Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

# Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para uma Classe de Problemas de Dirichlet e uma Classe de Problemas de Neumann

**Ilma Aparecida Marques** Silva
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

# Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para uma Classe de Problemas de Dirichlet e uma Classe de Problemas de Neumann

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ilma Aparecida Marques** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de novembro de 2003.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr.: Djairo Guedes de Figueiredo

(Orientador)

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
2. Prof. Dr. Jean-Pierre Gossez
3. Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
4. Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
5. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutora em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Silva, Ilma Aparecida Marques

Si38e Existência e comportamento assintótico de soluções para uma classe de problemas de Dirichlet e uma classe de problemas de Neumann / Ilma Aparecida Marques Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Dirichlet. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Tese de Doutorado defendida em 20 de novembro de 2003 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

D G de Figueiredo

**Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO**

**Prof. (a). Dr (a). JEAN-PIERRE GOSSEZ**

**Prof. (a). Dr (a). JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

**Prof. (a). Dr (a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI**

**Prof. (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES**

## *A Deus*

*"Senhor, se hoje percorro este caminho é porque vós o trilhares para mim;*
*Me formastes desde o ventre de minha mãe e,*
*me designastes ser um instrumento em tuas mãos;*
*Me destes sabedoria para aprender e discernir;*
*coragem para lutar e, perseverança para vencer...*
*Obrigada Senhor, por ser o que sou e, por hoje chegar onde estou!"*

*Aos meus Pais*

João de Souza Marques e Gercina Barbosa Marques

*"De vocês recebi o dom mais precioso do universo: A vida.*
*Já por isso seria infinitamente grata, mas vocês não se contentaram em presentear-me*
*apenas com ela: revestiram minha existência de amor, carinho e dedicação, cultivaram na criação todos os valores.*
*Abriram as portas do meu futuro, iluminando o meu caminho com a luz mais brilhante que puderam encontrar: o estudo.*
*Trabalharam dobrado, sacrificando seus sonhos em favor dos meus e não foram apenas pais,*
*mas amigos e companheiros, mesmo nas horas em que meus ideais pareciam distantes e inatingíveis.*
*Divido, pois, com vocês, os méritos desta conquista, porque ela lhes pertence, ela é tão de vocês quanto minha.*
*Obrigada, meus pais, por tudo que fizeram e fazem por mim sem que ao menos eu saiba.*
*Obrigada pelo sonho que realizo.*
*E, sobretudo, obrigada pela lição de amor que me ensinaram durante toda a vida.*

*Tomara Deus que eu possa transmití-la no exercício de minha profissão".*

*Ao meu Esposo*

Ercílio Carvalho da Silva

*"Quantas vezes tu foste paciência, tu foste acalento!*

*Obrigada por tudo e que você continue sendo sempre você".*

*Aos Professores*

*"Aqueles que me transmitiram seus conhecimentos e experiências profissionais e de vida com dedicação e carinho,*
*aqueles que me guiaram para além das teorias, das filosofias e das técnicas,*
*expresso o meu maior agradecimento e meu profundo respeito, que sempre serão poucos,*
*diante do muito que me foi oferecido".*

# Agradecimentos

Agradeço:

em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, pela excelente orientação, paciência, atenção, e valiosos ensinamentos proporcionados durante a realização deste trabalho.

ao Prof. Dr. Olimpio Hiroshi, pelo constante apoio e incentivo para seguir sempre em frente na conquista de cada etapa e também pelas valiosas discussões, sugestões, e ainda por sua amizade, paciência e atenção.

aos professores da banca examinadora: Prof. Dr. Jean-Pierre Gossez, Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki, Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes.

ao professor João Carlos, meu orientador de mestrado.

aos meus queridos irmãos Selmo, Sérgio, Claúdio e Ronaldo.

aos professores do IMECC, em especial professor Orlando.

aos funcionários da Unicamp, em especial Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela contribuição e disponibilidade.

aos colegas do IMECC, em especial Odair, Everaldo, Emersom e Edson.

ao Mercio pelas dicas de digitação.

aos amigos Amauri, Cristiane, Marcela, Daniela, Marina, Adelia, Sofia, Rita e Kelly pela amizade.

à Capes, pelo apoio financeiro.

# Resumo


Neste trabalho, estudamos a existência e o comportamento assintótico de soluções para os problemas de Dirichlet e Neumann

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= f(u), \quad \text{em} \ \ \Omega \\ (1-k)\frac{\partial u}{\partial \nu} + ku &= 0, \qquad \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), \quad \text{em} \ \ (0,R) \\ u'(0) = (1-k)u'(R) + ku(R) = 0, \end{cases}$$

onde, $\triangle_p$ é o operador p-Laplaciano, $Lu := (r^\alpha |u'|^\beta u')'$ representa uma classe de operadores que na forma radial estão incluídos os operadores Laplaciano, p-Laplaciano e k-Hessiano, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $\nu$ é o vetor normal exterior à fronteira de $\Omega$, $\epsilon > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno, $0 < R < \infty$, $p \geq 2$, $\alpha, \beta, \gamma$ são números reais dados e $k = 0, 1$.

No estudo da existência de soluções para os problemas de Dirichlet vamos usar o método de sub e supersoluções. Já no estudo da existência de soluções para os problemas de Neumann vamos usar argumentos variacionais tais como variantes do Teorema do Passo da Montanha.

# Abstract

In this thesis we study the existence and the asymptotic behavior of solutions for the Dirichlet and Neumann problems

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= f(u), \quad \text{in } \Omega \\ (1-k)\frac{\partial u}{\partial \nu} + ku &= 0, \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), \quad \text{in } (0, R) \\ u'(0) = (1-k)u'(R) + ku(R) = 0, \end{cases}$$

where, $\triangle_p$ denotes the p-Laplace operator, $Lu := (r^\alpha |u'|^\beta u')'$ denotes a class of operators that in the radial form which includes the operators Laplacian, p-Laplacian and k-Hessian. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) is a bounded domain with the smooth boundary. $\partial u / \partial \nu$ denotes the outward normal derivative of $u$ on $\partial\Omega$, $\epsilon > 0$ is small parameters, $0 < R < \infty$, $p \geq 2$, $\alpha, \beta, \gamma$ are given real numbers and $k = 0, 1$.

In the study of existence of solutions for the Dirichlet problems we use sub-sup solutions method. On the other hand, in the study of existence of solutions for the Neumann problems we use variational arguments such as variants of the Mountain Pass Theorem.

# Sumário

# Notações

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

$B(0, r)$: denota a bola de centro zero e raio $r$ em $\mathbb{R}^N$,

$B_R$: denota a bola de centro zero e raio $R$ em $\mathbb{R}^N$,

$B$: denota bola aberta em $\mathbb{R}^N$,

$\Omega$: domínio de $\mathbb{R}^N$,

$\overline{\Omega}$: fecho do conjunto $\Omega$,

$|\Omega|$: medida de Lebesgue do conjunto $\Omega$,

$\partial\Omega$: fronteira do conjunto $\Omega$,

$q$: expoente conjugado de $p \geq 1$, ou seja, $1/q + 1/p = 1$,

$L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$: espaços de Lebesgue,

$W^{1,p}(\Omega)$, espaços de Sobolev,

$|\nabla u| := \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$,

$-\triangle_p u := -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$,

$||u||^p := \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |u|^p dx$,

$\rightharpoonup$, convergência fraca,

$\rightarrow$, convergência forte,

$X_R$: espaço das funções absolutamente contínuas $u : (0, R) \to \mathbb{R}$ tais que

$$u(R) = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^\beta dr < \infty,$$

$$\|u\|_{X_R} := \left(\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr\right)^{1/(\beta+2)},$$

$\widehat{X}_R$: espaço das funções absolutamente contínuas $u : (0, R) \to \mathbb{R}$ tais que

$$\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr + \int_0^R r^\alpha |u(r)|^{\beta+2} dr < \infty,$$

$$\|u\|_{\widehat{X}_R} := \left(\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr + \int_0^R r^\alpha |u(r)|^{\beta+2} dr\right)^{1/\beta+2},$$

C, $C_1$, $\overline{C}$, $\widetilde{C}$, $\hat{C}$, denotam constantes positivas;

q.t.p.: quase toda parte.

# Introdução

Neste trabalho, vamos estudar a existência de soluções não constantes e o comportamento assintótico das mesmas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= f(u), \quad \text{em } \Omega \\ (1-k)\frac{\partial u}{\partial \nu} + ku &= 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $k = 0, 1$. Note que para $k = 1$, o problema é do tipo Dirichlet e $k = 0$ é do tipo Neumann. Aqui, $-\triangle_p u$ denota o operador p-Lapaciano, ou seja,

$$-\triangle_p u := -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

$\epsilon$ é um parâmetro positivo suficientemente pequeno, $p \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $\nu$ é o vetor normal unitário exterior à fronteira de $\Omega$. Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre $f$:

$(f_1)$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ tal que $f(a) = f(b) = 0$;

$(f_2)$ Existem exatamente $2l + 1$ zeros de $f$,

$$a = a_1 < 0 = a_2 < a_3 < ... < a_{2l+1} = b$$

com $l = 1, 2, 3, ...$ tais que

$$f(a_i) = 0, \ \forall\ i \quad \text{e} \quad f'(a_i) < 0, \ \text{se } i \text{ ímpar;}$$

$(f_3)$

$$\lim_{t \to a_{2l}} \frac{f(t - a_{2l})}{|t - a_{2l}|^{p-2}(t - a_{2l})} > 0.$$

Motivados pelos problemas acima vamos também estudar a seguinte classe de problemas quaselineares

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma g(u), \quad \text{em} \quad (0,R) \\ \\ u'(0) = (1-k)u'(R) + ku(R) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde $0 < R < \infty$, $k = 0, 1$ e $\alpha, \gamma, \beta$ são números reais dados e a função $g$ satisfaz as seguintes condições:

$(g_1)$ $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ com $g(a) = g(b) = 0$;

$(g_2)$ Existem exatamente $2l+1$ zeros de $g$,

$$a = a_1 < 0 = a_2 < a_3 < \ldots < a_{2l+1} = b$$

com $l = 1, 2, 3, \ldots$ tais que

$$g(a_i) = 0, \ \forall \ i$$

e

$$g'(a_i) < 0, \ i \ \text{ímpar};$$

$(g_3)$

$$\lim_{t \to a_{2l}} \frac{g(t - a_{2l})}{|t - a_{2l}|^\beta (t - a_{2l})} > 0.$$

Este trabalho divide-se em 5 capítulos e estão distribuidos da seguinte forma:

No Capítulo 1, enunciamos alguns resultados preliminares que serão úteis nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, vamos utilizar o método de Iteração Monotônica, mais precisamente o método de sub e supersolução, para demonstrar a existência de uma solução positiva e uma solução negativa para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= f(u), \quad \text{em} \ \ \Omega \\ \\ u &= 0, \qquad \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $p \geq 2$ e $N \geq 1$. Para estudar o comportamento assintótico, usaremos o mesmo argumento utilizado por De Figueiredo [9].

O principal resultado do Capítulo 2 é o seguinte:

**Teorema 0.0.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(f_1)$, $(f_2)$ e $(f_3)$, com $l = 1$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o problema de Dirichlet (3) tem uma solução positiva $0 < u_\epsilon(x) < a_3$ em $\overline{\Omega}$ tal que $u_\epsilon \longrightarrow a_3$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$ e uma solução negativa $a_1 < v_\epsilon(x) < 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que $v_\epsilon \longrightarrow a_1$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$.*

A prova do resultado principal do capítulo 3 utiliza fortemente o resultado acima. Este foi o verdadeiro motivo que nos levou ao estudo do problema.

No Capítulo 3, vamos mostrar a existência de soluções não constantes e seu comportamento assintótico para o problema de Neumann

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\epsilon^2\triangle_p u & = & f(u), & \text{em } \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

Por uma solução de (4) entendemos uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz (4) no sentido fraco, isto é,

$$\int_\Omega \epsilon^2 |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx = 0, \ \forall\ \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Neste Capítulo o principal resultado é o seguinte

**Teorema 0.0.2** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(f_1)$, $(f_2)$ e $(f_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (4) tem pelo menos $l$ soluções não constantes satisfazendo*

$$a_1 < u_1(x) < a_3 < u_2(x) < a_5 < \ldots < a_{2l-1} < u_l(x) < a_{2l+1}$$

*onde $l = 1, 2, 3, \ldots$.*

Para provar este teorema iremos inicialmente provar a existência de solução não constante para o problema de Neumann

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\epsilon^2\triangle_p u & = & \widehat{f}(u), & \text{em } \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5}$$

onde $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função truncamento de $f$ definida por

$$\widehat{f}(t) := \begin{cases} f(t), & a_1 \leq t \leq a_3 \\ \\ f_1(t), & t \leq a_1 \\ \\ f_2(t), & t \geq a_3, \end{cases}$$

onde $f_1$ e $f_2$ serão definidas adequadamente. Veja capítulo 3 Lema 3.2.2.

Considere o funcional de Euler-Lagrange $J_\epsilon : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (5) definido por

$$J_\epsilon(u) := \frac{\epsilon^2}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega \widehat{F}(u) dx,$$

onde $\widehat{F}(u) := \displaystyle\int_0^u \widehat{f}(t)dt.$

Visando aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha, usaremos argumentos de Garcia, Peral e Manfredi [12] para mostrar que $a_1$ e $a_3$ são mínimos locais estritos do funcional $J_\epsilon$. Usaremos também argumentos de Cuesta, De Figueiredo e Gossez [7] para mostrar que se $a$ é um mínimo local estrito para o funcional $J_\epsilon$, isto é, $J_\epsilon(a) < J_\epsilon(u)$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $0 < \|u - a\| < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$ então, para todo $0 < \alpha < \delta_0$

$$inf\{J_\epsilon(u) : u \in W^{1,p} \ e \ \|u - a\| = \alpha\} > J_\epsilon(a).$$

Pelo Princípio do Máximo mostraremos que a solução não constante de (5) está entre $a_1$ e $a_3$, logo é solução do problema (4).

No Capítulo 4, vamos estabelecer a existência de soluções não triviais e seu comportamento assintótico quando $\epsilon \to 0$ para o problema de Dirichlet na forma radial

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma g(u), & \text{em } (0, R) \\ \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

onde $0 < R < \infty$ e $\alpha, \gamma, \beta$ são números reais dados e a função $g$ satisfaz as condições $(g_1)$, $(g_2)$ e $(g_3)$ para $l = 1$.

Como motivação para o estudo do problema (6), mencionamos o fato que o mesmo representa, sob certas constantes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ apropriadas e domínios da forma $B_R$, onde $B_R$ é a bola de centro 0 e raio $R$ em $\mathbb{R}^N$, a forma radial do problema (3), ou seja, (6) representa a forma radial do problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u = g(u), & \text{em } B_R \\ \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

estabelecido que

$$\alpha = \gamma = N - 1 \text{ e } \beta = p - 2,$$

onde $2 \leq p < N$, e representa ainda a forma radial do problema

$$\begin{cases} \epsilon^2 (-1)^k S_k(\nabla^2 u) = g(u), & \text{em } B_R \\ \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

onde $S_k(\nabla^2 u)$ $(1 \leq k < N/2)$ é o operador k-Hessiano que é definido por

$$S_k(\nabla^2 u) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k},$$

com $\lambda_{i_j}$ designando os auto-valores da Matriz Hessiana de $u$, isto é, $(\nabla^2 u) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})$, onde

$$\alpha = N - k, \quad \gamma = N - 1 \text{ e } \beta = k - 1.$$

O Principal resultado deste Capítulo é o seguinte:

**Teorema 0.0.3** *Seja $g$ satisfazendo as condições $(g_1)$, $(g_2)$ e $(g_3)$, com $l = 1$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o problema de Dirichlet (6) tem uma solução positiva $0 < u_\epsilon(r) < a_3$ em $[0, R]$ tal que $u_\epsilon \to a_3$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $(0, R)$ e uma solução negativa $a_1 < v_\epsilon(r) < 0$ em $[0, R]$ tal que $v_\epsilon \to a_1$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $(0, R)$.*

No Capítulo 5, vamos estabelecer a existência de soluções não constantes e seu comportamento assintótico para o problema de Neumann na forma radial

$$\begin{cases} -\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma g(u), & \text{em } (0, R) \\ \\ u'(0) = u'(R) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

onde $0 < R < \infty$ e $\alpha, \beta, \gamma$ são números reais dados e a função $g$ satisfaz as condições $(g_1)$, $(g_2)$ e $(g_3)$.

Novamente, a motivação para o estudo do problema (7) foi o fato de que o mesmo representa, sob certas constantes $\alpha$, $\beta$, e $\gamma$, a forma radial do problema (4) em $\Omega = B(0, R)$, isto é,

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= g(u), \quad \text{em } B_R \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

com

$$\alpha = \gamma = N - 1 \text{ e } \beta = p - 2,$$

onde $(2 \leq p < N)$.

O problema (7) representa também a forma radial do problema

$$\begin{cases} \epsilon^2(-1)^k S_k(\nabla^2 u) &= g(u), \quad \text{em } B_R \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

onde $S_k(\nabla^2 u)$ é o operador k-Hessiano $(1 \leq k < N/2)$ e

$$\alpha = N - k, \ \gamma = N - 1, \ \beta = k - 1.$$

O principal resultado deste Capítulo é o seguinte:

**Teorema 0.0.4** *Suponha que $g$ satisfaz as condições $(g_1)$, $(g_2)$ e $(g_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (7) tem pelo menos $l$ soluções não constantes satisfazendo*

$$a_1 < u_1(r) < a_3 < u_2(r) < a_5 < \ldots < a_{2l-1} < u_l(r) < a_{2l+1},$$

*onde $l = 1, 2, 3, \ldots$.*

Problemas similares ao problema de Neumann (1), no caso do Laplaciano, veja por exemplo [18] e [21].

Observamos que nosso trabalho estende os resultados de [18] e [21]. De fato, provamos a existência de soluções não constantes para o problema de Neumann (4) para $p \geq 2$ enquanto que em [18] e [21] são considerados apenas o caso $p = 2$ e ainda admitem certas condições de área que nós aqui omitimos.

É importante ressaltar que existem diferenças entre os operadores p-Laplaciano $(p > 2)$ e o Laplaciano $(p = 2)$. Dentre elas no caso do Laplaciano as soluções são clássicas, mas no caso do p-Laplaciano elas são somente $C^{1,\alpha}$. Além disso, o p-Laplaciano não é linear. Temos também que o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ não é Hilbert se $p > 2$, o que torna inviável a aplicação de determinados resultados tais como lema de Morse.

Por exemplo em [21], por considerar o caso $p = 2$ obtém-se uma solução a mais usando argumentos da teoria do grau.

Apenas para tornar o texto mais completo citaremos as referencias [1], [4] e [22] para exemplos de problemas de Neumann no caso p-Laplaciano para outros tipos de não linearidade.

Acrescentamos que operadores da forma $(r^\alpha|u'|^\beta u')'$, com termos não singulares foram estudados por [6] e [10]. Além disso, ressaltamos que estes operadores envolvem problemas com singularidades.

# Capítulo 1

# Resultados Preliminares

Neste Capítulo, vamos apresentar alguns resultados básicos que usaremos nos capítulos seguintes.

Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\triangle_p u(x) &= f(x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) &= 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $\triangle_p$ é o operador p-Laplaciano de $u$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory (isto é, $f(x, .)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$ e $f(., s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$) e $f(., s)$ é limitada se $s$ pertence a um conjunto limitado.

**Definição 1.0.5** *A função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ é dita subsolução para o problema* (1.1) *se*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \phi dx &\leq \int_\Omega f(x, \underline{u}) \phi dx, \quad \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geq 0 \\ \\ \underline{u} &\leq 0, \qquad\qquad \textit{sobre}\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

*A função $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ é dita supersolução para o problema* (1.1) *se*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \phi dx &\geq \int_\Omega f(x, \overline{u}) \phi dx, \quad \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \phi \geq 0 \\ \\ \overline{u} &\geq 0, \qquad\qquad \textit{sobre}\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

**Lema 1.0.6** *Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua e crescente, tal que $g(0) = 0$ e funções $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que, para toda $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geq 0$,*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\phi dx + \int_\Omega g(u_2)\phi dx \leq \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\phi dx + \int_\Omega g(u_1)\phi dx \\ \\ u_2 \leq u_1 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

*Então $u_2 \leq u_1$ quase sempre em $\Omega$.*

**Prova:** Veja Lema 2.2 de [5].

□

**Lema 1.0.7** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua e crescente, tal que $g(0) = 0$. Para toda função $h \in L^q(\Omega)$, onde $q$ é o expoente conjugado de $p$, isto é, $1/q + 1/p = 1$, o problema*

$$\begin{cases} -\triangle_p u(x) + g(u(x)) &= h(x), \qquad x \in \Omega \\ \\ u(x) &= 0, \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

*admite uma única solução fraca $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, o operador associado $T : L^q \to W_0^{1,p}(\Omega)$, $h \mapsto u$ é contínuo e não decrescente.*

**Prova:** Veja Lema 2.3 de [5].

□

**Teorema 1.0.8** *Seja $\Omega$ um domínio limitado com fronteira $C^{1,\beta}$ para algum $\beta \in (0,1)$, seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\triangle_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_1$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e $K_1 > 0$ onde $\alpha$ e $K_1$ são constantes dependendo somente de $N$, $p$, e uma limitação em $\|u\|_\infty$ e $\|\triangle_p u\|_\infty$.*

**Prova:** Veja Teorema 1 de [23] ou Teorema 2 de [20].

□

**Teorema 1.0.9** *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\triangle_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ quase todo ponto em $\Omega$, $\triangle_p u \leq \beta(u)$ quase todo ponto em $\Omega$ com $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente, $\beta(0) = 0$ e tal que*
*i) $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$;*

*ou*

*ii)* $\beta(s) > 0$, $\forall\ s > 0$ *e* $\int_0^1 (\beta(s)s)^{-1/p} ds = \infty$.

*Então se* $u$ *não é identicamente nula em* $\Omega$, $u$ *é positiva em todo* $\Omega$. *Além disso, se* $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ *para* $x_0 \in \partial\Omega$ *de modo que satisfaça a condição da esfera interior e* $u(x_0) = 0$ *então*

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0,$$

*onde* $v$ *é a normal interior em* $x_0$.

**Prova:** Veja Teorema 5 de [24].

□

**Definição 1.0.10** *Seja* $X$ *um espaço de Banach. Dizemos que* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz a condição Palais-Smale no nível c,* $(PS)_c$, *se toda seqüência* $(x_n)$ *em* $X$ *tal que* $\Phi(x_n) \to c$ *e* $\Phi'(x_n) \to 0$ *possui uma subseqüência convergente em* $X$.

**Definição 1.0.11** *Seja* $X$ *um espaço de Banach,* $U \subset X$ *um subconjunto aberto não vazio e* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Seja* $u_0 \in U$ *tal que* $\Phi'(u_0) = 0$ *e* $d = \Phi(u_0)$, *dizemos que* $u_0$ *é do tipo passo da montanha, se para toda vizinhança* $V$ *de* $u_0$, $V \subset U$, *o espaço topológico* $V \cap \Phi^{-1}(-\infty, d)$ *é não vazio e não conexo por caminhos.*

Denotamos por $Cr(\Phi, d)$ o conjunto dos pontos $u \in U$ tais que $\Phi'(u) = 0$ e $\Phi(u) = d$.

**Teorema 1.0.12** *Seja* $X$ *um espaço de Banach real e* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *um funcional que satisfaz a condição de Palais-Smale. Sejam* $e_0$, $e_1$ *dois pontos distintos de* $X$. *Defina*

$$\Gamma := \{h \in C([0,1], X) |\ h(i) = e_i,\ i = 0, 1\},$$

$$d := \inf_{h \in \Gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} \Phi(h(t)),$$

$$c := max\{\Phi(e_0), \Phi(e_1)\}.$$

*Então se* $d > c$, *o conjunto* $Cr(\Phi, d)$ *é não vazio. Além disso, existe pelo menos um ponto crítico* $u_0$ *em* $Cr(\Phi, d)$ *o qual é um mínimo local ou do tipo passo da montanha. Se todos os pontos críticos em* $Cr(\Phi, d)$ *são isolados em* $X$ *o conjunto* $Cr(\Phi, d)$ *contém um ponto crítico do tipo passo da montanha.*

**Prova:** Veja [14].

□

Considere o funcional, para $p > 1$,

$$J_p(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$,

$$F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds$$

e $f$ é uma função Caratheodory definida em $\Omega \times \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{r-1})$$

para algum $r < p^*$, onde

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, \text{ se } p < N \\ \\ \infty, \text{ se } p \geq N. \end{cases}$$

**Teorema 1.0.13** *Se $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ é um mínimo local de $J_p$ em $C^1(\Omega)$ então $u_0$ é um mínimo local de $J_p$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

**Prova:** Veja Teorema 1.2 de [12].

□

**Teorema 1.0.14** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\nabla |u| = 1_{[u>0]} \nabla u - 1_{[u<0]} \nabla u.$$

*Em particular $u^+ := max(u,0)$ e $u^- := max(-u,0)$ são elementos de $W^{1,p}(\Omega)$.*

**Prova:** Veja Teorema 8.22 de [15].

□

Considere o operador $A$ definido em $W^{1,p}(\Omega)$ por

$$A(u) = -\text{div}a(x,u,Du) \tag{1.2}$$

onde $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma função Carathéodory satisfazendo as hipóteses clássicas de Leray-Lions

$$|a(x,s,\zeta)| \leq c(x) + k_1|s|^{p-1} + k_2|\zeta|^{p-1} \tag{1.3}$$

$$[a(x,s,\zeta) - a(x,s,\zeta^*)][\zeta - \zeta^*] > 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{a(x,s,\zeta)\zeta}{|\zeta| + |\zeta|^{p-1}} \longrightarrow +\infty \quad \text{se } |\zeta| \to +\infty \tag{1.5}$$

$$\text{q.t.p. } x \in \Omega,\ \forall\ s \in \mathbb{R},\ \forall\ \zeta, \zeta^* \in \mathbb{R}^N, \zeta \neq \zeta^*$$

onde $c(x) \in L^{p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, $c \geq 0$, e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$.

Considere a equação ellíptica não linear

$$-\text{div} a(x, u_n, Du_n) = f_n + g_n \quad \text{em} \quad \mathfrak{D}'(\Omega) \tag{1.6}$$

e assuma que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } W^{1,p}(\Omega), \text{ fortemente em } L^p_{\text{loc}}(\Omega) \text{ e q.t.p. em } \Omega \tag{1.7}$$

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{fortemente em } W^{-1,p'}(\Omega). \tag{1.8}$$

De (1.3) e (1.6) $-$ (1.8), $g_n$ pertence (e é limitada) em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Assuma, além disso, que $g_n$ é limitada no espaço de medidas de Radon $\mathfrak{M}(\Omega)$, isto é, que

$$|\langle g_n, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{para qualquer } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ com } \text{supp}(\varphi) \subset K \tag{1.9}$$

onde $C_K$ é uma constante que depende do conjunto compacto $K$.

**Teorema 1.0.15** *Assuma que* (1.3) $-$ (1.9) *são verdadeiras. Então*

$$Du_n \longrightarrow Du \quad \textit{fortemente em} \quad (L^q(\Omega))^N \textit{ para qualquer } q < p. \tag{1.10}$$

**Prova:** Veja Teorema 2.1 de [3].

□

# Capítulo 2

# Existência de Soluções para uma Classe de Problemas de Dirichlet

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de soluções e estudar o comportamento assintótico destas soluções quando $\epsilon$ tende para zero para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u = f(u), & \text{em } \Omega \\ \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Delta_p$ é o operador p-Laplaciano, $p \geq 2$, $\epsilon$ é um parâmetro positivo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave. Assumimos que a função $f$ satisfaz as seguintes condições:

$(A_1)$ $f : [a_1, a_3] \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1$, onde $a_1$ e $a_3$ são zeros de $f$;

$(A_2)$ Existem exatamente três zeros de $f$,

$$a_1 < 0 = a_2 < a_3$$

tais que

$$f'(a_1) < 0, f'(a_3) < 0;$$

$(A_3)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} > 0.$$

O principal resultado deste Capítulo é o seguinte:

**Teorema 2.1.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(A_1)$, $(A_2)$ e $(A_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o problema de Dirichlet (2.1) tem uma solução positiva $0 < u_\epsilon(x) < a_3$ em $\overline{\Omega}$ tal que $u_\epsilon \longrightarrow a_3$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$ e uma solução negativa $a_1 < v_\epsilon(x) < 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que $v_\epsilon \longrightarrow a_1$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$.*

## 2.2 Existência de Soluções

Nesta seção, mostraremos a existência de solução para o problema (2.1), usando argumentos de minimização. Vamos proceder como no Teorema 2.4 de [5].

**Proposição 2.2.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(A_1)$, $(A_2)$ e $(A_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o problema de Dirichlet (2.1) tem uma solução positiva $0 < u_\epsilon(x) < a_3$ em $\overline{\Omega}$ e uma solução negativa $a_1 < v_\epsilon(x) < 0$ em $\overline{\Omega}$.*

**Demonstração:** Iniciamos provando a existência de solução positiva para o problema (2.1), para isto usamos um argumento de truncamento. Seja $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } 0 \leq u \leq a_3 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, consideremos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta_p u = & f_1(u), \quad \text{em } \ \Omega \\ \\ u = & 0, \qquad \text{sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Usando $(A_1)$, temos que existe $M > 0$ tal que

$$f_1(t) + Mt$$

é monótona crescente. O problema (2.2) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta_p u + Mu = & f_1(u) + Mu, \quad \text{em } \ \Omega \\ \\ u = & 0, \qquad \text{sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Assim, vamos mostrar a existência de uma solução positiva para o problema (2.3) usando o método de sub e supersolução. Mostraremos isto, em três etapas.

**Etapa 1:** A função $\overline{u}(x) \equiv a_3$, para $x \in \overline{\Omega}$ é uma supersolução do problema (2.3). De fato,

$$-\epsilon^2 \Delta_p a_3 + M a_3 = f_1(a_3) + M a_3.$$

**Etapa 2:** Construção de uma subsolução para o problema (2.3).

Seja

$$\gamma = \lim_{t \to 0} \frac{f_1(t)}{|t|^{p-2} t}$$

e $\lambda_1$ é o primeiro auto-valor do operador p-Laplaciano sujeito à condição de fronteira de Dirichlet. Segue-se de $(A_3)$ que dado $\delta \in (0, \gamma)$, existe $t_0 > 0$ tal que para todo $| \ t \ | \leq t_0$ temos que

$$\left| \frac{f_1(t)}{|t|^{p-2} t} - \gamma \right| \leq \delta.$$

Então

$$\gamma - \delta \leq \frac{f_1(t)}{| \ t \ |^{p-2} \ t}, \tag{2.4}$$

para todo $|t| < t_0$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma auto-função do p-Laplaciano associado ao primeiro auto-valor $\lambda_1$. Tome $\beta > 0$ tal que

$$| \ \beta \varphi_1(x) \ | \leq t_0$$

e

$$\beta \left( \max_{\Omega} \varphi_1 \right) < a_3.$$

Daí, por (2.4)

$$\gamma - \delta \leq \frac{f_1(\beta \varphi_1)}{| \ \beta \varphi_1 \ |^{p-2} \ \beta \varphi_1}.$$

Escolhendo $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0^2 \lambda_1 < \gamma - \delta$ tem-se

$$\epsilon_0^2 \lambda_1 \leq \frac{f_1(\beta \varphi_1)}{| \ \beta \varphi_1 \ |^{p-2} \ \beta \varphi_1}$$

$$\epsilon_0^2 \lambda_1 \beta^{p-1} \mid \varphi_1 \mid^{p-2} \varphi_1 \leq f_1(\beta\varphi_1)$$

$$-\epsilon_0^2 \Delta_p(\beta\varphi_1) \leq f_1(\beta\varphi_1)$$

$$-\epsilon_0^2 \Delta_p(\beta\varphi_1) + M(\beta\varphi_1) \leq f_1(\beta\varphi_1) + M\beta\varphi_1,$$

ou seja, $\beta\varphi_1$ é subsolução para o problema (2.3). Então provamos que existem $\epsilon_0 > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\beta\varphi_1$ é subsolução para o problema (2.3) para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

**Etapa 3:** Vamos mostrar que o problema (2.3) possui uma solução minimal $u_*$ (respectivamente maximal $u^*$), tal que $\beta\varphi_1 = \underline{u} \leq u_* \leq \overline{u} = a_3$. Vamos proceder como em [5]. Considere o conjunto

$$[\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.t.p. } \Omega\}$$

com a topologia de convergência quase sempre, e defina o operador

$$S : [\underline{u}, \overline{u}] \longrightarrow L^q$$

por

$$Sv = f_1(v) + Mv \in L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall \ \ v \in [\underline{u}, \overline{u}],$$

onde $q$ é o expoente conjugado de $p$. Assim, $S$ é não decrescente e limitado. Além disso, dados $v_n, v \in [\underline{u}, \overline{u}]$ com $v_n \longrightarrow v$ quase sempre em $\Omega$ temos

$$\| Sv_n - Sv \|_{L^q}^q = \int_\Omega \mid f_1(v_n) + Mv_n - f_1(v) - Mv \mid^q dx.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\| Sv_n - Sv \|_{L^q} \longrightarrow 0,$$

ou seja, $S$ é contínuo. Agora, considere o operador contínuo não decrescente

$$F : [\underline{u}, \overline{u}] \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$$

definido por

$$F := ToS,$$

(onde $T$ é o operador contínuo e não decrescente definido no Lema 1.0.7, isto é, para uma função $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, $F(v)$ é a única solução fraca do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Mu = & f_1(v) + Mv, \quad \text{em } \Omega \\ \\ u = & 0, \qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Escrevendo

$$u_1 = F(\underline{u}) \quad \text{e} \quad u^1 = F(\overline{u})$$

obtemos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi > 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega | \nabla u_1 |^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi dx \;&+\; \int_\Omega M u_1 \varphi dx \\ &= \int_\Omega (f_1(\underline{u}) + M\underline{u})\varphi dx \\ &\geq \int_\Omega | \nabla \underline{u} |^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx + \int_\Omega M\underline{u}\varphi dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega | \nabla u^1 |^{p-2} \nabla u^1 \nabla \varphi dx \;&+\; \int_\Omega M u^1 \varphi dx \\ &= \int_\Omega (f_1(\overline{u}) + M\overline{u})\varphi dx \\ &\leq \int_\Omega | \nabla \overline{u} |^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi dx + \int_\Omega M\overline{u}\varphi dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.0.6 e usando o fato que $F$ é não decrescente obtemos,

$$\underline{u} \leq F(\underline{u}) \leq F(u) \leq F(\overline{u}) \leq \overline{u}, \text{ q.t.p. } \Omega, \ \forall\, u \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Repetindo o mesmo argumento podemos provar que existem duas seqüências $(u^n)$ e $(u_n)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} u^0 &= \overline{u} \quad , \quad u^{n+1} = F(u^n) \\ u_0 &= \underline{u} \quad , \quad u_{n+1} = F(u_n) \end{aligned}$$

e para toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ do problema (2.3) obtemos

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq u \leq u^n \leq ... \leq u^1 \leq u^0 = \overline{u},$$

quase sempre em $\Omega$. Como $(u_n)$ é uma seqüência não decrescente e limitada superiormente e $(u^n)$ é uma seqüência não crescente e limitada inferiormente então

$$u_n \longrightarrow u_*$$

$$u^n \longrightarrow u^*$$

quase sempre em $\Omega$, com $u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}]$ e $u_* \leq u^*$ quase sempre em $\Omega$. Sendo

$$u_{n+1} = F(u_n) \to F(u_*) \ \text{ e } \ u^{n+1} = F(u^n) \to F(u^*) \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega),$$

pela continuidade da $F$, temos

$$u_*, u^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ com } u_* = F(u_*) \ \text{ e } \ u^* = F(u^*),$$

o que completa a prova, pois $F(u_*)$ e $F(u^*)$ são soluções fracas de (2.5). Assim, $u_*$ é solução minimal fraca (respectivamente $u^*$ maximal fraca) do problema (2.3) tal que

$$u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}], \ \forall \ 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Em particular, toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ do problema (2.3) satisfaz

$$u_* \leq u \leq u^*,$$

quase sempre em $\Omega$. Como as soluções $u_*$ e $u^*$ estão entre 0 e $a_3$ então $u_*$ e $u^*$ são soluções do problema (2.1). Portanto o problema (2.1) possui uma solução $u_\epsilon := u_*$, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que $u_\epsilon \in [\beta\varphi_1, a_3]$.

Para provar a existência da solução negativa $v_\epsilon(x)$ a qual está entre $a_1$ e 0 basta considerar a função truncamento $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_2(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } a_1 \leq u \leq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A demonstração segue de forma análoga ao caso positivo.

$\square$

## 2.3 Comportamento Assintótico de uma Classe de Soluções

Nesta seção, vamos estabelecer o comportamento assintótico das soluções do problema (2.1) quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

**Proposição 2.3.1** *Seja $0 < u_\epsilon(x) < a_3$ uma solução positiva do problema* (2.1) *e seja $a_1 < v_\epsilon(x) < 0$ uma solução negativa do problema* (2.1). *Então*
**i)** *$u_\epsilon \longrightarrow a_3$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$;*
**ii)** *$v_\epsilon \longrightarrow a_1$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega$.*

**Demonstração: i)** Vamos proceder como em [9].

Primeiro observe que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, pelo Teorema 1.0.8. Defina $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_1(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } 0 \leq u \leq a_3 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo $u_\epsilon \geq 0$, não identicamente nula e

$$\Delta_p u_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon^2} f_1(u_\epsilon) \leq 0,$$

pelo Teorema 1.0.9 temos $u_\epsilon > 0$ em $\Omega$ e além disso $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, isto é,

$$\begin{cases} u_\epsilon & > & 0, & \text{em} & \Omega \\ \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu} & < & 0, & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo $\varphi_1 > 0$ uma auto-função associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$ do operador p-Laplaciano em $\Omega$ sujeito à condição de fronteira de Dirichlet então

$$\begin{cases} \varphi_1 & > & 0, & \text{em} & \Omega \\ \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} & < & 0, & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

pelo Teorema 1.0.9. Consequentemente, existe $\beta > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos

$$u_\epsilon(x) \geq \beta \varphi_1$$

e, para $\eta > 0$ dado existe $C_\eta$ tal que

$$u_\epsilon(x) \geq C_\eta > 0, \tag{2.6}$$

para todo $x \in \Omega_\eta := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \eta\}$. Tome $\varphi_1$ tal que $\| \varphi_1 \| = 1$. Como $u_\epsilon$ é solução de (2.2) segue que

$$\epsilon^2 \int_\Omega | \nabla u_\epsilon |^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi dx = \int_\Omega f_1(u_\epsilon)\varphi dx, \tag{2.7}$$

para toda $\varphi \geq 0,\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Em particular, para $\varphi = \varphi_1$ temos

$$\epsilon^2 \int_\Omega | \nabla u_\epsilon |^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 dx = \int_\Omega f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dx. \tag{2.8}$$

**Afirmação**: A expressão no lado esquerdo de (2.8) tende a zero quando $\epsilon \to 0$.

De fato, usando a desigualdade de Hölder bem como (2.7) com $\varphi = u_\epsilon(x)$ e observando que $0 < u_\epsilon \leq a_3$ e $f_1(u_\epsilon) \leq \widetilde{C}$ temos

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \int_\Omega | \nabla u_\epsilon |^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 dx &\leq \left| \epsilon^2 \int_\Omega | \nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 dx \right| \\
&\leq \epsilon^2 \left( \int_\Omega | \nabla u_\epsilon |^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_\Omega | \nabla \varphi_1 |^p \, dx \right)^{1/p} \\
&\leq C\epsilon^2 \left( \tfrac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega f_1(u_\epsilon) u_\epsilon dx \right)^{(p-1)/p} \\
&\leq \widehat{C}\epsilon^{2/p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi_1 dx \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

Por (2.8)

$$\int_\Omega f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dx \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{2.9}$$

Defina

$$d_\eta := inf\{\varphi_1(x) : x \in \Omega_\eta\} > 0.$$

Daí,

$$d_\eta \int_{\Omega_\eta} f_1(u_\epsilon)dx \leq \int_{\Omega_\eta} f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dx < \int_{\Omega} f_1(u_\epsilon)\varphi_1 \longrightarrow 0, \ \epsilon \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

Agora, suponha por contradição que existe $C_1 > 0$ e uma seqüência $\epsilon_j \longrightarrow 0$ tal que as medidas dos conjuntos

$$\Omega_{\eta,j} := \{x \in \Omega_\eta : u_{\epsilon_j}(x) < a_3 - \eta\} \tag{2.11}$$

são limitadas inferiormente por $C_1 > 0$. De (2.10) segue que

$$I_j := \int_{\Omega_{\eta,j}} f_1(u_{\epsilon_j})dx \longrightarrow 0, \text{ quando } \epsilon_j \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

Observe que em $\Omega_{\eta,j}$, por (2.6) e (2.11), temos

$$C_\eta \leq u_{\epsilon_j} \leq a_3 - \eta. \tag{2.13}$$

Como $f_1$ é limitada inferiormente por um número $d > 0$ no intervalo $[C_\eta, a_3 - \eta]$, por (2.11) e (2.13) segue que

$$I_j = \int_{\Omega_{\eta,j}} f_1(u_{\epsilon_j})dx \geq d \mid \Omega_{\eta,j} \mid \geq dC_1,$$

o que contradiz (2.12). Portanto, $\mid \Omega_{\eta,j} \mid$ não é limitada inferiormente, ou seja, $u_\epsilon(x) \longrightarrow a_3$, quando $\epsilon \longrightarrow 0$ em todo subconjunto compacto de $\Omega$.

**ii)** Segue de maneira análoga ao caso positivo provado no item i).

□

**Demonstração do Teorema 2.1.1:**

Segue imediatamente das Proposições 2.2.1 e 2.3.1, onde a primeira mostra a existência das soluções e a segunda mostra a convergência das mesmas.

□

# Capítulo 3

# Existência de Soluções para uma Classe de Problemas de Neumann

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de soluções não constantes e seu comportamento assintótico para o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u = f(u), & x \in \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\triangle_p$ é o operador p-Laplaciano definido no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $\epsilon$ é um parâmetro positivo suficientemente pequeno, $p \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira suave, $\nu$ é o vetor normal unitário exterior à fronteira de $\Omega$. Assumimos que a função $f$ satisfaz as seguintes condições:

$(b_1)$ $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ e $f(a) = f(b) = 0$;

$(b_2)$ Existem exatamente $2l+1$ zeros de $f$,

$$a = a_1 < 0 = a_2 < a_3 < ... < a_{2l+1} = b$$

com $l = 1, 2, 3, ...$ tais que

$$f'(a_i) < 0, \text{ se } i \text{ é ímpar;}$$

$(b_3)$
$$\lim_{t\to a_{2l}} \frac{f(t-a_{2l})}{|t-a_{2l}|^{p-2}(t-a_{2l})} > 0.$$

O principal resultado deste Capítulo é o seguinte:

**Teorema 3.1.1** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(b_1)$, $(b_2)$ e $(b_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (3.1) tem pelo menos $l$ soluções não constantes satisfazendo*

$$a_1 < u_1(x) < a_3 < u_2(x) < a_5 < \ldots < a_{2l-1} < u_l(x) < a_{2l+1},$$

*onde $l = 1, 2, 3, \ldots$.*

**Observação 3.1.2** *O Teorema 3.1.1 continua verdadeiro se considerarmos os $a_i'$s negativos para todo $i \geq 3$, ou seja, $a = a_{2l+1} < \ldots < a_3 < a_2 = 0 < a_1 = b$. A hipótese $a_2 = 0$ não é essencial, apenas facilita a apresentação.*

## 3.2 Caso Particular

Nesta seção, vamos provar o caso particular do Teorema 3.1.1, ou seja, $f$ satisfaz as seguintes condições:

$(B_1)$ $f : [a_1, a_3] \to \mathbb{R}$ é $C^1$, onde $a_1$ e $a_3$ são zeros de $f$;

$(B_2)$ Existem exatamente três zeros de $f$,

$$a_1 < 0 = a_2 < a_3,$$

tais que

$$f'(a_1) < 0,\ f'(a_3) < 0;$$

$(B_3)$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} > 0.$$

**Teorema 3.2.1** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (3.1) possui uma solução $u_\epsilon$ não constante satisfazendo*

$$a_1 < u_\epsilon(x) < a_3.$$

Para provar o Teorema 3.2.1, vamos utilizar alguns resultados que provaremos a seguir.

**Lema 3.2.2** *Dada uma função $f$ satisfazendo as condições $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$, existem funções de classe $C^1$ $f_1 : (-\infty, a_1] \to \mathbb{R}^+$, $f_2 : [a_3, +\infty) \to \mathbb{R}^-$ e números reais $\eta_1$ e $\beta_1$ satisfazendo as seguintes condições:*

**(i)** $f_1(a_1) = f(a_1)$, $f_1'(a_1) = f'(a_1)$ *e* $f_1(t) > 0$ *para todo* $t \in (\eta_1, a_1)$;

**(ii)** $f_2(a_3) = f(a_3)$, $f_2'(a_3) = f'(a_3)$ *e* $f_2(t) < 0$ *para todo* $t \in (a_3, \beta_1)$;

**(iii)** $\eta_1$ *e* $\beta_1$ *são tais que*

$$\eta_1 < a_1 < a_3 < \beta_1,$$

$$\int_{\eta_1}^{a_1} f_1(t)dt = \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|, \qquad \left|\int_{a_3}^{\beta_1} f_2(t)dt\right| = \int_0^{a_3} f(t)dt$$

*e para todo* $t \in [0, 1]$ *temos*

$$\eta_1 < t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \beta_1$$

*e*

$$\eta_1 < t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \beta_1.$$

**Demonstração:** Inicialmente mostramos a existência de $\eta_1$. Tomemos

$$\alpha(t) := t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1.$$

Assim,

$$0 = \frac{d}{dt}(\alpha(t)) = (1-2t)a_1 + a_3 - a_1 = -2ta_1 + a_3$$

se, e somente se, $t = \frac{a_3}{2a_1}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\tfrac{a_3}{2a_1}\right) &= \left(1 - \tfrac{a_3}{2a_1}\right)\tfrac{a_3}{2a_1}a_1 + (a_3 - a_1)\tfrac{a_3}{2a_1} + a_1 \\
&= \tfrac{a_3}{2} - \tfrac{a_3^2}{4a_1} + \tfrac{a_3^2}{2a_1} - \tfrac{a_3}{2} + a_1 \\
&= \tfrac{a_3^2}{4a_1} + a_1.
\end{aligned}$$

Sendo $a_1 < 0$ e $\frac{d^2}{dt}\alpha(t) = -2a_1$ segue que

$$\alpha\left(\frac{a_3}{2a_1}\right) = \frac{a_3^2}{4a_1} + a_1$$

é valor mínimo de $\alpha(t)$. Finalmente definamos

$$\eta_1 := \frac{a_3^2}{4a_1} + 2a_1.$$

Para mostrar a existência de $\beta_1$ tomemos

$$\beta(t) := t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1.$$

Notamos que

$$0 = \frac{d}{dt}(\beta(t)) = (1-2t)a_3 + a_3 - a_1$$

se, e somente se, $t = 1 - \frac{a_1}{2a_3}$. Logo

$$\begin{aligned}
\beta\left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right) &= \left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right)\tfrac{a_1}{2a_3}a_3 + (a_3 - a_1)\left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right) + a_1 \\
&= \tfrac{a_1}{2} - \tfrac{a_1^2}{4a_3} + a_3 - \tfrac{a_1}{2} - a_1 + \tfrac{a_1^2}{2a_3} + a_1 \\
&= \tfrac{a_1^2}{4a_3} + a_3.
\end{aligned}$$

Sendo $\frac{d^2}{dt}\beta(t) = -2a_3$ e $a_3 > 0$ temos

$$\beta\left(1 - \frac{a_1}{2a_3}\right) = \frac{a_1^2}{4a_3} + a_3$$

é valor máximo de $\beta$. Agora tomemos

$$\beta_1 := \frac{a_1^2}{4a_3} + 2a_3.$$

Pelas escolhas de $\eta_1$ e $\beta_1$ temos

$$\eta_1 < a_1 < a_3 < \beta_1$$

e para todo $t \in [0, 1]$,

$$\eta_1 < t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \beta_1$$

$$\eta_1 < t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \beta_1.$$

Agora, vamos mostrar a existência de $f_1$.

Tomemos $g(t) = f'(a_1)(t - a_1)$ e $\xi_1$, $\xi_2$ funções de classe $C^1$ tais que $\xi_1 \equiv 1$ numa vizinhança de $a_1$, $\xi_2 \equiv 1$ numa vizinhança de $\eta_1$, $\xi_1(t) + \xi_2(t) = 1$ para todo $t \in [\eta_1, a_1]$ e

$$\int_{\eta_1}^{a_1} g(t)\xi_1(t)dt < \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|.$$

Agora escolhamos $r > 0$ tal que

$$\int_{\eta_1}^{a_1} [r\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t)]dt = \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|.$$

Definamos $f_1 : (-\infty, a_1] \to \mathbb{R}^+$ por

$$f_1(t) := \begin{cases} r\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t), & \eta_1 \leq t \leq a_1 \\ \\ rf'(a_1)t - ra_1 f'(a_1), & t \leq \eta_1. \end{cases}$$

Notamos que para $t \leq \eta_1$ o gráfico de $f_1$ é a reta tangente à $f_1$ no ponto $(\eta_1, f_1(\eta_1))$.

Portanto, $f_1 \in C^1$, $f_1(a_1) = f(a_1)$, $f_1'(a_1) = f'(a_1)$, $f_1(t) > 0$ para todo $t \in (\eta_1, a_1)$ e

$$\int_{\eta_1}^{a_1} f_1(t)dt = \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|.$$

Finalmente, mostramos a existência de $f_2$.

Tomemos $g(t) = f'(a_3)(t - a_3)$ e $\xi_1$, $\xi_2$ funções de classe $C^1$ tais que $\xi_1 \equiv 1$ numa vizinhança de $a_3$, $\xi_2 \equiv 1$ numa vizinhaça de $\beta_1$, $\xi_1(t) + \xi_2(t) = 1$ para todo $t \in [a_3, \beta_1]$ e

$$\left|\int_{a_3}^{\beta_1} g(t)\xi_1(t)dt\right| < \int_{0}^{a_3} f(t)dt.$$

Agora escolhamos $r > 0$ tal que

$$\left|\int_{a_3}^{\beta_1} [r\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t)]dt\right| = \int_{0}^{a_3} f(t)dt.$$

Definamos $f_2 : [a_3, +\infty) \to \mathbb{R}^-$ por

$$f_2(t) := \begin{cases} r\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t), & a_3 \leq t \leq \beta_1 \\ \\ rf'(a_1)t - ra_1 f'(a_1), & t \geq \beta_1. \end{cases}$$

Notamos que para $t \geq \beta_1$ o gráfico de $f_2$ é a reta tangente à $f_2$ no ponto $(\beta_1, f_2(\beta_1))$.

Portanto, $f_2(a_3) = f(a_3)$, $f_2'(a_3) = f'(a_3)$, $f_2(t) < 0$, para todo $t \in (a_3, \beta_1)$

$$\left|\int_{a_3}^{\beta_1} f_2(t)dt\right| = \int_0^{a_3} f(t)dt,$$

o que prova o lema.

$\square$

Como conseqüência do Princípio do Máximo temos

**Lema 3.2.3** *Se $u_\epsilon(x)$ é uma solução não constante para o problema de Neumann*

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= \widehat{f}(u), \quad x \in \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

*onde $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função truncamento definida por*

$$\widehat{f}(t) := \begin{cases} f(t), & a_1 \leq t \leq a_3 \\ \\ f_1(t), & t \leq a_1 \\ \\ f_2(t), & t \geq a_3, \end{cases}$$

*e $f_1$ e $f_2$ são definidas no Lema 3.2.2. Então $a_1 \leq u_\epsilon(x) \leq a_3$, ou seja, $u_\epsilon$ é solução não constante do problema de Neumann* (3.1).

**Demonstração:**

Iniciamos provando que $u_\epsilon(x) \leq a_3$. De fato, seja

$$v(x) := \begin{cases} u_\epsilon(x) - a_3, & \text{se} \quad u_\epsilon(x) \geq a_3 \\ \\ 0, & \text{se} \quad u_\epsilon(x) < a_3 \end{cases}$$

e

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : u_\epsilon(x) \geq a_3\}.$$

Notamos que

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla v dx = \int_\Omega \widehat{f}(u_\epsilon) v dx = \int_{\Omega_+} f_2(u_\epsilon) v dx \leq 0.$$

Daí, segue-se

$$\int_\Omega |\nabla v|^p \leq 0.$$

Logo $|\nabla v| = 0$, ou seja, $v =$ constante. Como $u_\epsilon$ é não constante, existe $x \in \Omega$ com $u_\epsilon(x) < a_3$, ou seja, $v(x) = 0$. Assim, $v \equiv 0$. Portanto, $u_\epsilon(x) \leq a_3$, para todo $x \in \Omega$.

Agora vamos mostrar que $a_1 \leq u_\epsilon$. De fato, seja

$$w(x) := \begin{cases} u_\epsilon(x) - a_1, & u_\epsilon(x) \leq a_1 \\ \\ 0, & u_\epsilon(x) > a_1 \end{cases}$$

e

$$\Omega_- := \{x \in \Omega : u_\epsilon(x) \leq a_1\}.$$

Como

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \nabla w dx = \int_\Omega \widehat{f}(u_\epsilon) w dx = \int_{\Omega_-} f_1(t) w dx \leq 0,$$

segue-se

$$\int_\Omega |\nabla w|^p \leq 0.$$

Isto implica $|\nabla w| = 0$, ou seja, $w =$ constante. Como $u_\epsilon$ é não constante existe $x \in \Omega$ com $u_\epsilon(x) > a_1$, isto é, $w(x) = 0$. Assim, $w \equiv 0$. Logo, $u_\epsilon(x) \geq a_1$, para todo $x \in \Omega$. Isto completa a prova do Lema.

□

Assim, pelo Lema 3.2.3, segue que uma solução para problema (3.2) é também uma solução para o problema (3.1), pois $f \equiv \widehat{f}$ no intervalo $[a_1, a_3]$. Portanto, provar o Teorema 3.2.1 é equivalente provar o Teorema a seguir.

**Teorema 3.2.4** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (3.2) possui uma solução $u_\epsilon$ não constante.*

Na demonstração do Teorema 3.2.4 utilizaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha [14]. Para isto consideremos $J_\epsilon : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (3.2) definido por

$$J_\epsilon(u) := \frac{\epsilon^2}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega \widehat{F}(u) dx,$$

onde

$$\widehat{F}(u) := \int_0^u \widehat{f}(t) dt.$$

Pelas imersões de Sobolev temos que $J_\epsilon$ está bem definido. Além disso, usando argumentos usuais verifica-se que $J_\epsilon \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Assim,

$$J_\epsilon'(u)\varphi = \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega \widehat{f}(u) \varphi dx, \quad \forall\ \varphi \in W^{1,p}(\Omega),$$

logo, pontos críticos de $J_\epsilon$ são soluções fracas do problema (3.2).

**Lema 3.2.5** *O funcional $J_\epsilon$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.*

**Demonstração:**

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência de Palais-Smale para o funcional $J_\epsilon$, isto é,

$$J_\epsilon(u_n) \to c \quad e \quad J'_\epsilon(u_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Logo

$$| J_\epsilon(u_n) | = \left| \frac{\epsilon^2}{p} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega \widehat{F}(u_n) dx \right| \leqslant d \tag{3.3}$$

e

$$| J'_\epsilon(u_n) v | = \left| \epsilon^2 \int_\Omega | \nabla u_n |^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega \widehat{f}(u_n) v dx \right| \leq \delta_n \|v\|, \tag{3.4}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$ onde $\delta_n \to 0, \ n \to \infty$.

Afirmamos que $(u_n)$ é limitada. De fato, definamos

$$v_n(x) = \begin{cases} u_n(x) - \beta_1, & \text{se } \ u_n(x) \geq \beta_1, \\ \\ 0, & \text{se } \ u_n(x) < \beta_1, \end{cases}$$

e

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega : u_n(x) \geq \beta_1\}.$$

Por (3.4) temos

$$\left| \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx - \int_\Omega \widehat{f}(u_n) v_n dx \right| \leq \delta_n \|v_n\|.$$

Como $\widehat{f}(u_n) \leq -C$ em $\Omega_1$, segue que

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx + C \int_\Omega v_n dx \leq \delta_n \|v_n\| \tag{3.5}$$

$$C \int_\Omega v_n dx \leq \delta_n \|v_n\|. \tag{3.6}$$

Definamos

$$w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Logo, $\|w_n\| = 1$. Tomando subseqüências podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}(\Omega)$, $w_n \to w$ em $L^p(\Omega)$ e $w_n(x) \to w(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Dividindo (3.6) por $\|v_n\|$ temos

$$C\int_\Omega w_n dx \leq \delta_n.$$

Passando o limite e levando em conta que $w_n \geq 0$, temos que

$$C\int_\Omega w dx = 0,$$

donde $w = 0$ quase sempre em $\Omega$.

Logo, $w = 0$. Dividindo (3.5) por $\|v_n\|$ segue que

$$\epsilon^2 \int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^p}{\|v_n\|} dx + C\int_\Omega \frac{v_n}{\|v_n\|} dx \leq \delta_n.$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$\epsilon^2 \int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^p}{\|v_n\|} \to 0. \tag{3.7}$$

Por outro lado,

$$1 = \|w_n\| = \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx + \int_\Omega |w_n|^p.$$

Assim,

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx \to 1, \tag{3.8}$$

pois

$$\int_\Omega |w_n|^p dx \to \int_\Omega |w|^p dx = 0.$$

Daí, multiplicando e dividindo (3.7) por $\|v_n\|^{p-1}$ obtemos

$$\|v_n\|^{p-1}\epsilon^2 \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)\right|^p dx = \|v_n\|^{p-1}\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx \to 0.$$

Assim, por (3.8) segue que $\|v_n\| \to 0$, quando $n \to \infty$. Consequentemente, $\|v_n\| \leq C$.

Agora, definamos

$$z_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & \text{se } \eta_1 \le u_n(x) \le \beta_1 \\ \\ 0, & \text{se } \eta_1 \ge u_n(x) \\ \\ 0, & \text{se } u_n(x) \ge \beta_1 \end{cases}$$

e

$$\Omega_2 := \{x \in \Omega : \eta_1 \le u_n(x) \le \beta_1\}.$$

De (3.4) temos

$$\left|\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla z_n|^p dx - \int_\Omega \widehat{f}(u_n) z_n dx\right| \le \delta_n \|z_n\|.$$

Sendo $|\widehat{f}(u_n)| \le \widehat{C}$ em $\Omega_2$ e $|z_n| \le c_1$ em $\Omega_2$, onde $c_1 = max\{|\eta_1|, |\beta_1|\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla z_n|^p dx &\le \delta_n \|z_n\| + \int_\Omega |\widehat{f}(u_n)||z_n| dx \\ &\le \delta_n \|z_n\| + C \end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega |z_n|^p dx \le c_1^p |\Omega| = C.$$

Logo,

$$\|z_n\|^p = \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla z_n|^p dx + \int_\Omega |z_n|^p dx \le C + \delta_n \|z_n\|.$$

Como $p > 1$, então

$$\|z_n\| \le C.$$

Finalmente, consideramos a seqüência

$$r_n(x) := \begin{cases} u_n(x) - \eta_1, & \text{se } u_n(x) \le \eta_1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e o conjunto

$$\Omega_3 := \{x \in \Omega : u_n(x) \le \eta_1 < 0\}.$$

De (3.4) obtemos

$$\left|\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla r_n|^p dx - \int_\Omega \widehat{f}(u_n) r_n dx\right| \leq \delta_n \|r_n\|.$$

Sendo $\widehat{f}(u_n) \geq C$ em $\Omega_3$ e $r_n < 0$ temos

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla r_n|^p dx + C \int_\Omega (-r_n) dx \leq \delta_n \|r_n\|. \tag{3.9}$$

Assim,

$$C \int_\Omega (-r_n) dx \leq \delta_n \|r_n\|. \tag{3.10}$$

Tomemos

$$w_n := \frac{(-r_n)}{\|r_n\|}.$$

Logo, $\|w_n\| = 1$ e $w_n \geq 0$. Daí, para uma subseqüência segue que $w_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}(\Omega)$, $w_n \rightarrow w$ em $L^p(\Omega)$. Logo, $w_n \rightarrow w$ quase sempre em $\Omega$. Dividindo (3.10) por $\|r_n\|$ temos

$$C \int_\Omega w_n dx \leq \delta_n.$$

Passando o limite quando $n \rightarrow \infty$ segue

$$C \int_\Omega w dx \leq 0,$$

o que implica

$$\int_\Omega w = 0.$$

Logo, $w = 0$ pois, $w_n \geq 0$. Dividindo (3.9) por $\|r_n\|$ obtemos

$$\epsilon^2 \int_\Omega \frac{|\nabla r_n|^p}{\|r_n\|} dx + C \int_\Omega \frac{(-r_n)}{\|r_n\|} dx \leq \delta_n.$$

Passando limite quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\epsilon^2 \int_\Omega \frac{|\nabla r_n|^p}{\|r_n\|} dx \rightarrow 0. \tag{3.11}$$

Sendo

$$\|w_n\| = \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx + \int_\Omega |w_n|^p dx = 1$$

temos

$$\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla w_n|^p \to 1. \tag{3.12}$$

Daí, multiplicando e dividindo (3.11) por $\|r_n\|^{p-1}$ temos

$$\|r_n\|^{p-1}\epsilon^2 \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{r_n}{\|r_n\|}\right)\right|^p dx = \|r_n\|^{p-1}\epsilon^2 \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{-r_n}{\|r_n\|}\right)\right|^p dx \to 0.$$

Assim, por (3.12) segue que $\|r_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Consequentemente, $\|r_n\| \leq C$.

Seja $u_n := v_n + z_n + r_n$. Então

$$\|u_n\| \leq C,$$

ou seja, $(u_n)$ é limitada em $\Omega$.

Como $\Omega$ é limitado, então para uma subseqüência $u_n = u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^\sigma$, $\sigma < p^*$, com

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se } p < N \\ \\ \infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

Logo, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em $\Omega$.

Usando o Teorema 1.0.15 temos que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \ \forall\, \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \ \forall\, \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Como $u_n \to u$ em $L^\sigma(\Omega)$ pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi| &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\varphi| \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi.$$

Por outro lado,

$$\widehat{f}(u_n)u_n \to \widehat{f}(u)u, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|\widehat{f}(u_n)u_n| \leq h,$$

onde $h \in L^\sigma(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega \widehat{f}(u_n)u_n \to \int_\Omega \widehat{f}(u)u.$$

Assim, $J_\epsilon$ satisfaz a condição (P.S).

□

**Lema 3.2.6** *O funcional* $J\epsilon$ *é limitado inferiormente.*

**Demonstração:** Seja

$$\Omega_1 := \Omega_3 \bigcup \Omega_4 \quad e \quad \Omega_2 := \Omega_5 \bigcup \Omega_6,$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega_3 &:= \{x \in \Omega : 0 \leq u(x) \leq a_3\},\\
\Omega_4 &:= \{x \in \Omega : a_3 < u(x) < \infty\},\\
\Omega_5 &:= \{x \in \Omega : a_1 \leq u(x) \leq 0\},\\
\Omega_6 &:= \{x \in \Omega : -\infty < u(x) < a_1\}.
\end{aligned}$$

Daí, como $u$ é limitada em $\Omega_3$ e $\Omega_5$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \widehat{F}(u)dx &= \int_{\Omega_3} \widehat{F}(u)dx + \int_{\Omega_4} \widehat{F}(u)dx\\
&< \widetilde{C} + \int_{\Omega_4} \widehat{F}(a_3)dx\\
&\leq C
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\widehat{F}(u)dx &= \int_{\Omega_5}\widehat{F}(u)dx+\int_{\Omega_6}\widehat{F}(u)dx\\ &< \overline{C}+\int_{\Omega_6}\widehat{F}(a_1)dx\\ &< C.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega}\widehat{F}(u)dx=\int_{\Omega_1}\widehat{F}(u)dx+\int_{\Omega_2}\widehat{F}(u)dx<C.$$

Daí,

$$\begin{aligned}J_\epsilon(u) &= \tfrac{\epsilon^2}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx-\int_{\Omega}\widehat{F}(u)dx\\ &\geq \tfrac{\epsilon^2}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx - C\\ &\geq -C.\end{aligned}$$

Portanto, $J_\epsilon$ é limitado inferiormente.

□

Para provar o próximo lema vamos usar o Teorema 1.0.13.

**Lema 3.2.7** *$a_i$, $i$ ímpar, é mínimo local estrito de $J_\epsilon$ em $W^{1,p}$.*

**Demonstração:** Primeiramente vamos mostrar que $J_\epsilon$ tem um mínimo local em $a_i$ na topologia $C^1$. Assim, seja $\delta>0$ tal que

$$\widehat{F}(a_i)\geq\widehat{F}(t),\ \text{para } |t-a_i|<\delta,$$

e $u\in C^1$ tal que

$$\|u(x)-a_i\|_{C^1}=\max\{|u(x)-a_i|,|u'(x)-a_i|\}\leq\delta.$$

Afirmamos que existe $\eta>0$ tal que

$$\Omega_\eta:=\{x\in\Omega:|u(x)-a_i|>\eta\}$$

tem medida positiva.

De fato, seja $u \in C^1(\Omega)$, $u \not\equiv a_i$. Então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) \neq a_i$. Logo, existe $\eta > 0$ tal que

$$u(x_0) > a_i + \eta$$

ou

$$u(x_0) < a_i - \eta.$$

Equivalentemente,

$$|u(x_0) - a_i| > \eta.$$

Pela continuidade da função $u$ existe uma bola $B_{\tilde{\delta}}(x_0)$ tal que

$$|u(x) - a_i| > \eta, \ \forall \ x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0).$$

Portanto, $\Omega_\eta$ tem medida positiva.

Agora, definamos

$$c_1 := max\{\widehat{F}(a_i - \eta), \widehat{F}(a_i + \eta)\}.$$

Sendo $a_i$ um máximo local estrito de $\widehat{F}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \widehat{F}(u)dx &= \int_{\Omega_\eta} \widehat{F}(u)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\eta} \widehat{F}(u)dx \\
&\leq \int_{\Omega_\eta} \widehat{F}(u)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\eta} \widehat{F}(a_i)dx \\
&\leq \int_{\Omega_\eta} c_1 dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\eta} \widehat{F}(a_i)dx \\
&= c_1 \int_{\Omega_\eta} dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\eta} \widehat{F}(a_i)dx \\
&< \widehat{F}(a_i) \int_{\Omega_\eta} dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\eta} \widehat{F}(a_i)dx \\
&= \int_\Omega \widehat{F}(a_i)dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) &= \tfrac{\epsilon^2}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega \widehat{F}(u)dx \\ &\geq -\int_\Omega \widehat{F}(u)dx \\ &> -\int_\Omega \widehat{F}(a_i)dx \\ &= J_\epsilon(a_i), \end{aligned}$$

isto é, $a_i$ é um mínimo local estrito de $J_\epsilon$ na topologia $C^1$.

Pelo Teorema 1.0.13 $a_i$ é um mínimo local de $J_\epsilon$ na topologia $W^{1,p}(\Omega)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_i$ é mínimo local estrito de $J_\epsilon$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Caso contrário, para todo $\delta > 0$, existe $v_\delta \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$J_\epsilon(v_\delta) = J_\epsilon(a_i).$$

Logo, $v_\delta$ é um ponto crítico de $J_\epsilon$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

□

Usaremos argumentos de [7] para obter o próximo resultado.

**Lema 3.2.8** *Se $a$ é um mínimo local estrito de $J_\epsilon$, isto é,*

$$J_\epsilon(a) < J_\epsilon(u) \tag{3.13}$$

*para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $0 < \|u - a\| < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$. Então, para todo $0 < \alpha < \delta_0$,*

$$\inf\{J_\epsilon(u) : u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \|u - a\| = \alpha\} > J_\epsilon(a). \tag{3.14}$$

**Demonstração:**

Suponha por contradição que o ínfimo em (3.14) é igual a $J_\epsilon(a)$ para algum $\alpha$ com $0 < \alpha < \delta_0$. Assim, existe uma seqüência $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ com $\|u_n - a\| = \alpha$ e, digamos, $J_\epsilon(u_n) \leq J_\epsilon(a) + \frac{1}{2n^2}$. Defina

$$A := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \alpha - \delta \leq \|u - a\| \leq \alpha + \delta\},$$

onde $\delta > 0$ é escolhido de forma que $0 < \alpha - \delta$ e $\alpha + \delta < \delta_0$. Pela hipótese de contradição e (3.13) segue que

$$inf\{J_\epsilon(u) : u \in A\} = J_\epsilon(a).$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland em $A$ para cada n temos que existe uma seqüência $v_n \in A$ tal que

$$J_\epsilon(v_n) \leq J_\epsilon(u_n), \tag{3.15}$$

$$\|v_n - u_n\|_{W^{1,p}} \leq \frac{1}{n}, \tag{3.16}$$

e

$$J_\epsilon(v_n) \leq J_\epsilon(u) + \frac{1}{n}\|u - v_n\|_{W^{1,p}}, \quad \forall \ \ u \in A. \tag{3.17}$$

Mostraremos a seguir que $v_n$ é uma seqüência (P.S) para $J_\epsilon$ em $W^{1,p}(\Omega)$, isto é,

$$J_\epsilon(v_n) \leq C \text{ (isto segue de (3.15))}$$

e

$$J'_\epsilon(v_n) \to 0, \ n \to \infty. \tag{3.18}$$

Provado (3.18), segue-se que $v_n$ possui uma subseqüência convergente. Denotando essa subseqüência $v_n$ por $v_n$ temos que $v_n \to v$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Observamos que $v \in A$, pois $A$ é completo. Logo, $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e satisfaz $\|v - a\| = \alpha$ e $J_\epsilon(v) = J_\epsilon(a)$, o que contradiz (3.13).

Para concluirmos a demonstração provaremos que $J'_\epsilon(v_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, para isto fixamos $n > \frac{1}{\delta}$, tomamos $w \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_t := v_n + tw$. Para $|t|$ suficientemente pequeno $u_t = v_n + tw \in A$. De fato, definamos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\|u_t - a\| &= \|v_n - a\| \\ &\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - a\| \\ &\leq \tfrac{1}{n} + \alpha \\ &< \delta + \alpha. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|v_n - a\| &\geq \|a - u_n\| - \|u_n - v_n\| \\
&\geq \alpha - \tfrac{1}{n} \\
&> \alpha - \delta.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos tomar $u = u_t$ em (3.17), e então para $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{J_\epsilon(v_n) - J_\epsilon(v_n + tw)}{t} &\leq \tfrac{1}{n}\tfrac{1}{t}\|v_n - tw - v_n\| \\
&\leq \tfrac{1}{nt}\|tw\|.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Tomando limite em (3.19) quando $t \to 0$ segue que

$$\langle J'_\epsilon(v_n), w\rangle \leq \frac{1}{n}\|w\|.$$

Consequentemente,

$$|\langle J'_\epsilon(v_n), w\rangle| \leq \frac{1}{n}\|w\|, \quad \forall\ w \in W^{1,p}(\Omega).$$

Assim, $J'_\epsilon(v_n) \to 0$, $n \to \infty$, o que prova (3.18). Assim, a demonstração do lema está completa.

□

**Demonstração do Teorema 3.2.4:**

Defina

$$\Gamma := \{h \in C([0,1], W^{1,p}(\Omega)) : h(0) = a_1 \ e \ h(1) = a_3\}$$

e

$$\gamma_\epsilon := \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(h(t)).$$

Pelo Lema 3.2.8

$$\gamma_\epsilon := \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(h(t)) > c = max\{J_\epsilon(a_1), J_\epsilon(a_3)\}.$$

Como $J_\epsilon$ satisfaz a condição (P.S), segue-se do Teorema 1.0.12 que existe $\overline{u}$ ponto crítico de $J_\epsilon$ tal que

$$J_\epsilon(\overline{u}) = \gamma_\epsilon.$$

Além disso, $\overline{u}$ é do tipo passo da montanha, pois se os pontos críticos de $J_\epsilon$ não são isolados em $W^{1,p}(\Omega)$ então existe uma infinidade de pontos críticos de $J_\epsilon$. Como $a_1$ e $a_3$ são mínimos locais estritos então $\overline{u} \neq a_1$ e $\overline{u} \neq a_3$. Portanto para mostrar a existência de um ponto crítico não constante de $J_\epsilon$ basta mostrar que $\gamma_\epsilon < 0$, pois $J_\epsilon(0) = 0$, o que implica $\overline{u} \neq 0$.

Afirmamos que $\gamma_\epsilon < 0$. De fato, consideremos $B \subset \Omega$ a bola aberta de centro zero e raio $R$ e definamos

$$u_0(x) := \begin{cases} v_\epsilon(x), & x \in \overline{B} \\ \\ w_\epsilon(x), & x \in \overline{\Omega} \backslash \overline{B}, \end{cases}$$

onde $v_\epsilon(x)$ é a solução positiva para o problema de Dirichlet (2.1) em $\overline{B}$ e $w_\epsilon(x)$ é a solução negativa para o problema de Dirichlet (2.1) em $(\Omega\backslash\overline{B})\bigcup\partial(\Omega\backslash\overline{B})$ .

Como $\Omega \in C^1$ e as funções $v_\epsilon, w_\epsilon \in L^p(\Omega)$, segue-se pela Proposição $IX.18$ de [2] que $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ consideremos o caminho

$$h_\epsilon(t) := t(1-t)u_0(x) + (a_3 - a_1)t + a_1, \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

Queremos mostrar que existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\max_{t \geq 0} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) < 0.$$

Suponha por contradição, que não existe tal $\epsilon_0 > 0$. Então para todo $\epsilon_0 > 0$, existe $\epsilon < \epsilon_0$ tal que

$$J_\epsilon(h_\epsilon(t_\epsilon)) \geq 0, \tag{3.20}$$

para algum $t_\epsilon \in [0,1]$. Seja $(\epsilon_k)$ uma seqüência tal que

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0, \quad J_\epsilon(h_{\epsilon_k}(t_{\epsilon_k})) \geq 0, \quad 0 \leq \lim_{k\to 0} t_{\epsilon_k} = \alpha \leq 1.$$

Para simplificar a notação façamos $\epsilon_k = \epsilon$ e $t_{\epsilon_k} = t$. Então, tomando qualquer bola aberta $B \subset \Omega$, temos

$$\begin{aligned} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \tfrac{\epsilon^2}{p} \int_B |\nabla h_\epsilon(t)|^p dx + \frac{\epsilon^2}{p} \int_{\Omega\backslash B} |\nabla h_\epsilon(t)|^p dx - \int_\Omega \widehat{F}(h_\epsilon(t)) dx \\ &= \tfrac{\epsilon^2}{p} t^p (1-t)^p \left( \int_B |\nabla v_\epsilon|^p dx + \int_{\Omega\backslash B} |\nabla w_\epsilon|^p dx \right) \\ &\quad - \int_\Omega \widehat{F}(t(1-t)u_0 + (a_3 - a_1)t + a_1) dx. \end{aligned}$$

Sendo

$$\epsilon^2 \int_B |\nabla v_\epsilon|^p dx = \int_B \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dx$$

e

$$\epsilon^2 \int_{\Omega\backslash B} |\nabla w_\epsilon|^p dx = \int_{\Omega\backslash B} \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dx$$

temos

$$\begin{aligned} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \tfrac{t^p(1-t)^p}{p}\left[\int_B \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dx + \int_{\Omega\backslash B} \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dx\right] \\ &\quad - \int_\Omega \widehat{F}(t(1-t)u_0 + (a_3 - a_1)t + a_1)dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como $v_\epsilon \to a_3$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $B$ e $w_\epsilon \to a_1$ quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega\backslash B$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_B \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dx = 0$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega\backslash B} \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dx = 0.$$

Tomando limite em (3.21), pelos fatos acima e pelo Teorema da Convergência Dominada segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_\Omega \widehat{F}(t(1-t)u_0(x) + (a_3 - a_1)t + a_1)dx\right] \\ &= -\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_3 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1)|B| \\ &\quad -\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_1 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1)|\Omega\backslash B|, \end{aligned}$$

onde $|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$. Pelas hipóteses sobre $\widehat{f}$, Lema 3.2.2, temos

$$-\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_3 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1) \leq 0 \tag{3.22}$$

e

$$-\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_1 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1) \leq 0. \tag{3.23}$$

Como

$$\eta_1 < \alpha(1-\alpha)a_3 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1 < \beta_1,$$

$$\eta_1 < \alpha(1-\alpha)a_1 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1 < \beta_1$$

e $\widehat{F}$ se anula somente em $\eta_1$, 0 e $\beta_1$ então se (3.22) e (3.23) forem iguais a zero segue-se que

$$\alpha(1-\alpha)a_3 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1 = 0 = \alpha(1-\alpha)a_1 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1,$$

isto é,

$$\alpha(1-\alpha)a_3 = \alpha(1-\alpha)a_1.$$

Como $a_3 \neq a_1$

$$\alpha(1-\alpha) = 0,$$

ou seja, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Logo $\widehat{F}(a_1) = 0$ ou $\widehat{F}(a_3) = 0$. Então $a_1 = 0$ ou $a_3 = 0$, o que é impossível. Consequentemente,

$$-\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_3 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1) < 0$$

ou

$$-\widehat{F}(\alpha(1-\alpha)a_1 + (a_3 - a_1)\alpha + a_1) < 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) < 0,$$

o que contradiz (3.20). Assim, $\gamma_\epsilon < 0$.

□

**Corolário 3.2.9** *Seja $f$ satisfazendo $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$ e seja $u_\epsilon$ a solução não constante do problema (3.1) tal que $J_\epsilon(u_\epsilon) = \gamma_\epsilon$. Então*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} sup J_\epsilon(u_\epsilon) < 0.$$

**Demonstração:** Pela demonstração do Teorema 3.2.4 existe um número $\epsilon_1$ positivo tal que

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t)) < 0$$

para todo $t \in [0, 1]$, onde

$$h_{\epsilon_1}(t) = t(1-t)u_0(x) + (a_3 - a_1)t + a_1,$$

com $u_0$ definida na demonstração do Teorema 3.2.4. Portanto, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$,

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t)) \leq J_{\epsilon_1}(h_{\epsilon_1}(t)) < 0$$

para todo $t \in [0, 1]$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_\epsilon \in [0, 1]$ tal que

$$h_{\epsilon_1}(t_\epsilon) = u_\epsilon(x),$$

pois, $h_{\epsilon_1}(0) = a_1$, $h_{\epsilon_1}(1) = a_3$ e $a_1 \leq u_\epsilon(x) \leq a_3$. Consequentemente,

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t_\epsilon)) = J_\epsilon(u_\epsilon(x)),$$

para algum $t_\epsilon \in [0, 1]$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} sup J_\epsilon(u_\epsilon) < 0.$$

□

**Demonstração do Teorema 3.2.1:**

Segue imediatamente do Teorema 3.2.4 e Lema 3.2.3, como observamos logo após a demonstração do Lema 3.2.3.

□

## 3.3 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção, vamos apresentar a prova do Teorema principal deste capítulo utilizando os resultados acima provados.

**Demonstração do Teorema 3.1.1:**

Para cada $l = 1, 2, \ldots$ considere a função $\widetilde{f} : [a_{2l-1} - a_{2l}, a_{2l+1} - a_{2l}] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ definida por

$$\widetilde{f}(t) := f(t + a_{2l}).$$

Então pelo Teorema 3.2.1, o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\epsilon^2 \triangle_p v & = & \widetilde{f}(v), & \text{em } \Omega \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.24}$$

tem uma solução não constante $v_l(x)$ tal que

$$a_{2l-1} - a_{2l} < v_l(x) < a_{2l+1} - a_{2l},$$

onde $v = u - a_{2l}$. Assim, $u_l = v_l + a_{2l}$ é uma solução não constante para o problema (3.1) com $a_{2l-1} < u_l < a_{2l+1}$.

Logo, existem pelo menos $l$ soluções para o problema (3.1) satisfazendo

$$a_1 < u_1(x) < a_3 < u_2(x) < a_5 < \ldots < a_{2l-1} < u_l(x) < a_{2l+1}.$$

□

## 3.4 Comportamento Assintótico de uma Classe de Soluções

Nesta seção, vamos estabelecer o comportamento assintótico da solução não constante do problema (3.1), determinada no Teorema 3.2.1.

**Teorema 3.4.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$ e seja $u_\epsilon$ a solução não constante do problema (3.1). Dado algum $\delta > 0$, seja*

$$\Omega^+(\epsilon, \delta) := \{x \in \Omega : 0 < u_\epsilon(x) < \delta < a_3\}$$

*contendo uma bola aberta $B(x, w^*(\epsilon, \delta))$ centrada em algum ponto $x = x(\epsilon, \delta) \in \Omega^+(\epsilon, \delta)$ cujo raio $w^*(\epsilon, \delta)$ é o máximo dos raios das bolas abertas contidas em $\Omega^+(\epsilon, \delta)$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \delta) = 0.$$

**Demonstração:**

Seja $0 < \delta < a_3$. Suponha por contradição que

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \delta) \neq 0.$$

Então existe uma seqüência convergente $\{w^*(\epsilon_k, \delta)\}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} w^*(\epsilon_k, \delta) = \alpha_\delta > 0.$$

Isto significa que, para cada $\epsilon_k > 0$, existe um ponto $x_k = x(\epsilon_k, \delta) \in \Omega^+(\epsilon_k, \delta)$ tal que a bola $B(x_k, \alpha_\delta)$, centrada em um ponto $x_k$ com raio $\alpha_\delta$, está contida em $\Omega^+(\epsilon_k, \delta)$.

Observamos que $u_\epsilon$ é uma supersolução do problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\epsilon_k^2 \triangle_p u & = & f(u), & \text{em} \;\; B(x_k, \alpha_\delta) \\ \\ u & = & 0, & \text{sobre} \;\; \partial B(x_k, \alpha_\delta). \end{array} \right. \tag{3.25}$$

**Afirmação**: Existem $\epsilon_{k_0}$ e $\beta > 0$ tais que $\beta\varphi_1$ é subsolução para o problema (3.25) para todo $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k_0}$, onde $\varphi_1$ é a auto-função associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$ do operador p-Laplaciano sujeito à condição de fronteira de Dirichlet.

De fato, seja

$$\gamma = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t}.$$

Segue-se de $(B_3)$ que dado $\delta_1 > 0$, (tome $\delta_1 < \gamma$), existe $t_0 > 0$ tal que para $| \; t \; | \leq t_0$ tem-se

$$\left| \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} - \gamma \right| \leq \delta_1.$$

Então

$$\gamma - \delta_1 \leq \frac{f(t)}{| \; t \; |^{p-2} \; t}, \; \forall \; | \; t \; | < t_0. \tag{3.26}$$

Seja $\varphi_1 > 0$ uma auto-função do p-Laplaciano associado ao primeiro auto-valor $\lambda_1$. Tome $\beta > 0$ tal que

$$| \beta\varphi_1(x) | \leq t_0$$

e

$$\beta\left(\max_{\Omega} \varphi_1\right) < a_3.$$

Daí, por (3.26)

$$\gamma - \delta_1 \leq \frac{f(\beta\varphi_1)}{| \beta\varphi_1 |^{p-2} \beta\varphi_1}.$$

Tome $\epsilon_{k_0} > 0$ tal que $\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 < \gamma - \delta_1$. Então

$$\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 \leq \frac{f(\beta\varphi_1)}{| \beta\varphi_1 |^{p-2} \beta\varphi_1}$$

$$\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 \beta^{p-1} | \varphi_1 |^{p-2} \varphi_1 \leq f(\beta\varphi_1)$$

$$-\epsilon_{k_0}^2 \Delta_p(\beta\varphi_1) \leq f(\beta\varphi_1)$$

ou seja, $\beta\varphi_1$ é subsolução para o problema (3.25). Portanto, existem $\epsilon_{k_0} > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\beta\varphi_1$ é subsolução para o problema (3.25) para todo $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k_0}$.

Assim, pelo Teorema 2.1.1 sabemos que o problema (3.25) tem uma solução minimal $u^*$ com $\beta\varphi_1 \leq u^* \leq u_\epsilon$ e tal que $u^* \longrightarrow a_3$ em todo subconjunto compacto de $B(x_k, \alpha_\delta)$ quando $\epsilon_k \longrightarrow 0$. Isto contradiz o fato que $\delta < a_3$.

$\square$

**Observação 3.4.2** *Se escolhermos uma bola aberta* $B = B(x, w^*(\epsilon, \delta))$ *centrada em algum ponto* $x = x(\varepsilon, \delta)$ *cujo raio* $w^*(\epsilon, \delta)$ *é o máximo dos raios das bolas em*

$$\Omega^-(\epsilon, \delta) = \{x \in \Omega : a_1 < -\delta < u(x) < 0\}$$

*podemos provar de maneira análoga que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \delta) = 0.$$

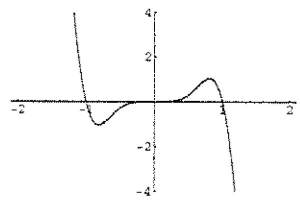
**Observação 3.4.3** *Por uma translação, podemos observar que o Teorema 3.4.1 e Observação 3.4.2 estabelece o comportamento assintótico de qualquer solução* $u_l(x)$ *determinada no Teorema 3.1.1.*

## 3.5 Exemplos

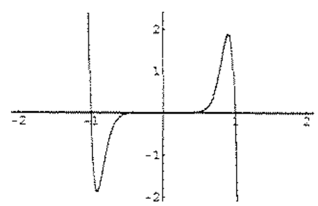
**Exemplo 3.5.1** *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(u) := \frac{|u|^{p-2}u(p - p|u|^p)}{(1 + |u|^p)}.$$

*O gráfico de $f$ para p=5 é*




*para p=10 é*




*Então, $f$ satisfaz as hipóteses $(b_1)$, $(b_2)$ e $(b_3)$ para $l = 1$ com $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$.*

De fato,
(i) É fácil ver que os únicos zeros de $f$ são: $-1$, $0$ e $1$.

(ii) Observe que

$$f'(u) = \begin{cases} \frac{[(p-1)u^{p-2}(p-pu^p)+u^{p-1}(-p^2u^{p-1})](1+u^p)-pu^{p-1}(u^{p-1}(p-pu^p))}{(1+u^p)^2}, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \\ \frac{[(-1)^{p-2}(p-1)u^{p-2}p(1-(-1)^p u^p)+(-1)^{p-2}u^{p-1}p(-(-1)^p p u^{p-1})](1+(-1)^p u^p)}{(1+(-1)^p u^p)^2} & \\ -\frac{(-1)^{p-2}u^{p-1}p(1-(-1)^p u^p)((-1)^p p u^{p-1})}{(1+(-1)^p u^p)^2}, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{t \to 0^+} f'(t) = \lim_{t \to 0^-} f'(t) = 0.$$

Seja,

$$\lim_{t \to 0} f'(t) = 0 = f(0),$$

ou seja, $f'$ é contínua no zero.

Claramente, $f'$ é contínua para todo $x \in \Omega$ com $u(x) \neq 0$.

Portanto, $f \in C^1(\Omega)$.

**(iii)** Note que

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0,$$

$$f'(-1) = f'(1) = -\frac{p^2}{2} < 0.$$

**(iv)** Finalmente, observe que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = p > 0.$$

Portanto, as hipóteses $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$ são satisfeitas. Assim, pelo Teorema 3.2.1 existe $\epsilon_0 > 0$ tal que o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle_p u &= \frac{|u|^{p-2}u(p-p|u|^p)}{(1+|u|^p)}, \quad \text{em } \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução não constante $a_1 \leq u_\epsilon \leq a_3$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $p \geq 2$.

**Exemplo 3.5.2** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(u) = u(a - u^2),$$

*onde $a \in \mathbb{R}^+$. Então, $f$ satisfaz as hipóteses $(b_1)$, $(b_2)$ e $(b_3)$ com $l = 1$, ou seja, $f$ satisfaz as hipóteses $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$ com $a_1 = -\sqrt{a}$, $a_2 = 0$ e $a_3 = \sqrt{a}$.*

De fato,
(i) É fácil ver que os únicos zeros de $f$ são $-\sqrt{a}$, 0 e $\sqrt{a}$.
(ii) Claramente $f$ é $C^1(\Omega)$.
(iii) Observe que

$$f'(-\sqrt{a}) = f'(\sqrt{a}) = -2a < 0,$$
$$f(-\sqrt{a}) = f(0) = f(\sqrt{a}) = 0.$$

(iv) Se $p = 2$ temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = a > 0.$$

Portanto, as hipóteses $(B_1)$, $(B_2)$ e $(B_3)$ são satisfeitas se $p = 2$. Assim, pelo Teorema 3.2.1 existe $\epsilon_0 > 0$ tal que o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle u &= u(a-u^2), \quad \text{em } \Omega \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução não constante $a_1 \leq u_\epsilon(x) \leq a_3$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

**Exemplo 3.5.3** *Seja* $f : [-\pi, (2l-1)\pi] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(u) = sen(u).$$

*Logo,* $f$ *satisfaz as hipóteses* $(b_1)$, $(b_2)$ *e* $(b_3)$ *para*
$p = 2$, $l = 1, 2, 3, \ldots$ *e*

$$a_1 = -\pi < a_2 = 0 < a_3 = \pi < \ldots < a_{2l} = (2l-2)\pi < a_{2l+1} = (2l-1)\pi.$$

De fato,
(i) Claramente os únicos zeros de $f$ no intervo $[-\pi, (2l-1)\pi]$ são

$$-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, (2l-1)\pi$$

(ii) A função $f$ é $C^1$ em $[-\pi, (2l-1)\pi]$.
(iii) Sabemos que

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = \ldots = f[(2l-1)\pi] = 0,$$

$$f'(-\pi) = f'(\pi) = f'(3\pi) = ... = f'[(2l-1)\pi] = -1 < 0.$$

**(iv)** Também sabemos que

$$\lim_{t \to a_{2l}} \frac{f(t - a_{2l})}{t - a_{2l}} = \lim_{t \to a_{2l}} \frac{sen(t - a_{2l})}{t - a_{2l}} = \lim_{t \to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1 > 0.$$

Assim, pelo Teorema 3.1.1 existe $\epsilon_0 > 0$ tal que o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \triangle u &= sen(u), \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem pelo menos $l$ soluções não constantes satisfazendo

$$a_1 \leq u_1(x) \leq a_3 \leq u_2(x) \leq a_5 < ... < u_l(x) < a_{2l+1}$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

# Capítulo 4

# Existência de Soluções Radiais para uma Classe de Problemas Quaselineares com Condição de Dirichlet

## 4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos usar o método de Iteração Monotônica e argumentos de [9] para estabelecer a existência de soluções e seu comportamento assintótico quando $\epsilon \to 0$ para o problema de Dirichlet na forma radial

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), \quad \text{em } (0, R) \\ \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $0 < R < \infty$ e $\alpha, \gamma, \beta$ são números reais dados tais que $\gamma \geq \alpha$ e $\beta \geq 0$.

Vamos assumir que a função f satisfaz as seguintes condições:

$(c_1)$ $f : [a_1, a_3] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ com $f(a_1) = f(a_3) = 0$;

$(c_2)$ Existem exatamente três zeros de $f$,

$$a_1 < 0 = a_2 < a_3$$

tais que

$$f'(a_1) < 0, \ f'(a_3) < 0;$$

$(c_3)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{|t|^{\beta}t}>0.$$

Consideremos o espaço de Banach $X_R$ das funções absolutamente contínuas $u:(0,R)\longrightarrow\mathbb{R}$ tais que $u(R)=0$ e

$$\epsilon^2\int_0^R r^{\alpha}|u'(r)|^{\beta+2}<\infty.$$

Designaremos a norma em $X_R$ por:

$$\|u\|_{X_R}:=\left(\epsilon^2\int_0^R r^{\alpha}|u'(r)|^{\beta+2}dr\right)^{1/(\beta+2)}.$$

Aqui, entendemos por uma solução fraca de (4.1), uma função $u\in X_R$ tal que

$$\epsilon^2\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta}u'\varphi'dr-\int_0^R r^{\gamma}f(u)\varphi dr=0,\ \forall\ \varphi\in X_R,$$

ou seja, uma solução fraca do problema (4.1) é um ponto crítico do funcional

$$I_{\epsilon}(u):=\frac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2}dr-\int_0^R r^{\gamma}F(u)dr,$$

onde $F(u)=\displaystyle\int_0^R f(t)dt.$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 4.1.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(c_1)$, $(c_2)$ e $(c_3)$. Então dada qualquer bola $B(0,r_1)\subset B(0,R)$, $0<r_1<R$, existe $\epsilon_0>0$ tal que para todo $0<\epsilon\le\epsilon_0$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases}-\epsilon^2(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')'=r^{\gamma}f(u), & em\ (0,r_1)\\ \\ u'(0)=u(r_1)=0,\end{cases}\tag{4.2}$$

*tem uma solução positiva $0<u_{\epsilon}(r)<a_3$ em $[0,r_1]$ tal que $u_{\epsilon}\longrightarrow a_3$ quando $\epsilon\longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $(0,r_1)$. Além disso, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases}-\epsilon^2(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')'=r^{\gamma}f(u), & em\ (r_1,R)\\ \\ u(r_1)=u(R)=0,\end{cases}\tag{4.3}$$

*tem uma solução negativa $a_1<v_{\epsilon}(r)<0$ em $[r_1,R]$ tal que $v_{\epsilon}\longrightarrow a_1$ quando $\epsilon\longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $(r_1,R)$.*

## 4.2 Propriedades dos Espaços $X_R, L^q_\theta$

Apresentaremos aqui algumas definições, resultados de imersões e propriedades do primeiro auto-valor que serão úteis na demonstração do Teorema principal.

Seja $q \geq 1$ e $\theta > -1$. Denotamos por $L^q_\theta = L^q_\theta(0, R)$ o espaço de Banach das funções mensuráveis à Lebesgue $u : [0, R] \to \mathbb{R}$ tais que

$$\left( \int_0^R r^\theta |u(r)|^q dr \right)^{1/q} < \infty.$$

Designamos a norma em $L^q_\theta$ por:

$$\|u\|_{L^q_\theta} := \left( \int_0^R r^\theta |u(r)|^q dr \right)^{1/q}.$$

Associado a cada espaço $X_R$ e cada peso $\theta$ definimos o expoente crítico

$$q^* := \frac{(\theta + 1)(\beta + 2)}{\alpha - \beta - 1}, \tag{4.4}$$

sob a hipótese que

$$\alpha - \beta - 1 > 0. \tag{4.5}$$

O resultado seguinte aparece em Kufner-Opic [19].

**Proposição 4.2.1** *Seja $u : (0, R] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Se $u(R) = 0$ e*

*(i) para $1 \leq \beta + 2 \leq q < \infty$ temos:*

*(1) $\alpha > \beta + 1$, $\theta \geq \alpha \frac{q}{\beta+2} - \frac{q(\beta+1)}{\beta+2} - 1$, ou*

*(2) $\alpha \leq \beta + 1$, $\theta > -1$,*

*(ii) para $1 \leq q < \beta + 2 < \infty$ temos:*

*(1) $\alpha > \beta + 1$, $\theta > \alpha \frac{q}{\beta+2} - \frac{q(\beta+1)}{\beta+2} - 1$, ou*

*(2) $\alpha \leq \beta + 1$, $\theta > -1$,*

*então*

$$\left( \int_0^R r^\theta |u(r)|^q dr \right)^{1/q} \leq c \left( \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr \right)^{1/(\beta+2)}.$$

**Prova:** Veja Proposição 1.0 de [6].

□

Os resultados acima mostram que as imersões $X_R \subset L^q_\theta$ são contínuas se $q \leq q^*$ e $\alpha - \beta - 1 > 0$. Se $\alpha - \beta - 1 \leq 0$ estas imersões são verdadeiras para todo $q < \infty$. Se $\alpha - \beta - 1 > 0$ usando um argumento do tipo Arzelá-Ascoli, temos que as imersões são compactas se $q < q^*$. Conseguentemente, temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.2.2** *Assuma que $\alpha - \beta - 1 > 0$. Então o espaço $X_R$ está continuamente imerso em $L^{q^*}_\gamma$, e está compactamente imerso em $L^q_\gamma$ se $q < q^*$ e $0 < R < \infty$.*

**Prova:** Veja Proposição 1.1 de [6].

□

Agora, considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} -(r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r))' = r^\theta f(r,u), \quad \text{em } (0,R) \\ \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$|f(r,u)| \leq c|u|^{p-1} + c, \text{para qualquer } u \in \mathbb{R},\ 0 \leq r \leq R, \tag{4.7}$$

com $p$ satisfazendo a condição

$$\beta + 2 \leq p \leq \frac{(\theta+1)(\beta+2)}{\alpha - \beta - 1} \tag{4.8}$$

e $c > 0$.

Uma função $u \in X_R$ é uma solução fraca de (4.6) se, e somente se,

$$\int_0^R r^\alpha |u'|^\beta u'v'dr = \int_0^R r^\theta f(r,u)vdr, \text{ para toda } v \in X_R.$$

Uma função $u \in X_R$ é uma solução integral de (4.6) se

$$-r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r) = \int_0^R s^\theta f(s,u(s))ds \text{ para } r \in [0,R] \text{ quase todo ponto.}$$

**Proposição 4.2.3** *Assuma que as condições (4.7) e (4.8) são satisfeitas. Uma função $u \in X_R$ é uma solução fraca de (4.6) se, e somente se, é uma solução integral.*

**Prova:** Veja Proposição 2.1 de [6].

□

**Proposição 4.2.4** *Assuma que as condições* (4.7), (4.8) *e* $\theta > \alpha - 1$ *são verdadeiras. Então qualquer solução fraca de* (4.6) *pertence a* $C^2(0,R) \cap C^{1,\mu}[0,R]$.

**Prova:** Veja Proposição 2.2 de [6].

□

**Lema 4.2.5** *O espaço de Banach* $X_R$ *é uniformemente convexo.*

**Prova:** Considere a aplicação linear $\Psi : X_R \to L^{\beta+2}$ definida por

$$\Psi(u) := r^{\alpha/(\beta+2)}|u'|$$

e observe que

$$\|\Psi(u)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} = \int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr = \|u\|_{X_R}^{\beta+2}.$$

Como $\Psi$ é um isomorfismo isométrico do espaço de Banach $X_R$ sobre um subespaço fechado do espaço uniformemente convexo $L^{\beta+2}$, segue que $X_R$ é uniformemente convexo.

□

Consederemos o seguinte problema de auto-valor

$$\begin{cases} Lu = \lambda r^\delta |u|^\beta u, & \text{em } (0,R) \\ \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $Lu := -(r^\alpha |u'|^\beta u')'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pela Proposição 4.2.2 segue que a imersão $X_R \subset L_\delta^{\beta+2}$ é contínua se

$$\beta + 2 \leq \frac{(\delta+1)(\beta+2)}{\alpha - \beta - 1},$$

isto é, se $\alpha - \beta - 2 \leq \delta$, e é compacta se $\alpha - \beta - 2 < \delta$.

O principal resultado sobre o problema (4.9) é:

**Proposição 4.2.6** *O ínfimo*

$$\lambda_1(R) := \inf_{u \in X_R \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^R r^\alpha |u'(r)|^{\beta+2} dr}{\displaystyle\int_0^R r^\delta |u(r)|^{\beta+2} dr}$$

*é atingido por uma função $\varphi_1 \in X_R$, e $\lambda_1(R)$ é um auto-valor do problema (4.9). Além disso, $\varphi_1(r) \neq 0$ para $r \in [0, R]$ [assim podemos escolher uma $\varphi_1 > 0$ em $[0, R)$], $\lambda_1(R)$ é o menor auto-valor de (4.9) e é simples.*

**Prova:** Veja Proposição 3.1 de [6].

□

## 4.3 Princípios de Comparação

Nesta seção apresentamos alguns resultados que utilizaremos na prova de nosso teorema.

**Definição 4.3.1** *Uma função $\underline{u} \in X_R \cap L^\infty_\gamma$ é dita subsolução para o problema (4.1) se*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \displaystyle\int_0^R r^\alpha |\underline{u}'|^\beta \underline{u}' \phi' dr \leq \int_0^R r^\gamma f(\underline{u}) \phi dr, \ \forall \ \phi \in X_R, \ \phi \geq 0 \\ \\ \underline{u}'(0) = 0, \ \underline{u}(R) \leq 0. \end{cases}$$

*Uma função $\overline{u} \in X_R \cap L^\infty_\gamma$ é dita supersolução para o problema (4.1) se*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \displaystyle\int_0^R r^\alpha |(\overline{u})'|^\beta (\overline{u})' \phi' dr \geq \int_0^R r^\gamma f(\overline{u}) \phi dr, \ \forall \ \phi \in X_R, \ \phi \geq 0 \\ \\ (\overline{u})'(0) = 0, \ \overline{u}(R) \geq 0. \end{cases}$$

Usaremos o seguinte princípio de comparação:

**Lema 4.3.2** *Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua e crescente, tal que $g(0) = 0$ e funções $u_1, u_2 \in X_R \cap L^\infty_\gamma$ tais que, para toda $\phi \in X_R$, $\phi \geq 0$*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \displaystyle\int_0^R r^\alpha |u_2'|^\beta u_2' \phi' dr + \int_0^R g(u_2(r)) \phi dr \leq \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u_1'|^\beta u_1' \phi' dr + \int_0^R g(u_1(r)) \phi dr \\ \\ u_2(R) \leq u_1(R). \end{cases}$$

*Então $u_2 \leq u_1$ quase sempre em $(0, R)$.*

**Demonstração:**

Seja $\phi = (u_2 - u_1)^+ \in X_R$. Então, como $g$ é crescente temos:

$$
\begin{aligned}
0 \;\geq\; & \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha [|u_2'|^\beta u_2' - |u_1'|^\beta u_1']((u_2 - u_1)^+)' \\
& + \int_0^R [g(u_2) - g(u_1)](u_2 - u_1)^+ \\
= \; & \epsilon^2 \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha [|u_2'|^\beta |u_2'|^2 - |u_2'|^\beta u_2' u_1' - |u_1'|^\beta u_1' u_2' + |u_1'|^\beta |u_1'|^2] \\
& + \int_{u_2 \geq u_1} [g(u_2) - g(u_1)](u_2 - u_1)^+ \\
= \; & \epsilon^2 \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha \frac{|u_2'|^\beta + |u_1'|^\beta}{2} |((u_2 - u_1)^+)'|^2 \\
& + \epsilon^2 \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha \frac{|u_2'|^\beta - |u_1'|^\beta}{2} [|u_2'|^2 - |u_1'|^2] \\
& + \int_{u_2 \geq u_1} [g(u_2) - g(u_1)](u_2 - u_1)^+ \geq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $(u_2 - u_1)^+ = 0$ quase sempre em $(0, R)$, ou equivalentemente, $u_2 \leq u_1$ quase sempre em $(0, R)$.

□

**Lema 4.3.3** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua e crescente, tal que $g(0) = 0$. Então, toda função $h \in L^{q'}_\gamma(0, R)$, onde $q'$ é o expoente conjugado de $q$, ou seja, $1/q + 1/q' = 1$ o problema*

$$
\begin{cases}
-\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' + g(u(r)) = h(r), \;\; r \in (0, R) \\
\\
u'(0) = u(R) = 0
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

*admite uma única solução fraca $u \in X_R$. Além disso, o operador associado $T : L^{q'}_\gamma \to X_R$, $h \mapsto u$ é contínuo e não decrescente.*

**Demonstração:**

**i) Existência**

Seja

$$\phi(u) := \frac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} dr + \int_0^R G(u)dr - \int_0^R h(r)udr,$$

onde

$$G(u) = \int_0^u g(t)dt$$

o funcional associado ao problema (4.10).

**Afirmação 1:** $\phi$ é coercivo.

De fato,

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \tfrac{1}{\beta+2}\|u\|^{\beta+2} + \int_0^R G(u)dr - \int_0^R h(r)udr \\ &\geq \tfrac{1}{\beta+2}\|u\|^{\beta+2} - \int_0^R h(r)udr.\end{aligned}$$

Portanto, $\phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$, ou seja, $\phi$ é coercivo.

**Afirmação 2:** $\phi$ é fracamente semicontínuo inferiormente (s. c. i.).

De fato, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $X_R$. Como $X_R$ está imerso compactamente em $L^q_\gamma$, para $q < q^* := q^* = \frac{(\gamma+1)(\beta+2)}{\alpha-\beta-1}$, pela continuidade do operador de Nemytskii $G(u_n) \to G(u)$ em $L^1_\gamma$ tem-se

$$\psi(u_n) := \int_0^R G(u_n) \to \psi(u) := \int_0^R G(u)$$

sempre que $u_n \rightharpoonup u$ em $X_R$. Portanto, $\psi$ é s. c. i. e consequentemente $\phi$ é s. c. i..

Assim, existe $u_0 \in X_R$ tal que $\phi(u_0) = \min_{u \in X_R} \phi(u)$.

**ii) Unicidade**

Sejam $u_1, u_2 \in X_R$ soluções fracas do problema (4.10), ou seja,

$$\epsilon^2 \int_0^R (r^\alpha |u_1'|^\beta u_1')\varphi' dr + \int_0^R g(u_1)\varphi dr - \int_0^R h(r)\varphi dr = 0, \forall\ \varphi \in X_R \tag{4.11}$$

e

$$\epsilon^2 \int_0^R (r^\alpha |u_2'|^\beta u_2')\varphi' dr + \int_0^R g(u_2)\varphi dr - \int_0^R h(r)\varphi dr = 0, \forall\ \varphi \in X_R. \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12) temos:

$$\epsilon^2 \int_0^R [(r^\alpha |u_1'|^\beta u_1') - (r^\alpha |u_2'|^\beta u_2')]\varphi' dr + \int_0^R [g(u_1) - g(u_2)]\varphi dr = 0.$$

Escolhendo $\varphi = (u_1 - u_2)^+$ e usando o fato que $g$ é crescente, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon^2 \int_0^R [(r^\alpha |u_1'|^\beta u_1') - (r^\alpha |u_2'|^\beta u_2')]((u_1 - u_2)^+)' dr \\
&\quad + \int_0^R [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2)^+ dr \\
&= \epsilon^2 \int_{u_1 \geq u_2} r^\alpha [|u_1'|^\beta |u_1'|^2 - |u_1'|^\beta u_1' u_2' - |u_2'|^\beta u_2' u_1' + |u_2'|^\beta |u_2'|^2] dr \\
&\quad + \int_{u_1 \geq u_2} [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2)^+ dr \\
&= \epsilon^2 \int_{u_1 \geq u_2} r^\alpha \frac{|u_1'|^\beta + |u_2'|^\beta}{2} |((u_1 - u_2)^+)'|^2 dr \\
&\quad + \int_{u_1 \geq u_2} r^\alpha \frac{|u_1'|^\beta - |u_2'|^\beta}{2} [|u_1'|^2 - |u_2'|^2] dr \\
&\quad + \int_{u_1 \geq u_2} [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2)^+ dr \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim, $(u_1 - u_2)^+ = 0$ quase sempre em $(0, R)$, ou seja, $u_1 \leq u_2$ quase sempre em $(0, R)$.

Fazendo $\varphi = (u_2 - u_1)^+$ e usando o fato que $g$ é crescente, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha [|u_2'|^\beta u_2' - |u_1'|^\beta u_1']((u_2-u_1)^+)'dr \\
&\quad + \int_0^R [g(u_2) - g(u_1)](u_2-u_1)^+ dr \\
&= \epsilon^2 \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha [|u_2'|^\beta |u_2'|^2 - |u_2'|^\beta u_2' u_1' - |u_1'|^\beta u_1' u_2' + |u_1'|^\beta |u_1'|^2] dr \\
&\quad + \int_{u_2 \geq u_1} [g(u_2) - g(u_1)](u_2-u_1)^+ dr \\
&= \epsilon^2 \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha \frac{|u_2'|^\beta + |u_1'|^\beta}{2} |((u_2-u_1)^+)'|^2 dr \\
&\quad + \int_{u_2 \geq u_1} r^\alpha \frac{|u_2'|^\beta - |u_1'|^\beta}{2} [|u_2'|^2 - |u_1'|^2] dr \\
&\quad + \int_{u_2 \geq u_1} [g(u_2) - g(u_1)](u_2-u_1)^+ dr \geq 0.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, $(u_2 - u_1)^+ = 0$, ou seja, $u_2 \leq u_1$ quase sempre em $(0, R)$.
Portanto, o problema (4.10) possui uma única solução fraca $u \in X_R$.
O fato de $T$ ser não decrescente segue do Lema 4.3.2.

□

## 4.4 Existência de Soluções

Nesta seção, mostraremos a existência de soluções para o problema (4.1), usando argumentos de minimização.

**Proposição 4.4.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(c_1)$, $(c_2)$ e $(c_3)$. Então dada qualquer bola $B(0, r_1) \subset B(0, R)$, $0 < r_1 < R$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o problema de Dirichlet (4.2), ou seja,*

$$
\begin{cases}
-\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), & em\ (0, r_1) \\
u'(0) = u(r_1) = 0,
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

*tem uma solução positiva* $0 < u_\epsilon(r) < a_3$ *em* $[0, r_1]$. *Além disso, o problema de Dirichlet* (4.3), *ou seja,*

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), & em\ (r_1, R) \\ \\ u(r_1) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

*tem uma solução negativa* $a_1 < v_\epsilon(r) < 0$ *em* $[r_1, R]$.

**Demonstração:** Iniciamos provando a existência de solução positiva para o problema (4.13), para isto usamos argumento de truncamento. Seja $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } 0 \leq u \leq a_3 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, consideramos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma f_1(u), \text{ em } (0, r_1) \\ \\ u'(0) = u(r_1) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Usando $(c_1)$, temos que existe $M > 0$ tal que

$$r^\gamma f_1(t) + Mt$$

é monótona crescente. O problema (4.15) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' + Mu = r^\gamma f_1(u) + Mu, \text{ em } (0, r_1) \\ \\ u'(0) = u(r_1) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Assim, vamos mostrar a existência de uma solução positiva para o problema (4.16) usando o método de sub e supersolução. Mostraremos isto em três etapas.

**Etapa 1:** A função $\overline{u}(r) \equiv a_3$, para $r \in [0, r_1]$ é uma supersolução do problema (4.16). De fato,

$$-\epsilon^2(r^\alpha|a_3'|^\beta a_3')' + Ma_3 = r^\gamma f_1(a_3) + Ma_3.$$

**Etapa 2:** Construção de uma subsolução para o problema (4.16).

Seja

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{f_1(t)}{|t|^\beta t}$$

e $\lambda_1$ é o primeiro auto-valor do operador $Lu := -(r^\alpha |u'|^\beta u')'$ sujeito à condição de fronteira de Dirichlet. Segue-se de $(c_3)$ que dado $\overline{\delta} \in (0, a)$, existe $t_0 > 0$ tal que para todo $| t | \leq t_0$ temos que

$$\left| \frac{f_1(t)}{|t|^\beta t} - a \right| \leq \overline{\delta}.$$

Então

$$a - \overline{\delta} \leq \frac{f_1(t)}{| t |^\beta t}, \text{ para todo } | t | < t_0. \tag{4.17}$$

Seja $\varphi_1 > 0$ uma auto-função do operador $Lu$ definido acima, associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$. Tome $\beta_1 > 0$ tal que

$$| \beta_1 \varphi_1(r) | \leq t_0$$

e

$$\beta_1 \left( \max_{(0, r_1)} \varphi_1 \right) < a_3.$$

Daí, por (4.17)

$$a - \overline{\delta} \leq \frac{f_1(\beta_1 \varphi_1)}{| \beta_1 \varphi_1 |^\beta \beta_1 \varphi_1}.$$

Escolhendo $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0^2 \lambda_1 \frac{r^\delta}{r^\gamma} < a - \overline{\delta}$ tem-se

$$\epsilon_0^2 \lambda_1 \frac{r^\delta}{r^\gamma} \leq \frac{f_1(\beta_1 \varphi_1)}{| \beta_1 \varphi_1 |^\beta \beta_1 \varphi_1}$$

$$\epsilon_0^2 \lambda_1 \beta_1^{\beta+1} | \varphi_1 |^\beta \varphi_1 r^\delta \leq r^\gamma f_1(\beta_1 \varphi_1)$$

$$-\epsilon_0^2 (r^\alpha |(\beta_1 \varphi_1)'|^\beta (\beta_1 \varphi_1)')' \leq r^\gamma f_1(\beta_1 \varphi_1)$$

$$-\epsilon_0^2(r^\alpha|(\beta_1\varphi_1)'|^\beta(\beta_1\varphi_1)')' + M(\beta_1\varphi_1) \leq r^\gamma f_1(\beta_1\varphi_1) + M(\beta_1\varphi_1),$$

ou seja, $\beta_1\varphi_1$ é subsolução para o problema (4.16). Provamos então que existem $\epsilon_0 > 0$ e $\beta_1 > 0$ tais que $\beta_1\varphi_1$ é subsolução para o problema (4.16) para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

**Etapa 3:** Vamos mostrar que o problema (4.16) possui uma solução minimal $u_*$ (respectivamente maximal $u^*$), tal que $\beta_1\varphi_1 = \underline{u} \leq u_* \leq \overline{u} = a_3$. Vamos proceder como em [5]. Considere o conjunto

$$[\underline{u}, \overline{u}] := \{u \in L^\infty_\gamma(0, r_1) : \underline{u}(r) \leq u(r) \leq \overline{u}(r) \text{ q.t.p. em } (0, r_1)\}$$

com a topologia de convergência quase sempre, e defina o operador

$$S : [\underline{u}, \overline{u}] \to L^q_\gamma$$

por

$$Sv = r^\gamma f_1(v) + Mv \in L^\infty_\gamma(0, r_1) \subset L^{q'}_\gamma(0, r_1), \forall\, v \in [\underline{u}, \overline{u}],$$

onde $q'$ é o expoente conjugado de $q$, isto é, $1/q + 1/q' = 1$. Assim, $S$ é não decrescente e limitado. Além disso, dados $v_n, v \in [\underline{u}, \overline{u}]$ com $v_n \to v$ quase sempre em $(0, r_1)$ temos

$$\| Sv_n - Sv \|^q_{L^q_\gamma} = \int_0^{r_1} | r^\gamma f_1(v_n) + Mv_n - r^\gamma f_1(v) - Mv |^q \, dr.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\| Sv_n - Sv \|_{L^q_\gamma} \to 0,$$

ou seja, $S$ é contínuo. Agora, considere o operador contínuo não decrescente

$$F : [\underline{u}, \overline{u}] \to X_R$$

definido por

$$F := ToS,$$

(onde $T$ é o operador contínuo e não decrescente definido no Lema 4.3.3, isto é, para uma função $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, $F(v)$ é a única solução fraca do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' + Mu = r^\gamma f_1(v) + Mv, \text{ em } \quad (0, r_1) \\ \\ u'(0) = u(r_1) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Escrevendo

$$u_1 = F(\underline{u}) \quad \text{e} \quad u^1 = F(\overline{u})$$

obtemos que para toda $\varphi \in X_R$, $\varphi > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{r_1} r^\alpha \mid u_1' \mid^\beta u_1'\varphi' dr \;&+\; \int_0^{r_1} M u_1 \varphi dr \\ &= \int_0^{r_1} (r^\gamma f_1(\underline{u}) + M\underline{u})\varphi dr \\ &\geq \int_0^{r_1} r^\alpha \mid \underline{u}' \mid^\beta \underline{u}'\varphi' dr + \int_0^{r_1} M\underline{u}\varphi dr\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^{r_1} r^\alpha \mid (u^1)' \mid^\beta (u^1)'\varphi' dr \;&+\; \int_0^{r_1} M u^1 \varphi dr \\ &= \int_0^{r_1} (r^\gamma f_1(\overline{u}) + M\overline{u})\varphi dr \\ &\leq \int_0^{r_1} r^\alpha \mid (\overline{u})' \mid^\beta (\overline{u})'\varphi' dr + \int_0^{r_1} M\overline{u}\varphi dr.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.3.2 e usando o fato que $F$ é não decrescente obtemos

$$\underline{u} \leq F(\underline{u}) \leq F(u) \leq F(\overline{u}) \leq \overline{u}, \text{ q.t.p. em } (0, r_1), \; \forall \, u \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Repetindo o mesmo argumento podemos provar que existem duas seqüências $(u^n)$ e $(u_n)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} u^0 &= \overline{u} \;,\; u^{n+1} = F(u^n) \\ u_0 &= \underline{u} \;,\; u_{n+1} = F(u_n) \end{aligned}$$

e para toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ do problema (4.16) obtemos

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq u \leq u^n \leq ... \leq u^1 \leq u^0 = \overline{u}, \text{ q.t.p. em } (0, r_1).$$

Como $(u_n)$ é uma seqüência não decrescente e limitada superiormente e $(u^n)$ é uma seqüência não crescente e limitada inferiormente então

$$u_n \longrightarrow u_*$$

$$u^n \longrightarrow u^*$$

quase sempre em $(0, r_1)$, com $u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}]$, e $u_* \leq u^*$ quase sempre em $(0, r_1)$. Sendo

$$u_{n+1} = F(u_n) \to F(u_*) \ \text{ e } \ u^{n+1} = F(u^n) \to F(u^*) \ \text{ em } \ X_R,$$

pela continuidade da $F$, temos

$$u_*, u^* \in X_R \ \text{ com } u_* = F(u_*) \ \text{ e } \ u^* = F(u^*),$$

o que completa a prova, pois $F(u_*)$ e $F(u^*)$ são soluções fracas de (4.18). Assim, $u_*$ é solução minimal fraca (respectivamente $u^*$ maximal fraca) do problema (4.16) tal que

$$u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}], \ \forall\, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Em particular, toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ do problema (4.16) satisfaz

$$u_* \leq u \leq u^*,$$

quase sempre em $(0, r_1)$. Como as soluções $u_*$ e $u^*$ estão entre 0 e $a_3$ então $u_*$ e $u^*$ são soluções do problema (4.13). Portanto o problema (4.13) possui uma solução $u_\epsilon := u_*$, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que $u_\epsilon \in [\beta_1\varphi_1, a_3]$.

Para provar a existência da solução negativa $v_\epsilon(r)$ para o problema (4.14) a qual está entre $a_1$ e 0 basta considerar a função truncamento $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_2(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } a_1 \leq u \leq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma f_2(u), \ \text{em } (r_1, R) \\ \\ u(r_1) = u(R) = 0. \end{cases}$$

Consideramos aqui, $\lambda_1$ como o primeiro auto-valor do problema

$$\begin{cases} -(r^\alpha|u'|^\beta u')' = \lambda r^\delta |u|^\beta u, \ \text{em } (r_1, R) \\ \\ u(r_1) = u(R) = 0 \end{cases}$$

e $\varphi_1 > 0$ a auto-função associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$.

A demonstração segue de forma análoga ao caso positivo provado em (a). □

## 4.5 Comportamento Assintótico de uma Classe de Soluções Radiais

Nesta seção, vamos estabelecer o comportamento assintótico das soluções dos problemas (4.2) e (4.3) quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

**Proposição 4.5.1** *Seja* $0 < u_\epsilon(r) < a_3$ *uma solução positiva do problema* (4.2) *e seja* $a_1 < v_\epsilon(r) < 0$ *uma solução negativa do problema* (4.3)*. Então*
**i)** $u_\epsilon \longrightarrow a_3$ *quando* $\epsilon \longrightarrow 0$ *uniformemente em todo subconjunto compacto de* $(0, r_1)$*;*
**ii)** $v_\epsilon \longrightarrow a_1$ *quando* $\epsilon \longrightarrow 0$ *uniformemente em todo subconjunto compacto de* $(r_1, R)$.

**Demonstração: i)** Vamos proceder como em [9].

Primeiro observe que existe $\mu \in (0,1)$ tal que $u_\epsilon \in C^{1,\mu}(0, r_1)$, pela Proposição 4.2.4. Defina $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_1(u) := \begin{cases} f(u), & \text{se } 0 \leq u \leq a_3 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo $f_1 \geq 0$ e não identicamente nula pelo Lema 3.2 de [6] temos

$$\begin{cases} u_\epsilon \;>\; 0, & \text{em} \quad (0, r_1) \\ \\ u'_\epsilon \;\leq\; 0, & \text{em} \quad (0, r_1). \end{cases}$$

Sendo $\varphi_1 > 0$ uma auto-função associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$ do operador $Lu := -(r^\alpha |u'|^\beta u')'$ em $(0, r_1)$ sujeito à condição de fronteira de Dirichlet então

$$\begin{cases} \varphi_1 \;>\; 0, & \text{em} \quad (0, r_1) \\ \\ \varphi'_1 \;\leq\; 0, & \text{em} \quad (0, r_1) \end{cases}$$

pelo Lema 3.2 de [6]. Consequentemente, existe $\beta_1 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos

$$u_\epsilon(r) \geq \beta_1 \varphi_1$$

e, para $\eta > 0$ dado existe $C_\eta$ tal que

$$u_\epsilon(r) \geq C_\eta > 0, \tag{4.19}$$

para todo $r \in \Omega_\eta := \{r \in (0, r_1) : dist(r, r_1) > \eta\}$. Tome $\varphi_1$ tal que $\| \varphi_1 \| = 1$. Como $u_\epsilon$ é solução de (4.15) segue que

$$\epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^\beta u'_\epsilon \varphi' dr = \int_0^{r_1} r^\gamma f_1(u_\epsilon)\varphi dr, \tag{4.20}$$

para toda $\varphi \geq 0$, $\varphi \in X_R$.
Em particular, para $\varphi = \varphi_1$ temos

$$\epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^\beta u'_\epsilon \varphi'_1 dr = \int_0^{r_1} r^\gamma f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dr. \tag{4.21}$$

**Afirmação**: A expressão no lado esquerdo de (4.21) tende a zero quando $\epsilon \to 0$.

De fato, usando a desigualdade de Hölder bem como (4.20) com $\varphi = u_\epsilon$ e observando que $0 < u_\epsilon \leq a_3$ e $f_1(u_\epsilon) \leq \widetilde{C}$ temos

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^\beta u'_\epsilon \varphi'_1 dr &\leq \left| \epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^\beta u'_\epsilon \varphi'_1 dr \right| \\
&\leq \epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^{\beta+1} \mid \varphi'_1 \mid dr \\
&= \epsilon^2 \int_0^{r_1} r^{\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta+2}} |u'_\epsilon|^{\beta+1} r^{\frac{\alpha}{\beta+2}} \mid \varphi'_1 \mid dr \\
&\leq \epsilon^2 \left( \int_0^{r_1} r^\alpha \mid u'_\epsilon \mid^{\beta+2} dr \right)^{(\beta+1)/\beta+2} \left( \int_0^{r_1} r^\alpha \mid \varphi'_1 \mid^{\beta+2} dr \right)^{1/\beta+2} \\
&\leq C\epsilon^2 \left( \tfrac{1}{\epsilon^2} \int_0^{r_1} r^\gamma f_1(u_\epsilon) u_\epsilon dr \right)^{(\beta+1)/\beta+2} \\
&\leq \widehat{C} \epsilon^{2/\beta+2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon^2 \int_0^{r_1} r^\alpha |u'_\epsilon|^\beta u'_\epsilon \varphi'_1 dr \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

Por (4.21)

$$\int_0^{r_1} r^\gamma f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dr \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{4.22}$$

Defina

$$d_\eta := inf\{\varphi_1(r) : r \in \Omega_\eta\} > 0.$$

Daí,

$$d_\eta \int_{\Omega_\eta} r^\gamma f_1(u_\epsilon)dr \leq \int_{\Omega_\eta} r^\gamma f_1(u_\epsilon)\varphi_1 dr < \int_0^{r_1} r^\gamma f_1(u_\epsilon)\varphi_1 \to 0, \ \epsilon \to 0. \tag{4.23}$$

Agora, suponha por contradição que existe $C_1 > 0$ e uma seqüência $\epsilon_j \to 0$ tal que as medidas dos conjuntos

$$\Omega_{\eta,j} := \{r \in \Omega_\eta : u_{\epsilon_j}(r) < a_3 - \eta\} \tag{4.24}$$

são limitadas inferiormente por $C_1 > 0$. De (4.23) segue que

$$I_j := \int_{\Omega_{\eta,j}} r^\gamma f_1(u_{\epsilon_j})dr \to 0, \text{ quando } \epsilon_j \to 0. \tag{4.25}$$

Observe que em $\Omega_{\eta,j}$, por (4.19) e (4.24), temos

$$C_\eta \leq u_{\epsilon_j} \leq a_3 - \eta. \tag{4.26}$$

Como $f_1$ é limitada inferiormente por um número $d > 0$ no intervalo $[C_\eta, a_3 - \eta]$, por (4.24) e (4.26) segue que

$$I_j = \int_{\Omega_{\eta,j}} r^\gamma f_1(u_{\epsilon_j})dr \geq d \int_{\Omega_{\eta,j}} r^\gamma dr = dC \geq d'|\Omega_{\eta,j}| \geq d'C_1,$$

para qualquer $0 < d' \leq \frac{dC}{|\Omega_{\eta,j}|}$, o que contradiz (4.25). Portanto, $\mid \Omega_{\eta,j} \mid$ não é limitada inferiormente, ou seja, $u_\epsilon(r) \to a_3$, quando $\epsilon \to 0$ em todo subconjunto compacto de $(0, r_1)$.

**ii)** A demonstração do comportamento da solução negativa de (4.3) segue de maneira análoga ao caso positivo provado em i).

□

**Demonstração do Teorema 4.1.1:**

Segue imediatamente das Proposições 4.4.1 e 4.5.1, onde a primeira mostra a existência das soluções e a segunda mostra a convergência das mesmas.

□

# Capítulo 5

# Existência de Soluções Radiais para uma Classe de Problemas Quaselineares com Condição de Neumann

## 5.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de soluções não constantes para o problema de Neumann na forma radial

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|u'|^\beta u')' = r^\gamma f(u), & \text{em } (0,R) \\ \\ u'(0) = u'(R) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $0 < R < \infty$ e $\alpha, \beta, \gamma$ são números reais dados tais que $\gamma \geq \alpha$ e $\beta \geq 0$. A função $f$ satisfaz as seguintes condições:

$(f_1)$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$, onde $a$ e $b$ são zeros de $f$;

$(f_2)$ Existem exatamente $2l+1$ zeros de $f$,

$$a = a_1 < 0 = a_2 < a_3 < \ldots < a_{2l+1} = b$$

com $l = 1, 2, 3, \ldots$ tais que

$$f'(a_i) < 0, \text{ se } i \text{ é ímpar};$$

$(f_3)$

$$\lim_{t\to a_{2l}} \frac{f(t-a_{2l})}{|t-a_{2l}|^{\beta}(t-a_{2l})} > 0.$$

Consideremos o espaço de Banach $\widehat{X}_R$ das funções absolutamente contínuas $u : (0, R) \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_0^R r^{\alpha}|u|^{\beta+2} + \epsilon^2 \int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2} < \infty.$$

Designaremos a norma em $\widehat{X}_R$ por:

$$\|u\|_{\widehat{X}_R}^{\beta+2} := \epsilon^2 \int_0^R r^{\alpha}|u'(r)|^{\beta+2}dr + \int_0^R r^{\alpha}|u(r)|^{\beta+2}dr.$$

Por uma solução fraca de (5.1), entendemos uma função $u \in \widehat{X}_R$ tal que

$$\epsilon^2 \int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta}u'\varphi' dr - \int_0^R r^{\gamma}f(u)\varphi dr = 0, \ \forall\, \varphi \in \widehat{X}_R,$$

ou seja, uma solução fraca do problema (5.1) é um ponto crítico do funcional

$$I_{\epsilon}(u) := \frac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_0^R r^{\alpha}|u'|^{\beta+2}dr - \int_0^R r^{\gamma}F(u)dr,$$

onde $F(u) = \int_0^R f(t)dt$.

O principal resultado deste Capítulo é o seguinte:

**Teorema 5.1.1** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(f_1)$, $(f_2)$ e $(f_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (5.1) tem pelo menos $l$ soluções não constantes satisfazendo*

$$a_1 < u_1(r) < a_3 < u_2(r) < a_5 < \ldots < a_{2l-1} < u_l(r) < a_{2l+1},$$

*onde $l = 1, 2, 3, \ldots$.*

**Observação 5.1.2** *O Teorema 5.1.1 continua verdadeiro se considerarmos os $a_i'$s negativos para todo $i \geq 3$, ou seja, $a = a_{2l+1} < \ldots < a_3 < a_2 = 0 < a_1 = b$. A hipótese $a_2 = 0$ não é essencial, apenas facilita a apresentação.*

## 5.2 Caso Particular

Nesta seção, vamos provar o caso particular do Teorema 5.1.1, ou seja, $f$ satisfaz as seguintes condições:

$(F_1)$ $f : [a_1, a_3] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ com $f(a_1) = f(a_3) = 0$;

$(F_2)$ Existem exatamente 3 zeros de $f$,

$$a_1 < 0 = a_2 < a_3$$

tais que

$$f'(a_1) < 0, \ f'(a_3) < 0;$$

$(F_3)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^{\beta} t} > 0.$$

**Teorema 5.2.1** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (5.1) possui uma solução $u_\epsilon(r)$ não constante satisfazendo*

$$a_1 < u_\epsilon(r) < a_3.$$

Para provar o Teorema 5.2.1, vamos utilizar alguns resultados que provaremos a seguir.

**Lema 5.2.2** *Dada uma função $f$ satisfazendo as condições $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$, existem funções de classe $C^1$ $f_1 : (-\infty, a_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f_2 : [a_3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^-$ e números reais $\eta_1$ e $\overline{\eta}_1$ satisfazendo as seguintes condições:*

**(i)** $f_1(a_1) = f(a_1)$, $f_1'(a_1) = f'(a_1)$ *e* $f_1(t) > 0$ *para todo* $t \in [\eta_1, a_1]$;

**(ii)** $f_2(a_3) = f(a_3)$, $f_2'(a_3) = f'(a_3)$ *e* $f_2(t) < 0$ *para todo* $t \in [a_3, \overline{\eta}_1]$;

**(iii)** $\eta_1$ *e* $\overline{\eta}_1$ *são tais que*

$$\eta_1 < a_1 < a_3 < \overline{\eta}_1,$$

$$\int_{\eta_1}^{a_1} f_1(t)dt = \left| \int_{a_1}^{0} f(t)dt \right|, \qquad \left| \int_{a_3}^{\overline{\eta}_1} f_2(t)dt \right| = \int_{0}^{a_3} f(t)dt$$

*e para todo $t \in [0,1]$ temos*

$$\eta_1 < t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \overline{\eta}_1$$

*e*

$$\eta_1 < t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \overline{\eta}_1.$$

**Demonstração:** Inicialmente mostramos a existência de $\eta_1$.

Tomemos

$$\overline{\alpha}(t) := t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1.$$

Assim,

$$0 = \frac{d}{dt}(\overline{\alpha}(t)) = (1-2t)a_1 + a_3 - a_1 = -2ta_1 + a_3$$

se, e somente se, $t = \frac{a_3}{2a_1}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\left(\tfrac{a_3}{2a_1}\right) &= \left(1 - \tfrac{a_3}{2a_1}\right)\tfrac{a_3}{2a_1}a_1 + (a_3 - a_1)\tfrac{a_3}{2a_1} + a_1 \\
&= \tfrac{a_3}{2} - \tfrac{a_3^2}{4a_1} + \tfrac{a_3^2}{2a_1} - \tfrac{a_3}{2} + a_1 \\
&= \tfrac{a_3^2}{4a_1} + a_1.
\end{aligned}$$

Sendo $a_1 < 0$ e $\frac{d^2}{dt}\overline{\alpha}(t) = -2a_1$ segue que

$$\overline{\alpha}\left(\frac{a_3}{2a_1}\right) = \frac{a_3^2}{4a_1} + a_1$$

é valor mínimo de $\overline{\alpha}(t)$. Finalmente definamos

$$\eta_1 := \frac{a_3^2}{4a_1} + 2a_1.$$

Para mostrar a existência de $\overline{\eta}_1$ tomemos

$$\overline{\beta}(t) := t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1.$$

Notamos que,

$$0 = \frac{d}{dt}(\overline{\beta}(t)) = (1-2t)a_3 + a_3 - a_1$$

se, e somente se, $t = 1 - \frac{a_1}{2a_3}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\beta}\left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right) &= \left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right)\tfrac{a_1}{2a_3}a_3 + (a_3 - a_1)\left(1 - \tfrac{a_1}{2a_3}\right) + a_1 \\
&= \tfrac{a_1}{2} - \tfrac{a_1^2}{4a_3} + a_3 - \tfrac{a_1}{2} - a_1 + \tfrac{a_1^2}{2a_3} + a_1 \\
&= \tfrac{a_1^2}{4a_3} + a_3.
\end{aligned}$$

Sendo $\frac{d^2}{dt}\overline{\beta}(t) = -2a_3$ e $a_3 > 0$ temos

$$\overline{\beta}\left(1 - \frac{a_1}{2a_3}\right) = \frac{a_1^2}{4a_3} + a_3$$

é valor máximo de $\overline{\beta}$. Agora tomemos

$$\overline{\eta}_1 := \frac{a_1^2}{4a_3} + 2a_3.$$

Pelas escolhas de $\eta_1$ e $\overline{\eta}_1$ temos

$$\eta_1 < a_1 < a_3 < \overline{\eta}_1$$

e para todo $t \in [0, 1]$,

$$\eta_1 < t(1-t)a_3 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \overline{\eta}_1$$

$$\eta_1 < t(1-t)a_1 + (a_3 - a_1)t + a_1 < \overline{\eta}_1.$$

Agora vamos mostrar a existência de $f_1$.

Tomemos $g(t) = f'(a_1)(t - a_1)$ e $\xi_1$, $\xi_2$ funções de classe $C^1$ tais que $\xi_1 \equiv 1$ numa vizinhança de $a_1$, $\xi_2 \equiv 1$ numa vizinhança de $\eta_1$, $\xi_1(t) + \xi_2(t) = 1$ para todo $t \in [\eta_1, a_1]$ e

$$\int_{\eta_1}^{a_1} g(t)\xi_1(t)dt < \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|.$$

Agora escolhamos $s > 0$ tal que

$$\int_{\eta_1}^{a_1} [s\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t)]dt = \left|\int_{a_1}^{0} f(t)dt\right|.$$

Definamos $f_1 : (-\infty, a_1] \to \mathbb{R}^+$ por

$$f_1(t) := \begin{cases} s\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t), & \eta_1 \le t \le a_1 \\ \\ sf'(a_1)t - sa_1 f'(a_1), & t \le \eta_1. \end{cases}$$

Notamos que para $t \le \eta_1$ o gráfico da $f_1$ é a reta tangente à $f_1$ no ponto $(\eta_1, f_1(\eta_1))$.

Portanto, $f_1 \in C^1$, $f_1(a_1) = f(a_1)$, $f_1'(a_1) = f'(a_1)$, $f_1(t) > 0$ para todo $t \in (\eta_1, a_1)$ e

$$\int_{\eta_1}^{a_1} f_1(t)dt = \left| \int_{a_1}^{0} f(t)dt \right|.$$

Finalmente, mostraremos a existência de $f_2$.

Tomemos $g(t) = f'(a_3)(t - a_3)$ e $\xi_1$, $\xi_2$ funções de classe $C^1$ tais que $\xi_1 \equiv 1$ numa vizinhança de $a_3$, $\xi_2 \equiv 1$ numa vizinhança de $\overline{\eta}_1$, $\xi_1(t) + \xi_2(t) = 1$ para todo $t \in [a_3, \overline{\eta}_1]$ e

$$\left| \int_{a_3}^{\eta 1} g(t)\xi_1(t)dt \right| < \int_0^{a_3} f(t)dt.$$

Agora escolhamos $s > 0$ tal que

$$\left| \int_{a_3}^{\overline{\eta}_1} [s\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t)]dt \right| = \int_0^{a_3} f(t)dt.$$

Definamos $f_2 : [a_3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^-$ por

$$f_2(t) := \begin{cases} s\xi_2(t)g(t) + \xi_1(t)g(t), & a_3 \le t \le \overline{\eta}_1 \\ \\ sf'(a_1)t - sa_1 f'(a_1), & t \ge \overline{\eta}_1. \end{cases}$$

Notamos que para $t \ge \overline{\eta}_1$ o gráfico da $f_2$ é a reta tangente à $f_2$ no ponto $(\overline{\eta}_1, f_2(\overline{\eta}_1))$.

Portanto, $f_2 \in C^1$, $f_2(a_3) = f(a_3)$, $f_2'(a_3) = f'(a_3)$, $f_2 < 0$ para todo $t \in (\overline{\eta}_1, a_3)$ e

$$\left| \int_{a_3}^{\overline{\eta}_1} f_2(t)dt \right| = \int_0^{a_3} f(t)dt.$$

□

Como conseqüência do Princípio do Máximo temos:

**Lema 5.2.3** *Se $u_\epsilon$ é uma solução não constante para o problema de Neumann*

$$\begin{cases} -\epsilon^2 (r^\alpha |u'|^\beta u')' = r^\gamma \widehat{f}(u), & em\ (0, R) \\ \\ u'(0) = u'(R) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

*onde* $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é a função truncamento definida por*

$$\widehat{f}(t) := \begin{cases} f(t), & a_1 \le t \le a_3 \\ \\ f_1(t), & t \le a_1 \\ \\ f_2(t), & t \ge a_3, \end{cases}$$

*e* $f_1$ *e* $f_2$ *são definidas no Lema 5.2.2. Então* $a_1 \le u_\epsilon(r) \le a_3$, *ou seja,* $u_\epsilon$ *é solução não constante do problema de Neumann* (5.1).

**Demonstração:** Iniciamos provando que $u_\epsilon(r) \le a_3$. De fato, seja

$$v(r) := \begin{cases} u_\epsilon(r) - a_3, & \text{se} \quad u_\epsilon(r) \ge a_3 \\ \\ 0, & \text{se} \quad u_\epsilon(r) < a_3 \end{cases}$$

e

$$\Omega_+ := \{r \in (0,R) : u_\epsilon(r) \ge a_3\}.$$

Notamos que

$$\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'|^\beta u' v' dr = \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_\epsilon) v dr = \int_{\Omega_+} r^\gamma f_2(u_\epsilon) v dr \le 0.$$

Daí, segue-se

$$\int_0^R r^\alpha |v'|^{\beta+2} \le 0.$$

Logo $|v'| = 0$, ou seja, $v =$ constante. Logo, como $u_\epsilon(x)$ é não constante existe $r \in (0,R)$ com $u_\epsilon(r) < a_3$, isto é, $v(x) = 0$. Assim, segue que $v \equiv 0$. Portanto, $u_\epsilon(r) \le a_3$, para todo $r \in (0,R)$.

Agora vamos mostrar que $a_1 \le u_\epsilon$. De fato, seja

$$w(r) := \begin{cases} u_\epsilon(r) - a_1, & u_\epsilon(r) \le a_1 \\ \\ 0, & u_\epsilon(r) > a_1 \end{cases}$$

e

$$\Omega_- := \{r \in (0,R) : u_\epsilon(r) \le a_1\}.$$

Como

$$\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'|^\beta u' w' dr = \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_\epsilon) w dr = \int_{\Omega_-} r^\gamma f_1(t) w dr \leq 0.$$

Daí, segue-se

$$\int_\Omega r^\alpha |w'|^{\beta+2} \leq 0.$$

Isto implica $|w'| = 0$, ou seja, $w$ = constante. Logo, como $u_\epsilon$ é não constante existe $r \in (0, R)$ onde $u_\epsilon(r) > a_1$, isto é, $w(x) = 0$. Assim, segue que $w \equiv 0$. Então concluímos que $u_\epsilon(r) \geq a_1$, para todo $r \in (0, R)$. Isto completa a prova do Lema.

□

Assim, provar o Teorema 5.2.1 é equivalente provar o Teorema a seguir.

**Teorema 5.2.4** *Suponha que $f$ satisfaz as condições $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o problema (5.2) possui uma solução $u_\epsilon$ não constante.*

Na demonstração do Teorema 5.2.4 utilizaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha [14]. Para isto consideremos $J_\epsilon : \widehat{X}_R \to \mathbb{R}$ o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (5.2) definido por

$$J_\epsilon(u) := \frac{\epsilon^2}{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u) dr,$$

onde

$$\widehat{F}(u) := \int_0^u \widehat{f}(t) dt.$$

Pelas imersões de $\widehat{X}_R$ em $L^q_\gamma$ temos que $J_\epsilon$ está bem definido. Além disso, usando argumentos usuais verifica-se que $J_\epsilon \in C^1(\widehat{X}_R, \mathbb{R})$. Assim,

$$J'_\epsilon(u)\varphi = \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |u'|^\beta \varphi' dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u) \varphi dr, \quad \forall\, \varphi \in \widehat{X}_R,$$

logo, pontos críticos de $J_\epsilon$ são soluções fracas do problema (5.2).

**Lema 5.2.5** *O funcional $J_\epsilon$ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.*

**Demonstração:**

Seja $(u_n) \subset \widehat{X}_R$ uma seqüência de Palais-Smale para o funcional $J_\epsilon$, isto é,

$$J_\epsilon(u_n) \to c \quad e \quad J'_\epsilon(u_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Logo,

$$\mid J_\epsilon(u_n) \mid = \left| \frac{\epsilon^2}{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u_n) dr \right| \leqslant d \tag{5.3}$$

e

$$\mid J'_\epsilon(u_n)v \mid = \left| \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha \mid u'_n \mid^\beta u'_n v' dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_n) v dr \right| \leq \delta_n \|v\|, \tag{5.4}$$

para todo $v \in \widehat{X}_R$ onde $\delta_n \to 0, \ n \to \infty$.

Afirmamos que $(u_n)$ é limitada. De fato, definamos

$$v_n(r) = \begin{cases} u_n(r) - \overline{\eta}_1, & \text{se } u_n(r) \geq \overline{\eta}_1, \\ \\ 0, & \text{se } u_n(r) < \overline{\eta}_1, \end{cases}$$

e

$$\Omega_1 := \{r \in (0, R) : u_n(r) \geq \overline{\eta}_1\}.$$

Por (5.4) temos

$$\left| \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |v'_n|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_n) v_n dr \right| \leq \delta_n \|v_n\|.$$

Como $\widehat{f}(u_n) \leq -C$ em $\Omega_1$, segue que

$$\epsilon^2 \int_o^R r^\alpha |v'_n|^{\beta+2} dr + C \int_0^R r^\gamma v_n dr \leq \delta_n \|v_n\| \tag{5.5}$$

$$C \int_0^R r^\gamma v_n dr \leq \delta_n \|v_n\|. \tag{5.6}$$

Definamos

$$w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Logo, $\|w_n\| = 1$. Tomando subseqüência podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $\widehat{X}_R$, $w_n \to w$ em $L^p_\theta$ e $w_n(r) \to w(r)$ para quase todo $r \in (0, R)$. Dividindo (5.6) por $\|v_n\|$ temos

$$C\int_0^R r^\gamma w_n dr \leq \delta_n.$$

Passando o limite e levando em conta que $w_n \geq 0$, temos que

$$C\int_0^R r^\gamma w dr = 0,$$

donde $w = 0$ quase sempre em $(0, R)$. Dividindo (5.5) por $\|v_n\|$ segue que

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha \frac{|v_n'|^{\beta+2}}{\|v_n\|}dr + C\int_0^R r^\gamma \frac{v_n}{\|v_n\|}dr \leq \delta_n.$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha \frac{|v_n'|^{\beta+2}}{\|v_n\|} \to 0. \tag{5.7}$$

Por outro lado,

$$1 = \|w_n\| = \epsilon^2\int_0^R r^\alpha |w_n'|^{\beta+2}dr + \int_0^R r^\alpha |w_n|^{\beta+2}dr. \tag{5.8}$$

Assim,

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha |w_n'|^{\beta+2}dr \to 1,$$

pois

$$\int_0^R r^\alpha |w_n|^{\beta+2}dr \to \int_0^R r^\alpha |w|^{\beta+2}dr = 0.$$

Daí, multiplicando e dividindo (5.7) por $\|v_n\|^{\beta+1}$

$$\|v_n\|^{\beta+1}\epsilon^2\int_0^R r^\alpha \left|\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)'\right|^{\beta+2}dr = \|v_n\|^{\beta+1}\epsilon^2\int_0^R r^\alpha |w_n'|^{\beta+2}dr \to 0.$$

Assim, por (5.8) segue que $\|v_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Consequentemente, $\|v_n\| \leq C$.

Agora, definamos

$$z_n(r) := \begin{cases} u_n(r), & \text{se } \eta_1 \leq u_n(r) \leq \overline{\eta}_1 \\ \\ 0, & \text{se } \eta_1 \geq u_n(r) \\ \\ 0, & \text{se } u_n(r) \geq \overline{\eta}_1 \end{cases}$$

e

$$\Omega_2 := \{r \in (0, R) : \eta_1 \leq u_n(r) \leq \overline{\eta}_1\}.$$

De (5.4) temos

$$\left|\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |z_n'|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_n) z_n dr\right| \leq \delta_n \|z_n\|_{\widehat{X}_R}.$$

Sendo $|\widehat{f}(u_n)| \leq \widehat{C}$ em $\Omega_2$ e $|z_n| \leq c_1$ em $\Omega_2$, onde $c_1 = max\{|\eta_1|, |\overline{\eta}_1|\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |z_n'|^{\beta+2} dr &\leq \delta_n \|z_n\| + \int_0^R r^\gamma |\widehat{f}(u_n)||z_n| dr \\ &\leq \delta_n \|z_n\| + C \end{aligned}$$

Logo,

$$\|z_n\|^{\beta+2} = \epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |z_n'|^{\beta+2} dr + \int_0^R r^\alpha |z_n|^{\beta+2} dr \leq C + \delta_n \|z_n\|.$$

Como $\beta \geq 0$, então

$$\|z_n\| \leq C.$$

Finalmente, consideramos a seqüência

$$t_n(r) := \begin{cases} u_n(r) - \eta_1, & \text{se } \; u_n(r) \leq \eta_1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e o conjunto

$$\Omega_3 := \{r \in (0, R) : u_n(r) \leq \eta_1 < 0\}.$$

De (5.4) obtemos

$$\left|\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |t_n'|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{f}(u_n) t_n dr\right| \leq \delta_n \|t_n\|.$$

Sendo $\widehat{f}(u_n) \geq C$ em $\Omega_3$ e $t_n < 0$ temos

$$\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |t_n'|^{\beta+2} dr + C \int_0^R r^\gamma (-t_n) dr \leq \delta_n \|t_n\|. \tag{5.9}$$

Assim,

$$C\int_0^R r^\gamma(-t_n)dr \leq \delta_n\|t_n\|. \tag{5.10}$$

Tomemos

$$w_n := \frac{(-t_n)}{\|t_n\|}.$$

Logo, $\|w_n\| = 1$ e $w_n \geq 0$. Daí, segue que $w_n \rightharpoonup w$ em $\widehat{X}_R$, $w_n \to w$ em $L^p_\theta$. Logo, $w_n \to w$ quase todo ponto em $(0, R)$. Dividindo (5.10) por $\|t_n\|$ temos

$$C\int_0^R r^\gamma w_n dr \leq \delta_n.$$

Passando limite quando $n \to \infty$ segue

$$\int_0^R r^\gamma w dr \leq 0,$$

o que implica

$$\int_0^R r^\gamma w = 0.$$

Logo, $w = 0$ pois, $w_n \geq 0$. Dividindo (5.9) por $\|t_n\|$ obtemos

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha \frac{|t_n'|^{\beta+2}}{\|t_n\|}dr + C\int_0^R r^\gamma \frac{(-t_n)}{\|t_n\|}dr \leq \delta_n.$$

Passando limite quando $n \to \infty$ temos

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha \frac{|t_n'|^{\beta+2}}{\|t_n\|}dr \to 0. \tag{5.11}$$

Sendo

$$\|w_n\| = \epsilon^2\int_0^R r^\alpha|w_n'|^{\beta+2} + \int_0^R r^\alpha|w_n|^{\beta+2} = 1$$

temos

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha|w_n'|^{\beta+2} \to 1. \tag{5.12}$$

Daí, multiplicando e dividindo (5.11) por $\|t_n\|^{\beta+1}$ temos

$$\|t_n\|^{\beta+1}\epsilon^2\int_0^R r^\alpha\left|\left(\frac{t_n}{\|t_n\|}\right)'\right|^{\beta+2}dr = \|t_n\|^{\beta+1}\epsilon^2\int_0^R r^\alpha\left|\left(\frac{-t_n}{\|t_n\|}\right)'\right|^{\beta+2}dr \longrightarrow 0.$$

Assim, por (5.12) segue que $\|t_n\| \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$. Consequentemente, $\|t_n\| \leq C$.

Seja $u_n := v_n + z_n + t_n$. Então,

$$\|u_n\| \leq C,$$

ou seja, $(u_n)$ é limitada em $\Omega$. Assim, $J_\epsilon$ satisfaz a condição (P.S).

$\square$

**Lema 5.2.6** *O funcional $J_\epsilon$ é limitado inferiormente.*

**Demonstração:** Seja

$$\Omega_1 := \Omega_3 \bigcup \Omega_4 \quad e \quad \Omega_2 := \Omega_5 \bigcup \Omega_6,$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega_3 &:= \{r \in (0, R) : 0 \leq u(r) \leq a_3\},\\
\Omega_4 &:= \{r \in (0, R) : a_3 < u(r) < \infty\},\\
\Omega_5 &:= \{r \in (0, R) : a_1 \leq u(r) \leq 0\},\\
\Omega_6 &:= \{r \in (0, R) : -\infty < u(r) < a_1\}.
\end{aligned}$$

Daí, como $\Omega_3$ e $\Omega_5$ são limitados temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} r^\gamma \widehat{F}(u)dr &= \int_{\Omega_3} r^\gamma \widehat{F}(u)dr + \int_{\Omega_4} r^\gamma \widehat{F}(u)dr\\
&< \widetilde{C} + \int_{\Omega_4} r^\gamma \widehat{F}(a_3)dr\\
&\leq C
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} r^\gamma \widehat{F}(u)dr &= \int_{\Omega_5} r^\gamma \widehat{F}(u)dr + \int_{\Omega_6} r^\gamma \widehat{F}(u)dr \\
&< \overline{C} + \int_{\Omega_6} r^\gamma \widehat{F}(a_1)dr \\
&< C.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u)dr = \int_{\Omega_1} r^\gamma \widehat{F}(u)dr + \int_{\Omega_2} r^\gamma \widehat{F}(u)dr < C.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u) &= \tfrac{\epsilon^2}{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u)dr \\
&\geq \tfrac{\epsilon^2}{\beta+2} \int_0^R r^\alpha |u'|^{\beta+2} dx] - C \\
&\geq -C.
\end{aligned}$$

Portanto, $J_\epsilon$ é limitado inferiormente.

□

**Lema 5.2.7** *$a_i$, $i$ ímpar, é mínimo local estrito de $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$.*

**Demonstração:** Primeiramente vamos mostrar que $J_\epsilon$ tem um mínimo local em $a_i$ na topologia $C^1$. Assim, seja $\delta > 0$ tal que

$$\widehat{F}(a_i) \geq \widehat{F}(t), \text{ para } |t - a_i| < \delta$$

e seja $u \in C^1$, $u \not\equiv a_i$, tal que

$$||u(r) - a_i||_{C^1} = \max\{|u(r) - a_i|, |u'(r) - a_i|\} < \delta.$$

Afirmamos que existe $\eta > 0$ tal que

$$\Omega_\eta := \{r \in (0, R) : |u(r) - a_i| > \eta\}$$

tem medida positiva. De fato, seja $u \in C^1(0,R)$, $u \not\equiv a_i$. Então, existe $r_0 \in (0,R)$ tal que $u(r_0) \neq a_i$. Logo, existe $\eta > 0$ tal que

$$u(r_0) > a_i + \eta$$

ou

$$u(r_0) < a_i - \eta.$$

Equivalentemente,

$$|u(r_0) - a_i| > \eta.$$

Pela continuidade da função $u$ existe uma bola $B_\delta(r_0)$ tal que

$$|u(r) - a_i| > \eta, \ \forall \ r \in B_\delta(r_0).$$

Portanto, $\Omega_\eta$ tem medida positiva.

Agora, definamos

$$c_1 := max\{\widehat{F}(a_i - \eta), \widehat{F}(a_i + \eta)\}.$$

Sendo $a_i$ máximo local estrito de $\widehat{F}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u)dr &= \int_{\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(u)dr + \int_{(0,R)\setminus\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(u)dr \\
&\leq \int_{\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(u)dr + \int_{(0,R)\setminus\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr \\
&\leq \int_{\Omega_\eta} r^\gamma c_1 dr + \int_{(0,R)\setminus\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr \\
&= c_1 \int_{\Omega_\eta} r^\gamma dr + \int_{(0,R)\setminus\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr \\
&< \widehat{F}(a_i) \int_{\Omega_\eta} r^\gamma dr + \int_{(0,R)\setminus\Omega_\eta} r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr \\
&= \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) &= \tfrac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_0^R r^\alpha|u'|^{\beta+2} - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u)dr \\ &\geq -\int_0^R r^\gamma \widehat{F}(u)dr \\ &> -\int_0^R r^\gamma \widehat{F}(a_i)dr \\ &= J_\epsilon(a_i), \end{aligned}$$

isto é, $a_i$ é um mínimo local estrito de $J_\epsilon$ na topologia $C^1$.

Tome $a_i = a_3$. Suponha por contradição que $a_3$ é mínimo local de $J_\epsilon$ em $C^1$ e que $a_3$ não é mínimo local em $\widehat{X}_R$. Então para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno, existe $v_\eta \in B_\eta \subset \widehat{X}_R$ tal que

$$J_\epsilon(v_\eta) = \min_{v\in B_\eta} J_\epsilon(v) < J_\epsilon(a_3), \tag{5.13}$$

onde $B_\eta$ é a bola de centro $a_3$ e raio $\eta$, isto é,

$$B_\eta := \{v \in \widehat{X}_R : \|v - a_3\| \leq \eta\},$$

pois, $B_\eta$ é fracamente fechada e $J_\epsilon$ é limitado inferiormente em $B_\eta$.

Assim, $v_\eta$ satisfaz a equação de Euler

$$J'_\epsilon(v_\eta)\varphi = G'(v_\eta)\varphi,\ \forall\ \varphi \in \widehat{X}_R,\ \text{onde } G(v_\eta) := \|v_\eta - a_3\|, \tag{5.14}$$

ou seja,

$$\epsilon^2\int_0^R r^\alpha|v'_\eta|^\beta v'_\eta\varphi' - \int_0^R r^\gamma\widehat{f}(v_\eta)\varphi = \mu_\eta\left[\epsilon^2\int_0^R r^\alpha|v'_\eta|^\beta v'_\eta\varphi' + \int_0^R r^\alpha|v_\eta - a_3|^\beta(v_\eta - a_3)\varphi\right],$$

para toda $\varphi \in \widehat{X}_R$ e para algum multiplicador de Lagrange $\mu_\eta$.

Como $v_\eta$ é mínimo de $J_\epsilon$ em $B_\eta$ então $\mu_\eta \leq 0$.

Reescrevendo a equação acima temos

$$(1-\mu_\eta)\epsilon^2\int_0^R r^\alpha|v'_\eta|^\beta v'_\eta\varphi' = \int_0^R [r^\gamma\widehat{f}(v_\eta) + \mu_\eta r^\alpha|v_\eta - a_3|^\beta(v_\eta - a_3)]\varphi,\ \forall\ \varphi \in \widehat{X}_R. \tag{5.15}$$

Assim, $v_\eta$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -(1-\mu_\eta)\epsilon^2(r^\alpha|v_\eta'|^\beta v_\eta')' = r^\gamma \widehat{f}(v_\eta) + \mu_\eta r^\alpha |v_\eta - a_3|^\beta (v_\eta - a_3), & \text{em } (0,R) \\ \\ v_\eta'(0) = v_\eta'(R) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Vamos mostrar que $a_1 \leq v_\eta(r) \leq a_3$, para todo $r \in (0,R)$.

**Afirmação 1:** $v_\eta$ é não constante.

De fato, se $v_\eta \equiv$ constante então $v_\eta \equiv a_3$, pois $v_\eta \to a_3$ em $\widehat{X}_R$, o que contradiz (5.13).

**Afirmação 2:** $v_\eta \leq a_3$.

De fato, seja

$$v(r) := \begin{cases} v_\eta(r) - a_3, & \text{se} \quad v_\eta(r) \geq a_3 \\ \\ 0, & \text{se} \quad v_\eta(r) < a_3 \end{cases}$$

e

$$\Omega_+ := \{r \in (0,R) : v_\eta(r) \geq a_3\}.$$

Da equação (5.15) temos

$$\begin{aligned} (1-\mu_\eta)\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |v_\eta'|^\beta v_\eta' v' dr &= \int_0^R [r^\gamma \widehat{f}(v_\eta) + \mu_\eta r^\alpha |v_\eta - a_3|^\beta (v_\eta - a_3)] v dr \\ &= \int_{\Omega_+} [r^\gamma f_2(v_\eta) v + \mu_\eta r^\alpha |v_\eta - a_3|^{\beta+2}] dr \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

quase sempre pois, $f_2(t) \leq 0$, $v \geq 0$, $\mu_\eta \leq 0$. A função $f_2$ é a função definida no Lema 5.2.2.

Daí, como $(1-\mu_\eta) \geq 0$, $\epsilon^2 > 0$ e $v_\eta' = v'$ temos

$$\int_0^R r^\alpha |v'|^{\beta+2} \leq 0.$$

Isto implica $|v'| = 0$, ou seja, $v \equiv$ constante.

Assim, se $v_\eta(r) \geq a_3$, para todo $r \in (0,R)$ segue-se que $v \equiv v_\eta - a_3$. Mas, $0 = |v'| = |v_\eta'|$. Logo $v_\eta \equiv$ constante. O que é uma contradição.

Portanto, existe algum $r \in (0, R)$ tal que $v_\eta(r) < a_3$ de onde segue que $v(r) = 0$.

Como vimos $v \equiv$ constante então segue que $v(r) \equiv 0$, para todo $r \in (0, R)$, ou seja, $v_\eta \leq a_3$ para todo $r \in (0, R)$.

**Afirmação 3:** $a_1 \leq v_\eta$.

De fato, seja

$$w(r) := \begin{cases} v_\eta(r) - a_1, & v_\eta(r) \leq a_1 \\ \\ 0, & v_\eta(r) > a_1 \end{cases}$$

e

$$\Omega_- := \{r \in (0, R) : v_\eta(r) \leq a_1\}.$$

De (5.15) sabemos

$$\begin{aligned} (1 - \mu_\eta)\epsilon^2 \int_0^R r^\alpha |v_\eta'|^\beta v_\eta' w' dr &= \int_0^R [r^\gamma \widehat{f}(v_\eta) + \mu_\eta r^\alpha |v_\eta - a_3|^\beta (v_\eta - a_3)] w dr \\ &= \int_{\Omega_-} r^\gamma f_1(v_\eta) w dr + \mu_\eta \int_{\Omega_-} r^\alpha |v_\eta - a_3|^\beta (v_\eta - a_3) w \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

quase sempre pois, $f_1(t) \geq 0$, $w \leq 0$, $\mu_\eta \leq 0$, e $(v_\eta - a_3) < 0$. A função $f_1$ é como definida no Lema 5.2.2.

Daí, como $(1 - \mu_\eta) \geq 0$, $\epsilon^2 \geq 0$ e $w' = v_\eta'$ temos

$$\int_\Omega r^\alpha |w'|^{\beta+2} \leq 0.$$

Isto implica $|w'| = 0$, ou seja, $w =$ constante.

Assim, se $v_\eta(r) \leq a_1$, para todo $r \in (0, R)$ segue-se que $w \equiv v_\eta - a_1$. Mas, $0 = |w'| = |v_\eta'|$, ou seja, $v_\eta \equiv$ constante. O que é uma contradição.

Logo, existe algum $r \in (0, R)$ tal que $v_\eta(r) \geq a_1$. Assim, $w(r) = 0$. Mas, $w \equiv$ constante. Então $w \equiv 0$, para todo $r \in (0, R)$, ou seja, $v_\eta \geq a_1$, para todo $r \in (0, R)$.

Portanto, das afirmações 2 e 3 temos

$$a_1 \leq v_\eta(r) \leq a_3,$$

isto é,

$$\sup_{(0,R)} |v_\eta| \leq C^*,$$

onde $C^*$ é alguma constante positiva.

Então pelo Teorema 2 de [20] temos que existe uma constante positiva $\theta \in (0, 1)$ tal que $v_\eta \in C^{1,\theta}$ e além disso, existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de $(0, R)$, $C^*$, $\beta$ tal que

$$\|v_\eta\|_{C^{1,\theta}} \leq C.$$

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá temos que existe uma subseqüência de $(v_\eta)$ que vamos continuar indicando por $(v_\eta)$ tal que $v_\eta \longrightarrow a_3$ em $C^1$. Isto contradiz o fato de $a_3$ ser mínimo local de $J_\epsilon$ em $C^1$.

De fato, $a_3$ mínimo local de $J_\epsilon$ em $C^1$ implica que

$$J_\epsilon(a_3) \leq J_\epsilon(v)$$

para todo $v \in C^1$ tal que $0 < \|v - a_3\|_{C^1} < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$. Assim, como $v_\eta \longrightarrow a_3$ em $C^1$ segue-se que

$$J_\epsilon(a_3) \leq J_\epsilon(v_\eta).$$

Por outro lado, temos de (5.13) que $J_\epsilon(v_\eta) < J_\epsilon(a_3)$, para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Daí a contradição.

Portanto, $a_3$ é mínimo local de $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$.

De maneira análoga prova-se que $a_1$ é mínimo local de $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_i$ é mínimo local estrito de $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$. Caso contrário, para todo $\delta > 0$, existe $v_\delta \in \widehat{X}_R$ tal que

$$J_\epsilon(v_\delta) = J_\epsilon(a_i).$$

Logo, $v_\delta$ é um ponto crítico de $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$.

□

Usaremos alguns argumentos de [7] para obter o seguinte resultado.

**Lema 5.2.8** *Se $a$ é um mínimo local estrito de $J_\epsilon$, isto é,*

$$J_\epsilon(a) < J_\epsilon(u) \tag{5.17}$$

*para todo $u \in \widehat{X}_R$ tal que $0 < \|u - a\| < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$. Então, para todo $0 < \rho < \delta_0$,*

$$\inf\{J_\epsilon(u) : u \in \widehat{X}_R \text{ e } \|u - a\| = \rho\} > J_\epsilon(a). \tag{5.18}$$

**Demonstração:**

Suponha por contradição que o ínfimo em (5.18) é igual a $J_\epsilon(a)$ para algum $\rho$ com $0 < \rho < \delta_0$. Assim, existe uma seqüência $u_n \in \widehat{X}_R$ com $\|u_n - a\| = \rho$ e, digamos, $J_\epsilon(u_n) \leq J_\epsilon(a) + \frac{1}{2n^2}$. Defina

$$A := \{u \in \widehat{X}_R : \rho - \delta \leq \|u - a\| \leq \rho + \delta\},$$

onde $\delta > 0$ é escolhido de forma que $0 < \rho - \delta$ e $\rho + \delta < \delta_0$. Pela hipótese de contradição e (5.17) segue que

$$inf\{J_\epsilon(u) : u \in A\} = J_\epsilon(a).$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland em $A$ para cada n temos que existe uma seqüência $v_n \in A$ tal que

$$J_\epsilon(v_n) \leq J_\epsilon(u_n), \tag{5.19}$$

$$\|v_n - u_n\| \leq \frac{1}{n}, \tag{5.20}$$

e

$$J_\epsilon(v_n) \leq J_\epsilon(u) + \frac{1}{n}\|u - v_n\|, \quad \forall \ u \in A. \tag{5.21}$$

Mostraremos a seguir que $v_n$ é uma seqüência (P.S) para $J_\epsilon$ em $\widehat{X}_R$, isto é,

$$J_\epsilon(v_n) \leq C \text{ (isto segue de (5.19))}$$

e

$$J'_\epsilon(v_n) \to 0, \ n \to \infty. \tag{5.22}$$

Provado (5.22), segue-se que $v_n$ possui uma subseqüência convergente. Denotando essa subseqüência $v_n$ por $v_n$ temos que $v_n \to v$ em $\widehat{X}_R$. Observamos que $v \in A$, pois $A$ é completo. Logo, $v \in \widehat{X}_R$ e satisfaz $\|v - a\| = \rho$ e $J_\epsilon(v) = J_\epsilon(a)$, o que contradiz (5.17).

Para concluirmos a demonstração provaremos que $J'_\epsilon(v_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, para isto fixamos $n > \frac{1}{\delta}$, tomamos $w \in \widehat{X}_R$ e $u_t := v_n + tw$. Para $|t|$ suficientemente pequeno

$u_t = v_n + tw \in A$. De fato, definimos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\|u_t - a\| &= \|v_n - a\| \\ &\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - a\| \\ &\leq \tfrac{1}{n} + \rho \\ &< \delta + \rho.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|v_n - a\| &\geq \|a - u_n\| - \|u_n - v_n\| \\ &\geq \rho - \tfrac{1}{n} \\ &> \rho - \delta.\end{aligned}$$

Assim, podemos tomar $u = u_t$ em (5.21), e então para $t > 0$,

$$\begin{aligned}\tfrac{J_\epsilon(v_n) - J_\epsilon(v_n + tw)}{t} &\leq \tfrac{1}{n}\tfrac{1}{t}\|v_n - tw - v_n\| \\ &\leq \tfrac{1}{nt}\|tw\|.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Tomando limite em (5.23) quando $t \to 0$ segue que

$$\langle J'_\epsilon(v_n), w\rangle \leq \frac{1}{n}\|w\|.$$

Consequentemente,

$$|\langle J'_\epsilon(v_n), w\rangle| \leq \frac{1}{n}\|w\|, \quad \forall\, w \in \widehat{X}_R.$$

Assim, $J'_\epsilon(v_n) \to 0$, $n \to \infty$, o que prova (5.22). Assim, a demonstração do lema está completa.

□

**Demonstração do Teorema 5.2.4:** Definamos

$$\Gamma := \{h \in C([0,1], \widehat{X}_R) : h(0) = a_1 \text{ } e \text{ } h(1) = a_3\}$$

e

$$\gamma_\epsilon := \inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(h(t)).$$

Pelo Lema 5.2.8

$$\gamma_\epsilon := \inf_{h\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(h(t)) > c = max\{J_\epsilon(a_1), J_\epsilon(a_3)\}.$$

Como $J_\epsilon$ satisfaz a condição (P.S), segue-se do Teorema 1.0.12 que existe $\overline{u}$ ponto crítico de $J_\epsilon$ tal que

$$J_\epsilon(\overline{u}) = \gamma_\epsilon.$$

Além disso, $\overline{u}$ é do tipo passo da montanha, pois se os pontos críticos de $J_\epsilon$ não são isolados em $\widehat{X}_R$ então existe uma infinidade de pontos críticos de $J_\epsilon$. Como $a_1$ e $a_3$ são mínimos locais estritos então $\overline{u} \neq a_1$ e $\overline{u} \neq a_3$. Portanto para mostrar a existência de um ponto crítico não constante de $J_\epsilon$ basta mostrar que $\gamma_\epsilon < 0$, pois $J_\epsilon(0) = 0$, o que implica $\overline{u} \neq 0$.

Afirmamos que $\gamma_\epsilon < 0$. De fato, consideremos $B \subset (0, R)$ uma bola aberta e definamos

$$u_0(r) := \begin{cases} v_\epsilon(r), & r \in \overline{B} \\ \\ w_\epsilon(r), & r \in [0, R]\backslash\overline{B}, \end{cases}$$

onde $v_\epsilon$ é a solução positiva para o problema de Dirichlet (4.2) em $\overline{B}$ e $w_\epsilon$ é a solução negativa para o problema de Dirichlet (4.3) em $[0, R]\backslash\overline{B}$.

Como $(0, R) \in C^1$ e $v_\epsilon, w_\epsilon \in L^p(0, R)$ segue-se que $u_0 \in \widehat{X}_R$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ consideremos o caminho

$$h_\epsilon(t) := t(1-t)u_0(r) + (a_3 - a_1)t + a_1, \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

Queremos mostrar que existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\max J_\epsilon(h_\epsilon(t)) < 0.$$

Suponha por contradição, que não existe tal $\epsilon_0 > 0$. Então para todo $\epsilon_0 > 0$, existe $\epsilon < \epsilon_0$ tal que

$$J_\epsilon(h_\epsilon(t_\epsilon)) \geq 0, \tag{5.24}$$

para algum $t_\epsilon \in [0, 1]$. Seja $(\epsilon_k)$ uma seqüência tal que

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0, \quad J_\epsilon(h_{\epsilon_k}(t_{\epsilon_k})) \geq 0, \quad 0 \leq \lim_{k\to 0} t_{\epsilon_k} = \theta \leq 1.$$

Para simplificar a notação façamos $\epsilon_k = \epsilon$ e $t_{\epsilon_k} = t$. Então, tomando qualquer bola aberta $B \subset [0, R]$, temos

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \tfrac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_B r^\alpha |h'_\epsilon(t)|^{\beta+2}dr + \frac{\epsilon^2}{\beta+2}\int_{(0,R)\setminus B} r^\alpha |h'_\epsilon(t)|^{\beta+2}dr - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(h_\epsilon(t))dr \\
&= \tfrac{\epsilon^2}{\beta+2} t^{\beta+2}(1-t)^{\beta+2}\left(\int_B r^\alpha |v'_\epsilon|^{\beta+2}dr + \int_{(0,R)\setminus B} r^\alpha |w'_\epsilon|^{\beta+2}dr\right) \\
&\quad - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(t(1-t)u_0 + (a_3-a_1)t + a_1)dr.
\end{aligned}
$$

Sendo

$$
\epsilon^2 \int_B r^\alpha |v'_\epsilon|^{\beta+2}dr = \int_B r^\gamma \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dr
$$

e

$$
\epsilon^2 \int_{(0,R)\setminus B} r^\alpha |w'_\epsilon|^{\beta+2}dr = \int_{(0,R)\setminus B} r^\gamma \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dr
$$

temos

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \tfrac{t^{\beta+2}(1-t)^{\beta+2}}{\beta+2}\left[\int_B r^\gamma \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dr + \int_{(0,R)\setminus B} r^\gamma \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dr\right] \\
&\quad - \int_0^R r^\gamma \widehat{F}(t(1-t)u_0 + (a_3-a_1)t + a_1)dr.
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Como $v_\epsilon \longrightarrow a_3$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $B$ e $w_\epsilon \longrightarrow a_1$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ uniformemente em todo subconjunto compacto de $\Omega\setminus B$, temos

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_B r^\gamma \widehat{f}(v_\epsilon)v_\epsilon dr = 0
$$

e

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{(0,R)\setminus B} r^\gamma \widehat{f}(w_\epsilon)w_\epsilon dr = 0.
$$

Tomando limite em (5.25), pelos fatos acima e pelo Teorema da Convergência Dominada segue-se que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_0^R r^\gamma \widehat{F}(t(1-t)u_0(r,\epsilon)+(a_3-a_1)t+a_1)dr\right]\\ &= -r^\gamma \widehat{F}(\theta(1-\theta)a_3+(a_3-a_1)\theta+a_1)|B|\\ &\quad -r^\gamma \widehat{F}(\theta(1-\theta)a_1+(a_3-a_1)\theta+a_1)|(0,R)\backslash B|,\end{aligned}$$

onde $|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$. Pelas hipóteses sobre $\widehat{f}$, Lema 5.2.2, temos

$$-\widehat{F}(\theta(1-\theta)a_3+(a_3-a_1)\theta+a_1) \leq 0 \tag{5.26}$$

e

$$-\widehat{F}(\theta(1-\theta)a_1+(a_3-a_1)\theta+a_1) \leq 0. \tag{5.27}$$

Como

$$\eta_1 < \theta(1-\theta)a_3+(a_3-a_1)\theta+a_1 < \overline{\eta}_1,$$

$$\eta_1 < \theta(1-\theta)a_1+(a_3-a_1)\theta+a_1 < \overline{\eta}_1$$

e $\widehat{F}$ se anula somente em $\eta_1$, 0 e $\overline{\eta}_1$ então se (5.26) e (5.27) forem iguais a zero segue-se que

$$\theta(1-\theta)a_3+(a_3-a_1)\theta+a_1 = 0 = \theta(1-\theta)a_1+(a_3-a_1)\theta+a_1,$$

isto é,

$$\theta(1-\theta)a_3 = \theta(1-\theta)a_1.$$

Como $a_3 \neq a_1$

$$\theta(1-\theta) = 0,$$

ou seja, $\theta = 0$ ou $\theta = 1$. Logo $\widehat{F}(a_1) = 0$ ou $\widehat{F}(a_3) = 0$. Então $a_1 = 0$ ou $a_3 = 0$, o que é impossível. Consequentemente,

$$-\widehat{F}(\theta(1-\theta)a_3+(a_3-a_1)\theta+a_1) < 0$$

ou

$$-\widehat{F}(\theta(1-\theta)a_1 + (a_3 - a_1)\theta + a_1) < 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(h_\epsilon(t)) < 0,$$

o que contradiz (5.24). Assim, $\gamma_\epsilon < 0$.

□

**Corolário 5.2.9** *Seja $f$ satisfazendo $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$ e seja $u_\epsilon$ a solução não constante do problema* (5.1) *tal que $J_\epsilon(u_\epsilon) = \gamma_\epsilon$. Então*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} sup J_\epsilon(u_\epsilon) < 0.$$

**Demonstração:** Pela demonstração do Teorema 5.2.4 existe um número $\epsilon_1$ positivo tal que

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t)) < 0$$

para todo $t \in [0,1]$, onde

$$h_{\epsilon_1}(t) = t(1-t)u_0(r,\epsilon_1) + (a_3 - a_1)t + a_1,$$

$u_0$ é como definida na demonstração do Teorema 5.2.4. Portanto, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$,

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t)) \leq J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t)) < 0$$

para todo $t \in [0,1]$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_\epsilon \in [0,1]$ tal que

$$h_{\epsilon_1}(t_\epsilon) = u_\epsilon.$$

Consequentemente,

$$J_\epsilon(h_{\epsilon_1}(t_\epsilon)) = J_\epsilon(u_\epsilon),$$

para algum $t_\epsilon \in [0,1]$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} sup J_\epsilon(u_\epsilon) < 0.$$

□

**Demonstração do Teorema 5.2.1:**

Segue do Teorema 5.2.4 e Lema 5.2.3

□

## 5.3 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção, vamos apresentar a prova do Teorema principal deste capítulo utilizando os resultados acima provados.

**Demonstração do Teorema 5.1.1:**

Para cada $l = 1, 2, ....$ considere a função $\widetilde{f} : [a_{2l-1} - a_{2l}, a_{2l+1} - a_{2l}] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ definida por

$$\widetilde{f}(t) := f(t + a_{2l}).$$

Então pelo Teorema 5.2.1, o problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2(r^\alpha|v'|^{\beta+2} + v')' = r^\gamma \widetilde{f}(v), \; r \in (0, R) \\ \\ v'(0) = v'(R) = 0, \end{cases} \tag{5.28}$$

tem uma solução não constante $v_l(r)$ tal que

$$a_{2l-1} - a_{2l} < v_l(r) < a_{2l+1} - a_{2l},$$

onde $v = u - a_{2l}$. Assim, $u_l = v_l + a_{2l}$ é uma solução não constante para o problema (5.1) com $a_{2l-1} < u_l < a_{2l+1}$.

Logo, existem pelo menos $l$ soluções para o problema (5.1) satisfazendo

$$a_1 < u_1(r) < a_3 < u_2(r) < a_5 < ... < a_{2l-1} < u_l(r) < a_{2l+1}.$$

$\square$

## 5.4 Comportamento Assintótico de uma Classe de Soluções Radiais

Nesta seção, vamos estabelecer o comportamento assintótico da solução não constante do problema (5.1), determinada no Teorema 5.2.1.

**Teorema 5.4.1** *Seja $f$ satisfazendo as condições $(F_1)$, $(F_2)$ e $(F_3)$ e seja $u_\epsilon$ a solução não constante do problema* (5.1). *Dado algum $\delta > 0$, seja*

$$\Omega^+(\epsilon, \mu) := \{r \in (0, R) : 0 < u_\epsilon(r) < \mu < a_3\}$$

*contendo uma bola aberta $B(r, w^*(\epsilon, \delta))$ centrada em algum ponto $r = r(\epsilon, \mu) \in \Omega^+(\epsilon, \mu)$ cujo raio $w^*(\epsilon, \mu)$ é o máximo dos raios das bolas abertas contidas em $\Omega^+(\epsilon, \mu)$. Então*

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \mu) = 0.$$

**Demonstração:**

Seja $0 < \mu < a_3$. Suponha por contradição que

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \mu) \neq 0.$$

Então existe uma seqüência convergente $\{w^*(\epsilon_k, \mu)\}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} w^*(\epsilon_k, \mu) = \alpha_\mu > 0.$$

Isto significa que, para cada $\epsilon_k > 0$, existe um ponto $r_k = r(\epsilon_k, \mu) \in \Omega^+(\epsilon_k, \mu)$ tal que a bola $B(r_k, \alpha_\mu)$, centrada em um ponto $r_k$ com raio $\alpha_\mu$, está contida em $\Omega^+(\epsilon_k, \mu)$.

Observamos que $u_\epsilon$ é uma supersolução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\epsilon_k^2 (r^\alpha |u'|^{\beta+2} u')' = r^\gamma f(u), r \in B(r_k, \alpha_\mu) \\ \\ u'(0) = u(r) = 0, \ r \in \partial B(r_k, \alpha_\mu). \end{cases} \tag{5.29}$$

**Afirmação**: Existem $\epsilon_{k_0}$ e $\beta_1 > 0$ tais que $\beta_1 \varphi_1$ é subsolução para o problema (5.29) para todo $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k_0}$, onde $\varphi_1$ é a auto-função associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$ do operador $Lu := -(r^\alpha |u'|^{\beta+2} u')'$ sujeito à condição de fronteira de Dirichlet.

De fato, seja

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^\beta t}.$$

Segue-se de $(F_3)$ que dado $\delta_1 > 0$, (tome $\delta_1 < a$), existe $t_0 > 0$ tal que para $|\ t\ | \leq t_0$ tem-se

$$\left| \frac{f(t)}{|t|^\beta t} - a \right| \leq \delta_1.$$

Então

$$a - \delta_1 \leq \frac{f(t)}{| t |^\beta t}, \tag{5.30}$$

para todo $|t| < t_0$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma auto-função do operador $L$ associada ao primeiro auto-valor $\lambda_1$.

Tome $\beta_1 > 0$ tal que

$$| \beta_1 \varphi_1(r) | \leq t_0$$

e

$$\beta_1 \left( \max_{(0,R)} \varphi_1 \right) < a_3.$$

Daí, por (5.30)

$$a - \delta_1 \leq \frac{f(\beta_1 \varphi_1)}{| \beta_1 \varphi_1 |^\beta \beta_1 \varphi_1}.$$

Tome $\epsilon_{k_0} > 0$ tal que $\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 \frac{r^\delta}{r^\gamma} < a - \delta_1$. Então

$$\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 \frac{r^\delta}{r^\gamma} \leq \frac{f(\beta_1 \varphi_1)}{| \beta_1 \varphi_1 |^\beta \beta_1 \varphi_1}$$

$$\epsilon_{k_0}^2 \lambda_1 r^\delta \beta_1^{\beta+1} | \varphi_1 |^\beta \varphi_1 \leq r^\gamma f(\beta_1 \varphi_1)$$

$$-\epsilon_{k_0}^2 (r^\alpha |(\beta_1 \varphi_1)'|^\beta (\beta_1 \varphi_1)')' \leq r^\gamma f(\beta_1 \varphi_1)$$

ou seja, $\beta_1 \varphi_1$ é subsolução para o problema (5.29). Portanto, existem $\epsilon_{k_0} > 0$ e $\beta_1 > 0$ tais que $\beta_1 \varphi_1$ é subsolução para o problema (5.29) para todo $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k_0}$.

Assim, pelo Teorema 4.1.1 sabemos que o problema (5.29) tem uma solução minimal $u^*$ com $\beta_1 \varphi_1 \leq u^* \leq u_\epsilon$ e tal que $u^* \to a_3$ em todo subconjunto compacto de $B(r_k, \alpha_\mu)$ quando $\epsilon_k \to 0$. Isto contradiz o fato que $\mu < a_3$. $\square$

**Observação 5.4.2** *Se escolhermos uma bola aberta $B = B(x, w^*(\epsilon, \mu))$ centrada em algum ponto $r = r(\varepsilon, \mu)$ cujo raio $w^*(\epsilon, \mu)$ é o máximo dos raios das bolas em*

$$\Omega^-(\epsilon, \mu) = \{r \in (0, R) : a_1 < -\mu < u(r, \epsilon) < 0\}$$

*podemos provar de maneira análoga que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} w^*(\epsilon, \mu) = 0.$$

**Observação 5.4.3** *Por uma translação, podemos observar que o Teorema 5.4.1 e Observação 5.4.2 estabelece o comportamento assintótico de qualquer solução $u_l(x, \epsilon)$ determinada no Teorema 5.1.1.*

# Referências Bibliográficas


[1] Anello, G. e Cordaro, G., *Existence of solutions of the Neumann problem for a class of equations involving the p-Laplacian via a variational principle of Ricceri*, Arch. Math., 79 (2002), 274-287.

[2] Brézis, H., *Analyse fonctionelle théorie et applications*, Masson, Paris (1987).

[3] Boccardo, L. e Murat, F., *Almost Everywhere Convergence of the Gradients of Solutions to Elliptic and Parabolic Equations*, Nonl. Anal. TMA, 6 (1992), 581-597.

[4] Candito, P., *Infinitely many solutions to the Neumann problem for elliptic equations involving the p-Laplacian and with discontinuous nonlinearities*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 45 (2002), 397-409.

[5] Cañada, A., Drábek, P. e Gamez, J., *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear difusion*, Trans. AMS, 349 (1997), 4231-4249.

[6] Clément, P., De Figueiredo, D. G. e Mitidieri, E., *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Nonl. Anal. TMA, 7 (1996), 133-170.

[7] Cuesta, M., De Figueiredo, D. G. e Gossez, J. P., *The beginning of the Fučik spectrum for the p-Laplacian*, J. Diff. Eqns., 159 (1999), 212-238.

[8] De Figueiredo, D. G.,*Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Détours*, TATA Institute, Springer- Verlag, New York/Berlin (1989).

[9] De Figueiredo, D. G., *On the existence of multiple ordered solutions of nonlinear eigenvalue problems*, Nonl. Anal. TMA, 11 (1987), 481-492.

[10] De Figueiredo, D. G., Gonçalves, J. V. e Miyagaki, O. H., *On a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponents*, Comm. Contemp. Math., 2 (2000), 47-59.

[11] Díaz, J. I., *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, Vol. 1, Elliptic Equations, Pitman, London (1985).

[12] García Azorero, J. P., Peral Alonso, I. e Manfredi, J. J., *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Comm. Contemp. Math., 3 (2000), 385-404.

[13] Gilbarg, D. e Trudinger,N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[14] Hofer, H., *A geometric description of the neighborhood of a critical point given by the moutain-pass theorem*, J. London Math. Soc, 31 (1985), 566-570.

[15] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Vol. 13, Springer Verlag, Heidelberg (1993).

[16] Kelley, W., e Ko, B.S.,*Semilinear elliptic singular perturbation problems with non uniform interior behavior*, J. Diff. Eqns., 86 (1990), 88-101.

[17] Ko, B. S., *The third solution of similinear elliptic boundary value problems and applications to singular perturbation problems*, J. Diff. Eqns., 101 (1993), 1-14.

[18] Ko, B. S., *The existence of nonconstant solutions of a class of semilinear elliptic Neumann problems with a small parameter*, Nonl. Anal. TMA, 28 (1997), 1249-1263.

[19] Kufner, A. e Opic, B., *Hardy-type inequalities*,Pitman Res. Notes in Math., vol 219, Longman Scientific and Technical, Harlow (1990).

[20] Lieberman, G. M., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonl. Anal. TMA, 12 (1988), 1203-1219.

[21] Manríquez, C. C., *Existência e multiplicidade de soluções para certos problemas elípticos semilineares*, Tese de Doutorado, UNICAMP, (1992).

[22] Ricceri, B., *Infinitely many solutions of the Neumann problem for elliptic equations involving the p-Laplacian*, Bull. London Math. Soc., 33 (2001), 331-340.

[23] Tolksdorf, P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eqns., 51 (1984), 126-150.

[24] Vázquez, J. L., *A strong maximum principle for quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim., 12 (1984), 191-202.

[25] Willem, M., *Minimax Theorems*, PNDLE, Vol 24, Birkhäuser, Berlin (1996).