

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

PROBLEMA DE TRANSPORTE
E ARMAZENAGEM DINÂMICO

ROSEANA MORAES GARCIA

ORIENTADOR: SECUNDINO SOARES FILHO

TESE DE MESTRADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E CIÊNCIA DE COMPUTAÇÃO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

DEZEMBRO - 1980

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ã

Leninha, Benedita, Rosely e Silvana

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Secundino, pela amizade e incentivo.

Aos amigos Martinez, Taube e Paulo França, pelo apoio.

À todos os amigos do IMECC, da FEC e da FEAA que direta ou in diretamente ajudaram na elaboração deste trabalho.

Ao Julio, pelo excelente trabalho de datilografia.

À Vera, pela ilustração e pelo carinho.

À Chris e Angela, por tudo.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO I - ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE DECOMPOSIÇÃO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA DE GRANDE PORTE	1
1. INTRODUÇÃO	1
2. MANIPULAÇÃO DE PROBLEMAS	3
2.1. Projeção	3
2.2. Linearização Externa	5
2.3. Dualização	6
3. ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO	12
3.1. Relaxação	12
4. ALOCAÇÃO DE RECURSOS	14
CAPÍTULO II - O PROBLEMA DE TRANSPORTE E ARMAZENAGEM DINÂMICO: SOLUÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO	20
1. INTRODUÇÃO	20
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	21
3. DECOMPOSIÇÃO	26

	Página
4. RESOLUÇÃO DE $(SP)_t$ E (PM)	32
4.1. Subproblemas $(SP)_t$	32
4.2. Problema Mestre (PM)	35
CAPÍTULO III - SOLUÇÃO COMPUTACIONAL	36
1. INTRODUÇÃO	36
2. DIAGRAMA DE BLOCOS	37
3. EXEMPLO	40
4. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	43
APÊNDICE	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

CAPÍTULO I

ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE DECOMPOSIÇÃO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA DE GRANDE PORTE

1. INTRODUÇÃO

Dentro da Programação Matemática, vem se desenvolvendo nas duas últimas décadas, estudos dirigidos para a resolução de problemas de grande porte. Um problema de grande porte pode ser caracterizado, não só pelo número de variáveis que contém, como também pelo número e complexidade das restrições envolvidas por ele, o que quase sempre acarreta dificuldades (ou mesmo impossibilidade) de resolução. Assim, as novas técnicas desenvolvidas, que deram início a Programação Matemática de Grande Porte, buscam aproveitar as estruturas particulares presentes nestes problemas no sentido de facilitar ou mesmo possibilitar suas resoluções computacionais. Essas técnicas, chamadas de decomposição, visam transformar o problema original num problema equivalente, isto é, em um problema coordenador e em subproblemas com dimensão e complexidade menores. Com isso é criada uma hierarquia de resolução onde no nível inferior os subproblemas são tratados independentemente e no ní

vel superior o problema mestre (problema coordenador) é encarregado de coordenar tais subproblemas, até que se obtenha a solução do problema original.

O objetivo deste capítulo é introduzir a teoria de decomposição que será usada no nosso problema específico de transporte e armazenagem dinâmico.

Na tentativa de unificar as técnicas de otimização para Programação Matemática de Grande Porte, Geoffrion [1], define dois conceitos fundamentais: Manipulação de Problemas e Estratégia de Resolução.

A manipulação de problemas, fonte geradora de programas mestres, tem como objetivo a transformação do problema original numa forma alternativa mais adequada para solução. Na maioria das vezes a estrutura particular do problema original é aproveitada e obtém-se um problema totalmente equivalente, de resolução mais simples. As manipulações apresentadas neste capítulo são: Projeção, Linearização externa e Dualização.

A estratégia de resolução é a fonte geradora de subproblemas, que a partir das simplificações induzidas pela manipulação for

nece um procedimento iterativo para a resolução do programa mestre. A estratégia de resolução abordada neste capítulo é a Relaxação.

2. MANIPULAÇÃO DE PROBLEMAS

2.1. Projeção

Projeção é uma excelente manipulação, quando fixando-se temporariamente o valor de algumas variáveis do problema, a sua resolução é sentidamente simplificada.

Seja o problema

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(x,y) & \quad (1) \\ \text{s.a } G(x,y) \leq 0 & \quad , \end{aligned}$$

que envolve otimização no espaço conjunto das variáveis x e y .

Vamos definir sua projeção no espaço das variáveis y como sendo

$$\min_{y \in V} v(y) \quad , \quad (2)$$

onde $v(y) = \inf_{x \in X} f(x,y)$, s.a $G(x,y) \leq 0$

e $V = \{y \mid y \in Y \text{ e } G(x,y) \leq 0 \text{ para algum } x \in X\}$

A vantagem desta técnica de manipulação, reside no fato de que sendo (1) e (2) equivalentes [1], a resolução de (2) é mais simples do que a resolução de (1). Faz-se necessária a definição de V para que seja garantida a existência de $v(y)$, como pode ser visto na Figura I.1.

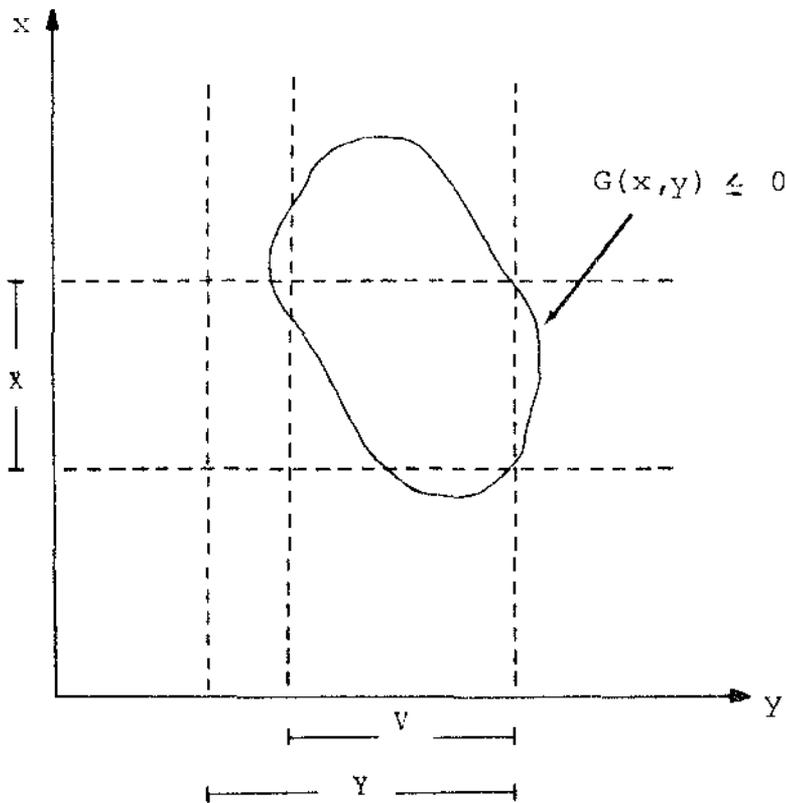


Figura I.1

2.2. Linearização Externa

A linearização externa é uma aproximação que pode ser aplicada tanto a funções côncavas ou convexas como a conjuntos convexos.

Pode ser visto na Figura I.2, um exemplo de aplicação de linearização externa a uma função convexa de uma variável, onde $f(x)$ é aproximada por uma função linear por partes que é o máximo ponto a ponto, das funções suporte lineares $l_1(x), \dots, l_n(x)$, associadas aos pontos x_1, \dots, x_n . Um suporte linear para a função f num dado ponto \bar{x} pode ser definido como sendo uma função linear que satisfaça as seguintes propriedades: nunca exceda em valor a função f e que tenha exatamente o mesmo valor que f no ponto \bar{x} .

Na utilização de linearização externa pode ocorrer que o número de linearizações necessárias para que se obtenha uma boa aproximação da função seja excessivamente grande, mas este problema pode ser contornado através de uma estratégia de resolução chamada Relaxação que será vista posteriormente.

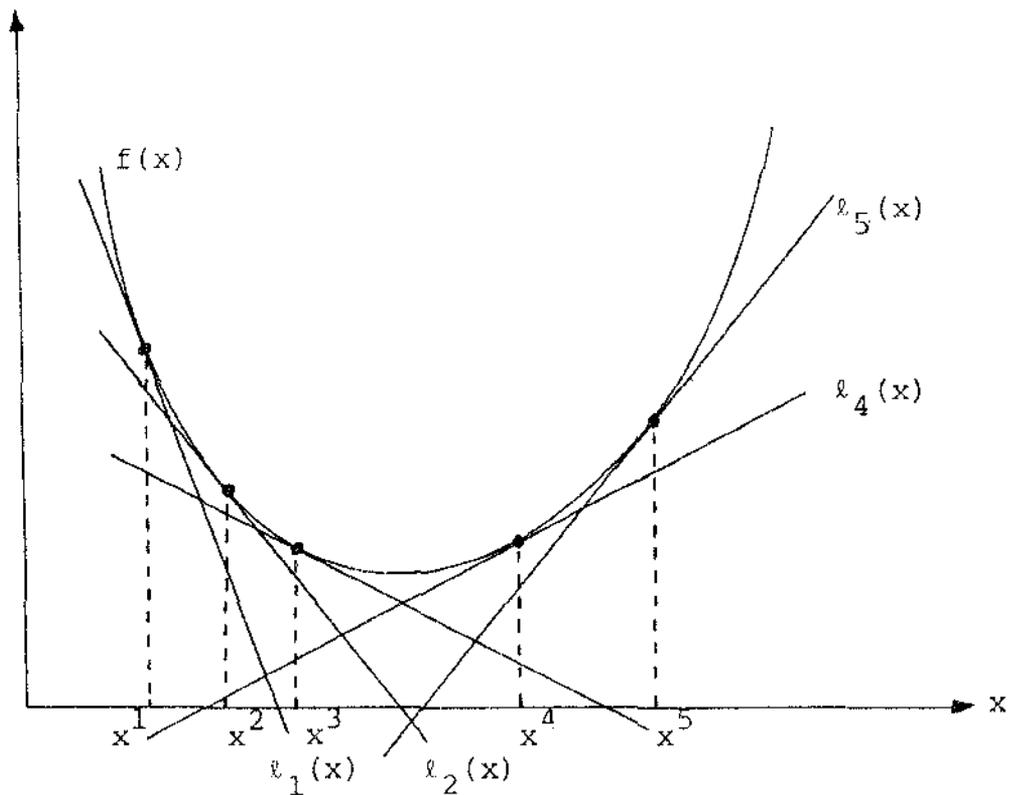


Figura I.2

2.3. Dualização

Seja a problema primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{s.a } g(x) \leq 0$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, f é uma função definida em X e $g(x) =$

$$= \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} \text{ é um vetor de funções definidas em } X.$$

O problema dual associado a (3) pode ser escrito como

$$\max_{\mu \geq 0} \left[\inf_{x \in X} f(x) + \mu g(x) \right] \quad (4)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das variáveis duais ou vetor multiplicador de Langrange, $f(x) + \mu g(x) = L(x, \mu)$ é a função Langrangeana definida em \mathbb{R}^{n+m} e $\inf_{x \in X} \{f(x) + \mu g(x)\} = h(\mu)$ é a função dual, que é côncava pois é o ínfimo ponto a ponto de uma coleção de funções (uma para cada $x \in X$) lineares em μ [2,4]. Mediante esta característica da função dual, tem-se uma propriedade muito interessante que é utilizada em métodos de otimização (como será visto no Capítulo II), ou seja a avaliação da função dual num ponto μ^* gera um hiperplano suporte a ela dado por

$$L(x^*, \mu) = f(x^*) + \mu g(x^*),$$

onde $x^* \in X(\mu^*) = \{x^* \in X \mid x^* \text{ minimiza } L(x, \mu^*) \text{ sobre } X\}$

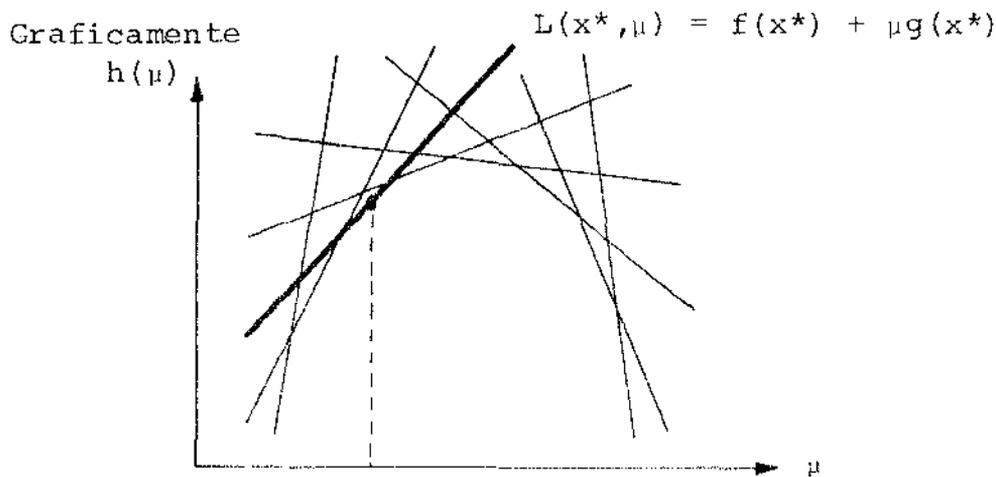


Figura I.3 μ^*

Pode-se provar [2,4] que se a minimização de $L(x, \mu^*)$ sobre X ocorre num único ponto x^* , isto é, se $X(\mu^*)$ tem um único elemento x^* , então a função dual $h(\mu)$ é diferenciável em μ^* e $g(x^*)$ é o gradiente, $\left. \frac{\delta h}{\delta \mu} \right|_{\mu^*} = g(x^*)$. Agora se $X(\mu^*)$ tiver mais de um elemento, a função dual $h(\mu)$ ainda será diferenciável em μ^* se e somente se $g(x^*)$ for constante para todo $x^* \in X(\mu^*)$, caso isso não ocorra, $g(x^*)$ para $x^* \in X(\mu^*)$, será um subgradiente de $h(\mu^*)$.

Para se resolver (4) pode-se então trabalhar com uma sequência de problemas de otimização ditos problemas Lagrangeanos:

$$\min_{x \in X} f(x) + \mu^* g(x) \quad (5)$$

onde $\mu^* \geq 0$ é fixado e o conjunto solução de (5) é dado por $X(\mu^*)$.

Por outro lado, cada resolução do problema Lagrangeano está associada a solução de um problema muito semelhante ao problema primal (1), que é o problema perturbado

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f(x) \\ \text{s.a } g(x) \leq y \end{aligned} \quad (6)$$

onde $y_i = g_i(x^*)$ se $\mu_i^* > 0$

$y_i > g_i(x^*)$ se $\mu_i^* = 0$

Relacionado com esse problema define-se uma função $v(y)$, chamada função de perturbação^(*)

$$v(y) = \underset{x \in X}{\text{ínfimo}} f(x) \quad \text{s.a.} \quad g(x) \leq y, \quad (7)$$

a qual associa a cada vetor de perturbação y o valor ótimo do problema perturbado. O domínio efetivo de $v(y)$ é dado pela condição de factibilidade do problema perturbado, ou seja

$$V = \{y \mid \exists x \in X, g(x) \leq y\}$$

É provado [1,5] que se x^* resolve o problema Lagrangeano (5) para $\mu^* \geq 0$ tem-se que

$$v(y) \geq v(y^*) - \mu^* (y - y^*), \quad \forall y \in V, \quad y^* = g(x^*), \quad v(y^*) = f(x^*)$$

Agora, seja $y = y^* + \alpha s$, $\alpha > 0$ (escalar) e s uma direção factível em V a partir de y^* então

$$v(y^* + \alpha s) \geq v(y^*) - \mu^* \alpha s$$

$$\frac{v(y^* + \alpha s) - v(y^*)}{\alpha} \geq -\mu^* s$$

(*) O conceito de função de perturbação tem sido muito utilizado no estudo da teoria da dualidade

Tomando-se o limite para $\alpha \rightarrow 0$

$$D v(y^*, s) \geq -\mu^* s$$

$$\text{Para } s = e_j = (00 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0)^T$$

$$D v(y^*, e_j) \geq -\mu^*_j ,$$

assim tem-se que $-\mu^*_j$ é um limitante da taxa marginal de variação no valor ótimo do problema perturbado (6) para um acréscimo no j -ésimo elemento do vetor de recursos y .

Geometricamente, resolver o problema Lagrangeano para $\mu^* \geq 0$ é determinar o hiperplano suporte à função de perturbação com inclinação $-\mu^*$. A equação do hiperplano é dada por

$$w(y) = f(x^*) - \mu^* (y - g(x^*)) = L(x^*, \mu^*) - \mu^* y$$

e sua intersecção com o eixo $y = 0$ fornece o valor da função dual para μ^* .

$$w(0) = L(x^*, \mu^*) = h(\mu^*)$$

Portanto, o problema dual pode ser visualizado geometricamente como achar a inclinação $-\mu^0$ do hiperplano suporte à função

de perturbação que maximiza a intersecção com o eixo $y=0$. Para essa inclinação a solução do problema Lagrangeano x^0 é a solução do problema primal [2,4].

Na Figura I.4 tem-se uma interpretação geométrica que relaciona a função de perturbação, a função dual, o problema Lagrangeano e os problemas primal e dual.

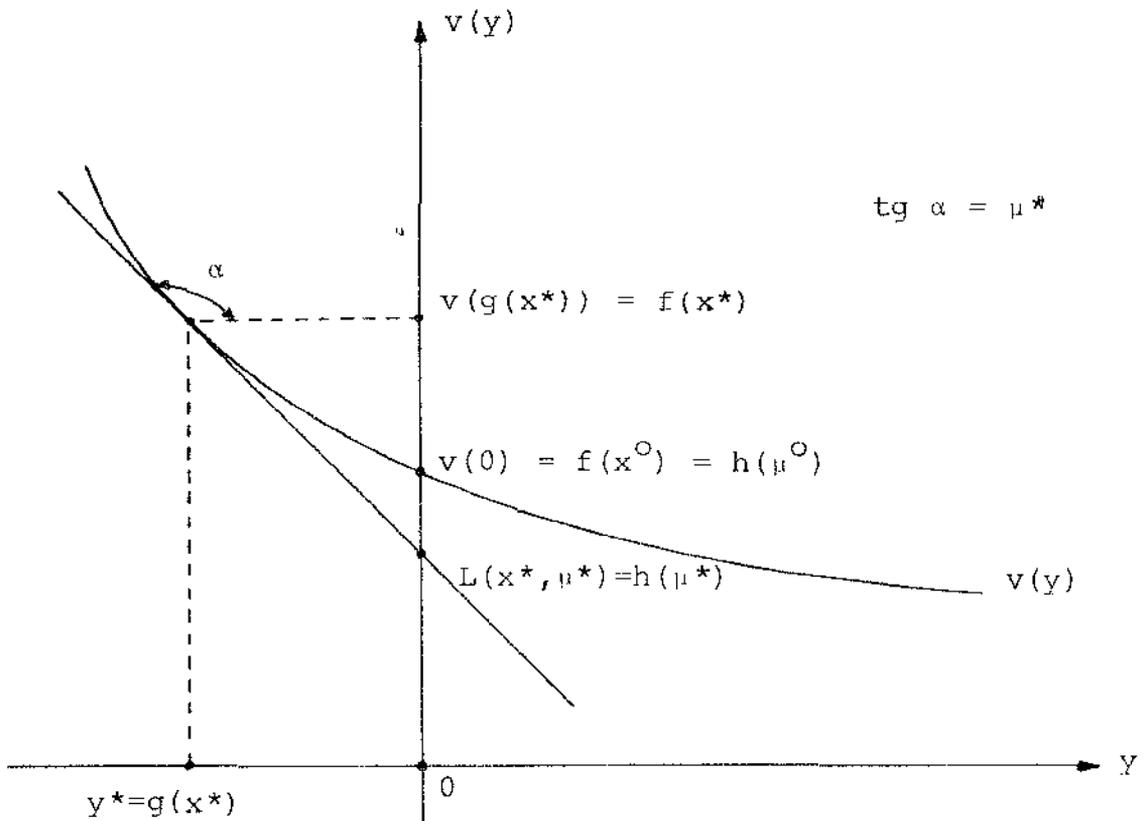


Figura I.4

Para que a função de perturbação $v(y)$ admita sempre um único hiperplano suporte com inclinação $-\mu^*$ a cada ponto y^* é necessário e suficiente que seja estritamente convexa e que o hiperplano suporte no ponto $y=0$ tenha inclinação finita $[1,4,5]$.

3. ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO

3.1. Relaxação

A estratégia de Relaxação é geralmente utilizada em problemas com um grande número de restrições de desigualdade, onde portanto se sabe a priori que na solução ótima muitas delas não serão ativas, ou em problemas onde as restrições só estejam disponíveis implicitamente, como por exemplo, problemas resultantes do uso da Linearização Externa.

Esta estratégia consiste basicamente em ignorar (relaxar) um subconjunto de restrições de desigualdade, resolver então o problema relaxado, se a solução satisfizer todas as restrições ignoradas, essa solução é ótima, senão gerar ou incorporar uma ou mais restrições que foram violadas e assim iterativamente até satisfazer as condições de factibilidade do problema original.

Seja f, g_1, \dots, g_m funções convexas em um conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$. O programa convexo

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{s.a } g_i(x) \leq 0, \quad i \in M = \{1, \dots, m\} \\ & \quad x \in X \end{aligned} \tag{8}$$

é resolvido pela solução de uma sequência de problemas relaxados da forma:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{s.a } g_i(x) \leq 0, \quad i \in S \\ & \quad x \in X \end{aligned} \tag{9}$$

Algoritmo

- (i) Faça $\bar{f} = -\infty$ e S igual a qualquer subconjunto de M , tal que o problema relaxado tenha solução limitada.
- (ii) Resolva o problema relaxado. Seja x^S uma solução ótima (se o problema relaxado é infactível, o problema original também o é). Se $g_i(x^S) \leq 0$ para $i \in M-S$, então x^S é solução ótima do problema original, senão vá para (iii).

(iii) Seja V qualquer subconjunto de $M-S$, que inclua ao menos uma das restrições violadas. Se $f(x^S) > \tilde{f}$, faça $\tilde{f} = f(x^S)$ e $S = EUV$, onde $E = \{i | g_i(x^S) = 0\}$. Caso contrário faça $S = SUV$ e vá para (ii).

4. ALOCAÇÃO DE RECURSOS

Seja o problema de programação matemática:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (10)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b$$

$$x_i \in X_i, \quad i=1, \dots, n$$

onde a função objetiva é separável, as restrições $\sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq b$ são de acoplamento e as restrições $x_i \in X_i$ são separáveis.

O método de Alocação de Recursos para resolução de (10) pode ser classificado, frente aos conceitos de manipulação e estratégia de resolução, como uma combinação Projeção, Linearização Externa/Relaxação.

Assim, introduzindo-se variáveis auxiliares y_i , $i=1, \dots, n$ o problema (10) torna-se

$$\min \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (11)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n y_i \leq b$$

$$g_i(x_i) \leq y_i \quad i=1, \dots, n$$

$$x_i \in X_i \quad i=1, \dots, n$$

$$Y_i \in Y_i = \{y_i \in \mathbb{R}^n : g_i(x_i) \leq y_i \text{ para algum } x_i \in X_i\}$$

e fazendo-se a projeção de (11) no espaço definido pelas variáveis y tem-se

$$\min \sum_{i=1}^n v_i(y_i) \quad (12)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n y_i \leq b$$

$$y_i \in Y_i$$

onde

$$v_i(y_i) = \min \{f_i(x_i), \text{ s.a. } g_i(x_i) \leq y_i, x_i \in X_i, y_i \in Y_i\} \quad (13)$$

A função $v_i(y_i)$ pode ser vista como uma função de perturbação, onde $\bar{\mu}_i^k$ é o vetor multiplicador associado a $v_i(\bar{y}_i^k)$, o qual fornece uma medida da taxa marginal de redução em $v_i(y_i)$ para um acréscimo a partir de \bar{y}_i^k . Desta maneira o direcionamento da nova alocação é feito através da comparação entre os $\bar{\mu}_i^k$ e \bar{y}_i^k de cada uma das $v_i(y_i)$.

Assim, pode-se escrever $v_i(y_i)$ por sua linearização externa^(*)

$$v_i(y_i) = \supremum_j \left\{ v_i(\bar{y}_i^j) - \bar{\mu}_i^j (y_i - \bar{y}_i^j) \right\}$$

O problema (12) torna-se

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \supremum_j \left\{ v_i(\bar{y}_i^j) - \bar{\mu}_i^j (y_i - \bar{y}_i^j) \right\} \quad , \quad v_j \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n y_i \leq b \\ y_i \in Y_i \end{aligned} \quad (14)$$

e como o supremo é o menor dos limitantes superiores tem-se

(*) Para que a linearização externa de $v_i(y_i)$ seja válida é necessário que as funções $f_i(x_i)$ e $g_i(x_i)$ sejam convexas sobre X_i convexo e compacto 3, 4, 5.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sigma_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n Y_i \leq b \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_i \geq v_i(\bar{Y}_i^j) + \bar{\mu}_i^j(Y_i - \bar{Y}_i^j) \quad i = 1, \dots, n$$

$$Y_i \in Y_i \quad \forall_j$$

e finalmente aplicando-se relaxação nas restrições

$$\sigma_i \geq v_i(\bar{Y}_i^j) + \bar{\mu}_i^j(Y_i - \bar{Y}_i^j), \text{ tem-se}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sigma_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n Y_i \leq b \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_i \geq v_i(\bar{Y}_i^j) + \bar{\mu}_i^j(Y_i - \bar{Y}_i^j) \quad i=1, \dots, n$$

$$j=1, \dots, k$$

$$Y_i \in Y_i$$

O método de alocação de recursos consiste resumidamente nos seguintes passos

(i) Escolha uma alocação de recursos factível inicial $\{\bar{Y}_i^1\}$

- (ii) Resolva (13) para $i=1, \dots, n$. Seja $\{\bar{x}_i^{-1}\}$ a solução e $\{\bar{u}_i^{-1}\}$ os vetores multiplicadores ótimos associados. Faça $k=1$.
- (iii) Resolva (16) para $j=1, \dots, k$. Seja $\{\bar{y}_i^{-k+1}\}$ a solução e σ_i^{-1} os valores ótimos.
- (iv) Resolva (13) para $i=1, \dots, n$, para a alocação $\{\bar{y}_i^{-k+1}\}$. Sejam $\{\bar{x}_i^{-k+1}\}$ as soluções ótimas e $\{\bar{u}_i^{-k+1}\}$ os vetores multiplicadores ótimos.
- (v) Se $v_i(\bar{y}_i^{-k+1}) = \sigma_i^{-1}$, $i=1, \dots, n$ pare:

$\{\bar{x}_i^{-k+1}\}$ é solução ótima de (10).

Caso contrário introduza em (16) as restrições adicionais.

$v_i(\bar{y}_i^{-k+1}) + \bar{u}_i^{-k+1} (y_i - \bar{y}_i^{-k+1}) = \sigma_i^{-1}$, $i=1, \dots, n$ e volte a (iii)

Uma outra forma de resolução de (10) seria dualizar em relação às restrições de acoplamento, onde as variáveis duais associadas à essas restrições direcionariam a utilização dos recursos no sentido de viabilizar o problema. Uma das desvantagens

gens dessa dualização é que a solução, a cada iteração é in factível, o que não ocorre no método de alocação de recursos, onde a cada passo obtém-se uma solução factível e os preços (variáveis duais) avaliam a melhoria proveniente de novas alo cações.

CAPÍTULO IIO PROBLEMA DE TRANSPORTE E ARMAZENAGEM DINÂMICO: SOLUÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é analisado o problema de transporte e armazenagem dinâmico, que visa otimizar o escoamento de matéria entre centros fornecedores, armazenadores e consumidores, no tempo. Este tipo de problema tratado dinamicamente é pertinente principalmente quando as ofertas e demandas de matéria sofrem considerável oscilação no tempo, como ocorre, por exemplo, no escoamento de safras agrícolas.

A manipulação normalmente usada na resolução deste problema é a sua transformação em um equivalente estático através do aumento do número de nós e arcos para a representação dos diversos períodos de tempo. No caso de problemas de grande porte, este tratamento habitual se torna inviável devido às dimensões proibitivas que atinge o equivalente estático.

Por outro lado, caso os custos de transporte e estocagem não sejam lineares, a manipulação usual perde seu atrativo tendo

em vista não se poder então empregar as eficientes técnicas da programação linear em sua resolução.

Como foi visto no Capítulo I, novas técnicas de otimização foram desenvolvidas especialmente para problemas de grande porte.

Nosso objetivo é então, a aplicação de técnicas de decomposição ao problema de transporte e armazenagem dinâmico, permitindo o tratamento de problemas de grande porte na presença de funções custo de transporte e armazenagem convexas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Será usada a seguinte notação:

$I = \{1, 2, \dots, i, \dots, N_i\}$: conjunto de índices dos centros de produção

$J = \{1, 2, \dots, j, \dots, N_j\}$: conjunto de índices dos centros de consumo

$K = \{1, 2, \dots, k, \dots, N_k\}$: conjunto de índices dos centros de armazenagem

$T = \{1, 2, \dots, t, \dots, N_t\}$: conjunto de índices dos períodos de tempo

- $x_{\ell m}^t$: fluxo de matéria do centro ℓ para o centro m no período t
 y_k^t : quantidade de matéria estocada no armazém k no período t
 Y_k : capacidade do armazém k
 $f_{\ell m}(\cdot)$: função custo de transporte do centro ℓ para o centro m
 $g_k(\cdot)$: função custo de armazenagem do armazém k
 a_i^t : matéria produzida no centro i no período t
 b_j^t : matéria consumida no centro j no período t

O problema de transporte com armazenagem dinâmico pode ser formulado da seguinte maneira: sendo o custo de transporte num dado período de tempo igual a

$$F_t(\underline{x}) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} f_{ik}(x_{ik}^t) + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} f_{kj}(x_{kj}^t) \quad (1)$$

e sendo o custo de armazenagem igual a $\sum_{k \in K} g_k(y_k^t)$, o problema pode ser escrito como em (PTD).

É necessário ressaltar que em (PTD) não existem ligações diretas entre centros de produção e consumo (Figura II.1). Além disso, somente os centros de armazenagem estão autorizados a

estocar matéria (eqs. (3) e (4)). Entretanto esta formulação é completamente geral, uma vez que é possível se considerar armazéns fictícios (sem capacidade) ou rotas de transporte de custo nulo, de modo a se poder representar, a rigor, qualquer problema real.

$$\min \sum_{t \in T} \{F_t(\underline{x}) + \sum_{k \in K} g_k(y_k^t)\} \quad (2)$$

sujeito a

$$\sum_{k \in K} x_{ik}^t = a_i^t \quad , \quad i \in I, \quad t \in T \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} x_{kj}^t = b_j^t \quad , \quad j \in J, \quad t \in T \quad (4)$$

$$(PTD) \quad y_k^t = y_k^{t-1} + \sum_{i \in I} x_{ik}^t - \sum_{j \in J} x_{kj}^t \quad , \quad k \in K, \quad t \in T \quad (5)$$

$$y_k^0 \text{ conhecido, } k \in K \quad (6)$$

$$x_{ik}^t \geq 0 \quad , \quad i \in I, \quad k \in K, \quad t \in T$$

$$x_{kj}^t \geq 0 \quad , \quad k \in K, \quad j \in J, \quad t \in T \quad (7)$$

$$y_k \geq y_k^t \geq 0 \quad , \quad k \in K, \quad t \in T$$

Por outro lado, a consistência de (PTD) pode ser verificada através da restrição

$$0 \leq \sum_{t=1}^{\bar{t}} \left\{ \sum_{i \in I} a_i^t - \sum_{j \in J} b_j^t \right\} \leq \sum_{k \in K} Y_k - \sum_{k \in K} Y_k^0 \quad , \quad \bar{t} \in T \quad (8)$$

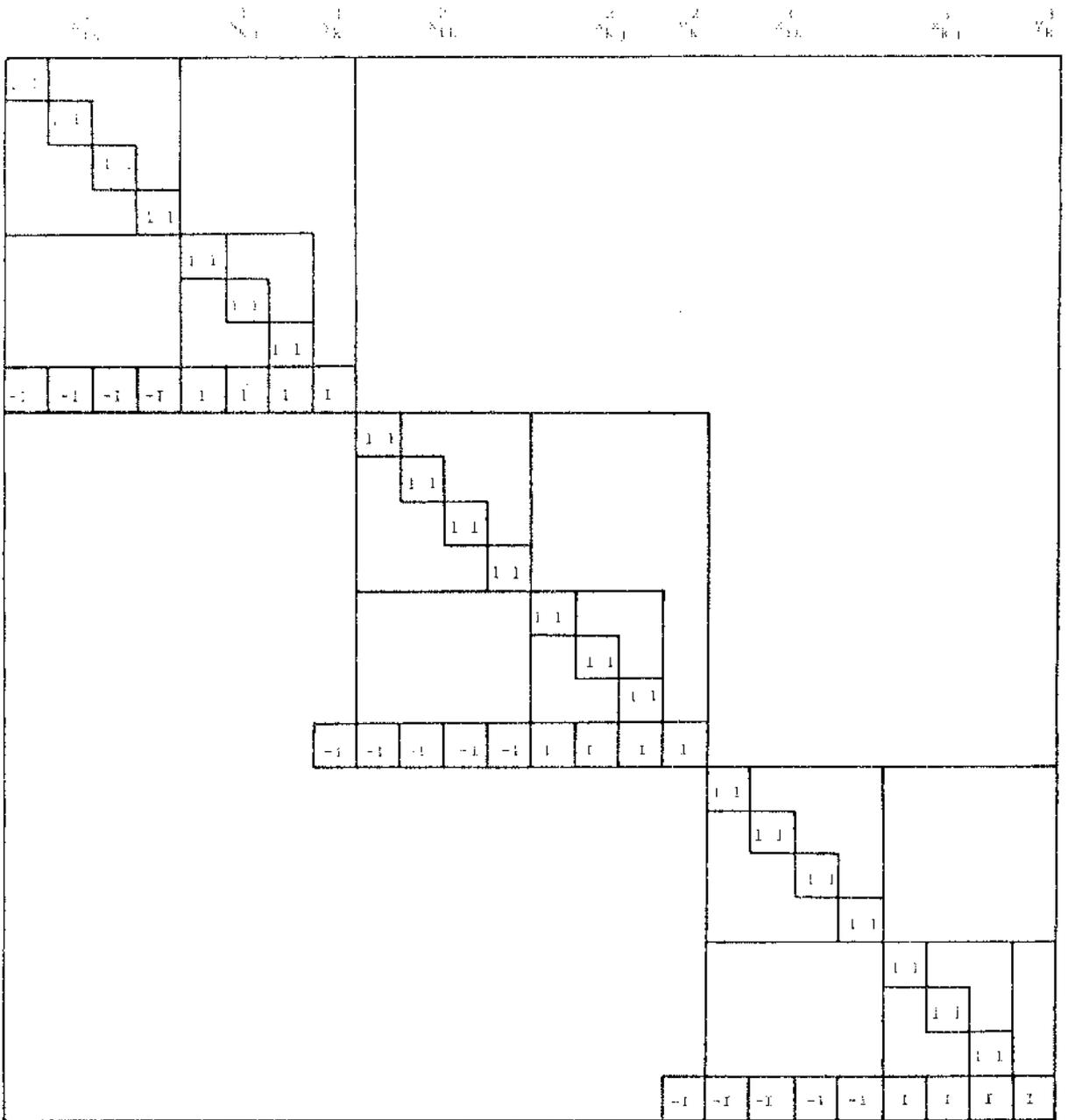


Figura II.2

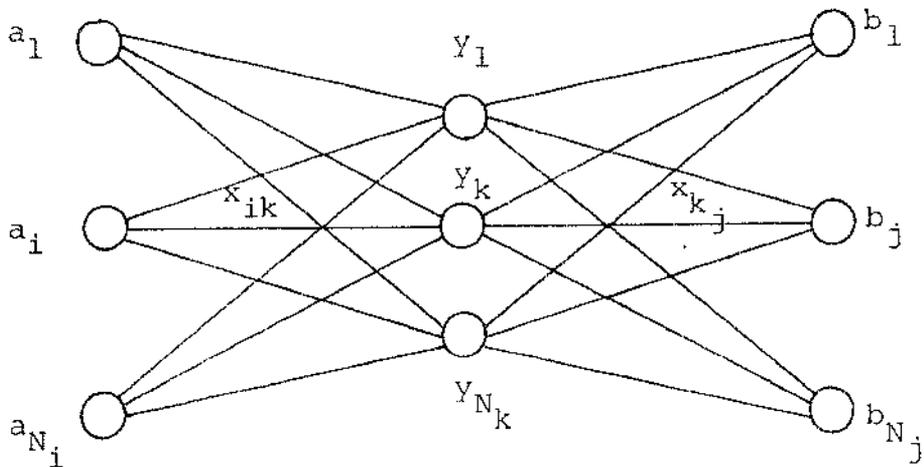


Figura II.1

As restrições (3) - (5) do problema (PTD) configuram uma estrutura tipo "escada", onde o acoplamento no tempo é dado pela conservação de matéria nos centros de armazenagem. A Figura II.2 esquematiza um exemplo com $N_t = 3$, $N_i = 3$, $N_j = 3$, $N_k = 2$ e

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta estrutura dual-angular, onde as variáveis y constituem as variáveis de acoplamento, pode ser aproveitada na resolução de (PTD). Fixando as trajetórias de armazenagem $\{y_k^t\}_{t \in T}$, o problema se separa no tempo, simplificando seu tratamento.

3. DECOMPOSIÇÃO

A técnica de decomposição proposta é "Alocação de Recursos", vista no Capítulo I. A principal vantagem desta abordagem é manter a factibilidade das soluções obtidas durante o processo iterativo, o que permite dispor de uma solução, mesmo interrompendo o processo a qualquer momento.

Projetando-se (PTD) sobre o espaço das variáveis y , obtém-se o problema projetado (PP)

$$\min_{y \in V} \left\{ \sum_{k \in K} g_k(y_k^t) + \min_{x \geq 0} F_t(\underline{x}) \right\}, \text{ s.a (3) - (7)} \quad (9)$$

(PP) onde

$$V = \{0 \leq y_k^t \leq Y_k \mid \exists! x \geq 0 \text{ satisfazendo (3) - (7)}\} \quad (10)$$

O minimizando interior de (9) é um problema parametrizado em $z_k^t = Y_k^t - Y_k^{t-1}$ cujo valor ótimo $v^t(z^t)$, ($z^t = z_1^t, \dots, z_k^t, \dots, z_{nk}^t$), pode ser obtido pela resolução do subproblema (SP)_t

$$\min F_t(\underline{x}) \quad (11)$$

$$\text{s.a. } \sum_{k \in K} x_{ik}^t = a_i^t, \quad i \in I \quad (12)$$

$$\sum_{k \in K} x_{kj}^t = b_j^t, \quad j \in J \quad (13)$$

$$(SP)_t \quad \sum_{i \in I} x_{ik}^t - \sum_{j \in J} x_{kj}^t = z_k^t, \quad k \in K \quad (14)$$

$$x_{ik}^t \geq 0, \quad i \in I, k \in K \quad (15)$$

$$x_{kj}^t \geq 0, \quad j \in J, k \in K$$

O conjunto V definido por (10) pode ser explicitado como o conjunto dos $0 \leq Y_k^t \leq Y_k$ satisfazendo

$$\sum_{k \in K} Y_k^t = \sum_{k \in K} Y_k^{t-1} + \sum_{i \in I} a_i^t - \sum_{j \in J} b_j^t \quad (16)$$

$$\sum_{k \in K} Y_k^0 \text{ dada} \quad (17)$$

isto é, estabelecendo-se o volume total estocado em cada período de tempo, $\sum_{k \in K} Y_k^t$, compatível com as entradas e saídas ocorridas no período, sempre é possível encontrar um fluxo x factível, desde que todos os centros de produção e consumo se liguem com todos os centros de armazenagem e que a capacidade de transporte nos arcos seja suficiente. Esta hipótese será mantida durante o desenvolvimento deste trabalho.

Assim o problema projetado (PP) pode ser escrito como

$$\min_{t \in T} \left\{ \sum_{k \in K} g_k(y_k^t) + v^t(\underline{z}^t) \right\} \quad (18)$$

$$\text{s.a } z_k^t = y_k^t - y_k^{t-1}, \quad k \in K, t \in T \quad (19)$$

$$\text{(PP')} \quad \sum_{k \in K} y_k^t = \sum_{k \in K} y_k^{t-1} + \sum_{i \in I} a_i^t - \sum_{j \in J} b_j^t, \quad t \in T \quad (20)$$

$$y_k^0 \text{ dado}, \quad k \in K \quad (21)$$

$$0 \leq y_k^t \leq Y_k, \quad k \in K, t \in T \quad (22)$$

A função $v^t(\underline{z}^t)$ não tem expressão analítica. Entretanto podemos aproximá-la por linearizações externas. Seja \underline{z}_ℓ^t , $\ell = 1, 2, \dots, L$ uma seqüência de vetores \underline{z}^t fornecidas ao subproblema $(SP)_t$ e seja $v^t(\underline{z}_\ell^t)$ o valor ótimo correspondente a cada vetor \underline{z}_ℓ^t . Seja ainda $\underline{\mu}_\ell^t$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ os vetores duais associados às restrições (14). Pela teoria da dualidade em programação matemática [2, 4] podemos aproximar $v^t(\underline{z}^t)$ pela sua linearização externa

$$v^t(\underline{z}^t) = \sup_{1 \leq \ell \leq L} \{w_\ell^t(\underline{z}^t) = v^t(\underline{z}_\ell^t) + \underline{\mu}_\ell^t(\underline{z}^t - \underline{z}_\ell^t)\} \quad (23)$$

como está ilustrado na Figura II.3.

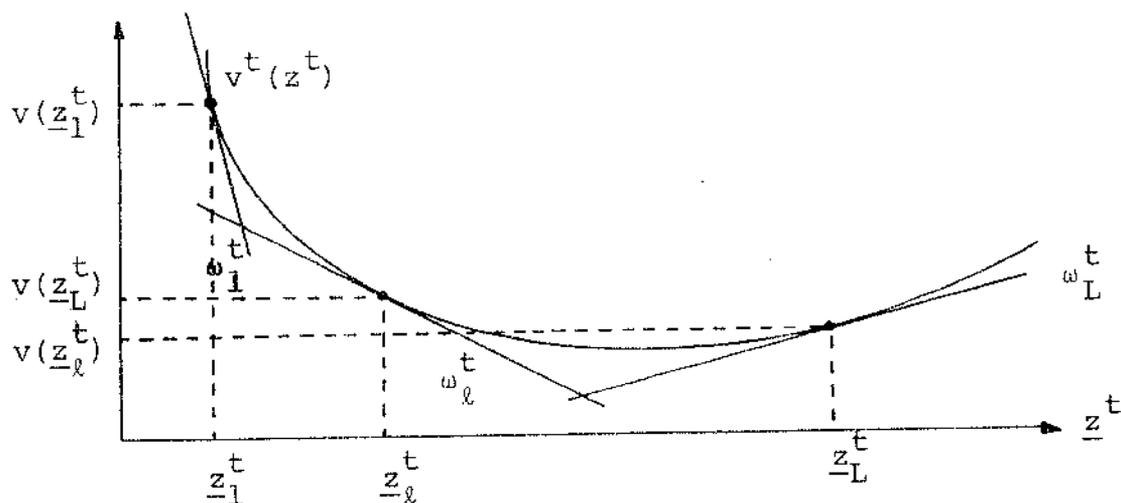


Figura II.3

A linearização externa de $v^t(\underline{z}^t)$ é uma aproximação válida desde que $v^t(\underline{z}^t)$ seja uma função convexa. Isto sempre ocorre desde que $(SP)_t$ seja um problema convexo [2], o que é verdade para funções custo de transporte convexas.

Assim, finalmente, lembrando que o supremo é o menor dos limites superiores, o problema (PP') pode ser aproximado por

$$\min_{t \in T} \left\{ \sum_{k \in K} g_k(y_k^t) + \sigma^t \right\} \quad (24)$$

$$\text{s.a. } z_k^t = y_k^t - y_k^{t-1}, \quad k \in K, t \in T \quad (25)$$

$$\sum_{k \in K} y_k^t = \sum_{k \in K} y_k^{t-1} + \sum_{i \in I} a_i^t - \sum_{j \in J} b_j^t, \quad t \in T \quad (26)$$

(PM)

$$\sigma^t \geq v^t(\underline{z}_\ell^t) + \underline{\mu}_\ell^t (z^t - \underline{z}_\ell^t), \quad \ell=1,2,\dots,L, t \in T \quad (27)$$

$$y_k^0 \text{ dado, } k \in K \quad (28)$$

$$0 \leq y_k^t \leq Y_k, \quad k \in K \quad (29)$$

O problema mestre (PM) constitui o nível superior do método proposto. É um problema nas variáveis σ, \underline{y} (as variáveis \underline{z} são decorrentes) e sua solução corresponde a trajetórias de armazenagem no tempo

$$\{y_k^t\}_{t \in T}, \quad k \in K$$

Em função destas trajetórias, obtidas as sequências $\{\underline{z}_{L+1}^t\}_{t \in T}$, os subproblemas (SP)_t procuram distribuir o fluxo na rede minimizando os custos de transporte. O valor obtido da solução ótima $v^t(\underline{z}_{L+1}^t)$ e o multiplicador $\underline{\mu}_{L+1}^t$ são então devolvidas ao programa mestre (PM) que melhorando a linearização externa de

$v^t(\underline{z}^t)$ encontra uma melhor trajetória de armazenagem e assim por diante (Figura II.4).

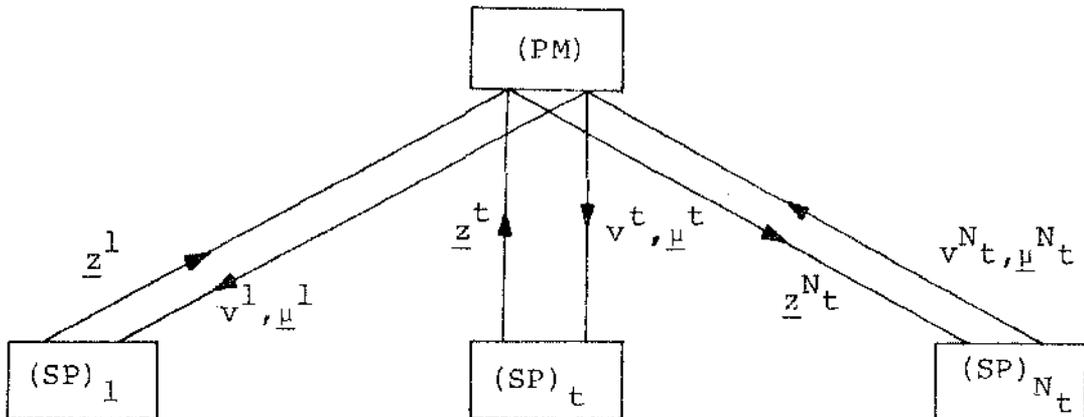


Figura II.4

O processo iterativo termina quando um critério de convergência é satisfeito

$$\text{Local} : v^t(\underline{\tilde{z}}^t) - \tilde{\sigma}^t \leq \epsilon, \quad t \in T$$

$$\text{Global} : \sum_{t \in T} \{ v^t(\underline{\tilde{z}}^t) - \tilde{\sigma}^t \} \leq \epsilon,$$

onde

$\tilde{\sigma}^t$ e $\underline{\tilde{z}}^t$ correspondem à solução de (PM)

4. RESOLUÇÃO DE $(SP)_t$ E (PM)

4.1. Subproblemas $(SP)_t$

A estrutura de restrições dos subproblemas $(SP)_t$ é angular. Sua resolução portanto poderia ser simplificada se fosse possível suspender a restrição de acoplamento (14).

No caso das funções custo de transporte serem estritamente convexas pode-se dualizar $(SP)_t$ em relação a (14). Assim, o Lagrangeano associado será:

$$L^t(\underline{x}, \underline{\lambda}) = F_t(\underline{x}) + \sum_{k \in K} \lambda_k^t (z_k^t - \sum_{i \in I} x_{ik}^t + \sum_{j \in J} x_{kj}^t)$$

e a sua minimização em \underline{x} sujeito a (12), (13) e (15) corresponde a uma avaliação da função dual

$$h^t(\underline{\lambda}) = \min_{\underline{x}} L^t(\underline{x}, \underline{\lambda}) \quad \text{s.a (12), (13) e (15)}$$

Como o Lagrangeano é aditivamente separável para $\underline{\lambda}^t$ fixado, sua minimização pode ser feita separadamente em subproblemas, um para cada centro de produção e consumo.

$$\min L_i^t = \sum_{k \in K} \{ f_{ik}(x_{ik}^t) - \lambda_k^t x_{ik}^t \} \quad (32)$$

$$(SSP)_i \text{ s.a. } \sum_{k \in K} x_{ik}^t = a_i^t \quad (33)$$

$$x_{ik}^t \geq 0, \quad k \in K \quad (34)$$

$$\min L_j^t = \sum_{k \in K} \{ f_{kj}(x_{kj}^t) + \lambda_k^t x_{kj}^t \} \quad (35)$$

$$(SSP)_j \text{ s.a. } \sum_{k \in K} x_{kj}^t = b_j^t \quad (36)$$

$$x_{kj}^t \geq 0, \quad k \in K \quad (37)$$

A solução dos (SSP) é muito simples, bastando procurar a i gualdade dos custos marginais para os vários fluxos. Isto po de ser feito através de processo iterativo.

Observe que os (SSP) têm uma interpretação econômica imediata. O multiplicador λ_k^t representa o preço unitário de compra e

venda de matéria pelo armazém k . Assim o $(SSP)_i$ constitui o problema gerencial de um centro de produção i que procura vender sua produção a_i^t minimizando os custos de transporte e ao mesmo tempo maximizando o valor das suas vendas (32). Para o $(SSP)_j$, o problema gerencial de um centro de consumo j , o objetivo é comprar a quantidade b_j^t minimizando não só os custos de transporte dos centros de armazenagem como também o valor total das compras (35).

A solução de $(SP)_t$ poderá finalmente ser obtida pela maximização da função dual $h^t(\underline{\lambda})$

$$\max_{\underline{\lambda}} h^t(\underline{\lambda})$$

usando para isso o conhecimento gradiente dado pelas componentes

$$\frac{\delta h^t(\lambda)}{\delta \lambda_k^t} = z_k^t - \sum_{i \in I} x_{ik}^t + \sum_{j \in J} x_{kj}^t$$

Chega-se assim, através deste procedimento, numa estrutura hierárquica com três níveis.

No caso em que as funções custo de transporte forem lineares, a resolução de $(SP)_t$ pode ser obtida usando-se a decomposição de Dantzig-Wolfe, o método de Rosen, ou o algoritmo GUB (generalized Upper Bound). Este último é altamente atrativo por aproveitar muito bem a estrutura angular do problema (Figura 1.2).

4.2. Problema Mestre (PM)

O problema mestre (PM) é um problema cujas restrições são lineares.

No caso das funções custo de armazenagem serem lineares, (PM) torna-se um problema linear e pode ser resolvido por um método simplex. Como a cada iteração de (PM) são adicionadas em geral T restrições do tipo (27), o que acarreta infactibilidade, é interessante usar o método dual simplex para sua resolução.

Se as funções custo de armazenagem forem funções não lineares convexas, pode-se usar para a resolução de (PM) qualquer método de direções factíveis, como por exemplo um método de gradiente projetado ou o método de Frank-Wolfe, o qual foi utilizado neste trabalho.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

1. INTRODUÇÃO

Para se resolver o problema de transporte e armazenagem dinâmico, com funções custo de transporte e armazenagem estritamente convexas, desenvolveu-se um programa escrito na linguagem Fortran Estruturado^(*), o qual encontra-se implementado no computador PDP-10 da UNICAMP. Este programa está baseado no Método de Alocação de Recursos, que quando aplicado a um problema o decompõe através da manipulação matemática de projetar tal problema sobre o espaço das variáveis "complicantes" y , como já foi visto no Capítulo II.

Para a resolução do problema mestre optou-se pelo método de Frank-Wolfe (vide Apêndice). Este método mostrou-se adequado, primeiro porque as restrições de (PM) são lineares e segundo porque sua função objetiva só apresenta não linearidade nos custos de armazenagem. Os subproblemas são resolvidos pelo método dual clássico [5].

(*) Linguagem desenvolvida por Dalton Issao Seki. É uma linguagem estruturada, para o Fortran IV.

O critério de convergência utilizado foi em função dos valores ótimos do subproblema e do problema mestre, onde o primeiro gera um limitante superior (LS) e o segundo um limitante inferior (LI) do valor ótimo do problema.

Outros métodos poderiam ter sido usados tanto na resolução do problema mestre, como na dos subproblemas, entretanto não se buscou neste trabalho uma grande sofisticação a nível de eficiência computacional, mas sim mostrar a viabilidade de resolução de problemas, usando-se decomposição.

2. DIAGRAMA DE BLOCOS

O seguinte diagrama de blocos mostra uma sequência sintetizada, dos passos seguidos na elaboração do programa

$$\bar{y}^t, t \in T, \text{ solução inicial factível} \quad (1)$$

$$L=0, \quad \mu_L^t=0, \quad \lambda_L^t=0$$

$$L \leftarrow L + 1$$

$$\bar{z}^t + \bar{y}^t - \bar{y}^{t-1}$$

$$\mu_L^t + \mu_{L-1}^t \quad (2)$$

$$\lambda_L^t + \lambda_{L-1}^t, t \in T$$

Resolver o subproblema de transporte (SP)_t, t ∈ T, pelo método Dual Clássico:

$$\max_{\mu^t, \lambda^t} h(\mu^t, \lambda^t) = \min_{\bar{x}} L(\bar{x}^t, \mu_L^t, \lambda_L^t) \quad (3)$$

$$\bar{x}^t, \mu_L^t, \lambda_L^t \text{ solução}$$

$$v^t(\bar{z}^t) = h^t(\mu_L^t, \lambda_L^t), t \in T \quad (4)$$

$$LS = \sum_{t \in T} \left(\sum_{k \in K} g_k(\bar{y}_k^t) + v^t(\bar{z}^t) \right)$$

Resolver o problema mestre (PM) pelo método de Frank-Wolfe

$$\min_{\bar{y}, \sigma} \left\{ \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} g_k(\bar{y}_k^t) + \sigma^t \right\} \quad (5)$$

$$\text{s.a. } \bar{y}_k^t = \bar{y}_k^{t-1} - \lambda \left(\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik}^t + \sum_{k \in K} \bar{x}_{kj}^t \right)$$

$$\sigma^t \gg v^t(\bar{z}^t) - \mu_2^t (\bar{z}^t - \bar{z}^{t-1}), t \in T, \lambda=1, \dots, L$$

$$0 \leq \bar{y}_k^t \leq \bar{y}_k^0 \text{ conhecido, } k \in K, t \in T$$

$$\bar{y}^t, \sigma^t \text{ solução}$$

$$LI = \sum_{t \in T} \left(\sum_{k \in K} g_k(\bar{y}_k^t) + \sigma^t \right) \quad (6)$$

NÃO

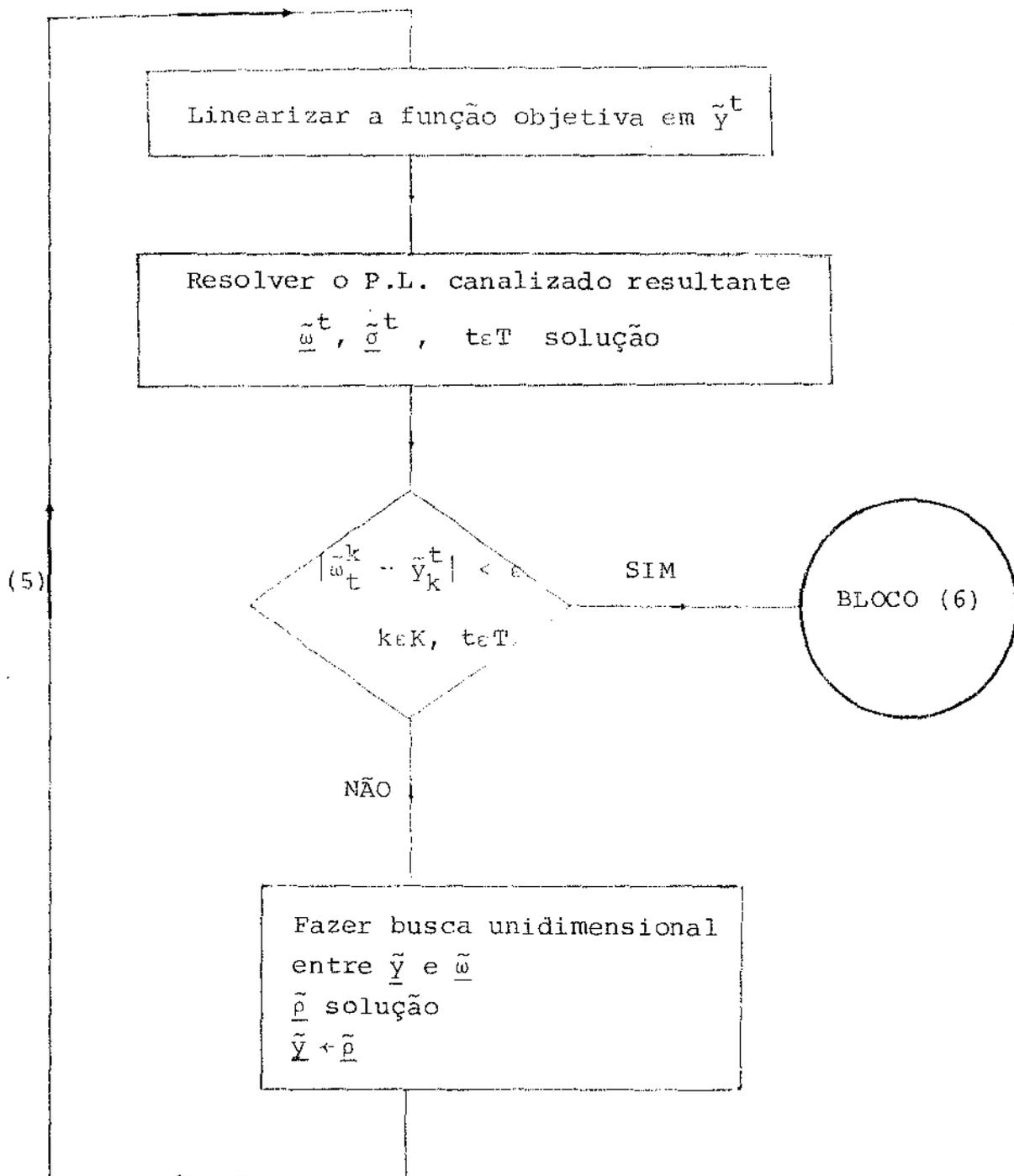
LS - LI > 0

SIM

$$\bar{x}^t, \bar{y}^t \text{ solução ótima}$$

$$t \in T$$

O bloco (5) que resolve o problema mestre pelo método de Frank-Wolfe pode ser mais detalhado como segue:



3. EXEMPLO

Para ilustração do método proposto resolveu-se um exemplo com dois centros produtores, dois centros consumidores, dois armazéns e dois períodos de tempo, com funções custo de transporte e armazenagem estritamente convexas.

As funções custo de transporte dos centros produtores i para os armazéns k são:

$$f_{11}(x) = 0.3x^2 + 0.7x$$

$$f_{12}(x) = 0.5x^2 + 0.8x$$

$$f_{21}(x) = 0.35x^2 + 0.6x$$

$$f_{22}(x) = 0.5x^2 + 0.6x$$

e as funções custo de transporte dos armazéns k para os centros consumidores j são:

$$f_{11}(x) = 0.3x^2 + 0.7x$$

$$f_{12}(x) = 0.5x^2 + 0.8x$$

$$f_{21}(x) = x^2 + x$$

$$f_{22}(x) = 0.5x^2 + 0.8x$$

A produção e a demanda em cada centro a cada período de tempo, as funções custo de armazenagem e a capacidade dos armazéns são dadas pelas seguintes tabelas:

CENTRO PRODUTOR	PRODUÇÃO	
	PERÍODO 1	PERÍODO 2
1	70	90
2	100	80

CENTRO CONSUMIDOR	DEMANDA	
	PERÍODO 1	PERÍODO 2
1	100	20
2	10	120

ARMAZÉM	FUNÇÃO CUSTO	CAPACIDADE MÁXIMA
	DE ARMAZENAGEM	
1	$y^2 + 2y$	100
2	$y^2 + 10y$	100

O estoque inicial foi considerado nulo.

O problema convergiu em seis iterações e a tabela abaixo mostra o comportamento, iteração por iteração, do método proposto.

ITERAÇÃO	VALOR DO SUBPROBLEMA (LS)	VALOR DO PROBLEMA MESTRE (LI)
1	17501.89	16546.69
2	16882.63	16834.97
3	16824.14	16821.60
4	16822.14	16921.60
5	16821.82	16821.73
6	16821.77	16821.75

A coluna do meio da tabela acima aponta os valores ótimos do subproblema que são limitantes superiores (LS) do problema global e a última coluna os valores ótimos do problema mestre resolvido em seguida.

4. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Na formulação aqui apresentada do problema de transporte e armazenagem dinâmico foram consideradas capacidades finitas de armazenamento, enquanto os fluxos de transporte na rede não foram limitados. Entretanto é possível considerar-se também capacidades finitas de transporte. A dificuldade que essa limitação acarreta é de que fixando-se uma política de armazenagem factível, não seja encontrada uma solução factível para o problema de transporte. Porém é possível desenvolver uma heurística no sentido de factibilizar a política de armazenagem mediante a política de transporte.

Outra extensão possível para o problema é a de considerar multiprodutos, o que pode ser feito sem grandes dificuldades adicionais. Nesse caso os armazéns passariam a ser concorridos pelos diversos produtos no tempo e a restrição de capacidade em cada armazém seria uma somatória das quantidades armazenadas de cada produto, em cada período de tempo, e a política de armazenagem a cada iteração do problema seria determinada também em função dos multiplicadores associados à essas restrições.

O problema de transporte e armazenagem dinâmico foi analisado neste trabalho. Este tipo de formulação têm aplicações em

problemas onde a oferta e demanda de matéria apresenta oscilações acentuadas no tempo. É o que ocorre em problemas de escoamento de safras agrícolas.

A manipulação tradicional de converter o problema num equivalente estático encontra dificuldades quando a dimensão do sistema é grande ou quando os custos de transporte e estocagem não são lineares.

Através do uso das técnicas de decomposição (primal e dual) conseguiu-se um método que permite resolver problemas de grande porte mesmo na presença de funções de custo não lineares - (convexas).

APÊNDICEALGORÍTIMO DE FRANK-WOLFE

Seja o problema

$$\begin{aligned} \min f(x) & & (1) \\ \text{s.a } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $f(x)$ é uma função de classe C^1 .

O método de Frank-Wolfe, a partir de um ponto factível x^k , aproxima $f(\cdot)$ por Taylor até 1.ª ordem sobre esse ponto, obtendo o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min f(x^k) + \nabla f(x^k) (y^k - x^k) \\ \text{s.a } Ay^k &= b & (2) \\ y^k &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $\nabla f(x^k)$ é o vetor gradiente calculado em x^k e os termos $f(x^k)$ e $\nabla f(x^k)x^k$ são constantes, então o problema (2) fica:

$$\begin{aligned}
 & \min \nabla f(x^k) \cdot y^k \\
 & \text{s.a } Ay^k = b \\
 & \quad y^k \gg 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Seja \hat{y}^k uma solução ótima de (3), define-se então uma direção de busca $d^k = \hat{y}^k - x^k$, a partir da qual se calcula um novo ponto factível $x^{k+1} = x^k + \alpha d^k$, onde α é determinado pela resolução do problema de busca unidimensional

$$\min_{0 < \alpha < 1} f(x^k + \alpha d^k)
 \tag{4}$$

A sequência de pontos $[x^0, x^1, \dots, x_k, \dots]$ gerada pelo algoritmo, converge para x^* , que é a solução ótima de (1) [6].

A eficiência de um método desse tipo está ligada diretamente com a qualidade das aproximações lineares da função objetiva não-linear, ou seja a convergência do algoritmo deverá ser melhor tanto quanto a função objetiva seja próxima da linear. Além disso, existem as restrições, assim a linearidade que se pretende é função da posição relativa que ocupa o subconjunto de soluções factíveis definido pelo conjunto de restrições, as

sim como é função do "tamanho" desse subconjunto. Na Figura A estão representados quatro conjuntos de restrições e as curvas de nível de uma função convexa, que tentam elucidar os aspectos levantados.

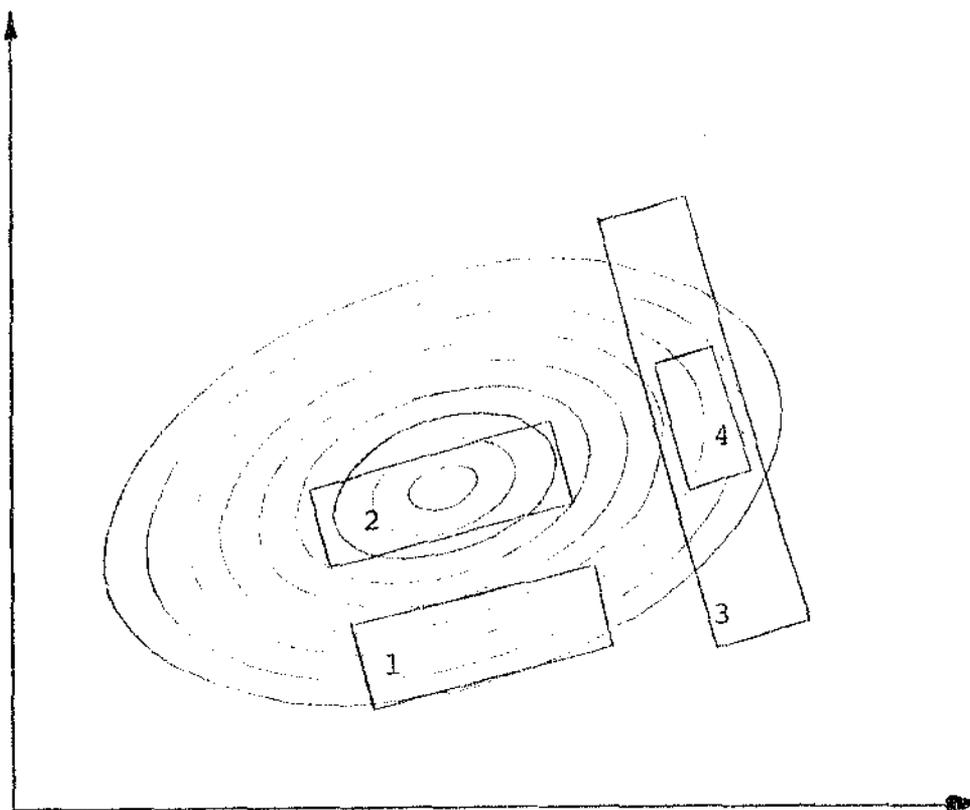


Figura A

Fica claro que uma aproximação linear da função objetiva é muito melhor sobre o conjunto 1 do que sobre o 2, mostrando que a proximidade do centro piora a aproximação. O mesmo ocorre em relação a 3 e 4. O último, por ser mais restrito, dá uma aproximação mais realista do que o primeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 A.M. GEOFFRION, "Elements of Large-Scale Mathematical Programming", R-481-PR, RAND Corporation, Novembro, 1969.
- 2 _____, "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications Oriented Development", in Perspectives on Optimization, Ed. Geoffrion, Addison-Wesley, pp 65-101, 1972.
- 3 _____, "Primal Resource - Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems", Working Paper 141, The RAND Corporation, 1968.
- 4 L.S. LASDSON, "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan, 1970.
- 5 S. SOARES FILHO, "Programação Matemática de Grande Porte : Uma Aplicação à Sistemas Hidrotérmicos de Potência", Tese de Doutorado, FEC - UNICAMP, 1978.
- 6 W.I. ZANGWILL, "Nonlinear Programming: A Unified Approach", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1969.