UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

BIANCA FUJITA CASTILHO

ESTABILIDADE HAMILTONIANA DE SUBVARIEDADES LAGRANGEANAS DE VARIEDADES FLAG

CAMPINAS

2016

Bianca Fujita Castilho

Estabilidade hamiltoniana de subvariedades lagrangeanas de variedades flag

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Lino Anderson da Silva Grama

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Bianca Fujita Castilho, e orientada pelo Prof. Dr. Lino Anderson da Silva Grama

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131465/2014-7

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C278e

Castilho, Bianca Fujita, 1991-
Estabilidade hamiltoniana de subvariedades lagrangeanas de variedades flag / Bianca Fujita Castilho. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Lino Anderson da Silva Grama.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estabilidade hamiltoniana. 2. Subvariedades lagrangeanas. 3. Variedades bandeira. I. Grama, Lino Anderson da Silva,1981-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Hamiltonian stability of lagrangian submanifolds of flag manifolds
Palavras-chave em inglês:
Hamiltonian stability
Lagrangian submanifolds
Flag manifolds
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestra em Matemática
Banca examinadora:
Lino Anderson da Silva Grama [Orientador]
Marta Jakubowicz Batoréo
Caio José Colletti Negreiros
Data de defesa: 23-03-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de março de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Prof.(a). Dr(a). MARTA JAKUBOWICZ BATORÉO

Prof.(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por absolutamente tudo.

À minha família pelo amor incondicional, pelo apoio e pelos ensinamentos, que fazem de mim uma pessoa feliz e realizada.

Ao meu namorado Daniel Gomes Fadel pelo incentivo, companheirismo, ânimo, amizade, pelo tempo que sempre dispôs para me ajudar e pelo exemplo de estudante de Matemática (que me fez crescer muito durante o mestrado).

Ao meu orientador Lino Grama, por toda ajuda, pela paciência, disposição, compreensão, confiança, pelas inúmeras horas que dedicou a me ajudar, me escutar e aconselhar, por ter feito esses dois anos serem muito divertidos e por ser um orientador e um matemático fantástico.

À professora Marta Batoréo por ter participado da minha banca, pelas valiosas sugestões, pelo tempo despendido ao avaliar meu trabalho e pela incrível boa vontade. Ao professor Caio Negreiros também pela participação na minha banca, sugestões, ideias, por ser uma pessoa tão amigável e por transmitir sua sabedoria de maneira tão agradável.

Ao professor Alcibíades Rigas pelo carinho e por ser um matemático incrível e preocupado com a formação dos seus alunos. Graças a esse esforço, fui capaz de perceber o quanto eu gosto de Geometria Diferencial e fui feliz na minha escolha durante o mestrado.

Aos professores Luiz San Martin, Pedro Catuogno, Paulo Ruffino, Diego Ledesma por tantos ensinamentos, pelo exemplo, pelo carinho, pelas conversas e conselhos.

Aos meus professores de graduação do IMECC, por serem tão excelentes e tão humanos. O apoio que recebi de muitos teve um papel indescritível na minha formação. Em particular, agradeço ao professor Alberto Saa por ter me ajudado muito a amadurecer;

ao professor Ricardo Mosna pelo carinho, por ter sido um professor maravilhoso e pela amizade desde 2009; e ao professor Benjamin Bordin por ser um amigo que está sempre presente, por ser sempre tão amoroso e por me tratar como uma filha.

A todos os meus professores do Ensino Fundamental e Médio por terem feito tanto por mim, me ensinado tantas coisas sobre as disciplinas, sobre a vida e principalmente, por sempre terem incentivado o meu gosto por Matemática. Dentre estes destaco o meu grande mestre, meu pai, que sempre foi um grande exemplo pra mim e que me estimulou desde criança.

Aos meus colegas de UNICAMP, em particular aos da Matemática, pelas conversas, pela ajuda e por nunca me deixarem na mão. Em especial, agradeço de coração ao meu amigo Lino, que esteve ao meu lado durante toda a graduação me ajudando, tirando minhas dúvidas, me divertindo e me fazendo companhia. Esse apoio foi fundamental para que eu conseguisse terminar o curso.

Agradeço ao IMECC de maneira geral, a todos os funcionários pela simpatia e competência.

Finalmente, agradeço à CNPq pelo apoio financeiro durante esses dois anos.

Resumo

Neste trabalho estudamos estabilidade de subvariedades mínimas e lagrangeanas de variedades Kähler sob certas classes de variações. Tais variações levam em conta a estrutura simplética da variedade ambiente e são menos restritivas do que as consideradas no estudo da estabilidade usual (riemanniana). Neste contexto, verificamos condições necessárias e condições suficientes para que tais estabilidades, chamadas de lagrangeanas e hamiltonianas, se verifiquem. Muitos resultados interessantes surgem ao considerarmos variedades Kähler-Einstein e a fim de fortalecê-los, analisamos o caso particular de variedades flag , que possuem naturalmente esta estrutura. Por fim, fornecemos um exemplo de variedade flag real que é mínima e lagrangeana em uma variedade flag complexa e, a partir da teoria desenvolvida ao longo do texto, derivamos algumas conclusões acerca de sua estabilidade lagrangeana.

Palavras-chave: Estabilidade hamiltoniana; Subvariedades lagrangenas; Variedades bandeira.

Abstract

In this work we study the stability of minimal, lagrangian submanifolds of Kähler manifolds under certain classes of variations. These variations take into account the symplectic structure of the ambient manifold and are less restrictive than those considered on the study of the usual (riemannian) stability. In this context, we verify necessary conditions and sufficient conditions to those stabilities, which are called lagrangian and hamiltonian, to happen. A lot of interesting results arise if we consider Kähler-Einstein manifolds and to strengthen them, we analyze the particular case of flag manifolds, which have naturally this structure. Finally, we provide an example of real flag manifold which is minimal and langrangian on a complex flag manifold and, from the theory developed in the text, we derive some conclusions about its lagrangian stability.

Keywords: Hamiltonian stability, Lagrangian submanifolds, flag manifolds.

Sumário

Introdução

Devido à sua importância no estudo de mecânica clássica, a geometria simplética é um tema clássico (cf. [AA68]). Este ramo é ainda tema de muita pesquisa e conta com inúmeros avanços significativos. Dentre eles podemos citar o estudo das categorias de Fukaya e sua relação estrita com simetria espelho, cohomologia de Floer e teoria de interseção lagrangeana (cf. [FGHK10]). Em contraste a esse desenvolvimento, questões básicas ainda continuam em aberto. Este "paradoxo" é ilustrado pelo trabalho recente [Aur15] onde o autor estuda subvariedades lagrangeanas em $\mathbb{R}^6$ munido da forma simplética canônica.

O teorema de Poincaré (cf. [Poi05]) garante que uma curva fechada na esfera dividindo-a em duas regiões da mesma área tem comprimento maior do que o equador a menos que tal curva seja um equador. Uma noção que generaliza esta ideia é a de estabilidade hamiltoniana de subvariedades lagrangeanas em variedades simpléticas, introduzida por Yong-Geun Oh em [Oh90]. Neste mesmo artigo, Yong-Geun Oh exibe como exemplos de subvariedades lagrangeanas hamiltonianas estáveis, o espaço projetivo real e o toro de Clifford mergulhados de maneira natural no espaço projetivo complexo. Além da estabilidade hamiltoniana, é definida a estabilidade lagrangeana de subvariedades lagrangeanas em variedades simpléticas, sendo a última mais restritiva. Ainda em [Oh90] prova-se que o toro de Clifford, apesar de ser hamiltoniano estável, não é lagrangeano estável no espaço projetivo complexo.

Surgem então questões acerca destes conceitos e dentre eles destacamos a busca por subvariedades lagrangeanas que sejam hamiltonianas estáveis em certos tipos de variedades Kähler (cf. [AO$^+$03], [AO01] e [AO02]). Um caso particular que continua em aberto, consiste em verificar a estabilidade hamiltoniana de formas reais (que são naturalmente mínimas e lagrangeanas) de órbitas adjuntas.

No primeiro capítulo definimos o conceito de estabilidade hamiltoniana e lagrangeana de subvariedades lagrangeanas de variedades simpléticas e discursamos em que sentido esses conceitos generalizam a ideia de estabilidade riemanniana. Através de análises feitas sobre o operador de Jacobi, operador este que está intimamente relacionado à segunda fórmula de variação, Yong-Geun Oh em [Oh90] deriva a segunda fórmula de variação para subvariedades mínimas e lagrangeanas de variedades Kähler. A partir de tal resultado, obtêm-se vários corolários acerca da topologia e da geometria das variedades consideradas. Dentre eles, uma caracterização para a estabilidade hamiltoniana de uma subvariedade lagrangeana L em uma variedade Kähler-Einstein M, envolvendo o primeiro autovalor do laplaciano agindo em funções suaves de L e uma obstrução topológica para que L seja lagrangeana estável em M.

No capítulo 2, consideramos a teoria discutida anteriormente para um caso particular de variedades Kähler-Einstein: as variedades *flag*. Neste contexto, através de estimativas do primeiro autovalor do laplaciano λ_1 agindo em funções e do volume da subvariedade lagrangeana H. Ono, em [Ono03] conclui que a estabilidade hamiltoniana é equivalente à igualdade $\lambda_1 = c$, onde c é a constante de Einstein da variedade ambiente. Além disso, ele fornece uma classe de autovetores associados ao autovalor λ_1. Para concluir o segundo capítulo, assim como em [Ono03], verificamos a estabilidade hamiltoniana das Grassmannianas reais mergulhadas nas Grassmannianas complexas.

Utilizando a teoria desenvolvida por Yong-Geun Oh, apresentamos, no capítulo 3, um exemplo que não encontramos na literatura: uma subvariedade lagrangeana, mínima em uma variedade *flag* complexa de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ que não é lagrangeana estável (em particular, não é riemanniana estável). Tal variedade *flag* complexa é a variedade *flag* maximal que consiste das bandeiras formadas por subespaços isotrópicos de $\mathbb{C}^n$ munido da forma simplética canônica. Vários exemplos acerca desta teoria foram encontrados na literatura, mas apenas para os casos em que a variedade ambiente é um espaço hermitiano simétrico, o que não é o caso da variedade *flag* complexa considerada neste exemplo.

Capítulo 1

Estabilidade Hamiltoniana

O teorema de Poincaré (cf. [Poi05]) afirma que qualquer curva fechada dividindo a esfera em duas partes de áreas iguais tem comprimento maior que o do equador, a menos que seja um equador. Deformações do equador que dividem a área da esfera ao meio são as chamadas deformações hamiltonianas, que serão vistas mais adiante.

Mais geralmente, podemos pensar na esfera como $\mathbb{C}P^1$ e o equador como $\mathbb{R}P^1$ ou como $\mathbb{T}^1$. Motivado por este teorema, Yong-Geun Oh em seu artigo [Oh90] demonstra que este resultado pode ser generalizado no seguinte sentido: se tomarmos deformações hamiltonianas de $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{T}^n$ dentro de $\mathbb{C}P^n$, veremos que estes são pontos de mínimo estáveis do funcional área.

Dissertando sobre o artigo [Oh90], a fim justificar tal generalização, discutiremos alguns resultados interessantes. Dentre eles, um que fornece uma segunda fórmula de variação de subvariedades lagrangeanas de variedades Kähler-Einstein que dará origem a obstruções para que uma subvariedade desse tipo não seja riemanniana estável e uma caracterização para que seja hamiltoniana estável.

1.1 Preliminares

Nesta seção iremos introduzir alguns conceitos necessários para a compreensão do teorema principal demonstrado em [Oh90] e comentar alguns de seus resultados. Tais conceitos envolverão em grande parte, geometria riemanniana, geometria simplética e o funcional de área relacionado a essas duas estruturas.

As subvariedades lagrangeanas de variedades Kähler são nossos principais objetos de estudo. A fim de compreender tais conceitos, a seguir fazemos uma série de definições básicas de geometria simplética e complexa. Para mais detalhes sobre essas duas geometrias, sugerimos [DS06, BM06, KN69, Mor04].

Definição 1.1.1. Uma variedade M é dita **simplética** se admite uma $2-$forma fechada ω que é não-degenerada, isto é, se para cada $p \in M$ o seguinte mapa é injetivo:

$$\begin{array}{rcl} T_pM & \to & T_p^*M \\ v & \mapsto & \omega_p(v, \cdot). \end{array}$$

Neste caso, dizemos que ω é uma **forma simplética**.

Definição 1.1.2. Seja (M, ω) uma $2n-$variedade simplética. Uma subvariedade N de M é dita **lagrangeana** se $\omega_p|_{T_pN} = 0$ para todo $p \in N$ e $\dim N = n$.

Definição 1.1.3. Uma **estrutura quase complexa** J em uma variedade diferenciável M é um endomorfismo de fibrados:

$$J : TM \to TM$$

satisfazendo $J^2 = -id$. Neste caso chamamos (M, J) de **variedade quase complexa**.

A estrutura quase complexa J é **integrável** se não tem torção, isto é, se o **tensor de Nijenhuis** definido por

$$N(X,Y) := 2\{[JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

é nulo. Nesta situação, (M, J) é chamada de **variedade complexa**.

Uma **variedade Kähler** é uma variedade munida de uma métrica g e uma estrutura quase complexa integrável J tal que a métrica g é compatível com J no seguinte sentido:

$$g(X,Y) = g(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e a $2-$forma ω dada por:

$$\omega(X,Y) := g(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

é uma forma simplética.
Neste caso chamamos g de **métrica Kähler** e a forma ω de $2-$**forma fundamental**.

Relembramos o conceito de **curvatura** em uma variedade riemanniana e algumas de suas propriedades:

Definição 1.1.4. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade riemanniana. O **tensor curvatura** de $(M, \langle , \rangle)$ é definido por

$$K(X,Y,Z) = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Observação 1.1.5. Denotaremos por $K(X,Y,Z,W)$ o produto interno dado por $\langle K(X,Y,Z),W\rangle$.

A seguir, enunciamos algumas propriedades interessantes do tensor curvatura que serão utilizadas mais a frente:

Lema 1.1.6. *Para quaisquer $X, Y, Z, W \in TM$, o tensor curvatura K satisfaz:*

1. $K(X,Y)Z = -K(Y,X)Z$;

2. $K(X,Y)Z + K(Y,Z)X + K(Z,X)Y = 0$;

3. $\langle K(X,Y)Z, W\rangle = -\langle K(X,Y)W, Z\rangle$;

4. $\langle K(X,Y)Z, W\rangle = \langle K(Z,W)X, Y\rangle$.

Demonstração. [Mil69] lema 9.3. ∎

Além do tensor curvatura, relembramos a curvatura de Ricci e a escalar:

Definição 1.1.7. Seja $x = z_1$ um vetor unitário em T_pM, se o completarmos para uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{x, z_2, \ldots, z_n\}$, a **curvatura de Ricci** no ponto $p \in M$, na direção de x é dada por

$$\mathrm{ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\langle K(x,z_i)x, z_i\rangle.$$

Para uma definição intrínseca da curvatura de Ricci, consideremos a forma bilinear Q em T_pM definida por $Q(x,y) = \mathrm{tr}\ \xi$ para todo $x, y \in T_pM$, onde $\xi(z) = K(x,z)y$ e tr indica o **traço** da aplicação ξ. A forma bilinear Q é chamada de **tensor de Ricci** e será denotado por Ric.

Uma característica do tensor de Ricci é que se $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ é uma variedade Kähler, então ela satisfaz (cf. [Mor04, p.32]):

$$\mathrm{Ric}(JX, JY) = \mathrm{Ric}(X,Y). \tag{1.1.1}$$

Além disso, uma métrica Kähler $g := \langle\cdot,\cdot\rangle$ que satisfaz

$$\mathrm{Ric} = cg$$

é chamada de **métrica Kähler-Einstein** com **constante de Einstein** c e a variedade (M, g, J) é chamada de **variedade Kähler-Einstein** .

Definição 1.1.8. Ainda associado à curvatura temos o **operador de Ricci**, que numa base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ de T_pM é dado por

$$\begin{aligned} R : T_pM &\to T_pM \\ X &\mapsto \sum_{i=1}^{2n} K_p(X, e_i)e_i. \end{aligned}$$

Observação 1.1.9. A ação de descer os índices de R nos dá uma propriedade importante do operador de Ricci. O tensor obtido por esse processo é o tensor de Ricci: chamemos de T_j^i o operador $K(e_j, e_i)$, então $R(e_j) = \sum_{i=1}^{2n} T_j^i e_i$. O tensor ao qual nos referimos é dado por $T_{kj} = \sum_{i=1}^{2n} T_j^i g_{ik}$. Ora,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} T_j^i g_{ik} &= \sum_{i=1}^{2n} K(e_j, e_i) g_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \langle K(e_j, e_i) e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} K\left(e_j, e_i, e_i, e_k\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} K\left(e_j, e_i, e_k, e_i\right) = \sum_{i=1}^{2n} K\left(e_i, e_j, e_k, e_i\right) \\
&= Ric(e_j, e_k).
\end{aligned}$$

Onde nas igualdades utilizamos as propriedades do tensor K enunciadas no Lema (1.1.6).

Definição 1.1.10. Seja $\mathcal{B}$ como na definição 1.1.7, então a **curvatura escalar** em $p \in M$ é uma média das curvaturas de Ricci:

$$s(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}_p(z_i).$$

Definição 1.1.11. Dado um ponto $p \in M$ e um plano $\sigma \subset T_pM$ gerado por $\{x, y\}$, a **curvatura seccional** de σ em p é o número real $k(x, y)$ dado por:

$$k(x, y) = \frac{\langle K(x, y)x, y \rangle}{\|x \wedge y\|^2} = k(\sigma).$$

Convencionaremos que L é uma subvariedade de M se existe um mergulho $i : L \hookrightarrow M$ e, a menos que seja explícito o contrário, identificaremos $i(L) \subset M$ com L . Se (L, g') e (M, g) são variedades riemannianas com conexões de Levi-Civita ∇ e $\overline{\nabla}$ respectivamente, podemos definir a **segunda forma fundamental** do mergulho $i : L \hookrightarrow M$ como

$$\begin{aligned}
B : \mathfrak{X}(L) \times \mathfrak{X}(L) &\longrightarrow \mathfrak{X}^N(L) \\
(X, Y) &\longmapsto \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^N
\end{aligned}$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões de X e Y a campos de M.

Definição 1.1.12. Associado a segunda forma fundamental, definimos o **vetor curvatura média**, que se trata na realidade de um campo, que no ponto $p \in M$ é dado por:

$$H_p := \frac{1}{n} \text{tr } B_p$$

onde n é a dimensão da subvariedade L.

A seguir, revisaremos as fórmulas da derivada covariante e da derivada exterior de uma $k-$forma em M:

Sejam $\omega \in \Omega^k(M)$, $X, X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, então a **derivada covariante** de ω na direção de X é dada por (cf. [BMR, p.141]):

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_k) = X\omega(X_1, \ldots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, \ldots, X_k). \quad (1.1.2)$$

A **diferencial exterior** de uma $k-$forma aplicada a $k+1$ campos é calculada da seguinte maneira (cf. [Lee13, Proposition 14.32 p.370]):

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k} X_i \omega\left(X_1, \ldots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1}\right) \quad (1.1.3)\\ &+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}\right). \end{aligned}$$

Observação 1.1.13. Ao longo deste capítulo, M denotará uma variedade conexa, compacta, simplética com forma simplética ω e munida de uma estrutura quase complexa J compatível com ω. L será uma subvariedade lagrangeana, compacta, conexa e orientável de M.

Neste contexto de variedades compactas, usaremos alguns resultados e conceitos acerca da teoria de Hodge. São eles:

Definição 1.1.14. Seja $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} L_X : T_pM &\to T_pM \\ Y &\mapsto \nabla_Y X \end{aligned}$$

e defina o **divergente de X** como:

$$\mathrm{div}(X) := \mathrm{tr}\ L_X.$$

Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM, então $L_X(e_i) = \nabla_{e_i} X$. Escrevendo X na base ortonormal como $X = \sum_{j=1}^{n} X^j e_j$, verifica-se que

$$L_X(e_i) = \sum_{j=1}^{n} X^j \nabla_{e_i} e_j = \sum_{j,k=1}^{n} X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão ∇. Ou seja,

$$\mathrm{tr}\ L_X = \sum_{i=1}^{n} \langle L_X(e_i), e_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle X^j \Gamma_{ij}^k e_k, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} X^j \Gamma_{kj}^k.$$

Ou ainda, de maneira mais geral,

$$\text{tr } L_X = \sum_{i=1}^{n} \langle L_X(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

O divergente pode ser definido para uma $1-$forma se considerarmos o divergente do campo associado à forma pela métrica, através do seguinte isomorfismo musical:

$$\begin{aligned} \sharp : \Omega^1(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \alpha &\mapsto X \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

onde $X \lrcorner\, g = \alpha$ (aqui, por comodidade utilizamos $\langle \cdot, \cdot \rangle = g$). Com isso, podemos definir o **laplaciano para funções** como o operador Δ que é tal que, se $f \in \Omega^0(M)$, então $\Delta f = -\text{div}(df)$. Essa definição será generalizada no sentido de formas mais adiante. No momento, é interessante fazer a seguinte observação:

Observação 1.1.15. Sejam $\{X_1, \ldots, X_n\}$ campos ortonormais. Então:

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\text{div}(df) = -\text{div}(X) = -\text{tr} L_X = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left(X_i \langle X, X_i \rangle - \langle X, \nabla_{X_i} X_i \rangle \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left(X_i df(X_i) - df(\nabla_{X_i} X_i) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left(X_i X_i f - \nabla_{X_i} X_i f \right). \end{aligned}$$

Notemos que, na terceira linha, utilizamos o fato que df está associado ao campo X pelo isomorfismo $\sharp$, definido em (1.1.4).

Definição 1.1.16. Sejam $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $X_1, \ldots, X_{k-1} \in T_pM$ e considere o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} L_{X_1, \ldots, X_{k-1}} : T_pM \times T_pM &\rightarrow T_pM \\ (X, Y) &\mapsto [\nabla_X \alpha] (Y, X_1, \ldots, X_{k-1}). \end{aligned}$$

Definimos o **divergente** de α como $\text{div}\alpha\, (Y, X_1, \ldots, X_{k-1}) = \text{tr } L_{X_1, \ldots, X_{k-1}}$.

A partir do divergente, definimos a **codiferencial**:

Definição 1.1.17. A **codiferencial** é a aplicação dada por:

$$\begin{aligned} \delta : \Omega^p(M) &\rightarrow \Omega^{p-1}(M) \\ \omega &\mapsto -\text{div}\omega \end{aligned}$$

e o **operador de Laplace-Beltrami** ou **laplaciano de Hodge** é o operador:

$$\begin{aligned} \Delta : \Omega^k(M) &\to \Omega^k(M) \\ \omega &\mapsto d\delta\omega + \delta d\omega. \end{aligned}$$

Como usual, diremos que uma forma ω é **fechada** se $d\omega = 0$ e **cofechada** se $\delta\omega = 0$. Além disso, ela é dita **harmônica** se $\Delta\omega = 0$.

Se considerarmos a variedade riemanniana $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ compacta e orientada, podemos definir, no espaço das $k-$formas um produto interno, o chamado **produto interno** L^2:

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M g\left(\omega_1(x), \omega_2(x)\right) dVol_M = \int_M \omega_1 \wedge (*\omega_2)$$

onde $*$ indica o operador estrela de Hodge com relação à forma volume induzida pela métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Notamos a importância da compacidade da variedade para que esta integral convirja e da sua orientabilidade, para a existência de uma forma volume.

Verifica-se que, com relação a este produto interno, a codiferencial coincide com a adjunta da diferencial exterior, isto é, $\delta = d^*$.

O resultado a seguir será usado mais a frente como uma ferramenta usada na demonstração de um importante critério de estabilidade hamiltoniana:

Lema 1.1.18 (Lema de Hopf)**.** *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana compacta e orientada e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\int_M \Delta f * 1 = 0.$$

Em particular, se $\Delta f \leq 0$, então $\Delta f = 0$ e f é localmente constante.

Demonstração. [BMR] corolário 2.15. ■

Ainda no caso de M ser riemanniana e compacta, temos o importante Teorema de Hodge. Este teorema afirma, em particular, que se M tem $k-$ésima cohomologia não nula, então M admite uma k-forma harmônica. Denotando por $\mathbb{H}^k(M)$ o conjunto das $k-$formas harmônicas, o Teorema de Hodge é enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1.1.19 (Teorema de Hodge)**.** *O mapa*

$$\begin{aligned} h^k : \mathbb{H}^k(M) &\to H^k_{dR}(M) \\ \alpha &\mapsto \overline{\alpha} \end{aligned}$$

é um isomorfismo, onde $\overline{\alpha}$ é a classe das $k-$formas fechadas de M que diferem de α por uma $k-$forma exata.

Demonstração. [BMR] teorema 3.1. ∎

Outro teorema devido a Hodge que será utilizado mais à frente é o Teorema da decomposição de Hodge, que fornece uma decomposição do espaço das $k-$formas:

Teorema 1.1.20 (Teorema da decomposição de Hodge)**.**

$$\Omega^k(M) = \mathbb{H}^k(M) \oplus \delta\left(\Omega^{k+1}(M)\right) \oplus \mathrm{d}\left(\Omega^{k-1}(M)\right).$$

Demonstração. Teorema 3.7 de [BMR]. ∎

A partir de agora nos focaremos em definições menos usuais, porém essenciais no nosso estudo.

Definição 1.1.21. Seja $L \overset{i}{\hookrightarrow} M$ subvariedade lagrangeana e V campo ao longo de L (isto é, $V : L \to TM$ é uma aplicação suave que satisfaz $\pi \circ V = Id_L$, onde $\pi : TM \to M$ é a projeção canônica), dizemos que V é uma **variação lagrangeana** (respectivamente, **hamiltoniana**) se a $1-$forma $i^*(V \lrcorner\, \omega)$ é fechada (respectivamente, exata).

Definição 1.1.22. Uma família suave $\{i_t\}$ a $1-$parâmetro de mergulhos de L em M tal que $i_0 = i$ é chamada de **deformação lagrangeana** (respectivamente, **hamiltoniana**) se seu campo variacional é uma variação lagrangeana (hamiltoniana).

O campo variacional de i_t é dado por $V_t(p) = i_t(p)_* \frac{\partial}{\partial s}|_{s=t}$. Sendo i_t uma aplicação que varia com o tempo e com um ponto de L, nesta definição, $i_t(p)$ é considerado como uma função do tempo, com o ponto p fixado.

Exemplo 1.1.23. Suponha que $M = S^2$ e L é um equador de M. Se i_t uma deformação de L com campo associado V_t, então a $2-$forma $d[i_t^*(V_t \lrcorner\, \omega)]$ é necessariamente nula, já que $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$. Portanto, qualquer deformação de L é lagrangeana. Uma variação normal V de $L = S^1$ é da forma $V = fN$ onde N é um campo normal à L, unitário e f é uma função de L. Afirmamos que V é hamiltoniano se e somente se $\int\limits_L f = 0$.

De fato, se $i_t^*(V \lrcorner\, \omega) = dg$ para alguma função g, então

$$0 = \int\limits_L dg = \int\limits_L f i_t^*(N \lrcorner\, \omega). \tag{1.1.5}$$

Como ω é uma forma volume de S^2 e N é campo unitário e normal a L, temos que $i_t^*(N \lrcorner\, \omega)$ é forma volume de L. Portanto, da equação (1.1.5) concluímos que $\int\limits_L f = 0$.

Por outro lado, se $\int\limits_L f = 0$, usando que $i_t^*(N \lrcorner\, \omega)$ é forma volume, temos que:

$$0 = \int\limits_L f = \int\limits_L i_t^*(fN \lrcorner\, \omega).$$

O teorema [Lee13, Theorem 17.10 p.454] implica que $i_t^* \left(fN \lrcorner\, \omega \right)$ deve ser exata.

Geometricamente, isso significa que o quanto deformamos o equador para "cima"é compensado pelo que o deformamos para "baixo", o que mantém a divisão da esfera em duas partes de mesma área.

Seja M uma variedade diferenciável, $V \in \Gamma(TM)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$, denotaremos por $\mathcal{L}_V\omega$ a **derivada de Lie** de ω na direção de V. $\mathcal{L}_V\omega$ satisfaz:

$$\mathcal{L}_V\omega = dV \lrcorner\, \omega + V \lrcorner\, d\omega \quad \text{(Fórmula mágica de Cartan).} \tag{1.1.6}$$

(cf. [Lee13, Theorem 14.35 p.372]).

Observação 1.1.24. Notemos que deformações lagrangeanas preservam subvariedades lagrangeanas. Sejam i_t uma deformação lagrangeana e V_t seu campo associado. Então, como i_t é uma deformação lagrangeana,

$$\begin{aligned} 0 &= d({i_t}^* \left(V_t \lrcorner\, \omega \right)) \\ &= i_t^* \left(d(V_t \lrcorner\, \omega) + V_t \lrcorner\, \underbrace{d\omega}_{=0} \right) \qquad (1.1.7) \\ &= \frac{d}{dt} i_t^*\omega. \qquad (1.1.8) \end{aligned}$$

A equação (1.1.7) é válida pela Fórmula mágica de Cartan (1.1.6), e (1.1.8) por [Lee13, Proposition 12.36 p.324]. Assim sendo, concluímos que $i_t^*\omega$ é constante (M é conexa). Ora, esta é nula no tempo igual a 0, portanto, $i_t^*\omega = 0$.

A partir de agora, vamos considerar que nossa variedade simplética (M, ω) é também riemanniana, munida de uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Neste caso a restrição de TM à L decompõe-se como

$$TM|_L = TL \bigoplus NL$$

onde $NL \coloneqq TL^{\perp}$ denota o fibrado normal a L. Dada esta decomposição, somos capazes de definir uma deformação normal. Se M é uma variedade riemanniana e $i : L \hookrightarrow M$ é uma subvariedade, então uma deformação nas mesmas condições da Definição (1.1.22) é dita **normal** se o campo associado é normal.

Observação 1.1.25. No caso particular onde L é uma subvariedade lagrangeana de M, fixada uma estrutura quase complexa J compatível com ω e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pode-se provar que

$NL = JTL$. Ora, $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ para todo $X, Y \in TL$ então o lado esquerdo da equação é zero se e somente se X e JY são ortogonais. Ou seja, neste caso temos que

$$TM|_L = TL \bigoplus JTL. \tag{1.1.9}$$

Definidas as variações normais, podemos enunciar a primeira e a segunda fórmula de variação da área, que são indispensáveis para o estudo de estabilidade riemanniana. A demonstração pode ser encontrada em [Law80, Theorem 1 p.7 e Theorem 1' p.48].

Teorema 1.1.26. *Seja $\{i_t\}$ variação de $i : L \hookrightarrow M$, $L_t := (L, {i_t}^*\langle\cdot,\cdot\rangle)$ e $A(L)$ volume de L. Então, se H é o campo curvatura média de L e $V = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_t$ o campo variacional, valem a primeira e a segunda fórmula de variação dadas, respectivamente, por:*

1. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(L_t) = -\int\limits_L \langle H, V \rangle.$

   *Dizemos que L é **mínima** se $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(L_t) = 0$ para qualquer variação de L, o que é equivalente a dizer que o campo curvatura média é nulo.*

2. *Se L é mínima e $V \in \Gamma(NL)$, então*

   $$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} A(L_t) = \int\limits_L \langle \nabla^N V, \nabla^N V \rangle + \langle \overline{\mathcal{R}}(V), V \rangle - \langle \widetilde{A}(V), V \rangle$$

   onde

   - *∇^N é dado por:*

     $$\begin{aligned} \nabla^N : \Gamma(NL) \times \Gamma(NL) &\longrightarrow \Gamma(NL) \\ (X, Y) &\longmapsto \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^N. \end{aligned}$$

     Sendo $\overline{X}$ extensão de X a um campo de M.

   - *$\overline{\mathcal{R}}(V) = \sum\limits_{i=1}^{2n} \left(\overline{K}(V, e_i) e_i\right)^N$ onde $\overline{K}$ é a curvatura de M e $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ é um referencial local ortonormal em TM*

   - *$\widetilde{A} = B^* B$ onde B é a segunda forma fundamental de $i : L \hookrightarrow M$ e $B^* = \overline{B^t}$.*

*L é dita **riemanniana estável** se é mínima e $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} A(L_t) \geq 0$ para toda variação normal.*

Definição 1.1.27. Uma subvariedade é dita **hamiltoniana (lagrangeana) estável** se ela é estável (no sentido da segunda fórmula de variação) para variações normais hamiltonianas (lagrangeanas).

Notemos que esta definição leva em conta a estrutura riemanniana e simplética da variedade.

Observação 1.1.28. A estabilidade no sentido riemanniano é mais forte do que as estabilidades lagrangeana e hamiltoniana, ou seja, se L é uma subvariedade lagrangeana riemanniana estável, então ela é lagrangeana e hamiltoniana estável. As subvariedades lagrangeanas estáveis, por sua vez, são também hamiltonianas estáveis. Porém, existem subvariedades hamiltonianas estáveis que não são lagrangeanas estáveis, um desses exemplos é o do $\mathbb{R}P^n$ mergulhado de maneira usual em $\mathbb{C}P^n$ e outro é o toro de Clifford em $\mathbb{C}P^n$, que serão comentados mais a frente.

Tendo em vista que, para garantir a estabilidade riemanniana de uma subvariedade é suficiente observar se o integrando da segunda fórmula de variação é não negativo, vamos definir o **operador de Jacobi**:

$$\mathcal{J} : \Gamma(NL) \to \Gamma(NL)$$

pondo $\mathcal{J} := -\Delta^N + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}$ e analisar sob quais hipóteses garantimos que este operador seja semi-positivo definido.

Aqui, Δ^N é o laplaciano Bochner agindo em NL e é definido no ponto $p \in L$ por $\Delta^N = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^N \nabla_{e_i}^N$ em uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de T_pL, satisfazendo $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ onde ∇ é a conexão de Levi-Civita em L.

Observação 1.1.29. Geralmente na literatura, o laplaciano de Bochner é tomado com o sinal oposto ao aqui definido.

No caso de L ser uma subvariedade lagrangeana de M, o operador de Jacobi pode ser visto também agindo nas $1-$formas de L, pois temos o seguinte isomorfismo de fibrados vetoriais:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega} : NL &\to T^*L \\ v &\mapsto i^*(v \lrcorner \omega). \end{aligned}$$

Vamos provar que $\widetilde{\omega}$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais: observa-se que esta aplicação é suave e que $\widetilde{\omega}_p$ é linear em qualquer ponto $p \in L$. Como L é lagrangeana, $\dim TL = \dim NL$ logo, basta provar que $\widetilde{\omega}_p$ é injetivo para todo $p \in L$ isto é, que se $0 = \widetilde{\omega}_p(V_p) = i^*(V_p \lrcorner \omega)$ então $V_p = 0$. Ora, pela Observação (1.1.9), $V_p = Ji_*Y_p$ para algum $Y_p \in T_pL$ e, dado $X_p \in T_pL$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \omega\left(V_p, i_*X_p\right) &= \omega\left(Ji_*Y_p, i_*X_p\right) \\ &= \langle Ji_*Y_p, Ji_*X_p\rangle \\ &= \langle i_*Y_p, i_*X_p\rangle \\ &= i^*\langle Y_p, X_p\rangle \end{aligned}$$

ou seja, $\langle Y_p, X_p\rangle_L = 0$ (i é mergulho). Como X_p é arbitrário, podemos tomar $X_p = Y_p$ para concluir que $Y_p = 0$ e portanto, que V_p é nulo.

$\widetilde{\omega}$ induz um isomorfismo de $\mathrm{C}^\infty(L)-$módulos:

$$\Omega^1(L) \simeq \Gamma(NL).$$

Além disso, $\widetilde{\omega}$ é unitário, isto é, $\widetilde{\omega}^* \circ \widetilde{\omega} = Id$:

$$\langle V, U\rangle\Big|_{NL} = \langle\widetilde{\omega}(V), \widetilde{\omega}(U)\rangle\Big|_{T^*L} = \langle V, \widetilde{\omega}^*\widetilde{\omega}(U)\rangle\Big|_{NL}.$$

Sendo L compacta, a partir do teorema da decomposição de Hodge (Teorema 1.1.20) garante-se que $\Omega^1\left(L\right) = \mathrm{Im}\, d \bigoplus \ker\delta$ donde, através do isomorfismo $\widetilde{\omega}$ temos a decomposição correspondente em $\Gamma(NL)$ da forma:

$$\Gamma\left(NL\right) = \Gamma_1\left(NL\right) \bigoplus \Gamma_2\left(NL\right) \tag{1.1.10}$$

onde $\Gamma_1\left(NL\right)$ é dado pelos campos cuja 1-forma associada via $\widetilde{\omega}$ é exata e $\Gamma_2\left(NL\right)$ é dado pelos campos cuja 1-forma associada é cofechada.

A fim de observar a estabilidade de subvariedades mínimas lagrangeanas por variações normais e hamiltonianas, Yong-Geun Oh em [Oh90] encontrou uma expressão para o operador de Jacobi neste contexto, que será o foco da próxima seção. A partir de agora, denotaremos por Δ_h o laplaciano de Hodge $\Delta_h = d\delta + \delta d$, onde $\delta = d^*$ com relação ao produto interno L^2 induzido por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Uma propriedade interessante sobre o laplaciano de Hodge (agindo nas formas) e que iremos usar mais a frente é que ele é um operador positivo.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle\Delta_h\alpha, \alpha\rangle &= \langle d\delta\alpha, \alpha\rangle + \langle\delta d\alpha, \alpha\rangle \\ &= \langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle + \langle d\alpha, d\alpha\rangle \\ &= \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 \quad \forall\alpha \in \Omega^k(M). \end{aligned}$$

A maneira que este laplaciano se relaciona com o laplaciano de Bochner é dada pela **fórmula de Weitzenböck**:

$$\Delta_h = -\Delta + R. \tag{1.1.11}$$

1.2 Segunda fórmula de variação da área para subvariedades lagrangeanas

Iniciamos essa seção com algumas definições e uma série de resultados necessários para demonstrar a segunda fórmula de variação da área de subvariedades lagrangeanas de variedades Kähler.

Definição 1.2.1. Seja L uma subvariedade riemanniana de $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. A **transformação de Ricci** é definida nos campos normais a L como

$$R(V) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} K\left(V, e_i\right) e_i \quad V \in \Gamma(NL)$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial local ortonormal de TL. A partir dos isomorfismos musicais (cf. [Lee13]), podemos também definir a transformação de Ricci R nas $1-$formas de L de maneira natural:

$$R|_{\Omega^1(L)} \coloneqq \sharp^{-1} \circ R \circ \sharp.$$

Não vamos distingui-los a menos que haja ambiguidade.

Observação 1.2.2. Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial local ortonormal de TM, então

$$\langle R(V), W\rangle = \operatorname{Ric}(V, W). \tag{1.2.1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle R(V), W\rangle &= \sum_{i=1}^{n} K(V, e_i, e_i, W) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} K(V, e_i, W, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} K(e_i, V, W, e_i) \\
&= \operatorname{Ric}(V, W).
\end{aligned}$$

Daqui para frente, $(M, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ será uma variedade Kähler e L uma subvariedade lagrangeana. Para facilitar a exposição, fixamos aqui algumas notações: a derivada covariante, laplaciano covariante, curvatura e transformação de Ricci serão denotados respectivamente, por ∇, Δ, K, R em L e por $\overline{\nabla}, \overline{\Delta}, \overline{K}, \overline{R}$ em M. Usaremos notação análoga para extensões de campos de L para M.

Lema 1.2.3 ([Oh90, Lemma 3.3 p.507])**.** *Se $V \in \Gamma(NL)$, então*

$$\tilde{\omega}\left(\Delta^N V\right) = \Delta\left(\tilde{\omega}(V)\right).$$

Demonstração. Começamos mostrando que $\nabla_X(\widetilde{\omega}(V)) = \widetilde{\omega}\left(\nabla_X^N V\right)$ $\forall X \in \mathfrak{X}(L)$, ou seja, iremos demonstrar que $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(L)$, $\nabla_X(\widetilde{\omega}(V))\,Y = \widetilde{\omega}\left(\nabla_X^N V\right)Y$ em qualquer ponto de L. Ora,

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(\widetilde{\omega}(V))\,Y &\overset{(1.1.2)}{=} X(\widetilde{\omega}(V)(Y)) - (\widetilde{\omega}(V))(\nabla_X Y)\\
&= \nabla_X(\widetilde{\omega}(V)(Y)) - (\widetilde{\omega}(V))(\nabla_X Y)\\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}((V \lrcorner\, \omega)(Y)) - (V \lrcorner\, \omega)(\nabla_X Y)\\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}((V \lrcorner\, \omega)(Y)) - \omega(V, \nabla_X Y) \qquad (1.2.2)\\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\omega(V,Y)) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&\overset{(1.1.2)}{=} \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\omega\right)(V,Y) + \omega(V, \overline{\nabla}_{\overline{X}} Y) + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&= \omega(V, \overline{\nabla}_{\overline{X}} Y) + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&= \omega\left(V, \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} Y\right)^T\right) + \omega\left(V, \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} Y\right)^N\right) + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&= \langle JV, \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} Y\right)^T\rangle + \langle JV, \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} Y\right)^N\rangle + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&= \langle JV, \nabla_X Y\rangle + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y) \qquad (1.2.3)\\
&= \omega(V, \nabla_X Y) + \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right) - \omega(V, \nabla_X Y)\\
&= \omega\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V, Y\right)\\
&= \omega\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V\right)^T, Y\right) + \omega\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V\right)^N, Y\right)\\
&= \omega\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} V\right)^N, Y\right) = \widetilde{\omega}\left(\nabla_X^N V\right)Y. \qquad (1.2.4)
\end{aligned}
$$

Atentemos ao fato de que se a variedade M é Kähler, então sua forma simplética é paralela, ou seja, $\overline{\nabla}\omega = 0$, o que justifica a sétima igualdade. Já a igualdade (1.2.3) é verdadeira pois $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} Y)^T = \nabla_X Y$ e porque, por (1.1.9), JV é um campo tangente a L. Finalmente, na penúltima igualdade, usamos os fatos de que L é lagrangeana e Y é tangente a L para garantir que ao decompor $\overline{\nabla}_{\overline{X}} V$ nas suas partes tangencial e normal, a parte tangencial é anulada por ω.

Agora lembramos que se, em $p \in L$, tomarmos uma base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de T_pL com $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \quad \forall i, j \in \{E_1, \ldots, E_n\}$, o laplaciano de Bochner é dado, num tensor η de L da seguinte maneira

$$\Delta\eta(p) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta(p).$$

A partir de (1.2.4) e do comentário anterior, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta \circ \widetilde{\omega}(V)\right)(p) &= \left(\widetilde{\omega}^{-1} \circ \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \widetilde{\omega}(V)\right)(p) \\
&= \widetilde{\omega}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} \widetilde{\omega}\left(\nabla^N_{E_i} V\right)\right](p) \\
&= \widetilde{\omega}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\omega}\left(\nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_i} V\right)\right](p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\omega}^{-1} \widetilde{\omega}\left(\nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_i} V\right)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_i} V\right)(p) = \Delta^N V(p).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta \circ \widetilde{\omega}(V) = \widetilde{\omega} \circ \Delta^N(V)$. ∎

Proposição 1.2.4 ([Oh90, Proposition 3.9 p.509])**.**

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{J}} &:= \widetilde{\omega} \circ \mathcal{J} \circ \widetilde{\omega}^{-1} \\
&= \Delta_h + \widetilde{\omega} \circ \overline{\mathcal{R}} \circ \widetilde{\omega}^{-1} - \widetilde{\omega} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{\omega}^{-1} - R.
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega} \circ \mathcal{J} \circ \widetilde{\omega}^{-1} &= \widetilde{\omega} \circ \left(-\Delta^N + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right) \circ \widetilde{\omega}^{-1} \\
&= -\widetilde{\omega} \circ \Delta^N \circ \widetilde{\omega}^{-1} + \widetilde{\omega} \circ \left(\overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right) \circ \widetilde{\omega}^{-1} \\
&\overset{(\text{Lema } 1.2.3)}{=} -\Delta\left(\widetilde{\omega}\right) \circ \widetilde{\omega}^{-1} + \widetilde{\omega} \circ \left(\overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right) \circ \widetilde{\omega}^{-1} \\
&\overset{(1.1.11)}{=} \Delta_h - R + \widetilde{\omega} \circ \left(\overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right) \circ \widetilde{\omega}^{-1}.
\end{aligned}$$

∎

Lema 1.2.5 ([Oh90, Lemma 3.10 p.510])**.**

$$\langle B(X,Y), JZ\rangle = \langle B(X,Z), JY\rangle \quad \forall X, Y, Z \in TL$$

onde B é a segunda forma fundamental de L em M.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\langle B\left(X,Y\right),JZ\rangle &= \langle\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{N},JZ\rangle \\
&= \langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},JZ\rangle \\
&= \overline{X}\langle\overline{Y},JZ\rangle-\langle\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(JZ\right)\rangle \\
&= X\langle Y,JZ\rangle-\langle Y,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(JZ\right)\rangle \\
&= -\langle Y,J\overline{\nabla}_{\overline{X}}Z\rangle(M \text{ é Kähler, então } J \text{ é paralela: } \overline{\nabla}J=0) \\
&= \langle JY,\overline{\nabla}_{\overline{X}}Z\rangle \\
&= \langle JY,\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}Z\right)^{T}\rangle+\langle JY,\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}Z\right)^{N}\rangle \\
&= \langle JY,\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}Z\right)^{N}\rangle \\
&= \langle JY,B(X,Z)\rangle.
\end{aligned}
$$

Observamos que na quinta e na antepenúltima igualdades usamos o fato de que L é lagrangeana (1.1.9).

■

A fim de reescrever o segundo termo do lado direito da equação obtida em (1.2.4) em função da transformação de Ricci, consideraremos o seguinte lema auxiliar:

Lema 1.2.6. *Dado $V\in\Gamma(NL)$, vale que para todo referencial local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n}$:*

$$\langle(\widetilde{\omega}^{-1}\circ R\circ\widetilde{\omega})(V),V\rangle=-\sum_{i=1}^{n}\left[\langle\overline{K}\left(J(\overline{e_i}),V\right)J(\overline{e_i}),V\rangle-\langle B\left(e_i,JV\right),B\left(e_i,JV\right)\rangle\right].$$

Antes de iniciar a demonstração deste lema, vamos enunciar um resultado que será utilizado na prova:

Teorema 1.2.7 (Equação de Gauss)**.** *Dados $X,Y,Z,W\in T_pM$, então*

$$\langle\overline{K}(X,Y)Z,W\rangle=\langle K(X,Y)Z,W\rangle|_M-\langle B(X,W),B(Y,Z)\rangle+\langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle.$$

Demonstração. [Lee97] teorema 8.4. ■

Demonstração. Inicialmente, vamos verificar que é verdade que

$$\widetilde{\omega}^{-1}\circ R|_{\Omega^1(L)}\circ\widetilde{\omega}=J^{-1}\circ R\circ J. \tag{1.2.5}$$

Primeiramente, notemos que se $V\in\Gamma(NL)$, então $\flat(JV)=\omega(V,\cdot)$ onde $\flat$ é a inversa do isomorfismo musical $\sharp$ definido em (1.1.4). Com efeito,

$$\flat(JV)=\langle\cdot,JV\rangle|_{TL}=\omega(V,\cdot)=\widetilde{\omega}(V).$$

Ou seja, $\sharp \circ \widetilde{\omega} = J$. Portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^{-1} \circ R|_{\Omega^1(L)} \circ \widetilde{\omega} &= \widetilde{\omega}^{-1} \circ \sharp^{-1} \circ R \circ \sharp \circ \widetilde{\omega} \\ &= J^{-1} \circ R \circ J. \end{aligned}$$

Para analisar o termo $\widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega}$, consideremos um referencial local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ em TL e $\{\overline{e_i}\}_{i=1}^n$ extensões a campos de M:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega}(V), V \rangle &= \langle J^{-1} \circ R \circ J(V), V \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle K\left(J(V), e_i\right) e_i, JV \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle K\left(e_i, J(V)\right) e_i, JV \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left[\langle \overline{K}\left(\overline{e_i}, J(V)\right) \overline{e_i}, JV \rangle + \langle B\left(e_i, e_i\right), B\left(JV, JV\right) \rangle \right] \\ &- \sum_{i=1}^{n} \langle B\left(e_i, JV\right), B\left(e_i, JV\right) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\langle \overline{K}\left(\overline{e_i}, J(V)\right) J(\overline{e_i}), V \rangle - \langle B\left(e_i, JV\right), B\left(e_i, JV\right) \rangle \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left[\langle \overline{K}\left(J(\overline{e_i}), V\right) J(\overline{e_i}), V \rangle - \langle B\left(e_i, JV\right), B\left(e_i, JV\right) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Na quarta igualdade usamos equação de Gauss (Teorema 1.2.7) e o fato de que JV é ortogonal à $\left(\overline{K}\left(e_i, J(V)\right) e_i\right)^N$. Na quinta, usamos que L é subvariedade mínima e portanto, $H = \sum_{i=1}^{n} B\left(e_i, e_i\right) = 0$.

■

Lema 1.2.8 ([Oh90, Proposition 3.11 p.510])**.**

$$\left(\overline{R}|_{NL}\right)^N = -\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} \tag{1.2.6}$$

onde $\left(\overline{R}|_{NL}\right)^N$ *é a projeção de* $\left(\overline{R}|_{NL}\right)$ *em* NL*. Em particular, se* M *é também Einstein com constante de Einstein* c*,* $-\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} = \mathrm{c}Id$*.*

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\langle \left(\overline{R}|_{NL}\right)^N V, V \rangle = \langle -\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega}(V), V \rangle \quad \forall V \in NL.$$

A suficiência segue do fato que os operadores em (1.2.6) são auto-adjuntos:

- $\overline{\mathcal{R}}^* = \overline{\mathcal{R}}$: Sejam $V, W \in \Gamma(NL)$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial local ortonormal em TL então:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathcal{R}}(V), W \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \left(\overline{K}\left(\overline{e_i}, V\right) \overline{e_i} \right)^N, W \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{K}\left(\overline{e_i}, V, \overline{e_i}, W\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{K}\left(\overline{e_i}, W, \overline{e_i}, V\right) \text{ por Lema (1.1.6)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\langle \left(\overline{K}(\overline{e_i}, W)\overline{e_i} \right)^T, V \rangle + \langle \left(\overline{K}(\overline{e_i}, W)\overline{e_i} \right)^N, V \rangle \right] \\
&= \langle \left(\overline{K}(\overline{e_i}, W)\overline{e_i} \right)^N, V \rangle \\
&= \langle \overline{\mathcal{R}}(W), V \rangle.
\end{aligned}$$

De maneira análoga prova-se que $\left(\overline{R}|_{NL} \right)^N$ é auto-adjunto.

- $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$:

$$\widetilde{A} = B^* \circ B \Rightarrow \widetilde{A}^* = B^* \circ B.$$

- $\left(\widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} \right)^* = \left(\widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} \right)$: Ora, $\widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} = J^{-1} \circ R \circ J$. Como J é unitário, basta provar que R é auto-adjunto. Sejam $V, W \in TL$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial local ortonormal em TL, então

$$\begin{aligned}
\langle R(V), W \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle K\left(V, e_i\right) e_i, W \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n K\left(V, e_i, e_i, W\right) \\
&= \sum_{i=1}^n K\left(e_i, W, V, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n K\left(W, e_i, e_i, V\right) \\
&= \langle R(W), V \rangle.
\end{aligned}$$

Observação 1.2.9. Depois de provar que $\overline{\mathcal{R}}$ e $\widetilde{A}$ são auto-adjuntos, verifica-se que o operador de Jacobi, $\mathcal{J}$, também o é.

O Lema 1.2.6 nos forneceu uma expressão para o terceiro termo do lado direito de (1.2.6). Vamos fazer o mesmo procedimento com os outros dois termos separadamente:

Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial local ortonormal de TL, como V é normal, temos que

$$\langle \overline{\mathcal{R}}(V), V \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \overline{K}\left(\overline{e_i}, V\right) \overline{e_i}, V \rangle.$$

Iremos agora calcular $\langle \widetilde{A}(V), V \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{A}(V), V\rangle &= \langle B \circ B^*(V), V\rangle \\
&= \langle B^*(V), B^*V\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle B^*(V), e_i \otimes e_j\rangle \langle e_i \otimes e_j, B^*(V)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle V, B\left(e_i, e_j\right)\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[-\langle B\left(e_i, JV\right), Je_j\rangle\right]^2 \text{ (Lema 1.2.5).}
\end{aligned}$$

Na terceira igualdade, consideramos que ${B_p}^* : N_pL \to T_pL \otimes T_pL\ \forall p \in L$, então $B^*(V)$ pode ser escrito como $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \langle B^*(V), e_i \otimes e_j\rangle e_i \otimes e_j$.
Usando um raciocínio análogo, podemos ver que

$$B(e_i, JV) = \sum_{j=1}^{n} \langle B(e_i, JV), Je_j\rangle Je_j$$

uma vez que $\{Je_i\}_{i=1}^{n}$ é um referencial local ortonormal em NL. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|B(e_i, JV)\|^2 &= \langle B(e_i, JV), B(e_i, JV)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle B(e_i, JV), Je_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \widetilde{A}(V), V\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle B(e_i, JV), B(e_i, JV)\rangle^2.$$

Finalmente, utilizando todas as expressões calculadas anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}
\langle -\overline{\mathcal{R}}(V) + \widetilde{A}(V) + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega}(V), V\rangle &= \\
\sum_{i=1}^{n} \left[\langle -\left(\overline{K}\left(\overline{e_i}, V\right)\overline{e_i}\right), V\rangle + \langle B\left(e_i, JV\right), B\left(e_i, JV\right)\rangle\right] &- \\
\sum_{i=1}^{n} \left[\langle \overline{K}\left(\left(J\overline{e_i}, V\right)J\overline{e_i}\right), V\rangle + \langle B\left(e_i, JV\right), B\left(e_i, JV\right)\rangle\right] &= \\
\sum_{i=1}^{n}[\langle -\overline{K}\left(\left(J\overline{e_i}, V\right)J\overline{e_i}\right) - \left(\overline{K}\left(\overline{e_i}, V\right)\overline{e_i}\right), V\rangle] &= \\
\sum_{i=1}^{n}[-\overline{K}\left(J\overline{e_i}, V, J\overline{e_i}, V\right) - \overline{K}\left(\overline{e_i}, V, \overline{e_i}, V\right)] &= \\
\sum_{i=1}^{n}[\overline{K}\left(Je_i, V, V, Je_i\right) + \overline{K}\left(e_i, V, V, e_i\right)] &= \\
-\sum_{i=1}^{2n} \overline{K}\langle f_i, V, f_i, V\rangle &= \\
\langle \overline{R}(V), V\rangle = \mathrm{Ric}(V, V).&
\end{aligned}$$

Onde $\{f_i\}_{i=1}^{2n}$ é definido como o referencial local ortonormal $\{e_i, Je_i\}_{i=1}^{n}$ em TM. Além disso, pela última igualdade concluímos que se $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é Einstein com constante de Einstein c,

$$-\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} = c\mathrm{Id}.$$

■

Vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema mais importante do capítulo:

Teorema 1.2.10 ([Oh90, Theorem 3.5 p.508])**.** *[2ª fórmula de variação da área para subvariedades lagrangeanas] Seja $(M, \omega, \langle,\rangle)$ variedade Kähler, L subvariedade mínima e lagrangeana, então:*

$$\mathcal{J} = \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h \circ \widetilde{\omega} - \left(\overline{R}|_{NL}\right)^N. \tag{1.2.7}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\coloneqq -\Delta^N + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A} \\
&= -\widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta \circ \widetilde{\omega} + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A} \text{ (Lema 1.2.3)} \\
&\overset{(1.1.11)}{=} \widetilde{\omega}^{-1}(-R + \Delta_h)\widetilde{\omega} + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A} \\
&= -\widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega} + \overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h \circ \widetilde{\omega} \\
&= -\left(\overline{R}|_{NL}\right)^N + \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h \circ \widetilde{\omega} \text{ (Lema 1.2.8)}.
\end{aligned}$$

■

A partir de agora, teremos alguns resultados que providenciam condições suficientes para a estabilidade hamiltoniana de subvariedades lagrangeanas envolvendo a positividade da primeira classe de Chern, o que nos motiva a seguinte definição:

Definição 1.2.11. A **forma de Ricci** ρ numa variedade Kähler $(M, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é definida por:

$$\rho(X, Y) \coloneqq \mathrm{Ric}(X, JY).$$

Diremos que a forma de Ricci é **positiva definida** se $\mathrm{Ric}(X, X) > 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M) \setminus \{0\}$.

A forma de Ricci representa a primeira classe de Chern $c_1(M)$ como pode ser consultado em [Bes87, Proposition 2.75 p.79]. Assim, dizemos que a primeira classe de Chern de M é **positiva** se $\mathrm{Ric}(X, X) > 0$ para cada $0 \neq X \in TM$.

Teorema 1.2.12 ([Oh90, Theorem 3.6 p.508])**.** *Sejam $(M, \omega, \langle,\rangle)$ uma variedade Kähler com primeira classe de Chern não-positiva e L uma subvariedade mínima, lagrangeana e compacta. Então L é riemanniana estável.*

Demonstração. Seja $V \in \Gamma(NL)$, vamos verificar que $\mathcal{J}$ neste caso é não-negativo definido:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}(V), V\rangle &= \langle \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h \circ \widetilde{\omega}(V), V\rangle - \langle \left(\overline{R}|_{NL}\right)^N (V), V\rangle \\ &= \langle \Delta_h \circ \widetilde{\omega}(V), \widetilde{\omega}(V)\rangle - \langle \overline{R}(V), V\rangle.\end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos o fato que $\widetilde{\omega}$ é unitário e que a componente tangente de $\overline{R}(V)$ é anulada no produto interno com V. Para concluir, lembramos que Δ_h é positivo definido e que, por hipótese, $\langle \overline{R}(V), V\rangle = \mathrm{Ric}\,(V, V) \leq 0$. ■

Um corolário da segunda fórmula da variação (Teorema 1.2.10) fornece uma obstrução topológica para que L seja lagrangeana estável e que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Corolário 1.2.13 ([Oh90, Theorem 3.7 p.509])**.** *Assumindo $(M, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ variedade Kähler com primeira classe de Chern positiva e L uma subvariedade mínima, lagrangeana, lagrangeana estável e compacta, então*

$$H^1(L, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $H^1(L; \mathbb{R}) \neq \{0\}$. Então, pelo teorema de Hodge (Teorema 1.1.19) existe $0 \neq \alpha \in \Omega^1(L)$ harmônica. Em particular, como α é fechada, a variação $V_\alpha := \widetilde{\omega}^{-1}(\alpha)$ é lagrangeana.

Assim, por um lado, sendo L lagrangeana estável, vale que $\langle \mathcal{J}(V_\alpha), V_\alpha\rangle \geq 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}(V_\alpha), V_\alpha\rangle &= \langle \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h \circ \widetilde{\omega}(V_\alpha), V_\alpha\rangle - \langle \left(\overline{R}|_{NL}\right)^N V_\alpha, V_\alpha\rangle \qquad (1.2.8) \\ &= \langle \widetilde{\omega}^{-1} \circ \Delta_h(\alpha), V_\alpha\rangle - \langle \left(\overline{R}|_{NL}\right)^N V_\alpha, V_\alpha\rangle \\ &= -\langle \overline{R}|_{NL}(V_\alpha), V_\alpha\rangle = -\mathrm{Ric}\,(V_\alpha, V_\alpha) < 0\end{aligned}$$

onde em (1.2.8) aplicamos o Teorema 1.2.10. Por fim, chegamos a um absurdo. Logo, $H^1(L; \mathbb{R}) = \{0\}$. ■

Observação 1.2.14. No contexto de variedades Kähler-Einstein, que tem como exemplo variedades *flag*, a condição de ter a primeira classe de Chern positiva é equivalente a dizer que a constante de Einstein é positiva. De fato, se uma variedade Kähler-Einstein (M, g, ω) tem constante de Einstein c é verdade que $\rho = -c\omega$. Ora, $\rho(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, JY) = cg(X, JY) = -c\omega(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM$, daí que

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \rho(JX, X) > 0\ \forall X \in TM \Leftrightarrow c\omega(X, JX) > 0 \Leftrightarrow c|X|^2 > 0 \Leftrightarrow c > 0.$$

Exemplo 1.2.15. O toro de Clifford

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \times \ldots \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{n+1 \text{ vezes}} / S^1$$

é lagrangeano em $\mathbb{C}P^n$ munido da estrutura simplética de Fubini-Study ω_{FS}. Para demonstrar esse fato, iremos ver $\mathbb{C}P^n$ como um espaço reduzido, para isso, consideremos a ação de $G = S^1$ em $M = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por:

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (z, (z_1, \ldots, z_{n+1})) &\mapsto (z.z_1, \ldots, z.z_{n+1}). \end{aligned}$$

Ao munirmos M com a forma simplética canônica ω_M, tal ação é também simplética:

$$\begin{aligned} (\psi_t)_* : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ X = (v_1, \ldots, v_{n+1}) &\mapsto (tv_1, \ldots, tv_{n+1}) = tX \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} {\psi_t}^*\omega(X,Y) &= \omega(tX, tY) \\ &= \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{n+1} dz_i(tX)d\overline{z_i}(tY) - dz_i(tY)d\overline{z_i}(tX) \\ &= \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{n+1} t\bar{t}dz_i(X)d\overline{z_i}(Y) - t\bar{t}dz_i(Y)d\overline{z_i}(X) \\ &= \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{n+1} dz_i \wedge d\overline{z_i}(X,Y). \end{aligned}$$

A ação ψ é hamiltoniana com mapa momento dado por (cf. [DS06, p. 136])

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \frac{-\|z\|+1}{2}. \end{aligned}$$

Daí que $\mu^{-1}(0) = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e $M_{\text{red}} = \mathbb{C}P^n = \mu^{-1}(0)/S^1$. Sendo um espaço reduzido, $\mathbb{C}P^n$ é munido de uma estrutura simplética natural que vamos denotar por ω_{red} ([DS06, Theorem 23.1 p.141]). Sabe-se que $\omega_{\text{red}} = \omega_{FS}$ e que vale a seguinte propriedade geral:

$$i^*\omega_M = \pi^*\omega_{\text{red}} \tag{1.2.9}$$

onde $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ denota a inclusão natural e $\pi : M \to M_{\text{red}}$ a projeção canônica (vide [Gui94, Theorem 1.5 p.7]).

No nosso caso, tal inclusão é dada por:

$$\begin{aligned} i : S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ (x_1, y_2, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}) &\mapsto (x_1 + iy_2, \ldots, x_{n+1} + iy_{n+1}). \end{aligned}$$

A partir de agora, denotaremos $\underbrace{S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\times\ldots\times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{n+1 \text{ vezes}}$ por T^{n+1} e observamos que T^{n+1} é lagrangeano em $\mathbb{C}^n$, pois $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ o é em $\mathbb{C}$.

Para verificar que $\mathbb{T}^n$ é lagrangeano em $\mathbb{C}P^n$, vamos tomar $X, Y \in T\mathbb{T}^n$ e provar que $\omega_{\text{red}}(X,Y) = 0$. Ora, $\mathbb{T}^n = \pi(T^{n+1})$ então existem $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T(T^{n+1})$ tal que $X = \pi_*\widetilde{X}$ e $Y = \pi_*\widetilde{Y}$, com isso,

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{red}}\Big|_{\mathbb{T}^n}(X,Y) &= \omega_{\text{red}}\Big|_{\mathbb{T}^n}(\pi_*\widetilde{X}, \pi_*\widetilde{Y}) \\
&= (\pi^*\omega_{\text{red}})\Big|_{T^{n+1}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\
&\overset{(1.2.9)}{=} i^*\omega_M\Big|_{T^{n+1}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\
&= \omega_M\Big|_{T^{n+1}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0.
\end{aligned}$$

Onde a penúltima igualdade se deve ao fato que $i|_{T^{n+1}} = \text{id}$ e a última é verdadeira pois T^{n+1} é lagrangeano em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Além disso $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}P^n$ é mínimo (cf. [CHX12, Example 4.3 p.46]) e $\text{Ric} = (2n+1)g$ (1.3.9), logo $c_1(\mathbb{C}P^n)$ é positiva. Sendo $H^1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}\oplus\ldots\oplus\mathbb{R} \neq \{0\}$, $\mathbb{T}^n$ não é lagrangeano estável e portanto não é riemanniano estável.

Como corolário do Lema 1.2.8 e da Proposição 1.2.4, podemos encontrar a expressão do operador de Jacobi para o caso particular de M ser uma variedade Kähler-Einstein.

Corolário 1.2.16 ([Oh90, Proposition 4.1 p.511])**.** *Se $(M, \omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é uma variedade Kähler-Einstein com constante de Einstein c, então*

$$\widetilde{\mathcal{J}} = \Delta_h - c\text{Id}_{T^*L}$$

onde $\widetilde{\mathcal{J}}$ é o operador de Jacobi agindo nas $1-$formas de L.

Demonstração. Primeiramente, vamos notar que

$$\widetilde{\omega} \circ \left(\overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right)\widetilde{\omega}^{-1} - R = -c \cdot Id_{T^*L}.$$

Por (1.2.6), $c \cdot \text{Id}_{NL} = -\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A} + \widetilde{\omega}^{-1} \circ R \circ \widetilde{\omega}$ portanto,

$$c \cdot \text{Id}_{T^*L} = c \cdot \widetilde{\omega} \circ \text{Id}_{NL} \circ \widetilde{\omega}^{-1} = \widetilde{\omega}\left(-\overline{\mathcal{R}} + \widetilde{A}\right)\widetilde{\omega}^{-1} + R.$$

Agora, pela Proposição 1.2.4, concluímos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{J}} &= \Delta_h + \widetilde{\omega} \circ \left(\overline{\mathcal{R}} - \widetilde{A}\right)\widetilde{\omega}^{-1} - R \\
&= \Delta_h - c \cdot \text{Id}_{T^*L}.
\end{aligned}$$

∎

O seguinte resultado é consequência do corolário anterior e estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma subvariedade mínima, lagrangeana de uma variedade Kähler-Einstein seja estável no sentido riemanniano.

Corolário 1.2.17 ([Oh90, Corollary 4.2 p.512]). *Uma subvariedade mínima, lagrangeana L de uma variedade Kähler Einstein $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, \omega)$ de constante de Einstein c, é riemanniana estável se e somente se*

$$\mu_1 \geq c$$

onde μ_1 é o primeiro autovalor, isto é, o menor autovalor positivo de Δ_h agindo nas 1-formas de L.

Demonstração. L será riemanniana estável se e somente se $\mathcal{J}|_{NL} \geq 0$, ou seja, se e somente se $\widetilde{\mathcal{J}}|_{T^*L} \geq 0$.
($\Rightarrow$) Sendo L riemanniana estável, $\widetilde{\mathcal{J}}|_{T^*L} \geq 0$. Ora,

$$\Delta_h - \mu_1 \mathrm{Id}_{T^*L} = 0 \leq \widetilde{\mathcal{J}} = \Delta_h - c\mathrm{Id}_{T^*L}$$

Portanto, $c \leq \mu_1$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se $\mu_1 \geq c$ então, $0 = \Delta_h - \mu_1 \mathrm{Id}_{T^*L} \leq \Delta_h - c\mathrm{Id}_{T^*L} = \widetilde{\mathcal{J}}$. ∎

Observação 1.2.18. A partir de agora, dado um espaço vetorial V e um operador $T \in \mathcal{L}(V, V)$, o conjunto dos autovalores de T será denotado por $\mathrm{Spec}(T)$.

Corolário 1.2.19 ([Oh90, Corollary 4.3 p.512]). *Se $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, \omega)$ é uma variedade Kähler-Einstein, com constante de Einstein c e $i : L \hookrightarrow M$ é uma subvariedade lagrangeana de M, temos que os subespaços $\Gamma_1(NL)$ e $\Gamma_2(NL)$ definidos em (1.1.10) são invariantes pelo operador de Jacobi $\mathcal{J}$ em $\Gamma(NL)$.*

Demonstração. Lembremos que a soma $\Gamma(NL) = \Gamma_1(NL) \bigoplus \Gamma_2(NL)$ é ortogonal portanto, se $N_1 \in \Gamma_1(NL)$ e $N_2 \in \Gamma_2(NL)$, $\mathcal{J}(N_1) \in \Gamma_1(NL) \Leftrightarrow \langle \mathcal{J}(N_1), N_2\rangle = 0$ e $\mathcal{J}(N_2) \in \Gamma_2(NL) \Leftrightarrow \langle \mathcal{J}(N_2), N_1\rangle = 0$.

Além disso, $i^*(\omega \lrcorner N_1) \in \mathrm{Im}\, d$ portanto escreveremos $i^*(\omega \lrcorner N_1) = d\eta$ para alguma

$\eta \in \Omega^0(L)$ e $\omega \lrcorner N_2 \in \ker(\delta)$, que justificam:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}(N_1), N_2\rangle &= \langle \widetilde{\omega}^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{J}} \circ \widetilde{\omega}(N_1), N_2\rangle \\
&= \langle \widetilde{\mathcal{J}} \circ \widetilde{\omega}(N_1), \left(\widetilde{\omega}^{-1}\right)^* N_2\rangle \\
&= \langle \widetilde{\mathcal{J}} \circ \widetilde{\omega}(N_1), \widetilde{\omega}(N_2)\rangle \\
&= \langle (\Delta_h - c\mathrm{Id}_{T^*L})\, i^*\left(N_1 \lrcorner \omega\right), i^*(N_2 \lrcorner \omega)\rangle \\
&= \langle (d\delta + \delta d)\, d\eta, i^*(N_2 \lrcorner \omega)\rangle - c\langle i^*(N_1 \lrcorner \omega), i^*(N_2 \lrcorner \omega)\rangle \\
&= \langle d\delta d\eta, i^*\left(N_2 \lrcorner \omega\right)\rangle - c\langle d\eta, N_2 \lrcorner \omega\rangle \\
&= \langle \delta d\eta, \delta i^*\left(N_2 \lrcorner \omega\right)\rangle - c\langle d\eta, N_2 \lrcorner \omega\rangle \\
&= -c\langle \eta, \delta i^*\left(N_2 \lrcorner \omega\right)\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Vamos agora provar a invariância de $\Gamma_2(NL)$:

$$\begin{aligned}
\langle N_1, \mathcal{J}(N_2)\rangle &= \langle N_1, \widetilde{\omega}^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{J}} \circ \widetilde{\omega}(N_2)\rangle \\
&= \langle \widetilde{\omega}(N_1), \widetilde{\mathcal{J}} \circ \widetilde{\omega}(N_2)\rangle \\
&= \langle i^*(N_1 \lrcorner \omega), (\Delta_h - cId_{T^*L})\, i^*\left(N_2 \lrcorner (\omega)\right)\rangle \\
&= \langle i^*(N_1 \lrcorner \omega), (d\delta + \delta d)\, i^*\left(N_2 \lrcorner (\omega)\right)\rangle - c\langle i^*(N_1 \lrcorner \omega), i^*(N_2 \lrcorner \omega)\rangle \\
&= \langle d\eta, \delta d i^*\left(N_2 \lrcorner \omega\right)\rangle \\
&= \langle d^2\eta, d\left(N_2 \lrcorner \omega\right)\rangle = 0.
\end{aligned}$$

■

Agora podemos provar o corolário mais interessante da segunda fórmula da variação proposta por Yong-Geun Oh. Tal resultado fornece uma equivalência, sob as hipóteses corretas, para que uma subvariedade lagrangeana de uma variedade Kähler-Einstein seja hamiltoniana estável e é enunciado da seguinte maneira:

Teorema 1.2.20 ([Oh90, Theorem 4.4 p.512])**.** *Assuma que M é uma variedade Kähler-Einstein com constante de Einstein c. Então, uma subvariedade lagrangeana, compacta e mínima L é (localmente) hamiltoniana estável, isto é, $\mathcal{J}|_{\Gamma_1(NL)}$ é positivo semi-definida se e somente se $\lambda_1(L) \geq c$, onde $\lambda_1(L)$ é o primeiro autovalor (menor autovalor positivo) de $-\Delta$ agindo em $C^\infty(L)$.*

Demonstração. L é hamiltoniana estável $\Leftrightarrow \mathcal{J}|_{\Gamma_1(NL)}$ é positivo semi-definido $\Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{J}}|_{\mathrm{Im}d}$ é positivo semi-definido $\Leftrightarrow \Big(\lambda \in \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{J}}) \Rightarrow \lambda \geq 0\Big)$.

Seja $\lambda \in \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathcal{J}}|_{\Gamma_1(NL)}\right)$ associado à $\alpha = df$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\int\limits_L f = 0$ afinal, se $\int\limits_L f = k$, poderíamos tomar $g = f - k$ e $\alpha = dg$. Por hipótese,

$$\widetilde{\mathcal{J}}\,(df) = \lambda df.$$

Ora, $\widetilde{\mathcal{J}}\,(df) = (\Delta_h - c\mathrm{Id})\,(df) = (d\delta + \delta d - c\mathrm{Id})\,df$. Ou seja, $d\delta df - cdf = \lambda df$ logo, $d\,(\delta d - (c+\lambda))\,f = 0$, dai que $(\delta d - (c+\lambda))\,f = k$ onde k é uma constante. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_L \Delta_h f * 1 \\ &= \int_L \Delta_h f \ \mathrm{Vol}_L \\ &= \int_L \delta df - \int_L (c+\lambda)\,f \\ &= \int_L k = k \ \mathrm{Vol}_L. \end{aligned}$$

Onde a primeira igualdade é consequência do lema de Hopf (Lema 1.1.18) e, na terceira igualdade, o termo $\int_L (c+\lambda)\,f$ é nulo. A partir disto, concluímos que $k=0$ e que portanto, $\delta df = (c+\lambda)\,f$. Segue da fórmula de Weitzenböck (1.1.11) para $0-$formas que $\delta df = -\Delta_L f$, logo $(c+\lambda) \in \ \mathrm{Spec}\,(-\Delta_L)$. Fazendo o caminho inverso dessa parte da demonstração conclui-se que todo autovalor de $\widetilde{J}$ é da forma $\widetilde{\lambda}+c$ onde λ é um autovalor de $-\Delta_L$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda} \in \ \mathrm{Spec}\,(-\Delta_L) \ &\Rightarrow \ \delta df = \widetilde{\lambda} f \\ &\Rightarrow \ \left(\delta d - \widetilde{\lambda}\mathrm{Id}\right) f = 0 \\ &\Rightarrow \ d\left(\delta d - \widetilde{\lambda}\mathrm{Id}\right) f = 0 \\ &\Rightarrow \ d\delta\,(df) = \widetilde{\lambda} df \\ &\Rightarrow \ \Delta_h df = \widetilde{\lambda} df \\ &\Rightarrow \ \left(\Delta_h - \widetilde{\lambda}\right) df = 0. \end{aligned}$$

Tome $\lambda := \widetilde{\lambda} - c$, então

$$0 = (\Delta_h - (\lambda + c)\mathrm{Id})\,df \Rightarrow (\Delta_h - c\mathrm{Id})\,df = \lambda df \Rightarrow \widetilde{\mathcal{J}}(df) = \lambda df \Rightarrow \lambda \in \ \mathrm{Spec}\left(\widetilde{\mathcal{J}}\right).$$

Ou seja, dado um autovalor $\widetilde{\lambda}$ de $-\Delta_L$, obtemos um de $\widetilde{\mathcal{J}}$ apenas tomando-o como $\widetilde{\lambda} - c$.

($\Rightarrow$) Sabemos que $\lambda_1(L) = \lambda + c$ para algum $\lambda \in \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{J}})$. Por hipótese $\lambda \geq 0$ portanto, devemos ter $\lambda_1(L) \geq c$.

($\Leftarrow$) Suponhamos por hipótese que $\lambda_1(L) \geq c$. Se $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{J}})$, então $\widetilde{\lambda} = \lambda - c$ para algum $\lambda \in \mathrm{Spec}(-\Delta_L)$. Sendo $\lambda_1(L)$ o primeiro autovalor de $-\Delta_L$, $\lambda_1(L) \leq \lambda$ logo,

$$\widetilde{\lambda} \geq \lambda_1(L) - c \geq 0.$$

■

1.3 Exemplos

Esta seção é destinada a esclarecer os fatos que justificam o fato de $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{T}^n$ serem subvariedades hamiltonianas estáveis de $\mathbb{C}P^n$.

O primeiro resultado que será utilizado neste e nos próximos capítulos garante que $\mathbb{R}P^n$ é lagrangeano e mínimo em $\mathbb{C}P^n$. Em particular, $\mathbb{R}P^n$ é uma **forma real** de $\mathbb{C}P^n$ e subvariedades desse tipo são sempre totalmente geodésicas, portanto mínimas, como veremos a seguir.

Definição 1.3.1. Seja $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{J})$ uma variedade Kähler. Uma subvariedade riemanniana M de $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{J})$ é dita **forma real** de $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ se existe uma isometria anti-holomorfa involutiva θ de $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ tal que

$$M = \{p \in \overline{M} : \theta(p) = p\}.$$

O teorema a seguir e sua demonstração podem ser encontrados em [Kob72, Theorem 5.1 p.59]. Enunciamos aqui dois resultados comuns de geometria riemanniana utilizados nesta demonstração.

Lema 1.3.2. *Seja M uma variedade riemanniana e $p_0 \in M$. Então $\exists U \in \mathcal{U}_{p_0}$ e $\epsilon > 0$ tal que $\forall p \in U$ e $v \in T_pM$ com $\|v\| < \epsilon$ existe uma única geodésica $\gamma_v : (-2, 2) \to M$ com $\gamma_v(0) = p_0$ e $\gamma_v'(0) = v$.*

Demonstração. [Mil69] lema 10.2. ■

Lema 1.3.3 (Naturalidade do mapa exponencial)**.** *Seja $\varphi : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ uma isometria, então para todo $p \in M$ temos:*

$$\exp_{\varphi(p)}(\mathrm{d}\varphi_p) = \varphi(\exp_p).$$

Demonstração. Proposição 21 parte 2, [Pet06]. ■

Teorema 1.3.4. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana e tome $\emptyset \neq \sigma$ um conjunto de isometrias de (M, g). Defina*

$$F \coloneqq \bigcap_{\theta \in \sigma} \{x \in M : \theta(x) = x\}$$

o conjunto dos pontos fixados por todos os elementos de σ. Então cada componente conexa de F é uma subvariedade de M fechada e totalmente geodésica, com relação à métrica induzida.

Demonstração. Inicialmente, verificamos o fato de F ser uma subvariedade de M.

Suponha $F \neq \emptyset$ e $x \in F$. Sejam V o subespaço de T_xM consistindo dos vetores fixados por todos os elementos de $d\sigma_x$ e U^* uma vizinhança da origem em T_xM tal que $\exp_x : U^* \to M$ é um difeomorfismo sobre a imagem. Tal vizinhança sempre existe pelo lema (1.3.2).Denotemos por U a imagem de U^* por $\exp_x$. Podemos assumir que U é uma vizinhança convexa (basta diminuir U^* se necessário).

A relação $U \cap F = \exp_x(U^* \cap V)$ é consequência direta do Lema 1.3.3. Donde a vizinhança $U \cap F$ de x em F é uma subvariedade, afinal é imagem por uma imersão injetiva. Logo, F consiste na união de subvariedades de M e F é fechado. De fato, se (x_n) é uma sequência em F que converge para x e $\theta \in \sigma$, então $\theta(x_n) = x_n$ converge para $\theta(x)$. Como estamos num espaço Hausdorff, o limite de sequências é único, o que força $\theta(x)$ ser x para todo $\theta \in \sigma$.

Se dois pontos de F estão suficientemente próximos de maneira que podem ser ligados por uma única geodésica minimizante, então todos os pontos dessa geodésica devem ser fixadas por σ. De fato, se γ é a geodésica minimizante ligando tais pontos, $\theta(\gamma)$ também é uma geodésica ligando os dois pontos com o mesmo comprimento de γ (já que θ é uma isometria), portanto $\theta(\gamma) = \gamma$.
Daí concluímos que cada componente de F é totalmente geodésica. Afinal, seja γ uma geodésica de F, cubra-a por finitos abertos de M de maneira que γ é a única geodésica que minimiza a distância entre dois pontos dessa geodésica no aberto. Olhando para um desses abertos, pela observação anterior, a geodésica de M que minimiza a distância entre os pontos dessa geodésica é de fato uma geodésica de F, fazendo com que esta parte da geodésica seja a geodésica minimizante de M. Repetindo o mesmo processo em todos os abertos, inferimos que γ é uma geodésica de M.

■

Observação 1.3.5. Se considerarmos o espaço projetivo complexo munido da métrica de Fubini-Study verificamos que

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}P^n &\to \mathbb{C}P^n \\ \langle v \rangle &\mapsto \langle \overline{v} \rangle \end{aligned}$$

é uma involução isométrica e anti-holomorfa, onde $\langle v \rangle$ indica o ponto de $\mathbb{C}P^n$ associado à reta que tem v como vetor diretor e $\overline{v}$ indica o conjugado complexo de v.

Os pontos fixos dessa involução formam precisamente o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$:

Queremos achar $v \in \langle v_1 \rangle = \langle \overline{v_1} \rangle$ tal que $v \in \mathbb{R}^n$. No caso devemos ter $v_1 = \lambda \overline{v_1}, \lambda \in \mathbb{C}$, portanto, se $v_1 = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_i \in \mathbb{C}$

$$\lambda = \frac{w_i}{\overline{w_i}} \quad \forall w_i \neq 0$$

Para que v_1 gere uma reta complexa, v_1 deve ser não nulo e portanto existe pelo menos um i tal que $w_i \neq 0$.
Se tiver apenas um i tal que $w_i \neq 0$, digamos o w_1 então $v_1 = w_1 (1, 0, \ldots, 0)$ e ao tomarmos $v = (1, 0, \ldots, 0)$ a afirmação está provada.
Se houver dois $i's$ tais que $w_i \neq 0$, digamos w_1 e w_2 então devemos ter

$$\lambda = \frac{w_1}{\overline{w_1}} = \frac{w_2}{\overline{w_2}}$$

Ou seja,

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_1 e^{-i\theta_1}} = \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_2 e^{-i\theta_2}}$$

Logo, $\lambda = e^{2i\theta_1} = e^{2i\theta_2}$ e $e^{2i(\theta_1 - \theta_2)} = 1$, ou seja, $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$ e $(\theta_1 - \theta_2) = K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$. Os únicos casos interessantes são para $K = 0$ ou $K = 1$
Para o caso $K = 0$:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 \Rightarrow w_1 = r_1 e^{i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} r_2 e^{i\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} w_2 \Rightarrow v_1 = \frac{r_1}{r_2} w_2 (1, 1, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

e podemos tomar $v = (1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Já o caso $K = 1$:

$$\theta_1 = -\theta_2 \Rightarrow w_1 = -r_1 e^{i\theta_2} = -\frac{r_1}{r_2} r_2 e^{i\theta_2} = -\frac{r_1}{r_2} w_2$$

Logo,

$$v_1 = \left(w_1, -\frac{r_1}{r_2} w_1, 0, \ldots, 0 \right)$$

e podemos tomar $v = \left(1, -\frac{r_2}{r_1}, 0, \ldots, 0\right)$. Com isso, a afirmação fica provada também para este caso.

Sempre que houver $w_j, w_k \neq 0$ com $j \neq k$, então $e^{i\theta_j} = e^{\pm i\theta_k}$. Portanto, o que foi feito até agora é suficiente para mostrar a existência de um vetor em $\mathbb{R}^n$ representando os pontos fixos de σ.

Pelo teorema anterior, $\mathbb{R}P^n$ com a métrica induzida da métrica Fubini-Study, é totalmente geodésico e portanto mínimo em $\mathbb{C}P^n$.

Outro resultado importante relacionado a formas reais é a proposição seguinte, encontrada em [Oh90, Proposition 6.1 p.516] que garante que formas reais de variedades Kähler, além de mínimas, são lagrangeanas.

Proposição 1.3.6. *Seja M uma variedade Kähler e θ uma isometria involutiva anti-holomorfa. Então o conjunto dos pontos fixos de θ, L, é uma subvariedade lagrangeana e totalmente geodésica de M.*

Demonstração. L é uma subvariedade totalmente geodésica pelo teorema (1.3.4). Sabemos de (1.1.9) que uma subvariedade ser lagrangeana é equivalente à decomposição $T_pM = T_pL \bigoplus J_pT_pL$ ser uma decomposição em soma direta ortogonal para todo $p \in L$. Chamemos de E_1 o autoespaço de θ_* associado ao autovalor 1 e E_2 o autoespaço de θ_* associado ao autovalor -1.
Iremos provar que $E_1 = T_pL$ e que $E_2 = J_pT_pL$.

- $E_1 = T_pL$
  $(T_pL \subseteq E_1)$.
  Sejam $v \in T_pL$ e $\gamma(t)$ curva em L tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então
  $$v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\theta\left(\gamma(t)\right) = d\theta_p(v).$$
  Logo $v \in E_1$.
  $(E_1 \subseteq T_pL)$
  Seja $v \in E_1$ então $v = v_1 + Jv_2$ onde $v_1, v_2 \in T_pL$. Pela inclusão anterior, $d\theta_p v_1 = v_1$. Como $d\theta_p(v) = v$, devemos ter também que $d\theta_p(Jv_2) = Jv_2$ o que implica que $Jv_2 \in T_pL$. Mas $Jv_2 \in JT_pL = N_pL$, daí que $v_2 = 0$ e $v_1 = v \in T_pL$.

- $E_2 = JT_pL$
  $(JT_pL \subseteq E_2)$
  Como θ é anti-holomorfa, temos que $d\theta_p \circ J = -J \circ d\theta_p$. Logo, se $v \in T_pL = E_1$,
  $$d\theta_p\left(J(v)\right) = -J\left(d\theta_p(v)\right) = -J(v).$$
  Donde, $J(v) \in E_2$.

  $(E_2 \subseteq JT_pL)$
  Seja $v \in E_2$, então $d\theta_p(v) = -v$ logo, $J\left(d\theta_p(v)\right) = -Jv$. Sendo θ anti-holomorfa, vale que $-d\theta_pJv = -Jv$, isto é, $d\theta_pJv = Jv$, donde $Jv \in E_1$ e $v \in JE_1$.

  $(E_2 \subseteq JT_pL)$
  Essa inclusão é clara uma vez que a dimensão destes espaços é a mesma e a outra inclusão já foi demonstrada.

■

Por esta proposição podemos concluir que além de mínimo, $\mathbb{R}P^n$ é lagrangeano em $\mathbb{C}P^n$.

Nossa intenção agora é calcular a constante de Einstein de $\mathbb{R}P^n$ com a métrica induzida da métrica de Fubini-Study em $\mathbb{C}P^n$. Como $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade complexa, faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.3.7. Seja (M, g, J) uma variedade riemanniana munida de uma estrutura complexa J. Nas condições da definição 1.1.11, se p é um plano invariante por J, então $K(p)$ é chamada de **curvatura seccional holomorfa** por p.

Observação 1.3.8. Embora, a referência para os próximos parágrafos seja [KN69], pode-se notar uma diferença de sinal devido à uma diferença de sinal entre a definição de curvatura do Kobayashi e do Ono. Mas, se considerarmos esta discrepância em todos os resultados citados, eles ainda servirão como referência.

De acordo com [KN69, pp.166-167], dados uma variedade riemanniana (M, g) e $X, Y, Z, W \in TM$, o mapa

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,Z,W) &= -\frac{1}{4}\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) + g(X,JZ)g(Y,JW) \\ &- g(X,JW)g(Y,JZ) + 2g(X,JY)g(Z,JW)\} \end{aligned}$$

satisfaz as condições de [KN69, Proposition 7.1 p.166]. Portanto, por [KN69, Proposition 7.3 p.167], se a curvatura seccional holomorfa de M é constante igual a c, então o tensor curvatura K satisfaz $K = cR_0$.

Como W é arbitrário, podemos considerar que

$$K(X,Y)Z = -c\frac{1}{4}\{Yg(X,Z) - Xg(Y,Z) - JYg(X,JZ) + JXg(Y,JZ) - 2JZg(X,JY)\}.$$

Observação 1.3.9. Como estamos interessados no caso do $\mathbb{C}P^n$, vamos considerá-lo com a métrica Fubini-Study e curvatura seccional holomorfa constante igual a 4 (existe, por [KN69, Theorem 7.8 p.169]) e então teremos que

$$K(X,Y)Z = -Yg(X,Z) + Xg(Y,Z) + JYg(X,JZ) - JXg(Y,JZ) + 2JZg(X,JY).$$

Donde, se $\{e_i, Je_i\}$ é um referencial ortonormal de TM,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} K(X,e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{n} -e_i g(X,e_i) + Xg(e_i,e_i) + Je_i g(X,Je_i) - JXg(e_i,Je_i) + 2Je_i g(X,Je_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} -e_i g(X,e_i) + X + 3Je_i g(X,Je_i) \\
&= 2nX + \sum_{i=1}^{n} -\left(e_i g(X,e_i) - 3Je_i g(X,Je_i)\right) \\
&= 2nX - X + 3X \\
&= 2(1+n)X.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\sum\limits_{i=1}^{n} K(X,e_i)e_i = 2(n+1)X$. Ora, $R(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} K(X,e_i)e_i = 2(n+1)X$, isto é $R = 2(n+1)I$. De acordo com a observação 1.1.9, descer um índice de R fornece o tensor de Ricci e pode-se perceber que descer um índice do operador identidade fornece a métrica. Ou seja, neste caso temos $\mathrm{Ric} = 2(n+1)g$, isto é $2(n+1)$ é a constante de Einstein procurada.

De acordo com a observação 1.3.9, a constante de Einstein de $\mathbb{R}P^n$, isto é, $c\left(\mathbb{R}P^n\right)$ é igual a $2(n+1)$. Para mostrar que $\mathbb{R}P^n$ é hamiltoniano estável em $\mathbb{C}P^n$, basta verificarmos que $\lambda_1\left(\mathbb{R}P^n\right) \geq 2(n+1)$, tal verificação ficará clara após a proposição a seguir:

Proposição 1.3.10 ([Oh90, Lemma 5.1 p.513])**.**

$$\lambda_1\left(\mathbb{R}P^n\right) = 2(n+1).$$

Demonstração. Sabe-se que a métrica de $\mathbb{R}P^n$ induzida da métrica de Fubini-Study de $\mathbb{C}P^n$ é a mesma de $\mathbb{R}P^n$ visto como o quociente de S^n por $\mathbb{Z}_2$. Daí, se

$$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$$

é a projeção canônica, devemos ter naturalmente que $\pi^* \circ \Delta_{\mathbb{R}P^n} = \Delta_{S^n} \circ \pi^*$.
Inferimos que f é autofunção de $\Delta_{\mathbb{R}P^n}$ se e somente se $\pi^* f$ é autofunção de Δ_{S^n}. Afinal,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{R}P^n} f = \alpha f \Rightarrow \alpha\pi^* f &= \pi^*\left(\alpha f\right) = \pi^* \circ \Delta_{\mathbb{R}P^n} f \\
&= \Delta_{S^n} \circ \pi^*\left(\alpha f\right) = \alpha\Delta_{S^n}\left(\pi^* f\right)
\end{aligned}$$

Notemos que funções pares de S^n, podem ser identificadas com as funções de $\mathbb{R}P^n$ via π^*.

Desta maneira, podemos considerar as autofunções de Δ_{S^n}. É conhecido que as autofunções de Δ_{S^n} são as funções polinomiais homogêneas e harmônicas $p_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, de grau k, às quais estão associados os autovalores $k(k+n-1)$ [GLP99]. Pelos comentários anteriores, as autofunções de $\Delta_{\mathbb{R}P^n}$ se originam das autofunções pares de Δ_{S^n}. Por se tratarem de polinômios, tais autofunções são dadas pelos p_k com k par. Lembrando que o primeiro autovalor do laplaciano é o menor autovalor positivo, concluímos que $\lambda_1(\mathbb{R}P^n) = 2(n+1)$ (caso $k = 2$).

■

Como $\lambda_1(\mathbb{R}P^n) = c$, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.3.11. [Oh90, Theorem 5.2 p.514] *$\mathbb{R}P^n$ é hamiltoniano estável em $\mathbb{C}P^n$.*

Yong-Geun Oh em [Oh90] fornece outro exemplo de subvariedade lagrangeana, mínima e hamiltoniana estável em $\mathbb{C}P^n$: o toro de Clifford (definido no exemplo 1.2.15).

Teorema 1.3.12. [Oh90, Theorem 5.4 p.514] *O toro de Clifford $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}P^n$ que é lagrangeano e mínimo em $\mathbb{C}P^n$ é hamiltoniano estável.*

Capítulo 2

Estabilidade Hamiltoniana em órbitas adjuntas

Neste capítulo nos focaremos em um caso particular de variedades Kähler, as órbitas adjuntas. As órbitas adjuntas possuem uma estrutura quase complexa integrável canônica e uma métrica também canônica. Tais estruturas dão origem à uma $2-$forma compatível que, em geral, não é simplética. Porém, é possível definir em tais variedades uma forma simplética, chamada de forma de Kirillov-Kostant-Souriau. Todos esses tensores serão discutidos mais detalhadamente a seguir.

Hajime Ono em seu o artigo ([Ono03]) nos fornece estimativas para o primeiro autovalor do laplaciano agindo nas funções suaves e para o volume de subvariedades lagrangeanas de órbitas adjuntas, na situação em que a $2-$forma compatível com a métrica e a estrutura complexa canônicas é um múltiplo positivo da forma de Kirillov-Kostant-Souriau. Este capítulo é destinado a compreender tal artigo e relacioná-lo com os resultados obtidos por Oh em ([Oh90]).

2.1 Preliminares

Esta seção tem como objetivo fornecer os pré-requisitos necessários para a compreensão de [Ono03]. Para isso, faremos um breve estudo de álgebras de Lie semissimples, variedades homogêneas, variedades *flag* e suas geometrias.

2.1.1 Álgebras de Lie semissimples

Nesta subseção vamos apenas expor alguns conceitos e fixar algumas notações acerca de álgebras de Lie semissimples que serão úteis ao longo do texto. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto citamos [SM10] .

Definição 2.1.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é dita **subálgebra de Cartan** se

- $\mathfrak{h}$ é nilpotente.
- O normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ é $\mathfrak{h}$, isto é, seja $X \in \mathfrak{g}$, se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$.

Em álgebras de Lie de dimensão finita, sempre existem subálgebras de Cartan (cf. [SM10, Corolário 4.4 p.106]).

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, então $\mathfrak{g}$ se decompõe da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde R é o conjunto das raízes de $\mathfrak{g}$ com relação à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Lembramos que $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ é uma **raiz**, ou seja, $\alpha \in R$ se e somente se o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | [X, H] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

é não nulo. Para cada $\alpha \in R$ chamamos $\mathfrak{g}_\alpha$ de **espaço de raízes**.

Observação 2.1.2. Ao longo do texto manteremos as notações utilizadas acima:

- $\mathfrak{h}$ será subálgebra de Cartan da álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$, a menos que seja dito o contrário;
- R denotará o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com relação à $\mathfrak{h}$;
- $\mathfrak{g}_\alpha$ denotará um espaço de raiz associado à raiz α.

Definição 2.1.3. Um **sistema simples de raízes**, Σ, é um subconjunto de R satisfazendo:

- Σ é uma base de $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q}$, onde $\mathfrak{h}^*_\mathbb{Q} := \text{span}_\mathbb{Q}\{\alpha\}_{\alpha \in R}$;
- Toda raiz α pode ser escrita como combinação linear dos elementos de Σ com coeficientes inteiros de mesmo sinal.

Uma raiz α é dita **positiva** se α é escrita como combinação linear positiva de raízes simples. O conjunto das raízes positivas é denotado por R^+ e define uma **ordenação** em R, isto é:

- $R^+ \cap (-R^+) = \emptyset$ e $R^+ \cup (-R^+) = R$;
- Se α e β são raízes positivas tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz, então $\alpha + \beta$ é uma raiz também positiva.

Uma **base de Weyl** de $\mathfrak{g}$, cuja existência é demonstrada em [SM10, p.335] é formada por elementos $H_\alpha \in \mathfrak{h},\ \alpha \in \Sigma$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha \in R$ satisfazendo:

1. $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$;
2. $[X_\alpha, X_\beta,] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$;

onde $m_{\alpha,\beta} = 0$ se $\alpha + \beta \notin R$ e $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$.

A partir de uma base de Weyl, consideremos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B} := \{iH_\alpha, (X_\alpha - X_{-\alpha}), i(X_\alpha + X_{-\alpha})\}_{\alpha \in R^+}.$$

Se tomarmos o span real de $\mathcal{B}$ obtemos a forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$, isto é, $\mathfrak{u}$ é compacta e $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$ (cf. [SM10, pp.335-336]).

A fim de facilitar a escrita, adotaremos as seguintes notações:

$$A_\alpha := (X_\alpha - X_{-\alpha}) \text{ e } S_\alpha := i(X_\alpha + X_{-\alpha}).$$

2.1.2 Variedades homogêneas

Veremos mais adiante que órbitas adjuntas são, em particular, variedades homogêneas. Nesta subseção apresentaremos as variedades homogêneas e comentaremos sobre estruturas complexas e riemannianas invariantes que aparecem neste tipo de variedade.

Definição 2.1.4. Uma variedade M é dita **homogênea** se existe um grupo de Lie G que age transitivamente nela. Neste caso, M pode ser escrita como G/K onde K é o estabilizador de um (portanto qualquer) ponto de M.

Atentamos para a existência de um ponto distinguido em M que denotaremos, salvo menção ao contrário, por o e corresponde à origem da variedade homogênea, isto é, $o = eK$.

Dizemos que uma variedade homogênea $M = G/K$ é **redutível** se $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$$

com $\mathfrak{l} = \text{Lie}(K)$ (o que implica que $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$) e $\mathfrak{m}$ um complemento $\text{Ad}(K)-$invariante, isto é, $\text{Ad}(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\ \forall k \in K$, onde Ad denota a imagem da representação adjunta do grupo de Lie G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Tal decomposição implica que

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

De fato, se tomarmos o elemento de $k = \exp tX,\ X \in \mathfrak{l}$, notamos que $k \in K$ logo, pela hipótese de invariância, dado qualquer $Y \in \mathfrak{m}$, vale que:

$$\text{Ad}\,(\exp tX)\,Y \in \mathfrak{m}.$$

Sendo $\mathfrak{m}$ um espaço fechado, concluímos que

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{Ad}\,(\exp tX)\,Y$$

também deve ser um elemento de $\mathfrak{m}$. Donde $[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Se M é uma variedade homogênea redutível, dado $X \in \mathfrak{g}$, escreveremos $X = X_{\mathfrak{l}} + X_{\mathfrak{m}}$ com $X_{\mathfrak{l}}$ sua componente em $\mathfrak{l}$ e $X_{\mathfrak{m}}$ sua componente $\mathfrak{m}$.

Observação 2.1.5. Observamos que, no caso de G ser semissimples tal decomposição sempre existe, uma vez que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada e $\text{Ad}(G)-$invariante. Neste caso, é suficiente tomar $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^{\perp}$ com relação a tal produto interno.

Outro caso em que a redutibilidade é trivial é quando G é compacto. A álgebra de Lie de grupos de Lie compactos sempre admitem um produto interno $\text{Ad}(G)-$invariante e assim como no caso de G semissimples, basta tomar $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^{\perp}$.

Quando M é redutível podemos identificar $\mathfrak{m}$ com T_oM via ξ, pondo:

$$\begin{aligned} \xi : \mathfrak{m} &\to T_oM \\ X &\mapsto {X_o}^* := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp tX) \cdot o. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que este mapa está bem definido e que $\dim(\mathfrak{m})=\dim(T_oM)$. Assim, para provar o isomorfismo, é suficiente provar que ξ é linear e sobrejetiva.

Para provar a linearidade, consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \tau_o : G &\to M \\ g &\mapsto g \cdot o. \end{aligned}$$

Observemos que a diferencial na identidade de τ_o é dada por:

$$\begin{array}{rcl} (d\tau_o)_e : \mathfrak{g} & \to & T_oM \\ X & \mapsto & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp tX \cdot o. \end{array}$$

Com efeito, dado $X \in \mathfrak{g}$, a curva $\gamma(t) \coloneqq \exp tX \cdot o$ é tal que $\dot{\gamma}(0) = X$ e $\gamma(0) = o$. Deste modo,

$$\begin{array}{rcl} (d\tau_o)_e(X) & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau_o(\gamma(t)) \\ & = & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp tX \cdot o. \end{array}$$

Observemos que ξ é precisamente a restrição da aplicação $(d\tau_o)_e$ à $\mathfrak{m}$. Com isso, concluímos que ξ é linear.
Afirmamos que $\ker(d\tau_o)_e = \mathfrak{l}$: se $X \in \mathfrak{l}$, então $\exp tX \in K$. Logo, $\exp tX.o = o$, donde $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp tX.o = 0$ daí, $\mathfrak{l} \subset \ker(d\tau_o)_e$.

Para a outra inclusão, usamos o teorema do núcleo-imagem: como π é uma projeção, ela é sobrejetiva e portanto, $(d\pi)_e$ também é. Logo, o teorema do núcleo e da imagem nos fornece que:

$$\dim\,(\mathfrak{g}) = \dim\,(\mathfrak{m}) + \dim\,(\ker(d\pi)_e).$$

Ora,

$$\dim\,(\mathfrak{m}) = \dim\,(\mathfrak{g}) - \dim\,(\mathfrak{l})$$

assim,

$$\dim\,(\mathfrak{l}) = \dim\,(\ker(d\pi)_e)$$

e com isso a afirmação está demonstrada.

Segue que ξ é injetiva e portanto, isomorfismo. Usaremos esta identificação sempre que conveniente.

Para cada $g \in G$ denotemos por α_g a aplicação parcial:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_g : G/K & \to & G/K \\ hK & \mapsto & (g \cdot h)K. \end{array}$$

A **representação de isotropia** de G/K é o homomorfismo $j : K \to \mathrm{GL}\,(T_o(G/k))$ dado por

$$j(k)(X) = (d\alpha_k)_o X \quad X \in T_o(G/K).$$

Observação 2.1.6. Se G/K é redutível, então a representação de isotropia de G/K coincide com $\mathrm{Ad}|_K\colon K \to \mathrm{GL}(\mathfrak{m})$ (Ver [Arv03, Proposition 4.5 e Corollary 4.6 p.73-74]).

Observação 2.1.7. A partir de agora, quando tratarmos de variedades homogêneas consideraremos G semissimples e conexo, a menos que explicitemos o contrário.

Definição 2.1.8. Uma métrica g em uma variedade homogênea $M = G/K$ é uma **métrica G-invariante** se $\forall g \in G$ α_g, definido em (2.1.1), é uma isometria.

Há uma bijeção entre as métricas G-invariantes em M e os produtos internos $\mathrm{Ad}(K)-$invariantes em $\mathfrak{m}$. Tal bijeção é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \xi : \text{métricas } G\text{-invariantes} & \to & \text{produto interno } \mathrm{Ad}(K) - \text{invariantes em } \mathfrak{m} \\ g & \mapsto & g_0 \\ g & \leftarrow & \langle \cdot, \cdot \rangle \end{array}$$

onde $g_h\,(X,Y) := \langle d\alpha_h^{-1}X, d\alpha_h^{-1}Y\rangle$ (cf. [Arv03, Proposition 5.1 p.78]).

Definição 2.1.9. $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita $G-$**invariante** se ${\alpha_g}^*\omega = \omega$ $\forall g \in G$, α_g definida em (2.1.1).

Na próxima seção veremos como o estudo de 2-formas G-invariantes nos fornece informações interessantes sobre uma variedade *flag* M.

Observação 2.1.10. Dado um espaço vetorial V, denotaremos por $V^{\mathbb{C}}$, o complexificado de V.

Seja agora J uma estrutura quase complexa em TM. J será uma **estrutura quase complexa G-invariante** se J_o , isto é, J (induzido de $T^{\mathbb{C}}M$) avaliado na origem o de M, comutar com a representação de isotropia:

$$J_o\,(j(k)X) = j(k)J_oX \quad \forall X \in T_o^{\mathbb{C}}M.$$

Infinitesimalmente, J também deve comutar com $\mathrm{ad}(\mathfrak{l})$. De fato, como visto na observação 2.1.6, podemos considerar a representação de isotropia j como a representação adjunta restrita a K. Sendo assim, a definição da invariância de J implica que

$$J_o\,(\mathrm{Ad}(\exp tY)X) = \mathrm{Ad}(\exp tY)J_oX \quad \forall X \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \text{ e } \forall Y \in \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$$

Tomando a derivada de ambos os lados em relação a t e avaliando-a no tempo igual a 0, obtemos:

$$(dJ_o)\mathrm{ad}(Y)(X) = \mathrm{ad}(Y)dJ_oX$$

onde ad denota a representação adjunta de $\mathfrak{l}$ nela mesma. Como J_o é uma transformação linear, ela coincide com sua diferencial portanto,

$$J_o\mathrm{ad}(Y) = \mathrm{ad}(Y)J_o \quad \forall Y \in \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}.$$

2.1.3 Variedades *flag*

Esta subseção visa a fornecer um panorama geral acerca de órbitas adjuntas, ou variedades *flag*, que são um caso particular de variedade homogênea. Iremos tratar sobre suas estruturas métrica, simplética e complexa canônicas pela sua importância no contexto de variedades Kähler. Esta subseção tem como referências principais [Arv03], [BFR86], [SMN03] e [Bes87].

Observação 2.1.11. Ainda nesta seção, os grupos de Lie G serão considerados conexos e semissimples, a menos que seja dito o contrário. Sua álgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{g}$ e no caso de G ser real escreveremos:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$$

a sua decomposição de Cartan, onde $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$ onde $\mathfrak{u}$ é a forma real compacta de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{s}$, escreveremos sua decomposição no espaço de raízes da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ e R são as raízes restritas de $\mathfrak{g}$ com relação à $\mathfrak{h}$. Em geral, iremos considerar G real e quando quisermos nos referir à decomposição de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ diremos que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

onde $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{g}_\alpha$ são os espaços de raízes associados ao sistema de raízes R para $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ com relação $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$.

Definição 2.1.12. Seja G um grupo de Lie conexo, compacto e semissimples. Um elemento $w \in \mathfrak{h}$ é dito **elemento regular** de $\mathfrak{h}$ se $\alpha(w) \neq 0$ para todo $\alpha \in R$. Uma **variedade flag** é uma órbita adjunta de G por um elemento regular de $\mathfrak{h}$.

Pode-se demonstrar (cf. [Bes87, Proposition 8.20 p.211]) que esta definição é equivalente à seguinte definição:

Definição 2.1.13. Uma **variedade flag** é uma variedade homogênea da forma $G/C(S)$ onde C indica o centralizador de um toro S em G. Neste caso, $C(S)$ é o estabilizador G_w do elemento regular w pela representação adjunta e S é a componente conexa da identidade de G_w.

Daqui em diante, usaremos as duas definições sem distingui-las, a menos que haja confusão. No caso de S ser um toro maximal, M é chamada de **flag maximal**.

Apresentamos agora alguns exemplos de variedades *flag*.

Exemplo 2.1.14.
- Sejam $G = \mathrm{U}(n)$, $w = \mathrm{diag}(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n)$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$ e $\mathrm{tr}(w) = 0$. A variedade $M \coloneqq \mathrm{Ad}(U(n))w$ é difeomorfa ao quociente $\mathrm{U}(n)/G_w$ onde G_w é o estabilizador de w pela ação adjunta, que conforme o comentado, é o centralizador de um toro em $\mathrm{U}(n)$. Sabe-se que:

$$G_w = \underbrace{\mathrm{U}(1) \times \ldots \times \mathrm{U}(1)}_{n \text{ vezes}}.$$

Se considerarmos a bandeira de subespaços vetoriais em $\mathbb{C}^n$ $F_n = \{V_1 \subset \ldots V_{n-1} : \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}$, G age transitivamente em F_n por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G \times F_n & \to & F_n \\ (A, (V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1})) & \mapsto & (AV_1 \subset \ldots \subset AV_{n-1}) \end{array}$$

(onde A age em cada um dos vetores de V_i).
Verifica-se que o estabilizador de um ponto é $\underbrace{\mathrm{U}(1) \times \ldots \times \mathrm{U}(1)}_{n \text{ vezes}}$ ou seja, $F_n \simeq M$.
Este é um exemplo de *flag* maximal de $\mathrm{U}(n)$.

- Tomemos o mesmo grupo de Lie $G = \mathrm{U}(n)$ e $w = \mathrm{diag}(i\lambda_1 I_{n_1}, \dots, i\lambda_k I_{n_k})$ tal que $n_1 + \ldots + n_k = n$ e $\mathrm{tr} w = 0$. Vê-se que a órbita adjunta $\mathrm{Ad}(G)w$ pode ser identificada com o quociente $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(n_k)$.
Este é um exemplo das chamadas ***flags* parciais**. Observamos que as Grassmannianas e em particular o espaço projetivo, se encaixam neste exemplo.

Observação 2.1.15. Fixamos aqui duas notações:

- G_x denota o estabilizador de $x \in X$ por uma ação de um grupo G no espaço X.
- $\mathcal{O}^G_{w_0}$ indica a órbita adjunta do elemento regular $w_0 \in \mathfrak{h}$ pelo grupo semissimples G.

Se olharmos a órbita adjunta $\mathcal{O}^G_{w_0}$ mergulhada na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a cada elemento $U \in \mathfrak{g}$ podemos associar um grupo a um parâmetro em M dado por:

$$\varphi_t(U)(W) = \mathrm{Ad}\left(\exp(tU)\right)(W) \quad \forall W \in \mathcal{O}^G_{w_0}.$$

O campo associado a este grupo será denotado por X_U e será chamado de **campo fundamental** associado a $U \in \mathfrak{g}$ e em um ponto $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ é dado por $[U, W]$:

$$\begin{aligned} X_U(w) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(U) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}\left(\exp(tU)\right)(W) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\left(\mathrm{ad}(tU)\right)(W) \\ &= \mathrm{ad}U(W) = -\left[W, U\right] \end{aligned}$$

onde W é o vetor em $\mathfrak{g}$ associado a $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ pelo mergulho de $\mathcal{O}^G_{w_0}$ em $\mathfrak{g}$.

Observação 2.1.16. Os campos fundamentais possuem duas propriedades interessantes:

1. Dado $w = \mathrm{Ad}(g)w_0 \in \mathcal{O}^G_{w_0}$, os campos fundamentais X_U no ponto w geram o espaço $T_w\mathcal{O}^G_{w_0}$. De fato, se $X \in T_w\mathcal{O}^G_{w_0}$, então existe uma curva $\gamma(t)$ em $\mathcal{O}^G_{w_0}$ tal que $\gamma(0) = w$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Ora, a curva $\gamma(t)$ deve ser da forma $\mathrm{Ad}(\alpha(t))w_0$ onde $\alpha(t)$ é uma curva em G iniciada em g. Tal curva pode ser tomada da forma $\alpha(t) = \beta(t).g$ onde $\beta(t)$ é uma curva em G com $\beta(0) = e$. Assim, se tomarmos $U \coloneqq \dot{\alpha}(0)$, pode-se verificar que o campo fundamental associado ao vetor U, X_U, é tal que $X_U(w) = X$:
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\alpha(t))w_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\beta(t))w = [U, w].$$

2. Segue da definição do campo fundamental X_U, que ele é um campo de Killing, isto é, seu fluxo $\mathrm{Ad}(\exp tU)$ é uma isometria com relação a uma métrica g $G-$invariante, o que implica que a derivada de Lie de g na direção de X_U, $\mathcal{L}_{X_U}g$, é nula.

Agora iremos analisar como uma $2-$forma $G-$invariante em $\mathcal{O}^G_{w_0}$ nos fornece um elemento distinguido de $\mathfrak{h}$ cuja órbita adjunta pode ser identificada com $\mathcal{O}^G_{w_0}$:

Proposição 2.1.17 ([Bes87, Lemma 8.67 p.220])**.** *Uma $2-$forma G-invariante ω em $\mathcal{O}^G_{w_0}$ é fechada se e somente se*
$$\omega([X,Y],Z) + \omega([Y,Z],X) + \omega([Z,X],Y) = 0$$
para campos fundamentais X, Y, Z em $\mathcal{O}^G_{w_0}$.

Demonstração. (1.1.3) nos garante que para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}^G_{w_0})$,

$d\omega(X,Y,Z) = X\omega(Y,Z) + Y\omega(X,Z) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X).$

Notemos que como ω é $G-$invariante e o campo X é de Killing, vale que $\mathcal{L}_X\omega = 0$, o que nos garante que (cf. [Lee13, Proposition 12.32 p.322]):
$$X\omega(Y,Z) = \omega([X,Y],Z) + \omega(Y,[X,Z]). \tag{2.1.1}$$

A invariância de ω faz com que $X\omega(Y,Z)$ seja nulo. Concluímos, de maneira análoga, que $Y\omega(X,Z) = 0$ e $Z\omega(X,Y) = 0$.

Portanto,
$$d\omega(X,Y,Z) = -\omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X),$$
para todo campo fundamental X, Y, Z em $\mathcal{O}^G_{w_0}$ donde conclui-se o resultado. ■

Observamos que a forma de Cartan-Killing (B) restrita à $\mathfrak{m}$ é não degenerada. Com efeito, a forma de Cartan-Killing em $\mathfrak{g}$ é não degenerada e é negativa-definida em $\mathfrak{l}$, uma vez que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ [Hel79, Proposition 6.8 p.133]. Segue desta observação a existência de uma transformação linear Ω_o, anti-adjunta com relação à B tal que:

$$\omega_o(X,Y) = B\left(\Omega_o(X), Y\right) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Sob este ponto de vista, podemos dizer que ω_o é fechada se e somente se

$$B\left(\Omega_o[X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\right) + B\left(\Omega_o[Y,Z]_{\mathfrak{m}}, X\right) + B\left(\Omega_o[Z,X]_{\mathfrak{m}}, Y\right) = 0.$$

A partir de agora, faremos uma pequena análise do termo $\Omega_o[X,Y]_{\mathfrak{m}}$ e obteremos um elemento distinguido em $\mathfrak{g}$ que denotaremos por γ_0 e que será importante quando estudarmos variedades *flag*.

Comecemos nosso estudo tomando $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Neste caso temos:

$$\begin{aligned}
B\left(\Omega_o[X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\right) &= B\left([Y,Z]_{\mathfrak{m}}, \Omega_o(X)\right) + B\left([Z,X]_{\mathfrak{m}}, \Omega_o(Y)\right) \\
&= B\left([Y,Z], \Omega_o(X)\right) + B\left([Z,X], \Omega_o(Y)\right) \qquad (2.1.2) \\
&= -B\left([Z,Y], \Omega_o(X)\right) + B\left([X, \Omega_o(Y)], Z\right) \\
&= -B\left(Z, [Y, \Omega_o(X)]\right) + B\left([X, \Omega_o(Y)], Z\right) \\
&= B\left([\Omega_o(X), Y], Z\right) + B\left([X, \Omega_o(Y)], Z\right).
\end{aligned}$$

Onde em (2.1.2) usamos o fato de que Ω_o é um operador em $\mathfrak{m}$ e que $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}^{\perp}$.

Além disso, se $X, Y \in \mathfrak{m}$ e $Z \in \mathfrak{l}$,

$$\begin{aligned}
B\left([\Omega_o X, Y], Z\right) + B\left([X, \Omega_o Y], Z\right) &= B\left(\Omega_o X, [Y,Z]\right) + B\left(Z, [X, \Omega_o Y]\right) \qquad (2.1.3) \\
&= -B\left(\Omega_o X, [Z,Y]\right) - B\left(\Omega_o [Z,X], Y\right) \qquad (2.1.4) \\
&= -\omega_o(X, [Z,Y]) - \omega_o([Z,X], Y) \qquad (2.1.5) \\
&= -\omega_o([X,Z], Y) - \omega_o([Z,X], Y) \\
&= \omega_o([Z,X], Y) - \omega_o([Z,X], Y) = 0.
\end{aligned}$$

Em (2.1.3) usamos a $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ invariância de B, em (2.1.4) o fato de $[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ e em (2.1.5), a antissimetria de Ω_o.

Podemos então concluir que para $X, Y \in \mathfrak{m}$ e para todo $Z \in \mathfrak{g}$:

$$B\left(\Omega_o([X,Y]_{\mathfrak{m}}), Z\right) = B\left([\Omega_o(X), Y] + [X, \Omega_o(Y)], Z\right).$$

Ora, a não degenerescência de B nos proporciona que:

$$\Omega_o([X,Y]_{\mathfrak{m}}) = [\Omega_o(X), Y] + [X, \Omega_o(Y)]. \tag{2.1.6}$$

Se estendermos Ω_o naturalmente a um operador em $\mathfrak{g}$ pondo $\Omega_o = 0$ em $\mathfrak{l}$, teremos que Ω_o é uma derivação:

$$\begin{aligned} \Omega_o([X,Y]) &= \Omega_o([X,Y]_{\mathfrak{m}} + [X,Y]_{\mathfrak{l}}) \\ &= \Omega_o([X,Y]_{\mathfrak{m}}) \overset{(2.1.6)}{=} [\Omega_o(X), Y] + [X, \Omega_o(Y)]. \end{aligned}$$

Sendo $\mathfrak{g}$ semissimples, a álgebra das derivações de $\mathfrak{g}$ coincide com a imagem de $\mathfrak{g}$ pela representação adjunta, isto é, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ [Hel79, Proposition 6.4 p.132], donde Ω_o é da forma $\mathrm{ad}\gamma_0$ com $\gamma_0 \in \mathfrak{g}$. Daí que

$$\omega_o(X,Y) = B\left(\Omega_o(X), Y\right) = B\left([\gamma_0, X], Y\right) = B\left(\gamma_0, [X,Y]\right).$$

Afirmamos que γ_0 é $\mathrm{Ad}(k)$-invariante $\forall k \in K$, isto é, $\mathrm{Ad}(k)\gamma_0 = \gamma_0$. Para a demonstração desta afirmação, demonstraremos primeiramente o seguinte lema que pode ser encontrado em [BFR86, p.614]:

Lema 2.1.18. *(a)* $B\left([\mathrm{Ad}(k)\gamma_0, X], Y\right) = B\left([\gamma_0, X], Y\right) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$ *e* $k \in K$*;*

(b) $\mathrm{ad}\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right) = \mathrm{Ad}(k) \circ ad_{\gamma_0} \circ \mathrm{Ad}(k^{-1}) \quad \forall k \in K$*;*

(c) $\mathrm{Ad}(k) \circ \mathrm{ad}_{\gamma_0} \circ \mathrm{Ad}(k^{-1})$ *é um operador em* $\mathfrak{m} \quad \forall k \in K$*;*

(d) $\mathrm{ad}\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right) X = \mathrm{ad}\gamma_0 X \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. (a) Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ e $k \in K$:

$$\begin{aligned} B\left([\mathrm{Ad}(k)\gamma_0, X], Y\right) &= B\left(\mathrm{Ad}(k)[\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X], \mathrm{Ad}(k)\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= B\left([\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}X\right)], \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= B\left(\Omega_o\left(\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right)\right) X, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= \omega_o\left(\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= \omega_o(X,Y) \\ &= B\left([\gamma_0, X], Y\right). \end{aligned}$$

(b) Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $k \in K$

$$\begin{aligned} ad\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right)(X) &= [\mathrm{Ad}(k)\gamma_0, X] \\ &= \mathrm{Ad}(k)\left[\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X\right] \\ &= \mathrm{Ad}(k) \circ \mathrm{ad}(\gamma_0) \circ \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X. \end{aligned}$$

(c) Sejam $X \in \mathfrak{m}$ e $Y \in \mathfrak{l}$, então

$$\begin{aligned} B\left(\mathrm{Ad}(k) \circ \Omega_0 \circ \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X, Y\right) &= B\left(\Omega_o \circ \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= B\left(\left[\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X\right], \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) Y\right) \\ &= B\left(\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) [X, Y]\right) \\ &= B\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0, [X, Y]\right) \qquad (2.1.7) \\ &= B\left(\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right)_{\mathfrak{m}}, [X, Y]\right) \\ &= B\left(\left[\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right)_{\mathfrak{m}}, X\right], Y\right) = 0. \qquad (2.1.8) \end{aligned}$$

Na igualdade (2.1.7) usamos que $[X, Y] \in \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{l}^{\perp} = \mathfrak{m}$ e na (2.1.8), usamos o fato de que $\mathfrak{m}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$: se $X, Y \in \mathfrak{l}$, $A \in \mathfrak{m}$, então

$$B\left([X, Y], A\right) = B\left(X, [Y, A]\right) = 0$$

uma vez que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{m}$. Portanto, $\mathrm{Ad}(k) \circ \Omega_o \circ \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X \in \mathfrak{m}$ para todo $X \in \mathfrak{m}$.

(d) Pelos itens (b) e (c), temos que se $X \in \mathfrak{m}$, então $\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0)X$ também pertence a $\mathfrak{m}$. Assim, o primeiro item, junto com a não degenerescência da forma de Cartan-Killing restrita à $\mathfrak{m}$, garantem que a afirmação é verdadeira para $X \in \mathfrak{m}$.
Logo, falta-nos provar que a identidade também é válida para $X \in \mathfrak{l}$. Por um lado, $\mathrm{ad}(\gamma_0)X = \Omega_o X = 0$. Por outro lado,

$$\mathrm{ad}\left(\mathrm{Ad}(k)\gamma_0\right) X = \left[\mathrm{Ad}(k)\gamma_0, X\right] = \mathrm{Ad}(k)\left[\gamma_0, \mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X\right] = 0$$

já que $\mathrm{Ad}\left(k^{-1}\right) X \in \mathfrak{l}$.

■

Para concluir a invariância de γ_0 observamos que, sendo $\mathfrak{g}$ semissimples, a representação adjunta é fiel donde, pelo item (d), $\mathrm{Ad}(k)\gamma_0 = \gamma_0$ para todo $k \in K$. Tal invariância pode ser vista ao nível infinitesimal como $\mathfrak{l} \subset \ker \mathrm{ad}(\gamma_0)$. De fato, se $X \in \mathfrak{l}$ então $\exp tX \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela $\mathrm{Ad}(K)-$invariância de γ_0, temos:

$$\gamma_0 = \mathrm{Ad}\left(\exp^{tX}\right) \gamma_0$$

derivando ambos os lados com relação ao tempo e avaliando-os em $t = 0$, obtemos

$$0 = \mathrm{ad}(X)\gamma_0$$

logo, $X \in \ker \mathrm{ad}\left(\gamma_0\right)$.

Observação 2.1.19. A propriedade mais interessante sobre o elemento γ_0 é que a órbita adjunta $\mathcal{O}_{w_0}^{G}$ pode ser vista como órbita de γ_0 (cf. [BFR86, p.614]).

Observação 2.1.20. Ao longo deste capítulo,convencionaremos que, quando $\mathcal{O}^G_{w_0}$ é vista da forma G/K e $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$, então W é seu associado em $\mathfrak{g}$ pelo mergulho de $\mathcal{O}^G_{w_0}$ em $\mathfrak{g}$. Além disso, atentamos ao fato de que se considerarmos $\mathcal{O}^G_{w_0} \simeq G/G_{w_0}$, então $o = eG_{w_0} \in G/G_{w_0}$ é associado ao vetor $W_0 \in \mathfrak{g}$ pela inclusão de $\mathcal{O}^G_{w_0}$ em $\mathfrak{g}$.

Usando o fato de que $X \in \mathfrak{g}$ se e somente se $\exp(tX) \in G$, verifica-se que $\mathfrak{l}$ é isomorfo a $\mathrm{Lie}(G_w)$ e que também pode ser identificado com $\ker \mathrm{ad}(W)$. Ora, $(\ker \mathrm{ad}(W))^{\perp} = \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}(W)$, pois $\mathrm{ad}(W)$ é anti-autoadjunta com relação à forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$. Assim, $\mathrm{Im}\ \mathrm{ad}(W) \simeq \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{m}$ pode ser identificado com $T_o\mathcal{O}^G_{w_0}$, podemos identificar $\mathfrak{l}$ com $N_o\mathcal{O}^G_{w_0}$, o espaço normal à $\mathcal{O}^G_{w_0}$ na origem.

Daí, podemos observar que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. De fato, se $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ então $[H, W] = 0$ já que $W \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (W é elemento regular) e $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é abeliana.
Assim, para algum subconjunto R_K de R, podemos escrever

$$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R_K} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R \setminus R_K} \mathfrak{g}_\alpha$$

Deste modo, podemos ver que a escolha de um subsistema de raízes R_K define a variedade *flag*. Quando $R_K = R^+$, $\mathfrak{l}$ é a chamada **subálgebra de Borel** e a variedade *flag* correspondente é maximal. Para mais detalhes sugerimos [Rab12] e [Arv03].

Observação 2.1.21. Seja J uma estrutura quase complexa invariante em $\mathcal{O}^G_{w_0}$. Afirmamos que $J_o\left(\mathfrak{g}_\alpha\right)^{\mathbb{C}} = \left(\mathfrak{g}_\alpha\right)^{\mathbb{C}}$ para todo $\alpha \in R_M$, onde $R_M \coloneqq R \setminus R_K$. Lembramos que $X_\alpha \in \left(\mathfrak{g}_\alpha\right)^{\mathbb{C}}$ se e somente se para todo $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ vale que $\alpha(H)X_\alpha = [H, X_\alpha]$. Logo, se $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então

$$\begin{aligned} [H, J_o(X_\alpha)] &= J_o([H, X_\alpha]) \\ &= \alpha(H)J_o(X_\alpha) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

A igualdade (2.1.9) é devido à invariância de J_o que nos garante que $J_o \circ \mathrm{ad}(H) = \mathrm{ad}(H) \circ J_o$ uma vez que $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Com isso concluímos que $\alpha(H)J_o(X_\alpha) = \mathrm{ad}(H)J_o\left(X_\alpha\right)$. Pelo comentário anterior, inferimos que

$$J_o\left(X_\alpha\right) \in \left(\mathfrak{g}_\alpha\right)^{\mathbb{C}}.$$

Como J_o é um isomorfismo, a verificação está concluída.

Da condição que ${J_o}^2 = -\mathrm{Id}$, obtém-se que os autovalores do operador J_o são $\pm i$. Além disso, é conhecido que $\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathfrak{g}_\alpha\right) = 1$ donde, como consequência da observação (2.1.21), temos que os autovetores de $J_o = J_o^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ são $X_\alpha, \alpha \in R_M$. Desta forma, J_o e portanto J, estão inteiramente determinados por um conjunto $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in R_M}$ onde $J_o(X_\alpha) = i\epsilon_\alpha X_\alpha$ e $\epsilon_{-\alpha} = -\epsilon_\alpha$

Definição 2.1.22. Dada uma ordenação em R, podemos induzi-la em R_M e tal ordenação é dita **invariante** se além de satisfazer a condição dada na Definição 2.1.3, ela satisfizer:

$$\text{se } \alpha \in R_K \cup R_M^+, \beta \in {R_M}^+ \text{ tal que } \alpha + \beta \in R \text{ então } \alpha + \beta \in {R_M}^+$$

Observação 2.1.23. Borel e Hirzebruch em [BH58] demonstram que exite uma bijeção entre as estruturas complexas $G-$invariantes em $\mathcal{O}_{w_0}^G$ e ordenações invariantes ${R_M}^+$ em R_M.

Definição 2.1.24. Dada uma ordenação em R_M (no sentido anterior), consideraremos a **estrutura quase complexa canônica** J invariante como a obtida de J_o definida por

$$\epsilon_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in R_M^+ \\ -1 & \text{se } \alpha \in R_M^- \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Observação 2.1.25. Denotemos por S_w a componente conexa da identidade de G_w e $\mathfrak{s}_w$ sua álgebra de Lie. Como S_w é compacto ([BFR86, pp.614-615]), $j(w)$ restrito a S_w é completamente redutível (cf. [SM15, Proposição 4.2 p.69]), o que fornece uma decomposição de $T_w\mathcal{O}_{w_0}^G$ em subespaços $\mathrm{Ad}(S_w)$-invariantes e irredutíveis de dimensão complexa 1:

$$T_w\mathcal{O}_{w_0}^G = \sum_{j=1}^{n} E_{w,j}$$

onde cada $E_{w,j}$ pode ser visto como o espaço vetorial de dimensão real igual a 2 gerado pelos vetores $\{A_{\alpha_j}, S_{\alpha_j}\}$ onde $A_{\alpha_j} := X_{\alpha_j} - X_{-\alpha_j}, S_{\alpha_j} := i\left(X_{\alpha_j} + X_{-\alpha_j}\right)$ e $\mathfrak{g}_{\alpha_j} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X_{\alpha_j}\}$ para toda raiz $\alpha_j \in R_M$.

Estendemos a estrutura quase complexa definida em (2.1.24), que está determinada apenas em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, a uma estrutura quase complexa $\mathrm{Ad}(K)$-invariante em toda a variedade $\mathcal{O}_{w_0}^G$ da seguinte maneira:

$$J_w(X) = \frac{1}{\alpha_j(W)}[W, X] \quad \forall w \in \mathcal{O}_{w_0}^G, X \in E_{w,j}$$

e W é o elemento de $\mathfrak{g}$ associado à w.

Tal J é integrável (cf. [Bes87, Proposition 8.39 p.214]) e é de fato uma extensão de J_o pois ambas coincidem em o.

As métricas invariantes em $\mathcal{O}^G_{w_0}$, de maneira análoga ao caso da estruturas complexas, podem ser definidas por um conjunto de escalares $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in R_M{}^+}$. Para verificar este fato, notemos que o fato da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ (denotada por B) ser negativa definida garante a existência de um operador auto-adjunto, positivo-definido $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ tal que $\langle X,Y\rangle = -B(\Lambda(X),Y)$ para todos $X,Y\in\mathfrak{m}$. De acordo com a decomposição dada na observação 2.1.25, um produto interno invariante em T_wM pode ser definido em cada um dos subespaços $E_{w,j}$.

Estendendo Λ de maneira natural a um operador $\Lambda^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, temos que este é da forma $\lambda_{\alpha_j}I$ onde I denota a matriz identidade, em cada um dos espaços com dimensão complexa 1, $E_{w,j}$. Ou seja, X_{α_j} é um autovetor de $\Lambda^{\mathbb{C}}$ associado a um autovalor real, positivo, λ_{α_j}. Afirmamos que $\lambda_{\alpha_j}=\lambda_{-\alpha_j}$. Por um lado, estendendo também $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a um produto interno em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, temos

$$\langle X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_j}\rangle^{\mathbb{C}} = -B(\Lambda^{\mathbb{C}}(X_{\alpha_j}), X_{-\alpha_j}) = -2\lambda_{\alpha_j}.$$

Por outro lado,

$$\langle X_{-\alpha_j}, X_{\alpha_j}\rangle^{\mathbb{C}} = -B(\Lambda^{\mathbb{C}}(X_{-\alpha_j}), X_{\alpha_j}) = -2\lambda_{-\alpha_j}.$$

Segue da simetria de $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\mathbb{C}}$ a demonstração da afirmação.

Denotaremos por $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}^G_{w_0}}$ a **métrica normal** de $\mathcal{O}^G_{w_0}$, que é induzida de um produto interno $(\cdot,\cdot)$ Ad_G-invariante em $\mathfrak{g}$.

Quanto à estrutura simplética, órbitas coadjuntas são, naturalmente, variedades simpléticas. A forma simplética natural nessas variedades é conhecida como **forma simplética de Kostant-Kirillov-Souriau** (cf. [BM06, Teorema 3.3.9 p.29]). No nosso contexto, como o grupo de Lie considerado é semissimples, órbitas adjuntas e coadjuntas são identificadas e para órbitas adjuntas tal estrutura em $w\in\mathcal{O}^G_{w_0}$ é dada por

$$F_w(X,Y) = -B(W,[U,V])\ \forall X,Y\in T_w\mathcal{O}^G_{w_0}$$

onde B é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ e $U,V\in\mathfrak{g}$ são tais que $X=[U,W]$ e $Y=[V,W]$.

Teorema 2.1.26. *F é uma forma Kähler com respeito à uma métrica $G-$invariante compatível com F e J canônica.*

Demonstração. Para uma demonstração, veja [Bes87, Proposition 8.66 p.220]. ■

Iremos denotar por F a forma simplética de Kostant-Kirillov-Souriau e por ω a $2-$forma compatível com J e $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}^G_{w_0}}$:

$$\omega(X,Y) \coloneqq (JX,Y)\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{O}^G_{w_0}).$$

Proposição 2.1.27. *A forma de Ricci $G-$invariante ρ, associada a J e à métrica Kähler fornecida por F, é calculada em qualquer $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ por:*

$$\rho_w(X,Y) := (\gamma(w),[U,V]) \ \forall X,Y \in T_wM \tag{2.1.11}$$

onde $U,V \in \mathfrak{g}$ são tais que $X=[U,W]$, $Y=[V,W]$ e $\gamma(w) := \sum_{j=1}^{m}[X_j, J_wX_j]$ para uma base ortonormal positivamente orientada $\{X_j, J_wX_j\}_{j=1}^m$ de $E_{w,j}$.

Demonstração. Veja [Bes87, Proposition 8.47 p.216]. ∎

2.1.4 Resultados preliminares

Esta subseção é destinada a compreender os resultados preliminares de [Ono03], que serão usados para demonstrar os teoremas que envolvem as estimativas de $\lambda_1(L)$ e $\mathrm{Vol}(L)$.

Observação 2.1.28. Daqui em diante, diremos que uma variedade é **fechada** se ela é compacta e sem bordo, a menos de menção explícita do contrário.

Atentamos também ao fato de que, neste contexto, ao dizer que uma subvariedade é mínima, estamos assumindo que ela está munida da métrica induzida pela métrica do espaço ambiente.

Sejam (M,g) uma $m-$variedade riemanniana isometricamente mergulhada em $(\mathbb{R}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e $(N, g|_N)$ uma $n-$subvariedade mínima e fechada de M. Consideremos $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^k$, $N \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} M$ e $N \overset{\tilde{i}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^k$ tais mergulhos e σ, $\overline{\sigma}$ e $\tilde{\sigma}$ suas respectivas segundas formas fundamentais.

Observação 2.1.29. $\tilde{\sigma}$ pode ser decomposta em uma parte tangencial e outra parte normal a M o que viabiliza a seguinte expressão:

$$\tilde{\sigma}_y(Z,W) = \overline{\sigma}_y(Z,W) + \sigma_y(Z,W) \quad \forall y \in N \text{ e } Z,W \in T_yM.$$

Sendo N mínima em M, o campo curvatura média associado ao mergulho $\bar{i}$ é nulo. Assim, de acordo com a decomposição anterior, o vetor curvatura média $(\widetilde{H})$ associado ao mergulho $\tilde{\sigma}$ coincide com o vetor curvatura média $(\widetilde{H}^\perp)$ associado ao mergulho σ , donde:

$$\widetilde{H}_y = \widetilde{H}^\perp_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y(e_i,e_i) \quad \forall y \in N \tag{2.1.12}$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_yN.

Observação 2.1.30. Ao longo do texto usaremos estas mesmas notações para as curvaturas médias na situação em que L for uma subvariedade lagrangeana, mínima e fechada da órbita adjunta $\mathcal{O}_{w_0}^{G}$, que por sua vez pode ser mergulhada isometricamente em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Vamos agora enunciar dois teoremas que podem ser encontrados em [Che81]. De acordo com as notações estabelecidas anteriormente, a partir do primeiro deles, obtemos um corolário que nos viabiliza uma cota inferior para o volume da subvariedade N, enquanto que o segundo trata de uma cota superior para o primeiro autovalor do laplaciano de N agindo nas funções:

Teorema 2.1.31. *Considere o espaço euclideano $(\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle|_M)$ uma $m-$subvariedade fechada e H seu vetor de curvatura média. Então*

$$\int_M \langle H, H \rangle^{m/2} \mathrm{d}\,Vol_M \geq c_m \tag{2.1.13}$$

onde c_m é o volume da esfera unitária de dimensão m.

Demonstração. [Che81] teorema 2.1 página 17. ■

O corolário, antes comentado, deste teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Corolário 2.1.32 ([Ono03, Corollary 2.3 p.246])**.** *Seja (M, g) uma $m-$variedade riemanniana e $i : N \hookrightarrow M$ uma $n-$subvariedade fechada, munida da métrica i^*g e mínima de M. Se $x : (M, g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um mergulho isométrico, então*

$$Vol(N) \geq \frac{c_n}{\max_{y \in N} \langle \widetilde{H}_y^{\perp}, \widetilde{H}_y^{\perp} \rangle^{n/2}}$$

onde $\widetilde{H}_y^{\perp} := \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_y(e_i, e_i)}{n}$ é o vetor curvatura média associado ao mergulho x avaliado no ponto $y \in N$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_yN.

Demonstração. Aplicando o Teorema 2.1.31 e notando que, pelo comentado em (2.1.12) $\widetilde{H} = \widetilde{H}^{\perp}$, temos que:

$$\int_N \langle \widetilde{H}, \widetilde{H} \rangle^{n/2} d\mathrm{Vol}_N \geq c_n$$

onde c_n é o volume da esfera unitária $n-$dimensional. Como N é fechada, a função $\max_{y \in N} \langle \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle$ está bem definida, donde:

$$\begin{aligned} \int_N \langle \widetilde{H}, \widetilde{H} \rangle^{n/2} d\mathrm{Vol}_N &\leq \int_N \left(\max_{y \in N} \langle \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle \right)^{n/2} d\mathrm{Vol}_N \\ &= \left(\max_{y \in N} \langle \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle \right)^{n/2} \mathrm{Vol}(N). \end{aligned}$$

Portanto, por (2.1.13),

$$c_n \leq \left(\max_{y\in N}\langle \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y\rangle\right)^{n/2} \mathrm{Vol}(N)$$

isto é,

$$\mathrm{Vol}(N) \geq \frac{c_n}{\left(\max_{y\in N}\langle \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y\rangle\right)^{n/2}}.$$

■

Teorema 2.1.33. *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana fechada, de dimensão m, $x : (M, g) \to (\mathbb{R}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma imersão isométrica e H seu vetor curvatura média. Então:*

$$\int_M \langle H, H\rangle^{m/2} \mathrm{d}\,Vol_M \geq \left(\frac{\lambda_1(M)}{m}\right)^{m/2} Vol(M)$$

onde $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do laplaciano de M agindo nas funções suaves. A igualdade é verdadeira se e somente se existe um vetor $c \in \mathbb{R}^k$ tal que $x - c$ é um mergulho de ordem 1, isto é, se para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ a função coordenada $x^i - c^i$ é uma autofunção de Δ_M associada a $\lambda_1(M)$.

Demonstração. [Che81] teorema 4.1 página 20. ■

Temos como corolário:

Corolário 2.1.34 ([Ono03, Corollary 2.4 p.246])**.** *Seja (M, g) uma $m-$variedade riemanniana e $\bar{i} : N \to M$ uma $n-$subvariedade fechada e mínima. Se $x : (M, g) \to (\mathbb{R}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um mergulho isométrico, então*

$$\lambda_1(N) \leq n \left(\frac{\int_N \langle \widetilde{H}^\perp, \widetilde{H}^\perp\rangle^{n/2} \mathrm{d}\,Vol_N}{Vol(N)}\right)^{2/n}.$$

A igualdade é válida e somente se existe um vetor constante $c \in \mathbb{R}^k$ tal que $x \circ \bar{i} : N \to \mathbb{R}^k$ é um mergulho de ordem 1.

Demonstração. Aplicando o Teorema 2.1.33 à variedade M mergulhada em $\mathbb{R}^k$ e notando que $H = \widetilde{H}^\perp$ temos,

$$\int_N \langle \widetilde{H}^\perp, \widetilde{H}^\perp\rangle^{n/2} d\mathrm{Vol}_N \geq \left(\frac{\lambda_1(N)}{n}\right)^{n/2} \mathrm{Vol}(N).$$

Ora, $n^{n/2} > 0$ portanto

$$(\lambda_1(N))^{n/2} \leq n^{n/2} \int_N \langle \widetilde{H}^\perp, \widetilde{H}^\perp\rangle^{n/2} d\mathrm{Vol}_N \frac{1}{\mathrm{Vol(N)}}.$$

Daí que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(N) &\leq \left(\frac{n^{n/2}}{\mathrm{Vol(N)}}\right)^{2/n}\left(\int_N \langle \widetilde{H}^{\perp}, \widetilde{H}^{\perp}\rangle d\mathrm{Vol}_N\right)^{2/n} \\
&= n\left(\frac{\int_N \langle \widetilde{H}^{\perp}, \widetilde{H}^{\perp}\rangle^{n/2} d\mathrm{Vol}_N}{\mathrm{Vol(N)}}\right)^{2/n}.
\end{aligned}
$$

■

2.2 Estimativas

Nesta subseção forneceremos as estimativas obtidas por Hajime Ono em [Ono03] para o primeiro autovalor do laplaciano (agindo nas funções) e para o volume de subvariedades lagrangeanas de variedades *flag*.

Observação 2.2.1. Diremos que $U \in \mathfrak{g}$ é um vetor associado a um campo X no ponto $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ se $X = [U, W]$ e ao longo dessa seção, a órbita adjunta $\mathcal{O}^G_{w_0}$ será munida da métrica normal $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}^G_{w_0}}$ para algum produto interno Ad_G-invariante de $\mathfrak{g}$ e da forma complexa canônica J.

Lema 2.2.2 ([Ono03, Lemma 4.1 p.248]). *Para uma constante positiva κ, $\omega = \kappa F$, onde F é a forma de Kostant-Kirillov-Souriau e $\omega = (J\cdot,\cdot)$, se e somente se $\alpha_j(W) = \alpha_i(W) = \kappa$ para algum $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ associado a $W \in \mathfrak{g}$ e quaisquer j, i tal que $\alpha_j, \alpha_i \in R$.*

Demonstração. Sejam $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$, W seu vetor associado em $\mathfrak{g}$, $Y_j \in E_{w,j}, Y_i \in E_{w,i}$ com $j \neq i$. Notemos, primeiramente, que $Y_j = \left[\frac{1}{\alpha_j(W)} J_w Y_j, W\right]$. Ora, pela definição de J e pelo fato que J_w preserva $E_{w,j}$ temos que

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\alpha_j(W)} J_w Y_j, W\right] &= \frac{1}{\alpha_j(W)}[J_w Y_j, W] \\
&= -\frac{1}{\alpha_j(W)}[W, J_w Y_j] \\
&= -J_w(J_w Y_j) \\
&= Y_j.
\end{aligned}
$$

Com isso concluímos que um vetor associado ao campo que em w vale Y_j é $\dfrac{1}{\alpha_j(W)} J_w Y_j$ para todo j.

($\Rightarrow$) É suficiente mostrar que $\omega_w(Y_j, Y_i) = \kappa F_w(Y_j, Y_i)$ e $\omega_w(Y_j, J_wY_i) = \kappa F_w(Y_j, J_wY_i)$ pela linearidade e antissimetria de ω e de F.

$$\begin{aligned} F_w(Y_j, Y_k) &= \left(W, \left[\frac{1}{\alpha_j(W)}J_wY_j, \frac{1}{\alpha_i(W)}J_wY_i\right]\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_j(W)\alpha_i(W)}\left(W, [J_wY_j, J_wY_i]\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_j(W)\alpha_i(W)}\left([W, J_wY_j], J_wY_i\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Onde a segunda igualdade é em decorrência da Ad-invariância de $(\cdot,\cdot)$ e a quarta é devido ao fato de $[W, J_wY_j] \in E_{w,j}$ e $J_wY_i \in E_{w,i}$ juntamente com o fato de $E_{w,j}$ e $E_{w,i}$ serem ortogonais com relação à $(\cdot,\cdot)$. Por este mesmo motivo, $\omega_w(Y_j, Y_i) = (J_wY_j, Y_i)_w = 0$.

Segue diretamente da definição de J que um vetor associado ao campo que em w vale J_wY_j é $-\frac{1}{\alpha_j(W)}Y_j$, logo:

$$\begin{aligned} F_w(Y_j, J_wYj) &= \left(W, \left[\frac{1}{\alpha_j(W)}J_wY_j, -\frac{1}{\alpha_j(W)}Y_j\right]\right) \qquad (2.2.1) \\ &= \frac{1}{(\alpha_j(W))^2}\left([W, Y_j], J_wY_j\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha_j(W))^2}\left(\alpha_j(W)J_wY_j, J_wY_j\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_j(W)}\omega(Y_j, J_wY_j). \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha_j(W) = \alpha_i(W) = \kappa \quad \forall j, i$ para algum $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$ associado a $W \in \mathfrak{g}$, então $\omega_w = \kappa F_w$ em ambos os casos.

($\Leftarrow$) De acordo com (2.2.1), se $\omega_w = \kappa F_w$, então $\alpha_j(W)$ deve ser constante e igual a κ para todo j.

A igualdade $\omega = \kappa F$ é válida pois as raízes $\alpha \in R$ são $\mathrm{Ad}(K)-$invariantes (assim como ω e F) que, por sua vez é verdade já que os subespaços $\mathfrak{g}_\alpha$ são $\mathrm{Ad}(K)-$invariantes. ■

Lema 2.2.3 ([Ono03, Lemma 4.2 p.249])**.** *Seja $\mathcal{O}^G_{w_0} \subset \mathfrak{g}$ uma órbita adjunta com $\omega = \kappa F$, σ a segunda forma fundamental e H o campo curvatura média. Então para cada $w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$, temos:*

(i)

$$\sigma_w(X, Y) = [V, [U, W]]^N \qquad (2.2.2)$$

(ii)

$$\sigma_w(J_wX, J_wY) = \sigma_w(X, Y) \tag{2.2.3}$$

(iii)

$$H_w = -\frac{1}{m\kappa}\gamma(w) \tag{2.2.4}$$

(iv)

$$(H, H) = \frac{s}{2m^2} \tag{2.2.5}$$

onde (s curvatura escalar de $(\cdot,\cdot)|_M$)

onde $U, V \in \mathfrak{g}$ são os vetores associados aos campos X e Y.

Demonstração. Inicialmente, observamos que como $\omega = \kappa F$, pelo lema 2.2.2, $\alpha(W) = \kappa$ $\forall w \in M$ visto como o vetor $W \in \mathfrak{g}$ e para toda raiz α. Iremos usar este fato sem explicitá-lo novamente ao longo desta demonstração.

(i) Verifica-se que a conexão de Levi-Civita de $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$ nos campos fundamentais X_U, X_V é dada por $(\nabla_{X_U} X_V)\, w = [V, [U, W]]$. Calcular ∇ nestes campos é suficiente pois a segunda forma fundamental é um tensor portanto, só depende do valor dos campos no ponto em que é tomado.

   Daí que se X, Y são campos em M tais que $X_w = [U, W]$ e $Y_w = [V, W]$, temos

$$\begin{aligned}\sigma_w(X, Y) &= \left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}\right)_w^N \\ &= ([V, [U, W]])^N \\ &= [V, X(w)]^N\end{aligned}$$

   onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões naturais de X e Y definidas da seguinte maneira: $\overline{X}_Z = [U, Z]$ e $\overline{Y}_Z = [V, Z]$ em qualquer ponto Z de $\mathfrak{g}$.

(ii) Como demonstrado anteriormente, associado a $Y_j(w) \in E_{w,j}$, temos $\dfrac{J_wY_j}{\alpha(W)}$. Pela linearidade de J_w, podemos concluir que, dado $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}^G_{w_0})$, seu associado em $w \in M$ será $U := \dfrac{J_wX(w)}{\alpha(W)}$. Analogamente, o vetor associado a Y é $V := \dfrac{J_wY(w)}{\alpha(W)}$. Pela comutatividade de J_w com ad_w, pode-se verificar que o vetor associado a JX é $JU = -\dfrac{X(w)}{\alpha(W)}$ e o mesmo ocorre com JY.

Segue da simetria da segunda forma fundamental que o lado esquerdo de (2.2.3) é igual a $\sigma_w(JY, JX)$, logo:

$$\begin{aligned}
\sigma_w(JY,JX) &\overset{(2.2.3)}{=} [JU,[JV,W]]^N \\
&= [JU, J_wY_w]^N \\
&= \left[-\frac{X_w}{\alpha(W)}, J_wY_w\right]^N \\
&= \left[\frac{J_wY_w}{\alpha(W)}, X_w\right]^N \\
&= [V, X(w)]^N \\
&= \sigma_w(X,Y)
\end{aligned}$$

(iii) Seja $\{X_i, J_wX_i\}$ base ortonormal de $E_{w,i} \subset T_w\mathcal{O}^G_{w_0}$ para cada i e $U_i \in \mathfrak{g}$ o vetor associado ao vetor X_i. Então

$$\begin{aligned}
H_w &= \frac{1}{2m}\text{tr } \sigma_w = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^m \sigma_w(X_j,X_j) + \sigma_w(J_wX_j, J_wX_j) \\
&\overset{(2.2.3)}{=} \frac{1}{2m} 2. \sum_{j=1}^m \sigma_w(X_j,X_j) \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^m [U_j,[U_j,W]]^N\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^m \left[\frac{J_wX_j}{\alpha(W)}, X_j(w)\right]^N\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^m \left[\frac{JX_j}{\kappa}, X_j(w)\right]\right)^N \\
&= -\frac{1}{m\kappa}\left(\gamma(w)\right)^N.
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, verificaremos que $\gamma(w) \in Z(L_w) \subset L_w \simeq N_w\mathcal{O}^G_{w_0}$, onde $Z(L_w)$ denota o centro de L_w. De fato, se $U \in L_w \subset \mathfrak{g}$ e $V \in \mathfrak{g}$,

$$([\gamma(w), U], V) = (\gamma(w), [U,V]) = \rho_w(X,Y)$$

onde X e Y são campos de $\mathcal{O}^G_{w_0}$ que em w são iguais a $[U,W]$ e $[V,W]$, respectivamente.

Ora, $X_w = [U,W] = 0$, logo $\rho_w(X,Y) = 0$ e $([\gamma(w), U], V) = 0$ para todo $V \in \mathfrak{g}$ donde, $[\gamma(w), U] = 0$ para todo $U \in L_w$, o que demonstra a afirmação. Com isso, concluímos que $(\gamma(w))^N = \gamma(w)$ e $H_w = -\frac{1}{m\kappa}\gamma(w)$.

(iv) Lembrando que $s = \text{tr Ric}$ e $\rho(X,Y) = \text{Ric}(JX,Y)$, temos que

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{m} \text{Ric}(X_i, X_i) + \text{Ric}(JX_i, JX_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-\rho(JX_i, X_i) + \rho(X_i, JX_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} 2\rho(X_i, JX_i). \end{aligned}$$

Daí que

$$\begin{aligned} \frac{s_w}{2} &= \sum_{i=1}^{m} \rho_w(X_i, J_w X_i) = \sum_{i=1}^{m} (\gamma(w), [U_i, J_w U_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\gamma(w), \left[\frac{J_w X_i}{\kappa}, \frac{-X_i}{\kappa}\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\gamma(w), \left[\frac{X_i}{\kappa}, \frac{J_w X_i}{\kappa}\right]\right) \\ &= \left(\gamma(w), \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{X_i}{\kappa}, \frac{J_w X_i}{\kappa}\right]\right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} (\gamma(w), \gamma(w)) \\ &\overset{(2.2.3)}{=} \frac{1}{\kappa^2} (-m\kappa H_w, -m\kappa H_w) \\ &= m^2 (H_w, H_w) \end{aligned}$$

onde U_i é o vetor associado a X_i, em $\mathfrak{g}$. Portanto, $(H,H) = \frac{s}{2m}$.

■

A seguir redigiremos um lema cujo objetivo é auxiliar a demonstração do próximo resultado. Para a demonstração de tal lema, enunciaremos três teoremas que são encontrados em [Bes87].

Teorema 2.2.4. *Seja (M,g) uma variedade riemanniana, se sua curvatura de Ricci for não-positiva, isto é, se Ric$(X,X) \leq 0$ $\forall X \in TM$, então todo campo de Killing em M é paralelo e a componente conexa da identidade do grupo de isometrias de (M,g), denotado por $I(M,g)$, é um toro.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Bes87], teorema 1.84, página 41. ■

Observação 2.2.5. Atentamos ao fato de que a nossa definição da curvatura tem sinal contrário aquele adotado em [Bes87], o que implica que a curvatura de Ricci também tenha sinal contrário. Portanto, nós iremos utilizar uma versão adaptada deste teorema e o resultado será válido quando $\text{Ric} \geq 0$

Teorema 2.2.6 ([Bes87, Theorem 1.83 p.53])**.** *Se (M, g) é completa, a álgebra de Lie de $I(M, g)$ é dada pela álgebra de Lie dos campos de Killing.*

Teorema 2.2.7. *Seja (M, J, ω, g) uma $2m-$variedade Kähler-Einstein compacta, com constante de Einstein $c > 0$. Se a álgebra de Lie dos campos de Killing é não trivial então $\lambda_1(M) = \dfrac{s}{m}$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [Mat57].

Lema 2.2.8. *Seja $\mathcal{O}^G_{w_0}$ uma órbita adjunta fechada de dimensão $2m$ tal que $(\mathcal{O}^G_{w_0}, \omega, J, g)$ é Kähler-Einstein com constante de Einstein c positiva. Então*

$$\lambda_1(\mathcal{O}^G_{w_0}) = 2c$$

Demonstração. Por hipótese $\mathrm{Ric} = cg$ logo, $\mathrm{Ric}(X, X) \geq 0\ \forall X \in T\mathcal{O}^G_{w_0}$ e o Teorema 2.2.4 nos garante $I(\mathcal{O}^G_{w_0}, g)$ não é discreto.

Com isso, pelo Teorema 2.2.6, a álgebra de Lie dos campos de Killing é não trivial. Portanto, pelo Teorema 2.2.7

$$\lambda_1(\mathcal{O}^G_{w_0}) = \frac{s}{m}.$$

Ora, se $\{e_i, Je_i\}_{i=1}^m$ é um referencial local ortonormal em $T\mathcal{O}^G_{w_0}$, vale que:

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(Je_i, Je_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^m \mathrm{Ric}(e_i, e_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^m \rho(e_i, Je_i) \\
&= 2c\sum_{i=1}^m \omega(e_i, Je_i) \\
&= 2c\sum_{i=1}^m \langle Je_i, Je_i\rangle \\
&= 2cm.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

A fim de obter informações sobre as autofunções associadas ao primeiro autovalor do laplaciano agindo nas funções da subvariedade lagrangeana da órbita adjunta, enunciamos o seguinte lema:

Lema 2.2.9. *Seja $x : M \to M'$ uma imersão isométrica de uma $2m-$variedade riemanniana M em uma variedade M' flat. Então $\Delta_M x = -2mH_x$.*

Demonstração. A demonstração desse lema pode ser obtida através do primeiro exemplo da página 11 e da proposição da página 12 de [ES64]. Atentamos à diferença da constante $-2m$. Tal diferença se deve ao fato de que Hajime Ono em [Ono03] considera $H = \frac{1}{2m}\mathrm{tr}\,(B)$ enquanto que Eells e Sampson em [ES64] consideram $H = \mathrm{tr}\, B$. Além disso o laplaciano tomado em [Ono03] tem sinal contrário ao tomado em [ES64]. ∎

Corolário 2.2.10 ([Ono03, Corollary 4.3 p.250])**.** *Seja $\mathcal{O}^G_{w_0}$ órbita adjunta fechada do grupo de Lie G e $x : \mathcal{O}^G_{w_0} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ mergulho isométrico de $\mathcal{O}^G_{w_0}$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Suponha que $\omega = \kappa F$ e que $(\mathcal{O}^G_{w_0}, \omega)$ é Kähler-Einstein com respeito à estrutura complexa canônica J e que $\rho = c\omega$ para alguma constante positiva c. Então x é um mergulho de ordem 1.*

Demonstração. De acordo com os lemas anteriores, $\lambda_1(\mathcal{O}^G_{w_0}) = 2c$ então, para provar que x é um mergulho de ordem 1, iremos demonstrar que $\Delta_{\mathcal{O}^G_{w_0}} x = 2cx$. Segue do Lema 2.2.9 que $\Delta_{\mathcal{O}^G_{w_0}} x = -2mH_x$ e do Lema 2.2.3 que $H_x(w) = \frac{-1}{m\kappa}\gamma(w)\ \forall w \in \mathcal{O}^G_{w_0}$. Afirmamos que $\gamma(w) = \kappa c W$. Com efeito, por um lado:

$$(\gamma(w), [U, V]) = \rho_w(X_U, X_V) = c\omega_w(X_U, X_V) = \kappa c F_w(X_U, X_V) = (\kappa c W, [U, V]).$$

Da não degenerescência de $(\cdot, \cdot)$ e do fato de X_U e X_V serem campos fundamentais arbitrários, a afirmação é demonstrada. Logo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{O}^G_{w_0}} x(w) &= -2mH_x(w) \\
&= -2m\left(\frac{-1}{m\kappa}\right)\gamma(w) \\
&= \frac{2}{\kappa}\kappa c W \\
&= 2cW \\
&= 2cx(w).
\end{aligned}$$

Portanto, x é um mergulho de ordem 1. ∎

Proposição 2.2.11 ([Ono03, Proposition 4.4 p.251])**.** *Seja $\mathcal{O}^G_{w_0} \overset{x}{\hookrightarrow} \mathfrak{g}$ uma órbita adjunta que satisfaz $\omega = \kappa F$ e H o campo curvatura média deste mergulho. Se $L \overset{\overline{x}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}^G_{w_0}$ é uma subvariedade lagrangeana, $w \in L$, $\{e_j\}_{j=1}^m$ é uma base ortonormal de T_wL e σ é a segunda forma fundamental de x, então*

$$\widetilde{H}^\perp_w := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \sigma_w(e_j, e_j)$$

satisfaz:

$$\widetilde{H}^\perp_w = H_w \quad \forall w \in L.$$

Demonstração. Sendo $\{e_j\}_{j=1}^m$ como no enunciado, observamos que $\{e_j, J_w e_j\}_{j=1}^m$ é uma base ortonormal de $T_w\mathcal{O}_{w_0}^G$ (1.1.9), logo

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_w^\perp &:= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \sigma_w(e_j, e_j) \\ &\overset{(2.2.3)}{=} \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^m \sigma_w(e_j, e_j) + \sigma_w(J_w e_j, J_w e_j) \\ &= H_w.\end{aligned}$$

■

A partir dos resultados preliminares comentados na subseção 2.1.2 e com os resultados desta seção iremos demonstrar o teorema a seguir que nos fornece uma cota inferior para o volume de uma subvariedade lagrangeana L de uma órbita adjunta. Sendo que tal cota depende apenas da dimensão de L e da curvatura escalar da variedade ambiente.

Teorema 2.2.12 ([Ono03, Theorem 1.1 p.244])**.** *Seja G um grupo de Lie semissimples, compacto, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, $(\cdot,\cdot)$ um produto interno Ad_G-invariante em $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{O}_{w_0}^G$ uma órbita adjunta de G de dimensão $2m$. Se $\omega = \kappa F$ para alguma constante κ e $L \subset \mathcal{O}_{w_0}^G$ é uma subvariedade lagrangeana, mínima e fechada, então:*

$$Vol(L) \geq \left(\frac{2m^2}{\max_{y\in L} s_y}\right)^{\frac{m}{2}} c_m$$

onde s é a curvatura escalar de $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}_{w_0}^G}$ e c_m é o volume da esfera unitária $m-$dimensional. Além disso, se $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}_{w_0}^G}$ é Kähler-Einstein com constante de Einstein positiva c, vale que

$$Vol(L) \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{m}{2}} c_m.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(L) &\geq \frac{c_m}{\max_{y\in L}\left((\widetilde{H}_y)^\perp, (\widetilde{H}_y)^\perp\right)^{\frac{m}{2}}} \quad \text{Corolário 2.1.32} \\ &\overset{(2.1.12)}{=} \frac{c_m}{(\max_{y\in L}(H_y, H_y))^{\frac{m}{2}}} \\ &\overset{(2.2.3)}{=} \frac{c_m}{(\max_{y\in L}\frac{s_y}{2m^2})^{\frac{m}{2}}} \\ &= \left(\frac{2m^2}{s}\right)^{\frac{m}{2}} c_m.\end{aligned}$$

Se $(\mathcal{O}_{w_0}^G, (\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}_{w_0}^G})$ é Kähler-Einstein com constante de Einstein c, a curvatura escalar s é constante igual a $2mc$. Com isso, fica provada também a segunda parte do teorema. ■

Teorema 2.2.13 ([Ono03, Theorem 1.2 p. 244])**.** *Sejam G um grupo de Lie compacto e semissimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $(\cdot,\cdot)$ um produto interno $Ad(G)-$invariante em $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{O}^G_{w_0}$ uma órbita adjunta de G de dimensão $2m$ tal que $\omega = \kappa F$. Se $L \subset \mathcal{O}^G_{w_0}$ é uma subvariedade lagrangeana fechada e mínima de $\mathcal{O}^G_{w_0}$, então*

$$\lambda_1(L) \leq \frac{s}{2m}. \tag{2.2.6}$$

Se $l : L \to \mathfrak{g}$ é o mergulho canônico, então vale a igualdade em (2.2.6) se e somente se existe um vetor constante d tal que $l - d$ é um mergulho de ordem 1.

Além disso, se $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}^G_{w_0}}$ é Kähler-Einstein com respeito a estrutura complexa canônica J, com constante de Einstein c, então

$$\lambda_1(L) \leq c$$

e o vetor d é nulo.

Demonstração. Para a primeira parte temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L) &\leq m\left(\frac{\int_L (\widetilde{H}^\perp, \widetilde{H}^\perp)^{\frac{m}{2}}\, d\mathrm{Vol}_L}{\mathrm{Vol}(L)}\right)^{\frac{2}{m}} && (\text{ Corolário } 2.1.34)\\
&= \frac{m}{(\mathrm{Vol}(L))^{\frac{2}{m}}}\left(\int_L (H,H)^{\frac{m}{2}}\, d\mathrm{Vol}_L\right)^{\frac{2}{m}} && (\text{ Proposição } 2.2.11)\\
&\overset{(2.2.3)}{=} \frac{m}{(\mathrm{Vol}(L))^{\frac{2}{m}}}\left(\int_L \left(\frac{s}{2m^2}\right)^{\frac{m}{2}} d\mathrm{Vol}_L\right)^{\frac{2}{m}}\\
&= \frac{s}{2m}.
\end{aligned}$$

Para a segunda parte, a ideia é a mesma do corolário 2.2.10, isto é, demonstrar que $\Delta_L l = cl$.

Se $x : L \to M$ é o mergulho de L em M, como L é mínima em M, a curvatura média deste mergulho, que denotaremos por $\widetilde{H}_l^\perp$, coincide com a curvatura média do mergulho l, que denotaremos por $\widetilde{H}_l$. Então, pelo lema 2.2.9, temos que $\Delta_L l = -m\widetilde{H}_l = -m\widetilde{H}_l^\perp$ (lembrando que por L ser lagrangeana, sua dimensão é m). Ora, o corolário 2.2.10 afirma que $-mH_l = cl$ e o teorema fica provado. ■

Corolário 2.2.14 ([Ono03, Corollary 1.3 p.245])**.** *Sejam G um grupo de Lie compacto, semissimples, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, $(\cdot,\cdot)$ um produto interno Ad_G-invariante em $\mathfrak{g}$ e M uma órbita adjunta em $\mathfrak{g}$ tal que $\omega = \kappa F$ para alguma constante κ e $L \subset \mathcal{O}^G_{w_0}$ é uma subvariedade lagrangeana, fechada em mínima mergulhada em $\mathfrak{g}$ via l. Se $(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{O}^G_{w_0}}$ é Kähler-Einstein com relação à estrutura complexa canônica com constante de Einstein c, então são equivalentes:*

(I) *L é hamiltoniana estável*

(II) $\lambda_1(L) = c$

(III) *As funções coordenadas l^i do mergulho l são autofunções de Δ_L associadas ao primeiro autovalor $\lambda_1(L)$*

Demonstração. $(I) \Leftrightarrow (II)$: Corolário 1.2.17 e o fato de que $\lambda_1(L) \leq c$.

$(II) \Leftrightarrow (III)$: Teorema 2.2.13. ∎

Assim como em [Ono03] analisaremos o caso das Grassmannianas reais mergulhadas em Grassmannianas complexas.

2.3 Exemplo

Esta seção está destinada a compreender um exemplo, encontrado em [Ono03], acerca dos resultados demonstrados neste capítulo e concluiremos que uma variedade Grassmanniana real mergulhada em uma variedade Grassmanniana complexa é hamiltoniana estável.

Considere $G =$SU(n), sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$ e $(X, Y) = -\text{tr}\ (XY)$ para $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$. Observamos que $(\cdot, \cdot)$ é uma métrica invariante pois o traço é invariante por conjugações. Podemos ver a Grassmanniana complexa $\text{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$ dos $p-$planos em $\mathbb{C}^n$ como órbita adjunta de

$$w_0 = \begin{pmatrix} i\lambda I_p & 0 \\ 0 & i\mu I_{n-p} \end{pmatrix}$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > \mu$ e $\text{tr} w_0 = 0$.

Vamos agora comentar sobre alguns aspectos geométricos de $\text{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$, que sabemos que também pode ser vista como $\text{SU}(n)/\text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(n-p))$, onde $\text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(n-p)) := \text{SU}(n) \cap (\text{U}(p) \times \text{U}(n-p))$. Com isso, notamos que a álgebra de Lie de $\text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(n-p))$ é dada por uma matriz em blocos da seguinte maneira:

$$\mathfrak{l} = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{u}(p), B \in \mathfrak{u}(n-p) \text{ e tr } M = 0 \right\}.$$

Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$, $T_{w_0}\text{Gr}_{n,p}(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{m}$ pode ser identificado com o conjunto

$$\left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_{n-p \times p}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{p \times n-p}(\mathbb{C}) \text{ e } M \in \mathfrak{su}(n) \right\}.$$

Da condição $M \in \mathfrak{su}(n)$, conclui-se que $B = -\overline{A^t}$ e

$$T_{w_0}M = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\overline{A^t} & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_{n-p\times p}(\mathbb{C}) \text{ e } M \in \mathfrak{su}(n) \right\}.$$

Assim, como esperado, se E_{ij} representa a matriz que tem entradas nulas a menos da entrada (i,j), uma base de $\mathfrak{m}$ é dada por $\mathcal{B} = \{A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}, S_{ij} := i(E_{ij} + E_{ji})\}_{1\leq i\leq p \text{ e } p<j\leq n}$.

Outra maneira de ver $T_{w_0}M$ é a seguinte:

$$T_{w_0}M = \{X \in \mathfrak{su}(n) | [w_0, X] = (\lambda - \mu)J_0X\} \tag{2.3.1}$$

onde

$$J_0 = i \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Com efeito, por um lado, seja

$$X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\overline{A^t} & 0 \end{pmatrix}$$

uma matriz de $T_{w_0}M$, por um cálculo direto verifica-se que

$$[w_0, X] = i(\lambda - \mu) \begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A^t} & 0 \end{pmatrix}$$

e que

$$J_0X = i \begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A^t} & 0 \end{pmatrix}$$

o que garante uma das inclusões. Por outro lado, se escrevermos uma matriz $X \in \mathfrak{su}(n)$ em blocos, temos que:

$$X = \begin{pmatrix} C_{p\times p} & D_{p\times(n-p)} \\ E_{(n-p)\times p} & F_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}$$

daí que

$$[w_0, X] = \begin{pmatrix} 0 & i(\lambda - \mu)D \\ i(\mu - \lambda)E & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$J_0X = i \begin{pmatrix} C & D \\ -E & -F \end{pmatrix}.$$

Da condição que $[w_0, X] = i(\lambda - \mu)J_0X$, concluímos que $C = 0$ e $D = 0$ e da condição que $X \in \mathfrak{su}(n)$, inferimos que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -\overline{D^t} & 0 \end{pmatrix}$$

donde temos a outra inclusão.

A estrutura complexa canônica em M, que denotaremos por $\widetilde{J}$ é dada, na origem, pela ação de J_0, isto é:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_0 : T_{w_0}M &\to T_{w_0}M \\ X &\mapsto J_0X. \end{aligned}$$

Observamos que como $\alpha_{ij}(w_0) = \lambda - \mu$, pelo lema 2.2.2, $\omega = (\lambda - \mu)F$.

A fim de compreender que $(\cdot,\cdot)|_M$ é uma métrica Kähler-Einstein, iremos enunciar duas proposições que podem ser encontradas em [Bes87, Proposition 8.21 p.211 e Proposition 8.85 p.224] que estabelecem que:

Proposição 2.3.1. *A união disjunta dos $\mathfrak{s}_w$, $w \in M$ é o espaço total de um subfibrado vetorial trivial do fibrado normal de M em $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\mathfrak{s}$.*

Proposição 2.3.2. *Se o posto do fibrado $\mathfrak{s}$ é 1, M admite apenas uma estrutura Kähler $G-$invariante, a menos de homotetia, que é Kähler-Einstein.*

Notemos que G_{w_0} pode ser identificado com $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(n-p))$ e $Z(G_{w_0}) \simeq [Z(\mathrm{U}(p))\times Z(\mathrm{U}(n-p)]\cap\mathrm{SU}(n)$, logo $\mathfrak{s}_{w_0} \simeq [\mathfrak{z}(\mathfrak{u}(p))\times\mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n-p))]\cap\mathfrak{su}(n)$. Ora, $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}(m)) = \{\theta I_m, \theta \in \mathrm{U}(1)\}$ $\forall m$ então

$$\mathfrak{s}_{w_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \theta_1 I_p & 0 \\ 0 & \theta_2 I_{n-p} \end{pmatrix} : \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{U}(1) \text{ e } \theta_1 + \theta_2 = 0 \right\}$$

daí que $\dim s_{w_0} = 1$ e, pelas proposições anteriores, sendo $G-$invariante, $(\cdot,\cdot)|_M$ é Kähler-Einstein.

Lema 2.3.3 ([Ono03, Lemma 5.1 p.253])**.** *A constante de Einstein de M é*

$$c = \frac{n}{(\lambda-\mu)^2}$$

Demonstração. Sejam $X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\overline{A}^t & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -\overline{B}^t & 0 \end{pmatrix}$ elementos de $T_{w_0}M$. Pela definição de $(\cdot,\cdot)|_M$ teríamos

$$\omega_{w_0}(X,Y) = (J_0X, Y) = -\mathrm{tr}\ (J_0XY).$$

Ora,

$$J_0XY = i\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ -\overline{A}^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ -\overline{B}^t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A\overline{B}^t & 0 \\ 0 & -\overline{A}^t B \end{pmatrix}$$

$$= i \begin{pmatrix} -A\overline{B}^t & 0 \\ 0 & \overline{A}^t B \end{pmatrix}.$$

Logo, $\omega_{w_0}(X,Y) = i\left(\text{tr } A\overline{B}^t - \text{tr } \overline{A}^t B\right)$.

Por outro lado, se tomarmos $A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, verifica-se que $S_{ij} := J_w A_{ij} = i(E_{ij} + E_{ji})\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\{A_{ij}, S_{ij}\}_{1\leq i\leq p \text{ e } p<j\leq n}$ forma uma base ortonormal e orientada de $E_{w,(i,j)}$ logo, $\gamma(w_0) = \sum\limits_{i,j} [A_{ij}, S_{ij}]$.
Notemos que

$$\begin{aligned}
[A_{ij}, S_{ij}] &= \frac{1}{2}[E_{ij} - E_{ji}, i(E_{ij} + E_{ji})] \\
&= \frac{i}{2}([E_{ij}, E_{ji}] - [E_{ji} - E_{ij}]) \\
&= i[E_{ij}, E_{ji}]
\end{aligned}$$

daí que, como $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
[E_{ij}, E_{ji}]_{kl} &= \sum_{s=1}^{n} (E_{ij})_{ks}(E_{ji})_{sl} - (E_{ji})_{ks}(E_{ij})_{sl} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{js}\delta_{js}\delta_{il} - \delta_{jk}\delta_{is}\delta_{is}\delta_{jl} \\
&= \delta_{ik}\delta_{il} - \delta_{jk}\delta_{jl}
\end{aligned}$$

ou seja, logo, sendo $i \leq p$ e $p < j \leq n$ obtém-se que:

$$\gamma(w_0) = i \begin{pmatrix} (n-p)I_p & 0 \\ 0 & -pI_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Como já comentado, se $X, Y \in T_{w_0}M$ são tais que $X = [U, W]$ e $Y = [V, W]$ para $U, V \in \mathfrak{g}$, então $U = -\frac{1}{(\lambda-\mu)} J_0 X$ e $V = -\frac{1}{(\lambda-\mu)} J_0 Y$ daí,

$$\begin{aligned}
\rho_{w_0}(X,Y) &\overset{(2.1.11)}{=} \frac{1}{(\lambda-\mu)^2}(\gamma(w_0), [J_0X, J_0Y]) \\
&= -\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\text{tr } (\gamma(w_0)[J_0X, J_0Y]).
\end{aligned}$$

Verifica-se que J_0 anti-comuta com X e com Y e como consequência temos que

$$[J_0X, J_0Y] = [X,Y] = \begin{pmatrix} B\overline{A^t} - A\overline{B^t} & 0 \\ 0 & \overline{B^t}A - \overline{A^t}B \end{pmatrix}$$

e

$$\text{tr } (\gamma(w_0)[J_0X, J_0Y]) = i\text{tr } \begin{pmatrix} (n-p)(B\overline{A^t} - A\overline{B^t}) & 0 \\ 0 & p(\overline{B^t}A - \overline{A^t}B) \end{pmatrix}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\rho_{w_0}(X,Y) &= -\frac{i}{(\lambda-\mu)^2}[(n-p)\mathrm{tr}\,(B\overline{A^t}-A\overline{B^t})+p\mathrm{tr}\,(\overline{B^t}A-\overline{A^t}B)]\\ &= -\frac{i}{(\lambda-\mu)^2}n\mathrm{tr}\,(B\overline{A^t}-A\overline{B^t})\\ &= -\frac{ni}{(\lambda-\mu)^2}\mathrm{tr}\,(B\overline{A^t}-A\overline{B^t})\end{aligned}$$

e o resultado está demonstrado. ■

Para sabermos mais sobre essa constante, vamos considerar a forma de Cartan-Killing $(\cdot,\cdot)$ em $\mathfrak{su}(n)$. A métrica normal induzida por esta forma faz de $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$ um espaço hermitiano. É conhecido que

$$(U,V) = -2n\mathrm{tr}\,(UV) \quad \forall U,V\in\mathfrak{su}(n).$$

Se olharmos $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$ como o quociente $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(n-p))$ temos que se X_U e X_V são campos fundamentais associados aos vetores $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ em $\mathfrak{su}(n)$:

$$(X_U,X_V)_{w_0} = -2n\mathrm{tr}\,([\widetilde{U},w_0][\widetilde{V},w_0]).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(X_U,X_V)_{w_0} &= -\mathrm{tr}\,([[\widetilde{U},w_0],w_0][[\widetilde{V},w_0],w_0])\\ &\overset{(2.3.1)}{=} -(\lambda-\mu)^2\mathrm{tr}\,([J_0\widetilde{U},w_0][J_0\widetilde{V},w_0])\\ &= -(\lambda-\mu)^2\mathrm{tr}\,(J_0[\widetilde{U},w_0]J_0[\widetilde{V},w_0]) \qquad (2.3.2)\\ &= -(\lambda-\mu)^2\mathrm{tr}\,([\widetilde{U},w_0][\widetilde{V},w_0]). \qquad (2.3.3)\end{aligned}$$

Na equação (2.3.2) usamos a invariância da estrutura complexa definida em (2.3.2) e na (2.3.3) usamos o fato de que a métrica é hermitiana.

Desta igualdade concluímos que

$$c = \frac{n}{(\lambda-\mu)^2} = \frac{1}{2}.$$

Vamos agora verificar que $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$ é mínima, lagrangeana e fechada em $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$. Para isso, vamos considerar a seguinte involução:

$$\begin{aligned}\sigma:\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})\\ \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_1,\dots,v_p\} &\mapsto \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\overline{v_1},\dots,\overline{v_p}\}.\end{aligned}$$

Verifica-se que σ é uma involução e é anti-holomorfa por ser conjugada à aplicação identidade, que é holomorfa.

Quanto à isometria, σ pode ser vista como uma ação parcial por uma matriz de $\mathrm{SU}(n)$ (este age transitivamente na Grassmanniana) ora, $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$ é um espaço simétrico, então a componente conexa da identidade do seu grupo de isometrias é $\mathrm{SU}(n)$ [cf. [KN69, Example 10.8 p.286] e [Hel62, Theorem 3.3 p.173]], logo σ é uma isometria.

Segue do Teorema 1.3.4 que o conjunto dos seus pontos fixos L é mínimo, lagrangeano e fechado em $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$. De maneira análoga ao caso particular dos espaços projetivos, considerado no capítulo 2, $L = \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Sabe-se que $\pi_1(L) = \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ logo, de [Tak84, Theorem 2.4 p.305], $\lambda_1(L) = \dfrac{1}{2}$ portanto, pelo Corolário 2.2.14, $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$ é hamiltoniana estável em $M = \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Além disso, o mergulho canônico de $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$ em $\mathfrak{su}(n)$ é dado por:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{su}(n) \\ \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \ldots, v_p\} & \mapsto & \mathrm{Ad}(A)w_0 \end{array}$$

onde $\{v_1, \ldots, v_p\}$ é uma base ortonormal do $p-$plano considerado em $\mathbb{R}^n$ e A é dada da seguinte maneira: complete a base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ para uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Como a ação de $\mathrm{SO}(n)$ é transitiva em $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $A \in \mathrm{SO}(n)$ tal que $Ae_i = v_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, tal matriz tem como colunas, os vetores v_i com $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como estamos tratando de um grupo de Lie matricial, a representação adjunta é a conjugação, isto é, $\mathrm{Ad}(A)w_0 = Aw_0A^{-1}$. Da condição que $A \in \mathrm{SO}(n)$, isto é também equivalente a dizer que $\mathrm{Ad}(A)w_0 = Aw_0A^t$. Verifica-se que a $(j,k)-$ésima entrada da matriz $X := \mathrm{Ad}(A)w_0$ é dada por

$$\lambda \underbrace{(a_{j1}a_{k1} + \ldots + a_{jp}a_{kp})}_{x} + \mu \underbrace{(a_{jp+1}a_{kp+1} + \ldots + a_{jn}a_{kn})}_{y}$$

onde $(A)_{ij} = a_{ij}$. Como as colunas de A são ortonormais entre si, temos que

$$\langle (a_{j1}, \ldots, a_{jn}), (a_{k1}, \ldots, a_{kn}) \rangle = \delta_{jk}$$

isto é, $x + y = \delta_{jk}$. Daí,

- Se $j \neq k$,
$$X_{jk} = \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)x.$$

- Se $j = k$,
$$X_{jk} = \lambda x + \mu(1 - x) = (\lambda - \mu)x + \mu.$$

Este mergulho, segundo o Corolário 2.2.14 é de ordem 1 logo, suas funções coordenadas fornecem as autofunções de Δ_L, agindo nas funções de L, associadas ao autovalor $\lambda_1(L)$.

Capítulo 3

Exemplo

Neste capítulo consideraremos um exemplo, que não encontramos na literatura, de variedade *flag* real que é subvariedade lagrangeana, mínima e compacta de uma variedade *flag* complexa e que não é riemanniana estável. Estaremos interessados na variedade *flag* maximal real de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ como uma subvariedade lagrangeana da variedade *flag* maximal complexa de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ e, de acordo com resultados obtidos nos capítulos 1 e 2, concluiremos que tal subvariedade não é lagrangeana estável.

3.1 Métrica Kähler-Einstein em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$

Ao longo do texto denotaremos por $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ a variedade *flag* maximal complexa de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ e por $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ a variedade *flag* maximal real de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Observação 3.1.1. É de caráter geral que se G é um grupo de Lie semissimples, $\mathfrak{p}$ é a subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ com relação à alguma ordenação do sistema de raízes e $P = \{g \in G | \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$ é o subgrupo de Borel de G, a variedade *flag* maximal G/P é difeomorfa ao quociente $U/(U \cap P)$ onde U é o subgrupo conexo (e compacto) de G que integra a forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ (cf. [SMN03]).
Segue que, apesar de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ não ser um grupo de Lie compacto, a variedade $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ pode ser identificada com a órbita adjunta de um grupo de Lie compacto.

Considere a matriz de ordem $2n$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n.

Lembramos que o **grupo simplético** $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ é definido por:

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) : A^t\Phi A = \Phi\}$$

e sua álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ é dada por:

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) : \Phi A = -A^t\Phi\}.$$

Sabe-se [Bar95, Seção 4.1.4 p.64] que $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ pode ser vista da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}} \quad &= \quad \{\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n : \dim_{\mathbb{R}} V_i = i \\ &\text{e} \quad V_i \text{ é isotrópico com relação à estrutura simplética canônica de } \mathbb{R}^{2n}\}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ pode ser visto como:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}} \quad &= \quad \{\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n : \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \\ &\text{e} \quad V_i \text{ é isotrópico com relação à estrutura simplética canônica de } \mathbb{C}^{2n}\}. \end{aligned}$$

Esta seção é baseada essencialmente em [Arv03, BFR86] e tem por objetivo explicitar uma métrica Kähler-Einstein em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$. Concluiremos que esta métrica tem constante de Einstein positiva o que implicará pela Observação 1.2.14, que $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ tem primeira classe de Chern positiva.

De maneira geral, se $M = G/K$ é uma variedade homogênea, há uma bijeção entre estruturas complexas invariantes em M e uma ordenação em R_M, como foi visto na Observação 2.1.23. Desta forma, se fixarmos uma estrutura complexa $J_o = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in R_M^+}$ em T_oM $(o = eK)$, através da escolha das raízes positivas, pode-se considerar o funcional de $\mathfrak{h}^*$ definido por

$$\delta = \sum_{\beta \in {R_M}^+} \beta.$$

Segue da não degenerescência da forma de Cartan-Killing, B, de $\mathfrak{g}$ restrita à $\mathfrak{h}$ (cf. [SM10, Corolário 6.4 p.151]) que existe um único vetor $H_\delta \in \mathfrak{h}$ tal que $\delta = B(H_{\delta},\cdot)\Big|_{\mathfrak{h}}$.

Uma propriedade importante de H_δ é que ele é um elemento regular, como pode ser verificado através do segundo item de [Hel79, Lemma 3.11 p.461]. Com isso, podemos considerar $M \simeq \mathrm{Ad}(G)H_\delta \coloneqq \mathcal{O}_{H_\delta}^G$ e notar que o elemento em $\mathfrak{g}$ associado à origem $o = eK$ de M é o próprio H_δ.

A partir de $J_o = \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in R_M^+}$, definimos um produto interno em T_oM, g_o como:

$$g_o(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \epsilon_\alpha i B(H_\delta, H_\alpha).$$

Afirmamos que g_o é compatível com J_o uma vez que,

$$g_o(J_oX_\alpha, J_oX_{-\alpha}) = -(\epsilon_\alpha)^2 g_o(iX_\alpha, iX_{-\alpha}) = g_o(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Sendo assim, podemos definir uma 2−forma invariante ω em $\mathcal{O}_{H_\delta}^G$ definindo-a em o como

$$\omega_o(X_\alpha, X_{-\alpha}) \coloneqq g_o(J_oX_\alpha, X_{-\alpha}) = iB(H_\delta, H_\alpha) \text{ se } \alpha > 0. \tag{3.1.1}$$

Observamos aqui que a maneira que ω_o e g_o foram definidas é suficiente uma vez que se $\beta \in R$ é tal que $\alpha + \beta \notin R$ ambas aplicações se anulam e se $\gamma \coloneqq \alpha + \beta \in R$, γ pode ser escrita como combinação linear das raízes positivas. Além disso, notamos que ω_o é não degenerada, propriedade que continua válida para ω, uma vez que a representação adjunta em algum ponto do grupo é um isomorfismo. Logo, para concluir que ω é uma forma Kähler, basta verificar que ela é fechada. Ora, a forma de Kostant-Kirillov-Souriau na origem, é tal que $F_o(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B(H_\delta, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = -i\omega_o(X_\alpha, X_{-\alpha})$. Como F é fechada, F_o satisfaz a condição na Proposição 2.1.17, logo ω_o também a satisfaz e portanto, ω é fechada.

A fim de mostrar que a métrica invariante g, definida a partir de g_o, é Kähler-Einstein com constante de Einstein positiva, vamos demonstrar que a forma de Ricci ρ de $\mathcal{O}_{H_\delta}^G$ satisfaz $\rho = c\omega$ para alguma constante c positiva. Segue da invariância de ρ e de ω, que é suficiente verificar que $\rho_o = c\omega_o$.

De acordo com [BFR86, p.626-628], a forma de Ricci na origem o de $\mathcal{O}_{H_\delta}^G$ é dada por

$$\rho_0(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 2iB(H_\delta, X_\alpha) \tag{3.1.2}$$

para qualquer métrica hermitiana g.

Verifica-se através de (3.1.1) que $\omega_o = 2\rho_o$. Porém, se tomarmos um múltiplo positivo κ de H_δ na definição de g, a nova constante de Einstein será $c \coloneqq \dfrac{\kappa}{2}$. Atentamos ao fato de κ ser positivo para que g seja positivo-definida. Assim, concluímos que fixada uma estrutura complexa J em M, exite uma única métrica Kähler-Einstein invariante em M, a menos de um múltiplo positivo. Para mais detalhes veja [Arv06].

3.2 Estabilidade de $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$

Para demonstrar que $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ não é lagrangeana estável e, consequentemente, não é riemanniana estável em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$, iremos aplicar o Corolário 1.2.13.

A fim de verificar que $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ é uma subvariedade lagrangeana, mínima e compacta de $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$, isto é, que estamos nas hipóteses do Corolário 1.2.13, iremos considerar uma isometria anti-holomorfa e involutiva em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ e mostrar que o conjunto dos pontos fixos desta isometria é $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$. O resultado seguirá diretamente do Teorema (1.3.6).

Inicialmente, vamos considerar a seguinte involução em $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) &\to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \overline{A} \end{aligned}$$

onde $\overline{A}$ é a matriz conjugada da matriz A.

Observamos que θ está bem definida. Ora, se $A \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, então $\Phi A = -A^t\Phi$. Deste modo,

$$\Phi\overline{A} = \overline{\Phi A} = -\overline{A^t\Phi} = -\overline{A^t}\Phi = -(\overline{A})^t\Phi$$

portanto, $\overline{A} \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$.

Por ser uma involução, θ pertence ao grupo de automorfismos de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ (denotado por $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}))$). Sendo $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ conexo e simplesmente conexo, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}))$ (cf. [SM15, Proposição 9.1 p.185]).

Tendo a involução θ em mente, iremos definir um involução em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}} &\to \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}} \\ \langle v_1\rangle \subset \langle v_1, v_2\rangle \subset \ldots \subset \langle v_1,\ldots,v_n\rangle &\longmapsto \langle \overline{A}e_1\rangle \subset \langle \overline{A}e_1, \overline{A}e_2\rangle \subset \ldots \subset \langle \overline{A}e_1,\ldots,\overline{A}e_n\rangle. \end{aligned}$$

Onde $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^{2n}$ e $A \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ é tal que $Ae_i = v_i$. Tal A sempre existe uma vez que $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ age transitivamente em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$.

Pode-se ver que σ é de fato uma involução e anti-holomorfa.

O conjunto dos pontos fixos desta involução é $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$. A verificação deste fato é análoga ao caso do espaço projetivo no capítulo 2.

Nos resta provar que se munirmos $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ da métrica obtida anteriormente, σ é uma isometria. Para isso, observemos que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}))$ (a fim de facilitar a exposição escreveremos G no lugar de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie). De fato, sendo G um grupo de Lie simples,

$$\mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

onde $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ denota a álgebra das derivações de $\mathfrak{g}$. Sabe-se que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie do grupo dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ e que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$ (cf.[SM15, pp. 129 e 136]). Como G é conexo, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ e $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ são, também, conexos e, sendo subgrupos de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ que tem $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie, segue que ([SM15, Proposição 6.6 p.128] proposição 6.6):

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

Como G um grupo de Lie simples, a representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um isomorfismo. Com isso, podemos ver σ como α_θ onde

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}} &\to \mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}} \\ (\theta, [A]) &\mapsto [\theta(A)] \end{aligned}$$

é a ação transitiva de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$, θ é a conjugação em $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ e $[A]$ indica a classe de conjugação da matriz A em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$.

De acordo com [BFR86, p. 612], se $N = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \alpha(g) = \mathrm{id}\}$, então o grupo $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/N$ está contido no grupo de isometrias de M, $I(M)$. Como $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é simples, $N = \{e\}$ e $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset I(M)$. Deste modo, α_θ é uma isometria.

Pela Proposição 1.3.6, temos provada a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *$\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ é uma subvariedade lagrangeana, totalmente geodésica e fechada de $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$.*

Da observação 3.1.1, concluímos que, assim como toda variedade *flag*, $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$ é compacta. Portanto, $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ também o é.

Observação 3.2.2. Observamos que a métrica induzida em $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{R}}$ é uma métrica diagonal, no sentido de Patrão-San Martin. Recomendamos [PSM15] para maiores detalhes sobre métricas invariantes em variedades *flag* reais.

A seguir explicitamos uma tabela, que pode ser encontrada em ([Wig98]), contendo primeiro grupo fundamental das variedades *flag* reais maximais de alguns grupos de Lie simples:

Tipo	n	π_1	$\lvert\pi_1\rvert$
A_n	$n \geq 2$	$\mathrm{Q}(n)$	2^{n+1}
B_n	$n \geq 3$	$\mathrm{Q}(n-1) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	2^{n+1}
C_n	$n \geq 1$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \times \mathbb{Z}$	∞
F_4	$-$	$\mathrm{Q}(2) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	32

Tabela 3.1: Grupo Fundamental de certas variedades *flag* reais

onde $\mathrm{Q}(n)$ é um grupo definido por n geradores, $t_1, \ldots, t_n$ satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{cases} t_i t_j = t_j t_i & \text{se } |i-j| > 1 \\ t_i t_j = t_j t_i^{-1} & \text{se } |i-j| = 1 \end{cases}.$$

Observação 3.2.3. Este cálculo também é feito, sob o ponto de vista de teoria de controle em [DSSM15].

A partir desta tabela concluímos que:

Teorema 3.2.4. *O primeiro grupo de cohomologia de de Rham, H^1_{dR}, com coeficientes reais, de $\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}$ é não nulo portanto, $\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}$ não é lagrangeano estável em $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}_{2n}$.*

Demonstração. Sabe-se que o primeiro grupo de homologia H_1 com coeficientes em $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}$ é a abelianização de $\pi_1(\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n})$. Como este já é abeliano, eles coincidem. Ora,

$$H_1\left(\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}, \mathbb{R}\right) = H_1\left(\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}, \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Como os elementos de $\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tem ordem finita (1 ou 2), dado $z \in \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, temos:

$$z \otimes 1 = z \otimes \frac{2}{2} = 2z \otimes \frac{1}{2} = 0$$

Portanto $H_1\left(\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}, \mathbb{R}\right)$ não tem elementos de torção, donde

$$H^1\left(\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}, \mathbb{R}\right) \neq \{0\}.$$

■

Corolário 3.2.5. $\mathbb{F}^{\mathbb{R}}_{2n}$ *não é riemanniano estável em* $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}_{2n}$.

3.3 Observações finais

Do exemplo estudado neste capítulo, decorre uma questão natural, ainda em aberto, a respeito da estabilidade hamiltoniana de subvariedades lagrangeanas L em variedades *flag* complexas M que não sejam, necessariamente, espaços hermitianos simétricos. Da teoria desenvolvida por Oh em [Oh90], a estabilidade hamiltoniana está intimamente ligada com o conhecimento do primeiro autovalor do laplaciano λ_1 agindo nas funções da subvariedade L. O estudo de λ_1 em funções de formas reais de espaços hermitianos simétricos é realizado, por exemplo, em [Tak84].

Acreditamos que o cálculo de $\lambda_1(L)$ não seja uma aplicação imediata da teoria de Peter-Weyl para uma variedade M que não seja um espaço hermitiano simétrico (como é o caso de $\mathbb{F}_{2n}^{\mathbb{C}}$), uma vez que para tais variedades, a (única) métrica Kähler-Einstein não é a métrica normal, isto é, não é a induzida pela métrica bi-invariante do grupo de Lie compacto. Este fato a respeito da métrica Kähler-Einstein em variedades *flag* não simétricas torna a análise do primeiro autovalor do laplaciano muito mais envolvente que no caso dos espaços hermitianos simétricos. Outra abordagem possível para o cálculo de $\lambda_1(L)$ nestes casos, é a teoria de Bergery- Bourguignon para o cálculo de autovalores do laplaciano em submersões riemannianas com fibras totalmente geodésicas, assunto tratado em [BB82].

Referências Bibliográficas

[AA68] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Vol. 9, Benjamin, 1968. ↑10

[AO01] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *On hamiltonian stability of certain h-minimal lagrangian submanifolds in hermitian symmetric spaces*, RIMS Kokyuroku **1236** (2001), 31–48. ↑10

[AO02] ———, *Hamiltonian stability of certain symmetric r-spaces embedded in complex euclidean spaces*, preprint, Tokyo Metropolitan University (2002). ↑10

[AO$^+$03] A. Amarzaya, Y. Ohnita, et al., *Hamiltonian stability of certain minimal lagrangian submanifolds in complex projective spaces*, Tohoku Mathematical Journal **55** (2003), no. 4, 583–610. ↑10

[Arv03] A. Arvanitoyeorgos, *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, Student Mathematical Library. Providence, RI: American Mathematical Society **22** (2003). ↑50, 51, 57, 79

[Arv06] ———, *Geometry of flag manifolds*, International Journal of geometric methods in modern physics **3** (2006), no. 05n06, 957–974. ↑80

[Aur15] D. Auroux, *Infinitely many monotone lagrangian tori in* $\mathbb{R}^6$, Inventiones mathematicae **201** (2015), no. 3, 909–924. ↑10

[Bar95] C. J. B. Barros, *Conjuntos controláveis e conjuntos controláveis por cadeias para ações de semigrupos*, Ph.D. Thesis, 1995. ↑79

[BB82] L. B. Bergery and J. P. Bourguignon, *Laplacians and riemannian submersions with totally geodesic fibres*, Illinois J. Math **26** (1982), no. 2, 181–200. ↑84

[Bes87] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer, 1987. ↑31, 51, 53, 58, 59, 60, 67, 68, 74

[BFR86] M. Bordemann, M. Forger, and H. Römer, *Homogeneous Kähler manifolds: paving the way towards new supersymmetric sigma models*, Communications in mathematical physics **102** (1986), no. 4, 605–647. ↑51, 55, 56, 58, 79, 80, 82

[BH58] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces, i*, American Journal of Mathematics **80** (1958), no. 2, 458–538. ↑58

[BM06] H. Bursztyn and L. Macarini, *Introdução à geometria simplética*, IMPA, 2006. ↑13, 59

[BMR] S. Buoncristiano, F. Mercuri, and A. Rigas, *Differential forms and their integrals*, available at `http://www.ime.unicamp.br/~rigas/differential%20forms`. ↑16, 18, 19

[Che81] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds and its applications*, Science University of Tokyo, 1981. ↑61, 62

[CHX12] Q. Chen, S. Hu, and X. Xu, *Construction of Lagrangian submanifolds in* $\mathbb{C}P^n$, Pacific Journal of Mathematics **258** (2012), no. 1, 31–49. ↑34

[DS06] A. C. Da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, 2006. ↑13, 33

[DSSM15] A. L. Dos Santos and L. A. B. San Martin, *A method to find generators of a semi-simple Lie group via the topology of its flag manifolds*, arXiv preprint arXiv:1504.07271 (2015). ↑83

[ES64] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of riemannian manifolds*, American Journal of Mathematics **86** (1964), no. 1, 109–160. ↑69

[FGHK10] K. Fukaya, Oh Y. G., Ohta H., and Ono K., *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction, part i*, Vol. 41, American Mathematical Soc., 2010. ↑10

[GLP99] P. B Gilkey, J. V. Leahy, and J. Park, *Spectral geometry, riemannian submersions, and the gromov-lawson conjecture*, Vol. 30, CRC Press, 1999. ↑43

[Gui94] V. Guillemin, *Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian* T^n*-spaces*, Vol. 122, Springer Science & Business Media, 1994. ↑33

[Hel62] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Vol. 341, American Mathematical Soc., 1962. ↑77

[Hel79] ———, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Vol. 80, Academic press, 1979. ↑54, 55, 79

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. 2, New York, 1969. ↑13, 42, 77

[Kob72] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer Science & Business Media, 1972. ↑38

[Law80] H. B. Lawson, *Lectures on minimal submanifolds* **1** (1980). ↑21

[Lee13] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013. ↑16, 20, 24, 53

[Lee97] ———, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Vol. 176, Springer, 1997. ↑27

[Mat57] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytiques d'une certaine variete kahlerienne*, Nagoya Mathematical Journal **11** (1957), 145–150. ↑68

[Mil69] J. W. Milnor, *Morse theory*, Princeton university press, 1969. ↑14, 38

[Mor04] A. Moroianu, *Lectures on Kähler geometry*, Vol. 69, Cambridge University Press, 2004. ↑13, 14

[Oh90] Y. G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Inventiones mathematicae **101** (1990), no. 1, 501–519. ↑10, 11, 12, 23, 24, 26, 28, 31, 32, 34, 35, 36, 40, 43, 44, 45, 84

[Ono03] H. Ono, *Minimal Lagrangian submanifolds in adjoint orbits and upper bounds on the first eigenvalue of the Laplacian*, Journal of the Mathematical Society of Japan **55** (2003), no. 1, 243–254. ↑11, 45, 60, 61, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 72, 74

[Pet06] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Vol. 171, Springer Science & Business Media, 2006. ↑38

[Poi05] H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Transactions of the American Mathematical Society **6** (1905), no. 3, 237–274. ↑10, 12

[PSM15] M. Patrão and L. A. B. San Martin, *The isotropy representation of a real flag manifold: Split real forms*, Indagationes Mathematicae **26** (2015), no. 3, 547–579. ↑82

[Rab12] L. Rabelo, *Homologia e Cohomologia de Variedades Flag Reais*, Ph.D. Thesis, 2012. ↑57

[SM10] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Unicamp, 2010. ↑46, 47, 79

[SM15] ———, *Grupos de lie* (2015), available at `http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2015/gruplie0.pdf`. ↑58, 81, 82

[SMN03] L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros, *Invariant almost hermitian structures on flag manifolds*, Advances in Mathematics **178** (2003), no. 2, 277–310. ↑51, 78

[Tak84] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Mathematical Journal, Second Series **36** (1984), no. 2, 293–314. ↑77, 84

[Wig98] M. Wiggerman, *The fundamental group of a real flag manifold*, Indagationes Mathematicae **9** (1998), no. 1, 141–153. ↑82