadas as respectivas curvas até 120kpc. A linha verde tracejada corresponde à curva newtoniana, a vermelha à contribuição de  $\Psi$  e a preta à curva resultante. As condições de contorno utilizadas foram: (a)  $v_n = 250km/s$ , (b)  $v_n = 300km/s$ , (c)  $v_n = 350km/s$ , onde  $v_n = v_c(R_n)$ .

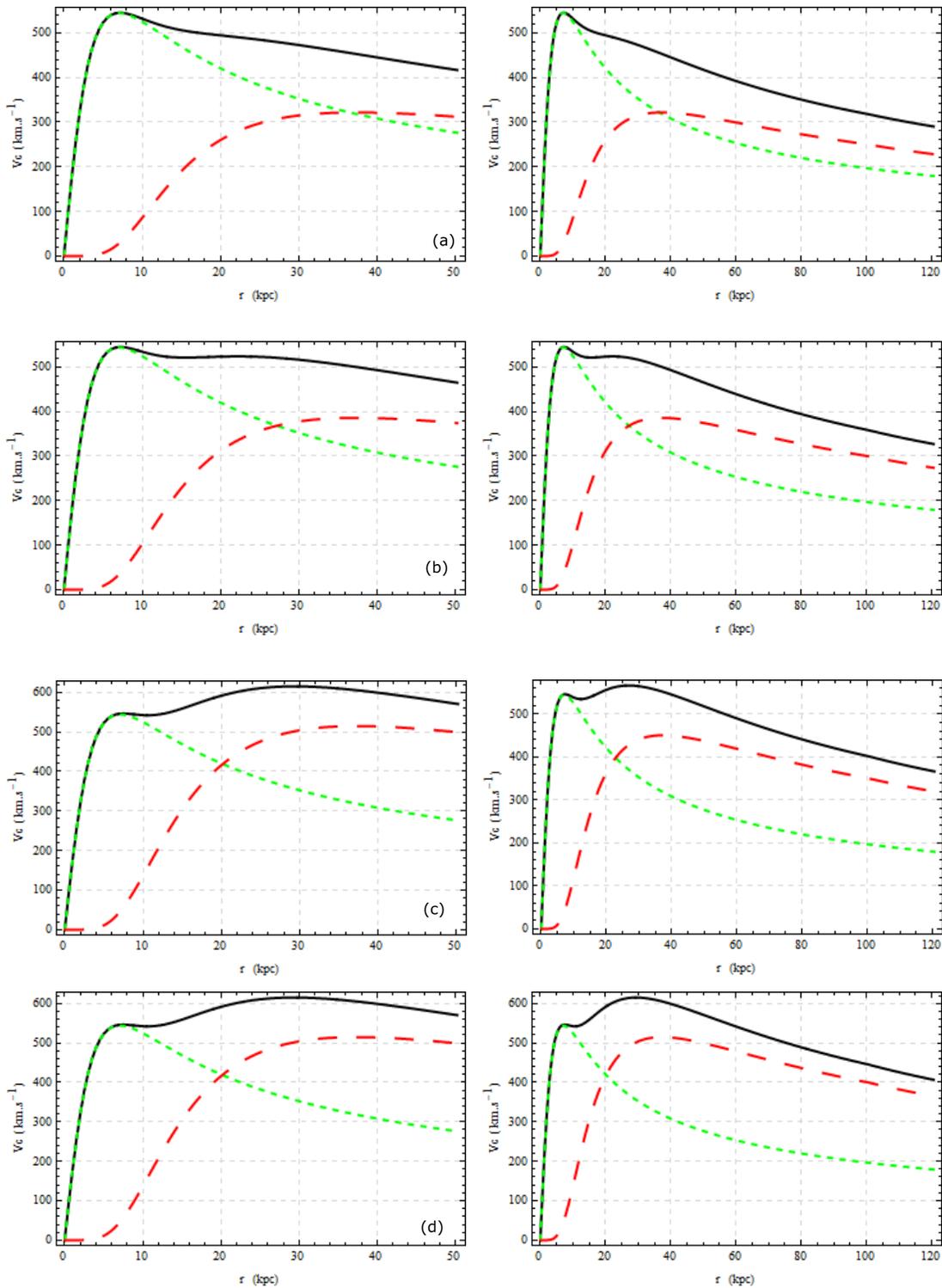


Figura 5.5: Curvas de rotação para o modelo de Plummer (5.91) com  $N = 2.10^7$ . Os outros parâmetros do modelo e o significado de cada curva são os mesmos da figura 5.4. As condições de contorno são: (a)  $v_n = 250 \text{ km/s}$ , (b)  $v_n = 300 \text{ km/s}$ , (c)  $v_n = 350 \text{ km/s}$ , (d)  $v_n = 400 \text{ km/s}$ .

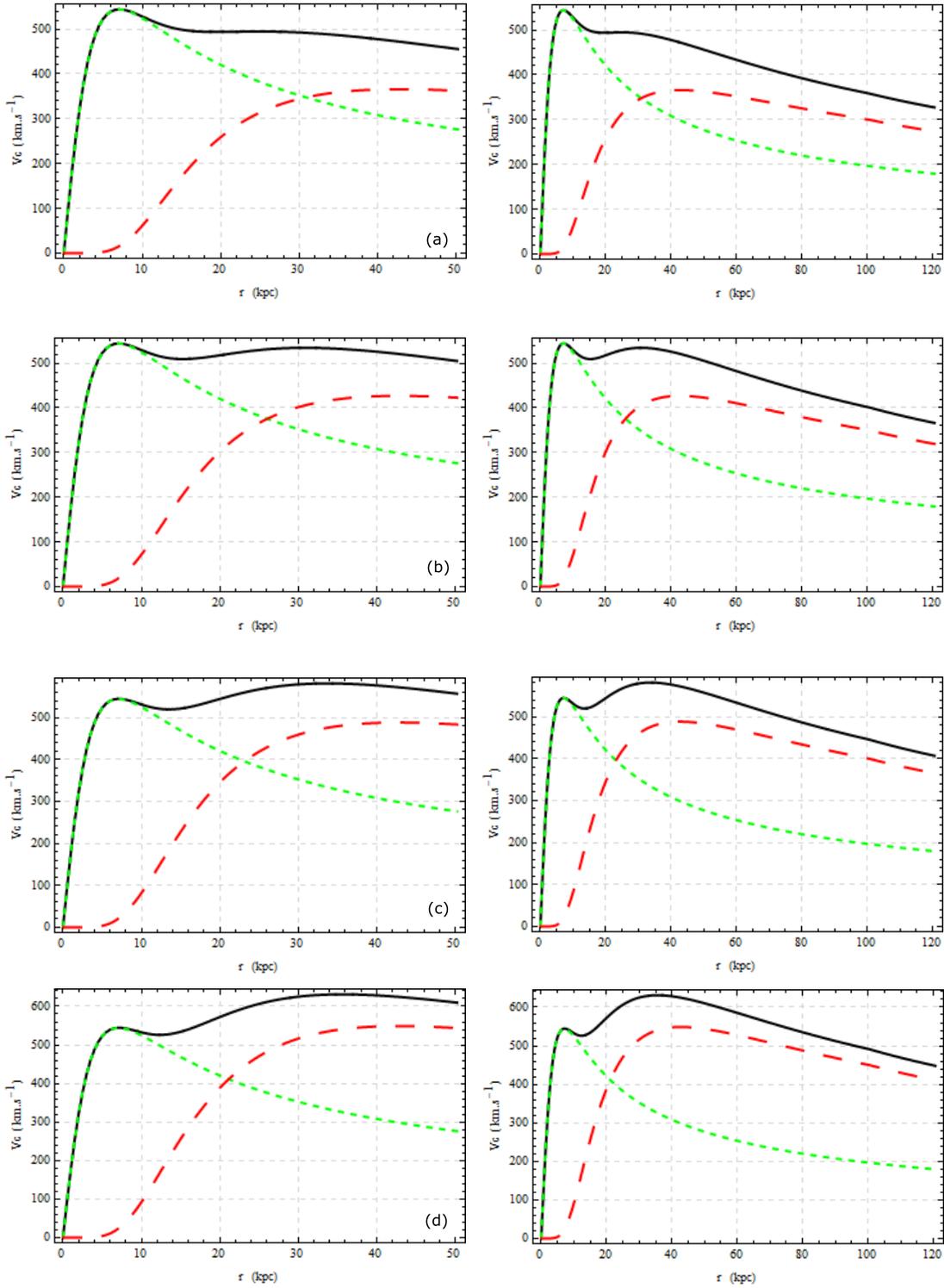


Figura 5.6: Curvas de rotação para o modelo de Plummer (5.91) com  $N = 3.10^7$ . Os outros parâmetros do modelo e o significado de cada curva são os mesmos da figura 5.4. As condições de contorno são: (a)  $v_n = 300\text{km/s}$ , (b)  $v_n = 350\text{km/s}$ , (c)  $v_n = 400\text{km/s}$ , (d)  $v_n = 450\text{km/s}$ .

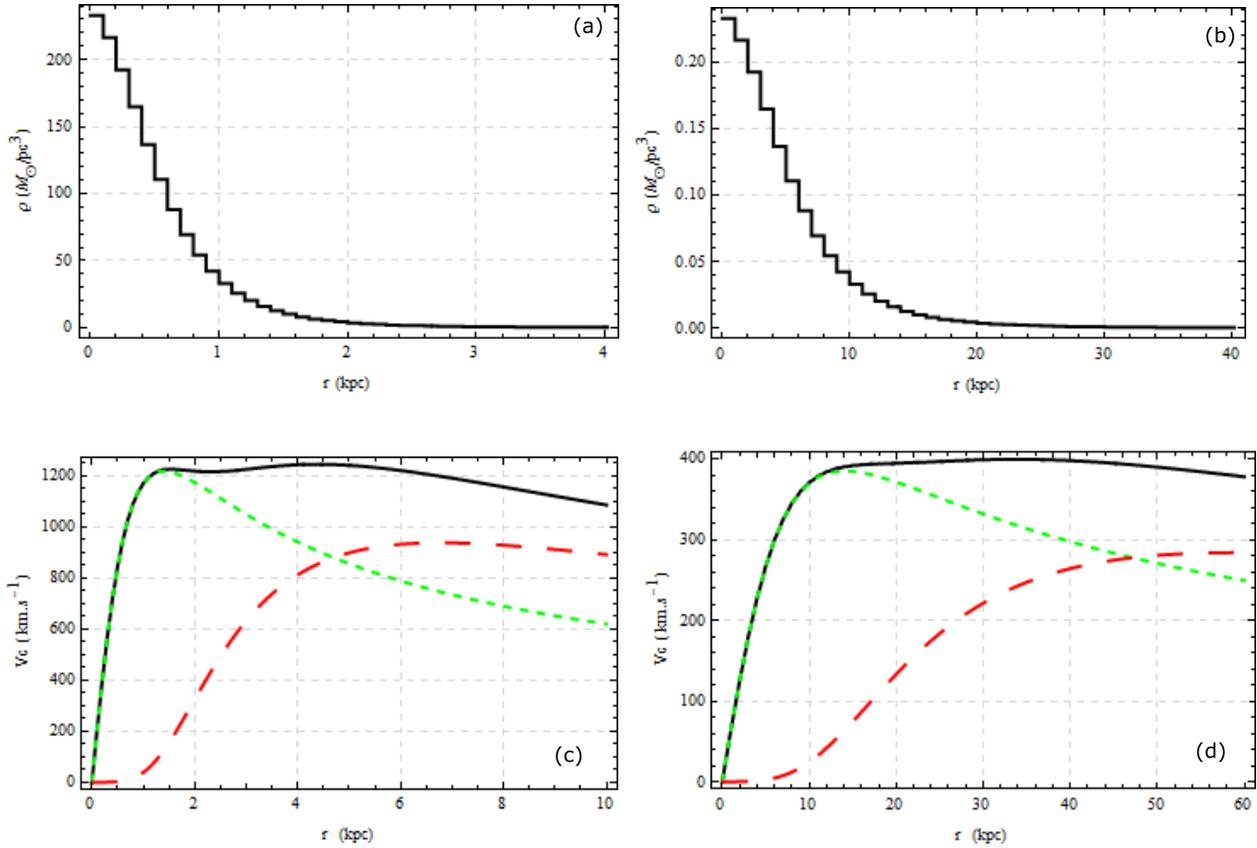


Figura 5.7: Perfil de densidade (a,b) e curvas de rotação (c,d) para o modelo de Plummer (5.91) variando o parâmetro  $b$ . Como nos casos anteriores, tomamos  $n = 200$  e  $M = 10^{12} M_{\odot}$ . (a) e (c) correspondem a  $b = 1 \text{ kpc}$ ,  $R_i = 100(i + 1) \text{ pc}$ ,  $N = 3 \cdot 10^6$  e  $v_n = 700 \text{ km/s}$ . com,  $b = 5 \text{ kpc}$ ,  $R_i = 500(i + 1) \text{ pc}$  e  $N = 10^7$ . (b) e (d) correspondem a  $b = 10 \text{ kpc}$ ,  $R_i = 1000(i + 1) \text{ pc}$ ,  $N = 2 \cdot 10^7$  e  $v_n = 200 \text{ km/s}$ .

## 6

---

# Conclusões finais

O presente trabalho teve o intuito de fazer uma apresentação da geometria de Weyl no contexto da geometria diferencial moderna, focando em seus aspectos fundamentais e nas semelhanças e diferenças em relação à geometria riemanniana. Também foram estudadas variedades semi-riemannianas, dando especial atenção às variedades lorentzianas. Sempre que possível, a comparação com o caso riemanniano foi feita. Também estudamos brevemente a questão da causalidade em variedades lorentzianas, tema de fundamental importância em teorias relativísticas da gravitação. Um aspecto interessante, que foi apresentado no texto, é que no caso em que a estrutura conforme subjacente à estrutura de Weyl da variedade é composta por métricas lorentzianas temos que a estrutura causal da variedade está bem-definida, sendo a mesma para qualquer métrica da estrutura conforme. Isso permite tratar sem ambiguidades da estrutura causal (vetores tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz) e da orientabilidade temporal das variedades de Weyl, fato crucial para a construção de teorias físicas da gravitação nessas variedades.

O estudo da geometria de Weyl (e de geometrias não-riemannianas em geral) por si só já é de grande interesse, devido à necessidade de, para isso, estender os conceitos geométricos que muitas vezes são tratados apenas no caso riemanniano. A geometria de Weyl está intimamente ligada à noção de uma estrutura conforme sobre a variedade, além de introduzir conceitos não-intuitivos como por exemplo a *translação* das métricas a partir da estrutura de Weyl e a não-constância e a dependência com o caminho da norma de um vetor propagado paralelamente de um ponto a outro da variedade ao longo de diferentes curvas. Além disso, um estudo de geometrias não-riemannianas fortalece o entendimento da geometria riemanniana e da dependência dos resultados nessa geometria com relação às hipóteses feitas sobre a conexão. É interessante notar, por exemplo, que a existência da aplicação exponencial está associada apenas à existência de uma conexão na variedade. As propriedades dessa aplicação (assim como as propriedades dos sistemas de coordenadas normais a ela associados

com respeito a uma dada métrica semi-riemanniana na variedade), por sua vez, dependem das propriedades da conexão. Contudo, como visto na proposição (2.2.17), algumas propriedades dos sistemas de coordenadas normais são independentes da conexão.

Na segunda parte do trabalho, foi feito um estudo de teorias da gravitação baseadas na geometria de Weyl e de modelos de discos de Kuzmin nessas teorias, com o objetivo de investigar se essas teorias são capazes de prever as curvas de rotação de galáxias espirais observadas sem a necessidade de matéria escura. Analisamos os casos em que a equação de movimento para partículas de teste é dada pela equação das geodésicas de Weyl. A teoria proposta por Dirac, baseada em uma geometria não integrável, tem equações de movimento para partículas de teste diferentes das geodésicas, envolvendo a curvatura do comprimento (ver [14]). Dessa forma, focamos o estudo na teoria proposta por Israelit [25] e na versão da teoria de Dirac proposta por Canuto *et al.* [11]. Devido à interpretação dada para os observadores e o modo como medem velocidades na geometria de Weyl, chegamos à conclusão de que a norma da velocidade newtoniana de uma partícula medida por um dado observador deve ser invariante de gauge se as equações de movimento forem consistentes (isto é, se forem independentes do gauge). Tendo essa interpretação como correta, e como o caso em que  $\beta = 1$  não nos permite obter curvas de rotação planas para o modelo de Kuzmin, concluímos que o modelo de Kuzmin estudado nesse caso não é capaz de fornecer curvas de rotação que se adequem aos dados observacionais quando a lagrangiana das partículas de teste não depende do campo  $\beta$ . Essa conclusão, no entanto, limita-se ao modelo de Kuzmin, pois se a constante de acoplamento  $\alpha$  da teoria não for nula não existe nenhum gauge no qual valha a relatividade geral, e portanto não é possível, a partir da análise feita, inferir o comportamento das curvas de rotação para modelos de discos baseados em modelos relativísticos diferentes do de Kuzmin. Também, para  $\beta \neq 1$ , é possível a princípio obter soluções analíticas (em particular, modelos de Kuzmin) fisicamente plausíveis que não estejam relacionadas ao modelo obtido neste trabalho por uma mudança de gauge. Esse caso precisa ser analisado em separado.

Para o caso em que a constante de acoplamento  $\alpha$  da teoria é nula, assim como para a teoria de Canuto *et al.*, temos que a teoria possui um gauge (no qual  $\omega = 0$ ) no qual vale a relatividade geral. Dessa forma, modelos de discos nesses casos advindos de modelos relativísticos predizem as mesmas curvas de rotação obtidas na relatividade geral. Essa abordagem, portanto, não é capaz de explicar as curvas de rotação de galáxias espirais. No entanto, salientamos que essas teorias não são equivalentes à relatividade geral. Dito isso, faz sentido procurar o limite newtoniano da teoria. Na relatividade geral, esse limite de certa forma fixa o sistema de coordenadas que deve ser utilizado. Assim, por analogia, é de se

---

esperar que o limite newtoniano de uma teoria baseada na geometria de Weyl fixe o gauge que deve ser utilizado. Na interpretação mais natural, obtemos como limite a gravitação newtoniana. No entanto, essa interpretação não é única, dado que existem dois campos na teoria e apenas uma equação diferencial parcial que envolve os dois. Fazendo certas hipóteses, é possível chegar a diferentes equações, que seriam basicamente as equações da gravitação newtoniana com um termo a mais vindo do campo  $\omega$ , o qual satisfaz uma equação do tipo da de Poisson porém com um acoplamento entre a densidade e o campo. Tal fato não causa inconsistência com os resultados conhecidos e comprovados experimentalmente da mecânica newtoniana, pois esse campo pode ser tomado nulo independentemente do sistema físico a ser tratado. Sua forma é determinada pelas condições de contorno para a EDP, e para condições de contorno não-triviais as curvas de rotação diferem das newtonianas: o campo  $\omega$  tem o efeito qualitativo de um halo de matéria escura, pelo menos para o caso esfericamente simétrico (no qual a equação para  $\omega$  se reduz a uma equação diferencial ordinária). No entanto, para outros tipos de sistemas (principalmente os axialmente simétricos, que podem representar discos galácticos), a equação para  $\omega$  não se reduz a uma EDO, e não abordamos esses casos no trabalho. É possível que consigamos obter solução numérica para essa equação dado um perfil de densidade, idéia que pretendemos abordar no futuro.

# A

---

## Formulação lagrangiana de teorias relativísticas

Neste apêndice apresentamos a formulação lagrangiana da relatividade geral e das teorias físicas [25, 11] analisadas no texto, limitando-nos a guiar o desenvolvimento das passagens e apresentar os resultados essenciais. Para um tratamento detalhado da formulação lagrangiana da relatividade geral, ver [46, 35]. Não é a intenção fazer uma apresentação totalmente rigorosa, mas sim detalhar um pouco mais as passagens apresentadas em [25].

Trabalharemos no que segue representando os tensores por suas componentes em sistemas de coordenadas, o que é feito comumente em relatividade geral ao tratarmos da formulação lagrangiana [22, 46]. Essa abordagem também é mais conveniente neste apêndice pois os artigos que apresentam as teorias físicas estudadas neste trabalho, [14, 25, 11], apresentam seus resultados dessa forma.

### A.1 Teoria de campos clássica

Supomos que  $\Omega$  seja uma região orientável do espaço-tempo com fronteira (possivelmente nula). Suponha que a ação seja dada por

$$S = \int_{\Omega} L(\psi, \psi_{;\mu}) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi, \psi_{;\mu}) d^4x, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\psi$  é um campo tensorial,  $\mathbf{g} = \det(g_{\mu\nu})$  e  $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , de forma que  $\sqrt{-\mathbf{g}} d^4x$  seja o elemento de volume “natural” do espaço [30]. Aqui, o ponto-e-vírgula denota a derivada covariante com respeito à conexão de Levi-Civita associada à métrica  $g_{\mu\nu}$ . Então,

uma variação  $\delta\psi$  que se anula em  $\delta\Omega$  induz na *densidade lagrangiana*  $L$  uma variação

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\delta(\psi_{;\mu}), \quad (\text{A.2})$$

onde a contração em todos os índices (por exemplo de  $\frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi$ ) está subentendida. Usando que  $\delta(\psi_{;\mu}) = (\delta\psi)_{;\mu}$  ([46], apêndice E), temos que

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial\psi}\delta\psi + \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\delta\psi\right)_{;\mu} - \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\right)_{;\mu}\delta\psi \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\right)_{;\mu}\right)\delta\psi + \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\delta\psi\right)_{;\mu}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes [29], usando que  $\psi_{;\nu}\sqrt{-\mathbf{g}} = (\psi\sqrt{-\mathbf{g}})_{;\nu}$ , o último termo resulta em um termo de fronteira, que é nulo pois  $\delta\psi = 0$  em  $\partial\Omega$ . Assim, temos que

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\right)_{;\mu}\right)\delta\psi\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x \quad (\text{A.3})$$

e, impondo que  $\delta S = 0$  para as configurações de  $\psi$  que correspondem às situações físicas, as equações de campo da teoria (conhecidas como *equações de Euler-Lagrange*) são

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\right)_{;\mu} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Se introduzirmos um termo de matéria somando à ação (A.1) uma ação  $\int_{\Omega} L_M\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x$  correspondente à matéria, as equações de campo ficam

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial L}{\partial(\psi_{;\mu})}\right)_{;\mu} + \frac{\delta L_M}{\delta\psi} = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde  $\frac{\delta L_M}{\delta\psi}$  é definido por  $\delta L_M = \frac{\delta L_M}{\delta\psi}\delta\psi$ , a menos de termos de divergente.

## A.2 Relatividade Geral

A ação da relatividade geral é dada por

$$S_{RG} = \int_{\Omega} (K + \kappa L_M)\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x, \quad (\text{A.6})$$

onde  $K$  é o escalar de curvatura riemanniano,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$  e  $L_M$  é a densidade lagrangiana da matéria. A lagrangiana total é  $\mathcal{L} = (K + \kappa L_M)\sqrt{-\mathbf{g}}$ . Consideraremos  $\mathcal{L}$  como sendo funcional de  $g^{\mu\nu}$ , onde  $g^{\mu\nu}$  é a inversa de  $g_{\mu\nu}$ . Vale ressaltar que, se considerássemos  $\mathcal{L}$  como funcional de  $g_{\mu\nu}$ , as equações de campo obtidas seriam as mesmas. Contudo, como pretendemos generalizar a lagrangiana acima nas seções seguintes, a dependência em  $g^{\mu\nu}$  é mais conveniente, o que ficará claro adiante.

A abordagem da seção anterior não é prática para calcularmos as equações de campo da teoria, por isso procedemos de uma maneira mais direta, obtendo a variação do escalar de curvatura riemanniano  $K$  diretamente a partir da variação  $\delta g^{\mu\nu}$ . Temos que  $K = g^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ , de forma que

$$\delta(K\sqrt{-\mathbf{g}}) = g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathbf{g}}\delta(K_{\mu\nu}) + K_{\mu\nu}\sqrt{-\mathbf{g}}\delta(g^{\mu\nu}) + K\delta(\sqrt{-\mathbf{g}}). \quad (\text{A.7})$$

Da relação  $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$ , segue que

$$g_{\mu\sigma}\delta g^{\sigma\nu} = -g^{\sigma\nu}\delta g_{\mu\sigma}, \quad (\text{A.8})$$

ou  $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\sigma\nu}\delta g^{\alpha\sigma}$ .

Além disso, escrevendo  $g = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}$  para algum  $\beta$  fixo, onde  $A^{\alpha\beta}$  são as matrizes dos cofatores de  $\mathbf{g}$ , temos que  $g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^{-1}A^{\beta\alpha}$ , e portanto

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})}{\partial g^{\alpha\beta}}A^{\beta\alpha} && (\text{sem soma}) \\ &= \frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})}{\partial g^{\alpha\beta}}\mathbf{g}g^{\alpha\beta} && (\text{sem soma}), \end{aligned}$$

o que implica  $\frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})}{\partial g^{\alpha\beta}} = \mathbf{g}^{-1}g_{\alpha\beta}$ . Logo,

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\mathbf{g}g_{\alpha\beta},$$

do que segue que

$$\frac{\partial\sqrt{-\mathbf{g}}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.9})$$

A variação  $\delta g^{\mu\nu}$  induz uma variação

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-\mathbf{g}}) &= \frac{\partial\sqrt{-\mathbf{g}}}{\partial g^{\alpha\beta}}\delta g^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Desse modo, para podermos computar (A.7) só nos falta conhecer a variação  $\delta K_{\mu\nu}$  em termos de  $\delta g^{\mu\nu}$ . Para isso, utilizamos um sistema de coordenadas normais centrado em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  arbitrário. Nesse ponto, a expressão do tensor de Ricci riemanniano nesse sistema de coordenadas é

$$K_{\mu\nu} = \partial_\alpha \{\mu\nu\}^\alpha - \partial_\nu \{\mu\alpha\}^\alpha.$$

Assim, no ponto  $p$ , a variação  $\delta K_{\mu\nu}$  é dada nesse sistema de coordenadas por

$$\delta K_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\delta \{\mu\nu\}^\alpha) - \partial_\nu (\delta \{\mu\alpha\}^\alpha).$$

A variação de uma conexão é um campo tensorial (ver [46], apêndice E). Desse modo, as derivadas parciais acima se generalizam para derivadas covariantes, e temos que

$$\delta K_{\mu\nu} = (\delta \{\mu\nu\}^\alpha)_{;\alpha} - (\delta \{\mu\alpha\}^\alpha)_{;\nu},$$

sendo essa relação válida em todo ponto de  $\mathcal{M}$  e em qualquer sistema de coordenadas.

Assim, o termo em  $\delta K_{\mu\nu}$  da densidade lagrangiana é dado por

$$\begin{aligned} (\delta K_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} &= [(g^{\mu\nu} \delta \{\mu\nu\}^\alpha)_{;\alpha} - (g^{\mu\nu} \delta \{\mu\alpha\}^\alpha)_{;\nu}] \sqrt{-\mathfrak{g}} \\ &= (g^{\mu\alpha} \delta \{\mu\alpha\}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \{\mu\alpha\}^\alpha)_{;\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} \\ &= [(g^{\mu\alpha} \delta \{\mu\alpha\}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \{\mu\alpha\}^\alpha) \sqrt{-\mathfrak{g}}]_{;\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde foi usado que  $X^\nu_{;\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} = (X^\nu \sqrt{-\mathfrak{g}})_{;\nu}$  para um campo vetorial  $X^\nu$ . O termo para a variação do tensor de Ricci é, portanto, um divergente. Integrando em  $\Omega$  e utilizando o teorema de Stokes [29], essa expressão se reduz a um termo de fronteira, que é descartado com condições de fronteira adequadas.

A variação da ação se reduz a

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega \left[ K_{\mu\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} \delta g^{\mu\nu} + K \delta \sqrt{-\mathfrak{g}} + \kappa \frac{\delta(L_M \sqrt{-\mathfrak{g}})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \int_\Omega \left[ (K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}) + \kappa \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \frac{\delta(L_M \sqrt{-\mathfrak{g}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} d^4x, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\frac{\delta(L_M \sqrt{-\mathfrak{g}})}{\delta g^{\mu\nu}}$  é a derivada funcional de  $L_M \sqrt{-\mathfrak{g}}$  com respeito a  $g^{\mu\nu}$  [46].

Definindo

$$T_{\mu\nu} := -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{A.13})$$

como o *tensor de energia-momento* da matéria e  $G_{\mu\nu} := K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}$  o tensor de

Einstein, a imposição de que  $\delta S = 0$  nos dá as *equações de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.14})$$

Vale a pena aqui fazer um breve comentário sobre o termo de fronteira da equação (A.11): se esse termo não for nulo, haverá uma contribuição nas equações e campo (A.14) devido a ele. O que é feito, nesse caso, é modificar a ação inicial acrescentando um termo de fronteira cuja variação seja exatamente o negativo do termo de fronteira de (A.14). Para mais detalhes, ver [46], apêndice E.

### A.2.1 Leis de conservação

As leis de conservação são obtidas através das simetrias da ação. Seja a ação da matéria dada por

$$S_{Mat.} = \int_{\Omega} \kappa L_M \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (\text{A.15})$$

cuja variação devida a uma variação na métrica é dada por (ver eq. A.12)

$$\delta S = \int_{\Omega} [-\kappa T_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x. \quad (\text{A.16})$$

A ação, sendo dada por uma integral, é invariante por difeomorfismos que preservem a orientação de  $\Omega$ . Em particular, a ação da matéria é invariante por difeomorfismos. Se  $\{f_\lambda\}$  for um grupo a um parâmetro de tais difeomorfismos dependendo diferenciavelmente do parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , com  $f_0 = id : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , temos que a todos os espaços-tempos  $(\mathcal{M}, g)$ ,  $(\mathcal{M}, (f_\lambda)_*g)$  corresponde a mesma ação, e portanto a mesma física, onde

$$(f_\lambda)_* : T_0^2(T_p\mathcal{M}) \rightarrow T_0^2(T_{f_\lambda(p)}\mathcal{M})$$

é tal que

$$((f_\lambda)_*g_p)(v_1, v_2) = ((f_\lambda)_*g)_{f(p)}(v_1, v_2) = g_p((f_\lambda^{-1})_*v_1, (f_\lambda^{-1})_*v_2).$$

Se

$$\eta := \left. \frac{df_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0},$$

temos que o fluxo de  $\eta$  é dado por  $\varphi_\eta^\lambda(p) = f_\lambda(p)$ . A variação da métrica é dada por

$$\begin{aligned}\delta g &= \left. \frac{d((f_\lambda)_*g)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d((\varphi_\eta^{-\lambda})_*g)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = - \left. \frac{d((\varphi_\eta^{-\lambda})_*g)}{d(-\lambda)} \right|_{\lambda=0} \\ &= -\mathcal{L}_\eta g,\end{aligned}\tag{A.17}$$

onde  $\mathcal{L}_\eta g$  é a derivada de Lie de  $g$  na direção de  $\eta$  ([29], p. 473) e

$$((\varphi_\eta^{-\lambda})_*g)_p(E_1, E_2) = g_{\varphi_\eta^{-\lambda}(p)}((\varphi_\eta^{-\lambda})_*E_1, (\varphi_\eta^{-\lambda})_*E_2).$$

A segunda igualdade na expressão (A.17) ocorre pois  $\varphi_\eta^{-\lambda} = f_{-\lambda} = (f_\lambda)^{-1}$ .

Em coordenadas,  $(\mathcal{L}_\eta g)_{\mu\nu} = \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}$  [46], de modo que

$$\delta g_{\mu\nu} = -(g_{\lambda\nu}\eta^\lambda_{;\mu} + g_{\mu\lambda}\eta^\lambda_{;\nu}),\tag{A.18}$$

e portanto (ver eq. (A.8))

$$\delta g^{\mu\nu} = (\eta^{\mu;\nu} + \eta^{\nu;\mu}).\tag{A.19}$$

Como a ação permanece invariante, substituindo a expressão (A.19) em (A.15) e integrando por partes (supomos que  $\eta^\mu = 0$  em  $\partial\Omega$ , de modo que o termo de fronteira que aparece é nulo), temos

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0,\tag{A.20}$$

as leis de conservação do tensor de energia-momento na relatividade geral. Essas equações são compatíveis com a identidade de Bianchi (2.2.32).

### A.3 Ação da teoria de Canuto *et al.* no vácuo

A teoria proposta por Canuto *et al.* [11] é construída em uma variedade de Weyl quadridimensional integrável com métrica de Lorentz. A ação no vácuo é dada por

$$S_{Can} = \int_\Omega e^{-2\omega} R \sqrt{-g} d^4x,\tag{A.21}$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura de Weyl e  $\omega$  e  $g$  são, respectivamente, o campo escalar e a métrica que geram a estrutura de Weyl. Como esperado de uma teoria baseada na geometria de Weyl, a ação (A.21) independe da escolha dos representantes  $(g, \omega)$ . Em outras palavras, é invariante pelas “transformações de gauge” (2.65). Em termos do escalar de curvatura

riemanniano, temos que (ver equações (2.69),(2.70))

$$R_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\omega^\alpha_{;\alpha} + 2\omega_{\mu;\nu} + 2[\omega_\mu\omega_\nu - g_{\mu\nu}\omega^\alpha\omega_\alpha], \quad (\text{A.22})$$

$$R = K + 6\alpha_{;\alpha} - 6\omega^\alpha\omega_\alpha, \quad (\text{A.23})$$

de modo que

$$Q_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2(\omega_{\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\omega^\alpha_{;\alpha}) + 2[\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega^\alpha\omega_\alpha]. \quad (\text{A.24})$$

A ação pode então ser escrita como

$$S_{Can} = \int_{\Omega} e^{-2\omega} (K + 6\omega^\alpha_{;\alpha} - 6\omega^\alpha\omega_\alpha) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (\text{A.25})$$

onde  $\omega_\alpha = \partial_\alpha\omega$ . Integrando por partes o termo  $e^{-2\omega}6\omega^\alpha_{;\alpha}$ , temos que

$$\int_{\Omega} e^{-2\omega} (\omega^\alpha_{;\alpha}) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x = \int_{\Omega} (e^{-2\omega}\omega^\alpha_{;\alpha}) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x - \int_{\Omega} e^{-2\omega}\omega^\alpha (-2\omega_\alpha) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x.$$

Descartando o termo de divergente, podemos escrever a ação total como

$$S_{Can} = \int_{\Omega} e^{-2\omega} (K + 6\omega^\alpha\omega_\alpha) \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x = S_0 + S_1, \quad (\text{A.26})$$

onde  $S_0 = \int_{\Omega} e^{-2\omega} K \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x$  e  $S_1 = \int_{\Omega} 6e^{-2\omega}\omega^\alpha\omega_\alpha \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x$ .

Seja

$$I = \int_{\Omega} f(\beta) K \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (\text{A.27})$$

onde  $\beta$  é um campo escalar. Então, para uma variação  $\delta g^{\mu\nu}$  que se anule em  $\partial\Omega$ ,

$$\delta I = \int_{\Omega} f(\beta) \delta(K \sqrt{-\mathbf{g}}) d^4x, \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\delta(K \sqrt{-\mathbf{g}}) = \delta K_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}} + K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}} + K \delta(\sqrt{-\mathbf{g}}), \quad (\text{A.29})$$

com  $\delta K_{\mu\nu}$  sendo dado por (A.11).

Como também é facilmente visto utilizando coordenadas normais, temos que a variação da conexão riemanniana é dada por

$$\delta\{\mu\nu\}^\alpha = -\frac{1}{2}[g_{\lambda\mu}(\delta g^{\lambda\alpha})_{;\nu} + g_{\lambda\nu}(\delta g^{\lambda\alpha})_{;\mu} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\beta}(\delta g^{\sigma\beta})_{;\alpha}]. \quad (\text{A.30})$$

Substituindo (A.10) e (A.11) na expressão acima, temos que

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\Omega} f(\beta)[G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (g_{\alpha\nu}(\delta g^{\alpha\nu})^{;\sigma} - (\delta g^{\alpha\sigma})_{;\alpha})_{;\sigma}] \\ &= \int_{\Omega} \{fG_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + [f((g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\nu})^{;\sigma} - (\delta g^{\alpha\sigma})_{;\alpha})_{;\sigma} - [f_{,\sigma}((g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\nu})^{;\sigma} - (\delta g^{\alpha\sigma})_{;\alpha})]\}\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x.\end{aligned}$$

O termo  $[f((g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\nu})^{;\sigma} - (\delta g^{\alpha\sigma})_{;\alpha})_{;\sigma}]$  nos dá um termo de fronteira, que é descartado (ver observação no final da seção anterior). Integrando por partes o restante, obtemos

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ fG_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - [(f^{;\sigma}g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\nu})_{;\sigma} - f^{;\sigma}_{;\sigma}(g_{\alpha\nu}\delta g^{\alpha\nu})] + [(f_{,\sigma}\delta g^{\alpha\sigma})_{;\alpha} - f_{,\sigma;\alpha}\delta g^{\alpha\sigma}] \right\} \sqrt{-\mathbf{g}}d^4x.$$

Descartando novamente os termos de fronteira, obtemos finalmente

$$\delta I = \int_{\Omega} \{fG_{\mu\nu} + f^{;\sigma}_{;\sigma}g_{\mu\nu} - f_{,\mu;\nu}\}\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}}d^4x. \quad (\text{A.31})$$

No caso de (A.26), temos que  $f = e^{-2\omega}$  é uma função do campo escalar  $\omega$ , de forma que

$$f_{,\mu;\nu} = (4\omega_{\mu}\omega_{\nu} - 2\omega_{\mu;\nu})f,$$

e portanto

$$f^{;\sigma}_{;\sigma} = (4\omega^{\sigma}\omega_{\sigma} - 2\omega^{\sigma}_{;\sigma})f.$$

Desse modo,

$$\delta S_0 = \int_{\Omega} \{e^{-2\omega}[G_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\omega^{\sigma}_{;\sigma} - \omega_{\mu;\nu}) + 4(g_{\mu\nu}\omega^{\sigma}\omega_{\sigma} - \omega_{\mu}\omega_{\nu})]\}\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}}d^4x.$$

Usando (A.10), temos que

$$\delta S_1 = 6 \int_{\Omega} \{e^{-2\omega}(\omega_{\mu}\omega_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega^{\sigma}\omega_{\sigma})\}\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\delta S_{Can} &= \int_{\Omega} \{e^{-2\omega}[G_{\mu\nu} + 2(\omega_{\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\omega^{\sigma}_{;\sigma}) + 2(\omega_{\mu}\omega_{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega^{\sigma}\omega_{\sigma})]\}\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-\mathbf{g}}d^4x \\ &= \int_{\Omega} \{e^{-2\omega}Q_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\}\sqrt{-\mathbf{g}}d^4x,\end{aligned}$$

de modo que as equações de campo no vácuo são

$$Q_{\mu\nu} = 0.$$

## A.4 Teoria de Israelit

A ação da teoria de Israelit [25], baseada na ação proposta por Dirac [14], é dada por

$$S_{I_{sr}} = \int_{\Omega} [\beta^2 R + k(\beta^\mu + \beta\omega^\mu)(\beta_\mu + \omega_\mu) + 2\Lambda\beta^4 + 8\pi L_M] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (\text{A.32})$$

onde  $\omega_\mu = \partial_\mu \omega$  e  $\beta_\mu = \partial_\mu \beta$ , e  $k, \Lambda$  são constantes.  $\beta$  é um campo escalar com  $\Pi(\beta) = -1$  (ver definição (2.3.11)).  $\Lambda$  é conhecida como *constante cosmológica*. Essa ação também é invariante pelas “transformações de gauge” (2.65).

Em termos do escalar de curvatura riemanniano, notando que

$$\beta^2 \omega^\alpha{}_{;\alpha} \sqrt{-\mathbf{g}} = (\beta^2 \omega^\alpha)_{;\alpha} \sqrt{-\mathbf{g}} - 2\beta\beta_\alpha \omega^\alpha \sqrt{-\mathbf{g}}$$

e desprezando o termo de fronteira, temos que

$$S_{I_{sr}} = \int_{\Omega} [\beta^2 K + 2(k-6)\beta\beta_\sigma \omega^\sigma + (k-6)\beta^2 \omega^\sigma \omega_\sigma + k\beta^\alpha \beta_\alpha + 2\Lambda\beta^4 + 8\pi L_M] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x. \quad (\text{A.33})$$

Façamos uma variação  $\delta g^{\mu\nu}$  que se anule em  $\partial\Omega$ . De (A.31), com  $f = \beta^2$ ,

$$f_{\mu;\nu} = 2\beta_\mu \beta_\nu + 2\beta\beta_{\mu;\nu}. \quad (\text{A.34})$$

Escrevendo  $b = \ln(\beta)$ ,

$$\beta_{\mu;\nu} = (e^b)_{\mu;\nu} = (b_\mu e^b)_{;\nu} = \beta(b_{\mu;\nu} + b_\mu b_\nu), \quad (\text{A.35})$$

e portanto

$$f_{\mu;\nu} = 2\beta^2(2b_\mu b_\nu + b_{\mu;\nu}), \quad (\text{A.36})$$

$$f^\sigma{}_{;\sigma} = 2\beta^2(2b^\sigma b_\sigma + b^\sigma{}_{;\sigma}). \quad (\text{A.37})$$

Defina também  $Z = \omega + b$ . Então

$$Z_\mu Z_\nu = \omega_\mu \omega_\nu + b_\mu b_\nu + \omega_\mu b_\nu + \omega_\nu b_\mu, \quad (\text{A.38})$$

$$Z^\alpha Z_\alpha = \omega^\alpha \omega_\alpha + b^\alpha b_\alpha + 2\omega^\alpha b_\alpha. \quad (\text{A.39})$$

Defina  $\alpha = k - 6$ . Desse modo, utilizando (A.10), (A.31) e a definição (A.13), chegamos a

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{T_{\mu\nu}}{\beta^2} - \alpha(Z_\mu Z_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Z^\sigma Z_\sigma) - 2(g_{\mu\nu}b^\sigma{}_{;\sigma} - b_{\mu;\nu}) - 2b_\mu b_\nu - g_{\mu\nu}b^\sigma b_\sigma + \Lambda\beta^2 g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.40})$$

Façamos agora uma variação  $\delta\omega$  que se anula em  $\partial\Omega$ . Usando (A.5), podemos escrever  $L = 2\alpha(\beta g^{\mu\nu}\beta_\mu\omega_\nu + \beta^2 g^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu)$ , pois os outros termos da ação não dependem de  $\omega$ . Definindo

$$S = -\frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta\omega}, \quad (\text{A.41})$$

temos que

$$\frac{\partial L}{\partial(\omega_\nu)} = 2\alpha\beta(\beta^\nu + \beta\omega^\nu) = 2\alpha\beta^2(b^\nu + \omega^\nu) = 2\alpha\beta^2 Z^\nu. \quad (\text{A.42})$$

Assim,

$$2\alpha(\beta^2 Z^\nu)_{;\nu} = 16\pi S. \quad (\text{A.43})$$

Fazendo uma variação em  $\beta$  com  $\delta\beta = 0$  em  $\partial\Omega$ , podemos tomar

$$L = \beta^2 K + 2\alpha\beta\beta_\sigma\omega^\sigma + \alpha\beta^2\omega^\sigma\omega_\sigma + k\beta^\alpha\beta_\alpha + 2\Lambda\beta^4,$$

de forma que

$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = 2\beta K + 2\alpha\beta_\sigma\omega^\sigma + 2\alpha\beta\omega^\sigma\omega_\sigma + 8\Lambda\beta^3, \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\beta_\mu)} = 2\alpha\beta\omega^\mu + 2k\beta^\mu. \quad (\text{A.45})$$

Logo,

$$\left( \frac{\partial L}{\partial(\beta_\mu)} \right)_{;\mu} = 2\alpha(\beta_\mu\omega^\mu + \beta\omega^\mu{}_{;\mu}) + 2k\beta^\mu{}_{;\mu}, \quad (\text{A.46})$$

de modo que

$$(2\beta K + 2\alpha\beta\omega^\sigma\omega_\sigma + 8\Lambda\beta^3) - (2\alpha\beta\omega^\mu{}_{;\mu} + 2k\beta^\mu{}_{;\mu}) + 8\pi \frac{\delta L_M}{\delta\beta} = 0. \quad (\text{A.47})$$

Definindo

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta\beta} \quad (\text{A.48})$$

e usando que  $\beta^\sigma_{;\sigma} = \beta(b^\sigma_{;\sigma} + b^\sigma b_\sigma)$ , obtemos

$$K + k(b^\sigma_{;\sigma} + b^\sigma b_\sigma) = -\alpha(\omega^\sigma \omega_\sigma - \omega^\sigma_{;\sigma}) - 4\Lambda\beta^2 + \frac{8\pi}{\beta}B. \quad (\text{A.49})$$

### A.4.1 Leis de conservação

A ação correspondente à matéria é escrita como

$$I_M = 8\pi \int_{\Omega} L_M \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \quad (\text{A.50})$$

logo sua variação devido a variações simultâneas  $\delta g^{\mu\nu}$ ,  $\delta\omega$ ,  $\delta\beta$  que se anulam em  $\partial\Omega$  é escrita como

$$\begin{aligned} \delta I_M &= 8\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \omega} \delta \omega + \frac{\delta L_M}{\delta \beta} \delta \beta \right] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x \\ &= -8\pi \int_{\Omega} [T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2S \delta \omega + 2B \delta \beta] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Se essa variação for devida a uma família de difeomorfismos que preservem a orientação de  $\Omega$  (ver seção A.2.1),  $\delta g^{\mu\nu}$  será dado pela equação (A.19),  $\delta\omega = \omega_\nu \eta^\nu$  e  $\delta\beta = \beta_\nu \eta^\nu$ . Substituindo na expressão (A.51), como  $I_M$  é invariante por esses difeomorfismos,  $\delta I_M = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} [2T_\mu{}^\nu \eta^\mu_{;\nu} + 2S \omega_\mu \eta^\mu + 2B \beta_\mu \eta^\mu] \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x \\ &= 2 \int_{\Omega} (T_\mu{}^\nu \eta^\mu)_{;\nu} \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x + 2 \int_{\Omega} [-T_\mu{}^\nu_{;\nu} + S \omega_\mu + B \beta_\mu] \eta^\mu \sqrt{-\mathbf{g}} d^4x, \end{aligned}$$

de forma que temos a primeira lei de conservação

$$T_\mu{}^\nu_{;\nu} - S \omega_\mu - B \beta_\mu = 0. \quad (\text{A.52})$$

É suposto também que a ação (A.50) seja invariante por “transformações de gauge” (2.65), de modo que se tomarmos  $\lambda(x)$  pequeno o suficiente para que sejam boas as aproximações em primeira ordem

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &\approx (1 + 2\lambda)g_{\mu\nu}, \\ \tilde{\beta} &= e^{-\lambda}\beta \approx (1 - \lambda)\beta, \end{aligned}$$

obtemos  $\delta g_{\mu\nu} = 2\lambda g_{\mu\nu}$ , e portanto  $\delta g^{\mu\nu} = -2\lambda g^{\mu\nu}$  pela eq. (A.8). Também,  $\delta\omega = \lambda$  e  $\delta\beta = -\lambda\beta$ . Substituindo essas expressões em (A.51) e notando que  $\delta I_M = 0$ , a invariância de gauge da ação nos dá

$$T + S - \beta B = 0, \quad (\text{A.53})$$

a segunda lei de conservação, onde  $T = T_\mu{}^\mu$ .

Vale notar que, tirando o traço da eq. (A.40), temos

$$-K = \frac{8\pi}{\beta^2} T + \alpha Z^\sigma Z_\sigma - 6(b^\sigma{}_{;\sigma} + b^\sigma b_\sigma) + 4\Lambda\beta^2.$$

Além disso, utilizando (A.43) e (A.53),

$$8\pi T = -\alpha(\beta^2 Z^\sigma)_{;\sigma} + 8\pi\beta B,$$

e portanto

$$-K = \frac{1}{\beta} [-\alpha(\beta^2 Z^\sigma)_{;\sigma} + 8\pi\beta B] + \alpha Z^\sigma Z_\sigma - 6(b^\sigma{}_{;\sigma} + b^\sigma b_\sigma) + 4\Lambda\beta^2.$$

Após algumas manipulações, obtemos novamente a eq. (A.49). Desse modo, segue das leis de conservação que as equações (A.40), (A.43) e (A.49) não são todas independentes, o que reflete o fato de a ação ser invariante de gauge. Isto é, não é possível determinar todos os campos  $g_{\mu\nu}$ ,  $\beta$  e  $\omega$  a partir dessas equações. O “gauge” (que pode ser entendido tanto como o campo  $\omega$  quanto como o campo  $\beta$ ) deve ser determinado a partir de considerações físicas.

As leis de conservação ainda podem ser escritas de outra maneira: substituindo (A.53) em (A.52), obtemos

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} - T b_\mu = S Z_\mu. \quad (\text{A.54})$$

Definindo

$$8\pi\Theta^{\mu\nu} = \alpha\beta^2 \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} Z^\sigma Z_\sigma - Z^\mu Z^\nu \right) \quad (\text{A.55})$$

e usando (A.43), pode-se mostrar que

$$\Theta_\mu{}^\lambda{}_{;\lambda} - \Theta_\lambda{}^\lambda b_\mu = -S Z_\mu. \quad (\text{A.56})$$

Usando (A.54),

$$(T_\mu{}^\nu + \Theta_\mu{}^\nu)_{;\nu} - (T + \Theta)b_\mu = 0. \quad (\text{A.57})$$

---

# Referências Bibliográficas

- [1] Akimov, D., *Detectors of Dark Matter search (review)*, Nuclear instruments and methods in Physics research A **598**, 275 (2009).
- [2] Ashman, K. M., *Dark matter in galaxies*, Publications of the astronomical society of the Pacific **104**, 682 , 1109 (1992)
- [3] Athanassoula, E., Bosma, A., Papaioannou, S., *Halo parameters of spiral galaxies*, Astron. Astrophys. **179**, 23 (1987).
- [4] Binney, J., Tremaine, S., *Galactic Dynamics 2nd. edition*, Princeton University Press (2008).
- [5] deBlock, W. J. G., McGaugh, S. S., Rubin, V., *High-resolution rotation curves of Low Surface Brightness galaxies - II. Mass models*, Ap. J. **122**, 2396-2427 (2001)
- [6] Bosma, A. *HI and dark matter in spiral galaxies*, “The dynamics, structure & history of galaxies”, ASP conference series **273** (2002).
- [7] Brandt, J. C., *On the distribution of mass in galaxies. I. The large-scale structure of ordinary spirals with applications to M31*, Astrph. J. **131**, 293 (1959).
- [8] Brownstein, J. R., Moffat, J. W., *Galactic rotation curves without nonbarionic dark matter*, Astrophys. J. **636**, 741 (2006).
- [9] Buchdahl, H. A., *Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity*, Phys. Rev. **115**, 1325 (1959).
- [10] Butkov, E., *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1973).
- [11] Canuto, V., Adams, P. J., Hsieh, S.-H., Tsiang, E., *Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications*, Phys. Rev. D **16**, 6, 1643-1663 (1977).
- [12] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro (2005).

- [13] Carroll, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, san Francisco (2004).
- [14] Dirac, P. A. M., *Long range forces and broken symmetries*, Proc. R. Soc. London A. **333**, 403-418 (1973).
- [15] Dirac, P. A. M., *A new basis for cosmology*, Proc. R. Soc. London A **165**, 199 (1938).
- [16] Eddington, A., *The Mathematical Theory of Relativity*, Chelsea Publishing Company, New York (1975).
- [17] Folland, G. B., *Weyl Manifolds*, J. Diff. Geom. **4**, 145 (1970).
- [18] Freeman, K. C., *On the disks of spirals and SO galaxies*, Astropys. J. **160**, 811 (1970).
- [19] Griffiths, D. J., *Introduction do electrodynamics*, Prentice-Hall, New Jersey (1999).
- [20] González, G., *Construção de modelos relativísticos de discos com suporte de esforço na direção radial*, Tese de doutorado em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP (1998).
- [21] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York (1969).
- [22] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, London (1973).
- [23] Hoffman, K., Kunze, R., *Linear Algebra*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1961).
- [24] D’Inverno, R., *Introducing Einstein’s Relativity*, Claredon Press, Oxford (1992).
- [25] Israelit, M., *Matter creation by geometry in an integrable Weyl-Dirac theory*, Found. Phys. **29**, 1303 (1999).
- [26] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3ed., John Wiley & Sons, Inc. (1999).
- [27] Kent, S. M., *Dark matter in spiral galaxies. II. Galaxies with HI rotation curves*, Astron. J. **93**, 816 (1987).
- [28] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Course of theoretical physics vol. 6, Elsevier, 2nd. edition (1987).
- [29] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York (2003).
- [30] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York (1997).
- [31] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. Coleção matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro (2006).
- [32] Milgrom, M., *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, Astroph. J. **270**, 365 (1983).

- [33] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York (1983).
- [34] O'Rafaartaigh (editor), *The Dawning of gauge Theory*, Princeton University Press (1997).
- [35] Poisson, E., *A Relativist's Toolkit*, Cambridge University Press, London (2004).
- [36] Rubin, V. C., Ford, W. K., *Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*, *Astroph. J.* **159**, 379 (1970).
- [37] Sachs, R. K., Wu, H., *General Relativity for Mathematicians*. Springer-Verlag, New York (1977).
- [38] Sanders, R. H., McGaugh, S. S., *Modified Newtonian Dynamics as an alternative to dark matter*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **40**, 263-317 (2002).
- [39] Sofue, Y., Honma, M., Omodaka, T., *Unified rotation curve of the Galaxy - decomposition into the Vaucouleurs bulge, disk, dark halo and the 9-kpc rotation dip*, arxiv:0811.0859v2 [astro-ph](2008).
- [40] Scholz, E. (editor), *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a general introduction to his scientific work*, DMV seminar, Band 30, Birkhäuser Verlag (2001).
- [41] Sofue, Y., Rubin, V., *Rotation curves of spiral galaxies*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39**, 137-174 (2001).
- [42] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [43] Taub, A. H., *Space-times with distribution-valued curvature tensors*, *J. Math. Phys.* **21**, 1423 (1980).
- [44] Vogt, D., Letelier, P. S., *Exact general relativistic perfect fluid disks with halos*, *Phys. Rev. D* **68**, 084010 (2003).
- [45] Vogt, D., Letelier, P. S., *Relativistic models of galaxies*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **363**, 268-284 (2005).
- [46] Wald, R., *General Relativity*, UCP, Chicago and London (1984).
- [47] Weyl, H., *Space-Time-Matter*, translation from the 4th edition, Dover Publications (1950).