

ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS POLINOMIAIS COM
SIMETRIA CILÍNDRICA

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. GILSON ANTONIO GIRALDI e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de agosto de 1993.



Prof. Dr. Patrício A. Letelier Sotomayor
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS POLINOMIAIS COM SIMETRIA CILÍNDRICA

Aluno: Gilson Antonio Giraldi

Orientador: Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor

DMA - IMECC - UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS POLINOMIAIS COM SIMETRIA CILÍNDRICA
GILSON ANTONIO GIRALDI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

*A minha esposa,
Maria Thereza Miranda Rocco Giraldi,
cujo amor e carinho tanto me apoiaram
durante a elaboração deste trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Patricio A. Letelier pelo tema proposto e pela orientação objetiva e crítica, essenciais no decorrer deste trabalho.

Ao Dr. Vincent Buonomano pela valiosa orientação computacional.

Ao Professor Dr. Vilson Tonin Zanchin, pela leitura da versão final do trabalho.

Ao funcionário do laboratório de computação (LABMA), Dorival Inácio de Oliveira, e aos funcionários do serviço de assistência técnica (SAT), Alcides Ribeiro Junior e Gilberto Pimentel Junior, pelo importante auxílio material e computacional.

Ao aluno de Doutorado, Paulo Renato, pela leitura, correção do português e pelas valiosas sugestões apresentadas que vieram enriquecer e completar o trabalho.

Ao CNPq e FAEP pelo apoio financeiro.

PREFÁCIO

A pesquisa incluída nesta Tese de Mestrado foi realizada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Todos os cálculos necessários foram realizados utilizando-se o pacote "MATHEMATICA", sendo a versão final dos gráficos confeccionada no pacote gráfico "GRTOOL".

RESUMO

Neste trabalho consideramos ondas gravitacionais com simetria cilíndrica que possam ser reduzidas à forma de Einstein-Rosen.

Dentre as componentes tetrádicas não nulas do tensor de Riemann-Cristoffel da métrica de interesse, destacamos 3 independentes que geram as demais.

Escolhemos a classe de soluções polinomiais da equação de onda cilíndrica correspondente e analisamos as componentes tetrádicas independentes e os invariantes de curvatura calculados para alguns elementos desta classe.

Analisamos também a Energia C no contexto do presente trabalho, concluindo que as duas definições propostas não se aplicam aos nossos casos.

ABSTRACT

In this work, the gravitational waves with cylindrical symmetry which can be reduced to the Einstein-Rosen form are considered.

From the non-null tetradic components of the Riemann-Cristoffel tensor associated to this metric we distinguish three independent components which generate the others.

A polynomial class of solutions for the correspondent cylindrical wave equation is studied. We analyse the independent tetradic components and the invariants of curvature for some elements of this class.

We also analyse the concept of C-Energy in the context of the present work. We conclude that both definitions proposed are not applicable in this case.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO.....	01
II.	GEOMETRIA PSEUDO-RIEMANNIANA E EQUAÇÕES DE EINSTEIN	
1.	Definições e Notações.....	04
2.	Invariantes de Curvatura.....	05
3.	Equações de Einstein.....	06
III.	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN.....	07
1.	A. Sólitons.....	09
2.	B. Funções de Bessel.....	10
3.	C. Funções Polinomiais.....	11
IV.	O ESPAÇO-TEMPO.....	12
V.	EQUAÇÕES POLINOMIAIS	
1.	Introdução.....	17
2.	Estudo do Conjunto D_{1p}^{in} , $1 \leq i \leq 5$, $0 \leq n \leq 5$	20
VI.	DIAGRAMAS DAS SOLUÇÕES	
1.	Introdução.....	57
2.	Diagramas.....	58
VII.	ESTUDOS GERAIS DOS DIAGRAMAS.....	77

VIII. ANÁLISE "ONDULATÓRIA"

- 1. Introdução.....84
- 2. Análise "Ondulatória" das Funções (4.25)-(4.27) para $n = 2$,
 $q = 1$ e $p = 1/2$85
 - 2.1. Análise de (4.25) para $i = 1$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$...85
 - 2.2. Análise de (4.25) para $i = n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$88
 - 2.3. Análise de (4.25) para $i = 3$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$...90
 - 2.4. Análise de (4.26) para $i = 4$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$...94
 - 2.5. Análise de (4.27) para $i = 5$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$...96

IX. ENERGIA C.....155

X. CONCLUSÃO.....161

APÊNDICE A

- 1. Influência do Parâmetro q no Comportamento das Soluções
de (4.28).....163

APÊNDICE B

- 1. Polinômios $P_{in}(l.p.z.t)$167

REFERÊNCIAS.....180

I. INTRODUÇÃO

As teorias da física geralmente envolvem um modelo matemático, definido por um sistema de equações diferenciais, e um conjunto de regras para interpretar resultados matemáticos como afirmações sobre o mundo físico.

No caso das teorias de gravitação é comumente aceito que a teoria mais bem sucedida é a Relatividade Geral de Einstein. Aqui as equações diferenciais (equações de Einstein) relacionam a geometria do espaço com a distribuição de matéria e energia do mesmo, como veremos no próximo capítulo.

A Teoria da Relatividade Geral foi criada por Albert Einstein e divulgada em 1915. Nos primeiros anos de pesquisa dentro dessa teoria, somente um pequeno número de soluções exatas foram discutidas. Essas soluções correspondiam a problemas físicos idealizados e com alta simetria. Como exemplo podemos citar as soluções esfericamente simétricas de Schwarzschild, Reissner e Nordström, Tolman e Friedmann, as soluções de Weyl e as métricas de ondas planas.

Passada esta primeira fase, nos anos seguintes pouca importância foi dada à busca e ao estudo de soluções exatas devido à pouca diferença entre os resultados newtonianos e os relativísticos.

Com exceção dos estudos cosmológicos e dos modelos estelares, a grande variedade de problemas físicos estudados pelos relativistas na nova fase foi tratada somente por métodos de aproximação, especialmente os de campo fraco e de movimento lento.

O estudo de soluções exatas passou a despertar maior interesse a partir do desenvolvimento de técnicas matemáticas que foram gradualmente tornando-se familiares aos físicos.

A primeira técnica foi o uso de grupos de movimento, especialmente na construção de cosmologias mais gerais que as de Friedmann. A segunda técnica, que foi em parte motivada pelo estudo da radiação gravitacional, foi a classificação algébrica de Petrov do tensor de Weyl, e a compreensão das propriedades de métricas algebricamente "especiais". Estes desenvolvimentos conduziram ao uso de invariantes definidos em uma base de tétradas em lugar de bases

coordenadas.

O método das tétradas nulas, juntamente com algumas idéias da teoria de representação de grupos e geometria algébrica, deram surgimento à técnica dos spinores (e métodos equivalentes), agora usualmente explorada na forma dada por Newman e Penrose [11].

Os métodos acima renovaram o interesse pelo estudo de soluções exatas das equações de Einstein e permitiram que novas soluções fossem encontradas.

Uma classe particularmente interessante de soluções exatas das equações de Einstein é constituída pelas ondas gravitacionais com simetria cilíndrica. Soluções deste tipo foram estudadas pela primeira vez por Einstein e Rosen [6], que obtiveram algumas soluções especiais depois denominadas ondas de Einstein-Rosen. Desde este trabalho pioneiro, o estudo de ondas cilíndricas tem atraído atenção periodicamente e contribuições foram dadas por Rosen, Marder, Thorne e Stachel entre outros. (Nas páginas 220-27 da referência [11] encontra-se uma bibliografia completa do assunto).

Na década de 1980, técnicas matemáticas usadas para gerar soluções do tipo sóliton em vários campos da física foram aplicadas às equações de Einstein para o campo gravitacional, começando com o trabalho pioneiro de Belinskii e Zakharov [2,3]. Este esforço permitiu encontrar uma grande quantidade de novas soluções exatas para as equações de Einstein com simetria cilíndrica. Muitas destas soluções podem ser interpretadas como pulsos de ondas gravitacionais, o que levou vários físicos a identificá-las com os sólitons que aparecem em outras áreas [9,4].

Mais recentemente, o estudo de ondas gravitacionais vem sendo motivado pela montagem de experimentos de detecção, como por exemplo o LIGO (Large Interferometry Gravitational Observatory), ainda em projeto.

Neste trabalho consideramos apenas ondas gravitacionais com simetria cilíndrica que possam ser reduzidas à forma de Einstein-Rosen [5]. Quando procuramos uma solução deste tipo para as equações de Einstein, obtemos um sistema de equações diferenciais onde uma das equações é a equação de onda cilíndrica [4]. Encontrando uma solução

particular desta equação, podemos encontrar o tensor métrico, e através deste obter o tensor de Riemann-Christoffel e suas componentes tetrádicas.

Como a compreensão do conteúdo a ser desenvolvido necessita de conceitos e definições básicas de geometria pseudo-riemaniana, apresentamos no Capítulo 2 um sumário das idéias principais, finalizando o mesmo com uma breve discussão das equações de Einstein.

No Capítulo 3 particularizamos as equações de Einstein para a métrica de Einstein-Rosen. A equação de onda cilíndrica correspondente pode ser resolvida, dentre outras formas, pelo método de Belinskii e Zakharov (sólitons), por separação de variáveis ou por funções polinomiais. Os três tipos de soluções geradas pelos métodos citados são apresentados e comentados nesse capítulo.

No Capítulo 4 apresentamos a métrica de Einstein-Rosen na forma relevante para o presente trabalho, sendo que as soluções polinomiais da equação de onda cilíndrica correspondente, apresentadas no Capítulo 3, serão então utilizadas.

Das componentes tetrádicas não nulas do tensor de Riemann-Christoffel, destacamos 8 que por relações de simetria geram todas as outras. Destas 8 componentes encontramos no máximo 3 independentes, sendo as demais combinações lineares destas.

No Capítulo 5 apresentamos algumas técnicas matemáticas a partir das quais analisamos algumas equações polinomiais de interesse e definimos o conceito de "ponto de ramificação" que será muito importante no contexto deste trabalho.

No Capítulo 6 apresentamos vários diagramas de soluções das equações polinomiais obtidas.

No Capítulo 7 relacionamos os resultados dos Capítulos 5 e 6, e fazemos alguns comentários sobre os diagramas.

No Capítulo 8 estudamos a evolução temporal dos elementos geométricos que nós chamamos "ondas", os quais estão intimamente ligados com os pontos de ramificação.

No Capítulo 9 apresentamos duas definições para a energia C , e as estudamos no contexto do presente trabalho.

No Capítulo 10 apresentamos as conclusões e considerações finais.

II. GEOMETRIA PSEUDO-RIEMANNIANA E EQUAÇÕES DE EINSTEIN

1) Definições e notações

As notações $F_{,z}$ e $\partial F/\partial z$ serão usadas indistintamente durante esse trabalho, aplicando-se o mesmo a F_t e $\partial F/\partial t$ (F é uma função diferenciável qualquer).

Seja M uma variedade quadridimensional munida de uma métrica g de assinatura $(+---)$, a qual em coordenadas locais $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, z, x, y)$ pode ser escrita na forma

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.1.1)$$

A conexão compatível com a métrica g é definida em coordenadas locais pelos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\lambda\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\rho} - g_{\rho\lambda,\nu} \right], \quad (2.1.2)$$

onde $g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu$.

Define-se o tensor de Riemann-Cristoffel como sendo aquele que, na base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, tem componentes

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda, \quad (2.1.3)$$

e a partir do qual definimos o tensor

$$R_{\omega\mu\nu\rho} = g_{\omega\lambda} R_{\mu\nu\rho}^\lambda. \quad (2.1.4)$$

Chamamos tensor de Ricci ao tensor obtido contraindo-se o primeiro e o terceiro índices do tensor de Riemann-Cristoffel. Suas componentes

$$R_{\mu\rho} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\rho} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma} . \quad (2.1.5)$$

A curvatura escalar, ou escalar de Ricci, é definida por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.1.6)$$

Seja $\{e_{\mu}\}$ uma base ortonormal não-holonômica de campos vetoriais suaves $e_{\mu} = e^{\mu}_a v_a$, satisfazendo

$$e^a_{\mu} g_{a\lambda} e^{\lambda}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} ,$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = +1, \quad \text{se } \mu = \nu = 0 ,$$

$$\eta_{\mu\nu} = -1, \quad \text{se } \mu = \nu = 1, 2, 3 ,$$

$$\eta_{\mu\nu} = 0, \quad \text{se } \mu \neq \nu .$$

Nestas condições $\{e_{\mu}\}$ é chamada uma tetrada ortonormal e as componentes de um tensor T qualquer nessa base são chamadas componentes tetrádicas (ou físicas) do tensor, sendo destacadas com o símbolo (^) sobre os índices. Para o tensor (2.1.4) as componentes tetrádicas são dadas por

$$R^{\wedge\wedge\wedge\wedge}_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{abcd} e^a_{\rho} e^b_{\sigma} e^c_{\nu} e^d_{\mu} . \quad (2.1.7)$$

2) Invariantes de curvatura

Entende-se por invariantes de curvatura as funções definidas a

partir do índice de permutação ϵ_{abcd} , dos tensores $g_{\mu\nu}$ e $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$, e que são independentes das coordenadas nas quais expressamos esses tensores. Dos 14 invariantes [8] que caracterizam uma variedade quadridimensional munida de uma métrica de assinatura (+---), apenas dois nos interessam:

$$R_1 = R^{\wedge\wedge\wedge\wedge}_{ijkl} R^{\wedge\wedge\wedge\wedge}_{ijkl} \quad (2.2.1)$$

chamado invariante de Kretschmann, e

$$R_2 = R^{\wedge\wedge\wedge\wedge}_{ijkl} R^{\wedge\wedge\wedge\wedge}_{klmn} R^{\wedge\wedge}_{ij}{}^{mn}, \quad (2.2.2)$$

pois, nos casos que consideraremos, os outros invariantes serão identicamente nulos devido às propriedades de simetria do espaço e às equações de campo.

3) Equações de Einstein

Na Teoria da Relatividade Geral o espaço-tempo é uma variedade quadridimensional M onde está definida uma métrica de assinatura (+---).

As equações que relacionam a distribuição de matéria e energia do espaço com a curvatura do mesmo são as equações de Einstein, que em unidades geométricas (nas quais a constante de gravitação de Newton (G) e a velocidade da luz (c) são iguais a 1) são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = - 8 \pi T_{\mu\nu}, \quad (2.3.1)$$

O tensor $T_{\mu\nu}$ é chamado tensor de energia-momentum, representando a fonte do campo gravitacional; Λ é a constante cosmológica.

Neste trabalho estudamos soluções das equações de Einstein para o vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) e sem constante cosmológica ($\Lambda=0$). Neste caso as equações (2.3.1) reduzem-se a

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3.2)$$

que são as equações de Einstein para o vácuo.

III. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As soluções das equações de Einstein para o vácuo, que vamos considerar, são métricas da forma

$$ds^2 = f(dt^2 - dz^2) - g_{ab} dx^a dx^b, \quad (3.1)$$

onde f e g_{ab} são funções de t e z somente ($a, b = 1, 2$), suficientemente diferenciáveis.

Por conveniência vamos impor a condição $\det(g_{ab}) = t^2$, o que não implica em perda de generalidade [15].

As equações de Einstein para o vácuo, correspondentes a (3.1), podem então ser escritas na forma [4]

$$U_{,t} - V_{,z} = 0, \quad (3.2)$$

$$(\ln f)_{,t} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{4t} \text{Tr}(U^2 + V^2), \quad (3.3a)$$

$$(\ln f)_{,z} = \frac{1}{2t} \text{Tr}(UV), \quad (3.3b)$$

onde as matrizes U e V são dadas por:

$$U = t g^{-1} g_{,t}, \quad (3.4a)$$

e

$$V = t g^{-1} g_{,z}, \quad (3.4b)$$

sendo $g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$.

Por simplicidade restringimo-nos aos casos onde a métrica (3.1) pode ser escrita na forma de Einstein-Rosen

$$ds^2 = f(dt^2 - dz^2) - t(e^F dx^2 + e^{-F} dy^2), \quad (3.5)$$

onde f e F são funções de t e z somente.

As equações (3.2)-(3.3b), para a métrica (3.5), podem ser escritas como:

$$F_{,tt} + \frac{F_{,t}}{t} - F_{,zz} = 0, \quad (3.6)$$

$$(\ln f)_{,t} = -\frac{1}{2t} + \frac{t}{2} \left(F_{,z}^2 + F_{,t}^2 \right), \quad (3.7)$$

$$(\ln f)_{,z} = tF_{,z}F_{,t}. \quad (3.8)$$

Seja F uma solução de (3.6), duas vezes continuamente diferenciável. Então

$$(\ln f)_{,tz} = \frac{t}{2} \left(2F_{,z}F_{,zz} + 2F_{,t}F_{,tz} \right), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} (\ln f)_{,zt} &= F_{,z}F_{,t} + tF_{,zt}F_{,t} + tF_{,z}F_{,tt} \\ &= tF_{,z} \left(\frac{F_{,t}}{t} + F_{,tt} \right) + tF_{,zt}F_{,t} \\ &= tF_{,z}F_{,zz} + tF_{,zt}F_{,t} = tF_{,z}F_{,zz} + tF_{,t}F_{,tz}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10) concluímos que a condição de integrabilidade de (3.7) e (3.8), $(\ln f)_{,zt} = (\ln f)_{,tz}$, está satisfeita. Podemos então escrever:

$$\ln f = \int_c \left[-\frac{1}{2t} + \frac{t}{2} \left(F_{,z}^2 + F_{,t}^2 \right) \right] dt + tF_{,z}F_{,t} dz. \quad (3.11)$$

onde c é um caminho qualquer no domínio de F .

Portanto, encontrando soluções de (3.6) de classe C^2 , poderemos encontrar f , a menos de uma constante de integração, através de (3.11).

Apresentaremos 3 tipos de soluções para (3.6):

A) Sólitons:

Este tipo de solução é obtido resolvendo-se a equação (3.6) pelo método desenvolvido por Belinskii e Zakharov [2,3], que consiste numa forma modificada da técnica do espalhamento inverso.

Partindo da métrica de Kasner na forma (ver forma padrão no Capítulo 6)

$$ds^2 = t^{(p-1)/2} (dt^2 - dz^2) - t^{(p+1)} dx^2 - t^{(1-p)} dy^2, \quad (3.12)$$

que é uma solução particular do sistema (3.6)-(3.8), o método de Belinskii e Zakharov gera a seguinte classe de soluções para (3.6) [5]:

$$F = F_0 + F_s = p \ln t + \sum_{j=1}^s m_j \ln \left(\frac{\mu_j}{t} \right), \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^s m_j = n,$$

onde $\mu_j^\pm = u_j - z \pm [(u_j - z)^2 - t^2]^{1/2}$ são as trajetórias dos pólos da matriz de espalhamento, que são reais ou complexas, conforme o valor do parâmetro

$$u_j = z_j^0 - iw_j \quad (z_j^0, w_j \text{ são reais});$$

m_j é um inteiro dando a degenerescência do pólo μ_j e s é o número de pólos distintos.

O coeficiente f é dado por:

$$f = f_0 t^{n(4-n)/2} \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{t} \right)^{(2+p-n)} \prod_{\substack{j=1 \\ i>j}}^n (\mu_i - \mu_j)^2 \prod_{i=1}^n (\mu_i^2 - t^2)^{-1} \right], \quad (3.14)$$

onde $f_0 = t^{(p^2-1)/2}$ é a componente g_{00} da métrica de Kasner quando esta é dada na forma (3.12).

Para pólos degenerados devemos efetuar um cálculo limite em (3.14), tendo em mente que f pode ser multiplicado por qualquer parâmetro arbitrário.

Os pólos podem ser escolhidos dentre μ_j^+ e μ_j^- , embora eles estejam relacionados por $\frac{\mu_j^+}{t} = \frac{t}{\mu_j^-}$.

É interessante que certas quantidades definidas através dos coeficientes métricos propagam-se como sólitons [4]. Um sóliton é um pulso que se propaga com velocidade e forma constantes, mantendo sua forma e velocidade após as colisões [4, 12].

B) Funções de Bessel

Pelo método de separação de variáveis, podemos separar a equação (3.6) em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em t , e uma segunda equação que sob uma simples mudança de variável se torna uma equação de Bessel. Assim, obtemos uma nova classe de soluções para (3.6) dada por

$$F(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(C(k)\text{sen } kz + D(k)\text{cos } kz \right) \left(E(k)J_0(kt) + G(k)Y_0(kt) \right), \quad (3.15)$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero e Y_0 é função de Bessel de segunda espécie de ordem zero, dadas por

$$J_0(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (\xi/2)^{2j}}{j! \Gamma(j+1)},$$

$$Y_0(\xi) = \frac{2}{\pi} (\ln(\xi/2) + \gamma) J_0(\xi) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(\xi)^2}{2^2} - \frac{(\xi)^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(\xi)^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \right\},$$

onde $\gamma = 0,5772156\dots$ é a constante de Euler. As funções C, D, E, G são determinadas a partir das condições iniciais e de contorno impostas sobre F.

C) Funções polinomiais.

Um terceiro tipo de solução de (3.6) é dado pelo polinômio

$$L_n(t, z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2k} (n-2k)! (k!)^2} z^{(n-2k)} t^{2k}, \quad (3.16)$$

onde $[n/2]$ significa a parte inteira de $(n/2)$ [14].

Neste caso, teremos, para $F = L_n$ em (3.11), a função $f = f_n$ dada por

$$\ln f_n = \log t^{-1/2} + \sum_{l, k=0}^{[n/2]} \frac{(n!)^2}{(n-2k)! (n-2l)! (k!!)^2 2^{2(k+l)}} \\ \times \left[\frac{kl}{k+1} + \frac{(n-2k)(n-2l)}{4(k+1+1)} \frac{t^2}{z^2} \right] z^{2(n-k-l)} t^{2(k+l)}.$$

Esse tipo de solução será estudado com mais detalhes no próximo capítulo.

IV. O ESPAÇO-TEMPO

Seja M uma variedade quadridimensional munida de uma métrica que em coordenadas (t,z,x,y) é dada por

$$ds^2 = t^{(p^2 - 1)/2} e^{w + p\phi} (dt^2 - dz^2) - t(t^p e^\phi dx^2 + t^{-p} e^{-\phi} dy^2), \quad (4.1)$$

onde $w = w(z,t)$ e $\phi = \phi(z,t)$ são funções contínuas com derivadas de primeira e segunda ordens contínuas no domínio

$$\left\{ (t,z) ; t > 0 \text{ e } -\infty < z < +\infty \right\},$$

e p é um parâmetro real. Esta métrica corresponde a métrica (3.5) com

$$f = t^{(p^2 - 1)/2} e^{w + p\phi}, \quad (4.2)$$

$$F = \ln t^p + \phi. \quad (4.3)$$

No que segue o espaço-tempo será sempre uma variedade quadridimensional M com um tensor métrico do tipo (4.1). Essa métrica é interessante, pois se $\phi = w = 0$ podemos efetuar uma mudança de coordenadas e obter a métrica de Kasner (Bianchi I) na forma padrão, como veremos a seguir.

Inicialmente devemos substituir (4.1) nas equações de Einstein para o vácuo $R_{\mu\nu} = 0$, a fim de obtermos equações envolvendo ϕ e w . Se assim o fizermos, de (3.6), (3.7), (3.8) e (3.11), encontraremos:

$$\phi_{,tt} + \frac{\phi_{,t}}{t} - \phi_{,zz} = 0, \quad (4.4)$$

$$w_{,t} = \frac{t}{2} \left[\phi_{,z}^2 + \phi_{,t}^2 \right], \quad (4.5)$$

$$w_{,z} = t \phi_{,z} \phi_{,t}, \quad (4.6)$$

$$w(z,t) = w[\phi] = \int_c (t/2)[(\phi_{,z})^2 + (\phi_{,t})^2] dt + t \phi_{,z} \phi_{,t} dz. \quad (4.7)$$

A classe de soluções da equação (4.4) que usaremos nesse trabalho será aquela dada em (3.16). Essas soluções são funções polinomiais em z e t , tendo portanto derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Neste trabalho, por simplicidade, usaremos apenas as seis primeiras funções de (3.16) e as funções w correspondentes,

$$L_0 = 1 \quad w_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$L_1 = z \quad w_1 = t^2/4, \quad (4.9)$$

$$L_2 = z^2 + (1/2)t^2 \quad w_2 = z^2 t^2 + t^4/8, \quad (4.10)$$

$$L_3 = z^3 + (3/2)t^2 z \quad w_3 = (9/4)t^4 z^2 + (9/4)t^2 z^4 + (9/48)t^6, \quad (4.11)$$

$$L_4 = z^4 + 3 z^2 t^2 + (3/8)t^4 \quad w_4 = (21/2)z^4 t^4 + (9/2)z^2 t^6 + (9/64)t^8 + 4 z^6 t^2, \quad (4.12)$$

$$L_5 = 15 t^4 z + 5 t^2 z^3 + z^5 \quad w_5 = (45/256) t^{10} + (225/32) t^8 z^2 + (525/16)t^6 z^4 + (125/4)t^4 z^6 + (25/4)t^2 z^8, \quad (4.13)$$

onde

$$w_n(z,t) = \int_c (t/2) [(L_{n,z})^2 + (L_{n,t})^2] dt + t L_{n,z} L_{n,t} dz. \quad (4.14)$$

Seja agora, a tetrada $\{ e_0, e_1, e_2, e_3 \}$, onde

$$e_0 = (1/(t^{(p^2 - 1)/4} e^{(w + p \phi)/2})) \partial_t,$$

$$e_1 = (1/(t^{(p^2 - 1)/4} e^{(w + p \phi)/2})) \partial_z,$$

$$e_2 = (1/(t^{(p+1)/2} e^{\phi/2})) \partial_x,$$

$$e_3 = (1/(t^{(-p+1)/2} e^{-\phi/2})) \partial_y,$$

sendo $\{\partial_t, \partial_z, \partial_x, \partial_y\}$ a base coordenada.

Calculando as componentes tetrádicas $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ na base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, obtivemos que, com as 8 componentes

$$I_1 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0101}, \quad I_2 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1212}, \quad I_3 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3130}, \quad I_4 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0202},$$

$$I_5 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0212}, \quad I_6 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0303}, \quad I_7 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1313}, \quad I_8 = R^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2323},$$

podemos, através das relações de simetria do tensor R_{abcd} , obter as componentes tetrádicas não-nulas deste caso.

Das 8 componentes anteriores podemos escolher, por exemplo, I_1, I_2 e I_3 como independentes e obter as outras em função destas, através das relações

$$I_4 = I_2 - I_1, \tag{4.15}$$

$$I_5 = -I_3, \tag{4.16}$$

$$I_6 = -I_2, \tag{4.17}$$

$$I_7 = -I_4 = I_1 - I_2, \tag{4.18}$$

$$I_8 = -I_1. \tag{4.19}$$

Em vista da linearidade de (4.4), $q\phi$ será uma solução sempre que ϕ o for ($q = \text{const.}$); a solução w correspondente a $q\phi$ será, por (4.7), $w[q\phi] = q^2 w[\phi]$. Assim, as expressões de I_1, I_2 e I_3 podem ser escritas na forma mais geral:

$$I_1 = I_1[q,p,z,t,\phi,w] = \frac{1}{8 t^{(p^2+3)/2} e^{q^2 w + p q \phi}} \left[2 t^2 q^2 (\phi_{,z})^2 - \right. \\ \left. - 4 t p q \phi_{,t} - 2 p^2 + 2 \right], \quad (4.20)$$

$$I_2 = I_2[q,p,z,t,\phi,w] = \frac{1}{8 t^{(p^2+3)/2} e^{q^2 w + p q \phi}} \left[(1 + p + t q \phi_{,t}) \right. \\ \left. (- t^2 q^2 (\phi_{,t})^2 - 2 p t q \phi_{,t} - p^2 + 1) + \right. \\ \left. q^2 (\phi_{,z})^2 (-3 p t^2 + t^2 - 3 t^3 q \phi_{,t}) + 4 t^2 q \phi_{,zz} \right], \quad (4.21)$$

$$I_3 = I_3[q,p,z,t,\phi,w] = \frac{1}{8 t^{(p^2+3)/2} e^{q^2 w + p q \phi}} \left[q \phi_{,z} t \right. \\ \left. (3 p^2 - 3 + t^2 q^2 (\phi_{,z})^2) + q^2 \phi_{,z} \phi_{,t} t^2 \right. \\ \left. (6 p + 3 t q \phi_{,t}) - 4 t^2 q \phi_{,tz} \right]. \quad (4.22)$$

No Apêndice A mostramos que se $q > 0$ este reflete-se apenas como um fator de escala em I_1 , I_2 e I_3 , quando ϕ e w são dados por (3.16) e (4.14) respectivamente; se $q = 0$, obviamente teremos a solução trivial de (4.4); se $q < 0$, a situação é mais complicada e está discutida brevemente no Apêndice A.

Usando as componentes tetrádicas $R_{\rho\sigma\mu\nu}$, juntamente com as relações (4.15)-(4.19), encontramos para os invariantes (2.2.1) e (2.2.2) as seguintes expressões:

$$R_1 = R_1[q,p,z,t,\phi,w] = 16 \left[(I_1)^2 + (I_2)^2 - I_2 I_1 - (I_3)^2 \right], \quad (4.23)$$

$$R_2 = R_2[q,p,z,t,\phi,w] = -48 \left[(I_1)^2 I_2 + I_1 (I_2)^2 - I_1 (I_3)^2 \right]. \quad (4.24)$$

Dado um par (L_n, w_n) dentre aqueles listados em (4.8)-(4.13), fazendo $\phi = L_n$ e $w = w_n$ em (4.20)-(4.24), poderemos considerar cada uma das expressões I_1, I_2, I_3, R_1 e R_2 como uma família de funções a dois parâmetros q e p . Portanto, com os seis pares (L_n, w_n) listados obteremos 30 famílias de funções a dois parâmetros. Para distinguirmos uma família das outras usaremos a notação $J_{in}(q,p,z,t)$, ($i = 1,2,3,4,5$; $n = 0,1,2,3,4,5$), onde:

$$J_{in}(q,p,z,t) = I_i[q,p,z,t,L_n,w_n], \text{ para } i=1,2,3, \quad (4.25)$$

$$J_{4n}(q,p,z,t) = R_1[q,p,z,t,L_n,w_n], \quad (4.26)$$

$$J_{5n}(q,p,z,t) = R_2[q,p,z,t,L_n,w_n]. \quad (4.27)$$

Dada uma família J_{in} vamos estudar as soluções reais da equação

$$\frac{\partial J_{in}(q,p,z,t)}{\partial z} = 0, \quad (4.28)$$

com $q = 1$ e p fixo.

Faremos esse estudo porque o diagrama tz dessa solução será fundamental para a análise que faremos no capítulo 8. Note-se que para $t = t_0$ a solução real de (4.28) fornece os pontos estacionários da função $J_{in}(q,p,z,t_0)$, se q e p estão fixos.

Todas as conclusões obtidas poderão ser estendidas para qualquer $q > 0$, pois o fator de escala

$$q^{(p^2 + 3)/2n},$$

que encontramos no Apêndice A, não interfere nos resultados obtidos. Se $q < 0$ então novas análises seriam necessárias, o que está fora dos objetivos desse trabalho, uma vez que o parâmetro de maior interesse em nosso caso é p .

V. EQUAÇÕES POLINOMIAIS

1) Introdução:

Na equação (4.28) do capítulo anterior, a função J_{in} depende dos parâmetros reais q , p e das variáveis independentes z e t .

Qualquer uma das funções $J_{in} = J_{in}(q,p,z,t)$ em (4.25)-(4.27) pode ser colocada na forma

$$J_{in}[q,p,z,t,\phi,w] = t^k g_{in}(q,p,z,t) e^{\Omega_{in}(q,p,z,t)},$$

onde g_{in} e Ω_{in} são funções polinomiais nas variáveis t e z com domínio $\{(t,z); t > 0 \text{ e } -\infty < z < +\infty\}$, e com coeficientes dependentes dos parâmetros q e p .

Portanto,

$$J_{in,z} = t^k e^{\Omega_{in}} (g_{in,z} + g_{in} \Omega_{in,z}).$$

Nestas condições a equação $J_{in,z} = 0$ é equivalente a

$$P_{in}(q,p,z,t) = 0, \quad i=1,2,3,4,5, \quad n=0,1,2,3,4,5, \quad (5.1.1)$$

onde $P_{in}(q,p,z,t) = g_{in,z} + g_{in} \Omega_{in,z}$ é uma função polinomial.

Consideremos o conjunto

$$D_{qp}^{in} = \{(t,z); t > 0, -\infty < z < +\infty \text{ e } P_{in}(q,p,z,t) = 0\}. \quad (5.1.2)$$

Pelo teorema da função implícita podemos afirmar que dados p e q fixos e um ponto (t_0, z_0) solução de (5.1.1), no qual

$$\frac{\partial^2 J_{in}}{\partial z^2} = t^k e^{\Omega_{in}} (P_{in,z} + \Omega_{in,z} P_{in}) \quad (5.1.3)$$

seja diferente de zero, existe uma vizinhança V_0 de t_0 , uma vizinhança

W_0 de z_0 e uma função $z : V_0 \longrightarrow W_0$ tal que, para todo $t \in V_0$, a equação (5.1.1) tem uma única solução $z = z(t)$ em W_0 . Além disso, se J_{in} for C^r então z também será de classe C^r . Assim, no conjunto $V_0 \times W_0$ existirá uma curva $\vartheta(t) = (t, z(t))$ contínua e diferenciável passando por (t_0, z_0) , tal que $P_{in}(q, p, z(t), t) = 0$.

Se um ponto (t_0, z_0) satisfaz o sistema formado pelas equações

$$P_{in}(q, p, z, t) = 0, \quad (5.1.4.a)$$

$$\frac{\partial^2 J_{in}(q, p, z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad (5.1.4.b)$$

para q e p fixos, então diremos que $t = t_0$ é um ponto de ramificação, ou ponto de bifurcação, de D_{qp}^{in} . A escolha deste termo foi motivada pelo aparecimento de tridentes no diagrama de D_{qp}^{in} , como veremos no capítulo seguinte.

Em vista de (5.1.3) podemos escrever (5.1.4.a)-(5.1.4.b) na forma

$$P_{in}(q, p, z, t) = 0, \quad (5.1.5.a)$$

$$P_{in,z}(q, p, z, t) = 0. \quad (5.1.5.b)$$

Aplicando o teorema da função implícita podemos, nos pontos (t, z) onde $P_{in} = 0$ e $P_{in,z} \neq 0$, escrever

$$dz/dt = - P_{in,t} / P_{in,z}. \quad (5.1.6)$$

Assim, os valores $t = t_0$ que satisfazem as equações :

$$P_{in}(q,p,z(t), t) = 0, \quad (5.1.7.a)$$

$$P_{in,t}(q,p,z(t), t) = 0, \quad (5.1.7.b)$$

para q e p fixos, são pontos estacionários da função solução $z = z(t)$.

Num sistema de coordenadas (t,z,ζ) o diagrama tz de D_{qp}^{in} corresponde a interseção do gráfico de $J_{in,z}$ (ou P_{in}), com q e p fixos, com o plano $\zeta = 0$.

O teorema da função implícita nos dá informações locais a respeito desses diagramas.

Uma maneira de obtermos novas informações é escrever o polinômio $P_{in}(q,p,z,t)$, nos limites $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow 0$, na forma

$$P_{in}(q,p,z,t) = P_{ind}(q,p,z,t) + P_{inr}(q,p,z,t), \quad (5.1.8)$$

onde $P_{ind} \gg P_{inr}$.

Obtemos P_{ind} colocando P_{in} na forma

$$P_{in}(q,p,z,t) = \sum_{l=0}^r a_l(t) z^l,$$

e selecionando, para cada $a_l(t)$, a maior potência de t se estivermos analisando o limite $t \rightarrow +\infty$, ou a menor potência de t se estivermos analisando o limite $t \rightarrow 0$.

A diferença $P_{in} - P_{ind}$ fornece P_{inr} . Os polinômios P_{ind} e P_{inr} assim escolhidos serão chamados parte dominante e resto de P_{in} respectivamente.

O polinômio P_{ind} contém novas informações sobre as soluções de (5.1.1), como veremos a seguir.

Outro método para obtermos o comportamento das soluções de (5.1.1) nos limites $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow 0$ consiste em assumirmos que o comportamento das raízes em $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow 0$ é da forma $z(t) \sim c t^x$, e em seguida encontrarmos x e c . Mais adiante explicaremos este método

através de um exemplo.

No restante desse capítulo o formalismo apresentado nessa introdução é empregado na análise das soluções reais da equação (5.1.1), com $q = 1$ e p genérico.

Procuramos assim determinar como certas propriedades de D_{qp}^{in} (pontos de ramificação, pontos estacionários, etc) variam com o parâmetro p .

No Apêndice B são apresentados os polinômios correspondentes às diversas situações analisadas.

A restrição $t > 0$ em (5.1.2) provém do espaço-tempo considerado. No entanto, cada polinômio do Apêndice B é uma função par ou ímpar de t , logo, o diagrama tz das soluções de (5.1.1) para $t < 0$ será idêntico àquele de (5.1.2). Assim, do ponto de vista matemático, a restrição mencionada não trará perda de generalidade para as análises que faremos.

Os gráficos deste capítulo encontram-se no final do mesmo.

2) Estudo do conjunto D_{1p}^{in} , $1 \leq i \leq 5$, $0 \leq n \leq 5$.

Os polinômios P_{10}, \dots, P_{50} são nulos, uma vez que neste caso J_{10} , J_{20} e J_{30} são independentes de z . O conjunto D_{1p}^{in} coincide com o plano (t, z) .

Se $n = 1$ e $q = 1$ em (4.25)-(4.27) obteremos para $J_{in}(q, p, z, t)$ expressões do tipo

$$J_{i1}(1, p, z, t) = A_i(t, p) e^{-p z}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

onde A_i é uma função contínua e diferenciável para $t > 0$.

$$\text{Assim, } \frac{\partial J_{i1}(1, p, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ se e somente se } p A_i(t, p) = 0.$$

Isso justifica o fato dos polinômios correspondentes só dependerem de t e p . O conjunto D_{qp}^{in} neste caso é formado por retas do tipo $t =$

const., não sendo de interesse para este trabalho.

Analisemos D_{1p}^{1n} para $n = 2$. Iniciemos por P_{12} .

$P_{12}(1,p,z,t) = 0$ se e somente se

$$z = 0, \quad (5.2.1)$$

ou

$$-p + p^3 + 3t^2 + 3p^2t^2 + 3pt^4 + t^6 - (4pt^2 + 4t^4)z^2 = 0. \quad (5.2.2)$$

O primeiro passo é sabermos para quais valores de p a equação (5.2.2) apresenta soluções $(t,z) \in \mathbb{R}^2$.

Para um p qualquer a equação (5.2.2) define implicitamente duas funções $z = \pm h(p,t)$, onde

$$h(p,t) = [(-p + p^3 + 3t^2 + 3p^2t^2 + 3pt^4 + t^6) / (4pt^2 + 4t^4)]^{1/2}. \quad (5.2.3)$$

A equação (5.2.2) somente terá soluções reais quando o termo independente de z e o coeficiente de z^2 tiverem sinais opostos.

O termo independente de z em (5.2.2) é o polinômio cúbico em t^2 , $y_1(p,t) = -p + p^3 + 3t^2 + 3p^2t^2 + 3pt^4 + t^6$. Este termo pode ser escrito na forma

$$y_1(p,s) = -p + p^3 + (3p^2 + 3)s + 3ps^2 + s^3, \text{ onde } s = t^2.$$

A equação $y_1(p,s) = 0$ tem discriminante estritamente positivo [1] para todo p , tendo portanto uma única raiz real dada por:

$$s_1 = -p - (2p + (1 + 4p^2)^{1/2})^{-1/3} + (2p + (1 + 4p^2)^{1/2})^{1/3}. \quad (5.2.4)$$

Estudando o sinal de s_1 obtemos que;

$s_1 < 0$ se $-1 < p < 0$ ou $p > 1$, $s_1 > 0$ se $p < -1$ ou $0 < p < 1$ e $s_1 = 0$

se $p = \pm 1$ ou $p = 0$.

Portanto se $-1 \leq p \leq 0$ ou $p \geq 1$ então $y_1(p,t)$ não tem raiz real estritamente positiva, logo $y_1(p,t) > 0$.

Por outro lado, se $p < -1$ ou $0 < p < 1$ então $y_1(p,t)$ terá uma única raiz real estritamente positiva. Pela expressão de y_1 constatamos que $y_1(p,t)$ é estritamente negativa se $t < \sqrt{s_1}$ e estritamente positiva se $t > \sqrt{s_1}$.

Analisando agora o coeficiente de z^2 em (5.2.2) teremos:

$$y_2(p,t) = -4 p t^2 - 4 t^4 = 0 \text{ se e somente se } t = 0 \text{ ou } t = \pm (-p)^{1/2}.$$

Portanto, se:

$p > 0$ então $-4 p t^2 - 4 t^4 < 0$, para todo $t > 0$.

$p < 0$ então :

$$-4 p t^2 - 4 t^4 < 0 \text{ se } t > (-p)^{1/2},$$

ou

$$-4 p t^2 - 4 t^4 > 0 \text{ se } 0 < t < (-p)^{1/2}.$$

Se $p = 0$ então $-4 p t^2 - 4 t^4 < 0$ para qualquer t .

Podemos agora encontrar os intervalos de p onde $P_{12}(1,p,z,t) = 0$ tem soluções reais não nulas. Para isso basta desenharmos as raízes $t_1 = \sqrt{s_1}$ e $t_2 = \sqrt{-p}$ num mesmo gráfico e através dos resultados acima identificar as regiões onde as funções $y_1(p,t)$ e $y_2(p,t)$ têm sinais opostos (gráfico 1).

Portanto, pelo gráfico 1 e por (5.2.1) concluímos que as soluções reais de $P_{12}(1,p,z,t) = 0$, para $t > 0$ e $-\infty < z < +\infty$, são:

a) Se $p < -1$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z = \pm h(p,t), 0 < t < t_1(p) \text{ ou } t > t_2(p).$$

b) Se $-1 < p < 0$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z = \pm h(p,t), t > t_2(p).$$

c) Se $0 < p < 1$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z = \pm h(p,t), t > t_1(p).$$

d) Se $p > 1$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z = \pm h(p,t), t > 0.$$

e) Se $p = 0$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z(t) = \pm \frac{[3 + t^4]^{1/2}}{2t}, t > 0.$$

f) Se $p = -1$:

$$z(t) = 0, t > 0,$$

$$z(t) = \pm (1/2) \left[\frac{6 - 3 t^2 + t^4}{t^2 - 1} \right]^{1/2}, \quad t > 1.$$

g) Se $p = 1$:

$$z(t) = 0, \quad \text{se } t > 0,$$

$$z(t) = \pm (1/2) \left[\frac{6 + 3 t^2 + t^4}{1 + t^2} \right]^{1/2}, \quad t > 0.$$

Utilizemos agora os resultados da introdução para procurarmos novas informações.

O sistema (5.1.5.a)-(5.1.5.b), para esse caso, toma a forma:

$$z (y_1(p,t) + (-4 p t^2 - 4 t^4)z^2) = 0, \quad (5.2.5.a)$$

$$y_1(p,t) + (-12 p t^2 - 12 t^4)z^2 = 0. \quad (5.2.5.b)$$

Se $z = 0$ então (5.2.5.a) é uma identidade e (5.2.5.b) torna-se

$$y_1(p,t) = 0. \quad (5.2.6)$$

Assim, $t = t_0$ é ponto de ramificação de D_{1p}^{12} se satisfaz a equação anterior, logo $t_0 = \sqrt{s_1}$. No caso $p = 1/2$, estudado a seguir, veremos um exemplo desta situação.

Se $z \neq 0$, então o sistema (5.2.5.a)-(5.2.5.b) é equivalente a

$$z (y_1(p,t) + (-4 p t^2 - 4 t^4)z^2) = 0, \quad (5.2.7.a)$$

$$y_1(p,t) = 0. \quad (5.2.7.b)$$

onde a segunda equação é obtida de (5.2.5.a) e (5.2.5.b).

Se t satisfaz (5.2.6) para um dado p , o sistema anterior torna-se

$$(-4 p t^2 - 4 t^4)z^3 = 0,$$

que para $z \neq 0$ só admite solução real se $p < 0$, dada por

$$t = \pm (-p)^{1/2}. \quad (5.2.8)$$

Porém, (5.2.8) satisfaz (5.2.7.b) apenas se $p = 0$. Portanto, se $p \neq 0$ não haverá pontos (t_0, z) com $z \neq 0$ satisfazendo (5.2.7.a)-(5.2.7.b). Se $p = 0$, uma análise direta do sistema (5.2.7) mostra que não existem pontos de ramificação no conjunto D_{10}^{12} para $t > 0$.

O sistema (5.1.7.a)-(5.1.7.b) nesse caso toma a forma:

$$z(y_1(p,t) + (-4 p t^2 - 4 t^4)z^2) = 0, \quad (5.2.9.a)$$

$$z(6 t + 6 p^2 t + 12 p t^3 + 6 t^5 - 8 p t z^2 - 16 t^3 z^2) = 0. \quad (5.2.9.b)$$

Inicialmente vemos que a função $z(t) = 0$, $t > 0$, é solução de (5.2.9.a)-(5.2.9.b). Isso é esperado, uma vez que essa função é solução de $P_{12}(1,p,z,t) = 0$.

Para $z \neq 0$ o sistema resultante fica mais complicado, e os resultados obtidos de sua análise não foram suficientes para sabermos como os pontos estacionários das funções soluções se comportam à medida que variamos p .

A análise assintótica para $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow 0$ pode ser realizada diretamente a partir de (5.2.3), sem introduzir P_{12d} e P_{12r} . Esta análise mostra que a função $h(p,t)$ comporta-se como

$$h(p,t) \sim t/2, \quad (5.2.10)$$

no limite $t \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{h(p,t) - t/2}{h(p,t)} \right| = 0.$$

De (5.2.10) vemos que o comportamento da função $h(p,t)$ é independente de p no limite considerado.

Para t suficientemente pequeno temos:

$$h(p,t) \sim \frac{(p^2 - 1)^{1/2}}{2t}, \quad (5.2.11)$$

Assim, para t pequeno e $p > 1$ ou $p < -1$, esperamos um comportamento hiperbólico do tipo acima para as funções soluções não nulas de (5.1.1).

Se $-1 < p < 1$ então não teremos solução real não nula para t muito pequeno. Se $p = \pm 1$ os itens f e g acima mostram como será o comportamento das soluções neste limite.

Portanto, resumindo os resultados obtidos, podemos afirmar que para $P_{12}(1,p,z,t) = 0$:

a função $z(t) = 0$ ($t > 0$) é solução, independentemente do valor de p ;

a expressão (5.2.3) fornece as soluções reais não nulas, de acordo com os itens a)-g) acima;

os pontos de ramificação são dados por $\sqrt{s_1}$ desde que s_1 dado em (5.2.4) seja positivo;

para t suficientemente grande $h(p,t) \sim t/2$ para todo p ;

no limite $t \rightarrow 0$ o comportamento das soluções não nulas depende de p , de acordo com (5.2.11).

Nos casos seguintes a tentativa de efetuar uma análise como a que fizemos acima se mostrou inviável devido a dificuldade de resolver as equações que surgem. Diante disso optamos por fazer apenas a análise das soluções de (5.1.1) nos limites $t \rightarrow 0$ e $t \rightarrow +\infty$.

Analisemos agora a solução real de $P_{22}(1,p,z,t) = 0$.

Em primeiro lugar, notamos que a função $z(t) = 0$ é solução dessa equação para qualquer valor de p . No limite $t \rightarrow +\infty$, teremos

$$P_{22d}(z,t) = t^8 z + 12 t^6 z^3.$$

Portanto $P_{22d}(z,t) = 0$ se e somente se

$$z = 0, \quad (5.2.12)$$

ou

$$t^8 + 12 t^6 z^2 = 0, \quad (5.2.13)$$

onde a segunda equação não tem solução real não-trivial.

Assim, a partir de um certo valor de t , apenas a função $z(t) = 0$ é solução real de $P_{22}(1,p,z,t) = 0$.

Mais uma vez as soluções da equação (5.1.1) não dependem de p para t suficientemente grande.

No limite $t \rightarrow 0$ encontramos

$$P_{22d}(p,z,t) = (-p - p^2 + p^3 + p^4) z + t^2 (-4 p + 12 p^2) z^3,$$

cujas raízes são

$$z = 0, \quad (5.2.14)$$

ou

$$z = \pm (t^{-1}) ((p + p^2 - p^3 - p^4) / (-4 p + 12 p^2))^{1/2}. \quad (5.2.15)$$

Assim, se $p < 1/3$ ou $p > 1$ com $p \neq 0, -1$ as expressões acima mostram o comportamento das soluções reais no limite considerado. Se $1/3 < p < 1$, (5.2.15) não é real.

Para $p = 0$ o numerador de (5.2.15) é nulo, indicando que P_{22d} acima precisa ser recalculado para este valor de p .

Se assim o fizermos, encontraremos

$$P_{22d}(0,z,t) = 3 t^2 z - 4 t^4 z^3, \text{ cujas raízes são}$$

$$z = 0 \text{ e } z = \pm (3/4)^{1/2} t^{-1}.$$

Procedendo analogamente para os valores restantes de p obteremos:

- i) $p = -1, z = 0$;
- ii) $p = 1/3, z = 0$ ou $z = \pm (8/81)^{1/2} t^{-2}$;
- iii) $p = 1, z = 0$ ou $z = \pm (3/2)^{1/2}$.

Consideremos agora a equação $P_{32}(1,p,z,t) = 0$.

Analisando o limite $t \rightarrow +\infty$ teremos

$$P_{32d}(z,t) = t (-3 t^4 + 6 t^6 z^2 + 8 t^4 z^4). \quad (5.2.16)$$

Mais uma vez não temos dependência de p para t suficientemente grande.

$P_{32d}(z,t) = 0$ se e somente se

$$-3 + 6 t^2 z^2 + 8 z^4 = 0. \quad (5.2.17)$$

Portanto, $P_{32}(1,p,z,t)=0$ sempre tem soluções reais $z = z(t)$ tais que

$$z \sim \pm \frac{(-3 t^2 + (24 + 9 t^4)^{1/2})^{1/2}}{2^{3/2}}. \quad (5.2.18)$$

Racionalizando o numerador da expressão acima poderemos aproximá-la para

$$z \sim \pm 2^{-1/2} t^{-1}. \quad (5.2.19)$$

Para t pequeno teremos:

$$P_{32d}(p,z,t) = t[(3 - 3 p^2) + (-6 p + 6 p^3) z^2 + 8 p t^2 z^4]. \quad (5.2.20)$$

Logo $P_{32d}(p,z,t)=0$ se e somente se

$$(3 - 3 p^2) + (- 6 p + 6 p^3) z^2 + 8 p t^2 z^4 = 0. \quad (5.2.21)$$

O polinômio na igualdade acima é quadrático em z^2 .

Em vez de explicitar as quatro raízes desta equação e analisar as suas expressões vamos aproveitar para exemplificar um procedimento que usaremos sempre nos casos a seguir.

Primeiramente vamos assumir que o comportamento das raízes de (5.2.21) é da forma $z(t) \sim c t^x$ ($c \neq 0$) no limite $t \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{(z(t) - c t^x)}{z(t)} \right| = 0.$$

Temos que encontrar c e x .

Fazendo $z = c t^x$ no polinômio acima obteremos,

$$(3 - 3 p^2) + (- 6 p + 6 p^3) c^2 t^{2x} + 8 p c^4 t^{4x + 2}.$$

Os expoentes de t na expressão anterior são funções lineares de x . Plotando essas retas numa mesma figura obteremos o gráfico 2.

Encontraremos x por um método chamado balanço dominante que consiste no seguinte: para t pequeno (grande) um valor $x = x_1$ será útil quando duas ou mais potências de t tiverem em x_1 o mesmo valor e esse for o menor (maior) valor de todas as potências em x_1 .

Portanto, pelo gráfico 2, apenas $x = -1$ e $x = 0$ nos interessam. Se $x = -1$ os termos em t^{-2} serão dominantes na equação. Se $x = 0$ os termos dominantes serão aqueles independentes de t .

O valor de c é encontrado de modo a cancelar os termos dominantes.

Se $x = -1$ teremos:

$$\begin{aligned} (3 - 3 p^2) + (- 6 p + 6 p^3) c^2 t^{-2} + 8 p c^4 t^{-2} \\ = (3 - 3 p^2) + (6 c^2 p - 8 c^4 p - 6 c^2 p^3) t^{-2}. \end{aligned}$$

Portanto :

$$c = \pm (6(1 - p^2)/8)^{1/2}, \quad \text{se } 1 - p^2 > 0.$$

Para $x = 0$ teremos $c = \pm (2p)^{-1/2}$, se $p > 0$ e $p \neq 1$.

Para $p = \pm 1, 0$ (5.2.20) terá termos nulos, o que mostra que a parte dominante de $P_{32}(1, p, z, t)$ nestes casos pode não ser dada por esta expressão. Encontrando a expressão correta e aplicando o balanço dominante obteremos $x = 0$ e $c = \pm (3/4)^{1/4}$ para $p = \pm 1$ e $x = -1$, $c = \pm 1.43831$, $c = \pm 0.425759$ para $p = 0$.

Analisemos os valores de c encontrados.

Para $x = -1$, por exemplo, o que fizemos para encontrar c é equivalente a fazermos $\lim_{t \rightarrow 0} [(3 - 3p^2) + (6c^2p - 8c^4p - 6c^2p^3) t^{-2}] = L$, e procurarmos onde L se anula. Os valores não nulos de c encontrados são pontos onde L muda de sinal.

Por exemplo, se $p > 0$ teremos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (6c^2p - 8c^4p - 6c^2p^3) t^{-2} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > (6(1 - p^2)/8)^{1/2} \\ +\infty & \text{se } c < (6(1 - p^2)/8)^{1/2} \end{cases}$$

Assim, a função $z(t) = (6(1 - p^2)/8)^{1/2} t^{-1}$ pode ser usada como uma primeira aproximação para uma das raízes reais no limite $t \rightarrow 0$, desde que $-1 < p < 1$. Raciocínio análogo pode ser usado para os outros valores de c citados.

Pelos valores de c e x encontrados, podemos afirmar que no limite $t \rightarrow 0$ as raízes reais não nulas de $P_{32}(1, p, z, t) = 0$ são tais que:
 -se $p < -1$ todas são complexas,
 -se $-1 < p < 0$ apenas um par é real comportando-se como:

$$z \sim \pm ((3/4)(1 - p^2))^{1/2} t^{-1}, \quad (5.2.22)$$

-se $0 < p < 1$:

$$z \sim \pm (2p)^{-1/2}, \quad (5.2.23)$$

$$z \sim \pm \left(\frac{3}{4} (1 - p^2) \right)^{1/2} t^{-1}, \quad (5.2.24)$$

-se $p > 1$:

$$z \sim \pm (2p)^{-1/2}, \quad (5.2.25)$$

-se $p = \pm 1$:

$$z \sim \pm \left(\frac{3}{4} \right)^{1/4}, \quad (5.2.26)$$

-se $p = 0$:

$$z \sim \pm 1.43831/t, \quad (5.2.27)$$

$$z \sim \pm 0.425759/t. \quad (5.2.28)$$

Uma observação direta de $P_{32}(1,p,z,t)$ mostra que $z(t) \equiv 0$ nunca será um zero desta função.

Explicitando as raízes de (5.2.21) e efetuando algumas simplificações nas expressões correspondentes, a exemplo do que fizemos para obter (5.2.19), encontraremos resultados idênticos àqueles obtidos acima, indicando que o balanço dominante é um bom método para analisarmos o comportamento assintótico das soluções reais não nulas.

É importante observarmos que quando encontramos um par (c',x') , $c' \neq 0$, não podemos saber de antemão quantas raízes comportam-se assintoticamente como $z \sim c' t^{x'}$, pois pode haver mais de uma raiz com este comportamento. Para melhorarmos nosso conhecimento teremos que supor para as raízes um comportamento assintótico do tipo

$$z \sim c' t^{x'} + c t^x,$$

e proceder analogamente ao que fizemos acima para encontrar o novo termo.

Pode ser que o segundo termo encontrado ainda não seja suficiente, e tenhamos que encontrar outros para termos uma idéia mais precisa do

comportamento assintótico das raízes. Esses cálculos adicionais são desnecessários para esse trabalho, uma vez que o primeiro termo da expansão fornece as informações que precisamos.

Nos casos seguintes, quando a análise não puder ser feita de modo mais simples, usaremos o método do balanço dominante para conhecermos o comportamento assintótico das raízes não nulas das equações.

As raízes nulas são obtidas por simples análise dos polinômios.

Para P_{42} teremos a seguinte parte dominante no limite $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} P_{42d}(p,z,t) &= z (64 t^8 z^6 - 48 t^{10} z^4 + 12 t^{12} z^2 - t^{14}) \\ &= z t^8 (-t^2 + 4z^2)^3 \end{aligned}$$

Portanto, $P_{42d}(p,z,t) = 0$ se e somente se

$$z = 0, \tag{5.2.29}$$

ou

$$-t^2 + 4z^2 = 0. \tag{5.2.30}$$

A última equação tem solução $z = \pm t/2$.

Aqui também as soluções de (5.1.1) não dependem de p para t suficientemente grande.

No limite $t \rightarrow 0$ obtivemos:

Tabela 1

Comportamentos das raízes de $P_{42}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p \neq \pm 1, 0$$

$$z = 0,$$

$$z \sim \pm \frac{((3 + p^2 + 2(3 + 4p^2 + p^4 - |1 - p^4|)^{1/3} + 2(3 + 4p^2 + p^4 + |-1 + p^4|)^{1/3})^{1/2}}{2t}$$

$$p = \pm 1 \quad z = 0, \quad z \sim \pm 3^{1/2} t^{-1}$$

$$p = 0 \quad z = 0, \quad z \sim \pm 0.866025 t^{-1},$$

$$z \sim \pm 1.71352 t^{-1}, \quad z \sim \pm 0.252704 t^{-1}$$

Para P_{52} teremos a seguinte parte dominante no limite $t \rightarrow +\infty$:

$$P_{52d}(z,t) = 3 t^{10} z \left(-t^2 + 4z^2 \right)^4.$$

Portanto, $P_{52d}(z,t) = 0$ se e somente se

$$z = 0, \tag{5.2.31}$$

ou

$$z = \pm t/2. \tag{5.2.32}$$

A análise das raízes de $P_{52}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$ implica na solução de uma equação do tipo $c^8 + a(p)c^6 + b(p)c^4 + c(p)c^2 + d(p) = 0$. Por simplicidade, analisamos apenas o caso $p = 1/2$, que é importante para o Capítulo 8. Obtivemos o seguinte comportamento assintótico:

$$z = 0, \tag{5.2.33}$$

$$z \sim \pm 0.75 t^{-1}, \tag{5.2.34}$$

$$z \sim \pm 0.94244 t^{-1}. \quad (5.2.35)$$

Seja $P_{13}(l,p,z,t) = 0$.

No limite $t \rightarrow +\infty$:

$$\text{a) Se } p \neq 0, z \sim -p/(3t^2). \quad (5.2.36)$$

$$\text{b) Se } p = 0, z = 0. \quad (5.2.37)$$

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 2

Comportamento das raízes de $P_{13}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$p < -5^{1/2}$	$z \sim -\frac{(72p)}{216} t^{-2},$ $z \sim \pm ((p^2 - 1)/9)^{1/4} t^{-1/2}$
$p = -5^{1/2}$	$z \sim (4/9) t^{-1/2}, \quad z \sim 0.745356 t^{-2},$ $z \sim 2.4621 t^4, \quad z \sim -0.114232 t^4$
$-5^{1/2} < p < -1$ ou $1 \leq p < 5^{1/2}$	$z \sim ((p^2 - 5)/(2 - 2p^2))^{1/2} t,$ $z \sim \pm ((p^2 - 1)/9)^{1/4} t^{-1/2},$ $z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}$
$p = 5^{1/2}$	$z \sim -0.745356 t^{-2}, \quad z \sim (4/9) t^{-1/2},$ $z \sim 0.114232 t^4, \quad z \sim -2.4621 t^4$
$p = -1$	$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}, \quad z \sim -1.23462, \quad z \sim -0.490602.$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}$$

$$p = 0$$

$$z = 0, \quad z \sim \pm 3^{-1/4} t^{-1/2},$$

$$z \sim \pm 6^{-1/2} t$$

$$0 < p < 1$$

$$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}$$

$$p = 1$$

$$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}, \quad z \sim 1.23462, \quad z \sim 0.490602$$

$$1 < p \leq 5^{1/2}$$

$$z \sim ((p^2 - 5)/(2 - 2p))^{1/2} t,$$

$$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2}$$

$$p > 5^{1/2}$$

$$z \sim -\frac{p}{3} t^{-2},$$

$$z \sim ((p^2 - 1)/9)^{1/4} t^{-1/2}$$

Seja $P_{23}(1, p, z, t) = 0$.

No limite $t \rightarrow +\infty$:

a) $p \neq (1 \pm 73^{1/2})/6$:

$$z \sim \frac{(1 + (73)^{1/2} - 6p)}{18 t^2}, \quad (5.2.38)$$

$$z \sim \frac{(1 - (73)^{1/2} - 6 p)}{18 t^2} . \quad (5.2.39)$$

b) $p = (1 - 73^{1/2})/6 :$

$$z \sim \frac{73^{1/2}}{9} t^{-2} . \quad (5.2.40)$$

c) $p = (1 + 73^{1/2})/6 :$

$$z \sim - \frac{73^{1/2}}{9} t^{-2} . \quad (5.2.41)$$

No limite $t \rightarrow 0 :$

Tabela 3

Comportamentos das raízes $P_{23}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -1$$

$$z \sim -(p/3) t^{-2}, \quad z \sim ((1 - 3p)/9) t^{-2}$$

$$p = -1$$

$$z \sim (1/3) t^{-2}, \quad z \sim (4/9) t^{-2},$$

$$z \sim -0.490602, \quad z \sim -1.23462$$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim -(p/3) t^{-2}, \quad z \sim ((1 - 3p)/9) t^{-2}$$

$$p = 0$$

$$z \sim (1/9) t^{-2}, \quad z \sim -2(9^{1/3}), \quad z \sim \pm 3^{1/4} t^{-1/2}$$

$$0 < p < 1/3$$

$$z \sim -(p/3) t^{-2}, \quad z \sim ((1 - 3p)/9) t^{-2},$$

$$z \sim \pm((-18 + 5p + 7p^2 - p^3 - p^4)/(-2p - 2p^2 + 2p^3 + 2p^4))^{1/2} t$$

$$p = 1/3$$

$$z \sim -(1/9) t^{-2}, \quad z \sim 0.4296 t^{-4/5},$$

$$z \sim \pm(79/4)^{1/2} t$$

$$1/3 < p < 1$$

$$z \sim -(p/3) t^{-2}, \quad z \sim ((1 - 3p)/9) t^{-2},$$

$$z \sim \pm((-18 + 5p + 7p^2 - p^3 - p^4)/(-2p - 2p^2 + 2p^3 + 2p^4))^{1/2} t,$$

$$z \sim \pm(1 + p - p^2 - p^3)/(-9 + 27p)^{1/2} t^{-1/2}$$

$$p = 1$$

$$z \sim (-1/3) t^{-2}, z \sim (-2/9) t^{-2},$$
$$z \sim 1.23462, z \sim 0.49062$$

$$p > 1$$

$$z \sim -(p/3) t^{-2}, z \sim ((1 - 3 p)/9) t^{-2}$$

Seja $P_{33}(1,p,z,t) = 0$.

No limite para $t \rightarrow + \infty$:

a) $p \neq 0$:

$$z \sim -(p/3) t^{-2} . \quad (5.2.42)$$

c) $p = 0$:

$$z = 0 . \quad (5.2.43)$$

No limite para $t \rightarrow 0$:

Tabela 4

Comportamento das raízes de $P_{33}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -1$$

$$z \sim -((-23p + 3p^3)/(8 - 8p^2)) t^4,$$

$$z \sim -3p t^{-2}, z \sim ((2p^2 - 2)/(-3p + 3p^3))^{1/3}$$

$$p = -1$$

$$z \sim (1/3) t^{-2}, z \sim \pm(22/9)^{1/6}$$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim \pm((3/(1 - p^2))^{1/4} t^{-1/2},$$

$$z \sim -3p t^{-2}, z \sim ((2p^2 - 2)/(-3p + 3p^3))^{1/3},$$

$$z \sim -((-23p + 3p^3)/(8 - 8p^2)) t^4$$

$$p = 0$$

$$z = 0, z \sim \pm 0.97922 t^{-1/2}, z \sim \pm 0.532766 t^{-1/2}$$

$$0 < p < 1$$

$$z \sim -((-23p + 3p^3)/(8 - 8p^2)) t^4,$$

$$z \sim \pm (3/(1 - p^2))^{1/4} t^{-1/2},$$

$$z \sim -3p t^{-2}, z \sim ((2p^2 - 2)/(-3p + 3p^3))^{1/3}$$

$$p = 1$$

$$z \sim -(1/3) t^{-2}, z \sim \pm(22/9)^{1/6}$$

$$p > 1$$

$$z \sim -3p t^{-2},$$

$$z \sim ((2p^2 - 2)/(-3p + 3p^3))^{1/3},$$

$$z \sim -((-23p + 3p^3)/(8 - 8p^2)) t^4$$

Para $P_{53}(1,p,z,t)=0$, obtivemos no limite $t \rightarrow +\infty$:

a) Se $p \neq 0$

$$z \sim (-p/3) t^{-2}. \quad (5.2.44)$$

b) Se $p = 0$

$$z = 0 \quad (5.2.45)$$

No limite $t \rightarrow 0$, por simplicidade, analisamos apenas o caso $p = 3$, que nos interessa devido as características do diagrama do conjunto D_{qp}^{1n} correspondente. Os resultados são:

$$z \sim \pm 1.32919 t^{-1/2}, \quad (5.2.46)$$

$$z \sim \pm 0.970984 t^{-1/2}, \quad (5.2.47)$$

$$z \sim -t^{-2}. \quad (5.2.48)$$

Para $P_{14}(1,p,z,t) = 0$ observamos que a função $z = z(t) = 0$ é sempre solução, pois não existe termo independente de z neste polinômio.

No limite $t \rightarrow +\infty$ encontramos:

$$P_{14d}(z,t) = z (81 t^{14} - 270 t^{12} z^2 - 3240 t^{10} z^4 - 4320 t^8 z^6 - 3840 t^6 z^8 - 1536 t^4 z^{10}), \text{ o qual não depende de } p.$$

Além disso, $P_{14d}(z,t)=0$ se e somente se

$$z = 0, \quad (5.2.49)$$

ou

$$t^{14} \left(81 - \frac{270}{t^2} z^2 - \frac{3240}{t^4} z^4 - \frac{4320}{t^6} z^6 - \frac{3840}{t^8} z^8 - \frac{1536}{t^{10}} z^{10} \right) = 0. \quad (5.2.50)$$

A equação (5.2.50) é equivalente a

$$81 - 270 \xi^2 - 3240 \xi^4 - 4320 \xi^6 - 3840 \xi^8 - 1536 \xi^{10} = 0, \text{ com } \xi = z/t,$$

cujas soluções reais são $z = \pm 0.338907 t$.

No limite $t \rightarrow 0$ encontramos:

Tabela 5

Comportamento das raízes de $P_{14}(1,p,z)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -(5)^{1/2}$$

$$z = 0, z \sim \pm((-1 + p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3},$$

$$z \sim \pm(-p/6)^{1/2} t^{-1}$$

$$p = -5^{1/2}$$

$$z \sim 0.6105 t^{-1}, z \sim (1/4) t^{-1/3},$$

$$z \sim \pm 2.12792 t^3, z = 0$$

$$-(5)^{1/2} < p < -1$$

$$z = 0, z \sim \pm((-3p^2 + 15)/(2p^2 - 2))^{1/2} t,$$

$$z \sim \pm((-1 + p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3},$$

$$z \sim \pm(-p/6)^{1/2} t^{-1}$$

$$p = -1$$

$$z \sim \pm 6^{-1/2} t^{-1}, z = 0$$

$$-1 < p < 0$$

$$z = 0, z \sim \pm(-p/6)^{1/2} t^{-1}$$

$$p = 0$$

$$z = 0, z \sim \pm (3/16)^{1/6} t^{-1/3}$$

$$0 < p < 1$$

$$z = 0$$

$$p = 1$$

$$z = 0, z \sim \pm 1.19929, z \sim \pm 0.652502$$

$$1 < p \leq (5)^{1/2}$$

$$z = 0, z \sim \pm((-3 p^2 + 15)/(2 p^2 - 2))^{1/2} t,$$

$$z \sim \pm((-1 + p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3}$$

$$p = 5^{1/2}$$

$$z \sim (1/4) t^{-1/3}, z = 0.$$

$$p > 5^{1/2}$$

$$z = 0, z \sim \pm((-1 + p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3}$$

A equação $P_{24}(1,p,z,t) = 0$ também apresenta $z(t) = 0$ como uma de suas funções soluções.

No limite $t \rightarrow +\infty$ apenas $z = 0$ é solução, independente do valor de p .

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 6

Comportamento das raízes de $P_{24}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -1$$

$$z = 0, z \sim \pm((1 - 3p)/18)^{1/2} t^{-1},$$

$$z \sim \pm(-p/6)^{1/2} t^{-1}.$$

$$p = -1$$

$$z = 0, z \sim \pm(2/9)^{1/2} t^{-1}, z \sim \pm(1/6)^{1/2} t^{-1}$$

$$-1 < p < 0$$

$$z = 0, z \sim \pm(-p/6)^{1/2} t^{-1},$$

$$z \sim \pm((1 - 3p)/18)^{1/2} t^{-1}$$

$$p = 0$$

$$z = 0, z \sim \pm(1/18)^{1/2} t^{-1}, z \sim \pm(3/16)^{1/6} t^{-1/3}$$

$$0 < p < 1/3$$

$$z = 0, z \sim \pm((1 - 3p)/18)^{1/2} t^{-1},$$

$$z \sim \pm((3p^4 + 3p^3 - 21p^2 - 15p + 54)/(2p + 2p^2 - 2p^3 - 2p^4))^{1/2} t$$

$$p = 1/3$$

$$z = 0, z \sim \pm 0.503268 t^{-1/2}, z \sim \pm(237/4)^{1/2} t$$

$$1/3 < p < 1$$

$$z = 0,$$

$$z \sim \pm((54 - 15p - 21p^2 + 3p^3 + 3p^4)/(2p + 2p^2 - 2p^3 - 2p^4))^{1/2} t,$$

$$z \sim \pm((1 + p - p^2 - p^3)/(-16 + 48p))^{1/6} t^{-1/3}$$

$$p = 1$$

$$z = 0, z \sim \pm 1.19929, z \sim \pm 0.652502$$

$p > 1$

$z = 0$

Para $P_{34}(1, p, z, t) = 0$, obtivemos no limite $t \rightarrow +\infty$:

$$z \sim \pm (1/3) t^{-3} . \quad (5.2.51)$$

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 7

Comportamento das raízes de $P_{34}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < - (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim \pm (-p/6)^{1/2} t^{-1}$$

$$p = - (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim \pm 0.5649 t^{-1}, z \sim \pm 1.03784 t^3$$

$$- (11/3)^{1/2} < p < - 1$$

$$z \sim \pm (-p/6)^{1/2} t^{-1},$$

$$z \sim \pm ((11 - 3 p^2)/(6 p^2 - 6))^{1/2} t$$

$$p = -1$$

$$z \sim \pm (1/6)^{1/2} t^{-1}, z \sim \pm 1.176$$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim \pm (-p/6)^{1/2} t^{-1},$$

$$z \sim \pm ((3 - 3 p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3}$$

$$p = 0$$

$$z \sim \pm 0.89593 t^{-1/3}, z \sim \pm 0.597097 t^{-1/3}$$

$$0 < p < 1$$

$$z \sim \pm ((3 - 3 p^2)/16)^{1/6} t^{-1/3},$$

$$z \sim \pm (3/(4 p))^{1/4}$$

$$p = 1$$

$$z \sim \pm 1.16783, z \sim \pm 0.479061$$

$$1 < p < (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim \pm ((11 - 3 p^2)/(6 p^2 - 6))^{1/2} t,$$

$$z \sim \pm (3/(4 p))^{1/4}$$

$$p = (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim \pm 0.79$$

$$p > (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim \pm(3/(4 p))^{1/4}$$

Seja $P_{15}(1,p,z,t) = 0$.

No limite $t \rightarrow +\infty$:

a) $p \neq 0$:

$$z \sim -(2/15) p t^{-4} . \quad (5.2.52)$$

b) $p = 0$:

$$z = 0. \quad (5.2.53)$$

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 8

Comportamento das raízes de $P_{15}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -3$$

$$z \sim \pm((p^2 - 1)/25)^{1/8} t^{-1/4},$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = -3$$

$$z \sim \pm 0.8672 t^{-1/4}, z \sim 0.6694 t^{-2/3},$$

$$z \sim 2.08397 t^6, z \sim -0.05272 t^6$$

$$-3 < p < -1$$

$$z \sim \pm((30 - 6p^2 + 6^{1/2}(141 - 50p^2 + 5p^4)^{1/2})/(-1 + p^2))^{1/2} \frac{t}{2},$$

$$z \sim \pm((p^2 - 1)/25)^{1/8} t^{-1/4}, z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = -1$$

$$z \sim (1/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim -0.738865,$$

$$z \sim -1.16865$$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = 0$$

$$z = 0, z \sim \pm (3/25)^{1/8} t^{-1/4}, z \sim \pm 0.236916 t$$

$$0 < p < 1$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = 1$$

$$z \sim -(1/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim 1.16865, z \sim 0.738865$$

$$p = 3$$

$$z \sim \pm 0.8672 t^{-1/4}, z \sim -0.6694 t^{-2/3},$$

$$z \sim 0.05272 t^6, z \sim -2.08397 t^6$$

$$1 < p < 3$$

$$z \sim \pm \left((30 - 6p^2 + 6^{1/2} (141 - 50p^2 + 5p^4)^{1/2}) / (-1 + p^2) \right)^{1/2} \frac{t}{2},$$

$$z \sim \pm ((p^2 - 1)/25)^{1/8} t^{-1/4}, \quad z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p > 3$$

$$z \sim \pm ((p^2 - 1)/25)^{1/8} t^{-1/4}, \quad z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}$$

Seja $P_{25}(1, p, z, t) = 0$.

No limite $t \rightarrow +\infty$:

a) $p \neq (1 \pm 145^{1/2})/6$:

$$z \sim ((1 + (145)^{1/2} - 6p)/45) t^{-4},$$

$$z \sim ((1 - (145)^{1/2} - 6p)/45) t^{-4}. \quad (5.2.54)$$

b) $p = (1 - 145^{1/2})/6$:

$$z \sim 0.535182 t^{-4}. \quad (5.2.55)$$

c) $p = (1 + 145^{1/2})/6$:

$$z \sim -0.535182 t^{-4}. \quad (5.2.56)$$

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 9

Comportamento das raízes de $P_{25}(i,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -1$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim ((1 - 3p)/30)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = -1$$

$$z \sim 0.464159 t^{-2/3}, z \sim 0.510873 t^{-2/3},$$

$$z \sim -1.16865, z \sim -0.738865$$

$$-1 < p < 0$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim ((1 - 3p)/30)^{1/3} t^{-2/3}$$

$$p = 0$$

$$z \sim 0.32183 t^{-2/3},$$

$$z \sim \pm 0.767181 t^{-1/4}, z \sim -1.12475$$

$$0 < p < 1/3$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim ((1 - 3p)/30)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim \pm \left(\frac{-108 + 30p + 42p^2 - 6p^3 - 6p^4 - \Xi}{-p - p^2 + p^3 + p^4} \right)^{1/2} (t/2)$$

$$\text{onde } \Xi = 6^{1/2} (1944 - 1012p - 1303p^2 + 546p^3 + 379p^4 - 120p^5 - 65p^6 + 10p^7 + 5p^8)^{1/2}.$$

$$p = 1/3$$

$$z \sim -0.32183 t^{-2/3},$$

$$z \sim 0.556338 t^{-4/11}, z \sim \pm 10.909 t$$

$$1/3 < p < 1$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim ((1 - 3p)/30)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim \pm((-1 - p + p^2 + p^3)/(25 - 75p))^{1/8} t^{-1/4},$$

$$z \sim \pm \left(\frac{-108 + 30p + 42p^2 - 6p^3 - 6p^4 - \Xi}{(-p - p^2 + p^3 + p^4)} \right)^{1/2} (t/2)$$

$$\text{onde } \Xi = 6^{1/2} (1944 - 1012p - 1303p^2 + 546p^3 + 379p^4 - 120p^5 - 65p^6 + 10p^7 + 5p^8)^{1/2}.$$

$$p = 1$$

$$z \sim -0.464159 t^{-2/3}, z \sim -0.40548 t^{-2/3},$$

$$z \sim 0.738865, z \sim 1.16865$$

$$p > 1$$

$$z \sim (-p/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim ((1 - 3p)/30)^{1/3} t^{-2/3}$$

Seja $P_{35}(1,p,z,t) = 0$.

No limite $t \rightarrow +\infty$:

a) Se $p \neq 0$:

$$z \sim - (2p/15) t^{-4}. \quad (5.2.57)$$

b) Se $p = 0$:

$$z = 0. \quad (5.2.58)$$

No limite $t \rightarrow 0$:

Tabela 10

Comportamento das raízes de $P_{35}(1,p,z,t)$ no limite $t \rightarrow 0$

$$p < -(11/3)^{1/2}$$

$$z \sim -(p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim (4/(5p))^{1/5},$$

$$z \sim -((-215p + 15p^3)/(462 - 126p^2)) t^6$$

$$p = -(11/3)^{1/2}$$

$$z \sim -0.8398, z \sim 0.5764 t^{-2/3},$$

$$z \sim 1.10422 t^{8/3}$$

$$-(11/3)^{1/2} < p < -1$$

$$z \sim -(p/10)^{1/3} t^{-2/3}, z \sim (4/(5p))^{1/5},$$

$$z \sim \pm((3p^2 - 11)/(2 - 2p^2))^{1/2} t,$$

$$z \sim -((-215p + 15p^3)/(462 - 126p^2)) t^6$$

$$p = -1$$

$$z \sim 0.464159 t^{-2/3}, z \sim -1.15241, z \sim -0.616494,$$

$$z \sim 1.16233, z \sim -0.585937 t^6,$$

$$z \sim (115/168) t^6$$

$$-1 < p < 0 \text{ ou}$$

$$z \sim -(p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$0 < p < 1$$

$$z \sim \pm(3(1 - p^2)/25)^{1/8} t^{-1/4},$$

$$z \sim (4/(5p))^{1/5},$$

$$z \sim -((-215p + 15p^3)/(462 - 126p^2)) t^6$$

$$p = 0$$

$$z \sim \pm 0.870919 t^{-1/4}, z \sim \pm 0.64241 t^{-1/4}, z = 0$$

$$p = 1$$

$$z \sim -0.464159 t^{-2/3}, z \sim 1.15241,$$

$$z \sim 0.616494, z \sim -1.16233, z = 0.585937 t^6,$$

$$z \sim (-115/168) t^6$$

$$1 < p < (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim -(p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim (4/(5 p))^{1/5},$$

$$z \sim \pm((3 p^2 - 11)/(2 - 2 p^2))^{1/2} t,$$

$$z \sim -((-215 p + 15 p^3)/(462 - 126 p^2)) t^6$$

$$p = (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim -0.5764 t^{-2/3}, \quad z \sim 0.8398,$$

$$z \sim -1.10422 t^{8/3}$$

$$p > (11/3)^{1/2}$$

$$z \sim -(p/10)^{1/3} t^{-2/3},$$

$$z \sim (4/(5 p))^{1/5},$$

$$z \sim -((-215 p + 15 p^3)/(462 - 126 p^2)) t^6$$

No próximo capítulo vamos estudar casos particulares com valores fixos de p (mantendo $q = 1$), com o objetivo de ter uma idéia de como se modificam os diagramas tz das soluções de (4.28), a medida que variamos p . Isso se torna necessário uma vez que estudar esses diagramas com p genérico traz poucas informações, as quais são insuficientes para esboçarmos os diagramas em questão.

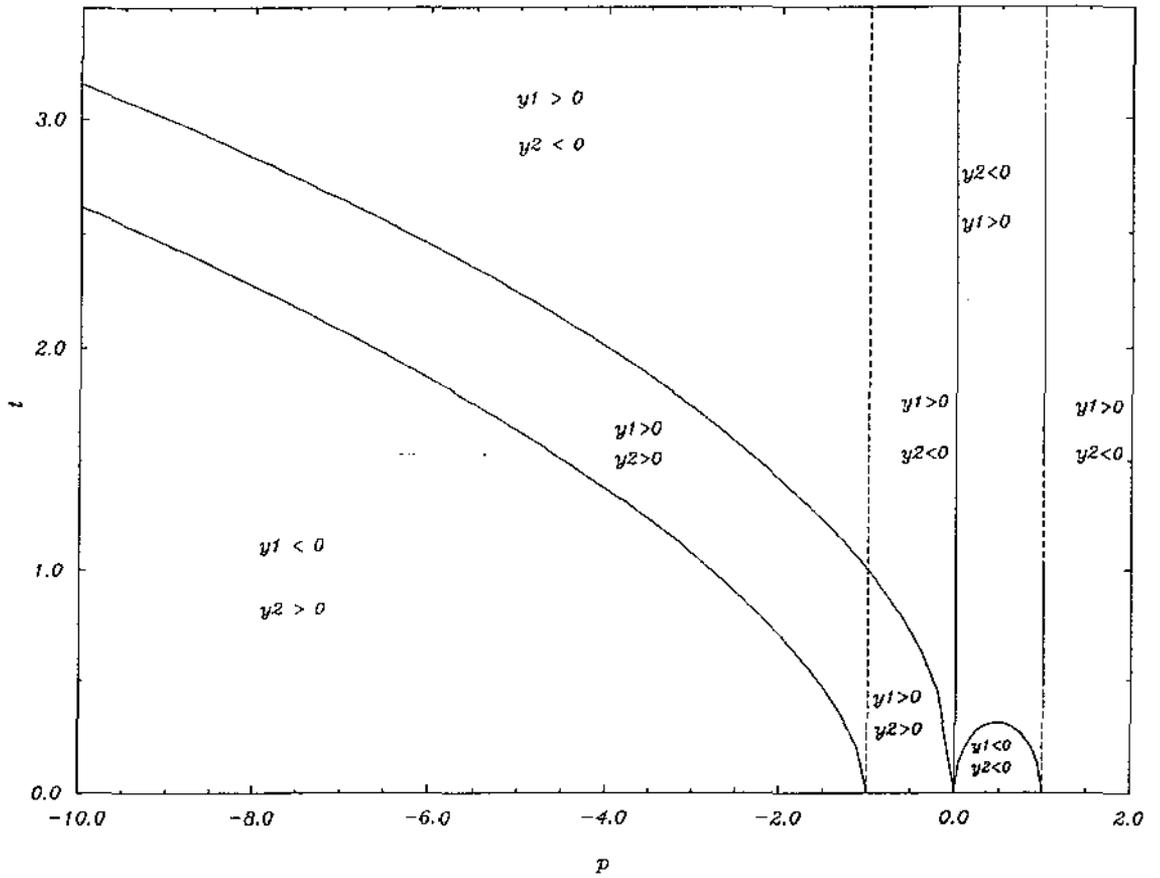


Gráfico 1. Nesta figura graficamos t_1 , t_2 e indicamos os sinais de y_1 e y_2 . A função t_1 está definida para $p \leq -1$ e $0 \leq p \leq 1$; a função t_2 está definida para $p \leq 0$ apenas.

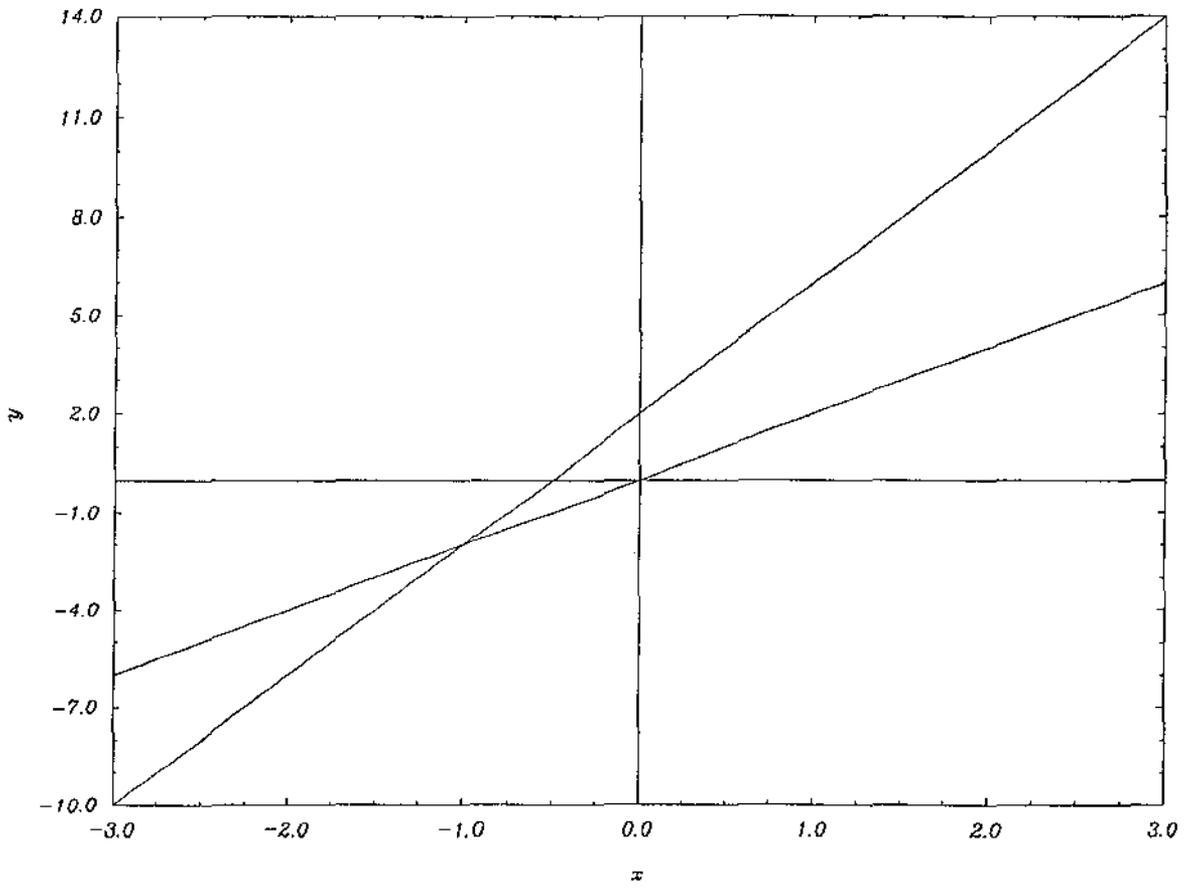


Gráfico 2. As abscissas $x = -1$ e $x = 0$ (vértices inferiores) são os valores de x que satisfazem o balanço dominante aplicado a (5.2.21).

VI. DIAGRAMAS DAS SOLUÇÕES

1) INTRODUÇÃO:

Neste capítulo vamos analisar as soluções reais de (5.1.1) fixando valores para p . Procuramos com isso obter informações sobre a forma dos diagramas para valores não-assintóticos de t . Nos casos onde não for possível explicitar as soluções de (5.1.1), os diagramas serão determinados numericamente, como descrito adiante.

A fim de escolhermos os valores de p para os quais faremos nossas análises, consideremos a métrica (4.1) com $\phi = 0$ e $w = 0$:

$$ds^2 = t^{(p^2-1)/2} (dt^2 - dz^2) - t^{p+1} dx^2 - t^{-p+1} dy^2. \quad (6.1.1)$$

Sob a mudança de coordenadas:

$$T = \frac{t^{(p^2-3)/4}}{\frac{p^2+3}{4}},$$

$$X = \left\{ \left[\frac{p^2+3}{4} \right] \left(\frac{4p+4}{p^2+3} \right) \right\}^{1/2} x,$$

$$Y = \left\{ \left[\frac{p^2+3}{4} \right] \left(\frac{-4p+4}{p^2+3} \right) \right\}^{1/2} y,$$

$$Z = \left\{ \left[\frac{p^2+3}{4} \right] \left(\frac{2(p^2-1)}{p^2+3} \right) \right\}^{1/2} z,$$

(6.1.1) torna -se

$$ds^2 = dT^2 - T^{2p_1} dX^2 - T^{2p_2} dY^2 - T^{2p_3} dZ^2, \quad (6.1.2)$$

onde $p_1 = 2 \left(\frac{p+1}{p^2+3} \right)$, $p_2 = 2 \left(\frac{(1-p)}{p^2+3} \right)$ e $p_3 = \frac{p^2-1}{p^2+3}$.

A métrica (6.1.2) é chamada métrica de Kasner [13] e os expoentes p_1 , p_2 e p_3 são chamados expoentes de Kasner. A tabela abaixo mostra a variação do sinal desses expoentes a medida que variamos p .

Tabela 11

p	-1	1
p_1	0	+
p_2	+	0
p_3	0	0

Perguntamo-nos, inicialmente, se existiriam propriedades das soluções de (4.28) que pudessem ser associadas aos sinais dos expoentes de Kasner.

Resolvemos então empregar dois valores de p entre -1 e 1 ($p = \pm 1/2$) e dois valores fora desse intervalo ($p = \pm 3$).

Quanto à resposta da nossa pergunta, ela foi negativa, como veremos no próximo capítulo.

2) DIAGRAMAS:

Apresentaremos a seguir os gráficos das soluções reais de (5.1.1) para os polinômios $P_{in}(q,p,z,t)$ do apêndice B, quando damos a p um dos valores do conjunto $\{ \pm 1/2, \pm 3 \}$ e fazemos $q = 1$.

Para os polinômios P_{12} , P_{22} e P_{32} temos a vantagem de podermos explicitar as suas raízes não nulas, $z = z(p,t)$, obtendo

respectivamente as seguintes soluções:

$$Z_{12}^+(p,t) = \frac{1}{2} \left[\frac{-p + p^3 + (3 + 3p^2)t^2 + 3pt^4 + t^6}{pt^2 + t^4} \right]^{1/2} \quad (6.2.1)$$

$$Z_{12}^-(p,t) = -Z_{12}^+(p,t) \quad (6.2.2)$$

$$Z_{22}^+(p,t) = (1/2) \{ [p + p^2 - p^3 - p^4 + (-3 + 22p - 3p^2 - 4p^3)t^2 + (21 - 3p - 6p^2)t^4 + (-1 - 4p)t^6 - t^8] / [(-p + 3p^2)t^2 + (-1 + 6p)t^4 + 3t^6] \}^{1/2} \quad (6.2.3)$$

$$Z_{22}^-(p,t) = -Z_{22}^+(p,t) \quad (6.2.4)$$

$$Z_{32}^{++} = \{ [3p - 3p^3 + (-9p^2 + 9)t^2 - 9pt^4 - 3t^6 + \sqrt{3}(3p^2 - 6p^4 + 3p^6 + (10p - 28p^3 + 18p^5)t^2 + (19 - 48p^2 + 45p^4)t^4 - (36p + 60p^3)t^6 + (-10 + 45p^2)t^8 + 18pt^{10} + 3t^{12})^{1/2}] / (8pt^2 + 8t^4) \}^{1/2} \quad (6.2.5)$$

$$Z_{32}^{-+} = -Z_{32}^{++} \quad (6.2.6)$$

$$Z_{32}^{+-} = \{ [3p - 3p^3 + (9 - 9p^2)t^2 - 9pt^4 - 3t^6 - \sqrt{3}(3p^2 - 6p^4 + 3p^6 + (10p - 28p^3 + 18p^5)t^2 + (19 - 48p^2 + 45p^4)t^4 - (36p + 60p^3)t^6 + (-10 + 45p^2)t^8 + 18pt^{10} + 3t^{12})^{1/2}] / (8pt^2 + 8t^4) \}^{1/2} \quad (6.2.7)$$

$$Z_{32}^{--} = -Z_{32}^{+-} \quad (6.2.8)$$

Graficando estas funções no plano real para os parâmetros escolhidos, e lembrando que a função $z(t) \equiv 0$ é um zero de P_{12} e P_{22} , obteremos os diagramas 1-12 apresentados no final deste capítulo nas páginas 62-64.

Por motivos técnicos usaremos nos diagramas as notações $D_{in}[q,p]$ e $P_{in}[q,p,z,t]$ em lugar de D_{qp}^{in} e $P_{1n}(q,p,z,t)$, respectivamente.

Para os demais polinômios correspondentes a $n = 3,4,5$ a situação é

bem mais complicada devido ao alto grau destes. Em situações como estas, onde não é possível explicitar as raízes dos polinômios, optamos por resolver numericamente, usando o pacote Mathematica, (5.1.1) para uma sequência de valores $t_i = ih + \delta$, $i = 0, 1, \dots, m$, $\delta \geq 0$, h positivo e suficientemente pequeno para que se obtenha um esboço razoável do gráfico da solução. Os diagramas 13-51 assim obtidos estão nas páginas a seguir.

A seguir estão os gráficos das soluções reais de (5.1.1) para os polinômios $P_{in}(q,p,z,t)$ do Apêndice B, quando damos a p um dos valores do conjunto $\{\pm 1/2, \pm 3\}$ e fazemos $q = 1$ (diagramas 1-51).

Diagrama 1

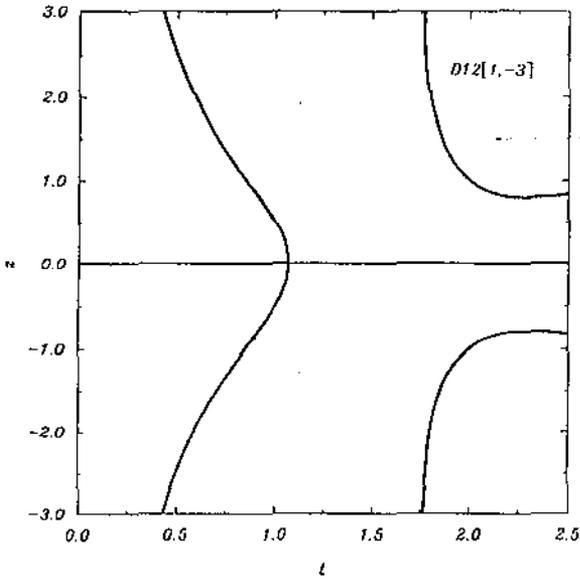


Diagrama 2

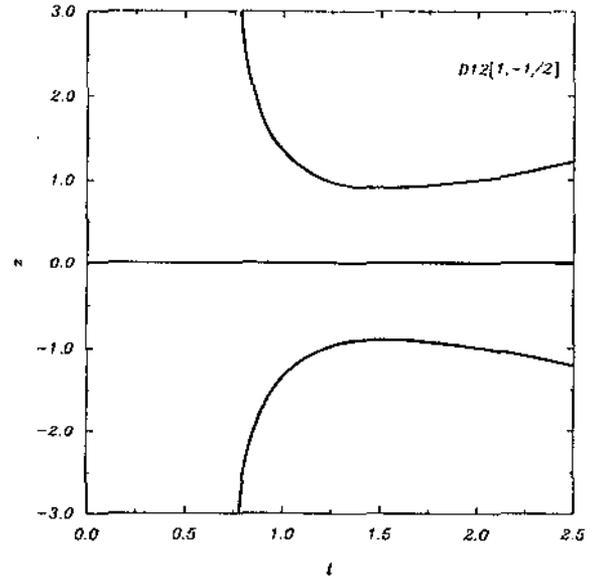


Diagrama 3

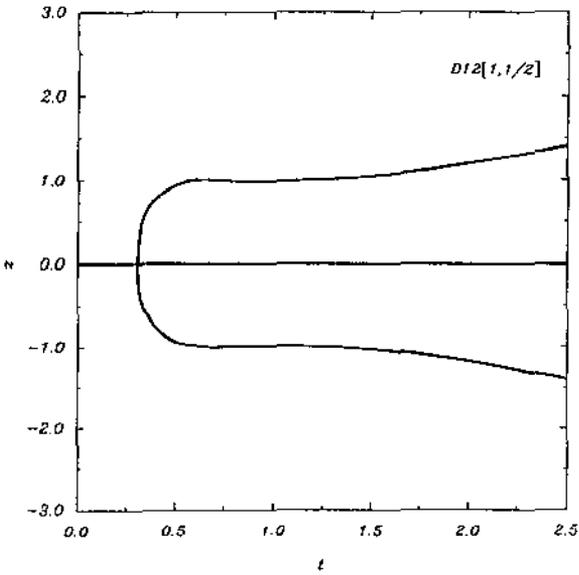


Diagrama 4

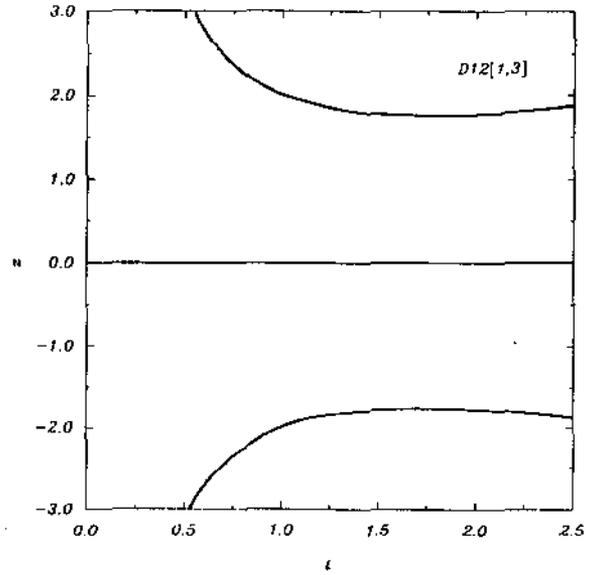


Diagrama 5

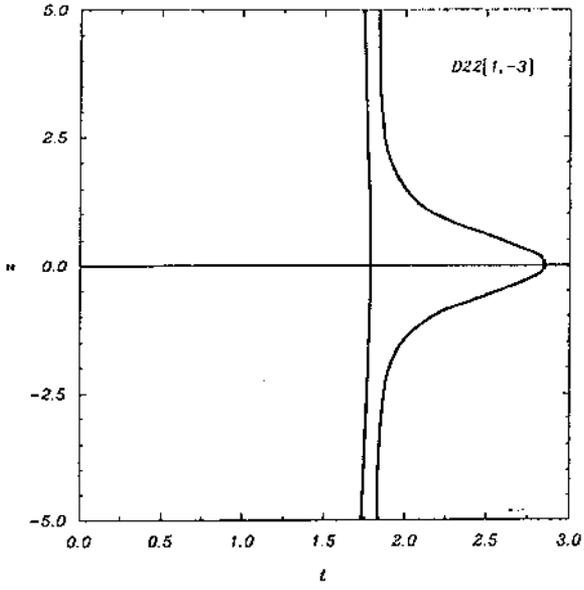


Diagrama 6

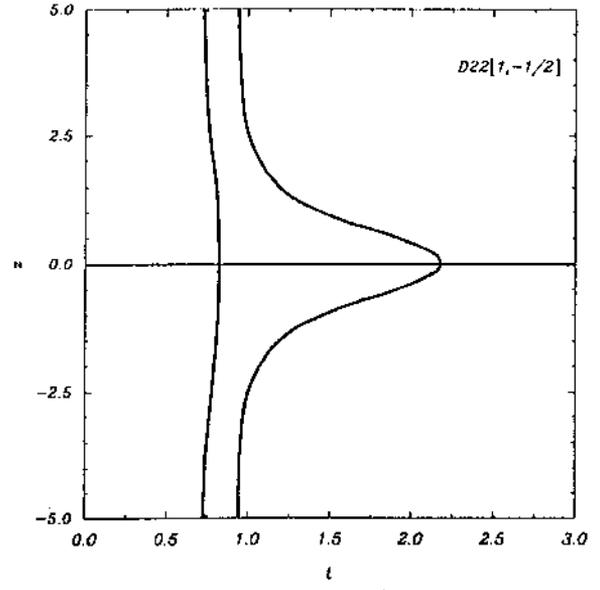


Diagrama 7

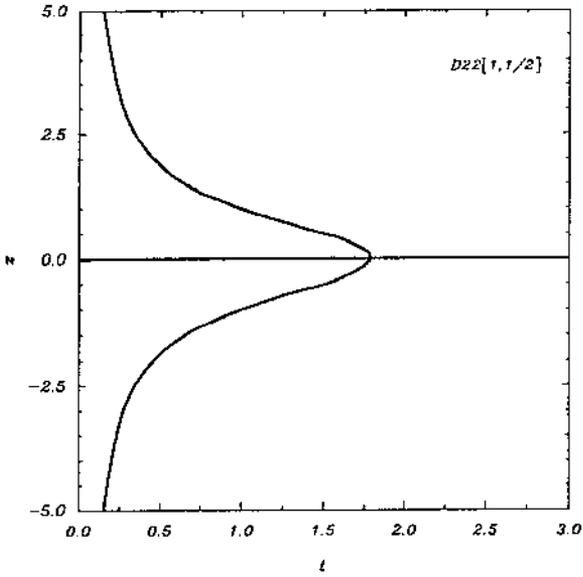


Diagrama 8

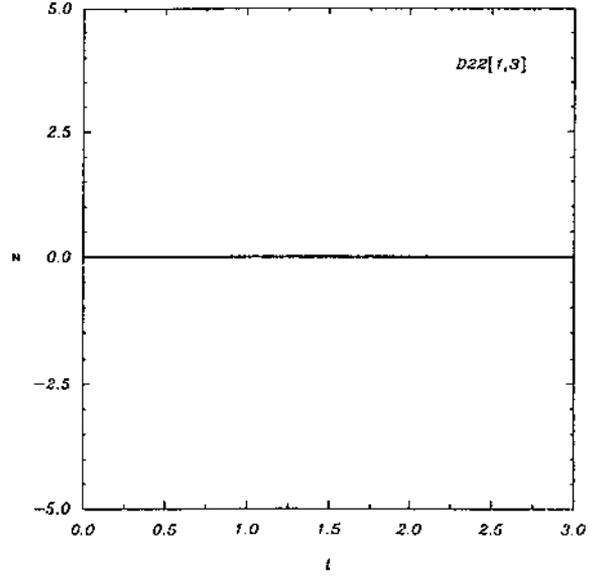


Diagrama 9

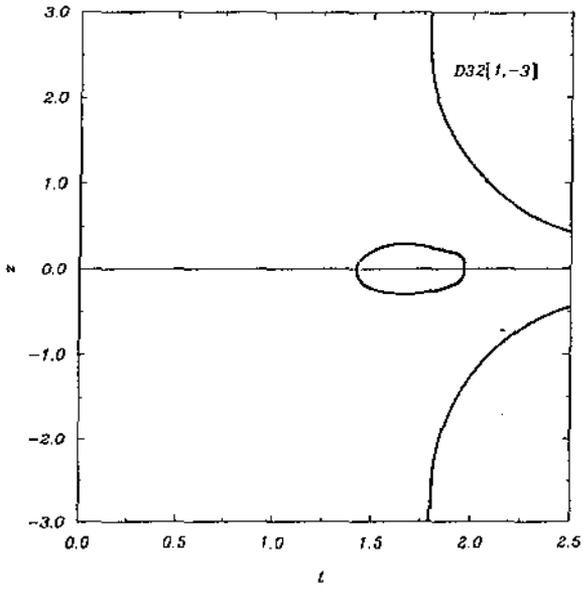


Diagrama 10

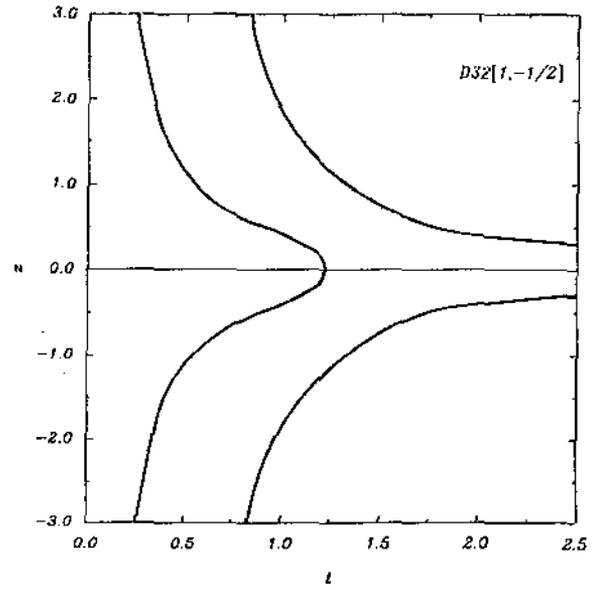


Diagrama 11

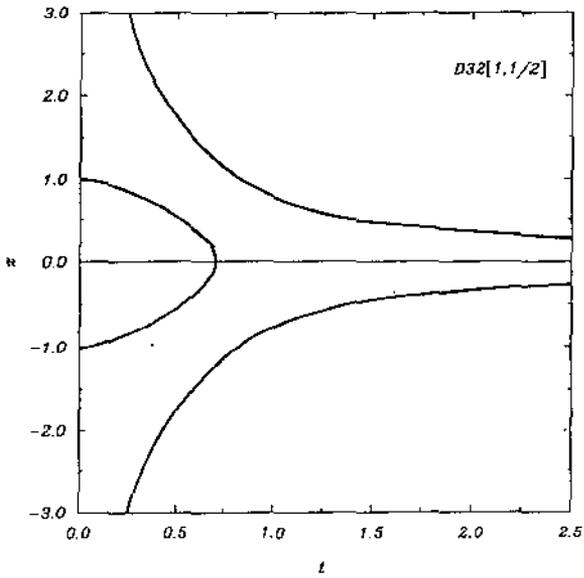


Diagrama 12

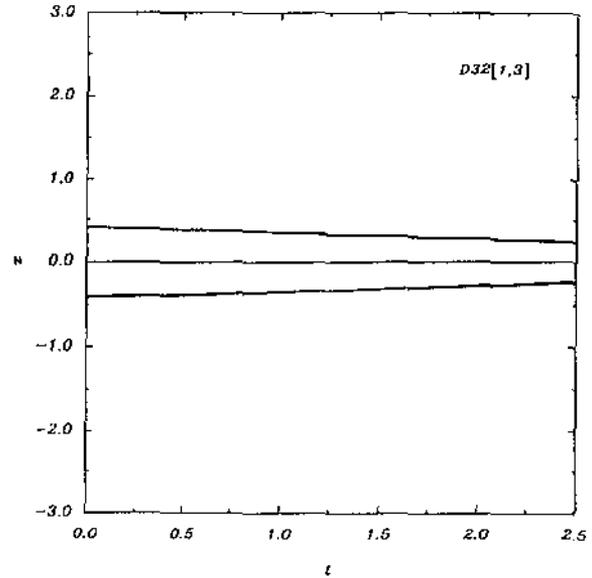


Diagrama 13

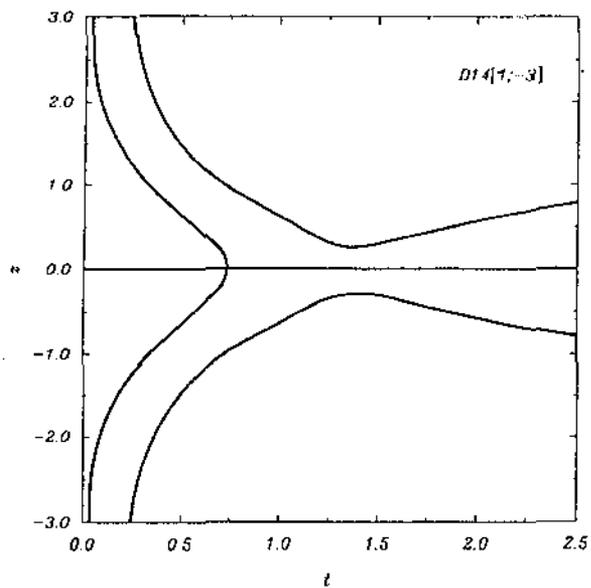


Diagrama 14

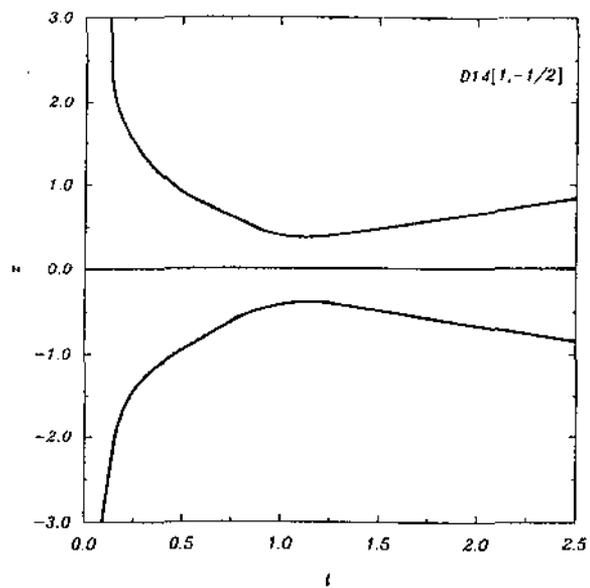


Diagrama 15

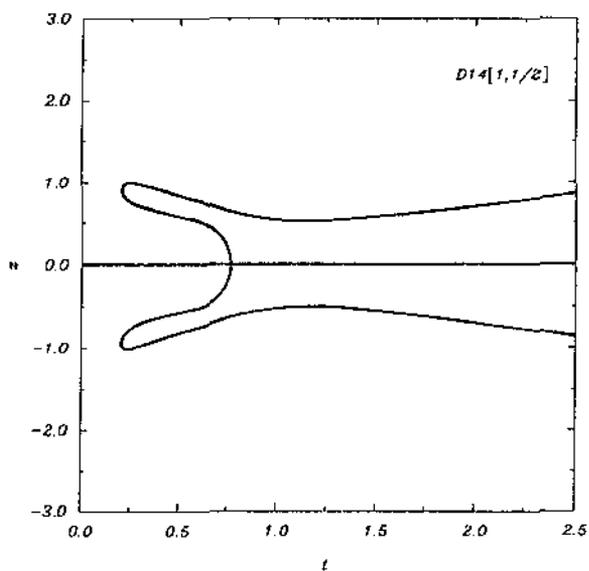


Diagrama 16

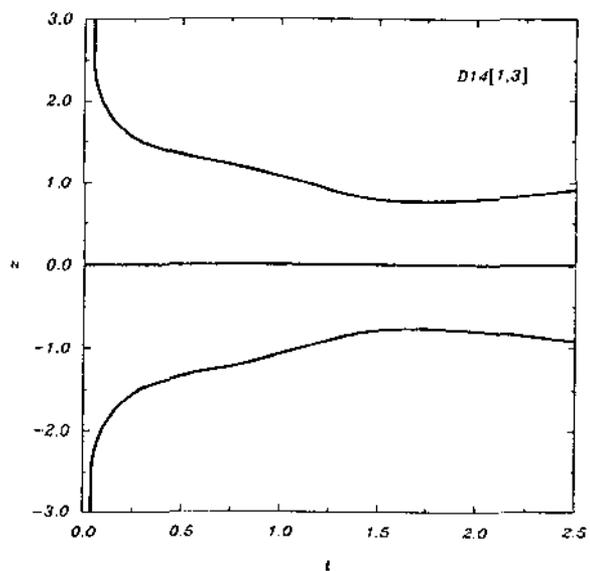


Diagrama 17

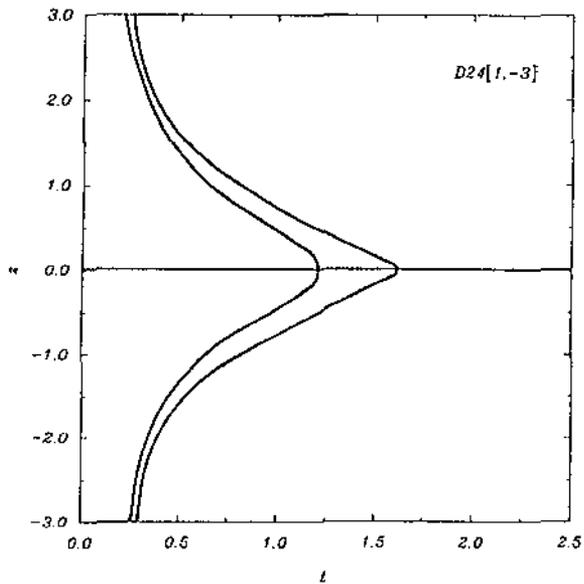


Diagrama 18

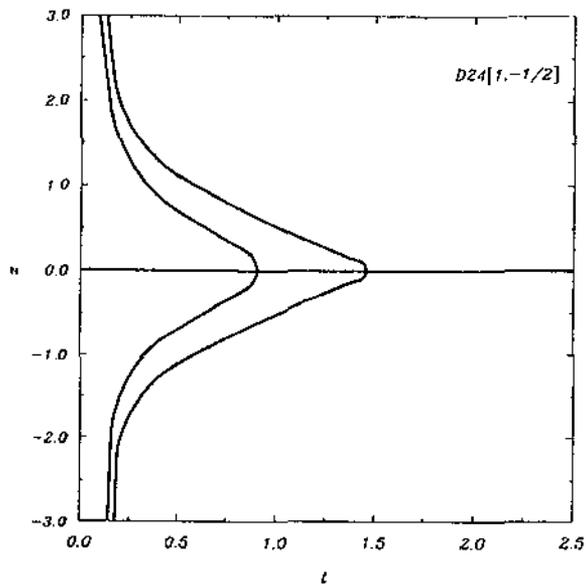


Diagrama 19

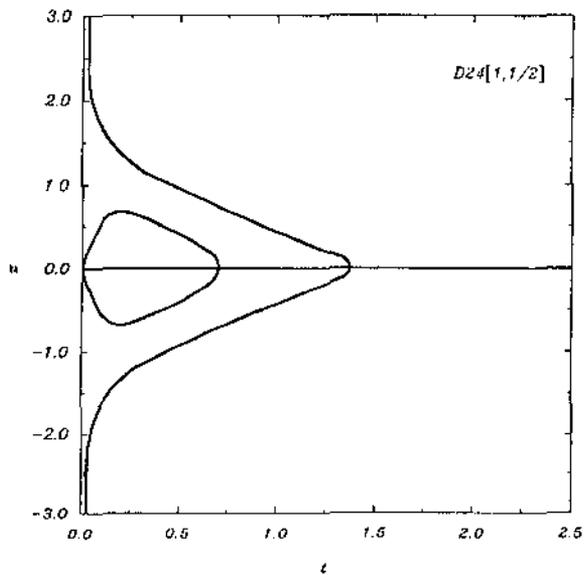


Diagrama 20

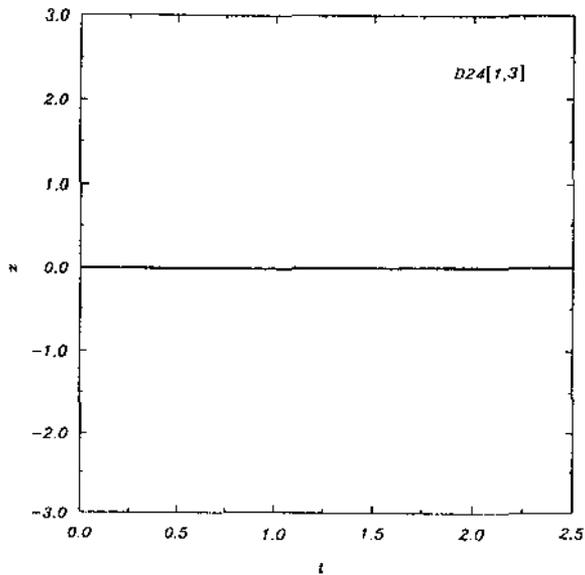


Diagrama 21

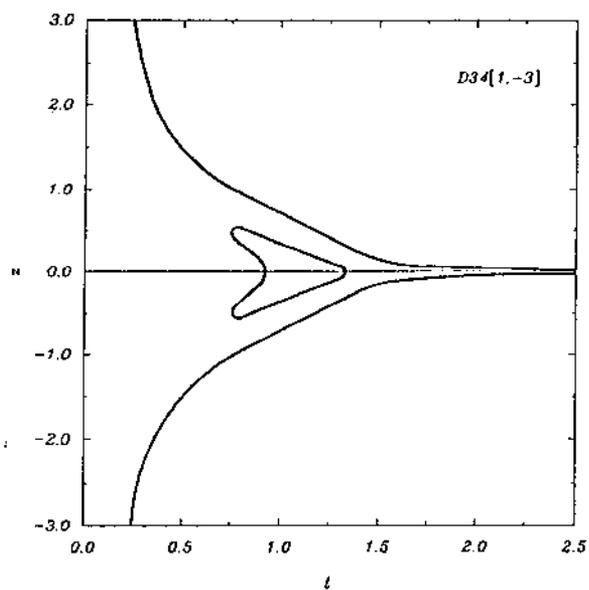


Diagrama 22

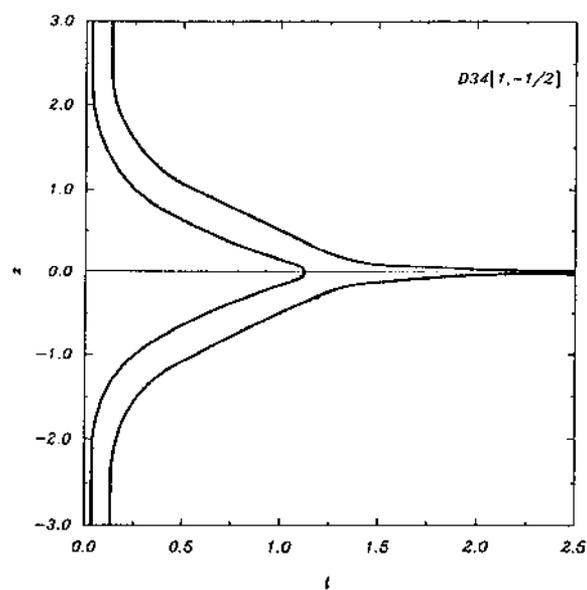


Diagrama 23

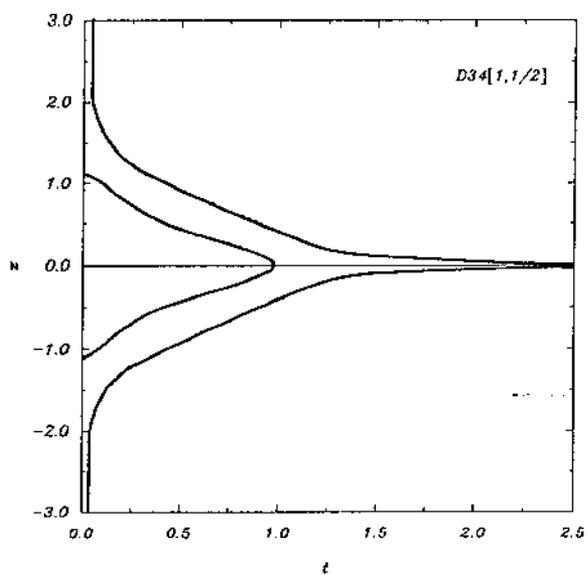


Diagrama 24

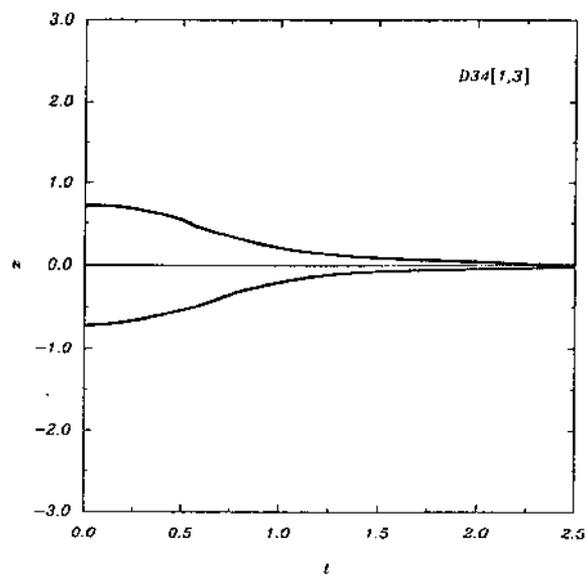


Diagrama 25

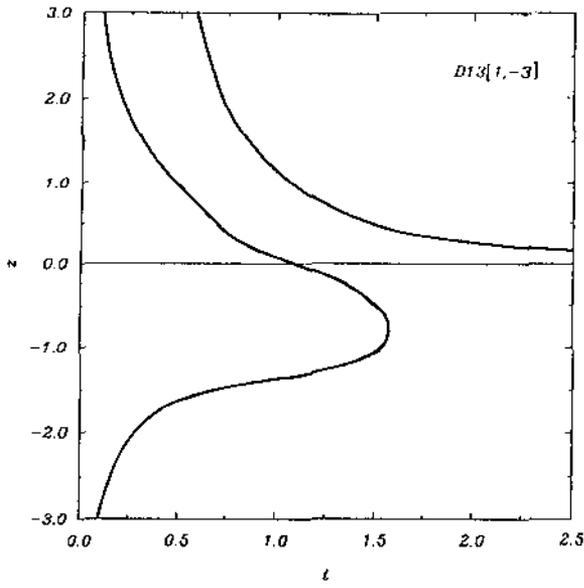


Diagrama 26

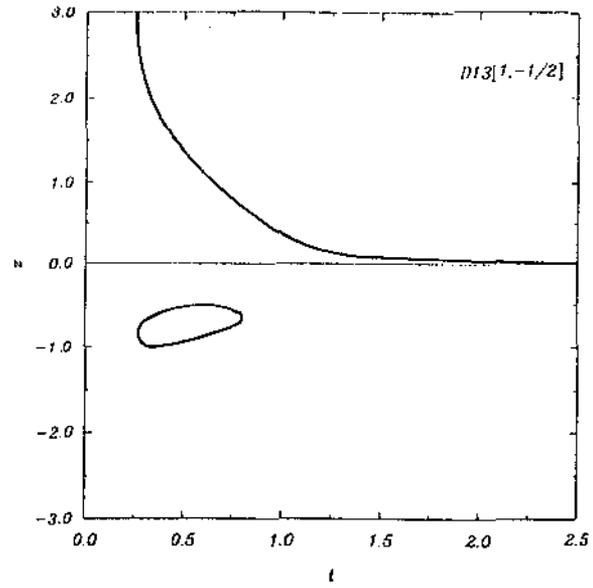


Diagrama 27

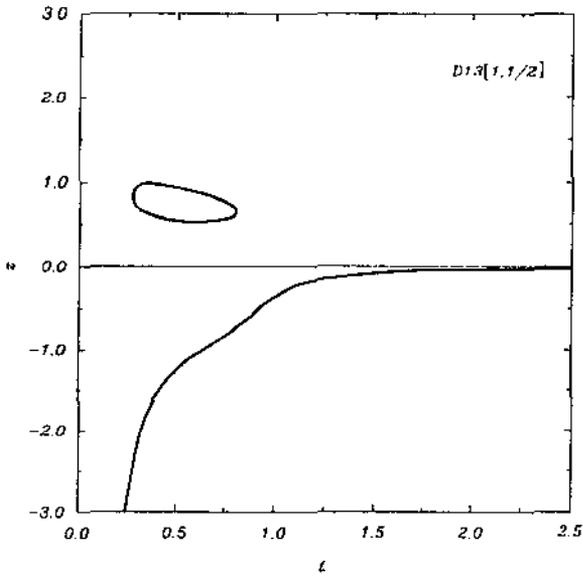


Diagrama 28

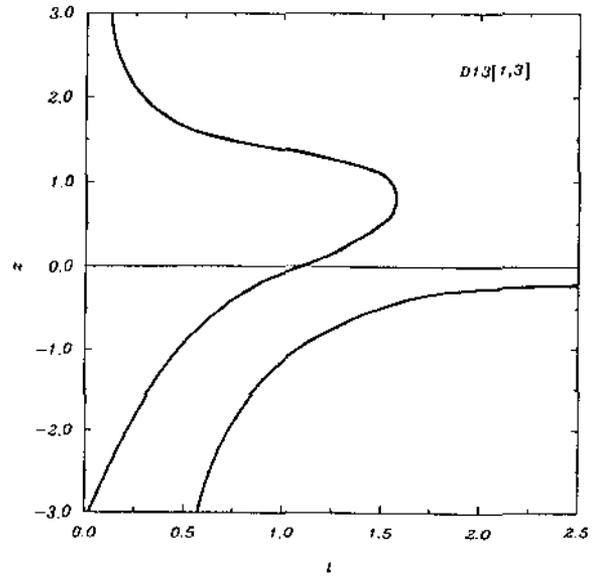


Diagrama 29

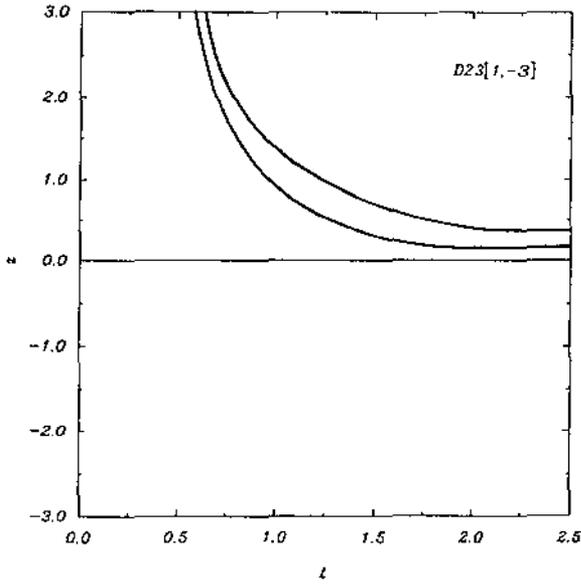


Diagrama 30

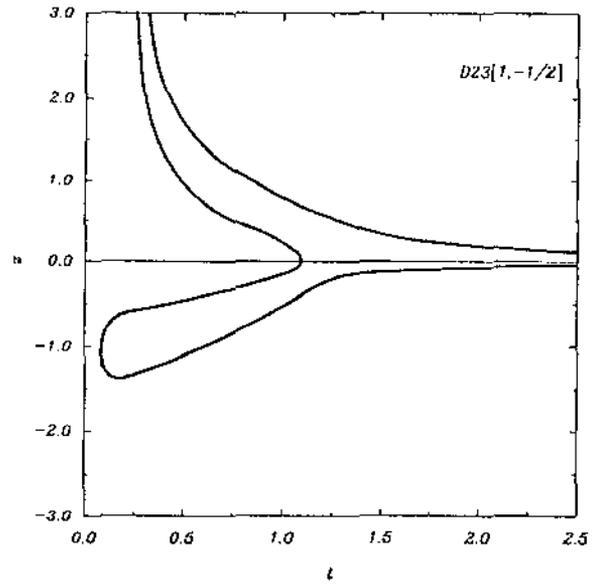


Diagrama 31

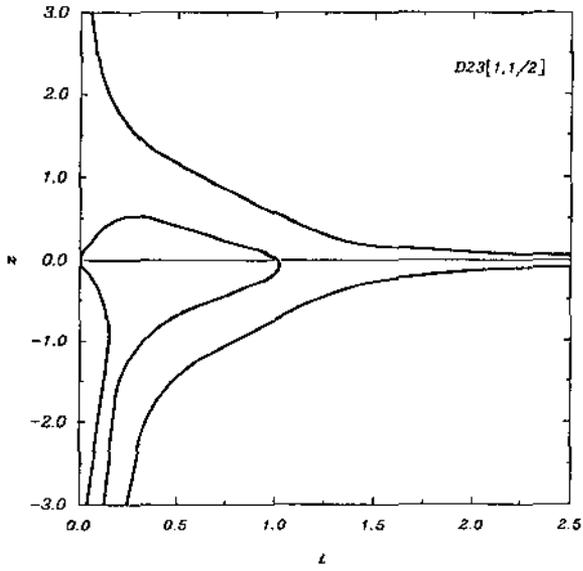


Diagrama 32

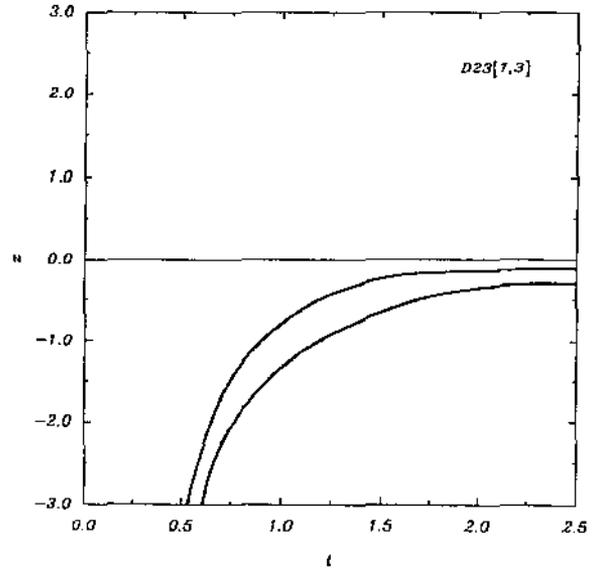


Diagrama 33

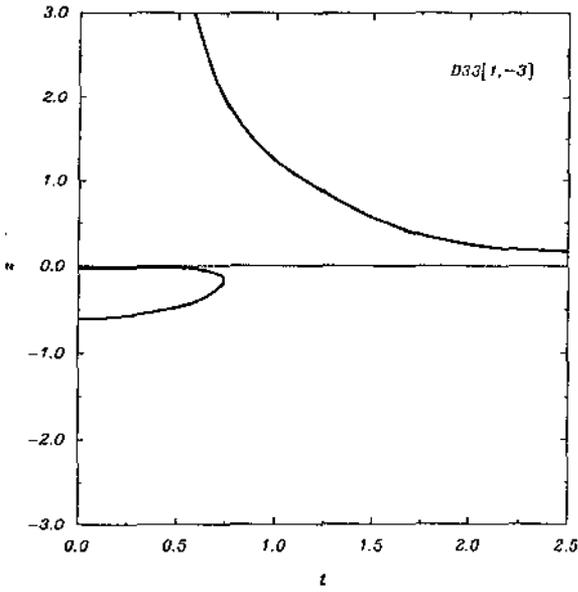


Diagrama 34

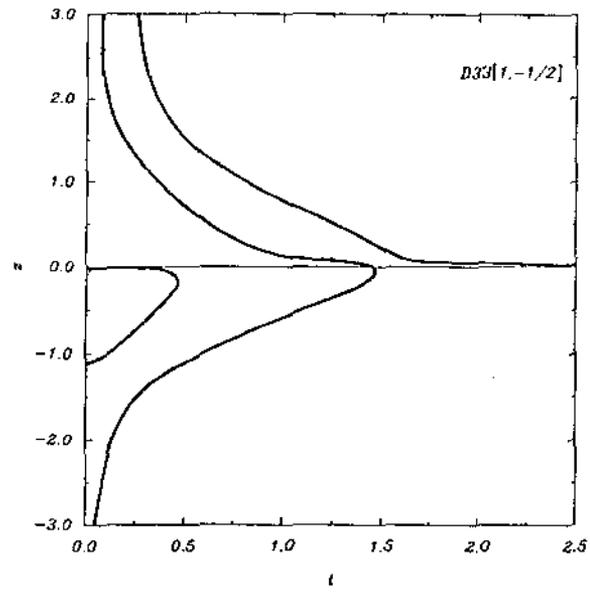


Diagrama 35

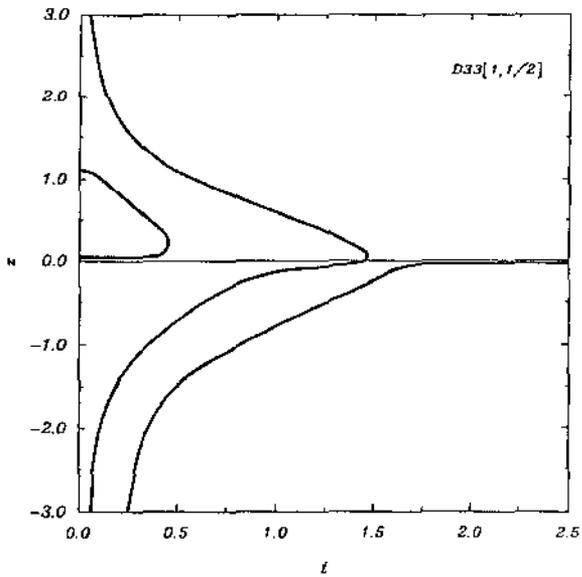


Diagrama 36

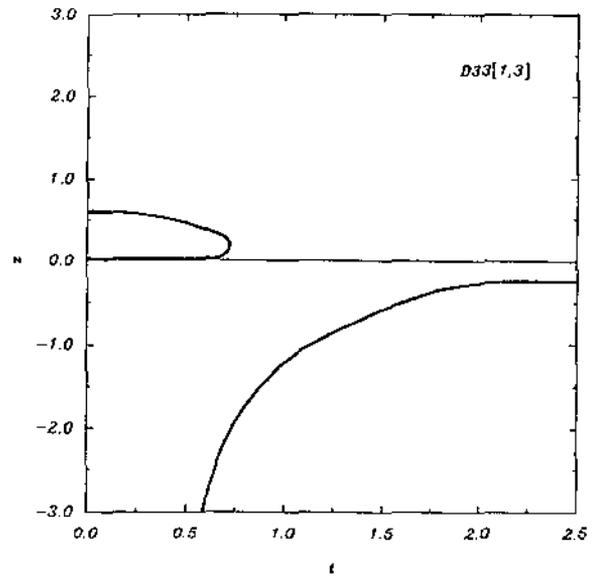


Diagrama 37

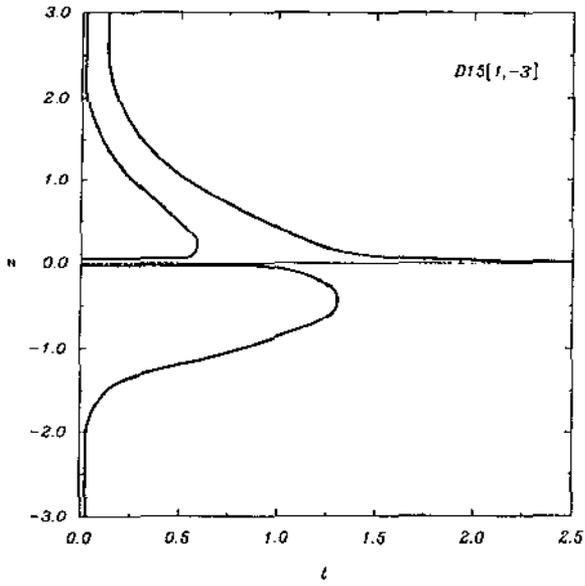


Diagrama 38

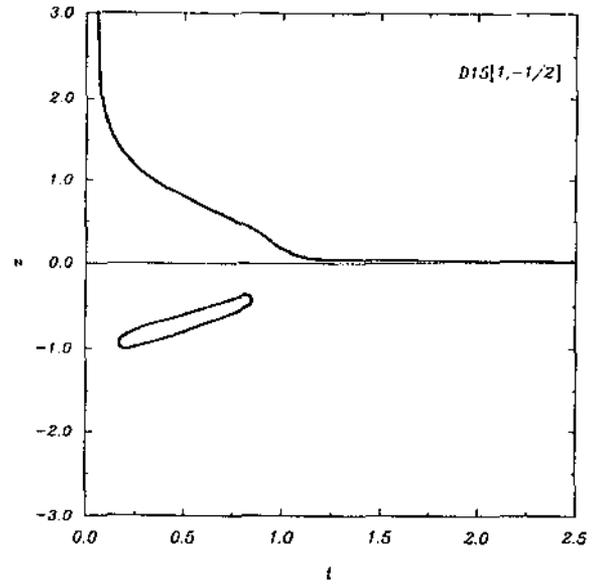


Diagrama 39

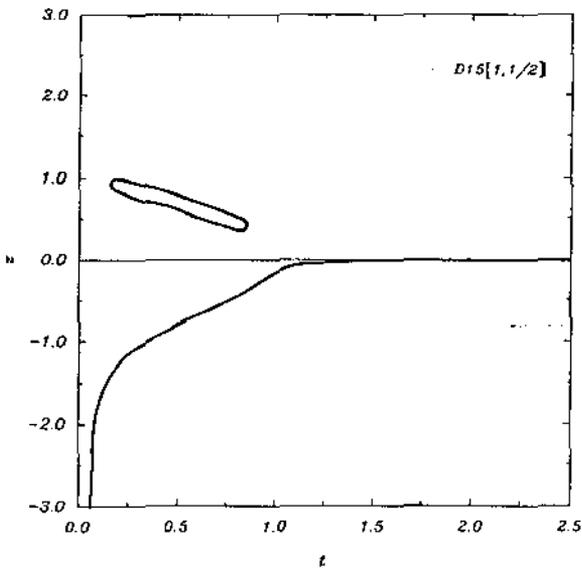


Diagrama 40

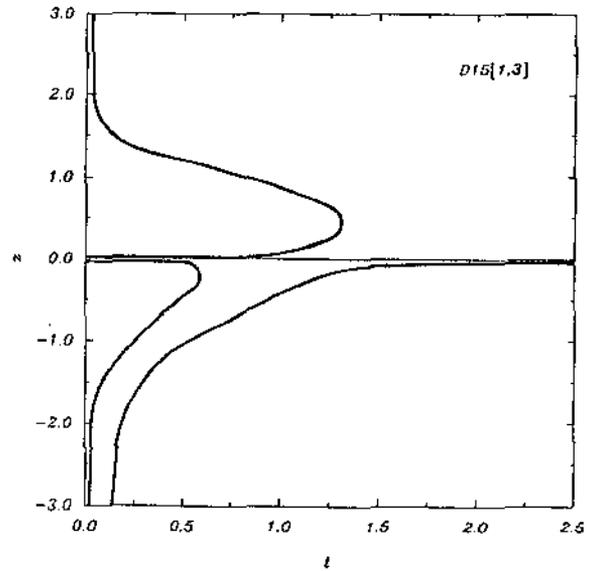


Diagrama 41

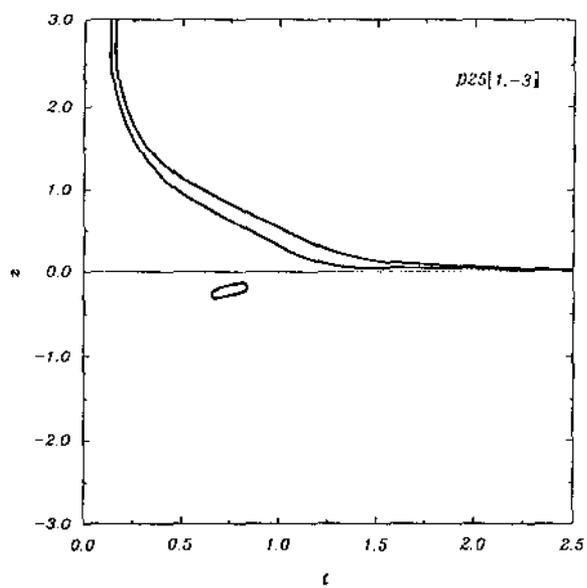


Diagrama 42

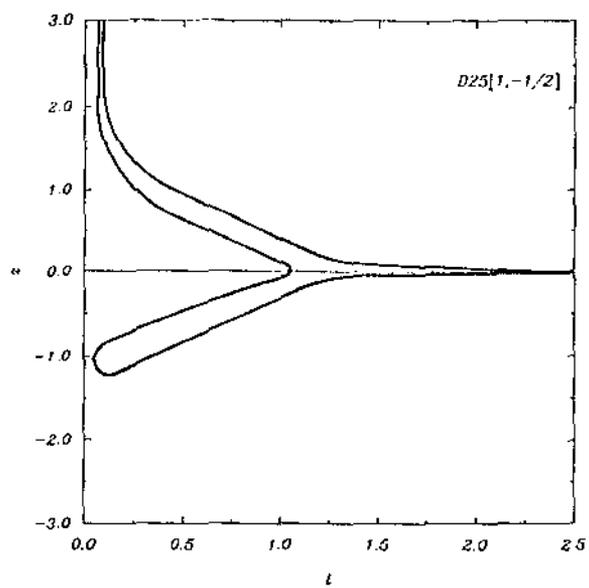


Diagrama 43

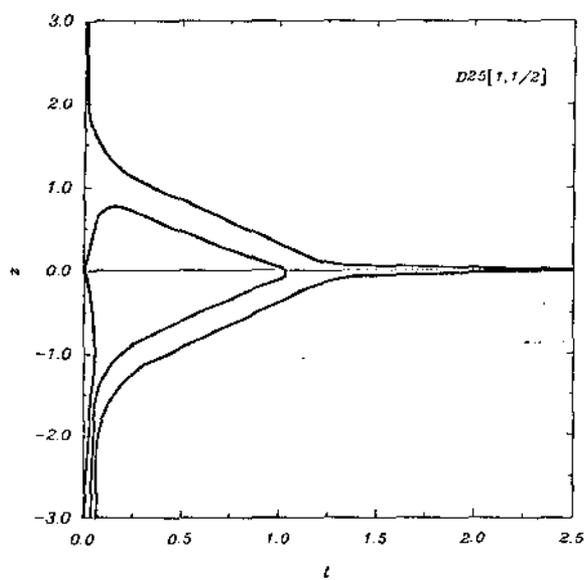


Diagrama 44

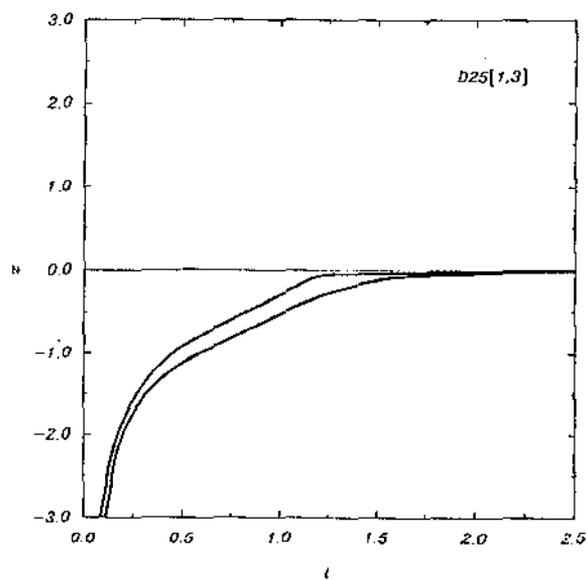


Diagrama 45

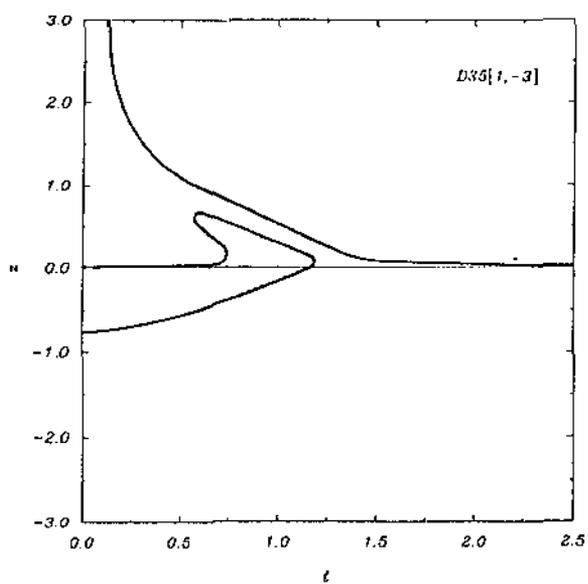


Diagrama 46

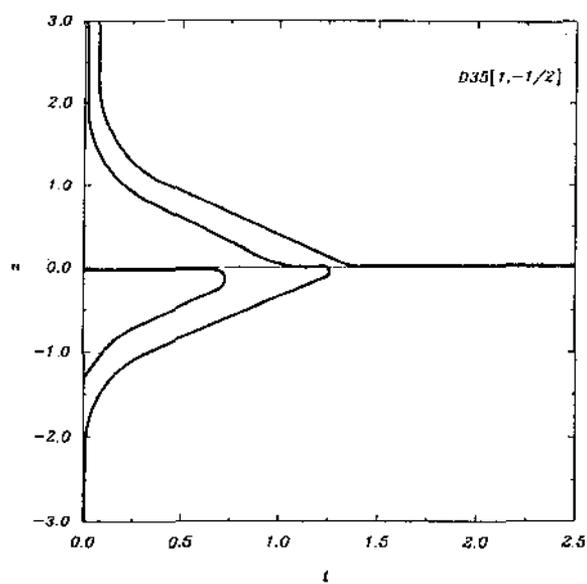


Diagrama 47

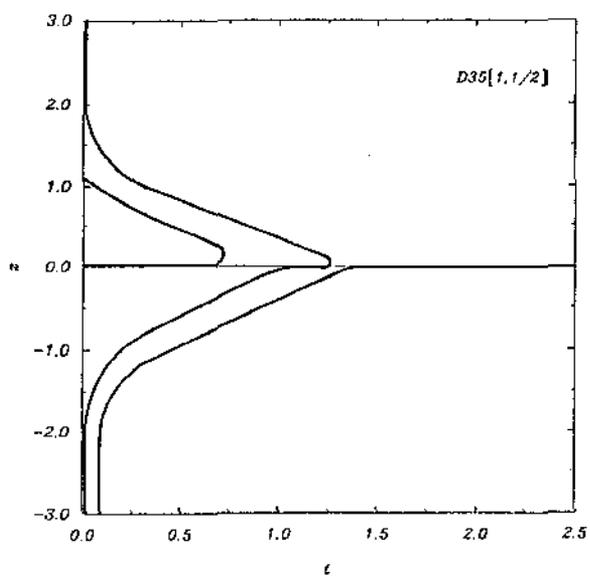


Diagrama 48

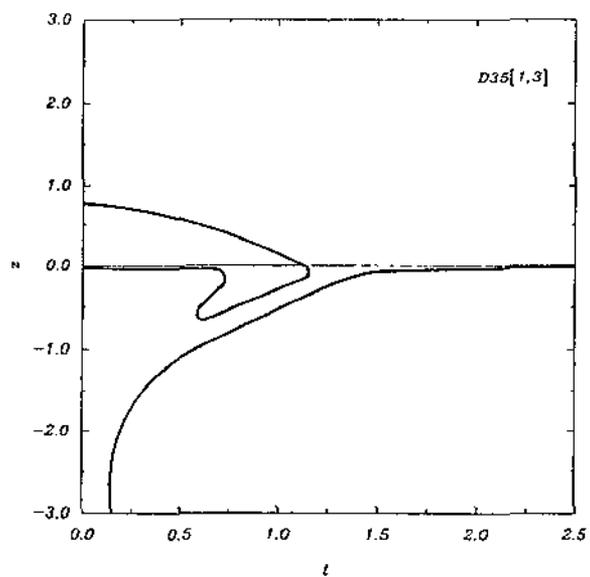


Diagrama 49

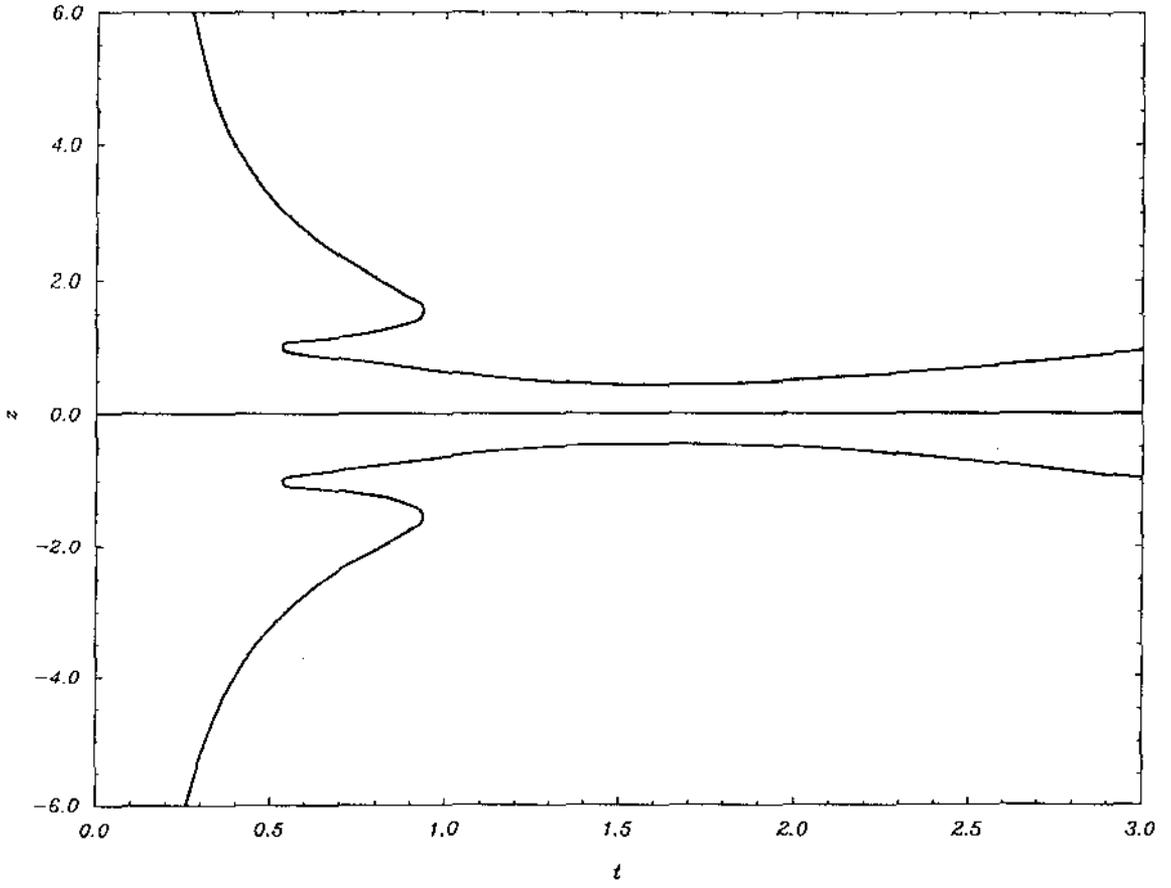


Diagrama 50

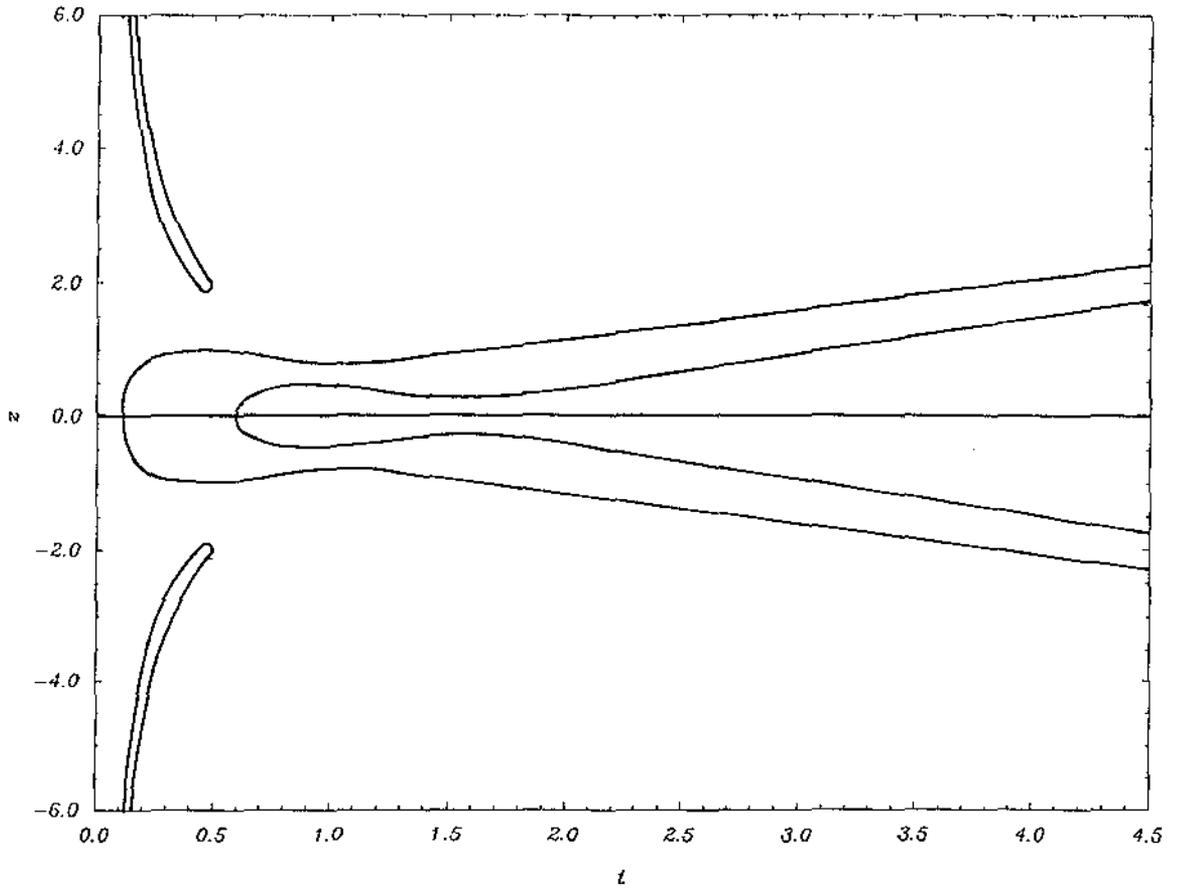
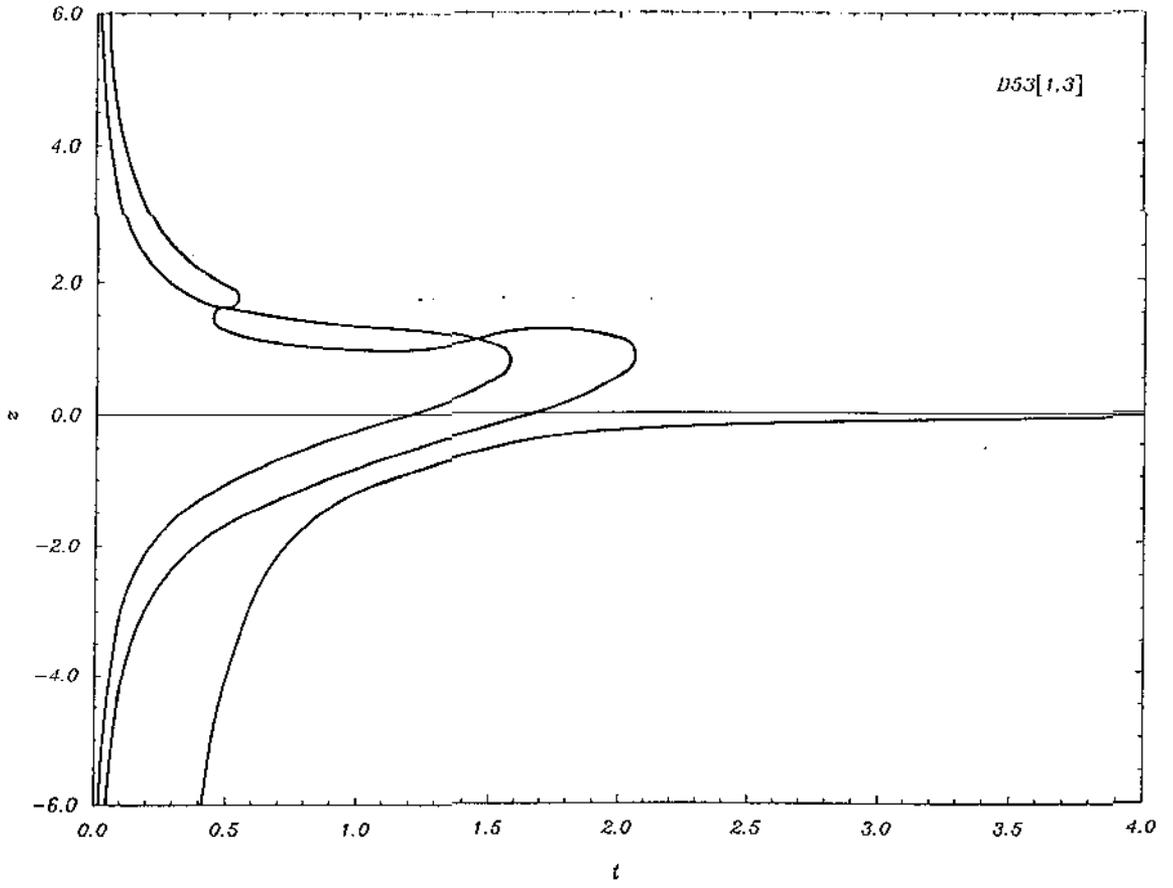


Diagrama 51



VII. ESTUDOS GERAIS DOS DIAGRAMAS

Relacionaremos agora os resultados dos dois últimos capítulos e faremos alguns comentários sobre os diagramas. Para isso vejamos a tabela a seguir onde colocamos os resultados do capítulo 5 correspondentes aos diagramas obtidos.

Tabela 12

<p>Diagrama 1</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1.41421 t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm \frac{t}{2}$	<p>Diagrama 2</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm t/2$	<p>Diagrama 3</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm t/2$	<p>Diagrama 4</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1.41421 t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm t/2$
<p>Diagrama 5</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 6</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 7</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm \frac{3}{4} t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 8</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$
<p>Diagrama 9</p> $t \rightarrow 0$ $Z \notin \mathbb{R}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$	<p>Diagrama 10</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm \left(\frac{9}{16}\right) t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$	<p>Diagrama 11</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1$ $Z \sim \pm \left(\frac{9}{16}\right) t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$	<p>Diagrama 12</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1/\sqrt{6}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$
<p>Diagrama 13</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.8909t^{-1/3}$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.3389t$	<p>Diagrama 14</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.2887t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.3389t$	<p>Diagrama 15</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.3389t$	<p>Diagrama 16</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.8909t^{-1/3}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.3389t$
<p>Diagrama 17</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.7454t^{-1}$ $Z \sim \pm 0.7071t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 18</p> $Z \sim \pm 0.3727t^{-1}$ $Z \sim \pm 0.2887t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 19</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 6.0965t$ $Z \sim \pm 0.7211t^{-1/3}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$	<p>Diagrama 20</p> $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$

<p>Diagrama 21</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.7071 t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm \frac{t}{3}^{-3}$	<p>Diagrama 22</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.2887 t^{-1}$ $Z \sim \pm 0.7211 t^{-1/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm \frac{t}{3}^{-3}$	<p>Diagrama 23</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.7211 t^{-1/3}$ $Z \sim \pm 1.1067$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm \frac{t}{3}^{-3}$	<p>Diagrama 24</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.7071$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \pm \frac{t}{3}^{-3}$
<p>Diagrama 25</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim t^{-2}$ $Z \sim \pm 0.97098 t^{-1/2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim t^{-2}$	<p>Diagrama 26</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \frac{t}{6}^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \frac{t}{6}^{-2}$	<p>Diagrama 27</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -\frac{t}{6}^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -\frac{t}{6}^{-2}$	<p>Diagrama 28</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.97098 t^{-1/2}$ $Z \sim -t^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -t^{-2}$
<p>Diagrama 29</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim t^{-2}$ $Z \sim 1.1111 t^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 1.5302 t^{-2}$ $Z \sim 0.5809 t^{-2}$	<p>Diagrama 30</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \frac{t}{6}^{-2}$ $Z \sim 0.2778 t^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.6969 t^{-2}$ $Z \sim -0.2524 t^{-2}$	<p>Diagrama 31</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -\frac{t}{6}^{-2}$ $Z \sim -t^{-2}/18$ $Z \sim \pm 3.5198 t^{-1/2}$ $Z \sim \pm \frac{t}{2}^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.3636 t^{-2}$ $Z \sim -0.5858 t^{-2}$	<p>Diagrama 32</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -t^{-2}$ $Z \sim -(8/9) t^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -0.4698 t^{-2}$ $Z \sim -1.4191 t^{-2}$
<p>Diagrama 33</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim 9t^{-2}$ $Z \sim -0.6057 t^4$ $Z \sim -(3/16)t^4$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim t^{-2}$	<p>Diagrama 34</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1.4142 t^{-1/2}$ $Z \sim -(89/48)t^4$ $Z \sim (3/2)t^4$ $Z \sim -1.10064$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \frac{t}{6}^{-2}$	<p>Diagrama 35</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1.4142 t^{-1/2}$ $Z \sim -1.5 t^{-2}$ $Z \sim 1.10064 t^4$ $Z \sim (89/48)t^4$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -\frac{t}{6}^{-2}$	<p>Diagrama 36</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -9t^{-2}$ $Z \sim 0.6057 t^4$ $Z \sim (3/16)t^4$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -t^{-2}$
<p>Diagrama 37</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 0.8672 t^{-1/4}$ $Z \sim 0.6694 t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim (2/5) t^{-4}$	<p>Diagrama 38</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim 0.3684 t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim \frac{t}{15}^{-4}$	<p>Diagrama 39</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.3684 t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -\frac{t}{15}^{-4}$	<p>Diagrama 40</p> $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.6694 t^{-2/3}$ $Z \sim \pm 0.8672 t^{-1/4}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -(2/5) t^{-4}$

<p>Diagrama 41 $t \rightarrow 0$ $Z \sim 0.6694t^{-2/3}$ $Z \sim 0.6934t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.6898t^{-4}$ $Z \sim 0.1546t^{-4}$</p>	<p>Diagrama 42 $t \rightarrow 0$ $Z \sim 0.3684t^{-2/3}$ $Z \sim 0.4368t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.3565t^{-4}$ $Z \sim -0.1787t^{-4}$</p>	<p>Diagrama 43 $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.3684t^{-2/3}$ $Z \sim -0.2554t^{-2/3}$ $Z \sim \pm 0.740083t^{-1/4}$ $Z \sim \pm 8.6528t$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.2231t^{-4}$ $Z \sim -0.312t^{-4}$</p>	<p>Diagrama 44 $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.6437t^{-2/3}$ $Z \sim -0.6694t^{-2/3}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -0.1102t^{-4}$ $Z \sim -0.6454t^{-4}$</p>
<p>Diagrama 45 $t \rightarrow 0$ $Z \sim 0.6694t^{-2/3}$ $Z \sim -0.7677$ $Z \sim (45/128)t^6$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 1.4423t^{-2/3}$</p>	<p>Diagrama 46 $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.2415t^6$ $Z \sim 0.3684t^{-2/3}$ $Z \sim \pm 0.740083t^{-1/4}$ $Z \sim -1.0986$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim 0.7937t^{-2/3}$</p>	<p>Diagrama 47 $t \rightarrow 0$ $Z \sim 0.2415t^6$ $Z \sim -0.3684t^{-2/3}$ $Z \sim \pm 0.740083t^{-1/4}$ $Z \sim 1.0986$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -0.7937t^{-2/3}$</p>	<p>Diagrama 48 $t \rightarrow 0$ $Z \sim -0.6694t^{-2/3}$ $Z \sim 0.7677$ $Z \sim -(45/128)t^6$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -1.4423t^{-2/3}$</p>
<p>Diagrama 49 $Z \sim \pm 1.5487t^{-1}$ $Z = 0$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm \frac{t}{2}$</p>	<p>Diagrama 50 $t \rightarrow 0$ $Z = 0$ $Z \sim \pm 0.75t^{-1}$ $Z \sim \pm 0.9424t^{-1}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z = 0$ $Z \sim \pm \frac{t}{2}$</p>	<p>Diagrama 51 $t \rightarrow 0$ $Z \sim \pm 1.3292t^{-1/2}$ $Z \sim \pm 0.971t^{-1/2}$ $Z \sim -t^{-2}$ $t \rightarrow +\infty$ $Z \sim -t^{-2}$</p>	

Observando o diagrama 13, por exemplo, vemos para $t \rightarrow 0$ um par de curvas com limite $+\infty$ outro par com limite $-\infty$. Esse comportamento concorda com os resultados da tabela acima ocorrendo o mesmo no limite $t \rightarrow +\infty$. O mesmo se verifica para todos os outros diagramas, com exceção do diagrama 50 no limite $t \rightarrow +\infty$.

Neste caso a tabela acima fornece para as raízes não nulas os resultados $z \sim (\pm 1/2) t^{-1}$.

A análise numérica está mostrando que existem duas soluções comportando-se como $z \sim (1/2) t^{-1}$, e outras duas como $z \sim (1/2)t^{-1}$.

Segundo os comentários que fizemos no Capítulo 5, logo depois da exposição do balanço dominante, este fato também seria previsto pelo balanço dominante se tivéssemos calculado outros termos da expansão. Não o fizemos porque o primeiro termo juntamente com os resultados numéricos do capítulo anterior fornecem todos os resultados que precisamos.

Vejam inicialmente os diagramas de D_{qp}^{in} para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $n = 2, 4$. Estes gráficos são simétricos em relação ao eixo t porque, para estes valores de i, n , $P_{in}(q, p, z, t_0)$ em (5.1.1) é uma função par ou ímpar de z .

No limite $t \rightarrow +\infty$ estes diagramas apresentam certas propriedades em comum quando mantemos fixo i e variamos n . Por exemplo, observando os diagramas de D_{1p}^{12} e D_{1p}^{14} graficados (diagramas 1-4 e 13-16) vemos sempre duas funções com limite infinito. A tabela 12 fornece uma primeira aproximação para o comportamento das funções soluções neste limite.

Comparando os diagramas de D_{1p}^{12} e D_{1p}^{14} para $i = 2, 3$ encontraremos também propriedade comuns neste limite.

É interessante que para $n=2, 4$ o comportamento das soluções analisadas não dependa de p no limite $t \rightarrow +\infty$.

Como já era esperado, ao mudarmos p podemos mudar de forma considerável o tipo de diagrama.

Uma comparação rápida entre os diagramas 3 e 4, mostra uma marcante mudança no gráfico para t pequeno, quando mudamos o valor de p em D_{1p}^{in} .

Para os diagramas de D_{1p}^{in} , com $n = 3, 5$ e $i = 1, 2, 3$, não teremos simetria em relação ao eixo t , uma vez que os polinômios correspondentes não são pares nem ímpares em relação a variável z .

O comportamento das soluções no limite $t \rightarrow +\infty$ depende do valor de p , como mostra a tabela 12.

De resto podemos fazer comentários análogos àqueles feitos para os diagramas de D_{1p}^{in} com n par.

Para analisarmos os diagramas de $D_{1\ 1/2}^{42}$ e $D_{1\ 1/2}^{52}$ relembremos que

as funções $J_{42}(1,1/2,z,t)$ e $J_{52}(1,1/2,z,t)$ são construídas a partir das funções $J_{12}(1,1/2,z,t)$, $J_{22}(1,1/2,z,t)$ e $J_{32}(1,1/2,z,t)$ (ver 4.23 - 4.27).

Desta forma, é interessante observarmos quais as propriedades dos diagramas correspondentes às 3 últimas funções que aparecem nos diagramas de $D_{1\ 1/2}^{42}$ e $D_{1\ 1/2}^{52}$.

Para $D_{1\ 1/2}^{42}$ observamos simetria em relação ao eixo t e a função $z(t) = 0$ como uma solução. Estas duas propriedades, que podem ser previstas facilmente pela observação do polinômio $P_{42}(1,p,z,t)$, são comuns aos diagramas correspondentes a $J_{12}(1,1/2,z,t)$ e $J_{22}(1,1/2,z,t)$ (diagramas 3 e 7). No diagrama correspondente a $J_{32}(1,1/2,z,t)$ verifica-se apenas a primeira (diagrama 11).

No limite $t \rightarrow +\infty$ prevaleceu o comportamento das soluções do diagrama 3, enquanto no limite $t \rightarrow 0$ o comportamento observado tem semelhanças nos diagramas 7 e 11.

Comentários idênticos podem ser feitos para o diagrama de $D_{1\ 1/2}^{52}$ (diagrama 50).

Para o diagrama 51 o que mais chama a atenção é o comportamento das curvas na região onde $1.2 < t < 1.6$ e $z > 0$. Em todos os outros diagramas quando duas curvas soluções têm um ponto comum elas terminam neste ponto. Neste caso não.

No limite $t \rightarrow +\infty$ observamos um comportamento idêntico aquele dos diagramas 28 e 36 enquanto no limite $t \rightarrow 0$ o comportamento observado tem semelhanças nos diagramas 28, 32 e 36.

Agora é um bom momento para voltarmos a uma questão que nos direcionou inicialmente, que era saber se existem propriedades dos diagramas de D_{qp}^{in} que podem ser associadas aos sinais dos expoentes de Kasner (ver tabela 11 do capítulo 6). Por exemplo, se existem propriedades que ocorrem somente se $p_1 > 0$ e outras somente se $p_1 < 0$.

Se assim o fosse, os diagramas graficados para D_{1p}^{12} , por exemplo, deveriam manter certas propriedades para $p > -1$ as quais não se manteriam para $p < -1$. Mas, as únicas propriedades que se mantêm para $p = -1/2, 1/2$ e 3 são aquelas verificadas para todos os valores de p usados, ou seja; função $z(t) = 0$ como uma solução, simetria em relação ao eixo t e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dz/dt = \pm 1/2 ,$$

para as soluções não nulas. Observações desse tipo fizeram-nos responder negativamente a questão.

Passemos agora ao capítulo 8, onde usaremos os diagramas 3, 7 e 11 nas análises que faremos.

VIII. ANÁLISE "ONDULATÓRIA"

1) INTRODUÇÃO.

Apresentemos inicialmente algumas definições.

Dado um corte $J_{in}(q,p,z,t_0)$, q e p fixos, chamaremos seu gráfico de "onda" e seus pontos estacionários de pontos estacionários instantâneos (escrevemos "onda" porque não se trata aqui de uma solução de uma equação de onda, mas sim de um elemento geométrico que se propaga no tempo).

Um ponto $(t_0, z_0, J_{in}(q,p,z_0,t_0))$ é chamado pico (depressão) da "onda" se z_0 é um ponto de máximo (mínimo) do corte correspondente.

Chamaremos altura de um pico (depressão) que ocorre em (t_0, z_0) ao valor absoluto de $J_{in}(q,p,z_0,t_0)$.

Assim, à medida que o tempo passa, a forma da "onda" vai se modificando, e os seus picos e depressões vão descrevendo trajetórias no espaço. A projeção dessas trajetórias no plano tz é o diagrama do conjunto D_{qp}^{in} definido em (5.1.2).

Diremos que as funções f_1, \dots, f_m cobrem o conjunto D_{qp}^{in} quando $(t,z) \in D_{qp}^{in}$ se e somente se $f_i(t) = z$ para algum i entre $1, \dots, m$.

Uma questão central para esse trabalho é sabermos, dentre os pontos de D_{qp}^{in} , quais correspondem a picos e quais correspondem a depressões.

Nos casos onde é possível explicitar as funções soluções de (5.1.1) poderíamos tentar resolver essa questão analiticamente. Isso nem sempre é possível, pois há situações em que as expressões das funções soluções são muito complicadas, dificultando as análises ($P_{42}(1,1/2,z,t) = 0$, por exemplo).

Uma maneira indireta e bem mais simples para resolvermos essa questão provém da seguinte observação: se

$$\frac{\partial^2 J_{in}(q,p,z,t)}{\partial z^2} \Bigg|_{\gamma(t)} \neq 0, \quad \forall t \mid a < t < b, \text{ onde } \gamma \text{ é uma curva solução de}$$

$\partial J_{1n}(q,p,z,t)/\partial z = 0$ (p,q fixos), então $\partial^2 J_{1n}(q,p,z,t)/\partial z^2$ não muda de sinal ao longo de γ .

Desta forma, para decidirmos quais pontos de um dado diagrama tz correspondem a picos e quais correspondem a depressões, basta dividirmos o diagrama em curvas onde $\partial^2 J_{1n}/\partial z^2$ não se anule em nenhum ponto, e calcularmos o sinal dessa derivada em um ponto qualquer de cada uma destas curvas. Os pontos onde $\partial^2 J_{1n}/\partial z^2$ for estritamente positiva corresponderão a depressões e os pontos onde essa derivada for estritamente negativa corresponderão a picos das ondas. Os pontos onde $\partial^2 J_{1n}/\partial z^2$ for nula deverão ser estudados a parte.

A análise "ondulatória" que faremos consiste no estudo da evolução temporal dos gráficos dos cortes $J_{12}(1,1/2,z,t_0)$, com $i = 1,2,3,4,5$, para $0 < t_0 < +\infty$.

Iniciaremos essa análise estudando a forma das "ondas". Em seguida estudaremos os picos (depressões) e seus respectivos movimentos, tendo como base o diagrama tz do conjunto D_{qp}^{1n} correspondente e a variação da altura dos picos e depressões.

Os gráficos desse capítulo encontram-se no final do mesmo. Por motivos técnicos, nestes gráficos usaremos as notações $Pin[q,p,z,t]$, $Din[q,p]$ e $Jin[q,p,z,t]$ em lugar de $P_{1n}(q,p,z,t)$, D_{qp}^{1n} e $J_{1n}(q,p,z,t)$, respectivamente.

2) Análise "ondulatória" das funções (4.25)-(4.27) para $n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$.

2.1) Quando $i = 1$, $n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$, (4.25) reduz-se a

$$J_{12}(1,1/2,z,t) = \frac{\exp[-t^4/8 - t^2 z^2 - (t^2/2 + z^2)/2](3/2 - 2t^2 - 2t^4 + 8t^2 z^2)}{8t^{13/8}} \quad (8.2.1)$$

Assim, $J_{12}(1,1/2,z,t) = J_{12}(1,1/2,-z,t)$, para todo $t > 0$.

O conjunto $D_{1\ 1/2}^{12}$ está esboçado na figura 1, onde $h(1/2,t)$ é dada por (6.1.2) quando $p = 1/2$. Nos gráficos usaremos a notação $h[1/2,t]$.

Vejam os gráficos dos cortes de $J_{12}(1,1/2,z,t)$.

Se $t < 0.31$ então $J_{12}(1,1/2,z,t)_{,z} = 0$ tem apenas uma solução real $(t,0)$. Como $J_{12}(1,1/2,z,t)_{,zz} < 0$ se $z = 0$ e $0 < t < 0.31$, os pontos $(t, z = 0, J_{12}(1,1/2,0,t))$ são picos das ondas em $0 < t < 0.31$.

Além disso, como

$$a) \lim_{z \rightarrow \pm\infty} J_{12}(1,1/2,z,t) = 0 \text{ (t fixo),}$$

podemos afirmar que a figura 2 fornece o tipo de "onda" encontrado para $0 < t < 0.31$.

Se $t > 0.31$ encontramos 3 pontos críticos instantâneos dados por $z = 0$ e $z = \pm h(1/2,t)$, como mostra a figura 1. Neste caso temos :

$$b) J_{12}(1,1/2,z,t)_{,zz} > 0 \text{ se } t > 0.31 \text{ e } z = 0 ,$$

$$J_{12}(1,1/2,z,t)_{,zz} < 0 \text{ se } t > 0.31 \text{ e } z = \pm h(1/2,t) ,$$

logo $(t, z = 0, J_{12}(1,1/2,0,t))$ é uma depressão e $(t, z = \pm h(1/2,t), J_{12}(1,1/2,\pm h(1/2,t),t))$ são picos. Desse resultado e de a) podemos afirmar que a figura 3 fornece o tipo de "onda" encontrado para $t > 0.31$. A figura 4 mostra a superfície correspondente a $J_{12}(1,1/2,z,t)$ no domínio indicado.

Analisemos o pico em $z = 0$:

c)

$$J_{12}(1,1/2,0,t) > 0 \text{ se } 0 < t < 1/\sqrt{2} ,$$

$$J_{12}(1,1/2,0,t) = 0 \text{ se } t = 1/\sqrt{2} ,$$

$$J_{12}(1,1/2,0,t) < 0 \text{ se } t > 1/\sqrt{2} .$$

d)

$$J_{12}(1,1/2,0,t)_{,t} < 0 \text{ se } 0 < t < 1.30 ,$$

$$J_{12}(1,1/2,0,t)_{,t} = 0 \text{ se } t = 1.30,$$

$$J_{12}(1,1/2,0,t)_{,t} > 0 \text{ se } t > 1.30.$$

$$e) \quad \lim_{t \rightarrow 0} J_{12}(1,1/2,0,t) = +\infty , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} J_{12}(1,1/2,0,t) = 0$$

Portanto as figuras 5 e 6 mostram bem o movimento desse ponto no plano $z = 0$. Esses gráficos correspondem à mesma função em domínios diferentes. Essa divisão foi necessária porque as alturas das "ondas" diminuem muito rapidamente no tempo.

Por esses gráficos e pelo item e acima vemos que a altura do pico diverge de $+\infty$ em $t = 0$, caindo rapidamente até o ponto de ramificação 0.31, a partir do qual o pico torna-se uma depressão. Desse instante em diante teremos uma depressão em $z = 0$, a qual atinge altura nula em $t = 1/\sqrt{2}$, oscilando daí por diante de acordo com a figura 6. Sua altura tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$.

A "onda" em $t = 1/\sqrt{2}$ está na figura 7.

Em $t = 0.31$ o pico em $z=0$ passa a uma depressão dando origem a dois picos simétricos em relação ao plano $z = 0$, cujas alturas são dadas por $|J_{12}(1,1/2,\pm h(1/2,t),t)| = J_{12}(1,1/2,\pm h(1/2,t),t)$, uma vez que $J_{12}(1,1/2,h(1/2,t),t) > 0$ se $t > 0.31$.

Como $J_{12}(1,1/2,h(1/2,t),t)_{,t} < 0$ se $t > 0.31$, vê-se que a função $J_{12}(1,1/2,h(1/2,t),t)$ é sempre decrescente. Além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} J_{12}(1,1/2,h(1/2,t),t) = 0$, portanto a figura 8 caracteriza bem o comportamento das alturas desses picos. Em resumo, temos um pico que em $t = 0.31$ se quebra em dois outros picos simétricos em relação ao plano $z = 0$ e uma depressão, os quais terão suas alturas tendendo a zero para $t \rightarrow +\infty$.

É interessante observar que, enquanto as alturas dos picos $(t,\pm h(1/2,t),J_{12}(1,1/2,\pm h(1/2,t),t))$ são sempre decrescentes, as alturas $|J_{12}(1,1/2,0,t)|$ aumentam no intervalo $1/\sqrt{2} < t < 1.30$, sendo

decrecentes fora desse intervalo.

A taxa $dh(1/2,t)/dt$ tende a $+\infty$ quando $t \rightarrow 0.31$ e tende a $1/2$ para $t \rightarrow +\infty$. O comportamento de $dh(1/2,t)/dt$ próximo de $t = 0.31$ não implica em violação da teoria da relatividade uma vez que a velocidade de fase não é limitada por c .

2.2) Para $i = n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$ obtemos de (4.25)

$$J_{22}(1,1/2,z,t) = \frac{\exp[-t^2/4 - t^4/8 - (1/2 + t^2)z^2] (9 + 58t^2 - 20t^4 - 8t^6 - 16t^2z^2 - 96t^4z^2)}{(64t^{13/8})} \quad (8.2.2)$$

Assim, $J_{22}(1,1/2,z,t) = J_{22}(1,1/2,-z,t)$, para todo $t > 0$.

A equação $P_{22}(1,1/2,z,t) = 0$ tem solução real não-nula para $0 < t < 1.798$, dada por $(t, \pm k(t))$, onde

$$k(t) = 1/2 \left[\frac{9 + 108t^2 + 288t^4 - 48t^6 - 16t^8}{t^2 + 8t^4 + 12t^6} \right]^{1/2} \quad (8.2.3)$$

A expressão acima foi obtida de (6.2.3) para $p = 1/2$. Se $t > 1.789$ então apenas $z = 0$ é solução real dessa equação.

O conjunto $D_{1/2}^{22}$ está esboçado na figura 9. Nos gráficos usaremos a notação $k[t]$ em lugar de $k(t)$.

O ponto $(t = 1.798, z = 0)$ é o único ponto solução do sistema (5.1.5.a)-(5.1.5.b) nesse caso. Portanto $t = 1.798$ é o único ponto de ramificação de $D_{1/2}^{22}$.

Vejamos os tipos de "ondas" neste caso.

a) Se $0 < t_0 < 1.35$ então $J_{22}(1,1/2,z,t_0) > 0$ numa vizinhança de $z = 0$, e $J_{22}(1,1/2,z,t_0) < 0$ fora dessa região.

b) Se $t_0 > 1.35$ então $J_{22}(1,1/2,z,t_0) < 0$, para todo z .

c) $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} J_{22}(1,1/2,z,t) = 0$.

d) Pela figura 9, se $0 < t < 1.798$ então temos 3 soluções reais de (4.28) dadas por $(t,0)$ e $(t, \pm k(t))$. Para $0 < t < 1.798$ teremos $J_{22}(1,1/2,z,t)_{,zz} < 0$ se $z = 0$ e $J_{22}(1,1/2,z,t)_{,zz} > 0$ se $z = \pm k(t)$. Portanto os pontos $(t, z = 0, J_{22}(1,1/2,0,t))$ são picos das "ondas" e $(t, z = \pm k(t), J_{22}(1,1/2,\pm k(t),t))$ são depressões das "ondas" no intervalo de tempo mencionado.

Pelos resultados (a)-(d) acima concluímos que as figuras 10-14 mostram bem a evolução das ondas para t no intervalo $0 < t < 1.798$. As ondas são basicamente de um mesmo tipo.

Para $t > 1.798$ apenas $z = 0$ é solução real de $P_{22}(1,1/2,z,t) = 0$.

e) Como $J_{22}(1,1/2,z,t)_{,zz} > 0$ se $z = 0$ e $t > 1.798$, então $(t,0, J_{22}(1,1/2,0,t))$ é uma depressão da "onda" nesse caso.

De (b),(c) e (e) podemos afirmar que a figura 15 mostra o tipo de "onda" para $t > 1.798$.

A superfície correspondente a $J_{22}(1,1/2,z,t)$ no domínio $-1 \leq z \leq 1, 1.2 \leq t \leq 2$ é mostrada na figura 16.

Analisemos o movimento do pico em $z = 0$ que muda para depressão em $t = 1.798$ (Figs 17,18). Aqui também foi necessário dividirmos o gráfico em duas partes devido à variação muito rápida da função. Por esses gráficos vemos que a altura do pico diverge de $+\infty$ em $t = 0$, caindo rapidamente até $t = 1.35$. A altura do pico aumenta entre $t = 1.35$ e $t=1.798$, atingindo um valor máximo local nesse último instante.

A partir deste instante sempre teremos uma depressão em $z = 0$, a qual oscilará de acordo com a figura 18, com altura tendendo a zero à medida que $t \rightarrow +\infty$.

Para $J_{12}(1,1/2,z,t)$ tivemos um comportamento análogo ao descrito acima para os picos e depressões que oscilam em $z = 0$.

Em $t = 1.798$, as duas depressões e o pico atingem um ponto comum.

Para entendermos melhor o comportamento das depressões para $0 < t < 1.798$, é interessante analisarmos a função

$$J_{22}(1, 1/2, k(t), t) = \frac{-\exp[(-9-108 t^2 -296 t^4 -4t^6 -8t^8)/(32 t^2 + 192t^4)] t^{3/8}(1+6 t^2)}{2 + 4t^2} \quad (8.2.4)$$

onde a função k está definida em (8.2.3).

De (8.2.4) vemos que essas depressões estão sempre abaixo do plano tz . Pela figura 19 podemos ver a evolução das alturas dessas depressões. Estas tendem a zero para $t \rightarrow 0$, sendo crescentes no intervalo $0 < t < 1.48$, e decrescentes fora deste.

Pela figura 20 podemos comparar a evolução das alturas do pico e das depressões no tempo. Vemos que para $0 < t < 1.35$ as alturas das depressões aumentam e as dos picos diminuem. Entre $t = 1.35$ e $t = 1.48$ a altura das depressões e dos picos aumentam. Para $1.48 < t < 1.798$ as alturas das depressões diminuem e as dos picos aumentam.

Para a taxa $\frac{dk(t)}{dt}$ temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dk(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 1.798} \frac{dk(t)}{dt} = -\infty,$$

onde $\frac{dk(t)}{dt} < 0$ para $0 < t < 1.798$.

2.3) Para $i = 3$, $n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$, (4.25) fornece

$$J_{32}(1, 1/2, z, t) = \frac{\exp[-t^2/4 - t^4/8 - (t^2 + 1/2)z^2] z (-9 + 12t^2 + 12t^4 + 16t^2 z^2)}{16 t^{5/8}} \quad (8.2.5)$$

De (8.2.5) vemos que $J_{32}(1, 1/2, z, t) = -J_{32}(1, 1/2, -z, t)$. Assim, os cortes são funções ímpares.

O conjunto $D_{1, 1/2}^{32}$ pode ser coberto pelas funções $jj1$, $jj2$, $jj3$ e $jj4$ dadas respectivamente por (6.2.5)-(6.2.8).

O diagrama de $D_{1, 1/2}^{32}$ está na figura 21. Nos gráficos usamos a notação $jj1[t]$, ... , $jj4[t]$.

O ponto $P_0(t = 1/\sqrt{2}, z = 0)$ é a única solução do sistema (5.1.5.a) - (5.1.5.b). Na figura 21 temos quatro raízes para (4.28) se $t < 1/\sqrt{2}$ e apenas duas raízes se $t > 1/\sqrt{2}$.

Vejamos como são as "ondas" e o comportamento de seus picos e depressões. Para isso, apresentemos alguns resultados iniciais:

$$a) \lim_{z \rightarrow \pm\infty} J_{32}(1, 1/2, z, t) = 0 \quad \text{e} \quad J_{32}(1, 1/2, 0, t) = 0$$

b) O termo que controla o sinal de $J_{32}(1, 1/2, z, t)$ é :

$$z(-9 + 12t^2 + 12t^4 + 16t^2z^2).$$

- Se $t > 1/\sqrt{2}$ então $-9 + 12t^2 + 12t^4 > 0$ e portanto $J_{32}(1, 1/2, z, t) > 0$ para $z > 0$, e $J_{32}(1, 1/2, z, t) < 0$ para $z < 0$.

- Se $0 < t < 1/\sqrt{2}$ então $-9 + 12t^2 + 12t^4 < 0$ e portanto existirá uma vizinhança $(-z_1, z_1)$ de $z = 0$, onde

$-9 + 12t^2 + 12t^4 + 16t^2z^2 < 0$. O extremo z_1 é dado por

$$z_1 = \left(\frac{-9 + 12t^2 + 12t^4}{16t^2} \right)^{1/2}. \quad (8.2.6)$$

Portanto, se $0 < t < 1/\sqrt{2}$ e

$z < -z_1$, então $J_{32}(1, 1/2, z, t_0) < 0$,
 $-z_1 < z < 0$ então $J_{32}(1, 1/2, z, t_0) > 0$,
 $0 < z < z_1$ então $J_{32}(1, 1/2, z, t_0) < 0$.

$z = \pm z_1$ então $J_{32}(1, 1/2, z, t_0) = 0$,
 $z > z_1$ então $J_{32}(1, 1/2, z, t_0) > 0$.

A fim de classificar os pontos estacionários instantâneos em picos e depressões, vamos dividir o diagrama de $D_{1, 1/2}^{32}$ em quatro curvas soluções dadas por:

$$\gamma_1(t) = (t, jj1(t)), (0 < t < + \infty)$$

$$\gamma_2(t) = (t, jj2(t)), (0 < t < + \infty)$$

$$\gamma_3(t) = (t, jj3(t)), (0 < t < 1/\sqrt{2})$$

$$\gamma_4(t) = (t, jj4(t)), (0 < t < 1/\sqrt{2})$$

Sobre cada uma dessas curvas temos

$$\frac{\partial J_{32}(1, 1/2, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 J_{32}(1, 1/2, z, t)}{\partial z^2} \neq 0$$

A análise do sinal da última derivada mostra que:

c) Os pontos $(t, jj1(t), J_{32}(1, 1/2, jj1(t), t))$ são picos;
 $(t, jj2(t), J_{32}(1, 1/2, jj2(t), t))$ são depressões; $(t, jj3(t), J_{32}(1, 1/2, jj3(t), t))$ são depressões e $(t, jj4(t), J_{32}(1, 1/2, jj4(t), t))$ são picos.

De a, b e c podemos afirmar que a figura 22 fornece o tipo de "onda" encontrado para $0 < t < 1/\sqrt{2}$, e a figura 23 o tipo de "onda" para $t > 1/\sqrt{2}$.

As figuras 24 e 25 mostram as superfícies correspondentes a $J_{32}(1, 1/2, z, t)$ nos domínios indicados.

Estudemos agora como variam as alturas dos picos e depressões.

Observando a figura 26 e considerando que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \pm 1}} J_{32}(1, 1/2, z, t) = \pm \infty$$

vemos que, para $0 < t < 1/\sqrt{2}$, o pico sobre γ_3 e a depressão sobre γ_4 têm altura tendendo ao infinito para $t \rightarrow 0$.

À medida que t se aproxima de $1/\sqrt{2}$, a depressão sobre γ_3 e o pico sobre γ_4 aproximam-se enquanto suas alturas diminuem, como mostram as figuras 21 e 26. Em $t = 1/\sqrt{2}$ o pico e a depressão se encontram e suas alturas atingem o valor nulo. O corte $J_{32}(1, 1/2, z, 1/\sqrt{2})$ tem um ponto de inflexão em $z = 0$, o que pode ser visto na figura 27.

Inicialmente pensávamos que houvesse um choque de um pico com uma depressão em $t = 1/\sqrt{2}$. Essa interpretação foi descartada quando percebemos que na verdade temos um pico e uma depressão que se aproximam, enquanto suas alturas diminuem e chegam a zero no instante de encontro, o que não caracteriza um choque.

O pico sobre γ_1 e a depressão sobre γ_2 têm amplitudes tendendo a zero, e a separação entre os pontos estacionários instantâneos correspondentes tendendo ao infinito, para $t \rightarrow 0$. As alturas desses picos e depressões crescem à medida que o tempo passa, atingindo um valor máximo no instante $t = 1.24523$, a partir do qual essas alturas decrescem, tendendo a zero à medida que $t \rightarrow +\infty$. (ver figura 28). Enquanto as alturas dos picos e das depressões mais próximas do plano $z = 0$ têm alturas partindo do infinito e caindo a zero, as alturas dos picos e das depressões mais distantes do plano $z = 0$ vão aumentando até $t = 1.24523$, embora a partir de $t = 1/\sqrt{2}$ as depressões e os picos mais próximos não existam mais.

As taxas $\frac{djj1}{dt}$, $\frac{djj2}{dt}$, $\frac{djj3}{dt}$ e $\frac{djj4}{dt}$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{djj1}{dt} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{djj2}{dt} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{djj3}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{djj4}{dt} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{djj3}{dt} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1/\sqrt{2}} \frac{djj4}{dt} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{djj1}{dt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{djj2}{dt} = 0.$$

2.4) Se $i = 4$, $n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$, obtemos de (4.26)

$$J_{42}(1, 1/2, z, t)$$

$$= \exp[-t^2/2 - t^4 - (1 + 2t^2)z^2] (117/64 + 27 t^2/16 + 1047 t^4/16 - 39 t^6/2 - 45 t^8/4 + 3 t^{10} + t^{12} - (27 t^2/4 + 78t^4 + 186t^6 + 24t^8 + 12t^{10})z^2 + (156t^4 + 48t^6 + 48t^8)z^4 - 64t^6 z^6)/(4 t^{13/4}). \quad (8.2.7)$$

Portanto, $J_{42}(1, 1/2, z, t)$ é uma função par de z .

O diagrama tz do conjunto $D_{1, 1/2}^{42}$ é mostrado na figura 29.

Por uma análise similar às anteriores, obtivemos que:

$$a) J_{42}(1, 1/2, z, t) > 0 \text{ e } J_{42}(1, 1/2, z, t)_{,zz} < 0 \text{ se } z = 0 \text{ e } t > 0.$$

Portanto, o ponto $(t, 0, J_{42}(1, 1/2, 0, t))$ é um pico. Sua altura, dada por $J_{42}(1, 1/2, 0, t)$, é sempre decrescente uma vez que

$$J_{42}(1, 1/2, 0, t)_{,t} < 0 \text{ para } t > 0.$$

A figura 30 mostra como varia a altura desse pico no tempo.

Quanto aos outros pontos estacionários instantâneos, a legenda da

figura 31 mostra quais correspondem a picos e quais correspondem a depressões.

Observando o numerador de $J_{42}(1,1/2,z,t)$ vemos que :

$$b) \lim_{z \rightarrow +\infty} J_{42}(1,1/2,z,t) = 0$$

c) existe um $z_0 > 0$ tal que $J_{42}(1,1/2,z,t_0) < 0$ para $z > z_0$ ou $z < -z_0$.

Assim, de a, b, c e da figura 31 podemos afirmar que :

-as "ondas" que ocorrem para $0 < t < 0.525$ e $t > 0.94$ são do tipo da "onda" obtida para $t = 1.8$ (fig 32);

-as "ondas" que ocorrem para $0.525 < t < 0.94$ serão do tipo daquela encontrada para $t = 0.8$ (figuras 33 e 34).

Nas "ondas" em $0 < t < 0.525$ temos um pico e duas depressões, as quais se afastam indefinidamente à medida que $t \rightarrow 0$. As alturas das depressões tendem a zero para $t \rightarrow 0$ e são sempre crescentes ao longo das curvas C1 e C2 da figura 31. Entre $0 < t < 0.525$, a altura do pico irá diminuindo e a altura das depressões irá aumentando, embora a altura do pico seja sempre bem maior que a das depressões.

Só teremos uma mudança no tipo de onda em $t = 0.525$ (ponto de ramificação). A partir desse instante passamos a ter sete pontos críticos instantâneos para $0.525 < t < 0.94$ (ver figura 31). O corte $J_{42}(1,1/2,z,0.525)$ no ponto de ramificação $t = 0.525$ (fig 35) tem dois pontos de inflexão dados por $z_1 = -3.1$, $z_2 = 3.1$. Os pontos ($t = 0.525$, $z = \pm 3.1$) podem ser localizados facilmente no diagrama de $D_{1,1/2}^{42}$ da figura 31. As duas curvas que partem de cada um desses pontos correspondem às trajetórias dos picos e das depressões que surgem a partir do instante correspondente. À medida que o tempo vai passando, os novos picos e depressões descem abaixo do plano tz , e o pico surgido no ponto de ramificação aproxima - se da depressão que partiu de $t=0$, dando origem em $t = 0.94$ a um novo ponto de inflexão em $z = 1.55$ (ver

figuras 36-39). A partir desse instante voltamos a ter uma "onda" com um pico em $z = 0$ e duas depressões.

As depressões que têm origem em $t = 0.525$ atingem altura nula em $t = 0.755$. Daí por diante, elas aumentam de altura até $t = 1.18$, a partir do qual suas alturas diminuem, tendendo a zero quando $t \rightarrow +\infty$. Em $t = 1.64$ estas depressões encontram-se à menor distância uma da outra, afastando-se indefinidamente a partir daí (veja figura 31).

A superfície da figura 40 ajuda visualizar a evolução das "ondas" no intervalo $0.5 < t < 1.5$.

2.5) Se $i = 5$, $n = 2$, $q = 1$ e $p = 1/2$, (4.27) reduz-se a

$$\begin{aligned}
 J_{52}(1, 1/2, z, t) = & \dots \\
 & (3(-81 + 1584 t^2 + 11088 t^4 - 24512 t^6 - 13152 t^8 + 11520 t^{10} + \\
 & 3328 t^{12} - 1024 t^{14} - 256 t^{16} + (-6336 t^2 + 6912 t^4 + 59136 t^6 + \\
 & 18432 t^8 + 27648 t^{10} + 12288 t^{12} + 4096 t^{14})z^2 - (13824 t^4 + 61440 t^6 + \\
 & 184320 t^8 + 49152 t^{10} + 24576 t^{12})z^4 + (81920 t^6 + 65536 t^8 + \\
 & 65536 t^{10})z^6 - 65536 t^8 z^8) / (4096 \exp[(6 t^2 + 3 t^4 + (12 + 24 t^2)z^2)/8] \\
 & t^{39/8})
 \end{aligned}
 \tag{8.2.8}$$

De (8.2.8) conclui-se que:

a) $J_{52}(1,1/2,z,t)$ é uma função par de z ;

b) $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} J_{52}(1,1/2,z,t) = 0$;

c) existe uma função $z_0(t) > 0$ tal que $J_{52}(1,1/2,z,t) < 0$ se $z > z_0(t)$ ou $z < -z_0(t)$.

O conjunto $D_{1,1/2}^{52}$ é mostrado na figura 41.

Na figura 42 dividimos o diagrama da figura anterior em várias curvas, j_1, j_2, \dots, j_9 e indicamos quais pontos do diagrama de $D_{1,1/2}^{52}$ correspondem a picos e quais correspondem a depressões.

As figuras 43 e 44 mostram a variação da função $J_{52}(1,1/2,0,t)$.

Para os outros picos e depressões nós obtivemos:

d) $J_{52}(1,1/2,z,t)|_{j_1} < 0$ sempre;

e) $J_{52}(1,1/2,z,t)|_{j_2} > 0$ se $0 < t < 0.45$;

$J_{52}(1,1/2,z,t)|_{j_2} < 0$ se $0.452056 < t < 0.505$;

f) $J_{52}(1,1/2,z,t)|_{j_3} < 0$ sempre;

g) $J_{52}(1,1/2,z,t)|_{j_4} > 0$ sempre.

Assim, de a), b), d), e), das figuras 42, 43 e 44, podemos afirmar que, para $0 < t < 0.12$ ou $t > 0.59$, as "ondas" são do tipo apresentado na figura 45.

De a), b), d), e), f) e das figuras 42 e 43 podemos afirmar que, para $0.12 < t < 0.505$, as "ondas" são do tipo apresentado nas figuras 46-48 (foi necessário dividirmos o gráfico em três partes devido a rápida variação da função).

De a), b), f) e das figuras 42, 43 e 44 podemos afirmar que, para $0.505 < t < 0.59$, as "ondas" são do tipo apresentado na figura 49.

Vejamos como se comportam as alturas dos picos e depressões.

Pela figura 42 vemos, em $z = 0$, uma depressão que em $t = 0.12$ (ramificação) atinge um pico e no ponto de ramificação $t = 0.59$ volta a ser uma depressão. As figuras 43 e 44 mostram que a altura da depressão tende a $-\infty$ quando $t \rightarrow 0$ e tendendo a zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Analisando as alturas dos outros picos e depressões obtivemos :

h) $\left| J_{52}(1,1/2,z,t) \right|_{j1}$ é sempre crescente tendendo a zero para $t \rightarrow 0$ e tendo máximo dado por $\left| J_{52}(1,1/2,\pm 1.89, 0.505) \right| = 0.011$.

i) $\left| J_{52}(1,1/2,z,t) \right|_{j2}$ é:

- crescente se $0 < t < 0.40$, com $J_{52}(1,1/2,z,t) \Big|_{j2(0.40)} = 0.0033$,

partindo de zero na singularidade,

- decrescente se $0.40 < t < 0.45$,

- crescente se $0.45 < t < 0.505$.

j) $\left| J_{52}(1,1/2,z,t) \right|_{j3}$ é sempre decrescente.

k) $\left| J_{52}(1,1/2,z,t) \right|_{j4}$ é :

- decrescente se $0.59 < t < 0.91$,

- crescente se $0.91 < t < 1.33$,

- decrescente se $t > 1.33$.

Entre $0 < t < 0.12$ a altura da depressão em $z = 0$ diminui, enquanto a altura dos outros picos e depressões aumenta, embora a depressão em $z = 0$ tenha altura bem maior que a dos outros picos e depressões nesse intervalo (ver figura 43 e os itens h e i acima).

Em $t = 0.12$ temos o primeiro ponto de ramificação. As figuras 50 e 51 mostram a "onda" nesse instante e no instante $t = 0.13$. No gráfico de $D_{1\ 1/2}^{52}$ (fig 42) vemos que a depressão em $z = 0$ se quebra em duas depressões e um pico. As duas depressões evoluem, atingindo a menor separação (após o ponto de ramificação) em $t = 1.01$ e afastando - se indefinidamente a partir de então. Suas alturas partem de $|J_{52}(1,1/2,0,0.12)| = 1250.1$ e tendem a zero para $t \rightarrow + \infty$, sendo sempre decrescentes, de acordo com o item j acima .

O ponto $(t = 0.505, z = 1.89)$ onde terminam as curvas j_1 e j_2 da figura 42 e o ponto $(t = 0.505, z = -1.89)$ correspondem aos pontos de inflexão do corte $J_{52}(1,1/2,z,0.505)$. As figuras 52-54 mostram o que ocorre para os cortes nas vizinhanças desses pontos.

No ponto de ramificação $t = 0.59$ o pico em $z = 0$ se quebra em uma depressão e dois picos (ver figura 55). Os dois picos evoluem, atingindo dois pontos de maior proximidade após a bifurcação em $t = 1.57$, afastando - se indefinidamente a partir de então. Suas alturas partem de $J_{52}(1,1/2,0,0.59) = 4.44$ evoluindo de acordo com o item k acima, e tendendo a zero quando $t \rightarrow + \infty$.

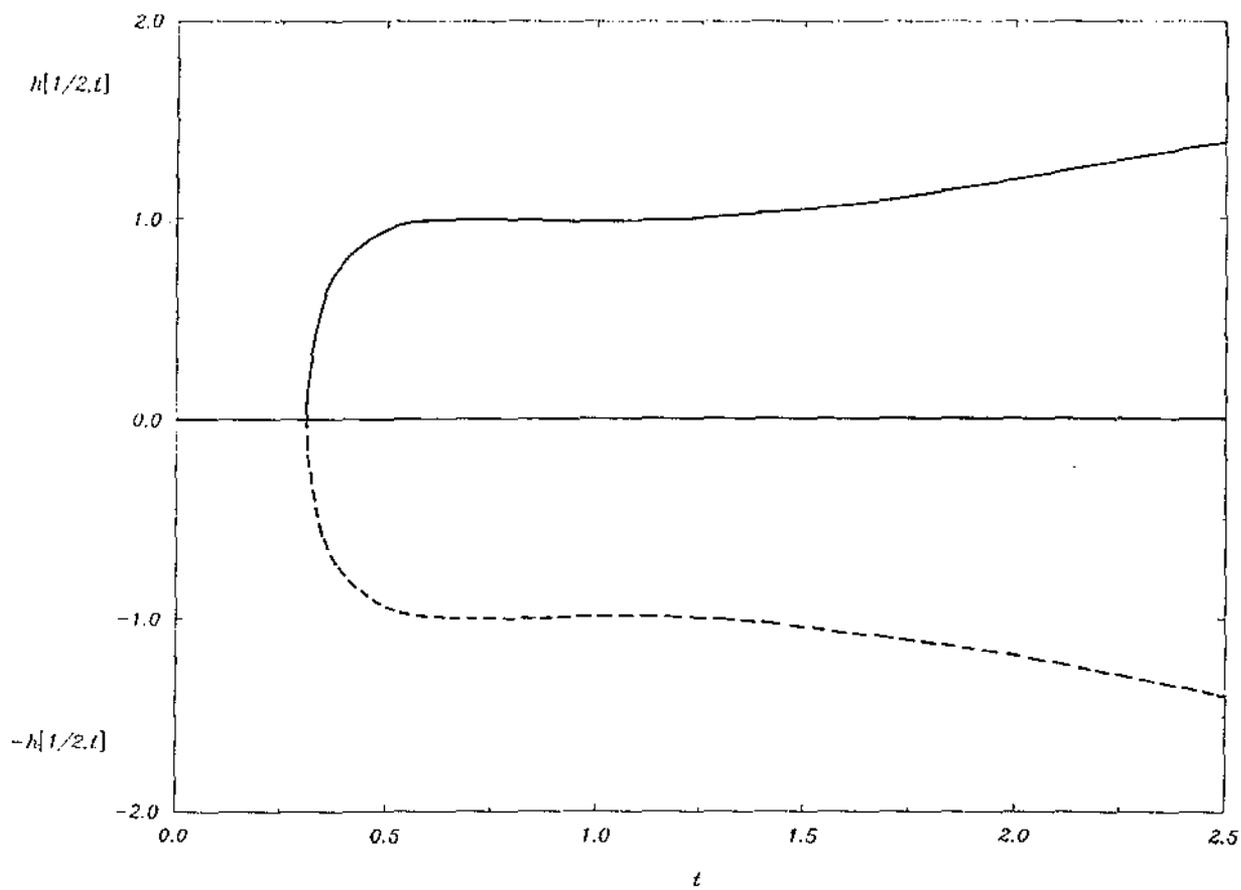


Fig. 1. Diagrama do conjunto $D12[1,1/2]$.

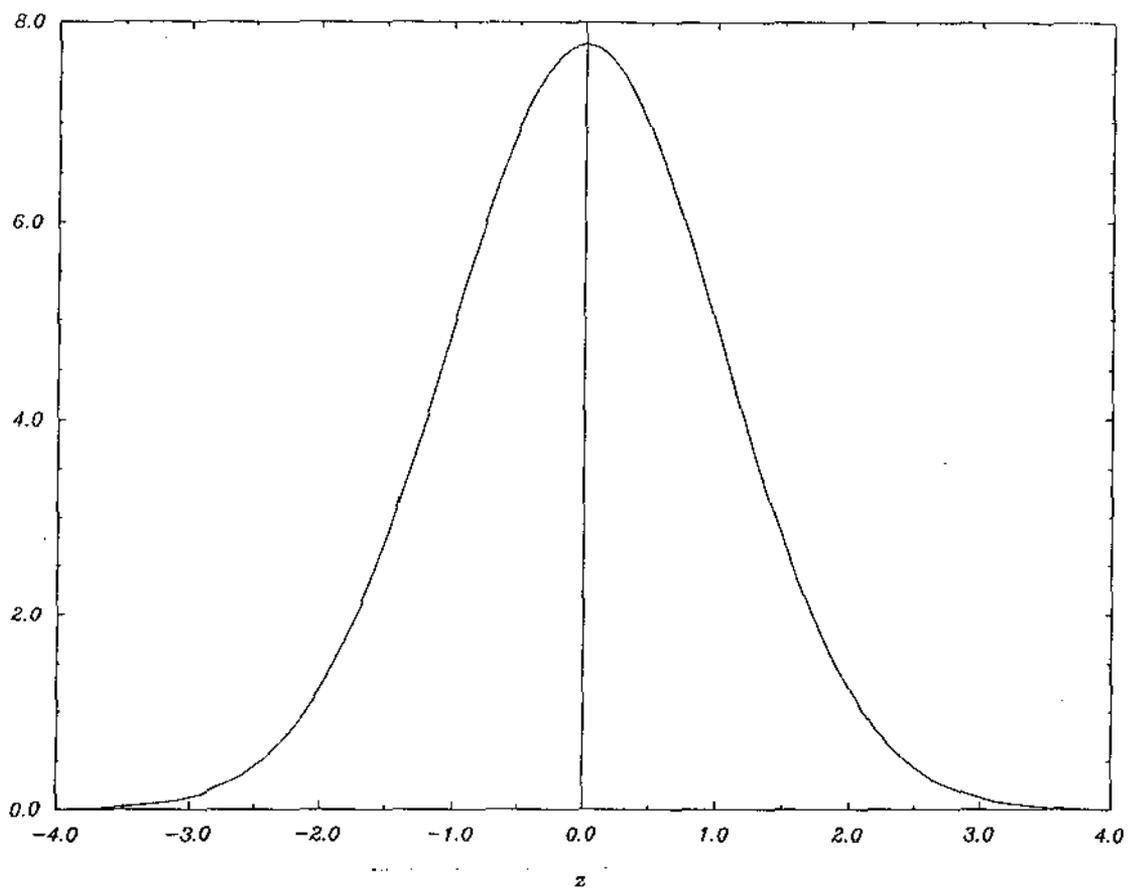


Fig.2. Tipo de "onda" correspondente a $J_{12}[1,1/2,z,t]$ para $0 < t < 0.31$. A figura acima mostra a "onda" em $t = 0.1$.

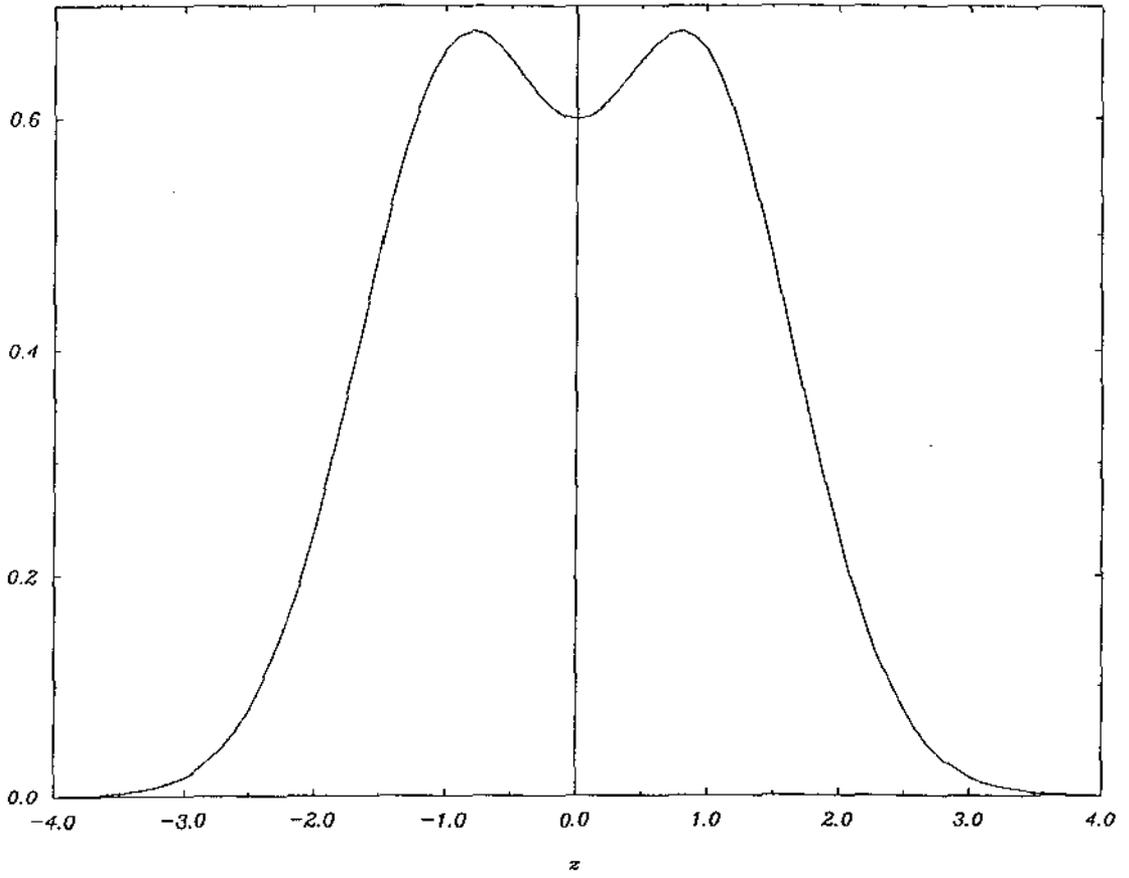


Fig.3. Tipo de "onda" correspondente a $J_{12}[1, 1/2, z, t]$ para $t > 0.31$. A figura acima mostra a "onda" em $t = 0.4$.

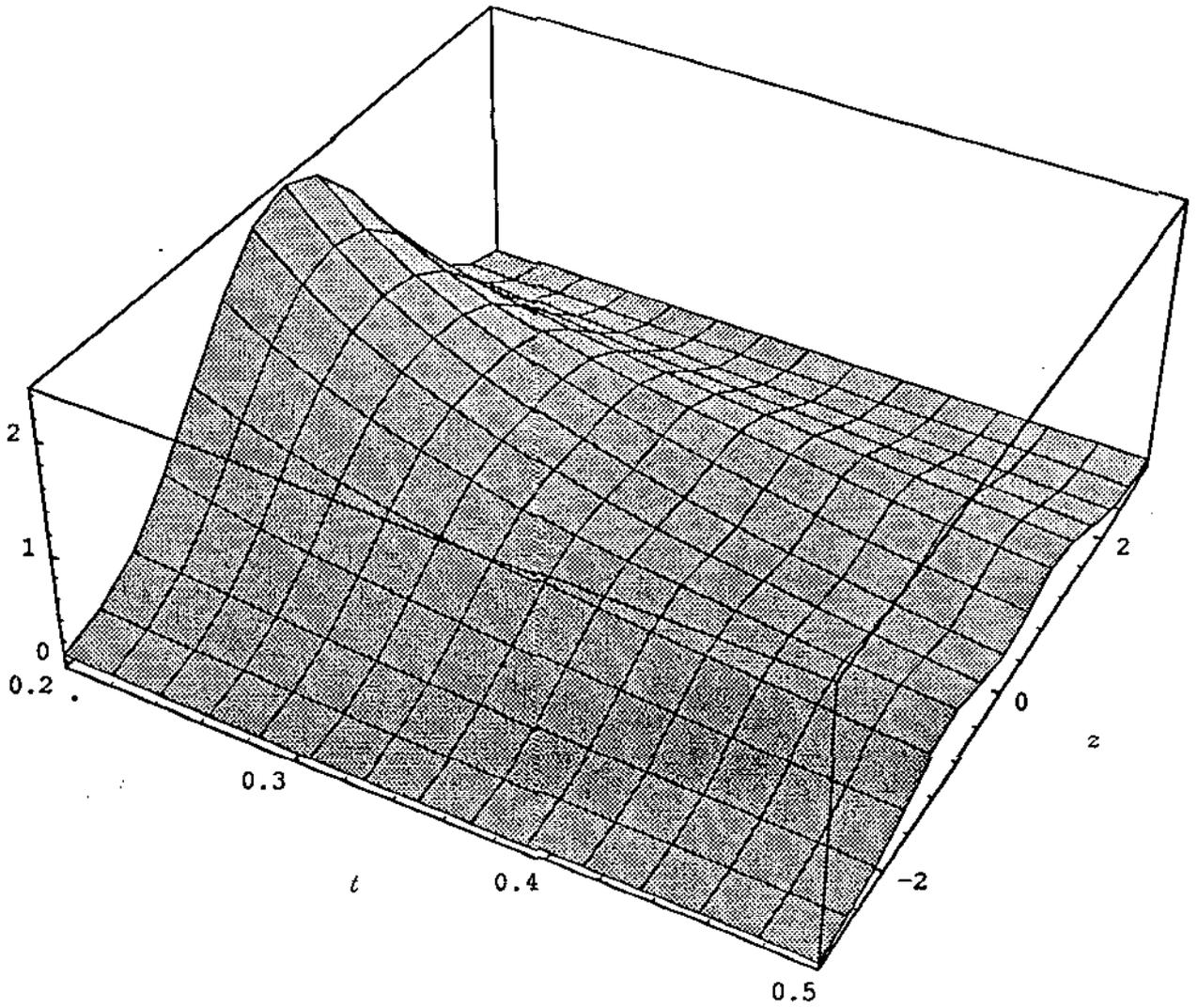


Fig.4. Gráfico da função $J_{12}[1, 1/2, z, t]$. Por este gráfico podemos acompanhar a evolução das "ondas" para $0.2 < t < 0.5$.

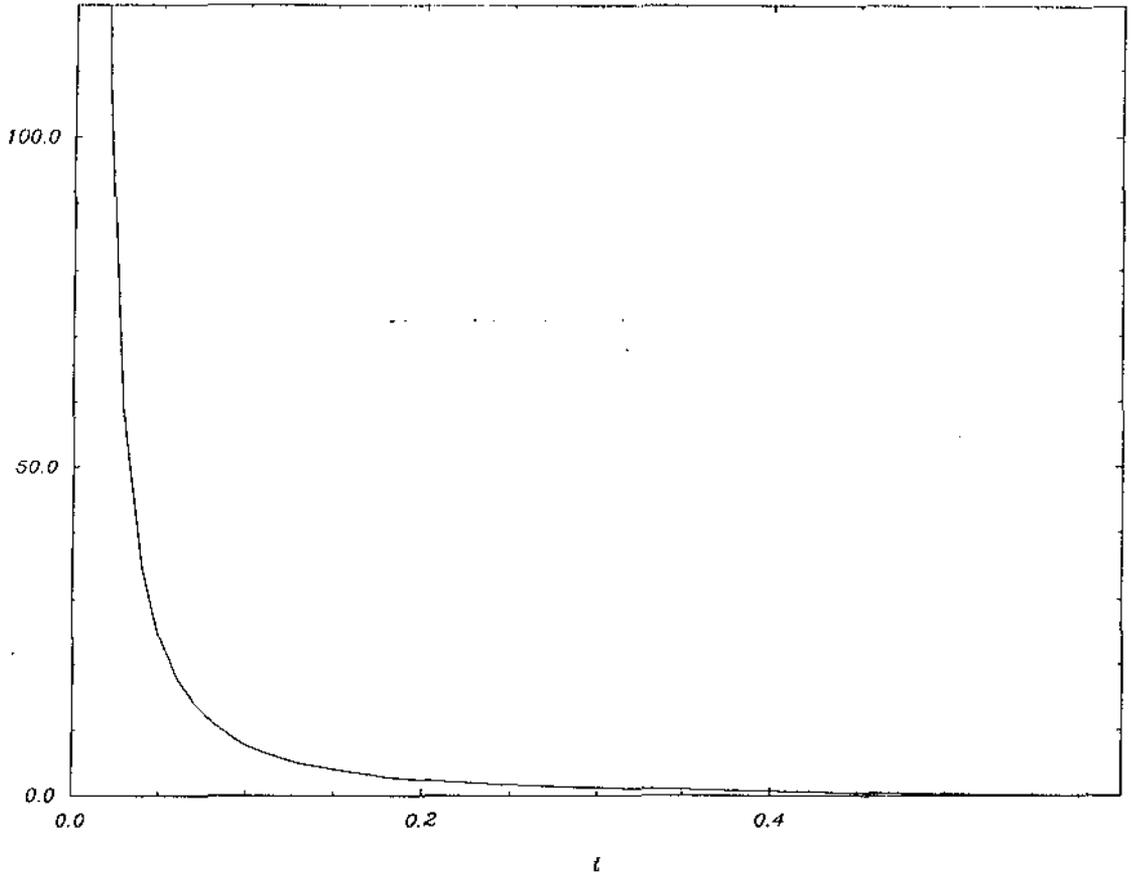


Fig.5. Gráfico de $J_{12}[1,1/2,0,t]$ mostrando o movimento do pico que oscila no plano $z = 0$ entre $t = 0$ e $t = 0.6$.

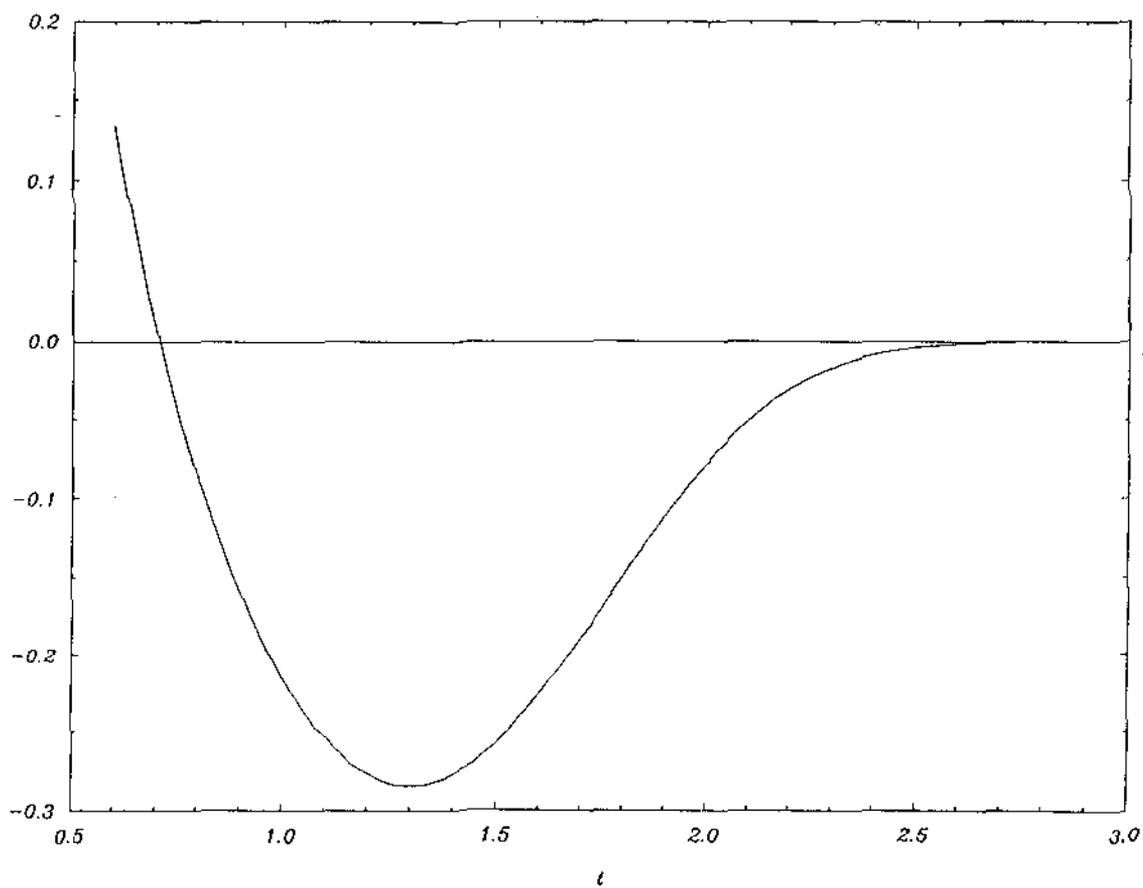


Fig. 6. Gráfico de $J_{12}[1, 1/2, 0, t]$ mostrando o movimento do pico que oscila no plano $z = 0$ entre $t = 0.5$ e $t = 3.0$.

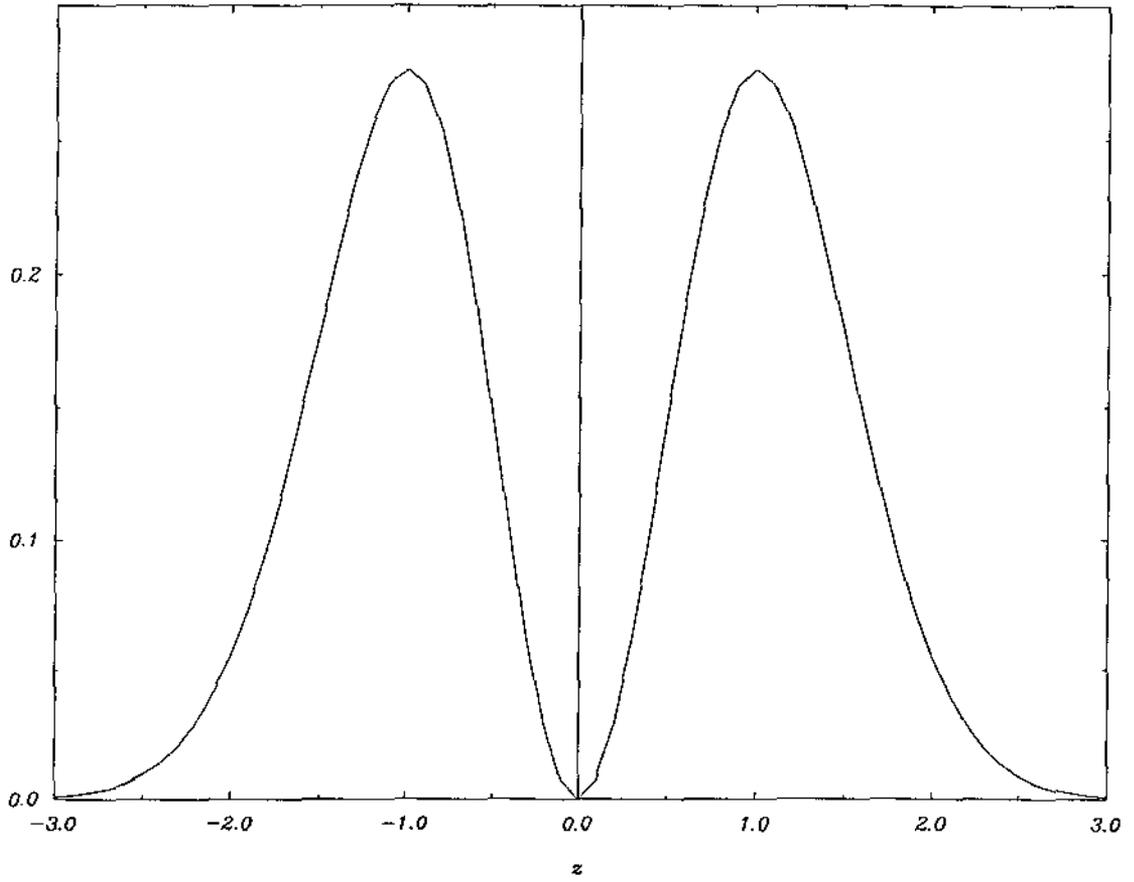


Fig.7. Gráfico de $J_{12}[1,1/2,z,1/\sqrt{2}]$, que corresponde à "onda" em $t = 1/\sqrt{2}$.

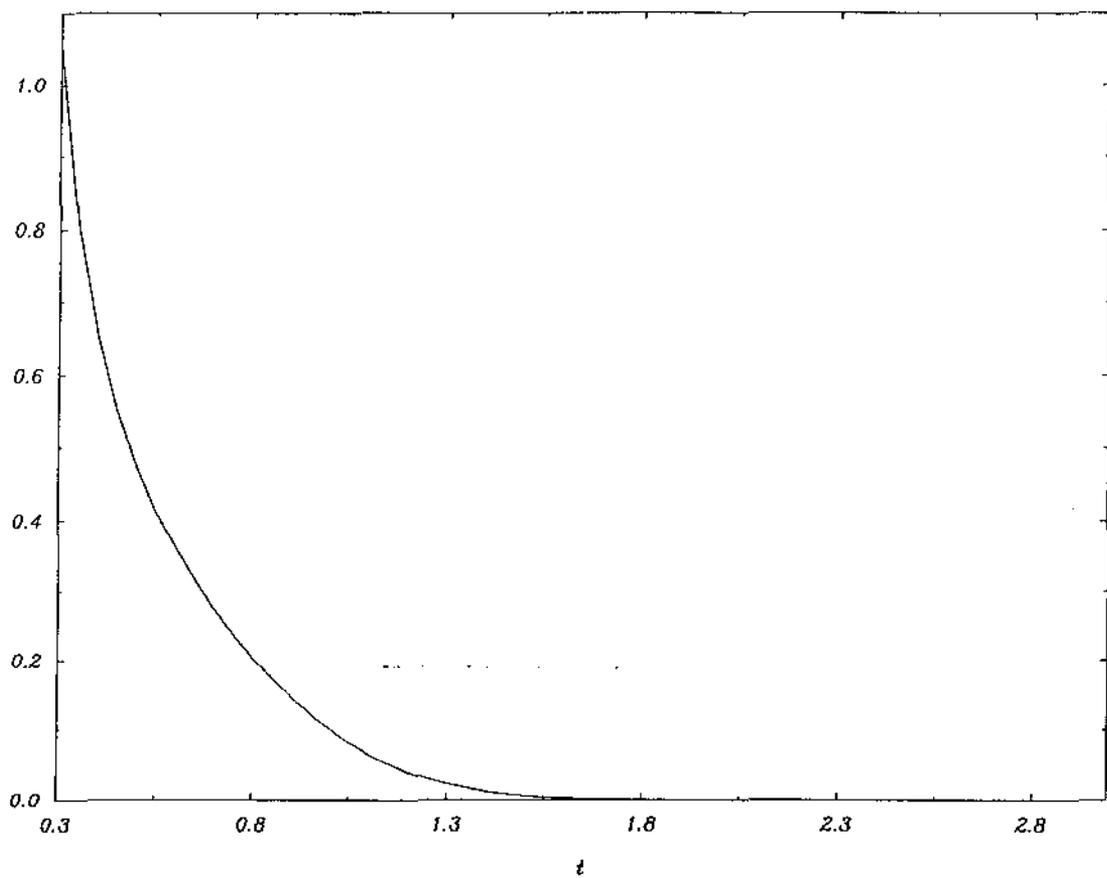


Fig.8. Gráfico de $J_{12}[1, 1/2, h[1/2, t], t]$. A figura mostra o comportamento das alturas dos picos que originam-se no ponto de ramificação.

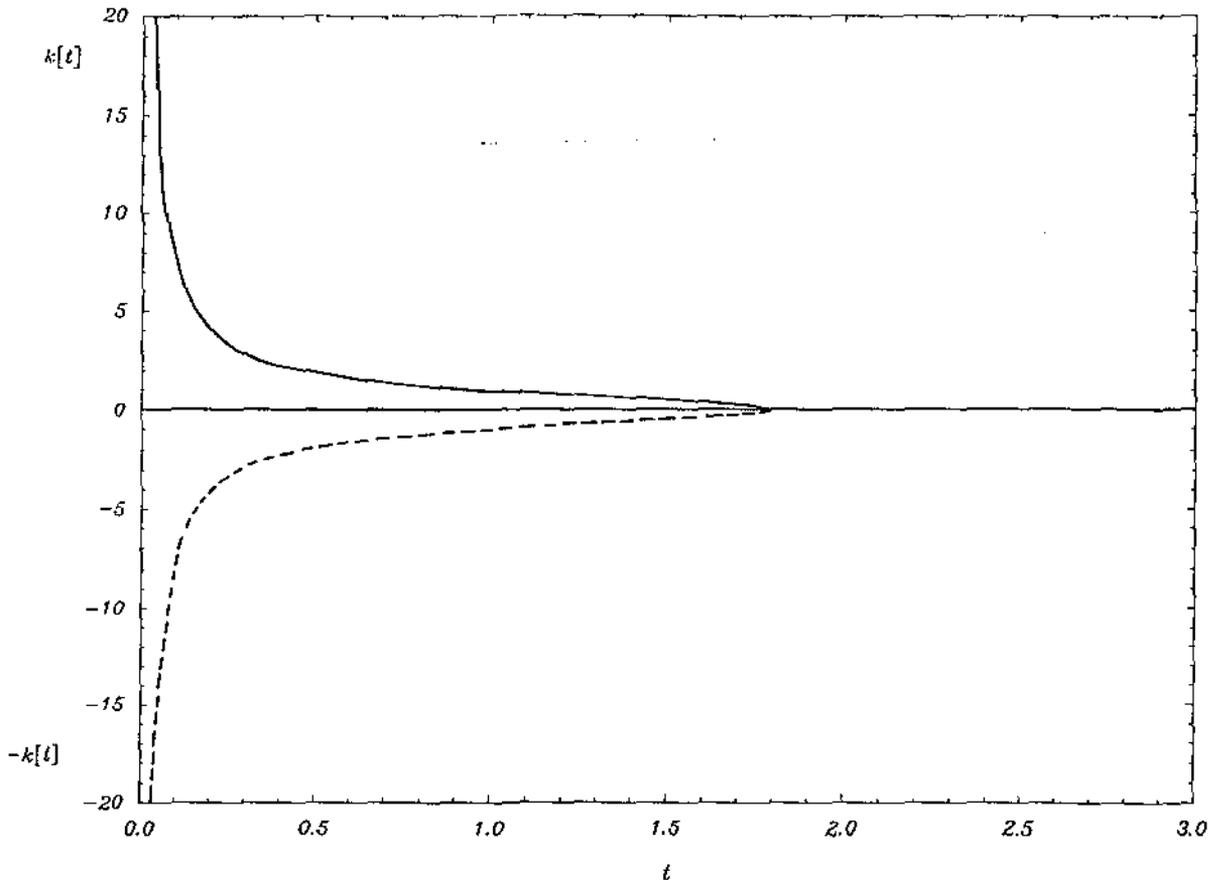


Fig.9. Diagrama do conjunto $D22[1,1/2]$.

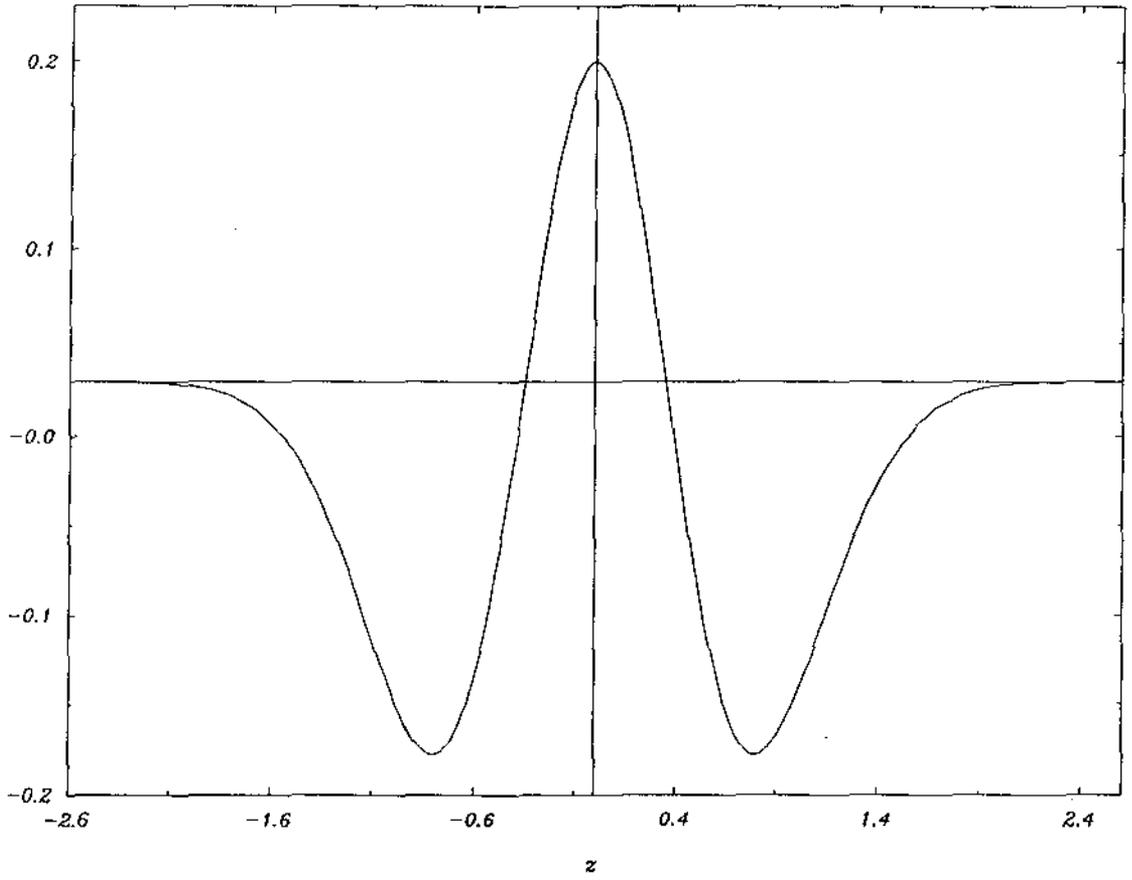


Fig.10. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1, 1/2, z, 1.2]$.

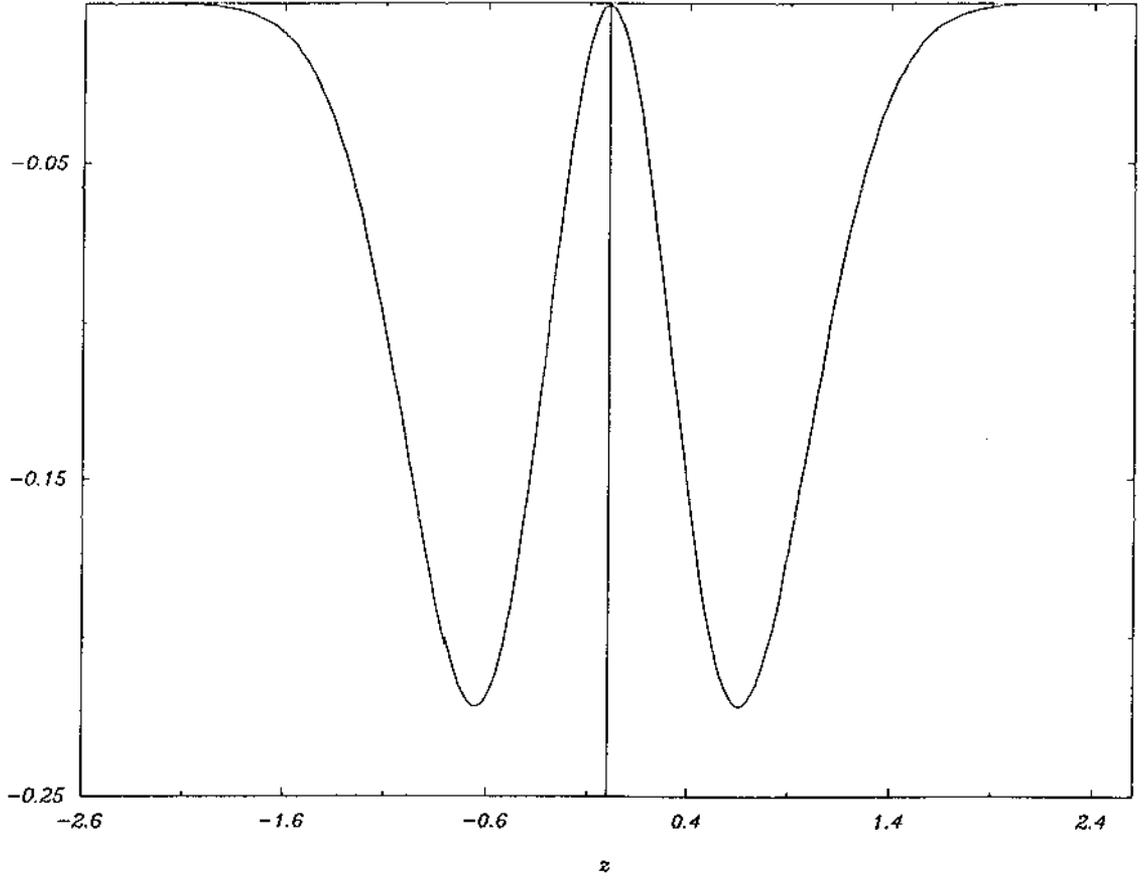


Fig.11. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1, 1/2, z, 1.35]$.

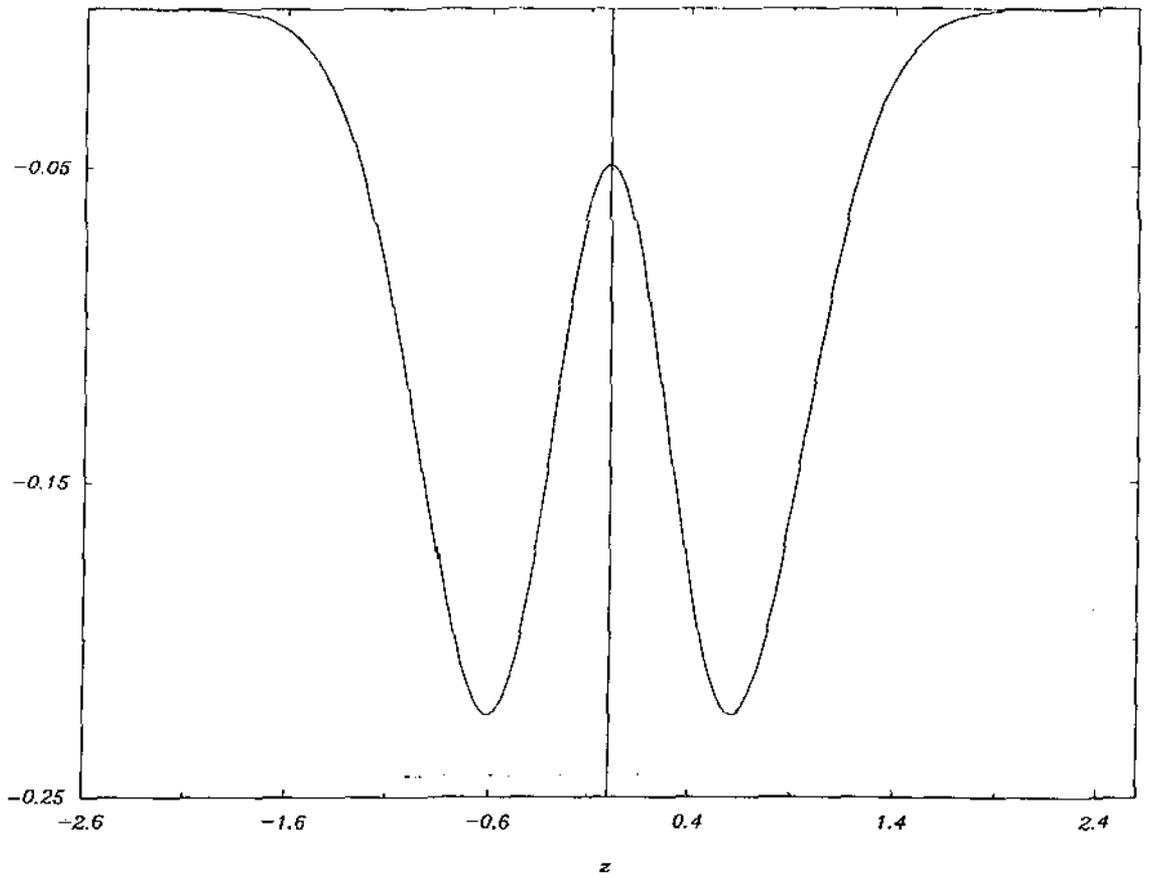


Fig.12. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1, 1/2, z, 1.4]$.

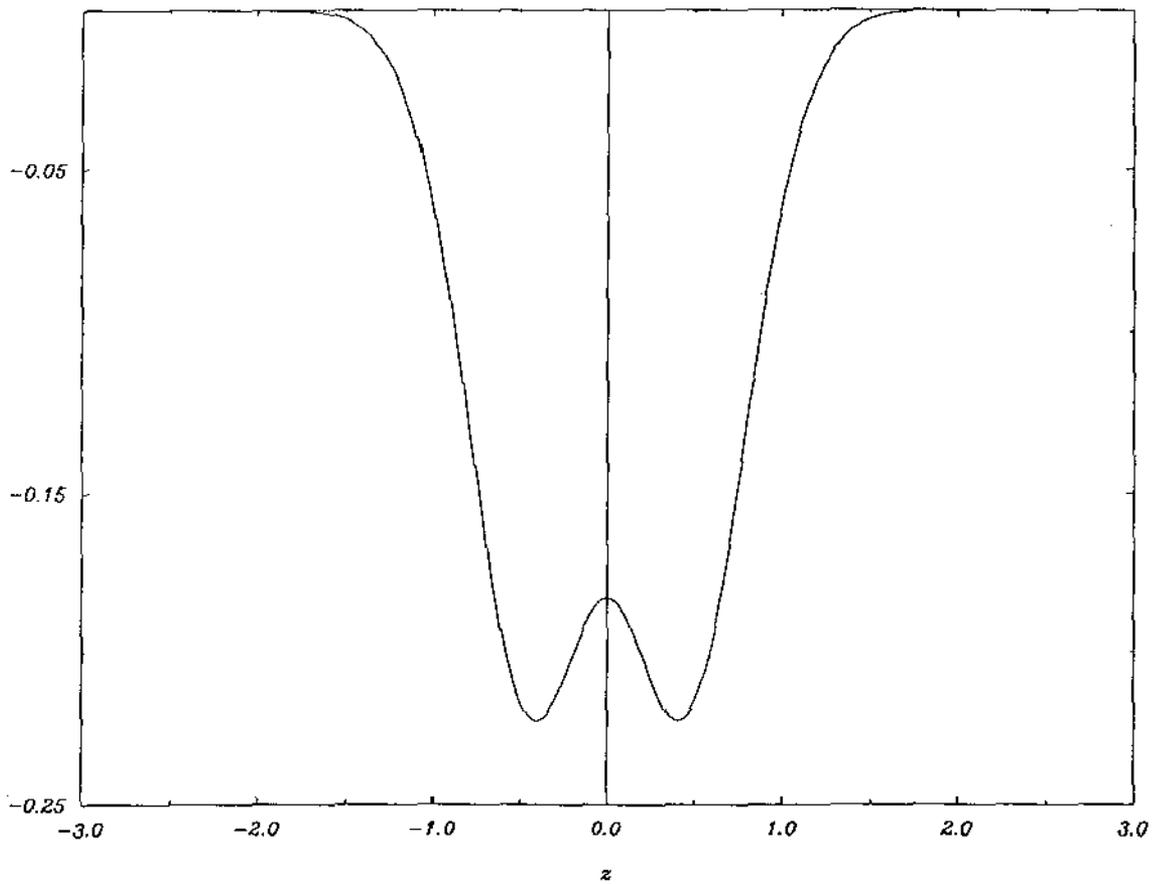


Fig. 13. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1, 1/2, z, 1.6]$.

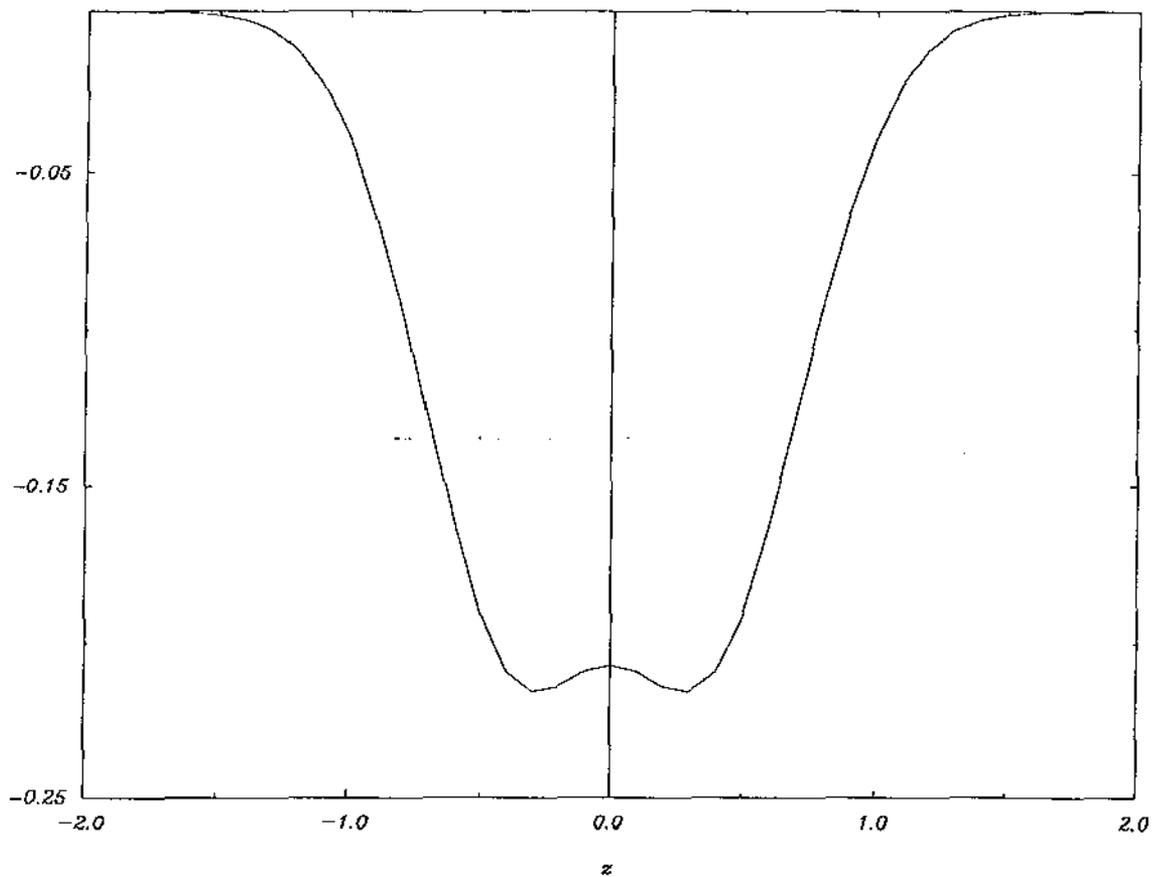


Fig.14. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1,1/2,z,1.7]$.

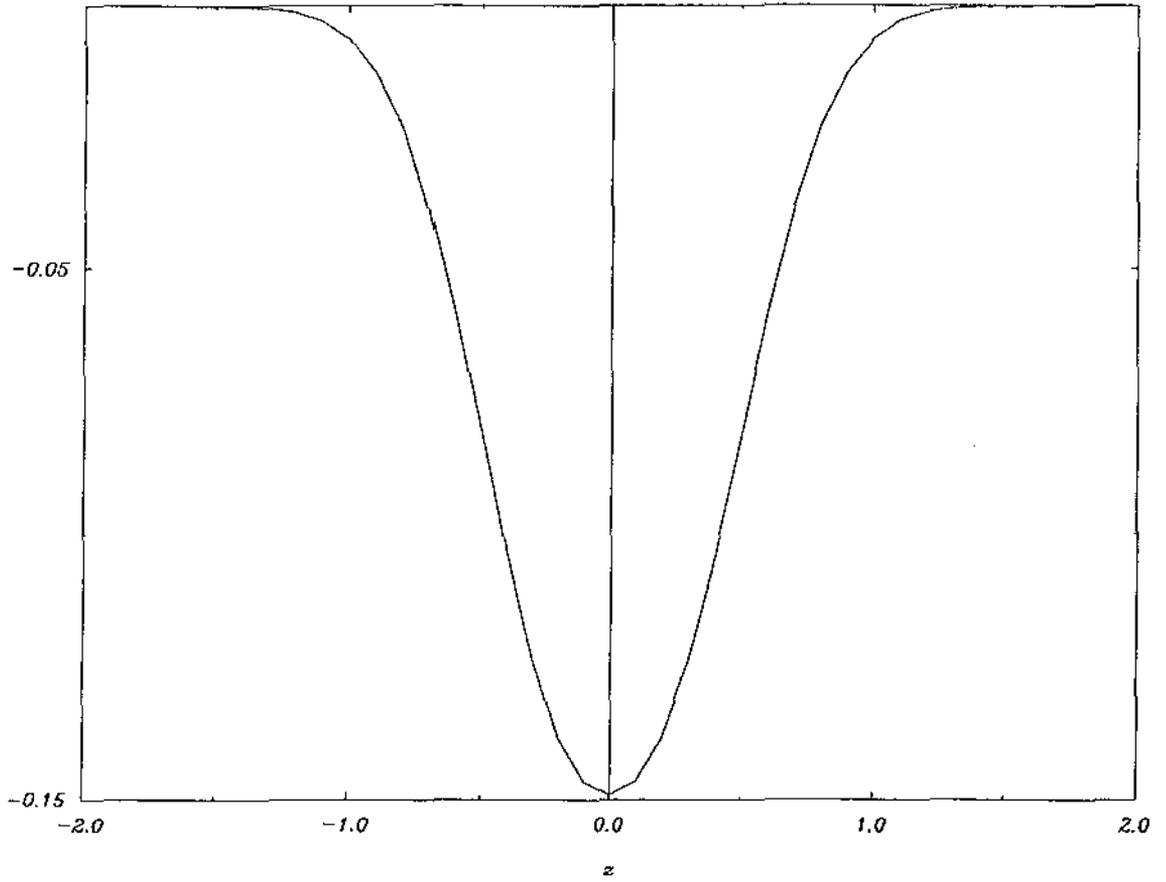


Fig.15. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{22}[1, 1/2, z, 2]$.

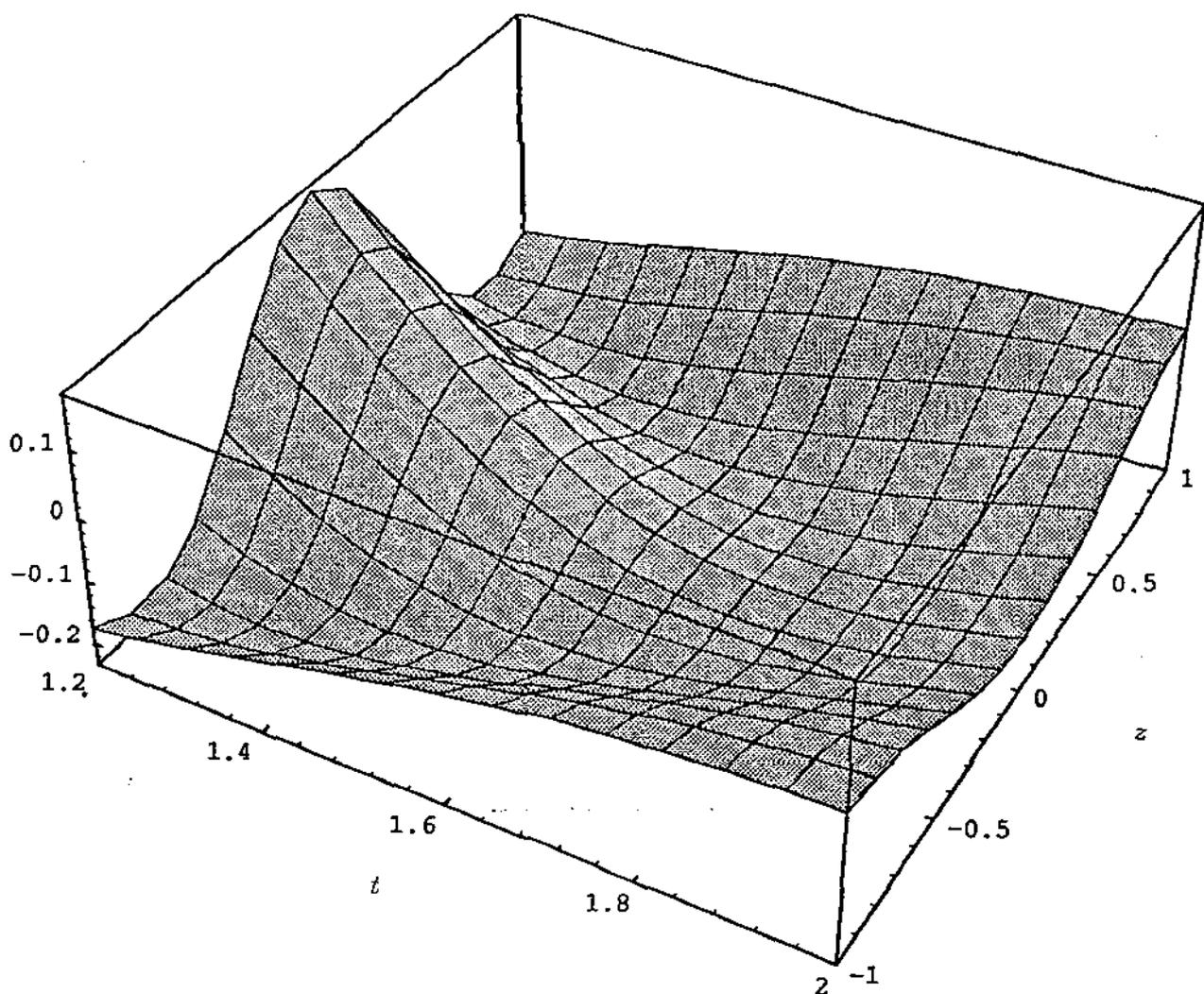


Fig. 16. Gráfico da função $J_{22}[1, 1/2, z, t]$. Por este gráfico podemos acompanhar o movimento do pico e das depressões para t próximo do ponto de ramificação.

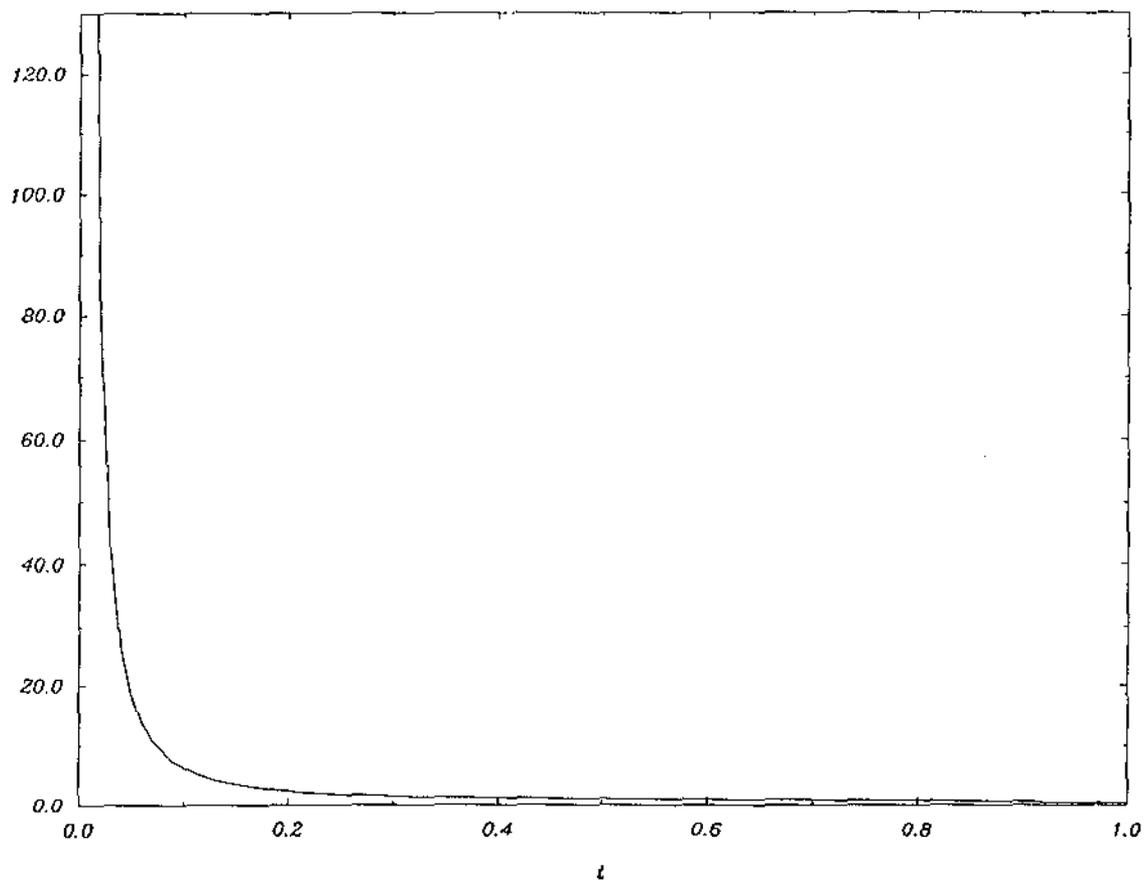


Fig. 17. Gráfico da função $J_{22}[1, 1/2, 0, t]$ mostrando o movimento do pico que oscila no plano $z = 0$.

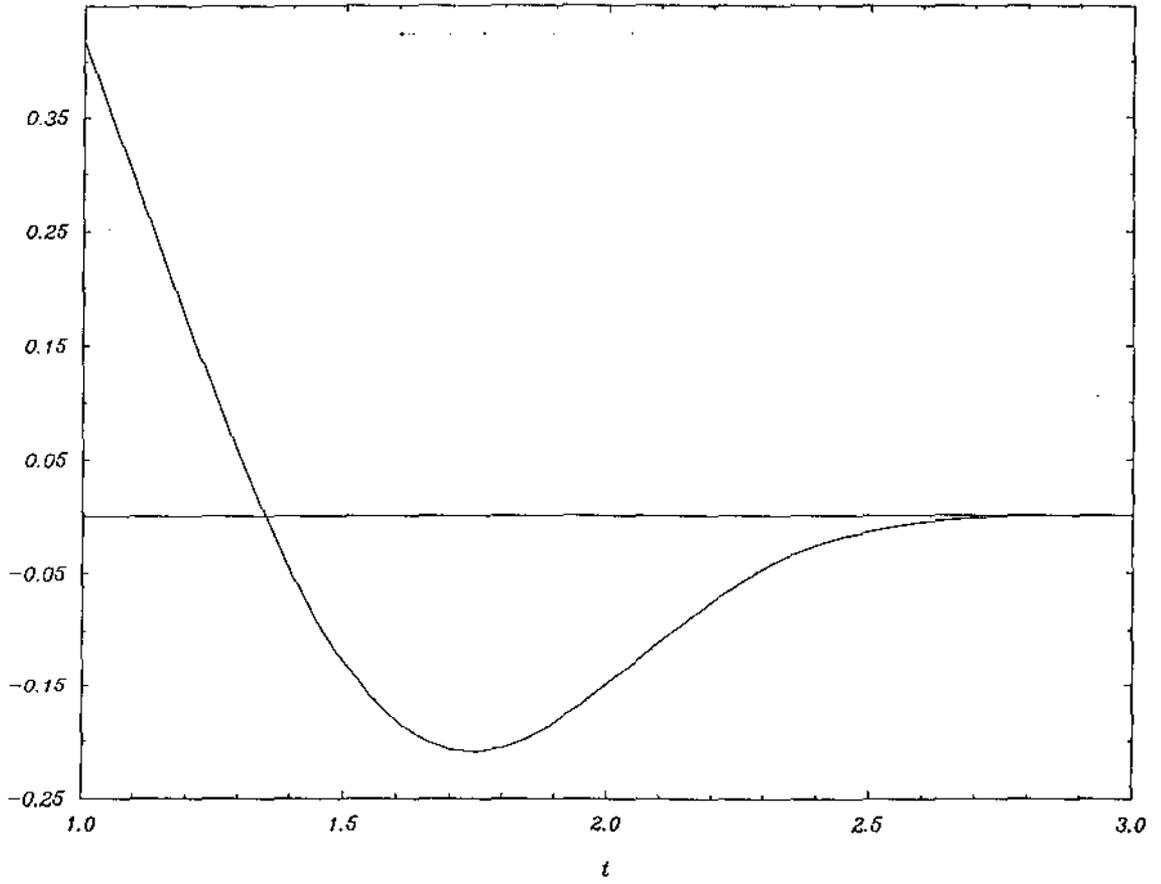


Fig.18. Gráfico da função $J_{22}[1,1/2,0,t]$ mostrando o movimento do pico que oscila no plano $z = 0$.

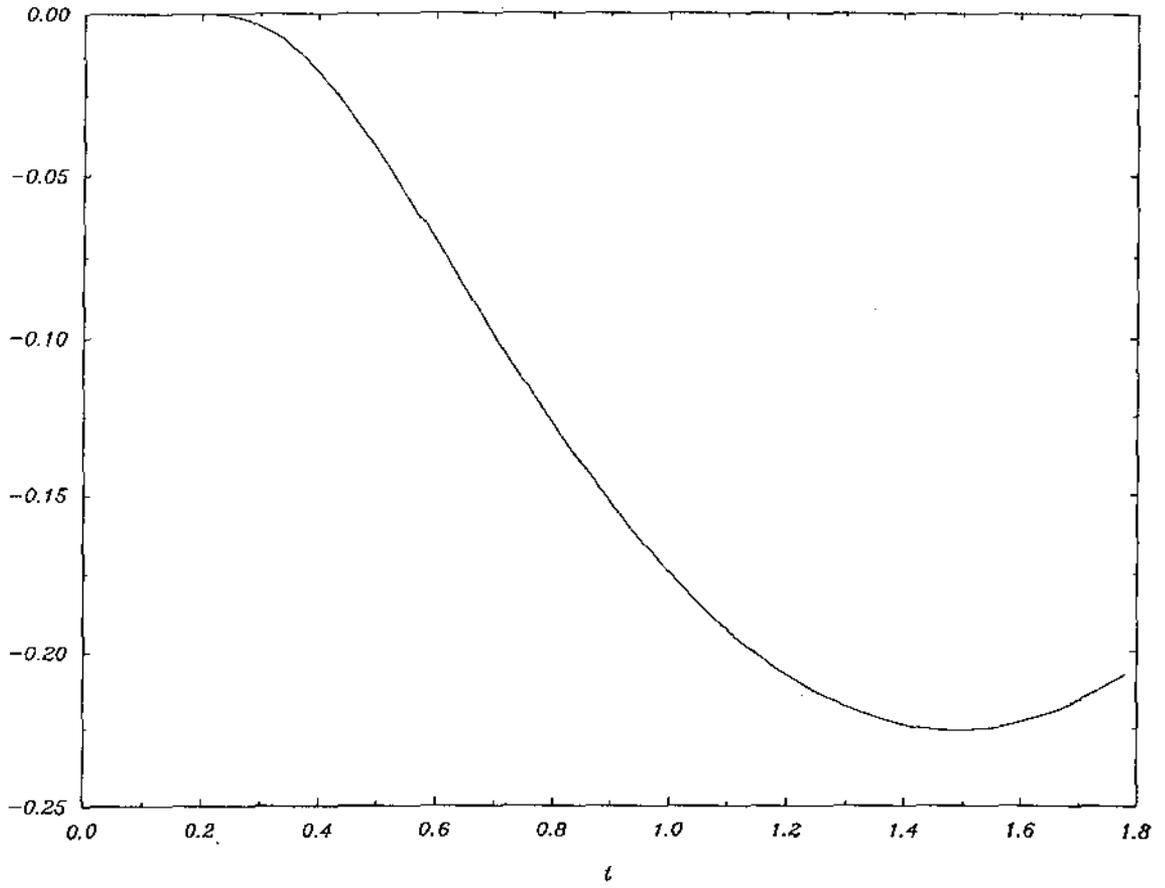


Fig.19. Esse gráfico mostra o comportamento da função $J_{22}[1, 1/2, k[t], t]$.

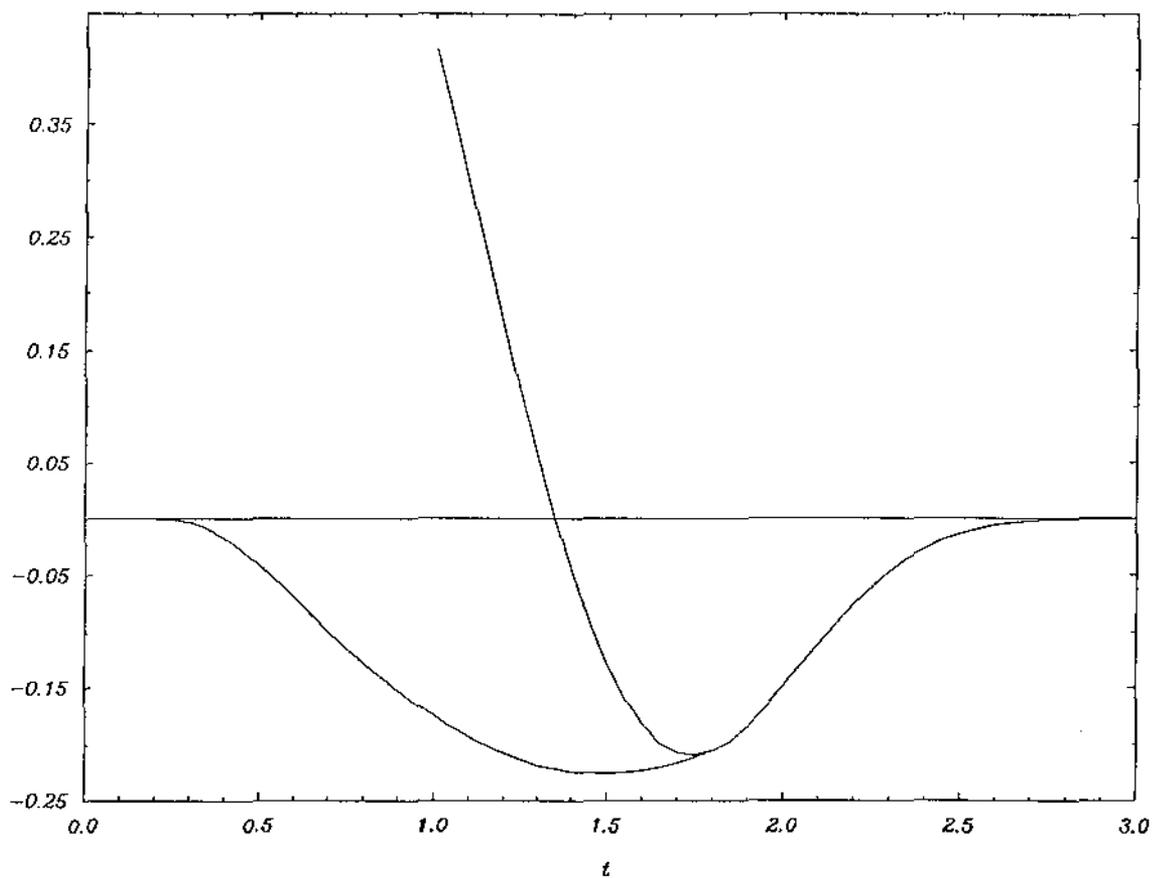


Fig.20. Mostramos acima as figuras 18 e 19 em um mesmo gráfico. Essa figura é útil para compararmos a evolução das alturas do pico e das depressões no tempo.

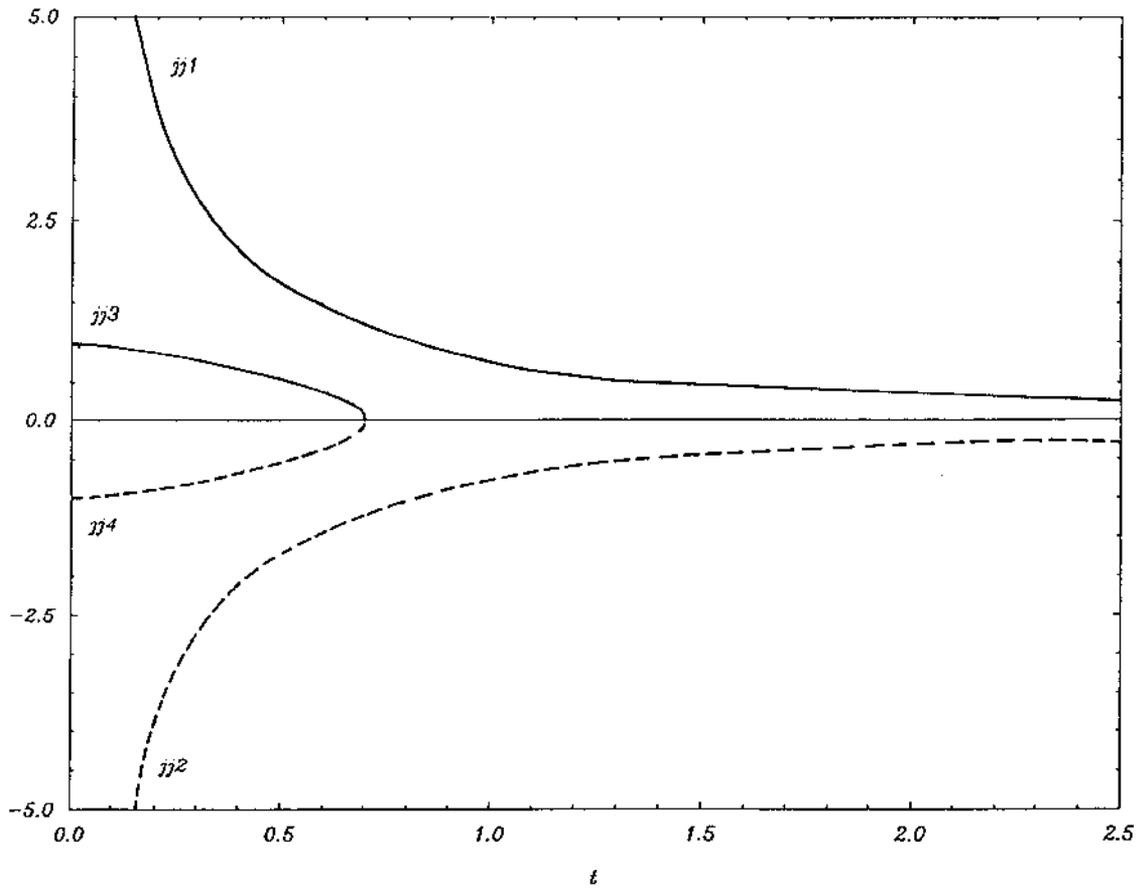


Fig.21. Diagrama do conjunto $D32[1,1/2]$.

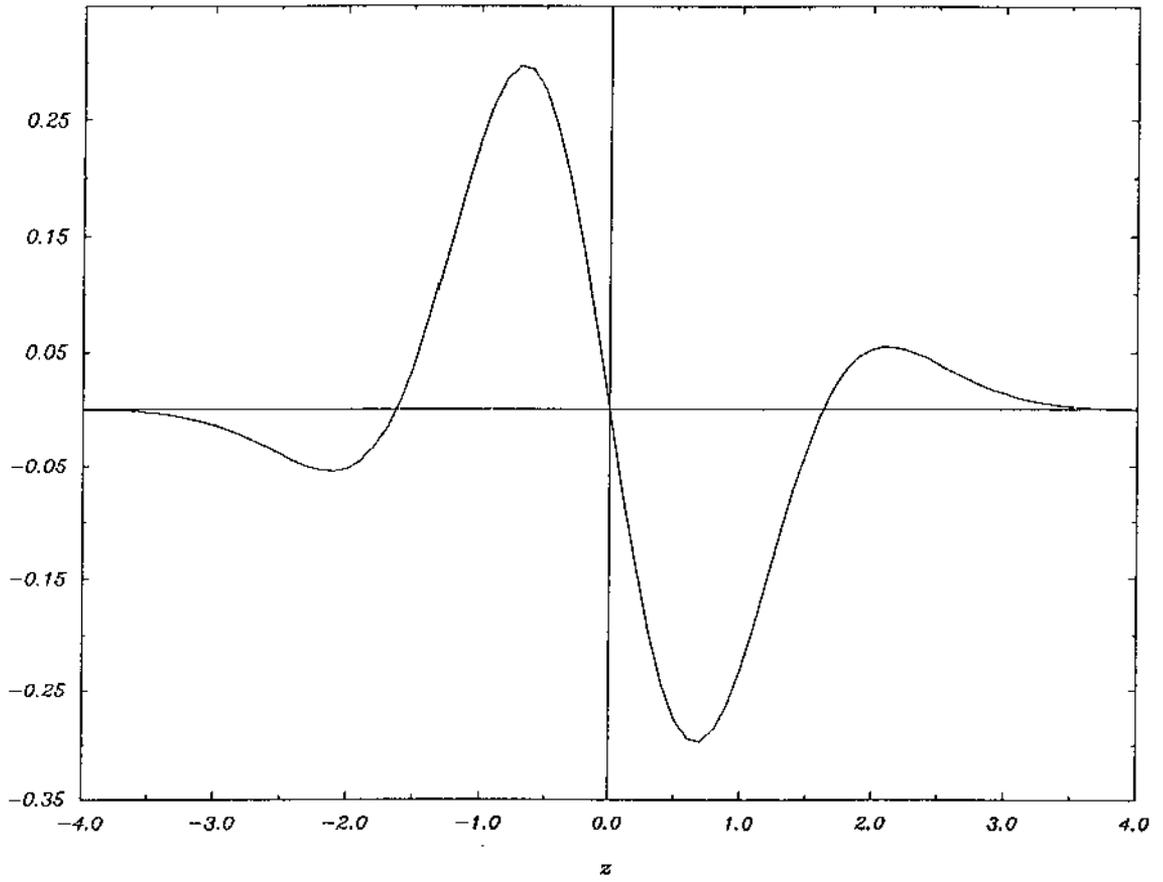


Fig.22. Tipo de "onda" correspondente a $J_{32}[1, 1/2, z, t]$ para $0 < t < 1/\sqrt{2}$.
 A figura acima mostra a "onda" em $t = 0.4$.

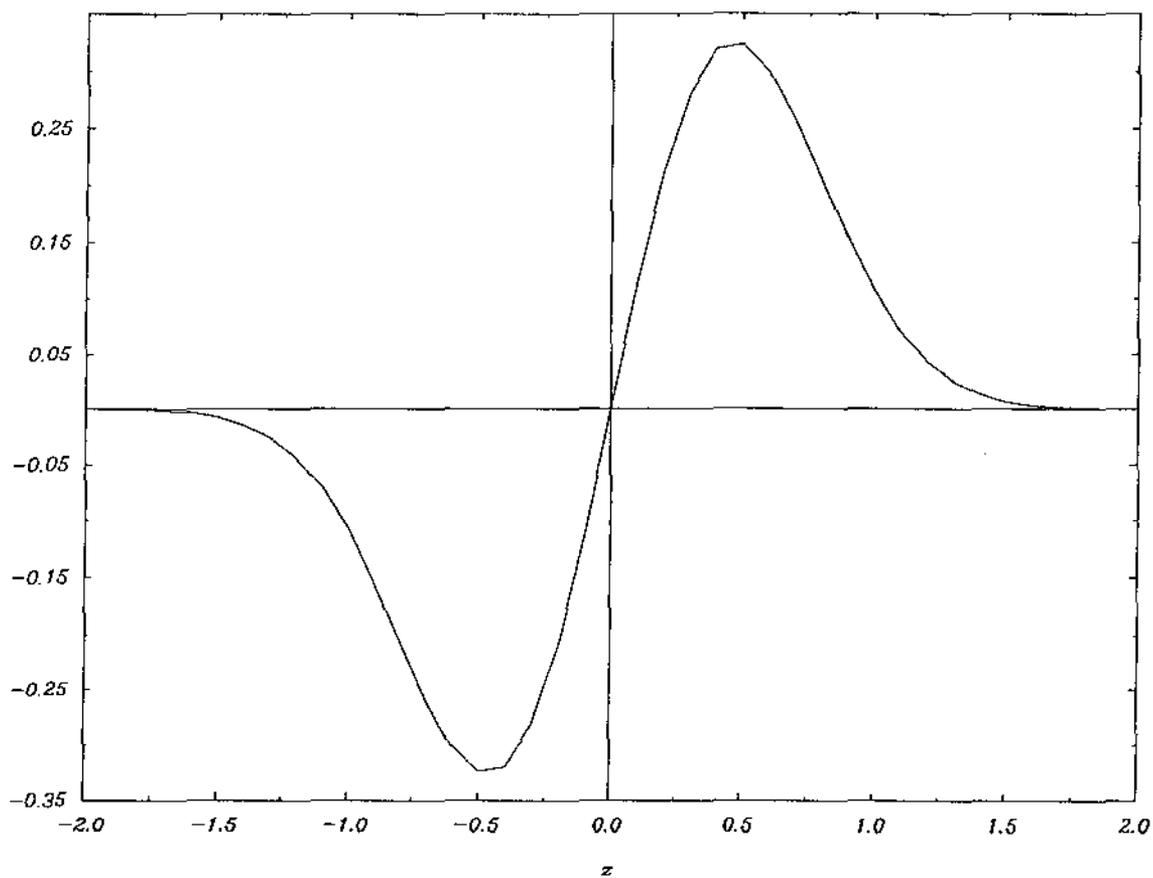


Fig.23. Tipo de "onda" correspondente a $J_{32}[1, 1/2, z, t]$ para $t > 1/\sqrt{2}$.
 A figura acima mostra a "onda" em $t = 1.5$.

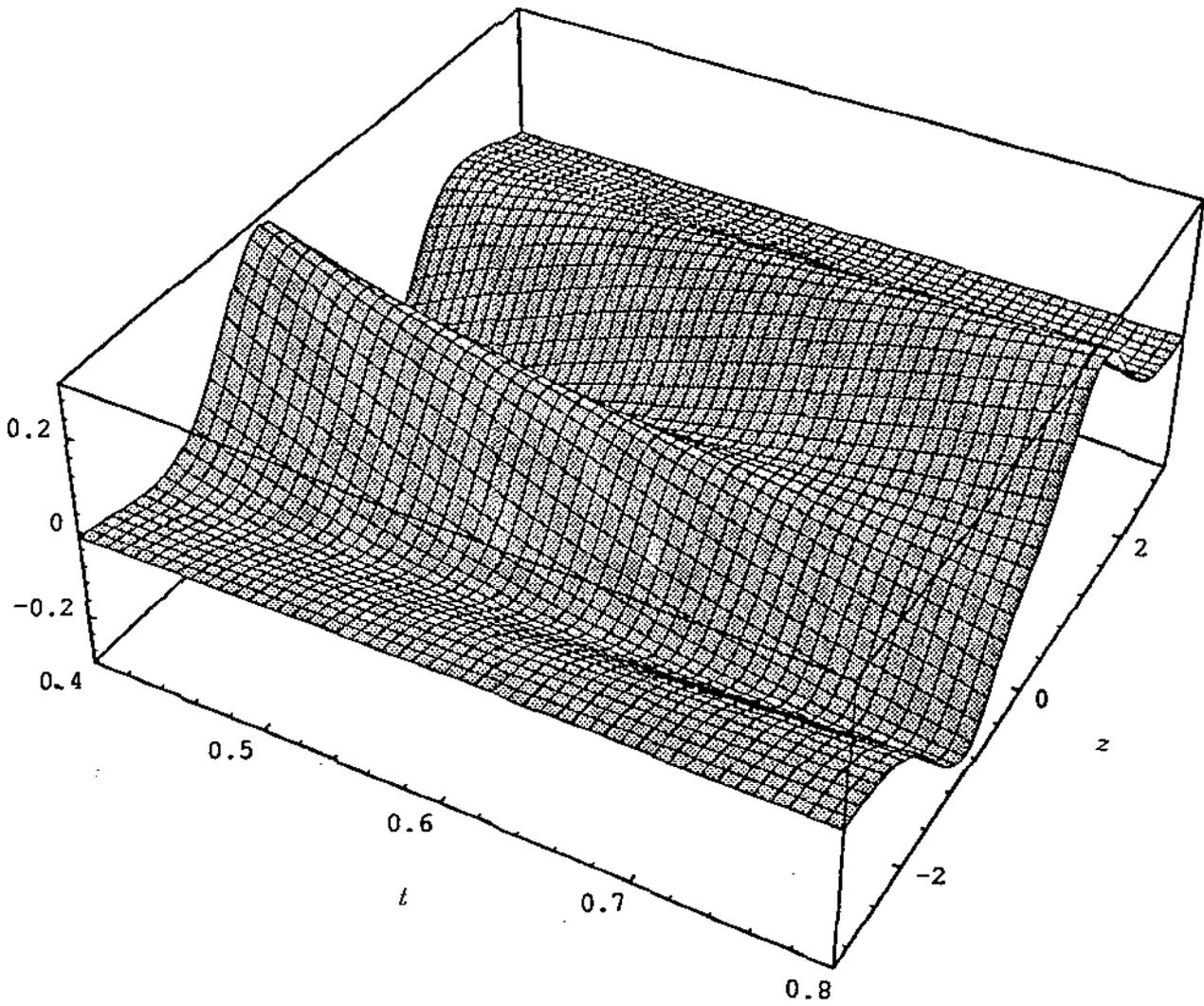


Fig.24. Gráfico da função $J_{32}[1, 1/2, z, t]$. Este gráfico juntamente com a figura 22 ajuda a visualizar a evolução das ondas para $0 < t < 1/\sqrt{2}$.

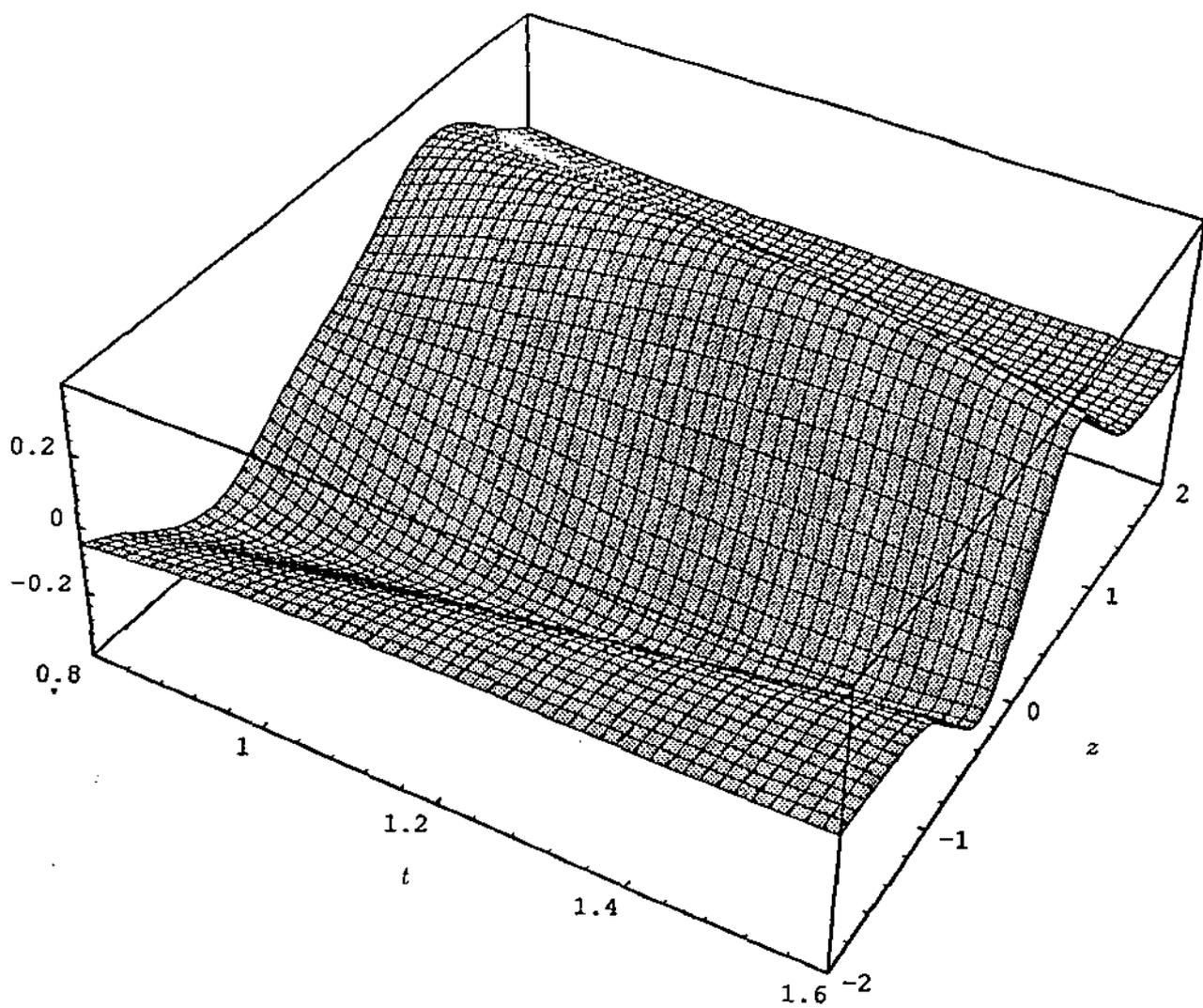


Fig. 25. Gráfico da função $J_{32}[1, 1/2, z, t]$. Esta figura e a figura 23 ajudam a visualizar a evolução das "ondas" para $t > 1/\sqrt{2}$

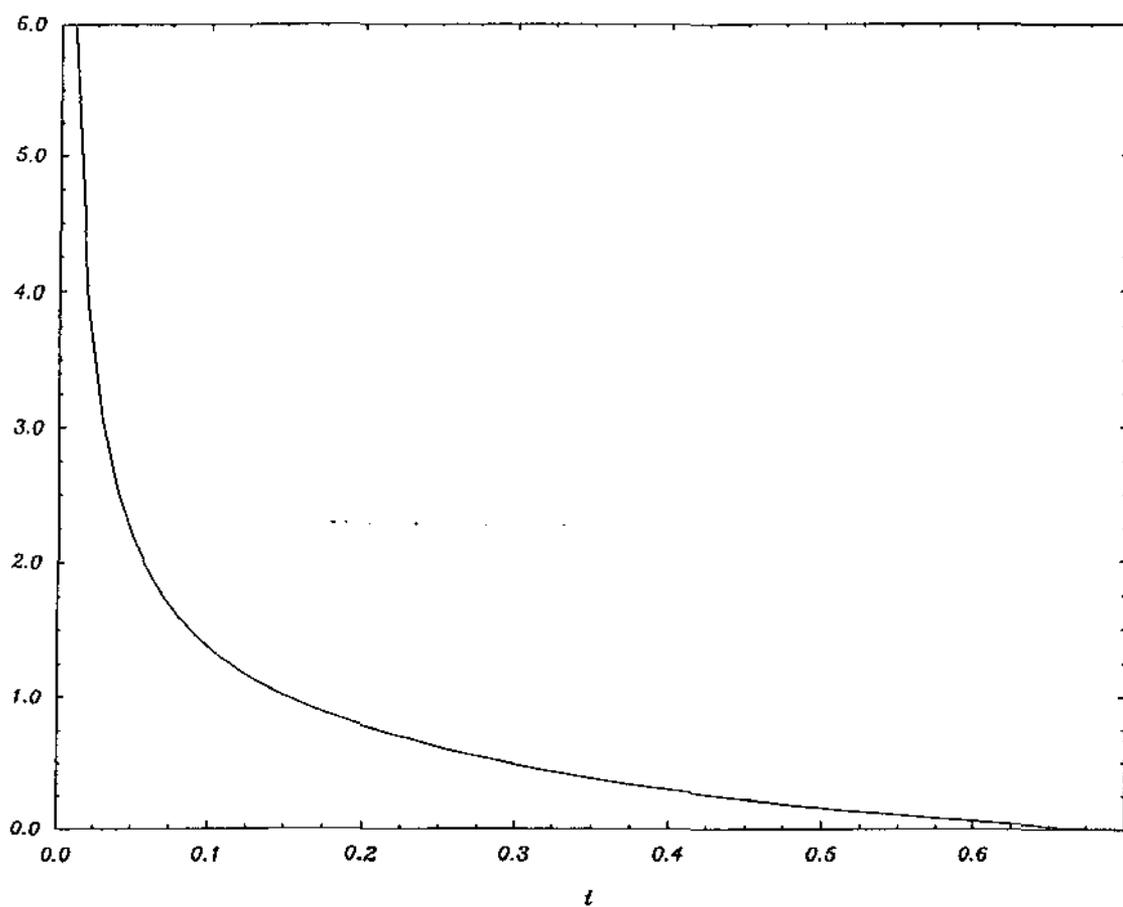


Fig.26. Gráfico da função $J_{32}[1,1/2,jj3[t],t]$. Por esse gráfico vemos a variação das alturas da depressão sobre γ_4 .

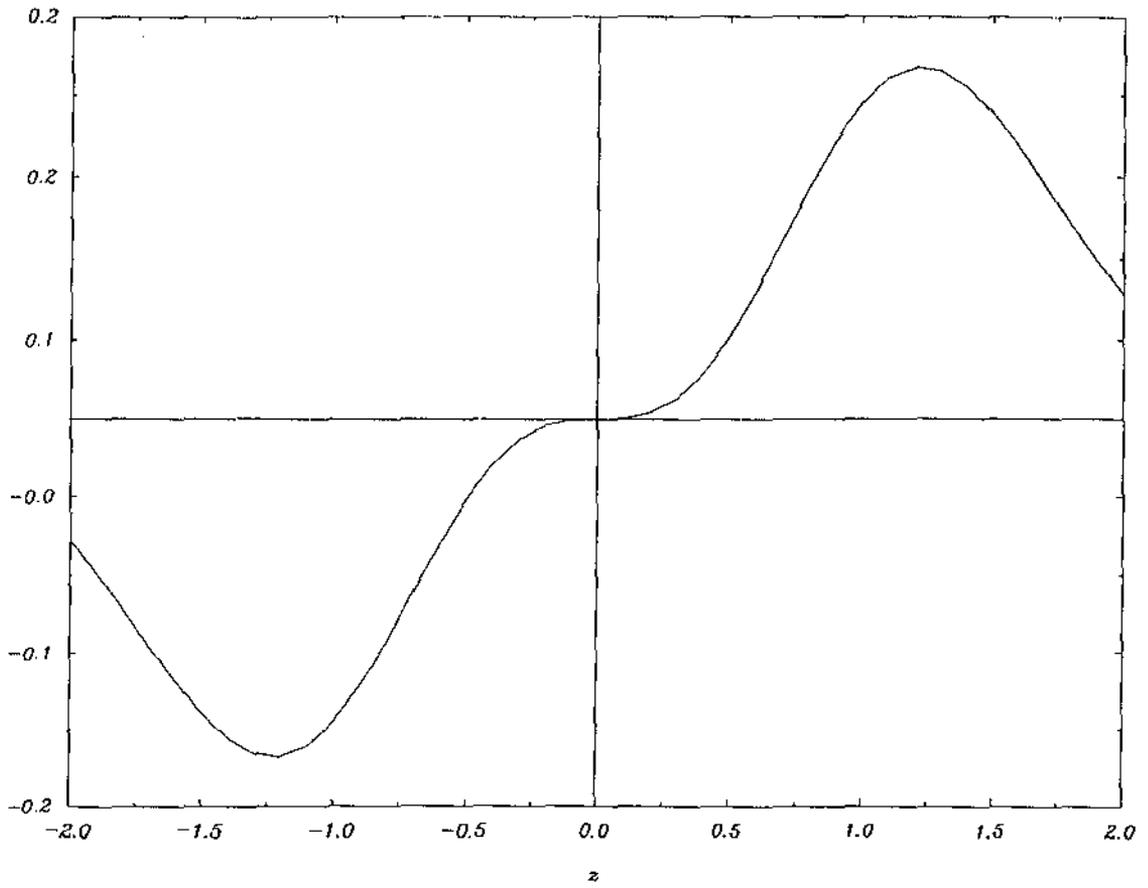


Fig.27. A figura mostra a "onda" correspondente a $J_{32}[1,1/2,z,1/\sqrt{2}]$.

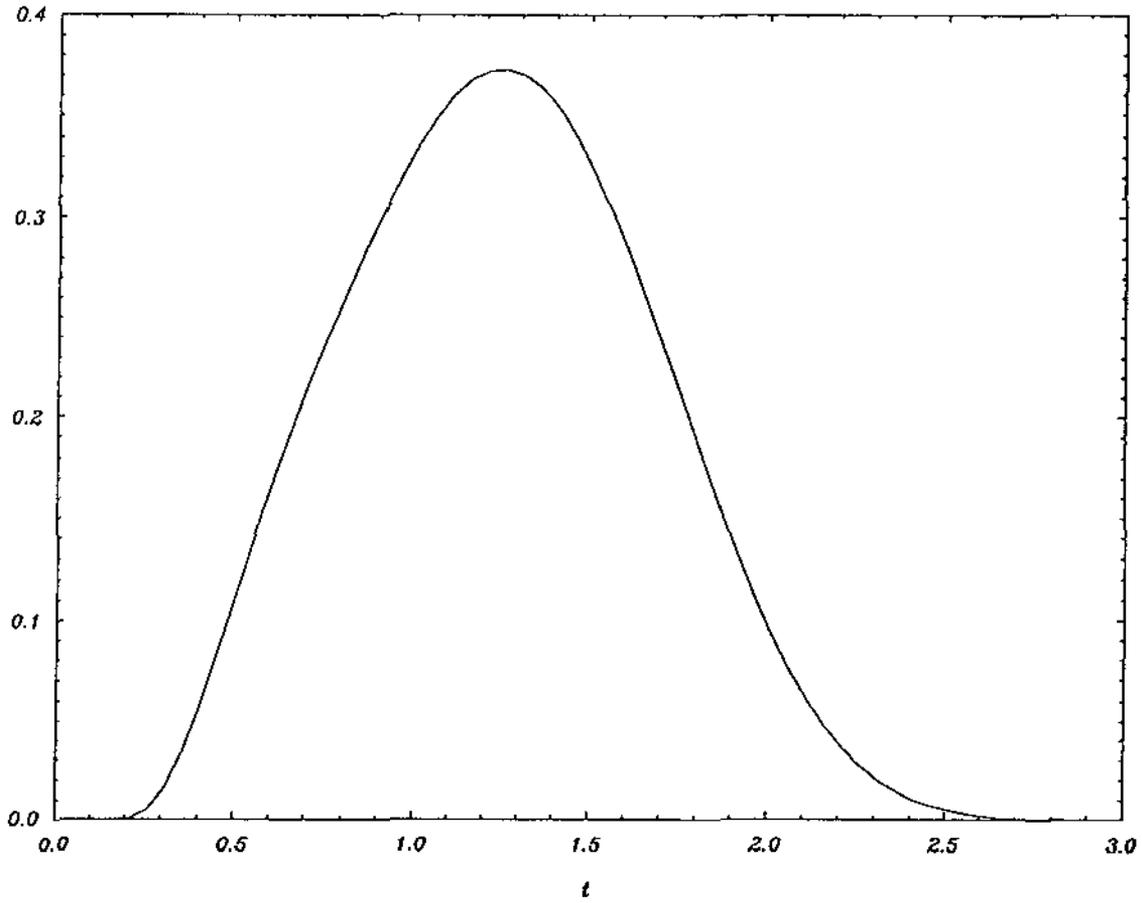


Fig.28. Gráfico da função $J_{32}[1,1/2,jj1[t],t]$. Por esse gráfico podemos observar a variação das alturas dos picos sobre γ_1 e das depressões sobre γ_2 .

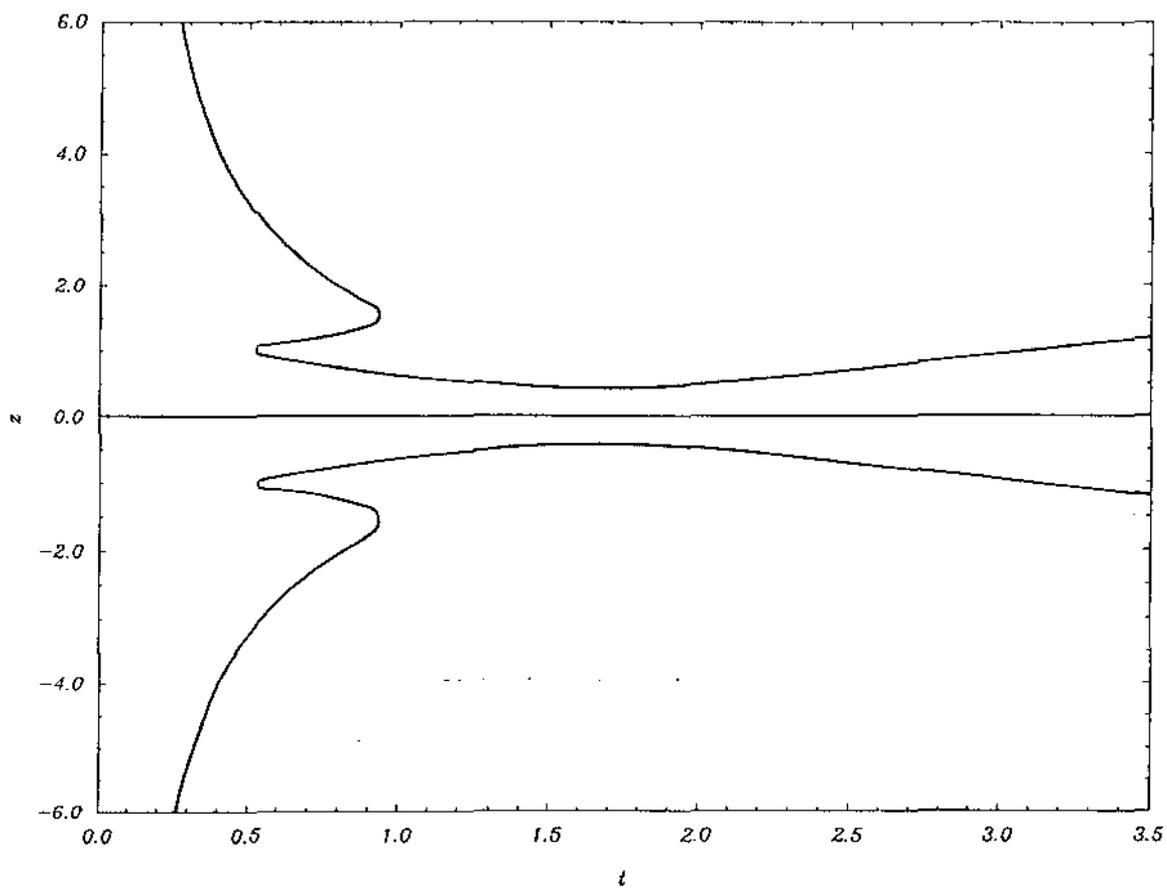


Fig.29. Diagrama do conjunto $D42[1, 1/2]$.

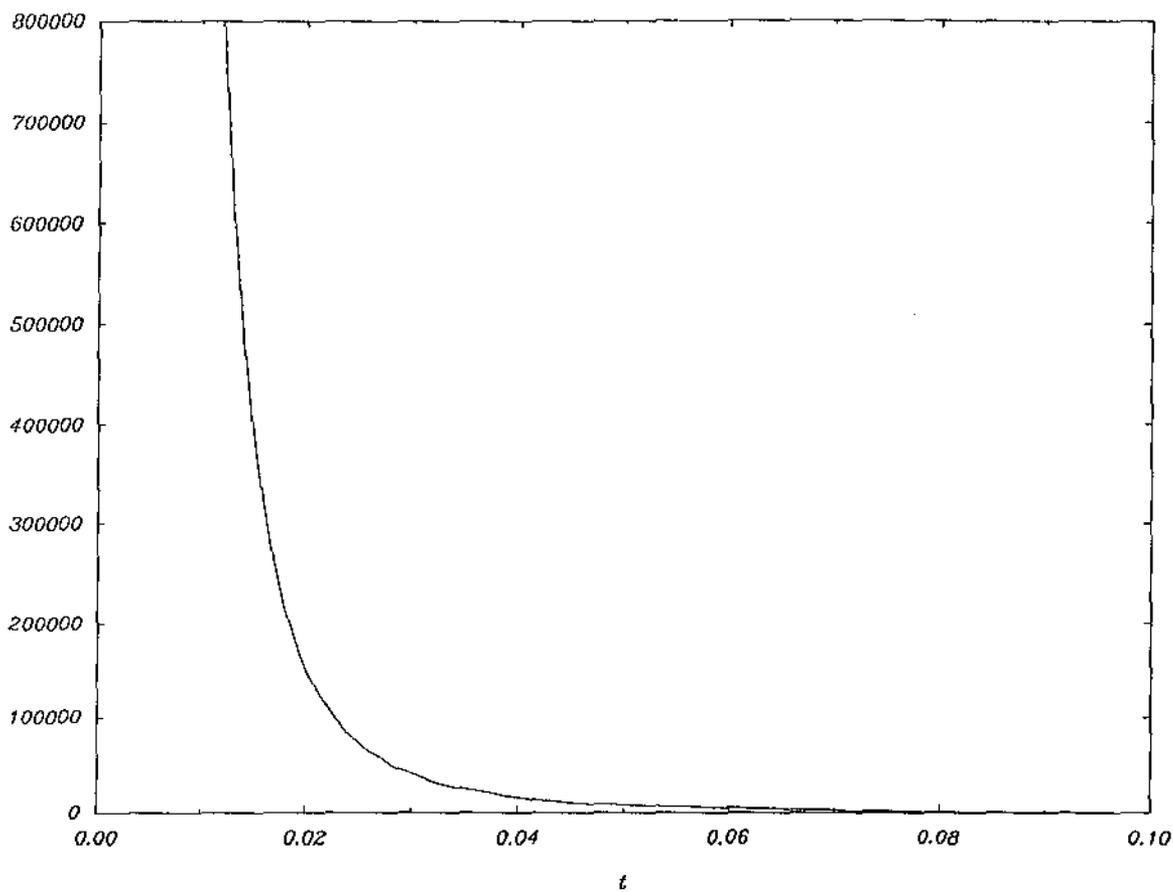


Fig.30. Gráfico da função $J_{42}[1,1/2,0,t]$. Essa figura mostra como varia no tempo a altura do pico que oscila no plano $z = 0$.

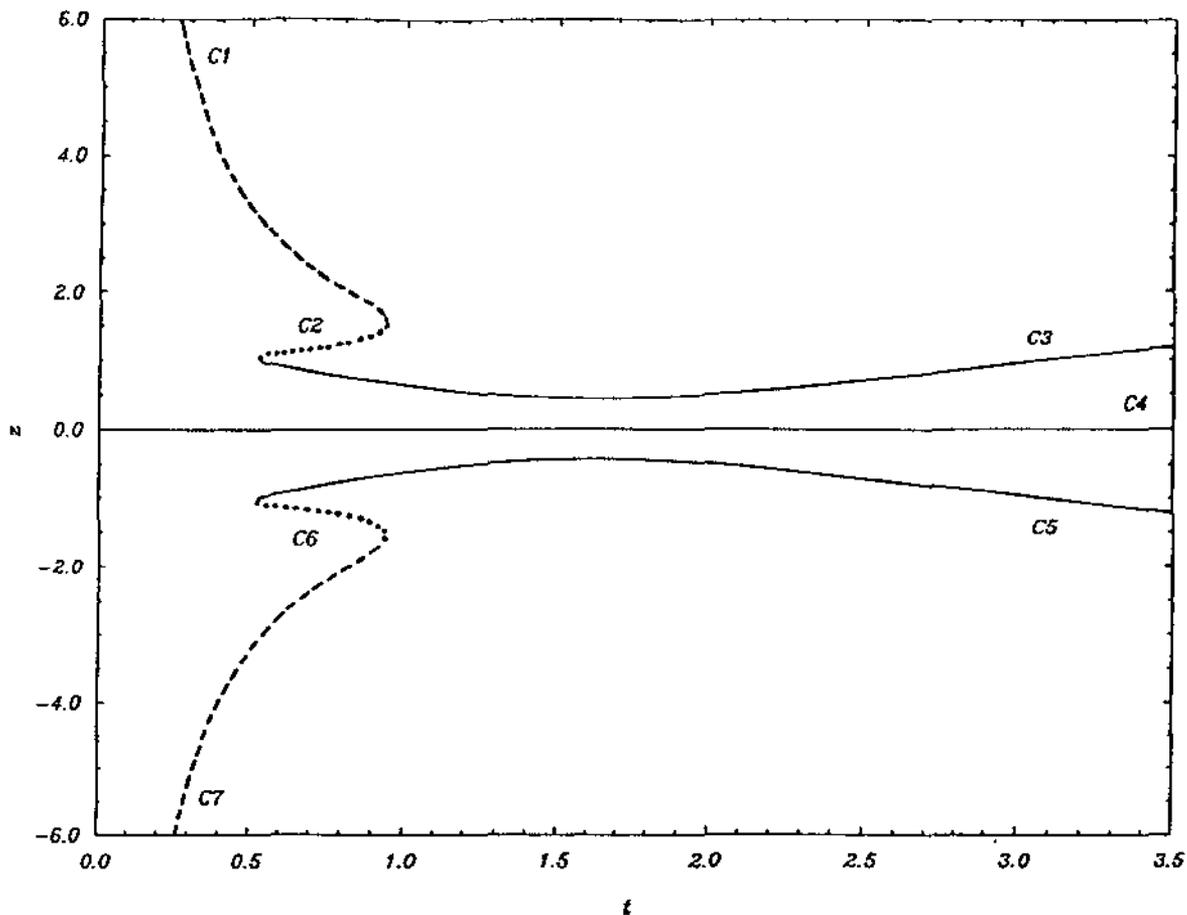


Fig.31. Neste gráfico dividimos o diagrama do conjunto $D42[1,1/2]$ em várias curvas. As curvas C1, C3, C5 e C7 correspondem a depressões enquanto as curvas C2, C4 e C6 correspondem a picos. As curvas C2, C3 e C5, C6 originam-se em $t = 0.525$. Em $t = 0.94$ C1 encontra C2 e C6 enquanto C7.

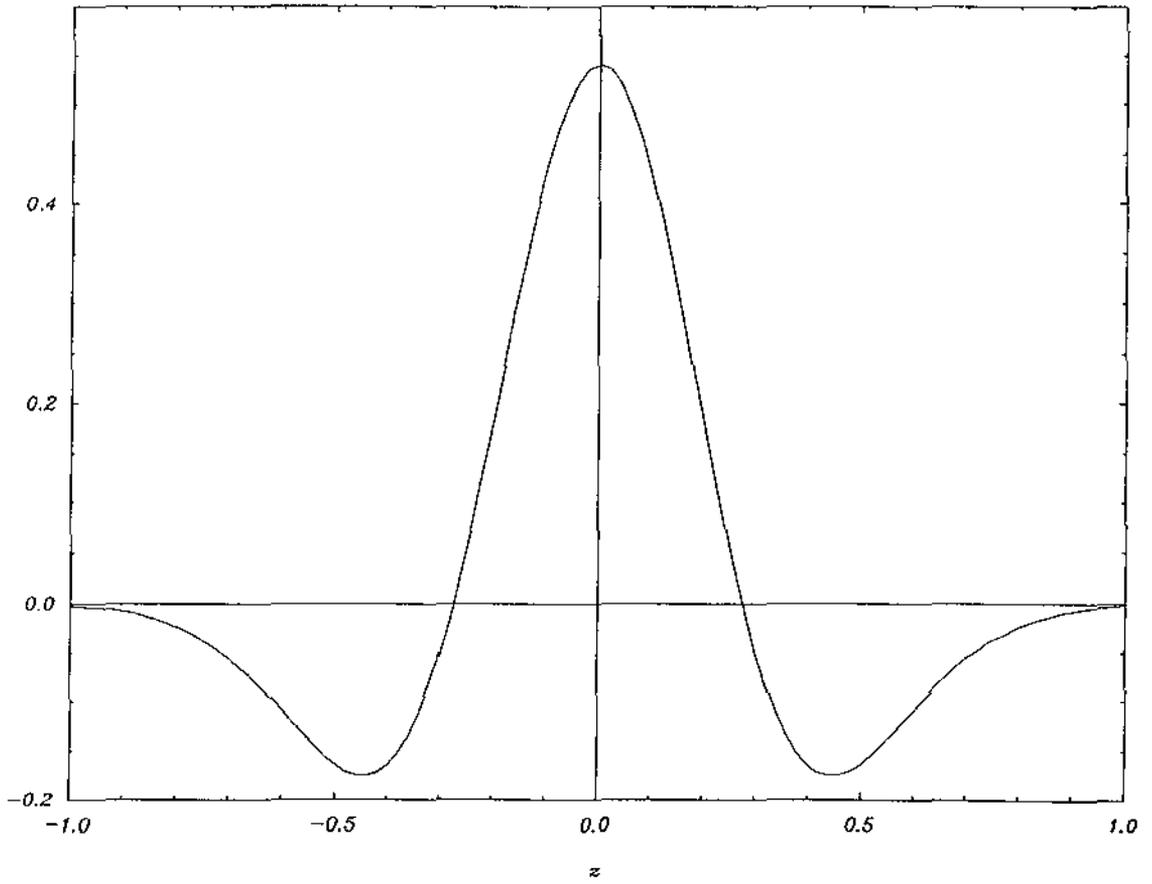


Fig. 32. Tipo de "onda" correspondente a $J_{42}[1, 1/2, z, t]$ para $0 < t < 0.525$ e $t > 0.94$. A figura acima mostra a "onda" em $t = 1.8$.

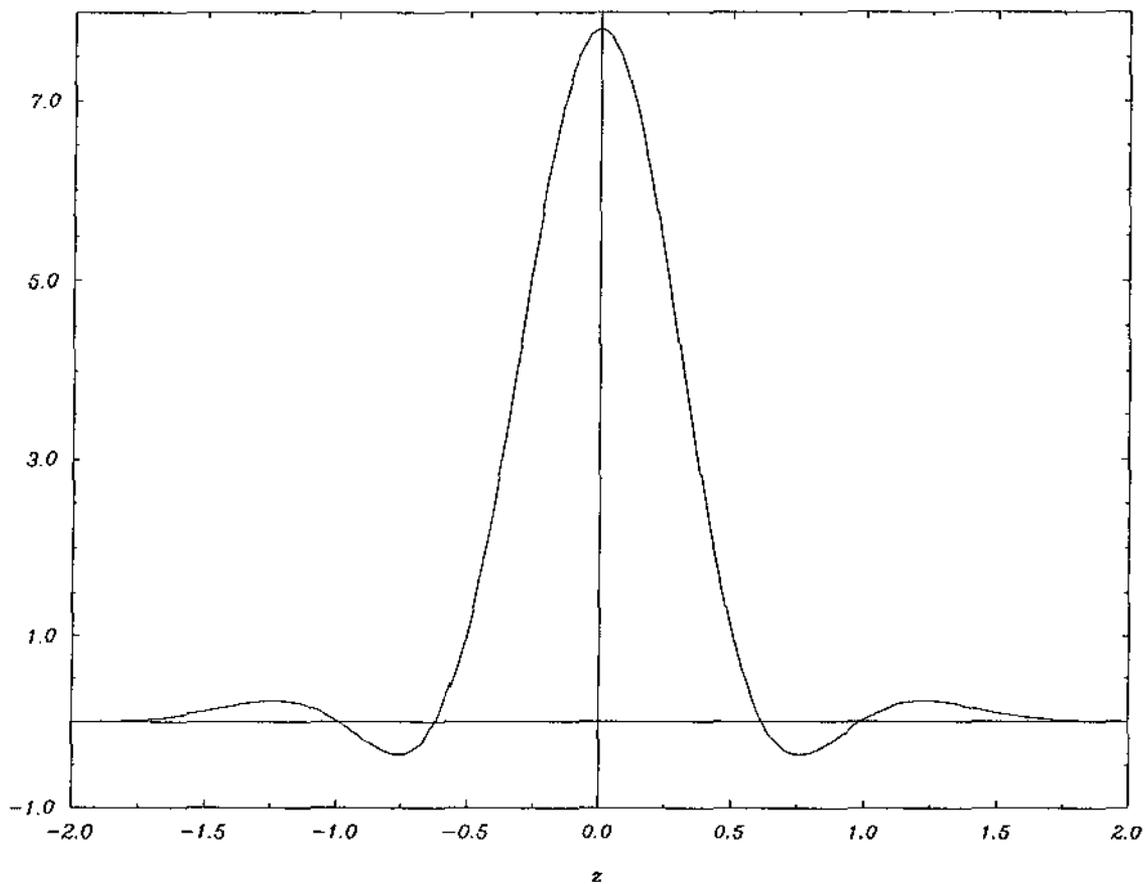


Fig.33. Tipo de "onda" correspondente a $J_{42}[1.1/2, z, t]$ para $0.525 < t < 0.94$.
 A figura acima e a seguinte mostram a "onda" em $t = 0.8$.

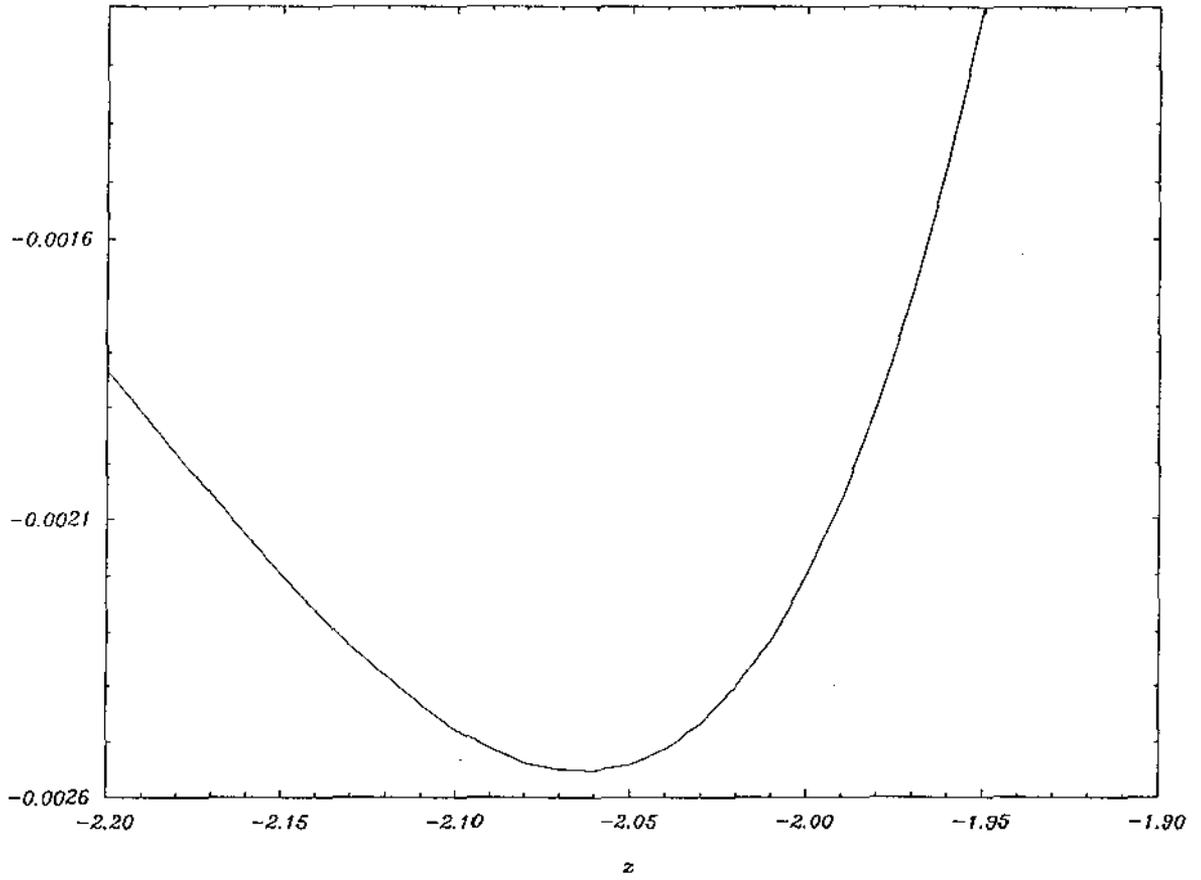


Fig.34. Gráfico da função $J_{42}[1,1/2,z,0.8]$. Esse gráfico é um complemento da figura anterior.

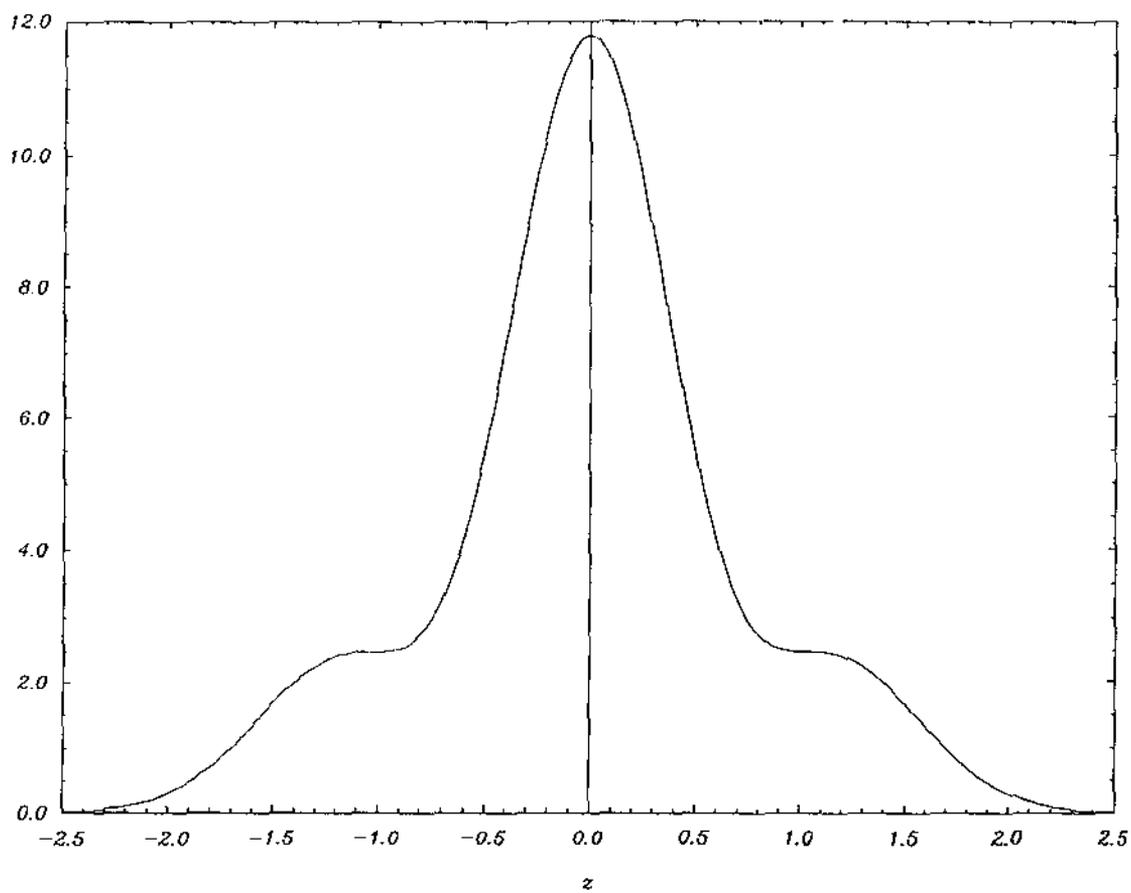


Fig. 35. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{42}[1, 1/2, z, 0.525]$.

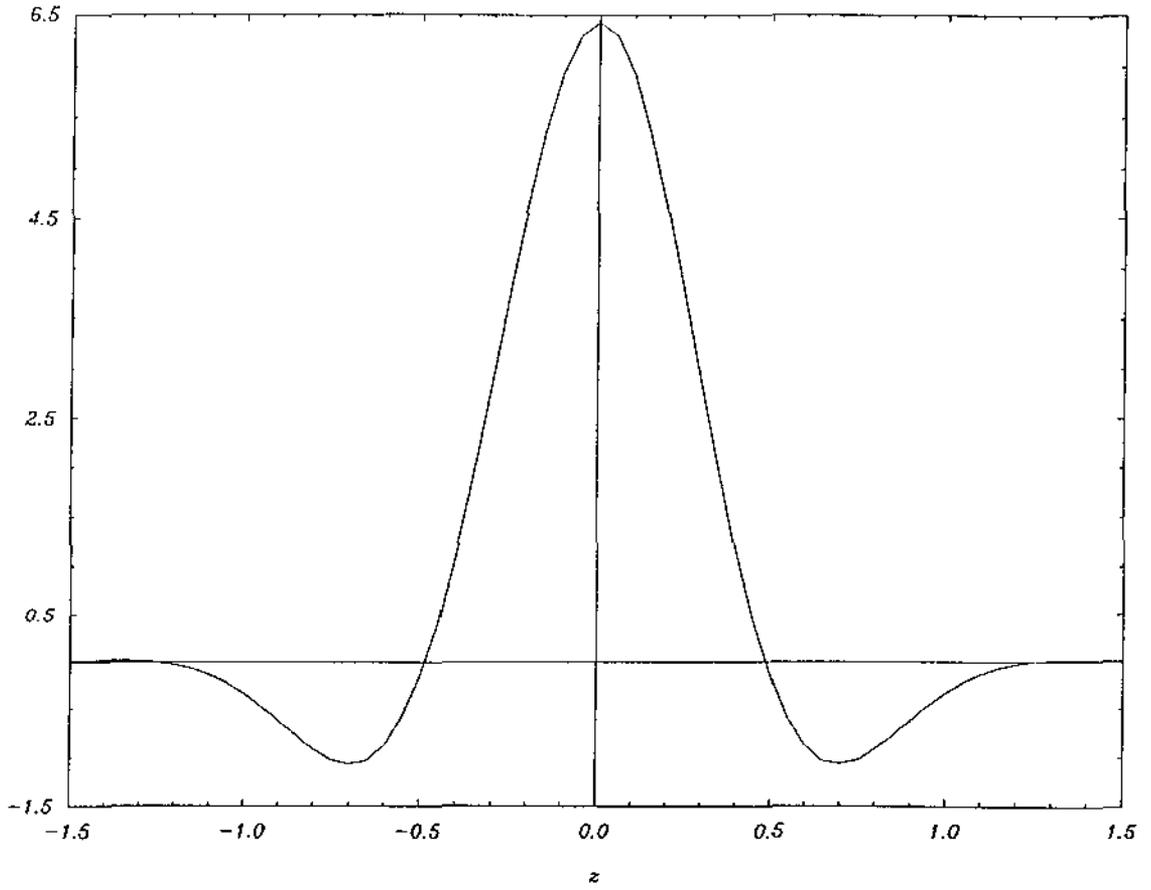


Fig. 36. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{42}[1, 1/2, z, 0.9]$.

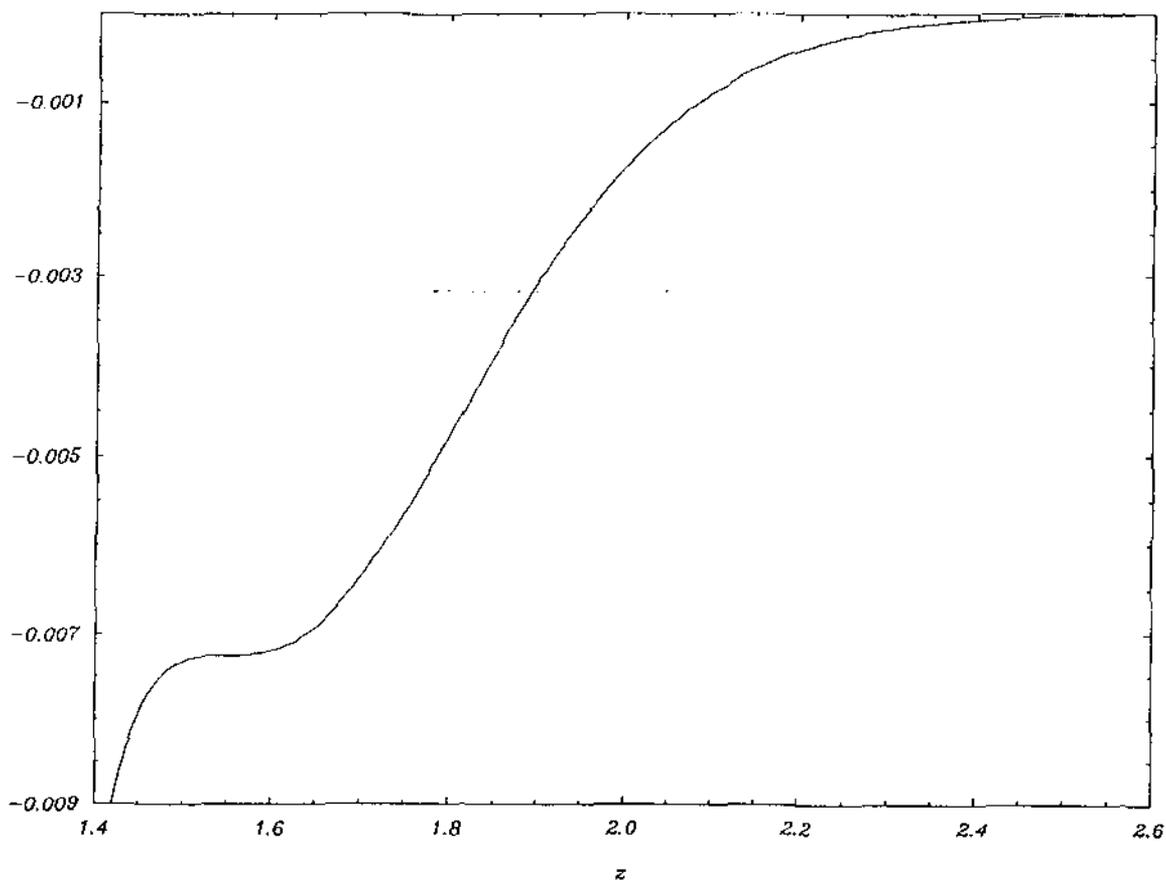


Fig. 37. Gráfico da função $J_{42}[1, 1/2, z, 0.94]$. O primeiro ponto de inflexão ocorre em $z = 1.55$.

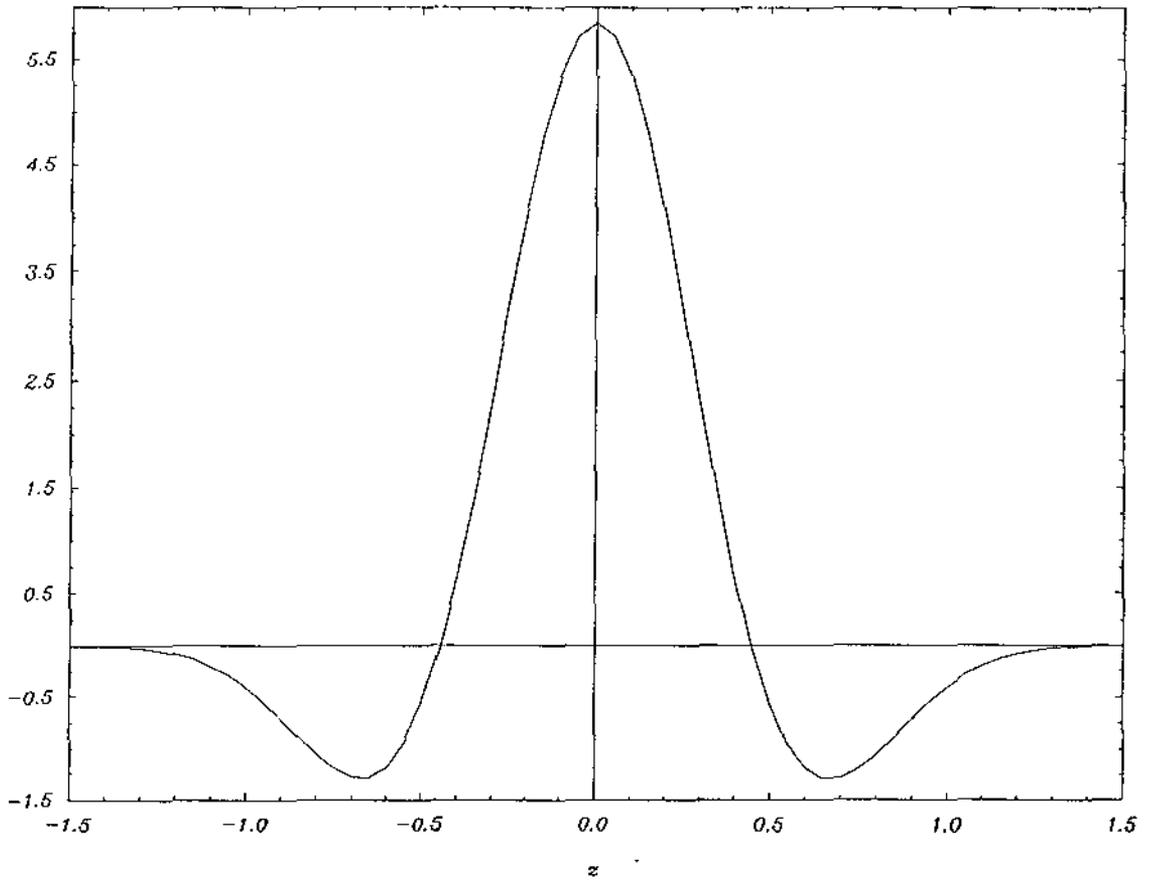


Fig. 38. A figura acima mostra parcialmente a "onda" em $t = 0.94$. Esse gráfico deve juntar-se ao anterior para formar a "onda" nesse instante.

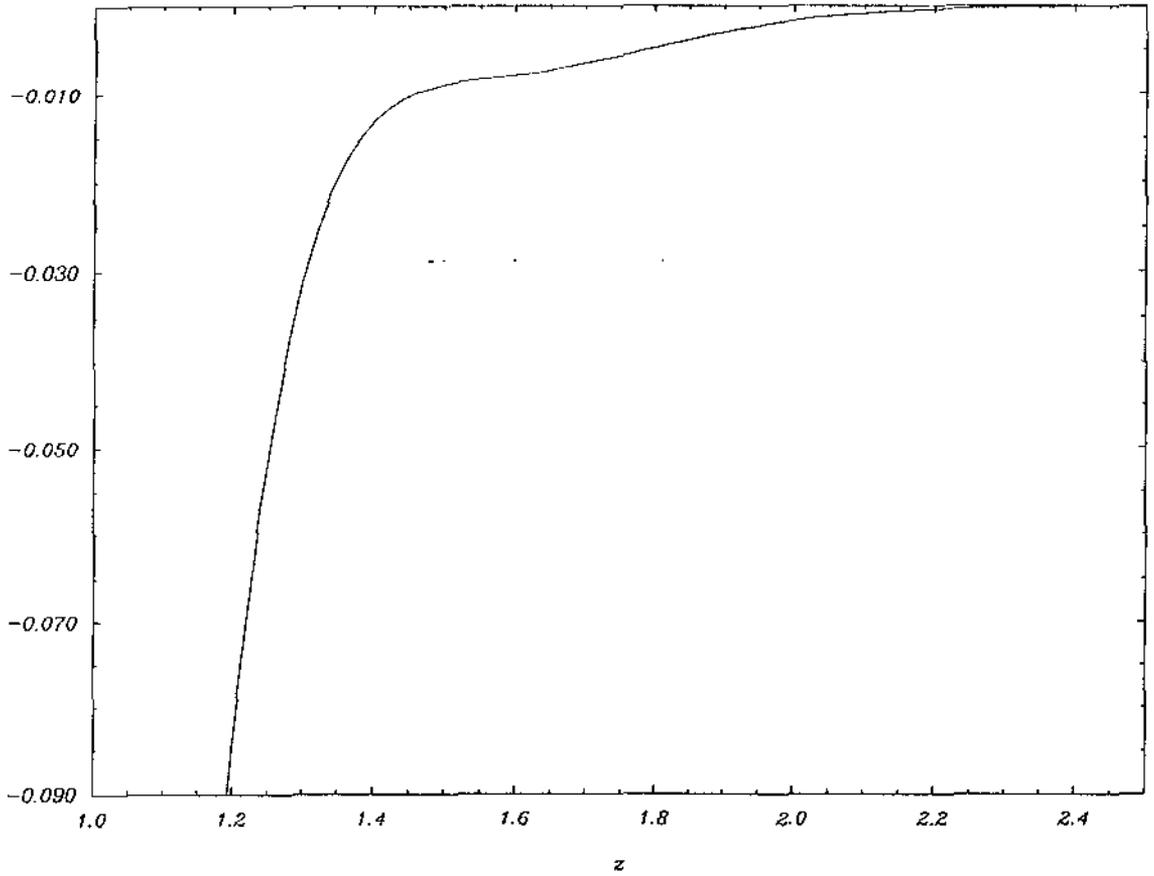


Fig.39. Gráfico da função $J_{42}[1, 1/2, z, 0.95]$. Essa figura mostra uma parte da "onda" onde ocorre um ponto de inflexão resultante do encontro entre um pico e uma depressão.

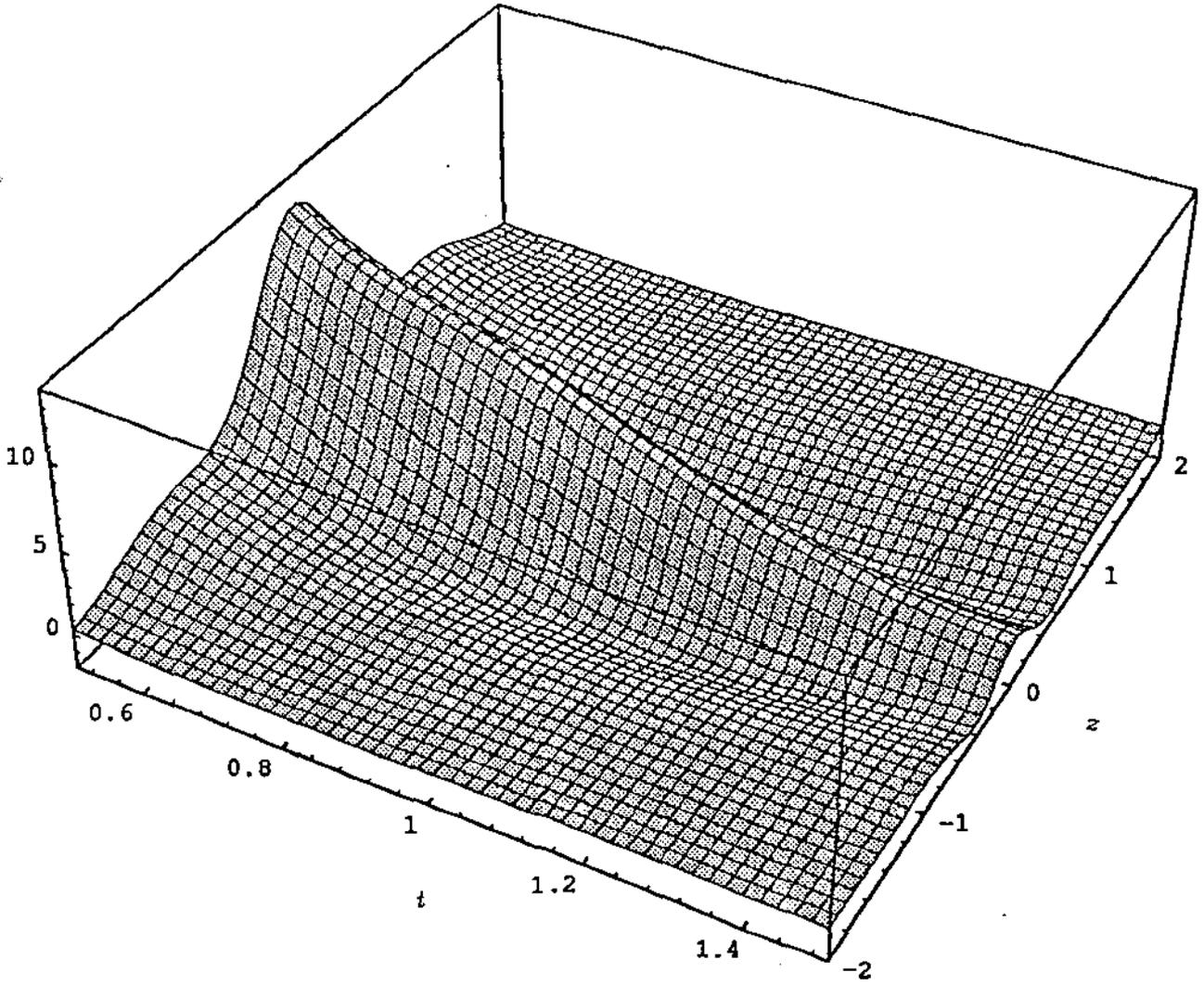


Fig.40. Gráfico da função $J_{42}[1.1/2, z, t]$. Este gráfico ajuda visualizar a evolução das "ondas" no intervalo $0.5 < t < 1.5$.

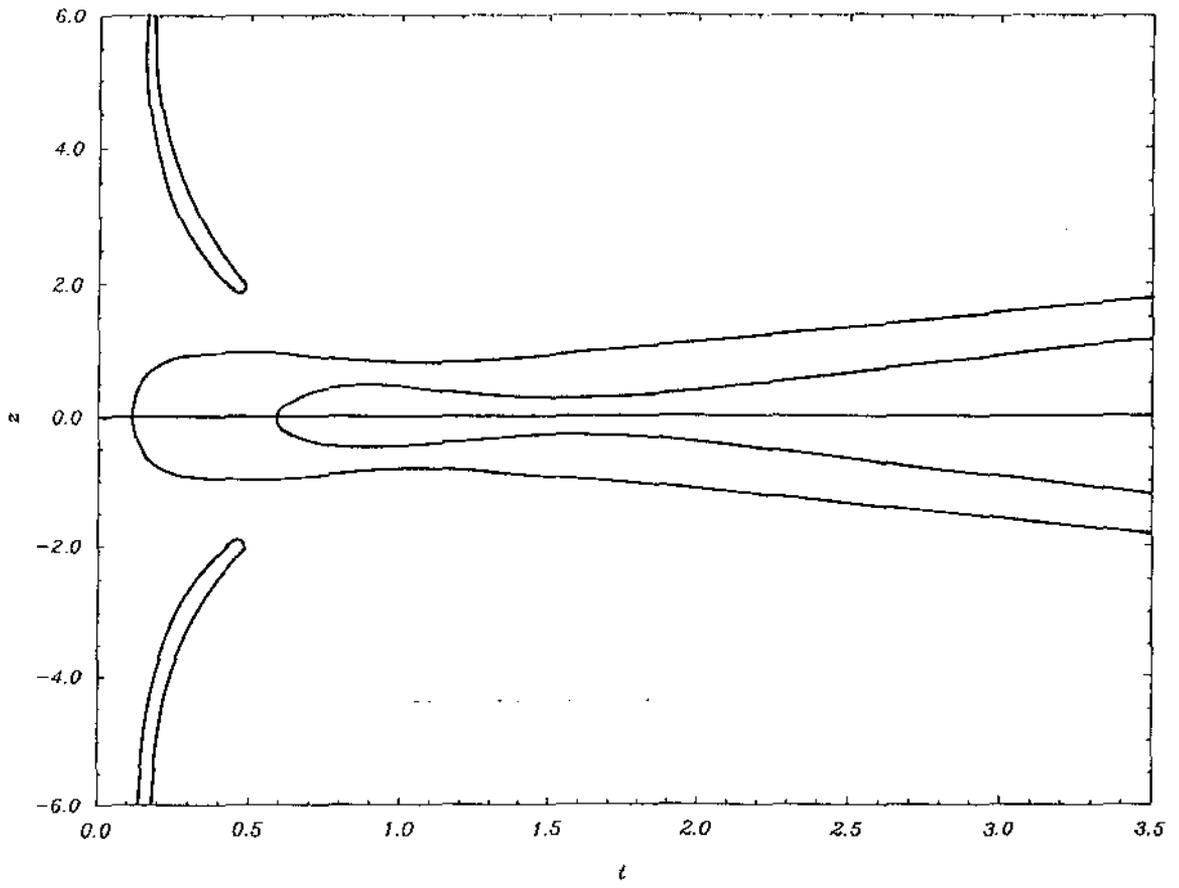


Fig. 41. Diagrama do conjunto $D52[1, 1/2]$.

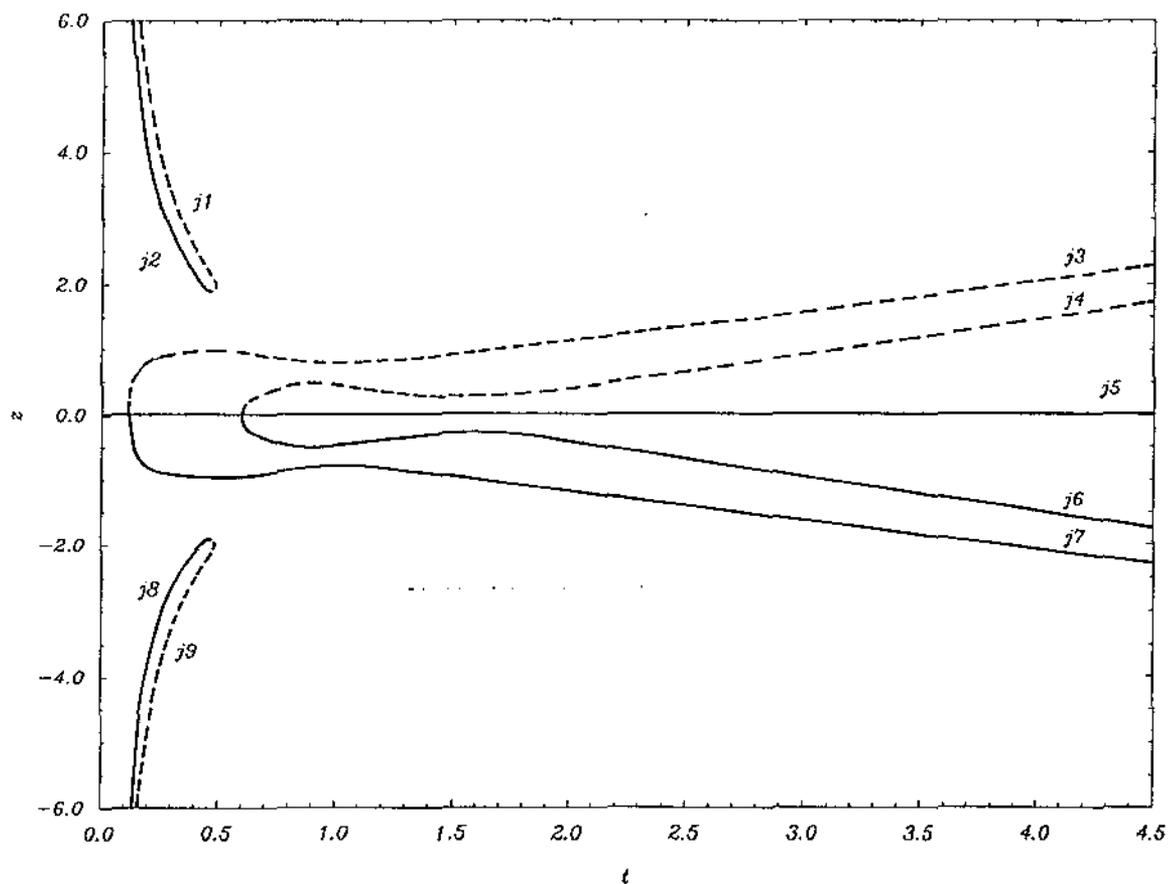


Fig.42. Neste gráfico dividimos o diagrama do conjunto $D52[1.1/2]$ em várias curvas. Os pontos de $j1$, $j3$, $j7$ e $j9$ correspondem a depressões. Os pontos das curvas $j2$, $j4$, $j6$ e $j8$ correspondem a picos das "ondas". A curva $j5$ é um caso à parte, pois seus pontos correspondem a depressões se $0 < t < 0.12$ ou $t > 0.59$ e a picos se $0.12 < t < 0.59$.

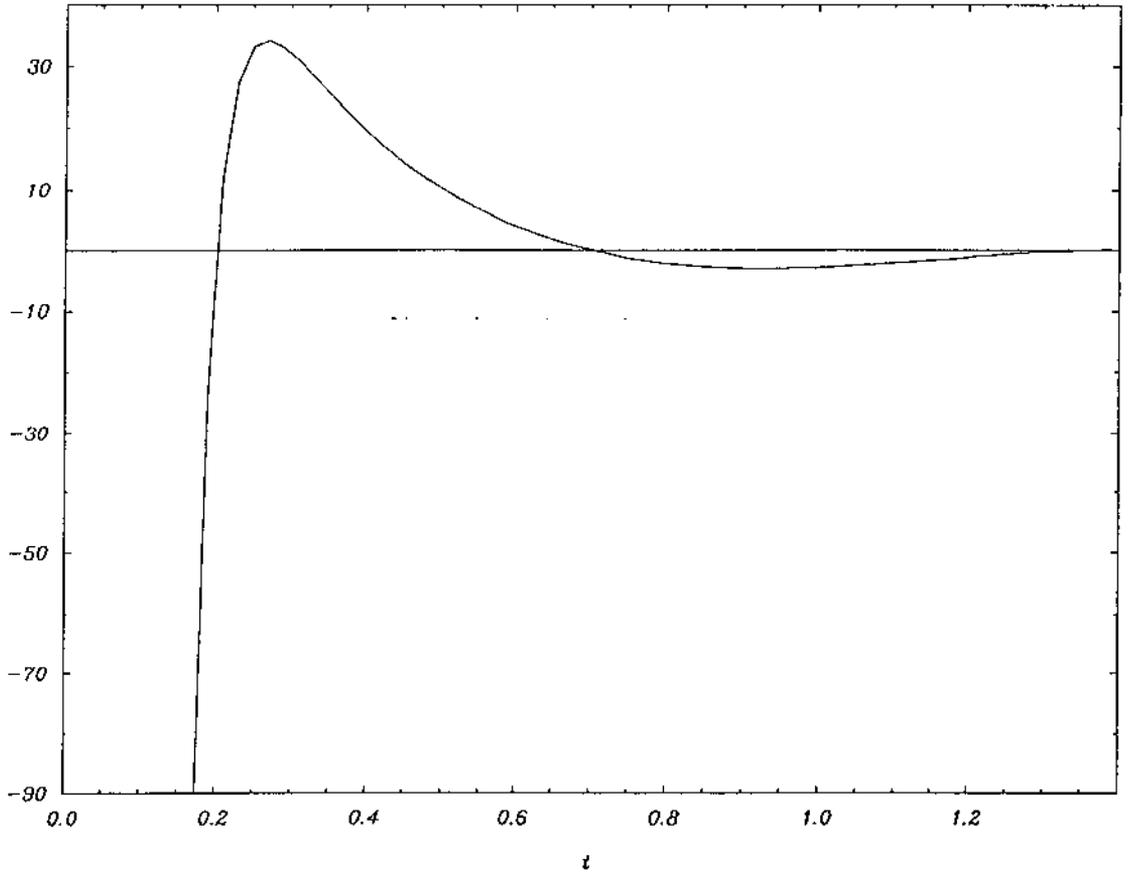


Fig.43. Gráfico da função $J_{52}[1.1/2, 0, t]$. Esse gráfico e o seguinte indicam como variam as alturas dos picos e depressões em $z = 0$.

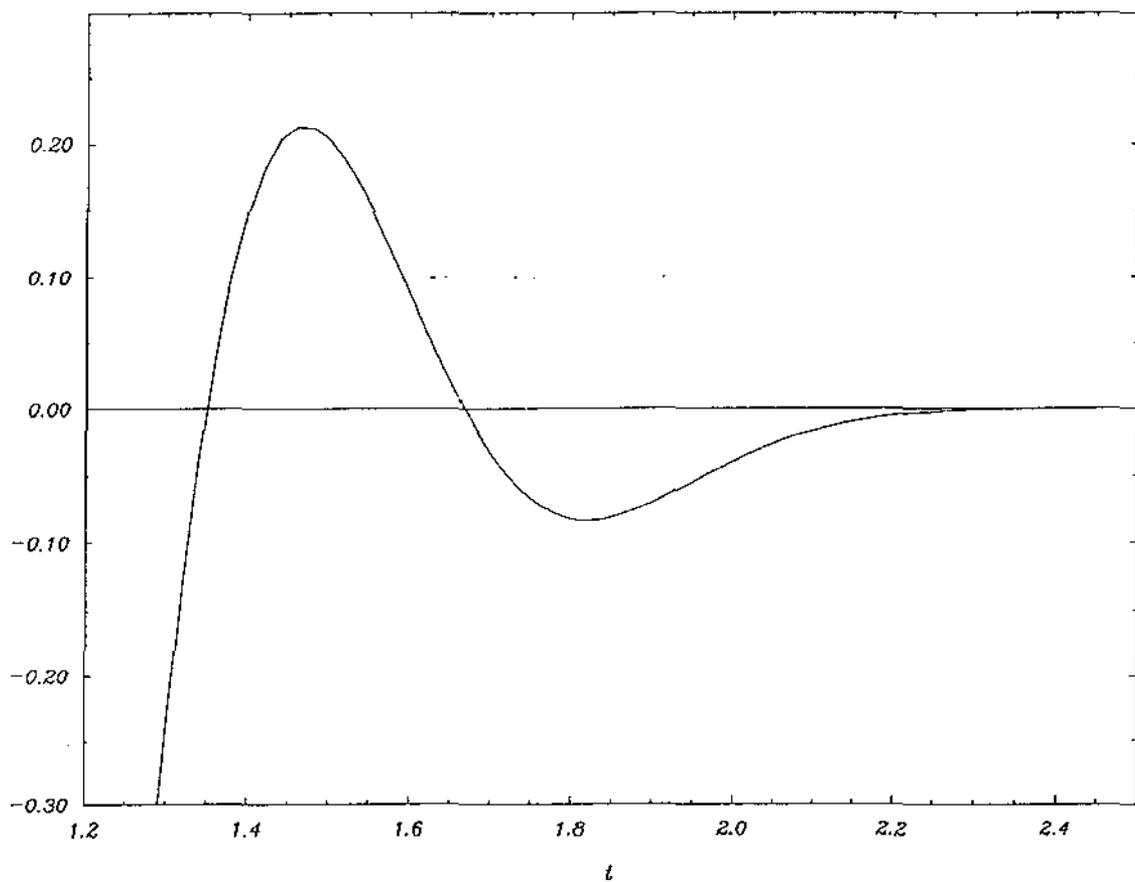


Fig.44. Gráfico da função $J_{52}[1,1/2,0,t]$. Por essa figura e pela anterior temos uma noção de como variam as alturas dos picos e depressões que oscilam em $z = 0$.

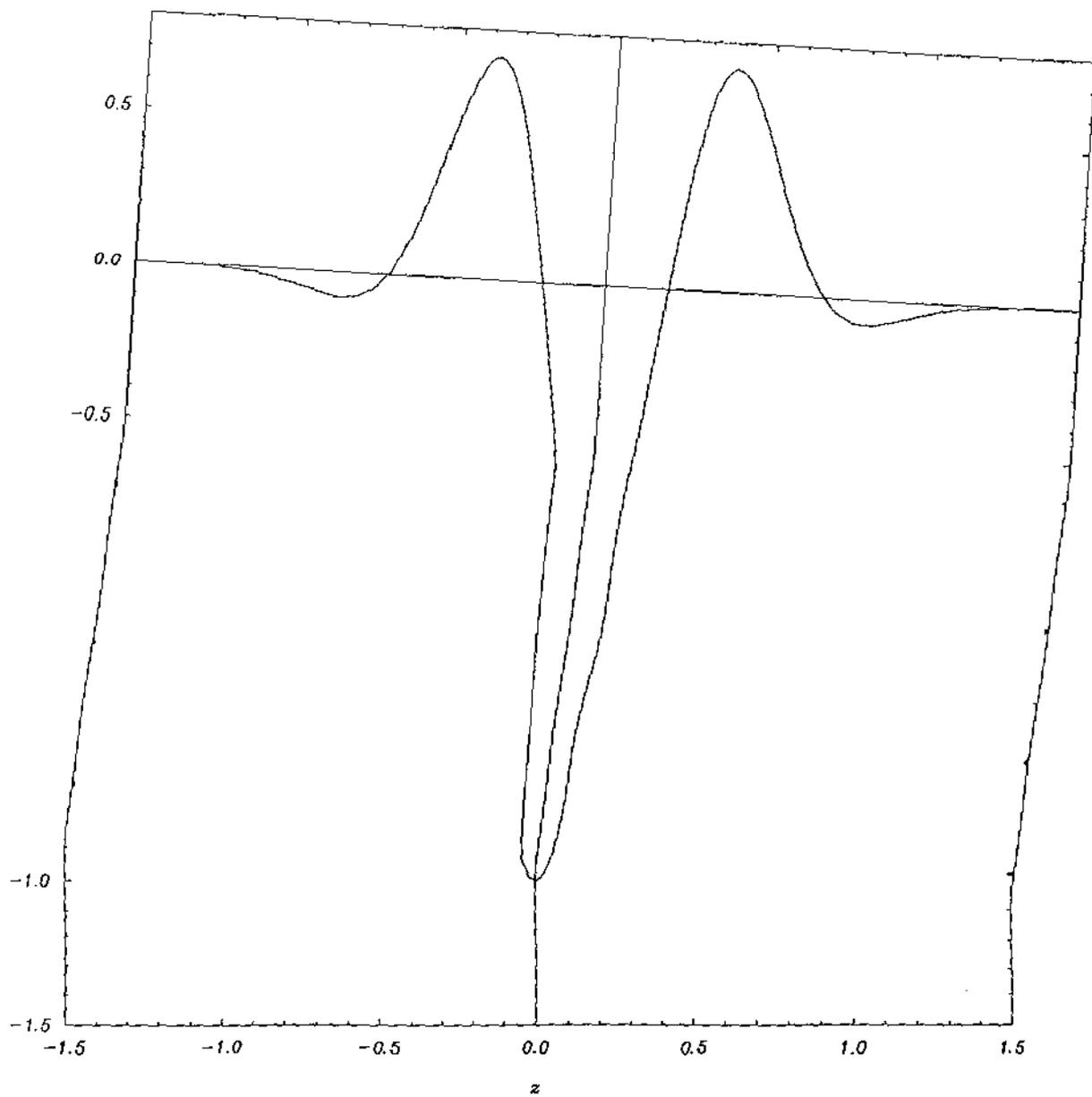


Fig. 45. Tipo de "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, t]$ para $0 < t < 0.12$ e $t > 0.59$. A figura acima mostra a "onda" em $t = 1.2$.

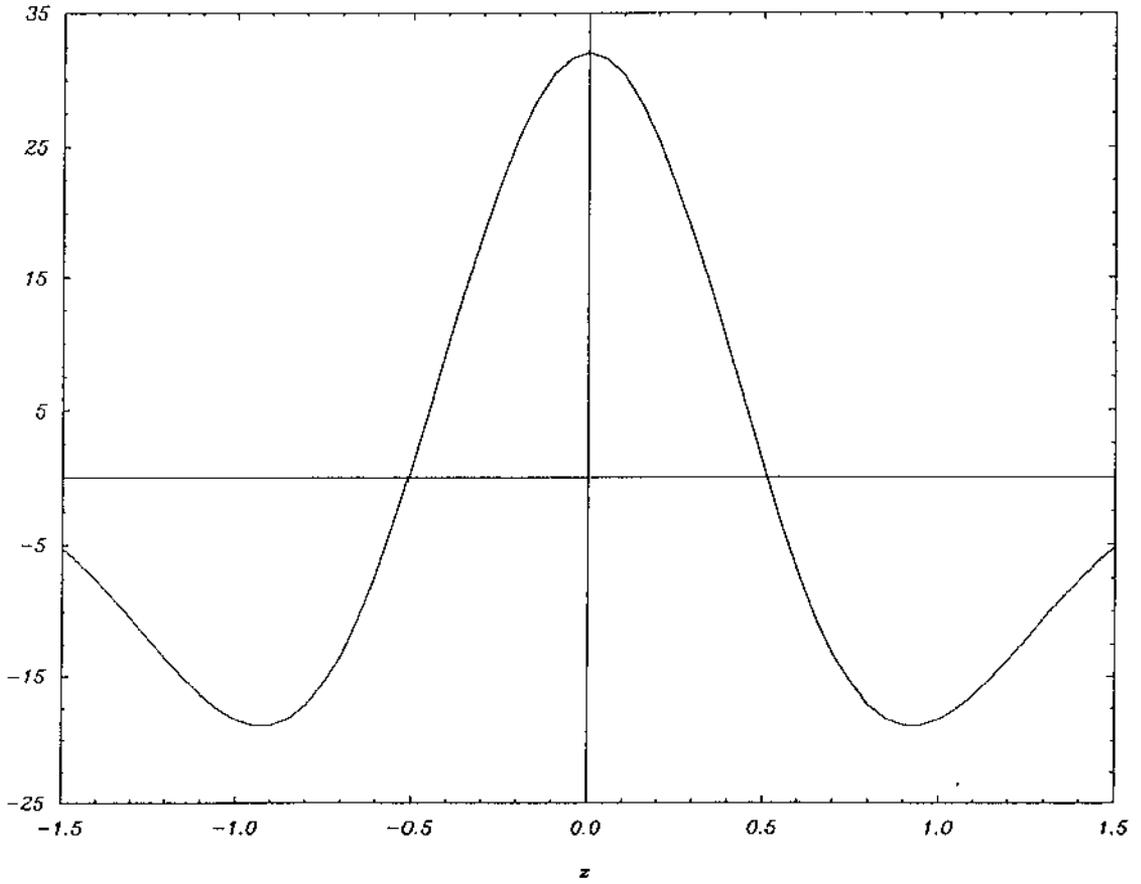


Fig.46. Tipo de "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, t]$ para $0.12 < t < 0.505$.
 A figura acima mostra parcialmente a "onda" em $t = 0.3$.

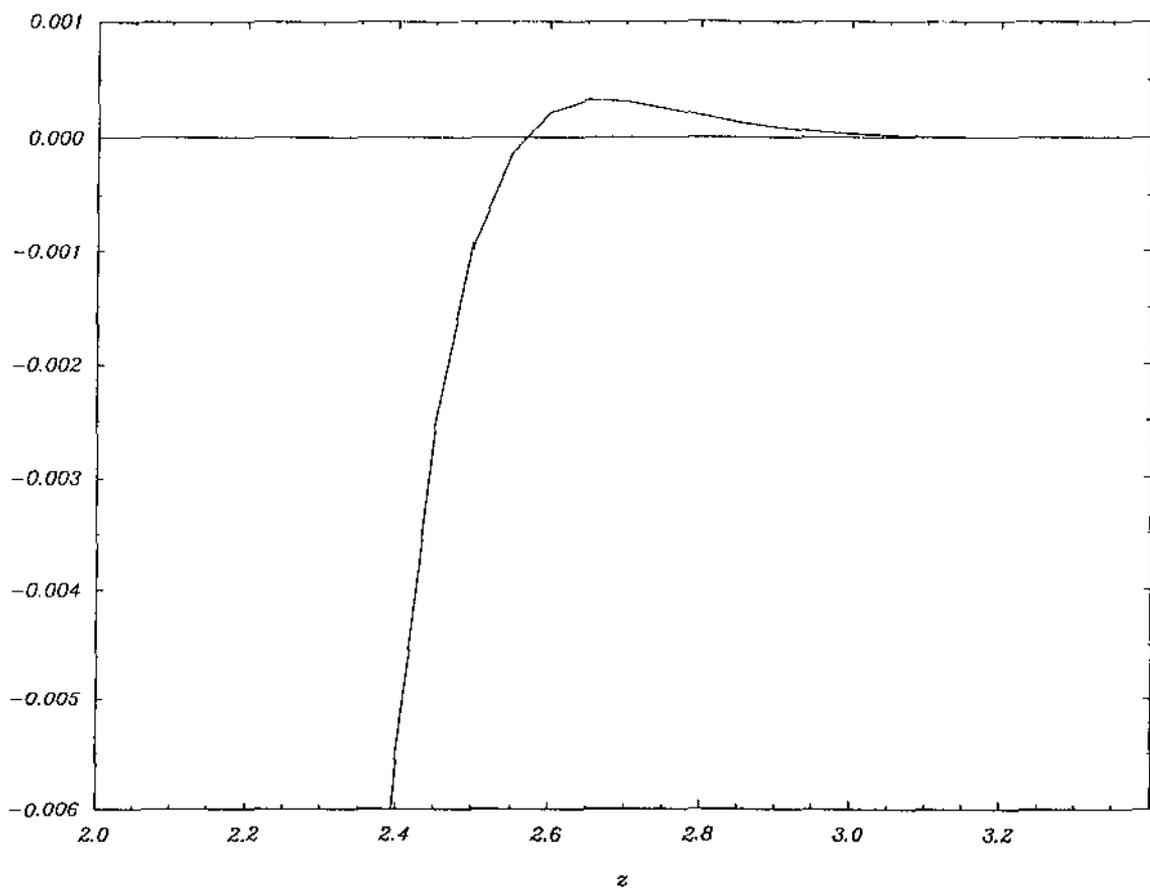


Fig.47. Esse gráfico mostra um pico da "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, 0.3]$.

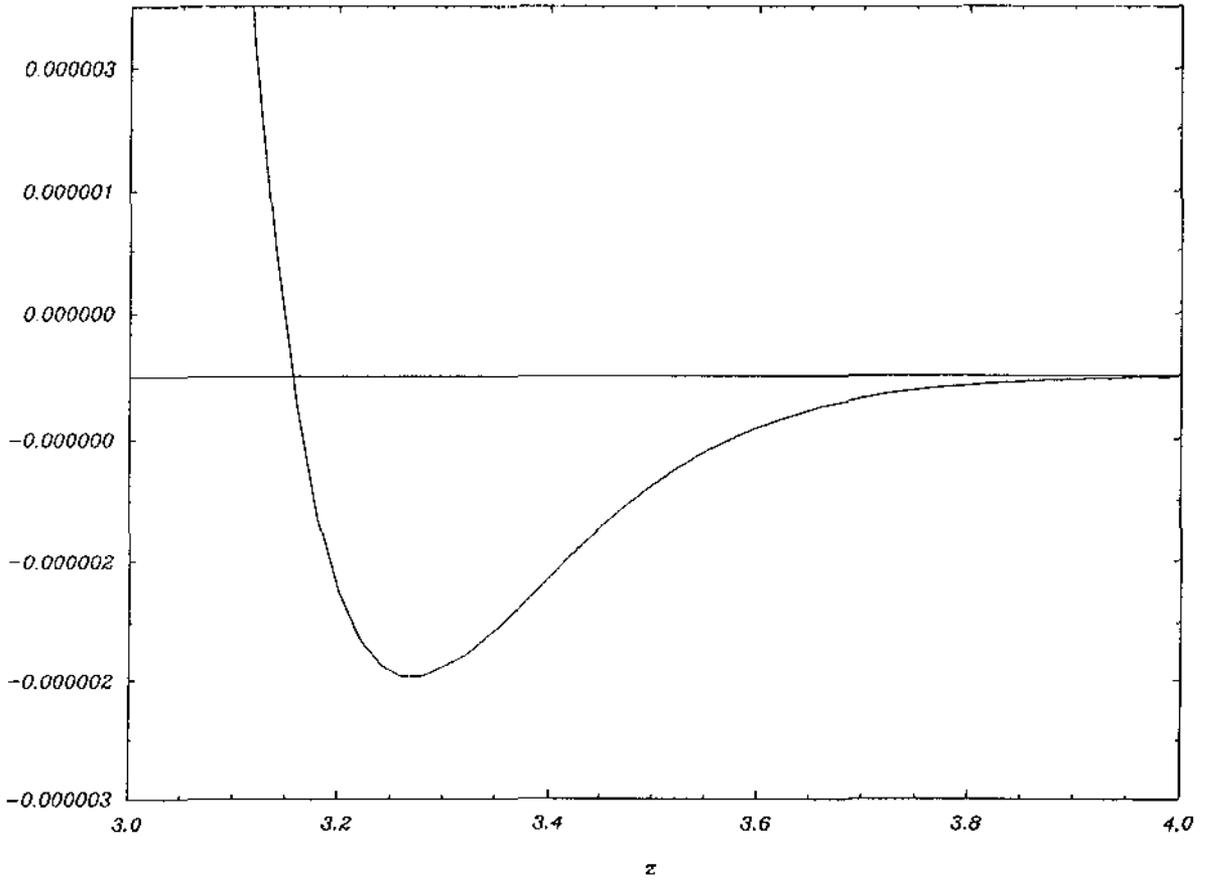


Fig. 48. Esse gráfico mostra uma depressão da "onda" correspondente a $J_{52}[1.1/2, z, 0.3]$.

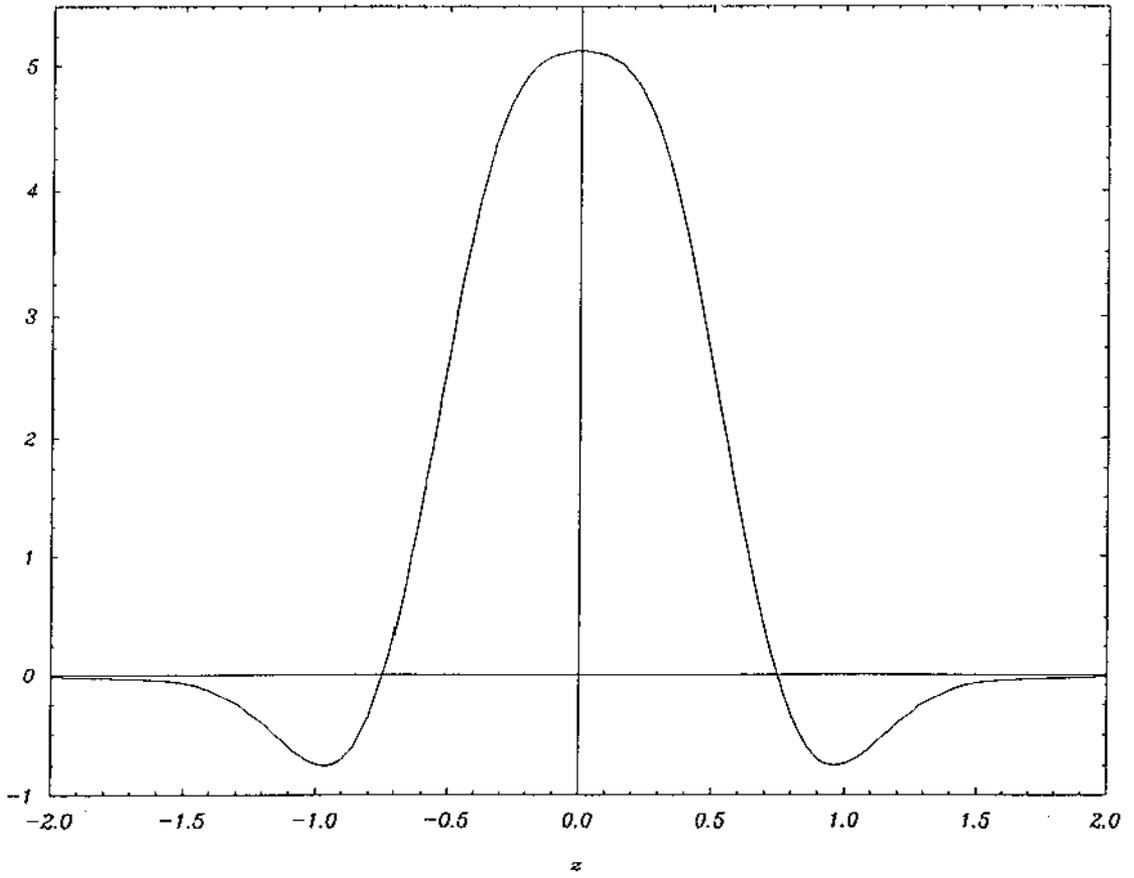


Fig.49. Tipo de "onda" correspondente a $J_{5/2}[1, 1/2, z, t]$ para $0.505 < t < 0.59$.
A figura acima mostra a "onda" em $t = 0.58$.

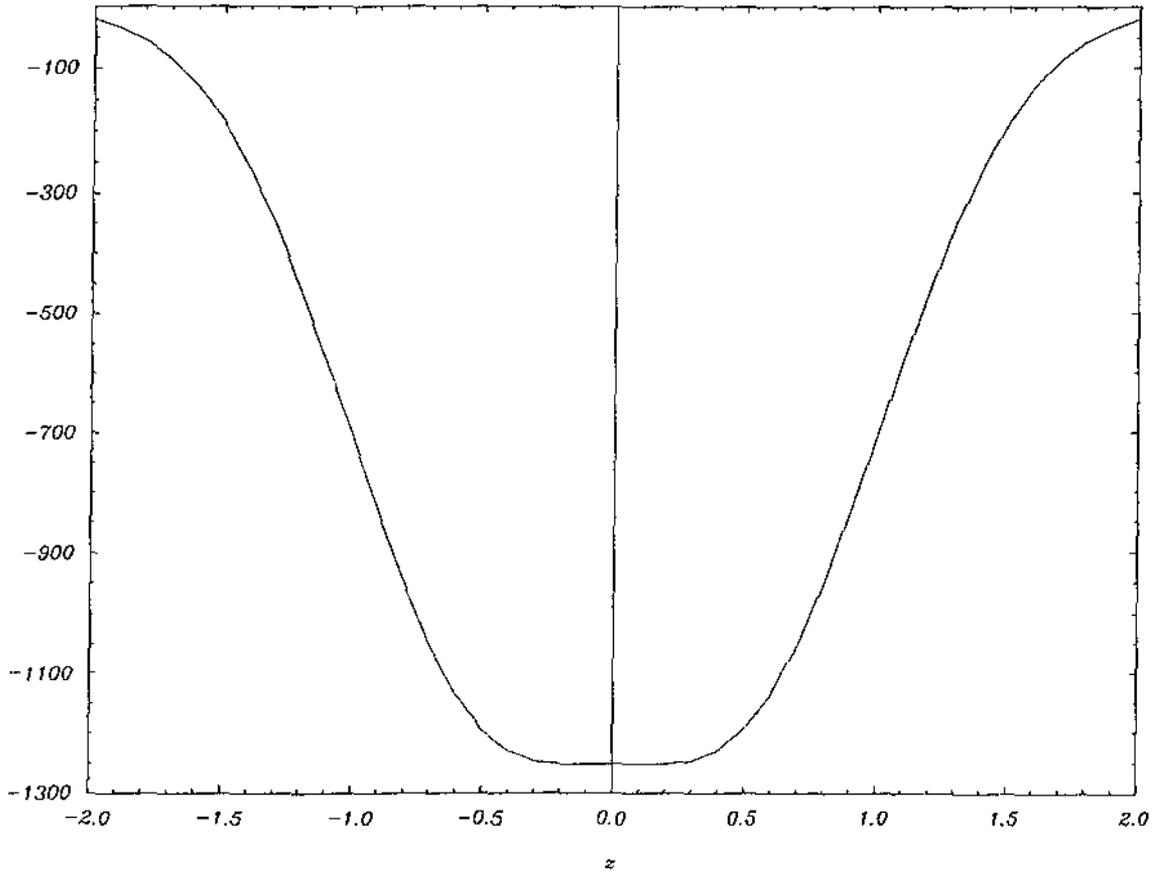


Fig.50. Essa figura mostra a "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, 0.12]$.

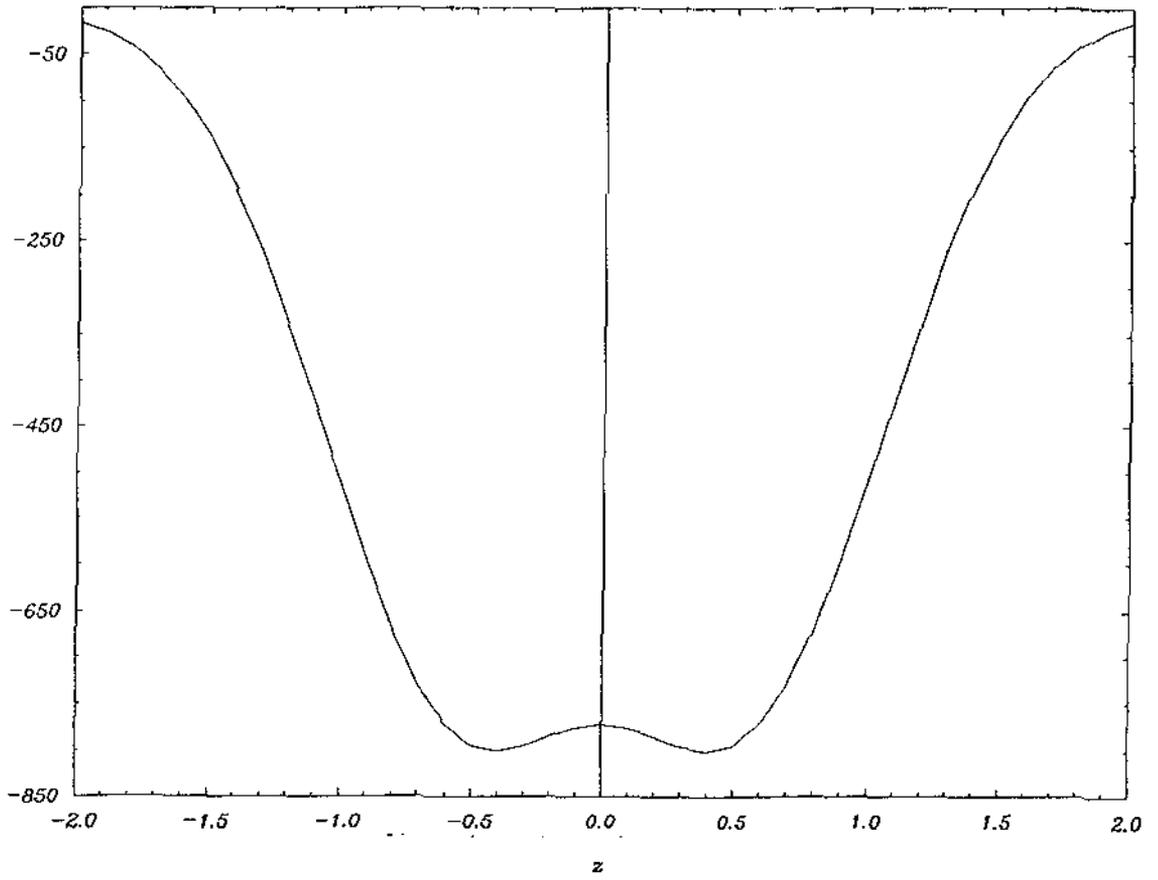


Fig. 51. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, 0.13]$.

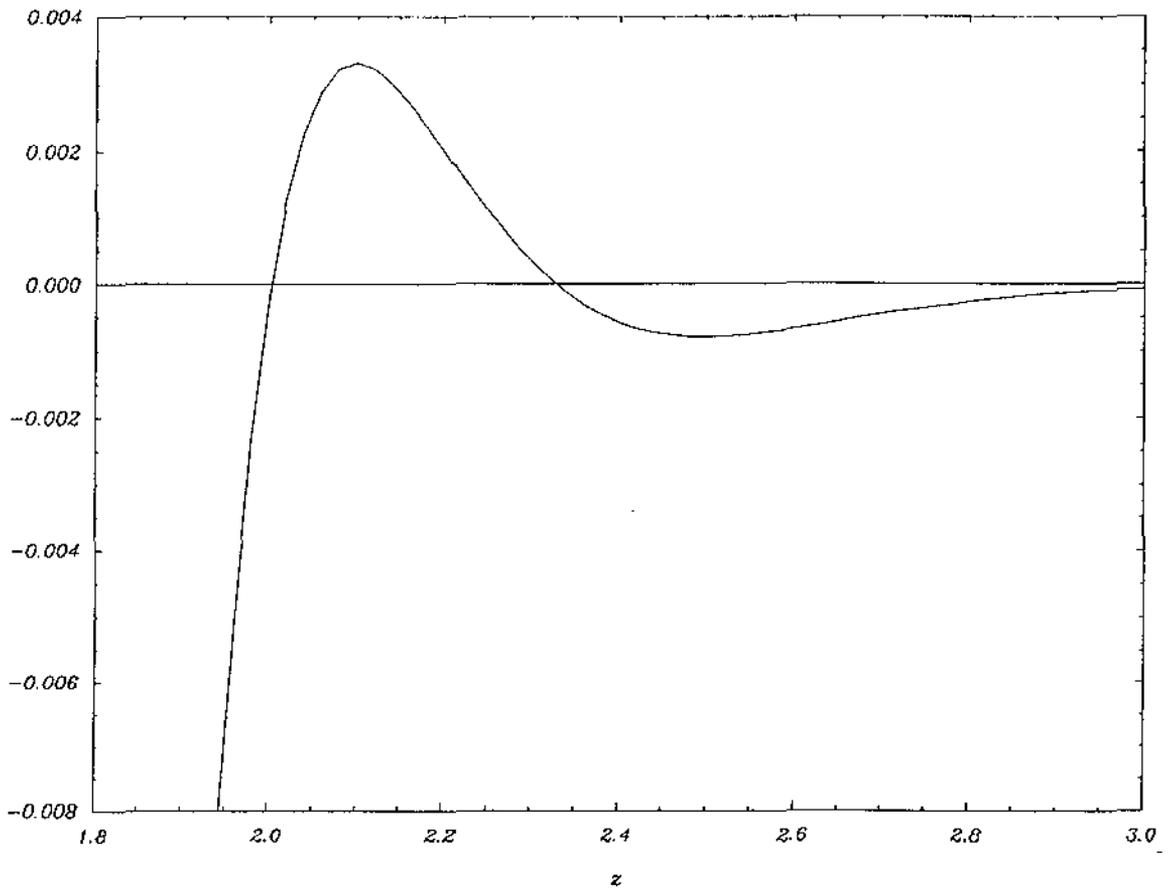


Fig.52. A figura acima mostra parcialmente a "onda" correspondente a $J_{5/2}[1, 1/2, z, 0.4]$.

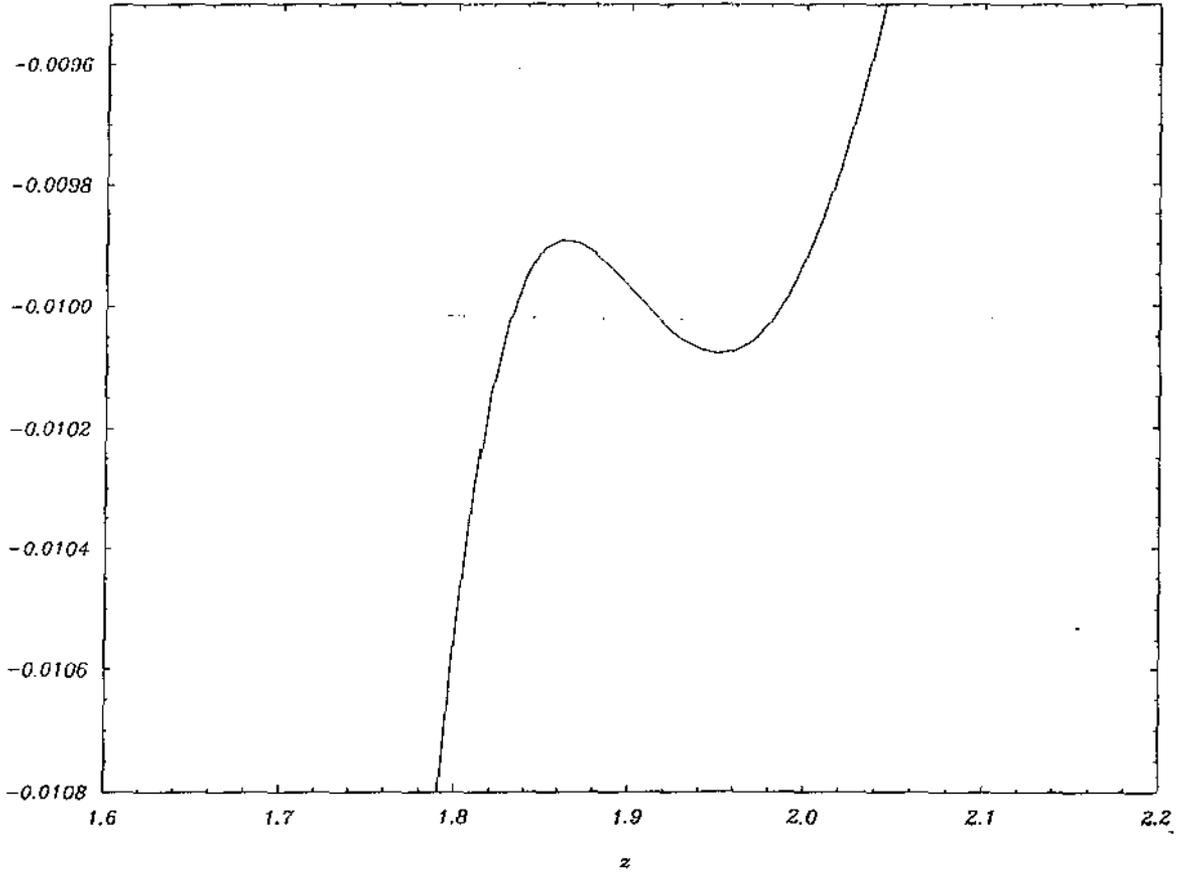


Fig.53. Esse gráfico mostra uma pequena parte da "onda" correspondente a $J_{52}[1, 1/2, z, 0.5]$. Vemos nessa figura um pico e uma depressão próximos do ponto de encontro.

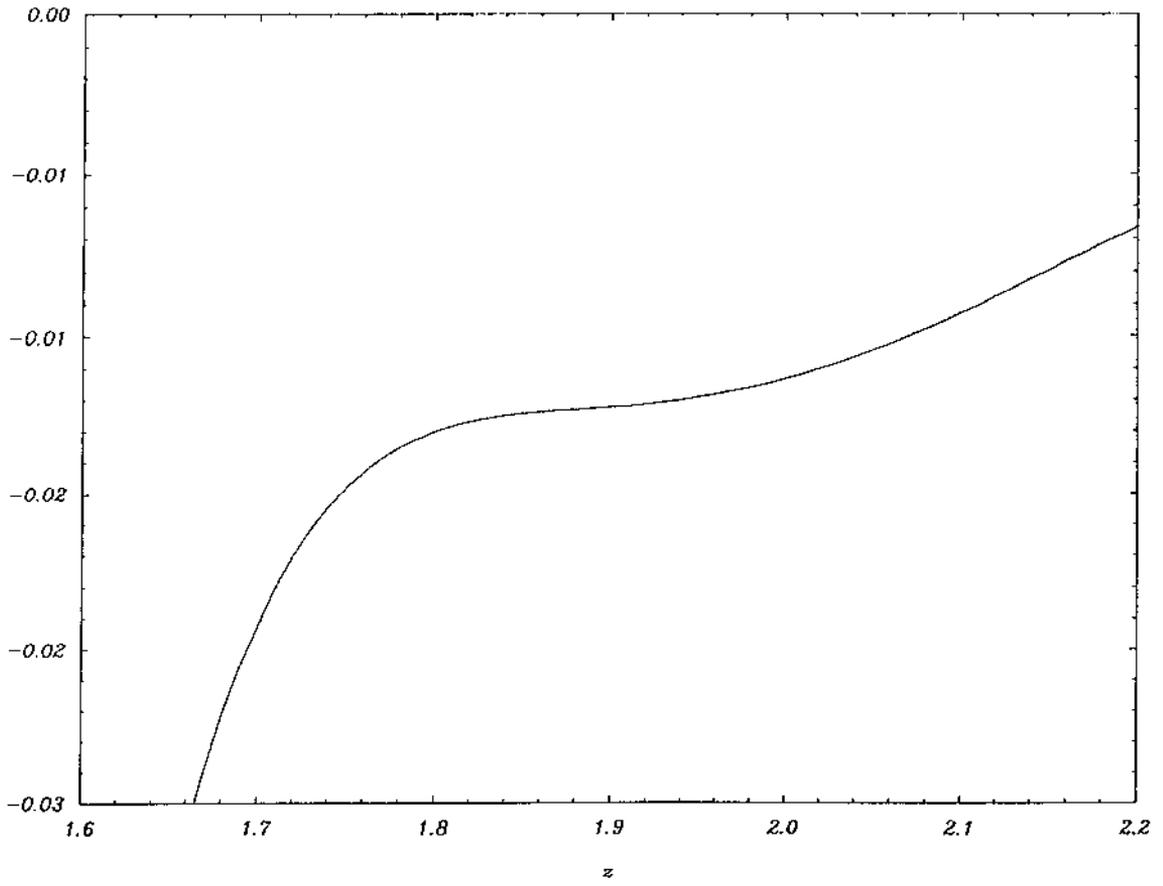


Fig.54. Esse gráfico mostra parcialmente a "onda" correspondente a $J_{52}[1,1/2,z,0.51]$.

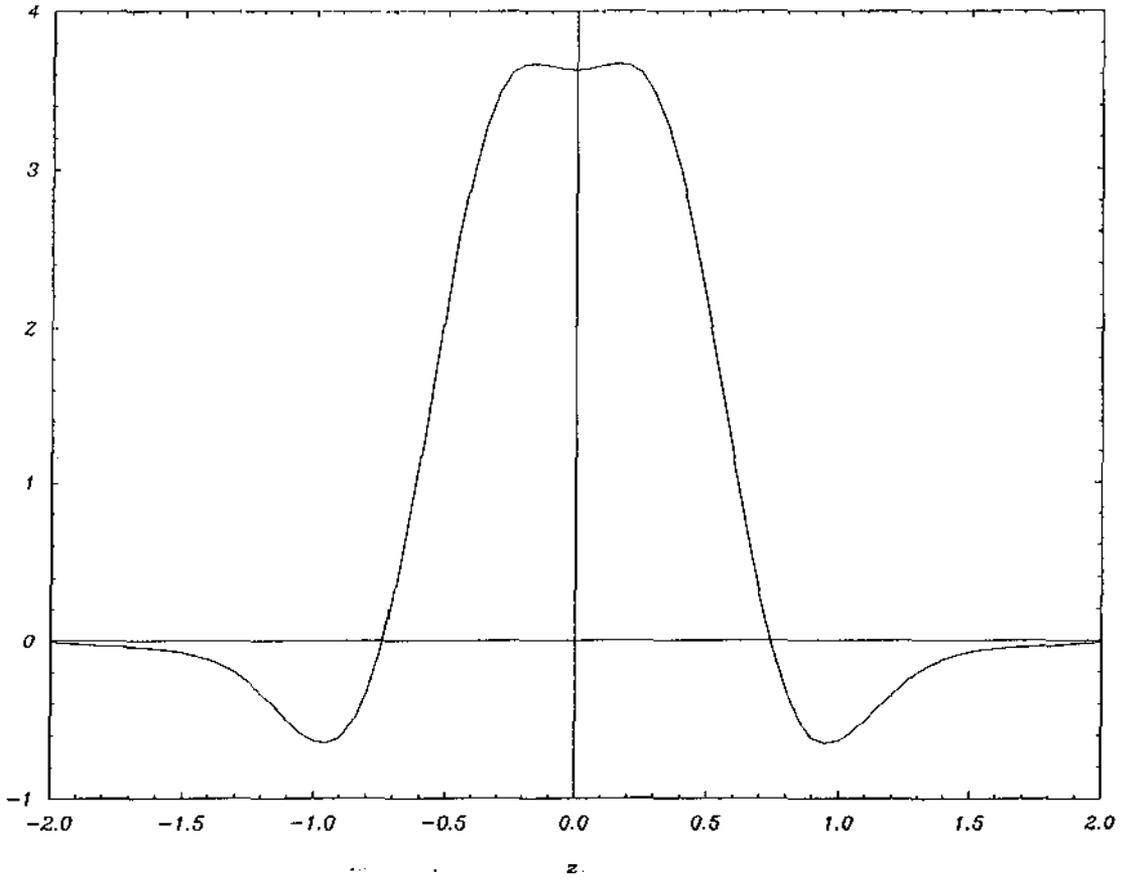


Fig.55. A figura acima mostra a "onda" correspondente a $J_{52}[1,1/2,z,0.61]$. Neste gráfico observamos a quebra do pico em uma depressão e dois picos.

IX. ENERGIA C

Uma das principais questões ainda pendentes em Relatividade Geral é encontrar uma noção satisfatória para a densidade de energia do campo gravitacional.

A "energia C" é uma proposta de densidade de energia para sistemas que apresentam simetria axial a qual vamos analisar no contexto do presente trabalho.

Apresentamos essa quantidade, seguindo inicialmente os passos de Kip S. Thorne [16]. A métrica para sistemas desse tipo pode ser escrita na forma

$$ds^2 = e^{2(\gamma^* - \psi^*)} (dt^{*2} - dr^{*2}) - e^{2\psi^*} dz^2 - \alpha^2 e^{-2\psi^*} d\varphi^2, \quad (9.1)$$

onde as coordenadas (t^*, r^*, z, φ) são chamadas coordenadas padrão, e α , γ^* , ψ^* , são funções de r^* e t^* .

Para a métrica (9.1) a função potencial (ou função densidade) da energia C é dada por

$$4GE(r^*, t^*) \equiv \gamma^* - (1/2) \ln \{ |(\partial\alpha/\partial r^*)^2 - (\partial\alpha/\partial t^*)^2| \}, \quad (9.2)$$

onde G é a constante gravitacional.

O vetor fluxo da energia C é dado por :

$$P^{0*} = \frac{1}{h_z} \frac{e^{2(\psi^* - \gamma^*)}}{2\pi\alpha} \frac{\partial E}{\partial r^*}, \quad (9.3)$$

$$P^{r*} = - \frac{1}{h_z} \frac{e^{2(\psi^* - \gamma^*)}}{2\pi\alpha} \frac{\partial E}{\partial t^*}, \quad (9.4)$$

$$P^z = P^\varphi = 0. \quad (9.5)$$

onde h_z é um fator de escala (que não deve ser confundido com a notação

de derivada $h_{,z}$).

Vamos passar agora ao contexto do presente trabalho.

Inicialmente mudamos a notação para as coordenadas de acordo com

$$(t^*, r^*, z, \phi) \longrightarrow (t, z, y, x) . \quad (9.6)$$

Sejam ψ^* , $2(\gamma^* - \psi^*)$ e α dados, nas novas coordenadas, por:

$$2\psi^* = -\phi + \ln t^{(-p+1)} , \quad (9.7)$$

$$2(\gamma^* - \psi^*) = (1/2) \ln t^{(p^2-1)} + (w + p\phi) , \quad (9.8)$$

$$\alpha = t . \quad (9.9)$$

onde p é um parâmetro real, $\phi = \phi(z,t)$ e $w = w(z,t)$.

Substituindo-se (9.6)-(9.9) em (9.1) teremos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\ln t^{(p^2-1)/2} + w + p\phi} (dt^2 - dz^2) - e^{-\phi} e^{\ln t^{(-p+1)}} dy^2 \\ &- t^2 e^{\phi} e^{-\ln t^{(-p+1)}} dx^2 = t^{(p^2-1)/2} e^{(w+p\phi)} (dt^2 - dz^2) - \\ &t (t^p e^{\phi} dx^2 + t^{-p} e^{-\phi} dy^2), \end{aligned} \quad (9.10)$$

que é exatamente a métrica (4.1).

Aplicando a definição (9.2) para a métrica (9.10) (em unidades nas quais $G = 1$) obteremos:

$$\begin{aligned} 4E(z,t) &= (\ln t^{(p^2-1)/2} + w + p\phi)/2 - \phi/2 + ((-p+1)\ln t)/2 \\ &- \ln | -1|^{1/2} = (p^2/4 - p/2 + 1/4) \ln t + (w + p\phi - \phi)/2 . \end{aligned}$$

Portanto,

$$E(z,t) = (1/8) [(p^2/2 - p + 1/2) \ln t + w + p \phi - \phi] , \quad (9.11)$$

é a função potencial para a energia C no caso em consideração.

Para darmos um exemplo da função potencial neste trabalho, vamos analisar o caso onde $\phi = L_2$ e $p = 1/2$, extensamente estudado no capítulo anterior.

$$E(z,t) = (1/8) [(1/8) \ln t - t^2/4 + t^2/8 + z^2 (-1/2 + t^2)] . \quad (9.12)$$

Vemos que $E(z,t_0)$ é uma função de segundo grau em z , e portanto não limitada em \mathbb{R} . Isso não é interessante, pois conduzirá a quantidades infinitas de energia. Portanto, devemos abandonar essa definição.

Podemos tentar redefinir E , na tentativa de obter uma densidade de energia limitada.

Uma possível redefinição [16] é dada por

$$\tilde{E} = (1/8) (1 - e^{-8E}).$$

No nosso caso, infelizmente, essa redefinição de E também apresenta sérios problemas: se $t_0 < 1/\sqrt{2}$ então

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{E}(z,t_0) = -\infty .$$

Em [7] define-se a C - velocidade, a qual pensávamos utilizar nas nossas análises dos movimentos de picos e depressões das "ondas".

Naquele artigo usa - se a métrica

$$ds^2 = f(t,\rho) (d\rho^2 - dt^2) + \rho (e^{\phi(t,\rho)} d\varphi^2 + e^{-\phi(t,\rho)} dz^2) , \quad (9.13)$$

onde:

$$\phi_{,\rho\rho} + \rho^{-1}\phi_{,\rho} - \phi_{,tt} = 0,$$

$$(\ln f)_{,t} = \rho \phi_{,t} \phi_{,\rho}$$

$$(\ln f)_{,\rho} = - (2 \rho)^{-1} + (\rho/2) [(\phi_{,\rho})^2 + (\phi_{,t})^2]$$

A função potencial para a energia C e o vetor fluxo contravariante da energia C são então definidos por:

$$2E(\rho,t) = \ln f + \ln \rho - \phi, \quad (9.14)$$

$$(P^t, P^\rho) \equiv (8 \pi \rho f)^{-1} (E_{,\rho}, -E_{,t}). \quad (9.15)$$

Como o vetor (9.15) tem o quadrado da norma negativo na métrica (9.13), pode - se definir a quadrivelocidade

$$u^\mu = P^\mu / (-P^\beta P_\beta)^{1/2}. \quad (9.16)$$

A C - velocidade de um observador com quadrivelocidade u^μ é definida como sendo sua trivelocidade coordenada, dada por

$$v^\rho = u^\rho / u^t = - 2 \psi_{,\rho} \psi_{,t} [(\psi_{,\rho})^2 + (\psi_{,t})^2]^{-1}. \quad (9.17)$$

As duas definições apresentadas para a energia C, quando aplicadas à métrica (9.10) com ϕ dado por (3.16), apresentam um segundo problema. Para esse caso, o vetor fluxo só teria sentido físico se tivesse norma quadrada estritamente positiva, uma vez que (9.10) tem assinatura (+ - - -). Os cálculos abaixo mostram que a aplicação das definições acima para a energia C é dificultada pelo fato do vetor fluxo ter norma quadrada negativa para ambas.

Se usarmos a primeira definição para a energia C teremos:

$$P^t(p,z,t) = \frac{A(z,t)}{8} \left[p \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] =$$

$$\frac{A(z,t)}{8} \left[(p-1) \frac{\partial \phi}{\partial z} + t \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right],$$

$$P^z(p,z,t) = \frac{A(z,t)}{8} \left[-\frac{\partial w}{\partial t} - p \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{t} \left(\frac{p^2}{2} - p + \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{A(z,t)}{8} \left[(1-p) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{(p-1)^2}{2t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right];$$

onde

$$A(z,t) = \frac{1}{h_z} \frac{e^{z(\psi^* - \gamma^*)}}{2\pi\alpha}.$$

Portanto,

$$||P^t, P^z||^2 = (A(z,t)/8)^2 t^{(p^2-1)/2} e^{(w+p\phi)} \left[\left(P^t \right)^2 - \left(P^z \right)^2 \right] =$$

$$= - \frac{(A(z,t))^2}{256 t^2} t^{(p^2-1)/2} e^{(w+p\phi)} \left[-(p-1)^2 + 2t(1-p) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \right.$$

$$\left. t^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right]^2 \leq 0 \text{ sempre}$$

Para a segunda definição da energia C teríamos o fluxo, na forma geral, dado por:

$$\tilde{P}^t = A(z,t) e^{-8E} \frac{\partial E}{\partial z},$$

$$\tilde{P}^z = -A(z,t) e^{-8E} \frac{\partial E}{\partial t},$$

onde E corresponde à primeira definição da energia C. Portanto, em nosso caso teremos :

$$\begin{aligned} \left| \left| (\tilde{P}^t, \tilde{P}^z) \right| \right|^2 &= \left(e^{-16E} t^{(p^2 - 1)/2} e^{(w + p\phi)} \right) \left(\left(A(z,t) \frac{\partial E}{\partial z} \right)^2 - \left(A(z,t) \frac{\partial E}{\partial t} \right)^2 \right) \\ &= e^{-16E} \left(t^{(p^2 - 1)/2} e^{(w + p\phi)} \right) \left| \left| (P^t, P^z) \right| \right|^2 \leq 0 \text{ sempre,} \end{aligned}$$

de acordo com os cálculos acima.

X. CONCLUSÃO

Dentre as componentes tetrádicas não nulas do tensor curvatura pudemos escolher 3 independentes e gerar todas as outras através das relações lineares 4.15-4.19 e das relações de simetria do tensor. Assim, foi possível expressar os dois invariantes de curvatura não nulos, (2.2.1) e (2.2.2), como funções das componentes tetrádicas independentes escolhidas.

Das análises do Capítulo 5 obtivemos que as soluções de (5.1.1) para $q = 1$ têm comportamento, no limite $t \rightarrow +\infty$, independente de p para $n=2,4$. Para n ímpar o comportamento das soluções neste limite não é mais independente de p , embora em todos os casos estudados encontramos soluções com limite zero para $t \rightarrow +\infty$.

No limite $t \rightarrow 0$ o comportamento das soluções é bem diversificado, tanto para n par como para n ímpar, como pode ser observado tanto pelos resultados do Capítulo 5 como pelos diagramas do Capítulo 6.

De acordo com os resultados do Apêndice A, as conclusões acima para as soluções de (5.1.1) com $q = 1$ são válidas para todo $q > 0$.

No Capítulo 3 definimos sólitons como sendo pulsos que se propagam com velocidade e forma constantes, mantendo essa forma e velocidade após colisões.

Seria natural perguntarmo-nos sobre a possibilidade de encontrarmos sólitons em nosso modelo.

Pela definição de sólitons, para termos comportamento solitônico precisaríamos encontrar picos ou depressões que colidissem e cujas formas e velocidades coordenadas continuassem as mesmas antes e depois da colisão. Este fato não foi observado para nenhum dos diagramas graficados.

Como não temos recursos para lidar com a equação (5.1.1) para p genérico e valores não assintóticos de t não conseguimos dar uma resposta completa a essa questão.

No Capítulo 8 analisamos em detalhes a função $J_{12}(1,1/2,z,t)$ nas proximidades do ponto de ramificação $t = 0.31$ encontrado no Diagrama 3. Observamos que nesse instante ocorre a quebra de um pico em uma

depressão e dois picos. O tridente observado no diagrama 3 ajuda a caracterizar esse comportamento, sendo desconhecido por nós um resultado análogo na literatura.

No ponto de ramificação $t = 1.798$, encontrado no Diagrama 7, observamos duas depressões e um pico atingindo um ponto comum e fundindo-se em uma única depressão. Para o Diagrama 11, o ponto de ramificação $t = 1/\sqrt{2}$ é o instante em que um pico e uma depressão terminam em um ponto de inflexão.

Em todos os diagramas estudados no Capítulo 8 observamos que os pontos de ramificação encontrados são instantes onde ocorre uma mudança brusca do número de soluções da equação polinomial correspondente, ou seja, o número de soluções aumenta ou diminui após o ponto de ramificação. Não podemos fazer deste fato uma regra, e uma prova disto pode ser dada pela equação

$$(z^2 + t^2 - 4).(z^2 + t^2 - 6t + 8) = 0,$$

embora esta não apareça no presente trabalho. Neste caso, $t = 2$ é um ponto de ramificação, mas o número de soluções nas vizinhanças deste ponto não se altera.

A simetria em relação ao eixo t é uma propriedade dos diagramas de D_{1p}^{12} , D_{1p}^{14} , $i = 1, 2, 3$, que se reflete nos diagramas de D_{1p}^{42} e D_{1p}^{52} .

O mesmo é válido para a ocorrência da solução $z(t) = 0$ em D_{1p}^{12} e D_{1p}^{14} , $i = 1, 2$.

As definições da energia C não se aplicam para os casos estudados neste trabalho, pois conduzem a densidades de energia não limitadas e vetores de fluxos com norma quadrada negativa, de acordo com as análises do Capítulo 9.

Não foram encontradas propriedades dos diagramas que pudessem ser associadas aos sinais dos expoentes de Kasner; um contra-exemplo foi exibido no Capítulo 7.

Além do tridente no diagrama 3, outro resultado novo são as curvas fechadas, como por exemplo a encontrada no diagrama 9 (Capítulo 6). Esta curva representa o movimento de um pico e uma depressão que partem de um ponto de ramificação e terminam num outro ponto de ramificação instantes depois.

APÊNDICE A

Influência do parâmetro q no comportamento das soluções de (4.28).

a) Se $q > 0$ então

$$L_n \left(q^{1/n} z, q^{1/n} t \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! (k!)^2 2^{2k}} q^{(n-2k)/n} z^{(n-2k)} q^{2k/n} t^{2k}$$

$$= q \left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! (k!)^2 2^{2k}} z^{(n-2k)} t^{2k} \right] = q L_n(z, t).$$

(A.1)

Assim, se fizermos $\phi = q L_n(z, t)$ em (4.7) com $q > 0$ e usarmos (4.14) e (A.1) teremos:

$$\int \frac{t}{2} \left[\phi_{,z}^2 + \phi_{,t}^2 \right] dt + t \phi_{,z} \phi_{,t} dz = q^2 w_n(z, t) =$$

$$= \int \frac{t}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \left[L_n \left(q^{1/n} z, q^{1/n} t \right) \right] \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[L_n \left(q^{1/n} z, q^{1/n} t \right) \right] \right)^2 \right] dt +$$

$$t \frac{\partial}{\partial z} \left[L_n \left(q^{1/n} z, q^{1/n} t \right) \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[L_n \left(q^{1/n} z, q^{1/n} t \right) \right] dz.$$

Se $\xi = q^{1/n} z$ e $\zeta = q^{1/n} t$, então:

$$q^2 w_n(z, t) = \int_c \frac{t q^{1/n}}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} L_n(\xi, \zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_n(\xi, \zeta) \right)^2 \right] d(q^{1/n} t)$$

$$\begin{aligned}
& + q^{1/n} t \left(\frac{\partial}{\partial \xi} L_n (\xi, \zeta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_n (\xi, \zeta) \right) d(q^{1/n} z) = \\
& = \int_c \frac{\zeta}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} L_n (\xi, \zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_n (\xi, \zeta) \right)^2 \right] d\zeta + \\
& + \zeta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} L_n (\xi, \zeta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_n (\xi, \zeta) \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto

$$q^2 w_n (z, t) = w_n (q^{1/n} z, q^{1/n} t) = w_n (\xi, \zeta). \quad (\text{A.2})$$

Usando os resultados acima podemos escrever I_1 na forma :

$$\begin{aligned}
& I_1 [q, p, z, t, L_n (z, t), w_n (z, t)] = \\
& = \frac{1}{8 t^{(p^2 + 3)/2} e^{w_n (\xi, \zeta) + p L_n (\xi, \zeta)}} \left[2 t^2 q^{2/n} \left(L_n (\xi, \zeta), \xi \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2 t^2 q^{2/n} \left(L_n (\xi, \zeta), \zeta \right)^2 - 4 t p q^{1/n} L_n (\xi, \zeta), \zeta - 2 p^2 + 2 \right] = \\
& = \frac{1}{8 \zeta^{(p^2 + 3)/2} q^{-(p^2 + 3)/2n} e^{w_n (\xi, \zeta) + p L_n (\xi, \zeta)}} \left[2 \zeta^2 \left(L_n (\xi, \zeta), \xi \right)^2 - \right. \\
& \left. 2 \zeta \left(L_n (\xi, \zeta), \zeta \right)^2 - 4 \zeta p L_n (\xi, \zeta), \zeta - 2 p^2 + 2 \right] =
\end{aligned}$$

$$= I_1 \left[1, p, \xi, \zeta, L_n(\xi, \zeta), w_n(\xi, \zeta) \right] q^{(p^2 + 3)/2n}. \quad (\text{A.3})$$

Procedendo analogamente para I_2 e I_3 , encontraremos

$$I_2 \left[q, p, z, t, L_n(z, t), w_n(z, t) \right] = I_2 \left[1, p, \xi, \zeta, L_n(\xi, \zeta), w_n(\xi, \zeta) \right] q^{(p^2 + 3)/2n}, \quad (\text{A.4})$$

$$I_3 \left[q, p, z, t, L_n(z, t), w_n(z, t) \right] = I_3 \left[1, p, \xi, \zeta, L_n(\xi, \zeta), w_n(\xi, \zeta) \right] q^{(p^2 + 3)/2n}. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, a introdução do parâmetro q , se $q > 0$, reflete-se em I_1 , I_2 e I_3 apenas como um fator de escala.

b) Se $q < 0$ e n ímpar então $q L_n(z, t) = L_n(q^{1/n} z, q^{1/n} t)$ e

$$q^2 w_n(z, t) = w_n(q^{1/n} z, q^{1/n} t),$$

logo,

$$I_1[q, p, z, t, L_n(z, t), w_n(z, t)] = \frac{1}{q^{(p^2 + 3)/2} e^{w_n(\xi, \zeta) + p L_n(\xi, \zeta)}} \left[2 \zeta^2 \left(L_n(\xi, \zeta), \xi \right)^2 - 2 \zeta^2 \left(L_n(\xi, \zeta), \zeta \right)^2 - 4 \zeta p L_n(\xi, \zeta), \zeta - 2 p^2 + 2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

A última expressão pode ser colocada na forma (A-3), com $\zeta < 0$, o que não trará nenhuma mudança qualitativa nos diagramas correspondentes aos casos estudados. Resultado análogo pode ser encontrado para I_2 , I_3 , R_1 e R_2 .

Se $q < 0$ e n par a situação é mais complicada. As variáveis ξ e ζ tornam-se complexas observando-se mudanças significativas nos diagramas quando substituímos q por $-q$.

APÊNDICE B

Polinômios $P_{in}(1,p,z,t)$.

Os polinômios abaixo são tais que:

$$\frac{\partial J_{in}(1,p,z,t)}{\partial z} = 0 \quad \text{se e somente se } P_{in}(1,p,z,t) = 0.$$

$$P_{11}(1,p,z,t) = p(2 - 2p^2 + 2t^2)$$

$$P_{21}(1,p,z,t) = p(1 + p - p^2 - p^3 + (1 - 3p)t^2)$$

$$P_{31}(1,p,z,t) = p(-3 + 3p^2 + t^2)$$

$$P_{12}(1,p,z,t) = (-p + p^3 + 3t^2 + 3p^2t^2 + 3pt^4 + t^6)z + (-4pt^2 - 4t^4)z^3$$

$$P_{22}(1,p,z,t) =$$

$$(-p - p^2 + p^3 + p^4 + 3t^2 - 22pt^2 + 3p^2t^2 + 4p^3t^2 - 21t^4 + 3pt^4 +$$

$$6p^2t^4 + t^6 + 4pt^6 + t^8)z +$$

$$(-4pt^2 + 12p^2t^2 - 4t^4 + 24pt^4 + 12t^6)z^3$$

$$P_{32}(1,p,z,t) =$$

$$-3t + 3p^2t + 6pt^3 + 3t^5 +$$

$$(6pt - 6p^3t + 18t^3 - 18p^2t^3 - 18pt^5 - 6t^7)z^2 +$$

$$(-8 p t^3 - 8 t^5) z^4$$

$$P_{42}(1,p,z,t) =$$

$$(-3 p + 5 p^3 - p^5 - p^7 - 9 t^2 + 11 p^2 t^2 + 5 p^4 t^2 - 7 p^6 t^2 - 153 p t^4 +$$

$$30 p^3 t^4 - 21 p^5 t^4 - 159 t^6 + 50 p^2 t^6 - 35 p^4 t^6 + 35 p t^8 -$$

$$35 p^3 t^8 + 9 t^{10} - 21 p^2 t^{10} - 7 p t^{12} - t^{14}) z +$$

$$(12 p t^2 - 24 p^3 t^2 + 12 p^5 t^2 + 156 t^4 + 168 p^2 t^4 + 60 p^4 t^4 +$$

$$408 p t^6 + 120 p^3 t^6 + 216 t^8 + 120 p^2 t^8 + 60 p t^{10} + 12 t^{12}) z^3 +$$

$$(-144 p t^4 - 48 p^3 t^4 - 240 t^6 - 144 p^2 t^6 - 144 p t^8 - 48 t^{10}) z^5 +$$

$$(64 p t^6 + 64 t^8) z^7$$

$$P_{52}(1,p,z,t) =$$

$$(3 p - 12 p^3 + 18 p^5 - 12 p^7 + 3 p^9 - 45 t^2 + 28 p^2 t^2 + 106 p^4 t^2 -$$

$$116 p^6 t^2 + 27 p^8 t^2 - 228 p t^4 + 564 p^3 t^4 - 444 p^5 t^4 + 108 p^7 t^4 -$$

$$12 t^6 + 1236 p^2 t^6 - 900 p^4 t^6 + 252 p^6 t^6 + 1114 p t^8 - 1060 p^3 t^8 +$$

$$378 p^5 t^8 + 354 t^{10} - 732 p^2 t^{10} + 378 p^4 t^{10} - 276 p t^{12} + 252 p^3 t^{12} -$$

$$44 t^{14} + 108 p^2 t^{14} + 27 p t^{16} + 3 t^{18})z$$

$$(144 p t^2 - 336 p^3 t^2 + 240 p^5 t^2 - 48 p^7 t^2 - 48 t^4 - 240 p^2 t^4 +$$

$$624 p^4 t^4 - 336 p^6 t^4 - 1776 p t^6 + 96 p^3 t^6 - 1008 p^5 t^6 - 1872 t^8 -$$

$$1056 p^2 t^8 - 1680 p^4 t^8 - 1104 p t^{10} - 1680 p^3 t^{10} - 336 t^{12} -$$

$$1008 p^2 t^{12} - 336 p t^{14} - 48 t^{16}) z^3 +$$

$$(288 p t^4 - 576 p^3 t^4 + 288 p^5 t^4 + 1056 t^6 + 1344 p^2 t^6 + 1440 p^4 t^6 +$$

$$4416 p t^8 + 2880 p^3 t^8 + 2496 t^{10} + 2880 p^2 t^{10} + 1440 p t^{12} + 288 t^{14})$$

$$z^5 + (-768 p t^6 - 768 p^3 t^6 - 1792 t^8 - 2304 p^2 t^8 - 2304 p t^{10} -$$

$$768 t^{12}) z^7 + (768 p t^8 + 768 t^{10}) z^9$$

$$P_{13}(1,p,z,t) =$$

$$20 p t^2 - 4 p^3 t^2 + 9 p t^8 + (12 t^4 - 36 p^2 t^4 + 27 t^{10}) z +$$

$$(8 p - 8 p^3 - 54 p t^6) z^2 + (-72 t^2 - 72 p^2 t^2 + 54 t^8) z^3 -$$

$$108 p t^4 z^4 + 108 t^6 z^5 + 72 p t^2 z^6 + 216 t^4 z^7$$

$$P_{23}(1,p,z,t) =$$

$$72 t^2 - 20 p t^2 - 28 p^2 t^2 + 4 p^3 t^2 + 4 p^4 t^2 - 54 t^8 - 9 p t^8 + 27 p^2 t^8 +$$

$$(-12 t^4 - 408 p t^4 + 36 p^2 t^4 + 48 p^3 t^4 - 27 t^{10} + 162 p t^{10}) z +$$

$$(-8 p - 8 p^2 + 8 p^3 + 8 p^4 - 1188 t^6 + 54 p t^6 + 378 p^2 t^6 + 243 t^{12})$$

$$z^2 + (72 t^2 - 528 p t^2 + 72 p^2 t^2 + 96 p^3 t^2 - 54 t^8 + 1404 p t^8) z^3 +$$

$$(-1728 t^4 + 108 p t^4 + 756 p^2 t^4 + 1782 t^{10}) z^4 +$$

$$(-108 t^6 + 2808 p t^6) z^5 + (-72 p t^2 + 216 p^2 t^2 + 3564 t^8) z^6 +$$

$$(-216 t^4 + 1296 p t^4) z^7 + 1944 t^6 z^8$$

$$P_{33}(1,p,z,t) =$$

$$-92 p t^5 + 12 p^3 t^5 + 9 p t^{11} +$$

$$(32 t - 32 p^2 t - 348 t^7 + 108 p^2 t^7 + 27 t^{13}) z +$$

$$(-400 p t^3 + 48 p^3 t^3 + 396 p t^9) z^2 +$$

$$(-1200 t^5 + 432 p^2 t^5 + 540 t^{11}) z^3 +$$

$$(-48 p t + 48 p^3 t + 1512 p t^7) z^4 + (-432 t^3 + 432 p^2 t^3 + 1944 t^9) z^5 +$$

$$1584 p t^5 z^6 + 2160 t^7 z^7 + 144 p t^3 z^8 + 432 t^5 z^9$$

$$P_{53}(1, p, z, t) =$$

$$117504 p t^2 - 285696 p^3 t^2 + 225792 p^5 t^2 - 64512 p^7 t^2 + 6912 p^9 t^2 +$$

$$5495040 p t^8 - 5412096 p^3 t^8 + 1306368 p^5 t^8 - 62208 p^7 t^8 +$$

$$4502304 p t^{14} - 2099520 p^3 t^{14} + 209952 p^5 t^{14} - 1154736 p t^{20} -$$

$$314928 p^3 t^{20} + 177147 p t^{26} +$$

$$(1347840 t^4 - 3898368 p^2 t^4 + 3939840 p^4 t^4 - 1575936 p^6 t^4 +$$

$$186624 p^8 t^4 + 11757312 t^{10} - 39750912 p^2 t^{10} + 17356032 p^4 t^{10} -$$

$$1306368 p^6 t^{10} + 17426016 t^{16} - 12177216 p^2 t^{16} + 3149280 p^4 t^{16} -$$

$$4723920 t^{22} - 2834352 p^2 t^{22} + 531441 t^{28}) z +$$

$$(13824 p - 55296 p^3 + 82944 p^5 - 55296 p^7 + 13824 p^9 - 16547328 p t^6 +$$

$$17044992 p^3 t^6 - 10326528 p^5 t^6 + 1866240 p^7 t^6 - 90279360 p t^{12} +$$

$$\begin{aligned}
& 73063296 p^3 t^{12} - 9657792 p^5 t^{12} - 30862944 p t^{18} + 14486688 p^3 t^{18} - \\
& 5314410 p t^{24}) z^2 + (-622080 t^2 + 387072 p^2 t^2 + 1465344 p^4 t^2 - \\
& 1603584 p^6 t^2 + 373248 p^8 t^2 - 18786816 t^8 + 43421184 p^2 t^8 - \\
& 16547328 p^4 t^8 + 7838208 p^6 t^8 - 24494400 t^{14} + 140247936 p^2 t^{14} - \\
& 27293760 p^4 t^{14} - 57316896 t^{20} + 17006112 p^2 t^{20} + 1062882 t^{26}) z^3 + \\
& (-3234816 p t^4 + 10202112 p^3 t^4 - 10699776 p^5 t^4 + 3732480 p^7 t^4 + \\
& 39750912 p t^{10} + 5598720 p^3 t^{10} + 8398080 p^5 t^{10} + 137308608 p t^{16} - \\
& 13856832 p^3 t^{16} - 8503056 p t^{22}) z^4 + \\
& (8211456 t^6 + 94804992 p^2 t^6 - 23141376 p^4 t^6 + 15676416 p^6 t^6 + \\
& 45349632 t^{12} + 10077696 p^2 t^{12} - 15116544 p^4 t^{12} - 71803584 t^{18} + \\
& 11337408 p^2 t^{18} + 8503056 t^{24}) z^5 + \\
& (1492992 p t^2 - 3483648 p^3 t^2 + 2488320 p^5 t^2 - 497664 p^7 t^2 + \\
& 160123392 p t^8 - 111227904 p^3 t^8 + 16796160 p^5 t^8 + 113374080 p t^{14} +
\end{aligned}$$

$$32752512 p^3 t^{14} - 62355744 p t^{20}) z^6 +$$

$$(-1492992 t^4 - 7464960 p^2 t^4 + 19408896 p^4 t^4 - 10450944 p^6 t^4 +$$

$$10077696 t^{10} - 436700160 p^2 t^{10} - 30233088 p^4 t^{10} - 113374080 t^{16} +$$

$$113374080 p^2 t^{16} + 17006112 t^{22}) z^7 +$$

$$(-139968000 p t^6 - 51508224 p^3 t^6 - 77262336 p^5 t^6 - 216670464 p t^{12} +$$

$$65505024 p^3 t^{12} - 119042784 p t^{18}) z^8 +$$

$$(-276576768 t^8 - 302330880 p^2 t^8 - 218350080 p^4 t^8 - 105815808 t^{14} +$$

$$226748160 p^2 t^{14} + 51018336 t^{20}) z^9 +$$

$$(6718464 p t^4 - 13436928 p^3 t^4 + 6718464 p^5 t^4 + 292253184 p t^{10} -$$

$$110854656 p^3 t^{10} - 238085568 p t^{16}) z^{10} +$$

$$(73903104 t^6 + 94058496 p^2 t^6 + 100776960 p^4 t^6 + 393030144 t^{12} +$$

$$90699264 p^2 t^{12} + 102036672 t^{18}) z^{11} +$$

$$(732312576 p t^8 + 463574016 p^3 t^8 - 498845952 p t^{14}) z^{12} +$$

$$(423263232 t^{10} + 544195584 p^2 t^{10} + 136048896 t^{16}) z^{13} +$$

$$(-40310784 p t^6 - 40310784 p^3 t^6 - 272097792 p t^{12}) z^{14} +$$

$$(-282175488 t^8 - 362797056 p^2 t^8 + 272097792 t^{14}) z^{15} -$$

$$680244480 p t^{10} z^{16} + 136048896 t^{12} z^{17} + 90699264 p t^8 z^{18} +$$

$$272097792 t^{10} z^{19}$$

$$P_{14}(1,p,z,t) =$$

$$(-120 p t^2 + 24 p^3 t^2 + 108 t^6 + 108 p^2 t^6 + 162 p t^{10} + 81 t^{14}) z +$$

$$(-16 p + 16 p^3 + 24 t^4 + 504 p^2 t^4 + 540 p t^8 - 270 t^{12}) z^3 +$$

$$(288 t^2 + 288 p^2 t^2 + 1728 p t^6 - 3240 t^{10}) z^5 +$$

$$(576 p t^4 - 4320 t^8) z^7 + (-256 p t^2 - 3840 t^6) z^9 - 1536 t^4 z^{11}$$

$$P_{24}(1,p,z,t) =$$

$$(864 t^2 - 240 p t^2 - 336 p^2 t^2 + 48 p^3 t^2 + 48 p^4 t^2 + 216 t^6 - 3888 p t^6 +$$

$$216 p^2 t^6 + 288 p^3 t^6 - 5076 t^{10} + 324 p t^{10} + 648 p^2 t^{10} + 162 t^{14} +$$

$$648 p t^{14} + 243 t^{18}) z +$$

$$(-32 p - 32 p^2 + 32 p^3 + 32 p^4 + 48 t^4 - 11808 p t^4 + 1008 p^2 t^4 +$$

$$1344 p^3 t^4 - 45288 t^8 + 1080 p t^8 + 10800 p^2 t^8 - 540 t^{12} +$$

$$23760 p t^{12} + 15714 t^{16}) z^3 +$$

$$(576 t^2 - 4224 p t^2 + 576 p^2 t^2 + 768 p^3 t^2 - 78336 t^6 + 3456 p t^6 +$$

$$24192 p^2 t^6 - 6480 t^{10} + 129600 p t^{10} + 142560 t^{14}) z^5 +$$

$$(-28800 t^4 + 1152 p t^4 + 13824 p^2 t^4 - 8640 t^8 + 207360 p t^8 +$$

$$466560 t^{12}) z^7 + (-512 p t^2 + 1536 p^2 t^2 - 7680 t^6 + 115200 p t^6 +$$

$$604800 t^{10}) z^9 + (-3072 t^4 + 18432 p t^4 + 317952 t^8) z^{11} + 55296 t^6 z^{13}$$

$$P_{34}(1,p,z,t) =$$

$$-132 t^2 + 36 p^2 t^2 + 108 p t^6 + 81 t^{10} +$$

$$(-72 + 72 p^2 + 2304 p t^4 - 216 p^3 t^4 + 4590 t^8 - 972 p^2 t^8 - 1458 p t^{12} -$$

$$729 t^{16}) z^2 + (2112 p t^2 - 288 p^3 t^2 + 18720 t^6 - 5184 p^2 t^6 -$$

$$16200 p t^{10} - 13608 t^{14}) z^4 +$$

$$(96 p - 96 p^3 + 14256 t^4 - 5616 p^2 t^4 - 46440 p t^8 - 72900 t^{12}) z^6 +$$

$$(1728 t^2 - 1728 p^2 t^2 - 43200 p t^6 - 149040 t^{10}) z^8 +$$

$$(-13440 p t^4 - 123840 t^8) z^{10} + (-512 p t^2 - 39936 t^6) z^{12} - 3072 t^4 z^{14}$$

$$P_{15}(1,p,z,t) =$$

$$17280 p t^4 - 1920 p^3 t^4 + 6750 p t^{14} +$$

$$(14400 t^8 - 43200 p^2 t^8 + 50625 t^{18}) z +$$

$$(76800 p t^2 - 15360 p^3 t^2 - 162000 p t^{12}) z^2 +$$

$$(-249600 t^6 - 403200 p^2 t^6 + 472500 t^{16}) z^3 +$$

$$(5120 p - 5120 p^3 - 2106000 p t^{10}) z^4 +$$

$$(-115200 t^4 - 576000 p^2 t^4 + 2025000 t^{14}) z^5 - 4032000 p t^8 z^6 +$$

$$(-153600 t^2 - 153600 p^2 t^2 + 13500000 t^{12}) z^7 - 3312000 p t^6 z^8 +$$

$$25080000 t^{10} z^9 - 384000 p t^4 z^{10} + 17760000 t^8 z^{11} + 128000 p t^2 z^{12} +$$

$$7360000 t^6 z^{13} + 1280000 t^4 z^{15}$$

$$P_{25}(1,p,z,t) =$$

$$-261120 t^4 + 34560 p t^4 + 49920 p^2 t^4 - 3840 p^3 t^4 - 3840 p^4 t^4 +$$

$$162000 t^{14} + 13500 p t^{14} - 40500 p^2 t^{14} +$$

$$(28800 t^8 + 1900800 p t^8 - 86400 p^2 t^8 - 115200 p^3 t^8 + 101250 t^{18} -$$

$$607500 p t^{18}) z + (-552960 t^2 + 153600 p t^2 + 215040 p^2 t^2 -$$

$$30720 p^3 t^2 - 30720 p^4 t^2 + 14688000 t^{12} - 324000 p t^{12} -$$

$$2268000 p^2 t^{12} - 2278125 t^{22}) z^2 +$$

$$(-499200 t^6 + 1420800 p t^6 - 806400 p^2 t^6 - 1075200 p^3 t^6 + 945000 t^{16} -$$

$$21870000 p t^{16}) z^3 + (10240 p + 10240 p^2 - 10240 p^3 - 10240 p^4 +$$

$$127584000 t^{10} - 4212000 p t^{10} - 21924000 p^2 t^{10} - 72900000 t^{20}) z^4 +$$

$$(-230400 t^4 + 13670400 p t^4 - 1152000 p^2 t^4 - 1536000 p^3 t^4 +$$

$$4050000 t^{14} - 218700000 p t^{14}) z^5 +$$

$$(258624000 t^8 - 8064000 p t^8 - 59328000 p^2 t^8 - 767475000 t^{18}) z^6 +$$

$$\begin{aligned}
& (-307200 t^2 + 2252800 p t^2 - 307200 p^2 t^2 - 409600 p^3 t^2 + 27000000 t^{12} - \\
& 810000000 p t^{12}) z^7 + (159360000 t^6 - 6624000 p t^6 - 49248000 p^2 t^6 - \\
& 3450600000 t^{16}) z^8 + (50160000 t^{10} - 1203360000 p t^{10}) z^9 + \\
& (26112000 t^4 - 768000 p t^4 - 13056000 p^2 t^4 - 7237800000 t^{14}) z^{10} + \\
& (35520000 t^8 - 750720000 p t^8) z^{11} + \dots \\
& (256000 p t^2 - 768000 p^2 t^2 - 7526400000 t^{12}) z^{12} + \\
& (14720000 t^6 - 190720000 p t^6) z^{13} - 3854400000 t^{10} z^{14} + \\
& (2560000 t^4 - 15360000 p t^4) z^{15} - 908800000 t^8 z^{16} - 76800000 t^6 z^{18} \\
P_{35}(1,p,z,t) = & \\
& -247680 p t^9 + 17280 p^3 t^9 + 20250 p t^{19} + \\
& (540672 t^3 - 147456 p^2 t^3 - 2376000 t^{13} + 388800 p^2 t^{13} + 151875 t^{23}) z + \\
& (-5253120 p t^7 + 276480 p^3 t^7 + 3564000 p t^{17}) z^2 + \\
& (98304 t - 98304 p^2 t - 42220800 t^{11} + 6739200 p^2 t^{11} + 12352500 t^{21}) \\
& z^3 + (-13608960 p t^5 + 1198080 p^3 t^5 + 62424000 p t^{15}) z^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-168422400 t^9 + 35251200 p^2 t^9 + 212220000 t^{19}) z^5 + \\
& (-5160960 p t^3 + 737280 p^3 t^3 + 378432000 p t^{13}) z^6 + \\
& (-191385600 t^7 + 52531200 p^2 t^7 + 1440720000 t^{17}) z^7 + \\
& (-122880 p t + 122880 p^3 t + 871776000 p t^{11}) z^8 + \\
& (-61132800 t^5 + 24883200 p^2 t^5 + 4378320000 t^{15}) z^9 + \\
& 836352000 p t^9 z^{10} + (-3686400 t^3 + 3686400 p^2 t^3 + 6454080000 t^{13}) z^{11} + \\
& 333312000 p t^7 z^{12} + 4734720000 t^{11} z^{13} + 49152000 p t^5 z^{14} + \\
& 1674240000 t^9 z^{15} + 1024000 p t^3 z^{16} + 253440000 t^7 z^{17} + 10240000 t^5 z^{19}
\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

- 1 - Abramowitz, M., Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", John Wiley & Sons, 1972.
- 2- Belinskii, V. A., Zakharov, V. E., "Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions", Zh. Eksp. Teor. Fiz. 75, 1955 (1978) [Sov.Phys.JETP 48, 985 (1978)].
- 3 - Belinskii, V. A., Zakharov, V. E., "Stationary gravitational solitons with axial symmetry", Zh. Eksp. Teor. Fiz. 77, 3 (1979) [Sov.Phys. JETP 50, 1 (1979)].
- 4 - Boyd, P. T., Centrella, J. M., Klasky, S. A., "Properties of Gravitational 'Solitons'", Physical Review D, vol. 43, 379, 1991.
- 5 - Céspedes, J., Verdaguer, E., "Cosmological Einstein-Rosen metrics and generalised soliton solutions", Class. Quantum Grav. 4, L7, 1987.
- 6 - Einstein, A., Rosen, N.J., "On gravitational waves", J. Frank. Inst., 223,43, (1937).
- 7 - Garriga, J., Verdaguer, E., "Cosmic Strings and Einstein - Rosen Solitons Waves", Physical Review D, 36, 2250, 1987.
- 8 - Géhéniau, J., Debever, R., "Les quatorze invariants de courbore de l'espace riemannien à quatre dimensions", Helv. Phys. Acta Suppl. 4, 101, (1956).
- 9 - Ibañes, J., Verdaguer, E., "Soliton Collision in General Relativity", Phys. Rev. Lett. 51, 1313 (1983).

- 10- Ibañes, J., Verdaguer, E., "Multisoliton Solutions to Einstein's equations", Phys. Rev. D, 31, 251 (1985).
- 11 - Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E., MacCallum, M., "Exact Solutions of Einstein's field equations", Cambridge University Press, 1980.
- 12 - Lamb, G. L. Jr., "Elements of soliton Theory", Wiley, New York, 1980.
- 13 - Landau, L., Lifchitz, E., "Teoria do Campo", Hemus.
- 14 - Letelier, P. S., "Solitary waves solutions to the Einstein equations", J. Math.Phys. 26, 326, 1985.
- 15 - Letelier, P. S., "Self-Gravitating Anisotropic Fluids", Il Nuovo Cimento, 69 B, 145, 1982.
- 16 - Thorne, K. S., "Energy of Infinitely Long, Cylindrically Symetric Systems in General Relativity", Physical Review, 138, B251, 1965.