

mt
MAXIMALIDADE DOS GRUPOS TRIANGULARES

mt
CERIS MARIA RODRIGUES DE ANDRADE

mt
ORIENTADOR

PROF.DR. NELO DA SILVA ALLAN

x
Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação da Universidade Esta-
dual de Campinas como requisito par-
cial para obtenção do título de Mes-
tre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Funda-
ção de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Campinas, outubro de 1979

mt
Orientador
mt

A Ademir e
Alexandre

Agradeço:

Ao Prof. Nelo da Silva Allan pela proposta do presente trabalho, e pela segura orientação na elaboração do mesmo.

Aos professores e colegas pelos incentivos e ensinamentos.

A FAPESP, pelo apoio financeiro, o qual tornou possível a realização deste trabalho.

ÍNDICE

Notações	1
Introdução	11

CAPÍTULO I

TRANSFORMAÇÕES LINEARES.

1.1. A transformação linear	1
1.2. Os pontos fixos da transformação linear	12
1.3. Geometria das transformações	16
1.4. Os três tipos de transformações do $SL_2(\mathbb{R})$	41

CAPÍTULO II

GEOMETRIA NÃO-EUCLIDEANA.

2.1. Comprimento de arco e área N.E.	47
2.2. Retas N.E. e Polígonos N.E.	52

CAPÍTULO III

REGIÕES FUNDAMENTAIS.

3.1. Grupo Fuchsiano	67
3.2. Região Fundamental de um grupo Fuchsiano	72
3.3. Região de Dirichlet	75
3.4. A medida da região fundamental	84

CAPÍTULO IV

GRUPOS TRIANGULARES

4.1. Definições	90
4.2. Maximalidade	94
Caso Normal	103
Caso Não-Normal	108
BIBLIOGRAFIA	117

NOTAÇÕES

$\text{Im}[q]$	parte imaginária do complexo q .
\overline{OP}	segmento de reta de O a P .
$\overline{\overline{OP}}$	comprimento do segmento de reta \overline{OP} .
\overleftrightarrow{OP}	reta que passa pelos pontos O e P .
\overrightarrow{OP}	semi-reta com origem O e que passa por P .
$\arg(z)$	argumento do complexo z .
F°	interior de F .
∂F	fronteira de F .
$p q$	p divide q .
\mathbb{R}	eixo real.
$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	eixo real estendido.
\mathbb{C}	plano complexo.
$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	plano complexo estendido.
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros.
\mathbb{Z}^+	conjunto dos inteiros não negativos.
■	final de demonstração.

INTRODUÇÃO

O interesse pelo problema da maximalidade de grupos fuchsianos começou com Siegel na década dos 30; ele mostrou que $SL_2(\mathbb{Z})$ é maximal. Mais recentemente, em 1963, Greenberg estudou a maximalidade de grupos fuchsianos; ele mostrou que "em geral" os grupos fuchsianos, se procurarmos extensões de índice finito, são maximais. Greenberg apresentou também uma lista de pares de grupos $\{\Gamma_0, \Gamma\}$ com Γ_0 contendo Γ como subgrupo de índice finito. Mais tarde, Maclachlan tratou de grupos de segunda espécie. Recentemente Singerman exibiu um critério para que um tal grupo Γ_0 contivesse um Γ como subgrupo de índice finito e determinou todos estes pares $\{\Gamma_0, \Gamma\}$. Nosso propósito é, seguindo Singerman, determinar todos os pares $\{\Gamma_0, \Gamma\}$ com Γ triangular e de domínio fundamental compacto.

Para atingirmos este objetivo, no capítulo I inicialmente introduzimos as transformações lineares e analisamos a relação que há entre elas e o grupo de matrizes. Classificamos o $SL_2(\mathbb{R})$ de acordo com o conjunto dos pontos fixos de suas transformações, em três classes de transformações: hiperbólicas, parabólicas e elípticas.

No capítulo II, definimos alguns elementos da geometria não-euclídeana necessários ao nosso trabalho, tais como:

comprimento de arco, área, retas e polígonos não-euclidianos. Vimos que o comprimento de arco e área não-euclidianos são invariantes sob todas as transformações do $SL_2(\mathbb{R})$. Demonstramos também o teorema de Gauss-Bonnet, o qual nos dá a área não euclidiana de um polígono não-euclidiano de n lados.

Introduzimos no capítulo III os grupos fuchsianos, isto é, subgrupos discretos do $SL_2(\mathbb{R})$. Em seguida, vimos quais as condições que deve satisfazer um conjunto fechado do plano hiperbólico, para que seja uma região fundamental de um grupo fuchsiano. Vimos também, que todo grupo fuchsiano admite uma região fundamental. Ainda neste capítulo demonstramos alguns resultados importantes sobre a medida da região fundamental, entre eles os teoremas de Siegel; e a importância destes resultados, está no fato de que a medida de uma região fundamental, depende somente do grupo fuchsiano e não da particular região fundamental considerada.

Finalmente no capítulo IV, introduzimos os grupos triangulares e estudamos a maximalidade destes. Um grupo triangular Γ é maximal, se não existe outro grupo triangular contendo Γ como subgrupo de índice finito. Seguindo Singerman vimos que, dado um grupo triangular Γ_0 , a existência de um subgrupo Γ com índice finito depende da existência de um grupo de permutações apropriado. Através das condições dadas por Singerman, pudemos determinar a lista completa dos pares $\{\Gamma_0, \Gamma\}$ com $\Gamma \subset \Gamma_0$ e Γ_0, Γ triangulares, no caso em que a inclusão é normal, e no caso em que a inclusão é não-normal.

CAPÍTULO I

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo estudaremos as transformações lineares do ponto de vista tanto geométrico como analítico. Inicialmente introduziremos as transformações lineares e exigiremos do leitor certa familiaridade com conceitos básicos da teoria de Variável Complexa. Analisaremos a relação que há entre as transformações lineares e o grupo de matrizes; veremos que o $PSL_2(\mathbb{R})$ nada mais é que o grupo das transformações lineares que levam o semi-plano superior nele mesmo. Sob o ponto de vista geométrico estudaremos inversão em um círculo, sua construção geométrica e a relação que há entre inversões e transformações lineares.

Finalmente, faremos a classificação das transformações do $SL_2(\mathbb{R})$ de acordo com o conjunto dos pontos fixos de suas transformações. Tal classificação irá dividir o $SL_2(\mathbb{R})$ em três classes de transformações: hiperbólicas, parabólicas e elípticas.

1.1. A TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Neste parágrafo vamos introduzir as transformações lineares, e estabelecer relações com o grupo de matrizes.

Consideraremos neste parágrafo transformações definidas no plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e tomando valores em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

DEFINIÇÃO 1.1.1 : A transformação

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

onde a, b, c, d são constantes e $ad - bc \neq 0$, é chamada uma transformação linear.

OBSERVAÇÃO : A transformação linear assim definida pode levar a uma certa confusão com o conceito de transformação linear da teoria de espaço vetorial. O nome mais adequado deveria ser transformação linear projetiva, porém, por um abuso de linguagem e, seguindo a nomenclatura usual dos autores do campo, continuaremos a chamá-la de transformação linear.

À transformação linear (1), associamos a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e o $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ chamamos de determinante de T , o qual denotamos por $\det(T)$.

Se $ad - bc = 0$, a equação (1) reduz-se a $T(z) =$ constante, e este caso é sem interesse. Vamos então nos limitar aos casos onde $\det(T) \neq 0$. Podemos ainda sempre supor $\det(T) = 1$, pois multiplicando a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ por $\pm \sqrt{ad - bc}$

não alteramos T .

O segundo membro de (1) é uma função analítica de z se $z \neq \frac{-d}{c}$. A transformação linear tem, portanto, a propriedade de conformalidade; isto é, quando uma figura é transformada, ângulos são preservados em medida e sinal. A transformação linear é também biunívoca.

Veremos agora que toda transformação biunívoca e conforme do plano em si mesmo é linear. Para a demonstração do teorema seguinte, do qual segue este resultado como corolário, utilizaremos alguns resultados da teoria de Variável Complexa.

TEOREMA 1.1.2 : Se, exceto para um número finito de pontos, o plano é levado sobre uma região do plano por uma função biunívoca e conforme, esta função é uma transformação linear.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $z' = f(z)$ tal função, e sejam $q_1, q_2, \dots, q_n (= \infty)$ os pontos excetuados. Como $f(z)$ é conforme, ela é analítica exceto nos pontos isolados q_1, \dots, q_n .

Agora q_1 não é uma singularidade essencial. De fato, se q_1 fosse uma singularidade essencial a função tomaria certos valores um número infinito de vezes na vizinhança do ponto, e isto contraria o fato de $f(z)$ ser biunívoca ([A.1]).

Portanto $f(z)$ ou permanece finita na vizinhança de q_i ; e portanto é analítica aí se propriamente definida; ou tem um polo. Logo $f(z)$ é uma função racional de z .

Uma função racional que não é constante toma todo valor m vezes, onde m é o número de seus polos. Já que $f(z)$ é biunívoca, ela tem um polo simples de primeira ordem.

Se o polo está em um ponto finito q_k podemos escrever:

$$z' = \frac{A_1}{z - q_k} + A_0 = \frac{A_0 z + A_1 - A_0 q_k}{z - q_k}, \quad A_1 \neq 0.$$

Se o polo está no infinito, nós temos:

$$z' = A_1 z + A_0, \quad A_1 \neq 0.$$

Em qualquer caso a função é linear. ■

COROLÁRIO 1 : Toda transformação biunívoca e conforme do plano em si mesmo é linear.

DEMONSTRAÇÃO :

Não definimos conformalidade quando um dos pontos envolvidos está no infinito. Então exceto para o ponto $z = \infty$ e o ponto que é levado em $z' = \infty$, a transformação é conforme. Aplicando o teorema 1.1.2. obtemos o resultado desejado. ■

Vamos agora relacionar as transformações lineares com o grupo de matrizes.

DEFINIÇÕES 1.1.3.:

$$(1) \quad G = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\}$$
$$(2) \quad GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$$

OBSERVAÇÃO : O conjunto de todas as aplicações biunívocas de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em si mesmo, com a operação de composição, tem uma estrutura de grupo. Daí segue-se que um conjunto de transformações lineares, finito ou infinito, é um grupo se:

a) a inversa de cada transformação do conjunto é uma transformação do conjunto;

b) a composição de duas quaisquer transformações do conjunto é uma transformação do conjunto.

Claramente $GL_2(\mathbb{C})$ é um grupo, pois o produto de matrizes não-singulares é uma matriz não-singular e o mesmo acontece com os inversos.

TEOREMA 1.1.4. : G é um grupo.

DEMONSTRAÇÃO

De fato, basta verificarmos a) e b).

Seja $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ uma transformação qualquer de

G. A inversa de T , $T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$, tem determinante

$(-d) \cdot (-a) - bc = ad - bc \neq 0$, logo é uma transformação de G.

Sejam $T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$ e $T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$ duas

transformações quaisquer de G, então $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ e $a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$. A composição $T = T_1 \circ T_2$, que é dada por

$$T(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + c_2d_1)z + (b_2c_1 + d_1d_2)}, \text{ tem determinante}$$

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(b_2c_1 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + c_2d_1) = \\ = (a_1d_1 - b_1c_1)(c_2d_2 - b_2c_2) \neq 0.$$

Logo T é uma transformação de G. Portanto G é um grupo. *

TEOREMA 1.1.5. : A aplicação $\psi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G$ de

finida por $\psi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \frac{az + b}{cz + d}$ é um homomorfismo cujo núcleo consiste de todas as matrizes escalares $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, mostremos inicialmente que ψ é um homomorfismo.

Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ duas matrizes quaisquer de $GL_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \psi(M_1 \cdot M_2)(z) &= \psi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)(z) = \\ &= \psi\left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}\right)(z) = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} = \\ &= \frac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_2 z + d_2} = \\ &= \frac{c_1 a_2 z + c_1 b_2 + d_1 c_2 z + d_1 d_2}{c_2 z + d_2} = \\ &= \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1} = \\ &= \psi(M_1)\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \\ &= \psi(M_1) \circ \psi(M_2)(z) \end{aligned}$$

Portanto ψ é um homomorfismo.

Vamos agora determinar o núcleo da ψ .

Seja I a transformação identidade $I(z) = z$ e

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz qualquer, então, para todo z temos:

$$\psi(M)(z) = I(z) \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

mas, uma função polinomial é zero se e somente se todos coeficientes são nulos, logo: $c=b=0$ e $a=d$.

Então o núcleo da ψ consiste das matrizes escalares $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

DEFINIÇÃO 1.1.6 : $SL_2(\mathbb{C}) = \{M \in GL_2(\mathbb{C}) : \det(M)=1\}$

Verifica-se facilmente que $SL_2(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$, pois $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$ quaisquer que sejam as matrizes M_1 e M_2 .

TEOREMA 1.1.7 : $\psi(SL_2(\mathbb{C})) = G$.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, trivialmente temos que $\psi(SL_2(\mathbb{C})) \subseteq G$.

Resta mostrarmos que $G \subseteq \psi(SL_2(\mathbb{C}))$.

Seja então $T \in G$ uma transformação linear qualquer dada por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Tomando $M = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \\ \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} & \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} \end{pmatrix}$ temos que :

$$\det(M) = 1 \quad \text{e} \quad \psi(M)(z) = \frac{az+b}{cz+d} = T(z) .$$

Portanto para todo $T \in G$, existe $M \in SL_2(\mathbb{C})$ tal que $T = \psi(M)$. Logo $T \in \psi(SL_2(\mathbb{C}))$ e assim $G \subseteq \psi(SL_2(\mathbb{C}))$. ■

TEOREMA 1.1.8 : O núcleo do homomorfismo ψ em $SL_2(\mathbb{C})$ é $\{\pm I\}$.

DEMONSTRAÇÃO :

Já mostramos que o núcleo da ψ em $GL_2(\mathbb{C})$ é dado por $N_G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$.

Para determinarmos o núcleo da ψ em $SL_2(\mathbb{C})$, temos que exigir que as matrizes de N_G tenham determinante igual a 1. Então :

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 .$$

Logo o núcleo da ψ em $SL_2(\mathbb{C})$ é $N_S = \{\pm I\}$. ■

OBSERVAÇÃO : Do teorema 1.1.7 temos que ψ é um homomorfismo sobrejetor.

TEOREMA 1.1.9 : $SL_2(\mathbb{C})/N_S \approx GL_2(\mathbb{C})/N_G$.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, do teorema 1.1.5 segue-se que :

$$G \approx GL_2(\mathbb{C})/N_G .$$

No teorema 1.1.7 e 1.1.8 segue-se que :

$$G \approx SL_2(\mathbb{C})/N_S .$$

Daí temos o nosso resultado. ■

DEFINIÇÃO 1.1.10 : Chamamos o grupo $SL_2(\mathbb{C})/(\pm I)$ de grupo linear projetivo, e denotamos por $PSL_2(\mathbb{C})$.

DEFINIÇÃO 1.1.11 :

- (1) $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$
- (2) $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ M \in GL_2(\mathbb{R}) : \det(M) = 1 \right\}$
- (3) $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/(\pm I)$

OBSERVAÇÃO : O grupo $SL_2(\mathbb{R})$ tem uma topologia natural, isto é, a topologia induzida pelo conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes reais $M_2(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^4$. Com esta topologia o $SL_2(\mathbb{R})$ é um grupo topológico no sentido que as operações produto e inverso são contínuas.

Consideraremos o $PSL_2(\mathbb{R})$ como grupo topológico quociente de $SL_2(\mathbb{R})$ pela relação de equivalência determinada por $\pm I$.

1.2. OS PONTOS FIXOS DA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Os pontos fixos da transformação linear $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ são obtidos resolvendo a equação:

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ou} \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (2)$$

TEOREMA 1.2.1 : A única transformação linear com mais de dois pontos fixos é a transformação identidade.

DEMONSTRAÇÃO :

Para resolvermos a equação (2) temos que analisar alguns casos:

1) $c \neq 0$

Seja $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. Fazendo $ad-bc=1$ temos:
 $\Delta = (a+d)^2 - 4$.

i) Se $\Delta \neq 0$ a equação (2) tem as raízes:

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a-d \pm \sqrt{\Delta}}{2c}$$

ii) Se $\Delta = 0$, isto é, se $a+d = \pm 2$, a equação (2)

tem apenas uma raiz: $\xi = \frac{a-d}{2c}$.

2) $c = 0$

Se $c = 0$ devemos ter $a \neq 0$ e $d \neq 0$ pois de outro modo o determinante seria zero.

i) $a \neq d$. Neste caso, resolvendo a equação (2) encontramos a raiz $\frac{b}{d-a}$, e, como ∞ também é ponto fixo, temos 2 pontos fixos:

$$\xi_1 = \frac{b}{d-a} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \infty.$$

ii) $a = d$. A transformação toma a forma: $T(z) = z + b'$, que é uma translação, e, neste caso apenas o ∞ é ponto fixo.

Em qualquer caso não existe mais que dois pontos fixos, a menos que a equação (2) seja identicamente nula, isto é: $c = 0$, $d = a$ e $b = 0$. Então a transformação toma a forma $T(z) = z$.

Portanto, a única transformação com mais de dois pontos fixos é a identidade. ■

Uma outra maneira de enunciar o teorema acima seria: "Qualquer transformação linear diferente da identidade tem no máximo dois pontos fixos".

TEOREMA 1.2.2 : Existe uma única transformação linear que leva três pontos distintos z_1, z_2, z_3 em três pontos distintos z'_1, z'_2, z'_3 .

DEMONSTRAÇÃO :

Provaremos inicialmente a existência.

Se nenhum dos seis valores é infinito, consideramos a transformação definida por:

$$\frac{(z' - z'_1)(z'_2 - z'_3)}{(z' - z'_2)(z'_1 - z'_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)} \quad (3)$$

Esta equação é da forma (1) quando resolvida para z' em termos de z . Ela obviamente transforma z_1, z_2, z_3 em z'_1, z'_2, z'_3 ; pois ambos os membros de (3) são iguais a zero quando $z = z_1$, $z' = z'_1$; eles são ambos infinito quando $z = z_2$, $z' = z'_2$; e são ambos iguais a 1 quando $z = z_3$, $z' = z'_3$.

Se um dos pontos dados está no infinito temos que substituir o membro de (3) no qual esse ponto ocorre.

Se $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$ ou $z_3 = \infty$, substituímos o segundo membro de (3) por:

$$-\frac{z_2 - z_3}{z - z_2}, \quad -\frac{z - z_1}{z_1 - z_3}, \quad \text{ou} \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{respectiva-}$$

mente.

Se $z'_1 = \infty$, $z'_2 = \infty$ ou $z'_3 = \infty$, substituímos o primeiro membro de (3) por:

$$-\frac{z'_2 - z'_3}{z' - z'_2}, \quad -\frac{z' - z'_1}{z'_1 - z'_3}, \quad \text{ou} \quad \frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} \quad \text{respectiva-}$$

mente.

Logo em qualquer caso existe uma transformação linear com a propriedade desejada.

Vamos agora mostrar a unicidade.

Suponhamos que existem duas transformações T e S que levam z_1, z_2, z_3 em z'_1, z'_2, z'_3 .

Consideremos a transformação $T^{-1}S$. Temos que

$$T^{-1}S(z_1) = T^{-1}(z'_1) = z_1$$

$$T^{-1}S(z_2) = z_2$$

$$T^{-1}S(z_3) = z_3$$

Portanto $T^{-1}S$ tem mais que dois pontos fixos, e pelo teorema anterior temos que $T^{-1}S = I$ e daí $S = T$. ■

1.3. GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

Inicialmente vamos ver, em que se torna o círculo e a reta, quando a transformação linear (1) é aplicada. Antes pois, vejamos como é a equação geral de uma reta e de um círculo em termos de z .

A equação:

$$A(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + C = 0 \quad (4)$$

onde as constantes são reais, é a equação geral de um círculo se $A \neq 0$, e é a equação geral de uma reta se $A = 0$ e b_1 e b_2 não são ambos nulos.

Seja $z = x + iy$ então $\bar{z} = x - iy$. Obtemos então:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2}(\bar{z} - z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Substituindo na equação (4) obtemos:

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0.$$

Pondo $B = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)$, esta toma a seguinte forma:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \quad (5)$$

onde A e C são reais. A equação (5) é a equação geral de um círculo se $A \neq 0$ e de uma reta se $A = 0$, $B \neq 0$.

TEOREMA 1.3.1 : Seja L um círculo ou uma reta. Então a imagem de L por uma transformação linear ou é um círculo ou é uma reta.

DEMONSTRAÇÃO :

A equação de L é dada pela equação (5) .

Seja $w = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação linear qualquer. Sua

inversa é dada por : $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$; e $\bar{z} = \frac{-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{w}-\bar{a}}$

Substituindo z e \bar{z} na equação (5) temos:

$$A \frac{(-dw+b)(-\bar{d}\bar{w}+\bar{b})}{(cw-a)(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})} + B \frac{(-dw+b)}{(cw-a)} + \bar{B} \frac{(-\bar{d}\bar{w}+\bar{b})}{(\bar{c}\bar{w}-\bar{a})} + C = 0 \quad (6)$$

$$A(-dw+b)(-\bar{d}\bar{w}+\bar{b}) + B(-dw+b)(\bar{c}\bar{w}-\bar{a}) + \bar{B}(-\bar{d}\bar{w}+\bar{b})(cw-a) + C(cw-a)(\bar{c}\bar{w}-\bar{a}) = 0$$

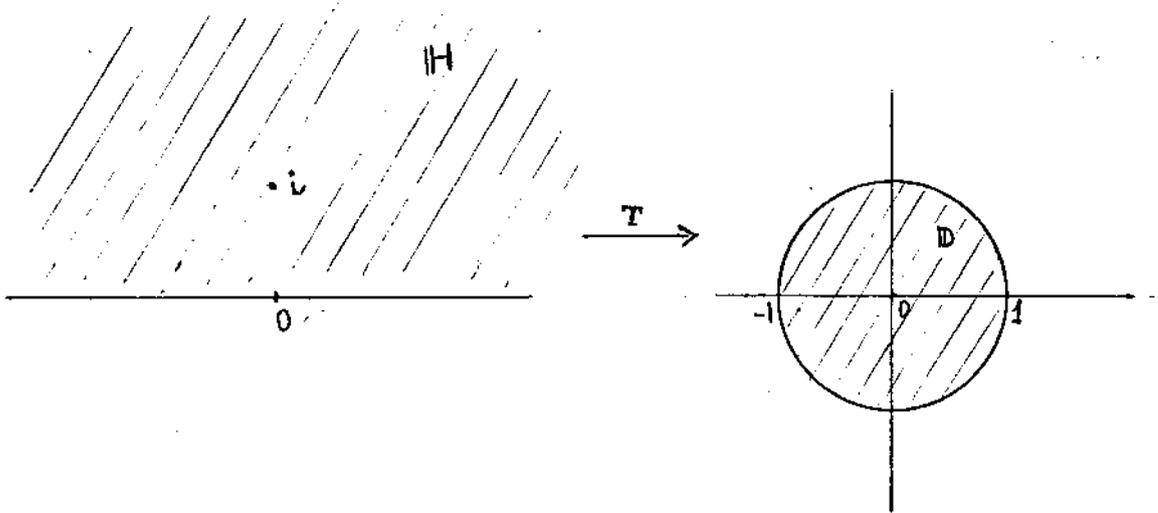
$$\begin{aligned} & (Add - B\bar{c}d - \bar{B}c\bar{d} + Cc\bar{c})w\bar{w} + \\ & + (-A\bar{b}d + B\bar{a}d + \bar{B}\bar{b}c - C\bar{a}c)w + \\ & + (-A\bar{b}\bar{d} + \bar{B}a\bar{d} + B\bar{b}\bar{c} - Ca\bar{c})\bar{w} + \\ & + (Ab\bar{b} - B\bar{a}b - \bar{B}a\bar{b} + Ca\bar{a}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Na equação (7) , o coeficiente de $w\bar{w}$ é real, o termo constante também é real, e o coeficiente de \bar{w} é o conjugado do coeficiente de w . Portanto a equação (7) é a equação de um círculo ou uma reta. ■

Sejam $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior que também chamaremos de *plano hiperbólico* e $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco aberto unitário de centro na origem.

PROPOSIÇÃO 1.3.2 : A transformação $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ leva \mathbb{H} em \mathbb{D} .

DEMONSTRAÇÃO :



Vamos determinar a transformação que leva os pontos $0, 1, \infty$ em $-1, 0, 1$ respectivamente.

Pelo teorema 1.2.2 a transformação é dada por:

$$\frac{(z' - z'_1)(z'_2 - z'_3)}{(z' - z'_2)(z'_1 - z'_3)} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Substituindo então os valores temos:

$$\frac{(z' - (-1))(0 - 1)}{(z' - 0)(-1 - 1)} = \frac{z - 0}{z - i} \Rightarrow z' = \frac{z - i}{z + i}$$

Devido a unicidade temos que $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ leva \mathbb{H}

em \mathbb{D} . ■

Calculemos agora o subgrupo de G que leva \mathbb{H} em \mathbb{H} . Antes vejamos o que acontece com uma transformação linear que leva \mathbb{H} em \mathbb{H} .

PROPOSIÇÃO 1.3.3 : Uma transformação $g \in G$ leva \mathbb{H} em \mathbb{H} se e somente se satisfaz as condições:

- (a) $g(\text{eixo real}) = \text{eixo real}$
- (b) $\text{Im}[g(i)] > 0$

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, suponhamos inicialmente que g leva \mathbb{H} em \mathbb{H} .

A condição (b) é trivialmente satisfeita devido a definição de \mathbb{H} , e a continuidade de g .

Para mostrarmos (a), seja x um real qualquer finito ou infinito. Temos que:

$g(x)$ não está em \mathbb{H} , pois caso contrário, como a inversa de g , g^{-1} , também leva \mathbb{H} em \mathbb{H} , teríamos que x está em \mathbb{H} o que é uma contradição.

$g(x)$ não está no semi-plano inferior $-\mathbb{H}$, pois caso contrário, teríamos que, pela continuidade de g , pontos de \mathbb{H} vizinhos a x seriam levados fora de \mathbb{H} , o que é uma contradição.

Portanto $g(x)$ só pode ser real.

Reciprocamente suponhamos satisfeitas as condições (a) e (b) por uma transformação $g \in G$.

Pela condição (b) , $g(i)$ está em \mathbb{H} . Seja P um outro ponto qualquer de \mathbb{H} .

Suponhamos que $g(P)$ não está em \mathbb{H} .

Se $g(P)$ está no eixo real obtemos um absurdo pois g é bijetora e $g(\text{eixo real}) = \text{eixo real}$.

Se $g(P)$ está no semi-plano inferior então o segmento \overline{Pi} (que vai do ponto P até o ponto i) terá como imagem uma curva que tem um ponto extremo em \mathbb{H} , que é $g(i)$, e o outro ponto extremo $g(P)$ em $-\mathbb{H}$. Pelo Teorema de Jordan esta curva corta o eixo real em um ponto. Seja Q este ponto, então $g^{-1}(Q)$ está no segmento \overline{Pi} , por construção, e no eixo real por (a) , o que dá uma contradição.

Logo $g(P)$ está em \mathbb{H} e assim g leva \mathbb{H} em \mathbb{H} . ■

OBSERVAÇÃO : Prova-se facilmente que o conjunto $G_1 = \{g \in G : g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ é um subgrupo de G .

TEOREMA 1.3.4 : O subgrupo G_1 de G que leva \mathbb{H} em \mathbb{H} é isomorfo ao $PSL_2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO :

Consideremos o homomorfismo ψ do teorema 1.1.5 e tomemos a restrição de ψ a $SL_2(\mathbb{R})$ que denotaremos por ψ_S .
Então $\psi_S : SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow G$.

Agora mostremos que $\psi_S(SL_2(\mathbb{R})) = G_1$.

Inicialmente vamos mostrar que $\psi_S(SL_2(\mathbb{R})) \subseteq G_1$.

Seja $g = \frac{az+b}{cz+d} \in \psi_S(SL_2(\mathbb{R}))$ então $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

e $ad - bc = 1$. Temos que mostrar que g leva \mathbb{H} em \mathbb{H} . Para isto basta mostrarmos que: $g(\text{eixo real}) = \text{eixo real}$ e $\text{Im}[g(i)] > 0$.

Como a, b, c, d são reais, trivialmente temos que se z é real, $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é real.

Agora $g(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right) + \left(\frac{ad-bc}{c^2+d^2} \right)i$, logo

$$\text{Im}[g(i)] = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0.$$

Portanto $g \in G_1$.

Resta mostrar agora que $G_1 \subseteq \psi_S(SL_2(\mathbb{R}))$.

Seja g uma transformação qualquer de G_1 . Temos que encontrar uma matriz $M \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g = \psi_S(M)$.

Agora $g \in G_1$ implica pela proposição 1.3.3 que: $g(\text{eixo real}) = \text{eixo real}$ e

$$\text{Im}[g(i)] > 0.$$

Consideremos agora os dois casos:

1º) $g(\infty) = \infty$ ou

2º) $g(\infty) = r < \infty$.

1º) Se $g(\infty) = \infty$ temos que $g(z) = az + b$ com $a \neq 0$.

Desde que z real implica $g(z) = az + b$ real temos que a e b são reais, pois $g(0) = b$ e $g(1) = a + b$.

Desde que $\text{Im}[g(i)] > 0$ temos que $a > 0$.

$$\text{Seja então } M = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a}} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

Notemos que $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ pois $\frac{a}{\sqrt{a}}$, $\frac{b}{\sqrt{a}}$ e $\frac{1}{\sqrt{a}}$ são todos reais e $\det(M) = 1$, e, que $g = \psi_S(M)$.

2º) Se $g(\infty) = r$, consideramos a transformação $h \in \psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ dada por $h(z) = \frac{1}{r - z}$. Notemos que $h(r) = \infty$.

Fazendo a composição de h com g , observemos que $h \circ g(\infty) = \infty$.

Já mostramos que $\psi(\text{SL}_2(\mathbb{R})) \subseteq G_1$ então $h \in G_1$. Como G_1 é um subgrupo temos que $hg \in G_1$.

Pelo 1º caso temos que: $hg \in \psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$. Como $h \in \psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ e $\psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ é um grupo temos que $g \in \psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$.

Em qualquer caso temos que $g \in \psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$.

Portanto $\psi_S(\text{SL}_2(\mathbb{R})) = G_1$.

Agora consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\psi_S} & G \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{SL}_2(\mathbb{R}) / (\pm I) & & \end{array}$$

Pelo teorema dos isomorfismos temos que:

$$SL_2(\mathbb{R}) / (\pm I) \approx \psi_S(SL_2(\mathbb{R})) = G_1$$

Desde que $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / (\pm I)$ temos que:

$$PSL_2(\mathbb{R}) \approx G_1 . \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO : Este teorema que acabamos de demonstrar nos permite identificar o $PSL_2(\mathbb{R})$ com G_1 , isto é, dizer que o $PSL_2(\mathbb{R})$ é constituído das transformações lineares que levam \mathbb{H} em \mathbb{H} . Desde que uma transformação linear é conforme, contínua e tem inversa também contínua, podemos ainda dizer que, o $PSL_2(\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo de todos os homeomorfismos conformes do semi-plano superior \mathbb{H} .

TEOREMA 1.3.5 : A transformação $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$, com

$a\bar{a} - c\bar{c} = 1$ leva o círculo unitário nele mesmo e \mathbb{D} em \mathbb{D} .

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, seja Q o círculo unitário.

A equação de Q é : $|z|=1$ ou $z\bar{z} - 1 = 0$.

Aplicando a transformação linear $w = \frac{az + b}{cz + d}$, e através

da equação (7) , Q é transformado em :

$$(d\bar{d} - c\bar{c})w\bar{w} + (-b\bar{d} + a\bar{c})w + (-b\bar{d} + a\bar{c})\bar{w} + b\bar{b} - a\bar{a} = 0 .$$

Para que Q seja transformado em Q , devemos ter :

$$1) -\bar{b}d + a\bar{c} = 0$$

$$2) d\bar{d} - c\bar{c} = a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0 .$$

$$\text{De 1) temos: } \bar{b}d = a\bar{c} \Rightarrow b\bar{d} = a\bar{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{\bar{d}} = \lambda$$

$$\text{então : } b = \lambda\bar{c} \quad \text{e} \quad a = \lambda\bar{d} .$$

Substituindo em 2) temos:

$$d\bar{d} - c\bar{c} = \lambda\bar{d}\lambda\bar{d} - \lambda\bar{c}\lambda\bar{c} = \lambda\bar{\lambda}(\bar{d}d - \bar{c}c) \neq 0 \Rightarrow \lambda\bar{\lambda} = 1 .$$

Temos ainda: $ad - bc = 1$, substituindo a e b obtemos: $\lambda\bar{d}d - \lambda\bar{c}c = 1 \Rightarrow \lambda(\bar{d}d - \bar{c}c) = 1$.

Como $\bar{d}d - \bar{c}c$ é real temos que λ é real.

Portanto $\lambda = \pm 1$.

O sinal de λ depende do sinal de $\bar{d}d - \bar{c}c$.

Se D é levado em D , o ponto $\frac{-d}{c}$, que é levado no ∞ , deve estar fora do círculo e assim $\left| \frac{-d}{c} \right| > 1$.

$$\left| \frac{-d}{c} \right| > 1 \Rightarrow \frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{d}{c} > 1 \Rightarrow \bar{d}d > \bar{c}c \Rightarrow \bar{d}d - \bar{c}c > 0 .$$

Desta forma $\lambda = 1$. Portanto $b = \bar{c}$ e $d = \bar{a}$.

Logo $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ leva Q em Q e D em D . ■

OBSERVAÇÃO : O grupo de transformações de D é :

$$G_1^* = \left\{ \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} : a, c \in \mathbb{C} \text{ e } a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}$$

e $G_1^* = W^{-1} G_1 W$ onde W é a transformação linear $W(z) = \frac{z-1}{z+1}$

que leva H sobre D .

DEFINIÇÃO 1.3.6 : Dizemos que um grupo de transformações é *transitivo* em um conjunto se, dados dois elementos quaisquer deste conjunto, existe uma transformação que leva um elemento no outro.

PROPOSIÇÃO 1.3.7 : $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo em \mathbb{H} .

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, sejam $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ e $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ dois pontos quaisquer em \mathbb{H} .

A transformação linear:

$$T(z) = \frac{\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} z + \frac{(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}}{\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}}$$

leva z_1 em z_2 , e, a matriz :

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} & \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \\ 0 & \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

Portanto $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo em \mathbb{H} . ■

OBSERVAÇÃO : A ação do $SL_2(\mathbb{R})$ em \mathbb{H} com a topologia euclidiana é contínua.

Seja \mathcal{L} o conjunto de todas as retas perpendiculares ao eixo real e de todos os círculos ortogonais ao eixo real.

OBSERVAÇÃO : Dizemos que, um círculo é ortogonal ao eixo real, se a tangente ao círculo no ponto em que este intercepta o eixo real é perpendicular ao eixo real.

Mostraremos agora que o $SL_2(\mathbb{R})$ age em \mathcal{L} e, em seguida que a ação é transitiva.

PROPOSIÇÃO 1.3.8 : Se $l \in \mathcal{L}$ e $g \in SL_2(\mathbb{R})$ então $gl \in \mathcal{L}$.

DEMONSTRAÇÃO :

Com efeito, se $l \in \mathcal{L}$ temos que l é uma reta perpendicular ao eixo real ou um círculo ortogonal ao eixo real.

Se $g \in SL_2(\mathbb{R})$ temos pelo teorema 1.3.1 que, gl ou é uma reta ou é um círculo. Já que, a transformação linear sendo conforme, preserva ângulos, temos que gl ou é uma reta perpendicular ao eixo real ou um círculo ortogonal ao eixo real. Portanto $gl \in \mathcal{L}$. ■

Antes de mostrarmos que a ação do $SL_2(\mathbb{R})$ em \mathcal{L} é transitiva, precisamos da definição de órbita de um ponto em um grupo de transformações.

DEFINIÇÃO 1.3.9 : Chamamos de órbita de um ponto p em um grupo de transformações Γ ao conjunto $\Gamma p = \{gp : g \in \Gamma\}$.

OBSERVAÇÃO : Podemos também definir órbita de um par de pontos da seguinte forma: "a órbita do par de pontos (p,q)

em Γ é o conjunto $\Gamma(p,q) = \{(gp, gq) : g \in \Gamma\}$.

TEOREMA 1.3.10 : $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo em \mathcal{L} .

DEMONSTRAÇÃO :

Inicialmente mostraremos que $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo no conjunto dos pares de pontos distintos do eixo real estendido. Para isto basta provarmos que a órbita do par $(0, \infty)$ inclui to dos os pares.

Se consideramos o par (p,q) , onde $p > q$ são finitos, temos que a transformação linear $T(z) = \frac{z-p}{z-q} \in SL_2(\mathbb{R})$ leva o par (p,q) em $(0, \infty)$. Assim $T^{-1}(0, \infty) = (p,q)$. Logo pertence à órbita de $(0, \infty)$.

Se tomamos o par (p, ∞) onde p é finito, a transformação $S(z) = z+p \in SL_2(\mathbb{R})$ leva $(0, \infty)$ em (p, ∞) e deste modo o par (p, ∞) também está na órbita de $(0, \infty)$.

Como todos os pares de pontos distintos de $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ são ou de forma (p,q) com p e q finitos, ou da forma (p, ∞) com p finito, temos que todos os pares estão na órbita de $(0, \infty)$. E isto mostra que dados dois pares quaisquer, sempre existe uma transformação que leva um no outro. Portanto $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo no conjunto dos pares de pontos distintos do eixo real estendido.

Observemos que um círculo ortogonal ao eixo real tem um par de pontos distintos finitos (p,q) no eixo real, e uma reta perpendicular ao eixo real tem um par (p, ∞) no eixo real,

sendo que pode ser considerado como um círculo de raio infinito. Observemos também que, dois pontos distintos finitos e a condição de perpendicularismo ao eixo real determinam um único círculo ortogonal ao eixo real, e, no caso de um ponto ser infinito, uma única reta perpendicular ao eixo real.

Devido a estas observações e ao fato do $SL_2(\mathbb{R})$ ser transitivo no conjunto dos pares de pontos distintos do eixo real estendido, temos que $SL_2(\mathbb{R})$ é transitivo em \mathcal{L} . ■

Existe uma íntima relação entre a transformação linear de variável complexa e a transformação geométrica conhecida como "inversão em um círculo".

Consideremos um círculo de centro O e raio r que chamaremos de $O(r)$. Seja P um ponto qualquer do plano.

DEFINIÇÃO 1.3.11 : O ponto "inverso de P com respeito ao círculo $O(r)$ " será o ponto P_1 , na semi-reta \overrightarrow{OP} , tal que $\overline{OP_1} \cdot \overline{OP} = r^2$.

Através de uma simples construção podemos encontrar geometricamente o ponto inverso de um ponto dado.

Primeiramente consideraremos o caso em que P está fora de $O(r)$.

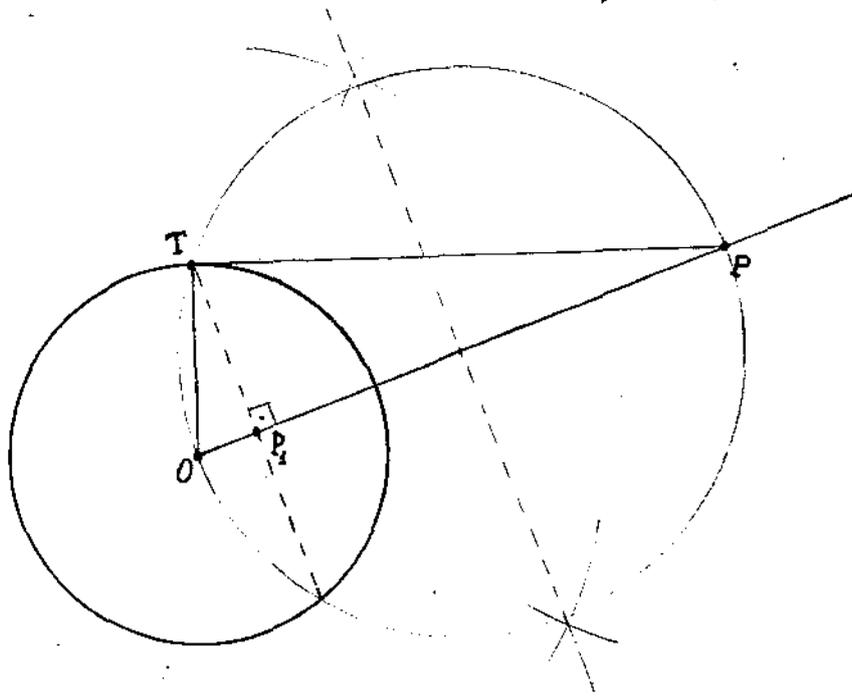


fig. (1)

Traçamos inicialmente a semi-reta \overrightarrow{OP} e em seguida o círculo de diâmetro \overline{OP} . A intersecção deste círculo como $O(r)$ dá dois pontos. Seja T um destes pontos. Quando T é projetado na semi-reta \overrightarrow{OP} dá o ponto P_1 , o "inverso de P com respeito ao círculo $O(r)$ ".

Para provarmos que realmente P_1 é o inverso de P , notemos que os triângulos $\Delta(OTP)$ e $\Delta(OP_1T)$ são semelhantes e daí $\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}}$, assim obtemos $\overline{OP_1} \cdot \overline{OP} = \overline{OT}^2 = r^2$ que é o resultado desejado.

Agora consideremos o caso em que P está no interior de $O(r)$.

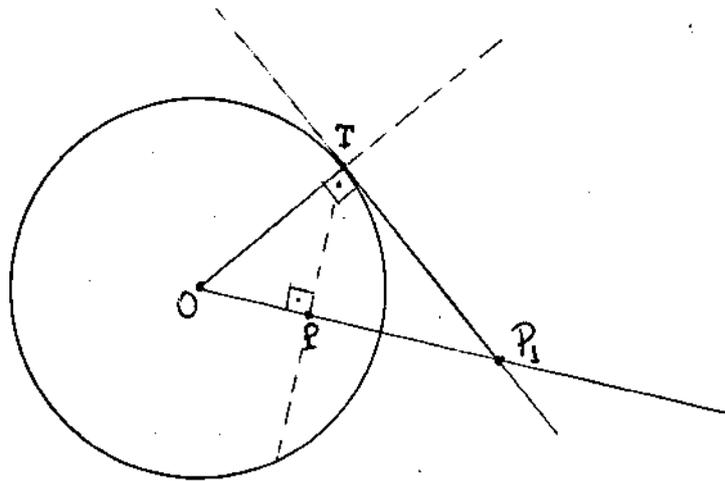


fig. (2)

Inicialmente traçamos a semi-reta \overrightarrow{OP} e em seguida a perpendicular a \overrightarrow{OP} passando por P . Um ponto de intersecção desta com o círculo $O(r)$ chamaremos de T . Agora, traçando a tangente ao círculo $O(r)$ no ponto T , onde esta interceptar a semi-reta \overrightarrow{OP} teremos o ponto P_1 , o "inverso de P com respeito ao círculo $O(r)$ ".

A prova de que P_1 é o "inverso de P com respeito a $O(r)$ " é como no caso anterior, baseada na semelhança de triângulos.

Notemos agora que se o ponto P pertence ao círculo $O(r)$, o ponto inverso de P com respeito a $O(r)$ é o próprio P .

PROPOSIÇÃO 1.3.12 : P é um ponto fixo de uma inversão se e somente se ele está no círculo de inversão.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, suponhamos que P é um ponto fixo de uma inversão. Então $\overline{OP} \cdot \overline{OP} = r^2$ logo $\overline{OP} = r$ de onde concluímos que P pertence a $O(r)$.

Reciprocamente suponhamos que P pertence a $O(r)$. Então $\overline{OP} = r$ e assim $\overline{OP} \cdot \overline{OP} = r^2$. Portanto P é um ponto fixo pela inversão. ■

OBSERVAÇÃO : O inverso do ponto O , o centro do círculo de inversão, não está definido, e, nenhum ponto tem O como sua imagem. Mas, para que a inversão seja uma transformação do plano estendido, tomemos ∞ como sendo o inverso de O e O o inverso de ∞ .

PROPOSIÇÃO 1.3.13 : Seja P_1 o inverso de P com respeito a $O(r)$. Qualquer círculo passando por P e P_1 é ortogonal a $O(r)$.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja C um círculo qualquer passando por P e P_1 . Traçando a tangente \overline{OT} a C sendo T ponto de tangência temos:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP}_1 \cdot \overline{OP} = r^2 \text{ e daí } \overline{OT} = r.$$

Logo T pertence ao círculo $O(r)$.

Como os raios em T são perpendiculares temos que os círculos C e $O(r)$ são ortogonais. ■

Agora vamos determinar uma expressão analítica para a inversão em um círculo.

Sejam P e P_1 pontos inversos com respeito ao círculo $O(r)$ e sejam P, P_1 e O os pontos z, z_1 e k no diagrama de Argand.

A condição: $\overline{OP_1} \cdot \overline{OP} = r^2$ nos dá a equação:

$$|(z_1 - k)(z - k)| = r^2 \quad (a)$$

e o fato de que os pontos O, P, P_1 são colineares dá:

$$\arg(z_1 - k) = \arg(z - k) \quad (b)$$

Desde que $\arg(z - k) = -\arg(\bar{z} - \bar{k})$, as duas equações (a) e (b) são satisfeitas se e somente se:

$$(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) = r^2 \quad (8)$$

Esta é a equação da inversão em termos de variáveis complexas.

Podemos também achar a forma explícita para inversão.

Seja $O(r)$ o círculo dado pela equação (5) :

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \quad \text{onde } A \text{ e } C \text{ são reais e}$$

$A \neq 0$, a qual também pode ser escrita na forma:

$$\left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right) \left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2}$$

onde o centro e o raio são facilmente determinados. O centro é

$$-\frac{\bar{B}}{A} \quad \text{e o raio} \quad \sqrt{\frac{B\bar{B} - AC}{A^2}}$$

Substituindo estes valores na equação (8) temos:

$$\left(z_1 + \frac{\bar{B}}{A}\right) \left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2}$$

Simplificando obtemos:

$$Az_1\bar{z} + Bz_1 + \bar{B}z + C = 0 \quad (9)$$

Temos então uma relação entre z e seu inverso z_1 obtida da equação de $O(r)$ se substituimos nela z por z_1 .

Resolvendo (9) temos a forma explícita da inversão:

$$z_1 = \frac{-\bar{B}z - C}{Az + B} \quad (10)$$

OBSERVAÇÃO : Podemos provar como no teorema 1.3.1 que se l e l' e σ é uma inversão então $\sigma l \in l'$.

Quando $A=0$ temos que (5) é a equação de uma reta e, ainda podemos usar (9) e (10) para a inversão. Quando A tende a zero, P e P_1 atingem posições tais que $O(r)$ é a mediatriz do segmento $\overline{PP_1}$. A inversão então torna-se uma reflexão na reta $O(r)$. Para mostrarmos isto analiticamente, seja z_2 um ponto de $O(r)$. Usando (10) temos:

$$\left|z_2 - z_1\right| = \left|\frac{-\bar{B}z_2 - C}{B} + \frac{\bar{B}z + C}{B}\right| = \left|\frac{\bar{B}}{B}(z - z_2)\right| = \left|z_2 - z\right|$$

Logo todos os pontos de $O(r)$ são equidistantes de P e P_1 .

TEOREMA 1.3.14 : A transformação linear leva dois pontos que são inversos um do outro com respeito a um círculo, em dois pontos que são inversos um do outro com respeito ao círculo transformado.

DEMONSTRAÇÃO :

Com efeito, sejam z e z_1 pontos inversos com respeito ao círculo dado por (5), então (9) é satisfeita.

Sejam w e w_1 os transformados de z e z_1 pela transformação (1), então :

$$z_1 = \frac{-dw_1 + b}{cw_1 - a}, \quad \bar{z} = \frac{-\bar{d}\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{w} - \bar{a}}$$

Substituindo em (9) temos:

$$A \frac{(-dw_1 + b)(-\bar{d}\bar{w} + \bar{b})}{(cw_1 - a)(\bar{c}\bar{w} - \bar{a})} + B \frac{(-dw_1 + b)}{(cw_1 - a)} + \bar{B} \frac{(-\bar{d}\bar{w} + \bar{b})}{(\bar{c}\bar{w} - \bar{a})} + C = 0$$

Esta equação é a mesma que (6) exceto que w é substituído por w_1 ; portanto, simplificando obtemos (7) com w substituído por w_1 . Esta é a condição para que w e w_1 sejam pontos inversos com respeito ao círculo transformado (7). ■

TEOREMA 1.3.15 : A composição de um número par de inversões é equivalente a uma transformação linear.

DEMONSTRAÇÃO :

Já vimos que a forma explícita da inversão com respeito ao círculo $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ é $z_1 = \frac{-\bar{B}\bar{z} - C}{A\bar{z} + B}$ e, esta pode ser escrita como uma composição de duas transformações:

$$z_2 = \bar{z} \quad , \quad z_1 = \frac{-\bar{B}z_2 - C}{Az_2 + B}$$

A primeira é uma reflexão do eixo real e a segunda é uma transformação linear.

A primeira preserva a medida dos ângulos mas inverte seus sinais, a segunda não faz alteração. Logo a inversão é inversamente conforme. Isto segue também do fato que o segundo membro de (10) é uma função analítica de \bar{z} .

De (10) vemos também que a cada z corresponde um único z_1 , e, por outro lado, a cada z_1 corresponde um único z . Portanto a inversão é biunívoca.

Desde que a inversão é uma transformação do plano biunívoca, que preserva a medida do ângulo mas troca seu sinal, temos que, o resultado da composição de duas inversões ou de um número par de inversões, é uma transformação biunívoca que preserva medida e sinal dos ângulos. Logo é biunívoca e conforme. Pelo teorema 1.1.2 temos que esta é uma transformação linear. ■

Provaremos também que qualquer transformação linear é constituída de uma sucessão de um número par de inversões. Mas, antes vamos analisar algumas das mais simples transformações lineares, e achar pares de inversões a que elas são equivalentes.

1. TRANSLAÇÃO : $T(z) = z + b$

Por esta transformação, cada ponto do plano é transla
dado paralelamente a reta $\langle \overline{Ob} \rangle$ (fig. (3)), à distância igual
ao comprimento do segmento \overline{Ob} .

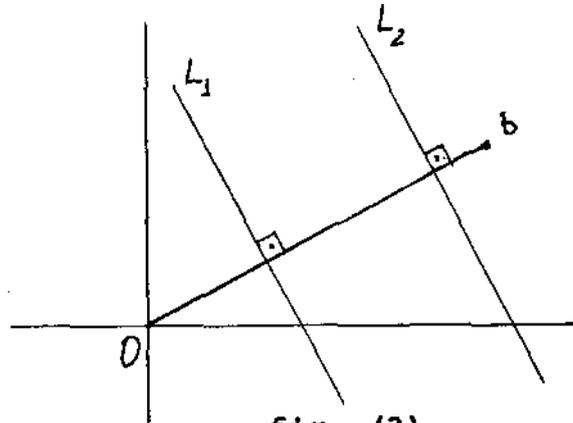


fig. (3)

Sejam L_1 e L_2 duas retas perpendiculares à reta $\langle \overline{Ob} \rangle$,
sendo que uma dista da outra a metade do comprimento de \overline{Ob} .

A reflexão em L_1 seguida pela reflexão em L_2 , é
equivalente à translação dada. De fato, pelo teorema 1.2.2 bas
ta observarmos como três pontos são transformados. Notemos que
os pontos de L_1 são mantidos fixos pela primeira reflexão e
são transladados da maneira desejada pela segunda reflexão.

2. ROTAÇÃO : $T(z) = e^{i\theta} z$

Cada ponto sofre uma rotação sobre a origem de um ân-
gulo θ .

Sejam L_1 e L_2 duas retas passando pela origem tal
que o ângulo entre elas é $\frac{\theta}{2}$ (fig. (4)).

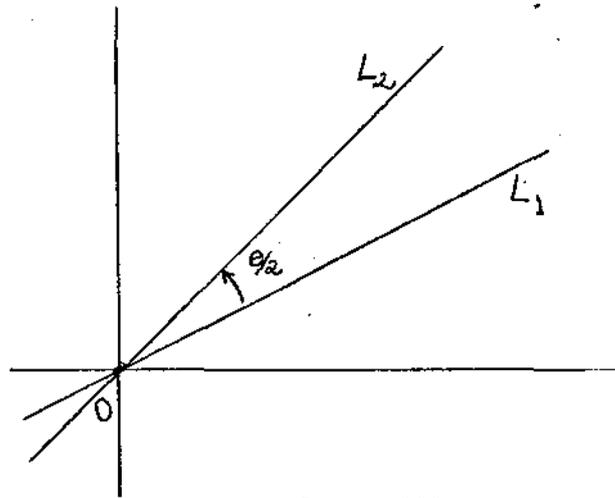


fig. (4)

Um reflexão em L_1 , seguida por uma reflexão em L_2 , claramente dá uma rotação aos pontos de L_1 como queremos. Portanto as duas reflexões são equivalentes à rotação desejada.

3. HOMOTETIA DA ORIGEM : $T(z) = Az$, $A > 0$.

Cada ponto é transformado em um ponto com o mesmo argumento, mas com o módulo multiplicado por A . Se $A < 1$, temos uma contração em torno da origem.

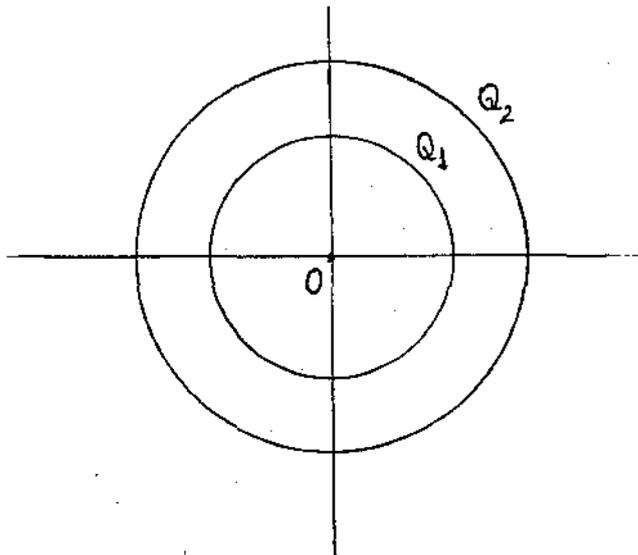


fig. (5)

Esta transformação é equivalente a uma inversão em um círculo Q_1 com centro na origem e raio r_1 (fig. (5)) seguida de uma inversão em um círculo Q_2 com centro na origem e raio $r_2 = r_1\sqrt{A}$. De fato, se z_1, z' são os sucessivos transformados de z , temos: $z_1 \cdot \bar{z} = r_1^2$, $z' \cdot \bar{z}_1 = r_1^2 A$;

portanto:
$$z' = \frac{r_1^2 A}{\bar{z}_1} = r_1^2 \cdot A \frac{z}{r_1^2} = Az.$$

4. A TRANSFORMAÇÃO: $T(z) = \frac{-1}{z}$

Esta transformação pode ser escrita da seguinte forma;

$$z_1 = -\bar{z}, \quad z' = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

E isto é uma reflexão no eixo imaginário, seguida por uma inversão no círculo unitário (fig. (6))

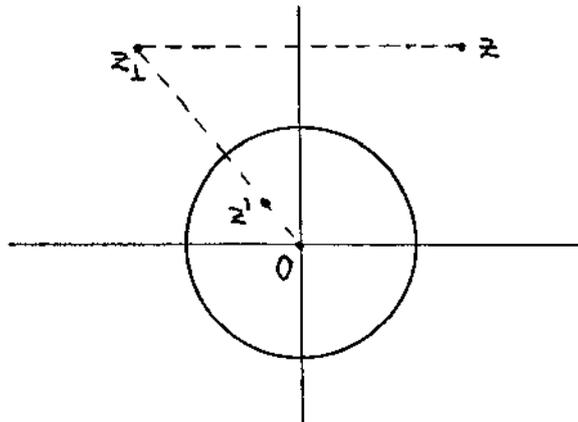


fig. (6)

Agora podemos demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA 1.3.16 : Qualquer transformação linear é equivalente à composição de um número par de inversões em círculos.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, seja a transformação linear: $z' = \frac{az + b}{cz + d}$

Se $c \neq 0$, podemos escrever:

$$z' - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = - \frac{1}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)}$$

supondo $ad - bc = 1$. Isto podemos escrever como a seguinte sequência de transformações:

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_3 = c^2 z_1, \quad z_4 = - \frac{1}{z_3}, \quad z' = z_4 + \frac{a}{c}$$

Já provamos que a primeira, terceira e quarta destas transformações, cada uma delas é equivalente a um par de inversões.

A segunda transformação : $z_3 = c^2 z_1$; pondo $c^2 = Ae^{i\theta}$, $A > 0$; pode ser separada em duas :

$$z_2 = e^{i\theta} z_1, \quad z_3 = A z_2$$

cada uma delas equivalente a um par de inversões.

Se $c = 0$, a transformação tem a forma: $z' = \alpha z + \beta$.

Pondo $\alpha = Ae^{i\theta}$, esta é equivalente à seguinte sequência:

$$z_1 = e^{i\theta} z, \quad z_2 = A z_1, \quad z' = z_2 + \beta$$

onde cada uma delas é equivalente a um par de inversões.

Assim fica provado o teorema. ■

1.4. OS TRÊS TIPOS DE TRANSFORMAÇÕES DO $SL_2(\mathbb{R})$

Vamos classificar o $SL_2(\mathbb{R})$ de acordo com o conjunto dos pontos fixos de suas transformações.

Para encontrarmos os pontos fixos da transformação:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad-bc=1$$

basta resolvermos a equação :

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Consideremos inicialmente $c \neq 0$.

Temos três possibilidades para as raízes desta equação do 2º grau :

- (i) Duas raízes reais e distintas.
- (ii) Uma raiz real.
- (iii) Duas raízes complexas conjugadas.

Vamos analisar cada uma das possibilidades:

CASO (i)

A transformação com dois pontos fixos reais e distintos recebe o nome de *hiperbólica*.

Notemos que qualquer transformação linear que leva ∞ no ∞ deve tomar a forma $w = kz + l$ e se também leva 0 no 0 então $l = 0$.

Seja T uma transformação hiperbólica com pontos fi-

xos p e q no $\mathbb{R}' \cup \{\infty\}$ com $p > q$ e $w = Tz$. Pondo

$$w_1 = \frac{w-p}{w-q} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{z-p}{z-q} \quad \text{temos que } w_1 = 0, \infty \text{ correspon}$$

de a $z_1 = 0, \infty$. Então a relação entre w_1 e z_1 toma a forma:

$$w_1 = k z_1 \tag{11}$$

Notemos que esta é uma transformação já conhecida, a saber, uma homotetia da origem.

CASO (ii)

A transformação com um ponto fixo real recebe o nome de *parabólica*.

Seja T uma transformação parabólica com um ponto fixo real p e $w = Tz$. Pondo

$$w_1 = \frac{1}{w-p} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{1}{z-p} \quad \text{temos que } w_1 = \infty \text{ cor-}$$

responde a $z_1 = \infty$. Então a relação entre w_1 e z_1 é da forma $w_1 = k z_1 + \ell$. Mas $k=1$ pois se $k \neq 1$ teríamos um segundo ponto fixo. Então a relação é :

$$w_1 = z_1 + \ell . \tag{12}$$

Notemos que (12) é uma translação.

CASO (iii)

A transformação com dois pontos fixos complexos conjugados recebe o nome de *elíptica*.

Seja T uma transformação elíptica com pontos fixos α e $\bar{\alpha}$. Suponhamos que α esteja em \mathbb{H} . Então $\bar{\alpha}$ está em $-\mathbb{H}$.
Pondo

$$w_1 = \frac{w - \alpha}{w - \bar{\alpha}} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad \text{temos que : } w_1 = 0, \infty$$

corresponde a $z_1 = 0, \infty$. Então a relação entre w_1 e z_1 toma a forma

$$w_1 = \lambda z_1$$

onde λ não é necessariamente real.

Como as transformações do $SL_2(\mathbb{R})$ levam o eixo real nele mesmo, temos que z real implica w real e se z e w são ambos reais temos:

$$\left| \frac{w - \alpha}{w - \bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right| = 1$$

Portanto $|\lambda| = 1$ e assim λ é da forma $e^{i\theta}$.

Então uma transformação elíptica pode ser escrita na forma :

$$w_1 = e^{i\theta} z_1 \tag{13}$$

Notemos que (13) é uma rotação.

Consideremos agora $c = 0$.

A transformação do $SL_2(\mathbb{R})$: $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ torna-se:

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{. Como } c = 0 \text{ temos que } d \neq 0 \text{ pois } ad = 1 \text{ .}$$

Então a transformação pode ser escrita na seguinte forma:

$$T(z) = a'z + b' \tag{14}$$

Esta transformação nada mais é que a composição de uma hiperbólica (a' é real) com uma parabólica.

O que acabamos de fazer prova o seguinte teorema :

TEOREMA 1.4.1 : Qualquer transformação do $SL_2(\mathbb{R})$ é conjugada a um dos três tipos:

Hiperbólica : $w = k z$ ($k > 0$)

Parabólica : $w = z + \ell$

Elíptica : $w = e^{i\theta} z$

OBSERVAÇÕES :

1) Notemos que somente a transformação elíptica tem um ponto fixo em \mathbb{H} .

2) Um grupo, que é gerado por uma transformação elíptica, é finito se e somente se o multiplicador é do tipo

$e^{\frac{i\pi a}{p}}$, onde a, p são inteiros relativamente primos, e, neste caso ele tem ordem $2p$. Caso contrário, pode se mostrar que o grupo gerado por uma transformação elíptica é denso em $|z|=1$.

TEOREMA 1.4.2 : Qualquer elemento de G_1 é produto de elementos do tipo :

(1) $w = kz$ ($k > 0$)

(2) $w = z \pm \ell$

(3) $w = -\frac{1}{z}$

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, as respectivas matrizes dos elementos (1), (2) e (3) acima são :

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \text{ onde } k = d^2, \begin{pmatrix} 1 & \pm l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

É suficiente provar que cada matriz de $SL_2(\mathbb{R})$ é produto de matrizes dos tipos acima. Seja então $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

Se $a \neq 0$ podemos escrever :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ac & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ac & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $a = 0$ então $bc = -1$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bd & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO : Toda transformação em $PSL_2(\mathbb{R})$ é produto de um número par de inversões em elementos do conjunto f .

DEMONSTRAÇÃO :

Com efeito, toda transformação em $PSL_2(\mathbb{R})$ é produto de transformação do tipo :

$$w = kz, \quad k > 0; \quad w = -\frac{1}{z} \quad \text{e} \quad w = z + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

e por 1.3.16. estas transformações são produtos de duas inversões em elementos de \mathcal{L} . ■

OBSERVAÇÃO : Seja $G(2)$ o grupo gerado por todas as inversões em elementos de \mathcal{L} . Então

$$[G(2) : \text{PSL}_2(\mathbb{R})] = 2$$

pois se tivermos duas quaisquer inversões de $G(2)$ seu produto está em $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

CAPÍTULO II

GEOMETRIA NÃO-EUCLIDEANA

Neste capítulo faremos um breve apanhado sobre geometria não-euclidiana (N.E.), definindo alguns elementos necessários ao nosso trabalho, tais como comprimento de arco, área e retas N.E. Os pontos da geometria N.E. são os pontos do semi-plano superior \mathbb{H} . Os pontos de eixo real chamamos de pontos no infinito ou pontos ideais.

Se tomarmos o modelo do disco D , os pontos da geometria N.E. serão os pontos do interior do disco e os pontos do círculo $|z|=1$ serão os pontos no infinito ou ideais.

Provaremos que o comprimento de arco e área N.E. são invariantes sob as transformações do $SL_2(\mathbb{R})$. Um outro resultado importante que também provaremos é o teorema de Gauss-Bonnet que nos dá a área N.E. de um polígono N.E. de n lados.

2.1. COMPRIMENTO DE ARCO E ÁREA N.E.

Inicialmente vamos definir comprimento de arco N.E. e área N.E., e, em seguida mostraremos que assim definidos, estes são invariantes sob todas as transformações do $SL_2(\mathbb{R})$.

DEFINIÇÃO 2.1.1 : O comprimento N.E. de um elemento de arco, ds , é dado por :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

DEFINIÇÃO 2.1.2 : O comprimento de arco N.E. de uma curva continuamente diferencial por partes C , de equação : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, é dado por :

$$l(C) = \int_C ds = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt$$

DEFINIÇÃO 2.1.3 : A área N.E. de um subconjunto mensurável E de H é dada por :

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dx \, dy}{y^2}$$

OBSERVAÇÃO : Às vezes é mais conveniente usar coordenadas polares (r, θ) , em vez de coordenadas cartesianas e as fórmulas acima tornam-se :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{d\theta^2}{\sin^2 \theta} \quad \text{e} \quad \mu(E) = \iint_E \frac{dr \, d\theta}{r \sin^2 \theta} .$$

TEOREMA 2.1.4 : O comprimento de arco e área N.E. são invariantes sob todas as transformações do $SL_2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO :

Se $c \neq 0$, a transformação: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ do $SL_2(\mathbb{R})$

pode ser escrita na seguinte forma:

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + \frac{d}{c})} \quad \text{ou ainda}$$

$$T(z) = k_1 - \frac{1}{p(z+k_2)} \quad \text{onde } k_1 = \frac{a}{c}, p = c^2 \text{ e } k_2 = \frac{d}{c}.$$

Notemos que k_1 , p e k_2 são reais e $p > 0$.

Podemos ainda escrever esta transformação em forma de composição: $T(z) = (W_1 U V W_2)(z)$ onde

$$W_2(z) = z + k_2, \quad V(z) = pz, \quad U(z) = \frac{-1}{z} \quad \text{e} \quad W_1(z) = z + k_1.$$

Observemos que:

(i) W_1 e W_2 são transformações parabólicas do tipo $w = z + k$ (k real), as quais são translações. Como cada translação desloca os pontos paralelamente ao eixo real, temos que deixa dx , dy e y inalterados. Portanto comprimento de arco e área N.E. são invariantes sob este tipo de transformação.

(ii) $V(z) = pz$ (p real e > 0) é uma transformação hiperbólica. Seja C uma curva qualquer e E um suconjunto qualquer então:

$$\ell(V(C)) = \int_C \frac{\sqrt{(pdx)^2 + (pdy)^2}}{py} = \int_C \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \ell(C)$$

$$\mu(V(E)) = \iint_E \frac{p dx \, p dy}{p^2 y^2} = \iint_E \frac{dx \cdot dy}{y^2} = \mu(E) .$$

Logo o comprimento de arco e área N.E. são invariantes sob este tipo de transformação.

$$(iii) \quad U_z = - \frac{1}{z}$$

Fazendo uma mudança para coordenados polares (r, θ) , obtemos:

$$U(r, \theta) = \left(\frac{1}{r}, \pi - \theta \right).$$

Substituindo nas fórmulas é facilmente visto que comprimento de arco e área N.E. são novamente invariantes.

Portanto temos que qualquer transformação do $SL_2(\mathbb{R})$ deixa invariante o comprimento de arco e área N.E. ■

OBSERVAÇÕES :

1) Em \mathbb{D} o correspondente comprimento de arco invariante é:

$$ds^2 = \frac{2^2(du^2 + dv^2)}{(1 - w\bar{w})^2}$$

onde $w = u + iv$. A verificação que o ds^2 é invariante pelo grupo de automorfismos de \mathbb{D} é similar, e a omitiremos.

2) Podemos verificar da mesma maneira acima que ds^2 é invariante pelo grupo $G(2)$ de todas as inversões em elementos de \mathbb{H} .

PROPOSIÇÃO 2.1.4 : A bola aberta não-euclideana de centro P e raio r :

$$B(P,r) = \{Q : d(P,Q) < r\}$$

é uma bola aberta euclideana, isto é, a topologia induzida pela métrica N.E. coincide com a topologia usual de \mathbb{H} .

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, basta mostrarmos que o círculo N.E. de centro P e raio r , $\{Q : d(P,Q) = r\}$, é um círculo euclideano. Como a transformação $z = \frac{-wi-1}{w-1}$ leva círculo de centro na origem e raio $r < 1$, em círculo de centro em i , é suficiente mostrarmos que em D todo círculo N.E. de centro na origem é euclideano.

No caso de D , o ds^2 em coordenadas polares fica:

$$ds^2 = 2^2 \frac{du^2 + dv^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{2^2(dr^2 + r^2d\theta^2)}{(1-r^2)^2}$$

Seja C um círculo N.E. em D com centro na origem O e raio r . Seja Q um ponto qualquer de C . O segmento \overline{OQ} tem equação $\theta = \text{constante}$, logo

$$\int ds = d(O,Q) = \int_0^r \frac{2dr}{1-r^2} = \log \left| \frac{1+r}{1-r} \right|$$

que é independente de θ . Assim o círculo N.E. de centro O e raio r coincide com o círculo euclideano de centro O e raio $\log \left| \frac{1+r}{1-r} \right|$.

2.2. RETAS N.E. E POLÍGONOS N.E.

Seja \mathcal{L} o conjunto definido no parágrafo 1.3 do capítulo 1. Vamos agora definir retas N.E.

DEFINIÇÃO 2.2.1 : Chamamos de *retas N.E.* à todas as intersecções dos elementos do conjunto \mathcal{L} com o semi-plano superior \mathbb{H} .

PROPOSIÇÃO 2.2.2 : As retas N.E. são levadas pelas mesmas pelas transformações do $SL_2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO :

Segue-se da proposição 1.3.7. ■

OVSERVAÇÃO : As retas N.E. têm equações :

$$A|z|^2 + Bx + C = 0 .$$

Existe uma única reta N.E. passando por dois pontos dados. De fato, sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ dois pontos quaisquer de \mathbb{H} .

Se $x_1 = x_2$ temos que a reta $x = x_1$ é a única reta N.E. que passa por z_1 e z_2 .

Se $x_1 \neq x_2$ temos que :

$$\begin{cases} A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + C = 0 \\ A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + C = 0 \end{cases}$$

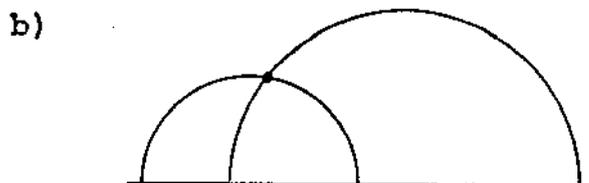
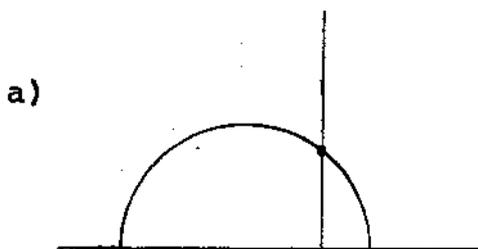
e desde que a matriz $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}$ tem determinante igual a

$x_1 - x_2 \neq 0$ temos que este sistema admite solução. Podemos supor um deles diferente de zero, digamos $A \neq 0$, e encontrar B e C em função de A . Deste modo vamos encontrar uma única equação de reta N.E. passando por z_1 e z_2 .

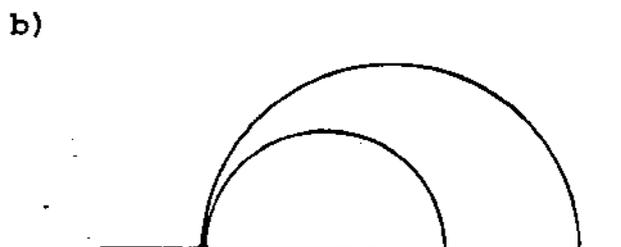
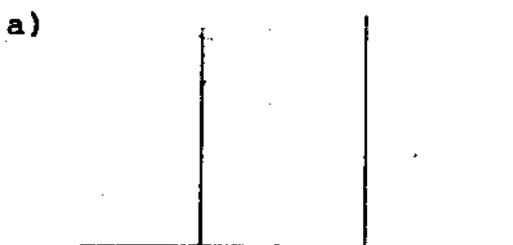
Notemos que as posições relativas de duas retas N.E. são: concorrentes, coincidentes ou paralelas, tais como na geometria euclídeana, exceto no caso do paralelismo. Na geometria N.E. duas retas paralelas podem se interceptar no ∞ e neste caso chamam-se retas paralelas de mesmo ponto ideal.

EXEMPLOS :

1) Retas Concorrentes :

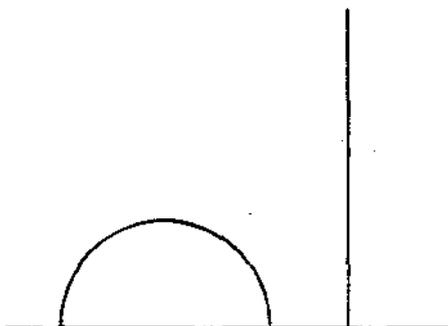


2) Retas paralelas de mesmo ponto ideal.

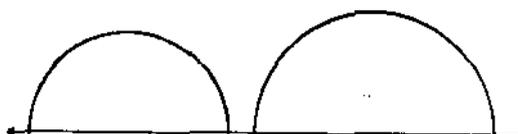


3) Retas Paralelas

a)



b)



DEFINIÇÃO 2.2.3 : Chamamos de *segmento de reta N.E.* ligando os pontos p e q , ao arco ligando p e q contido na reta N.E. que passa por estes dois pontos.

TEOREMA 2.2.4 : Se p e q são pontos de \mathbb{H} , se C_1 é o segmento de reta N.E. ligando p e q e se C_2 é qualquer outro arco diferenciável por partes ligando p e q e contido em \mathbb{H} , então :

$$l(C_2) \geq l(C_1)$$

DEMONSTRAÇÃO :

Podemos supor, sem perda de generalidade, que C_1 está contido no eixo imaginário, usando a transitividade do $SL_2(\mathbb{R})$ no conjunto das retas N.E. e a invariância do comprimento de arco pelo $SL_2(\mathbb{R})$.

Suponhamos que C_2 é parametrizada por :

$$x = x(t) , y = y(t) , t_0 < t < t_1$$

Seja $(x(t_0), y(t_0))$ o ponto $(0, k_0)$ e $(x(t_1), y(t_1))$

o ponto $(0, k_1)$. Então :

$$\begin{aligned} \ell(C_2) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt > \int_{t_0}^{t_1} \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt > \\ &> \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} (y(t)) dt = \left[\log y \right]_{k_0}^{k_1} = \log \left(\frac{k_1}{k_0} \right) = \ell(C_1) . \end{aligned}$$

Logo $\ell(C_2) \geq \ell(C_1)$. ■

OBSERVAÇÃO : A igualdade pode ocorrer somente se

$\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt}$ tem sinal constante, isto é, se $C_1 = C_2$.

DEFINIÇÃO 2.2.5 : O comprimento N.E. do segmento de reta N.E. ligando p e q é chamado a *distância N.E.*, $d(p, q)$, de p até q .

OBSERVAÇÃO : Notemos que $d(p, q)$ é uma distância em \mathbb{H} ; e para isto basta somente verificarmos a desigualdade triangular:

$$d(p, r) + d(r, q) \geq d(p, q)$$

Ela segue-se do teorema 2.2.4 se tomarmos C_2 como sendo a reta quebrada prq .

DEFINIÇÃO 2.2.6 : Um subconjunto E contido em \mathbb{H} é chamado *convexo* se o segmento de reta ligando dois pontos quaisquer de E está contido em E .

Se L é uma reta N.E. dada por:

$$\vartheta(z) = A|z|^2 + Bx + C = 0$$

então o conjunto $\{z \in \mathbb{H} : \vartheta(z) > 0\}$ (respectivamente $\vartheta(z) < 0$) é convexo, e é chamado um semi-plano aberto.

O conjunto $\{z \in \mathbb{H} : \vartheta(z) \geq 0\}$ (respectivamente $\vartheta(z) \leq 0$) também é convexo, e é chamado um semi-plano fechado.

TEOREMA 2.2.7 : Se p e q são pontos de \mathbb{H} então o conjunto:

- (i) $\{z : d(z,p) = d(z,q)\}$ é uma reta N.E.
- (ii) $\{z : d(z,p) < d(z,q)\}$ define um semi-plano aberto.
- (iii) $\{z : d(z,p) \leq d(z,q)\}$ define um semi-plano fechado.

DEMONSTRAÇÃO :

Observemos inicialmente que a reta euclideana pq ou é paralela ao eixo real, ou corta o eixo real em um ponto. Consideremos então os dois casos:

1º CASO : Suponhamos que a reta euclideana pq é paralela ao eixo real (fig. (7)). Então $\text{Im}(p) = \text{Im}(q)$. Deste modo p é a imagem de q pela reflexão em uma reta L orto-

gonal ao eixo real.

Se z é um ponto de L , temos pela simetria euclídeana que $d(z,p) = d(z,q)$.

Se z está no mesmo lado de L que p , a reta N.E. ligando z e q corta L em r digamos. Então:

$$\begin{aligned}d(q,z) &= d(q,r) + d(r,z) \\ &= d(p,r) + d(r,z) \\ &> d(p,z) \text{ pela desigualdade triangu-} \\ &\quad \text{lar.}\end{aligned}$$

Logo o conjunto $\{z : d(z,p) < d(z,q)\}$ define um semi-plano aberto.

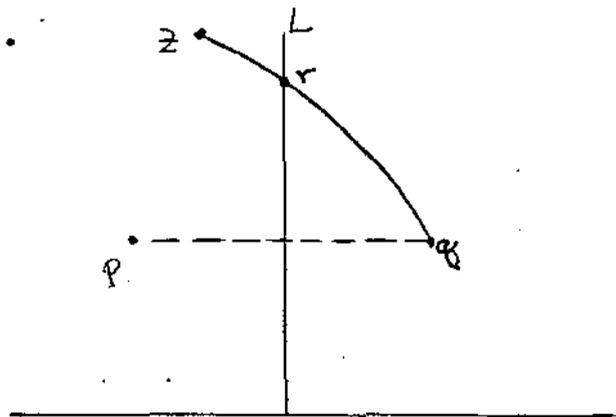


fig. (7)

2º CASO : Suponhamos que a reta euclídeana pq não é paralela ao eixo real, então ela corta o eixo real em um ponto O digamos. Seja L_1 o círculo com centro O e com p e q como pontos inversos. (fig. (8)) .

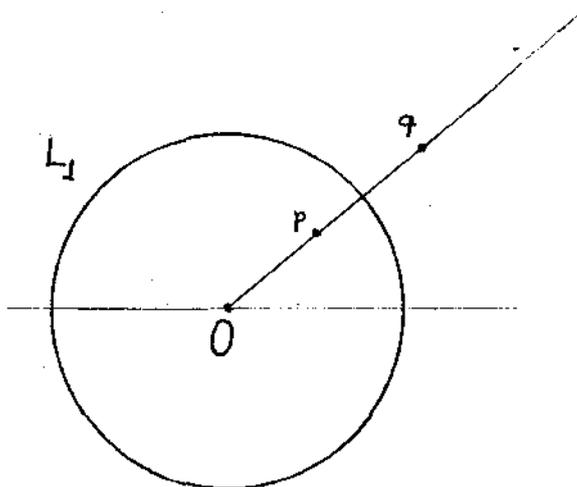


fig. (8)

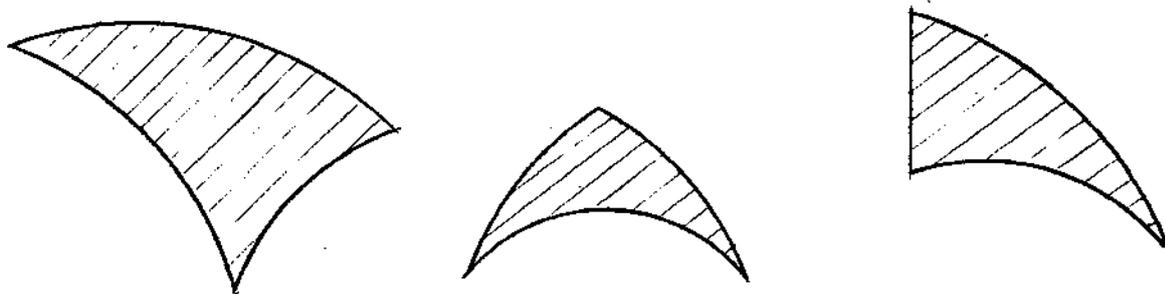
Escolhemos uma transformação T do $SL_2(\mathbb{R})$ tal que $T(L_1)$ é o eixo imaginário. Então $T(p)$ e $T(q)$ são imagens refletidas em relação ao eixo imaginário. Assim segue o resultado pelo 1º Caso. ■

Nosso próximo objetivo é demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet. Antes porém precisamos de alguns elementos da geometria N.E. que ainda não definimos. Vamos inicialmente definir triângulo N.E. limitado.

DEFINIÇÃO 2.2.8 : Chamamos de *triângulo N.E. limitado* à intersecção de três semi-planos fechados tais que cada semi-plano contém o ponto intersecção das retas suportes dos outros dois.

EXEMPLOS :

Na figura abaixo temos três triângulos N.E. limitados

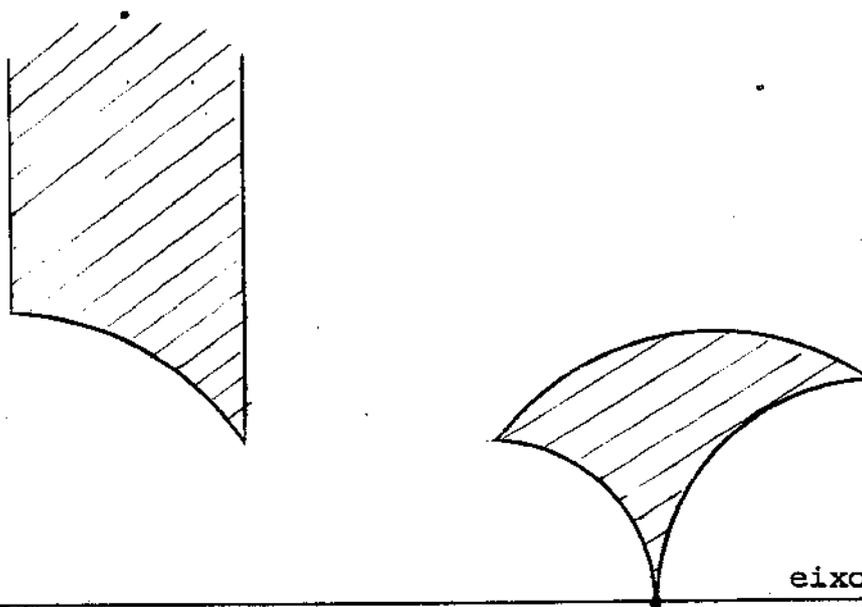


eixo real

Na geometria N.E. convém também considerar triângulos ilimitados, isto é, admitir a possibilidade das retas suportes dos semi-planos acima se encontrarem num ponto ideal ou infinito.

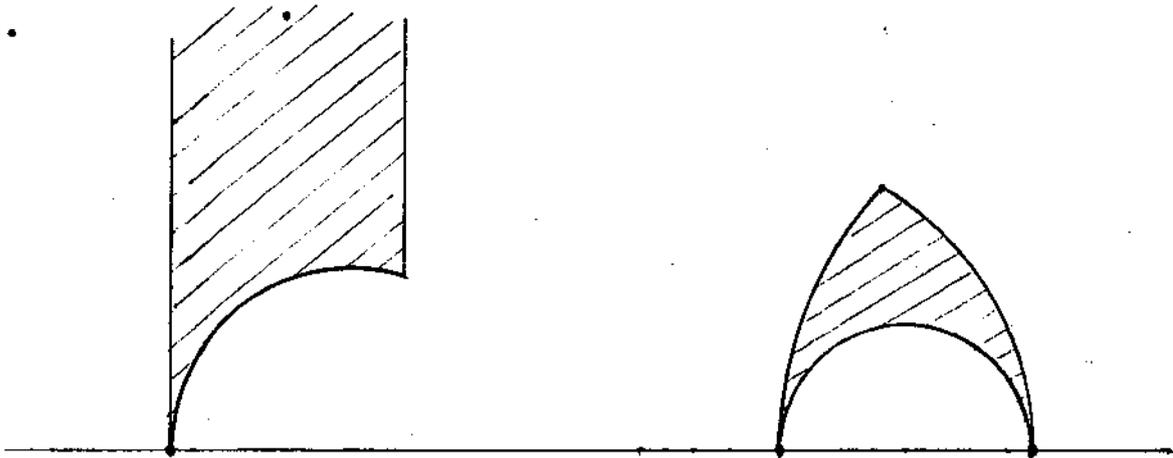
EXEMPLOS :

- 1) Triângulos N.E. ilimitados com um vértice infinito.

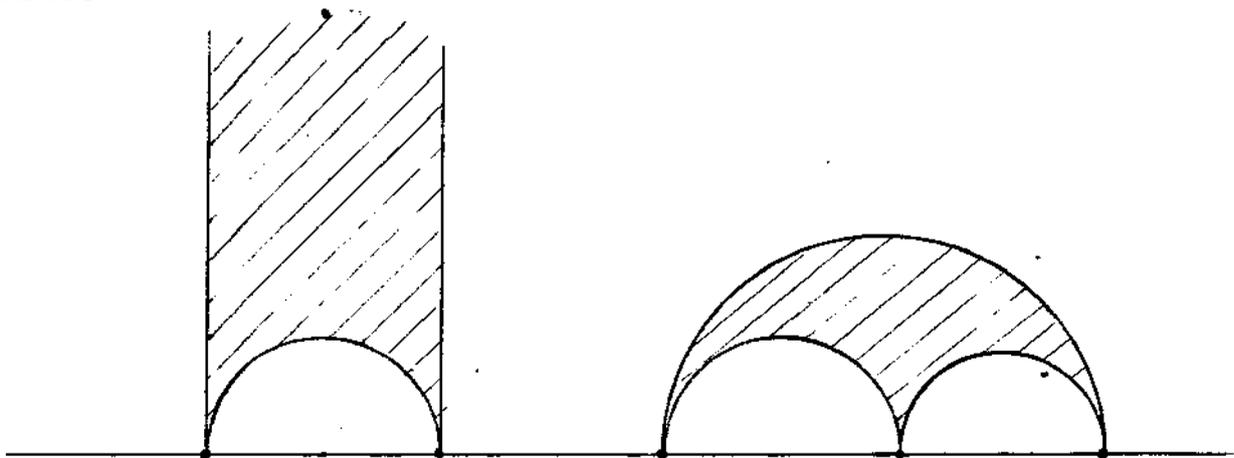


eixo real

2) Triângulo N.E. ilimitados com dois vértices infinitos.



3) Triângulo N.E. ilimitados com três vértices no infinito.



De modo análogo podemos definir polígono N.E. como intersecção de semi-planos fechados. Devemos também considerar polígonos ilimitados, isto é, com vértices no ∞ . Vamos então agora demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet.

TEOREMA 2.2.9 : (Teorema de Gauss-Bonnet). A área N.E. de um polígono N.E. de n lados com ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ é :

$$(n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n .$$

DEMONSTRAÇÃO :

Primeiramente vamos considerar um triângulo limitado pelo círculo unitário e as retas $x=p$, $x=q$ onde $-1 < p < q < 1$. Sejam α, β os ângulos mostrados na fig. (9) e o terceiro ângulo entre as duas paralelas é zero.

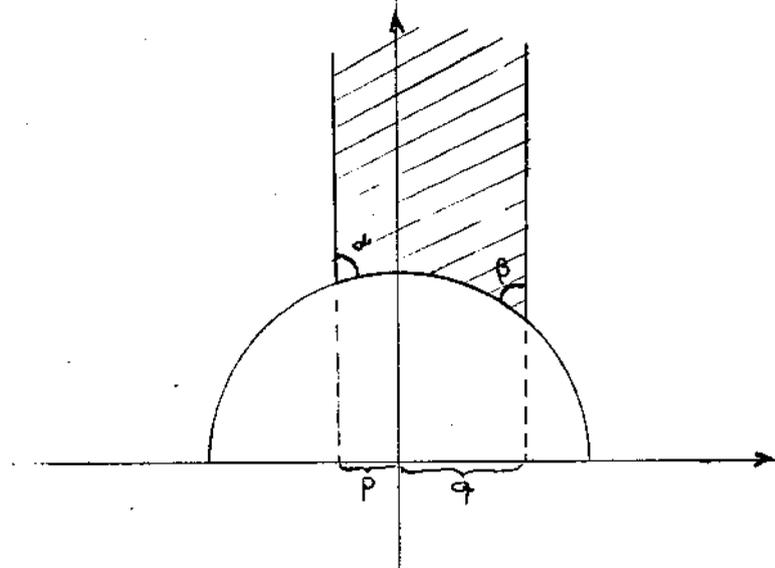


fig. (9)

A área N.E. deste triângulo é:

$$\int_p^q \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx \, dy}{y^2} = \int_p^q \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - \alpha - \beta .$$

Consideremos agora um triângulo N.E. com um vértice C no eixo real (fig. (10)). Podemos aplicar uma transformação do $SL_2(\mathbb{R})$ que leva C no ∞ sem alterar a área N.E. e os ângulos.

Portanto a área deste triângulo ABC é dada como no caso anterior por: $\pi - \alpha - \beta$.

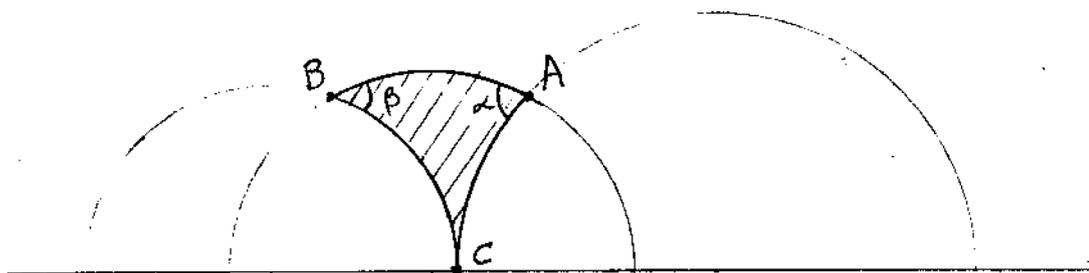


fig. (10)

Seja agora um triângulo qualquer ABC (fig. (11)) .

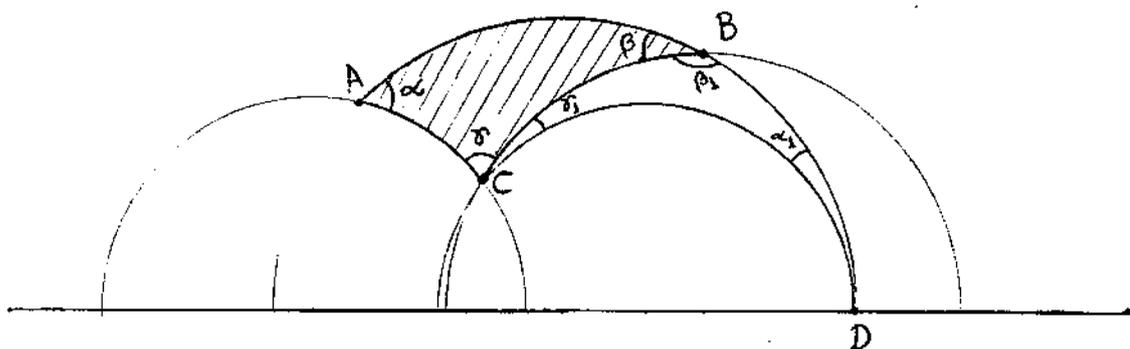


fig. (11)

A reta N.E. AB corta o eixo real em dois pontos. Chamemos um deles de D . Traçando a reta N.E. CD temos que:

$$\mu(\Delta ABC) = \mu(\Delta ACD) - \mu(\Delta BCD) .$$

Mas, como o ΔACD e ΔBCD tem um vértice no eixo real, suas áreas são dadas como no caso anterior. Então:

$$\mu(\Delta ACD) = \pi - \alpha - (\gamma + \gamma_1) \text{ e}$$

$$\mu(\Delta BCD) = \pi - \gamma_1 - \beta_1 .$$

Logo obteremos :

$$\mu(\Delta ABC) = -\alpha - \gamma + \beta_1 .$$

Desde que $\beta + \beta_1 = \pi$ temos que :

$$\mu(\Delta ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma .$$

Dado um polígono N.E. de n lados com ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, podemos dividi-lo em $n-2$ triângulos N.E. Aplicando o resultado acima para cada triângulo e adicionando depois as áreas, obtemos a fórmula desejada:

$$\mu(\text{Polígono}) = (n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n . \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2.10 : Seja $z = x + iy$ um ponto fixo de \mathbb{H} e C um subconjunto compacto de \mathbb{H} . Seja

$S = \{g \in SL_2(\mathbb{R}) : gz \in C\}$ então S é compacto .

DEMONSTRAÇÃO :

Seja $S_1 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \frac{az+b}{cz+d} \in C, ad-bc=1\}$

O conjunto S é a imagem contínua de S_1 pela aplicação natural que leva (a,b,c,d) na transformação $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

Para mostrarmos que S é compacto basta mostrarmos que S_1 é compacto. Para isto precisamos mostrar que S_1 é fechado e limitado.

Mostremos inicialmente que S_1 é fechado.

De fato, seja $\{g_n\}$ uma sequência de pontos em S_1 tal que $g_n \rightarrow g_0$. Como $g_n z \rightarrow g_0 z$ e C é compacto então $g_0 z \in C$, ou seja, $g_0 \in S_1$. Logo S_1 é fechado.

Mostremos agora que S_1 é limitado.

C é limitado logo qualquer elemento de S_1 satisfaz:

$$\left| \frac{az+b}{cz+d} \right| < k \quad (\text{I})$$

C é um subconjunto compacto de \mathbb{H} , e y é uma função contínua que deve atingir seu limite superior. Portanto y tem um limite superior positivo em C e $\text{Im}(w)$ tem um limite superior positivo.

$$\text{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{y}{|cz+d|^2} \geq k_1 \quad \text{onde } k_1 > 0 \quad (\text{II})$$

(II) implica que $|cz+d|^2 < \frac{y}{k_1}$. Então c e d são limitados.

(I) implica que $|az+b| < k|cz+d|$. Portanto a e b são limitados.

Logo o conjunto S_1 é limitado. Portanto S é compacto. ■

TEOREMA 2.2.11 : Se C_1 e C_2 são subconjuntos compactos de \mathbb{H} , então o conjunto:

$$\{g \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) : gC_1 \cap C_2 \neq \emptyset\}$$

é compacto.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, fixemos um ponto $p \in \mathbb{H}$ e sejam os conjun-

tos:

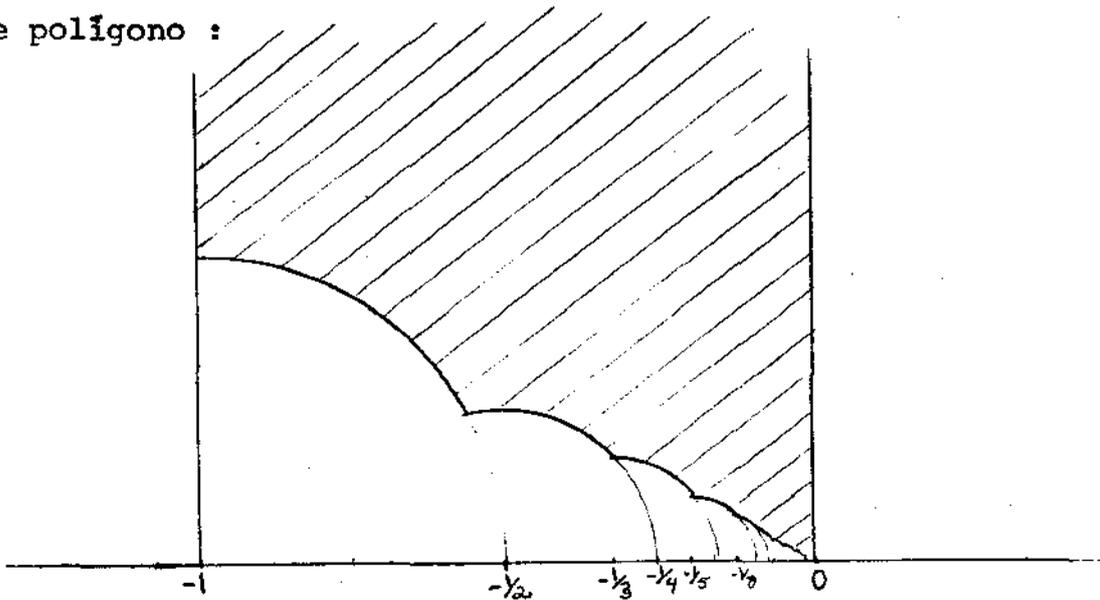
$$S_1 = \{t \in SL_2(\mathbb{R}) : tp \in C_1\} \text{ e}$$

$$S_2 = \{\mu \in SL_2(\mathbb{R}) : \mu p \in C_2\} .$$

Então S_1 e S_2 são compactos pelo teorema 2.2.10.

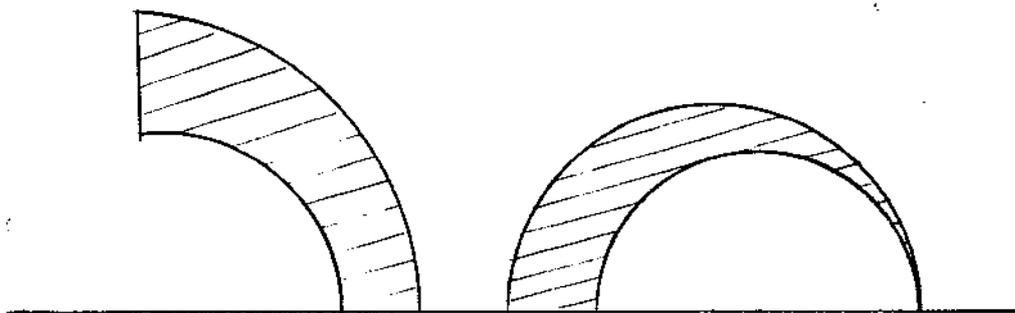
O conjunto $\{g \in SL_2(\mathbb{R}) : gC_1 \cap C_2 \neq \emptyset\}$ é $S_2S_1^{-1}$, que também é compacto. ■

OBSERVAÇÃO: Convém observar que há a possibilidade de termos polígonos, isto é, intersecções de semi-planos com um número infinito de lados. Por exemplo consideremos o seguinte polígono :



cujos lados são círculos de centro $-\frac{1}{n}$ e raio $\frac{1}{2n}$.

Podemos também ter polígonos com área infinita, por exemplo os seguintes triângulos N.E. :



pois nestes casos a integral que dá a área diverge.

CAPÍTULO III

REGIÕES FUNDAMENTAIS

Inicialmente introduziremos os grupos fuchsianos e depois veremos quais as condições para que um conjunto fechado F seja, uma região fundamental para um grupo fuchsiano. Mais para frente ainda, veremos que todo grupo fuchsiano admite uma região fundamental; pois construiremos a chamada região de Dirichlet.

Será importante para nós obtermos também algumas informações sobre a medida da região fundamental. Para tal veremos alguns resultados sobre a medida da região fundamental, entre eles os teoremas de Siegel.

3.1. GRUPO FUCHSIANO

Seja Γ um subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$.

DEFINIÇÃO 3.1.1 : Dizemos que Γ é um grupo fuchsiano se ele é um subgrupo discreto finitamente gerado de $SL_2(\mathbb{R})$.

DEFINIÇÃO 3.1.2 : Um ponto de \mathbb{H} é chamado um Γ -ponto fixo se ele é fixo por alguma transformação, diferente da identidade, de um grupo fuchsiano Γ . O conjunto de todos os

Γ - pontos fixos é chamado o conjunto de pontos fixos de Γ .

DEFINIÇÃO 3.1.3 : Chamamos de *estabilizador* de um ponto de \mathbb{H} em Γ ao conjunto de todas as transformações de Γ que deixam fixo este ponto.

PROPOSIÇÃO 3.1.4 : Os estabilizadores de diferentes elementos de uma órbita são conjugados.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja $\{p, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ a órbita do ponto p .

Tomemos dois elementos distintos desta órbita, digamos p_i e p_j . Sejam E_i e E_j os estabilizadores de p_i e p_j respectivamente. Mostremos então que eles são conjugados.

Como p_i e p_j estão na órbita de p temos que existe uma transformação h tal que $h(p_i) = p_j$.

Para qualquer $g \in E_i$ temos que $g(p_i) = p_i$.

Então $h(g(p_i)) = p_j$ e daí $hgh^{-1}(p_j) = p_j$.

Logo $hE_i h^{-1} \subseteq E_j$. Trocando i por j , h por h^{-1} e h^{-1} por h , obtemos $h^{-1}E_j h \subseteq E_i$ e daí $E_j \subseteq hE_i h^{-1}$. Portanto $hE_i h^{-1} = E_j$. ■

PROPOSIÇÃO 3.1.5 : O conjunto de pontos fixos de Γ é levado em si mesmo por Γ .

DEMONSTRAÇÃO :

Mostremos que a órbita de um ponto fixo consiste inteiramente de pontos fixos.

Seja então p um ponto fixo qualquer, digamos $gp = p$. Seja $\{p, p_1, p_2, \dots\}$ a órbita de p , onde $p_i = g_i p$. Mostremos que cada p_i é fixo.

Como $g_i p = p_i$ e $gp = p$ temos: $g_i gp = p_i$, mas $p = g_i^{-1} p_i$ então $g_i g g_i^{-1}(p_i) = p_i$. Pondo $g_i g g_i^{-1} = h$ temos que $h(p_i) = p_i$ e assim p_i é um ponto fixo. Como a órbita de um ponto fixo consiste inteiramente de pontos fixos temos que o conjunto de pontos fixos de Γ é levado em si mesmo por Γ . ■

PROPOSIÇÃO 3.1.6 : Seja $z = x + iy$ um ponto fixo de \mathbb{H} e C um subconjunto compacto de \mathbb{H} . Seja também $S = \{g \in SL_2(\mathbb{R}) : gz \in C\}$. Se Γ é um grupo fuchsiano então $S \cap \Gamma$ é finito.

DEMONSTRAÇÃO :

Já sabemos pelo Teorema 2.2.10. que S é compacto. Agora como Γ é um subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$ temos que $S \cap \Gamma$ é finito, pois é a intersecção de um subconjunto compacto com um subconjunto discreto de $SL_2(\mathbb{R})$. ■

PROPOSIÇÃO 3.1.7 : Seja Γ um grupo fuchsiano. Então para cada $p \in \mathbb{H}$ existe uma vizinhança V de p tal que, se $gV \cap V \neq \emptyset$, $g \in \Gamma$, então $gp = p$.

DEMONSTRAÇÃO :

Já que a métrica N.E. define a topologia usual em \mathbb{H} , a bola fechada N.E. $B(p, \rho) = \{z : d(z, p) \leq \rho\}$ é compacta. Pela proposição 3.1.6 temos que o conjunto dos $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma p \in B(p, \rho)$ é finito. Seja ρ_1 o menor valor positivo de $d(p, \gamma p)$, $\gamma \in \Gamma$. Seja $V = B(p, \frac{1}{2} \rho_1)$. A vizinhança V assim definida satisfaz a condição desejada. ■

PROPOSIÇÃO 3.1.8 : Os pontos fixos de Γ são isolados.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja p um ponto fixo de Γ .

Mostremos que existe uma vizinhança de p que não contém nenhum outro ponto fixo de Γ .

Seja V a vizinhança definida na proposição 3.1.7. Suponhamos que $z \in V$ é tal que $\gamma z = z$ para algum $\gamma \in \Gamma$. Então temos que $\gamma V \cap V \neq \emptyset$ o que implica $\gamma p = p$. Então $z = p$ pois nenhum elemento de $SL_2(\mathbb{R})$ tem mais que um ponto fixo em \mathbb{H} . ■

PROPOSIÇÃO 3.1.9 : Se Γ é grupo fuchsiano então o normalizador em Γ de um elemento elíptico de ordem finita é um grupo cíclico finito gerado por um elemento elíptico.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja T um elemento elíptico de Γ com pontos fixos α e $\bar{\alpha}$. Podemos escrever T de forma:

$$\frac{w - \alpha}{w - \bar{\alpha}} = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

Qualquer elemento U de Γ que comuta com T deve levar o par $(\alpha, \bar{\alpha})$ em si mesmo pois:

$$U\alpha = UT\alpha = TU\alpha \text{ e isto implica que } U\alpha = \alpha \text{ ou } U\alpha = \bar{\alpha}$$
$$U\bar{\alpha} = UT\bar{\alpha} = TU\bar{\alpha} \text{ e isto implica que } U\bar{\alpha} = \alpha \text{ ou } U\bar{\alpha} = \bar{\alpha}.$$

Desde que somente um dos pontos fixos α e $\bar{\alpha}$ está em \mathbb{H} temos que U deve fixar ambos α e $\bar{\alpha}$. Então U é uma transformação elíptica que pode ser escrita na forma:

$$\frac{w - \alpha}{w - \bar{\alpha}} = e^{i\beta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

Reciprocamente qualquer transformação nesta forma comuta com T . Portanto o normalizador de T consiste precisamente de todas aquelas transformações com o mesmo conjunto de pontos fixos que T .

Se o elemento elíptico tem ordem finita, então existem inteiros m, n tais que $m\theta = n\pi$ e a transformação elíptica gera um grupo cíclico finito. ■

3.2. REGIÃO FUNDAMENTAL DE UM GRUPO FUCHSIANO

DEFINIÇÃO 3.2.1 : Seja Γ um grupo fuchsiano. Um conjunto fechado F (com interior F^0) é chamado uma *região fundamental* para Γ se:

(i) F é uma Γ -cobertura (isto é, F contém pelo menos um elemento de cada órbita).

(ii) F^0 é um Γ -revestimento (isto é, F^0 contém no máximo um elemento de cada órbita).

(iii) A medida N.E. da fronteira de F é zero.

Consideremos agora o seguinte conjunto:

$$K(z) = \{g \in \Gamma : z \in gF\}$$

Observemos que a condição (i) mostra que $K(z)$ não é vazio. Podemos ainda definir para um subconjunto qualquer A de \mathbb{H} o conjunto $K(A)$ do seguinte modo:

$$K(A) = \{g \in \Gamma : A \cap gF \neq \emptyset\}$$

PROPOSIÇÃO 3.2.2 :

(1) $K(A \cup B) = K(A) \cup K(B)$

(2) $K(A) = \bigcup_{z \in A} \{K(z)\}$

(3) Se $A \supset B$ então $K(A) \supset K(B)$

(4) Se $g \in \Gamma$ então $K(gz) = gK(z)$

DEMONSTRAÇÃO :

De fato :

$$\begin{aligned}(1) \quad K(A \cup B) &= \{g \in \Gamma : (A \cup B) \cap gF \neq \emptyset\} = \\ &= \{g \in \Gamma : (A \cap gF) \cup (B \cap gF) \neq \emptyset\} = \\ &= \{g \in \Gamma : A \cap gF \neq \emptyset\} \cup \{g \in \Gamma : B \cap gF \neq \emptyset\} = \\ &= K(A) \cup K(B)\end{aligned}$$

(2) Se $g \in K(A)$ temos que $A \cap gF \neq \emptyset$ o que implica que existe $z \in A \cap gF$, logo $z \in A$ e $z \in gF$ e daí $g \in K(z)$. Logo $K(A) \subset \bigcup_{z \in A} \{K(z)\}$.

Se $g \in \bigcup_{z \in A} \{K(z)\}$ temos que $g \in K(z)$ para algum $z \in A$, então $z \in gF$ para algum $z \in A$. Portanto $z \in A \cap gF$, logo $A \cap gF \neq \emptyset$ de onde concluímos que $g \in K(A)$. Logo

$$\bigcup_{z \in A} \{K(z)\} \subset K(A) .$$

(3) Trivial pois $gF \cap B \subset gF \cap A$ e se $gF \cap B \neq \emptyset$ então $gF \cap A \neq \emptyset$.

(4) Temos:

$$\begin{aligned}K(gz) &= \{h \in \Gamma : gz \in hF\} = \\ &= \{h \in \Gamma : z \in g^{-1}hF\} = \\ &= \{h \in \Gamma : g^{-1}h \in K(z)\} = \\ &= \{h \in \Gamma : h \in gK(z)\} = gK(z) .\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 3.2.3 : (Siegel) Dizemos que F é uma região fundamental normal se, para cada $z \in F$ (e portanto, pela

invariança, para todo $z \in \mathbb{H}$, existe um aberto V contendo z tal que $K(V)$ é finito.

TEOREMA 3.2.4 : Seja F uma região fundamental normal para Γ . Então, cada $z \in \mathbb{H}$ tem uma vizinhança U tal que $K(z) = K(U)$.

DEMONSTRAÇÃO :

Desde que F é normal, para cada $z \in \mathbb{H}$ existe uma vizinhança V de z tal que $K(V)$ é finito. Agora $K(z) \subset K(V)$ e assim $K(V) - K(z)$ também é finito.

Seja $A = \bigcup_{g \in K(V) - K(z)} (gF)$. A é um conjunto fechado

porque é a união finita de fechados e $z \notin A$, por definição de A .

Pondo $U = V - A$ temos que U é um conjunto aberto contendo z . Suponhamos que $g \in K(U) \subset K(V)$ e $g \notin K(z)$.

Como $g \notin K(z)$ implica que $g \in K(V) - K(z)$, temos que $gF \subset A$ pela definição de A . Desde que $U = V - A$ temos $gF \cap U = \emptyset$, o que contraria o fato de que $g \in K(U)$. Logo $g \in K(U)$ implica $g \in K(z)$. Portanto $K(U) \subset K(z)$, e como $K(z) \subset K(U)$ temos que $K(U) = K(z)$. ■

3.3. REGIÃO DE DIRICHLET

Mostraremos agora que todo grupo fuchsiano admite uma região fundamental. Para tal é suficiente, dado um grupo fuchsiano, exibir a região fundamental.

Seja Γ um grupo fuchsiano e p um ponto não-fixado por Γ . Podemos agora construir uma região fundamental baseada em p do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 3.3.1 : Chamamos o conjunto:

$$F = \{z : d(z,p) < d(gz,p) , g \in \Gamma\}$$

de região de Dirichlet para Γ baseada em p .

OBSERVAÇÃO : A desigualdade que define F pode ser reescrita da seguinte forma:

$$d(z,p) < d(z,g^{-1}p)$$

o que mostra que F é a intersecção de semi-planos fechados (Teorema 2.2.7), e, portanto fechado e convexo. Podemos dizer também através desta desigualdade, de um modo mais simples, como F é construído. Construímos F baseada em p escolhendo os elementos de cada órbita que tem distância mínima com p , como mostra o seguinte teorema:

TEOREMA 3.3.2 : Seja B um subconjunto qualquer de Γ , finito ou infinito. Seja $z \in \mathbb{H}$ e seja

$$d_0 = \inf\{d(gz, p) : g \in B\} .$$

Então $\exists g_0 \in B$ tal que $d_0 = d(g_0z, p)$.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja $g_1 \in B$. A bola fechada N.E. com centro p e raio $d(g_1z, p)$ é compacta, logo ela contém somente um número finito de elementos da órbita de z , e deste modo, somente um número finito de elementos gz onde $g \in B$. Neste conjunto finito tem um elemento cuja distância N.E. até p é mínima. Isto prova o teorema. ■

Vamos agora definir o seguinte conjunto:

$$E = \{z : d(z, p) < d(gz, p) , \text{id} \neq g \in \Gamma\}$$

Este conjunto nada mais é que:

$$\{z \in F : z \in \cup \{\ell(g) : g \in \Gamma , g \neq \text{id}\}\}$$

onde $\ell(g)$ é a reta $\{z : d(z, p) = d(z, gp)\}$.

OBSERVAÇÃO : Se indicarmos a região de Dirichlet baseada em p por F_p , temos que $F_{gp} = gF_p$, pois a transformação que leva p em gp também leva o semi-plano determinado por p e q no semi-plano determinado por gp e gq .

LEMA 3.3.3 : $z \in E$ se e somente se $K(z) = \{\text{id}\}$.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja q um ponto qualquer de E . Então q não está em nenhuma das retas $\ell(g) : d(z,p) = d(z,gp)$. Então $d(q,p) < d(q,gp)$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq \text{id}$. Mas, como $d(q,p) = d(q, g^{-1}(gp))$, temos que : $d(q,gp) > d(q, g^{-1}(gp))$. Portanto $g \notin F_{gp} = gF_p$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq \text{id}$. Logo $K(q) = \{\text{id}\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $K(q) = \{\text{id}\}$. Então $q \notin gF_p$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq \text{id}$. Assim $q \notin F_p \cap gF_p$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq \text{id}$. Logo $q \notin \ell(g)$ para todo $g \neq \text{id}$. Portanto $q \in E$. ■

TEOREMA 3.3.4 : E é o interior de F e F é uma região fundamental normal.

DEMONSTRAÇÃO :

Basta provarmos as seguintes afirmações:

- (1) F é uma Γ -cobertura
- (2) E é um Γ -revestimento
- (3) $K(z)$ é finito e todo z tem uma vizinhança V tal que $K(V) = K(z)$.
- (4) E é o interior de F
- (5) A fronteira de F tem medida zero.

Vamos então fazer a prova de cada uma destas.

(1) Seja $z \in H$. Então o elemento $g_0 z$ da órbita de z que tem distância mínima de p (o qual existe pelo Teorema 3.3.2) satisfaz a relação:

$$d(g_0 z, p) \leq d(g g_0 z, p), \quad g \in \Gamma$$

e, portanto pertence a F . Logo F contém pelo menos um elemento de cada órbita.

(2) Mostremos agora que E contém no máximo um elemento de cada órbita.

Se $z \in E$ e $g \neq \text{id}$, a relação:

$$d(gz, p) > d(z, p) = d(g^{-1}gz, p)$$

mostra que gz não está em E . Logo E é um Γ -revestimento.

(3) Mostremos inicialmente que $K(z)$ é finito.

Se $z \in gF$ temos que $g^{-1}z \in F$ e assim a distância $d(g^{-1}z, p)$ é minimal. Digamos $d(g^{-1}z, p) = k$. Como $K(z) = \{g \in \Gamma : z \in gF\}$ temos que $K(z)$ é o conjunto dos $g \in \Gamma$ para os quais $d(g^{-1}z, p) = d(z, gp) = k$. Desde que a bola N.E. de centro z e raio k é compacta, $K(z)$ é finito.

Provemos agora que cada z tem uma vizinhança V tal que $K(V) = K(z)$.

Seja $k + 2\varepsilon$ o mínimo das $d(z, gp)$ para $g \in \Gamma - K(z)$. Pelo teorema 3.3.2 este mínimo é atingido, logo ε é positivo.

Seja V a bola aberta N.E. com raio ε e centro z . Provemos agora que $K(V) = K(z)$.

Para qualquer $g \in K(z)$ temos que $z \in gF$ e assim $V \cap gF \neq \emptyset$, o que implica $g \in K(V)$. Portanto $K(z) \subset K(V)$. Resta provar que $K(V) \subset K(z)$.

Se $g \in K(V)$, deve existir $w \in V \cap gF$. Então $w \in V$ e $w \in gF$. Agora $w \in V$ implica que $d(z,w) < \epsilon$ e $w \in gF$ implica $d(w, gp) \leq d(w, hp)$ para qualquer $h \in K(z)$. Então:

$$\begin{aligned} d(z, gp) &\leq d(w, z) + d(w, gp) < d(w, hp) + \epsilon < \\ &< d(w, z) + d(z, hp) + \epsilon < k + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $d(z, gp) < k + 2\epsilon$, e pela escolha de ϵ temos que $g \in K(z)$. Logo $K(V) \subset K(z)$.

(4) Pela definição de E temos que $E \subset F$. Agora E contém o interior de F . De fato, qualquer ponto z de F tal que $d(z, p) = d(gz, p)$ não é um ponto interior, pois qualquer vizinhança dele contém pontos w tais que $d(w, p) > d(gw, p)$, os quais não podem estar em F . Precisamos agora mostrar somente, que E é aberto. Mas, isto segue-se do fato que se $z \in E$ então $K(z) = \{id\}$, e para todo $z \in E$ existe uma vizinhança V de z tal que $K(V) = K(z) = \{id\}$, logo $V \subset E$. Portanto E é aberto. Desde que $E \subset F$ tal que E aberto e E contém o interior de F , temos que E é o interior de F , pois o interior de F é o maior aberto que está contido em F .

(5) A fronteira de F tem medida zero, pois esta é uma propriedade geral dos conjuntos convexos. De fato, $F - E = \cup \{\ell(g) : g \in \Gamma\}$. Como $\ell(g)$ é uma reta N.E., $\mu(\ell(g)) = 0$

e como Γ é enumerável então $\mu(F - E) \leq \sum \mu(l(g)) = 0$.

Isto completa a demonstração. ■

OBSERVAÇÃO : Γ é enumerável pois é subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$, que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Um espaço topológico X satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade se possui uma base enumerável.

Vamos fazer agora algumas considerações sobre a fronteira da região de Dirichlet.

Seja F a região de Dirichlet de um grupo fuchsiano Γ baseada em p . A fronteira de F está contida na união das retas N.E. $\{z : d(z,p) = d(z,gp), g \in \Gamma\}$. A intersecção de F com um destes conjuntos é um subconjunto convexo fechado da reta e consiste ou de um segmento de reta (caso mais geral) ou de um simples ponto. Os segmentos de retas são chamados *arestas* de F . Os pontos das extremidades dos segmentos juntamente com os simples pontos (que tornam-se pontos extremidades de segmentos também) são chamados *vértices*.

Podemos referir a F como um polígono embora ele possa ter um número infinito de lados.

DEFINIÇÃO 3.3.4 : Chamamos de *ladrilhagem de Dirichlet* à configuração formada por F , suas arestas e vértices, junto com todas as imagens $gF : g \in \Gamma$ e todas as suas arestas e vértices.

DEFINIÇÃO 3.3.5 : As imagens de F^0 pelas $g \in \Gamma$ são chamadas *faces* da ladrilhagem.

DEFINIÇÃO 3.3.6 : As imagens sob Γ das arestas e vértices de F são chamadas arestas e vértices da ladrilhagem.

Vamos ver agora qual a condição para que um ponto de \mathbb{H} seja um vértice.

TEOREMA 3.3.7 : Um ponto z em \mathbb{H} é um vértice da ladrilhagem se e somente se $K(z)$ tem pelo menos três elementos.

DEMONSTRAÇÃO:

Um ponto z pertence ao interior de uma face somente se $K(z) = \{\text{id}\}$, pois o interior de uma face contém no máximo um elemento de cada órbita.

z pertence a uma aresta somente se z está em duas regiões fundamentais que tem esta aresta em comum, digamos g_1F e g_2F . Então z pertence a uma aresta se e somente se $K(z) = \{g_1, g_2\}$.

A última possibilidade é z estar em um vértice. Isto acontece somente se $K(z)$ tem pelo menos três elementos, pois caso contrário cairia em um dos casos anteriores. ■

DEFINIÇÃO 3.3.8 : Dois vértices de F são chamados *congruentes* se existe uma g de Γ que leva um no outro. Um conjunto de vértices é chamado um conjunto congruente se todos

os vértices estão na mesma órbita.

PROPOSIÇÃO 3.3.9 : Cada conjunto de vértices congruente é finito.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja gz um vértice congruente a z .

$gz \in F$ implica que $z \in g^{-1}F$ e isto ocorre somente se $g^{-1} \in K(z)$. Como $K(z)$ é um conjunto finito, obtemos nosso resultado. ■

OBSERVAÇÃO : Lembremos que os estabilizadores de diferentes elementos de uma órbita são conjugados, então todos os estabilizadores dos vértices de um conjunto congruente tem a mesma ordem.

TEOREMA 3.3.10 : Se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ são os ângulos de um conjunto congruente de vértices e se K é a ordem do estabilizador de qualquer um destes vértices, então:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r = \frac{2\pi}{K}$$

Em qualquer caso:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r \leq \frac{2\pi r}{3}$$

DEMONSTRAÇÃO :

Sejam z_1, z_2, \dots, z_r os vértices do conjunto congruente. Seja $E(z_1)$ o estabilizador de z_1 e sejam g_1F, \dots, g_tF as faces que se encontram em z_1 .

Desde que $z_1 \in g_iF$ é equivalente a $g_i^{-1}z_1 \in F$, segue-se que $g_1^{-1}, \dots, g_t^{-1}$ são os elementos de Γ que levam z_1 em z_1, z_2, \dots , ou z_r .

Agora, existem exatamente K elementos que levam z_1 em z_i , pois se g é um deles os outros são os elementos do conjunto $gE(z_1)$. Então $t = Kr$.

A soma de todos os ângulos encontrando em z_1 na laminação de Dirichlet é 2π . Mas estes ângulos são os ângulos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ cada um repetido K vezes.

$$\text{Portanto } K(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r) = 2\pi .$$

Finalmente desde que z_1 é um vértice, temos que $t \geq 3$ e assim $Kr \geq 3$. Portanto

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r < \frac{2\pi r}{3} . \quad \blacksquare$$

3.4. A MEDIDA DA REGIÃO FUNDAMENTAL

Neste parágrafo vamos provar alguns resultados importantes sobre a medida da região fundamental de um grupo fuchsiano. A importância destes resultados está no fato de que a medida de uma região fundamental depende somente do grupo Γ e não da particular região fundamental considerada como mostra o seguinte resultado:

TEOREMA 3.4.1 : Se F_1 e F_2 são duas Γ -regiões fundamentais, então $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

DEMONSTRAÇÃO :

Sejam E_1 e E_2 os interiores de F_1 e F_2 respectivamente. Como as medidas das fronteiras de F_1 e F_2 são nulas temos que $\mu(E_1) = \mu(F_1)$ e $\mu(E_2) = \mu(F_2)$.

Agora, $\mu(F_1) \geq \sum_{g \in \Gamma} \mu(F_1 \cap gE_2)$ porque

$F_1 \supseteq F_1 \cap gE_2$ para todo $g \in \Gamma$.

Devido à invariância temos que:

$$\mu(F_1 \cap gE_2) = \mu(g^{-1}F_1 \cap E_2) \quad \forall g \in \Gamma .$$

$$\text{Então} \quad \sum_{g \in \Gamma} \mu(F_1 \cap gE_2) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g^{-1}F_1 \cap E_2) .$$

Como $\cup_{g \in \Gamma} (g^{-1}F_1 \cap E_2)$ é uma cobertura para E_2 te-

mos que $\sum_{g \in \Gamma} \mu(g^{-1}F_1 \cap E_2) \geq \mu(E_2)$. Mas $\mu(E_2) = \mu(F_2)$ então

$\mu(F_1) \geq \mu(F_2)$. Analogamente concluímos que $\mu(F_2) \geq \mu(F_1)$.

Portanto $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. ■

Veremos agora a relação que há entre a medida da região fundamental e o número de arestas. Já mostramos em 2.2.9, que se o polígono F tem um número finito de lados, com possivelmente no máximo vértices no infinito, então $\mu(F)$ é finita. Mostremos agora a recíproca.

TEOREMA 3.4.2 : (Siegel). Se a região de Dirichlet F tem medida finita, então ela tem um número finito de arestas.

DEMONSTRAÇÃO :

Notemos que toda aresta de F tem ou um ponto final em \mathbb{H} ou um ponto final no eixo real. Chamando os pontos finais de vértices, precisamos mostrar apenas que o número de vértices é finito. Mais precisamente, iremos mostrar que, se $\mu(F) < (n-2)\pi$, o número de vértices não excede $3n$.

Suponhamos que F tem N vértices e que aqueles que estão em \mathbb{H} formam conjuntos congruentes. Suponhamos que N_1 deles estão em \mathbb{H} que N_2 estão no eixo real.

A soma dos ângulos dos vértices em \mathbb{H} , pelo teorema 3.3.10., não excede $\frac{2\pi N_1}{3}$.

Seja F_1 a cobertura convexa dos N vértices, um polígono convexo cujos ângulos dos vértices em \mathbb{H} não são maiores que os correspondentes ângulos de F (desde que F_1 está contido em F) e cujos ângulos dos vértices no eixo real são todos nulos. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos:

$$\mu(F) \geq \mu(F_1) \geq (N-2)\pi - \frac{2\pi N_1}{3} \geq (N-2)\pi - \frac{2\pi N}{3} = \left(\frac{N}{3} - 2\right)\pi$$

Logo: $(n-2)\pi \geq \mu(F) \geq \left(\frac{N}{3} - 2\right)\pi$ e daí tiramos que $N \leq 3n$. ■

Enunciaremos agora um outro teorema de Siegel muito importante sobre medida da região fundamental. Não provaremos tal teorema porque a sua demonstração envolve o conceito de genus, o qual não foi tratado em nosso trabalho.

TEOREMA 3.4.3 : (Siegel) Para qualquer grupo fuchsiano, $\mu(F) \geq \frac{\pi}{21}$.

Suponhamos que um grupo fuchsiano Γ admita um subgrupo Γ_1 com índice finito N , isto é, $[\Gamma : \Gamma_1] = N$. Então $\Gamma = U\{\gamma_j \Gamma_1 : j=1, \dots, N\}$. Seja F a região fundamental para Γ e F_1 a região fundamental para Γ_1 . A medida de F_1 é maior que a de F . Vemos isto através do seguinte resultado:

LEMA 3.4.4 : $F_1 = U\{\gamma_j F : j=1, \dots, N\}$ é região fundamental para Γ_1 .

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, mostremos que F_1 satisfaz as três condições para ser uma região fundamental para Γ_1 .

1) Como $H = U\{gF : g \in \Gamma\}$ segue-se que

$$\begin{aligned} H &= U\{g\gamma_j F : g \in \Gamma_1, j=1, \dots, N\} = \\ &= U\{U\{g\gamma_j F : j=1, \dots, N\} : g \in \Gamma_1\} = \\ &= U\{gF_1 : g \in \Gamma_1\}. \end{aligned}$$

Portanto F_1 é uma Γ_1 -cobertura.

2) Mostremos agora que F_1 contém no máximo um elemento de cada órbita em Γ_1 . De fato, observemos primeiramente que como F^0 é aberto e $g \in \Gamma$ é um homeomorfismo então:

$$F_1 \supset F_1^0 \supset U\{\gamma_j F^0 : j=1, \dots, N\} = F_1'$$

e esta última união é densa em F_1 .

Sejam z e $z_1 \in F_1$ e $z_1 = gz$ para algum $g \in \Gamma_1$.

Pela continuidade de g , podemos encontrar vizinhanças:

$V(z), V(z_1) \subset F_1^0$ com $gV(z) = V(z_1)$. Como F_1' é densa em

F_1 segue-se que existem pontos $z' \in V(z) \cap F_1'$ e

$z_1' \in V(z_1) \cap F_1'$ tais que $z_1' = gz'$. Seja $z_1' \in \gamma_1 F^0$ e

$z' \in \gamma_j F^0$, isto é, $g(\gamma_j F^0) \cap \gamma_1 F^0 \neq \emptyset$. Logo $g(\gamma_j F^0) = \gamma_1 F^0$

ou seja $g\gamma_j = \gamma_1$, e fixado os representantes de Γ módulo Γ_1

temos que $\gamma_1 = \gamma_j$ e daí segue-se que $g(\gamma_j F^0) = \gamma_j F^0$ e como $\gamma_j F$ é região fundamental para Γ , temos $g = \text{id}$.

3) Temos que $\partial F_1 \subset \cup \partial(\gamma_j F)$ ou seja

$$0 \leq \mu(\partial F_1) \leq \sum \mu(\partial \gamma_j F) = 0$$

Portanto F_1 é região fundamental para Γ_1 . ■

TEOREMA 3.4.5 : Seja Γ um grupo fuchsiano e Γ_1 um subgrupo de índice finito. Se F e F_1 são regiões fundamentais para Γ e Γ_1 respectivamente, então:

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(F_1)}{\mu(F)}$$

DEMONSTRAÇÃO :

Seja $[\Gamma : \Gamma_1] = r$ e $\Gamma = U\{\gamma_j \Gamma_1 : j = 1, \dots, r\}$. Pelo Lema 3.4.4. temos que:

$$F_1 = U\{\gamma_j F : j = 1, \dots, r\}$$

Como $\mu(\gamma_j F) = \mu(F)$ para todo $j = 1, \dots, r$ temos que:

$$\mu(F_1) = r \mu(F). \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO : Finalmente observemos que se F for uma região fundamental para Γ , então Γ é gerado pelas transformações g tais que $gF \cap F \neq \emptyset$. (Ver [M.1], Teorema 19).

CAPÍTULO IV

GRUPOS TRIANGULARES

Vamos inicialmente introduzir os grupos triangulares e depois estudar a maximalidade destes. Sabemos que os grupos fuchsianos "em geral", são maximais. Iremos primeiramente analisar quando um grupo triangular, que é um caso particular de grupo fuchsiano, contém outro. A partir desta análise encontraremos a lista completa dos pares (grupo e subgrupo) no caso normal e não normal.

Antes de iniciarmos o estudo dos grupos triangulares, façamos algumas considerações sobre grupos fuchsianos.

Definimos grupos fuchsianos como sendo subgrupos finitamente gerado de $SL_2(\mathbb{R})$. Lembremo-nos que, passando o $SL_2(\mathbb{R})$ ao quociente por $\{\pm I\}$ obtemos $PSL_2(\mathbb{R})$. Já é sabido que a imagem inversa de um subgrupo discreto no quociente, é um subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$. Mas, o contrário nem sempre é válido. No caso, facilmente vemos que, a aplicação quociente leva um subgrupo discreto de $SL_2(\mathbb{R})$ em um subgrupo discreto de $PSL_2(\mathbb{R})$. Podemos então sem maiores problemas definirmos grupos fuchsianos como sendo subgrupos discretos de $PSL_2(\mathbb{R})$. Lembremos ainda que, o $PSL_2(\mathbb{R})$ é o grupo de todos os homeomorfismos conformes do semi-plano superior \mathbb{H} .

Consideraremos em nosso trabalho, somente os grupos fuchsianos de região fundamental com área finita, isto é, grupos fuchsianos de 1ª espécie; mas diremos apenas fuchsianos, para simplificarmos a linguagem.

4.1. DEFINIÇÕES

Vamos agora introduzir os grupos triangulares. Primeiramente consideremos uma família de triângulos N.E., Δ_α , tais que:

- 1) $\cup \Delta_\alpha = \mathbb{H}$
- 2) Se Δ_α^0 e Δ_β^0 são os interiores de Δ_α e Δ_β respectivamente então $\Delta_\alpha^0 \cap \Delta_\beta^0 = \emptyset \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$.
- 3) Se $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$ é um lado $\ell_{\alpha\beta}$ de ambos Δ_α e Δ_β então a inversão $\sigma_{\ell_{\alpha\beta}}$ neste lado leva Δ_α sobre Δ_β .

DEFINIÇÃO 4.1.1 : Dizemos que tal família forma uma *tecelagem triangular* do plano hiperbólico.

Seja Δ_0 um desses triângulos e σ_1, σ_2 e σ_3 as inversões em seus respectivos lados. Seja Γ^* o grupo gerado por σ_1, σ_2 e σ_3 . Γ^* é chamado o *grupo de simetrias do triângulo* Δ_0 , e, é um subgrupo do grupo das inversões $G(2)$. Para as reflexões σ_1, σ_2 e σ_3 temos as seguintes relações:

$$\sigma_i^2 = 1 \quad \text{para } i=1, 2, 3$$

$$(\sigma_i \sigma_j)^{r_{ij}} = 1 \quad \text{com } i \neq j \text{ e } 2 < r_{ij} < \infty$$

$$(r_{ij} = \infty \text{ se o vértice correspondente está no } \infty).$$

Consideremos agora a intersecção do grupo Γ^* com o grupo das transformações lineares G_1 . O grupo G_1 foi definido no primeiro capítulo, e é isomorfo ao $PSL_2(\mathbb{R})$ pelo teorema 1.3.4.

Seja então: $\Gamma = \Gamma^* \cap G_1$.

Γ é um subgrupo discreto de G_1 , pois tem região fundamental que consiste de dois triângulos adjacentes (pelo Lema 3.4.4.). Portanto é um grupo fuchsiano.

DEFINIÇÃO 4.1.2 : O grupo $\Gamma = \Gamma^* \cap G_1$ chama-se grupo triangular.

Agora para simplificarmos a notação, façamos a seguinte troca de variáveis:

$$\sigma_1\sigma_2 = x_1 \quad , \quad \sigma_2\sigma_3 = x_2 \quad , \quad \sigma_3\sigma_1 = x_3$$

$$r_{12} = m_1 \quad , \quad r_{23} = m_2 \quad , \quad r_{31} = m_3$$

Podemos definir Γ de um outro modo, através do seguinte teorema:

TEOREMA 4.1.3 : Se Γ é um grupo triangular então é definido pelos geradores x_1, x_2, x_3 e pelas relações:

$$x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_3^{m_3} = x_1 x_2 x_3 = 1 .$$

DEMONSTRAÇÃO :

Ver [M.1], teorema 32 com $g = 0$.

DEFINIÇÃO 4.1.4. Dizemos que $[m_1, m_2, m_3]$ é o tipo do grupo triangular Γ .

Vejamos agora um resultado muito importante que dá a condição de existência de um triângulo N.E.

TEOREMA 4.1.5 : Dados $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ existe um triângulo de ângulos $(\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3})$ se e somente se

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1 . \quad \text{Se} \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$$

o triângulo gera uma tecelagem triangular do plano hiperbólico.

DEMONSTRAÇÃO:

Sabemos por outras citações que esta prova se encontra no artigo de Schlegel [S.1] , porém não tivemos acesso a ele.

Vamos mostrar agora, que os centros de rotação dos elementos de ordem finita de Γ , são vértices da tecelagem triangular.

LEMA 4.1.6 : Seja Γ um grupo triangular definido por: $x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_3^{m_3} = x_1 x_2 x_3 = 1$. Então todo elemento de ordem finita em Γ é conjugado em Γ^* a x_j^m para algum $j=1, 2, 3$ e $m|m_j$.

DEMONSTRAÇÃO :

De fato, como Δ é domínio fundamental para Γ^* , todo elemento de ordem finita em Γ^* admite um representante em Δ e nenhum ponto de Δ^0 é um ponto fixo para Γ^* . Os vértices de Δ são pontos fixos pelas transformações de Γ . Reciprocamente, seja z ponto fixo de Γ . Mostremos que z tem que ser um vértice de Δ . Caso contrário z está numa aresta e não é vértice, e então existe uma transformação σ_j (reflexão na aresta) tal que $\sigma_j z = z$. Por construção da tecelagem, σ_j é a única transformação em Γ^* que deixa z fixo. Agora, todo vértice P da tecelagem, é ponto fixo para Γ e é conjugado em Γ^* a um vértice de Δ . Assim o grupo de isotropia O_P de P tem ordem m_j para algum j . Finalmente seja $g \in \Gamma$ com ordem finita m . Como g é elíptica, g tem um ponto fixo P em \mathbb{H} e conseqüentemente P é conjugado em Γ^* a um vértice de Δ e m divide m_j . ■

4.2. MAXIMALIDADE

Vamos ver agora, quando um grupo triangular admite subgrupo. Primeiramente vamos definir maximalidade para um grupo fuchsiano qualquer.

DEFINIÇÃO 4.2.1 : Dizemos que um grupo fuchsiano Γ é *maximal*, se não existe outro grupo fuchsiano contendo Γ como subgrupo de índice finito.

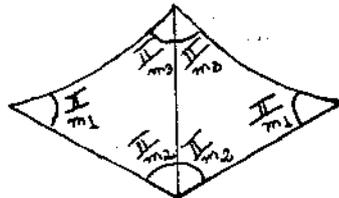
A fórmula de Riemann-Hurwitz para um grupo triangular Γ com tipo $[m_1, m_2, m_3]$ é:

$$M(\Gamma) = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} .$$

OBSERVAÇÃO: Se F é a região fundamental para o grupo triangular Γ de tipo $[m_1, m_2, m_3]$, pelo teorema de Gauss-Bonnet temos que: $\mu(F) = 2\left(\pi - \frac{\pi}{m_1} - \frac{\pi}{m_2} - \frac{\pi}{m_3}\right)$ pois F

é formado por dois triângulos adjacentes de ângulos

$$\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3} .$$



Então $\mu(F) = 2\pi M(\Gamma)$.

Nosso problema agora é encontrar condições para que um grupo triangular admita subgrupo. Antes porém, precisamos de um resultado auxiliar, a saber:

PROPOSIÇÃO 4.2.2 : Seja Γ um grupo triangular. Se $\Gamma_1 \subset \Gamma$ é um subgrupo de índice finito, então:

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{M(\Gamma_1)}{M(\Gamma)}$$

DEMONSTRAÇÃO :

Do teorema 3.4.5. temos que $[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(F_1)}{\mu(F)}$, mas como $\mu(F_1) = 2\pi M(\Gamma_1)$ e $\mu(F) = 2\pi M(\Gamma)$ temos o resultado desejado. ■

Observemos que em geral tem-se:

PROPOSIÇÃO 4.2.3 : Se Γ é um grupo fuchsiano e Γ contém um grupo triangular Γ_1 , então Γ é triangular.

DEMONSTRAÇÃO:

Segue-se da Proposição 1 de [S.2] . ■

Seja Γ um grupo triangular e Γ_1 um subgrupo triangular de Γ . Então Γ age nas classes $\{g\Gamma_1, g \in \Gamma\}$ como um grupo de permutações. Esse grupo de permutação não é qualquer, tem suas propriedades características, propriedades estas desenvolvidas por Singerman [S.3] e que são contadas no seguinte

teorema; cuja prova vale para um grupo fuchsiano qualquer, mas que por simplicidade nos restringiremos ao caso dos grupos triangulares.

TEOREMA 4.2.4 : Seja Γ um grupo triangular com tipo $[m_1, m_2, m_3]$. Então Γ contém um subgrupo Γ_1 com índice N com tipo:

$(n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1\rho_1}, n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2\rho_2}, \dots, n_{31}, n_{32}, \dots, n_{3\rho_3})$ onde $\sum_{i=1}^3 \rho_i = 3$, se e somente se:

a) existe um grupo de permutações finito G transitivo em N pontos, e um epimorfismo $\theta : \Gamma \rightarrow G$ satisfazendo a seguinte condição:

"a permutação $\theta(x_j)$ tem precisamente ρ_j ciclos disjuntos de comprimentos menores que m_j , sendo o comprimento destes ciclos: $\frac{m_j}{n_{j1}}, \dots, \frac{m_j}{n_{j\rho_j}}$.

b)
$$\frac{M(\Gamma_1)}{M(\Gamma)} = N$$

DEMONSTRAÇÃO :

Suponhamos que existe tal grupo G de permutações.

Seja $G_1 \subset G$ o estabilizador de um ponto. Como G é transitivo em N pontos temos que: $[G : G_1] = N$.

Seja $\Gamma_1 = \theta^{-1}(G_1)$ então $[\Gamma : \Gamma_1] = N$.

Sejam $\gamma_1\Gamma_1, \dots, \gamma_N\Gamma_1$ as classes laterais à esquerda módulo Γ_1 .

Se $\gamma \in \Gamma$ então γ induz uma permutação nas Γ_1 -classes por levar:

$$(\gamma_1\Gamma_1, \dots, \gamma_N\Gamma_1) \text{ em } (\gamma\gamma_1\Gamma_1, \dots, \gamma\gamma_N\Gamma_1)$$

Pondo $\theta(\gamma) = g$ e $\theta(\gamma_i) = g_i$ temos que g induz a mesma permutação nas G_1 -classes laterais à esquerda:

g_1G_1, \dots, g_NG_1 , por levar:

$$(g_1G_1, \dots, g_NG_1) \text{ em } (gg_1G_1, \dots, gg_NG_1)$$

porque $\gamma\gamma_i\Gamma_1 = \gamma_r\Gamma_1$ se e somente se $gg_iG_1 = g_rG_1$.

Sejam x_1, x_2, x_3 os geradores de Γ .

Consideremos $\theta(x_j)$, isto é, x_j agindo nas Γ_1 -classes, e suponhamos que $\theta(x_j)$ tem um ciclo de comprimento $\frac{m_j}{n_{j1}} = k$. Observemos que a ordem de um ciclo é seu comprimento e divide a ordem de $\theta(x_j)$. Então existem k classes $\gamma_1\Gamma_1, \dots, \gamma_k\Gamma_1$ tais que são permutadas por este ciclo, isto é,

$$x_j \gamma_1\Gamma_1 = \gamma_2\Gamma_1, x_j \gamma_2\Gamma_1 = \gamma_3\Gamma_1, \dots, x_j \gamma_k\Gamma_1 = \gamma_1\Gamma_1.$$

e então: $\gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1 \in \Gamma_1$, mas $\gamma_1^{-1} x_j^\ell \gamma_1 \notin \Gamma_1$ para $\ell < k$.

Assim $\frac{m_j}{k} = n_{j1}$ é um período de Γ_1 , pois

$$(\gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1)^{n_{j1}} = \gamma_1^{-1} x_j^{m_j} \gamma_1 = 1.$$

Precisamos agora mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre ciclos diferentes de comprimentos menores que m_j e geradores correspondentes a x_j .

Inicialmente observemos que ciclos diferentes de comprimentos diferentes dão diferentes períodos. Isto segue do que fizemos acima pois partimos de um ciclo de comprimento k e chegamos em um período $n_{j1} = \frac{m_j}{k}$. Então para mostrarmos que existe tal correspondência basta provarmos que ciclos diferentes de mesmo comprimento dão períodos diferentes.

Suponhamos então que tenhamos dois ciclos diferentes de comprimento k correspondentes ao mesmo gerador. Então existem, digamos, k classes $\gamma_1 \Gamma_1, \dots, \gamma_k \Gamma_1$ tais que $x_j^k \gamma_1 \Gamma_1 = \gamma_1 \Gamma_1$ e k classes $h_1 \Gamma_1, \dots, h_k \Gamma_1$ tais que $x_j^k h_1 \Gamma_1 = h_1 \Gamma_1$. Deste modo obtemos:

$$\gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1 \in \Gamma_1 \quad \text{e} \quad h_1^{-1} x_j^k h_1 \in \Gamma_1.$$

Como estes dois ciclos dão o mesmo período temos que $\gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1$ e $h_1^{-1} x_j^k h_1$ são conjugados em Γ_1 . Logo existe um $\lambda \in \Gamma_1$ tal que:

$$\lambda^{-1} (h_1^{-1} x_j^k h_1) \lambda = \gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1$$

Pondo $\gamma_1^{-1} x_j^k \gamma_1 = x_j'^k$ temos que $x_j^k = \gamma_1 x_j'^k \gamma_1^{-1}$ e

assim obtemos:

$$\lambda^{-1} h_1^{-1} \gamma_1 x_j'^k \gamma_1^{-1} h_1 \lambda = x_j'^k \quad \text{e daí temos que:}$$

$$x_j^{k'} \gamma_1^{-1} h_1^\lambda = \gamma_1^{-1} h_1^\lambda x_j^{k'}$$

e isto implica que $\gamma_1^{-1} h_1^\lambda$ está no centralizador de $x_j^{k'}$, que pelo teorema 3.1.9. é um grupo cíclico gerado por $x_j^{k'}$.

Então:

$$\gamma_1^{-1} h_1^\lambda = x_j^{p'}$$
 onde $1 \leq p \leq m_j$.

e assim:

$$h_1 \Gamma_1 = \gamma_1 x_j^{p' \lambda^{-1}} \Gamma_1 = \gamma_1 x_j^{p'} \Gamma_1 = \gamma_1 \gamma_1^{-1} x_j^{p'} \gamma_1 \Gamma_1 = x_j^{p'} \gamma_1 \Gamma_1.$$

Então $h_1 \Gamma_1$ está no mesmo ciclo que $\gamma_1 \Gamma_1$.

De modo análogo podemos mostrar que dois períodos distintos não podem ser obtidos do mesmo ciclo.

Mostramos então que para cada ciclo de comprimento menor que m_j na permutação $\theta(x_j)$ existe um e somente um período induzido por m_j em Γ_1 . Também se m_j induz um período n_{ju} no subgrupo Γ_1 , então obtemos um ciclo na permutação

$\theta(x_j)$, de comprimento $\frac{m_j}{n_{ju}} = \ell$ digamos. Portanto temos o ciclo

$x_j \gamma \Gamma_1, x_j^2 \gamma \Gamma_1, \dots, x_j^\ell \gamma \Gamma_1$ para algum $\gamma \in \Gamma$.

Reciprocamente, suponhamos que Γ contém um subgrupo

Γ_1 com índice N e com tipo:

$$(n_{11}, \dots, n_{1\rho_1}; n_{21}, \dots, n_{2\rho_2}; n_{31}, \dots, n_{3\rho_3}) \text{ onde } \sum_{i=1}^3 \rho_i = 3.$$

Suponhamos que $n_{i1}, \dots, n_{i\rho_i}$ são induzidos por m_i .

Γ age nas Γ_1 -classes como um grupo de permutações.

Seja K o subgrupo de Γ de índice finito consistindo de todos os elementos que fixam toda classe. Então $K \triangleleft \Gamma$ pois $K = \text{Ker } \psi$ onde $\psi : \Gamma \longrightarrow G_n$ tal que $\gamma \longmapsto \{\gamma\gamma_i\Gamma_1\}$.

$$\text{Seja } G = \Gamma / K .$$

Temos que $K \subseteq \Gamma_1$ pois $\gamma \in K$ implica $\gamma\gamma_i\Gamma_1 = \gamma_i\Gamma_1$ e daí $\gamma \in \Gamma_1$. Claramente temos que $K \triangleleft \Gamma_1$.

$$\text{Seja } G_1 = \Gamma_1 / K .$$

Então existe um epimorfismo $\theta : \Gamma \longrightarrow G$.

$$\theta(\Gamma_1) = G_1 \text{ e } \theta^{-1}(G_1) = \Gamma_1 .$$

A ação de Γ nas Γ_1 -classes induz a mesma ação de G nas G_1 -classes e segue-se que θ tem as propriedades desejadas.

b) segue-se da proposição 4.2.2. ■

No caso em que o subgrupo Γ_1 de Γ_2 é normal, podemos escrever o tipo de Γ_1 de modo mais simples.

DEFINIÇÃO 4.2.5 : O expoente de x_i módulo Γ_1 é o menor inteiro r_i tal que $x_i^{r_i} \in \Gamma_1$.

OBSERVAÇÃO : r_i divide m_i .

Seja $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2$ com índice $[\Gamma_2 : \Gamma_1] = N$ e Γ_2 com tipo $[m_1, m_2, m_3]$. Vamos escrever o tipo de Γ_1 de um outro

modo. Podemos rearranjar os períodos de maneira que x_i tem expoente m_i módulo Γ_1 somente para $0 \leq i \leq p$ e os outros x_{i+p} tem expoente $n_i < m_{i+p}$. Então Γ_2 tem tipo:

$$(m_1, \dots, m_p, n_1 t_1, \dots, n_q t_q) .$$

onde $p+q = 3$ e $1 < t_i < \infty$.

O seguinte teorema diz qual é o tipo de Γ_1 .

TEOREMA 4.2.6 : Se $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma_2$ então o tipo de Γ_1 é:

$$\left[t_1^{\frac{N}{n_1}}, \dots, t_q^{\frac{N}{n_q}} \right] \text{ onde } \sum_{i=1}^q \frac{N}{n_i} = 3$$

$t_1^{\frac{N}{n_1}}$ significa que o período t_1 ocorre $\frac{N}{n_1}$ vezes).

DEMONSTRAÇÃO :

Seja Γ_2/Γ_1 agindo em sua representação regular, o

grupo de permutações finito G do teorema anterior, e

$\theta : \Gamma_2 \longrightarrow G$ o homomorfismo natural.

Se $i \leq p$ temos que a ordem de x_i módulo Γ_1 é m_i . Como θ é um homomorfismo temos que a ordem de $\theta(x_i)$ também é m_i . $\theta(x_i)$ é uma permutação de N letras. Cada ciclo de $\theta(x_i)$ corresponde a uma órbita em $\langle x_i \rangle$ (onde $\langle x_i \rangle$ é o subgrupo de Γ_2 gerado por x_i) de uma classe $\gamma_i \Gamma_1$. Como a ordem de x_i módulo Γ_1 é m_i , temos que toda órbita terá

o mesmo número de elementos, isto é, m_i elementos. Desde que temos N classes, teremos $\frac{N}{m_i}$ órbitas de m_i elementos. Mas, como cada órbita corresponde a um ciclo temos que $\theta(x_i)$ é um produto de $\frac{N}{m_i}$ m_i -ciclos.

$\theta(x_{i+p})$ tem ordem n_i pois x_{i+p} tem expoente n_i módulo Γ_i . Pelo mesmo argumento acima concluímos que $\theta(x_{i+p})$ é um produto de $\frac{N}{n_i}$ n_i -ciclos.

Observando que $n_i = \frac{m_{i+p}}{t_i}$ para $i \leq q$, pelo teorema 4.2.4. temos o resultado desejado. ■

Como foi descrito em [A.2], os grupos fuchsianos são maximais quase sempre. Entre os grupos triangulares, que são casos particulares dos fuchsianos, são poucos os que admitem subgrupos também triangulares. Nosso principal objetivo de agora em diante, se resume em encontrar a lista completa desses grupos. Vamos fazer a lista dos pares (grupo e subgrupo) no caso normal e no caso não-normal. Já temos as ferramentas necessárias para este trabalho. Façamos primeiramente o caso em que a inclusão é normal.

CASO NORMAL

Estamos interessados em achar todos os pares Γ, Γ_0 tal que $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ com índice finito. Se σ é o tipo de Γ e σ_0 é o tipo de Γ_0 , escrevemos $\sigma \triangleleft \sigma_0$. Portanto nosso problema é achar todos os pares de tipos tais que $\sigma \triangleleft \sigma_0$ com índice finito.

Sejam Γ, Γ_0 grupos triangulares com tipos σ, σ_0 respectivamente e tais que $\sigma \triangleleft \sigma_0$ com índice N .

Podemos supor que Γ_0 tem tipo:

$$[m_1, \dots, m_q, n_1, t_1, \dots, n_q, t_q]$$

e que Γ tem tipo:

$$\left[t_1^{\frac{N}{n_1}}, \dots, t_q^{\frac{N}{n_q}} \right].$$

Como o índice é finito temos pelo teorema 4.2.2. :

$$N = [\Gamma_0 : \Gamma] = \frac{M(\Gamma)}{M(\Gamma_0)}$$

Usando a fórmula de Riemann-Hurwitz obtemos:

$$N = \frac{1 - \sum_{i=1}^q \frac{N}{n_i} \frac{1}{t_i}}{1 - \sum_{i=1}^p \frac{1}{m_i} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{n_i t_i}}$$

Simplificando obtemos:

$$N = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p \frac{1}{m_i}}$$

Desde que N deve ser um inteiro, podemos analisar as diversas possibilidades para os m_i , nas quais isto acontece.

Eliminamos o caso em que $p=0$ pois teríamos $N=1$, que não nos interessa.

Consideremos então primeiramente o caso em que $p=1$.

Temos:

$$N = \frac{1}{1 - \frac{1}{m_1}} = \frac{m_1}{m_1 - 1}$$

Observemos que $\frac{m_1}{m_1 - 1} \in \mathbb{Z}$ somente se $m_1 = 2$, pois um número dividido por seu antecedente dá um inteiro somente se se é igual a 2. Então $m_1 = 2$.

Consideremos agora o caso em que $p=2$. Então:

$$N = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{m_i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}} \Rightarrow \frac{1}{N} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1.$$

Nosso problema agora consiste em resolver a equação:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{N} = 1.$$

Se $m_1, m_2, N > 3$ temos que :

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{N} < 1 .$$

Então pelo menos um deles é < 3 .

Suponhamos que $m_1 = 2$ então

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{N} = \frac{1}{2} .$$

Agora se $m_1, N \geq 5$ temos $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{N} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$.

Então : pelo menos um deles é < 5 , digamos m_2 .

Observemos que m_2 não pode ser 2. Pois neste caso teríamos $N = \infty$, o que não nos interessa.

Se $m_2 = 3$ obtemos $N = 6$.

Se $m_2 = 4$ obtemos $N = 4$.

Vamos agora supor $m_1 = 3$ então:

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{N} = \frac{2}{3} .$$

Observemos que $m_2, N > 3$ não ocorre pois teríamos $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{N} < \frac{2}{3}$. Então pelo menos um deles é < 3 , digamos m_2 .

Se $m_2 = 2$ obtemos $N = 6$.

Se $m_2 = 3$ obtemos $N = 3$.

Assim encerra todas as possibilidades. Façamos agora um resumo de todos os resultados obtidos:

1) $p=1, q=2, m_1 = 2, N=2$

2) $p=2, q=1$

a) $m_1 = 2 \quad m_2 = 3 \quad N=6$

b) $m_1 = 2 \quad m_2 = 4 \quad N=4$

c) $m_1 = 3 \quad m_2 = 2 \quad N=6$

d) $m_1 = 3 \quad m_2 = 3 \quad N=3$

Observemos que a) e c) são as mesmas soluções.

Vamos analisar cada um destes resultados.

1) $p=1, q=2, m_1 = 2, N=2$

Neste primeiro caso lembremos como são os tipos do grupo Γ_0 e do subgrupo Γ :

$$\sigma_0 = [m_1, \dots, m_p, n_1 t_1, \dots, n_q t_q] \text{ onde } p+q=3 .$$

$$\sigma = \left[t_1 \frac{N}{n_1}, \dots, t_q \frac{N}{n_q} \right] \text{ onde } \sum_{i=1}^q \frac{N}{n_i} = 3 .$$

Neste caso temos : $q=2$ e $N=2$ então :

$$\sum_{i=1}^2 \frac{2}{n_i} = 3 \Rightarrow \frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} = 3 .$$

Facilmente vemos que $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$.

Então temos:

$$\sigma_0 = [2, t_1, 2t_2] \text{ e } \sigma = [t_1, t_1, t_2]$$

2) $p=2$, $q=1$.

Neste caso temos: $\frac{N}{n_1} = 3 \Rightarrow n_1 = \frac{N}{3}$

a) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $N=6$ então $n_1 = 2$.

Logo:

$$\sigma_0 = [2, 3, 2t_1] \quad \text{e} \quad \sigma = [t_1, t_1, t_1]$$

b) $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $N=4$.

Neste caso temos $n_1 = \frac{4}{3}$. Eliminamos este caso porque n_1 tem que ser inteiro.

d) $m_1 = 3$, $m_2 = 3$, $N=3$ então $n_1 = 1$.

Logo:

$$\sigma_0 = [3, 3, t_1] \quad \text{e} \quad \sigma = [t_1, t_1, t_1] .$$

Estes resultados obtidos provam o seguinte teorema:

TEOREMA 4.2.7 : A seguinte é a completa lista de tipos σ , σ_0 representando grupos triangulares tais que $\sigma \triangleleft \sigma_0$.

σ	σ_0	Índice
$[t, t, t]$	$[3, 3, t]$	3
$[t, t, t]$	$[2, 3, 2t]$	6
$[t_1, t_1, t_2]$	$[2, t_1, 2t_2]$	2

CASO NÃO-NORMAL

Vamos encontrar agora todos os tipos σ, σ_0 representando grupos triangulares para os quais $\sigma \subseteq \sigma_0$ com índice finito e a inclusão é não normal.

TEOREMA 4.2.8: A seguinte é a completa lista de tipos σ, σ_0 representando grupos triangulares para os quais $\sigma \subseteq \sigma_0$ com índice finito e a inclusão é não normal:

	σ	σ_0	Índice
A.	[7,7,7]	[2,3,7]	24
B.	[2,7,7]	[2,3,7]	9
C.	[3,3,7]	[2,3,7]	8
D.	[4,8,8]	[2,3,8]	12
E.	[3,8,8]	[2,3,8]	10
F.	[9,9,9]	[2,3,9]	12
G.	[4,4,5]	[2,4,5]	6
H.	[n,4n,4n]	[2,3,4n]	6
I.	[n,2n,2n]	[2,4,2n]	4
J.	[3,n,3n]	[2,3,3n]	4
K.	[2,n,2n]	[2,3,2n]	3

DEMONSTRAÇÃO :

Se $\sigma_0 = [\ell, m, n]$ e $\sigma = [\ell_1, m_1, n_1]$, pela fórmula

de Riemann-Hurwitz o índice N é dado por:

$$N = \frac{1 - \frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{n_1}}{1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$$

A primeira condição é $N > 2$, porque a inclusão é não-normal. Outra condição é que os períodos de σ devem dividir os períodos de σ_0 .

Podemos supor $\ell \leq m \leq n$ e $\ell_1 \leq m_1 \leq n_1$. Como os períodos ℓ_1, m_1, n_1 dividem os períodos ℓ, m, n podemos ainda escrever que: $\ell_1, m_1, n_1 \leq n$. Então:

$$N < \frac{1 - \frac{3}{n}}{(1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m}) - \frac{1}{n}} = \frac{n-3}{n(1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m}) - 1}$$

A função $f(x) = \frac{x-3}{ax-1}$, quando $x \rightarrow \infty$ tende ao valor $\frac{1}{a}$. Então podemos ainda escrever:

$$N < \frac{1}{1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m}}$$

Através desta desigualdade, e sabendo que $N > 2$, vamos agora eliminar diversas possibilidades.

Vejamos então para quais valores de ℓ, m temos:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m}} < 3$$

$$1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} < \frac{2}{3}$$

Consideremos agora os seguintes casos:

1) Se $\ell = 2$ obtemos $m > 6$.

Eliminamos então os casos para os quais $\ell = 2$ e $m > 6$. Resta analisar quando $\ell = 2$ e $m \leq 6$. Obtemos os seguintes tipos: $[2,2,n]$, $[2,3,n]$, $[2,4,n]$, $[2,5,n]$ e $[2,6,n]$.

2) Se $\ell = 3$ obtemos $m > 3$.

Então eliminamos os caso para os quais $\ell = 3$ e $m > 3$. Como $\ell \leq m$, resta a considerar apenas o caso: $[3,3,n]$.

3) Se $\ell = 4$ obtemos $m > 2$.

Então eliminamos os casos para os quais $\ell = 4$ e $m > 2$. Como $m \geq \ell$ não resta nenhum outro caso a considerar.

4) Se $\ell \geq 4$.

Como $m \geq \ell$ temos $m \geq 4$, assim:

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Então não temos nenhum caso a considerar.

Resumindo, obtemos os seguintes resultados:

$[2,2,n]$, $[2,3,n]$, $[2,4,n]$, $[2,5,n]$, $[2,6,n]$, $[3,3,n]$.

Ainda podemos eliminar alguns desses casos.

Consideremos o tipo $[2,2,n]$. O subgrupo triangular de maior índice tem tipo $[n,n,n]$.

$$N = \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}} = 3 - n .$$

Como $n \geq 2$ temos $N \leq 1$. Então eliminamos este caso pois $N > 2$.

Consideremos o tipo $[2,5,n]$. O subgrupo triangular de maior índice tem tipo $[n,n,n]$. Então o índice é dado por:

$$N = \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{n}} = \frac{10(n-3)}{3n-10}$$

Como $n \geq 5$ temos que $\frac{10(n-3)}{3n-10} < 4$.

Facilmente concluímos que a única possibilidade para n e N ser inteiros é: $n=5$ e $N=4$. Mas se $[5,5,5] \subseteq [2,5,5]$, pelo teorema 4.2.4, teríamos uma imagem homomórfica de $[2,2,5]$ agindo transitivamente em 4 pontos. Um elemento de ordem 5 de veria então fixar todos os 4 pontos e isto implicaria, pelo teorema 4.2.4., que existiriam 4 períodos 5 em σ , uma contradição. Portanto eliminamos também este caso.

Consideremos o tipo $[2,6,n]$. O subgrupo triangular de maior índice tem tipo $[n,n,n]$. Então o índice é:

$$N = \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{n}} = 1 .$$

Portanto este caso está também eliminado, porque $N > 2$.

Consideremos o tipo $[3,3,n]$. O subgrupo triangular de maior índice tem tipo $[n,n,n]$ e o índice é 3. Mas este caso já ocorreu no teorema 4.2.7. Toda tal inclusão é normal, porque o único grupo de permutação possível é \mathbb{Z}_3 em sua representação regular. Logo este caso também vamos eliminar.

Portanto, nós devemos somente considerar $\sigma_0 = [2,3,n]$ ou $[2,4,n]$ e determinar se as duas condições nos subgrupos são satisfeitas. Então nós temos que olhar para o grupo de permutações apropriado. Alguns casos são facilmente eliminados. Por exemplo, sejam $\sigma_1 = [2,3,8]$, $\sigma_2 = [8,8,8]$. Se $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, então o índice seria 15 e assim o elemento de ordem 2 no grupo de permutação deveria fixar pelo menos um ponto. Mas, então pelo teorema 4.2.4., teríamos um período 2 no subgrupo. Outros casos são mais difíceis para eliminar. Por exemplo $[3,7,7] \not\subseteq [2,3,7]$ com índice 16. Tentativas e erros mostram que não existe imagem homomórfica de $[2,3,7]$ agindo transitivamente em 16 pontos.

Agora vamos exibir todos os grupos de permutações nos casos A-K do teorema. Se Γ_0 tem tipo $[\ell, m, n]$ e representação:

$$\{x, y : x^\ell = y^m = (xy)^n = 1\}$$

nós precisamos apenas escrever as permutações $\theta(x)$, $\theta(y)$ e $\theta(xy)$, onde θ é o homomorfismo do teorema 4.2.4.

	$\theta(x)$	$\theta(y)$	$\theta(xy)$
A	(1,22), (2,7), (3,11), (4,17), (5,20), (6,12), (9,14), (13,19), (10,18), (8,23), (15,24), (16,21).	(1,22,2), (3,12,7), (4,18,11), (8,23,9), (5,21,17), (6,13,20), (10,19,14), (15,24,16).	(1,2,...,7), (8,9,...,14), (15,...,21), (22), (23), (24).
B	(1,3), (2,8), (7,5), (6,9), (4).	(1,4,5), (2,8,3), (7,6,9).	(1,2,...,7), (8), (9).
C	(1,8), (2,7), (3,4), (5,6).	(1,8,2), (3,5,7), (4), (6).	(1,...,7), (8).
D	(12,5), (4,6), (3,9), (2,8), (1,11), (10,7).	(12,6,5), (11,2,1), (9,4,7), (10,8,3).	(1,...,8), (9,10), (11), (12).
E	(7,9), (10,4), (8,6), (3,5), (1,2).	(8,7,9), (5,4,10), (1,3,6), (2).	(1,...,8), (9), (10).
F	(1,10), (6,8), (11,4), (3,5), (12,7), (2,9).	(1,10,2), (4,11,5), (7,12,8), (9,3,6).	(1,...,9), (10), (11), (12).
G	(1,6), (2,3), (4,5).	(1,6,2,4), (3), (5).	(1,...,5), (6).
H	(1,3), (4,5), (2,6).	(1,4,5), (2,6,3),	(1,...,4), (5), (6).
I	(1,3), (2,4).	(1,3,2,4).	(1,2), (3), (4).
J	(1,4), (2,3).	(1,4,2), (3).	(1,2,3), (4).
K	(1,3), (2).	(1,3,2).	(1,2), (3).

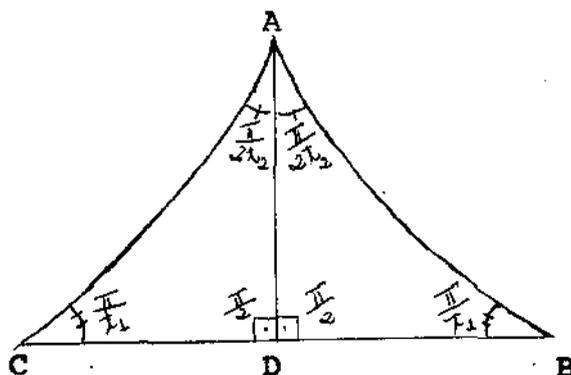
Consideremos o caso A. Neste caso x tem ordem 2. $\theta(x)$ não tem nenhum ciclo de comprimento menor que 2. Então não há contribuição para geradores de Γ . O gerador y tem ordem 3 e $\theta(y)$ não tem nenhum ciclo de comprimento menor que 3. Logo também não há contribuição nenhuma para os geradores de Γ . Agora (xy) tem ordem 7 e $\theta(xy)$ tem ciclos de comprimento menores que 7. Neste caso há contribuição para os geradores de Γ . Estes 3 ciclos tem comprimento 1, logo os períodos

para Γ são $7, 7, 7$. Devido a existência do grupo de permutações apropriado, temos que realmente existe o subgrupo $[7,7,7]$.

De modo similar encontramos todos os outros casos. Obtemos assim a lista completa dos tipos σ, σ_0 representando grupos triangulares para os quais $\sigma \subseteq \sigma_0$ com índice finito, e a inclusão é não normal. ■

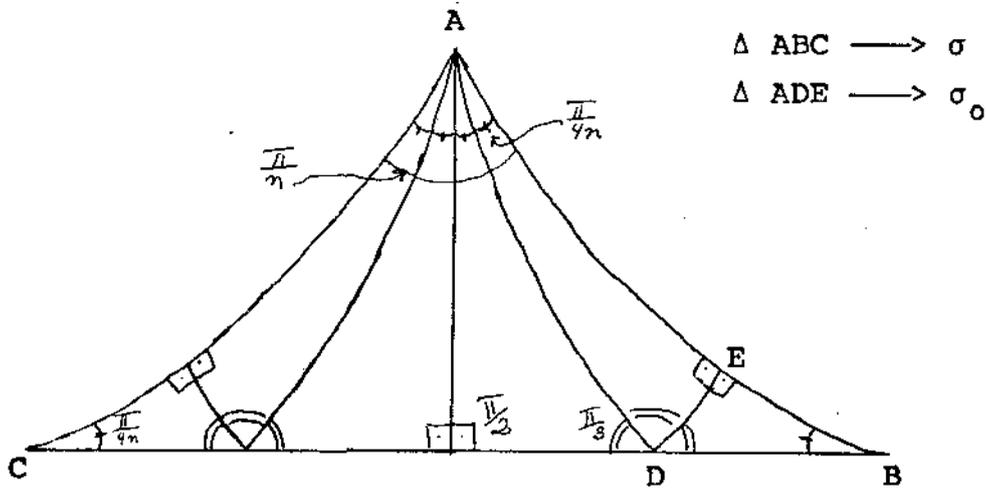
Vamos agora exibir as regiões fundamentais para alguns desses pares obtidos.

Primeiramente consideremos no caso normal o par $[2, t_1, 2t_2] = [t_1, t_1, t_2]$ com índice 2. A figura abaixo representa os triângulos correspondentes às tecelagens associadas ao Γ_0 e Γ respectivamente $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$.

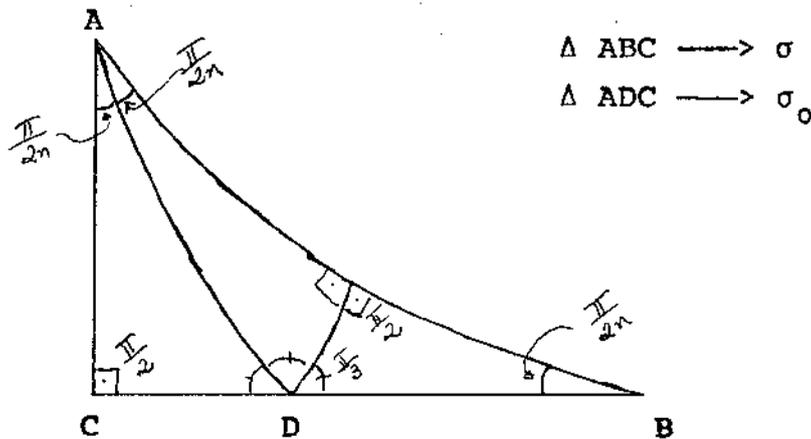


Consideremos agora, no caso não-normal os resultados H e K. Vamos exibir os triângulos das tecelagens correspondentes a σ e a σ_0 .

CASO H : $\sigma = [n, 4n, 4n]$, $\sigma_0 = [2, 3, 4n]$, $N = 6$.



CASO K : $\sigma = [2, n, 2n]$, $\sigma_0 = [2, 3, 2n]$, $N = 3$.



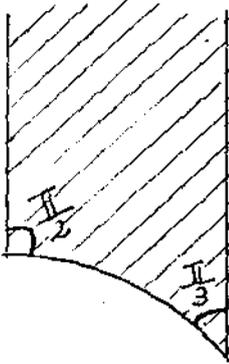
OBSERVAÇÃO : Pode-se mostrar que $SL_2(\mathbb{Z})$ o conjunto de todas as matrizes em $SL_2(\mathbb{R})$ com coeficientes inteiros, nada mais é que $[2, 3, \infty]$, e que $[2, \infty, \infty]$ é subgrupo de índice 3, $[3, 3, \infty]$ é subgrupo de índice 2 e $[\infty, \infty, \infty]$ é subgrupo de índi

ce 6 . Neste caso $\sigma = [\infty, \infty, \infty]$ nada mais é que $\Gamma(2)$ onde

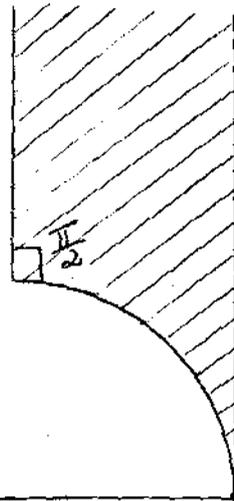
$$\Gamma(2) = \{g \in SL_2(\mathbb{Z}) : g \equiv \pm I \text{ modulo } 2\}$$

= subgrupo de congruência de nível 2.

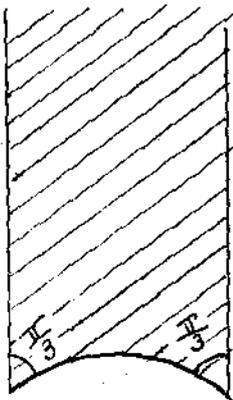
Também $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2) \approx S_3$ (grupo de permutações de 3 elementos).



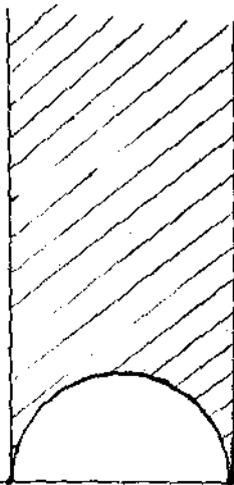
$[2, 3, \infty]$



$[2, \infty, \infty]$



$[3, 3, \infty]$



$[\infty, \infty, \infty]$

BIBLIOGRAFIA

- [A.1] AHLFORS, L.V. - *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1953.
- [A.2] ALLAN, N. - "The problem of maximality of arithmetic groups", *Pro. of Symp. in Pure and Applied Math.*, vol. 9 p. 104-109.
- [B.1] BOURBAKI, N. - *Algebre*, (vol. VI), Paris Hermann, 1968.
- [F.1] FORD, L. - *Automorphic functions*, Chelsea, N.Y. 1929.
- [G.1] GREENBERG, L. - "Maximal Fuchsian groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69(1963), 569-573.
- [G.2] GUGGENHEIMER, H.- *Plane geometry and its groups*, Holden Day, N.Y. 1967.
- [H.1] HERNSTEIN, I.N.- *Tópicos de Algebra*, Editora da Univ. de São Paulo, 1970.
- [M.1] MACBEATH, A.M. - "Discontinuous Groups and Birational Transformations", Queen's College Dundee , Univ. of St. Andrews.

- [M.2] MACLACHLAN, C. - "Maximal normal Fuchsian groups",
Illinois J. Math. 15 (1971):
- [S.1] SCHLEGEL, V. - "Theorie der homogenen
zusammengesetzten Raumgebilde", Verh. K.
Leopold. Carolin, Dtsch, Akad. Naturforsch.
44, 343-459 (1883).
- [S.2] SINGERMAN, D. - "Finitely Maximal Fuchsian Groups",
J. London Math. Soc. (2), 6 (1972), 29-38.
- [S.3] SINGERMAN, D. - "Subgroups of Fuchsian groups and
finite permutation groups", Bull. London
Math. Soc., 2 (1970), 319-323.