UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ROGER DANILO FIGLIE

Existência e unicidade de soluções para equação de Navier-Stokes incompressível no espaço via estimativas de energia em espaços de Sobolev

Campinas

2019

Roger Danilo Figlie

Existência e unicidade de soluções para equação de Navier-Stokes incompressível no espaço via estimativas de energia em espaços de Sobolev

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Ednei Felix Reis

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Roger Danilo Figlie e orientada pelo Prof. Dr. Ednei Felix Reis.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F468e

Figlie, Roger Danilo, 1990-
Existência e unicidade de soluções para equação de Navier-Stokes incompressível no espaço via estimativas de energia em espaços de Sobolev / Roger Danilo Figlie. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Ednei Felix Reis.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Sobolev, Espaços de. 3. Unicidade de solução (Equações diferenciais). 4. Existência de solução (Equações diferenciais). I. Reis, Ednei Felix. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence and uniqueness of solutions to the incompressible Navier-Stokes equation in the space by means of energy methods in Sobolev spaces
Palavras-chave em inglês:
Navier-Stokes equations
Sobolev spaces
Uniqueness of solution (Differential equations)
Existence of solution (Differential equations)
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Ednei Felix Reis [Orientador]
Estevão Esmi Laureano
David Alexander Chipana Mollinedo
Data de defesa: 19-07-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-7848-2949
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/6952876873619184

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 19 de julho de 2019 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDNEI FELIX REIS

Prof(a). Dr(a). ESTEVÃO ESMI LAUREANO

Prof(a). Dr(a). DAVID ALEXANDER CHIPANA MOLLINEDO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A minha mãe Marlinda, à memória do meu pai Antonio, e a vida, por tudo que me ensinaram.

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus amigos por terem ficado ao meu lado e me apoiado. A minha mãe Marlinda e minha namorada Mara por terem me incentivado a continuar em frente. Ao meu orientador Prof. Dr. Ednei Felix Reis por toda a atenção que dedicou durante a escrita dessa dissertação. A meus cães Bingo, Nina, Talita, Thor e Tyler por toda a companhia.

Resumo

A existência global de soluções para a versão incompressível da equação de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$ é um problema ainda em aberto na matemática. Neste trabalho expomos um resultado de existência e unicidade em um intervalo de tempo $[0, T]$ para a solução desta equação, dada uma condição inicial pertencente ao espaço de Sobolev. Tal resultado é obtido através de métodos de energia em espaços de Sobolev, regularizadores e argumentos de convergência fraca.

Palavras-chave: equações de Navier-Stokes, espaços de Sobolev, unicidade de soluções, existência de soluções.

Abstract

The global existence of solutions to the incompressible version of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^3$ is an open problem in mathematics. In this work, we present a result of existence and uniqueness in a time interval $[0, T]$ for the solution of this equation, given an initial condition belonging to Sobolev space. This result is obtained by means of energy methods in Sobolev spaces, mollifiers and weak convergence arguments.

Keywords: Navier-Stokes equations, Sobolev spaces, uniqueness of solutions, existence of solutions.

Sumário

1 Introdução

A equação de Navier-Stokes é um sistema de EDP's que descreve o movimento de um fluído através do espaço, dada uma condição inicial de velocidade. Para obter a solução desta EDP devemos encontrar um campo vetorial de velocidade e um campo escalar de pressão. Como qualquer EDP, as primeiras perguntas que devem ser feitas ao buscar soluções é se essas soluções existem e são únicas.

Para a Equação de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$, a questão de que se a solução é única e existe globalmente no tempo (para todo o tempo futuro), ainda é um problema em aberto. Sendo inclusive um dos problemas do milênio, cuja formulação completa pode ser encontrada na referência [1].

Na formulação do problema do milênio uma das referências citadas é o livro escrito por Bertozzi e Majda (referência [2]), que em seus capítulos iniciais mostra a existência e unicidade de soluções locais (em um intervalo de tempos $[0, T]$) para a equação de Navier-Stokes com incompressibilidade e em todo o $\mathbb{R}^n$.

Tal demonstração é muito interessante por mostrar como várias técnicas de Análise Funcional podem ser utilizadas de forma prática. Desta forma, no capítulo 2 iniciamos por apresentar os espaços L^p, convoluções e a transformada de Fourier.

Em seguida, no capítulo 3, apresentamos os espaços de Sobolev, os regularizadores, começamos a tratar a unicidade de soluções para a equação de Navier-Stokes, e a existência de soluções para uma versão regularizada da equação de Navier-Stokes. Por fim no capítulo 4, entramos no cerne do texto ao apresentar a demonstração feita por Majda de existência e unicidade para a equação de Navier-Stokes, com algumas alterações nas hipóteses. Tais resultados principais são encontrados nos teoremas 30, 36 e 37. Sendo que a demonstração da letra "c"do teorema 36 difere totalmente da utilizada em [2], pois a abordagem aqui utilizada evita a utilização do conceito de distribuições, já o teorema 30 é um adendo ao original, e mostra como a pressão pode ser recuperada a partir da velocidade.

2 Alguns resultados de análise

Antes de começar a buscar as soluções para a equação de Navier-Stokes precisaremos de alguns resultados de análise que serão expostos em sua maioria neste capítulo. Começamos introduzindo a notação a ser utilizada no texto, na seção seguinte definimos os espaços de Hilbert e a noção de convergência fraca (que será utilizada em vários argumentos do capítulo 4). Falaremos também sobre as convoluções, que serão utilizadas no capítulo seguinte para definir os regularizadores. E, por fim, apresentaremos a transformada de Fourier e seus principais resultados.

2.1 Notação

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^3$ um multi-índice, definimos:

$$|\alpha| = \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3$$

$$\alpha! = \alpha^1!.\alpha^2!.\alpha^3!$$

Também utilizando a notação de multi-índice se $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$ teremos:

$$x^\alpha = (x^1)^{\alpha^1}.(x^2)^{\alpha^2}.(x^3)^{\alpha^3}$$

E supondo α e β dois multi-índices, por $\alpha \leqslant \beta$ definimos que para cada i temos $\alpha^i \leqslant \beta^i$. Em se tratando de derivadas, poderemos denotar as variáveis sobre as quais estaremos derivando de duas formas distintas. Na primeira denotaremos explicitamente quais variáveis estamos derivando, por exemplo: ∂_{x^1}. Na segunda forma utilizaremos a notação com um multi-índice ou um inteiro. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar, então denota-se:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha^1}}{\partial (x^1)^{\alpha^1}} \left(\frac{\partial^{\alpha^2}}{\partial (x^2)^{\alpha^2}} \left(\frac{\partial^{\alpha^3} f(x)}{\partial (x^3)^{\alpha^3}} \right) \right)$$

Por $|\alpha| = 0$ entende-se que $D^\alpha f = f$. Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ for um campo vetorial então denota-se:

$$D^\alpha f(x) = (D^\alpha f^1, D^\alpha f^2, D^\alpha f^3)$$

Por outro lado, seja $k \in \mathbb{Z}^+$, denotamos:

$$D^k f = \{D^\alpha f \,|\, |\alpha| \leqslant k\}$$

$$|D^k f| = \max_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha f|$$

Desta forma temos que $|Du| = |\nabla u|$. Também definimos a derivada material, dada uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e um campo de velocidades $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A derivada material de f nesse campo de velocidades v é dada por:

$$\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + (v.\nabla)f$$

Onde:

$$(v.\nabla)f = v^1 \partial_{x^1} f + v^2 \partial_{x^2} f + v^3 \partial_{x^3} f$$

Quando estivermos trabalhando com funções em L^p, utilizaremos $\| \cdot \|_{L^p}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p}$ para denotar respectivamente a norma e o produto interno nesses espaços, com exceção do espaço L^2 que denotaremos de outra forma. Para espaços de Sobolev H^m utilizaremos $\| \cdot \|_m$. Como veremos mais adiante o espaço de Sobolev H^0 é exatamente o espaço L^2 assim, para facilidade de notação, utilizaremos $\| \cdot \|_0$ para o espaço L^2.

Por e^j denota-se o vetor com coordenada j, igual a 1 e 0 nas outras coordenadas, por exemplo $e^2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Quando escrevermos $|f|$, estaremos falando do valor absoluto no caso de um valor escalar ou do módulo de um vetor, ou de um número complexo, sendo que o contexto eliminará ambiguidades. Para um vetor temos:

$$|v| = \left(\sum_{i=1}^{3} (v^i)^2 \right)^{1/2}$$

Já se M for uma matriz $m \times n$, denota-se:

$$|M| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{1=1}^{m} (v^{i,j})^2 \right)^{1/2}$$

Se v_1 e v_2 forem dois vetores, denota-se por:

$$v_1.v_2 = \sum_{j=1}^{3} v_1^j v_2^j$$

E são válidas as desigualdades:

$$|v_1.v_2| \leqslant |v_1||v_2|$$

$$|vM| \leqslant |v||M|$$

Algumas vezes, e quando não causar ambiguidade a escrita da integral será simplificada para:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} f$$

Se f for uma função escalar denotamos por ∇f o gradiente dado por:

$$\nabla f = (\partial_{x^1} f, \partial_{x^2} f, \partial_{x^3} f,)$$

Já se f for um campo vetorial denota-se por ∇f, a matriz gradiente dada por:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_{x^1} f^1 & \partial_{x^1} f^2 & \partial_{x^1} f^3 \\ \partial_{x^2} f^1 & \partial_{x^2} f^2 & \partial_{x^2} f^3 \\ \partial_{x^3} f^1 & \partial_{x^3} f^2 & \partial_{x^3} f^3 \end{bmatrix}$$

2.2 Espaços de Hilbert

As definições e teoremas sobre espaços de Hilbert, aqui citados, serão utilizados tanto na seção sobre propriedades dos espaços de Sobolev, quanto na demonstração dos resultados principais da dissertação. Os resultados aqui citados serão basicamente retirados das referências [3] e [4].

Definição 1. *(Produto Interno) Seja X um espaço vetorial complexo, um produto interno em X é uma função que associa a cada par $(x, y) \in X \times X$ um número complexo $\mathbb{C}$. O produto interno é denotado por $\langle x, y \rangle$, e deve ter as seguintes propriedades:*

a) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$*, para todo* $x, y, z \in X$ *e* $a, b \in \mathbb{C}$.

b) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$*, para todo* $x, y \in X$.

c) $\langle x, x \rangle \in (0, \infty)$ *para todo* x *não nulo pertencente a* X.

Definição 2. *(Espaço com Produto Interno) Um espaço com produto interno X, é um espaço vetorial complexo dotado de um produto interno.*

Definição 3. *(Espaço de Hilbert) Um espaço de Hilbert, denotado por H, é um espaço de produto interno, completo na norma:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Chamada de norma induzida pelo produto interno.

A partir deste ponto temos definidos nossos espaços de Hilbert, começaremos agora a citar suas principais propriedades:

Teorema 1. *(Desigualdade de Schwartz) Seja H um espaço de Hilbert, para quaisquer $x, y \in H$ temos $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$, com a igualdade se, e somente se, x e y forem linearmente dependentes.*

Demonstração. Ver referência [3] pág. 172. teorema 5.19. □

Definição 4. *(Ortogonalidade) Dados $x, y \in H$, dizemos que eles são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$, o que também pode ser denotado por $x \perp y$. Além da definição para elementos de H, podemos definir a ortogonalidade para subconjuntos de H. Dado $E \subset H$, definimos:*

$$E^{\perp} = \{x \in H \,|\, \langle x, y \rangle = 0 \, p/ \; todo \, y \in E\}$$

Teorema 2. *(Teorema de Pitágoras) Se $x_1, ..., x_n \in H$ e x_j , x_k são ortogonais para $j \neq k$, temos então que:*

$$\left\| \sum_{1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{1}^{n} \|x_j\|^2$$

Demonstração. Ver referência [3] pág. 173, teorema 5.23. □

Teorema 3. *Se M é um subespaço fechado de H, então cada $x \in H$ pode ser expresso de forma única por $x = y + z$, onde $y \in M$ e $z \in M^{\perp}$. Além disso y e z são os únicos elementos de M e $M^{\perp}$, respectivamente, cuja distancia de x a esses subespaços é mínima.*

Demonstração. Ver referência [3] pág. 173 teorema 5.24. □

Até esse ponto enunciamos alguns resultados elementares sobre espaços de Hilbert, agora precisamos definir o conceito de convergência fraca e o teorema de convergência em espaços de Banach. Começamos pela construção das definições que levarão ao conceito de convergência fraca:

Definição 5. *(Funcional Linear) Dado um espaço vetorial X sobre $\mathbb{C}$. Uma função linear de X em $\mathbb{C}$ é chamado de funcional linear.*

Definição 6. *(Funcional Linear Limitado) Seja W um espaço vetorial normado, um funcional linear f é dito limitado se existe $c > 0$ tal que, para todo $x \in W$, temos:*

$$|f(x)| \leqslant c\|x\|$$

Definição 7. *(Espaço Dual) Dado um espaço vetorial normado W, dizemos que o espaço W^* formado por todos os funcionais lineares limitados em W, é o espaço dual de W.*

Teorema 4. *(Teorema de Representação de Riesz) Para todo funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H existe um $z \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$. Tal z é único e temos $\|z\| = \|f\|$.*

Demonstração. Ver referência referência [3], pág. 174, teorema 5.25, ou referência [4], pág. 188. □

A convergência fraca é comumente definida em espaços normados. Entretanto, aqui utilizaremos o teorema de representação de Riesz para defini-la de outra forma equivalente, quando estivermos trabalhando com espaços normados que forem também espaços de Hilbert.

Definição 8. *Uma sequência (x_n) em um espaço vetorial normado W é dita fracamente convergente se existir um $x \in W$ tal que para todo $f \in W^*$ temos:*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

Tal convergência é denotada por $x_n \rightharpoonup x$.

Agora se nosso espaço normado for um espaço de Hilbert, o teorema da representação de Riesz nos dá:

Definição 9. *Uma sequência (x_n) em um espaço de Hilbert H é dita fracamente convergente para um $x \in H$, se para qualquer $y \in H$, temos:*

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Agora para o teorema de convergência em espaços de Banach, traremos mais algumas definições envolvendo espaços duais:

Definição 10. *(Segundo Espaço Dual) Dado um espaço vetorial normado W, dizemos que o espaço W^{**} formado por todos os funcionais lineares limitados em W^*, é o segundo espaço dual de W.*

Definição 11. *(Funcional Canônico) Seja $x \in W$ fixo, $f \in W^*$ variável, definimos $g_x \in W^{**}$, da seguinte forma:*

$$g_x(f) = f(x)$$

Relembrando que temos $x \in W$ fixo, assim para cada x temos um funcional g_x em W^{**}.

Podemos então definir uma imersão canônica de W em W^{**}, denotado por $E : W \to W^{**}$ que leva cada $x \in W$ em um $g_x \in W**$.

Assim podemos definir nosso espaço reflexivo:

Definição 12. *(Espaço Reflexivo) Um espaço normado W é dito reflexivo se a imagem de E é igual a W^{**}.*

O que nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver referência [4], pág. 242 teorema 4.6-6. □

Teorema 6. *Dado um espaço de Hilbert H e uma sequência limitada (x_n) em H, então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente.*

Demonstração. Este teorema é resultado direto de [5] pág. 69, teorema 3.18 e do fato de que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach reflexivo, teorema 5. □

2.3 Espaços L^p

Os espaços L^p serão muito utilizados na definição do espaço de Sobolev. Começamos pela definição da norma L^p para $1 \leqslant p < \infty$. Seja $(X, \mathbb{M}, \mu)$ um espaço de medida e f uma função mensurável em X:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Agora para $p = \infty$, definimos a norma L^∞:

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geqslant 0 \,|\, \mu(\{x \,|\, |f(x)| > a\}) = 0\}$$

Desta forma definimos o espaço L^p:

$$L^p(X, \mathbb{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

onde utilizamos que o conjunto de funções que são iguais μ-quase sempre (μ-q.s.), definem o mesmo elemento de L^p. Na seção de transformadas de Fourier iremos definir o conceito versão de uma função, que terá um tratamento similar. Iniciaremos agora a enunciar os principais resultados que serão utilizados, mas para isso precisamos de uma pequena definição de teoria da integração. Iremos definir $\frac{1}{\infty} = 0$, desta forma podemos enunciar:

Teorema 7. *(Desigualdade de Holder) Sejam* $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ *com* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*, e suponha* $f \in L^q$ *e* $g \in L^p$ *então:*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^p} \tag{2.1}$$

Demonstração. Ver referência [5], pág. 92, teorema 4.6. □

Outro resultado que será muito utilizado é o de um espaço que é denso em L^p, o espaço de Schwartz:

Definição 13. *(Espaço de Schwartz) O espaço de Schwartz S é os espaço das funções infinitamente diferenciáveis C^∞, cujas funções junto com todas suas derivadas decaem a zero no infinito mais rapidamente do que qualquer potência de $|x|$. Em outras palavras, dada a seminorma:*

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$$

O espaço de Schwartz é dado por:

$$S = \{f \in C^\infty \mid \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \, para \; todo \, N, \alpha\}$$

Onde α é um multi-indice e $N \in Z^+$.

Teorema 8. *S é denso em L^p para $(1 \leqslant p < \infty)$.*

Demonstração. Ver referência [3] pág. 245, teorema 8.18. □

2.4 Convoluções

Agora trataremos das convoluções, os resultados aqui apresentados serão de grande utilidade ao falarmos dos regularizadores, visto que um regularizador nada mais é do que uma convolução. Começamos então pela sua definição. Dadas duas funções mensuráveis f e g, a convolução $f * g$ é dada por:

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

Para todo x tal que a integral existe. Conforme exposto por [3], pode-se definir vários espaços para conter f e g de forma que a convolução exista, neste texto utilizaremos o teorema abaixo:

Teorema 9. *(Desigualdade de Young) Dados $1 \leqslant p\,,q\,,r \leqslant \infty$ com $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f * g \in L^r$ e:*

$$\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Demonstração. Ver referência [3], pág. 241, proposição 8.9 letra "a". □

Agora podemos começar enunciando alguns dos principais resultados envolvendo convoluções. O primeiro deles nos dá ferramentas básicas para manipulá-las:

Teorema 10. *Assumindo que todas as integrais em questão existem temos:*

a)$f * g = g * f$

b)$(f * g) * h = f * (g * h)$

Demonstração. Vide referência [3], pág. 240, proposição 8.6. □

Definição 14. *(Espaço C^k) O espaço C^k é constituído pelas funções contínuas cujas derivadas parciais de ordem $\leqslant k$ existem e são contínuas.*

Definição 15. *(Espaço C_0^k) O espaço C_0^k é constituído pelas funções contínuas que decaem a zero no infinito e cujas derivadas parciais de ordem $\leqslant k$ existem e são contínuas. Segue dessa definição que essas derivadas de ordem até k também decaem a zero no infinito. Nesse espaço a norma de uma função f é dada por:*

$$\|f\|_{C_0^k} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f(x)\|_\infty$$

Em seguida enunciamos um teorema que será crucial na seção sobre regularizadores:

Teorema 11. *Se $f \in L^1$, $g \in C^k$, e $D^\alpha g$ é limitada para $|\alpha| \leqslant k$, então $f * g \in C^k$ e $D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$ para $|\alpha| \leqslant k$.*

Demonstração. Ver referência [3], pág. 242, proposição 8.10. □

2.5 A transformada de Fourier

A transformada de Fourier será muito utilizada na seção sobre espaços de Sobolev pois uma das normas nesse espaço é definida em função desta transformada. Para essa seção foram utilizado como referências [3] e [6].

Se uma função $f \in L^1(R^3)$, define-se sua transformada de Fourier como sendo:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-2\pi i\xi.x}dx \tag{2.2}$$

Em seguida começamos a enunciar algumas de suas propriedades:

Teorema 12. *(Propriedades da transformada de Fourier) Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^3)$, então:*

a)$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$.

b)$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$

c) Se $x^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leqslant k$ *então* $\hat{f} \in C^k$ *e* $D^\alpha \hat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{}$.

d)Se $f \in C^k$, $D^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leqslant k$, *e* $D^\alpha f \in C_0$ *para* $|\alpha| \leqslant k-1$, *então* $(D^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

e)(Lema de Riemann-Lebesgue) Seja $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^3))$ *o conjunto das transformadas de Fourier do espaço* $L^1(\mathbb{R}^3)$, *então temos* $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^3)) \subset C_0(\mathbb{R}^3)$.

f) Seja a transformação linear invertível do $\mathbb{R}^3$ *dada por* $Tx = t^{-1}x$ *com* $t > 0$, *então* $(f \circ T)\hat{}(\xi) = t^3 \hat{f}(t\xi)$.

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada em [3], pág. 249, teorema 8.22. ☐

Vamos também definir a transformada inversa de Fourier, dada uma $f \in L^1$:

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\xi)e^{2\pi i\xi.x}d\xi$$

Ao definirmos a transformada inversa de Fourier desta forma temos que dada uma função f, com algumas condições especificas, podemos aplicar a transformada de Fourier e em seguida sua inversa de forma a retornar a função f que tínhamos originalmente, ou algo muito similar a ela. Para apresentar o teorema que nos dá esse resultado, começamos apresentando as definições de versão de uma função e de isomorfismo unitário.

Definição 16. *(Versão) Dada uma função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ *mensurável. Dizemos que uma função mensurável* $f^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ *é uma versão de* f *se* $f = f^*$, μ*-q.s..*

Definição 17. *(Isomorfismo) Dados dois espaços vetoriais* X_1 *e* X_2 *sobre* $\mathbb{C}$, *um isomorfismo é uma transformação linear bijetora entre esses dois espaços.*

Definição 18. *(Isomorfismo unitário) Dados dois espaços de Hilbert H_1 e H_2, com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Uma função linear invertível $U : H_1 \to H_2$ que preserva o produto interno:*

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle Ux, Uy \rangle_2$$

Para quaisquer $x, y \in H_1$, é chamado de isomorfismo unitário.

Teorema 13. *(Teorema de inversão de Fourier) Se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$, então existe uma versão de f, aqui denominada f^*, tal que$(\hat{f})\check{} = (\check{f})\hat{} = f^*$.*

Demonstração. Ver referência [3], pág. 251. □

Temos então bem definidas as transformadas de Fourier para funções em L^1, mas como adiante iremos trabalhar com espaços de Sobolev, definiremos a transformada de Fourier para funções no espaço L^2. Faremos isso através do conceito de extensão:

Definição 19. *(Extensão) Dados dois espaços vetoriais normados X_1 e X_2, seja $Y \subset X_1$ e uma transformação linear $f : Y \to X_2$. Dizemos que $g : X_1 \to X_2$ é uma extensão de f se $g|_Y = f$.*

Teorema 14. *(Teorema de Extensão) Suponha que T seja uma transformação linear limitada, de um espaço vetorial normado X_1 para um espaço vetorial normado e completo X_2. Então T pode ser unicamente estendida para uma transformação linear limitada (com mesmo limitante), $\tilde{T}$, do completamento de X_1 em X_2.*

Demonstração. Ver referência [7], pág. 9, teorema 1.7. □

Teorema 15. *(O teorema de Plancherel) Se $f \in L^1 \cap L^2$, então $\hat{f} \in L^2$ e $\mathcal{F}|(L^1 \cap L^2)$ extende-se unicamente em um isomorfismo unitário no L^2.*

Demonstração. Ver referência [3] pág.252, teorema 8.29. □

Em outras palavras o teorema de Plancherel nos dá a transformada de Fourier de uma função em L^2. Ao leitor que preferir argumentos mais construtivos uma abordagem interessante pode ser encontrado na referência [6], que aqui reproduziremos com algumas alterações. Em suma o teorema 8, nos diz que S é denso tanto em L^1 quanto em L^2, portanto o espaço $L^1 \cap L^2$ é denso em L^2. Então dada uma função qualquer $f \in L^2$, podemos tomar uma sequência $f_k \in L^1 \cap L^2$ tal que $f_k \to f$.

Quando dizemos que a transformada de Fourier é uma transformação unitária, estamos dizendo que ela preserva o produto interno e, portanto, a norma. Logo podemos escrever $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Portanto tomando os elementos m e n da sequência, podemos escrever $\|\hat{f_m} - \hat{f}_n\|_{L^2} = \|(f_m - f_n)\hat{}\|_{L^2} = \|f_m - f_n\|_{L^2}$, como f_k é Cauchy temos então que $\hat{f}_k$ é Cauchy. Portanto ela converge para uma função em L^2 que é definida como a transformada de Fourier de $f \in L^2$.

Um fato interessante decorrente de definir a transformada de Fourier no L^2 a partir de uma sequência de funções em $L^1 \cap L^2$ é a possibilidade de usarmos várias das propriedades citadas no teorema 12. Terminamos esta seção enunciando um resultado sobre a transformada de Fourier para funções em S.

Teorema 16. *A transformada de Fourier é um isomorfismo de S em si mesmo.*

Demonstração. Ver referência [3] pág. 252. □

3 Existência de soluções para a equação regularizada de Navier Stokes

Definidas nossas bases teóricas no capítulo 2, aqui neste capítulo começamos com uma introdução dos espaços de Sobolev na seção 3.1. Para isso, definimos o conceito de derivadas fracas e apresentados os espaços de Sobolev com duas normas distintas mas equivalentes, segundo o Teorema 18. Em seguida na mesma seção apresentamos o teorema de inclusão de Sobolev (Teorema 19), que nos permitirá obter derivadas normais a partir de derivadas fracas, finalizamos então a seção com algumas desigualdades envolvendo estes espaços.

Já na seção 3.2 trazemos os conceitos de regularizadores e algumas de suas propriedades. Na seção 3.3, apresentamos a decomposição de Hodge e então definimos o operador de projeção de Leray além de provar mais algumas propriedades.

Na seção 3.4, apresentamos as equações de Navier-Stokes e já na seção seguinte (seção 3.5), provamos que a pressão pode ser recuperada se obtermos a velocidade como solução (Teorema 30). Provamos também que, caso essas soluções existam, elas são únicas (Corolário 1).

Por fim, na seção 3.6, apresentamos uma versão regularizada para a equação de Navier-Stokes e utilizamos o teorema de Picard para provar a existência de soluções para essa equação regularizada tanto localmente (Teorema 34), quanto globamente (Teorema 35). Tais soluções serão utilizadas para buscar uma solução para a equação de Navier-Stokes no capítulo final deste texto.

3.1 Espaços de Sobolev

Antes de definirmos os espaços de Sobolev, precisamos definir o conceito de derivada fraca, o método utilizado para apresentá-las aqui foi retirado da referência [6], onde o assunto é tratado com mais detalhes. Iniciamos pela definição de função teste:

Definição 20. *(Função Teste) Seja $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ o espaço das funções $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, definiremos que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ é uma função teste.*

Definição 21. *(Espaço L^1_{loc}) O espaço L^1_{loc} é o espaço das funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^3$, temos que $f \in L^1(K)$.*

Definição 22. *(Derivadas fracas) Suponha que $u,v \in L^1_{loc}$, e α é um multi-índice. Dizemos que v é a α^{th} derivada fraca de u, desde que:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} uD^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^3} v\phi \, dx \tag{3.1}$$

Para todas as funções teste $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$

Através dessa definição segue que se uma função possui a derivada tradicional ela será idêntica à derivada fraca. Por esse motivo, uma estratégia para provar a existência de soluções regulares para uma EDP é, inicialmente acharmos soluções que possuem derivadas fracas e depois mostrar que essas derivadas fracas são na verdade derivadas no sentido tradicional. Em se tratando de espaços de Sobolev, um dos resultados que pode ser utilizado para este fim é o teorema 19 que veremos mais adiante.

Ao definirmos a derivada fraca desta maneira estamos automaticamente definindo as derivadas fracas para funções em L^2. Para verificar este fato, tome uma função g constante e igual a 1, uma função qualquer $f \in L^2$ e $K \subset \mathbb{R}^3$ compacto, então utilizando o teorema 7:

$$\|f\|_{L^1(K)} \leqslant \|f\|_{L^2(K)}\|g\|_{L^2(K)} = \|f\|_{L^2}\left(\int_K 1 d\mu\right)^{1/2} = [\mu(K)]^{1/2}\|f\|_{L^2} \tag{3.2}$$

Portanto temos $L^2 \subset L^1_{loc}$. De posse da definição de derivada fraca, podemos começar a definir os espaços de Sobolev, mas antes daremos um resultado sobre espaços L^p que necessitava da definição de derivada fraca:

Teorema 17. *Dada $u \in L^q$ com suas derivadas de ordem m, $D^m u \in L^r$, com $1 \leqslant q,r \leqslant \infty$. Então para suas derivadas $D^j u$, $0 \leqslant j < m$ a seguinte desigualdade vale:*

$$\|D^j u\|_{L^p} \leqslant C\|D^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha} \tag{3.3}$$

Onde:

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{3} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{3}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}$$

Para α satisfazendo $\dfrac{j}{m} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Demonstração. Ver referência [8] pág. 11, teorema sem número. □

Agora, voltando a definição dos espaços de Sobolev, seja m um inteiro positivo, o espaço de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^3)$ é o espaço dos elementos $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, cujas derivadas fracas $D^\alpha f$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^3)$ para $|\alpha| \leqslant m$:

$$H^m = \{f \in L^2 : D^\alpha f \in L^2,\ \forall\, |\alpha| \leqslant m\} \tag{3.4}$$

A partir dessa definição, a norma de Sobolev é dada por:

$$\|f\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_0^2 \right)^{(1/2)} \tag{3.5}$$

Entretanto, existe uma outra norma equivalente a essa que utiliza a transformada de Fourier, o que nos será útil em vários casos. Mas para provar que ambas são equivalentes precisamos de alguns resultados:

Lema 1. *(Desigualdade para multi-índice) Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^3$, temos:*

$$|x^\alpha| \leqslant c_\alpha |x|^{|\alpha|} \tag{3.6}$$

Demonstração. A prova para esta desigualdade foi encontrada na referência [9], e será aqui reproduzida. Provaremos a desigualdade primeiramente na esfera unitária, isto é, o conjunto $B = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y| = 1\}$, assim sendo:

$$\frac{|y^\alpha|}{|y|^{|\alpha|}} = |y^\alpha| = \prod_{i=1}^{3} |y^i|^{\alpha^i} \tag{3.7}$$

A desigualdade aritmética-geométrica com $|y^i|^{3\alpha^i}$ nos dá:

$$\sqrt[3]{\prod_{i}^{3} |y^i|^{3\alpha^i}} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i}^{3} |y^i|^{3\alpha^i}$$
$$\prod_{i}^{3} |y^i|^{\alpha^i} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i}^{3} |y^i|^{3\alpha^i}$$

Substituindo em 3.7, obtemos:

$$\frac{|y^\alpha|}{|y|^{|\alpha|}} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} |y^i|^{3\alpha^i}$$

O desenvolvimento pelo binômio de Newton nos dá:

$$
\begin{aligned}
\frac{|y^\alpha|}{|y|^{|\alpha|}} &\leqslant \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}|y^i|^{\alpha^i}\right)^3 \\
&\leqslant \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}(1+|y^i|)^{\alpha^i}\right)^3 \\
&\leqslant \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}(1+|y|)^{\alpha^i}\right)^3
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{|y^\alpha|}{|y|^{|\alpha|}} &\leqslant \frac{1}{3}\left(3(1+|y|)^{\alpha^i}\right)^3 \\
&\leqslant \frac{1}{3}\left(3(1+|y|)^{|\alpha|}\right)^3 \\
&\leqslant 3^2 2^{3|\alpha|} = C_\alpha
\end{aligned}
$$

Agora podemos provar que para um x qualquer:

$$
\begin{aligned}
\frac{|x^\alpha|}{|x|^{|\alpha|}} &= \frac{|x^1|^{\alpha^1}|x^2|^{\alpha^2}|x^3|^{\alpha^3}}{|x|^{\alpha^1}|x|^{\alpha^2}|x|^{\alpha^3}} \\
&= \prod_{i=1}^{3}\frac{|x^i|^{\alpha^i}}{|x|^{\alpha^i}} \\
&= \prod_{i=1}^{3}\left|\left(\frac{|x^i|}{|x|}\right)^{\alpha^i}\right|
\end{aligned}
$$

Seja $y^i = \dfrac{x^i}{|x|}$, temos que $|y| = 1$, portanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{|x^\alpha|}{|x|^{|\alpha|}} &= |y^\alpha| \\
&\leqslant C_\alpha |y|^{|\alpha|} \\
&\leqslant C_\alpha
\end{aligned}
$$

□

Utilizando essa desigualdade podemos provar o seguinte lema:

Lema 2. *Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{Z}$, existem constantes c_1 e c_2 tais que:*

$$c_1 \sum_{|\alpha| \leqslant k} |x^\alpha|^2 \leqslant (1 + |x|^2)^k \leqslant c_2 \sum_{|\alpha| \leqslant k} |x^\alpha|^2$$

Demonstração. Iniciaremos a prova pela desigualdade da esquerda. Utilizando 3.6, obtemos:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |x^\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha |x|^{2|\alpha|}$$

Aqui alguma cautela deve ser tomada, pois iremos utilizar que quando $|\alpha| \leqslant k$ temos $|x|^{|\alpha|} \leqslant |x|^k$, entretanto isso só é valido se $|x| > 1$. Para $|x| \leqslant 1$ temos $|x|^r \leqslant 1$ para qualquer r. Utilizando esse fato, e o fato de que o número possível de valores de α é finito e igual a um l_k(o valor de l depende de k), temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \leqslant k} |x^\alpha|^2 &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha |x|^{2|\alpha|} \\
&\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha \max(1, |x|^{2k}) \\
&\leqslant l_k c_k \max(1^k, |x|^{2k}) \\
&\leqslant c_k \max(1^k, |x|^{2k}) \\
&\leqslant c_k (1 + |x|^2)^k
\end{aligned}$$

Agora para a desigualdade da direita seja:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^3 |x_i^k|^2}{|x|^{2k}}$$

Temos que para qualquer $\gamma \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(\gamma x) = \frac{\gamma^{2k}}{\gamma^{2k}} \frac{\sum_{i=1}^3 |x_i^k|^2}{|x|^{2k}} = \frac{\sum_{i=1}^3 |x_i^k|^2}{|x|^{2k}} = f(x)$$

Assim sendo $f(x)$ é homogênea de grau zero, podemos então escrever:

$$f(x) = f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) = f(n)$$

Onde n é o vetor unitário, $|n| = 1$. Assim sendo o valor de f depende apenas de seu valor na esfera unitária. Como f é uma função contínua na esfera unitária visto que $n \neq 0$, e toda esfera em um espaço vetorial de dimensão finita é compacta segue que f admite máximo e mínimo na esfera unitária. Seja δ o mínimo de f na esfera unitária, temos então:

$$\delta \leqslant f(n) = f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2}{|x|^{2k}}$$

O que implica:

$$|x|^{2k} \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2$$

Utilizando essa desigualdade damos continuidade a nossa prova:

$$(1 + |x|^2) \leqslant 2 \max(1, |x|^2)$$

Elevando a k:

$$\begin{aligned}(1 + |x|^2)^k &\leqslant 2^k \max(1, |x|^{2k}) \\ &\leqslant 2^k (1 + |x|^{2k}) \\ &\leqslant 2^k (1 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2)\end{aligned}$$

Tomemos o vetor $(1, 0, 0)$, temos que a função f neste ponto vale 1, como a função é positiva por envolver apenas módulos, e também por não assumir o valor 0 na esfera unitária (o vetor 0 é retornado apenas para o vetor nulo que não faz parte da esfera unitária), podemos assumir sem perda de generalidade que $0 < \delta \leqslant 1$, temos $\frac{1}{\delta} \geqslant 1$, o que implica:

$$\begin{aligned}2^k (1 + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2) &\leqslant 2^k (\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2) \\ &= 2^k \frac{1}{\delta} (1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^2)\end{aligned}$$

Como a expressão $|\alpha| \leqslant k$ nos dá, entre outros o valor $\alpha = (0, 0, 0)$, que corresponde a $|x^\alpha| = 1$, e também nos 3 vetores $\alpha^1 = (k, 0, 0)$, $\alpha^2 = (0, k, 0)$ e $\alpha^3 = (0, 0, k)$, que implicam $|x^\alpha| = |x_i^k|$ podemos então concluir a prova fazendo:

$$2^k \max(1, \frac{1}{\delta})(1 + \sum_{i=1}^{3} |x_i^k|^2) \leqslant 2^k \frac{1}{\delta} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |x^\alpha|^2$$

Onde na última passagem foi utilizado que $\frac{1}{\delta} \geqslant 1$. □

De posse desses resultados podemos definir a norma de Sobolev via transformadas de Fourier, mas antes devemos definir o que é a equivalência de normas:

Definição 23. *(Equivalência de Normas) Duas normas $\| \cdot \|_{k,1}$ e $\| \cdot \|_{k,2}$ em um espaço vetorial X são equivalentes se, existem c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ positivos, tais que para qualquer $x \in X$, temos:*

$$c_1 \|x\|_{k,1} \leqslant \|x\|_{k,2} \leqslant c_2 \|x\|_{k,1}$$

Teorema 18. *Tome $f \in H^k$, então as normas abaixo são equivalentes:*

$$\|f\|_{k,1} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_0^2 \right)^{1/2} \tag{3.8}$$

$$\|f\|_{k,2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \tag{3.9}$$

Demonstração. Como S é denso em H^m podemos tomar uma sequência $f_n \to f$ com $f \in S$. A partir da definição da norma de Sobolev, o teorema 15 que implica $\|f_n\|_0 = \|\hat{f}_n\|_0$ e o teorema 12 letra "d", obtemos:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{k,1}^2 &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f_n\|_0^2 \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|(D^\alpha f_n)\hat{}\|_0^2 \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}_n(\xi)\|_0^2 \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbb{R}^3} |(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbb{R}^3} |(2\pi)^{|\alpha|}|^2 |i^{|\alpha|}|^2 |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Como $|i^\alpha|^2 = 1$ obtemos:

$$\|f_n\|_{k,1}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^{2|\alpha|} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \tag{3.10}$$

Utilizando agora o Lema 2 com $2\pi\xi$:

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{|\alpha|}|\xi^\alpha|^2 \leqslant (1+4\pi^2|\xi|^2)^k \leqslant c_2 \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{|\alpha|}|\xi^\alpha|^2 \tag{3.11}$$

Por outro lado podemos estimar:

$$(1+|\xi|^2)^k \leqslant (1+4\pi^2|\xi|^2)^k \tag{3.12}$$

$$(1+4\pi^2|\xi|^2)^k \leqslant (4\pi^2)^k(1+|\xi|^2)^k \tag{3.13}$$

Utilizando 3.12 e 3.13 em 3.11:

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{|\alpha|}|\xi^\alpha|^2 \leqslant (1+|\xi|^2)^k \leqslant c_2 \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{|\alpha|}|\xi^\alpha|^2$$

Multiplicando a desigualdade por $|\hat{f}_n(\xi)|^2$ e integrando obtemos:

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^{2|\alpha|}|\xi^\alpha|^2|\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^k|\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^k|\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi \leqslant c_2 \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi^\alpha|^2|\hat{f}_n(\xi)|^2 d\xi$$

Aplicando a radiciação, e utilizando as Equações 3.9 e 3.10 obtemos:

$$c_1\|f_n\|_{k,1} \leqslant \|f_n\|_{k,2} \leqslant c_2\|f_n\|_{k,1}$$

Tomando o limite acima obtemos o resultado. □

A primeira norma que definimos para espaços de Sobolev faz sentido apenas para um k inteiro positivo, entretanto a segunda norma faz sentido para todo k pertencente aos reais. Tal generalização é importante, pois mais adiante utilizaremos resultados de interpolação em normas de Sobolev e não teremos então um k inteiro. Outro resultado que será muito utilizado para aproximações é o resultado abaixo:

Teorema 19. *(Teorema de inclusão de Sobolev) O espaço $H^{s+k}(\mathbb{R}^3)$, $s > 3/2$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ está contido no espaço $C_0^k(\mathbb{R}^3)$, ou seja $H^{s+k} \subset C_0^k$. O que também pode ser caracterizado* *pela existência de um $c > 0$ tal que para qualquer $v \in H^{s+k}(\mathbb{R}^3)$, existe uma versão $v^* \in C^k$, tal que:*

$$\|v^*\|_{C_0^k} \leqslant c\|v\|_{s+k} \tag{3.14}$$

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada em [3], pág. 303, teorema 9.17. □

Este teorema nos diz então que tomando uma função em um espaço de Sobolev suficientemente grande, existirá uma versão dessa função com alguma continuidade. Tome por exemplo $f \in H^{2+3/2}$, o teorema nos dá:

$$\|f^*\|_{C_0^2} \leqslant c\|f\|_{2+3/2}$$

Ou seja, existe uma versão da nossa função f que possui derivadas até de segunda ordem. A partir deste ponto como iremos trabalhar com um m grande para espaços Sobolev, nossas derivadas serão derivadas clássicas ao invés de derivada fracas. Em seguida começamos a enunciar algumas desigualdades interessantes envolvendo espaços de Sobolev, que serão utilizadas intensivamente neste capítulo e no próximo.

Teorema 20. *(Fórmula de Leibniz) Seja $f \in C_c^\infty$, $g \in H^k$ e $|\alpha| \leqslant k$, então:*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^\alpha g$$

Demonstração. Ver referência 6 pág. 247, teorema 1. □

Teorema 21. *(Desigualdades de cálculo em espaços de Sobolev)*

a) Para todo $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, existe $c > 0$ tal que, para todo $u, v \in L^\infty \cap H^m(\mathbb{R}^3)$:

$$\|uv\|_m \leqslant c(\|u\|_{L^\infty}\|D^m v\|_0 + \|D^m u\|_0\|v\|_{L^\infty}) \tag{3.15}$$

$$\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha(uv) - uD^\alpha v\|_0 \leqslant c\|\nabla u\|_{L^\infty}\|D^{m-1}v\|_0 + \|D^m u\|_0\|v\|_{L^\infty} \tag{3.16}$$

b) Para todo $s > 3/2$ tal que $s \in Z^+$,$H^s(\mathbb{R}^3)$ é uma álgebra de Banach, ou seja, para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R}^3)$ existe $c > 0$ tal que:

$$\|uv\|_s \leqslant c\|u\|_s\|v\|_s \tag{3.17}$$

Demonstração. a) Para cada α, tal que $|\alpha| \leqslant m$ temos, pela fórmula de diferenciação de Leibniz (Teorema 20):

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} \|D^\beta u D^{\alpha-\beta} v\|_0$$

Como se escolheu α de modo que $|\alpha| \leqslant m$ e como uma norma por definição é sempre positiva. Podem ser adicionadas parcelas ao somatório acima de forma a inserir todas as combinações possíveis de derivadas com módulo menor ou igual a m:

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{\beta \leqslant \gamma, |\gamma|=m} \|D^\beta u D^{\gamma-\beta} v\|_0$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (Teorema 7), com $p = 2m/|\beta|$ e $q = 2m/|\gamma - \beta|$, e lembrando que $|\gamma| = m$:

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{\beta \leqslant \gamma, |\gamma|=m} \|D^\beta u\|_{L^{2m/|\beta|}} \|D^{\gamma-\beta} v\|_{L^{2m/|\gamma-\beta|}}$$

Agora utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Teorema 17), com a devida escolha de parâmetros obtemos:

$$\|D^i u\|_{L^{2r/i}} \leqslant c_r \|u\|_{L^\infty}^{1-i/r} \|D^r u\|_0^{i/r}\ , p/\ 0 \leqslant i \leqslant r \tag{3.18}$$

Agora prosseguimos a prova. Para o primeiro termo utiliza-se 3.18 com $i = |\beta|$ e $r = m$, e para o segundo com $i = |\gamma - \beta|$ e $r = m$:

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{|\beta| \leqslant m} c_m \|u\|_{L^\infty}^{1-|\beta|/m} \|D^m u\|_0^{|\beta|/m} \|v\|_{L^\infty}^{1-|\gamma-\beta|/m} \|D^m v\|_0^{|\gamma-\beta|/m}$$

Utilizando que $|\gamma| = m$, e lembrando que neste caso o módulo $|\cdot|$ sendo utilizado é o para multi-índices. Tem-se também as seguintes igualdades:

$$\frac{|\gamma - \beta|}{m} = \frac{m - |\beta|}{m} = 1 - \frac{|\beta|}{m}$$

$$1 - \frac{|\gamma - \beta|}{m} = 1 - \frac{|\gamma|}{m} + \frac{|\beta|}{m} = 1 - \frac{m}{m} + \frac{|\beta|}{m} = \frac{|\beta|}{m}$$

Assim, obtêm-se:

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{|\beta| \leqslant m} c_m (\|u\|_{L^\infty} \|D^m v\|_0)^{1-|\beta|/m} (\|v\|_{L^\infty} \|D^m u\|_0)^{|\beta|/m}$$

Como as normas são maiores que zero, os exponentes estão entre 0 e 1, e sua soma é igual a 1, utilizando a desigualdade de Young para produtos de números reais ($a^p b^q \leqslant a + b$, o valor de uma norma nada mais é do que um número real) obtemos que para cada α, tal que $|\alpha| \leqslant m$:

$$\|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_\alpha \sum_{|\beta|\leqslant m} c_m(\|u\|_{L^\infty}\|D^m v\|_0 + \|v\|_{L^\infty}\|D^m u\|_0)$$

Pela definição da norma de Sobolev e como para somatórios finitos temos:

$$\left(\sum_i (a^i)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_i |a^i|$$

Obtemos:

$$||uv\|_m = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha(uv)\|_0^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha(uv)\|_0 \leqslant c_m(\|u\|_{L^\infty}\|D^m v\|_0 + \|v\|_{L^\infty}\|D^m u\|_0)$$

Assim finaliza-se a prova da desigualdade 3.15. Agora passaremos a prova da desigualdade 3.16. Para cada α tal que $|\alpha| \leqslant m$, e utilizando novamente a fórmula de diferenciação de Leibniz:

$$\|D^\alpha(uv) - uD^\alpha v\|_0 \leqslant \sum_{1\leqslant|\beta|\,,\,\beta\leqslant\alpha} \|D^\beta u D^{\alpha-\beta} v\|_0 \leqslant \sum_{0\leqslant\beta'\leqslant\alpha-1} \|D^{\beta'}(Du) D^{\alpha-\beta'-1} v\|_0 \leqslant \|Du.v\|_{m-1}$$

Assim somando para todos os $|\alpha| \leqslant m$, aplicando 3.14 e como Du é o gradiente:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha(uv) - uD^\alpha v\| \leqslant C\|Du.v\|_{m-1} &\leqslant C(\|Du\|_{L^\infty}\|D^{m-1}v\|_0 + \|D^{m-1}(Du)\|_0\|v\|_{L^\infty}) \\ &= C(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|D^{m-1}v\|_0 + \|D^m u\|_0\|v\|_{L^\infty})\end{aligned}$$

Assim concluímos a prova da desigualdade 3.16. Agora para 3.17, utilizamos 3.15 e tomando $s > 3/2$, pelo Teorema 19, tanto u quanto v possuem versões em C_0, assim sendo:

$$\begin{aligned}\|u^*\|_{C_0^0} &\leqslant c\|u\|_s \\ \|v^*\|_{C_0^0} &\leqslant c\|v\|_s\end{aligned}$$

Como u^* e v^* pertencem a C_0^0 isso implica que ambas pertencem a L^∞ e, além disso, como temos $\|\cdot\|_{C_0} = \|\cdot\|_{L^\infty}$, portanto:

$$\begin{aligned}\|uv\|_s &\leqslant c(\|u\|_{L^\infty}\|D^s v\|_0 + \|D^s u\|_0\|v\|_{L^\infty})\\ &= c(\|u\|_{C_0^1}\|D^s v\|_0 + \|D^s u\|_0\|v\|_{C_0^1})\\ &\leqslant c(\|u\|_s\|D^s v\|_0 + \|D^s u\|_0\|v\|_s)\end{aligned}$$

Por fim, pela definição da norma de Sobolev, temos que $\|D^s u\|_0 \leqslant \|u\|_s$ e $\|D^s v\|_0 \leqslant \|v\|_s$, assim sendo:

$$\begin{aligned}\|uv\|_s &\leqslant c(\|u\|_s\|D^s v\|_0 + \|D^s u\|_0\|v\|_s)\\ &\leqslant c\|u\|_s\|v\|_s\end{aligned}$$

□

Teorema 22. *(Interpolação em espaços de Sobolev) Dado um $s > 0$, existe uma constante C tal que para qualquer $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$ e $0 < s' < s$, temos:*

$$\|v\|_{s'} \leqslant C_s\|v\|_0^{1-s'/s}\|v\|_s^{s'/s},\ \forall\, v \in H^{s'}$$

Demonstração. Ver referência [10], pág. 79, teorema 4.17. □

3.2 Regularizadores

A regularização $J_\epsilon v$ de uma função $v \in L^p(\mathbb{R}^3)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ é definida por:

$$(J_\epsilon v)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\epsilon(x-y)v(y)\,dy = \rho_\epsilon * v(x) \tag{3.19}$$

Onde $\rho_\epsilon(x) = \rho\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$ e ρ é uma função radial, positiva pertencente a C_c^∞ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho\,dx = 1$. Como a função tem suporte compacto e pertence a C^∞ segue que ela e todas as suas derivadas decaem a zero no infinito, além disso $C_c^\infty \subset S$. Pelas propriedades de convoluções, segue que a regularização é uma operação linear. Além disto, temos mais algumas propriedades que serão enunciadas em seguida, mas antes enunciaremos alguns resultados que serão necessários na prova dessas propriedades:

Teorema 23. *(Teorema da Convergência Dominada) Seja (f_n) uma sequencia em L^1 tal que $f_n \to f$ μ-q.s. e existe uma função não negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leqslant g$ μ-q.s. para todo n. Então $f \in L^1$ e $\displaystyle\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n$.*

Demonstração. Ver referência [3], pág. 54, teorema 2.24. □

Definição 24. *(Matriz Hessiana) Dada uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, a matriz Hessiana é dada por:*

$$H_f = \begin{bmatrix} \partial_{x^1,x^1} f & \partial_{x^1,x^2} f & \partial_{x^1,x^3} f \\ \partial_{x^2,x^1} f & \partial_{x^2,x^2} f & \partial_{x^2,x^3} f \\ \partial_{x^3,x^1} f & \partial_{x^3,x^2} f & \partial_{x^3,x^3} f \end{bmatrix}$$

Lema 3. *Seja o regularizador como definido anteriormente então temos que:*

$$\hat{\rho}(0) = 1 \tag{3.20}$$

$$|\hat{\rho}(\xi) - 1| \leqslant C|\xi|^2 \text{ , para todo } \xi \in \mathbb{R}^3 \tag{3.21}$$

$$\hat{\rho} \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{3.22}$$

Demonstração. Para 3.20, utilizando definição da transformada de Fourier temos:

$$\hat{\rho}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx$$

De onde obtemos:

$$\hat{\rho}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) dx = 1$$

Para provar 3.21, primeiramente temos que ρ é uma função radial. Como ela é uma função radial segue que ela é par. A transformada de Fourier de uma função par tambêm é par, logo $\hat{\rho}$ é par. Portanto se tomarmos $\hat{\rho}$ e aplicarmos a derivada e a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x) &= \hat{\rho}(-x) \\ \nabla \hat{\rho}(x) &= -\nabla \hat{\rho}(-x) \\ \nabla \hat{\rho}(0) &= -\nabla \hat{\rho}(0) \end{aligned}$$

Assim segue que temos que $\nabla \hat{\rho}(0) = 0$. Tome agora a expansão em série de Taylor da função $\hat{\rho}(\xi)$ em torno do ponto 0:

$$\hat{\rho}(\xi) = \hat{\rho}(0) + \nabla\hat{\rho}(0)\xi + \frac{1}{2}(\xi H_\rho(c))\xi$$
$$\hat{\rho}(\xi) = 1 + \frac{1}{2}(\xi H_\rho(c))\xi$$

com $0 < |c| < |\xi|$. Aplicando o módulo:

$$|\hat{\rho}(\xi) - 1| = \left|\frac{1}{2}(\xi H_\rho(c))\xi\right|$$
$$|\hat{\rho}(\xi) - 1| \leqslant \left|\frac{1}{2}\right| |\xi||H_\rho(c)||\xi|$$
$$|\hat{\rho}(\xi) - 1| \leqslant \left|\frac{1}{2}\right| |\xi|^2|H_\rho(c)|$$

Como $\rho \in C_c^\infty \subset S$, tanto ρ como qualquer uma de suas derivadas pertencem a L^1 logo pelo lema de Riemman Lebesgue 12 as segundas derivadas de ρ pertencem a C_0, ou seja, são contínuas e decaem a zero no infinito. Portanto existe um $C > 0$ tal que $|H_\rho(c)| \leqslant C$, logo $|\hat{\rho}(\xi) - 1| \leqslant C|\xi|^2$. Por fim, 3.22 também segue pelo lema de Riemman Lebesgue . Como $\rho \in C_0^\infty \subset L^p$ para qualquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$, temos então $\hat{\rho} \in C_0$, portanto $\hat{\rho} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

□

Teorema 24. *(Propriedades dos regularizadores) Seja J_ϵ um regularizador como definido acima e $v \in L^p$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então $J_\epsilon v \in C^\infty$ e:*

a)Para todo $v \in C^0$, $J_\epsilon v \to v$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$, em qualquer compacto K pertencente ao $\mathbb{R}^3$ e:

$$\|J_\epsilon v\|_{L^\infty} \leqslant \|v\|_{L^\infty} \tag{3.23}$$

b)Regularizadores comutam com derivadas:

$$D^\alpha J_\epsilon v = J_\epsilon D^\alpha v \tag{3.24}$$

Para qualquer $|\alpha| \leqslant m + 3/2$ e $v \in H^{m+3/2}$.

c)Para quaisquer $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (J_\epsilon u)v\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} u(J_\epsilon v)\,dx \tag{3.25}$$

d)Para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $J_\epsilon v$ converge para v em H^s e a taxa de convergência na norma H^{s-1} é linear em ϵ:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|J_\epsilon v - v\|_s = 0 \tag{3.26}$$

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1} \leqslant C\epsilon \|v\|_s \tag{3.27}$$

e) Para todo $v \in H^m(\mathbb{R}^3)$, com $m > 3/2$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, e $\epsilon > 0$:

$$\|J_\epsilon v\|_{m+k} \leqslant \frac{c_{m,k}}{\epsilon^k} \|v\|_m \tag{3.28}$$

$$\|J_\epsilon D^k v\|_{L^\infty} \leqslant \frac{c_k}{\epsilon^{3/2+k}} \|v\|_0 \tag{3.29}$$

Demonstração. a) Como ρ possui suporte compacto existe um R tal que $\rho(x) = 0$ para $|x| \geqslant R$. De forma equivalente podemos escrever $\rho(x/\epsilon) = 0$ para $|x| > R\epsilon$.

Para cada conjunto compacto $K \in \mathbb{R}^3$, definimos o conjunto compacto $K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \text{dist}(x, K) \leqslant \epsilon R\}$. Como v é contínua e K_ϵ é compacto temos que $v|_{K_\epsilon}$ é uniformemente contínua.

Assim, por definição da continuidade uniforme, temos que dado um $\epsilon' > 0$ arbitrário, existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer x,$y \in K_\epsilon$ com $|x - y| \leqslant \delta$, temos $|v(x) - v(y)| \leqslant \epsilon'$. Por outro lado utilizando o fato de que $\displaystyle\int \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = 1$ temos:

$$\begin{aligned} |J_\epsilon v(x) - v(x)| &= \left|\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) v(y) dy - v(x)\right| \\ &= \left|\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) [v(y) - v(x)] dy\right| \end{aligned}$$

Tome agora $x \in K$, como desejamos estudar o limite de $\epsilon \to 0$ podemos escolher também $\epsilon < \dfrac{\delta}{R}$, e lembrando que ρ possui suporte compacto:

$$\begin{aligned} |J_\epsilon v(x) - v(x)| &= \left|\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) [v(y) - v(x)] dy\right| \\ &= \left|\epsilon^{-3} \int_{|x-y| < \epsilon R} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) [v(y) - v(x)] dy\right| \end{aligned}$$

Assim para cada $x \in K$ fixo, e qualquer y com $|x-y| \leqslant \epsilon R$, temos $y \in K_\epsilon$. Podemos então estimar que $[v(y)-v(x)] \leqslant \epsilon'$, portanto:

$$|J_\epsilon v(x) - v(x)| \leqslant \left| \epsilon' \int_{|y|<\epsilon R} \epsilon^{-3} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) dy \right|$$

Utilizando uma mudança de variáveis $u = \dfrac{x-y}{\epsilon}$, obtemos:

$$y^i = u^i \epsilon + x^i$$

Assim o Jacobiano é igual a ϵ^3, utilizando o fato de que a integral de ρ é igual a 1:

$$|J_\epsilon v(x) - v(x)| \leqslant \epsilon' \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho(u)\, du \right| = \epsilon'$$

Como $\epsilon' > 0$ foi tomado arbitrário, segue que $J_\epsilon v \to v$ uniformemente. Agora para provar 3.23, escrevemos a regularização como uma convolução, e utilizando a desigualdade de Young, teorema 9:

$$\|J_\epsilon v\|_{L^\infty} = \|\rho_\epsilon * v\|_{L^\infty} \leqslant \|\rho\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty}$$

Como a integral de ρ é igual a 1 o resultado segue.

b) Para esta prova, como $v \in H^{m+3/2}$, temos pelo teorema de inclusão de Sobolev 19, que para $|\alpha| \leqslant m + 3/2$, existe uma versão de $v \in C_0^\alpha$, o que implica que v e suas derivadas de ordem até m existem e são limitadas pois decaem a zero no infinito. Como $\rho \in C_0^\infty \subset L^p$ assim, utilizando o teorema 11, o resultado segue.

c)Como $v \in L^q$ e $u \in L^p$, por Hölder (teorema 7), temos que a integral de $uv \in L^1$, logo uv é integrável. Como $v(x)$ independe de y, podemos passá-lo para a integral, e então utilizando o teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (J_\epsilon u(x)) v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) u(y) dy \right) v(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) u(y) v(x) dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) u(y) v(x) dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) v(x) dx \right) u(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u(J_\epsilon v) dx
\end{aligned}$$

d) Inicialmente para provar 3.26, utilizamos o teorema 12, letra "f":

$$\|J_\epsilon v - v\|_s = \|\epsilon^{-3}\rho_\epsilon * v - v\|_s = \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\rho}(\epsilon\xi).\hat{v}(\xi) - \hat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2|\hat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, d\xi$$

Lembrando que $\hat{\rho}$ é uma função do $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ e tomando a sequência de funções $(f_\epsilon)_\epsilon$ com $\epsilon \to 0$ definida por:

$$f_\epsilon(\xi) = |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2|\hat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s$$

para cada ξ fixo temos, que $\lim_{\epsilon\to 0}\hat{\rho}(\epsilon\xi) = \hat{\rho}(0)$ pois $\hat{\rho}$ é contínua, e por 3.20 temos $\hat{\rho}(0) = 1$. Portanto para cada ξ fixo temos $f_\epsilon(\xi) \to 0$. Como $\rho \in C_c^\infty \subset L^1$ temos novamente pelo lema de Riemann Lebesgue $\hat{\rho}(\epsilon\xi) \in C_0$, assim essa função admite máximo. O segundo termo é justamente a definição da norma de Sobolev por transformada de Fourier e portanto integrável. Logo $|f_\epsilon| < g \in L^1$ assim pelo teorema da convergência dominada (teorema 23) temos $\lim_{\epsilon\to 0}\int f_\epsilon = \int \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon = \int 0 = 0$, portanto $\lim_{\epsilon\to 0}\|J_\epsilon v - v\|_s = 0$

Agora para a prova da desigualdade 3.27 iremos separar o $\mathbb{R}^3$ em $|\xi| < \delta$ e $|\xi| \geqslant \delta$. Trabalhando com 3.21 e com $|\xi| < \delta$ obtemos:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leqslant C|\xi|^2\epsilon^2 \implies |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2 \leqslant |\xi|^4\epsilon^4 \implies$$
$$\implies \frac{|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2}{(1+|\xi|^2)} \leqslant \frac{|\xi|^4\epsilon^4}{|\xi|^2} \leqslant C|\xi|^2\epsilon^4$$

Tomando $|\xi| < \delta$:

$$\left|\frac{|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right| \leqslant C\delta^2\epsilon^4 \tag{3.30}$$

Já com a 3.22 e com $|\xi| \geqslant \delta$:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi)| \leqslant C \implies |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leqslant C \implies |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2 \leqslant C^2 \implies \left|\frac{|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right| \leqslant \frac{C}{|\xi|^2}$$

Tomando $|\xi| \geqslant \delta$:

$$\left|\frac{|\hat{\rho}(\epsilon\xi)-1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right| \leqslant \frac{C}{\delta^2} \tag{3.31}$$

Tomando agora $\delta = 1/\epsilon$, e substituindo em 3.30 e 3.31, obtemos que para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\frac{|\hat{\rho}(\epsilon\xi)-1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right| \leqslant C\epsilon^2 \tag{3.32}$$

Para finalizar a prova, escrevemos novamente a norma de Sobolev através da transformada de Fourier:

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{s-1} |(J_\epsilon v)\hat{}(\xi) - \hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\hat{v}(\xi)|^2 |\hat{\rho}(\epsilon\xi)-1|^2 (1+|\xi|^2)^{s-1} \, d\xi$$

Utilizando Hölder com $p = \infty$ e $q = 1$, obtemos:

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1}^2 \leqslant \left\|\frac{|\rho(\epsilon\xi)-1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right\|_{L^\infty} \||\hat{v}|^2(1+|\xi|^2)^s\|_{L^1} = \left\|\frac{|\rho(\epsilon\xi)-1|^2}{(1+|\xi|^2)}\right\|_{L^\infty} \|v\|_s^2$$

Utilizando 3.32 obtemos:

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1}^2 \leqslant C\epsilon^2 \|v\|_s^2$$

Por fim, tirando a raiz quadrada da inequação obtemos:

$$\|J_\epsilon v - v\|_{s-1} \leqslant C\epsilon$$

Assim fica provada a inequação 3.27.

e)Tome $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant k$, e $\rho_\beta(x) = D_x^\beta \rho(x)$:

$$D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x) = \epsilon^{-3} D^\alpha \int_{\mathbb{R}^3} D_x^\beta \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) v(y) dy$$

Pela regra da cadeia podemos escrever:

$$D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x) = \epsilon^{-|\beta|-3} D^\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\beta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) v(y) dy$$

Agora pelos teoremas 23 e 9, podemos passar D_x^α para dentro da integral. Como $D_x^\alpha \rho = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \rho$ e aplicando novamente a regra da cadeia obtemos:

$$D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x) = (-1)^{|\alpha|} \epsilon^{-|\beta|-3} \int_{\mathbb{R}^3} D_y^\alpha \rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) v(y) dy$$

Integrando por partes:

$$D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x) = \epsilon^{-|\beta|-3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) D_y^\alpha v(y) dy$$

Reescrevendo a equação acima como:

$$|D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x)| = \epsilon^{-|\beta|-3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \right)^{1/2} \left(\rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \right)^{1/2} D_y^\alpha v(y) dy \right|$$

A desigualdade de Schwartz implica:

$$|D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x)|^2 \leqslant \epsilon^{-2|\beta|} \left[\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \right| dy \right] \left[\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \right| |D_y^\alpha v(y)|^2 \, dy \right]$$

Como $\rho \in C_c^\infty$ suas derivadas também tem suporte compacto e portanto são integráveis, logo a integral de ρ_β é igual a uma constante c_β , integrando em ambos os lados em relação a x e utilizando o teorema de Fubini:

$$\|D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x)\|_0^2 \leqslant c_\beta \epsilon^{-2|\beta|} \int_{\mathbb{R}^3} |D_y^\alpha v(y)|^2 \left(\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \rho_\beta \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \right| dx \right) dy$$

Utilizando novamente o fato de que a integral de ρ_β existe e é igual a uma constante c_β:

$$\|D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x)\|_0^2 = c_\beta \epsilon^{-2|\beta|} \int_3 |D_y^\alpha v(y)|^2 dy = c_\beta \epsilon^{-2|\beta|} \|D^\alpha v(y)\|_0^2$$

Somando para todos os $|\alpha| \leqslant m$ e $|\beta| \leqslant k$:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant k} \|D^\beta D^\alpha J_\epsilon v(x)\|_0^2 &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant k} c_\beta \epsilon^{-2|\beta|} \|D^\alpha v(y)\|_0^2 \\ &\leqslant c_k \epsilon^{-2k} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v(y)\|_0^2 \\ &\leqslant c_k \epsilon^{-2k} \|v\|_m \end{aligned}$$

De onde a desigualdade 3.28 segue. Agora para a desigualdade 3.29, denotaremos $\rho_k(x) = D^k\rho(x)$, a desigualdade de Schwartz nos dá:

$$\begin{aligned} |J_\epsilon D^k v(x)| &= \epsilon^{-k-3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_k\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) v(y)\, dy \right| \\ &\leqslant \epsilon^{-3/2-k} \left[\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \rho_k\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right|^2 \, dy \right]^{1/2} \left[\epsilon^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |v(y)|^2 \, dy \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Como ρ é infinitamente diferenciável com suporte compacto suas derivadas também possuem suporte compacto. Logo a norma L^2 existe e é igual a uma constante c_k, assim obtemos:

$$|J_\epsilon D^k v(x)| \leqslant \frac{c_k}{\epsilon^{3/2+k}} \|v\|_0$$

Como $v \in H^m$ com $m > 3/2$, o teorema de inclusão de Sobolev nos dá que $|J_\epsilon D^k v(x)|$ decai no infinito, assim sendo temos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |J_\epsilon D^k v(x)| \leqslant \frac{c_k}{\epsilon^{3/2+k}} \|v\|_0$$

De onde o resultado segue. □

3.3 Decomposição de Hodge e o Operador de Projeção de Leray

O resultado principal desta seção é a definição do operador de projeção de Leray para funções em H^m. Para isto iremos provar a decomposição de Hodge em S e definir o operador de projeção em S, em seguida utilizaremos um argumento de extensão para definir o operador de Leray em H^m. Iniciaremos pela prova do teorema da Equação de Poisson, e para isso iremos citar o teorema de diferenciação de Lebesgue:

Teorema 25. *(Teorema de Diferenciação de Lebesgue) Suponha $f \in L^1_{loc}$, então temos que para μ-q.s:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \tag{3.33}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y)\, dy = f(x) \tag{3.34}$$

onde $E_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x-y| < r\}$.

Demonstração. Ver referência [3], pág. 98, teorema 3.21. □

De posse desse teorema podemos dar início à prova da equação de Poisson, o teorema aqui exposto é muito similar ao encontrada na referência [11]:

Teorema 26. *(Equação de Poisson) Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in S$, então a convolução*

$$U(x) = u * G(x) = \int_{\mathbb{R}^3} u(x-y)G(y)dy\,,$$

onde $G(x)$ é a função de Green para o operador diferencial do Laplaciano dada por:

$$G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

soluciona a equação de Poisson:

$$\Delta U = -u$$

Tem se que $U \in C_0^2$, em particular:

$$|D^\alpha U(x)| \leqslant C\frac{1}{(1+|x|)^{\beta-2}}$$

Com $2 < \beta < 3$ e $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$.

Demonstração. A prova deste teorema será realizada em duas etapas. Na primeira provaremos o decaimento para $U(x)$, de onde seguirá que a convolução existe. A segunda etapa provará que a convolução resolve a equação de Poisson. Para a primeira parte devemos mostrar que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x-y)G(y)|\,dy < \infty$$

Tome um $2 < \beta < 3$, como $u \in S$, a definição deste espaço nos dá que u decai mais rápido do que qualquer potência de x, logo podemos assumir $|u| \leqslant \dfrac{C}{(1+|x|)^b}$, assim:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x-y)G(y)|dy \leqslant C\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy$$

O teorema da convergência dominada, teorema 23, então nos permite escrever:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x-y)G(y)|dy \leqslant C \lim_{\substack{|a|\to 0\\ |b|\to\infty}} \int_{|a|\leqslant|y|\leqslant|b|} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy$$

Como $|b|$ é arbitrariamente grande e $|a|$ arbitrariamente pequeno, tomemos $|a| \leqslant \frac{|x|}{2} \leqslant 2|x| \leqslant |b|$, quebrando a integral acima em três partes distintas:

$$\lim_{|a|\to 0}\int_{|a|\leqslant|y|\leqslant\frac{|x|}{2}} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy + \int_{\frac{|x|}{2}\leqslant|y|\leqslant 2|x|} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy$$
$$+ \lim_{|b|\to\infty}\int_{2|x|\leqslant|y|\leqslant|b|} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy = I_1 + I_2 + I_3$$

Avaliando cada uma das integrais separadamente:

i)Utilizando que $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$ e mudando para coordenadas polares obtemos:

$$I_1 \leqslant \lim_{|a|\to 0}\int_{|a|\leqslant|y|\leqslant\frac{|x|}{2}} \frac{1}{(1+||x|-|y||)^\beta}\frac{1}{|y|}dy = \lim_{|a|\to 0}\int_{|a|}^{\frac{|x|}{2}} \frac{r}{(1+||x|-r|)^\beta}dr$$

Como a variável r está entre $0 \leqslant r \leqslant \frac{|x|}{2}$, isso implica que $|x| - r \geqslant \frac{|x|}{2}$:

$$I_1 \leqslant \lim_{|a|\to 0}\int_{|a|}^{\frac{|x|}{2}} \frac{r}{(1+||x|-r|)^\beta}dr \leqslant \lim_{|a|\to 0}\int_{|a|}^{\frac{|x|}{2}} \frac{r}{(\frac{1}{2}+\frac{|x|}{2})^\beta}dr$$

$$I_1 \leqslant \frac{2^\beta}{(1+|x|)^\beta}\lim_{|a|\to 0}\int_{|a|}^{\frac{|x|}{2}} rdr$$

$$I_1 \leqslant C\frac{|x|^2}{(1+|x|)^\beta} \leqslant C\frac{(1+|x|)^2}{(1+|x|)^\beta} \leqslant C\frac{1}{(1+|x|)^{\beta-2}}$$

ii) Para I_2 ,como $\frac{|x|}{2} \leqslant |y|$ então $\frac{1}{|y|} \leqslant \frac{2}{|x|}$:

$$I_2 \leqslant \int_{\frac{|x|}{2}\leqslant|y|\leqslant 2|x|} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}\frac{1}{|y|}dy \leqslant \frac{2}{|x|}\int_{\frac{|x|}{2}\leqslant|y|\leqslant 2|x|} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta}dy$$

Em seguida, utiliza-se uma mudança de variáveis transladando a esfera centrada em 0 para uma esfera centrada em x, temos então $r = |u| = |x-y|$ e $dy = r^2dr$.

Entretanto ao realizar essa mudança de variáveis, a expressão para os limites de integração que era $\frac{|x|}{2} \leqslant |y| \leqslant 2|x|$ sera alterada. De forma a evitar limites de integração com expressões complexas utilizaremos um artifício. Vamos obter uma região circular R_2 tal que $R_1 = \{y \in \mathbb{R}^3; \frac{|x|}{2} \leqslant |y| \leqslant 2|x|\} \subset R_2$:

$$r = |u| = |x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 3|x|$$

$$0 \leqslant ||x| - |y|| \leqslant |x - y| = |u| = r$$

Assim temos $R_1 \subset R_2 = \{u \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant |u| \leqslant 3|x|\}$, e como a função sendo integrada é não negativa:

$$I_2 \leqslant \frac{2}{|x|} \int_{\frac{|x|}{2} \leqslant |y| \leqslant 2|x|} \frac{1}{(1+|y|)^\beta} dy \leqslant \frac{2}{|x|} \int_0^{3|x|} \frac{r^2}{(1+r)^\beta} dr \leqslant \frac{2}{|x|} \int_0^{3|x|} \frac{(1+r)^2}{(1+r)^\beta} dr$$

$$I_2 \leqslant \frac{2}{|x|} \int_1^{3|x|+1} h^{2-\beta} dh = \frac{2}{|x|} \frac{1}{3-\beta} h^{3-\beta} \Big|_1^{3|x|+1}$$

$$I_2 \leqslant C \left(\frac{(3|x|+1)^{3-\beta}}{|x|} - \frac{1}{|x|} \right) \leqslant C \frac{(3|x|+1)^{3-\beta}}{|x|} = C\, 3^{3-\beta} \frac{(|x|+1/3)^{3-\beta}}{|x|}$$

Onde utilizou-se o fato de que o segundo termo é negativo. Como $\beta < 3$, isso implica que $3 - \beta > 0$, portanto a função $(|x| + 1/3)^{3-\beta}$ é crescente logo:

$$I_2 \leqslant C\, 3^{3-\beta} \frac{(|x|+1/3)^{3-\beta}}{|x|} \leqslant C\, 3^{3-\beta} \frac{(|x|+1)^{3-\beta}}{|x|}$$

Como $2|x| \geqslant 2 \implies |x| \geqslant 1 \implies |x| + 1 \leqslant 2|x| \implies \frac{|x|+1}{|x|} \leqslant 2$:

$$I_2 \leqslant C\, 3^{3-\beta} \frac{(|x|+1)}{|x|} (|x|+1)^{2-\beta} \leqslant C\, 2\, 3^{3-\beta} \frac{1}{(1+|x|)^{\beta-2}}$$

iii) Para I_3, novamente como $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$, e mudando para coordenadas polares:

$$I_3 \leqslant \lim_{|b| \to \infty} \int_{2|x|}^{|b|} \frac{r}{(1+||x|-r|)^\beta} dr$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = r - |x|$, obtemos $|x| \leqslant u \leqslant |b| - |x|$ e $dr = du$, como ambos os limites da integral são positivos:

$$I_3 \leqslant \lim_{|b|\to\infty} \int_{|x|}^{|b|-|x|} \frac{u+|x|}{(1+u)^\beta} du = \lim_{|b|\to\infty} \left(\int_{|x|}^{|b|-|x|} \frac{u}{(1+u)^\beta} du + \int_{|x|}^{|b|-|x|} \frac{|x|}{(1+u)^\beta} du \right)$$

Como $u < u + 1$:

$$I_3 \leqslant \lim_{|b|\to\infty} \left(\int_{|x|}^{|b|-|x|} (1+u)^{-\beta+1} du + |x| \int_{|x|}^{|b|-|x|} (1+u)^{-\beta} du \right)$$

$$I_3 \leqslant \lim_{|b|\to\infty} \left(\frac{(1+u)^{-\beta+2}}{-\beta+2} \Bigg|_{2|x|}^{|b|-|x|} + |x| \frac{(1+u)^{-\beta+1}}{-\beta+2} \Bigg|_{2|x|}^{|b|-|x|} \right)$$

Lembrando que $\beta > 2$ ou seja $-\beta + 2 < 0$:

$$\begin{aligned} I_3 \leqslant \lim_{|b|\to\infty} \Bigg(\frac{1}{\beta-2} \left(\frac{-1}{(1+|b|-|x|)^{\beta-2}} + \frac{1}{(1+2|x|)^{\beta-2}} \right) \\ + \frac{|x|}{\beta-1} \left(\frac{-1}{(1+|b|-|x|)^{\beta-1}} + \frac{1}{(1+2|x|)^{\beta-1}} \right) \Bigg) \end{aligned}$$

Como os dois limites tendem a zero, obtêm-se enfim:

$$I_3 \leqslant \frac{1}{(1+2|x|)^{\beta-2}} + \frac{1}{(1+2|x|)^{\beta-2}}$$

Como $1 + 2|x| \geqslant 1 + |x|$:

$$I_3 \leqslant \frac{1}{(1+|x|)^{\beta-2}}$$

A prova para o decaimento das derivadas de $U(x)$ se dá de forma idêntica pois podemos passar a derivada para dentro da integral e para u. Como $u \in S$ suas derivadas também estão em S e portanto podemos novamente escolher o mesmo β e obter a mesma taxa de decaimento. Assim concluímos a primeira parte do teorema, agora para a segunda parte iremos mostrar que a convolução que definimos resolve a equação de Poisson. A partir das propriedades da convolução e do teorema da diferenciação sob o sinal de integração obtêm-se:

$$\begin{aligned} U &= u * G \\ \partial_{x^j} U &= \partial_j u * G \\ \partial_{x^i, x^j} U &= \partial_{x^j} u * \partial_{x^i} G \end{aligned}$$

Logo:

$$\Delta U = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u(x-y).\nabla G(y)\, dy$$

O teorema da convergência dominada 23 implica então:

$$\Delta U = \lim_{\epsilon \to 0, r \to \infty} \left(\int_{B(0,r)-B(0,\epsilon)} \nabla u(x-y).\nabla G(y)\, dy \right)$$

$$\Delta U = \lim_{\epsilon \to 0, r \to \infty} \left(\int_{\partial B(0,r)+\partial B(0,\epsilon)} u(x-y)\nabla G(y) n\, dS - \int_{B(0,r)-B(0,\epsilon)} u(x-y)\Delta G(y)\, dy \right)$$

A partir das orientações das superfícies:

$$\Delta U = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} u(x-y)\nabla G(y).n\, dS - \lim_{r \to \infty} \int_{\partial B(0,r)} u(x-y)\nabla G(y).n\, dS$$
$$- \lim_{\epsilon \to 0, r \to \infty} \int_{B(0,r)-B(0,\epsilon)} u(x-y)\Delta G(y)\, dy = I_\epsilon + I_r + I_v$$

Avaliando cada uma das integrais separadamente:

i)Tomando $\epsilon = |y|$, o vetor unitário é $n(\phi,\theta) = \dfrac{y(\phi,\theta)}{|y|} = \dfrac{y(\phi,\theta)}{\epsilon}$:

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} u(x-\epsilon n)\nabla G(\epsilon n).n\, dS$$

A partir deste ponto é importante salientar que a integral se dá em função das variáveis ϕ e θ, e como $n.\nabla G(\epsilon n) = \dfrac{-1}{4\pi\epsilon^2}$:

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\partial B(0,\epsilon)} u(x-\epsilon n(\phi,\theta))\, dS(\phi,\theta) \right)$$

Como $4\pi\epsilon^2$ é a área de superfície da esfera de raio ϵ, então essa integral é uma média:

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \left(- \fint_{\partial B(0,\epsilon)} u(x-\epsilon n(\phi,\theta))\, dS(\phi,\theta) \right)$$

Para passar o limite para dentro da integral, muda-se o centro da esfera para o ponto x, e como u é contínua ela é limitada em todo compacto. Logo ela é localmente integrável portanto podemos aplicar o teorema 25, que resulta em:

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(\epsilon n(\phi,\theta))\, dS(\phi,\theta)\right) = -u(x)$$

ii)Agora para I_r como $u \in S$ e estamos tomando um r muito grande podemos estimar:

$$|I_r| = \lim_{r\to\infty}\left|\int_{\partial B(0,r)} u(x - rn)\frac{-1}{4\pi r^2}\, dS\right| \leqslant C \lim_{r\to 0}\left(\sup_{y\in\partial B(0,r)} |u(x-y)|\right) = 0$$

iii) Para I_v, pela construção da função de Green, $\Delta G = 0$ em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, assim $I_v = 0$

Portanto conclui-se que $\Delta U = -u$. □

Com o teorema da equação de Poisson provado, podemos definir a decomposição de Hodge:

Teorema 27. *(Decomposição de Hodge em S) Todo campo vetorial $v \in S$ tem uma decomposição única:*

$$v = u + \nabla p \tag{3.35}$$

Onde u é um campo vetorial com $div u = 0$(um campo vetorial solenoidal) e p é um campo escalar com $\nabla \times (\nabla p) = 0$, ou seja, ∇p é irrotacional. Tal decomposição é ortogonal, portanto temos:

$$\|u\|_m^2 + \|\nabla p\|_m^2 = \|v\|_m^2$$

Demonstração. A prova deste teorema será realizada em duas partes principais, na primeira se provará a unicidade da decomposição de onde seguirá também a existência de p. Na segunda provaremos a ortogonalidade da decomposição.

Para provar a unicidade da decomposição sejam $u_1, \nabla p_1$ e $u_2, \nabla p_2$, duas decomposições de v:

$$v = u_1 + \nabla p_1 = u_2 + \nabla p_2$$

Rearranjando a equação acima, aplicando o divergente, e como u é solenoidal:

$$\operatorname{div}(\nabla(p_2 - p_1)) = \Delta(p_2 - p_1) = \operatorname{div}(u_1 - u_2) = 0$$

Assim temos que $p_2 - p_1$ é harmônica. Por outro lado para cada uma das p_i temos $-\text{div}(-v) = \Delta p_i$. Como $v \in S$, temos que $-\text{div}(v) \in S$. Utilizando o teorema 26 obtemos que a solução p é única e pertence a C_0^2, portanto é limitada e decai a zero no infinito.

Logo $p_1 - p_2$ também é limitada , temos então pelo teorema de Liouville, que $p_1 - p_2$ é constante. Mas $p_1 - p_2$ tambêm decai a zero no infinito, logo segue que $p_1 - p_2 = 0$, assim provamos a unicidade.

Agora para a prova da ortogonalidade devemos provar que a seguinte integral é nula:

$$\int_{\mathbb{R}^3} u.\nabla p dy$$

Como p é solução da equação de Poisson, pelo teorema 26 temos que p e ∇p decaem a zero no infinito. Assim $u = v - \nabla p$ também decai a zero no infinito ($v \in S$). Como p e u decaem a zero no infinito, integramos por partes e o segundo termo se anula, assim obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(y).\nabla p(y) dy = -\int_{\mathbb{R}^3} \text{div} u.p dy$$

E como $\text{div} u = 0$ a integral se anula, e portanto fica provado que as funções são ortogonais. Para a propriedade de Pitágoras:

$$\|v\|_m^2 = \|u + \nabla p\|_m^2 = \langle u + \nabla p, u + \nabla p \rangle_m = \|u\|_m^2 + 2 < u, \nabla p >_m + \|\nabla p\|_m^2$$

Como u e ∇p são ortogonais a desigualdade fica provada. □

Definição 25. *(Operador de Projeção de Leray em S) Seja um campo vetorial $v \in S$, e sua decomposição de $v = u + \nabla p$, onde u é solenoidal e ∇p é irrotacional, escreve-se:*

$$u = Pv$$

O operador $P : v \to u$ é chamado de operador de projeção de Leray. Através dessa definição segue que div $Pv = 0$, e além disso Pv e ∇p são ortogonais.

Agora iremos estender o operador de Leray para funções em H^m:

Teorema 28. *(Operador de Projeção de Leray em H^m) Seja um campo vetorial $v \in H^m$, então o operador de Projeção de Leray pode ser estendido a H^m e temos:*

$$\|Pv\|_m \leqslant C\|v\|_m \tag{3.36}$$

Demonstração. Pela teorema 27, temos que para $v \in S$:

$$\|Pv\|_m^2 + \|\nabla p\|_m^2 = \|v\|_m^2 \implies \|Pv\|_m \leqslant C\|v\|_m$$

Logo P é um operador limitado em S. Além disso segue pelas propriedades das convoluções que a equação de Poisson é linear, e portanto a decomposição de Hodge e P também o são. Por outro lado temos que S é denso em H^m. Com esses resultados utilizamos o teorema 14, para estender P a funções em H^m. Além disso a extensão preserva a desigualdade

$$\|Pv\|_m \leqslant C\|v\|_m$$

para funções $v \in H^m$. □

Teorema 29. *(Propriedades do Operador de Projeção de Leray em H^m) Dada uma função $v \in H^m$, as seguintes propriedades são válidas para o operador de projeção de Leray:*

a) P comuta com derivadas fracas, ou seja, para qualquer $|\alpha| \leqslant m$ temos:

$$PD^\alpha v = D^\alpha Pv, \tag{3.37}$$

b) P comuta com regularizadores J_ϵ, ou seja para $\epsilon > 0$:

$$P(J_\epsilon v) = J_\epsilon(Pv) \tag{3.38}$$

c) P é simétrico, dado também $u \in H^m$:

$$\langle Pu, v\rangle_m = \langle u, Pv\rangle_m \tag{3.39}$$

Demonstração. Para as três provas abaixo, assuma v e u(para a letra "c"), pertencentes a S. Como tanto P quanto J_ϵ são operadores lineares e limitados eles são contínuos, logo provando para S podemos tomar limites convergindo para valores em H^m.

a) Através da decomposição de Hodge e da equação de Poisson podemos escrever:

$$\begin{aligned}
Pv &= v - \nabla p \\
Pv &= v - \nabla[-(div)\, v * G] \\
D^\alpha(Pv) &= D^\alpha v - \nabla[-\operatorname{div} D^\alpha(v * G)]
\end{aligned}$$

E através do teorema 23:

$$D^\alpha(Pv) = D^\alpha v - \nabla(-\operatorname{div}((D^\alpha v) * G)) = P(D^\alpha v)$$

b) Como o regularizador comuta com derivadas e a convolução é associativa:

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(Pv) &= J_\epsilon v + \nabla[J_\epsilon(\operatorname{div} v * G)] \\
&= J_\epsilon v + \nabla[\rho_\epsilon * (\operatorname{div} v * G)] \\
&= J_\epsilon v + \nabla[(\rho_\epsilon * \operatorname{div} v) * G] \\
&= J_\epsilon v + \nabla[(J_\epsilon(\operatorname{div} v)) * G] \\
&= J_\epsilon v + \nabla[(\operatorname{div} J_\epsilon v) * G] \\
&= P(J_\epsilon v)
\end{aligned}$$

c) Agora para a simetria. Podemos escrever $Pu = u + \nabla p$, de onde segue que $(Pu)\hat{}= \hat{u} - (-2\pi i)\xi\hat{p}$. Por outro lado aplicando o divergente à decomposição original e fazendo a transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \operatorname{div} u \\
(-2\pi i)^2|\xi|^2\hat{p} &= -2\pi i\xi\hat{u} \\
\hat{p} &= \frac{i\xi\hat{u}}{2\pi|\xi|^2}
\end{aligned}$$

Assim para cada coordenada de $(Pu)\hat{}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(Pu^j)\hat{}= \hat{u^j} - (-2\pi i)\xi^j\hat{p} \\
= \hat{u^j} - \xi^j \sum_k \xi^k \frac{\hat{u^k}}{|\xi|^2} \\
= \sum_k \hat{u^k}\left(\delta_{j,k} - \frac{\xi^j\xi^k}{|\xi|^2}\right)
\end{aligned}$$

Agora podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
(Pu)\hat{}\,\hat{v} &= \sum_j (Pu^j)\hat{}\,\hat{v^j} \\
&= \sum_{j,k} \hat{v^j}\hat{u^k}\left(\delta_{j,k} - \frac{\xi^j\xi^k}{|\xi|^2}\right) \\
&= \hat{u}(Pv)\hat{}
\end{aligned}
$$

Agora escrevendo o produto interno obtemos o resultado:

$$
\begin{aligned}
\langle Pu, v\rangle_m &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^m (Pu)\hat{}\,\hat{v}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^m \hat{u}(Pv)\hat{}\, d\xi \\
&= \langle u, Pv\rangle_m
\end{aligned}
$$

□

3.4 As equações de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis é dada por:

$$
\begin{cases}
\dfrac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu\Delta v \\
\operatorname{div} v = 0 \\
v^i|_{t=0} = v_0^i v
\end{cases}
\tag{3.40}
$$

Onde $v : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$ é o campo de velocidade, $p : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}$ é a pressão e $\mu \in \mathbb{R}$ é a viscosidade. Temos também que $\dfrac{Dv}{Dt}$ é a derivada material do campo de velocidade, $\operatorname{div} v = 0$ é a condição de incompressibilidade do fluído e $v_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a condição inicial. I é o domínio do tempo t, que para a equação de Navier-Stokes será $I = [0, T]$, e para a regularizada que apresentaremos mas adiante será $I = [0, \infty)$.

Um par de funções $v \in C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\} \cap C^1\{[0,T], C(\mathbb{R}^3)\}$ e $p \in C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\}$ será solução da equação de Navier-Stokes se satisfazê-la e tivermos $v(0, x) = v_0$.

A equação de Navier-Stokes pode ser deduzida a partir das leis de conservação de massa e momento, tal dedução pode ser encontrada nas referências [12] ou [13]. Iremos agora apresentar a equção de Navier-Stokes de duas outras maneiras. Durante as provas utilizaremos uma ou outra forma dependendo do que for mais fácil em termos de notação.

$$\begin{cases} \partial_t v + (v.\nabla)v = -\nabla p + \mu\Delta v \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \partial_t v^i + \sum_j v^j \partial_{x^j} v^i = -\partial_{x^i} p + \mu\Delta v^i \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{3.42}$$

3.5 Estimativas de Energia para a equação de Navier-Stokes

A estratégia nessa seção é assumir que as soluções da equação de Navier-Stokes existem ao menos em H^m com alguma regularidade, com isso conseguiremos recuperar a pressão da equação de Navier-Stokes, conseguiremos também provar uma desigualdade de energia de onde seguirá a unicidade de soluções. No teorema 37, após obter que nossas soluções estão em H^m com alguma regularidade em um intervalo de tempo $[T_0, T']$, iremos utilizar o resultado de unicidade de soluções de forma a obter uma solução no intervalo de tempo $(0, T]$. Iniciamos enunciando a forma diferencial da desigualdade de Gronwall conforme exposto na referência [6]:

Lema 4. *(Forma Diferencial da Desigualdade de Gronwall) Seja $\eta(\cdot)$ uma função absolutamente contínua e não negativa em $[0, T]$, que satisfaz para μ-q.s. t a desigualdade diferencial:*

$$\partial_t \eta(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

Onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então:

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$$

Definição 26. *Espaço $C\{[0,T], X\}$. Dado um espaço de Banach X, diremos que uma função $f : [0,T] \to X$ pertence a $C\{[0,T], X\}$ se, tomando um t qualquer e uma sequência $t_n \to t$, então $\|f(t_n) - f(t)\|_X \to 0$.*

Teorema 30. *Seja uma solução para a equação de Navier-Stokes $v^\mu \in C\{[0,T], H^m\}$ com $m \in \mathbb{Z}^+$, $m > 3/2 + 2$, então a pressão pode ser recuperada do campo de velocidades e $p \in C\{[0,T], H^m\}$.*

Demonstração. Escrevendo a equação de Navier-Stokes para cada coordenada:

$$\begin{aligned} &\partial_t v^i + (v\nabla)v^i = \mu\Delta v^i - \partial_{x^i} p \\ &\partial_{x^i} p = -\partial_t v^i - \sum_j v^j \partial_{x^j} v^i + \mu \sum_j \partial_{x^j,x^j} v^i \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nossa estratégia aqui é obter o Laplaciano da pressão, para isso tome a derivada parcial em relação a x^i da equação acima:

$$\partial_{x^i,x^i} p = -\partial_{t,x^i} v^i - \sum_j (\partial_{x^i} v^j \partial_{x^j} v^i - v^j \partial_{x^j,x^i} v^i) + \mu \sum_j \partial_{x^j,x^j,x^i} v^i$$

Somando para todos os i e como $\operatorname{div} v = 0$, obtemos:

$$\Delta p = \sum_i \partial_{x^i,x^i} p = -\sum_{i,j} \partial_{x^i} v^j \partial_{x^j} v^i = -\sum_{i,j} \partial_{x^i,x^j}(v^j v^i)$$

Fazendo a transformada de Fourier da equação acima:

$$(-2\pi i)^2 \sum_i (\xi^i)^2 \hat{p}(\xi) = -(-2\pi i)^2 \sum_{i,j} \xi^i \xi^j \widehat{(v^j v^i)}(\xi)$$

$$\hat{p}(\xi) = -\sum_{i,j} \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \widehat{(v^j v^i)}(\xi)$$

Agora pela definição da norma de Sobolev:

$$
\begin{aligned}
\|p\|_m &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^m |\hat{p}|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^m \left| \sum_{i,j} \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \widehat{(v^j v^i)} \right|^2 d\xi \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^m \sum_{i,j} \left| \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \right|^2 |\widehat{(v^j v^i)}|^2 \, d\xi \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^m \sum_{i,j} |\widehat{(v^j v^i)}|^2 \left| \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \right|^2 d\xi \\
&\leqslant \sum_{i,j} \|v^i v^j\|_m \left\| \left| \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \right|^2 \right\|_{L^\infty}
\end{aligned}
$$

Como $v^i \in H^m$, com $m > 3/2 + 2$ pela propriedade 3.17 temos que $v^i v^j \in H^m$, por outro lado temos:

$$
\left| \frac{\xi^i \xi^j}{|\xi|^2} \right| \leqslant \frac{|\xi^i \xi^j|}{|\xi|^2} \leqslant \frac{|\xi|^2}{|\xi|^2} = 1
$$

Portanto o termo acima é limitado, logo seu quadrado também o é, assim obtemos que $\|p\|_m$ é limitada logo $p \in H^m$. Além disso, por 3.43 temos, que a derivada da pressão é uma combinação linear de funções contínuas no tempo e portanto ela também o é, assim sendo temos $p \in C\{[0,T], H^m\}$. $\square$

Teorema 31. *(Estimativa de Energia) Sejam v_1 e v_2 ambas em $C\{[0,T], H^m\}$ com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $m > 3/2 + 2$, duas soluções para a equação de Navier-Stokes incompressível com a mesma viscosidade $\mu > 0$, então:*

$$
\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v_1 - v_2\|_0 \leqslant e^{\int_0^T \|\nabla v_2\|_{L^\infty} dt} \|(v_1 - v_2)|_{t=0}\|_0
$$

Demonstração. Como v_1, v_2 são duas soluções para a equação de Navier-Stokes com a mesma viscosidade temos:

$$
\begin{cases}
\dfrac{Dv_i}{Dt} = -\nabla p_i + \mu \Delta v_i \\
div\, v_i = 0 \\
v_i|_{t=0} = v_{0_i}
\end{cases}
$$

Tomando a diferença da equação de Navier-Stokes e utilizando a notação $\tilde{v} = v_1 - v_2$ e $\tilde{p} = p_1 - p_2$, obtêm-se:

$$\partial_t \tilde{v} + (v_1.\nabla)v_1 - (v_2.\nabla)v_2 = -\nabla \tilde{p} + \mu \Delta \tilde{v}$$
$$\partial_t \tilde{v} + (v_1.\nabla)v_1 - (v_2.\nabla)v_2 + (v_1.\nabla)v_2 - (v_1.\nabla)v_2 = -\nabla \tilde{p} + \mu \Delta \tilde{v}$$
$$\partial_t \tilde{v} + (v_1.\nabla)\tilde{v} + (\tilde{v}.\nabla)v_2 = -\nabla \tilde{p} + \mu \Delta \tilde{v}$$

Tomando o produto interno do L^2 da equação acima com $\tilde{v}$:

$$\langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 + \langle (v_1.\nabla)\tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 + \langle (\tilde{v}.\nabla)v_2, \tilde{v}\rangle_0 = -\langle \nabla \tilde{p}, \tilde{v}\rangle_0 + \mu \langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 \tag{3.44}$$

Agora iremos avaliar cada um dos termos $\langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0$, $\langle (v_1.\nabla)\tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0$ e $\langle \nabla \tilde{p}, \tilde{v}\rangle_0$ separadamente. Primeiramente para $\langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0$:

$$\langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \tilde{v}^j \tilde{v}^j = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \tilde{v}^j \tilde{v}^j = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x^i x^i} \tilde{v}^j \tilde{v}^j$$

Escrevendo a integral no $\mathbb{R}^3$ e utilizando integração por partes:

$$\langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 = \lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(-\int_{B(0,r)} \partial_{x^i} \tilde{v}^j \partial_{x^i} \tilde{v}^j + \int_{\partial B(0,r)} \partial_{x^i} \tilde{v}^j \tilde{v}^j n^i \right)$$

Como $\tilde{v}_j \in H^m$, tomamos uma sequência em Schwartz convergente para esta função e como $\partial_{x^i} \tilde{v}^j \in H^{m-1}$ o segundo termo da integral por partes zera e obtemos:

$$\langle \Delta \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 = -\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3)} |\nabla \tilde{v}^j|^2 = -\sum_{j=1}^{3} \|\nabla \tilde{v}^j\|_0 \tag{3.45}$$

De forma similar para $\langle (v_1.\nabla)\tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0$:

$$\langle (v_1.\nabla)\tilde{v}, \tilde{v}\rangle_0 = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (v_1.\nabla)\tilde{v}^j \tilde{v}^j = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(v_1^1 \partial_{x^1} \tilde{v}^j \tilde{v}^j + v_1^2 \partial_{x^2} \tilde{v}^j \tilde{v}^j + v_1^3 \partial_{x^3} \tilde{v}^j \tilde{v}^j \right)$$

Aqui, se utilizará a seguinte identidade:

$$\nabla(1/2(\tilde{v}^j)^2) = (\partial_{x^1} \tilde{v}^j \tilde{v}^j, \partial_{x^2} \tilde{v}^j \tilde{v}^j, \partial_{x^3} \tilde{v}^j \tilde{v}^j)$$

Assim:

$$\langle (v_1.\nabla)\tilde{v},\tilde{v}\rangle_0 = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} v_1\nabla(1/2(\tilde{v}^j)^2) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} v_1^i\partial_{x^i}(1/2(\tilde{v}^j)^2)$$

Utilizando integral por partes com um argumento de densidade de S em H^m obtemos:

$$\langle (v_1.\nabla)\tilde{v},\tilde{v}\rangle_0 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\left(-\int_{\mathbb{R}^3}(1/2(\tilde{v}^j)^2)\partial_{x^i}v_1^i\right)$$

E como $\operatorname{div} v_1 = 0$:

$$\langle (v_1.\nabla)\tilde{v},\tilde{v}\rangle_0 = \sum_{j=1}^{3}\left(-\int_{\mathbb{R}^3}(1/2(\tilde{v}^j)^2)\mathrm{div} v_1\right) = 0 \tag{3.46}$$

Agora para o termo da pressão, pelo teorema 30 a pressão também está em H^m com mesmo m, e portanto decai a zero no infinito, realizando então uma integral por partes o termo a direita é nulo e o termo restante envolve $\operatorname{div}\tilde{v}$ que também se anula:

$$\langle \nabla\tilde{p},\tilde{v}\rangle = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}3}\partial_{x^j}\tilde{p}\tilde{v}^j = \lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{3}\left(-\int_{B(0,r)}\tilde{p}\partial_{x^i}\tilde{v}^j + \int_{\partial B(0,r)}\tilde{p}\tilde{v}^j n^j\right) = 0 \tag{3.47}$$

Substituindo agora 3.45, 3.46, 3.47 em 3.44, obtêm-se:

$$\langle \partial_t\tilde{v},\tilde{v}\rangle_0 + \mu\sum_{j=1}^{3}\|\nabla\tilde{v}^j\|_0 = -\langle(\tilde{v}.\nabla)v_2,\tilde{v}\rangle_0 \tag{3.48}$$

Como $\tilde{v}$ é suficientemente suave no tempo, temos:

$$\partial_t\|\tilde{v}\|_0^2 = 2\langle\tilde{v},\partial_t\tilde{v}\rangle_0 \tag{3.49}$$

Utilizando 3.49 em 3.48 ,como $\mu\|\nabla\tilde{v}^j\|_0 \geqslant 0$ e aplicando o módulo, obtemos:

$$1/2\partial_t\|\tilde{v}\|_2^2 \leqslant |\langle(\tilde{v}.\nabla)v_2,\tilde{v}\rangle|$$

Analisando o termo $|\langle(\tilde{v}.\nabla)v_2,\tilde{v}\rangle|$, utilizando a desigualdade de Hölder:

$$|\langle(\tilde{v}.\nabla)v_2,\tilde{v}\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^3}[(\tilde{v}.\nabla)v_2]\tilde{v}\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^3}|(\tilde{v}.\nabla)v_2||\tilde{v}| \leqslant \int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{v}||\nabla v_2||\tilde{v}| = \int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{v}|^2|\nabla v_2|$$

Continuando temos:

$$
\begin{aligned}
|\langle(\tilde{v}.\nabla)v_2, \tilde{v}\rangle| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{v}|^2|\nabla v_2| = \||\tilde{v}|^2|\nabla v_2|\|_{L^1} \leqslant \|\nabla v_2\|_{L^\infty}\||\tilde{v}|^2\|_{L^1} = \|\nabla v_2\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{v}||\tilde{v}| \\
&\leqslant \|\nabla v_2\|_{L^\infty}\|\tilde{v}\|_0^2
\end{aligned}
$$

Utilizando também que:

$$1/2\partial_t\|\tilde{v}\|_0^2 = \partial_t\|\tilde{v}\|_0\|\tilde{v}\|_0$$

Obtêm-se:

$$\partial_t\|\tilde{v}\|_0 \leqslant \|\nabla v_2\|_{L^\infty}\|\tilde{v}\|_0$$

Utilizando agora a desigualdade de Gronwall (Lema 4), obtemos que para todo t tal que $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\|v_1 - v_2\|_0 \leqslant e^{\int_0^T \|\nabla v_2\|_{L^\infty} dt}\left(\|(v_1 - v_2)|_{t=0}\|_0\right)$$

Como a desigualdade vale para qualquer t no intervalo considerado, podemos aplicar o supremo no lado esquerdo, obtendo a desigualdade do teorema. □

Agora podemos finalizar a prova obtendo a unicidade:

Corolário 1. *(Unicidade de Soluções) Sejam v_1 e v_2 duas soluções da equação de Navier-Stokes, ambas pertencentes a $C\{[0,T], H^m\}$ com $m > 3/2 + 2$, com mesma condição inicial então $v_1 = v_2$.*

Demonstração. Utilizando a estimativa de energia do teorema anterior com $v_1|_{t=0} = v_2|_{t=0}$:

$$0 \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1 - v_2\|_0 \leqslant e^{\int_0^T \|\nabla v_2\|_{L^\infty} dt} * 0 = 0 \implies \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_1 - v_2\|_0 = 0 \implies v_1 = v_2$$

□

Corolário 2. *(Estimativa para o gradiente) A estimativa de energia para a equação de Navier-Stokes, também permite uma estimativa para o gradiente na forma:*

$$\mu\int_0^T \|\nabla(v_1 - v_2)\|_0^2 \leqslant c(v_2, T)\left(\|v_1|_{t=0} - v_2|_{t=0}\|_0^2\right)$$

Onde $c(v_2, T) = c\left(\int_0^T \|\nabla v_2\|_\infty\right)$ *depende de* v_2 *e* T.

3.6 Existência global de soluções para a equação regularizada de Navier-Stokes

Nesta seção iremos estudar a existência de soluções para uma versão regularizada da equação de Navier-Stokes, dada por:

$$\begin{cases} \partial_t v^\epsilon + J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] = -\nabla p^\epsilon + \mu J_\epsilon(J_\epsilon \Delta v^\epsilon) \\ v^\epsilon|_{t=0} = v_0 \\ \text{div} v^\epsilon = 0 \end{cases}$$

Onde regularizou-se os termos que envolvem o campo de velocidades e suas derivadas em relação ao espaço, o termo que envolve a derivada temporal não foi regularizado. Também utilizou-se um regularizador adicional no termo que envolve o produto $(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)$.

Aplicando o operador de projeção de Leray, projetamos a equação acima no espaço $V^s = \{v \in H^s(\mathbb{R}^3); \text{div}\, v = 0\}$ como $\text{div}(v^\epsilon) = 0$ temos $Pv^\epsilon = v^\epsilon$ e $P(\nabla p^\epsilon) = 0$. Além disso como $Pv^\epsilon = v^\epsilon$ e o operador de projeção de Leray comuta com derivadas (teorema 29, letra "a") e regularizadores (teorema 29, letra "b"), obtêm-se $P(\mu J_\epsilon(J_\epsilon \Delta v^\epsilon)) = \mu J_\epsilon(J_\epsilon \Delta v^\epsilon)$, assim:

$$\partial_t v^\epsilon + PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] = \mu J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon \tag{3.50}$$

Podemos então olhar a EDP acima como uma EDO de $\mathbb{R}$ (dado pelo tempo) no espaço de Banach V^s:

$$\begin{cases} \partial_t v^\epsilon = \mu J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] = F_\epsilon^1(v^\epsilon) - F_\epsilon^2(v^\epsilon) = F_\epsilon(v^\epsilon) \\ v^\epsilon|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{3.51}$$

Para provar a existência global de soluções para a equação regularizada de Navier-Stokes teremos que provar primeiramente, a existência de soluções locais, e para isso utilizaremos os seguintes teoremas, que podem ser encontrados na referência [14], sendo que ambos os teoremas são enunciados como o teorema 1.17 da pág. 14.

Teorema 32. *(Teorema de Picard em Espaços de Banach) Seja $U \subset X$ um subconjunto aberto de um espaço de Banach X e seja $F : U \to X$ uma função que é localmente Lipschitz contínua, ou seja, para todo $x \in U$ existe $L > 0$ e uma vizinhança aberta $U_x \subset U$ de x tal que:*

$$\|F(\tilde{x}) - F(\hat{x})\|_X \leqslant L\|\tilde{x} - \hat{x}\|_X \tag{3.52}$$

Para todo $\tilde{x}, \hat{x} \in U_x$. Então para qualquer $x_0 \in U$, existe um tempo T para o qual a EDO:

$$\begin{cases} \partial_t x = F(x) \\ x|_{t=0} = x_0 \in U \end{cases} \tag{3.53}$$

tem uma solução local única $x \in C^1\{(-T, T); U\}$.

Teorema 33. *Seja $U \subset X$ um subconjunto aberto de um espaço de Banach X, e seja $F : U \to X$ um operador Lipschitz contínuo. Então a solução única $x \in C^1\{[0, T); U\}$ para a EDO autônoma 3.53 ou existe globalmente no tempo, ou existe somente para um $T < \infty$ e a solução $x(t)$ deixa o conjunto aberto U quando $t \to T$.*

Também utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 5. *Dada uma função f não nula pertencente a $C\{[0, T], H^m\}$ temos:*

$$\partial_t \|f\|_m \leqslant \|\partial_t f\|_m$$

Demonstração. Pela definição de espaços de Sobolev, para um f qualquer:

$$\partial_t \|f\|_m = \partial_t (\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_0^2)^{1/2}$$

Tal somatório pode ser escrito como a norma euclidiana do vetor:

$$(\|f\|_0, \|D^{(1,0,0)} v\|_0, ..., \|D^\alpha f\|_0) = (u^1, u^2, ..., u^k)$$

Assim obtemos:

$$\partial_t \|f\|_m = \partial_t |(u^1, u^2, ..., u^k)| = \frac{1}{2} \frac{1}{|(u^1, u^2, ..., u^k)|} (2u^1 \partial_t u^1 + 2u^2 \partial_t u^2 + ... + 2u^k \partial_t u^k) =$$

$$= \frac{(u^1, u^2, ..., u^k).(\partial_t u^1, \partial_t u^2, ..., \partial_t u^k)}{|(u^1, u^2, ..., u^k)|}$$

Aplicando então o módulo em ambos os lados, e em seguida Cauchy-Schwartz:

$$|\partial_t \|f\|_m| \leqslant \frac{|(u^1, u^2, ..., u^k)|}{|((u^1)^2, (u^2)^2, ..., (u^k)^2)|} |(\partial_t u^1, \partial_t u^2, ..., \partial_t u^k)| = |(\partial_t u^1, \partial_t u^2, ..., \partial_t u^k)|$$

$$|\partial_t \|f\|_m| \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} (\partial_t \|D^\alpha v\|_0)^2 \right)^{1/2}$$

Para cada um desses termos, temos:

$$\partial_t \|D^\alpha f\|_0 = \partial_t \left(\int |D^\alpha f|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\|D^\alpha f\|_0} \partial_t \left(\int |D^\alpha f|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\|D^\alpha f\|_0} \left(\int 2(D^\alpha f^1, D^\alpha f^2, D^\alpha f^3)(\partial_t(D^\alpha f^1), \partial_t(D^\alpha f^2), \partial_t(D^\alpha f^3)) \right)$$

Utilizando Hölder:

$$= \frac{\|D^\alpha f.\partial_t D^\alpha f\|_{L^1}}{\|D^\alpha f\|_0} \leqslant \frac{\|D^\alpha f\|_0 \|\partial_t D^\alpha f\|_0}{\|D^\alpha f\|_0} = \|\partial_t D^\alpha f\|_0$$

Assim:

$$|\partial_t \|f\|_m| \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} (\partial_t \|D^\alpha f\|_0)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} (\|\partial_t D^\alpha f\|_0)^2 \right)^{1/2} = \|\partial_t f\|_m$$

Como o módulo é sempre maior ou igual ao valor original obtemos enfim:

$$\partial_t \|f\|_m \leqslant |\partial_t \|f\|_m| = \|\partial_t f\|_m$$

□

Teorema 34. *(Existência de soluções locais para a equação regularizada de Navier-Stokes) Seja uma condição inicial $v_0 \in V^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ com $m > 3/2 + 2$, então:*

a) Para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma solução única $v^\epsilon \in C^1\{[0, T_\epsilon); V^m\}$ para a equação 3.51, e temos que $T_\epsilon = T(\|v_0\|_m, \epsilon)$, ou seja, T_ϵ depende de $\|v_0\|_m$ e ϵ.

b) Em qualquer intervalo de tempo $[0, T)$ no qual essa solução pertence a $C^1\{[0, T), V^0\}$, tem-se:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^\epsilon\|_0 \leqslant \|v_0\|_0 \tag{3.54}$$

Demonstração. Iniciaremos pela prova do item "a"do teorema. Para esta parte utilizaremos o teorema 32. Como $div\, v^\epsilon = 0$, P tem como imagem campos vetoriais com divergente zero, e J_ϵ comuta com derivadas, obtêm-se que $F_\epsilon : V^m \to V^m$. Portanto se for demonstrado que F_ϵ^1 e F_ϵ^2 são Lipschitz contínuos, o resultado seguirá. Serão analisados separadamente F_ϵ^1 e F_ϵ^2. Iniciando por F_ϵ^1, sejam v^1 e v^2 pertencentes a V^m. Como os regularizadores comutam com derivadas, e o Laplaciano envolve derivadas de segunda ordem a definição da norma de Sobolev nos permite escrever:

$$\|F_\epsilon^1(v^1) - F_\epsilon^1(v^2)\|_m = \mu\|J_\epsilon^2\Delta(v^1 - v^2)\|_m \leqslant \mu\|J_\epsilon^2(v^1 - v^2)\|_{m+2} \tag{3.55}$$

Através de 3.28 obtemos:

$$\|F_\epsilon^1(v^1) - F_\epsilon^1(v^2)\|_m \leqslant \mu\frac{c_{m,2}}{\epsilon^2}\|v^1 - v^2\|_m = c(\epsilon)\|v^1 - v^2\|_m \tag{3.56}$$

Agora para F_ϵ^2:

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m = \|PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon v^1)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^2).\nabla(J_\epsilon v^2)]\|_m$$

Utilizando a desigualdade triangular com $PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon v^2)]$:

$$\begin{aligned}\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant{}& \|PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon v^1)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon v^2)]\|_m + \\ &+ \|PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon v^2)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^2).\nabla(J_\epsilon v^2)]\|_m\end{aligned}$$

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant \|PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^1).\nabla(J_\epsilon(v^1 - v^2))]\|_m + \|PJ_\epsilon[(J_\epsilon(v^1 - v^2)).\nabla(J_\epsilon v^2)]\|_m$$

Por 3.36 temos $\|Pv\|_m \leqslant \|v\|_m$. Novamente por 3.28, $\|J_\epsilon v\|_m \leqslant c_m\|v\|_m$, além disso como os regularizadores comutam com derivadas $\nabla[J_\epsilon(v^1 - v^2)] = J_\epsilon\nabla(v^1 - v^2)$ e $\nabla[J_\epsilon(v^2)] = J_\epsilon\nabla(v^2)$, assim:

$$\begin{aligned}\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant{}& \|(J_\epsilon v^1).(J_\epsilon\nabla(v^1 - v^2))\|_m + \\ &+ \|(J_\epsilon(v^1 - v^2)).(J_\epsilon\nabla(v^2))\|_m\end{aligned}$$

Através da desigualdade 3.15, obtêm-se:

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant c\{\|J_\epsilon v^1\|_{L^\infty}\|D^m J_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)\|_0 + \|D^m J_\epsilon v^1\|_0 \|J_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)\|_{L^\infty} + \\ \|J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_{L^\infty}\|D^m J_\epsilon \nabla(v^2)\|_0 + \|D^m J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_0 \|J_\epsilon \nabla(v^2)\|_{L^\infty}\}.$$

Agora utilizando 3.29 e propriedades de espaços de Sobolev para cada um dos termos acima separadamente:

$$\|J_\epsilon v^1\|_\infty \leqslant \frac{c_0}{\epsilon^{3/2}}\|v^1\|_0$$

$$\|J_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)\|_\infty \leqslant \frac{c_1}{\epsilon^{3/2+1}}\|v^1 - v^2\|_0 \leqslant \frac{c_1}{\epsilon^{3/2+1}}\|v^1 - v^2\|_m$$

$$\|J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_\infty \leqslant \frac{c_0}{\epsilon^{3/2}}\|v^1 - v^2\|_0 \leqslant \frac{c_0}{\epsilon^{3/2}}\|v^1 - v^2\|_m$$

$$\|J_\epsilon \nabla(v^2)\|_\infty \leqslant \frac{c_1}{\epsilon^{3/2+1}}\|v^2\|_0$$

Utilizando também 3.28 e propriedades de espaços de Sobolev:

$$\|D^m J_\epsilon \nabla(v^1 - v^2)\|_0 \leqslant \|J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_{m+1} \leqslant \frac{c_{1,m}}{\epsilon}\|v^1 - v^2\|_m$$

$$\|D^m J_\epsilon v^1\|_0 \leqslant \|J_\epsilon v^1\|_m \leqslant \frac{c_{0,m}}{\epsilon^m}\|v^1\|_0$$

$$\|D^m J_\epsilon \nabla(v^2)\|_0 \leqslant \|J_\epsilon v^2\|_{m+1} \leqslant \frac{c_{0,m+1}}{\epsilon^{m+1}}\|v^2\|_0$$

$$\|D^m J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_0 \leqslant \|J_\epsilon(v^1 - v^2)\|_m \leqslant \frac{c_{m,0}}{\epsilon^0}\|v^1 - v^2\|_m = c_{m,0}\|v^1 - v^2\|_m$$

Tomando uma constante C dependendo de ϵ tal que:

$$c(\epsilon) \geqslant max\{\frac{c_0}{\epsilon^{3/2}}, \frac{c_1}{\epsilon^{3/2+1}}, \frac{c_{1,m}}{\epsilon}, \frac{c_{0,m}}{\epsilon^m}, \frac{c_{0,m+1}}{\epsilon^{m+1}}, c_{m,0}\}$$

Resultando em:

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant c(\epsilon)\{\|v^1\|_0\|v^1 - v^2\|_m + \|v^1\|_0\|v^1 - v^2\|_m + \\ + \|v^1 - v^2\|_m\|v^2\|_0 + \|v^1 - v^2\|_m\|v^2\|_0\}$$

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant c(\epsilon)(\|v^1\|_0 + \|v^2\|_0)\|v^1 - v^2\|_m$$

$$\|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v^1\|_0, \|v^2\|_0)\|v^1 - v^2\|_m \tag{3.57}$$

De posse desses resultados podemos prosseguir analisando F_ϵ. Utilizando a desigualdade triangular:

$$\|F_\epsilon(v^1) - F_\epsilon(v^2)\| = \|F_\epsilon^1(v^1) - F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^1(v^2) + F_\epsilon^2(v^2)\|$$

$$\|F_\epsilon(v^1) - F_\epsilon(v^2)\| \leqslant \|F_\epsilon^1(v^1) - F_\epsilon^1(v^2)\| + \|F_\epsilon^2(v^1) - F_\epsilon^2(v^2)\| \tag{3.58}$$

Utilizando 3.56 e 3.57:

$$\|F_\epsilon(v^1) - F_\epsilon(v^2)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v^1\|_0, \|v^2\|_0)\|v^1 - v^2\|_m \tag{3.59}$$

Assim segue que F_ϵ é localmente Lipschitz para qualquer aberto da forma:

$$U^M = \{v \in V^m \mid \|v\|_m < M\} \tag{3.60}$$

Como F_ϵ é localmente Lipschitz contínuo, o teorema 32, implica que dada uma condição inicial $v_0 \in H^m$, existe uma solução única $v^\epsilon \in C^1\{[0, T_\epsilon]; U^M\}$, para qualquer $m \in \mathbb{Z}^+$, $m > 3/2 + 2$ e para algum $T_\epsilon > 0$.

Agora daremos prosseguimento à prova do teorema provando a parte "b", ou seja:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^\epsilon\|_0 \leqslant \|v_0\|_0$$

Para isso tomemos o produto interno do L^2 da equação 3.51 com v^ϵ:

$$\langle \partial_t v^\epsilon, v^\epsilon \rangle_0 = \mu \langle J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, v^\epsilon \rangle_0 - \langle P J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon \rangle_0$$

Utilizando que:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|v^\epsilon\|_0^2 = \langle \partial_t v^\epsilon, v^\epsilon \rangle_0$$

Obtemos:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|v^\epsilon\|_0^2 = \mu \langle J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, v^\epsilon \rangle_0 - \langle P J_\epsilon [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon \rangle_0 \tag{3.61}$$

Para o primeiro termo do lado direito, utilizamos 3.25, e em seguida 3.24 para passar o regularizador para dentro do Laplaciano e integramos por partes:

$$\langle J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, v^\epsilon \rangle_0 = \langle J_\epsilon \Delta v^\epsilon, J_\epsilon v^\epsilon \rangle_0 = \langle \Delta(J_\epsilon v^\epsilon), J_\epsilon v^\epsilon \rangle_0 = -\sum_{j=1}^{3} \|J_\epsilon \nabla v^{\epsilon,j}\|_0^2 \tag{3.62}$$

Agora para o segundo termo do lado direito utilizamos 3.39 seguido do fato de que $div\, v^\epsilon = 0 \implies Pv^\epsilon = v^\epsilon$:

$$\langle P J_\epsilon [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)]), v^\epsilon \rangle_0 = \langle J_\epsilon [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], P v^\epsilon \rangle_0 = \langle J_\epsilon [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon \rangle_0$$

Em seguida utilizamos 3.25:

$$\langle J_\epsilon [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon \rangle_0 = \langle (J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon), J_\epsilon v^\epsilon \rangle_0$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned}
\langle (J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon), J_\epsilon v^\epsilon \rangle_0 &= \langle (\sum_{i=1}^{3} J_\epsilon v^{\epsilon,i} \partial_{x^i} J_\epsilon v^{\epsilon,1}, \sum_{i=1}^{3} J_\epsilon v^{\epsilon,i} \partial_{x^i} J_\epsilon v^{\epsilon,2}, \sum_{i=1}^{3} J_\epsilon v^{\epsilon,i} \partial_{x^i} J_\epsilon v^{\epsilon,3}), J_\epsilon v^\epsilon \rangle_0 \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \langle J_\epsilon v^{\epsilon,i} \partial_{x^i} J_\epsilon v^{\epsilon,j}, J_\epsilon v^{\epsilon,j} \rangle_0 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \langle J_\epsilon v^{\epsilon,i}, \partial_{x^i} (J_\epsilon v^{\epsilon,j})^2 \rangle_0
\end{aligned}$$

Tomando uma integral por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \langle J_\epsilon v^{\epsilon,i}, \partial_{x^i} (J_\epsilon v^{\epsilon,j})^2 \rangle_0 &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \langle \partial_{x^i} J_\epsilon v^{\epsilon,i}, (J_\epsilon v^{\epsilon,j})^2 \rangle_0 \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \langle \operatorname{div} v^\epsilon, (J_\epsilon v^{\epsilon,j})^2 \rangle_0
\end{aligned}$$

Como $div\, v^\epsilon = 0 \implies div(J_\epsilon v^\epsilon) = 0$:

$$\langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)]), v^\epsilon\rangle_0 = 0 \tag{3.63}$$

Substituindo 3.62 e 3.63 em 3.61 obtemos:

$$\frac{1}{2}\partial_t \int |v^\epsilon|^2 = -\mu \sum_{j=1}^{3} \|J_\epsilon \nabla v^{\epsilon,j}\|_0^2$$

$$\frac{1}{2}\partial_t \int |v^\epsilon|^2 + \mu \sum_{j=1}^{3} \|J_\epsilon \nabla v^{\epsilon,j}\|_0^2 = 0$$

Assim como $\|J_\epsilon \nabla v^{\epsilon,j}\|_0^2 \geqslant 0$ e $\mu > 0$, temos então que $\partial_t \|v^\epsilon\|_0^2 \leqslant 0$. Assim quando t aumenta $\|v^\epsilon\|_0^2$ é uma função positiva que decresce, portanto ela atinge seu máximo no ponto inicial $t = 0$, portanto:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|v^\epsilon\|_0 \leqslant \|v^\epsilon|_{t=0}\|_0 = \|v_0\|_0$$

$\square$

Assim fica demonstrada a existência de soluções locais para a equação regularizada de Navier Stokes, agora prosseguimos com a demonstração da existência de soluções globais:

Teorema 35. *(Existência global de soluções para a equação de Navier Stokes regularizada) Dada uma condição inicial $v_0 \in V^m$, com $m \in Z^+$ e $m > 3/2 + 2$. Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma solução única em todo o tempo $v^\epsilon \in C^1\{[0, \infty); V^m\}$ para a equação 3.51.*

Demonstração. Utilizaremos o teorema 33, com $U = V^m$. Utilizando a negação deste teorema, se provarmos que nossa solução continua pertencendo a V^m quando $t \to T$ então, a solução regularizada que obtivemos no teorema 34, existirá globalmente no tempo. Para provar que nossa solução continua pertencendo a V^m basta obter um limitante para $\|v^\epsilon(\cdot, t)\|_m$. Tomando a equação 3.59, com $v^1 = v^\epsilon$ e v^2 identicamente nulo, obtemos:

$$\|F_\epsilon(v^\epsilon)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v^\epsilon\|_0)\|v^\epsilon\|_m$$

Aplicando a norma H^m a equação 3.51, obtemos:

$$\|\partial_t v^\epsilon\|_m = \|F_\epsilon(v^\epsilon)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v^\epsilon\|_0)\|v^\epsilon\|_m$$

Utilizando o lema 5 com $f = v^\epsilon$ obtemos:

$$\partial_t \|v^\epsilon\|_m \leqslant \|\partial_t v^\epsilon(x,t)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v^\epsilon\|_0)\|v^\epsilon\|_m$$

Agora utilizando 3.54 para eliminar a dependência da constante em $\|v^\epsilon\|_0$:

$$\partial_t \|v^\epsilon(x,t)\|_m \leqslant c(\epsilon, \|v_0\|_0)\|v^\epsilon\|_m$$

Em seguida utilizamos o lema 4:

$$\|v^\epsilon(x,t)\|_m \leqslant e^{\int_0^T C ds}\|v^\epsilon|_{t=0}\|_m = Ce^{CT} \tag{3.64}$$

Assim concluimos que $\|v^\epsilon(\cdot,t)\|_m \leqslant Ce^{CT}$, portanto $v^\epsilon(\cdot,t)$ ainda pertence a V^m quanto $t \to T$, assim sendo pelo teorema 33 a solução única da equação 3.51 existe globalmente no tempo. $\square$

4 Existência local de soluções para a equação de Navier-Stokes

Neste capítulo encontram-se os resultados que são os objetivos desta dissertação, são eles os Teoremas 36 e 37. O primeiro deles provará a existência de uma solução para a equação de Navier-Stokes em $C\{[0,T];C^2(\mathbb{R}^3)\} \cap C^1\{[0,T];C(\mathbb{R}^3)\}$ e o segundo provará a mesma existência só que no espaço $C\{[0,T];H^m\} \cap C^1\{[0,T];H^{m-2}\}$.

Essas soluções são obtidas através de uma subsequência de soluções da equação regularizada de Navier-Stokes. Logo, iniciamos o capítulo provando os Lemas 7,8 e 9 que nos fornecem algumas estimativas envolvendo as soluções regularizadas.

4.1 Preliminares

Para a prova da existência local de soluções para a equação de Navier-Stokes precisaremos de uma nova estimativa de energia, agora para a versão regularizada da equação de Navier Stokes iniciaremos com uma definição e citando alguns lemas:

Definição 27. *O espaço $C_w\{[0,T],H^m\}$, define o espaço das funções f contínuas no intervalo $[0,T]$ e com valores na topologia fraca do H^m. Isto é, para qualquer $\gamma \in H^m$ fixo, temos que $g^\gamma = \langle f,\gamma\rangle_m$ é uma função contínua em $[0,T]$, onde:*

$$\langle f,\gamma\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int D^\alpha f.D^\alpha \gamma dx$$

Lema 6. *Sejam $h,u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ duas funções de classe C^1 então:*

$$(h.\nabla u).u = \frac{1}{2} h\nabla(|u|^2)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(h.\nabla u).u &= \left[(h^1,h^2,h^3). \begin{pmatrix} \partial_{x^1}u^1 & \partial_{x^1}u^2 & \partial_{x^1}u^3 \\ \partial_{x^2}u^1 & \partial_{x^2}u^2 & \partial_{x^2}u^3 \\ \partial_{x^3}u^1 & \partial_{x^3}u^2 & \partial_{x^3}u^3 \end{pmatrix} \right].(u^1,u^2,u^3) \\
&= \frac{1}{2}(h.\nabla(u^1)^2 + h.\nabla(u^2)^2 + h.\nabla(u^3)^2) \\
&= \frac{1}{2}h.\nabla(|u|^2)
\end{aligned}$$

□

Lema 7. *(Estimativa de Energia em H^m para Navier-Stokes regularizada) Seja $v_0 \in V^m$, com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $m > 3/2 + 2$, então a solução regularizada $v^\epsilon \in C^1\{[0,\infty); V^m\}$ para a 3.51, satisfaz:*

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \|v^\epsilon\|_m^2 \right) + \mu \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant c_m \|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2 \tag{4.1}$$

Demonstração. A equação 3.51 nos dá:

$$\partial_t v^\epsilon = \mu J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon - P J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)]$$

Tomando a D^α derivada da equação acima com $|\alpha| \leqslant m$, e em seguida o produto interno do L^2 dessa equação com $D^\alpha v^\epsilon$:

$$\langle D^\alpha \partial_t v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 = \mu \langle D^\alpha J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 - \langle D^\alpha P J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 \tag{4.2}$$

Agora analisaremos cada umas das parcelas da equação 4.2 separadamente. Primeiramente para o termo $\langle D^\alpha J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0$, as propriedades dos regularizadores 3.24, 3.25 implicam, respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 &= \langle J_\epsilon^2 D^\alpha \Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 = \langle J_\epsilon D^\alpha \Delta v^\epsilon, J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 \\ &= \langle \Delta(J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon), J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \partial_{x^j x^j}(J_\epsilon D^\alpha v^{\epsilon,i}), J_\epsilon D^\alpha v^{\epsilon,i} \rangle_0 \end{aligned}$$

Em seguida uma integração por partes nos dá:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha J_\epsilon^2 \Delta v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon \rangle_0 &= - \sum_{i,j=1}^{3} \langle \partial_{x^j}(J_\epsilon D^\alpha v^{\epsilon,i}), \partial_{x^j}(J_\epsilon D^\alpha v^{\epsilon,i}) \rangle_0 \\ &= -\|\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)\|_0^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora para o termo $\langle D^\alpha P J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon \rangle_0$, somamos e subtraímos $\langle P J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon \rangle_0$, e utilizamos propriedades dos produtos internos para obter:

$$\langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 = \langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 + \\ + \langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 \tag{4.4}$$

Agora prosseguimos com o termo $\langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0$, utilizando 3.39, 3.37, em seguida, como $\operatorname{div} v^\epsilon = 0$, temos $D^\alpha P v^\epsilon = D^\alpha v^\epsilon$, por fim utilizamos 3.25 e 3.24:

$$\begin{aligned}\langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 &= \langle J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], PD^\alpha v^\epsilon\rangle_0 \\ &= \langle J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha P v^\epsilon\rangle_0 \\ &= \langle J_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 \\ &= \langle (J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon), J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 \\ &= \langle (J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon), D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon\rangle_0\end{aligned}$$

Agora utilizando o lema 6, seguido de uma integral por partes e como $\operatorname{div}(J_\epsilon v^\epsilon) = J_\epsilon(\operatorname{div} v^\epsilon) = 0$:

$$\begin{aligned}\langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 &= \frac{1}{2}\langle J_\epsilon v^\epsilon, \nabla(|D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon|^2)\rangle_0 \\ &= -\frac{1}{2}\langle \operatorname{div}(J_\epsilon v^\epsilon), |D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon|^2\rangle_0 = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

Utilizando então 4.5 em 4.4:

$$\begin{aligned}&\langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 = \\ &\quad = \langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0\end{aligned} \tag{4.6}$$

O termo $\langle D^\alpha \partial_t v^\epsilon, D^\alpha v^\epsilon\rangle$ também pode ser modificado pois vale a seguinte igualdade:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\|D^\alpha v^\epsilon\|_0^2\right) = \langle \partial_t(D^\alpha v^\epsilon), D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 \tag{4.7}$$

Substituindo então 4.3, 4.6 e 4.7 em 4.2:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\|D^\alpha v^\epsilon\|_0^2\right) =$$
$$= -\mu\|\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)\|_0^2 - \langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0$$

Somando para todos os $|\alpha| \leqslant m$, obtemos:

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2\right) + \mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0$$

Prosseguimos agora com a analise do somatório, iniciamos passando o sinal negativo para dentro do produto interno e, em seguida, como o regularizador e o operador de projeção são lineares, podemos colocá-los em evidência. Em seguida como ambos também são simétricos, propriedades 3.25 e 3.39:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0\\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)] - D^\alpha PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], D^\alpha v^\epsilon\rangle_0\\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle PJ_\epsilon\{[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)] - D^\alpha[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)]\}, D^\alpha v^\epsilon\rangle_0\\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)] - D^\alpha[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], PJ_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\rangle_0
\end{aligned}$$

Aplicando Hölder, como $\mathrm{div} v^\epsilon = 0$, e utilizando 3.36 temos $\|PJ_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\|_0 = \|J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\|_0$. Utilizando o teorema 9 temos $\|J_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\|_0 \leqslant \|v^\epsilon\|_0$. Finalizamos utilizando o fato de que de modo geral para normas vale $\|a-b\| = \|b-a\|$.

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)] - D^\alpha[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], PJ_\epsilon D^\alpha v^\epsilon\rangle_0 =$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_{0,0}\|D^\alpha v^\epsilon\|_0\|D^\alpha[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - [(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(D^\alpha J_\epsilon v^\epsilon)]\|_0$$

Pela definição da norma de Sobolev, obtemos que $\|D^\alpha v^\epsilon\|_0 \leqslant \|v^\epsilon\|_m$ para qualquer $|\alpha| \leqslant m$, portanto:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2 \leqslant \\
&\leqslant c_{0,0}\|v^\epsilon\|_m \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha[(J_\epsilon v^\epsilon).\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - [(J_\epsilon v^\epsilon).D^\alpha\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)]\|_0
\end{aligned}$$

Utilizando agora 3.16 com $u = J_\epsilon v^\epsilon$ e $v = \nabla(J_\epsilon v^\epsilon)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2 \leqslant \\
&\leqslant c_m\|v^\epsilon\|_m(\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{L^\infty}\|D^{m-1}\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_0 + \|D^m(J_\epsilon v^\epsilon)\|_0\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{L^\infty})
\end{aligned}$$

Utilizando novamente a definição da norma de Sobolev, e a propriedade dos regularizadores 3.28 com $k = 0$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2 \leqslant \\
&\leqslant c_m\|v^\epsilon\|_m(\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{L^\infty}\|J_\epsilon v^\epsilon\|_m + \|J_\epsilon v^\epsilon\|_m\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{L^\infty}) \\
&\leqslant c\|J_\epsilon v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon\|_m\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{L^\infty} \\
&\leqslant c\|v^\epsilon\|_m^2\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

□

Lema 8. *Dada uma condição inicial $v_0 \in V^m$ com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $m > 3/2 + 2$, as soluções para a equação regularizada de Navier-Stokes(equação 3.51) satisfazem:*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|v^\epsilon\|_m \leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T\|v_0\|_m} \tag{4.8}$$

Para $T < (c_m\|v_0\|_m)^{-1}$. Em outras palavras, a família de soluções v^ϵ pertencem a H^m para qualquer $t \in [0, T]$ e são uniformemente (independentemente de ϵ) limitadas em $C\{[0, T], H^m\}$.

Demonstração. Podemos computar inicialmente:

$$\|v^\epsilon\|_m\partial_t\|v^\epsilon\|_m = \partial_t\frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2$$

E como $\mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2 \geqslant 0$:

$$\|v^\epsilon\|_m \partial_t \|v^\epsilon\|_m \leqslant \partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_m^2$$

Utilizando o lema 7, cortando o termo $\|v^\epsilon\|_m$ e em seguida, como $J_\epsilon \nabla v^\epsilon \in C^\infty \cap H^{m-1}$, a desigualdade de Sobolev 3.14 implica que $\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_\infty = \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_{C_0} \leqslant \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_{m-1}$.

$$\begin{aligned} \|v^\epsilon\|_m \partial_t \|v^\epsilon\|_m &\leqslant c_m \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2 \\ \partial_t \|v^\epsilon\|_m &\leqslant c_m \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_\infty \|v^\epsilon\|_m \\ \partial_t \|v^\epsilon\|_m &\leqslant c_m \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_{m-1} \|v^\epsilon\|_m \end{aligned}$$

Por fim utilizando 3.28 e novamente a definição da norma de Sobolev:

$$\partial_t \|v^\epsilon\|_m \leqslant c_m \|\nabla v^\epsilon\|_{m-1} \|v^\epsilon\|_m \leqslant c_m \|v^\epsilon\|_m^2$$

Tomando agora $y(t) = \|v^\epsilon\|_m$, isolando y e integrando em $[0, t]$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leqslant c_m y^2 \\ \int_0^t \frac{dy}{y^2} &\leqslant \int_0^t c_m dt \\ \frac{-1}{y}\Big|_0^t &\leqslant c_m t \\ \frac{1}{y(0)} - c_m t &\leqslant \frac{1}{y(t)} \end{aligned}$$

Tomando $t \leqslant T < (c_m y(0))^{-1}$ para evitar a descontinuidade, obtemos:

$$y(t) \leqslant \frac{y(0)}{1 - c_m t y(0)}$$

Para qualquer $t \leqslant T$. Portanto:

$$\|v^\epsilon\|_m \leqslant \frac{\|v_0\|_m}{1 - c_m t \|v_0\|_m}$$

Como $\dfrac{\|v_0\|_m}{1 - c_m t \|v_0\|_m}$ é uma função crescente temos que:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^\epsilon\|_m \leqslant \frac{\|v_0\|_m}{1-c_mT\|v_0\|_m} = \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1-c_mT\|v_0\|_m}$$

□

Lema 9. *A familia $v^\epsilon \in H^m$ com $m \in \mathbb{Z}^+$ e $m > 3/2+2$, de soluções da equação regularizada de Navier-Stokes 3.51, forma uma sequência de Cauchy em $C\{[0,T];L^2\}$. Em particular, existe uma constante C que depende apenas de $\|v_0\|_m$ e do tempo T tal que para quaisquers ϵ e ϵ' temos:*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leqslant C max(\epsilon,\epsilon') \tag{4.9}$$

Demonstração. Sejam v^ϵ e $v^{\epsilon'}$ duas soluções para a equação 3.51, substituindo essas soluções na equação e subtraindo uma pela outra obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_t v^\epsilon - \partial_t v^{\epsilon'} &= \mu(J_\epsilon\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}\Delta v^{\epsilon'}) - PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] + PJ_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})]\\ &= \mu(J_\epsilon\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}\Delta v^{\epsilon'}) - \{PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})]\}\end{aligned}$$

Tomando o produto interno do L^2 da equação acima com $v^\epsilon - v^{\epsilon'}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle\partial_t v^\epsilon - \partial_t v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0 &= \mu\langle J_\epsilon\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}\Delta v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0\\ &\quad - \langle\{PJ_\epsilon[(J_\epsilon v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - PJ_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})]\}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0\\ &= \mu T1 + T2\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para o termo do lado esquerdo temos:

$$\langle\partial_t v^\epsilon - \partial_t v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0 = \partial_t\frac{1}{2}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2 \tag{4.11}$$

Agora para T1, somando e subtraindo o termo $J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon$:

$$\begin{aligned}T1 &= \langle J_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon + J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}^2\Delta v^{\epsilon'}, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0\\ &= \langle(J_\epsilon^2 - J_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0 + \langle J_{\epsilon'}^2\Delta(v^\epsilon - v^{\epsilon'}), v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para o termo $\langle J_{\epsilon'}^2\Delta(v^\epsilon - v^{\epsilon'}), v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0$, utilizando propriedades dos regularizadores, tome $\tilde{v}^\epsilon = J_\epsilon(v^\epsilon - v^{\epsilon'})$ e uma integral por partes nos dá:

$$\begin{aligned}
\langle J_{\epsilon'}^2\Delta(v^\epsilon - v^{\epsilon'}), v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0 &= \langle \Delta J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'}), J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon')}\rangle_0 \\
&= \langle \Delta\tilde{v}^\epsilon, \tilde{v}^\epsilon\rangle_0 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\langle \Delta\tilde{v}^{\epsilon,i}, \tilde{v}^{\epsilon,i}\rangle_0 \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\langle \partial_{x^j,x^j}\tilde{v}^{\epsilon,i}, \tilde{v}^{\epsilon,i}\rangle_0 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_{x^j}\tilde{v}^{\epsilon,i}\|_0^2 \\
&= -\|J_{\epsilon'}\nabla(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo 4.13 em 4.12, e utilizando o fato de que a norma é não negativa:

$$\begin{aligned}
T1 &= \langle (J_\epsilon^2 - J_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0 - \|J_{\epsilon'}\nabla(v^\epsilon - v^{\epsilon'})]\|_0^2 \\
&\leqslant \langle (J_\epsilon^2 - J_{\epsilon'}^2)\Delta v^\epsilon, v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle_0
\end{aligned}$$

Para analisar este termo poderíamos utilizar apenas 3.28, entretanto não obteríamos uma estimativa em termos de ϵ e ϵ'. Prosseguimos então utilizando Cauchy-Schwartz, a desigualdade triangular, a propriedade dos regularizadores 3.27 e só na última passagem utilizando 3.28:

$$\begin{aligned}
T1 &\leqslant \|J_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant \|J_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - J_\epsilon\Delta v^\epsilon + J_\epsilon\Delta v^\epsilon - \Delta v^\epsilon + \Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon + J_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant (\|J_\epsilon^2\Delta v^\epsilon - J_\epsilon\Delta v^\epsilon\|_0 + \|J_\epsilon\Delta v^\epsilon - \Delta v^\epsilon\|_0 + \|\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon\|_0 \\
&\quad + \|J_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon - J_{\epsilon'}^2\Delta v^\epsilon\|_0)\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant (C\epsilon\|J_\epsilon\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon\|\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon'\|\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon'\|J_{\epsilon'}\Delta v^\epsilon\|_1)\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant (C\epsilon\|\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon\|\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon'\|\Delta v^\epsilon\|_1 + C\epsilon'\|\Delta v^\epsilon\|_1)\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|\Delta v^\epsilon\|_1\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^\epsilon\|_3\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

Agora prosseguimos com nossa prova analisando o termo T2. Como o operador de projeção é um operador linear podemos colocá-lo em evidência. Em seguida utilizamos a propriedade 3.39 e o fato de que $\operatorname{div} v^{\epsilon} = \operatorname{div} v^{\epsilon'} = 0$ assim temos $P(v^{\epsilon}) = v^{\epsilon}$ e $P(v^{\epsilon'}) = v^{\epsilon'}$:

$$\begin{aligned}
T2 &= \langle \{J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})]\}, P(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})\rangle_0 = \\
&= \langle J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&= \langle J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&+ \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&+ \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&+ \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&+ \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle_0 \\
&= R1 + R2 + R3 + R4 + R5
\end{aligned}$$

Cada um desses termos será analisado separadamente. Começando por R1, utilizando Schwartz e a desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned}
|R1| &\leqslant \|J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})]\|_0 \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&= \|J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - [(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] + [(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] \\
&\quad - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})]\|_0 \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant (\|J_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] - [(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})]\|_0 + \|[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})] \\
&\quad - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})]\|_0) \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

Agora utilizamos 3.27 e em seguida 3.15:

$$\begin{aligned}
|R1| &\leqslant (C\epsilon \|(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_1 + C\epsilon' \|(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_1) \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant C \max\{\epsilon, \epsilon'\} \|(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_1 \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant C \max\{\epsilon, \epsilon'\} (\|J_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_{\infty} \|D\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_0 + \|DJ_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_0 \|\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_{\infty}) \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

Como $J_{\epsilon}v^{\epsilon} \in C^{\infty} \cap H^m$, o teorema de inclusão de Sobolev 3.14 nos da $\|J_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_{\infty} = \|J_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_{C_0} \leqslant \|J_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_m$ e $\|\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_{\infty} = \|\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_{C_0} \leqslant \|\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_{m-1}$.

$$|R1| \leqslant C \max\{\epsilon, \epsilon'\} (\|J_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_m \|D\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_0 + \|DJ_{\epsilon}v^{\epsilon}\|_0 \|\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})\|_{m-1}) \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0$$

Utilizamos por fim Young (teorema 9) e a definição da norma de Sobolev:

$$|R1| \leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}(\|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon\|_2 + \|v^\epsilon\|_1\|v^\epsilon\|_m)\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0$$

Assim para $m > 3/2 + 2$, temos:

$$|R1| \leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^\epsilon\|_m^2\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0$$

Agora para R2, iniciando com a utilização de 3.25, seguido de Schwartz e 3.28:

$$\begin{aligned}
|R2| &\leqslant \|(J_\epsilon v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - (J_{\epsilon'}v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_0\|J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0 \\
&\leqslant \|(J_\epsilon v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon) - (J_{\epsilon'}v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant \|[J_\epsilon v^\epsilon - J_{\epsilon'}v^\epsilon]\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

Utilizando a definição da norma de Sobolev temos que $\|\cdot\|_0 \leqslant \|\cdot\|_{m-1}$ e a propriedade 3.17:

$$\begin{aligned}
|R2| &\leqslant \|[J_\epsilon v^\epsilon - J_{\epsilon'}v^\epsilon]\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{m-1}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant \|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{m-1}\|J_\epsilon v^\epsilon - J_{\epsilon'}v^\epsilon\|_{m-1}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}$$

Utilizando Young, teorema 9, e a definição da norma de Sobolev obtemos $\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{m-1} \leqslant C\|\nabla v^\epsilon\|_{m-1} \leqslant C\|v^\epsilon\|_m$ e utilizando a desigualdade triangular para o outro termo:

$$\begin{aligned}
|R2| &\leqslant \|v^\epsilon\|_m\|J_\epsilon v^\epsilon - v^\epsilon + v^\epsilon - J_{\epsilon'}v^\epsilon\|_{m-1}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&\leqslant \|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0(\|J_\epsilon v^\epsilon - v^\epsilon\|_{m-1} + \|v^\epsilon - J_{\epsilon'}v^\epsilon\|_{m-1})
\end{aligned}$$

Assim podemos utilizar 3.27 e como $m > 3/2 + 2$:

$$\begin{aligned}|R2| &\leqslant \|v^\epsilon\|_m \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 (C\,\epsilon\|v^\epsilon\|_m + C\,\epsilon'\|v^\epsilon\|_m)\\ &\leqslant C\max\{\epsilon,\epsilon'\}\|v^\epsilon\|_m^2\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\end{aligned}$$

Agora prosseguimos com R4, pois seu tratamento é similar a R2:

$$R4 = \langle (J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_\epsilon v^\epsilon) - (J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^\epsilon), J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\rangle$$

$$\begin{aligned}|R4| &\leqslant \|J_{\epsilon'}v^{\epsilon'}[\nabla(J_\epsilon v^\epsilon) - \nabla(J_{\epsilon'}v^\epsilon)]\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\ &\leqslant \|J_{\epsilon'}v^{\epsilon'}\|_m\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon) - \nabla v^\epsilon + \nabla v^\epsilon - \nabla(J_{\epsilon'}v^\epsilon)]\|_{m-1}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\ &\leqslant C\|v^{\epsilon'}\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0(\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon) - \nabla v^\epsilon\|_{m-1} + \|\nabla v^\epsilon - \nabla(J_{\epsilon'}v^\epsilon)]\|_{m-1})\\ &\leqslant C\max\{\epsilon,\epsilon'\}\|v^{\epsilon'}\|_m\|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\ &\leqslant C\max\{\epsilon,\epsilon'\}\|v^{\epsilon'}\|_m\|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\end{aligned}$$

Para R3, iniciamos com a utilização de 3.25 e depois utilizamos a desigualdade de Hölder com três funções sendo $p = q = 2$ e $r = \infty$.

$$\begin{aligned}R3 &= \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], v^\epsilon - v^{\epsilon'}\rangle\\ &= \langle [(J_{\epsilon'}v^\epsilon)\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)] - [(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)], J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\rangle\\ &= \langle J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\nabla(J_\epsilon v^\epsilon), J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\rangle\\ &\leqslant \|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon)\|_{L^\infty}\|J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0\|J_{\epsilon'}(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0\end{aligned}$$

Como $J_\epsilon\nabla v^\epsilon \in C^\infty \cap H^{m-1}$, temos que a desigualdade de inclusão de Sobolev 3.14 nos da $\|J_\epsilon\nabla v^\epsilon\|_\infty = \|J_\epsilon\nabla v^\epsilon\|_{C_0} \leqslant \|J_\epsilon\nabla v^\epsilon\|_{m-1}$, para os outros termos utilizamos 3.28.

$$\begin{aligned}|R3| &\leqslant C\|J_\epsilon\nabla v^\epsilon\|_{m-1}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\\ &\leqslant C\|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2\\ &\leqslant C\|v^\epsilon\|_m\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2\end{aligned}$$

Agora analisaremos o termo R5, começando com a utilização de 3.25 seguido do lema 6, temos:

$$
\begin{aligned}
R5 &= \langle J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon})] - J_{\epsilon'}[(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})], v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\rangle \\
&= \langle (J_{\epsilon'}v^{\epsilon'})\nabla J_{\epsilon'}(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}), J_{\epsilon'}(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle J_{\epsilon'}v^{\epsilon'}, \nabla(|J_{\epsilon'}(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})|^2)\rangle
\end{aligned}
$$

Em seguida uma integração por partes e como $\operatorname{div}(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'}) = 0$:

$$
R5 = -\frac{1}{2}\langle \operatorname{div}(J_{\epsilon'}v^{\epsilon'}), |J_{\epsilon'}(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})|^2\rangle = 0
$$

Agora finalizamos unindo todos os termos:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \frac{1}{2}\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0^2 &= T1 + T2 \\
&= T1 + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \\
&\leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^{\epsilon}\|_3\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^{\epsilon}\|_m^2\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^{\epsilon}\|_m^2\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\,\|v^{\epsilon}\|_m\|(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})\|_0^2 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}\|v^{\epsilon'}\|_m\|v^{\epsilon}\|_m\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}
$$

Cada um dos $\|v^{\epsilon}\|_m$ e $\|v^{\epsilon'}\|_m$, é limitado por um M, onde M é igual o limitante superior da equação 4.8 para um T dado, assim temos:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \frac{1}{2}\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0^2 &= T1 + T2 \\
&= T1 + R1 + R2 + R3 + R4 + R5 \\
&\leqslant C\max\{\epsilon, \epsilon'\}M\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}M^2\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}M^2\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \\
&+ C\,M\|(v^{\epsilon} - v^{\epsilon'})\|_0^2 \\
&+ C\max\{\epsilon, \epsilon'\}M^2\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0
\end{aligned}
$$

Por outro lado temos:

$$\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0^2 = \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \partial_t \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0$$

Assim:

$$\begin{aligned}\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \partial_t \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leqslant = & \, C \max\{\epsilon, \epsilon'\} M \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ & + C \max\{\epsilon, \epsilon'\} M^2 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 + \\ & + C \max\{\epsilon, \epsilon'\} M^2 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \\ & + C\, M \|(v^\epsilon - v^{\epsilon'})\|_0^2 + \\ & + C \max\{\epsilon, \epsilon'\} M^2 \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 &\leqslant C \max\{M, M^2\}(\max\{\epsilon, \epsilon'\} + \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0) \\ &\leqslant C\mathrm{max}\{\epsilon, \epsilon'\} + C\|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = C$ e $c_2 = \max\{\epsilon, \epsilon'\}$ obtemos uma inequação do tipo:

$$\partial_t y(t) - c_1 y(t) \leqslant c_1 c_2$$

Tomando um fator integrante $u(t)$ da seguinte forma:

$$u(t) = e^{-c_1 \int dt} = e^{-c_1 t} \tag{4.14}$$

Utilizando esse fator integrante na desigualdade e integrando de 0 a t::

$$\begin{aligned}e^{-c_1 t}\partial_t y(t) - c_1 e^{-c_1 t} y(t) &\leqslant c_1 c_2 e^{-c_1 t} \\ \partial_t [e^{-c_1 t} y(t)] &\leqslant c_1 c_2 e^{-c_1 t} \\ \int_0^t \partial_z [e^{-c_1 z} y(z)]\, dz &\leqslant \int_0^t c_1 c_2 e^{-c_1 z}\, dz \\ [e^{-c_1 z} y(z)]|_0^t &\leqslant -c_2 e^z|_0^{-c_1 t} \\ e^{-c_1 t} y(t) &\leqslant y(0) + c_2 - c_2 e^{-c_1 t}\end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{c_1 t}$:

$$
\begin{gathered}
y(t) \leqslant y(0)e^{c_1 t} + c_2 e^{c_1 t} - c_2 \\
\|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \leqslant e^{Ct}(\|v_0^{\epsilon} - v_0^{\epsilon'}\|_0 + \max\{\epsilon, \epsilon'\}) - \max\{\epsilon, \epsilon'\}
\end{gathered}
$$

Como $C \geqslant 0$ a função é crescente, além disso temos $\max\{\epsilon, \epsilon'\} > 0$ portanto:

$$
\begin{aligned}
\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 &\leqslant e^{C(M)T}(\|v_0^{\epsilon} - v_0^{\epsilon'}\|_0 + \max\{\epsilon, \epsilon'\}) - \max\{\epsilon, \epsilon'\} \\
&\leqslant e^{C(M)T}(\|v_0^{\epsilon} - v_0^{\epsilon'}\|_0 + \max\{\epsilon, \epsilon'\})
\end{aligned}
$$

Como $v_0^{\epsilon} = v_0^{\epsilon'} = v_0$ temos $\|v_0^{\epsilon} - v_0^{\epsilon'}\|_0 = 0$:

$$
\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^{\epsilon} - v^{\epsilon'}\|_0 \leqslant C \max\{\epsilon, \epsilon'\}
$$

Que é exatamente a norma em $C\{[0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\}$, assim a sequência de soluções da equação de Navier-Stokes regularizada forma uma sequência de Cauchy nesse espaço. □

4.2 Existência de soluções locais no tempo para a equação de Navier-Stokes

Definição 28. *(Espaço $L^{\infty}\{[0,T], H^m\}$) Espaço das funções $f : [0,T] \to H^m$, finitas na norma:*

$$
\sup_{t \in [0,T]} \|f\|_m
$$

Definição 29. *(Espaço $Lip\{[0,T], H^m\}$) Espaço das funções $f \in L^{\infty}\{[0,T], H^m\}$, finitas na seminorma:*

$$
\sup_{t_1, t_2 \in [0,T]} \frac{\|f(t_1) - f(t_2)\|_m}{|t_1 - t_2|}
$$

Teorema 36. *(Existência de soluções locais no tempo para a equação de Navier Stokes) Dada uma condição inicial $v_0 \in V^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ e $m > 3/2 + 2$, então os seguintes resultados são válidos:*

a) Existe um tempo T tal que, para qualquer viscosidade $0 < \mu < \infty$ existe uma solução única $v^{\mu} \in C\{[0,T]; C^2(\mathbb{R}^3)\} \cap C^1\{[0,T]; C(\mathbb{R}^3)\}$ para a equação de Navier Stokes.

A solução v^{μ} é limite de uma subsequência de soluções aproximadas v^{ϵ} da equação 3.51. Este tempo T é limitado superiormente por:

$$T < \frac{1}{c_m \|v_0\|_m}$$

b)A solução limite v^{μ} satisfaz :

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^{\mu}\|_m \leqslant \frac{\|v_0\|_m}{1 - c_m T \|v_0\|_m}$$

c) As soluções aproximadas v^{ϵ} são uniformemente limitadas nos espaços $L^{\infty}\{[0,T], H^m(\mathbb{R}^3)\}$, $Lip\{[0,T]; H^{m-2}(\mathbb{R}^3)\}$ e $C_w\{[0,T]; H^m(\mathbb{R}^3)\}$ e a subsequência de soluções aproximadas converge para v^{μ} nestes espaços.

Demonstração. O lema 8 nos da que nossa família de soluções v^{ϵ} é uniformemente limitada em $C\{[0,T], H^m\}$. Agora para provar este teorema iremos utilizar também que a família de derivadas no tempo dessas soluções $(\partial_t v^{\epsilon})$ é uniformemente limitada na norma H^{m-2}. Tal fato, como veremos, é consequência direta do lema 8. Iniciamos tomando a norma H^{m-2} da equação 3.51, para cada t temos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t v^{\epsilon}(t)\|_{m-2} &= \|\mu J_{\epsilon}^2 \Delta v^{\epsilon}(t) - P J_{\epsilon}[(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t)).\nabla(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t))]\|_{m-2} \\
&\leqslant \mu \|J_{\epsilon}^2 \Delta v^{\epsilon}(t)\|_{m-2} + \| - P J_{\epsilon}[(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t)).\nabla(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t))]\|_{m-2} \\
&\leqslant \mu \|J_{\epsilon}^2 \Delta v^{\epsilon}(t)\|_{m-2} + \|P J_{\epsilon}[(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t)).\nabla(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t))]\|_{m-2} \\
&\leqslant \mu D1 + D2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para o termo $D1$, aplicamos 3.28 duas vezes, e, em seguida, utilizamos a definição da norma de Sobolev :

$$D1 \leqslant c\|\Delta v^{\epsilon}(t)\|_{m-2} \leqslant c\|v^{\epsilon}(t)\|_m \tag{4.16}$$

Já para D2, utilizamos 3.36, seguido de 3.28:

$$D2 \leqslant \|J_{\epsilon}[(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t)).\nabla(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t))]\|_{m-2} \leqslant \|(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t)).\nabla(J_{\epsilon} v^{\epsilon}(t))\|_{m-2}$$

Tomando agora $m - 2 > N/2$ temos $m > N/2 + 2$, podemos utilizar 3.17, e em seguida 3.28 e a definição da norma de Sobolev:

$$\begin{aligned} D2 &\leqslant \|J_\epsilon v^\epsilon(t)\|_{m-2}\|\nabla(J_\epsilon v^\epsilon(t))]\|_{m-2} \\ &\leqslant c\|v^\epsilon(t)\|_{m-2}\|\nabla v^\epsilon(t)\|_{m-2} \leqslant c\|v^\epsilon(t)\|_m^2 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Utilizando 4.16 e 4.17 em 4.15 obtemos:

$$\|\partial_t v^\epsilon(t)\|_{m-2} \leqslant c\mu\|v^\epsilon(t)\|_m + c\|v^\epsilon(t)\|_m^2 \tag{4.18}$$

Utilizando então o lema 8 obtemos então que a família $\partial_t v^\epsilon$, é uniformemente limitada (independentemente de ϵ) em H^{m-2}.

Para dar continuidade a prova deste teorema, iremos utilizar o lema 9. Como v^ϵ é uma sequência de Cauchy em $C\{[0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\}$ e como esse espaço é completo, segue que existe um $\gamma \in C\{[0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\}$ tal que $v^\epsilon \to \gamma$. Tomando o limite de $\epsilon' \to 0$ da equação 4.9 e $\gamma = \lim\limits_{\epsilon' \to 0} v^{\epsilon'}$ obtemos:

$$\lim_{\epsilon' \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^\epsilon - v^{\epsilon'}\|_0 \leqslant \lim_{\epsilon' \to 0} C \max(\epsilon, \epsilon') \tag{4.19}$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^\epsilon - \gamma\|_0 \leqslant C\epsilon \tag{4.20}$$

Em seguida, será utilizado o teorema 22 de forma a mostrar que a convergência em uma norma superior implica na convergência forte em normas inferiores de Sobolev. Para cada $t_0 \in [0,T]$, o teorema 22, seguido da desigualdade triangular e da equação 4.20 nos dá:

$$\begin{aligned} \|v^\epsilon(t_0) - \gamma(t_0)\|_{m'} &\leqslant C_m\|v^\epsilon(t_0) - \gamma(t_0)\|_0^{1-m'/m}\|v^\epsilon(t_0) - \gamma(t_0)\|_m^{m'/m} \\ &\leqslant C_m\epsilon^{1-m'/m}(\|v^\epsilon(t_0)\|_m + \|\gamma(t_0)\|_m)^{m'/m} \end{aligned}$$

Pela equação 4.8 temos, que para cada $\|v_0\|_m$ e T fixos, $\|v^\epsilon\|_m$ é limitada por uma constante. Agora para obter um limitante para $\|\gamma(t_0)\|_m$ a mesma equação 4.8 nos dá:

$$\|v^\epsilon(t_0)\|_m \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^\epsilon\|_m \leqslant C(\|v_0\|_m, T) \tag{4.21}$$

Assim $v^\epsilon(t_0)$ é uma sequência uniformemente limitada em H^m, pelo teorema 6, existe uma subsequência $v^{\epsilon_n}(t_0)$ fracamente convergente para um $u \in H^m$. Como $\|\cdot\|_0 \leqslant \|\cdot\|_m$, temos que $v^{\epsilon_n}(t_0)$ converge fracamente para u em $H^0 = L^2$, mas $v^{\epsilon}(t_0) \to \gamma(t_0)$ em L^2, portanto $v^{\epsilon}(t_0) \rightharpoonup \gamma(t_0)$ em L^2, logo por unicidade de limites $u = \gamma(t_0) \in H^m$. Assim $\|\gamma(t_0)\|_m$ é finito portanto.

$$\|v^{\epsilon_n}(t_0) - \gamma(t_0)\|_{m'} \leqslant C(\|v_0\|_m, T)\epsilon^{1-m'/m}$$

Tomando o supremo em $[0,T]$ obtemos convergência forte no espaço $C\{[0,T], H^{m'}(\mathbb{R}^3)\}$, quando $\epsilon \to 0$.

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|v^{\epsilon_n} - \gamma\|_{m'} \leqslant C(\|v_0\|_m, T)\epsilon^{1-m'/m} \tag{4.22}$$

Como $m > 7/2$ para qualquer m escolhido, pode-se encontrar um m' tal que $0 < 7/2 < m' < m$, então a propriedade 3.14 nos dá:

$$\|v^{\epsilon_n} - \gamma\|_{C^2} \leqslant C\|v^{\epsilon_n} - \gamma\|_{2+3/2} \leqslant \|v^{\epsilon_n} - \gamma\|_{m'} \leqslant C(\|v_0\|_m, T)\epsilon^{1-m'/m}$$

Obtemos convergência também em $C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\}$. Mostramos até então que $v^{\epsilon_n} \to \gamma$ no espaço $C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\}$. Ou seja, até então nada nos garantia que ao tomarmos uma sequência de soluções da equação regularizada de Navier-Stokes com $\epsilon \to 0$, o limite γ resolveria a equação de Navier-Stokes. A convergência em $C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\}$, nos dá justamente esse resultado, pois como:

$$v_t^{\epsilon} = \mu J_{\epsilon}^2 \Delta v^{\epsilon} - PJ_{\epsilon}[(J_{\epsilon}v^{\epsilon}).\nabla(J_{\epsilon}v^{\epsilon})]$$

Então temos que $v_t^{\epsilon} \in C\{[0,T], C(\mathbb{R}^3)\}$, assim sendo temos:

$$\mu J_{\epsilon_n}^2 \Delta v^{\epsilon_n} - PJ_{\epsilon_n}[(J_{\epsilon_n}v^{\epsilon_n}).\nabla(J_{\epsilon_n}v^{\epsilon_n}) \to \mu\Delta\gamma - P(\gamma.\nabla\gamma)$$

no espaço $C\{[0,T], C(\mathbb{R}^3)\}$. Portanto $\gamma = v^{\mu}$ e temos v^{ϵ} e $v^{\mu} \in C\{[0,T], C^2(\mathbb{R}^3)\} \cap C^1\{[0,T], C(\mathbb{R}^3)\}$. Além disso para cada $t_0 \in [0,T]$ temos $\gamma(t_0) \in H^m$, portanto $v^{\mu}(t_0) \in H^m$.

Agora resta apenas provar a letra "c"do teorema. Iniciamos pela prova de que $v^{\mu} \in L^{\infty}\{[0,T], H^m(\mathbb{R}^3)\}$. Já provamos que $\gamma(t_0) \in H^m$ para cada $t_0 \in [0,T]$, entretanto ao olharmos para essa prova e para a equação 4.21 provamos algo bem mais forte. Temos que $v^{\epsilon}(t)$ é uniformemente limitada também em relação a t, visto que o limitante independe de t. Como para qualquer $t_0 \in [0,T]$ temos $v^{\epsilon_n}(t_0) \rightharpoonup v^{\mu}(t_0)$, e $v^{\mu}(t_0) \in H^m$, a definição de convergência fraca nos dá:

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} \langle v^{\epsilon_n}(t_0), v^{\mu}(t_0) \rangle_m \to \|v^{\mu}(t_0)\|_m^2$$

Por outro lado, como $v^{\epsilon_n}(t_0)$ é subsequência de $v^{\epsilon}(t_0)$, utilizando Schwartz podemos escrever:

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} |\langle v^{\epsilon_n}(t_0), v^{\mu}(t_0) \rangle_m| \leqslant \limsup_{\epsilon \to 0} |\langle v^{\epsilon}(t_0), v^{\mu}(t_0) \rangle_m| \leqslant \|v^{\mu}(t_0)\|_m \limsup_{\epsilon \to 0} \|v^{\epsilon}(t_0)\|_m$$

Assim:

$$\lim_{\epsilon_n \to 0} |\langle v^{\epsilon_n}(t_0), v^{\mu}(t_0) \rangle_m| = \|v^{\mu}(t_0)\|_m^2 \leqslant \|v^{\mu}(t_0)\|_m \limsup_{\epsilon \to 0} \|v^{\epsilon}(t_0)\|_m$$

Eliminando $\|v^{\mu}(t_0)\|_m$ e utilizando 4.21:

$$\|v^{\mu}(t_0)\|_m \leqslant \limsup_{\epsilon \to 0} \|v^{\epsilon}(t_0)\|_m \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^{\epsilon}\|_m \leqslant C(\|v_0\|_m, T)$$

Asim $\|v^{\mu}(t)\|_m$ é uniformemente limitada em t (ou seja, o limitante independe do t_0 escolhido), portanto $v^{\mu} \in L^{\infty}\{[0,T], H^m\}$. Agora prosseguiremos com a prova de que $v^{\mu} \in Lip\{[0,T], H^{m-2}\}$. Para isso temos que as desigualdades 4.8 e 4.18 implicam :

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\partial_t v^{\epsilon}\|_{m-2} \leqslant M_1 \tag{4.23}$$

Para provarmos que $v^{\mu} \in Lip\{[0,T], H^{m-2}\}$ devemos provar que existe um M tal que para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,T]$:

$$\frac{\|v^{\mu}(t_1) - v^{\mu}(t_2)\|_{m-2}}{|t_1 - t_2|} \leqslant M$$

Como $v^{\mu} \in C\{[0,T; C^2(R)^3]\}$ pelo Teorema do Valor Médio para funções vetoriais temos que para quaisquer $t_1, t_2 \in [0,T]$ existe um $c \in [t_1, t_2]$ tal que:

$$\frac{\|v^{\mu}(t_1) - v^{\mu}(t_2)\|_{m-2}}{|t_1 - t_2|} \leqslant \|\partial_t v^{\mu}(c)\|_{m-2}$$

Agora utilizaremos um argumento de convergência fraca similar ao anterior. Como $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\partial_t v^{\epsilon}\|_{m-2} \leqslant M_1$, temos que para qualquer $t_0 \in [0,T]$, $\|\partial_t v^{\epsilon}(t_0)\|_{m-2} \leqslant M_1$.

Assim por 6 existe uma subsequência fracamente convergente para $\partial_t v^\mu(t_0)$, ou seja, $\partial_t v^{\epsilon_n}(t_0) \rightharpoonup \partial_t v^\mu(t_0)$ em H^{m-2}. Escolhendo $\partial_t v^\mu(t_0)$ para a convergência no produto interno temos $< \partial_t v^{\epsilon_n}(t_0), \partial_t v^\mu(t) >_{m-2} \to \|\partial_t v^\mu(t_0)\|^2_{m-2}$. Assim temos:

$$
\begin{aligned}
|\langle \partial_t v^{\epsilon_n}(t_0), \partial_t v^\mu(t)\rangle_{m-2}| &\leqslant \limsup_{\epsilon\to 0} |\langle \partial_t v^\epsilon(t_0), \partial_t v^\mu\rangle_{m-2}| \leqslant \|\partial_t v^\mu(t_0)\|_{m-2} \limsup_{\epsilon\to 0} \|v^\epsilon\|_{m-2} \\
\|\partial_t v^\mu(t_0)\|^2_{m-2} &\leqslant \limsup_{\epsilon\to 0} |\langle \partial_t v^\epsilon(t_0), \partial_t v^\mu\rangle_{m-2}| \leqslant \|\partial_t v^\mu(t_0)\|_{m-2} \limsup_{\epsilon\to 0} \|v^\epsilon\|_{m-2} \\
\|\partial_t v^\mu(t_0)\|^2_{m-2} &\leqslant \|\partial_t v^\mu(t_0)\|_{m-2} \limsup_{\epsilon\to 0} \|\partial_t v^\epsilon\|_{m-2}
\end{aligned}
$$

Eliminando o termo $\|\partial_t v^\mu(t_0)\|_{m-2}$ e utilizando 4.23:

$$
\|\partial_t v^\mu(t_0)\|_{m-2} \leqslant \limsup_{\epsilon\to 0} \|\partial_t v^\epsilon\|_{m-2} < M_1
$$

Portanto a derivada é limitada para qualquer t_0. Tomando em particular $t = c$, obtemos o resultado:

$$
\frac{\|v(t_1) - v(t_2)\|_{m-2}}{|t_1 - t_2|} \leqslant \|\partial_t v(c)\|_{m-2} \leqslant M_1
$$

Portanto $v^\mu \in Lip\{[0,T], H^{m-2}\}$. Agora para finalizar este teorema devemos provar que $v \in C_w\{[0,T], H^m\}$.

Como $v^{\epsilon_n} \in C\{[0,T], H^m\}$, tomemos $\gamma(x) \in H^m$ arbitrário temos que $f^\gamma_{\epsilon_n}(t) = \langle v^{\epsilon_n}(x,t), \gamma(x)\rangle$ é contínua no tempo. Então se provarmos que $f^\gamma_{\epsilon_n} = \langle v^{\epsilon_n}(t), \gamma\rangle \to g^\gamma = \langle v^\mu(t), \gamma\rangle_m$ uniformemente em $[0,T]$, seguirá que $g^\gamma(t)$ é contínua em $[0,T]$, o que então implicará que $v^\mu(x,t) \in C_w\{[0,T], H^m\}$. O que significa por sua vez que, fixando um $\gamma \in H^m$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um p tal que $n > p$ implique em $|\langle v^n(t) - v^\mu(t), \gamma\rangle_m| < \epsilon$ para qualquer $t \in [0,T]$, ou seja, a escolha de p independe de t.

Como S é denso em H^m, para $\gamma \in H^m$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe $\tilde\gamma \in S$ tal que $\|\gamma - \tilde\gamma\|_m < \epsilon$. Somando e subtraindo um $\tilde\gamma \in S$ apropriado e, em seguida, utilizando Cauchy-Schwartz e a desigualdade triangular:

$$
\begin{aligned}
|\langle \gamma, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_m| &\leqslant |\langle \gamma - \tilde\gamma, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_m| + |\langle \tilde\gamma, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_m| \\
&\leqslant \|\gamma - \tilde\gamma\|_m (\|v^{\epsilon_n}(t)\|_m + \|v^\mu(t)\|_m) + |\langle \tilde\gamma, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_m| \\
&\leqslant K1 + K2
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Para o termo $K1$, como v^μ e $v^\epsilon \in H^m$ temos que suas normas em H^m são finitas, e como $\tilde{\gamma} \in S$ é denso em H^m podemos tornar $\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_m$ tão pequeno quanto desejarmos:

$$K1 = \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_m (C_1 + C_2) < C\epsilon \tag{4.25}$$

Agora para o termo K2, utilizaremos a definição de produto interno em H^m via transformadas de Fourier. Tomando um $m' < m$ temos:

$$\begin{aligned} K2 &= \int \hat{\tilde{\gamma}} [v^{\epsilon_n}(t) - v(t)]\hat{}\,(1 + |\xi|^2)^m \, d\xi \\ &= \int \hat{\tilde{\gamma}} (1 + |\xi|^2)^{m-m'} [v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)]\hat{}\,(1 + |\xi|^2)^{m'} \, d\xi \end{aligned}$$

Tomaremos agora $\hat{f} = \hat{\tilde{\gamma}}(1 + |\xi|)^{m-m'}$. Como $\tilde{\gamma} \in S$ e a transformada de Fourier de uma função em S leva a uma outra função em S (teorema 16), temos que $\hat{\tilde{\gamma}} \in S$.

Por definição, uma função no espaço S decai mais rápido do que qualquer potência de x, ou ξ como no nosso caso. Ou seja para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}$ temos que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \hat{\tilde{\gamma}}(1 + |\xi|)^\alpha < \infty$. Como os naturais são ilimitados apesar de perdermos $m - m'$ em decaimento, a função ainda decai para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}$, assim segue que $\hat{f} \in S$.

Novamente utilizando o teorema 16, segue que existe uma $f = (\hat{f})\check{} = [\hat{\tilde{\gamma}}(1 + |\xi|)^{m-m'}]\check{} \in S$. Em seguida utilizamos a desigualdade de Schwartz:

$$K2 = |\langle f, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_{m'}| \leqslant \|f\|_{m'} \|v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\|_{m'}$$

Como $f \in S \subset H^{m'}$ temos $\|f\|_{m'} = C$, por fim utilizando 4.22, obtemos:

$$K2 \leqslant C\epsilon \tag{4.26}$$

Substituindo 4.25 e 4.26 em 4.24 obtemos:

$$|\langle \gamma, v^{\epsilon_n}(t) - v^\mu(t)\rangle_m| \leqslant C\epsilon$$

Como a estimativa independe de t, temos que $< \gamma, v^{\epsilon_n}(t) >_m \to < \gamma, v^\mu(t) >_m$ uniformemente e portanto $< \gamma, v^\mu(t) >_m$ é contínua em $[0, T]$ para qualquer $\gamma \in H^m$, de onde segue que $v^\mu \in C_w\{[0, T], H^m\}$. □

Teorema 37. *Seja v^μ a solução para a equação de Navier-Stokes descrita no teorema 36 então, $v^\mu \in C\{[0, T], V^m\} \cap C^1\{[0, T], V^{m-2}\}$.*

Demonstração. Como a equação de Navier-Stokes envolve derivadas de primeira ordem em relação ao tempo e de segunda ordem em relação a variável espacial, se provarmos que a solução da equação de Navier-Stokes v^μ for tal que $v \in \{C[0,T], H^m\}$, seguirá que $v^\mu \in C\{[0,T], V^m\} \cap C^1\{[0,T], V^{m-2}\}$. Para realizarmos essa prova, provaremos inicialmente que a solução tem continuidade forte pela direita para $t = 0$. Em seguida realizaremos a prova de continuidade em outros pontos.

Em outras palavras, para provar a continuidade forte pela direita em $t = 0$, iremos provar que $\lim\limits_{t\to 0^+} \|v^\mu(x,t)\|_m$ existe. A estratégia será provar limitantes para o $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|v^\mu(x,t)\|_m$ e o $\liminf\limits_{t\to 0^+} \|v^\mu(x,t)\|_m$, de onde seguira que $\lim\limits_{t\to 0^+} \|v^\mu(x,t)\|_m$ existe.

Começando pelo $\limsup\limits_{t\to 0^+} \|v^\mu(x,t)\|_m$, tome qualquer $t_1 \in [0,T]$. Como $v^\mu \in C_w\{[0,T], H^m\}$, temos que para qualquer $\gamma \in H^m$, $\langle v^{\epsilon_n}(x,t_1), \gamma\rangle_m \to \langle v^\mu(x,t_1), \gamma\rangle_m$, quando $\epsilon \to 0$. Como $v^\mu(x,t_1) \in H^m$, podemos tomar então $\gamma = v^\mu$. De onde obteremos que $\langle v^{\epsilon_n}(x,t_1), v^\mu(x,t_1)\rangle_m \to \langle v^\mu, v^\mu\rangle_m = \|v^\mu\|_m^2$ quando $\epsilon \to 0$. Por definição de limite superior e inferior e como o limite existe por $v^\mu(t)$ pertencer a $C_w\{[0,T], H^m\}$ temos então:

$$
\begin{aligned}
\liminf_{\epsilon_n\to 0} \langle v^{\epsilon_n}(x,t_1), v^\mu(x,t_1)\rangle_m &\leqslant \lim_{\epsilon_n\to 0} \langle v^{\epsilon_n}(x,t_1), v^\mu(x,t_1)\rangle_m \\
&= \|v^\mu(t_1)\|_m^2 \\
&\leqslant \limsup_{\epsilon\to 0} \langle v^{\epsilon}(t_1), v^\mu(t_1)\rangle_m
\end{aligned}
$$

Assim obtemos $\|v^\mu(x,t_1)\|_m^2 \leqslant \limsup\limits_{\epsilon\to 0} \langle v^\epsilon, v^\mu(x,t_1)\rangle_m$, aplicando Cauchy-Schwartz, como $\|v^\mu\|_m$ independe de ϵ, podemos passá-lo para fora do limite assim:

$$
\begin{aligned}
\|v^\mu(x,t_1)\|_m^2 &\leqslant \limsup_{\epsilon\to 0} \langle v^\epsilon(x,t_1), v^\mu(x,t_1)\rangle_m \\
&\leqslant \|v^\mu(x,t_1)\|_m \limsup_{\epsilon\to 0} \|v^\epsilon(x,t_1)\|_m
\end{aligned}
$$

Cortando o termo $\|v^\mu(x,t_1)\|_m$, obtemos que para cada $t_1 \in [0,T]$ fixo temos $\|v^\mu(x,t_1)\|_m \leqslant \limsup\limits_{\epsilon\to 0} \|v^\epsilon(x,t_1)\|_m$. Em seguida, utilizando 4.8 a definição de supremo nos dá que para qualquer $t_1 \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
\|v^\epsilon(x,t_1)\|_m &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|v^\epsilon(x,t)\|_m \leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m} \\
\|v^\epsilon(x,t_1)\|_m &\leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m}
\end{aligned}
$$

Aplicando lim sup e como o lado direito independe de ϵ obtemos:

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \|v^{\epsilon}(x,t_1)\|_m \leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m}$$

Mas acabamos de provar que $\|v^{\mu}(x,t_1)\|_m \leqslant \limsup_{\epsilon \to 0} \|v^{\epsilon}(x,t_1)\|_m$. Portanto obtemos que para cada $t_1 \in [0,T]$:

$$\|v^{\mu}(x,t_1)\|_m \leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m}$$

Tomando o supremo e como o lado direito independe de t obtemos:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v^{\mu}(x,t)\|_m \leqslant \|v_0\|_m + \frac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m}$$

Tomando o $\limsup_{T \to 0^+}$, o termo $\dfrac{\|v_0\|_m^2 c_m T}{1 - c_m T \|v_0\|_m}$ se anula, e como $t \leqslant T$ obtemos:

$$\limsup_{t \to 0^+} \|v^{\mu}\|_m \leqslant \|v_0\|_m$$

Agora iremos provar que $\|v_0\|_m \leqslant \liminf_{t \to 0^+} \|v^{\mu}(x,t)\|_m$. Como $v \in C_w\{[0,T], H^m\}$ isso implica que para qualquer $u \in H^m$, $\langle v^{\mu}(x,t), u \rangle_m$ é contínua. Como $v_0 \in H^m$ podemos tomar $u = v_0 \in H^m$. Por Cauchy-Schwartz temos:

$$\langle v^{\mu}(x,t), v_0(x) \rangle_m \leqslant \|v^{\mu}(x,t)\|_m \|v_0(x)\|_m$$

Tomando o $\liminf_{t \to 0^+}$ de ambos os lados e como $\|v_0\|_m$ independe de t obtemos:

$$\liminf_{t \to 0^+} \langle v^{\mu}(x,t), v_0(x) \rangle_m \leqslant \liminf_{t \to 0^+} \|v^{\mu}(x,t)\|_m \|v_0(x)\|_m = \|v_0(x)\|_m \liminf_{t \to 0^+} \|v^{\mu}(x,t)\|_m$$

Como $\langle v^{\mu}(x,t), v_0(x) \rangle_m$ é contínua, temos que existe o limite de $t \to 0^+$ e portanto ele vai ser igual ao limite superior e inferior(o mesmo não vale para a norma $\|v(x,t)\|_m$).

$$\lim_{t\to 0^+}\langle v^\mu(x,t), v_0(x)\rangle_m = \|v_0\|_m^2 \leqslant \|v_0(x)\|_m \liminf_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m$$

Por fim cortando o termo $\|v_0\|_m$ obtemos $\|v_0\|_m \leqslant \liminf_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m$.

Por definição de lim sup e lim inf,(se eles existirem) temos $\liminf_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m \leqslant \|v_0\|_m \leqslant \limsup_{t\to 0^+}\|v(x,t)\|_m$. Mas acabamos de provar que $\limsup_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m \leqslant \|v_0\|_m \leqslant \liminf_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m$, logo temos $\liminf_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m = \limsup_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m = \|v_0\|_m$ segue que $\lim_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m = \|v_0\|_m$.

Como o lim sup e o lim inf existem, segue que o limite existe assim $\lim_{t\to 0^+}\|v^\mu(x,t)\|_m = \|v_0\|_m$. Portanto fica provado que $\|v(t)\|_m$ possui continuidade forte pela direita em $t = 0$.

Agora resta provar que $\|v(t)\|_m$ é continua para todo $t > 0$. A equação 4.1 nos garante que:

$$\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant c_m\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_\infty \|v^\epsilon\|_m^2$$

Utilizando 4.8 temos $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^\epsilon\|_m \leqslant M$, assim para qualquer $t \in [0,T]$ temos:

$$\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant c_m\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_\infty M^2$$

Como $m > 3/2 + 2$, utilizando 3.14 temos que $\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{C_0^1} \leqslant \|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_m$, obtemos então que a norma infinito vai ser igual a norma C_0^1, $\|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_\infty = \|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_{C_0^1} \leqslant \|\nabla J_\epsilon v^\epsilon\|_m$, assim obtemos:

$$\partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant CM^3$$

Integrando em $[0,T]$, obtemos:

$$\int_0^T \partial_t \frac{1}{2}\|v^\epsilon\|_m^2 + \mu\int_0^T \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant CM^3T$$
$$\|v^\epsilon(T)\|_m^2 - \|v_0\|_m^2 + \mu\int_0^T \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 \leqslant CM^3T$$

Assim fica provado que $\mu\int_0^T \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2$ é limitada independentemente de ϵ. Como $\mu\int_0^T \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 < \infty$ e $\mu > 0$, podemos dividir a desigualdade acima por μ. Assim temos que $\int_0^T \|J_\epsilon \nabla v^\epsilon\|_m^2 < \infty$, portanto para quase todo $t \in [0,t]$, temos $\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon(t)\|_m < \infty$.

Nosso problema agora é obter que para μ-q.s. $t \in [0,T]$,$\|\nabla v^\mu\|_m < \infty$, como queremos provar exatamente que $\nabla v^\mu \in H^m$ não podemos utilizar a propriedade 3.26 dos regularizadores. Desta forma vamos utilizar um argumento de subsequência convergente.

Considere um t arbitrário tal que $\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon(t)\|_m < \infty$. Para qualquer $\epsilon > 0$ tem-se $\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon(\cdot,t)\|_m < \infty$. Considere a sequência $\|J_\epsilon \nabla v^\epsilon(\cdot,t)\|_m$ com $\epsilon \to 0$, temos que essa sequência é limitada. Por 6 existe uma subsequência ϵ_n fracamente convergente para um $u \in H^m$, ou seja $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \rightharpoonup u$ em H^m. Como $\epsilon \to 0$ temos que $\epsilon_n \to 0$.

Como $v^\mu \in H^m$ temos que $\nabla v^\mu \in H^{m-1}$, assim por 24 letra "d", temos que qualquer sequência converge para $\nabla v^\mu \in H^{m-1}$. Tomando como sequência a subsequência que acabamos de gerar obtemos que $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \to \nabla v^\mu$ em H^{m-1}.

Além disto, pela existência da convergência forte, a convergência fraca também existe ou seja, $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \rightharpoonup \nabla v^\mu$ em H^{m-1}. Utilizando a definição da norma de Sobolev temos que de modo geral $\|\cdot\|_{m-1} \leqslant \|\cdot\|_m$. Assim utilizando que $\epsilon_n \to 0$ temos que $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \rightharpoonup u$ em H^{m-1}.

Como $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \rightharpoonup \nabla v^\mu$ em H^{m-1} e $J_{\epsilon_n}\nabla v^{\epsilon_n} \rightharpoonup u$ em H^{m-1}, pela unicidade de limites temos que $u = \nabla v^\mu$. Além disto como $u \in H^m$ obtemos que $\nabla v^\mu \in H^m$, portanto $\|\nabla v^\mu\|_m < \infty$. Utilizando que $\|\nabla v^\mu\|_m < \infty$ e a definição da norma de Sobolev obtemos:

$$\|v^\mu\|_{m+1} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v^\mu\|_0^2 \right)^{1/2} \leqslant \|v^\mu\|_0 + \|\nabla v^\mu\|_m$$

Assim:

$$\int_0^T \|v^\mu\|_{m+1}^2 \leqslant \int_0^T (\|v^\mu\|_0 + \|\nabla v^\mu\|_m)^2$$

Como já foi provado que $v^\mu \in H^m$ temos que $\|v^\mu\|_0 < \infty$, e como $\|\nabla v^\mu\|_m < \infty$ obtemos que a solução limite v^μ está contida no espaço $L^2\{[0,T], H^{m+1}\}$.

Por argumento análogo ao utilizado para provar que $\|\nabla v^\mu\|_m < \infty$. Temos que para quase todo $T_0 \in [0,T]$, temos $\|v^\mu(x,T_0)\|_{m+1} < \infty$ o que implica $\|v^\mu(x,T_0)\|_{m+1} \in H^{m+1}$.

Tomando $v(x,T_0)$ como dado inicial que denotaremos por $v_0^{T_0}$ e utilizando o teorema 36 letra "b"construímos uma solução $v \in H^{\tilde{m}}$, para qualquer $\tilde{m} < m+1$ que está em $C\{[T_0,T'], H^{\tilde{m}}\}$. Onde T' é o tempo de existência da solução dado por $T' < \dfrac{1}{c\|v_0^{T_0}\|_{\tilde{m}}}$.

Como $\tilde{m} < m+1$ podemos tomar $\tilde{m} = m$. Cada uma dessas soluções com dado inicial $v_0^{T_0}$ em seu intervalo de existência $[T_0,T']$, vai ser idêntica a solução original da equação de Navier-Stokes pelo corolário 1.

Para quase todo $T_0 \in (0, T]$ podemos repetir a construção acima, segue que a solução original da equação de Navier-Stokes $v \in C\{(0, T], H^m\}$. Como já provamos a continuidade pela direita em $t = 0$, obtemos enfim $v \in C\{[0, T], H^m\}$. $\square$

5 Conclusões

Assumindo uma condição inicial $v_0 \in H^m$ com $m > 3/2 + 2$, é possível verificar que a solução para a equação de Navier-Stokes incompressível, em um intervalo de tempo $[0, T]$, existe e é única. Tal solução pertence a $C\{[0, T], V^m\} \cap C^1\{[0, T], V^{m-2}\}$(Teorema 37). Sendo que o limite de tempo T para a existência dessa solução depende da magnitude da norma em H^m da nossa condição inicial v_0.

Com esta solução pode-se recuperar a pressão utilizando o teorema 30 e desta forma resolver completamente a equação de Navier-Stokes. Caso tentássemos utilizar o método descrito neste texto para obter soluções globais para a equação de Navier Stokes, nosso principal problema seria o lema 8. Pois para $T \geqslant (c_m \|v_0\|_m)^{-1}$ não podemos afirmar que as soluções regularizadas são uniformemente limitadas. Na equação regularizada de Navier-Stokes, conseguimos expandir nossa solução em $[0, T]$ para todo o tempo utilizando o teorema 33.

Também concluiu-se nesse trabalho que é possível demonstrar a letra "c"do teorema 36 utilizando-se argumentos de convergência fraca ao invés de conceitos de distribuições como feito no texto original.

Referências

1 CLAY, I. Clay Mathematics Institute, 2019. Disponível em: <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier\T1\textendashstokes-equation>. Citado na página 10.

2 MAJDA, P. A. J.; BERTOZZI, A. L. *27: Vorticity and Incompressible Flow (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521639484. Citado na página 10.

3 FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1999. Citado 11 vezes nas páginas 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 30, 34 e 42.

4 KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: Jhon Wiley and Sons, 1978. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 16.

5 BREZIS, H. *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

6 EVANS, L. C. *Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19)*. [S.l.]: Amer Mathematical Society, 1998. ISBN 0821807722. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 22, 30 e 52.

7 REED, B. S. M. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. [S.l.]: Academic Press, INC, 1980. Citado na página 20.

8 NIRENBERG, L. *On elliptic partial differential equations*. [S.l.]: Edizioni Cremonese, 1960. Citado na página 23.

9 USER71352. *An inequality involving multi-index*. 2013. Mathematics Stack Exchange. Disponível em: <https://math.stackexchange.com/revisions/455121/8>. Citado na página 24.

10 ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces (Pure and Applied Mathematics (Academic Press))*. [S.l.]: Academic Press, 1975. ISBN 0120441500,9780120441501. Citado na página 33.

11 LEMARIE-RIEUSSET, P. G. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2016. ISBN 1466566213. Citado na página 42.

12 CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1993. Citado na página 51.

13 LANDAU, E. M. L. L. D. *Fluid mechanics*. [S.l.]: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2009. Citado na página 51.

14 TAO, T. *Local And Global Analysis of Nonlinear Dispersive And Wave Equations (CBMS Regional Conference Series in Mathematics)*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2006. ISBN 0821841432. Citado na página 58.