



TIAGO ANTONIO ALVES COIMBRA

**OPERAÇÃO PARA CONTINUAÇÃO DO AFASTAMENTO:
OPERADOR DIFERENCIAL, COMPORTAMENTO DINÂMICO E
EMPILHAMENTO MULTI-PARAMÉTRICO**

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

TIAGO ANTONIO ALVES COIMBRA

**OPERAÇÃO PARA CONTINUAÇÃO DO AFASTAMENTO:
OPERADOR DIFERENCIAL, COMPORTAMENTO DINÂMICO E
EMPILHAMENTO MULTI-PARAMÉTRICO**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientadora: Maria Amélia Novais Schleicher

Coorientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO TIAGO ANTONIO ALVES
COIMBRA, E ORIENTADA PELA PROF(A).DR(A) MARIA
AMÉLIA NOVAIS SCHLEICHER

Assinatura da Orientadora

Maria Amélia Novais Schleicher

Assinatura do Coorientador

J. Schleicher

**CAMPINAS
2014**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C665o Coimbra, Tiago Antonio Alves, 1981-
Operação para continuação do afastamento: operador diferencial, comportamento dinâmico e empilhamento multi-paramétrico / Tiago Antonio Alves Coimbra. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Maria Amélia Novais Schleicher.
Coorientador: Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ondas sísmicas. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Teoria assintótica. 4. Métodos de continuação. I. Schleicher, Maria Amélia Novais, 1967-. II. Schleicher, Joerg Dietrich Wilhelm, 1964-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Offset continuation operation: differential operator, dynamic behavior and multi-parameter stacking

Palavras-chave em inglês:

Seismic waves

Partial differential equations

Asymptotic theory

Continuation methods

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maria Amélia Novais Schleicher [Orientador]

Lúcio Tunes dos Santos

Jesse Carvalho Costa

Reynam da Cruz Pestana

Walter Eugênio de Medeiros

Data de defesa: 24-02-2014

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 24 de fevereiro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Maria Amélia Novais Schleicher

Prof(a). Dr(a). MARIA AMÉLIA NOVAIS SCHLEICHER

Lúcio Tunes dos Santos

Prof(a). Dr(a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS

Jesse C.

Prof(a). Dr(a). JESSE CARVALHO COSTA

Reynam da Cruz Pestana

Prof(a). Dr(a). REYNAM DA CRUZ PESTANA

Walter Eugênio de Medeiros

Prof(a). Dr(a). WALTER EUGÊNIO DE MEDEIROS

Abstract

The Offset Continuation Operation (OCO) transforms a seismic record with a certain offset between source and receiver in another record as if obtained with another offset. The displacement between a seismic event under this operation may be modeled by a second order partial differential equation. Based on the WKBJ approximation, we deduce an OCO eikonal-type equation and a transport equation. The former describes the kinematic features of this displacement, analogously to an acoustic wave, and the latter describes the change of the amplitudes. We present a solution for the proposed new equation, based on ray-theoretical considerations. The differential configuration transformation operators correct the geometric spreading for any common offset section (CO) in an asymptotic way. Based on the kinematics of the operation, we propose a multi-parametric stacking in the unmigrated data domain. This multi-parametric stacking uses an average velocity called OCO velocity as well as the slope of the reflection event in the seismic section. Since it is based on OCO, the traveltimes used in this multi-parametric stacking accompany the OCO trajectory that approximates the true trajectory of the common reflection point (CRP). Thus, the extracted parameters are used to improve the precision of the moveout or to do corresponding corrections for nonzero offsets. Thus, it is possible to increase the quality of stacked conventional sections in zero offset or even generate stacked sections in other common offsets. The kinematic parameters involved can also be used to build a better velocity model. Numerical examples show that stacking along OCO trajectories significantly increases the quality of the data using fewer parameters than the classical methods.

Keywords: Seismic waves, partial differential equations, asymptotic theory, velocity analysis.

Resumo

A operação para continuação de afastamento (Offset Continuation Operation - OCO) transforma um registro sísmico adquirido com um certo afastamento entre fonte e receptor em um registro correspondente como se fosse adquirido com outro afastamento. O deslocamento de um evento sísmico sob esta operação pode ser descrito por uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Usando a aproximação WKBJ, deduzimos uma equação tipo iconal OCO que descreve os aspectos cinemáticos deste deslocamento em analogia a solução da onda acústica e uma equação de transporte que descreve a alteração das amplitudes. Das técnicas matemáticas da teoria dos raios representamos uma forma de solução para a nova equação. Notamos que operadores diferenciais de transformação de configuração corrigem o fator de espalhamento geométrico para qualquer afastamento, ao menos de modo assintótico. Fazendo um estudo analítico da equação que descreve a cinemática da operação, propomos um operador de empilhamento multi-paramétrico no domínio não-migrado dos dados sísmicos. Esse empilhamento multiparamétrico usa uma velocidade média, chamada de velocidade OCO, bem como a declividade do evento de reflexão na seção sísmica. Por se basear na OCO, os tempos de trânsito usados neste empilhamento multiparamétrico acompanham a trajetória OCO que aproxima a verdadeira trajetória do ponto de reflexão comum. Assim, os parâmetros extraídos servem para melhorar a correção do sobretempo convencional ou realizar correções correspondentes para afastamentos não nulos. Desta forma, é possível aumentar a qualidade das seções empilhadas convencionais de afastamento nulo ou até gerar seções empilhadas de outros afastamentos. Os parâmetros cinemáticos envolvidos ainda podem ser utilizados para construir um melhor modelo de velocidade. Exemplos

numéricos mostram que o empilhamento usando trajetórias OCO aumenta, de forma significativa, a qualidade dos dados com uso de menos parâmetros que nos métodos clássicos.

Palavras-chave: Ondas sísmicas, equações diferenciais parciais, teoria assintótica, análise de velocidade.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	9
2.1	Modelagem para um meio 2.5D	9
2.1.1	Função de Green para o caso 2.5D	10
2.1.2	Aproximação de Kirchhoff para meios 2.5D	13
2.1.3	Modelagem de um meio 2.5D homogêneo	17
3	Equação para continuação do afastamento	19
3.1	Construção cinemática da OCO	19
3.1.1	Meio homogêneo	20
3.1.2	Meio localmente homogêneo	23
3.1.3	Operador diferencial da OCO	25
3.1.4	Propriedades cinemáticas do operador para continuação do afastamento . . .	28
3.1.5	Derivadas do tempo de trânsito	29
3.1.6	A trajetória OCO	30
3.1.7	Continuação da declividade	31
3.2	Velocidade OCO	32
3.2.1	Relação com a trajetória CRP	34
3.3	Construção da parte dinâmica da OCO	35
3.3.1	Representação integral da OCO	41
3.3.2	Comparação entre as dinâmicas	45
3.4	Operação para continuação da fonte	46
4	Aplicações	49
4.1	Sobretempos e empilhamento	49
4.2	Análise de coerência para trajetórias OCO	52
4.3	Empilhamento parcial e total ao longo das trajetórias OCO	55
4.3.1	Mergulhos conflitantes	56
4.3.2	Multicobertura global	59
4.4	Análise da amplitude com variação do afastamento	62

5	Experimentos numéricos e comentários	65
5.1	Modelo Sigsbee2B	65
5.2	Modelo Marmousi	66
5.3	Bacia do Jequitinhonha	77
6	Conclusões	85
	Referências bibliográficas	87
A	Relações trigonométricas e derivadas do tempo de trânsito	93
B	Aproximação para o ângulo de incidência	99

Livres desta estória, a nossa trajetória não precisa explicação
E não tem explicação
Engenheiros do Hawaii

Agradecimentos

À minha orientadora e coorientador, Prof.a Amélia Novais e Prof. Jörg Schleicher, sou grato pela orientação, paciência e oportunidades.

À banca examinadora pelas críticas e sugestões dadas para este trabalho.

Ao Prof. Lúcio pelas excelentes aulas que me serviram de base para este trabalho.

A Dona Fátima pela ajuda emocional e por desamarrar os nós burocráticos com seus superpoderes.

A Luciana pelo apoio, companhia e cumplicidade durante esta jornada.

Aos colegas do IMECC/GGC e CEPETRO/GGA pelo convívio, amizade e pelas discussões científicas e outras discussões muitas vezes inúteis porém prazerosas.

Aos meus amigos e amigas (em especial Rodrigo, Emídio, Eduardo, Jorge, Jadsom e a Momoe), por se preocuparem comigo e pelo apoio.

Aos demais colegas de pós-graduação, pelas críticas e sugestões.

A todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES e ao CNPq processo 142079/2012-0, pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

Damos o nome de *sísmica de exploração* à pesquisa de depósitos de subsuperfície com potencial econômico de petróleo bruto, gás natural e minerais realizada através do registro, processamento e interpretação das ondas sísmicas induzidas artificialmente na terra. Os métodos da sísmica de exploração consistem em criar ondas sísmicas que propagam na subsuperfície da terra (ou água) e observar a resposta sísmica gerada pela reflexão dessas ondas nas interfaces devidas às descontinuidades dos elementos físicos que formam as estruturas geológicas. O primeiro a aplicar técnicas de reflexão na sísmica de exploração foi o americano John Clarence Karcher, que inventou e comercializou o sismograma de reflexão em 1919 (Sweet, 1988). Os métodos sísmicos são tão importantes que Whitmore (1980) relatou que o total das despesas em geofísica aplicada em todos os países de economia de mercado cresceram cerca de três bilhões de dólares americanos em 1980. E somente os métodos sísmicos representaram cerca de 93% dos gastos da geofísica aplicada e, dessa parcela, 98% das despesas foram para geofísica do petróleo. Ademais, cerca de 95% dos gastos sobre atividades geofísicas no mundo ocidental foram dedicadas à exploração de petróleo. No Brasil, após a descoberta da camada do pré-sal, aumentou-se a importância da pesquisa na área da sísmica de exploração, sendo que alguns dos maiores desafios na área atualmente são o aumento do conteúdo de frequência na região do pré-sal e melhorias na qualidade da informação dos atributos físicos obtidos com custo reduzido. Melhorar as resoluções horizontal e vertical do levantamento sísmico proporcionará, para os intérpretes, certezas maiores na hora de tomar decisões e, com isso, a redução dos riscos financeiros e ambientais para extração do petróleo ou outros minerais.

Superficialmente, o método da sísmica de exploração pode ser resumido da seguinte maneira: A energia sísmica artificial inserida no meio é gerada em terra por explosivos em poços rasos, como a dinamite, ou mecanismos vibratórios superficiais montados em caminhões especializados; já em ambientes marinhos, canhões de ar altamente comprimida inserem bolhas de ar na água, que transmitem a energia das ondas sísmicas nas camadas de rocha da subsuperfície. As ondas sísmicas que viajam nessas subsuperfícies sobre as interfaces das formações rochosas subterrâneas refletem, refratam e viajam de volta para os receptores acústicos chamados geofones (em terra) ou hidrofones (em água). Os tempos de trânsito da energia sísmica, em conjunto com as informações físicas existentes de poços já perfurados na região, ajudam os geocientistas a estimar as estruturas (*dobras e falhas*) e as estratigrafias (tipo de rocha, ambiente de deposição e conteúdo líquido) das formações subterrâneas, facilitando a localização de alvos potenciais de perfuração e extração desses minerais.

O registro em um único receptor é denominado traço sísmico, que são as amostras das amplitudes

da resposta sísmica em função do tempo. A coleção de vários traços sísmicos recebe o nome de seção sísmica. Finalmente, a coleção de várias seções sísmicas formam os dados sísmicos. À aquisição dos dados sísmicos damos o nome de *levantamento sísmico*. O levantamento sísmico é feito de maneira ordenada. Sobre uma curva, denominada linha sísmica, uma fonte é acionada e, após um tempo, é medido a resposta do meio através dos receptores posicionado sobre ela. E novamente sobre a linha sísmica, todo o arranjo é deslocado para que esse experimento seja reproduzido outra vez nessa nova posição.

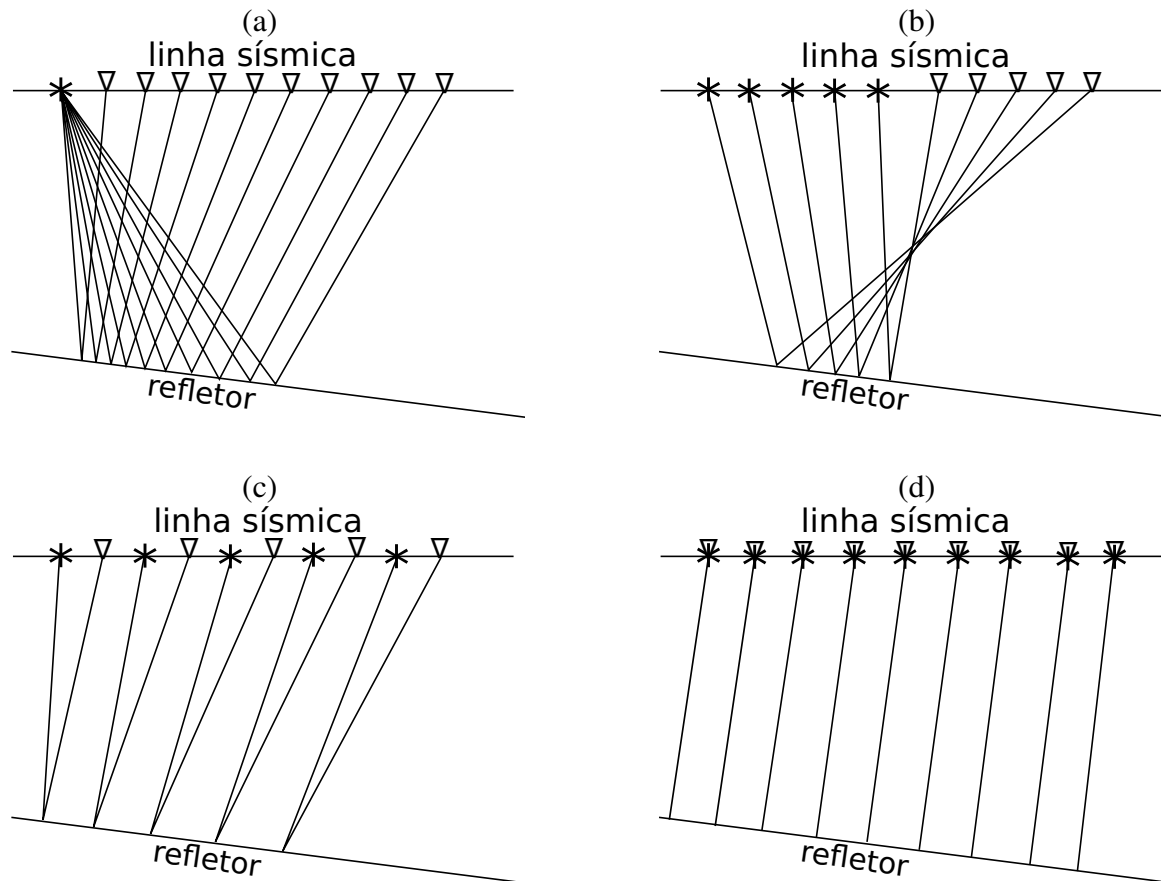


Figura 1.1: Famílias de traços que formam as seções sísmicas: (a) fonte comum; (b) ponto médio comum; (c) afastamento comum; (d) afastamento nulo. Os asteriscos representam as fontes e os triângulos representam os receptores.

As principais configurações geométricas utilizadas para obtenção dessas seções sísmicas são:

- * **Fonte comum** (*common source - CS*): configuração onde a família de traços da seção sísmica é obtida através de um conjunto de receptores que captam os tempos de chegada provenientes da mesma fonte (ou tiro) (veja Figura 1.1a).
- * **Ponto médio comum** (*common midpoint - CMP*): configuração onde a família de traços da seção sísmica é obtida através de um conjunto de fontes-receptores onde os elementos de cada par desse conjunto têm em comum o mesmo ponto médio (veja Figura 1.1b).

- * **Afastamento comum** (*common offset - CO*): configuração onde a família de traços da seção sísmica é obtida através de um conjunto de fontes-receptores onde os componentes de cada par desse conjunto têm em comum o mesmo afastamento (veja Figura 1.1c).
- * **Afastamento nulo** (*zero offset - ZO*): configuração hipotética onde fonte e receptor têm a mesma localização (veja Figura 1.1d).
- * **Ponto de reflexão comum** (*common reflection point - CRP*): Diferente dos demais, esta configuração hipotética não ordena os traços, e sim, suas amostras. Dado um traço mestre inicial, tomamos amostras dos outros, baseando-se em uma curva que tenham o mesmo ponto de reflexão para cada amostra temporal do dado mestre. Assim, construímos uma família de traços parecida com a CMP. Mas, com as amostras pertencentes dos CMP vizinhos em cada amostra.

Nas seções sísmicas as respostas das estruturas geológicas formam padrões, e através da análise desses padrões obtemos informações sobre as estruturas. A detecção, análise e posterior obtenção das informações das mesmas fazem-se através de alguns passos.

Geralmente, um levantamento sísmico consiste em três etapas: Aquisição dos dados, processamento sísmico e interpretação. A seguir faremos um breve resumo dos objetivos de cada uma dessas etapas.

- (a) A aquisição dos dados é feita por emissores apropriados (fontes) que após emitirem seus sinais (ondas sísmicas) são registados nos receptores (geofone ou hidrofone) distribuídos em campo sobre uma região de interesse.
- (b) O processamento é desenvolvido para aumentar a razão sinal-ruído e obter informações físicas da região de interesse para habilitar uma interpretação dos dados.
- (c) A interpretação visa determinar e caracterizar as camadas geológicas em subsuperfície.

Esta tese desenvolve ferramentas voltadas para o processamento de *dados sísmicos*. Essa etapa do levantamento que consiste no processamento de dados sísmicos envolve a aplicação sequencial de vários algoritmos matemáticos. Através desses processos, os registros sísmicos de campo são convertidos em *imagens sísmicas* que revelam a estratigrafia da subsuperfície para uma melhor interpretação.

Uma das etapas fundamentais do processamento é a *análise de velocidade*, pois permite a construção de um modelo do campo de velocidades para a propagação de ondas o qual é utilizado como ferramenta importante para as fases posteriores do processamento.

O objetivo da análise de velocidade é determinar as velocidades sísmicas das camadas geológicas em subsuperfície. As velocidades sísmicas são utilizadas em diversas partes do fluxo do processamento e interpretação sísmica.

Há diferentes tipos de interpretação das velocidades na sísmica sendo a grande maioria delas baseadas em algum tipo de média da velocidade real do meio. As velocidades médias mais conhecidas são: RMS de *Root Mean Square*, empilhamento, NMO. Na análise de velocidade tradicional usa-se a correção de sobretempo normal (NMO de *Normal Moveout*) para determinação da velocidade NMO para corrigir o sobretempo. Geralmente, sobretempo é o tempo adicional que um evento sísmico tem quando seguimos-o em outra coordenada, como por exemplo: uma reflexão sísmica registrada

com o receptor afastado da fonte, comparado com o tempo que esse mesmo evento teria se a fonte e o receptor estivessem no mesmo ponto. Sobretempo normal para um meio homogêneo e com o refletor plano horizontal é o tempo adicional que uma reflexão sísmica registrada com o receptor afastado da fonte apresenta, quando comparado com o tempo que esta mesma reflexão teria se fonte e o receptor estivessem no mesmo ponto médio do par fonte-receptor iniciais. Esse sobretempo é ilustrado na Figura 1.2, em que representamos por t_h o tempo de registro, por $2h$ a distância entre fonte e o receptor (também chamada de afastamento) e por t_0 o tempo que a mesma reflexão teria se a distância entre fonte e receptor fosse nula.

A fórmula mais utilizada para esse processo é uma aproximação hiperbólica, baseada na aproximação de Taylor de segunda ordem, com variável h e parâmetros t_0 e v_n , em que v_n representa a velocidade do meio. Esta aproximação é dada pela seguinte expressão:

$$t_h^2 = t_0^2 + \frac{4h^2}{v_n^2}. \quad (1.1)$$

Como os refletores nem sempre são horizontais e a velocidade do meio não é constante, o uso dessa fórmula é uma mera aproximação. O erro decorrente da variação de velocidade do meio é minimizado adotando-se para v_n um valor denotado como velocidade NMO, sendo aquela que aplicada a correção NMO desloca a reflexão registrada do tempo t_h para o tempo t_0 . Nesse contexto, t_0 designa o tempo que pulso sísmico leva para percorrer o traçado de uma trajetória que, partindo do ponto médio entre

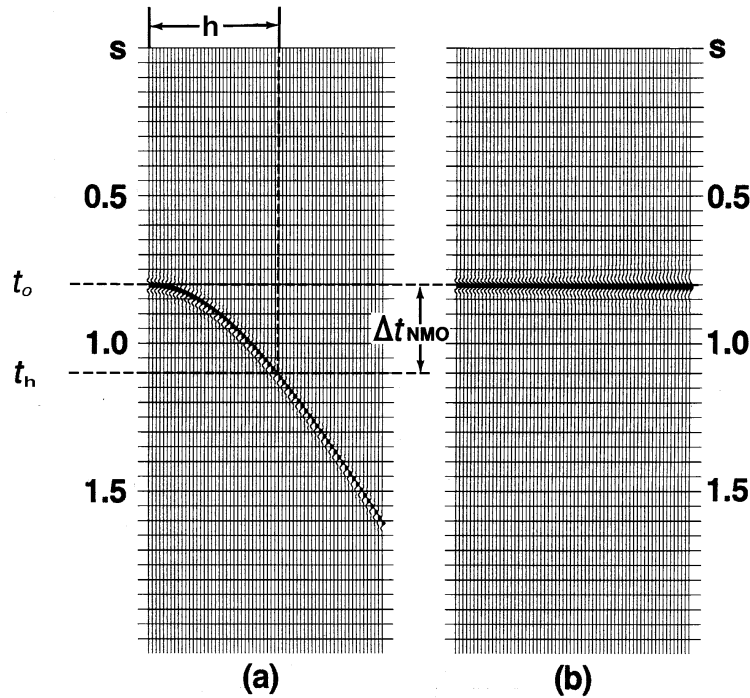


Figura 1.2: Correção NMO em uma seção de ponto médio comum, envolve um mapeamento de percursos t_h de diferente afastamentos para um percurso t_0 de afastamento nulo. (a) Antes e (b) depois da correção NMO. (Reproduzido de Yilmaz (2000))

o par fonte-receptor, incide perpendicularmente no refletor (Hubral e Krey, 1980).

O resultado de uma correção NMO em uma seção de ponto médio comum, somado ao empilhamento de todos os traços desta seção resulta no novo traço chamado traço empilhado. Para cada ponto médio cada um deles será um traço de uma seção pós-empilhamento (do termo inglês *post-stack*).

Um enfoque mais sofisticado para essa operação é chamado de *sobretempo de mergulho* (DMO de *Dip Moveout*), que já foi considerado uma importante técnica no processamento sísmico por anos. Como o empilhamento NMO falha em tratar eventos com grandes mergulhos para a construção das seções de afastamento nulo. Então, o DMO foi concebido como uma ferramenta adicional para mapear os dados empilhado baseando também nas correções dos pontos médio, tornando-os equivalentes ao mesmo evento em subsuperfície após a correção NMO. Assim, cria-se uma pseudo seção de afastamento nulo com uma fidelidade maior. A combinação das correções NMO+DMO produz um bom empilhamento e tal alternativa pode ser empregada como uma técnica de análise de velocidade (Byun, 1990).

Outras tarefas importantes no processamento sísmico são a reconstrução de sinais não adquiridos em campo ou removidos devido a ruídos, e a remoção dos ruídos não coerentes. Muitas vezes é necessário, para aumentar a resolução da visualização dos dados, ajustes nos dados de entrada para posterior aplicação em algum algoritmo de imageamento. Técnicas de extração do formato do pulso da fonte para algum processo de *deconvolução* (Taner e Koehler, 1981), extração de atributos cinemáticos da propagação de ondas na subsuperfície e construção de dados em posições não adquiridas em campos, mas que tenham a cinemática e a amplitude mais próximas do possível das amostras que tivessem sido obtidas em campos, contribuem na resolução da imagem sísmica. Na Figura 1.3 temos uma aplicação do método desenvolvido sobre um dado contaminado com ruído, nesse caso a técnica foi aplicada para aumenta a razão sinal-ruído.

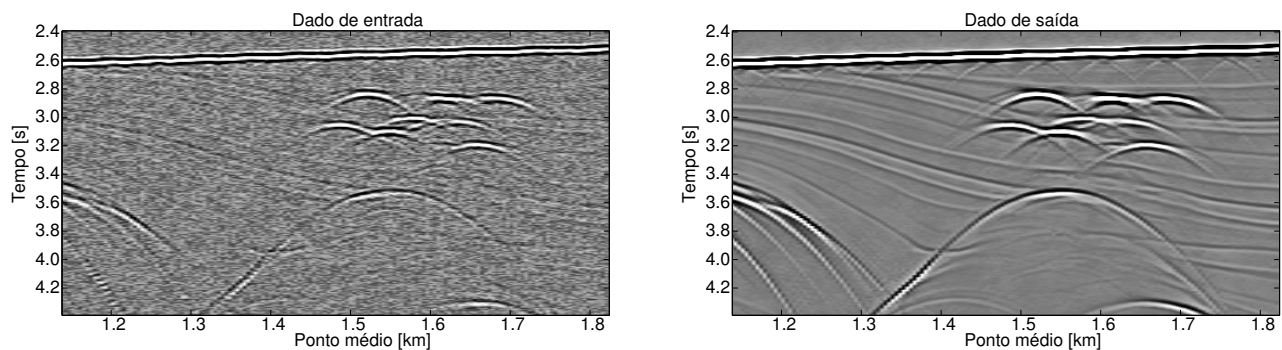


Figura 1.3: *Dado de entrada de uma seção de afastamento comum contaminado por ruído (esquerda) e o dado de saída na mesma seção de afastamento comum após o processo de empilhamento proposto nesta tese (direita).*

Nessas circunstâncias, uma metodologia que pode ser realizada como ferramenta adicional para o processamento sísmico é a chamada *operação para continuação do afastamento* (abreviado comumente pela sigla em inglês OCO de *Offset Continuation Operation*). Ela visa transformar uma seção sísmica, adquirida com um determinado meio-afastamento constante entre as fontes e os respectivos receptores h_1 , em uma seção sísmica simulada, cinematicamente equivalente a uma seção adquirida com um outro meio-afastamento constante h_2 . Partindo da OCO vamos combiná-la com outra téc-

nica denominada empilhamento multi-paramétrico de dados sísmicos para extração de parâmetros cinemáticos para usá-los na reconstrução de informação não adquiridas ou perdidas.

A transformação OCO é uma generalização do método da *transformação para o afastamento nulo* (abreviado comumente pela sigla em inglês TZO de *Transformation to Zero Offset*, Bleistein et al., 1999), sendo que essa última se realiza, na prática, pela combinação das correções de sobretempo normal e sobretempo de mergulho. Podemos afirmar que a TZO nada mais é que do que uma OCO com $h_2 = 0$. A forma diferencial da OCO é interpretada como uma “equação de onda imagem” por Hubral et al. (1996). Neste último, eles descrevem o comportamento cinemático deste operador baseando-se na cinemática do operador para equação da onda acústica através do princípio de Huygens.

Nesta tese, estudamos e extraímos novas aplicações da operação para continuação do afastamento. Escrevendo-a em forma de um operador diferencial que mapeia os eventos nas seções sísmicas de afastamento comum utilizando apenas informações de traços ao redor destas seções. Esse mapeamento foi utilizado inicialmente por Deregowski e Rocca (1981), que relacionavam seções sísmicas de afastamentos distintos no domínio do número de onda e da frequência como uma forma de obter registros em afastamento nulo a partir de registros em afastamento comum. Bolondi et al. (1982) propuseram uma metodologia numérica no domínio do tempo e do número da onda para essa transformação, enquanto Salvador e Savelli (1982) discutiram uma metodologia numérica no domínio do tempo e do espaço utilizando diferenças finitas. Interpretações práticas e conceituais do método de continuação de afastamentos, bem como seus efeitos em dados sísmicos, foram apresentadas por Bolondi et al. (1984).

Recentemente, Fomel (2003b) propôs uma modificação na equação diferencial de continuação utilizada por Bolondi et al. (1982) visando contornar limitações existentes na equação original, a qual falhava em casos de grandes afastamentos ou refletores com mergulhos mais acentuados. No entanto, há diferença entre os operadores abordados por eles e nesta tese, pois Bolondi et al. (1982) e Fomel (2003b) desenvolveram operadores diferenciais que atuam no dado após a correção NMO, e aqui, utilizamos o operador diferencial que atua diretamente no dado sem a necessidade da aplicação da NMO e com adicional de tratar o espalhamento geométrico.

O uso de métodos de continuação da geometria de aquisição para fins de análise de velocidade foi sugerido por Bagaini e Spagnolini (1993), e Bagaini et al. (1994) para o exemplo de continuação da fonte que é discutido com mais detalhes em Bagaini e Spagnolini (1996). A vantagem de processos de análise de velocidade baseados em métodos de continuação é que eles permitem a comparação de dados simulados com dados de fato adquiridos em campo, facilitando assim, a detecção de erros no modelo de velocidade mediante discrepâncias entre os sobretempos dos dados.

Em nosso trabalho, baseamos na cinemática da OCO e extraímos um operador de *empilhamento multi-paramétrico*. Em um empilhamento multi-paramétrico além de usar uma velocidade média, como por exemplo a velocidade NMO, usamos também a declividade dos eventos nas seções sísmicas vindo do campo de onda para melhorar a correção do sobretempo. A vantagem da correção de sobretempo no processamento sísmico é que ele permite um uso mais eficiente dos propósitos de empilhamento. Por esta razão, aumentar a qualidade da imagem em seções empilhadas continua a ser o foco de intensiva pesquisa, em particular, no sentido de melhorar a precisão da correção NMO concentrado em um único CMP. Trabalhos importantes nesta área incluem, por exemplo, Taner e Koehler (1969); Malovichko (1978); May e Straley (1979); de Bazelaire (1988); Castle (1994); Alkhalifah e Tsvankin (1995); Causse et al. (2000). E no sentido de não restringir-se em apenas um CMP temos por mais de uma década duas técnicas similares que tem co-existido e que ambos tem por alvo obter

aproximações de uma pseudo-seção de afastamento nulo vindas de um empilhamento multicobertura. Trata-se do empilhamento de superfície comum (CRS de *Common-reflection-Surface*) (veja por exemplo, Höcht et al., 1999; Jäger et al., 2001) e do Multifocusing (MF) (Gelchinsky et al., 1999a,b).

Nesta tese, desenvolvemos uma ferramenta que vem auxiliar ou concorrer com as técnicas CRS e MF. Empregamos o termo de empilhamento das *trajetórias da continuação do afastamento*, ou brevemente OCT de *Offset Continuation Trajectories*, para descrever a forma de computar eficientemente o empilhamento dos dados ao redor da trajetória do ponto de reflexão comum (CRP de *Common Reflection Point*). Este método permite a construção de traços empilhados que podem (ou não) ter sido registrados em campo. Em outras palavras, é uma técnica baseada no empilhamento multi-paramétrico que transforma seções pré-empilhadas de múltipla cobertura em uma seção de afastamento comum (CO). Da mesma forma que os métodos MF e o CRS, este novo método não se baseia em um modelo de velocidade a priori, mas fornece informação de uma velocidade média que chamamos de velocidade OCO e também as informações de declividade dos eventos nas seções sísmicas. Partes deste trabalho já foram apresentados em congressos (Coimbra et al., 2013b,a).

A segunda parte deste trabalho consiste em, baseado na aproximação WKBJ, aperfeiçoar o operador dado por Hubral et al. (1996) para a OCO de modo que a parte dinâmica possa ser corrigida na medida que os afastamentos mudem e baseado na teoria dos raios representamos uma forma de solução para a nova equação proposta. Observamos que operadores diferenciais de transformação de configuração que corrigem o fator de espalhamento geométrico para qualquer afastamento, ao menos de modo assintótico, são novos na literatura.

No Capítulo 2, modelamos a função de Green para um meio 2.5D com densidade constante usada para descrever o comportamento da propagação de ondas e depois a usamos para obter uma equação que descreve o espalhamento em um meio de velocidade constante.

No Capítulo 3, apresentamos os aspectos teóricos novos desenvolvidos nesta tese, onde desenvolvemos o operador para OCO com correção do efeito do espalhamento geométrico. Além disso, damos alguns significados para informações cinemáticas obtidas pela OCO.

No Capítulo 4, utilizamos as técnicas matemáticas do Capítulo 3 e desenvolvemos estratégias de como aplicar a OCO.

No Capítulo 5, mostramos alguns resultados do método aplicado aos dados sintéticos provenientes dos modelos Sigsbee2B e Marmousi, bem como ao dado real do Jequitinhonha.

O capítulo 6, por fim traz as conclusões do trabalho.

No Apêndice A, apresentamos algumas deduções para as derivadas do tempo de trânsito em meios homogêneos. No Apêndice B, justificamos a aproximação para o ângulo de incidência.

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo desta tese é a modelagem, algumas aplicações e o estudo dos aspectos teóricos sobre um operador diferencial que transforma uma seção sísmica de afastamento comum inicial adquirida em uma outra seção de afastamento comum que pode não ter sido necessariamente adquirida. Queremos que esse operador transforme corretamente as informações cinemáticas e também a dinâmica das seções resultantes, ao menos, em um modelo homogêneo. Fazendo isso, podemos inferir sobre os atributos cinemáticos da propagação do campo de ondas sísmicas em subsuperfície por algum tipo de inversão. Nossa proposta é apresentar esse operador em forma de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem hiperbólica que descreve o processo de transformação de dados de reflexão no domínio do ponto médio $\times$ tempo de trânsito $\times$ afastamento. Baseamos nossa dedução na aproximação WKBJ, que, de forma teórica, nos fornece equações auxiliares para a dedução e estudo da cinemática e da amplitude correta nas seções de velocidade constante para cada afastamento transformado. Para meios não homogêneos, damos uma interpretação baseada em valores de uma velocidade média que denotamos por velocidade OCO. Para a solução desse tipo de problema, podemos assumir que se trata de um problema de valor inicial ou de Cauchy de segunda ordem sendo o dado de entrada obtido em alguma família de afastamento comum. Por fim, baseando na equação auxiliar que descreve a cinemática, propomos uma técnica de empilhamento multi-paramétrico para o tratamento dos traços sísmicos e aumento da razão sinal-ruído.

Basicamente, o que fazemos neste capítulo é a construção da solução da onda em um meio que nos auxilie para a modelagem, o estudo de algumas propriedades do operador diferencial para OCO e o desenvolvimento de algumas aplicações através dessa última.

2.1 Modelagem para um meio 2.5D

As fórmulas para a propagação de ondas, juntamente com os métodos de solução para um meio 3D, podem ser encontradas em John (1981) e Bleistein (1984). A partir dessas fórmulas, podemos fazer simplificações do modelo matemático de propagação de ondas de forma que, caso o meio estudado obedeça os critérios necessários para que apenas com informações da propagação da onda 3D em um único plano, seja suficiente para o processamento e imageamento da região de interesse. Ou seja, dadas as condições, com apenas uma linha sísmica podemos executar de forma suficiente o processamento e imageamento referente a esse plano de propagação. Para isso, vamos introduzir

formalmente o conceito de uma geometria 2.5D. Isto permitirá a modelagem do operador para continuação do afastamento no meio em questão, bem como o desenvolvimento de métodos para a inversão de alguns parâmetros de interesse.

Seguindo os trabalhos de Bleistein (1986), Sullivan e Cohen (1987) e Bleistein et al. (1999), descrevemos o comportamento que governa a propagação de ondas em um meio de densidade constante e com variação de velocidade em somente duas dimensões. Fisicamente, a ideia é que devida a simetria do modelo de velocidade em um dos eixos, as amplitudes da propagação da onda, ou seja, a informação do espalhamento geométrico pode ser computado apenas com elementos de dentro desse plano de propagação. Então, a ideia é reescrever as equações deduzidas para um meio 3D e deduzir algum parâmetro matemático que possa substituir a necessidade física do modelo 3D sem prejudicar o seu fator de espalhamento geométrico.

Alguns resultados desta tese são abordados de forma assintótica, no regime de alta-frequência. Cabe mencionar que, nesta tese, adotamos a seguinte convenção para transformada de Fourier de uma função $g = g(t)$

$$\hat{g}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

e com sua transformada inversa sendo

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

2.1.1 Função de Green para o caso 2.5D

Iniciamos esta seção considerando o seguinte problema para propagação de ondas em um meio 3D acústico e com densidade constante, ou seja, vamos estudar a função de Green da equação de Helmholtz

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} \right] \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_0) = -\delta(x - x_0) \delta(y) \delta(z - z_0), \quad (2.3)$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z)$, sendo $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0, z_0)$ a posição da fonte, e $c(\mathbf{x}) = c(x, z)$ sendo a função que representa a velocidade do meio que depende apenas das variáveis x e z . Para esse problema, assumimos como condição de contorno a condição de radiação de Sommerfeld (Sommerfeld, 1949; Bleistein, 1984; Courant e Hilbert, 1989) que em termos matemáticos é escrita como

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \nu} + \frac{i\omega}{c(\nu)} \hat{G} \right) = 0, \quad \text{onde } \nu = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \quad (2.4)$$

A simetria de um problema 2.5D consiste no conceito de que o traçado do raio esteja confinado apenas no plano vertical contendo a(s) fonte(s) e o(s) receptor(es), como ilustrado na Figura 2.1. Nossa proposta é reduzir o problema de traçamento dinâmico dos raios (Bleistein, 1984; Courant e Hilbert, 1989; Červený, 2001) que está em três dimensões para um plano, $y = 0$, sem a necessidade de calcular elementos para solução fora desse plano.

Suponha que em um meio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ as variações de velocidades são menores do que a frequência de propagação da equação (2.3), que neste caso, podemos escrever em termos matemáticos como

$$\|\nabla c\| \ll 2|\omega|, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.5)$$

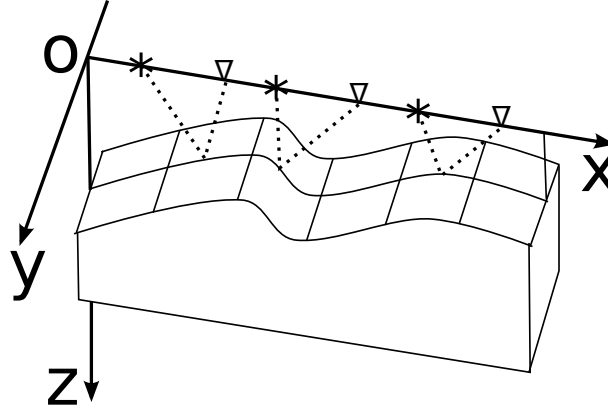


Figura 2.1: Representação de um meio 2.5D tendo as fontes, receptores e as reflexões no mesmo plano. Tudo isso devido a simetria do modelo de velocidade no eixo y .

Então, pela teoria assintótica (aproximação WKBJ), podemos estabelecer a seguinte relação assintótica (Fröman e Fröman, 1965; Bleistein, 1984)

$$\hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_0) \sim A(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \exp(-i\omega\tau(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

com $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sendo a função do tempo de trânsito proveniente da solução da equação iconal e $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sendo a função que descreve o fator de amplitude, solução da equação de transporte de ordem zero, a saber

$$\|\nabla\tau\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}, \quad (2.7)$$

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A + A\Delta\tau = 0. \quad (2.8)$$

As funções τ e A , soluções de (2.7) e (2.8), respectivamente, também devem obedecer a seguintes condições iniciais:

$$\tau = 0, \text{ para } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|A(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \rightarrow 1/4\pi, \text{ quando } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (2.9)$$

Para resolver a equação iconal, obtemos as soluções em um meio tridimensional usando o método das características (Bleistein, 1984; Courant e Hilbert, 1989; Evans, 2010), resultando nas chamadas *equações do raio*:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} &= \mathbf{p}, \\ \frac{d\tau}{d\sigma} &= \frac{1}{c^2}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} &= \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{1}{c^2}\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

com $\mathbf{p} = \nabla\tau = (p_x, p_y, p_z)$ sendo o vetor de vagarosidade e σ o parâmetro do raio. Como condição inicial, para o raio de fonte pontual, temos os seguintes valores

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\
\mathbf{p}(0) &= \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2, \sin \gamma_1 \sin \gamma_2, \cos \gamma_1), \\
\tau(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Em (2.11), introduzimos as coordenadas γ_1 e γ_2 para parametrizar a superfície gerada pela propagação dos raios partindo do ponto $\mathbf{x}_0$ até o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)$.

A suposição que a velocidade é independente de y permite-nos obter diretamente uma parte desta solução em uma forma exata. Assim, pelas equações do raio, a equação para $dp_y/d\sigma$ é

$$\frac{dp_y}{d\sigma} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{c^2} \right) = 0. \tag{2.12}$$

Portanto, p_y é constante em cada parte do traçado do raio, e da condição inicial para p_y em (2.11) podemos afirmar que

$$p_y = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2. \tag{2.13}$$

Com p_y independente de σ , da equação para y obtemos

$$y = \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2. \tag{2.14}$$

Notamos que os raios parametrizados pelo ângulo inicial $\gamma_2 = 0$, o que resulta em $\sin \gamma_2 = 0$, não saem do plano $y = 0$.

A seguir, com a suposição de que $\sin \gamma_2 = 0$, podemos considerar o sistema de traçamento de raios juntamente com os dados iniciais do raio como

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\sigma} &= p_x, & x(0) &= x_0; \\
\frac{dz}{d\sigma} &= p_z, & z(0) &= z_0; \\
\frac{dp_x}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c^2} \right), & p_x(0) &= \frac{\sin \gamma_1}{c(\mathbf{x}_0)}; \\
\frac{dp_z}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c^2} \right), & p_z(0) &= \frac{\cos \gamma_1}{c(\mathbf{x}_0)}; \\
\frac{d\tau}{d\sigma} &= \frac{1}{c^2}, & \tau(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Este é o sistema fechado de equações para qual $p_x^2 + p_z^2 = 1/c(\mathbf{x})^2$, uma vez que $p_y = 0$.

Agora, faremos uma análise na dinâmica da propagação da onda acústica para calcular o fator de amplitude A deste problema específico, que descreve o espalhamento geométrico da função de Green para (2.3). A fórmula de A é dada por (Bleistein, 1984)

$$A = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\sin \gamma_1}{c(\mathbf{x}_0) J(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)}}, \tag{2.16}$$

onde J é o Jacobiano do raio e tem como expressão

$$J(\sigma, \gamma_1, \gamma_2) = \det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)} \right]. \quad (2.17)$$

Para descrever o caso 2.5D, tomamos $\gamma_2 = 0$. Assim, as entradas da matriz Jacobiana de (2.17), neste caso a segunda coluna, são calculadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \sigma} &= \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_2 \sin \gamma_1 = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma_2} &= \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 = \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_1, \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma_1} &= \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_2 \cos \gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto, podemos reduzir a matriz Jacobiana do Jacobiano J , que é 3×3 , para uma matriz do Jacobiano J_* , que é 2×2 , da seguinte maneira

$$J = J_* \frac{\sigma}{c(\mathbf{x}_0)} \sin \gamma_1, \text{ sendo } J_* = \det \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(\sigma, \gamma_1)} \right]_{\gamma_2=0}. \quad (2.19)$$

O Jacobiano J_* pode ser computado diretamente do sistema (2.15). Usando (2.19) em (2.16), obtemos

$$A_{2.5} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma J_*}}. \quad (2.20)$$

Também, podemos escrever a função de Green para o meio 2.5D em função dos parâmetros do raio da seguinte maneira:

$$\hat{G}(x, 0, y; \omega, \mathbf{x}_0) \sim A_{2.5}(x, 0, z; \mathbf{x}_0) \exp(-i\omega\tau(x, 0, z; \mathbf{x}_0)), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

2.1.2 Aproximação de Kirchhoff para meios 2.5D

Consideramos nesta seção outra aproximação de alta frequência para a solução da equação de Helmholtz para uma classe de problemas de espalhamento. Começamos a partir da equação integral de Kirchhoff (Sommerfeld, 1949; Goodman, 1968; Bleistein, 1984; Courant e Hilbert, 1989; Schleicher et al., 2007), que trata da solução de um problema de espalhamento e fazemos algumas aproximações que simplificam o integrando e transformam essa equação em uma representação para o campo disperso. Essas hipóteses simplificadoras são baseadas em ideias desenvolvidas a partir da análise assintótica de soluções exatas e outras técnicas de soluções aproximadas provenientes do método dos raios e da ótica geométrica.

Historicamente, essa técnica de aproximação foi aplicada ao campo espalhado por uma abertura no plano de uma tela. A ideia era estudar o comportamento óptico de uma onda monocromática que atravessa tal abertura, resultando na equação que ficou conhecida como *fórmula da difração de Kirchhoff*. Os nomes de Rayleigh, Sommerfeld e Fresnel, entre outros, estão associados com vários aperfeiçoamentos e alternativas para a aproximação atribuída a Kirchhoff. Em resumo, não estamos

considerando o problema que Kirchhoff considerava e nem utilizando a aproximação da mesma forma como ele o fez. No entanto, é comum referir-se ao resultado aqui como a aproximação Kirchhoff em reconhecimento do seu papel fundamental no desenvolvimento da técnica. As distinções entre os vários refinamentos podem ser encontrados em Goodman (1968), Klein e Furtak (1986), e Born e Wolf (1999), entre outros.

Diferentemente da teoria clássica, escrevemos a fórmula da aproximação de Kirchhoff para um meio 2.5D, ou seja, calculamos apenas as componentes no mesmo plano de propagação da onda. Para começar, supomos a seguinte configuração: Um ponto que representa a fonte localizada em $\mathbf{x}_s = (s, 0, 0)$, um outro ponto que representa o receptor localizado em $\mathbf{x}_r = (r, 0, 0)$ e uma superfície refletora $\mathbb{D}$ que está situada em profundidade. O refletor é uma superfície de descontinuidade do perfil de velocidade, sem descontinuidades acima dela. Denotamos c_- e c_+ as velocidades acima e abaixo de $\mathbb{D}$, respectivamente. Começamos nossa análise com a representação pela integral de Kirchhoff do campo espalhado $\hat{P}_S$ e do campo incidente $\hat{P}_I$ (Bleistein, 1984)

$$\hat{P}_S(\mathbf{x}_r; \omega, \mathbf{x}_s) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \left[\hat{P}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r) \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s)}{\partial n} - \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \hat{P}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r)}{\partial n} \right] dS, \quad (2.22)$$

$$\hat{P}_I(\mathbf{x}_s; \omega, \mathbf{x}_r) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \hat{f}(\omega) dV, \quad (2.23)$$

sendo $\hat{f}$ a transformada de Fourier da função analítica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ denominada como *pulso da fonte*.

Lembramos que a onda incidente é a resposta à fonte, na ausência do espalhador. Escrevemos o campo de pressão como uma soma da parte incidente P_I com a parte espalhada P_S da seguinte maneira

$$\hat{P} = \hat{P}_I + \hat{P}_S. \quad (2.24)$$

Neste caso, a onda incidente, que é dada em (2.23), pode ser escrita como

$$\hat{P}_I(\mathbf{x}_s; \omega, \mathbf{x}_r) = \hat{G}(\mathbf{x}_r; \omega, \mathbf{x}_s) \hat{f}(\omega). \quad (2.25)$$

Caso a função $\hat{f} \equiv 1$, temos

$$\hat{G}(\mathbf{x}_s; \omega, \mathbf{x}_r) = \hat{G}(\mathbf{x}_r; \omega, \mathbf{x}_s), \quad (2.26)$$

o que resulta no chamado *Teorema da reciprocidade* da função de Green (Bleistein, 1984). Então, obtemos a seguinte relação

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \left[\hat{P}_I(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r) \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s)}{\partial n} - \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \hat{P}_I(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r)}{\partial n} \right] dS \equiv 0, \quad (2.27)$$

pelo fato que $\hat{P} = \hat{P}_I + \hat{P}_S$ de forma única pelo Teorema de Sommerfeld (Peters e Stoker, 1954; Bleistein, 1984). Portanto, concluímos que $\hat{P}_S$ é escrito de forma única da seguinte maneira:

$$\hat{P}_S(\mathbf{x}_s; \omega, \mathbf{x}_r) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \left[\hat{P}_S(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r) \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s)}{\partial n} - \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s) \frac{\partial \hat{P}_S(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_r)}{\partial n} \right] dS. \quad (2.28)$$

Até este ponto, tudo o que fizemos foi exato. Obtivemos uma equação integral que se relaciona com o campo espalhado para os seus valores na superfície de descontinuidade. Motivado por nossa

experiência com ondas planas proveniente da óptica geométrica e os resultados da teoria assintótica, então, da diferenciação de (2.6), utilizamos a seguinte aproximação para a derivada normal da função de Green (Bleistein, 1984)

$$\frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}; \omega, \mathbf{x}_s)}{\partial n} \sim -i\omega \frac{\partial \tau(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)}{\partial n} A(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \exp(-i\omega \tau(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

Motivado pela teoria dos raios, Kirchhoff admitiu os seguintes valores de contorno para $\hat{P}_S$:

$$\hat{P}_S = R\hat{P}_I, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{P}_S}{\partial n} = -R \frac{\partial \hat{P}_I}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{D}. \quad (2.30)$$

O sinal negativo da segunda equação surge a partir do fato de que a componente normal do gradiente da fase sobre a onda refletida deve ser de sinal oposto ao da componente normal da onda incidente, de modo que o campo incidente e as ondas refletidas devem ser opostos em relação a $\mathbb{D}$. O fator $R = R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ é o coeficiente de reflexão sobre esta superfície de descontinuidade e com as suposições dadas pela teoria dos raios, pode ser representado matematicamente por (Bleistein, 1984)

$$R = \frac{\frac{\partial \tau_I}{\partial n} - s_I \sqrt{\frac{1}{c_+^2} - \frac{1}{c_-^2} + \left(\frac{\partial \tau_I}{\partial n}\right)^2}}{\frac{\partial \tau_I}{\partial n} + s_I \sqrt{\frac{1}{c_+^2} - \frac{1}{c_-^2} + \left(\frac{\partial \tau_I}{\partial n}\right)^2}}, \quad (2.31)$$

sendo $s_I = \text{Sgn}(\partial \tau_I / \partial n)$ e $\partial \tau_I / \partial n$ o vetor de vagarosidade na direção de $\mathbb{D}$ vindo do meio com velocidade c_- . A aproximação (2.30) é conhecida como *aproximação de Kirchhoff*.

Substituindo (2.30) com as representações (2.6) e (2.29) em (2.28), temos

$$\hat{P}_S(\mathbf{x}_s; \omega, \mathbf{x}_r) \sim -i\omega \hat{f}(\omega) \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} R A_s A_r \exp(-i\omega \tau_{sr}) \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial n} dS, \quad (2.32)$$

com $\tau_{sr} = \tau_s + \tau_r = \tau(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) + \tau(\mathbf{x}; \mathbf{x}_r)$, $A_s = A(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)$ e $A_r = A(\mathbf{x}; \mathbf{x}_r)$.

Agora, vamos reduzir a representação (2.32) a um integrando dado totalmente em termos da amplitude e fase no plano de propagação. Para isso, observamos que em um meio 2.5D podemos supor que

$$dS = d\ell dy. \quad (2.33)$$

Isto é, a diferencial de área de superfície é o produto entre a diferencial de comprimento de arco ao longo de uma curva geratriz $\mathbf{C} = (x(\ell), z(\ell))$ e a diferencial da coordenada que está fora do plano de propagação.

Calculamos a integral em y pelo método da fase estacionária (Olver, 1974; Bleistein e Handelsman, 1986; Bleistein, 1984; Evans, 2010), que, em geral, diz o seguinte: Dadas duas funções suaves $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- ∇L é nulo somente no suporte de g em um conjunto finito de pontos $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, e
- A Hessiana $D^2 L(\mathbf{x}_j)$ é não singular $(j = 1, \dots, N)$,

então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{ikL(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \sim \left(\frac{2\pi}{|k|} \right)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^N \frac{e^{ikL(\mathbf{x}_j)} e^{i\frac{\pi}{4}s_j}}{\sqrt{|\det[D^2L(\mathbf{x}_j)]|}} g(\mathbf{x}_j), \text{ quando } |k| \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

sendo $s_j := \text{Sgn}(kD^2L(\mathbf{x}_j))$ a assinatura da matriz $kD^2L(\mathbf{x}_j)$, i.e., o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos, e $D^2L(\mathbf{x}_j)$ a Hessiana da função L no ponto $\mathbf{x}_j$. Portanto, para isso, precisamos de algumas informações sobre as derivadas de τ . Iniciamos com a derivada na direção y do tempo de trânsito

$$\frac{\partial \tau_{sr}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_s}{\partial y} + \frac{\partial \tau_r}{\partial y} = p_{y,s} + p_{y,r}. \quad (2.35)$$

E necessitamos também de

$$\frac{\partial^2 \tau_{sr}}{\partial y^2} = \frac{\partial p_{y,s}}{\partial y} + \frac{\partial p_{y,r}}{\partial y}. \quad (2.36)$$

Das equação (2.13) e (2.14) temos a seguinte expressão

$$y = p_{y,s}\sigma_s \quad \text{e} \quad y = p_{y,r}\sigma_r, \quad (2.37)$$

e diferenciando (2.37) implicitamente com respeito a y chegamos em

$$1 = \frac{\partial p_{y,s}}{\partial y} \sigma_s + p_{y,s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{\partial p_{y,r}}{\partial y} \sigma_r + p_{y,r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Portanto, observamos por (2.37) que nosso único ponto estacionário é $y = 0$. Assim, em $y = 0$ temos $p_{y,s} = p_{y,r} = 0$, que, aplicados em (2.38), resulta no seguinte par de equações

$$\frac{\partial p_{y,s}}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p_{y,r}}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_r}. \quad (2.39)$$

Assim,

$$\left. \frac{\partial^2 \tau_{sr}}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_r}. \quad (2.40)$$

E por fim, temos todos os valores para aplicar o método da fase estacionária em (2.32). Usando (2.20) para substituir A_s , A_r e chamando s_ω como o sinal de ω , obtemos:

$$\hat{P}_S(\mathbf{x}_r; \omega, \mathbf{x}_s) \sim \sqrt{2\pi|\omega|} \frac{e^{s_\omega i 3\pi/4}}{(4\pi)^2} \hat{f}(\omega) \int_{\mathbf{C}, y=0} R \frac{\exp(-i\omega\tau_{sr})}{\sqrt{J_{*,s}J_{*,r}(\sigma_s + \sigma_r)}} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial n} d\ell, \quad (2.41)$$

onde $J_{*,s}$ e $J_{*,r}$ são os Jacobianos do raio referentes à fonte e o receptor, respectivamente.

2.1.3 Modelagem de um meio 2.5D homogêneo

Matematicamente, queremos simplificar o máximo nosso problema de modelagem. Fisicamente, a ideia é trabalhar em um domínio que gere para nós uma compreensão dos fenômenos em questão sem que haja grandes perdas na informação, para, com isso, inferirmos nesses fenômenos para os casos mais complicados. No caso mais simples, $c = c_0$, as equações do raio (2.15) podem ser resolvidas de forma explícita. Observamos que $dp_x/d\sigma = dp_z/d\sigma = 0$ e (p_x, p_z) é um vetor constante dado pela condição inicial do raio (2.11) com a velocidade constante. Então, resolvemos (2.15) para x e z , obtemos

$$x = x_0 + \frac{\sigma \sin \gamma_1}{c_0}, \quad z = z_0 + \frac{\sigma \cos \gamma_1}{c_0}, \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\sigma}{c_0^2}. \quad (2.42)$$

Resolvendo para σ nas duas primeiras equações,

$$\sigma = c_0 \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (2.43)$$

e assim substituímos (2.43) em (2.42) para obter

$$\tau = \frac{\mathcal{R}}{c_0}. \quad (2.44)$$

Além disso, encontramos J_* aplicando a equação (2.19), para as equações do raio em (2.42). Assim, temos como resultado

$$J_* = \frac{\sigma}{c_0^2} = \frac{\mathcal{R}}{c_0}. \quad (2.45)$$

Usando (2.45) em (2.20), obtemos

$$A = \frac{1}{4\pi \mathcal{R}}. \quad (2.46)$$

Agora, usando as equações (2.43), (2.45) em (2.41), temos a fórmula de Kirchhoff para o meio homogêneo

$$\hat{P}_S(\mathbf{x}_r; \omega, \mathbf{x}_s) \sim \sqrt{2\pi|\omega|} \frac{e^{s\omega i 3\pi/4}}{(4\pi)^2} \hat{f}(\omega) \int_{\mathcal{C}} R \frac{\exp(-i\omega\tau_{sr})}{\sqrt{\mathcal{R}_s \mathcal{R}_r \tau_{sr}}} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial n} d\ell, \quad (2.47)$$

com $\mathcal{R}_s = \sqrt{(x(\ell) - s)^2 + z(\ell)^2}$, $\mathcal{R}_r = \sqrt{(x(\ell) - r)^2 + z(\ell)^2}$ e $\tau_{sr} = (\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_r)/c_0$.

Vamos construir a solução final para o problema em um semi-espço onde a velocidade é constante, e para isto vamos usar novamente o método da fase estacionária.

Para aplicar o método da fase estacionária precisamos analisar o comportamento das funções envolvidas em (2.47) como funções da variável do comprimento de arco ℓ em torno dos pontos estacionários. Chamando $\mathbf{x}_\ell = (x(\ell), z(\ell))$, buscamos o valores de ℓ que satisfazem

$$\frac{d\tau_{sr}}{d\ell} = \nabla \tau_{sr} \cdot \frac{d\mathbf{x}_\ell}{d\ell} = 0, \quad \mathbf{x}_\ell \in \mathcal{C}. \quad (2.48)$$

Baseando nas deduções do Apêndice A (equações (A.11), (A.26), (A.27) e a parametrização por comprimento de arco) e manipulado-as algebricamente, chegamos nas seguintes equações para os pontos estacionários

$$\left. \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial n} \right|_{\mathbf{x}_\ell^*} = -\frac{2 \cos \gamma}{c_0}, \quad (2.49)$$

$$\left. \frac{d^2 \tau_{sr}}{d\ell^2} \right|_{\mathbf{x}_\ell^*} = (\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa) \frac{\tau_{sr}}{\mathcal{R}_s \mathcal{R}_r}, \quad (2.50)$$

com os valores de $\cos \beta$, $\cos \gamma$, $\mathcal{R}_0$ e κ dados nesse mesmo apêndice. Os pontos estacionários devem satisfazer a seguinte condição:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x^*} = \frac{dz}{d\ell} \frac{d\ell}{dx} = \operatorname{tg} \beta. \quad (2.51)$$

Agora, aplicamos o método da fase estacionária na equação (2.47) na variável ℓ e usamos as equações (2.49) e (2.50). Observamos também que (2.50) é sempre positivo e então fazemos a transformada inversa de Fourier. Obtemos o seguinte resultado:

$$P_S(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \frac{R^{(j)} f(t - \tau_{sr}^{(j)})}{c_0 \tau_{sr}^{(j)}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma^{(j)}}{\mathcal{R}_0^{(j)} \kappa^{(j)} + \cos^2 \gamma^{(j)}}}. \quad (2.52)$$

Representamos

$$c_0 \tau_{sr}^{(j)} = \sqrt{z_j^2 + (x_j - s)^2} + \sqrt{z_j^2 + (x_j - r)^2}, \quad (2.53)$$

com os N pontos estacionários $(x_j, 0, z_j)$ pertencentes à curva $\mathbf{C}$ e com $\mathbf{x}_s$ e $\mathbf{x}_r$ podendo ser escritas como $(s, 0, 0)$ e $(r, 0, 0)$, respectivamente. A Figura 2.2 ilustra a ideia dos raios saindo de uma fonte e chegando em um receptor no plano de propagação. Um resultado similar também é apresentado em Bleistein et al. (1999).

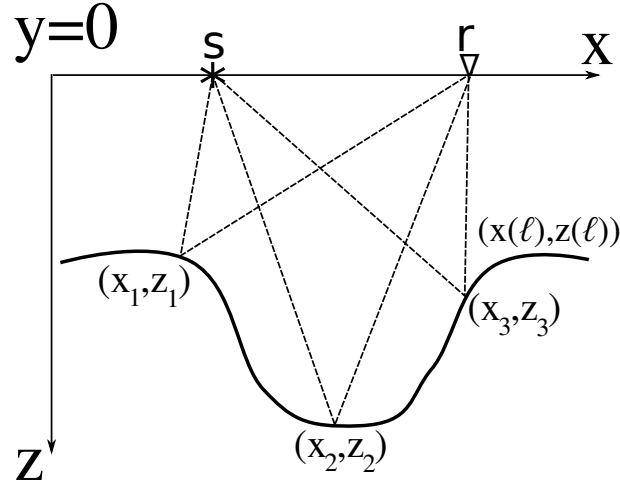


Figura 2.2: Três raios partindo de uma fonte situada em $\mathbf{x}_s$, refletindo em um refletor parametrizado por $(x(\ell), z(\ell))$ e retornando para o receptor situado em $\mathbf{x}_r$.

Capítulo 3

Equação para continuação do afastamento

O modelamento de fenômenos físicos por equações diferenciais requer um estudo a priori para obtenção de uma *integral completa* do fenômeno proposto. Então, para o nosso problema de construir um operador diferencial para continuação do afastamento temos que buscar sua integral completa e a partir disso desenvolvermos sua forma diferencial.

A equação diferencial parcial que foi modelada e estudada neste capítulo descreve o processo de continuação do afastamento, que é uma *transformação de configuração* sísmica que transforma uma dada seção de afastamento constante adquirida em uma outra seção de afastamento constante (Bolondi et al., 1982). Uma introdução mais intuitiva sobre o conceito da OCO pode ser vista em Hill et al. (2001). Operações como correção DMO, tiro-comum (CS-)DMO, TZO, correção *azimuth moveout* (AMO), tão como continuação de tiro e afastamento (SCO e OCO) são importantes transformações de configuração de dados na sísmica. O objetivo de uma transformação de configuração é simular uma seção sísmica com os dados medidos de uma outra configuração. Este tipo de técnica serve para redução do ruído no sinal, reconstrução de imagens danificadas e análise de velocidade. O uso da transformação de configuração para estes fins tem sido demonstrado em uma variedade de artigos, incluindo os seguintes artigos sobre TZO/MZO (Bleistein e Cohen, 1995; Tygel et al., 1998; Bleistein et al., 1999), OCO (Fomel e Bleistein, 1996; Santos et al., 1997; Fomel, 2003b), SCO (Bagaini e Spagnolini, 1996), AMO (Biondi et al., 1998), DMO (Hale, 1984; Canning e Gardner, 1996; Collins, 1997), CS-DMO (Schleicher e Bagaini, 2004) e análise de velocidade (Silva, 2005; Coimbra et al., 2012).

Neste capítulo, introduzimos o modelo matemático usado para iniciar a modelagem da equação diferencial para continuação do afastamento com o fator de espalhamento geométrico corrigido. Métodos de transformação de configuração que levam em conta o fator de espalhamento geométrico na comunidade da sísmica de exploração são denominados de verdadeira amplitude do termo em inglês *true amplitude* (Black et al., 1993; Schleicher et al., 2007).

3.1 Construção cinemática da OCO

Na sísmica de exploração, a construção de uma família de afastamento comum (CO) é mais uma maneira de ordenar os dados de um conjunto de tiros comum (CS). Em outras aplicações, tais como nas técnicas de radar ou ensaio acústico não destrutivo o experimento é feito através de um par fonte-

receptor sobre uma linha de aquisição sendo a distância entre a fonte e o receptor constante para cada experimento. Para todos os casos, se o meio for aproximadamente 2.5D a OCO permitirá a construção, baseando na informação deste último experimento, de uma nova seção de afastamento comum com outro afastamento entre fonte e receptor sobre esta linha de aquisição.

Nesta seção, deduzimos a equação diferencial que descreve o deslocamento de um evento de reflexão em função do afastamento na seção CO. Para tal, deduzimos primeiramente uma fórmula analítica para tal deslocamento em função dos parâmetros do meio.

A seguir, introduzimos uma importante ferramenta para construção de modelos que podem ser representados por equações diferenciais. Considere uma *hiper-superfície regular* (do Carmo, 2006), que descreva algum comportamento estudado, descrita pela equação

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, u; \mathbf{a}) = 0, \quad (3.1)$$

sendo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ um vetor arbitrário de parâmetros, $u = u(\mathbf{x})$ uma função suave de $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Diferenciamos a equação (3.1) com respeito a $\mathbf{x}$, obtendo

$$\nabla \mathcal{S} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u} \nabla u = 0. \quad (3.2)$$

Então, o sistema de $n + 1$ equações (3.1) e (3.2) envolve como parâmetros arbitrários as componentes de $\mathbf{a}$. Em geral, esses parâmetros podem ser eliminados desse sistema, obtendo uma equação diferencial parcial de primeira ordem da forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = 0. \quad (3.3)$$

Portanto, a hiper-superfície $\mathcal{S}$ dá origem uma equação diferencial parcial de primeira ordem descrita pela equação $\mathcal{F}$. Definimos que a equação (3.1), contendo n parâmetros arbitrários em $\mathbf{a}$, é chamada de *integral completa* ou *solução completa* da equação (3.3).

3.1.1 Meio homogêneo

Para iniciarmos a dedução da parte cinemática da OCO, relacionamos dois tempos de reflexão em seções de afastamento comum diferentes. Contudo, estes tempos de reflexão são referentes ao mesmo ponto imagem em profundidade, ou seja, possuem o mesmo ponto de reflexão.

Suponha fixado um ponto (ξ, t, h) , sendo ξ o ponto médio, t o tempo de reflexão e h o meio-afastamento entre fonte-receptor, dentro de um volume sísmico (domínio do dado) vindo de uma linha sísmica. Com isso, temos um conjunto de pontos $\{(x, z)\}$ que satisfazem a equação (2.53). Este conjunto forma uma curva no plano de propagação dentro do domínio da profundidade. Então, esta curva pode ser construída pelo seguinte procedimento:

Para simplificar a notação, substituímos $(x - \xi)$ por χ e definimos as quantidades auxiliares a , α_1 e α_2 através das seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} c_0 t &= 2a, \\ \alpha_1 &= z^2 + (\chi + h)^2, \\ \alpha_2 &= z^2 + (\chi - h)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde c_0 é a velocidade do meio. Com as equações (3.4) substituídas em (2.53), podemos escrever

$$2a = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}. \quad (3.5)$$

Elevando ambos os lados da equação (3.5) ao quadrado, temos uma nova equação com apenas uma raiz quadrada,

$$4a^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) = 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}. \quad (3.6)$$

Novamente, elevando ambos os lados ao da equação (3.6) ao quadrado e eliminando a raiz quadrada, chegamos a

$$16a^4 - 8a^2(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 4\alpha_1\alpha_2, \quad (3.7)$$

o que resulta em

$$16a^4 - 8a^2(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = 0. \quad (3.8)$$

Observando que $\alpha_1 - \alpha_2 = 4h\chi$, e usando as definições (3.4), escrevemos (3.8) como

$$16a^4 - 8a^2[2z^2 + 2\chi^2 + 2h^2] + 16\chi^2h^2 = 0. \quad (3.9)$$

Movendo os termos contendo z e χ para o lado direito da igualdade, têm-se

$$\begin{aligned} a^4 - a^2h^2 &= a^2(z^2 + \chi^2) - \chi^2h^2 \\ \Rightarrow a^2(a^2 - h^2) &= a^2z^2 + (a^2 - h^2)\chi^2 \\ \Rightarrow a^2 &= z^2/(1 - h^2/a^2) + \chi^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finalmente, obtemos a forma canônica da elipse, isso é a *isócrona* referente ao ponto (ξ, t, h) para um meio homogêneo,

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{(x - \xi)^2}{a^2} = 1, \quad (3.11)$$

com os semi-eixos $a = c_0t/2$ e $b = \sqrt{a^2 - h^2}$.

Uma isócrona é uma curva ou superfície no domínio da profundidade que está relacionada a um ponto do domínio do tempo, isto é, para cada ponto (ξ, t, h) fixo é possível construir uma superfície que é o lugar geométrico dos pontos que possuem o mesmo tempo de trânsito. Aqui para nosso problema, é apenas um curva, pois estamos interessados apenas na interseção da superfície gerada pela isócrona com o plano de propagação. Tygel et al. (1995) demonstram que, sob certas hipóteses, o envelope das isócronas sobre cada ponto da superfície de tempo de reflexão é o refletor. E nesse trabalho, eles chamam este resultado de *Teorema da dualidade*.

Para a dedução da integral completa do problema proposto na introdução deste capítulo, relacionamos dois pontos (ξ, t, h) e $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$ no volume de dados sísmicos associados ao mesmo ponto de reflexão em profundidade. Contudo, estes dois pontos tem em comum que suas isócronas possuem um ponto em comum (x_*, z_*) . Ou seja, esse ponto de reflexão dá origem aos eventos registrados tanto em (ξ, t, h) como em $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$. Baseado nisso, construímos uma fórmula que, dado um ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, gere uma superfície $\mathcal{S}(\xi, t, h; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = 0$, tal que todos os pontos dessa superfície tenham em comum o mesmo ponto de reflexão.

Pelo Teorema da Dualidade, podemos igualar a equação da isócrona (3.11) de um ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$,

$$z^2 = b_0^2 \left[1 - \frac{(x - \xi_{h_0})^2}{a_0^2} \right], \quad (3.12)$$

onde $a_0 = c_0 t_{h_0}/2$ e $b_0 = \sqrt{a_0^2 - h_0^2}$, com a outra isócrona do ponto (ξ, t, h) ,

$$z^2 = b^2 \left[1 - \frac{(x - \xi)^2}{a^2} \right], \quad (3.13)$$

onde $a = c_0 t/2$ e $b = \sqrt{a^2 - h^2}$, lembrando que essas duas isócronas se tocam no ponto em profundidade (x_*, z_*) . Na Figura 3.1, temos uma ideia desta construção, onde podemos ver duas isócronas se tangenciando no ponto (x_*, z_*) .

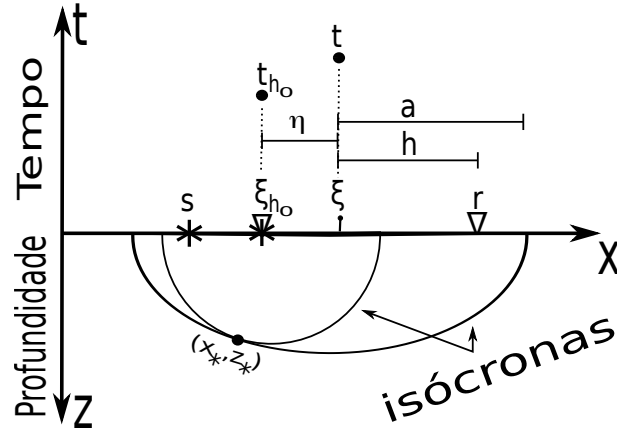


Figura 3.1: Diagrama em 2D de dois pontos no domínio do tempo não-migrado que têm suas isócronas com a mesma tangência em um ponto em profundidade.

Ao igualar as equações (3.12) e (3.13), temos a seguinte equação

$$\zeta(\xi, t, h, x; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = b^2 \left[1 - \frac{(x - \xi)^2}{a^2} \right] - b_0^2 \left[1 - \frac{(x - \xi_{h_0})^2}{a_0^2} \right] = 0. \quad (3.14)$$

A condição para a curva envoltória (*envelope*) (Courant e Hilbert, 1989; Evans, 2010) é

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (3.15)$$

que aplicada na equação (3.14) fornece

$$\frac{b^2}{a^2} (\xi - x) - \frac{b_0^2}{a_0^2} (\xi_{h_0} - x) = 0. \quad (3.16)$$

Essa última expressão pode ser resolvida para x , fornecendo x_* como

$$x_* = \frac{a^2 \xi_{h_0} b_0^2 - b^2 \xi a_0^2}{a^2 b_0^2 - b^2 a_0^2}. \quad (3.17)$$

Tomando $x = x_*$, em (3.14), obtemos

$$b^2 - b_0^2 = \frac{b^2 b_0^2}{h^2 a_0^2 - a^2 h_0^2} (\xi - \xi_{h_0})^2. \quad (3.18)$$

Resolvendo a equação (3.18) para t , obtemos as expressões

$$t = \sqrt{\frac{4h^2}{c_0^2} + \frac{\mu^2}{4h_0^2} t_{n_0}^2}, \quad |h| < |h_0|, \quad (3.19)$$

$$t = \sqrt{\frac{4h^2}{c_0^2} + \frac{4h^2}{\mu^2} t_{n_0}^2}, \quad |h| > |h_0|, \quad (3.20)$$

sendo $t_{n_0}^2 = t_{h_0}^2 - 4h_0^2/c_0^2$ e $\mu = \sqrt{(h - h_0)^2 - \eta^2} + \sqrt{(h + h_0)^2 - \eta^2}$, com $\eta = (\xi - \xi_{h_0})$, como também deduzido por Santos et al. (1997).

De acordo com a nossa dedução, as equações (3.19) e (3.20) descrevem curvas de todas as possíveis posições (ξ, t, h) , que partiram de $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, para algum h fixo e com a velocidade do meio sendo constante ou podendo ser aproximada por alguma velocidade média V na região de interesse. Na Figura 3.2 mostramos o equivalente a frentes de ondas dessas curvas integrais.

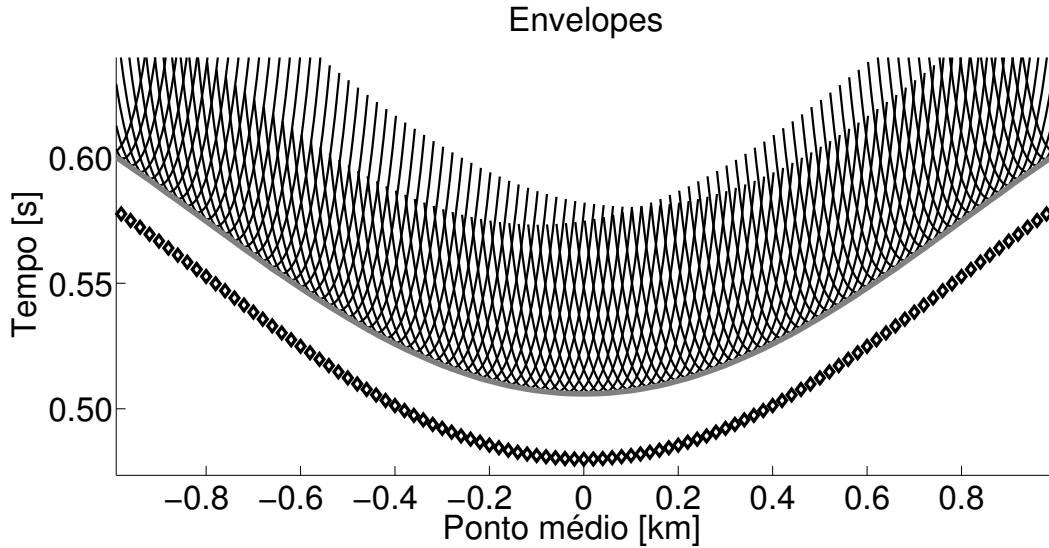


Figura 3.2: Construção de um tipo de frente de onda baseada nas curvas integrais para a OCO partindo da seção CO com meio-afastamento h_0 . Os diamantes pretos são as fontes pontuais primárias, as curvas em preto são as frentes de ondas, a curva em cinza é a envoltória (envelope) dessas frentes de onda formando a curva de reflexão em uma seção CO com meio-afastamento h , onde $h > h_0 \geq 0$.

3.1.2 Meio localmente homogêneo

Até aqui, nossa dedução foi para meios homogêneos e ela é exata neste caso. Vamos introduzir um conceito importante para mensurar uma velocidade média em meios que não sejam homogêneos, mas que cinematicamente podem ser aproximados localmente por uma velocidade constante.

A trajetória referente ao ponto de reflexão comum ou CRP (abreviado como trajetória CRP) é a curva no domínio dos dados sísmicos, $(\xi(h), \tau(h), h)$, parametrizada pelo meio-afastamento h , tal

que suas isócronas, referentes a cada ponto $(\xi(h), \tau(h), h)$, tangenciam o mesmo ponto sobre um refletor independente do modelo de velocidade. Conhecendo o valor de $\xi = \xi(h)$ sobre a trajetória CRP, pelo menos suas derivadas até a primeira ordem, estudamos o que é preciso para obter uma aproximação da parametrização

$$\tau = \tau(h) = \tau(\xi(h), h) \quad (3.21)$$

com erro máximo de $\mathcal{O}(\delta h^2)$, onde $\delta h = h - h_0$. Para essa última, fazemos a seguinte definição para tal tarefa:

Seja a função $\text{DSR} = \text{DSR}(\xi, h)$, de *Double Square Root*, denotada pela seguinte equação

$$\text{DSR}(\xi, h) = \left(\sqrt{z_0^2 + (x_0 - \xi + h)^2} + \sqrt{z_0^2 + (x_0 - \xi - h)^2} \right) / V. \quad (3.22)$$

Definimos um meio como *localmente homogêneo* no ponto $(\xi(h_0), \tau(h_0), h_0)$ caso existam V , x_0 e z_0 , tais que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \text{DSR}(h_0) = \tau(h_0), \\ (ii) \quad & \left. \frac{d\text{DSR}}{dh} \right|_{h=h_0} = \left. \frac{d\tau}{dh} \right|_{h=h_0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A definição dada em (3.23) é baseada no conhecimento dos valores de

$$\xi(h_0) \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\xi}{dh} \right|_{h=h_0}, \quad (3.24)$$

onde a função $\xi = \xi(h)$ é a projeção da trajetória CRP sobre o eixo do ponto médio.

Das equações (A.5) e (A.21)-(A.23), observamos que para satisfazer as duas primeiras propriedades para o meio localmente homogêneo, os valores de $\{V, x_0, z_0\}$ são suficientes para obter (i) e a seguinte expressão de (ii) de (3.23) como

$$\left(\frac{\partial \text{DSR}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \text{DSR}}{\partial h} - \frac{\partial \tau}{\partial h} \right) = 0 \quad (3.25)$$

aplicados em $h = h_0$.

A Figura 3.3 ilustra que as informações em profundidade não precisam ser as mesmas do meio estudado e sim da cinemática da trajetória CRP até a primeira ordem. Daí, com a definição (3.23), reduzimos nosso problema que tem vários graus de liberdade para apenas um, ou seja, buscar a velocidade média V . Até os limites válidos para aproximação de segunda ordem dadas por (3.23), dizemos que nessa região há uma “homogeneidade” do meio com a velocidade média V . Ou seja, tratamos V como se fosse constante nessa região. Por isso, não precisamos saber o que há em subsuperfície para inferirmos nos eventos das seções sísmicas, a necessidade é somente da velocidade média satisfaça a definição de localmente homogêneo. De fato, V é a única informação que podemos associar com a informação de subsuperfície que podemos extrair do modelo DSR e a sísmica adquirida.

Por fim, usando a propriedade do meio ser localmente homogêneo para seguirmos a função $\xi(h; h_0)$, que representa o deslocamento projetado no ponto médio da trajetória CRP, temos

$$\text{DSR}(h; h_0) - \tau(h; h_0) = \mathcal{O}(\delta h^2), \quad \text{sendo} \quad \delta h = h - h_0. \quad (3.26)$$

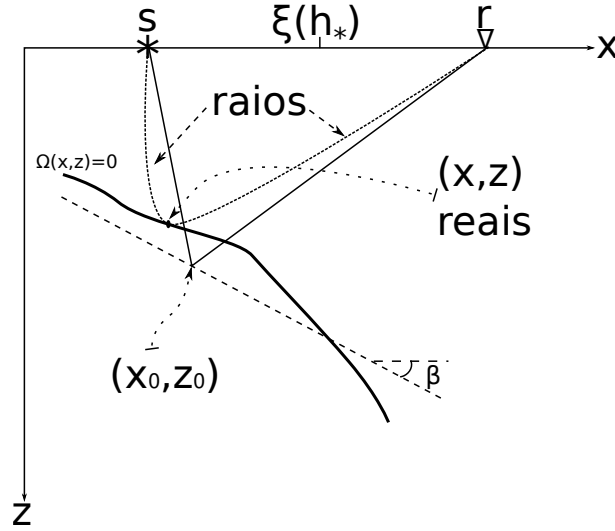


Figura 3.3: Representação da ideia de localmente homogêneo para meios não-homogêneos. Mostrando que as informações em profundidade não precisam ser as mesmas, mas tendo suas informações cinemáticas satisfazendo todas as condições de (3.23). Aqui, Ω é a curva de reflexão real onde os traçados dos raios saindo da fonte s chegam no receptor r após tocar em Ω no ponto de reflexão real (x, z) .

Para discutirmos o erro da aproximação da trajetória OCO em um meio localmente homogêneo, notamos que a dedução das equações (3.19) e (3.20) partiram da equação (2.53), que é o modelo DSR escrito de outra forma. Assim, caso o modelo seja localmente homogêneo, usar as equações (3.19) e (3.20) com o conhecimento do valor da derivada de $\xi = \xi(h)$ até a primeira ordem em $h = h_0$, é equivalente a usar a equação DSR com os valores de x_0 , z_0 e V fixos. Uma vez que uma equação que representa o deslocamento do ponto médio $\xi_* = \xi_*(h)$ possui erro da ordem $\mathcal{O}(\delta h^2)$ em relação à equação que representa o deslocamento exato do ponto médio (i.e., a trajetória CRP), temos que o erro da trajetória OCO em relação à trajetória CRP é no máximo de ordem $\mathcal{O}(\delta h^2)$.

3.1.3 Operador diferencial da OCO

Nesta seção, utilizamos a técnica que trata da modelagem de equações diferenciais de primeira ordem (Courant e Hilbert, 1989; Evans, 2010) para a construção de uma espécie de frente de ondas para OCO, ou seja, sua integral completa.

Baseando-nos em (3.1), usamos a equação (3.19) ou (3.20) para construirmos uma equação diferencial. A solução dessa equação diferencial mediante o método das características fornece a trajetória característica do operador para continuação do afastamento. Essa relação obedecerá aos mesmos princípios que a correspondente relação entre a cinemática da propagação de ondas acústicas e a equação da onda.

Descrevemos a integral completa como $\mathcal{S}(\xi, t, h; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = 0$ do problema para OCO baseada nas equações (3.19) e (3.20) que são equivalentes a menos do sentido da trajetória, para $|h| > |h_0|$ ou $|h| < |h_0|$. Nesse caso, usamos (3.20) para representar a integral completa tomando $h_0 = 0$. Então,

escrevemos

$$\mathcal{S}(\xi, t, h; \xi_0, t_0, 0) = t - \sqrt{\frac{4h^2}{V^2} + \frac{h^2 t_0^2}{h^2 - \eta^2}} = 0, \quad (3.27)$$

para representar nossa integral completa para tal procedimento.

Denotando $t - \mathcal{T}(\xi, h) = 0$, temos $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi, h)$ como a solução da equação diferencial a ser modelada. Agora, derivamos $\mathcal{S}$ com respeito a ξ e h , para, com isso desenvolvermos a equação desejada. Antes, vamos fazer uma pequena mudança na equação para apenas simplificar as contas, e sem perda de generalidade, escrevemos

$$\mathcal{T}^2 - \frac{4h^2}{V^2} = \frac{t_0^2 h^2}{h^2 - \eta^2}. \quad (3.28)$$

Derivando a equação (3.28) modificada com respeito a ξ , temos

$$\mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} = \frac{t_0^2 h^2 \eta}{(h^2 - \eta^2)^2}. \quad (3.29)$$

Agora, derivando a equação (3.28) com respeito a h , tem-se

$$\mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \frac{4h}{V^2} = \frac{t_0^2 h}{h^2 - \eta^2} - \frac{t_0^2 h^3}{(h^2 - \eta^2)^2}. \quad (3.30)$$

A equação (3.28) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{h}{h^2 - \eta^2} = \left(\frac{\mathcal{T}^2}{h} - \frac{4h}{V^2} \right) \frac{1}{t_0^2}. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.30), obtemos

$$t_0^2 = \left(\frac{\mathcal{T}^2}{h} - \frac{4h}{V^2} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{T}^2}{h^2} - \frac{\mathcal{T}}{h} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^{-1}. \quad (3.32)$$

Novamente, substituindo (3.31) em (3.29) e depois usando (3.32), chegamos a

$$\eta = \mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \left(\frac{\mathcal{T}^2}{h^2} - \frac{\mathcal{T}}{h} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^{-1}. \quad (3.33)$$

Nessa última expressão, temos que o deslocamento do ponto médio no CO para o ponto médio no ZO depende da informação das duas derivadas parciais de primeira ordem do tempo de trânsito sobre o CO.

Finalmente, substituindo (3.32) e (3.33) na equação (3.28), obtemos a equação diferencial parcial para o problema proposto,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) = h \mathcal{T} \left[\frac{4}{V^2} + \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \right)^2 \right]. \quad (3.34)$$

Este resultado foi obtido também por Fomel (2003c), equação (A-12) no respectivo trabalho, usando relações trigonométricas.

A teoria das características para equações do tipo hiperbólicas (John, 1981; Courant e Hilbert, 1989; Lax, 2006) afirma que, se uma equação diferencial parcial tem a forma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\mathcal{M}_{jl}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_l} \right) + \Theta \left(x_1, \dots, x_n, P, \frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right) = 0, \quad (3.35)$$

onde $\Theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função arbitrária e $\mathcal{M}_{jl} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, se os autovalores da matriz de $\mathbb{M} = [\mathcal{M}_{jl}]$ são todos diferentes de zero, e apenas um deles têm o sinal diferente dos demais, então a equação (3.35) descreve um processo de propagação do tipo de ondas, e o sua contraparte cinemática é descrita pela *forma característica* ou *Hamiltoniano*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\mathcal{M}_{jl}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial K}{\partial x_l} \right) = 0, \quad (3.36)$$

com a *superfície característica* ou *Hamiltoniana*

$$K(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (3.37)$$

correspondente à frente de onda da equação (3.35). Se escolhermos alguma variável para indicar a direção de propagação como, por exemplo, x_n , e o resto das variáveis x_j para denotarem as coordenadas restantes, então, sem perda de generalidade, podemos definir a superfície característica sendo

$$K(x_1, \dots, x_n) = x_n - X(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad (3.38)$$

com $X : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (do tipo iconal) que, também, satisfaz

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left(\mathcal{M}_{jl} \frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial X}{\partial x_l} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\mathcal{M}_{jn} \frac{\partial X}{\partial x_j} \right) + \mathcal{M}_{nn} = 0. \quad (3.39)$$

Assim, utilizando (3.35)-(3.39) e dizendo que nossa Hamiltoniana $K(\xi, t, h) = 0$ é solução do seguinte Hamiltoniano

$$th \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial h} \right)^2 - \frac{4}{V^2} \left(\frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 \right] = \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial h}, \quad (3.40)$$

e chamando nossa Hamiltoniana de

$$K(\xi, t, h) = t - \mathcal{T}(\xi, h) = 0, \quad (3.41)$$

temos como solução do tipo iconal a equação (3.34).

Agora, se chamarmos $K(\xi, t, h) = h - \mathcal{H}(\xi, t) = 0$, temos a equação desenvolvida em Hubral et al. (1996), sendo

$$t\mathcal{H} \left[1 + \frac{4}{V^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \left(t^2 + \frac{4\mathcal{H}^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (3.42)$$

Voltando para teoria das equações hiperbólicas, podemos representar nosso Hamiltoniano (3.40) como a forma características da equação

$$ht \left(\frac{\partial^2 P}{\partial h^2} + \frac{4}{V^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right) + \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial h \partial t} = \Theta \left(\xi, t, h, P, \frac{\partial P}{\partial \xi}, \frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial h} \right). \quad (3.43)$$

A equação (3.43) para o caso que $\Theta \equiv 0$, descreve um processo artificial (não-físico) que continua cinematicamente um dado sísmico de reflexão $P(\xi, t, h)$ no domínio (ponto médio $\times$ tempo $\times$ meio afastamento) ao longo do eixo h . Como podemos observar a equação (3.43) pertence à classe das equações diferenciais parciais de segunda ordem hiperbólicas. Podemos tomar h como a variável do tipo de propagação da informação. Em comparação com a propagação de ondas físicas, h atua como a variável temporal na equação da onda. Hubral et al. (1996) também deduzem a equação (3.43) partindo da equação (3.42) usando uma simplificação de solução por ondas planas.

3.1.4 Propriedades cinemáticas do operador para continuação do afastamento

Nesta seção, estudamos as propriedades cinemáticas da equação (3.43). Ou seja, fazemos um estudo analítico na equação (3.34) que resulta no seguinte problema de Cauchy

$$\left[\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{4}{V^2} \right] h \mathcal{T} - \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} = 0, \quad \mathcal{T}(\xi, h = h_0) = \tau_{h_0}(\xi), \quad (3.44)$$

onde $\tau_{h_0} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua em um intervalo I representando o tempo de trânsito pertencente a uma seção CO. Então, para simplificar a notação, chamamos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} := \left[\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{4}{V^2} \right] h \mathcal{T} - \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}. \quad (3.45)$$

Usando o método das características em

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} \left(\xi, h, \mathcal{T}, \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right) = 0, \quad (3.46)$$

podemos obter a solução de (3.44) através do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dh} &= \lambda \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial p} = -2\lambda h \mathcal{T} p, \\ \frac{dh}{dh} &= \lambda \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial q} = \lambda \left[2h \mathcal{T} q - \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \right] = 1, \\ \frac{d\mathcal{T}}{dh} &= \lambda \left(p \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial p} + q \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial q} \right) = \lambda \left[\left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) q - \frac{8h \mathcal{T}}{V^2} \right], \\ \frac{dp}{dh} &= \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial \xi} + p \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial \mathcal{T}} \right) = \lambda \left[h p \left(q^2 - p^2 + \frac{4}{V^2} \right) - 2p q \mathcal{T} \right], \\ \frac{dq}{dh} &= \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial h} + q \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\partial \mathcal{T}} \right) = \lambda \left[(\mathcal{T} + h q) \left(q^2 - p^2 + \frac{4}{V^2} \right) - 2q \left(q \mathcal{T} + \frac{4h}{V^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

com $p = \partial\mathcal{T}/\partial\xi$, $q = \partial\mathcal{T}/\partial h$. A partir da segunda equação do sistema (3.47), temos que

$$\lambda = \left[2h\mathcal{T}q - \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \right]^{-1}. \quad (3.48)$$

Então, para cada ponto em $\mathcal{T}_{h_0} = \tau_{h_0}(\xi_{h_0})$, temos as seguintes condições iniciais para $h = h_0$: $\mathcal{T}(h_0) = \tau_{h_0}(\xi_{h_0})$, $\xi(h_0) = \xi_{h_0}$, $p(h_0) = d\tau_{h_0}(\xi_{h_0})/d\xi_{h_0} = p_{h_0}$. Para a obtenção de $q(h_0) = q_{h_0}$, usamos o procedimento a seguir.

Substituindo as condições iniciais em (3.44), temos

$$\left(q_{h_0}^2 - p_{h_0}^2 + \frac{4}{V^2} \right) h\mathcal{T}_{h_0} - \left(\mathcal{T}_{h_0}^2 + \frac{4h_0^2}{V^2} \right) q_{h_0} = 0. \quad (3.49)$$

Note que (3.49) é uma equação quadrática na variável q_{h_0} . Calculando a raiz importante, temos

$$q_{h_0} = \frac{2h_0\mathcal{T}_{h_0}(4 - p_{h_0}^2 V^2)}{V^2\mathcal{T}_{h_0}^2 + 4h_0^2 + \sqrt{16h_0^4 + 4h_0^2\mathcal{T}_{h_0}^2 V^2(p_{h_0}^2 V^2 - 2) + \mathcal{T}_{h_0}^4 V^4}}. \quad (3.50)$$

O fato dessa raiz ser a importante é devido ao quadrado da distância percorrida entre a fonte-refletor-receptor é maior ou igual do que ao quadrado do caminho direto entre o par fonte-receptor, i.e.,

$$\tau_{h_0}^2 - \frac{4h_0^2}{V^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial\tau}{\partial h} = q_{h_0} \geq \frac{4h_0}{\tau V^2} \geq 0, \text{ quando } h_0 \geq 0. \quad (3.51)$$

Coimbra et al. (2012) aplicaram o mesmo enfoque, método das características, para calcular as trajetórias do operador (3.43). Em Coimbra et al. (2012) a equação (3.42) foi usada como um problema de Cauchy e chamaram essas trajetórias do sistema de *trajetórias OCO*.

3.1.5 Derivadas do tempo de trânsito

Denotando a derivada do tempo de reflexão na direção do ponto médio, para um meio-afastamento h fixo, por

$$\phi_h = \left. \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\xi} \right|_h, \quad (3.52)$$

podemos deduzir a partir da equação (3.50), a seguinte relação para a derivada do tempo de reflexão na direção do afastamento, para um ponto-médio ξ fixo, sendo

$$\psi_\xi = \left. \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial h} \right|_\xi = \frac{2h\tau(4 - \phi_h^2 V^2)}{V^2\tau^2 + 4h^2 + \sqrt{16h^4 + 4h^2\tau^2 V^2(\phi_h^2 V^2 - 2) + \tau^4 V^4}}. \quad (3.53)$$

Correspondentemente, podemos achar expressões para as derivadas nas seções CS e CR (de *common receiver*). Podemos usar as mudanças de coordenadas $\xi = (r+s)/2$ e $h = (r-s)/2$ para extrair as derivadas como combinações lineares de ϕ_h e ψ_ξ dessas famílias respectivamente, como

$$\varphi_r = \frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{1}{2}(\phi_h + \psi_\xi) \quad \text{e} \quad \varphi_s = \frac{\partial\tau}{\partial s} = \frac{1}{2}(\phi_h - \psi_\xi). \quad (3.54)$$

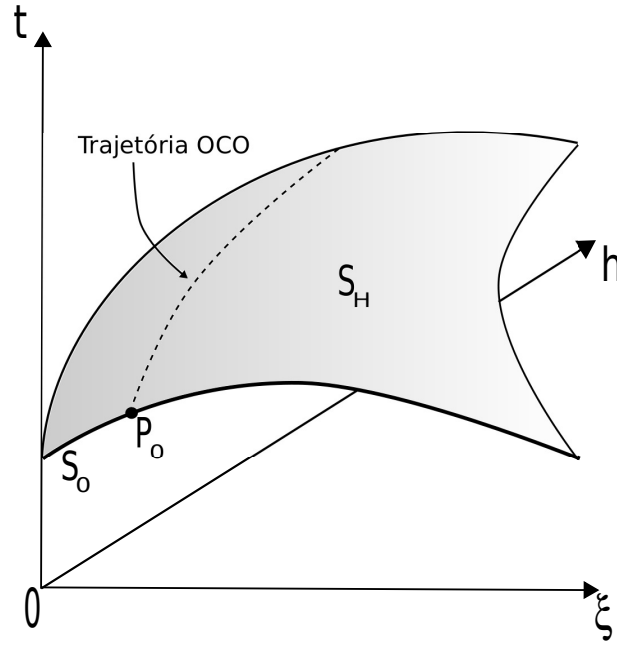


Figura 3.4: Esquema representando uma trajetória OCO. A variedade S_H representa a superfície de tempo de reflexão, $S_0 = \{\tau_{h_0}(\xi_{h_0})\}$ e a curva gerada pela intersecção com o plano $h = h_0$ e $P_0 = (\xi_{h_0}, \tau_{h_0}, h_0)$ é o ponto de partida para calcular a trajetória OCO através das fórmulas (3.19), (3.20) e (3.59).

3.1.6 A trajetória OCO

Na equação (3.33) usamos as informações das duas derivadas do tempo de reflexão no CO para obtermos o deslocamento do ponto médio para o ZO referentes ao mesmo evento imagem. Agora, queremos essa mesma informação de deslocamento apenas usando a derivada em ξ , e também que esse deslocamento seja levado para qualquer CO e não somente para o ZO. Então, vamos usar a técnica de envelopes (Courant e Hilbert, 1989), sobre a solução integral deste problema da seguinte maneira: Temos da teoria dada em (3.1)-(3.3) que

$$\mathcal{S}(\xi, t, h; \xi_{h_0}, \tau_{h_0}(\xi_{h_0}), h_0) = t - \mathcal{T}(\xi, h; \xi_{h_0}, \tau_{h_0}(\xi_{h_0}), h_0) = 0 \quad (3.55)$$

é a integral completa de (3.44) com

$$\mathcal{T}^2 = \frac{4h^2}{V^2} + \frac{4h^2(\tau_{h_0}(\xi_{h_0})^2 - 4h_0^2/V^2)}{\mu(\xi, \xi_{h_0}, h, h_0)^2}. \quad (3.56)$$

Então, fazendo a diferenciação implícita em $\mathcal{S}$ no parâmetro ξ_{h_0} , temos

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi_{h_0}} = \frac{\partial t}{\partial \xi_{h_0}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi_{h_0}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau_{h_0}} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial \xi_{h_0}} = 0, \quad (3.57)$$

o que implica em

$$\frac{\partial t}{\partial \xi_{h_0}} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi_{h_0}} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau_{h_0}} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial \xi_{h_0}} = 0. \quad (3.58)$$

Calculando (3.58) com os valores de (3.56) e isolando $\xi - \xi_0$, obtemos

$$\xi - \xi_{h_0} = \frac{2\Upsilon_{h_0}(h^2 - h_0^2)}{\sqrt{\Upsilon_{h_0}^2 \Lambda^2 + 2\tau_{n_0}^4 + 2\sqrt{\tau_{n_0}^8 + \Upsilon_{h_0}^2 \tau_{n_0}^4 \Lambda^2 + 16\Upsilon_{h_0}^4 h^2 h_0^2}}}, \quad (3.59)$$

onde $\tau_{n_0} = \sqrt{\tau_{h_0}^2 - 4h_0^2/V^2}$ é a equação da correção do NMO no meio-afastamento inicial h_0 , $\Lambda = 2\sqrt{h^2 + h_0^2}$ e $\Upsilon_{h_0} = \tau_{h_0}\phi_{h_0}$. Apesar de usarmos a equação NMO, note que a velocidade V não é a velocidade NMO. Chamamos-a de velocidade OCO e discutiremos seu significado mais à frente.

Assim, as equações (3.19), (3.20) e (3.59) descrevem a solução do sistema (3.47) que representa a trajetória OCO (Figura 3.4) como definida em Coimbra et al. (2012).

Para uso em simplificações algébricas mais adiante, vamos descrever alguns destes reposicionamentos para o caso de afastamento nulo. Para executar o reposicionamento do ponto médio partindo de uma seção de afastamento comum $2h_0$ para a seção afastamento nulo $h = 0$, substituímos os valores de h_0 e $h = 0$ na equação (3.59) e obtemos

$$\xi_0 - \xi_{h_0} = \frac{-2\phi_{h_0}h_0^2\tau_{h_0}}{\tau_{n_0}^2 + \sqrt{\tau_{n_0}^4 + 4\tau_{h_0}^2\phi_{h_0}^2h_0^2}}, \quad (3.60)$$

com ξ_0 denotando o valor de ξ_h em $h = 0$. Em outras palavras, equação (3.60) descreve o deslocamento do ponto médio na TZO ou migração para o afastamento nulo (abreviado de MZO do inglês *Migration to Zero-Offset*).

Para o caso de partirmos da seção de afastamento nulo, simplesmente tomamos, análogo ao caso anterior, $h_0 = 0$ e $h \neq 0$. Substituindo os valores de $h_0 = 0$ e $h \neq 0$ na equação (3.59), obtemos

$$\xi - \xi_0 = \frac{2\phi_0h^2}{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 + 4\phi_0^2h^2}}, \quad (3.61)$$

com ξ_0 , τ_0 , e ϕ_0 denotando o valor de ξ_{h_0} , τ_{h_0} , e ϕ_{h_0} em $h_0 = 0$.

3.1.7 Continuação da declividade

Ao longo da trajetória OCO, podemos inferir sobre a informação da primeira derivada na direção do ponto médio para cada afastamento continuado. Igualando as equações (3.60) e (3.61), temos uma relação entre as inclinações dos eventos em uma seção ZO com os eventos de uma seção CO dados por

$$\phi_0 = \phi_h \frac{\tau_0\tau_h}{\tau_n^2}. \quad (3.62)$$

Novamente, $\tau_n = \sqrt{\tau_h^2 - 4h^2/V^2}$. Equacionando ϕ_0 , advindo de dois diferentes afastamentos $2h$ e $2h_0$, encontramos uma relação direta entre as inclinações sobre a trajetória OCO nas seções CO em h e h_0 como

$$\phi_h = \phi_{h_0} \frac{\tau_n^2\tau_{h_0}}{\tau_{n_0}^2\tau_h}. \quad (3.63)$$

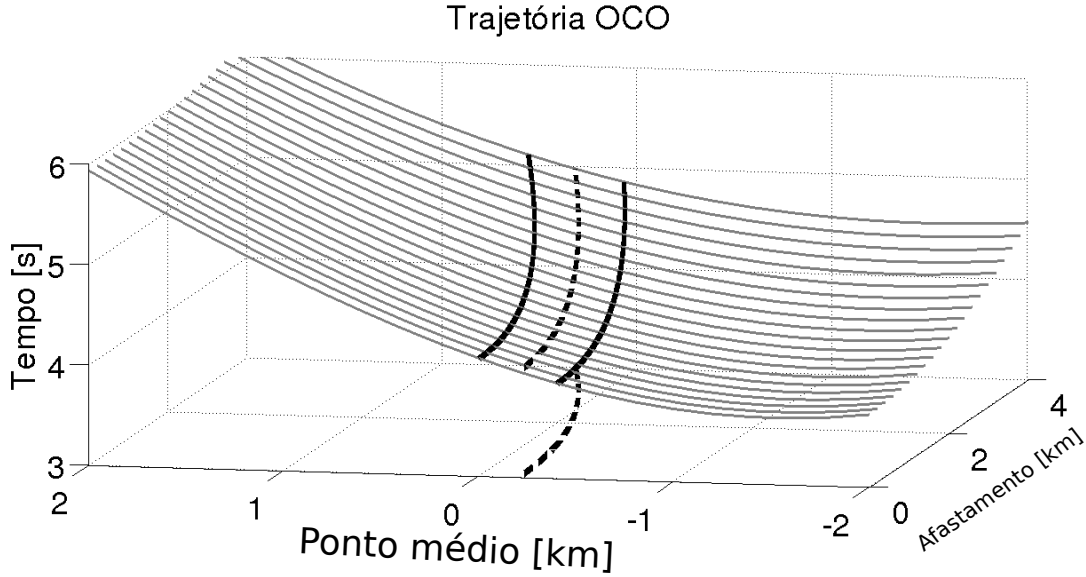


Figura 3.5: *Trajetórias OCO juntamente com a superfície tangente ao tempo de reflexão. Observe que usando a continuação da declividade a região gerada é praticamente igual ao da superfície de tempo de reflexão. A curva tracejada abaixo é a projeção da trajetória OCO em $(\xi, 2h)$*

Em resumo, o que acabamos de mostrar é que se temos sobre a superfície de tempo de reflexão a informação de sua primeira derivada na direção do ponto médio, então podemos fazer a continuação desta informação de forma que, essa informação, será corrigida para cada afastamento transformado ao longo da trajetória OCO. Chamamos essa operação de *continuação da declividade*. Na Figura 3.5 observamos como a informação da variação da inclinação é corrigida em cada afastamento sobre a trajetória OCO.

3.2 Velocidade OCO

Nesta seção, relacionamos a velocidade OCO com a velocidade NMO usada no processamento sísmico. Expressamos analiticamente a velocidade NMO em termos dos parâmetros cinemáticos. Seja $\tau = \tau(\xi, h)$ uma função suave que representa o tempo de reflexão. Escrevendo a série de Taylor na variável h em torno de $h = 0$, temos

$$\tau(\xi, h) = \tau(\xi, 0) + h \left. \frac{\partial \tau}{\partial h} \right|_{h=0} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial h^2} \right|_{h=0} + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.64)$$

Por reciprocidade da função de Green, temos que a função τ é par na variável h , então

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial h} \right|_{h=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial h \partial \xi} \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi \partial h} \right|_{h=0} = 0. \quad (3.65)$$

De (1.1), escrevemos a fórmula para a técnica NMO que, na notação adotada aqui, é escrita da forma

$$\tau(\xi, h)^2 = \tau(\xi, 0)^2 + \frac{4h^2}{v_n^2}, \quad (3.66)$$

onde v_n é a velocidade NMO.

Denotando

$$\tau(\xi, 0) = \tau_0, \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} \quad (3.67)$$

e elevando (3.64) ao quadrado e usando (3.65), temos

$$\tau(\xi, h)^2 = \tau_0^2 + \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.68)$$

Subtraindo (3.66) de (3.68), após divisão por h^2 , temos

$$\frac{4}{v_n^2} = \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.69)$$

No limite $h \rightarrow 0$, obtemos a seguinte relação entre a velocidade NMO e a segunda derivada do tempo de trânsito na seção CMP,

$$\frac{4}{v_n^2} = \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2}. \quad (3.70)$$

Agora, expandido τ em série de Taylor nas duas variáveis, com $\delta\xi = \xi - \xi_0$, podemos fazer a seguinte relação com a cinemática

$$\tau(\xi, h) = \tau(\xi_0, 0) + \phi_0 \delta\xi + \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 + \mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(\delta\xi^2). \quad (3.71)$$

Elevando (3.71) ao quadrado, obtemos a seguinte expansão, que no jargão dos geofísicos de exploração é conhecida como *expansão hiperbólica* (Ursin, 1982)

$$\tau(\xi, h)^2 = \tau_0^2 + 2\tau_0 \phi_0 \delta\xi + \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 + \phi_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 \delta\xi + \mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(\delta\xi^2). \quad (3.72)$$

Substituindo $\tau(\xi, h)$ pela equação (3.20) com $h_0 = 0$, temos

$$\frac{\tau_0^2 h^2}{h^2 - \delta\xi^2} + \frac{4h^2}{V^2} = \tau_0^2 + 2\tau_0 \phi_0 \delta\xi + \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 + \phi_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} h^2 \delta\xi + \mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(\delta\xi^2). \quad (3.73)$$

Usando (3.61) para parametrizar $\delta\xi$ por h em (3.73), observamos que $\delta\xi = \mathcal{O}(h^2)$, quando $h \rightarrow 0$. Pela equação (3.61), obtemos

$$\frac{4}{V^2} = \frac{-4\tau_0^2 \phi_0^2}{\tau_a^2 - 4\phi_0^2 h^2} + 4\phi_0^2 \frac{\tau_0}{\tau_a} + \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.74)$$

onde escrevemos $\tau_a = \tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 + 4\phi_0^2 h^2}$ por simplificação. Então, quando $h \rightarrow 0$, concluímos

$$\left. \frac{4}{V^2} \right|_{h=0} = \phi_0^2 + \tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2}. \quad (3.75)$$

Neste caso, a velocidade OCO para o caso ZO pode ser vista como uma soma entre a função que envolve a velocidade NMO e o quadrado da declividade do evento na seção ZO. Em termos matemáticos, dizemos

$$\left. \frac{4}{V^2} \right|_{h=0} = \frac{4}{v_n^2} + \phi_0^2. \quad (3.76)$$

Ou seja, a velocidade OCO é equivalente à velocidade NMO somente no caso em que a inclinação do evento ϕ_0 na seção ZO for zero.

3.2.1 Relação com a trajetória CRP

Agora, queremos saber qual a ordem de precisão da trajetória OCO em relação com a trajetória CRP. Para meios homogêneos a trajetória OCO é exatamente a trajetória CRP, ou seja, o deslocamento do ponto médio inicial até o ponto médio final representa o ponto médio do mesmo ponto de reflexão em subsuperfície para um dado refletor qualquer. A pergunta agora é: para meios localmente homogêneos, o quanto isso se aproxima? Então, por simplicidade, vamos iniciar esta análise em torno do raio central do tempo de reflexão de afastamento nulo. Usando a equação (3.61), temos que sua segunda derivada é

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dh^2} \right|_{h=0} = \frac{2\phi_0}{\tau_0}. \quad (3.77)$$

Agora, calculando a segunda derivada total, em função do meio-afastamento h , do tempo de trânsito ao quadrado $\tau^2 = \tau(\xi_*, h)^2$, chegamos em

$$\left. \frac{d^2 \tau^2}{dh^2} \right|_{h=0} = 2\tau_0 \left(\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} + \phi_0 \left. \frac{d^2 \xi_*}{dh^2} \right|_{h=0} \right), \quad (3.78)$$

sendo os valores de τ_0 , $\partial^2 \tau_0 / \partial h^2$ como em (3.67). A função $\xi_* = \xi_*(h)$ é par em h , como a equação que descreve a ponto médio da trajetória CRP.

Substituindo (3.61) em (3.20), obtemos a seguinte expressão para o tempo de trânsito da trajetória OCO em função de h como

$$\mathcal{T}(h)^2 = \frac{4h^2}{V^2} + \frac{\tau_0}{2} \tau_a. \quad (3.79)$$

Agora, fazendo a segunda derivada em (3.79) na direção do meio-afastamento e usando a velocidade de (3.75), velocidade OCO para ZO, temos que

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{T}^2}{dh^2} \right|_{h=0} = \frac{8}{V^2} + 2\phi_0^2 = 2\tau_0 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial h^2} + 4\phi_0^2. \quad (3.80)$$

Então, no modelo de velocidade localmente homogêneo, temos que $\tau = \mathcal{T}$ e as primeiras derivadas são iguais e, portanto, $d\tau^2/dh = d\mathcal{T}^2/dh$. Para o caso de $h = 0$ temos $d\tau^2/dh = 0$. Assim, desde que $d\tau^2/dh$ seja diferenciável em h , concluímos

$$\left. \frac{d^2 \tau^2}{dh^2} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{d\tau^2}{dh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{d\mathcal{T}^2}{dh} = \left. \frac{d^2 \mathcal{T}^2}{dh^2} \right|_{h=0}. \quad (3.81)$$

Portanto, com base em (3.77), (3.78), (3.80) e (3.81), temos

$$\left. \frac{d^2 \xi_*}{dh^2} \right|_{h=0} = \frac{2\phi_0}{\tau_0} = \left. \frac{d^2 \xi}{dh^2} \right|_{h=0}. \quad (3.82)$$

Com isso garantimos que partindo de uma seção ZO o deslocamento do ponto médio real e a nossa aproximação são exatos até a segunda ordem para qualquer meio localmente homogêneo. Nesse caso, concluímos que o erro máximo entre a trajetória OCO com a trajetória CRP é de ordem cúbica em relação ao deslocamento do afastamento.

3.3 Construção da parte dinâmica da OCO

Na seção anterior, apresentamos uma equação diferencial parcial de segunda ordem que transforma cinematicamente uma seção de afastamento comum em uma outra seção de afastamento comum. A equação (3.43) foi desenvolvida levando em consideração apenas a parte cinemática do processo de continuação. Agora, baseada nessa equação, vamos derivar outra equação cuja sua solução propaga as propriedades de amplitude para todos os afastamentos, ao menos, com a mesma ordem de precisão como na teoria dos raios de ordem zero. O termo “amplitude correta” significa aqui, que o espalhamento geométrico para um modelo localmente homogêneo está correto para cada afastamento. O coeficiente de reflexão do afastamento original é preservado nesta transformação. Goldin e Fomel (1995) estudaram as leis de transformação de configuração de seções sísmicas que corrigem as amplitudes e mostraram que em um meio 2.5D as amplitudes dessas transformações de continuação obedecem a regras geométricas da cinemática, exceto para os coeficientes de reflexão, que permanecem inalteradas.

Partindo da equação (3.43), investigamos a influência do valor de

$$\Theta = \Theta \left(\xi, t, h, P, \frac{\partial P}{\partial \xi}, \frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial h} \right), \quad (3.83)$$

na amplitude do operador OCO. Nosso objetivo é que pelo menos de modo assintótico tenhamos

$$P(\xi, t, h) = R \frac{f(t - \mathcal{T})}{4\pi V \mathcal{T}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}, \quad (3.84)$$

como solução de (3.43) com condições iniciais estabelecidas. Por simplificações matemáticas e para facilitar o entendimento, tomamos $R \equiv 1$ em (3.84).

Baseado no método WKBJ, podemos escrever $P = P(t, \xi, h)$ da seguinte maneira,

$$P(\xi, t, h) = A(\xi, h) f(t - \mathcal{T}(\xi, h)). \quad (3.85)$$

Deduzimos as seguintes derivadas parciais de P , as quais usamos a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \frac{\partial A}{\partial \xi} f - A \frac{df}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial P}{\partial h} &= \frac{\partial A}{\partial h} f - A \frac{df}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= A \frac{df}{dt}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} f - 2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{df}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} - A \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} + A \frac{d^2 f}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial h^2} f - 2 \frac{\partial A}{\partial h} \frac{df}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - A \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} + A \frac{d^2 f}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial h \partial t} &= \frac{\partial A}{\partial h} \frac{df}{dt} - A \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= A \frac{d^2 f}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por razões a serem esclarecidas no decorrer do desenvolvimento, vamos definir Θ como

$$\Theta \left(\xi, t, h, P, \frac{\partial P}{\partial \xi}, \frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial h} \right) := -\frac{N_A h}{V^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{h}{t} \frac{\partial P}{\partial h} \right), \quad (3.87)$$

e analisar o seu comportamento para diferentes valores do número N_A .

Substituindo as derivadas de (3.86) na equação (3.43) com Θ dado por (3.87), temos

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{4}{V^2} \right] h \mathcal{T} - \left(\mathcal{T}^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right\} A \frac{d^2 f}{dt^2} + \\ & \left[2h \mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} - \left(2h \mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \mathcal{T}^2 - \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial A}{\partial h} + \right. \\ & \left. h \left(\mathcal{T} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} - \mathcal{T} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} - \frac{N_A h}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} + \frac{N_A}{V^2} \right) A \right] \frac{df}{dt} + \\ & \left[\left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) h \mathcal{T} + \frac{N_A h^2}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial A}{\partial h} \right] f = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Para facilitarmos a escrita, vamos definir como $\mathcal{F}_A$ o fator que multiplica df/dt na equação (3.88), i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A := & 2h \mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} - \left(2h \mathcal{T} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} - \mathcal{T}^2 - \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial A}{\partial h} + \\ & h \left(\mathcal{T} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} - \mathcal{T} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} - \frac{N_A h}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} + \frac{N_A}{V^2} \right) A. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Aplicando a transformada de Fourier em (3.85), temos

$$\hat{P}(\xi, \omega, h) = A(\xi, h) e^{-i\omega \mathcal{T}(\xi, h)} \hat{f}(\omega), \quad (3.90)$$

com os termos que compõem $\hat{P}$ satisfazendo a seguinte equação

$$\left[(i\omega)^2 A \mathcal{F}_\mathcal{T} + i\omega \mathcal{F}_A + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) h \mathcal{T} + \frac{N_A h^2}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial A}{\partial h} \right] \hat{f}(\omega) = 0, \quad (3.91)$$

com $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ definido em (3.45).

Sobre a superfície característica (curvas bicaracterísticas; John, 1981) temos $\mathcal{F}_\mathcal{T} = 0$ e de (3.91) temos

$$\left[i\omega \mathcal{F}_A + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) h \mathcal{T} + \frac{N_A h^2}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial A}{\partial h} \right] \hat{f}(\omega) = 0, \quad (3.92)$$

Assim, se as frequências importantes da equação f forem as que satisfazem

$$|\omega| \gg \left| \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) h \mathcal{T} + \frac{N_A h^2}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial A}{\partial h} \right| v_0^2, \quad (3.93)$$

com $v_0 = 1$ tendo a unidade física de [velocidade]. Então, podemos dizer que $\mathcal{F}_T = 0$ é a nossa equação iconal e $\mathcal{F}_A = 0$ é a nossa equação de transporte de ordem zero.

Para efeito de análise, supomos o caso de um refletor plano horizontal em um meio localmente homogêneo. Ou seja, $A = 1/(4\pi V\mathcal{T})$ e as derivadas na direção ξ são todas nulas. Neste caso, temos

$$|\omega| \gg \left| \frac{(48 - 4N_A)h^3}{V^4\mathcal{T}^4} - \frac{4h}{V^2\mathcal{T}^2} \right| \frac{v_0^2}{4\pi V}. \quad (3.94)$$

Se tomarmos $h = 0$ é fácil ver que o lado direito da equação (3.94) é nulo. Agora, por outro lado

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \left| \frac{(48 - 4N_A)h^3}{(V^2\mathcal{T}_0^2 + 4h^2)(V^2\mathcal{T}_0^2 + 4h^2)} - \frac{4h}{V^2\mathcal{T}_0^2 + 4h^2} \right| \frac{v_0^2}{4\pi V} = 0. \quad (3.95)$$

Como a função dentro do limite (3.95) é contínua na variável h , temos que o valor máximo dessa função é limitado. Podemos observar na Figura 3.6 o limitante inferior da frequência dada em (3.94) para dois valores de N_A com o valor de velocidade média 1, 5 km/s e o tempo de reflexão na seção de afastamento nulo sendo de 0, 5 segundos para um refletor plano horizontal.

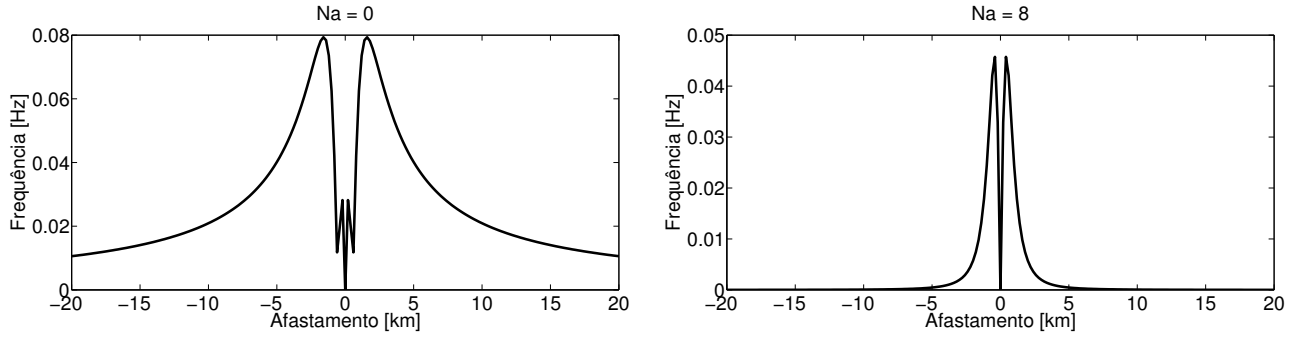


Figura 3.6: Velocidade 1, 5 km/s e $\mathcal{T}_0 = 0, 5$ segundos.

Usamos o termo de *alta frequência*, quando a magnitude do espectro de Fourier da fonte $f = f(t)$ é nulo para frequências $|\omega| < \omega_0$. Ou seja,

$$|\hat{f}(\omega)| = 0, \quad \text{quando} \quad |\omega| < \omega_0, \quad (3.96)$$

onde ω_0 é uma frequência característica do meio.

Isso garante à validade da aproximação de ondas planas no estudo da propagação de ondas em meio heterogêneo para dado ω_0 especificado a seguir. Fisicamente, essa relação é baseada entre o *comprimento de onda* (ou o seu correspondente *número de onda*) associado com as frequências avaliadas da fonte com os comprimentos da escala naturais do meio de propagação. Matematicamente, essa relação é devida a aproximação WKB, que valida de forma heurística a teoria dos raios, que para equação de onda com densidade constante e com a função de velocidade suave a seguinte condição têm que ser satisfeita

$$2|\omega| \gg \omega_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3} \|\nabla c\|. \quad (3.97)$$

E aqui, para nosso operador, temos a necessidade de que a condição (3.94) seja satisfeita.

Portanto, com a validade de (3.93) para todo $|\omega| \rightarrow \infty$, assumimos que $\mathcal{F}_T = 0$ e $\mathcal{F}_A = 0$.

Como já mencionado, a equação (3.34) descreve a transformação de geometria da curva do tempo de trânsito no processo OCO da mesma maneira como a equação iconal descreve a propagação da frente de onda na teoria clássica de ondas. O que parece ser frentes de onda do movimento das ondas descrita pela equação (3.43) são curvas de tempo de trânsito de ondas refletidas gravadas em seções sísmicas de afastamento comum. A lei de transformação das amplitudes das componentes de ondas de alta frequência, ligadas a essas frentes de onda físicas, é dada pela equação $\mathcal{F}_A = 0$. O próximo passo é obter a solução dessa equação.

Se multiplicarmos λ , dado na equação (3.48), em $\mathcal{F}_A = 0$, temos que a derivada total do fator de amplitude com respeito a h , ao longo da trajetória característica, fica dada por

$$\frac{dA}{dh} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dh} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dh}. \quad (3.98)$$

Sendo assim, a equação $\mathcal{F}_A = 0$ multiplicada por λ implica em uma equação diferencial ordinária como

$$\frac{dA}{dh} = \lambda h \left[\mathcal{T} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} \right) - \frac{N_A h}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} + \frac{N_A}{V^2} \right] A. \quad (3.99)$$

Temos do sistema (3.47) e da equação (3.99) o sistema de traçamento dinâmico para o problema da continuação do afastamento.

Integrando a equação (3.99), temos

$$A(h_1) = A(h_0) \exp \left\{ \int_{h_0}^{h_1} \lambda h \left[\mathcal{T} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} \right) - \frac{N_A h}{\mathcal{T} V^2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} + \frac{N_A}{V^2} \right] dh \right\}. \quad (3.100)$$

No Apêndice A, usamos as equações (A.4), (A.23) e (A.5) e as combinamos para concluirmos as seguintes igualdades

$$h dh = \frac{\mathcal{R}_0^2 \cos^2 \beta (2 \sin^2 \beta \cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}{2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)^3} d(\cos^2 \gamma), \quad (3.101)$$

$$\lambda = - \left(\frac{V}{2 \mathcal{R}_0} \right)^2 \frac{(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)^2}{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma (2 \sin^2 \beta \cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}, \quad (3.102)$$

sendo β e γ dados no Apêndice A como ângulo de mergulho e ângulo de reflexão, respectivamente. Combinando as equações (3.101) e (3.102), obtemos a expressão

$$\lambda h dh = \left(\frac{V}{2} \right)^2 \frac{d(\cos^2 \gamma)}{2 \cos^2 \gamma (\sin^2 \beta - \cos^2 \gamma)}. \quad (3.103)$$

Novamente, pelo Apêndice A, equação (A.30), temos a relação para as segundas derivadas do tempo de trânsito

$$\mathcal{T} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial h^2} \right) = 4 \mathcal{T} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial s \partial g} = \left(\frac{4 \cos^2 \gamma}{V^2} \right) \frac{\sin^2 \beta - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}, \quad (3.104)$$

e por último, o fator que envolve N_A pode ser escrito em coordenadas trigonométricas como

$$\frac{N_A}{V^2} \left(1 - \frac{h}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} \right) = N_A \frac{\cos^2 \gamma}{V^2}. \quad (3.105)$$

Substituindo (3.103), (3.104) e (3.105) em (3.100), chegamos na seguinte integral

$$\begin{aligned} & \int_{\cos^2 \gamma_{h_1}}^{\cos^2 \gamma_{h_2}} \left(\frac{N_A}{8} \frac{1}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa} \right) d(\cos^2 \gamma) \\ &= \frac{N_A}{8} \ln \left(\frac{\cos^2 \gamma_{h_2} - \sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma_{h_1} - \sin^2 \beta} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos^2 \gamma_{h_1} + \mathcal{R}_0 \kappa}{\cos^2 \gamma_{h_2} + \mathcal{R}_0 \kappa} \right). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Usando a notação aqui juntamente com a equação (A.7), podemos escrever

$$\frac{\mathcal{T}_{h_1} \cos \gamma_{h_2}}{\mathcal{T}_{h_2} \cos \gamma_{h_1}} = \frac{\cos^2 \gamma_{h_2} - \sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma_{h_1} - \sin^2 \beta} = \frac{\mathcal{T}_{n_1}^2 \cos^2 \gamma_{h_2}}{\mathcal{T}_{n_2}^2 \cos^2 \gamma_{h_1}}, \quad (3.107)$$

onde se substituímos em (3.106) e depois aplicamos em (3.100) e voltando com $h_0 = h_1$ e $h = h_2$, chegamos em

$$A(h) = A(h_0) \left(\frac{\mathcal{T} \cos \gamma_{h_0}}{\mathcal{T}_{h_0} \cos \gamma} \right)^{-\frac{N_A}{8}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.108)$$

A seguir, estudamos alguns valores de N_A e suas consequências. Especificamente, discutimos os casos $N_A = 0$, que deixa a equação (3.43) na sua forma mais simples por zerar o termo Θ , $N_A = 4$, que representa o caso tratado em Fomel (2003b) produzindo a transformação de amplitude correta para a MZO após NMO em um refletor plano, e finalmente $N_A = 8$, que representa a transformação de amplitude fisicamente correta para a OCO. Outros números N_A não representam casos com significado físico.

- Caso $N_A = 0$. Temos a seguinte relação para a amplitude, que equivale a $\Theta = 0$ em (3.43),

$$A(h) = A(h_0) \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.109)$$

Neste caso, temos que a amplitude $A(h)$ é puramente dependente do ângulo de incidência γ e a medida que γ aumenta o valor de $A(h)$ aumenta. Para $\kappa > 0$ esse valor tende a $(\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa)/\mathcal{R}_0 \kappa$, caso contrário este valor tende ao infinito. Assim, para $N_A = 0$ o operador (3.43) é instável e não representa a física do fenômeno.

- Caso $N_A = 4$. Por (3.107), podemos escrever (3.108) como

$$A(h) = A(h_0) \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_{h_0}} \frac{\mathcal{T}_{n_0}}{\mathcal{T}_n} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.110)$$

No caso de um refletor plano horizontal temos $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n_0}$ e $\kappa = 0$. Assim, o valor de espalhamento geométrico é preservado. Este fator de amplitude é observado no operador diferencial OCO aplicado após correção de NMO dado por Fomel (2003b).

- Caso $N_A = 8$. Temos que

$$A(h) = A(h_0) \frac{\mathcal{T}_{h_0} \cos \gamma}{\mathcal{T} \cos \gamma_{h_0}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.111)$$

Esse último caso é a situação ideal, ou seja, o fator de espalhamento geométrico é corrigido para cada afastamento independente da curvatura do refletor. Isto significa que o fator de espalhamento geométrico das amplitudes iniciais é transformado no verdadeiro valor de espalhamento geométrico da seção sísmica continuada, enquanto que o coeficiente de reflexão permanece o mesmo. Essa notável propriedade dinâmica permite-nos realizar uma análise da amplitude com variação do afastamento (AVO de *Amplitude Variation with Offset*) (Castagna e Backus, 1999; Ross, 2000), através da comparação entre as amplitudes das seções de afastamentos constantes verdadeiras e as seções transformadas pela OCO.

A partir da equação (3.43) com Θ dado em (3.87), sendo $N_A = 8$, temos que o operador diferencial para OCO que trata corretamente das amplitudes, pelo menos de forma assintótica, é dada pela seguinte equação

$$ht \left(\frac{\partial^2 P}{\partial h^2} + \frac{4}{V^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right) + \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial h \partial t} + \frac{8h}{V^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{h}{t} \frac{\partial P}{\partial h} \right) = 0. \quad (3.112)$$

A equação (3.112) pertence ao tipo hiperbólico, com a variável do afastamento h sendo uma variável “do tipo tempo” e a variável do ponto médio ξ e o tempo de reflexão t são variáveis “do tipo espacial” em relação aos fenômenos de ondas físicas. Portanto, condições de contorno e/ou valores iniciais são necessárias para esse problema proposto. Assim, vamos dizer que o problema de Cauchy dado tem os seguintes valores iniciais

$$P(\xi, t, h = h_0) = P_{h_0}^{(0)}(\xi, t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial h} \Big|_{h=h_0} = P_{h_0}^{(1)}(\xi, t). \quad (3.113)$$

Aqui, $P_{h_0}^{(0)}$ representa os dados da seção de afastamento comum $2h_0$, pela qual se inicia o processo de continuação do afastamento. Embora os dados da derivada na direção do afastamento, $P_{h_0}^{(1)}$, não façam parte da aquisição dos dados na prática, eles podem ser estimados a partir dos dados dos afastamentos vizinhos por aproximações de diferenças finitas.

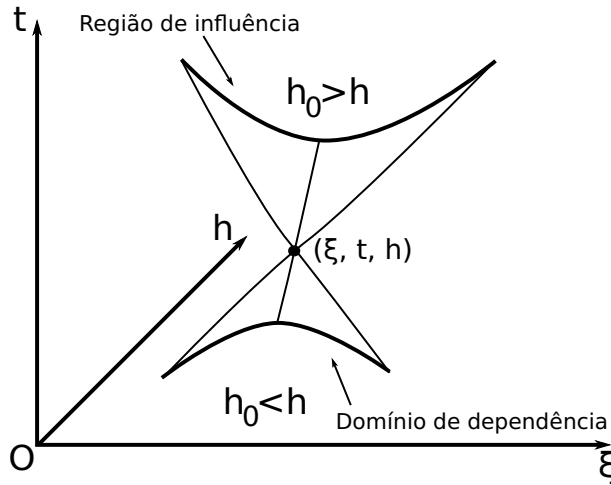


Figura 3.7: Domínios de dependência e região de influência do operador diferencial OCO.

Note que se compormos P , solução de (3.112), com a Hamiltoniana K , o resultado satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dK^2} \mathcal{F}_K + \frac{dP}{dK} \left[ht \left(\frac{\partial^2 K}{\partial h^2} + \frac{4}{V^2} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ \left. \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial^2 K}{\partial h \partial t} + \frac{8h}{V^2} \left(\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{h}{t} \frac{\partial K}{\partial h} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

onde definimos como $\mathcal{F}_K$ o fator que multiplica $d^2 P/dK^2$, i.e.,

$$\mathcal{F}_K := ht \left[\left(\frac{\partial K}{\partial h} \right)^2 + \frac{4}{V^2} \left(\frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial K}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial h}. \quad (3.115)$$

Da teoria das equações diferenciais hiperbólicas de segunda ordem (Lax, 2006), dizemos, se existe uma superfície característica $K(\xi, t, h) = 0$, então sobre essa superfície características temos que $\mathcal{F}_K = 0$. Ou seja, $\mathcal{F}_K = 0$ na superfície característica gerada por $K = 0$. Portanto, temos de (3.114) o seguinte resultado

$$\frac{dP}{dK} = 0, \quad \text{quando} \quad K(\xi, t, h) = 0. \quad (3.116)$$

Então, desde que (3.116) seja válido, podemos escrever a solução para P como

$$P(\xi, t, h) = P_{(+)}(K(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0; \xi, t, h)) + P_{(-)}(K(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0; \xi, t, h)), \quad (3.117)$$

com $P_{(+)}$ e $P_{(-)}$ sendo constantes dependentes dos valores iniciais $P_{h_0}^{(0)}$, $P_{h_0}^{(1)}$ e também do valor do sinal de $h - h_0$. No caso de que $(h - h_0) > 0$, temos que $P_{(+)}$ depende dos valores de $P_{h_0}^{(0)}$ e $P_{h_0}^{(1)}$, sendo $P_{(-)} = 0$. Para o caso $(h - h_0) < 0$, temos a situação inversa, sendo $P_{(-)}$ dependente dos valores iniciais e $P_{(+)} = 0$.

Do ponto de vista físico, os dois valores $P_{(+)}$ e $P_{(-)}$ separam os dois diferentes processos ondulatórios incorporados na equação (3.112), que são análogos aos de propagação da onda causal e anti-causal no tempo. Associamos com o primeiro, neste caso $P_{(+)}$, o processo de continuação para o afastamento $h > h_0$ e o segundo, $P_{(-)}$, o processo quando $h < h_0$. A Figura 3.7 mostra que para os casos: $h > h_0$ e $h < h_0$ o domínio de dependência e a região de influência, ou seja, os valores para $P_{(+)}$ e $P_{(-)}$ dadas condições iniciais, são as informações das integrais de linha sobre essas curvas como descritos no próximo tópico.

3.3.1 Representação integral da OCO

Nesta subseção tratamos de forma assintótica a solução do problema de Cauchy dado em (3.112) e (3.113). De acordo com Zauderer (2006), representamos a solução desse problema de Cauchy da seguinte forma

$$\begin{aligned} P(\xi_1, t_1, h_1) &= \iint \mathcal{G} \left[\left(\frac{8h_0^2}{V^2 t_{h_0}} - 3t_{h_0} \right) P_{h_0}^{(0)} + \left(t_{h_0}^2 + \frac{4h_0^2}{V^2} \right) \frac{\partial P_{h_0}^{(0)}}{\partial t_{h_0}} + h_0 t_{h_0} P_{h_0}^{(1)} \right] d\xi_{h_0} dt_{h_0} \\ &- \iint P_{h_0}^{(0)} \left[h_0 t_{h_0} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial h} + \left(t_{h_0}^2 + \frac{4h_0^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_{h_0}} \right] d\xi_{h_0} dt_{h_0}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

sendo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\xi, t, h; \xi_1, t_1, h_1)$ a função de Green solução do seguinte problema com condições iniciais homogêneas

$$\begin{aligned} ht \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial h^2} + \frac{4}{V^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} \right) + \left(t^2 + \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial h \partial t} \\ + \frac{4}{t} \left(t^2 - \frac{4h^2}{V^2} \right) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial h} + \frac{8h}{V^2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - \frac{16h}{V^2 t} \mathcal{G} \\ = -\delta(\xi - \xi_1) \delta(t - t_1) \delta(h - h_1). \end{aligned} \quad (3.119)$$

A equação (3.119) pode ser vista como uma equação de onda 2D, após sua transformação para sua *forma canônica*, de fonte pontual com fatores de atenuação devido as derivadas parciais de primeira ordem. O Capítulo 10 de Zauderer (2006) mostra que a equação (3.119) têm sua solução assintótica representada pela seguinte expressão

$$\mathcal{G}(\xi, t, h; \xi_1, t_1, h_1) \sim H(t) \chi_{\mathcal{G}}(\xi, t, h; \xi_1, t_1, h_1) \left\{ \frac{H(t - \mathcal{T}(\xi, h))}{\sqrt{t - \mathcal{T}(\xi, h)}} \right\}, \quad (3.120)$$

com a equação do tipo iconal dado por $\mathcal{T}(\xi, h) = \mathcal{T}(\xi, h; \xi_1, t_1, h_1)$, onde a superfície característica dessa equação é ilustrada na Figura 3.7, i.e., a superfície que propaga a singularidade, H como a função de Heaveside e $\chi_{\mathcal{G}}$ uma função que representa a valor da amplitude de $\mathcal{G}$. A equação (3.120) pode ser vista como a resposta ao impulso do operador OCO sendo descontínua na superfície definida pela hamiltoniana $K = t - \mathcal{T} = 0$ e nessa superfície acontece algo similar a frente de ondas no processo para continuação do afastamento. Na equação (3.120), usamos $H(t)$ pelo fato de nossa condição inicial ser causal.

A equação (3.120) é a representação assintótica da função de Green para equação (3.119). Não temos a solução explícita da equação (3.119). O que mostramos é uma derivação implícita para representação de solução para tal problema. De fato, o importante da representação de solução dada em (3.120) é que ela depende da função generalizada $H(t - \mathcal{T})/\sqrt{t - \mathcal{T}}$ para $(t, \mathcal{T} > 0)$. Daí, de (3.120), podemos deduzir as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial h} \sim \left[\frac{\chi_{\mathcal{G}}}{2} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial h} + (t - \mathcal{T}) \frac{\partial \chi_{\mathcal{G}}}{\partial h} \right] \frac{H(t - \mathcal{T})}{(t - \mathcal{T})^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \sim \left[(t - \mathcal{T}) \frac{\partial \chi_{\mathcal{G}}}{\partial t} - \frac{\chi_{\mathcal{G}}}{2} \right] \frac{H(t - \mathcal{T})}{(t - \mathcal{T})^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.122)$$

Baseado nos trabalhos de Fomel (1994, 1997, 2003b) argumentamos que as funções generalizadas (3.120), (3.121) e (3.122), aproximadas assintoticamente, podem ser substituídas em (3.118) e pelas definições de semi-integral e semi-derivada (Herrmann, 2011, integrais de Riemann-Liouville), que aqui utilizamos em sua forma dada por transformadas de Fourier, concluimos que (3.118) pode ser representado assintoticamente como

$$\begin{aligned} P(\xi_1, t_1, h_1) &\sim \int_I w_{\pm}^{(0)}(\xi_{h_0}; t_1, \xi_1, h_1, h_0) \mathcal{D}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[P_{h_0}^{(0)}](\xi_{h_0}, \mathcal{T}(\xi_{h_0}, h_0; \xi_1, h_1, t_1)) d\xi_{h_0} \\ &+ \int_I w_{\pm}^{(1)}(\xi_{h_0}; t_1, \xi_1, h_1, h_0) \mathcal{I}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[P_{h_0}^{(0)}](\xi_{h_0}, \mathcal{T}(\xi_{h_0}, h_0; \xi_1, h_1, t_1)) d\xi_{h_0} \\ &+ \int_I w_{\pm}^{(2)}(\xi_{h_0}; t_1, \xi_1, h_1, h_0) \mathcal{I}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[P_{h_0}^{(1)}](\xi_{h_0}, \mathcal{T}(\xi_{h_0}, h_0; \xi_1, h_1, t_1)) d\xi_{h_0}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

com $\mathcal{D}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[\bullet]$ e $\mathcal{I}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[\bullet]$ sendo os operadores de meia-derivada e meia-integral onde o sinal (+) representa que é causal e o sinal (−) que é anti-causal definidos (por transformadas de Fourier) como

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[f](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{\frac{1}{2}} e^{\pm i s_{\omega}^* \frac{\pi}{4}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.124)$$

$$\mathcal{I}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[f](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-\frac{1}{2}} e^{\pm i s_{\omega}^* \frac{\pi}{4}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.125)$$

sendo $s_{\omega}^* := -\text{Sgn}(\omega)$. Como dito no fim do tópico anterior, a integral de linha (3.123) representa de modo assintótico os valores de $P_{(+)}$ e $P_{(-)}$ para a continuação do menor para o maior afastamento e a continuação do maior para o menor afastamento, respectivamente.

De maneira assintótica, podemos observar que se

$$\hat{f}(\omega) = 0, \quad \text{para todo } |\omega| < \omega_0 \rightarrow \infty, \quad (3.126)$$

então

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega|^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\omega)| d\omega \gg \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-\frac{1}{2}} |\hat{f}(\omega)| d\omega. \quad (3.127)$$

Daí, associando essa última informação juntamente com (3.124) e (3.125), temos que a primeira integral de (3.123) é “muito maior” que a segunda e a terceira integral de (3.123). Baseado nos trabalhos de Beylkin (1995) e Goldin (1985, 1990), Fomel (2003a) conclui que para qualquer operador cuja solução pode ser representada de modo assintótico por (3.123), é possível negligenciar a segunda e terceira integral da equação (3.123) para representar sua solução. Portanto, para os termos de alta-frequência, podemos expressar P somente com a primeira integral como

$$P(\xi_1, t_1, h_1) \sim \int_I w_{\pm}^{(0)}(\xi_{h_0}; t_1, \xi_1, h_1, h_0) \mathcal{D}_{\pm}^{\frac{1}{2}}[P_{h_0}^{(0)}](\xi_{h_0}, \mathcal{T}(\xi_{h_0}, h_0; \xi_1, h_1, t_1)) d\xi_{h_0}. \quad (3.128)$$

Integrais da forma (3.128), geralmente, são operadores para problemas em meios 2.5D e, no nosso caso, para continuação do afastamento. Um exemplo desse tipo de operador aplicado para continuação do afastamento, pode ser encontrado em Tygel et al. (1998). Eles constroem o peso para a transformação (3.128) que transforma os dados iniciais de uma seção CO para a seção ZO e denotam esse processo de MZO. Nesse caso especial a transformação é escrita da seguinte maneira:

$$P(\xi_0, t_0, 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \sqrt{\mathcal{T}_{h_0}(2W^2 - 1)} \frac{W}{h_0} \mathcal{D}_{-}^{\frac{1}{2}}[P_{h_0}^{(0)}](\xi_{h_0}, \mathcal{T}_{h_0}) d\xi_{h_0} \quad (3.129)$$

com $W = W(\xi_0; \xi_{h_0}, h_0) = [h_0^2 - (\xi_0 - \xi_{h_0})^2]^{\frac{1}{2}}/h_0$ e $\mathcal{T}_{h_0} = \mathcal{T}(\xi_{h_0}, h_0; \xi_0, 0, t_0)$. Bleistein et al. (1999) demonstram por construção que para o caso homogêneo a integral (3.129), na qual denotam por TZO, executa a seguinte operação de maneira assintótica

$$\frac{f(t - \mathcal{T}_h)}{4\pi V \mathcal{T}_h} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}} \mapsto \frac{f(t - \mathcal{T}_0)}{4\pi V \mathcal{T}_0} \sqrt{\frac{1}{1 + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.130)$$

Santos et al. (1997) constroem o peso $w_{\pm}^{(0)} = w_{\pm}^{(0)}(\xi_{h_0}; t, \xi, h, h_0)$ e o intervalo I do operador integral OCO para o caso 2.5D em meios homogêneos. Para o peso eles apresentam o seguinte resultado:

$$w_{\pm}^{(0)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 + \varrho_1^2) b_{h_0}}{(1 - \varrho_1^2) a_{h_0}} \sqrt{\frac{2\varrho_3(1 - \varrho_4^2) \sqrt{(1 - \varrho_1^2)}}{|\varrho_3^2(1 - \varrho_1^2) - u_{(\pm)} a_1^2(1 - \varrho_2^2)^{\frac{3}{2}}| V u_{(\pm)}}}, \quad (3.131)$$

onde $\varrho_1 = \eta h_{h_0} u_{(\pm)}^2 / h_{01}$, $\varrho_2 = \eta h_1 / h_{01}$, $\varrho_3 = \eta \varrho_4 u_{(\pm)} / h_{01}$, $\varrho_4 = \sqrt{a_1^2 + h_{01}}$, $h_{01} = h_0^2 u_{(\pm)}^2 - h_1^2$, $\mu = \sqrt{(h_1 - h_0)^2 - \eta^2} + \sqrt{(h_1 + h_0)^2 - \eta^2}$, $\eta = \xi_1 - \xi_0$, $a_{h_0} = V t_{h_0} / 2$, $b_{h_0} = \sqrt{a_{h_0}^2 - h_0^2}$ e por fim

$$u_{(\pm)} = \begin{cases} \mu / 2h_0, & h_0 > h_1 \\ 2h_1 / \mu, & h_0 < h_1 \end{cases}. \quad (3.132)$$

Para o valor de abertura do operador integral OCO, ou seja, o intervalo de integração, eles deduzem o seguinte conjunto:

$$I = \{ \xi_{h_0}, \text{ tal que } |\eta \varrho_3 u_{(\pm)}| < |h_{01}| \}. \quad (3.133)$$

Pela teoria da análise assintótica (Olver, 1974; Bleistein e Handelsman, 1986), podemos associar o operador integral (3.128) tendo o peso dado por (3.131) com o problema de Cauchy (3.112) e (3.113) para o caso de $P_{h_0}^{(1)} \equiv 0$. De (3.90) e supondo que $\hat{f}$ é de alta-frequência, podemos escrever $\hat{P}_{h_0}^{(0)}$ como

$$\hat{P}_{h_0}^{(0)}(\xi, \omega) \sim \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi) \hat{f}_j(\omega), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty, \quad (3.134)$$

sendo $\hat{f}_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência assintótica de funções e $A_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves.

Substituindo $\hat{P}_{h_0}^{(0)}$ por (3.134) em (3.128) e supondo que seus operadores integrais juntamente com a série comutam, obtemos

$$P(\xi_1, t_1, h_1) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{\frac{1}{2}} e^{\pm i s \omega^* \frac{\pi}{4}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_j(\omega) \int_I w_{\pm}^{(0)}(\xi_{h_0}) A_j(\xi_{h_0}) d\xi_{h_0} \right] e^{i\omega t_1} d\omega. \quad (3.135)$$

Chamando $\hat{F}_j(\omega) = |\omega|^{\frac{1}{2}} e^{\pm i s \omega^* \frac{\pi}{4}} \hat{f}_j(\omega)$ e $W_j = \int_I w_{\pm}^{(0)}(\xi_{h_0}) A_j(\xi_{h_0}) d\xi_{h_0}$, podemos reescrever a última equação como

$$P(\xi_1, t_1, h_1) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} W_j \hat{F}_j(\omega) \right] e^{i\omega t_1} d\omega. \quad (3.136)$$

Até aqui não discriminamos qual era o peso. Agora, vamos dizer que $W_j^{(1)}$ e $W_j^{(2)}$ são os coeficientes gerados pelos pesos da equação diferencial e do operador OCO dado por Santos et al. (1997) equação (3.131), respectivamente. Por construção, ambas as técnicas executam de forma assintótica

$$\frac{f(t - \mathcal{T}_{h_0})}{4\pi V \mathcal{T}_{h_0}} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma_{h_0}}{\cos^2 \gamma_{h_0} + \mathcal{R}_0 \kappa}} \mapsto \frac{f(t - \mathcal{T}_h)}{4\pi V \mathcal{T}_h} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}}. \quad (3.137)$$

Então, temos as seguintes relações:

$$\hat{P}(\xi_1, \omega, h_1) \sim \sum_{j=1}^{\infty} W_j^{(1)} \hat{F}_j(\omega) \quad \text{e} \quad \hat{P}(\xi_1, \omega, h_1) \sim \sum_{j=1}^{\infty} W_j^{(2)} \hat{F}_j(\omega), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (3.138)$$

Observando (3.138), invocamos o Teorema de Unicidade das séries assintóticas (Bleistein e Handelsman, 1986) que diz: Seja

$$\hat{F}(\omega) \sim \sum_{j=0}^{N-1} W_j \hat{F}_j(\omega), \quad \text{quando } |\omega| \rightarrow \infty, \quad (3.139)$$

uma expansão assintótica com N termos de $\hat{F}$ com respeito a sequência assintótica $\{\hat{F}_j\}$. Então, os coeficientes W_j são unicamente determinados.

Portanto, pelo Teorema de Unicidade, concluímos que $W_j^{(1)} = W_j^{(2)}$ e com isso dizemos que a solução integral do problema diferencial da OCO com $P_{h_0}^{(1)} \equiv 0$ é a integral de (3.128) com o peso dado por (3.131).

3.3.2 Comparação entre as dinâmicas

Baseados na teoria paraxial dos raios (Červený, 2001), Hubral et al. (1992) e Tygel et al. (1992) usaram a ideia dada por Bortfeld (1989) característica de ponto Hamiltoniana para aproximar a matriz de propagação (Červený, 2001) em derivadas de segunda ordem do tempo de trânsito. Com isso, descrevem como se comporta o fator de espalhamento geométrico em módulo para um meio 3D, quando a densidade é uniforme. A equação que representa esse fenômeno pode ser simplificada para o caso 2.5D. Usando a notação adotada aqui, escrevemos

$$|A_{2.5}| = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{4}{v_{n\perp}^2 \tau} \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} \right| \frac{c_s c_r}{\cos \beta_s \cos \beta_r}}. \quad (3.140)$$

Podendo observa que

$$\frac{\cos \beta_s}{c_s} = \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \varphi_s^2} \quad \text{e} \quad \frac{\cos \beta_r}{c_r} = \sqrt{\frac{1}{c_r^2} - \varphi_r^2}, \quad (3.141)$$

onde φ_s e φ_r são dados pela equação (3.54) com c_s e c_r sendo as velocidades do meio nos pontos $(s, 0, 0)$ e $(r, 0, 0)$, respectivamente. Aqui, $v_{n\perp}$ é a velocidade NMO na direção ortogonal da linha sísmica sobre o ponto médio observado.

Para o caso da velocidade ser constante a equação (3.140) é expressa como

$$|A_{2.5}| = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{4}{\tau} \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} \right| \frac{1}{\cos \beta_s \cos \beta_r}}. \quad (3.142)$$

Manipulando a equação (A.30), chegamos na seguinte expressão

$$\frac{4V^2 \tau}{\cos \beta_s \cos \beta_r} \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} \right| = \frac{\cos^2 \gamma}{|\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa|}. \quad (3.143)$$

Então, fazendo as devidas substituições, temos a seguinte igualdade

$$\frac{1}{4\pi V \tau} \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{|\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa|}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{4}{\tau} \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} \right| \frac{1}{\cos \beta_s \cos \beta_r}}. \quad (3.144)$$

Esse resultado mostra que para o caso homogêneo, tanto a derivação aqui como a derivação pela teoria paraxial dos raios geram o mesmo resultado para o módulo do espalhamento geométrico. Essas informações são úteis para o caso de executarmos algum processo de normalização do espalhamento geométrico logo após a transformação de todos os afastamentos para a seção ZO.

3.4 Operação para continuação da fonte

Além de um operador diferencial para continuação do afastamento podemos criar, a partir desse, um operador diferencial para continuação da fonte que preserve as mesmas propriedades estudadas para o operador OCO.

Substituindo o ponto médio ξ pela combinação linear entre o receptor e a fonte $(r + s)/2$ e fazendo o mesmo para o meio-afastamento h que substituímos por $(r - s)/2$, dessas transformações de coordenadas, podemos escrever (3.112) da seguinte maneira:

$$2(r - s)t \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial s} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) + \left(t^2 + \frac{(r - s)^2}{V^2} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial s} \right) + \frac{4(r - s)}{V^2} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{r - s}{2t} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial s} \right) \right] = 0. \quad (3.145)$$

Baseando-se nas deduções anteriores, vamos descrever esse problema como um problema de Cauchy com as seguintes condições iniciais:

$$P(r, t, s = s_0) = P_{s_0}^{(0)}(r, t) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_{s=s_0} = P_{s_0}^{(1)}(r, t). \quad (3.146)$$

Para a equação (3.145) sua equação do tipo-iconal (equação característica) é descrita como

$$\left[\mathcal{T}^2 + \frac{(r - s)^2}{V^2} \right] \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s} \right) - 2(r - s) \mathcal{T} \left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s} + \frac{2(r - s)}{V^2} \right] = 0. \quad (3.147)$$

Podemos tratar essa equação como um problema de Cauchy com a seguinte condição inicial

$$\mathcal{T}(r, s = s_0) = \tau_{s_0}(r). \quad (3.148)$$

A equação (3.147) foi também descrita por Fomel (2003b) para provar a cinemática da equação diferencial para OCO após uma correção NMO.

Esse operador diferencial pode ser interpretado pelo seguinte raciocínio. Suponhamos que a fonte têm as mesmas características para cada tiro, que conhecêssemos a função velocidade OCO $V = V(r, t, s)$ e que tenhamos P_{s_0} para todo r e t . Então, usando o operador (3.145), temos condições de construir os tiros não obtidos em campo para um meio 2.5D apenas com um tiro em $s = s_0$. Mas, pelas restrições físicas do processo como não ter P_{s_0} para todo r e nem a função original para V , apenas podemos computar P para os s próximos de s_0 . Na Figura 3.8, vemos uma ilustração da continuação da fonte.

Na verdade, com as equações (3.112) e (3.145), podemos escrever as continuações, além do afastamento e do tiro, para o ponto médio e o receptor apenas trocando as condições iniciais. No caso do ponto médio, usamos a equação (3.112) com as seguintes condições iniciais

$$P(\xi = \xi_0, t, h) = P_{\xi_0}^{(0)}(t, h) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = P_{\xi_0}^{(1)}(t, h), \quad (3.149)$$

onde $P_{\xi_0}^{(0)}$ é o dado da seção CMP provida da aquisição de dados sísmicos e $P_{\xi_0}^{(1)}$ é o dado que não vêm da aquisição sísmica, mas pode ser obtido do mesmo por diferenças finitas.

Agora, para o caso do receptor, usamos a equação (3.145) com as seguintes condições iniciais

$$P(r = r_0, t, s) = P_{r_0}^{(0)}(t, s) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_0} = P_{r_0}^{(1)}(t, s). \quad (3.150)$$

Novamente, $P_{r_0}^{(0)}$ é o dado da seção CR que veio da aquisição sísmica e $P_{r_0}^{(1)}$ pode ser obtido do mesmo por diferenças finitas utilizando de entrada os dados da aquisição sísmica.

Toda teoria desenvolvida aqui continua valendo para esse novo operador e a mudança de direção de propagação para o problema de Cauchy com os dados de entrada $P_{\xi_0}^{(0)}$ e $P_{\xi_0}^{(1)}$ do operador (3.112). Assim, no regime de alta-frequência, podemos negligenciar os seguintes valores $P_{s_0}^{(1)}$, $P_{\xi_0}^{(1)}$ e $P_{r_0}^{(1)}$ assumindo que são todos nulos nas condições iniciais.

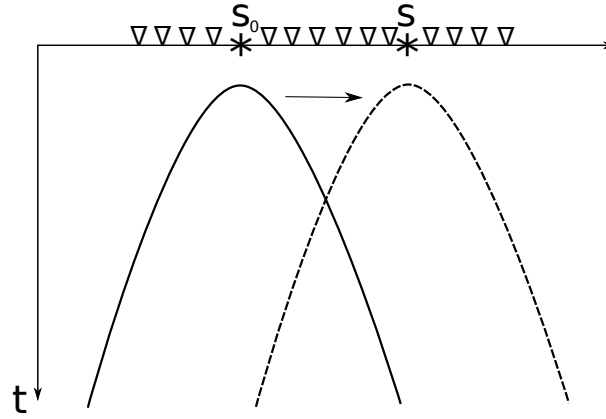


Figura 3.8: Ilustração do processo de continuação da fonte, onde a curva contínua é o dado inicial com a fonte em s_0 e a curva tracejada e o deslocamento da curva contínua para a nova fonte em s .

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, propomos uma técnica de construir sobretempos que seguem a trajetória CRP, ou seja, utilizando trajetórias OCO e o empilhamento ao longo dessas que preserve as características do traço original.

Para simplificar as considerações neste capítulo, supomos que exista um único ponto de reflexão associado a um evento sísmico registro por um par fonte-receptor em um determinado tempo. Pela linearidade da equação da onda, estas considerações permanecem válidas em casos de superposição de múltiplos eventos para cada um deles e a resposta total é descrita pela superposição das respostas individuais. Discutiremos na Seção 4.3.1 o procedimento para garantir esta superposição.

4.1 Sobretempos e empilhamento

A ideia de construir curvas ou superfícies que aproximam o tempo de trânsito de reflexões para o empilhamento e posterior inversão dos resultados sempre foi um assunto de muito interesse no processamento sísmico. Um dos papéis mais importantes é desempenhado pelos sobretempos, que, baseados em parâmetros da propagação de ondas, ajustam curvas ou superfícies aos eventos sísmicos. Geralmente, sobretempo é o tempo adicional que uma reflexão sísmica registrada com o receptor afastado da fonte apresenta, comparado com o tempo que esta mesma reflexão teria se a fonte e o receptor estivessem em outras posições e no caso de sobretempo normal a fonte e o receptor estão na mesma posição. Nesses sobretempos existem parâmetros de ajuste e interpretando um desses parâmetros como algum tipo de velocidade média que dependa da velocidade real do meio, criam-se técnicas de inversão que os geofísicos de exploração chamam de análise de velocidade.

O método de análise de velocidade utilizando sobretempos possui algumas premissas básicas. Uma delas é que a variação lateral de velocidade em profundidade não seja de magnitude elevada. Nos casos em que essa premissa não é satisfeita, os valores obtidos pelo método serão apenas valores de ajuste para o mesmo, sem que seja possível atribuir um significado físico a eles, ou a impossibilidade da análise em tais lugares.

No método CMP, uma vez escolhida a medida de coerência que é usada para analisar os traços coletados baseando-se na busca em um intervalo de velocidades NMO, pode-se calcular o sobretempo em cada amostra temporal sobre um traço na seção ZO. A velocidade NMO que retornar a maior coerência é aceita como a velocidade daquela amostra. Na Figura 4.1 temos uma ideia de como é

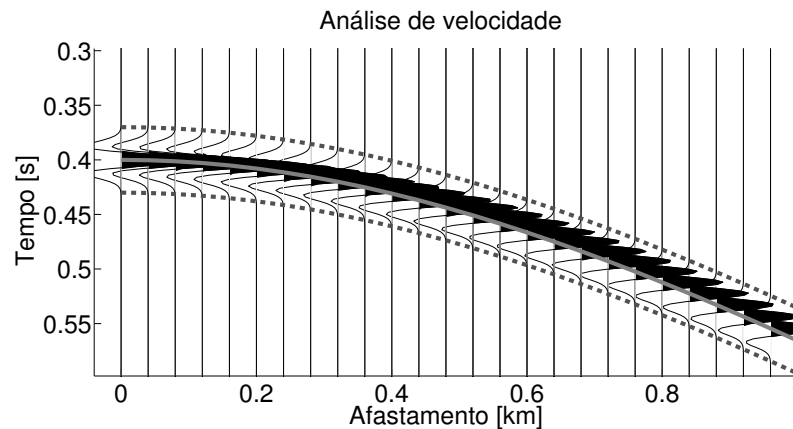


Figura 4.1: Reflexão esquemática em um plano na seção CMP ilustrando o princípio da computação do espectro de velocidades. Janela de tempo usada para calcular a coerência. As duas linhas cinzas tracejadas mostram as trajetórias do tempo de trânsito que limitam a janela utilizada para analisar os dados em torno da linha central que é a curva do sobretempo.

gerada uma região de amostras dada uma velocidade NMO.

De acordo com o método de extração de velocidades em uma família CMP (método CMP), utilizamos alguma medida de coerência para estimar qual é o melhor valor que representa a velocidade NMO em um intervalo de busca. Para resolver o problema da coerência, usamos uma técnica bastante difundida na sismica de exploração chamada medida de semelhança do inglês *Semblance* (Taner e Koehler, 1969). A medida de semelhança é uma medida de coerência que é a mais usada na análise de velocidade sísmica. É definida como a razão entre a energia do sinal e a energia de estimativa dos dados coletado em uma janela (domínio) para análise. A janela de análise é ilustrada na Figura 4.1. Desde a sua introdução, a medida de semelhança têm sido uma ferramenta indispensável para a análise de velocidade de registros sísmicos. Na análise de velocidade convencional, usamos buscas que varrem diferentes valores de velocidade para ajustar os sobretempos em cada ponto médio para tempo normal. Depois calculamos a semelhança entre os sinais sísmico sobre essas janelas em torno da trajetória representada pelo sobretempo para cada velocidade. Daí, um espectro de velocidade é gerado e selecionamos o valor de maior semelhança para representar a velocidade para esse ponto.

No entanto, a técnica convencional de empilhamento, método CMP, nem sempre é suficiente para o aumento da relação sinal-ruído. Por isso, técnicas como CRS e MF, que empilham os dados utilizando os CMP vizinhos do ponto médio da análise, são atualmente as alternativas mais famosas na área devido a redundância dos dados empilhados a razão sinal-ruído é incrementada. Ambos os métodos (CRS e MF) necessitam de múltiplos parâmetros (mínimo três) em contraste com o método CMP (apenas um). Esses parâmetros correspondem ao ângulo de emergência e duas curvaturas, referentes a propagação de ondas em subsuperfície, chamadas de onda normal e onda de incidência normal (Tygel e Santos, 2007). Na literatura há muitos trabalhos que aplicaram com sucesso as técnicas CRS e MF (veja, por exemplo, Landa et al., 1999; Gurevich et al., 2002; Menyoli et al., 2004; Höcht et al., 2009).

Todos os métodos multi-paramétricos mencionados anteriormente são conhecidos na sismica de exploração como métodos de *busca orientada independente do modelo de velocidade*, pois, tais ope-

rações são aplicadas sem o conhecimento do modelo de velocidade *a priori*. Para o empilhamento em qualquer seção CO diferente da seção ZO, esses métodos não são aplicáveis, para isso existe na literatura o que é conhecido como CO-CRS de *Common-Reflection-Surface for common offset* (Zhang et al., 2001). No entanto, já em duas dimensões CO-CRS necessita de cinco parâmetros, o que torna a busca mais “custosa” no critério computacional, ou seja, a busca desses cinco parâmetros requer um custo de tempo-computação muito elevado e, dependendo da quantidade de dados, isso se torna inviável.

A vantagem de utilizar sobretempos no processamento sísmico é que eles permitem o aumento da resolução dos dados disponíveis para efeitos de empilhamento e usar essas técnicas em todo o dado possibilita maior coerência na análise de velocidade em seções migradas. Essas técnicas são baseadas em algum tipo de transformação dos dados, como por exemplo na análise de velocidade por migração (Al-Yahya, 1989; Liu e Bleistein, 1995), pois esse último requer o imageamento para efetuar a análise de velocidade que também se baseia na coerência dos dados. Uma imagem com muito pouco ruído é útil como dado de entrada para esses métodos. Devido à utilização da redundância, imagens com uma alta relação sinal-ruído são obtidas.

Baseados nos métodos multi-paramétricos, podemos criar um método de busca orientada independente do modelo de velocidade e que empilhe traços para construção de qualquer seção sísmica, inclusive a ZO, utilizando as trajetórias OCO. A vantagem é a necessidade de menos parâmetros do que qualquer outro método mencionado para empilhar superfícies de tempos de reflexão. Para a técnica proposta os parâmetros são: declividade do tempo de trânsito e velocidade OCO.

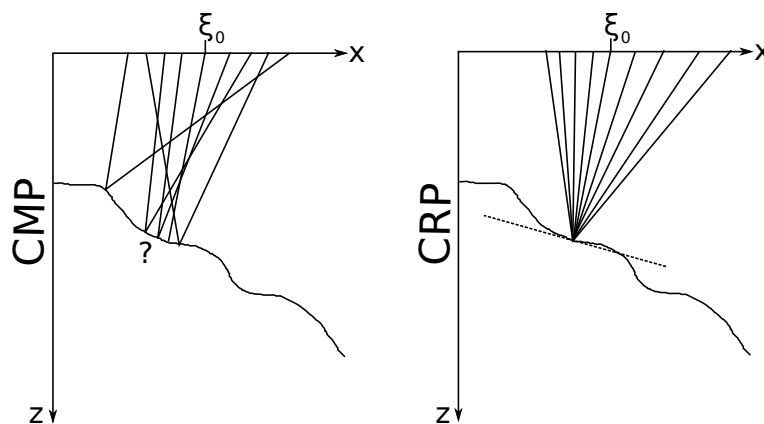


Figura 4.2: Traçado de raios em duas trajetórias distintas. A curva CMP a esquerda e CRP a direita, observe que na trajetória CRP a única influência do refletor é sobre sua declividade, enquanto que na trajetória CMP é necessário todas as informações da curva na região onde acontece as reflexões.

Por que necessitamos de menos parâmetros do que os outros métodos multi-paramétricos? Diferentemente dos outros métodos multi-paramétricos que precisam de uma “larga” abertura na direção do ponto médio para interceptar mais eventos, a técnica baseada nas trajetórias OCO é desenvolvida para seguir a trajetória CRP. Ao empilhar ao redor dessa com uma boa precisão, possibilita a redução da abertura de empilhamento na direção do ponto médio e o aumento na direção do afastamento. Isso permite a retirada de parâmetros adicionais associados a abertura na direção do ponto médio. Na Figura 4.2 ilustramos como seguir a trajetória CRP é útil para reduzir o número de parâmetros para calcular o seu sobretempo.

Outra diferença importante é o fato das técnicas MF e CRS usarem parâmetros estáticos que representam informações da propagação de ondas associadas ao raio normal, enquanto que no caso das trajetórias OCO o parâmetro envolvido com a declividade do evento muda para cada afastamento. Nesse caso, o parâmetro envolvido com a declividade do evento ao longo da trajetória OCO, equação (3.63), é dinâmico.

Essa técnica demonstrou-se robusta e simples para o empilhamento dos traços sísmicos e obteve boa precisão para extração das declividades do tempo de trânsito e, também, no processo de horizontalização dos eventos. A técnica proposta possibilita a criação de um novo conceito que chamamos de atributo de multicobertura. Dizemos que uma curva que representa um sobretempo referente a uma amostra inicial possui atributo de multicobertura quando um dos seus parâmetros pode variar de acordo com o percurso de sua trajetória. Ou seja, para empilharmos sobre uma trajetória OCO partindo de um ponto P_0 ao longo de uma trajetória em função de h os parâmetros que representam a velocidade OCO e declividade podem mudar seus valores de acordo com os valores de h , assim, os parâmetros que antes eram estáticos passam a ser dinâmicos e gera uma espécie de *controle ótimo* sobre a direção da trajetória do sobretempo. A abordagem de empilhar ao longo e em torno da trajetória CRP usando sobretempo com atributos de multicobertura é uma área nova na sísmica de exploração.

As informações da cinemática de propagação de ondas, que podem ser extraídas das derivadas do tempo de trânsito nas seções sísmicas, elas têm vários propósitos no processamento e inversão de dados sísmicos e a partir dessa propomos mais uma neste capítulo.

4.2 Análise de coerência para trajetórias OCO

A trajetória OCO usa a mesma ideia (medida de coerência) para a extração da velocidade OCO e a declividade dos eventos analisados. No dado sísmico precisamos de dois valores (declividade e velocidade OCO) para ajustar a trajetória OCO, partindo do ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, sobre a superfície de tempo de trânsito que contenha $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$. A estratégia básica para a detecção e extração da informação do sinal é a de expressar essas informações como parâmetros da função que calcula as trajetórias. Daí, a melhor estimativa desses parâmetros resulta na trajetória que melhor se aproxima do evento estudado.

Por construção, (3.112) representa o modelo matemático para executar transformações contínuas de seções sísmicas. A partir da seção CO inicial, podemos construir qualquer outra seção CO apenas informando qual é a função da velocidade OCO, $V = V(\xi, t, h)$. Na prática não temos V , ou seja para usarmos (3.112) precisamos de técnicas que, sabendo as informações em campo, podemos obter a função V . Agora, o que temos é um problema inverso, queremos obter V que faça a diferença entre o modelo (3.112) com o dado sísmico real seja de resíduo mínimo. Para o nosso caso, onde o sobretempo é escrito em função da trajetória OCO, vamos ter que definir um processo similar ao método convencional para estimar os parâmetros de busca que extraiam a velocidade OCO e a declividade do evento na seção de afastamento comum.

Das equações (3.19), (3.20), (3.59) e (3.63), podemos definir uma função que dependa das aberturas da janela de coerência e tenha como parâmetros a declividade ϕ_{h_0} e a velocidade OCO V para o ponto analisado $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, sendo

$$Q(l_\xi, l_t, h; \phi_{h_0}, V) := P(\xi_h + l_\xi, \mathcal{T}_h + (\xi_h + l_\xi)\phi_h + l_t, h), \quad (4.1)$$

onde $P = P(\xi, t, h)$ representa a função dos dados sísmicos pré-empilhados,

$$(\xi_h, \mathcal{T}_h, h) = (\xi(h), \mathcal{T}(\xi(h), h), h) \quad (4.2)$$

é curva parametrizada por h que representa a trajetória OCO partindo de $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, ϕ_h é a declividade, parametrizada por h e partindo de algum ϕ_{h_0} dado e expresso como na equação (3.63). Para a nossa janela de busca usamos os seguintes intervalos: $l_\xi \in [\xi_{(-)}, \xi_{(+)}]$ e $l_t \in [t_{(-)}, t_{(+)}]$ com $-\xi_{(-)}, \xi_{(+)}, -t_{(-)}, t_{(+)} \geq 0$ e $0 \leq h_{(-)} \leq h_0 \leq h_{(+)}$.

Aqui, usamos como a medida de coerência o funcional *Semblance* (Taner e Koehler, 1969) que denotamos no texto como medida de semelhança. Para descrever o processo de coerência base aplicado nesta tese. Na sua forma contínua, ela pode ser escrita como

$$\text{Semb}[Q](\phi_{h_0}, V; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = \frac{|\langle \mathbf{1}, Q \rangle|^2}{\|\mathbf{1}\|^2 \|Q\|^2}, \quad (4.3)$$

onde $|\langle \mathbf{1}, Q \rangle|^2$ e $\|\mathbf{1}\|^2 \|Q\|^2$ são representados pelas seguintes integrais

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{1}, Q \rangle|^2 &= \int_{t_{(-)}}^{t_{(+)}} \left| \int_{h_{(-)}}^{h_{(+)}} \int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} Q(l_\xi, l_t, h; \phi_{h_0}, V) dl_\xi dh \right|^2 dl_t, \\ \|\mathbf{1}\|^2 \|Q\|^2 &= \int_{t_{(-)}}^{t_{(+)}} \left(\int_{h_{(-)}}^{h_{(+)}} \int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} 1 dl_\xi dh \int_{h_{(-)}}^{h_{(+)}} \int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} |Q(l_\xi, l_t, h; \phi_{h_0}, V)|^2 dl_\xi dh \right) dl_t. \end{aligned}$$

A medida de semelhança não é a única opção, outras medidas de coerência podem ser usadas no lugar dessa.

No início desta seção, definimos nosso problema de obter a velocidade OCO, o problema, que aplicado o operador (3.112) em um dado inicial e comparada sua saída com outro dado da mesma posição, só que obtido pela aquisição de dados sísmicos, que a diferença entre esses dois dados deva ser a de menor resíduo. Usando a medida de semelhança e supondo que as amplitude das amostras possuem variação lenta sobre a trajetória correta, podemos extrair o par (ϕ_{h_0}, V) que retorna a maior coerência (espectro) da análise usando o operador (4.3). Para isso nosso problema inverso, torna-se a busca do par (ϕ_{h_0}, V) que satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \text{Semb}[Q](\phi, V; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) \\ \text{sujeito à} & -\frac{2}{V} \leq \phi \leq \frac{2}{V} \quad \text{e} \quad V \in [V_{\min}, V_{\max}] \end{cases} \quad (4.4)$$

O limitante da declividade foi observado por Coimbra et al. (2012). Eles mostram que para todo h ,

$$|\phi_h| \leq \frac{2}{V}. \quad (4.5)$$

Na Figura 4.3a, observamos a aplicação da técnicas no dado pré-empilhado com ruído de 10% da amplitude máxima e velocidade do meio sendo de 1,7 km/s, onde a busca pelo máximo é feita em uma malha regular. Calculamos, para cada ponto dessa malha, o valor de $\text{Semb}[Q]$, como mostrado na Figura 4.3b. Na Figura 4.3c, vemos para cada amostra da seção CO analisada o maior valor que a função $\text{Semb}[Q]$ retornou, nas Figura 4.3d e Figura 4.3e, vemos os valores do par (ϕ_{h_0}, V) determinado para cada amostra nessa seção CO.

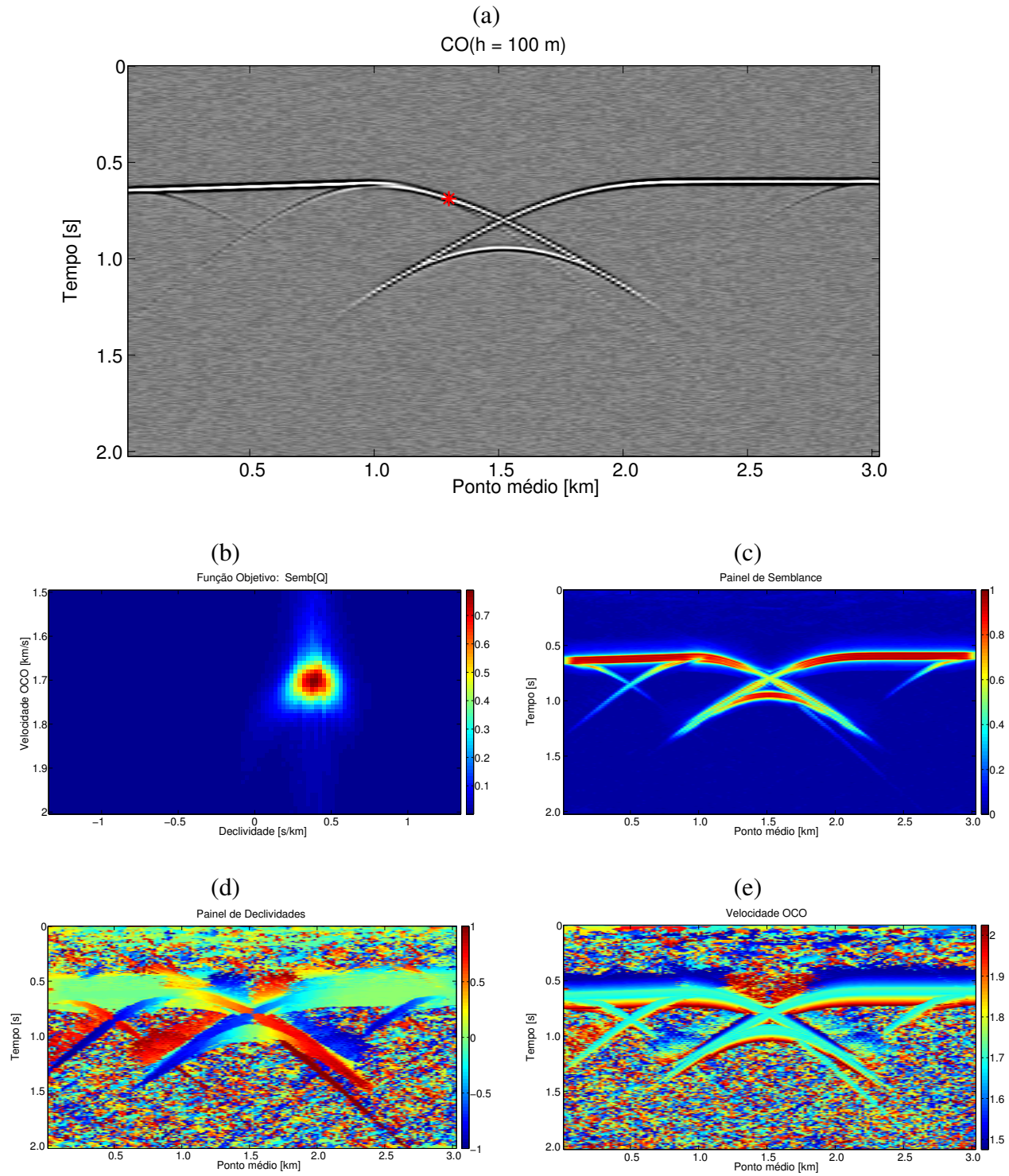


Figura 4.3: Exemplo da análise de coerência e extração das informações: (a) seção CO com $h_0 = 100$ m, (b) função objetivo com as variáveis (ϕ_{h_0}, V) aplicada no ponto em vermelho da parte a, (c) painel de coerência, (d) painel de declividades e (e) painel de velocidade OCO.

Observamos que na presença de ruídos muito maiores do que o sinal ou de sinais com altas variações nas amplitudes ao longo da trajetória CRP, pode ocorrer que a medida de semelhança não consiga retornar o maior valor para o evento correto, e com isso, a trajetória OCO por mais que esteja encaixada com a trajetória CRP, pode ajustar outro evento que retorne um valor de máximo falso.

4.3 Empilhamento parcial e total ao longo das trajetórias OCO

Nesta seção, apresentamos um novo método de empilhar que aumenta a qualidade de dados com amostragem esparsas, relação sinal-ruído baixa e trata de maneira satisfatória a questão do mergulho conflitante.

Usando como parâmetros os valores de ϕ_{h_0} e V , obtidos pelo processo descrito em (4.4) para o ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, podemos descrever o empilhamento nesse ponto, usando trajetórias OCO como

$$\text{OCP}[Q](\phi_{h_0}, V; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = \int_{h_m}^{h_M} w_1(h; h_0) \left[\int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} w_2(l_\xi) Q(l_\xi, 0, h; \phi_{h_0}, V) dl_\xi \right] dh, \quad (4.6)$$

com $0 \leq h_{(-)} \leq h_m \leq h_0 \leq h_M \leq h_{(+)}$ (pois a abertura de empilhamento é sempre menor ou igual a abertura de busca) e os pesos w_1 e w_2 sendo funções reais positivas definidas de forma que

$$\int_{h_m}^{h_M} w_1(h; h_0) dh = \int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} w_2(l_\xi) dl_\xi = 1. \quad (4.7)$$

Ao processo pela equação (4.6) chamamos de empilhamento parcial por trajetórias OCO ou empilhamento OCP do inglês *Offset Continuation trajectory Partial stack*. Chamamos assim, pois o empilhamento ocorre somente em uma faixa estreita da superfície do tempo de trânsito em torno da trajetória OCO, dada pelos valores do par (ϕ_{h_0}, V) .

Nesta tese usamos as seguintes funções densidades para representar os pesos w_1 e w_2 :

$$w_1(h; h_0) = \frac{\sqrt{l_h} [\arctg((h_M - h_0)\sqrt{l_h}) - \arctg((h_m - h_0)\sqrt{l_h})]^{-1}}{1 + l_h(h - h_0)^2} e$$

$$w_2(l_\xi) = (\xi_{(+)} - \xi_{(-)})^{-1}, \quad \text{onde } l_h = (\max\{(h_M - h_0)^2, (h_m - h_0)^2\})^{-1}. \quad (4.8)$$

Heuristicamente, usamos esses pesos pensando na variação de amplitude em torno da amostra que é empilhada. Começamos nossa justificativa pelo peso w_2 . Esse peso assumimos como constante pelo fato das amostras estarem no mesmo CO e a abertura nessa direção não ser muito grande em relação a profundidade. Assim, pelo teorema do valor médio, temos

$$\int_{\xi_{(-)}}^{\xi_{(+)}} w_2(l_\xi) Q(l_\xi, 0, h; \phi_{h_0}, V) dl_\xi = Q(\xi_*, 0, h; \phi_{h_0}, V), \quad \text{onde } \xi_* \in (\xi_{(-)}, \xi_{(+)}). \quad (4.9)$$

Para o peso w_1 assumimos a primeira função dada em (4.8) (conhecida como curva de Agnesi) pelo motivo de quanto mais próximo do evento, maior é a nossa confiança nessa amostra. Por isso, queremos que o seu peso seja mais representativo próximo ao ponto empilhado e menos representativo para amostras distantes, mas sem tendê-las a zero. Investigações futuras podem deduzir melhores pesos para o empilhamento OCP que podem ser baseados em processos estocásticos juntamente com o comportamento do dado estudado em questão.

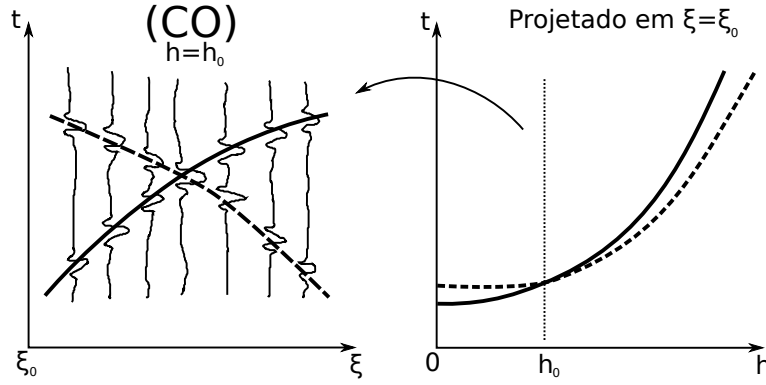


Figura 4.4: Ilustração do fenômeno de mergulho conflitante em uma seção CO. À esquerda a seção CO onde duas trajetórias CRP de horizontes (superfícies) diferentes se encontram, a linha tracejada representa uma superfície intersectando o plano $h = h_0$ e a linha contínua representa a outra superfície. À direita, as trajetórias CRP projetadas no plano $\xi = \xi_0$, a linha tracejada é a trajetória da superfície um e a linha contínua da superfície dois.

4.3.1 Mergulhos conflitantes

Um problema do empilhamento OCP, assim como qualquer método de multicobertura clássico, é o tratamento dos mergulhos conflitantes. Mergulhos conflitantes são superfícies de tempo de trânsito distintas que se interceptam como ilustrado na Figura 4.4. Se escolhermos um único valor de declividade ϕ_{h_0} para traçarmos a trajetória OCO e nesse caso houver dois ou mais eventos se cruzando nesse ponto, então, ao empilharmos apenas em volta dessa trajetória de maior coerência, obtemos redundância da informação para esse evento e com isso a diminuição da informação do sinal para os outros. De fato, tratamos os outros eventos como se fossem ruído.

Para tratar de forma eficiente o problema dos mergulhos conflitantes, vamos empilhar por uma fórmula que empilhe em todos os caminhos. Esse algoritmo empilha sobre todas as trajetórias OCO para cada declividade que satisfaz a física do processo em questão. Para decidir se um evento é relevante ou não, como em quase todo processo de comparação de amostras, utilizamos a medida de coerência definida em (4.3).

Primeiro, vamos definir

$$S_T(\phi) := \text{Semb}[Q](\phi, V_f; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) / \max\{\text{Semb}[Q](\phi, V_f; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0); |\phi| \leq 2/V_f\}, \quad (4.10)$$

onde V_f é a velocidade obtida pela busca (4.4) para o ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$. Esse processo é apenas a normalização da Semblance em função da declividade. De (4.10), com a velocidade fixa, expressamos a função Coer em função da declividade como

$$\text{Coer}[Q](\phi) = \exp \left\{ \left[1 - \frac{1}{S_T(\phi)} \right] m_+ \right\} \frac{1}{S_T(\phi)}. \quad (4.11)$$

A Figura 4.5 ilustra a propriedade de nosso interesse dessa transformação. A ideia é que coerências baixas sejam levadas para zero, enquanto as outras para valores que dependem do valor escolhido

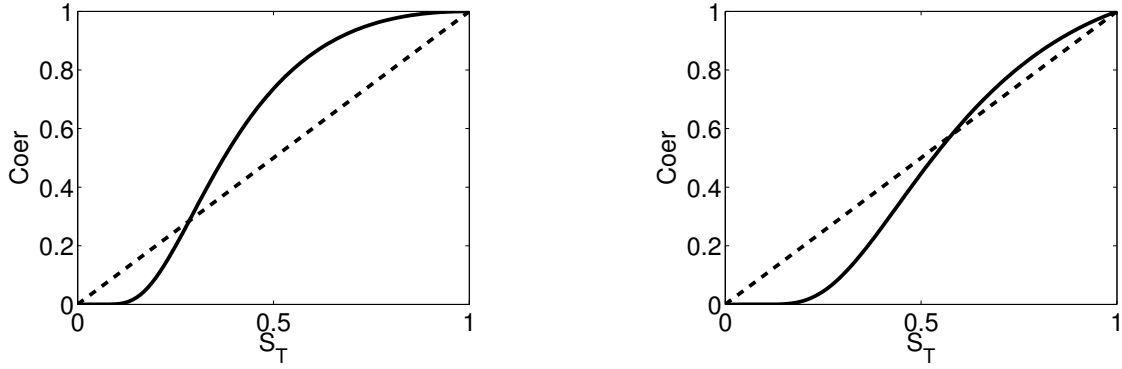


Figura 4.5: Mudança do valor de coerência dada pela equação (4.11) para $m_+ = 1$ (esquerda) e $m_+ = 1.5$ (direita).

para a constante $m_+ > 0$. Outras transformações podem ser usadas, por exemplo, gaussianas. Escolhemos (4.11) com $m_+ = 1$ por facilidade em operar. Em testes numéricos para modelos simples, a função não apresentou diferenças significativas para outros valores de m_+ . Para modelos reais, pode acontecer de termos que ajustar o valor de m_+ para melhores resultados. O valor ideal de m_+ pode ser objeto de estudos futuros, onde podemos associá-lo a certas propriedades do ruído no sinal sísmico.

Representamos o empilhamento de traços sísmicos, que leva em conta o tratamento de mergulhos conflitantes, pelo seguinte operador

$$\text{OCT}[Q](V_f; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) = \sqrt{\frac{m_+}{2\pi} |D_\phi^{(2)}|} \int_{-\frac{2}{V_f}}^{\frac{2}{V_f}} \text{Coer}[Q](\phi) \text{OCP}[Q](\phi, V_f; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) d\phi, \quad (4.12)$$

onde

$$D_\phi^{(2)} = \left. \frac{d^2 S_T}{d\phi^2} \right|_{\phi_*} \quad (4.13)$$

com ϕ_* satisfazendo $S_T(\phi_*) = 1$. Chamamos a equação (4.12) de empilhamento das trajetórias OCO ou empilhamento OCT do inglês *Offset Continuation Trajectory stack*.

Podemos observar que há várias escolhas para o peso do operador (4.12), como por exemplo,

$$\text{OCT}[Q] = \left[\int_{-\frac{2}{V_f}}^{\frac{2}{V_f}} \text{Coer}[Q](\phi) d\phi \right]^{-1} \int_{-\frac{2}{V_f}}^{\frac{2}{V_f}} \text{Coer}[Q](\phi) \text{OCP}[Q](\phi) d\phi, \quad (4.14)$$

que é uma média conhecida como centro de massa. Mas, esse tipo de escolha não corrige o problema de mergulho conflitante de forma eficiente, pois esse procedimento retorna a média de todas as amplitudes significativas e não a sobreposição de cada uma delas.

A escolha do operador (4.12) têm fundamento matemático que explicamos a seguir. Justificamos a nossa escolha do peso em (4.12) assumindo algumas premissas.

Supondo por simplicidade que existam dois eventos conflitantes e sobre cada trajetória CRP esses eventos tenham amplitudes constantes. Nesse caso,

$$\Psi_1(h; \phi_1) = A_1 f(t - \mathcal{T}(h; \phi_1)) \quad \text{e} \quad \Psi_2(h; \phi_2) = A_2 f(t - \mathcal{T}(h; \phi_2)), \quad (4.15)$$

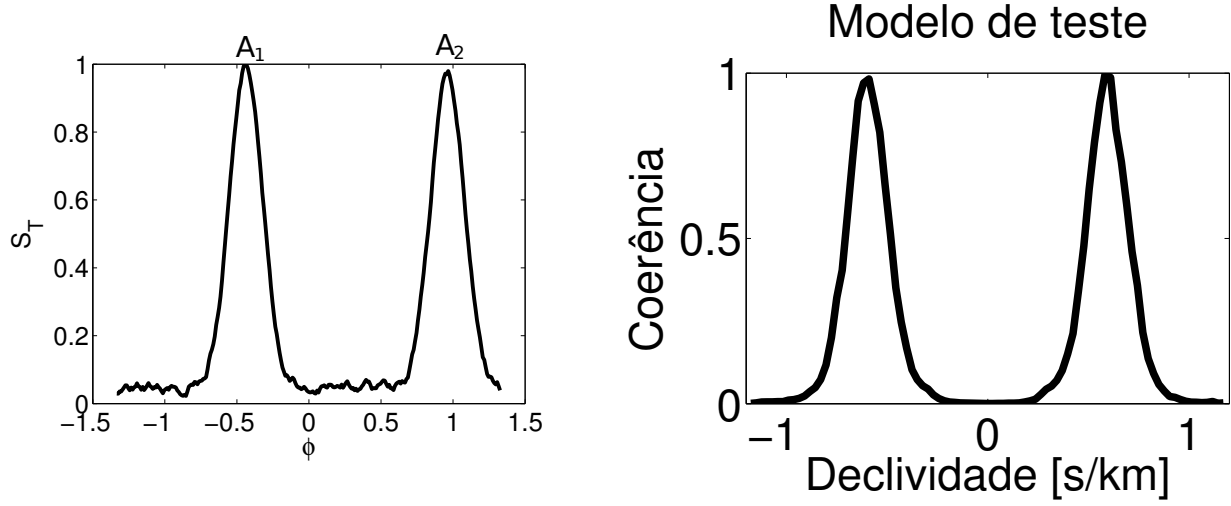


Figura 4.6: Gráfico da função S_T , onde temos os dois picos A_1 e A_2 (esquerda). Gráfico da função S_T aplicada no modelo da Figura 4.3 no ponto $\tau_{h_0} = 0,8$ s e $\xi_{h_0} = 1,52$ km, ou seja, no ponto onde os tempos de trânsito da sinclinal se encontram (direita).

onde o A_1 e A_2 são as amplitudes ao longo das trajetórias parametrizadas $\mathcal{T}(h; \phi_1)$ e $\mathcal{T}(h; \phi_2)$ de modo que o empilhamento OCP (equação (4.6)) retorne de ϕ_1 e ϕ_2 , sendo $f(0) = 1$ em (4.15), os seguintes resultados:

$$\text{OCP}[\Psi_1](\phi_1) = A_1 \quad \text{e} \quad \text{OCP}[\Psi_2](\phi_2) = A_2. \quad (4.16)$$

O resultado A_1 simboliza a amostra do primeiro evento e A_2 para o segundo. Após todo o processo para construção de S_T , devido a coerência das amostras em Ψ_1 e Ψ_2 o gráfico da função S_T contém dois picos, um entorno da declividade para A_1 e o outro para A_2 como ilustrado na Figura 4.6. Teoricamente, sobre esses eventos a função S_T e $1 - 1/S_T$ são estacionárias. Da equação (4.12), podemos aplicar o seguinte resultado chamado de método de Laplace (Olver, 1974; Bleistein e Handelsman, 1986) que em resumo diz: Dadas duas funções suaves $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- $\frac{dL}{dx}$ é nulo somente no suporte de g em um conjunto finito de pontos $\{x_1, \dots, x_N\}$, e
- $\left. \frac{d^2 L}{dx^2} \right|_{x_j} < 0 \quad (j = 1, \dots, N),$

então,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{mL(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \sum_{j=1}^N g(x_j) e^{mL(x_j)} \left| \left. \frac{d^2 L}{dx^2} \right|_{x_j} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty. \quad (4.17)$$

Derivando o fator $1 - 1/S_T$ de (4.11) presente na exponencial, no ponto estacionário

$$\left. \frac{dS_T}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_*} = 0, \quad \text{temos} \quad \frac{d^2}{d\phi^2} \left(1 - \frac{1}{S_T} \right) = \frac{1}{S_T^2} \frac{d^2 S_T}{d\phi^2}. \quad (4.18)$$

Como ilustrado na Figura 4.6, vemos que os pontos ϕ_1 e ϕ_2 são pontos de máximos locais. Daí, temos que $d^2 S_T / d\phi^2 < 0$ para A_1 e A_2 .

Portanto, aplicando o método de Laplace em (4.12), obtemos

$$\text{OCT}[Q](V_f; \xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0) \sim \sqrt{|D_\phi^{(2)}|} \left(A_1 \frac{e^{m_+(1 - \frac{1}{S_T(\phi_1)})}}{\sqrt{|D_1^{(2)}|}} + A_2 \frac{e^{m_+(1 - \frac{1}{S_T(\phi_2)})}}{\sqrt{|D_2^{(2)}|}} \right) \approx A_1 + A_2, \quad (4.19)$$

onde $D_1^{(2)}$ e $D_2^{(2)}$ são as derivadas segundas de S_T em função de ϕ nos pontos referentes a A_1 e A_2 e pela construção $D_\phi^{(2)} = D_1^{(2)} \approx D_2^{(2)}$ juntamente com

$$\exp(m_+(1 - 1/S_T(\phi_2))) \approx \exp(m_+(1 - 1/S_T(\phi_1))) = 1. \quad (4.20)$$

Pela mesma ideia, podemos estender o resultado para um número maior do que dois de mergulhos conflitantes.

Na construção de S_T (equação (4.10)), podemos suavizar a função de semelhança para remoção de altas oscilações. Mas, devido ao custo computacional elevado essa tarefa torna a computação de $D_\phi^{(2)} = d^2 S_T / d\phi^2$ no ponto estacionário demorada para grande quantidade de dados para o processo. Uma alternativa barata para tal processo é: Ao redor do ponto estacionário, que localizamos buscando $S_T = 1$, ajustamos, usando quadrados mínimos, uma parábola da forma

$$S_T = 1 + (\phi - \phi_*)^2 \frac{D_a^{(2)}}{2} \quad (4.21)$$

com os valores dos pontos em volta de $S_T = 1$ e obtendo $D_\phi^{(2)} = D_a^{(2)}$, onde $D_a^{(2)}$ é o valor de ajuste. Esse processo torna a computação mais rápida e segura. Para melhor qualidade de $D_a^{(2)}$, podemos computar mais amostras em torno do ponto estacionário escolhido.

4.3.2 Multicobertura global

Nesta seção, discutimos como podemos aumentar a precisão do empilhamento OCT e da horizontalização (correção de sobretempo normal) das seções CRP.

Em cada posição da amostra dos dados, podemos extrair as informações da velocidade OCO e da declividade. Ou seja, fazendo análise de coerência para todos os pontos que definem o domínio da aquisição sísmica, obtemos de (4.4) o par (ϕ, V) para cada ponto (ξ, t, h) extraídos de forma independente. Nesse caso, temos $V = V(\xi, t, h)$ e $\phi = \phi(\xi, t, h)$ o que tornam esses parâmetros como atributo de multicobertura global.

Do Capítulo 3, vimos que a precisão do empilhamento OCP partindo da seção ZO é de $\mathcal{O}(h^4)$, mas para seções CO partindo de $h_0 > 0$ a precisão é de $\mathcal{O}(\delta h^2)$ com $\delta h = h_0 - h$. As Figuras 4.7 e 4.8 mostram o erro entre a trajetória OCO e a trajetória CRP em um meio heterogêneo com alta variação de velocidade, onde os parâmetros da declividade, ϕ_0 , e a velocidade OCO, V , em $h_0 = 0$ são as que deram o menor erro. Usando o mesmo raciocínio, como na Seção 3.2, para o caso de afastamento comum, obtemos uma forma implícita da velocidade OCO em função dos atributos

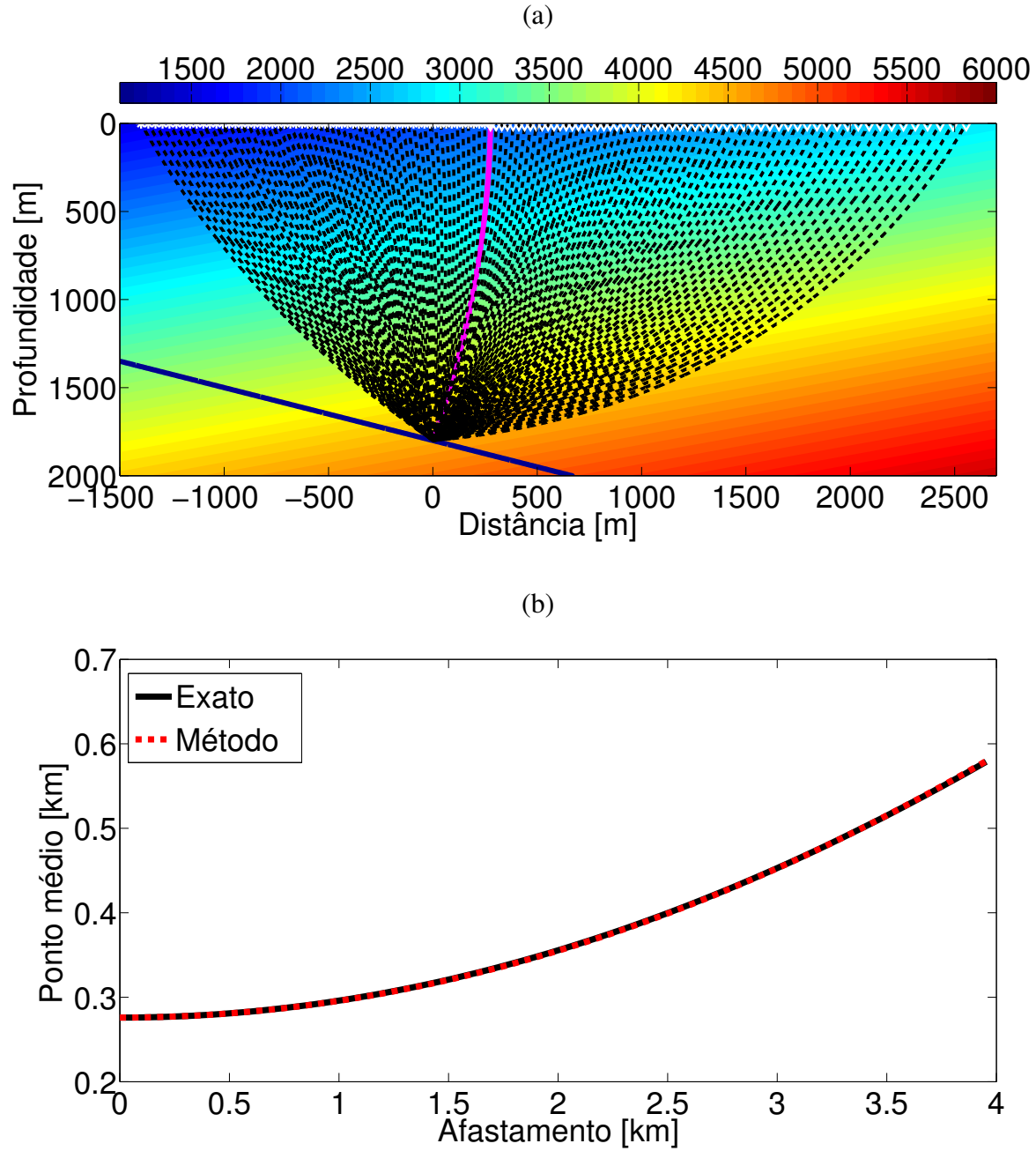


Figura 4.7: (a) Experimento numérico onde geramos raios partindo do mesmo ponto em profundidade referentes a um refletor inclinado dado em azul sendo a curva em roxo referente ao raio normal sendo a barra de cores as velocidades do meio em m/s (b) comparação entre a projeção da trajetória CRP (preto) com a projeção da trajetória OCO (vermelho tracejado) na coordenada do ponto médio.

cinemáticos, como

$$\frac{4}{V^2} = \frac{4\tau_{h_0}^2 \phi_{h_0}^2 h_0^2 + \tau_{n_0}^2 \tau_{h_0}^2 + \tau_{h_0}^2 \sqrt{\tau_{n_0}^4 + 4\tau_{h_0}^2 \phi_{h_0}^2 h_0^2}}{2h_0 \sqrt{\tau_{n_0}^4 + 4\tau_{h_0}^2 \phi_{h_0}^2 h_0^2}} + \frac{\tau_{h_0}}{h_0} \psi_{\xi_{h_0}}. \quad (4.22)$$

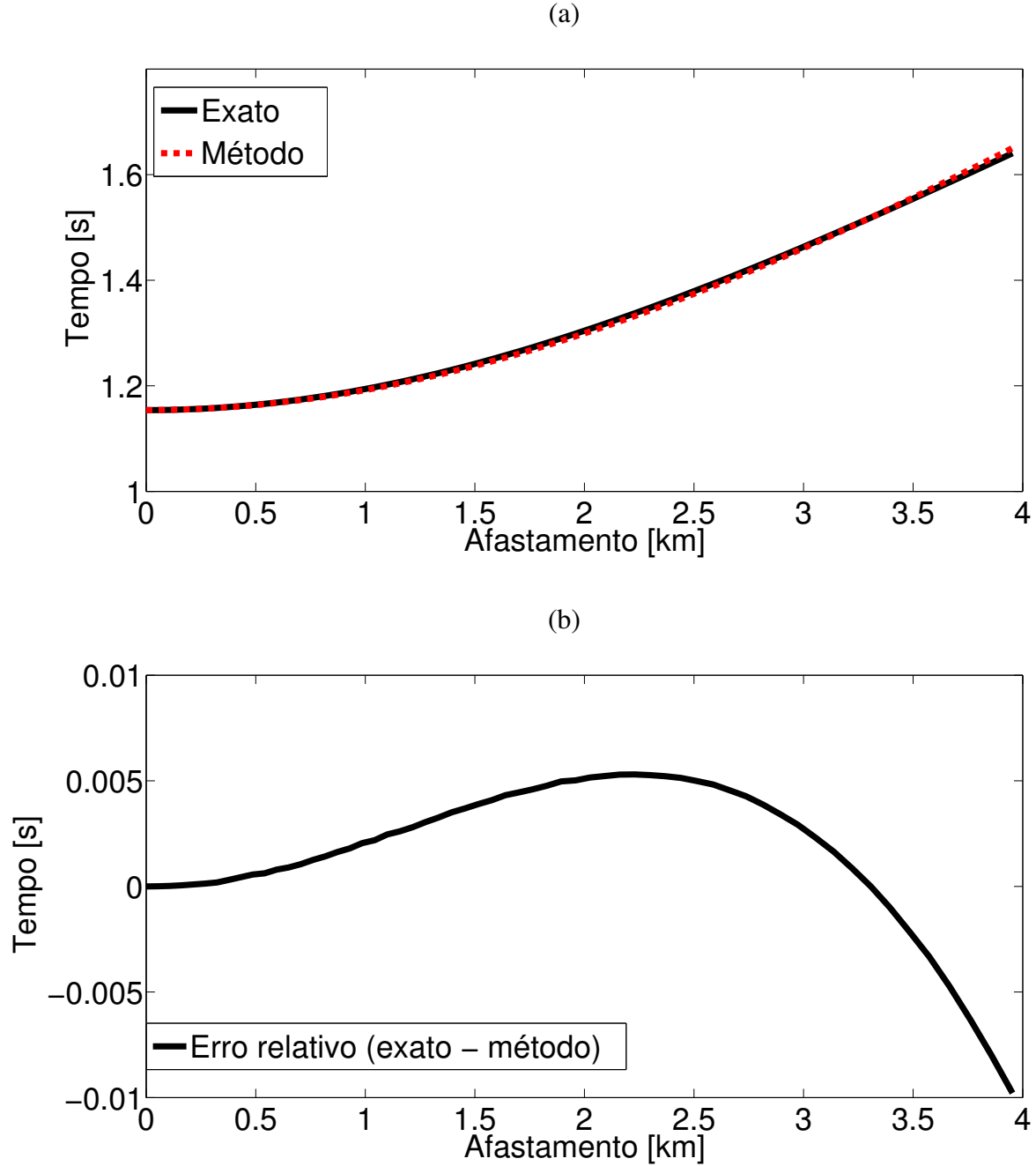


Figura 4.8: (a) Comparação entre a projeção da trajetória CRP (preto) com projeção da trajetória OCO (vermelho tracejado) na coordenada do tempo (b) diferença entre as duas trajetórias.

Ou seja, usando a velocidade OCO de (4.22) com a condição de localmente homogêneo, obtemos que o erro da trajetória OCO em relação a trajetória CRP é de no máximo $\mathcal{O}((h_0 - h)^2)$. Assim, para construir amostra, empilhadas, para a posição $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$ usando o OCT, usamos para cada ponto (ξ, t, h) o valor de velocidade $V(\xi, t, h)$ em vez da $V(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$. Considerando o meio localmente homogêneo, o erro entre a trajetória OCO e a trajetória CRP é de ordem cúbica. Daí, partindo de

$(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$ e indo para $(\xi_{h_1}, t_{h_1}, h_1)$, onde $h_1 = h_0 + \varepsilon_1$, $\xi_{h_1} = \xi(h_0 + \varepsilon_1)$ e $t_{h_1} = \mathcal{T}(\xi_{h_1}; \xi_{h_0})$ e utilizando as informações da velocidade OCO e declividade extraídas para o ponto $(\xi_{h_0}, t_{h_0}, h_0)$, temos que o erro máximo entre a trajetória CRP com a trajetória OCO no ponto $(\xi_{h_1}, t_{h_1}, h_1)$ é de $\mathcal{O}(\varepsilon_1^2)$. Novamente, repetindo esse processo para o ponto $(\xi_{h_1}, t_{h_1}, h_1)$ até $(\xi_{h_2}, t_{h_2}, h_2 = h_1 + \varepsilon_2)$ com os valores de velocidade OCO e declividade para o ponto $(\xi_{h_1}, t_{h_1}, h_1)$, observamos que o erro entre as trajetórias será de $\mathcal{O}(\varepsilon_2^2)$. Assim, repetindo esse processo até o meio-afastamento final h_N o erro máximo é de

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{O}(\varepsilon_j^2) = \mathcal{O}(\max\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}^2) \text{ em vez de } \mathcal{O}(\delta h^2), \text{ onde } \delta h = h_N - h_0. \quad (4.23)$$

Através desse processo podemos empilhar traços mais distantes e com precisão local. Quando dizemos com “precisão local” significa que o erro máximo da extração da informação (trajetória CRP) não é $\mathcal{O}(\delta h^2)$ e sim $\mathcal{O}(\varepsilon_j^2)$ para algum j como definido anteriormente. Para ajustar o sobretempo normal de seções CRP, podemos calcular em cada ponto os valores que fazem a trajetória OCO acompanhar a trajetória CRP seguindo a técnica proposta anteriormente.

Tendo a velocidade OCO para todo domínio podemos regularizar o dado tanto por empilhamento como pelas técnicas diferenciais dadas em (3.112) e (3.145). Também, podemos fazer extrapolações, por exemplo, até o afastamento nulo ou construir seções CO além do último afastamento como também seção CS não obtidas na aquisição sísmica.

4.4 Análise da amplitude com variação do afastamento

Nesta seção, discutimos duas aplicações da OCO para o caso da análise de amplitude com variação do afastamento (AVO). Informações mais gerais como forma de utilização, aplicações e teoria base podem ser encontradas em Castagna e Backus (1999) e Ross (2000).

A ideia básica é que a reflexão sobre as camadas geológicas (descontinuidades do meio) têm seus valores alterados de acordo com o ângulo de incidência e essas reflexões possuem os valores de velocidade e densidade em uma vizinhança em torno dessa descontinuidade. Assim, tendo as informações do ângulo de incidência, podemos inverter os parâmetros que compõem esse coeficiente de reflexão, por exemplo, velocidades da onda de pressão e da cisalhante, bem como as densidades.

No Apêndice B descrevemos uma aproximação para o quadrado do seno do ângulo de incidência, que é baseado na combinação de valores cinemáticos que podem ser obtidos pelas trajetórias OCO. Nesse Apêndice, mostramos que $\sin^2 \gamma$, onde γ é o ângulo de incidência para ondas do tipo *PP* ou *SS*, pode ser aproximado por

$$\sin^2 \gamma = \frac{h}{\tau_h} \frac{\partial \tau_h}{\partial h}, \quad (4.24)$$

sendo τ_h o tempo de trânsito medido no meio-afastamento h e $\partial \tau_h / \partial h$ a declividade do tempo de trânsito na direção do meio-afastamento h . A equação (4.24) é exata para meios homogêneos independente da forma do refletor e também para refletores planos horizontais em meios com velocidade variando somente na coordenada da profundidade. Na Figura 4.9 comparamos essa aproximação com a proposta na literatura em um modelo heterogêneo, onde todos os valores usados foram extraídos

do próprio traçamento de raios. A equação proposta na literatura que usamos para comparar com o nosso modelo pode ser encontrada em Castagna e Backus (1999) e é expressa como

$$\sin \gamma = \frac{c_R}{v_n^2} \frac{2h}{\tau_h}, \quad (4.25)$$

onde v_n é a velocidade NMO e c_R é a velocidade da onda no ponto de reflexão.

Nos testes executados, a equação (4.25) apresentou melhores resultados para os casos mais complexos e em casos mais simples não houve diferenças significativas com a aproximação proposta. No entanto, a equação (4.25) requer o valor da velocidade no ponto de reflexão. Nesse caso, temos que de alguma forma extrair essa informação para aplicá-la. A equação (4.24) não necessita de informações do modelo de profundidade. A necessidade é de, apenas, extrair os três valores cinemáticos, que podem ser recolhidos aplicando as trajetórias OCO. Por que usar a aproximação (4.24) em vez de (4.25)? Caso não temos como extrair nenhuma informação da velocidade em profundidade ou a velocidade em profundidade obtida por análises de velocidade não forem confiáveis a fórmula não poder ser aplicada. Da fórmula (4.25) podemos confirmar que caso o erro seja maior que 3% o erro resultante para aproximar $\sin^2 \gamma$ é maior que

$$0.06 \left(\frac{c_R}{c_n^2} \frac{2h}{\tau_h} \right)^2. \quad (4.26)$$

Os valores de h e τ_h podem ser obtidos diretamente do dado para o valor de $\partial \tau_h / \partial h$, basta aplicarmos a busca do par (V, ϕ) pela trajetória OCO e utilizar a equação (3.53) para obtenção de $\partial \tau_h / \partial h$.

Como a trajetória OCO navega próximo ou na própria trajetória CRP, em vez de usarmos o método CMP, podemos usar o método das trajetórias OCO para colher as amostras de amplitude, com isso estamos colhendo informações de reflexões que aconteceram em uma região pequena em volta da reflexão inicial para o caso de refletores com mergulhos e curvos.

Outra forma de extração das amplitudes é aplicando a equação diferencial OCO (equação (3.112)) para transformar os afastamentos comum em afastamentos nulos. Lembrando que essa transformação não altera os coeficientes de reflexão e ajusta o fator de espalhamento geométrico de forma aproximada.

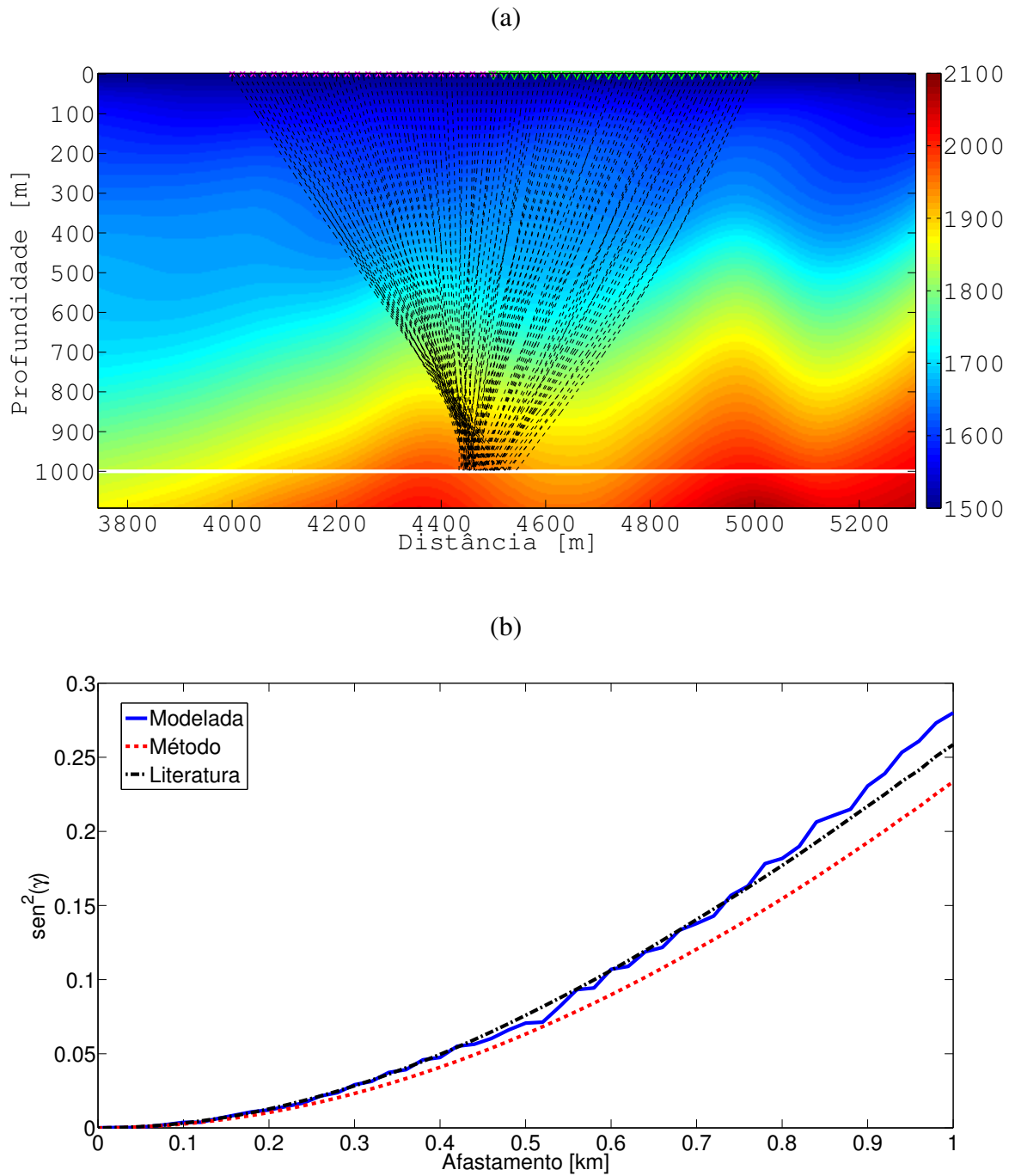


Figura 4.9: Experimento numérico para comparação entre as duas aproximação do ângulo de incidência. (a) Modelo de velocidade em m/s juntamente com os raios usados para gerar uma seção CMP. (b) Comparações entre os valores obtidos pelo experimento juntamente com as duas amostras das aproximações.

Capítulo 5

Experimentos numéricos e comentários

Neste capítulo apresentamos três experimentos numéricos realizados para checar de forma empírica a precisão numérica dos resultados teóricos apresentados nesta tese. Usamos dois modelos sintéticos a saber: o modelo sintéticos SMAART-JV Sigsbee2B e o Marmousi, bem como o dado real obtido da bacia do Jequitinhonha, linha sísmica 214-RL-0266 para aplicar o empilhamento OCT e a técnica de extração de parâmetros por trajetórias OCO.

5.1 Modelo Sigsbee2B

O Sigsbee2B-NFS é um conjunto de dados modelado por diferenças finitas aplicados à equação da onda acústica 2D com densidade constante sobre um modelo sem superfície livre. Na parte que aplicamos o nosso teste, a velocidade pode ser aproximada por $c(x, z) = 1524 + 0,3 \max\{0, (z - z_0(x))\}$ m/s onde $z_0 = z_0(x)$ é a função que descreve a profundidade do fundo do mar em metros. Esse conjunto de dados consiste de 500 tiros sendo 348 o número máximo de receptores em cada tiro. O afastamento inicial é igual a 0 m, os tiros estão espaçados a cada 45,72 m e os receptores a cada 22,86 m. O primeiro tiro foi dado em $x = 3,329$ km, e o último em $x = 26,144$ km. O tempo de registro foi de 12 s com a mostragem de 0,008 s. Testamos a técnica de extração da declividade na seção CMP baseada na equação (3.53) sobre o conjunto de dados Sigsbee2B-NFS.

Na Figura 5.1a mostramos a seção CMP no ponto médio 5,54 km, onde a análise de declividade foi executada sendo a curva azul extraída manualmente do dado. Na Figura 5.1b mostramos os resultados dos três processos distintos de obter a declividade sobre essa curva. A curva em azul foi obtida por derivar a curva extraída manualmente usando diferenças finitas de ordem dois, a curva em preto pontilhado-tracejado foi extraída usando a técnica de declividade local do inglês *local slope* (Schleicher et al., 2009), onde em cada ponto foi usado a janela de busca que mais se aproximou do dado, e em vermelho tracejado usamos as informações de declividade e velocidade OCO para cada ponto através da técnica das trajetórias OCO. Vemos na Figura 5.1b que o método proposto aqui encaixou perfeitamente sobre a curva extraída manualmente sem oscilações como obteve a curva extraída manualmente. Já a curva extraída pelo método local slope não obteve boa precisão a partir da declividade 0,15 s/km. Devido a informação da continuação da declividade e a multicobertura, a extração da declividade usando trajetória OCO é muito mais precisa do que a simples extração de declividades em apenas um painel, nesse caso CMP, como é feito no método local slope.

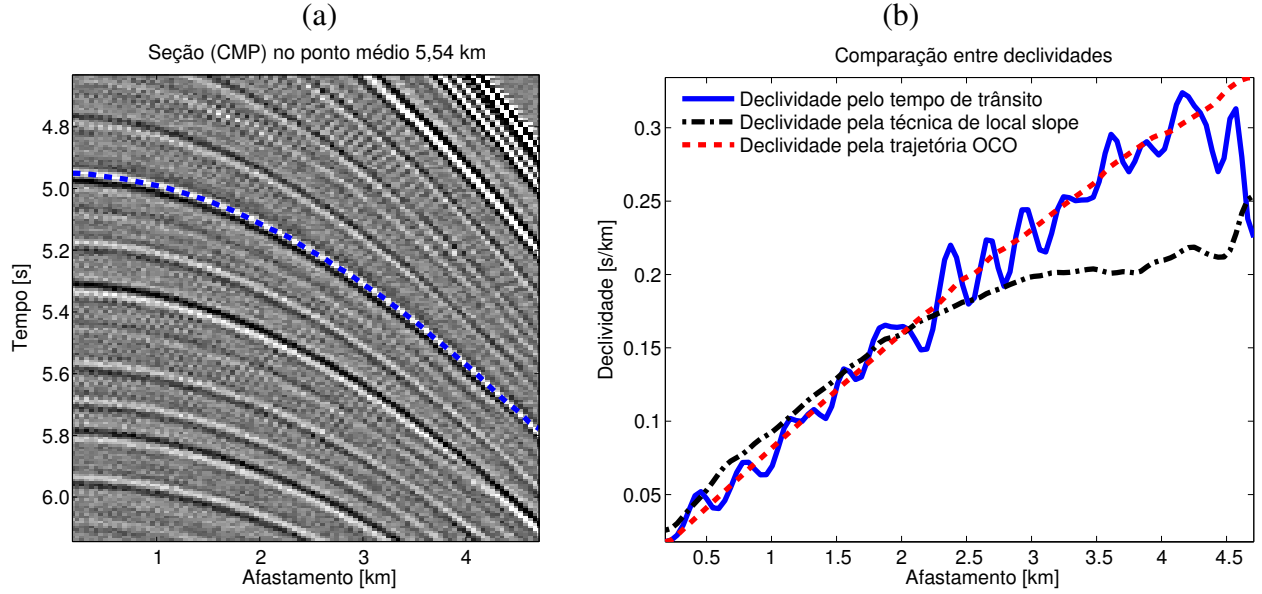


Figura 5.1: *Extração do tempo de trânsito (a) e comparação entre declividades (b).*

5.2 Modelo Marmousi

O Modelo 2D sintético Marmousi foi desenvolvido no *Instituit Français du Pétrole* (IFP). A geologia desse modelo baseia-se no perfil de falhas que cruzam o norte de Quenguela na bacia de Cuazan em Angola (Versteeg, 1993). Escolhemos esse modelo por causa da complexidade de sua geologia e do modelo de velocidade como podemos ver na Figura 5.2. O modelo possui elevada variação de velocidade vertical e lateral (com velocidade mínima de 1,5 km/s e máxima de 5,5 km/s). O que leva a condição de velocidade localmente constante a um teste extremo. O modelo sísmico foi simulado utilizando diferenças finitas para equação da onda acústica 2D. Isto produziu 240 tiros com 96 receptores em cada tiro. O afastamento inicial é de 200 m, os tiros e receptores estão espaçados a cada 25 m. O primeiro tiro foi dado em $x = 3$ km, e o último em $x = 8,975$ km. O tempo de registro foi de 2,9 s com a mostragem de 0,004 s. Na Figura 5.3 mostramos a seção CO do conjunto de dados desse modelo como menor afastamento.

Esse conjunto de dados contaminamos com ruído gaussiano de amplitude máxima igual a 30% da amplitude da maior reflexão do conjunto de dados Marmousi. A Figura 5.4 mostra o resultado desta contaminação na seção de CO mínimo. Notamos a deterioração significativa deste dado com ruído que deixa visível somente os eventos mais fortes.

Para extração dos parâmetros cinemáticos da seção de afastamento mínimo, utilizamos (4.4) com as aberturas

$$\begin{aligned} \text{diam}([t_{(-)}, t_{(+)}]) &= 0,040 \text{ s}, \\ \text{diam}([\xi_{(-)}, \xi_{(+)}]) &= 150 \text{ m}, \\ \text{diam}([h_{(-)}, h_{(+)}]) &= 1000 \text{ m}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $h_{(-)} = 100$ m e o intervalo de busca para as velocidades OCO era $[1,5; 3]$ km/s. Nessa busca não foi aplicado nenhum algoritmo de otimização. Para empilhar os traços da seção de afastamento

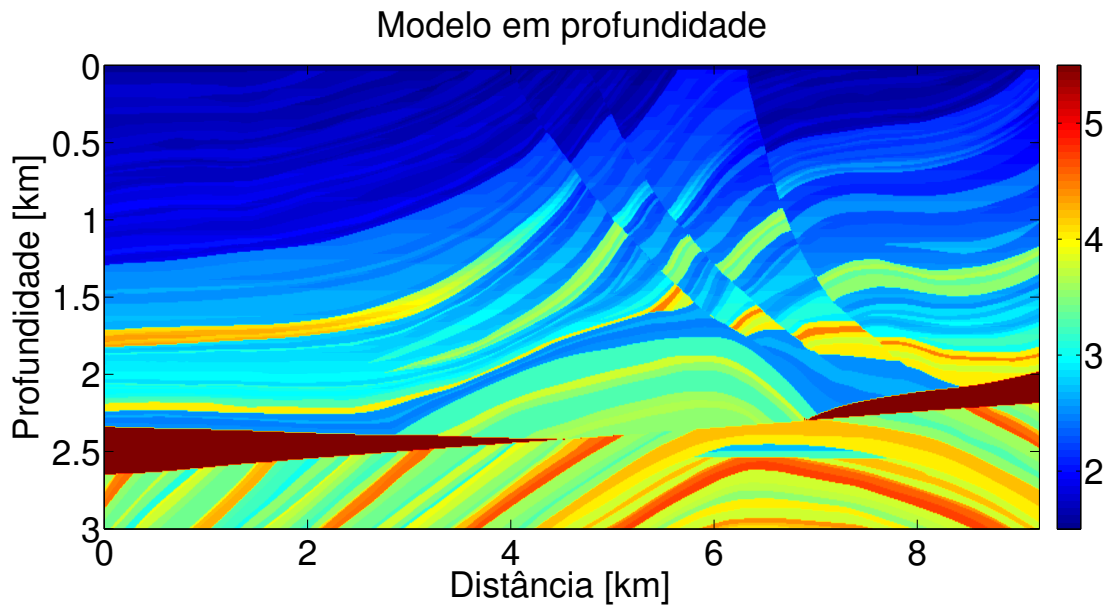


Figura 5.2: *Modelo de velocidade em profundidade em km/s Marmousi.*

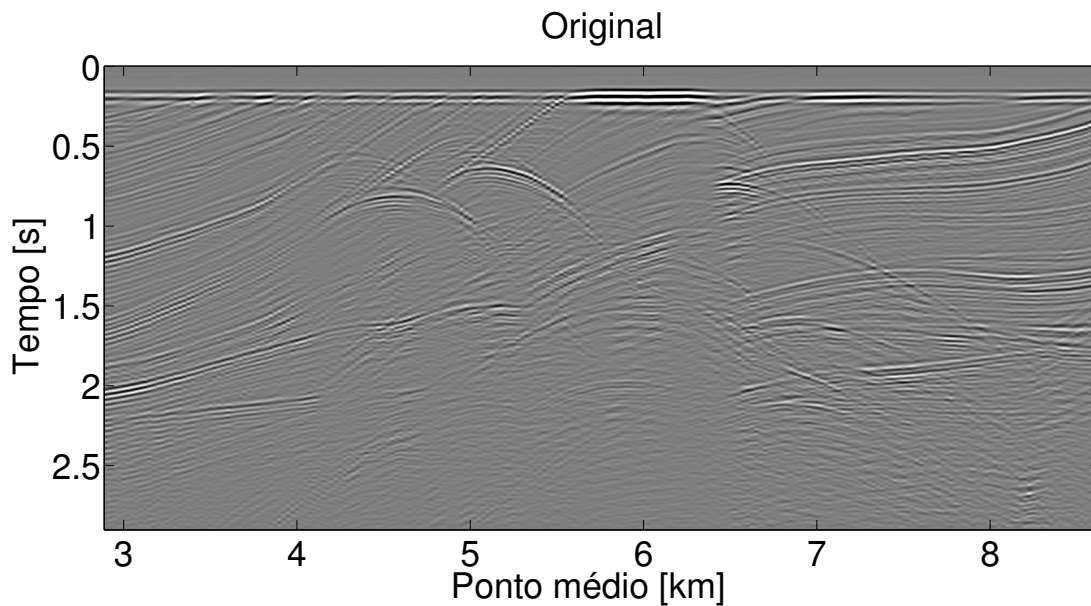


Figura 5.3: *Seção de afastamento mínimo com meio-afastamento de 100 m.*

mínimo, utilizamos o método (4.12) com a velocidade OCO obtida, onde $\text{diam}([h_m, h_M]) = 200$ m e $h_m = h_{(-)}$. A Figura 5.5 mostra o resultado obtido após o empilhamento pelo método OCT para essa seção. Observe que houve uma boa recuperação dos refletores, o ruído aleatório foi removido quase que completamente, houve uma melhora na resolução espacial do dado e os eventos de mergulhos conflitantes foram resolvidos de forma satisfatória. A Figura 5.6 mostra a informação de declividade.

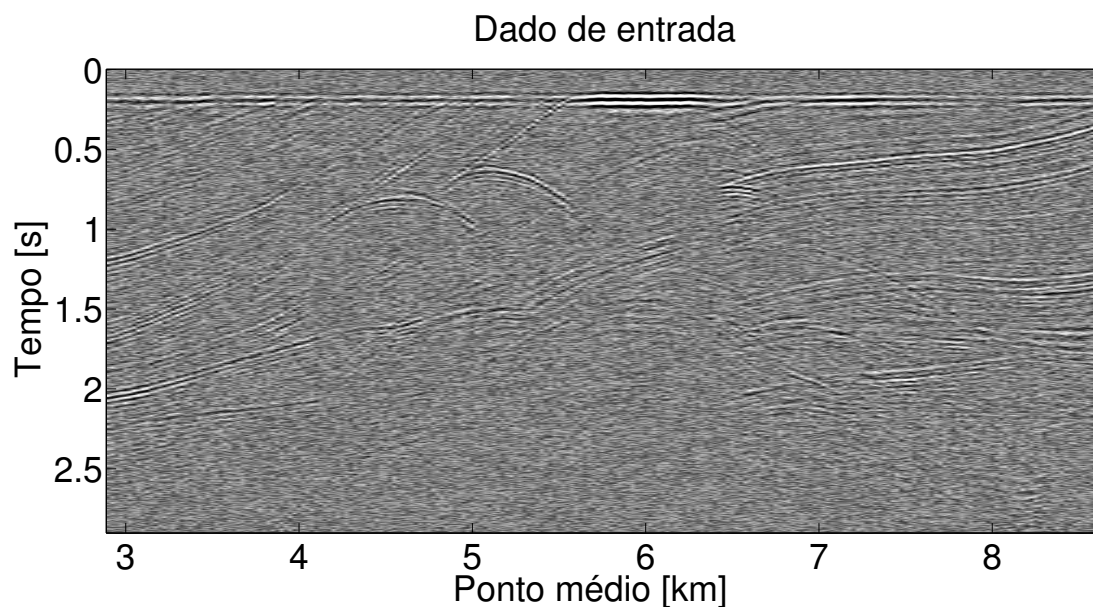


Figura 5.4: *Seção de afastamento mínimo contaminada com ruído não coerente.*

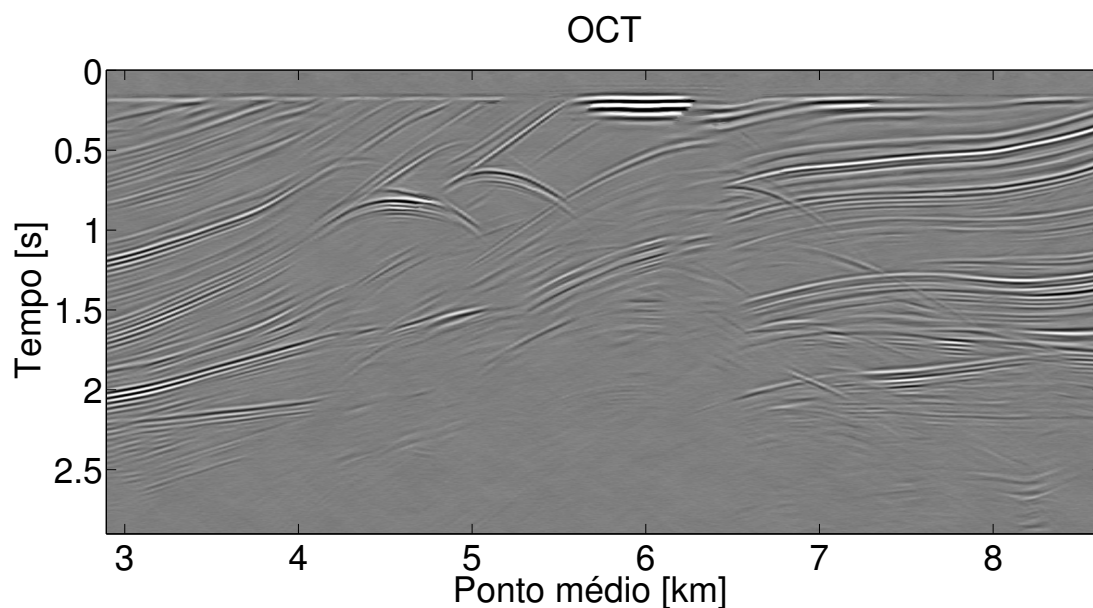


Figura 5.5: *Seção de afastamento mínimo empilhada pelo OCT.*

Observe que o topo das formas sinclinais possuem um bom contraste de valores e devido a mergulhos conflitantes as declividades com valores representados por tons azuis sobrepuseram aos demais. A Figura 5.7 mostra a informação de velocidade OCO obtida desse processo, observe que na região anterior a 4 km e posterior a 7 km o modelo de velocidade foi extremamente suave que condiz com o modelo de velocidade do Marmousi. No entanto, na parte entre 4 e 7 km o modelo de velocidades

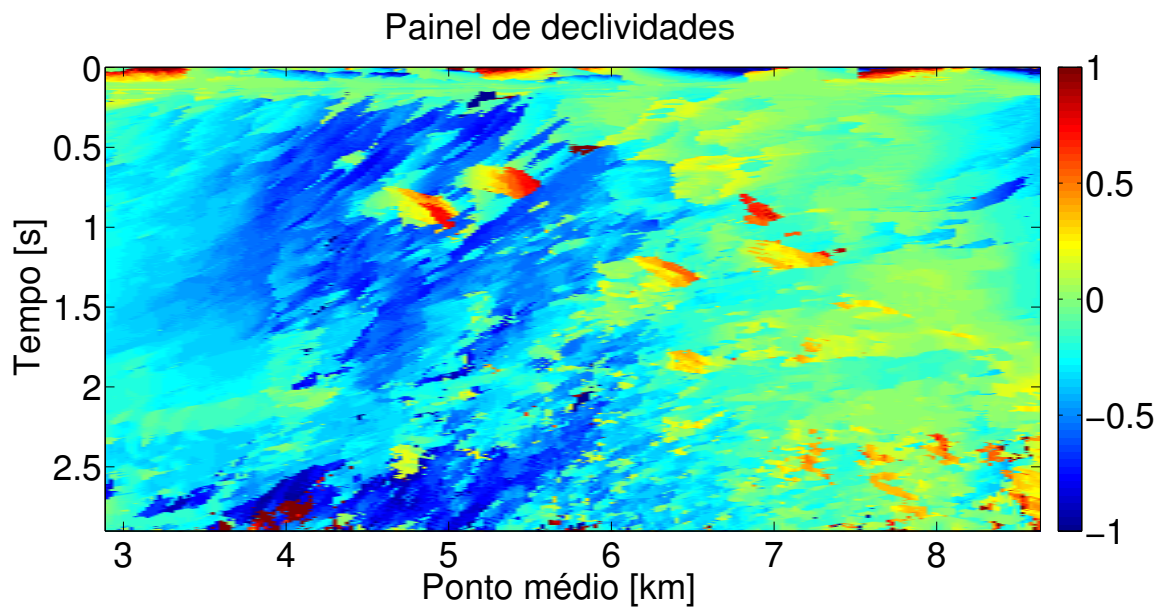


Figura 5.6: Painel referente as informações de declividade em s/km da seção de afastamento mínimo.

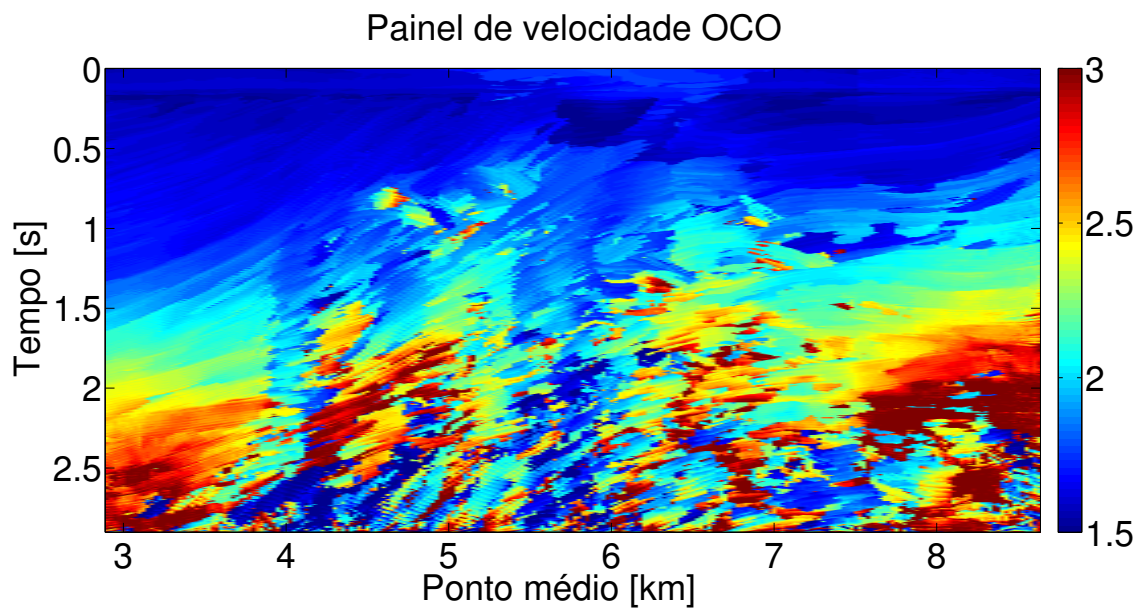


Figura 5.7: Painel referente as informações de velocidade OCO em km/s da seção de afastamento mínimo.

OCO mostrou-se um pouco perturbado, mostrando forte variações de velocidade devido às extremas variações laterais de velocidade do modelo Marmousi nessa região.

Nas Figuras 5.8a e 5.8b fazemos duas comparações traço-a-traço para mostra a precisão do método. A Figura 5.8a exibe os traços na posição $\xi = 3875$ m e $h = 100$ m e a Figura 5.8b exibe os traço

da posição $\xi = 5875$ m e $h = 100$ m. Observamos na Figura 5.8a que o traço empilhado aproximou muito bem do original devido a suavidade do modelo nessa região. Já o traço da Figura 5.8b não foi empilhado tão bem assim, apesar do resultado ser muito bom também. Esse fato pode ser explicado pelas fortes variações de velocidade nessa região, pois para esse empilhamento não usamos o modelo de multicobertura global. Ou seja, empilhamos nessa seção CO com um único valor de velocidade OCO para cada amostra.

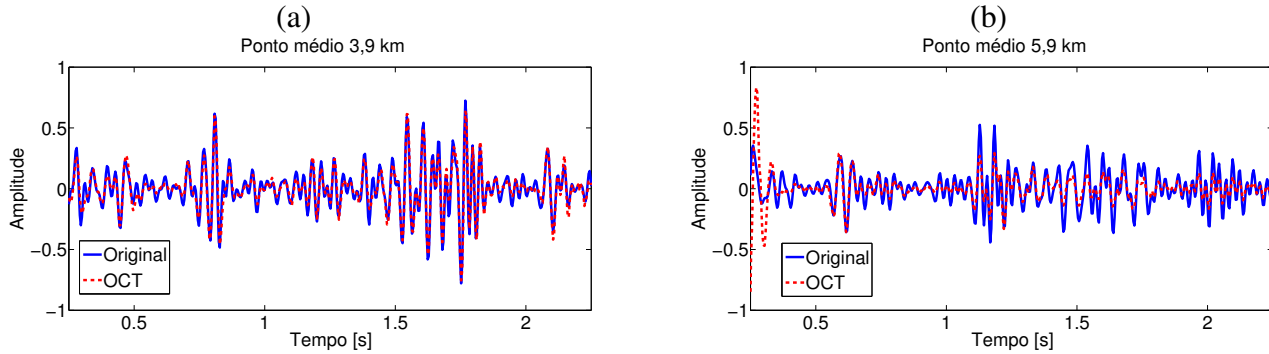


Figura 5.8: Comparação entre o traço original e o traço empilhado pelo OCT.

Para construção de sobretempo das seções CRPs vistas nas Figuras 5.9 e 5.10 usamos a velocidade obtida pelo método no dado contaminado e coletamos as amostras no dado original. Como o modelo de velocidade na região ao redor de 3875 m e também ao redor de 7875 m são bem suaves os eventos estão todos bem ajustados. Ou seja, o dado em todo seu domínio foi ajustado corretamente e sem estiramento e as forte amplitudes no fim da seção são devidas às reflexões pós-críticas. No entanto, para o conjunto de dados referentes ao centro do modelo de velocidade, não é possível o ajuste para longos afastamentos do sobretempo. Por isso, usamos os parâmetros de multicobertura globais para criarmos os dados do CRP mostrado na Figura 5.11. Nesse experimento atualizamos a velocidade OCO e a declividade a cada cem metros de meio-afastamento. Ou seja, para cada amostra na seção CO seus valores de velocidade OCO e declividade estão em função do meio-afastamento h e parâmetros iniciais τ_h e ξ_h . Podemos observar na Figura 5.11 que usando a estratégia de multicobertura global os eventos foram bem ajustados para longos afastamentos.

O painel de coerência ilustrado na Figura 5.12 foi criado a partir do seguinte processo: Depois da aplicação do processo da busca dos parâmetros da declividade e velocidade OCO, obtemos um painel de Semblance referente ao tempo e ponto médio. Daí, normalizamos a Semblance em cada traço e aplicamos a equação (4.11), na qual usamos os valores obtido para declividade em cada amostra temporal e $m_+ = 1$. A partir desse painel de coerência criamos a velocidade suavizada, Figura 5.13, construída através do seguinte processo: recolhemos cada amostra de velocidade no ponto onde a coerência foi maior que 0,85 e assumimos que o valor da velocidade do topo do modelo seja de 1,5 km/s e na base do modelo seja de 3 km/s. Fazemos uma interpolação cúbica dos dados e obtemos um modelo inicial de velocidade. Esse modelo usamos como critério de seleção de quais velocidade OCO aceitamos para o novo modelo de velocidade. Preservamos valores da velocidade OCO que estiverem entre cinco por cento para cima ou cinco por cento para baixo do valor dessa interpolação e caso contrário mantemos o valor do modelo interpolado. Esse novo modelo de velocidade suavizamos através de um filtro integral de valor médio. A suavização da velocidade OCO é justificada pelo fato de aplicarmos a transformação (3.129) e para isso necessitamos de um modelo de velocidade suave.

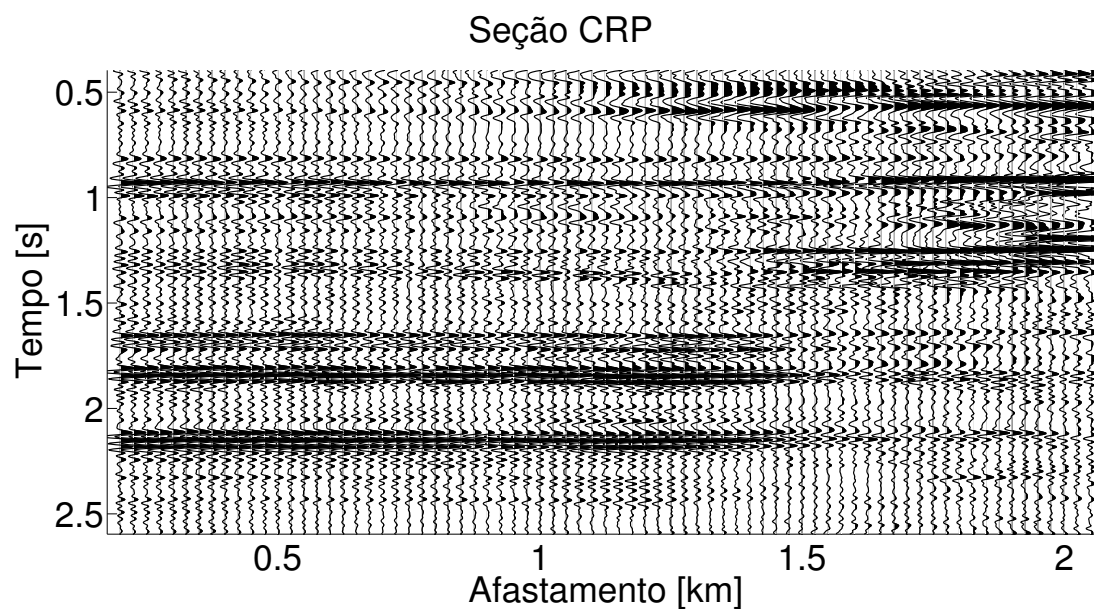


Figura 5.9: *Seção CRP partindo do meio afastamento mínimo e ponto médio em 3875 m.*

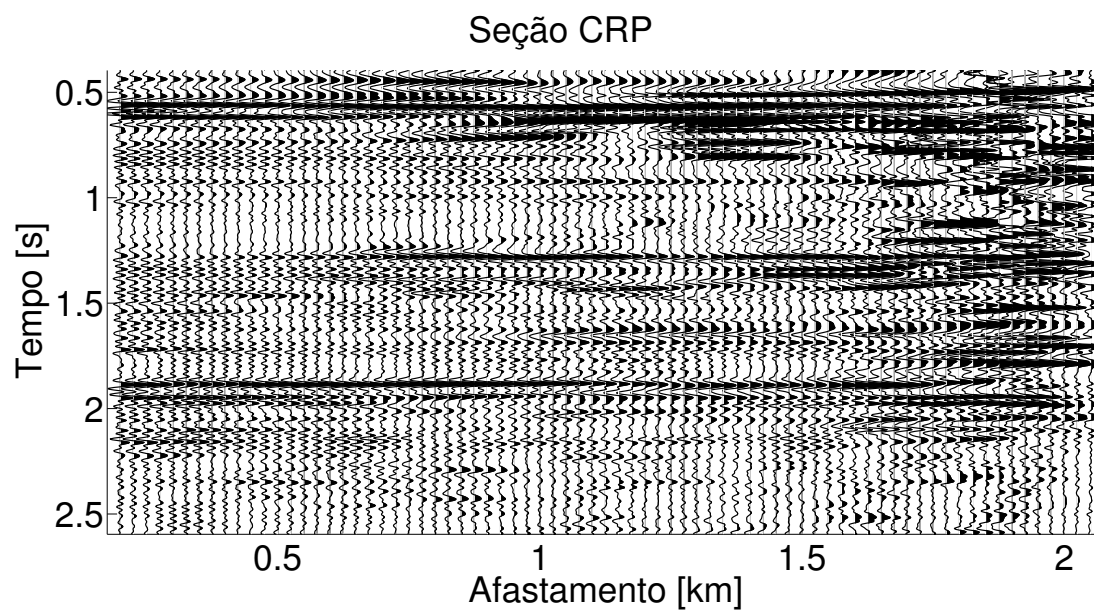


Figura 5.10: *Seção CRP partindo do meio afastamento mínimo e ponto médio em 7875 m.*

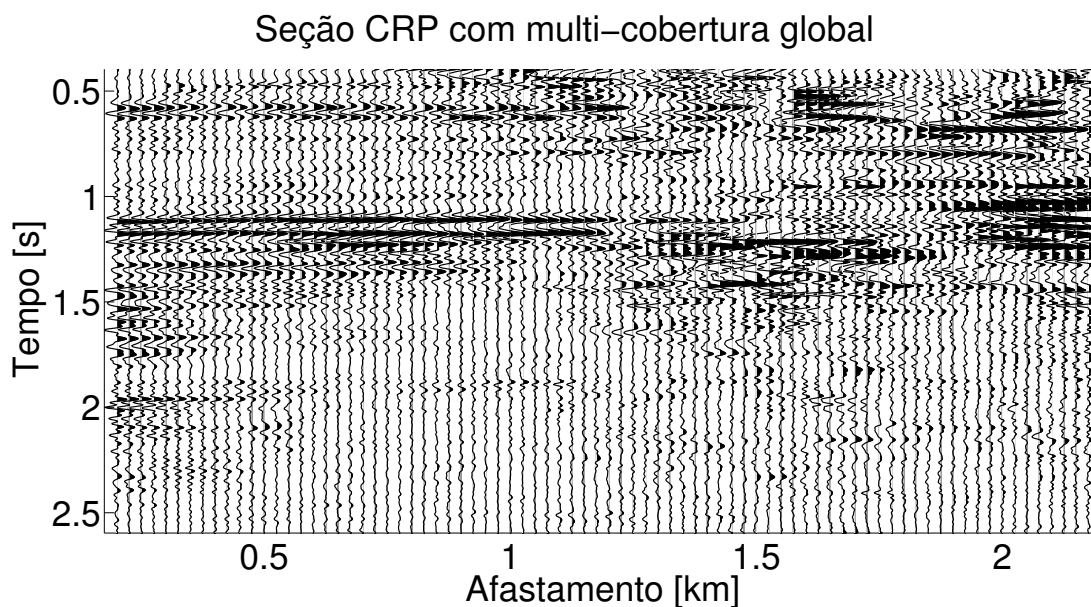


Figura 5.11: *Seção CRP partindo do meio afastamento zero e ponto médio em 5875 m usando os parâmetros de cobertura global.*

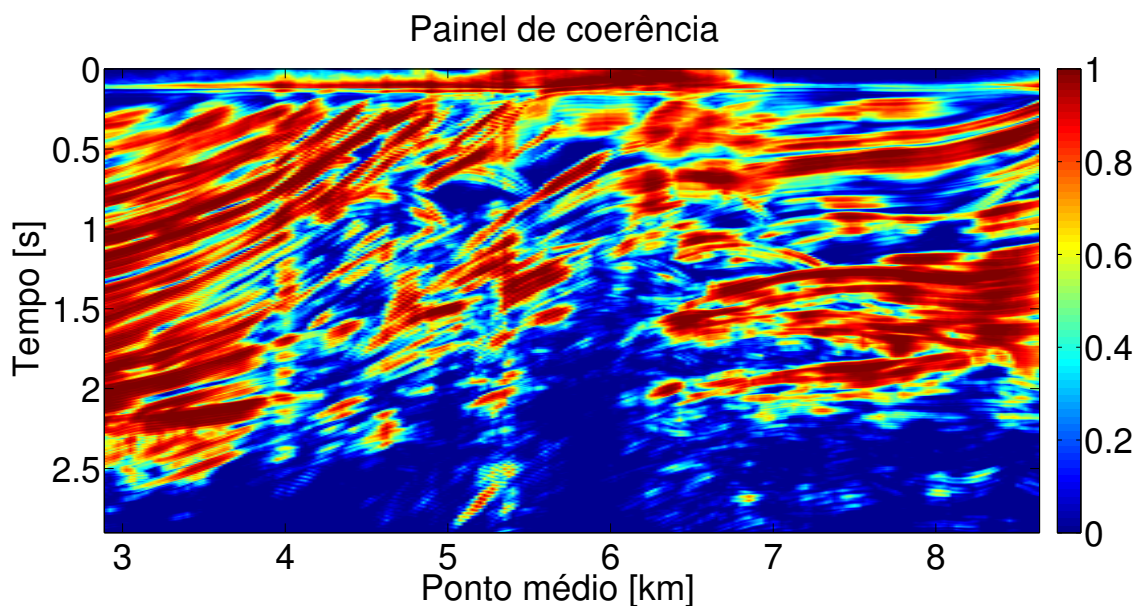


Figura 5.12: *Painel de coerência obtido através da Semblance.*

Aplicamos essa transformação por causa de não termos a seção ZO do conjunto de dados que formam o Marmousi.

A velocidade suavizada obtida pela processo anterior foi usada para construirmos os dados que são apresentados nas Figuras 5.14 e 5.15. O dado apresentado na Figura 5.14 pode ser usado para

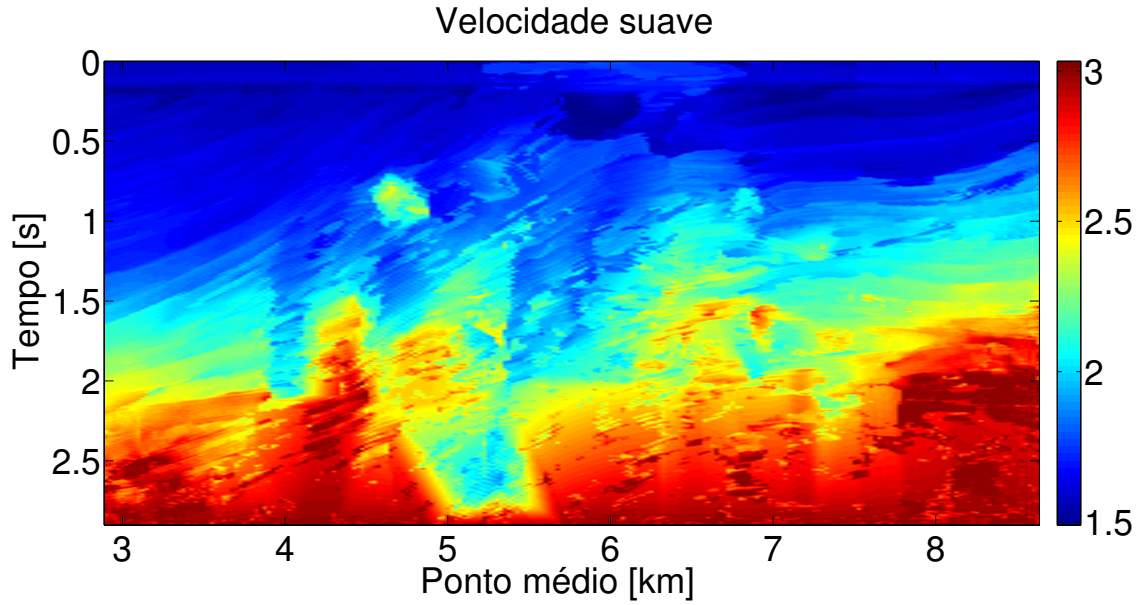


Figura 5.13: *Velocidade em km/s construída baseada na velocidade usando informações da coerência.*

representar a seção de afastamento nulo. O caso de aplicarmos a técnica de transformação de configuração foi apenas uma questão prática de não ter que processar toda a informação de velocidade para o afastamento nulo.

Para fins de comparação, construímos a Figura 5.16 usando o empilhamento CRS do *Wave Inversion Technology consortium* - (WIT) baseado na estratégia dada por Jäger et al. (2001). Em resumo, a estratégia dada por eles se baseia em calcular independente os valores da velocidade NMO e da declividade e usar esses resultados como dados iniciais para um critério de busca local para os três parâmetros que forma o superfície que representa o CRS. Devido ao fato dessa abordagem usar como entrada a velocidade NMO extraída da técnica CMP, que é de baixa amostragem, e a busca da declividade inicial é feita no painel ZO empilhado pela técnica CMP. Então, a busca no dado contaminado ficou prejudicada, em comparação com a OCO, e tivemos que usar o dado com ruído de cinco por cento para aplicação da busca dos parâmetros do CRS. Para empilharmos com o CRS usamos o mesmo dado contaminado usado para o OCT. As aberturas de busca para o CRS foram de

$$\begin{aligned} \text{diam}([t_{(-)}, t_{(+)}]) &= 0,040 \text{ s}, \\ \text{diam}([\xi_{(-)}, \xi_{(+)}]) &= 400 \text{ m}, \\ \text{diam}([h_{(-)}, h_{(+)}]) &= 1000 \text{ m}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $h_{(-)} = 100 \text{ m}$. Para o empilhamento $\text{diam}[h_m, h_M] = 200 \text{ m}$ foi usado na abertura de meio-afastamento com $h_m = h_{(-)}$. As Figuras 5.17 e 5.18 representam a velocidade NMO e a declividade na ZO usado para o empilhamento, respectivamente. Omitimos a informação que representa a curvatura da onda Normal por não ser representativa para o nosso contexto. Podemos observar que a velocidade NMO obtida pelo CRS é bem similar a velocidade OCO para OCT, mas a declividade obtida pelo CRS tem variação de valores muito rápida e comparação com a declividade obtida pela

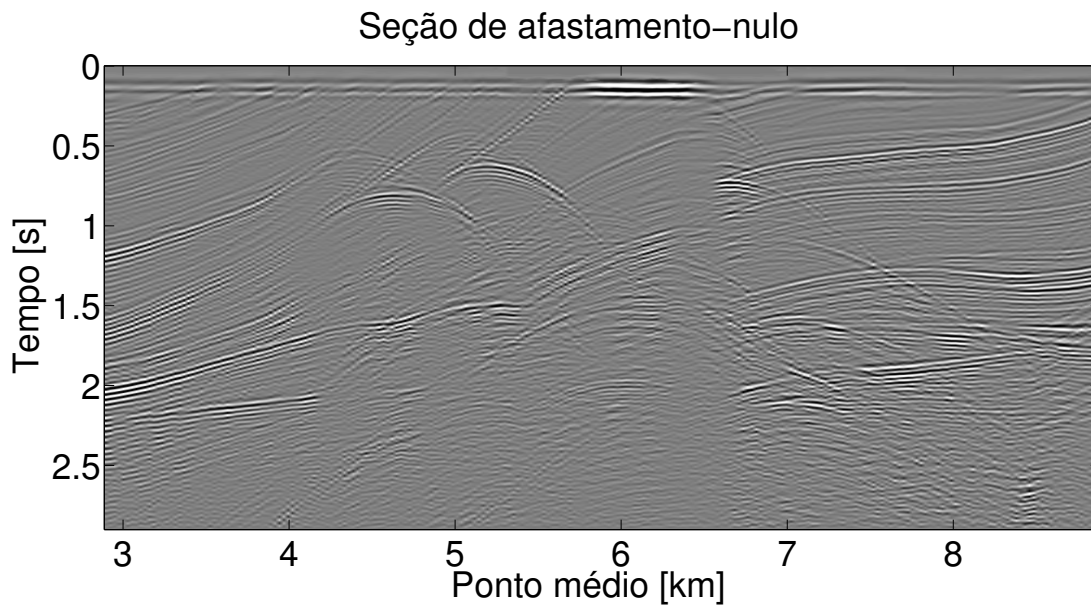


Figura 5.14: *Pseudo seção de afastamento nulo construída através da transformação da seção de afastamento mínimo pelo operador MZO/TZO usando a velocidade suavizada.*

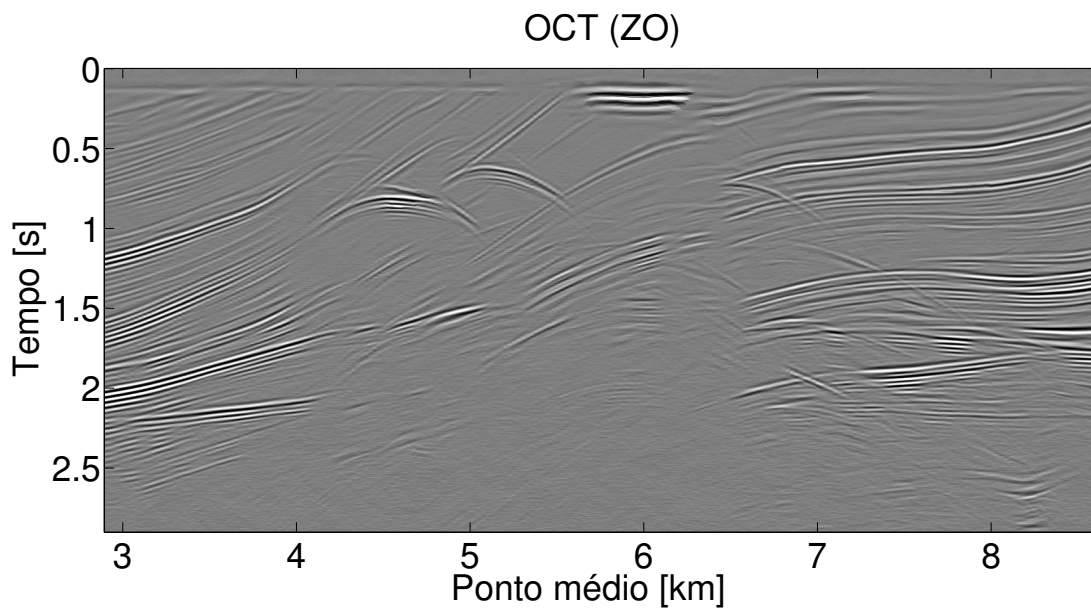


Figura 5.15: *Pseudo seção de afastamento nulo construída usando MZO/TZO sobre o dado empilhado pelo OCT.*

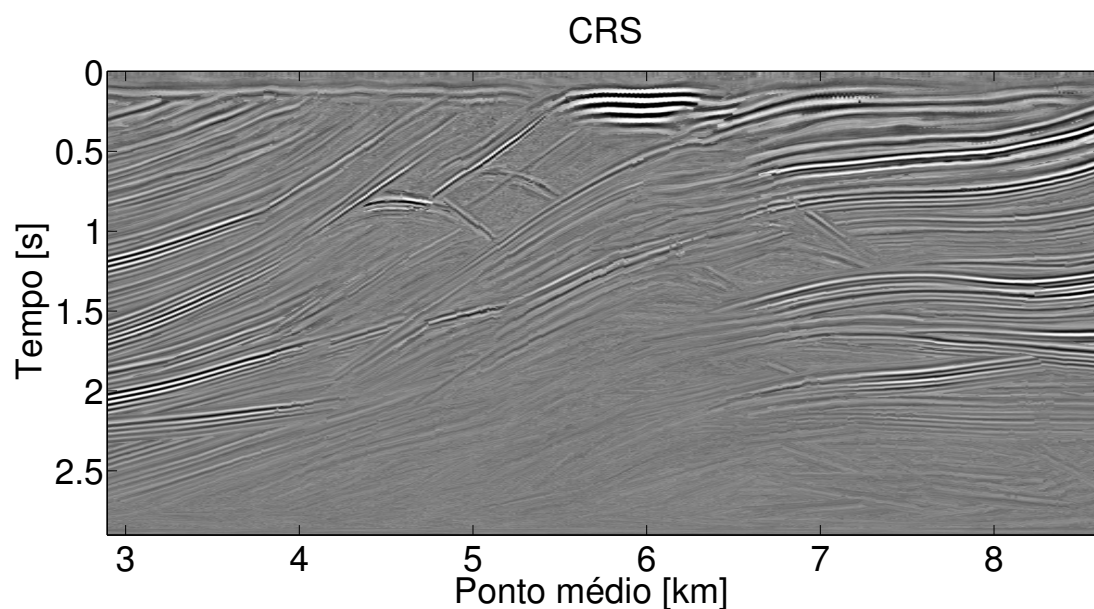


Figura 5.16: *Seção empilhada pelo CRS-2D.*

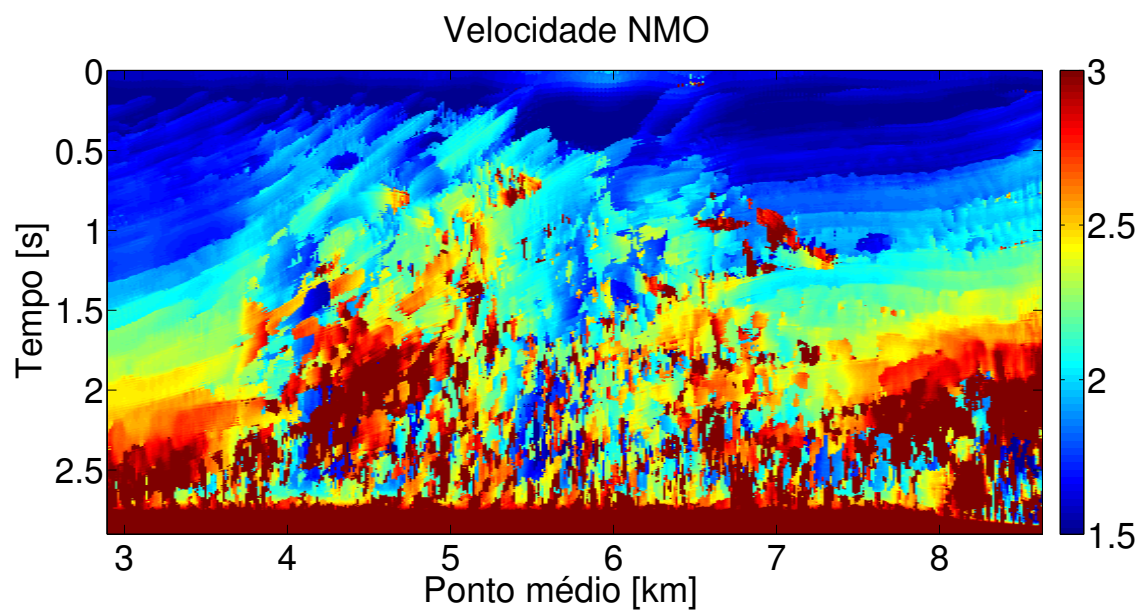


Figura 5.17: *Velocidade NMO em km/s usado pelo CRS.*

trajetória OCO. Podemos observa na Figura 5.16 que o CRS suaviza os eventos e nesse processo cria continuidades não existentes no modelo original e também destrói os eventos mais fracos que estejam em pontos de mergulhos conflitantes.

Usando a pseudo velocidade RMS, que mostramos na Figura 5.19, migramos as seções de afastamento nulo simuladas pela MZO/TZO para critérios de comparação. Na Figura 5.20a mostramos

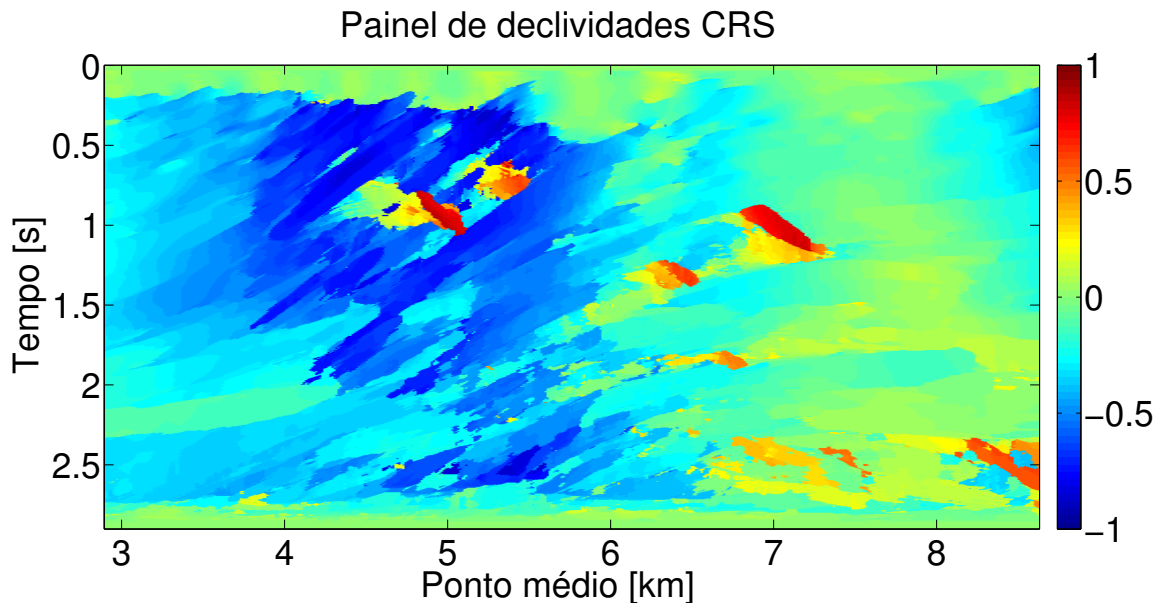


Figura 5.18: *Painel de declividade em s/km usado pelo CRS.*

o painel migrado em tempo da seção. Figura 5.20b o painel migrado em tempo da seção obtida pelo OCT da seção de menor afastamento. Figura 5.20c a seção ZO gerada pelo empilhamento CRS migrada em tempo e 5.20d a geologia do modelo em pseudo tempo. Os dados da Figura 5.20(a)-(c) foram migrados em tempo pela técnica de migração Kirchhoff (Bleistein, 1987) e todas tem a mesma abertura de migração. Na Figura 5.21 destacamos algumas diferenças entre a seção migrada do CRS e seção migrada do OCT onde podemos ver que certas estruturas geológicas foram perdidas pelo empilhamento CRS. Destacamos em vermelho algumas regiões onde o CRS não conseguiu recuperar a informação. Podemos ver que nas regiões menos complexas, devido a larga abertura na direção do ponto médio, o CRS amplificou a amplitude do sinal, mas para essas regiões, também, podemos aumentar a abertura do operador OCT para amplificar o sinal das amplitudes, caso for necessário. Também, podemos observar que um pouco antes do tempo 1,5 s na distância de 5,5 km o CRS, devido a amplificação do sinal, deu um falso valor de amplitude em relação ao dado original que no caso do OCT não houve.

Para mostrar a aplicabilidade em seções de afastamento maiores, aplicamos a busca da velocidade OCO para a seção de afastamento comum com afastamento de novecentos e vinte cinco metros no conjunto de dados contaminadas com ruído. A Figura 5.22 mostra a seção CO referente do dado original enquanto a Figura 5.23 mostra a seção empilhada pelo OCT com a velocidade OCO dada na Figura 5.24. Nessas figuras vemos que houve um ganho da frequência espacial, uma redução significativa do ruído, mas também pequenas perdas nos detalhes das imagens. Além disso, notamos que o painel de velocidade desse afastamento exibe o mesmo comportamento do painel de velocidade para o afastamento mínimo. O painel de declividades dessa seção pode ser visto na Figura 5.25, onde vemos o mesmo padrão dado no painel de declividades para a seção de afastamento mínima. Baseando nesses resultados podemos dizer que o afastamento não afetou a objetividade do método, ou seja, a robustez do método é independente do afastamento.

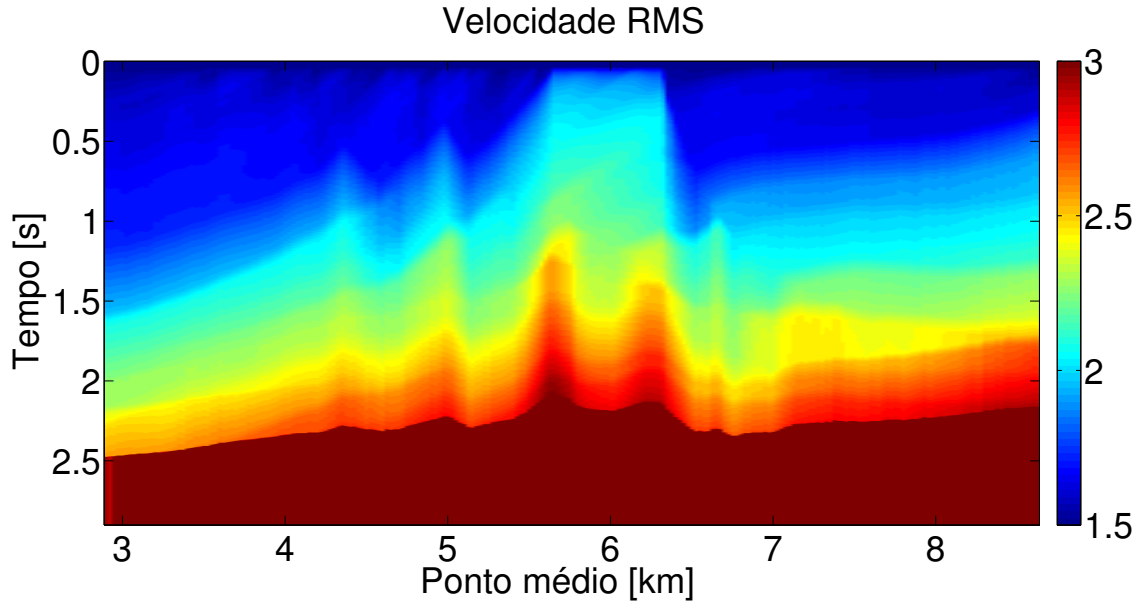


Figura 5.19: *Velocidade RMS em km/s.*

Para extração dos parâmetros cinemáticos para seção de afastamento mínimo, utilizamos (4.4) com as aberturas

$$\begin{aligned} \text{diam}([t_{(-)}, t_{(+)}]) &= 0,040 \text{ s}, \\ \text{diam}([\xi_{(-)}, \xi_{(+)}]) &= 150 \text{ m}, \\ \text{diam}([h_{(-)}, h_{(+)}]) &= 1000 \text{ m}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $h_{(-)} = 462,5 \text{ m}$ e o intervalo de busca para as velocidades OCO foi de $[1, 5; 3] \text{ km/s}$. Para o empilhamento $\text{diam}[h_m, h_M] = 200 \text{ m}$ foi usado na abertura com os meio-afastamento de $h_m = 362,5 \text{ m}$ e $h_M = 462,5 \text{ m}$.

5.3 Bacia do Jequitinhonha

Aplicamos a análise de velocidade por trajetórias OCO para o conjunto de dados reais contaminado propositalmente por ruído coerente. Os dados foram adquiridos em 1985 pela Petrobras em um talude continental na bacia do Jequitinhonha na costa do Brasil ao sudeste do litoral baiano. O objetivo deste teste é mostrar que em dados reais o método é efetivo para tratar de ruídos coerentes, que não satisfaçam a física do processo.

O conjunto de dados do Jequitinhonha, linha sísmica 214-RL-0266, é formado por 1578 tiros a cada 25 m e cada tiro tem 120 receptores onde o afastamento inicial é de 150 m, os tiros e receptores estão espaçados a cada 25 m. Desse conjunto de dados extraímos uma pequena parte para nossa análise, onde adicionamos o seguinte ruído: Dessa pequena parte dos dados se chamamos $P = P(\xi, t, h)$ a função que representa o conjunto de dados extraídos, então nosso dado de entrada para o

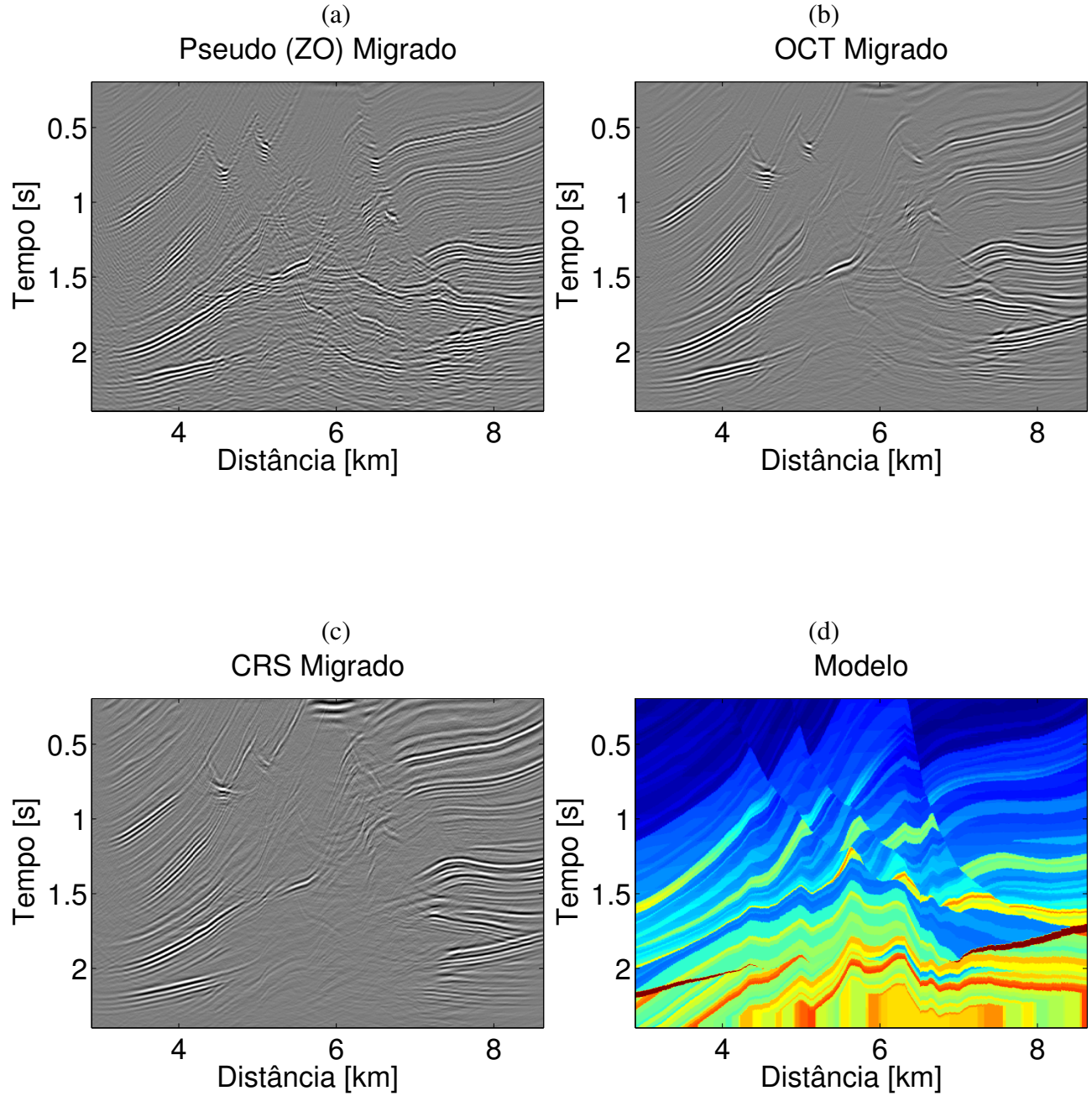


Figura 5.20: Comparações das seções empilhadas migradas em tempo com a velocidade RMS (a), (b) e (c). Modelo de velocidade em pseudo tempo com a escala de cores igual à da Figura 5.2 (d).

processamento foi o seguinte:

$$P_r(\xi, t, h) = P(\xi, t, h) + P(\xi, t_{\max} + t_{\min} - t, h_{\max} + h_{\min} - h), \quad (5.4)$$

onde $t_{\max}$ e $h_{\max}$ são os tempo e afastamento máximos da amostra estudada, respectivamente, e $t_{\min}$ e $h_{\min}$ são os tempo e afastamento mínimos da amostra estudada. Ou seja, nosso ruído é o próprio dado de cabeça para baixo e de trás para frente. Daí, nosso ruído tem coerência em cada seção CO e um

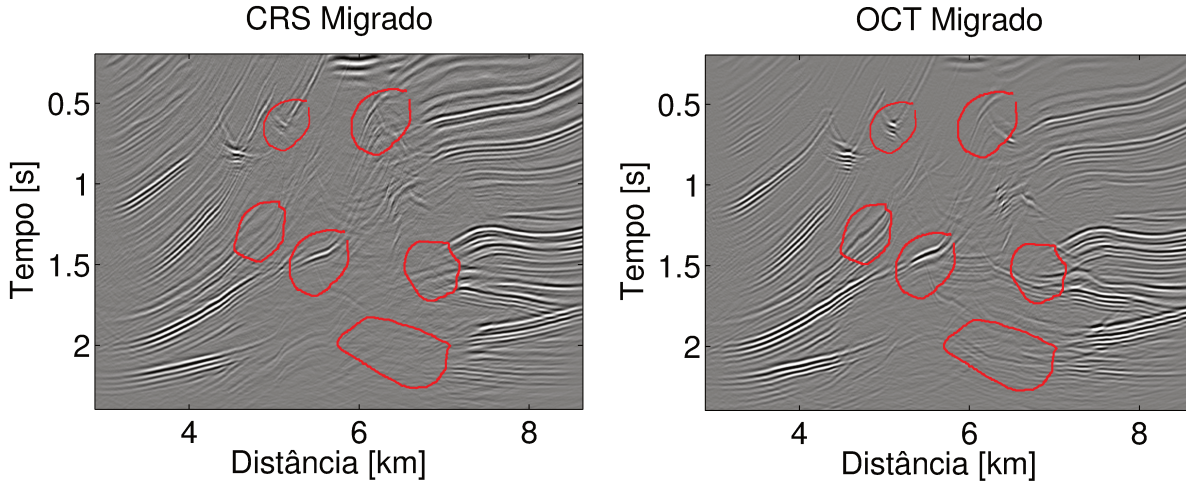


Figura 5.21: Comparações entre os painéis migrados, usando o método CRS (esquerda) e OCT (direita).

sobretempo assintótico falso devido ele partir do maior afastamento para o menor. Lógico, apesar do ruído ser coerente, ele não é físico sendo apenas uma forma barata de se construir um ruído coerente para testarmos a robustez do método de empilhamento OCT. Na Figura 5.26 mostramos a seção CO de afastamento mínimo desse conjunto de dados e na Figura 5.27 mostramos o dado de entrada P_r para o processo de empilhamento, onde vemos facilmente um falso longo refletor atravessado nos tempo entre 1,4 s a 1,8 s e mais alguns outros fenômenos contaminando as falhas geológicas.

Para extração dos parâmetros cinemáticos para seção de afastamento mínimo, utilizamos (4.4) com as aberturas

$$\begin{aligned} \text{diam}([t_{(-)}, t_{(+)}]) &= 0,040 \text{ s}, \\ \text{diam}([\xi_{(-)}, \xi_{(+)}]) &= 150 \text{ m}, \\ \text{diam}([h_{(-)}, h_{(+)}]) &= 1000 \text{ m}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $h_{(-)} = 75 \text{ m}$ e o intervalo de busca para as velocidades OCO foi de $[1,49; 2] \text{ km/s}$. Não foi aplicado nenhum algoritmo de otimização. A Figura 5.29 mostra as informação de velocidade OCO obtida desse processo, onde podemos observar que a velocidade apresentou suavidade exceto nas regiões com as fraturas geológicas. Após obter os valores de velocidade OCO fizemos a seguinte mudança: nas amostras que tem o tempo menor do que 1,5 s se o valor da velocidade fosse maior que 1,7 km/s substituímos por 1,5 km/s. Por fim, o modelo ilustrado pela Figura 5.29 representa a velocidade OCO usada para o empilhamento.

Nesse dado fizemos o empilhamento OCT um pouco diferente da fórmula (4.12). Em vez de usarmos o valor da raiz para cada amostra, observamos que sobre os eventos de reflexão esse valor era muito próximo de 0,2 km/s. Então, para evitar o custo computacional de computar esse valor para todos os pontos, usamos o mesmo valor para todo o dado. Heuristicamente, podemos associar o valor dessa raiz com a zona de Fresnel. Como não exploramos a afirmação dessa informação

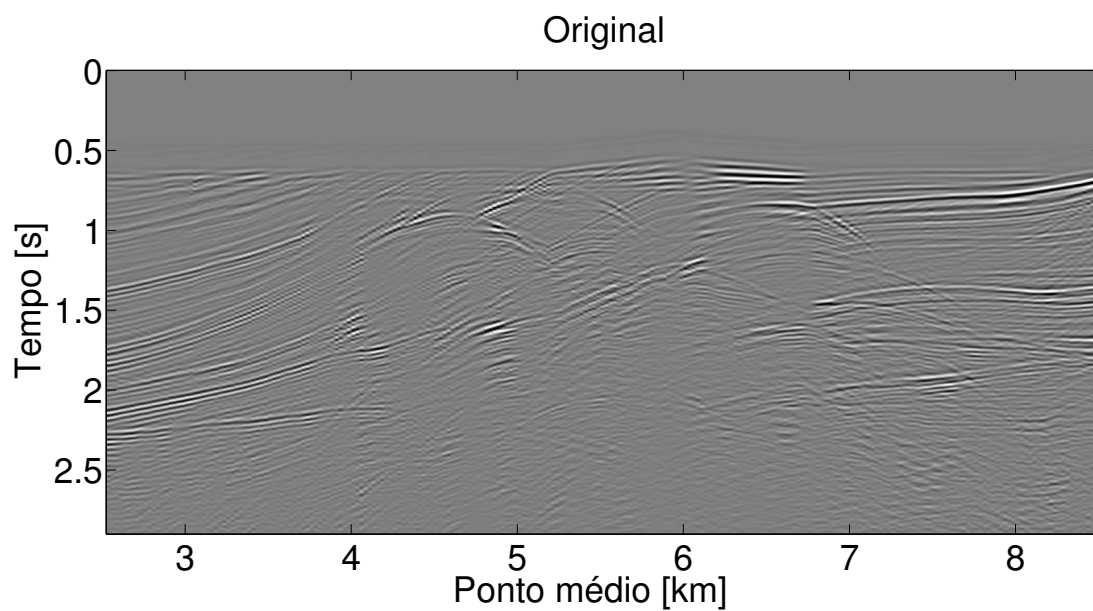


Figura 5.22: Seção de afastamento comum com afastamento de 925 m do conjunto de dados original.

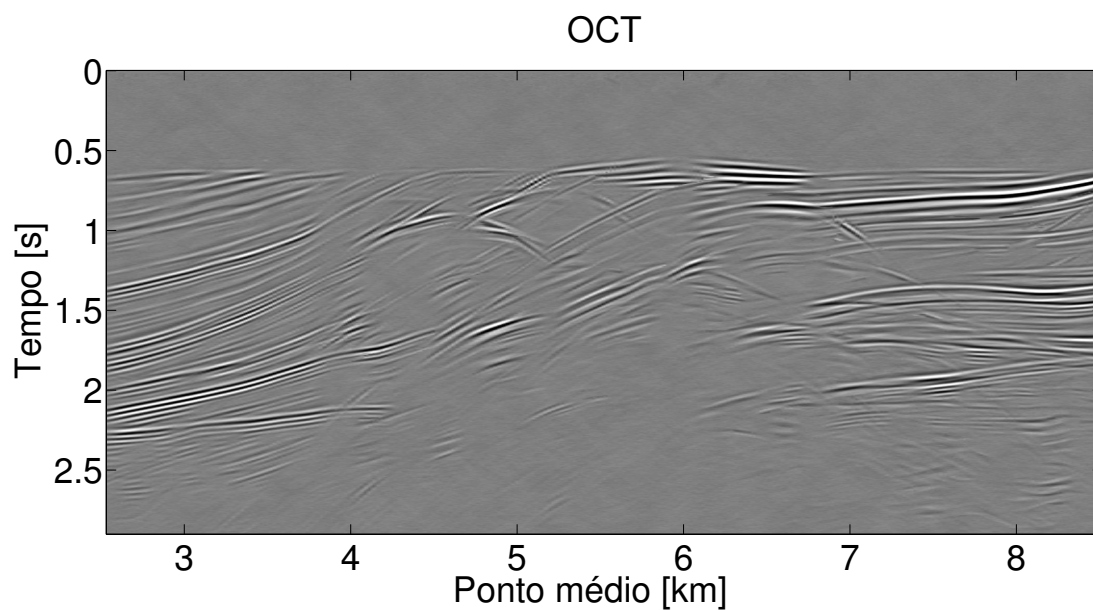


Figura 5.23: Seção de afastamento comum com afastamento de 925 m Empilhada pelo OCT.

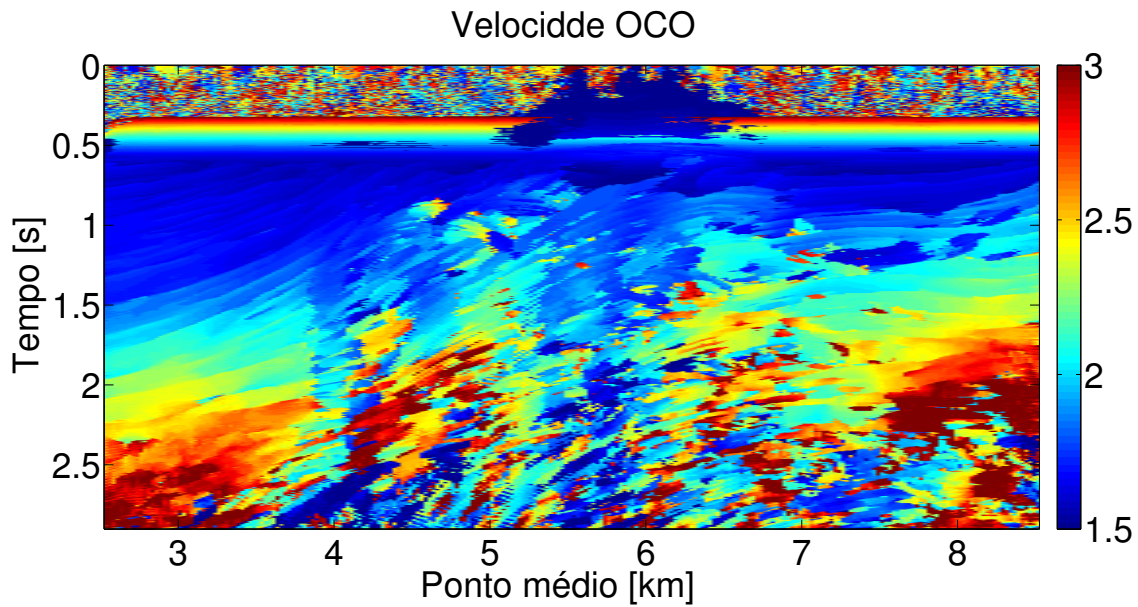


Figura 5.24: *Modelo de velocidade OCO em km/s para o afastamento de 925 m.*

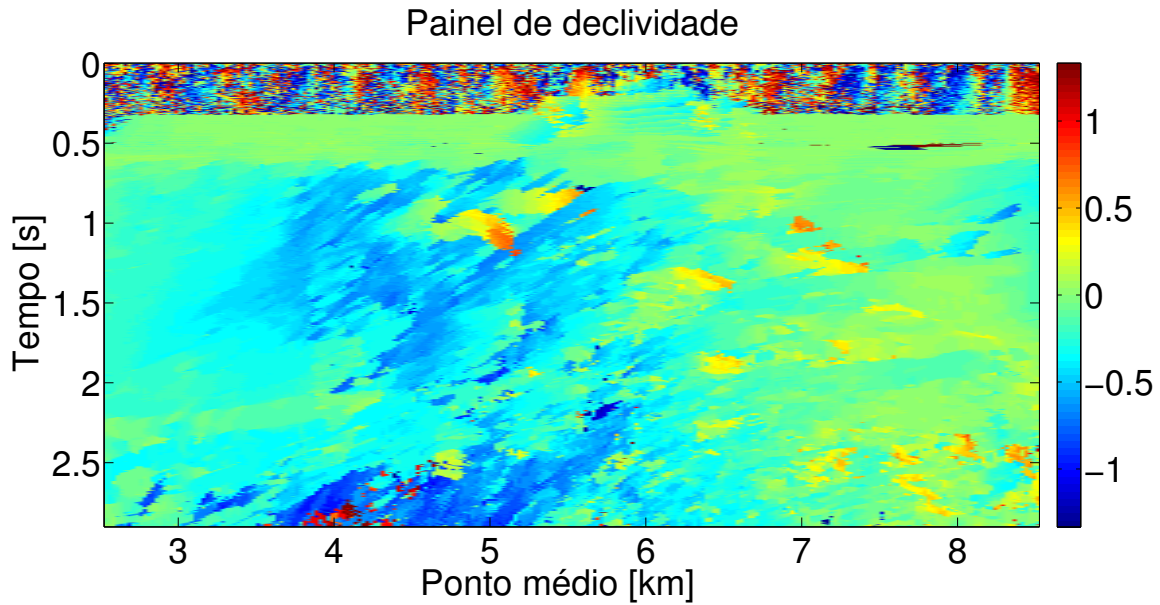


Figura 5.25: *Painel de declividades em s/km para o afastamento de 925 m.*

nessa tese, então usamos apenas o empirismo numérico para evitar o cálculo das raízes na equação (4.12) para cada amostra. Portanto, para esse modelo usamos o método OCT com essa variação, onde apenas executamos as integrais para cada amostra e no fim dividimos toda a seção empilhada por uma constante. A abertura para o empilhamento desse conjunto de dados foi de $\text{diam}[h_m, h_M] = 250$ m com o meio-afastamento inicial $h_m = h_{(-)}$. Podemos observar dessas figuras que a remoção do

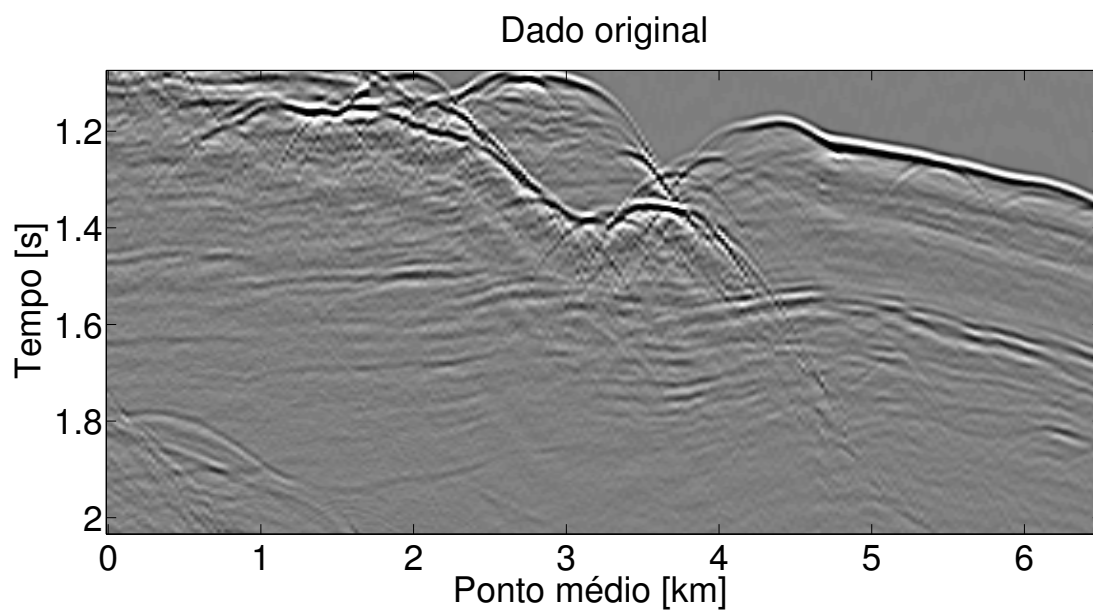


Figura 5.26: *Seção de afastamento mínimo onde o afastamento mínimo é de 150 m.*

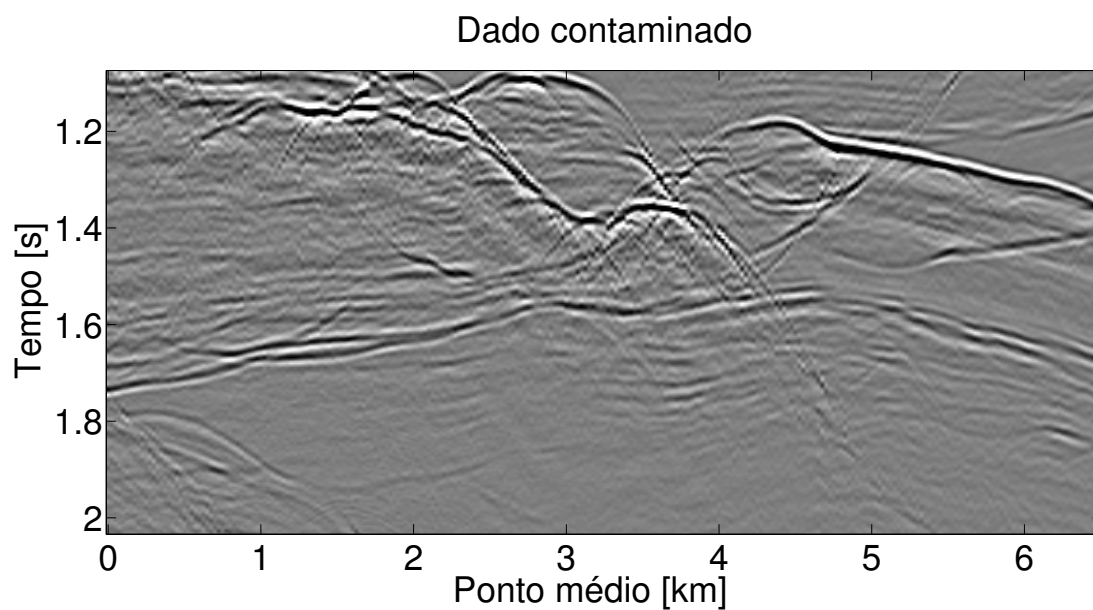


Figura 5.27: *Dado contaminado com ruído coerente.*

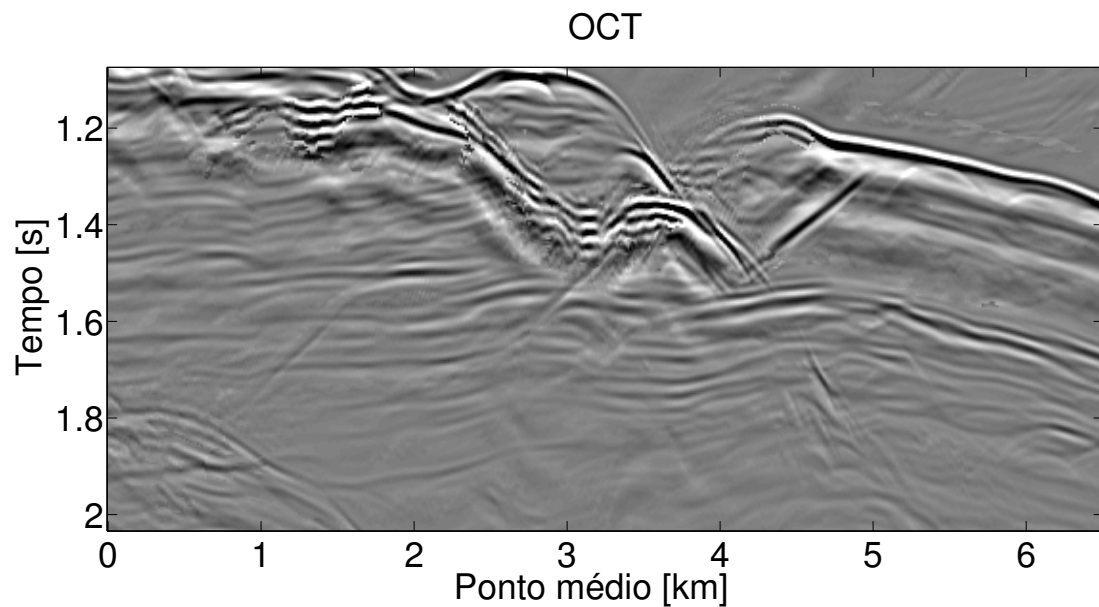


Figura 5.28: *Dado contaminado empilhado pelo OCT.*

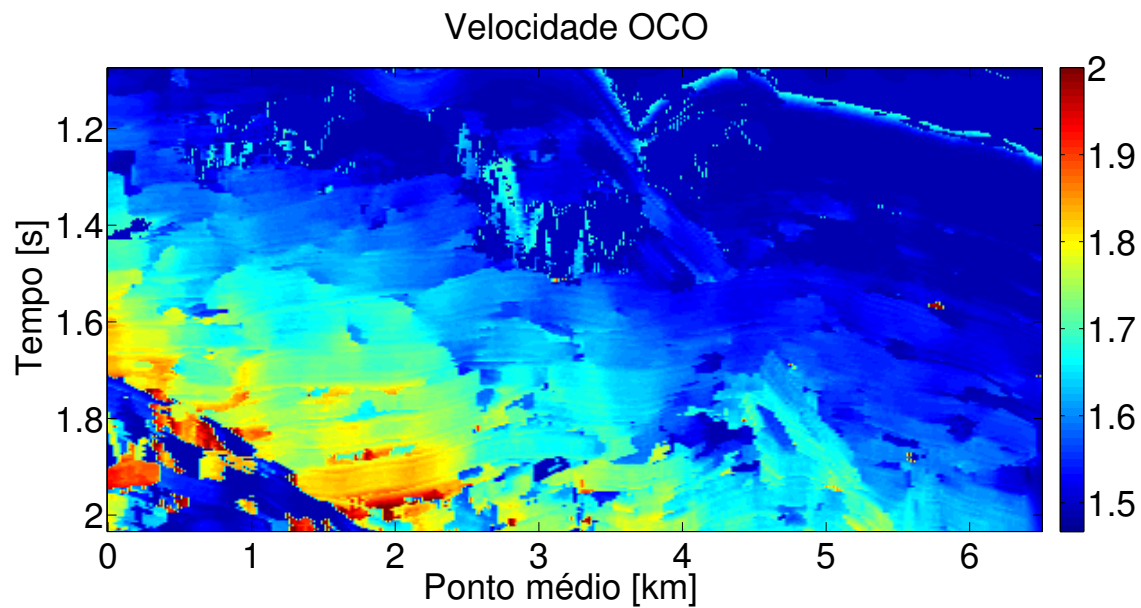


Figura 5.29: *Velocidade OCO em km/s para o afastamento mínimo.*

evento coerente foi bem satisfatória exceto no evento com mergulho em 4, 5 km.

Um outro fenômeno observado na aplicação do método OCT foi o ganho de baixa frequência como visto na Figura 5.30. As frequências baixas tiveram aumento de suas amplitudes, mas não tivemos como inferir alguma explicação física desse ganho abrupto de baixa frequência.

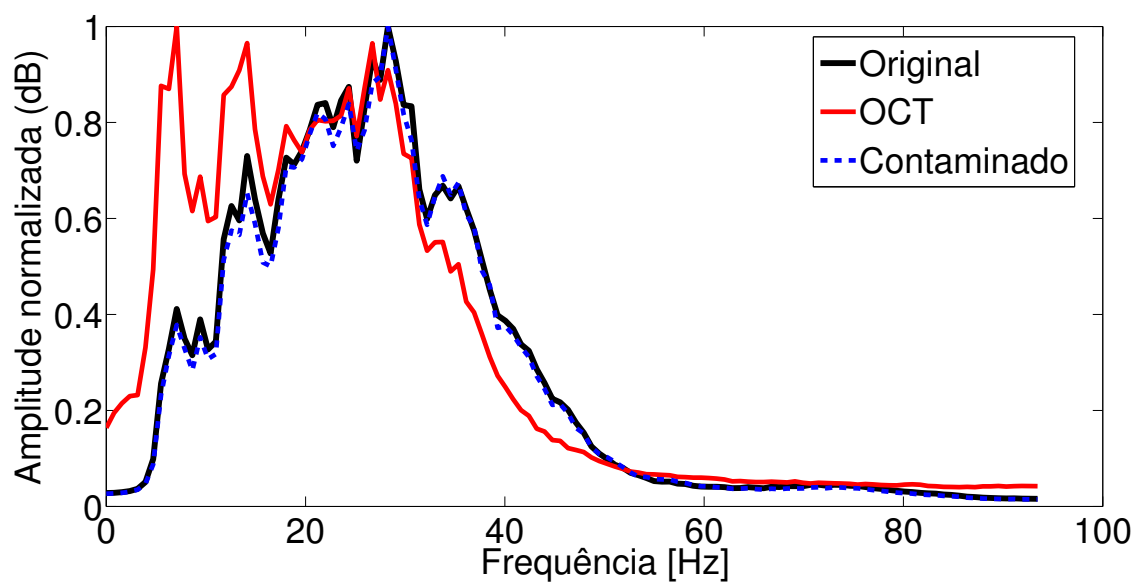


Figura 5.30: Frequência normalizada da seção de afastamento mínimo para o dado original (preto), o dado contaminado (azul) e o dado empilhado (vermelho).

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foram apresentados novos conceitos e metodologias para criação de uma ferramenta para análise de velocidade, reconstrução de dados e o empilhamento multi-paramétrico. Essas novas ferramentas são baseadas no que chamamos de operação para continuação do afastamento (OCO). A filosofia na qual se baseia a OCO é a transformação de configuração, que, para esse caso, é a transformação das seções de afastamento comum (CO).

Através da solução da integral de Kirchhoff para meios 2.5D e a teoria dos raios, desenvolvemos um operador diferencial parcial de segunda ordem que, no regime de alta frequência, transforma corretamente a cinemática e a dinâmica de uma seção de afastamento comum em uma outra seção de afastamento comum. Estudamos analiticamente o comportamento cinemático e dinâmico desse operador diferencial. O estudo do comportamento cinemático nos forneceu técnicas para construção de um método de empilhamento multi-paramétrico que empilha superfícies que seguem a trajetória CRP. Chamamos a técnica de empilhamento aqui desenvolvida de empilhamento OCT e esta técnica mostrou-se eficiente no critério de remoção do ruído, além de preservar os mergulhos conflitantes. É importante salientar que operadores diferenciais que são transformações de configurações e que corrigem o fator de espalhamento geométrico independente da forma do refletor são novos na literatura.

Informações sobre extração de declividades em qualquer seção sísmica foram obtidas por esse estudo e a criação de técnicas de empilhamento que preservam as propriedades do sinal original sem a criação de artefatos ou continuidades não existentes no evento devido ao empilhamento foram desenvolvidas nesta tese.

Integramos as características da equação diferencial OCO (Hubral et al., 1996) e extraímos a solução das trajetórias OCO (Coimbra et al., 2012) que no meio homogêneo são as trajetórias CRP. Apresentamos o conceito de meios localmente homogêneos, o que auxilia em que ordem podemos associar em meios não homogêneos as trajetórias OCO com as trajetórias CRP.

Da equação diferencial para OCO obtemos outra equação diferencial parcial de segunda ordem. Esta atua como uma transformação de configuração sísmica que transforma seções de tiro comum adquiridas em campo em outras seções de tiro comum com a informação de espalhamento geométrico corrigida.

Da teoria aqui desenvolvida para análise de velocidade, obtivemos um tipo de velocidade média que foi chamada de velocidade OCO, a qual se apresentou como a velocidade que melhor ajusta a trajetória OCO sobre a trajetória CRP. Para o caso ZO, a velocidade OCO é uma combinação da declividade com a teórica velocidade NMO. Da obtenção de parâmetros para o empilhamento

OCT desenvolvemos um conceito de atributo de multicobertura. Esses atributos de multicobertura são parâmetros que podem assumir valores em cada parte do dado e não serem fixos ao longo dos sobretempos, assim melhorando a extração e empilhamento dos dados.

No Capítulo 5, vimos, através de experimentos numéricos em dois modelos sintéticos e um modelo real, que o OCT pode ser usado em meios complexos com ruídos aleatórios ou ruídos coerentes, mas não físicos. A técnica de extração de declividades pelas trajetórias OCO também mostrou-se eficiente em relação a extração de forma manual da declividade em uma seção CMP. Migramos em tempo após aplicar o empilhamento OCT e observamos que os dados de interesse continuavam preservados mesmo em meios complexos.

Por fim, podemos usar as trajetórias OCO para regularização dos dados pois, empilhando sobre elas, com os ajustes propostos aqui, teremos melhores amostragens dos dados, implicando em melhor qualidade no imageamento. Como consequência, facilitamos técnicas de análise de velocidade em profundidade a obter melhores resultados.

De fato, o objetivo final de um processamento sísmico é obter um modelo elástico do interior da terra. No entanto, nesta tese, para simplificações matemáticas, assumimos que a terra é composta apenas por parâmetros acústicos e, neste caso, tratamos como um fluido. Todavia, se assumimos que os métodos desenvolvidos para o caso acústico podem ser usados como uma aproximação para as *ondas compressionais* ou *ondas cisalhantes* trabalhadas de forma independente em um meio elástico, então devido as transformações de configurações podemos extrair parâmetros que correlacionados com as informações obtidas de cada *auto-onda* em seu correspondente auto-espço, teremos como inferir em assuntos como *birrefringência* da onda cisalhante observada na seção sísmica devido a *anisotropia do meio*, isto é, a velocidade de propagação da onda depende da direção de propagação. Os físicos de rocha acreditam que tais observações podem determinar a orientação das fraturas na subsuperfície, e este conhecimento é de grande ajuda para os engenheiros de petróleo em avaliar a permeabilidade do reservatório. No entanto, os assuntos referentes a propagação de ondas elásticas estão além do escopo desta tese, apesar da possível aplicação das técnicas que foram apresentadas aqui. Tais interpretações para os meios elásticos poderão ser apresentadas em trabalhos futuros.

Outros assuntos para pesquisas futuras usando a teoria desenvolvida nesta tese são: Tomografia OCO, outras interpretações para a velocidade OCO em função do afastamento, extração da curvatura da superfície do tempo de trânsito mediante um terceiro parâmetro para o empilhamento e detecção/análise de difrações usando a declividade e velocidade OCO em cada seção de afastamento comum.

Referências Bibliográficas

- Al-Yahya, K. (1989). Velocity analysis by iterative profile migration. *Geophysics*, 54:718–729.
- Alkhalifah, T. e Tsvankin, I. (1995). Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, 60:1550–1566.
- Bagaini, C. e Spagnolini, U. (1993). *Common-shot velocity analysis by shot continuation operators*, páginas 673–676. 63rd Annual International Meeting. SEG, Expanded Abstracts.
- Bagaini, C. e Spagnolini, U. (1996). 2D continuation operators and their applications. *Geophysics*, 61:1846–1858.
- Bagaini, C., Spagnolini, U., e Paziienza, V. P. (1994). *Velocity analysis and missing offset restoration by prestack continuation operators*, páginas 1549–1552. 64th Annual International Meeting. SEG, Expanded Abstracts.
- Beylkin, G. (1995). Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized radon transform. *Journal of Mathematical Physics*, 26:99–108.
- Biondi, B., Fomel, S., e Chemingui, N. (1998). Azimuth moveout for 3-D prestack imaging. *Geophysics*, 63:574–588.
- Black, J. L., Schleicher, K. L., e Zhang, L. (1993). True-amplitude imaging and dip moveout. *Geophysics*, 58(1):47–66.
- Bleistein, N. (1984). *Mathematical methods for wave phenomena*. Academic Press, Inc.
- Bleistein, N. (1986). Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation. *Geophysical Prospecting*, 34:686–703.
- Bleistein, N. (1987). On the imaging of reflectors in the earth. *Geophysics*, 52(7):931–942.
- Bleistein, N. e Cohen, J. (1995). The effect of curvature on true-amplitude DMO: Proof of concept. *Research Note, Center of Wave Phenomena*, CWP-193.
- Bleistein, N., Cohen, J. K., e Jaramillo, H. (1999). True-amplitude transformation to zero offset of data from curved reflectors. *Geophysics*, 64(1):112–129.
- Bleistein, N. e Handelsman, R. A. (1986). *Asymptotic Expansions of Integrals*. The advanced book program. Dove publications, Inc.

- Bolondi, G., Loinger, E., e Rocca, F. (1982). Offset continuation of seismic sections. *Geophysical Prospecting*, 30:813–828.
- Bolondi, G., Loinger, E., e Rocca, F. (1984). Offset continuation in theory and practice. *Geophysical Prospecting*, 32:1045–1073.
- Born, M. e Wolf, E. (1999). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press.
- Bortfeld, R. (1989). Geometrical ray theory: Rays and traveltimes in seismic systems (second-order approximations of the traveltimes). *Geophysics*, 54(3):342–349.
- Byun, B. S., editor (1990). *Velocity analysis on multichannel seismic data*. Society Exploration of Geophysicists.
- Canning, A. e Gardner, G. H. F. (1996). Regularizing 3D data sets with DMO. *Geophysics*, 61:1101–1114.
- Castagna, J. P. e Backus, M. M., editores (1999). *Offset-Dependent Reflectivity - Theory and Practice of AVO Analysis*, volume 8 de *Investigations in Geophysical Series*. Society Exploration of Geophysicists.
- Castle, R. (1994). A theory of normal moveout. *Geophysics*, 59:983–999.
- Causse, E., Hangen, G. U., e Rommel, B. (2000). Large-offset approximation to seismic reflection traveltimes. *Geophysical Prospecting*, 48:763–778.
- Červený, V. (2001). *Seismic ray theory*. Cambridge University Press.
- Coimbra, T. A., Novais, A., e Schleicher, J. (2012). Offset continuation (OCO) ray tracing using OCO trajectories. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 56(1):65–82.
- Coimbra, T. A., Novais, A., e Schleicher, J. (2013a). *Offset-continuation trajectory stack*, páginas 4256–4261. 83rd Annual International Meeting. SEG, Expanded Abstracts.
- Coimbra, T. A., Novais, A., e Schleicher, J. (2013b). *Stacking on OCO Trajectories*, páginas 1–4. 75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2013. EAGE, Expanded Abstracts.
- Collins, C. L. (1997). Imaging in 3D DMO; Part I: Geometrical optics model; Part II: Amplitude effects. *Geophysics*, 62:211–244.
- Courant, R. e Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics*, volume II. Wiley-Interscience.
- de Bazelaire, E. (1988). Normal moveout correction revisited: inhomogeneous media and curved interfaces. *Geophysics*, 53:143–157.
- Deregowski, S. M. e Rocca, F. (1981). Geometrical optics and wave theory of constant offset sections in layered media. *Geophysical Prospecting*, 29:374–406.

- do Carmo, M. P. (2006). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.
- Fomel, S. (1997). Amplitude preserving offset continuation in theory Part 2: Solving the equation. *Stanford Exploration Project*, 89:111–134.
- Fomel, S. (2003a). Asymptotic pseudounitary stacking operators. *Geophysics*, 68(3):1032–1042.
- Fomel, S. (2003b). Theory of differential offset continuation. *Geophysics*, 68(2):718–732.
- Fomel, S. (2003c). Velocity continuation and the anatomy of residual prestack time migration. *Geophysics*, 68(5):1650–1661.
- Fomel, S. e Bleistein, N. (1996). Amplitude-preveservation for offset continuation: Confirmation for Kirchhoff data. *Center of Wave Phenomena*, CWP-197.
- Fomel, S. B. (1994). Kinematically equivalent differential operator for offset continuation of seismic sections. *Russian Geology and Geophysics*, 35(9):122–134.
- Fröman, N. e Fröman, P. O. (1965). *JWKB Approximation - Contributions to the Theory*, volume 1. NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY.
- Gelchinsky, B., Berkovitch, A., e Keydar, S. (1999a). Multifocusing homeomorphic imaging - Part 1. Basic concepts and formulas. *Journal of Applied Geophysics*, 42:229–242.
- Gelchinsky, B., Berkovitch, A., e Keydar, S. (1999b). Multifocusing homeomorphic imaging - Part 2. Multifold data set and multifocusing. *Journal of Applied Geophysics*, 42:243–260.
- Goldin, S. V. (1985). Integral continuations of wave fields. *Russian Geology and Geophysics*, 26:95–104.
- Goldin, S. V. (1990). A geometric approach to seismic processing: The method of discontinuities. *Stanford Exploration Project*, 67:171–210.
- Goldin, S. V. e Fomel, S. B. (1995). Estimation of reflection coefficient in DMO. *Russian Geology and Geophysics*, 36:103–115.
- Goodman, J. W. (1968). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York.
- Gurevich, B., Keydar, S., e Landa, E. (2002). Multifocusing imaging over an irregular topography. *Geophysics*, 67:639–643.
- Hale, D. (1984). Dip-moveout by Fourier transform. *Geophysics*, 49:741–757.
- Herrmann, R. (2011). *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

- Hill, S. J., Stolt, R., e Chiu, S. (2001). Altering offsets and azimuths. *The Leading Edge*, 20(1):210–213.
- Höcht, G., de Bazelaire, E., Majer, P., e Hubral, P. (1999). Seismics and Optics: hyperbolae and curvatures. *Journal of Applied Geophysics*, 42:261–281.
- Höcht, G., Ricarte, P., Bergler, S., e Landa, E. (2009). Operator-oriented CRS interpolation. *Geophysical Prospecting*, 57:957–979.
- Hubral, P. e Krey, T. (1980). *Interval velocities from seismic reflection time measurements*. Society of Exploration Geophysicists.
- Hubral, P., Schleicher, J., e Tygel, M. (1992). Three-dimensional paraxial ray properties. Part I: Applications. *Journal of Seismic Exploration*, 1:265–362.
- Hubral, P., Tygel, M., e Schleicher, J. (1996). Seismic Image Waves. *Geophysical Journal International*, 125(2):431–442.
- Jäger, R., Mann, J., Höcht, G., e Hubral, P. (2001). Common-reflection-surface stack: Image and attributes. *Geophysics*, 66:97–109.
- John, F. (1981). *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag.
- Klein, M. V. e Furtak, T. E. (1986). *Optics*. John Wiley & Sons, New York.
- Landa, E., Gurevich, B., Keydar, S., e Trachtman, P. (1999). Application of multifocusing method for subsurface imaging. *Journal of Applied Geophysics*, 42:283–300.
- Lax, P. D. (2006). *Hyperbolic partial differential equations*, volume 14 de *Courant lecture notes in Mathematics*. American Mathematical Society.
- Liu, Z. e Bleistein, N. (1995). Migration velocity analysis: Theory and an iterative algorithm. *Geophysics*, 60(1):142–153.
- Malovichko, A. A. (1978). A new representation of the travel time curve of reflected waves in horizontally layered media. *Applied Geophysics*, 91:47–53.
- May, B. T. e Straley, D. K. (1979). High-order moveout spectra. *Geophysics*, 44:1193–1207.
- Menyoli, E., Gajewski, D., e Hübscher, C. (2004). Imaging of complex basin structures with the common reflection surface (CRS) stack method. *Geophysical Journal International*, 157:1206–1216.
- Olver, F. W. J. (1974). *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, Inc.
- Peters, A. S. e Stoker, J. J. (1954). A Uniqueness Theorem and a New Solution for Sommerfeld's and Other Diffraction Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7(3):565–585.
- Ross, C. P. (2000). Effective avo crossplot modeling: A tutorial. *Geophysics*, 65(3):700–711.

- Salvador, L. e Savelli, S. (1982). Offset continuation for seismic stacking. *Geophysical Prospecting*, 30:829–849.
- Santos, L. T., Scheicher, J., e Tygel, M. (1997). 2.5-D true-amplitude offset continuation. *J. Seism. Expl.*, 6:103–116.
- Schleicher, J. e Bagaini, C. (2004). Controlling amplitudes in 2.5D commom-shot migration to zero offset. *Geophysics*, 69:1299–1310.
- Schleicher, J., Costa, J. C., Santos, L. T., Novais, A., e Tygel, M. (2009). On the estimation of local slopes. *Geophysics*, 74(4):P25–P33.
- Schleicher, J., Tygel, M., e Hubral, P. (2007). *Seismic True-Amplitude Imaging*, volume 12 de *Geophysical Developments*. Society Exploration of Geophysicists.
- Silva, E. (2005). Horizon velocity analisys using OCO rays. páginas 372:1–4. SBGf, 9º Congresso Internacional de Geofísica.
- Sommerfeld, A. (1949). *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York.
- Sullivan, M. F. e Cohen, J. K. (1987). Prestack Kirchhoff inversion of common-offset data. *Geophysics*, 52(6):745–754.
- Sweet, G. E. (1988). Comment on J. C. Karcher's the reflection seismograph. *The Leading Edge*, 7(12):22–24.
- Taner, M. T. e Koehler, F. (1969). Velocity spectra digital computer derivation and applications of velocity functions. *Geophysics*, 34:859–881.
- Taner, M. T. e Koehler, F. (1981). Surface consistent corrections. *Geophysics*, 46(1):17–22.
- Tygel, M. e Santos, L. T. (2007). Quadratic normal moveouts of symmetric reflections in elastic media: A quick tutorial. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 51:185–206.
- Tygel, M., Schleicher, J., e Hubral, P. (1992). Geometrical spreading corrections of offset reflections in a laterally inhomogeneous earth. *Geophysics*, 57(8):1054–1063.
- Tygel, M., Schleicher, J., e Hubral, P. (1995). Dualities involving reflectors and reflection-time surfaces. *Journal of Seismic Exploration*, 4:123–150.
- Tygel, M., Schleicher, J., Hubral, P., e Santos, L. T. (1998). 2.5-D true-amplitude Kirchhoff migration to zero offset in laterally inhomogeneous media. *Geophysics*, 63:557–573.
- Ursin, B. (1982). Quadratic wavefront and travelttime approximations in inhomogeneous layered media with curved interfaces. *Geophysics*, 47(7):1012–1021.
- Versteeg, R. J. (1993). Sensitivity of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, 58(6):873–882.
- Whitemore, M. G. (1980). Geophysical activity in 1979. *Geophysics*, 45:1563–1579.

Yilmaz, Ö. (2000). *Seismic data analysis*. Investigations in Geophysics No. 10:SEG.

Zauderer, E. (2006). *Partial differential equations of applied mathematics*. Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, Inc., 3a. edição.

Zhang, Y., Steffen, e Hubral, P. (2001). Common-reflection-surface (CRS) stack for common offset. *Geophysical Prospecting*, 49:709–718.

Apêndice A

Relações trigonométricas e derivadas do tempo de trânsito

Este apêndice contém as relações trigonométricas para calcularmos as derivadas de primeira e segunda ordem da equação do tempo de trânsito que são usadas para conectar a cinemática com o seu fator de espalhamento geométrico em um meio com velocidade constante e estes resultados foram baseados nas deduções dadas por Fomel (2003b).

Relações dos tempos de trânsito em afastamento diferentes

Sejam $(s, 0)$ e $(r, 0)$ as posições da fonte e receptor, respectivamente, e seja também O um ponto de reflexão referente ao par localizado em um refletor parametrizado por $z = z(x)$ abaixo de um meio com velocidade V . Notemos da Figura A.1 que o traçado do raio incidente $\overline{sO}$ e o traçado do raio refletido $\overline{Or}$ formam um triângulo com a base sobre o afastamento $\overline{sr}$. Então, baseando-se na exemplificação geométrica dada na Figura A.1, usando a *lei dos senos* e chamando $\overline{sr} = 2h$, temos a seguintes relações

$$\overline{sO} = 2h \frac{\cos \beta_s}{\sin 2\gamma} \quad \text{e} \quad \overline{Or} = 2h \frac{\cos \beta_r}{\sin 2\gamma}, \quad (\text{A.1})$$

e fazendo a soma de $\overline{sO}$ com $\overline{Or}$ temos a distância percorrida do traçado $\overline{sOr}$, que, no meio de velocidade constante, podemos associar essa distância com o tempo de trânsito como

$$V\tau(s, r; x) = \sqrt{z(x)^2 + (x - s)^2} + \sqrt{z(x)^2 + (x - r)^2} = \overline{sO} + \overline{Or}. \quad (\text{A.2})$$

Daí,

$$V\tau = 2h \frac{\cos \beta_s + \cos \beta_r}{\sin 2\gamma} = 2h \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}. \quad (\text{A.3})$$

Aqui, diferente de Fomel (2003b), fazemos a seguinte conveção para γ e β , onde γ é o ângulo de reflexão ($\gamma = (\beta_r + \beta_s)/2$) e β é o ângulo de emergência do raio central ($\beta = (\beta_r - \beta_s)/2$), que no caso do modelo de velocidade constante coincide com o ângulo de mergulho do refletor no ponto de reflexão. Equação (A.2) é conhecida como equação DSR (do inglês *Double Square Root*).

Novamente, baseando-se na Figura A.1 e a lei dos senos temos uma relação para o afastamento sendo

$$2h = \overline{s\xi_0} + \overline{\xi_0 r} = \mathcal{R}_0 \frac{\sin \gamma}{\cos \beta_s} + \mathcal{R}_0 \frac{\sin \gamma}{\cos \beta_r} = 2\mathcal{R}_0 \frac{\cos \beta \sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma}. \quad (\text{A.4})$$

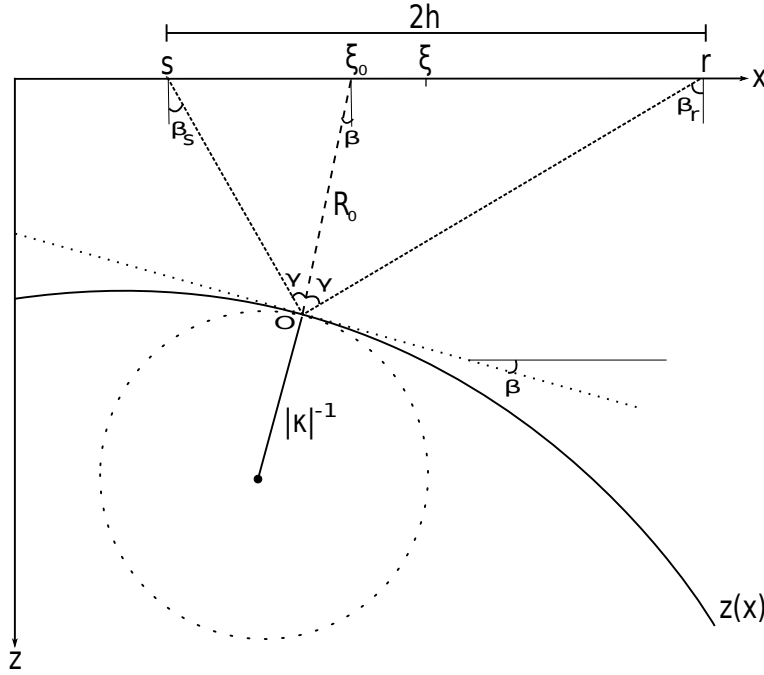


Figura A.1: *Relações trigonométricas para o tempo de trânsito.* Denotamos h como meio-afastamento (a metade da distância entre $(s, 0)$ e $(r, 0)$), ξ como valor médio entre $(s, 0)$ e $(r, 0)$, ξ_0 é posição que a reta bissetriz do ponto O corta $z = 0$ ($\xi = \xi_0$, quando $h = 0$), β é o ângulo de emergência do ponto $(\xi_0, 0)$, β_s é o ângulo de emergência do ponto $(s, 0)$, β_r é o ângulo de emergência do ponto $(r, 0)$, γ é o ângulo de incidência (ou reflexão) em O , $\mathcal{R}_0$ é a distância da reta entre $(\xi_0, 0)$ e O e κ é a curvatura de z no ponto O , onde escrevemos $|\kappa|^{-1}$ dentro de um círculo osculador para representar o raio de curvatura da curva $(x, z(x))$ no ponto O .

E para finalizar esta parte das relações trigonométricas, substituímos na equação (A.3) a equação (A.4) e obtemos

$$\tau = \frac{2\mathcal{R}_0}{V} \frac{\cos^2 \beta \cos \gamma}{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma}. \quad (\text{A.5})$$

De (A.4) e (A.5) temos, também, o seguinte resultado

$$\tau_n = \sqrt{\tau^2 - \frac{4h^2}{V^2}} = \frac{2\mathcal{R}_0}{V} \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma}}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, tomando $\tau_1 = \tau(h_1)$, $\tau_2 = \tau(h_2)$, $\gamma_1 = \gamma(h_1)$, $\gamma_2 = \gamma(h_2)$, $\tau_{n1} = \tau_n(h_1)$ e $\tau_{n2} = \tau_n(h_2)$ para dois afastamentos diferentes h_1 e h_2 , das equações (A.5) e (A.6), obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\tau_1 \cos \gamma_2}{\tau_2 \cos \gamma_1} = \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma_2}{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma_1} = \left(\frac{\tau_{n1} \cos \gamma_2}{\tau_{n2} \cos \gamma_1} \right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Relação das derivadas dos tempos de trânsito

A segunda parte deste apêndice trata das derivadas do tempo de trânsito. Na Seção 2.1, discutimos que no meio 2.5D a cinemática da propagação de ondas é similar a do meio 2D, então toda dedução se passa no plano $y = 0$. Nossa função $\tau = \tau(s, r)$, suave, será usada para representar o tempo de trânsito de uma reflexão de um evento que partiu do ponto $(s, 0, 0)$ e caminhou sobre o plano $y = 0$ em um meio analítico $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ refletiu em um ponto de descontinuidade $(x, 0, z(x))$ e voltou pelo plano $y = 0$ sendo registrado em $(r, 0, 0)$.

A seguir, vamos considerar a seguinte decomposição

$$\tau(s, r) = \tau_s(s, x(s, r)) + \tau_r(x(s, r), r), \quad (\text{A.8})$$

com $x = x(s, r)$ sendo uma função suave que representa o deslocamento lateral do ponto de reflexão no refletor em função de s e r , τ_s correspondendo ao raio incidente e τ_r correspondendo ao raio refletido ambas funções suaves de (s, r) .

Diferenciando a equação (A.8) com respeito a s e r , chegamos

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\partial \tau_s}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r}. \quad (\text{A.10})$$

De acordo com o *princípio de Fermat*, o caminho do raio entre os ponto $(s, 0, 0)$ até a curva $(x, 0, z(x))$ e depois $(r, 0, 0)$ deve ser estacionário. Portanto,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \equiv 0, \quad (\text{A.11})$$

para qualquer s e r . Daí, no raio,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\partial \tau_s}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial \tau_r}{\partial r}. \quad (\text{A.12})$$

Tomando em conta a equação (A.11) enquanto diferenciamos as equações (A.9) e (A.10) com respeito a s e r , obtemos

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial s^2} + B_s \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial r^2} + B_r \frac{\partial x}{\partial r}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} = B_s \frac{\partial x}{\partial r} = B_r \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (\text{A.15})$$

sendo B_s e B_r as representações de

$$B_s = \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial s \partial x} = \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial x \partial s} \quad \text{e} \quad B_r = \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial r \partial x} = \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial x \partial r}. \quad (\text{A.16})$$

Diferenciando a equação (A.11) com respeito a s e r temos o seguinte par de equações

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -C_x^{-1} B_s \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial r} = -C_x^{-1} B_r, \quad (\text{A.17})$$

onde

$$C_x = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial x^2}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.16) e (A.17) em (A.15), obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} = -C_x^{-1} B_s B_r. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, usando o modelo de velocidade constante, explicitamos de forma direta os dois tempos de trânsito τ_s e τ_r como

$$\tau_s(s, x) = \sqrt{z(x)^2 + (x - s)^2}/V \quad \text{e} \quad \tau_r(x, r) = \sqrt{z(x)^2 + (x - r)^2}/V. \quad (\text{A.20})$$

Diferenciando (A.20) como funções de s e r em conjunto com (A.9)-(A.12) e tomando as devidas relação trigonométricas para as derivadas parciais resultantes, obtemos

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\partial \tau_s}{\partial s} = -\frac{\text{sen } \beta_s}{V} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial \tau_r}{\partial r} = \frac{\text{sen } \beta_r}{V}, \quad (\text{A.21})$$

com $\text{sen } \beta_s = -(s - x)/\overline{sO}$ e $\text{sen } \beta_r = (r - x)/\overline{Or}$.

Das equações (A.21), tiramos as seguintes derivadas em função do ponto médio, $\xi = (r + s)/2$, e meio-afastamento, $h = (r - s)/2$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 2 \frac{\text{sen } \beta \cos \gamma}{V} \quad \text{e} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial h} = \frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{\partial \tau}{\partial s} = 2 \frac{\cos \beta \text{sen } \gamma}{V}. \quad (\text{A.23})$$

Novamente, derivando (A.20) em termo de x , obtemos

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial x} = \frac{\text{sen } \gamma}{V \cos \beta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_r}{\partial x} = -\frac{\text{sen } \gamma}{V \cos \beta}. \quad (\text{A.24})$$

Agora, diferenciando (A.24) novamente na direção de x , chegamos em

$$\frac{\partial^2 \tau_s}{\partial x^2} = \frac{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}{V \mathcal{R}_0 \cos^3 \beta} \cos \beta_s \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial x^2} = \frac{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}{V \mathcal{R}_0 \cos^3 \beta} \cos \beta_r, \quad (\text{A.25})$$

sendo κ a curvatura do refletor no ponto de reflexão e escrevemos como

$$\kappa = \frac{d^2 z}{dx^2} \cos^3 \beta, \quad \text{onde} \quad \frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2. \quad (\text{A.26})$$

Então, somando os termos de (A.25), temos o valor da segunda derivada do tempo de trânsito total na direção de x sendo

$$C_x = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = 2 \cos \gamma \frac{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa}{V \mathcal{R}_0 \cos^2 \beta}. \quad (\text{A.27})$$

Mais uma vez, diferenciando as equações de (A.24) nas variáveis s , r e utilizando das relações trigonométricas para os raios incidente e refletidos, podemos expressar as seguintes igualdades

$$B_s = \frac{\partial^2 \tau_s}{\partial x \partial s} = -\frac{\cos \gamma}{V \mathcal{R}_0 \cos^2 \beta} \cos^2 \beta_s \quad \text{e} \quad B_r = \frac{\partial^2 \tau_r}{\partial x \partial r} = -\frac{\cos \gamma}{V \mathcal{R}_0 \cos^2 \beta} \cos^2 \beta_r. \quad (\text{A.28})$$

Combinando B_s , B_r e C_x , chegamos na seguinte relação

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} = -C_x B_s B_g = -\frac{1}{2V \mathcal{R}_0} \frac{(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)^2}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa} \frac{\cos \gamma}{\cos^2 \beta}. \quad (\text{A.29})$$

Usando (A.5) podemos reescrever a última equação na seguinte forma

$$\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial s \partial r} = \frac{\cos^2 \gamma}{V^2} \left(\frac{\sin^2 \beta - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \mathcal{R}_0 \kappa} \right). \quad (\text{A.30})$$

Apêndice B

Aproximação para o ângulo de incidência

Uma importante tarefa, envolvida na análise da AVO, consiste em estimar os ângulos de incidência correspondentes as amplitudes originais. Neste apêndice, supomos que a variação de velocidade é somente na direção da profundidade que é representada como $c = c(z)$ e propomos uma relação entre o ângulo de incidência com os seguintes valores cinemáticos h , τ e $\partial\tau/\partial h$.

Começamos nossa dedução assumindo que o meio possui N camadas homogêneas e o refletor têm um mergulho (veja Figura B.1). Em tais casos, se operarmos em cada região homogênea, então, baseado na teoria dos raios, podemos fazer operações usando relações de triângulos em cada parte homogênea do meio em questão. Para cada camada homogênea, vamos denotá-la por um índice $\lambda = 1, \dots, N$. Tomamos c_N como a velocidade que representa o meio sobre o ponto de reflexão, como ilustrado na Figura B.1. Partindo desse meio e voltando em cada camada homogênea que representa o meio, nosso índice λ regride até chegar no seu menor valor.

Pelas relações trigonométricas dentro da N -ésima camada, escrevemos

$$2h_N = \delta z_N (\text{tg } \beta_s^N + \text{tg } \beta_r^N) , \quad (\text{B.1})$$

sendo δz_N a distância entre o ponto de reflexão até a linha que divide as duas camadas c_N e c_{N-1} , ou seja, a espessura da N -ésima camada, $2h_N$ a largura do triângulo formado pelos raios que incidem sobre o ponto de reflexão e com β_s^N e β_r^N sendo os ângulos que são formados pelo raio que sair da interface entre c_N e c_{N-1} com o eixo z .

Observando essa mesma construção para h_{N-1} , temos

$$2h_{N-1} = 2h_N + \delta z_{N-1} (\text{tg } \beta_s^{N-1} + \text{tg } \beta_r^{N-1}) , \quad (\text{B.2})$$

onde o comprimento $2h_{N-1}$ é o comprimento associado a (B.1) mais as projeções dos raios sobre a interface entre c_{N-1} e c_{N-2} .

Repetindo o processo como em (B.2) até a primeira camada, obtemos

$$2h = \sum_{\lambda=N}^1 \delta z_\lambda (\text{tg } \beta_s^\lambda + \text{tg } \beta_r^\lambda) = 2 \sum_{\lambda=1}^N \delta z_\lambda \left(\frac{\text{sen } \gamma^\lambda \cos \gamma^\lambda}{\cos \beta_r^\lambda \cos \beta_s^\lambda} \right) , \quad (\text{B.3})$$

onde γ^N é o ângulo de incidência e $\gamma^\lambda = (\beta_r^\lambda + \beta_s^\lambda)/2$ para todos os $\lambda = 1, \dots, N$.

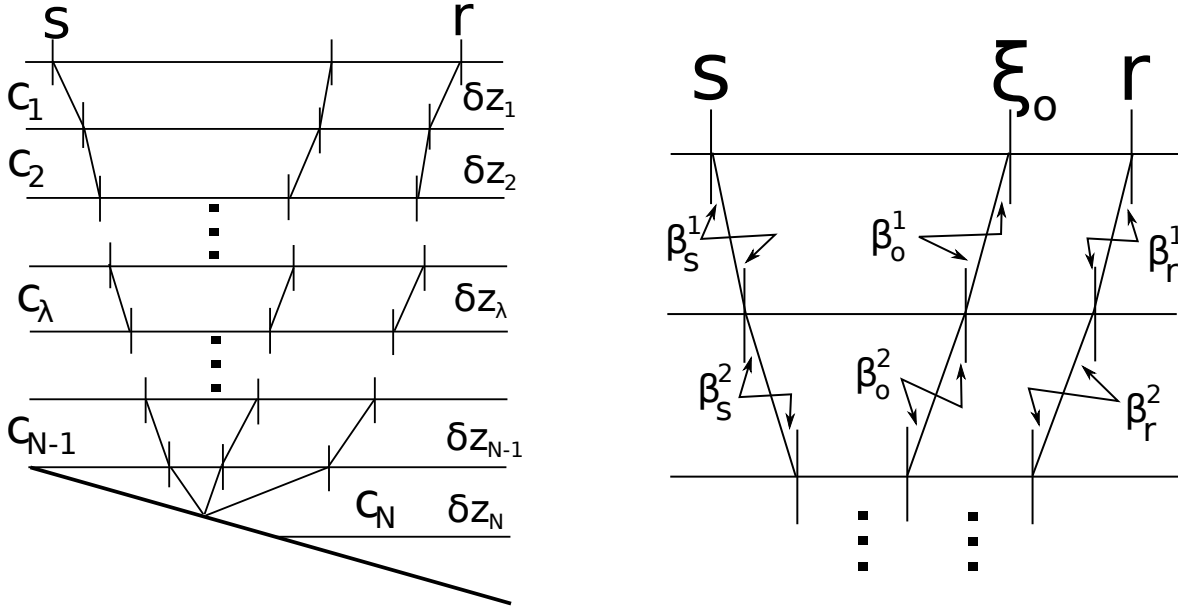


Figura B.1: *Modelo com camadas planas horizontais de isovelocidades e sendo o refletor alvo mergulhado.*

Pela teoria dos raios (lei de Snell), temos

$$\frac{\sin \beta_s^1}{c_1} = \frac{\sin \beta_s^2}{c_2} = \dots = \frac{\sin \beta_s^N}{c_N} \quad \text{e} \quad \frac{\sin \beta_r^1}{c_1} = \frac{\sin \beta_r^2}{c_2} = \dots = \frac{\sin \beta_r^N}{c_N}, \quad (\text{B.4})$$

que aplicados em (B.3), chegamos no seguinte resultado

$$h = \sum_{\lambda=1}^N \delta z_{\lambda} \left(\frac{\sin \gamma^{\lambda} \cos \beta_0^{\lambda} \cos \gamma^{\lambda}}{\cos \beta_r^{\lambda} \cos \beta_s^{\lambda} \cos \beta_0^{\lambda}} \right) = \sin \gamma \cos \beta_0^N c_N \sum_{\lambda=1}^N \frac{\delta z_{\lambda}}{c_{\lambda}} \left[\frac{\cos \gamma^{\lambda} (\cos \beta_0^{\lambda})^{-1}}{\cos \beta_r^{\lambda} \cos \beta_s^{\lambda}} \right], \quad (\text{B.5})$$

com $\gamma = \gamma^N$ e $\beta_0^{\lambda} = (\beta_r^{\lambda} - \beta_s^{\lambda})/2$ onde β_0^N é o ângulo do mergulho aparente do refletor.

Para calcularmos a primeira derivada na direção do afastamento, basta notarmos que

$$\frac{\partial \tau_{sr}}{\partial h} = \frac{\sin \beta_r^1 + \sin \beta_s^1}{c_1} = \frac{\sin \beta_r^{\lambda} + \sin \beta_s^{\lambda}}{c_{\lambda}} = \frac{2 \sin \gamma^{\lambda} \cos \beta_0^{\lambda}}{c_{\lambda}}. \quad (\text{B.6})$$

Para o caso de $\beta_0^N = 0$, temos que

$$\frac{c_N}{2} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial h} = \sin \gamma. \quad (\text{B.7})$$

A seguir, para computarmos o tempo de trânsito na interface representada por c_N , usamos a seguinte identidade como em (A.5)

$$\tau_N = \frac{\delta z_N}{c_N} \left(\frac{\cos \beta_s^N + \cos \beta_r^N}{\cos \beta_r^N \cos \beta_s^N} \right). \quad (\text{B.8})$$

Do mesmo modo que fizemos para computar h (equação (B.3)), baseando-se em (B.8) e somando cada incremento τ_λ , obtemos

$$\tau_{sr} = \sum_{\lambda=1}^N \frac{\delta z_\lambda}{c_\lambda} \left(\frac{\cos \beta_s^\lambda + \cos \beta_r^\lambda}{\cos \beta_r^\lambda \cos \beta_s^\lambda} \right) = 2 \sum_{\lambda=1}^N \frac{\delta z_\lambda}{c_\lambda} \left(\frac{\cos \gamma^\lambda \cos \beta_0^\lambda}{\cos \beta_r^\lambda \cos \beta_s^\lambda} \right). \quad (\text{B.9})$$

Daí, repetindo o que fizemos para h em (B.5), chegamos

$$\tau_{sr} = 2 \sum_{\lambda=1}^N \frac{\delta z_\lambda}{c_\lambda} \left(\frac{\cos \gamma^\lambda \cos \beta_0^\lambda}{\cos \beta_r^\lambda \cos \beta_s^\lambda} \right) = 2 \cos^2 \beta_0^m \sum_{\lambda=1}^N \frac{\delta z_\lambda}{c_\lambda} \left[\frac{\cos \gamma^\lambda (\cos \beta_0^\lambda)^{-1}}{\cos \beta_r^\lambda \cos \beta_s^\lambda} \right], \quad (\text{B.10})$$

obtendo um valor médio β_0^m que satisfaz os seguintes limites

$$\min_{\lambda} \{ \cos^2 \beta_0^\lambda \} \leq \cos^2 \beta_0^m \leq \max_{\lambda} \{ \cos^2 \beta_0^\lambda \}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (B.5) em (B.10), obtemos

$$\tau_{sr} = \frac{2h}{c_N} \frac{\cos^2 \beta_0^m}{\sin \gamma \cos \beta_0^N}. \quad (\text{B.12})$$

Por fim, multiplicando (B.6) por h e dividindo por (B.12), concluímos

$$\frac{h}{\tau_{sr}} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial h} = \sin^2 \gamma \frac{\cos^2 \beta_0^N}{\cos^2 \beta_0^m}. \quad (\text{B.13})$$

Que para o caso de $\beta_0^N - \beta_0^m = \delta\beta \approx 0$, de (B.13), podemos assumir aproximação

$$\frac{h}{\tau_{sr}} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial h} = \sin^2 \gamma (1 + \mathcal{O}(\delta\beta)) \approx \sin^2 \gamma. \quad (\text{B.14})$$

Observamos que a formula é exata para o caso do meio ser homogêneo independente do mergulho do refletor ou quando o meio é $c = c(z)$ com $\beta_0^N = 0$ (refletor plano horizontal), pois $\beta_0^\lambda = \beta_0^N$, para todo λ implicando em $\beta_0^m = \beta_0^N$.