UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CARLOS ARTURO RODRIGUEZ PALMA

Identidades Polinomiais para uma família paramétrica de subálgebras da Álgebra de Weyl

Campinas

2021

Carlos Arturo Rodriguez Palma

Identidades Polinomiais para uma família paramétrica de subálgebras da Álgebra de Weyl

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Artem Lopatin

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Carlos Arturo Rodriguez Palma e orientada pelo Prof. Dr. Artem Lopatin.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R618i Rodriguez Palma, Carlos Arturo, 1978-
Identidades polinomiais para uma família paramétrica de subálgebras da álgebra de Weyl / Carlos Arturo Rodriguez Palma. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Artem Lopatin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Identidade polinomial. 2. Álgebra de Weyl. 3. Identidades de matrizes. 4. Extensão de Ore. 5. Característica positiva (Álgebra). I. Lopatin, Artem, 1980-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Polynomial identities for a parametric family of subalgebras of the Weyl algebra
Palavras-chave em inglês:
Polynomial identity
Weyl algebra
Matrix identities
Ore extensions
Positive characteristic (Algebra)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Artem Lopatin [Orientador]
Alexandre Grichkov
Alexey Kuzmin
Elizaveta Vishnyakova
Thiago Castilho de Mello
Data de defesa: 29-01-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: orcid.org/0000-0001-6467-4459
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5557503053471967

Tese de Doutorado defendida em 29 de janeiro de 2021 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ARTEM LOPATIN

Prof(a). Dr(a). ALEXANDRE GRICHKOV

Prof(a). Dr(a). ALEXEY KUZMIN

Prof(a). Dr(a). ELIZAVETA VISHNYAKOVA

Prof(a). Dr(a). THIAGO CASTILHO DE MELLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico esta tese à minha Mamita Carmen Ruiz, seu amor e ensinamentos sempre guiarão minha vida.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente, à Deus porque sei que é ele quem torna possível o que acontece na nossa vida.

À minha esposa Jahdyra, e meus filhos Daniel Esteban, Juan Diego e Jose Manuel por seu amor, sacrifício, compreensão e paciência nesses anos de doutorado. Seu apoio tem sido fundamental na realização do doutorado. À minha mãe Carmen Palma, e toda minha família, que me apoiaram sempre desde o início dos meus estudos.

Ao meu orientador professor Artem Lopatín pela disposição e paciência em compartilhar sua experiência e conhecimento, e me mostrar o caminho para concluir a tese de doutorado.

Aos meus amigos do IMECC, especialmente Adriana, Miguel, Bryan, Dayane, Carlos Augusto e Stefany, aquelas conversas com um “café” sempre nos ajudaram a levantar o ânimo nos momentos difíceis. Aos meus amigos fora do IMECC. Gostaria de mencioná-los todos, mas a lista é longa e não quero parar de me referir inadvertidamente a nenhum deles. Sempre lembrarei dos momentos compartilhados com todos.

A todos os professores do IMECC, pelos cursos de doutorado ministrados. Aos funcionários do IMECC, em especial à secretaria de pós-graduação por estar sempre à disposição dos alunos.

Gostaria de agradecer também à banca examinadora da defesa, por terem dedicado seu tempo para ler a tese, sem dúvida, as sugestões e correções aperfeiçoaram o nosso trabalho.

À Universidad Industrial de Santander (UIS) pela comissão de estudos para que pudesse me dedicar integralmente ao Doutorado. Aos meus colegas professores e amigos que me apoiaram para que a comissão seja possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - Processo No 141168/2019-6.

A todos, muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho, investigamos as Identidades Polinomiais para a álgebra de Weyl. Por definição a primeira álgebra de Weyl A_1, é a álgebra associativa não-comutativa sobre um corpo $\mathbb{F}$, gerada pelos elementos x, y que satisfazem a condição $yx - xy = 1$ (equivalentemente $[y, x] = 1$, onde $[y, x] = yx - xy$), é dizer,

$$\mathsf{A}_1 = \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - 1\}.$$

Em geral, a n-ésima álgebra de Weyl é a álgebra associativa não-comutativa sobre $\mathbb{F}$ denotada por

$$\mathsf{A}_n = \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I,$$

onde o ideal I é gerado pelas relações $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[y_i, y_j] = 0$, e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. Um dos resultados principais demonstrados nesta tese é: se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica positiva $p > 0$, então as identidades polinomiais da n-ésima álgebra de Weyl são as mesmas que as identidades da álgebra de matrizes $M_{p^n}(\mathbb{F})$ de ordem p^n, é dizer, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$.

Por outro lado, consideremos a álgebra associativa unitária de dimensão infinita $\mathcal{A}_h$ gerada pelos elementos x, y, que satisfazem a relação $yx - xy = h$, onde $h \in \mathbb{F}[x]$. Quando $h \neq 0$, as álgebras $\mathcal{A}_h$ são uma família parametrizada de subálgebras da álgebra de Weyl A_1 sobre $\mathbb{F}$. Outro resultado importante demonstrado neste trabalho é: se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica positiva $p > 0$ e $h \neq 0$, então $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Id}(M_p)$.

Palavras-chave: Identidades Polinomiais. Álgebra de Weyl. Identidades de matrizes. Extensão de Ore. Característica positiva.

Abstract

In this work, we investigate the Polynomial Identities for the Weyl algebra. By definition, the first Weyl algebra A_1, is the associative non-commutative algebra over a field $\mathbb{F}$, generated by the elements x, y that satisfy the condition $yx - xy = 1$ (equivalently $[y, x] = 1$, where $[y, x] = yx - xy$), i.e.,

$$\mathsf{A}_1 = \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - 1\}.$$

In general, the n-th Weyl algebra is the associative non-commutative algebra over $\mathbb{F}$ denoted by

$$\mathsf{A}_n = \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I,$$

where the ideal I is generated by $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[y_i, y_j] = 0$, and δ_{ij} is the Kronecker symbol. One the main results demonstrated in this thesis is: if $\mathbb{F}$ is an infinite field of positive characteristic $p > 0$, then the polynomial identities of the n-th Weyl algebra are the same as the identities of the algebra of matrices $M_{p^n}(\mathbb{F})$ of order p^n, that is, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$.

On the other hand, consider the unital associative algebra of infinite dimension $\mathcal{A}_h$ generated by the elements x, y, which satisfy the relationship $yx - xy = h$, where $h \in \mathbb{F}[x]$. When $h \neq 0$, the $\mathcal{A}_h$ algebras are a parameterized family of subalgebras of Weyl algebra A_1 over $\mathbb{F}$. Another important result demonstrated in this work is: if $\mathbb{F}$ is an infinite field of positive characteristic $p > 0$ and $h \neq 0$, then $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Id}(M_p)$.

Keywords: Polynomial Identities. Weyl Algebra. Matrix identities. Ore extensions, Positive characteristic.

Sumário

Introdução 11

1 PRELIMINARES 15

1.1 Identidades Polinomiais e PI-Álgebras 15

1.2 Polinômios homogêneos e multilineares 19

1.3 Teorema de Kaplansky 26

2 ÁLGEBRA DE WEYL 29

2.1 Álgebra de Weyl sobre corpos de característica zero 33

2.2 Álgebra de Weyl sobre corpos de característica positiva 40

3 IDENTIDADES POLINOMIAIS DA ÁLGEBRA DE WEYL 45

3.1 Identidades Polinomiais para A_n sobre um corpo de característica positiva 47

3.1.1 Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito 49

3.1.2 Se $\mathbb{F}$ é um corpo finito 54

4 IDENTIDADES POLINOMIAIS PARA UMA FAMÍLIA PARAMÉTRICA DE SUBÁLGEBRAS DA ÁLGEBRA DE WEYL 57

4.1 $\mathcal{A}_h$ como extensão de Ore 58

4.2 Propriedades para $\mathcal{A}_h$ 60

4.3 Identidades polinomiais para $\mathcal{A}_h$ 66

REFERÊNCIAS 73

INTRODUÇÃO

Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ e com coeficientes num corpo $\mathbb{F}$ que tem a seguinte propriedade: para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial é chamada de PI-álgebra, abreviação do inglês Polynomial Identity. As PI-álgebras formam uma classe importante de álgebras e, portanto, seu estudo têm sido atraente para os algebristas nos últimos 70 anos.

Os primeiros estudos sobre PI-álgebras apareceram nas décadas 20 e 30 com os trabalhos de Dehn [23] e Wagner [31], em 1922 e 1936 respectivamente. O interesse e desenvolvimento da PI-teoria aumentaram a partir de 1948, após o trabalho de Kaplansky [14]. Neste trabalho foi provado que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, o que sugeriu que a existência de uma identidade polinomial para uma álgebra pode ser usada para entender a estrutura da mesma. Dois anos depois, Amitsur e Levitsky em [25], apresentam uma nova maneira de abordagem na área: Dada uma álgebra “interessante”, descrever as identidades polinomiais satisfeitas por essa álgebra. Nesta direção, eles provaram usando métodos combinatórios que o polinômio standard de grau $2n$ é a identidade de grau mínimo da álgebra de matrizes de ordem n.

Normalmente, o estudo da PI-teoria é realizado em três direções: a primeira estuda as propriedades de uma álgebra (ou um anel, ou um grupo) sabendo-se que ela satisfaz alguma identidade polinomial não trivial. A segunda estuda as identidades satisfeitas por uma álgebra dada e as classes de álgebras que satisfazem essas identidades (essas classes são chamadas de variedades de álgebras). A terceira estuda a estrutura dos ideais de identidades. Embora historicamente esta seja a divisão que foi feita, isso não significa que seja definitiva ou exclusiva, pois na maioria dos casos os problemas na PI-teoria estão interligados.

Nosso foco de estudo nesta tese será centrado nas duas últimas direções, e temos como objetivo principal estudar as identidades polinomiais para uma álgebra específica chamada álgebra de Weyl e, em geral, para uma família parametrizada de subálgebras da álgebra de Weyl. Em todos os casos, o estudo de ditas identidades será realizado levando-se em consideração a característica do corpo base para álgebra, ou seja, analisaremos inicialmente o que acontece quando o corpo base possui características zero e posteriormente estudaremos o que acontece quando ele possui característica positiva $p > 0$.

A história da álgebra de Weyl começa com o nascimento da mecânica quântica, no ano 1925, com o objetivo de desenvolver os princípios da mecânica que explicariam o comportamento do átomo. Uma das primeiras pessoas a trabalhar nisso foi Werner Heisenberg. Sua ideia era que essa mecânica deveria ser baseada em quantidades que pudessem realmente ser observadas. Heisenberg originalmente introduziu análogos teóricos quânticos da série clássica de Fourier. Eles devem descrever as variáveis dinâmicas dos sistemas atômicos e devem ser não-comutativos. Heisenberg resumiu suas idéias em um artigo que apresentou a Max Born, quem percebeu que a teoria das matrizes oferecia o formalismo correto para as idéias de Heisenberg. De acordo com a abordagem de Born, as variáveis dinâmicas (velocidade, posição, momento) devem ser representadas por matrizes na teoria quântica. Denotando a matriz de posição por q e a matriz de momento por p, pode-se escrever a equação para um sistema com um grau de liberdade na forma $pq - qp = ih$, porém, as matrizes da teoria quântica tinham que ser infinitas.

Posteriormente, outros formalismos foram apresentados: Primeiro veio a mecânica de ondas de E. Schrõdinger. Nesta abordagem, tudo começa com uma equação diferencial parcial; um objeto mais familiar para os físicos. Depois o formalismo de Dirac, quem escolheu as relações entre as variáveis dinâmicas como ponto de partida. As variáveis dinâmicas sujeitas a essas relações eram os elementos que ele chamou de álgebra quântica.

Do ponto de vista de Dirac, estava interessado em expressões polinomiais nas variáveis dinâmicas momento, denotada por p, e posição, denotada por q. Ele assume que as variáveis satisfazem a relação (normalizada) $pq-qp = 1$. Isso é o que agora chamamos de primeira álgebra de Weyl. Em particular, ele mostrou como alguém poderia usar a relação entre p e q para diferenciar expressões polinomiais com respeito a p e a q. As álgebras de Weyl de maior índice (denominadas nesta tese n-ésima álgebra de Weyl) aparecem quando se consideram sistemas com vários graus de liberdade. O ponto de vista de Dirac pode se encontrar no livro [12] de H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics.*

A seguir, descrevemos como os conceitos e resultados serão apresentados nesta tese.

No capítulo 1 definimos o objeto central de nosso estudo as identidades polinomiais, incluindo algumas definições e teoremas da PI-Teoria relevantes neste trabalho. Também incluímos um resultado clássico sobre estrutura, conhecido como o Teorema de

Kaplansky, dada a sua importância no decorrer do trabalho.

No capítulo 2, apresentamos a álgebra de Weyl, suas propriedades e sua estrutura. Por definição, a primeira álgebra de Weyl A_1, é a álgebra associativa não-comutativa sobre um corpo $\mathbb{F}$, gerada pelos elementos x, y que satisfazem a condição $yx - xy = 1$ (equivalentemente $[y, x] = 1$, onde $[y, x] = yx - xy$), é dizer,

$$\mathsf{A}_1 = \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - 1\}.$$

Em geral, definimos a n-ésima álgebra de Weyl como a álgebra associativa não-comutativa sobre um corpo $\mathbb{F}$ gerada pelas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ com as relações $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$ e $[y_i, y_j] = 0$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$, ou seja,

$$\mathsf{A}_n = \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/\mathrm{id}\{y_i x_j - x_i y_j - \delta_{ij}\},$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos as aplicações lineares de $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, definidas por $f_i(h) = z_i h$ e $\partial_i(h) = \dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ para todo $h \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, onde $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ é a derivada parcial de h respeito a z_i. E definimos a álgebra A'_n como sendo a subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n])$ gerada pelos endomorfismos $f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$. É dizer,

$$\mathsf{A}'_n = alg_{\mathbb{F}}\{f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}.$$

Quando a característica do corpo é zero, vamos mostrar que a n-ésima álgebra de Weyl A_n é isomorfa à álgebra A'_n. Esse resultado será usado para mostrar que A_n é central e simples. Existem várias provas desses fatos, uma delas pode-se consultar no livro [26]. A importância desses resultados é que juntamente com o Teorema de Kaplansky, eles nos permitem concluir que A_n não possui identidades polinomiais não trivial neste caso. Isso será justificado no capítulo 3.

Quando a característica do corpo é $p > 0$, vamos mostrar que a álgebra A'_n não é um domínio, enquanto que a álgebra A_n não é simples. Além disso, vamos fornecer bases para A_n e A'_n que nos permitirão concluir que o isomorfismo acima não ocorre, porém, provaremos que A'_n é isomorfa à álgebra $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I'$, onde I' é o ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle$ gerado pelas relações $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[y_i, y_j] = 0$ e $y_i^p = 0$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

No capítulo 3, estudamos as identidades polinomiais da álgebra de Weyl A_n. Primeiro, justificamos porque se a característica do corpo é zero, então álgebra não possui identidades polinomiais não triviais, para isto usamos o fato de que A_n é central e simples, juntamente com o Teorema de Kaplansky. Em segundo lugar, se a característica é positiva (digamos $p > 0$), analisamos duas possibilidades: Quando o corpo é infinito e quando é finito. No caso infinito, demonstramos um dos principais resultados deste trabalho, o qual afirma o seguinte (ver Teorema 3.11):

Teorema A. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica p, A_n a álgebra de Weyl sobre $\mathbb{F}$ e M_{p^n} a álgebra de matrizes $p^n \times p^n$ sobre $\mathbb{F}$, então*

$$\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n}).$$

Finalmente, no caso de corpo finito, apresentamos contraexemplos que permitem concluir que igualdade anterior não se cumpre.

No Capítulo 4, investigamos as identidades polinomiais para uma família parametrizada de álgebras isomorfas a subálgebras da primeira álgebra de Weyl. Essas álgebras são definidas como segue: Seja $\mathbb{F}$ um corpo, e $h \in \mathbb{F}[x]$, a álgebra $\mathcal{A}_h$ é a álgebra associativa unitária sobre $\mathbb{F}$ com geradores x, y com a relação $yx - xy = h$, é dizer,

$$\mathcal{A}_h = \mathbb{F}\langle x, y\rangle / \mathrm{id}\{yx - xy - h\}.$$

Novamente consideramos os casos em que a característica do corpo é zero e em que é positiva $p > 0$. No primeiro caso, usamos o fato que $\mathcal{A}_h$ é central é simples (se $h \in \mathbb{F}^*$), que foi demonstrado por G. Benkart, S.A. Lopez e M. Ondrus em [10], e o Teorema de Kaplansky para concluir que dita família não possui identidades polinomiais não triviais. No segundo caso, ou seja, quando a característica é positiva, demonstramos outro dos resultados importantes nesta tese, o qual diz (ver Teorema 4.26):

Teorema B. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 0$, seja $h \in \mathbb{F}[x]$ diferente de zero, então*

$$\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Id}(M_p).$$

Finalmente, se o corpo for finito fornecemos contra-exemplos que nos permitem concluir que a igualdade não ocorre.

Queremos enfatizar que os resultados dos capítulos 3 e 4 são novos, exceto aqueles em que mencionamos o autor.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos básicos e alguns resultados necessários para o desenvolvimento desta dissertação. Começaremos com os conceitos de identidade polinomial e PI-álgebra, continuamos introduzindo as identidades multihomogêneas e multilineares e alguns resultados importantes associados a esses conceitos. Finalmente, e finalizamos com um resultado de estrutura, o teorema de Kaplansky. A maioria dos teoremas e afirmações neste capítulo serão apresentados sem demostração, caso o leitor esteja interessado nelas pode consultar os livros [1],[19], [29] e [30].

Em todo o texto $\mathbb{F}$ denotará um corpo, e todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidas sobre $\mathbb{F}$, a menos que especifiquemos o contrário.

Ressaltamos que o leitor que tenha um bom conhecimento da teoria de PI-álgebras pode omitir este capítulo.

1.1 Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Nosso objeto de estudo são as identidades polinomiais. No entanto, começaremos esta seção definindo o "ambiente" desses objetos, as álgebras livres. Posteriormente, daremos a definição de identidade polinomial e PI-álgebras e apresentaremos vários exemplos delas.

Definição 1.1. *Seja $\mathfrak{B}$ uma classe de álgebras e $A \in \mathfrak{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra A é dita* ***álgebra livre*** *na classe $\mathfrak{B}$,* ***livremente gerada*** *pelo conjunto X, se satisfaz a seguinte* ***propriedade universal****: Para toda álgebra $B \in \mathfrak{B}$, qualquer aplicação $h : X \to B$ pode ser estendida a um homomorfismo $\varphi : A \to B$, i.e., $\varphi|_X = h$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X será chamada de* ***posto*** *de A.*

Observa-se que se A_1, A_2 são álgebras livres isomorfas, então elas tem o mesmo posto.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não-vazio enumerável de variáveis não comutativas. Uma ***palavra*** em X é uma sequência $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$, denotamos por 1 à palavra vazia. Duas palavras são iguais se possuem o mesmo comprimento e tem termos iguais nas respectivas posições, i.e, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ se, e somente se, $n = m$ e $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n$.

Denotemos por $\mathbb{F}\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem por base o conjunto de todas as palavras em X. Assim, os elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ são somas (formais) de termos que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X. Os produtos (formais) de um escalar por uma palavra são chamados de ***monômios*** e os elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ são chamados de ***polinômios***. Escreveremos $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n \in X$ são as únicas variáveis que ocorrem em f.

Definimos o ***grau do monômio*** αU, $\alpha \in \mathbb{F}$, denotado por $\deg \alpha U$, como o comprimento da palavra U; também o grau de αU na variável x_i, denotado por $\deg_{x_i} \alpha U$, como o número de ocorrências de x_i em αU; finalmente, o ***grau de*** $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, denotado por $\deg f$, é o grau máximo entre os graus de seus monômios; de forma análoga o grau de f na variável x_i, denotado $\deg_{x_i} f$.

Agora, se consideramos em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ a seguinte multiplicação (ou produto),

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) \cdot (x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m},$$

e estendemos por linearidade este produto para $\mathbb{F}\langle X\rangle$, então o espaço vetorial $\mathbb{F}\langle X\rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa com unidade (a palavra vazia). Note-se que X gera $\mathbb{F}\langle X\rangle$ como álgebra.

Proposição 1.2. *A álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Demonstração. Seja B uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade e $h : X \to B$ uma aplicação qualquer, com $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Logo existe uma aplicação linear $\varphi_h : \mathbb{F}\langle X\rangle \to B$ tal que $\varphi_h(1) = 1_B$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$. Então φ_h é o único homomorfismo de álgebras satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. $\square$

Se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, então a imagem de f por φ_h será denotada por $f(a_1, \ldots, a_n)$. Na realidade $f(a_1, \ldots, a_n)$ é o elemento de B obtido substituindo x_i por a_i em f.

Definição 1.3. *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que $f \equiv 0$ é uma* ***Identidade Polinomial*** *de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Notemos que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, f pertencer aos núcleos de todos os homomorfismos de $\phi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$.

De fato, seja Φ é o conjunto de todos os homomorfismos $\phi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$. Suponhamos que $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é identidade polinomial de A e seja $\phi \in \Phi$ um homomorfismo qualquer, então, se $\phi(x_i) = a_i$, temos

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

daí que $f \in ker\phi$ para cada $\phi \in \Phi$. Por outro lado, suponhamos que $f \in ker\phi$ para cada $\phi \in \Phi$, e sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$. Seja $h : X \to A$ tal que $h(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então, pela propriedade universal, existe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$, tal que $\varphi|_X = h$. Em particular $a_i = h(x_1) = \varphi(x_1)$, assim

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = 0,$$

Portanto, f é uma identidade polinomial de A.

Usualmente dizemos que $f \equiv 0$ é uma Identidade Polinomial para A, ou que A satisfaz $f = 0$. É claro que o polinômio trivial $f = 0$ é uma identidade para qualquer álgebra A.

Definição 1.4. *Se A satisfaz uma identidade polinomial não-trivial $f \equiv 0$, então dizemos que A é uma **PI-Álgebra**.*

A seguir apresentamos alguns exemplos bem conhecidos de PI-álgebras.

Exemplo 1.5. *Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $[x, y] = yx - xy \equiv 0$.*

A expressão $[x_1, x_2] = x_2x_1 - x_1x_2$ é dito o comutador (de Lie) de x_1 e x_2, de tamanho 2. Definimos indutivamente o comutador de tamanho n por: $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para todo $n \geqslant 3$.

Exemplo 1.6. *Se A é uma álgebra nilpotente, é dizer existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Logo A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $x_1 \cdots x_n \equiv 0$.*

Exemplo 1.7. *Se $A = M_2(\mathbb{F})$ é a álgebra de matrizes 2×2 sobre $\mathbb{F}$, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a **Identidade de Hall** $[[x, y]^2, z] \equiv 0$.*

Exemplo 1.8. *Se A uma $\mathbb{F}$-álgebra com $\dim A < 4$, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a **Identidade Standard** de grau 4,*

$$\mathrm{St}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)},$$

onde S_4 é o grupo das permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ.

Observação 1.9. *Dada uma álgebra A, o conjunto das identidades polinomiais de A é denotado por* $\mathrm{Id}(A)$*, é dizer,*

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X\rangle : f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para todo } a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

Notemos que:

a) $\mathrm{Id}(A)$ *é um ideal bilateral de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

b) *Se* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ *e* $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, *temos que* $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{Id}(A)$, *pois* $g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$ *para cada* $a_1, \ldots, a_n \in A$.

c) *Como cada endomorfismo* $\phi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathbb{F}\langle X\rangle$ *é determinado pela aplicação* $h : X \to \mathbb{F}\langle X\rangle$ *com* $h(x_i) = g_i$, *então* $\phi(x_i) = g_i$. *Assim, se* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ *temos que:*

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) = 0,$$

i.e, $\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathrm{Id}(A)$. *Portanto,* $\mathrm{Id}(A)$ *é invariante com respeito a endomorfismo de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Definição 1.10. *Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é um T-**Ideal** se $\phi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo ϕ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.*

Proposição 1.11. *O conjunto* $\mathrm{Id}(A)$ *das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que* $\mathrm{Id}(B) = I$.

Demonstração. É claro, pela Observação 1.9, que $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Reciprocamente, consideremos a álgebra quociente $B = \mathbb{F}\langle X\rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathbb{F}\langle X\rangle/I$. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(B)$, então $f(x_1, \ldots, x_n) \in ker\phi$. Como $ker\pi = I$, temos que $\mathrm{Id}(B) \subseteq I$. De outro lado, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1 + I, \ldots, g_n + I \in B$, então $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$, daí que

$$f(g_1 + I, \ldots, g_n + I) = f(g_1, \ldots, g_n) + I = I,$$

assim $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(B)$. Portanto $I \subseteq \mathrm{Id}(B)$. □

Note que a interseção de uma família arbitrária de T-ideais continua sendo um T-ideal.

Definição 1.12. *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S, denotado por $\langle S\rangle_T$, é a interseção de todos os T-ideais de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contêm S, i.e.,*

$$\langle S\rangle_T = \bigcap_{S \subseteq I} \{I \mid I \text{ é } T\text{-ideal}\}.$$

Notemos que o T-ideal gerado por S, $\langle S\rangle_T$, é o menor T-ideal contendo S, além disso coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle\}.$$

Dada uma álgebra A, dizemos que $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ é ***uma base das identidades*** de A, se $S \subseteq \mathrm{Id}(A)$ e satisfaz $\mathrm{Id}(A) = \langle S\rangle_T$.

Se uma álgebra A tem uma base finita S para suas identidades, dizemos que A tem a ***propriedade de Specht*** (ou propriedade de base finita). O conhecido problema de Specht consiste em saber se toda álgebra associativa tem a propriedade de base finita.

Em 1987, Kemer (ver [2]) deu uma resposta afirmativa para o problema de Specht, no caso corpos de característica 0. Para corpos de característica positiva o problema esteve aberto até 1999, quando Belov em [6] (ver também [7]) fornece contra-exemplos para este problema.

Exemplo 1.13. *Se A uma $\mathbb{F}$-álgebra comutativa com unidade e $\mathbb{F}$ um corpo infinito, temos que* $\mathrm{Id}(A) = \langle [x, y]\rangle_T$.

Exemplo 1.14. *Seja $M_2(\mathbb{F})$ a álgebra de matrizes 2×2 sobre $\mathbb{F}$. Se $\mathbb{F}$ tem característica zero, Drensky em 1981 (ver [28]) prova que*

$$\mathrm{Id}(M_2(\mathbb{F})) = \langle \mathrm{St}_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle_T.$$

O resultado obtido por Drensky foi generalizado por Koshlukov, em 2001, para o caso de $\mathbb{F}$ infinito de característica diferente de 2 e 3 (veja [24]). No caso de $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 3$ é necessário uma terceira identidade para gerar o T-ideal (veja [16]). Mas, se $\mathbb{F}$ tem característica 2, não se sabe se $\mathrm{Id}(M_2(\mathbb{F}))$ é finitamente gerado ou não, é dizer, o problema ainda esta aberto.

Se $n > 2$, não é conhecida uma base das identidades de $M_n(\mathbb{F})$, nem mesmo em característica 0. Sabemos que o polinômio standard St_{2n} mais a identidade de Hall não são suficientes para gerar o T-ideal de $M_n(\mathbb{F})$, ainda para $n = 3$. De fato, não existem métodos nem teorias disponíveis que permitam determinar uma base para as identidades de $M_n(\mathbb{F})$, para $n > 2$.

1.2 Polinômios homogêneos e multilineares

Nesta seção estudaremos polinômios homogêneos e multilineares, a importância de estudá-los reside em que quando o corpo base $\mathbb{F}$ é infinito, o estudo das identidades polinomiais de uma $\mathbb{F}$-álgebra dada pode ser reduzido a estudo deste tipo de polinômios. Em particular, se $\mathbb{F}$ tem característica 0, cada T-ideal é gerado por suas identidades polinomiais multilineares.

Definição 1.15. *Um polinômio $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é dito* ***homogêneo*** *de grau d_i em x_i se todos os seus monômios têm grau d_i em x_i. Mas ainda, f é dito* ***multihomogêneo*** *quando é homogêneo em todas as variáveis, e é* ***multilinear*** *se é multihomogêneo e cada variável tem exatamente grau 1.*

Exemplo 1.16. *O polinômio $f(x,y,z) = x^2yz + y^2x^2z + z^3x^2$ é homogêneo em x de grau 2, $(\deg_x f = 2)$. O polinômio $g(x,y) = x^2y + yx^2$ é multihomogêneo de multigrau $(2,1)$. O polinômio $h(x,y,z) = xyz + yzx + zxy$ é multilinear.*

Observação 1.17. *Se $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é multilinear. Então f tem a forma*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

onde $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$ e S_n é o grupo das permutações (ou o grupo simétrico) de $\{1,2,\ldots,n\}$.

Note que se $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é linear em uma variável, digamos x_1, então

$$f\left(\sum \alpha_i y_i, x_2,\ldots,x_n\right) = \sum \alpha_i f(y_i,x_2,\ldots,x_n)$$

Se $m = m(x_1,\ldots,x_n)$ é um monômio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ e $\deg_{x_i} m = d_i$ para $i = 1,\ldots,n$, então o ***multigrau*** de m é a n-upla $(d_1,\ldots,d_n)$. A soma de todos os monômios de $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ com um multigrau dado, é dita uma ***componente multihomogênea*** de f.

Exemplo 1.18. *Seja $f(x,y,z) = xy + x^2yz + xyzx - yx$. Temos que $xy - yx$ e $x^2yz + xyzx$ são as componentes multihomogêneas de f de multigrau $(1,1,0)$ e $(2,1,1)$ respectivamente.*

Observação 1.19. *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra gerada, como espaço vetorial, pelo conjunto B sobre $\mathbb{F}$. Se f é um polinômio multilinear que se anula em B, então f é uma identidade polinomial de A.*

Demonstração. Dados $a_1,\ldots,a_n \in A$, podemos escrever

$$a_1 = \sum_{i_1=1}^{m_1} \alpha_{1i_1} b_{1k_{i_1}}, \ldots, a_n = \sum_{i_n=1}^{m_n} \alpha_{ni_n} b_{nk_{i_n}},$$

onde os $b_i's \in B$, então como $f(x_1,\ldots,x_n)$ é linear em cada uma das variáveis temos que:

$$\begin{aligned} f(a_1,\ldots,a_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \alpha_{1i_1} b_{1k_{i_1}}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{m_n} \alpha_{ni_n} b_{nk_{i_n}}\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m_1,\ldots,m_n} \alpha_{1i_1}\cdots\alpha_{ni_n} f(b_{1k_{i_1}},\ldots,b_{nk_{i_n}}) \\ &= 0, \quad \text{em } A. \end{aligned}$$

Portanto, f é uma identidade polinomial de A. □

Proposição 1.20. *Se A uma $\mathbb{F}$-álgebra com $\dim A < n$, então A satisfaz a* ***Identidade Standard*** *de grau n,*

$$\mathrm{St}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ.

Demonstração. Como St_n é multilinear, é suficiente verificar, pela Observação 1.19, que St_n se anula para todos os elementos de uma base de A. Suponhamos $\beta = \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ uma base de A, então ao substituir cada x_i por um elemento de β, temos que algum b_j aparecera pelo menos duas vezes em cada monômio de St_n. Denotemos por x_i e x_k duas variáveis substituídas pelo mesmo b_j. Logo, para cada $\sigma \in S_n$ par, os monômios associados as permutações σ e $(i\ k)\sigma$ fornecem o mesmo elemento de A com o sinal trocado. Daí que a soma de tais parcelas se anula, portanto St_n é uma identidade para A. □

Se A uma $\mathbb{F}$-álgebra com $\dim A < n$ então A também satisfaz a ***Identidade de Capelli***,

$$\mathrm{Cap}_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n-1)} y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

Em particular, a álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrizes $n \times n$ satisfaz a identidade standard de grau $n^2 + 1$, e portanto é uma PI-álgebra.

Um resultado conhecido em relação à álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{F})$ é o Teorema de Amitsur e Levitzki que estabelece o seguinte:

Teorema 1.21 (de Amitsur e Levitzki)**.** *A álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrizes $n \times n$ satisfaz a Identidade Standard de grau $2n$,*

$$\mathrm{St}_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n)}.$$

O polinômio standard St_{2n} é o polinômio de menor grau que satisfaz a álgebra de matrizes.

Proposição 1.22. *A álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrizes $n \times n$ não satisfaz uma identidade polinomial de grau menor que $2n$.*

Teorema 1.23. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito (ou $|\mathbb{F}| > \deg f$). Se $f = 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, então toda componente multihomogênea de f também é uma identidade polinomial para A.*

Demonstração. Para cada variável x_t, com $1 \leqslant t \leqslant n$, é possível decompor f na forma seguinte:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_t. Provaremos que $f_i = 0$ é uma identidade polinomial de A, para cada $1 \leqslant i \leqslant d$.

Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ elementos distintos de $\mathbb{F}$. Como f_i é homogênea de grau i em x_t temos que

$$f_i(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n),$$

portanto, para todo $0 \leqslant j \leqslant d$,

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n) = 0 \text{ (em } A).$$

Para todo $a_i, \ldots, a_n$ em A, se denotamos por $\overline{f}_i = f_i(a_i, \ldots, a_n)$, temos o sistema

$$\sum_{i=0}^{d} \alpha_j^i \overline{f}_i = 0, \quad \text{para todo } 0 \leqslant j \leqslant d. \tag{1.1}$$

Este sistema (1.1) tem determinante (o determinante de Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \cdots & \alpha_d^d \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant d} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Como $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$, o sistema (1.1) tem solução única $\overline{f}_i = 0$. Portanto $f_i(a_i, \ldots, a_n) = 0$, para cada $a_i, \ldots, a_n$ em A. $\square$

O Teorema 1.23 ainda é certo se $\mathbb{F}$ é um corpo finito com $|\mathbb{F}| > \deg f$. Mas, se $\mathbb{F}$ é um corpo com q elementos, embora que o polinômio $x^q - x$ é uma identidade para $\mathbb{F}$, suas componentes x^q e x não são identidades.

Definição 1.24. *Dois conjuntos de polinômios são* ***equivalentes*** *se geram o mesmo T-ideal.*

É claro do Teorema 1.23, que cada $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é equivalente ao conjunto de suas componentes multihomogêneas.

Definição 1.25. *Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Se um polinômio $f \in \langle S\rangle_T$ dizemos que f* ***é uma consequência de*** *S.*

Observação 1.26. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ um polinômio multihomogêneo de grau $d > 1$ em x_1, e $y_1, y_2 \in X$ distintas de $x_1, \ldots, x_n$. Consideremos o polinômio*

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Desenvolvendo a expressão achamos que h tem uma componente homogênea, que denotaremos por h_1, tal que $\deg_{y_1} h_1 = d - 1$ e $\deg_{y_2} h_1 = 1$, assim

$$h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = df(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Exemplo 1.27. *Consideremos $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2 x_1$. Note que f é multihomogêneo de grau 2 em x_1. Fazendo a substituição de x_1 por $y_1 + y_2$ obtemos:*

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2, x_2) &= (y_1 + y_2)^2 x_2 - (y_1 + y_2) x_2 (y_1 + y_2) \\ &= y_1^2 x_2 + y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2 + y_2^2 x_2 - y_1 x_2 y_1 - y_1 x_2 y_2 - y_2 x_2 y_1 - y_2 x_2 y_2 \\ &= f(y_1, x_2) + f(y_2, x_2) + y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2 - y_1 x_2 y_2 - y_2 x_2 y_1 \end{aligned}$$

Daí que, $h(y_1, y_2, x_2) = y_1 y_2 x_2 + y_2 y_1 x_2 - y_1 x_2 y_2 - y_2 x_2 y_1$ é um polinômio homogêneo com $\deg_{y_1} h = 1 = \deg_{y_2} h$.

Lema 1.28. *Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ multihomogêneo de grau $d > 1$ em x_1. Se f é uma identidade polinomial de A então*

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

é também uma identidade polinomial não trivial ($\neq 0$) de A.

Demonstração. É claro que h é uma Identidade polinomial. Provemos que h é um polinômio não nulo. Suponhamos $h = 0$. Como toda aplicação $g : X \to X$ pode ser estendida a um endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \to \mathbb{F}\langle X \rangle$, então substituindo y_1 e y_2 por x_1 em h obtemos novamente um polinômio nulo. i.e.,

$$h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

de onde,

$$f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $\deg_{x_1} f = d > 1$, é possível descompor f na forma:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1. então,

$$\sum_{i=0}^{d} f_i(2x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2 \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de onde,

$$\sum_{i=0}^{d} 2^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2\sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Daí que $d = 1$, isto é uma contradição. Portanto, h é um polinômio não nulo. $\square$

Teorema 1.29. *Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau k, então A satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leqslant k$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ uma identidade polinomial de A. Se $\deg_{x_i} m \leqslant 1$ para cada monômio m de f, então podemos escrever $f = f' + f''$ onde $\deg_{x_i} f' = 1$, $\deg_{x_i} f'' = 0$, e $f(x_1, \ldots, x_n)|_{x_i=0} = f''(x_1, \ldots, x_n)$, assim f'' é também uma identidade polinomial de A. Logo, trocando f por f'' temos uma identidade polinomial de A de grau $\leqslant k$ com uma quantidade menor de variáveis. Continuamos o processo anterior até obter uma identidade polinomial multilinear de grau $\leqslant k$ como desejamos. Portanto, podemos supor que existe uma variável, digamos x_1, tal que $\deg_{x_1} f = d \geqslant 1$. Consideremos o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n.)$$

Pelo Lema 1.28 e a Observação 1.26 , $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ é uma identidade não trivial de A que contém uma componente homogênea de grau $d-1$ em y_1 e linear em y_2. Continuando o processo de aumentar o número de variáveis e diminuir seu grau, obtemos um polinômio $h_d(y_1, \ldots, y_d, x_2, \ldots, x_n)$ que é linear nas variáveis $y_1, \ldots, y_d$. Repetindo o processo em cada variável obtemos o polinômio multilinear desejado. $\square$

Teorema 1.30. *Se* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ *(ou* $\operatorname{char}\mathbb{F} > \deg f$*), então cada polinômio não nulo $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.23 sabemos que $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é equivalente ao conjunto de suas componentes multihomogêneas. Portanto podemos supor que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é multihomogêneo. Utilizando o processo de multilinearização temos que, se $\deg_{x_1} f = d > 1$ então

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

onde $\deg_{y_1} f_i = i$, $\deg_{y_2} f_i = d - i$, e $\deg_{x_t} f_i = \deg_{x_t} f$ para $t = 2, \ldots, n$. Então todos os polinômios $f_i = f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ são consequências de f. Por outro lado, para cada i temos,

$$f(2y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Como f é homogêneo de grau d em x_1, então

$$2^d f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

logo para cada i,

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $char\mathbb{F} = 0$ temos que $\binom{d}{i} \neq 0$, portanto f é consequência de qualquer f_i para $i = 1 \ldots, d-1$. Como $\deg_{y_1} f_i = i$ e $\deg_{y_2} f_i = d - i$, aplicando um argumento de indução para o grau obtemos um conjunto de consequências multilineares de f. □

Corolário 1.31. *Se* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$*, então cada T-ideal I é gerado (como T-ideal) por seus polinômios multilineares.*

O seguinte resultado fornece uma equivalência entre as identidades polinomiais de uma álgebra A sobre um corpo infinito $\mathbb{F}$ e as identidades polinomiais do produto tensorial $C \otimes_{\mathbb{F}} A$ para C uma álgebra comutativa contendo $\mathbb{F}$.

Proposição 1.32. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo infinito,* A *uma* $\mathbb{F}$ *álgebra e* C *uma álgebra comutativa contendo* $\mathbb{F}$*, então* A *e* $C \otimes_{\mathbb{F}} A$ *tem as mesmas identidades polinomiais.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ uma identidade polinomial de A, pelo Teorema 1.23 podemos supor f multihomogêneo de multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$. Sejam $b_1, \ldots, b_n \in C \otimes_{\mathbb{F}} A$, vamos provar que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$.

a) Se $b_1 = c_1 \otimes a_1, \ldots, b_n = c_n \otimes a_n$, temos

$$f(c_1 \otimes a_1, \ldots, c_n \otimes a_n) = c_1^{d_1} \cdots c_n^{d_n} \otimes f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

b) Se $b_1 = c_{11} \otimes a_{11} + c_{12} \otimes a_{12}, b_2 = c_2 \otimes a_2, \ldots, b_n = c_n \otimes a_n$, lembrado que

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

onde $\deg_{x_1} f_i = i$, temos $f(c_{11} \otimes a_{11} + c_{12} \otimes a_{12}, c_2 \otimes a_2, \ldots, c_n \otimes a_n) =$

$$f(c_{11} \otimes a_{11}, c_2 \otimes a_2, \ldots, c_n \otimes a_n) + f(c_{12} \otimes a_{12}, c_2 \otimes a_2, \ldots, c_n \otimes a_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{d} f_i(c_{11} \otimes a_{11}, c_{12} \otimes a_{12}, c_2 \otimes a_2, \ldots, c_n \otimes a_n).$$

Logo, como os polinômios f_i são consequências multihomogêneas de f, que é identidade polinomial de A, pelo Teorema 1.23 cada f_i é identidade polinomial de A, assim pelo que foi provado na parte a) temos que

$$f(c_{11} \otimes a_{11} + c_{12} \otimes a_{12}, c_2 \otimes a_2, \ldots, c_n \otimes a_n) = 0.$$

Para generalizar o argumento, sejam $b_1 = \sum c_{ij_1} \otimes a_{ij_1}, \ldots, b_n = \sum c_{ij_n} \otimes a_{ij_n}$, onde $c_{ij_l} \in C$ e $a_{ij_l} \in A$, então podemos escrever $f(\sum c_{ij_1} \otimes a_{ij_1}, \ldots, \sum c_{ij_n} \otimes a_{ij_n})$ como uma soma de expressões da forma

$$\overline{g} = g(c_{i_1 j_1} \otimes a_{i_1 j_1}, \ldots, c_{i_k j_k} \otimes a_{i_k j_k}),$$

onde $g(x_1, \ldots, x_k)$ é uma componente multihomogênea de f, de novo pela parte a) $\overline{g} = 0$. Portanto $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ em $C \otimes_{\mathbb{F}} A$.

$\square$

1.3 Teorema de Kaplansky

Nesta seção, apresentamos um teorema de estrutura da teoria de PI-álgebras conhecido como o teorema de Kaplansky, que foi provado em 1948 (ver [14]), e que estabelece quais anéis primitivos satisfazem uma identidade polinomial. Começaremos lembrando algumas definições e resultados que nos permitirão apresentar uma prova deste teorema. Para mais detalhes desses resultados pode consultar os livros [13], [20] e [21].

Seja A um anel e M um A-módulo à esquerda, denotemos por $\operatorname{End}_A(M)$ o anel de A-homomorfismos de M em M. Dizemos que M é ***simples*** se não tem A-submódulos próprios não nulos.

Lema 1.33 (Lema de Schur's)**.** *Se M é um A-modulo simples, então $\operatorname{End}_A(M)$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Seja $0 \neq f \in \operatorname{End}_A(M)$, então $ker f$ e $\operatorname{Im} f$ são A-submódulos de M. Portanto, como M é simples e $f \neq 0$ temos que $ker f = 0$ e $\operatorname{Im} f = M$. É dizer, f é um isomorfismo, daí que existe $0 \neq f^{-1} \in \operatorname{End}_A(M)$. $\square$

O ***anulador*** de M sobre A é definido como $\operatorname{Ann}_A(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$. Se o $\operatorname{Ann}_A(M) = 0$ então A é dito ***fiel***. Um anel $A \neq 0$ é dito ***simples*** se não tem ideais próprios não nulos.

Definição 1.34. *Um anel A é dito **primitivo** à esquerda se existe um A-módulo à esquerda M simples e fiel.*

Exemplo 1.35. *Cada anel simples A é um anel primitivo à esquerda. Isto segue do fato que todo anel não nulo A possui, pelo lema de Zorn, um ideal à esquerda maximal I, então $M = A/I$ é um A-modulo à esquerda simples e fiel.*

Proposição 1.36. *Seja D um anel de divisão com centro $Z = Z(D)$, K um subcorpo de D e seja $A = D \otimes_Z K$. então*

a) A é um anel simples e portanto primitivo.

b) D é um A-módulo à esquerda simples fiel, e se K é um subcorpo maximal então $\operatorname{End}_A(D) \cong K$.

Demonstração. Suponhamos que A não é simples, e seja I um ideal bilateral não nulo de A. Seja $\{k_j \mid j \in J\}$ uma Z-base para K e escolhamos o menor inteiro n para o qual existe $0 \neq x = \sum_{j=1}^{n} d_j \otimes k_{t_j} \in I$. Então $d_1 \neq 0$ e assim, substituindo x com $(d_1^{-1} \otimes 1)x$ se fosse necessário, podemos assumir $d_1 = 1$. Assim, para qualquer $d \in D$ temos

$$\sum_{j=1}^{n} (dd_j - d_j d) \otimes k_{t_j} = (d \otimes 1)x - x(d \otimes 1) \in I.$$

De onde, pela minimalidade de n, obtemos que $dd_j = d_j d$, daí que $d_j \in Z$ para todo j. Logo $x = 1 \otimes k$ para algum $k \in K$. Mas, $1_A = 1 \otimes 1 = (1 \otimes k^{-1})x \in I$, assim $I = A$. Por tanto, A é simples.

Para a segunda parte do teorema, definamos $(d_1 \otimes k) \cdot d_2 = d_1 d_2 k$ para todo $d_1, d_2 \in D$ e $k \in K$, e estendemos por linealidade. É claro que com essa ação D é um A-módulo à esquerda. Como o anulador de D sobre A, $\operatorname{Ann}_A(D)$, é um ideal de A e A é simples, então $\operatorname{Ann}_A(D) = 0$, daí que D é um A-módulo fiel. Agora, para provar que D é um A-módulo simples, sejam $d_1, d_2 \in D$ então $(d_2 d_1^{-1} \otimes 1)d_1 = d_2$, assim $Ad_1 = D$. Portanto D é um A-módulo simples. Para provar que $\operatorname{End}_A(D) \cong K$, definamos a aplicação $\varphi : \operatorname{End}_A(D) \to K$ por $\varphi(f) = f(1)$ para todo $f \in \operatorname{End}_A(D)$. Como K é um subcorpo maximal segue que φ é um isomorfismo, pois o centralizador de K em D é o mesmo K. □

Proposição 1.37. *Seja A um anel primitivo à esquerda com um A-módulo M simples fiel. Seja $D = \operatorname{End}_A(M)$. Então*

a) Se $\dim_D M = n < \infty$ então $A \cong M_n(D)$.

b) Se $\dim_D M = \infty$ então, para cada inteiro $n \geqslant 1$, $M_n(D)$ é a imagem homomórfica de algum subanel A_n de A.

Lema 1.38. *Seja A uma álgebra primitiva à esquerda com um A-módulo M simples fiel. Seja $D = \operatorname{End}_A(M)$. Se A satisfaz uma identidade polinomial f de grau d então $\dim_D M = n \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ e $A \cong M_n(D)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\dim_D M > \lfloor d/2 \rfloor$, então, pela Proposição 1.37, existe $k > \lfloor d/2 \rfloor$ tal que $A \cong M_k(D)$ ou $M_k(D)$ é a imagem homomórfica de algum subanel A_k de A. Em ambos casos, $M_k(D)$ e portanto $M_k(\mathrm{Z}(D))$ satisfazem f, pois às identidades polinomiais são herdadas pelas subálgebras e pelas imagens homomórficas. Como da Proposição 1.22, $M_k(\mathrm{Z}(D))$ não satisfaz identidades de grau menor que $2k$, então $d \geqslant 2k \geqslant 2(\lfloor d/2 \rfloor + 1) > d$, o que é uma contradição. □

Teorema 1.39 (de Kaplansky)**.** *Seja A uma álgebra primitiva que satisfaz uma identidade polinomial de grau d. Então A é uma álgebra central simples de dimensão finita e* $\dim_{\mathrm{Z}(A)} A \leqslant (\lfloor d/2 \rfloor)^2$.

Demonstração. Seja f uma identidade polinomial de A de grau d e suponhamos, pelo Teorema 1.29, que f é multilinear. Como A é primitiva, existe um A-módulo M simples fiel. Seja $D = \mathrm{End}_A(M)$. Se $\dim_D M = \infty$, então, pela Proposição 1.37, para cada inteiro $n \geqslant 1$, $M_n(D)$ é a imagem homomórfica de algum subanel A_n de A. Como identidades polinomiais são herdadas pelas subálgebras e pelas imagens homomórficas, segue que $M_n(D)$ e portanto $M_n(\mathrm{Z}(D))$ são satisfeitas por f. Pela Proposição 1.22, $M_n(\mathrm{Z}(D))$ não satisfaz identidades de grau menor que $2n$, então $n \leqslant d/2$. Isto é uma contradição. Portanto, $\dim_D M = n < \infty$ e de novo pela Proposição 1.37, $A \cong M_n(D)$. Escrevamos $Z = \mathrm{Z}(A)$.

Como f satisfaz $M_n(D)$ e D é subanel de $M_n(D)$, então f satisfaz D. Mas ainda, se K é um subcorpo maximal de D, e como f é multilinear e K é comutativo então, pela Proposição 1.32, f satisfaz $D \otimes_Z K$. Conforme, a proposição 1.36, $D \otimes_Z K$ é primitivo, D é um $D \otimes_Z K$-módulo simples fiel e $\mathrm{End}_{D\otimes_Z K}(D) \cong K$, então pelo Lema 1.38, $\dim_K D = m \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ e $D \otimes_Z K \cong M_m(K)$. Portanto,

$$A \subseteq A \otimes_Z K \cong M_n(D) \otimes_Z K \cong M_n(D \otimes_Z K) \cong M_n(M_m(K)) \cong M_{nm}(K).$$

Logo, como f é multilinear e satisfaz A, então f satisfaz $M_{nm}(K)$. E como, pela Proposição 1.22, $M_{nm}(K)$ não satisfaz uma identidade de grau menor que nm, temos que $nm \leqslant d/2$. Portanto, $\dim_Z A = \dim_Z(A \otimes_Z K) = (nm)^2 \leqslant (\lfloor d/2 \rfloor)^2$. □

Notemos que, pelo teorema de Kaplansky, um anel primitivo A satisfaz uma identidade polinomial se, e somente se A é uma álgebra de divisão central e de dimensão finita.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA DE WEYL

Neste capítulo, estudaremos a álgebra de Weyl, algumas de suas propriedades e sua estrutura. No caso em que a álgebra seja definida sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero, nós iremos demonstrar que essa álgebra é central e simples, além de ser isomorfa ao anel de operadores diferenciais com coeficientes polinomiais, Alguns dos resultados aqui apresentados podem-se encontrar em [9], mas as provas não são necessariamente as mesmas. Porém, se a álgebra é definida sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica positiva $p > 0$, nós vamos demonstrar que a dita álgebra contém uma subálgebra isomorfa à álgebra $M_p(\mathbb{F})$ das matrizes $p \times p$ sobre $\mathbb{F}$. Deve-se notar que os resultados neste capítulo servirão de base para estudar as identidades polinomiais da álgebra de Weyl e sua relação com as identidades polinomiais da álgebra de matrizes.

Definição 2.1. *Seja D um domínio, não necessariamente comutativo. Definimos $A(D)$ sendo a álgebra não comutativa sobre D gerada por x e y com a relação $yx = xy + 1$. É dizer,*

$$A(D) := D\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - 1\}. \tag{2.1}$$

Para cada monômio M em $D\langle x, y\rangle$ a relação $yx = xy + 1$ permite escrever M como a soma de monômios em que as potencias de x aparecem primeiro que as potencias de y.

Na prova do lema a seguir usaremos a seguinte notação: $\#_x(M)$ o número de termos x aparecendo em M (de forma análoga para $\#_y(M)$), e $I(M)$ a soma sobre cada termo y em M do número de termos x que estão à sua direita. Por exemplo, para $M = x^2y^2xy$ temos que: $\#_x(M) = \#_y(M) = 3$ e $I(M) = 1 + 1 + 0 = 2$.

Lema 2.2. *Para qualquer domínio D, cada $z \in A(D)$ pode ser escrito como*

$$z = \sum_J \alpha_{ij} x^i y^j,$$

para algum subconjunto finito $J = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ e $\alpha_{ij} \in D$.

Demonstração. Seja $z \in A(D)$, então z pode ser escrito como uma soma finita na forma $z = \sum_i M_i$, onde $M_i = \alpha_i x^{r_{i1}} y^{s_{i1}} x^{r_{i2}} y^{s_{i2}} \cdots x^{r_{in_i}} y^{s_{in_i}}$ com $\alpha_i \in D$, $n_i \in \mathbb{Z}^+$, e os exponentes r_{i_1} ou s_{in_i} poderiam ser 0. Notemos que x e y comutam com os elementos do domínio D.

Definamos $I(z) = \max\{I(M_i)\}$. Se $I(z) = 0$ então z tem a forma desejada. Suponhamos que $I(z) > 0$, então existe algum M_i com $I(M_i) > 0$, isto é M_i tem pelo menos um fator da forma yx. Assim $M_i = AyxB$, onde A pode estar em D e B pode ser 1. Usando relação $yx = xy + 1$ em M_i nós obtemos,

$$M_i' = AxyB + AB,$$

notemos que

$$\begin{aligned} I(M_i') &= \max\{I(AxyB), I(AB)\} \\ &= \max\{I(M_i) - 1, I(M_i) - \#_x(B) - \#_y(A) - 1\} \\ &= I(M_i) - 1. \end{aligned}$$

Portanto indutivamente, as sucessivas manipulações $M_i \to M_i'$ poderiam terminar em um M_i^* com $I(M_i^*) = 0$. Aplicando o mesmo processo para cada M_i em z, temos uma expressão para z na forma desejada. $\square$

A seguir algumas propriedades da álgebra $A(D)$. Em particular, estas serão usadas para provar que $A(D)$ é um domínio.

Lema 2.3. *Para $i, j \in \mathbb{Z}^+$ e x, y os geradores de $A(D)$ temos,*

a) $yx^i = x^i y + ix^{i-1}$.

b) $y^j x = xy^j + jy^{j-1}$.

Demonstração. Vamos demonstrar só o item *a*), pois a prova do item *b*) é análoga. Usaremos indução sobre $i \geqslant 1$. O caso $i = 1$ é válido, pela definição de $A(D)$. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $i = k$, Então

$$yx^{k+1} = (x^k y + kx^{k-1})x = x^k(xy + 1) + kx^k = x^{k+1}y + (k + 1)x^k.$$

Portanto, $yx^{k+1} = x^{k+1}y + (k + 1)x^k$. Isso finaliza a prova. $\square$

Lembremos que $\binom{n}{k}$ é definido como sendo $n!/k!(n-k)!$ para cada $n \geqslant k \geqslant 0$, e sendo 0 em qualquer outro caso.

Lema 2.4. *Para $i, j \in \mathbb{Z}^+$ e x, y os geradores de $A(D)$ temos,*

$$y^j x^i = \sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} k! \binom{i}{k} \binom{j}{k} x^{i-k} y^{j-k}.$$

Demonstração. Usaremos indução sobre $j \geqslant 1$. Para $j = 1$, o resultado é claro pelo Lema 2.3. Pois,

$$yx^i = x^i y + ix^{i-1} = \sum_{k=0}^{\min\{i,1\}} k! \binom{i}{k} \binom{1}{k} x^{i-k} y^{1-k}.$$

Suponhamos que a afirmação é certa para $j = n$, Então pelo Lema 2.3, e a igualdade $k!(i-k)\binom{i}{k} = (k+1)!\binom{i}{k+1}$ temos

$$\begin{aligned} y^{n+1}x^i &= \sum_{k=0}^{\min\{i,n\}} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} yx^{i-k} y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{i,n\}} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} x^{i-k} y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{\min\{i,n\}} (k+1)! \binom{i}{k+1} \binom{n}{k} x^{i-k-1} y^{n-k}. \end{aligned}$$

Agora, consideremos dois casos:

<u>Caso 1</u>: Se $i \leqslant n$, então $\min\{i,n\} = \min\{i, n+1\} = i$, temos que

$$\begin{aligned} y^{n+1}x^i &= \sum_{k=0}^{i} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} x^{i-k} y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{i-1} (k+1)! \binom{i}{k+1} \binom{n}{k} x^{i-k-1} y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{i} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} x^{i-k} y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{i} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k-1} x^{i-k} y^{n-k+1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$y^{n+1}x^i = \sum_{k=0}^{\min\{i,n+1\}} k! \binom{i}{k} \binom{n+1}{k} x^{i-k} y^{n-k+1}.$$

<u>Caso 2</u>: Se $i > n$, então $\min\{i,n\} = n$ e $\min\{i, n+1\} = n+1$, temos

$$\begin{aligned} y^{n+1}x^i &= \sum_{k=0}^{n} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} x^{i-k} y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)! \binom{i}{k+1} \binom{n}{k} x^{i-k-1} y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k} x^{i-k} y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} k! \binom{i}{k} \binom{n}{k-1} x^{i-k} y^{n-k+1} \end{aligned}$$

Assim,

$$y^{n+1}x^i = \sum_{k=0}^{\min\{i,n+1\}} k! \binom{i}{k} \binom{n+1}{k} x^{i-k} y^{n-k+1}.$$

Portanto a demonstração é concluída. □

Uma consequência imediata do Lema 2.4 é o seguinte resultado.

Corolário 2.5. *Para $i, j, r, s \in \mathbb{Z}^+$ e x, y os geradores de $A(D)$ temos,*

$$x^i y^j x^r y^s = \sum_{k=0}^{\min\{r,j\}} k! \binom{j}{k} \binom{r}{k} x^{i+r-k} y^{j+s-k}.$$

Definição 2.6. *Seja $z \in A(D)$ tal que $z = \sum \alpha_{ij} x^i y^j$. Definimos o* ***grau de z****, denotado por* $\deg(z)$*, como:*

$$\deg(z) := \max\{i + j : (i, j) \in S\}$$

onde $S = \{(i, j) : \alpha_{ij} \neq 0\}$.

Definimos $\deg(0) = -\infty$*, e os termos líderes de z como sendo os termos $\alpha_{ij} x^i y^j$ tais que $i + j = \deg(z)$, é dizer os termos de grau maximal.*

Lema 2.7. *Sejam $z, w \in A(D)$ então* $\deg(zw) = \deg(z) + \deg(w)$*.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2, podemos escrever z e w da maneira seguinte:

$$z = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} x^i y^j \quad e \quad w = \sum_{r,s \geqslant 0} \beta_{r,s} x^r y^s,$$

logo, pelo Corolário 2.5,

$$zw = \sum_{i,j \geqslant 0} \sum_{r,s \geqslant 0} \alpha_{ij} \beta_{rs} \left(\sum_{k=0}^{\min\{r,j\}} k! \binom{j}{k} \binom{r}{k} x^{i+r-k} y^{j+s-k} \right).$$

Como os termos líderes nesta soma são da forma $\alpha_{ij} \beta_{rs} x^{i+r} y^{j+s}$, onde $i + j = deg(z)$ e $r + s = deg(w)$, então concluímos que:

$$\deg(zw) = i + r + j + s = \deg(z) + \deg(w).$$

□

O Lema 2.7 permite provar que $A(D)$ é um domínio, fato que será usado para definir as Álgebras de Weyl, que são nossos objetos de estudo.

Proposição 2.8. *$A(D)$ é um domínio*

Demonstração. Sejam $0 \neq z, w \in A(D)$, então $\deg(z), \deg(w) \geqslant 0$. Daí que $\deg(zw) = \deg(z) + \deg(w) \geqslant 0$. Portanto $zw \neq 0$, e assim $A(D)$ é um domínio. □

2.1 Álgebra de Weyl sobre corpos de característica zero

Nesta seção, consideramos $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero ($\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$), definimos a n-ésima álgebra de Weyl sobre $\mathbb{F}$, que será denotada por A_n, e mostraremos que dita álgebra é isomorfa a uma subálgebra de endomorfismos lineares definidos no anel de polinômios $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$. Além disso, provaremos que A_n é uma álgebra central simples. Estas propriedades junto ao teorema de Kaplansky serão usadas, no capitulo seguinte, para justificar porque a álgebra de Weyl, definida sobre um corpo característica zero, não possui identidades polinomiais.

Definição 2.9. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Definimos a* ***primeira Álgebra de Weyl****, denotada por $\mathsf{A}_1(\mathbb{F})$, sendo a álgebra $A(\mathbb{F})$. É dizer,*

$$\mathsf{A}_1(\mathbb{F}) := \mathbb{F}\langle x, y\rangle / \mathrm{id}\{yx - xy - 1\}.$$

Para $n > 1$ definimos a ***n-ésima Álgebra de Weyl*** *recursivamente por:*

$$\mathsf{A}_n(\mathbb{F}) := A(\mathsf{A}_{n-1}(\mathbb{F})).$$

Por conveniência, assumimos $\mathsf{A}_0(\mathbb{F}) := \mathbb{F}$.

Às vezes, se não houver confusão, escrevemos A_n em vez de $\mathsf{A}_n(\mathbb{F})$. A definição de A_n tem sentido pois A_{n-1} é um domínio (veja Proposição 2.8). Para $n > 1$, existe uma relação implícita dada por $x_i y_j - y_j x_i = 0$ para $i \neq j$, ou seja os geradores de A_n de índice distinto comutam. Podemos expressar A_n como quociente assim:

$$\mathsf{A}_n = \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle / I,$$

onde o ideal I é gerado pelas relações $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[y_i, y_j] = 0$, e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Proposição 2.10. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$, cada $z \in \mathsf{A}_n$ pode ser escrito na forma*

$$z = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \geqslant 0 \\ j_1,\ldots,j_n \geqslant 0}} \alpha_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}$$

Demonstração. Usamos indução sobre $n \geqslant 1$. Como $\mathbb{F}$ é um domínio (pois é um corpo) então, pelo Lema 2.2, o resultado é verdadeiro para $n = 1$. Suponhamos que o resultado é certo para $n - 1$. Seja $z \in \mathsf{A}_n$, então como A_n é definido recursivamente por $\mathsf{A}_n = A(\mathsf{A}_{n-1})$, onde A_{n-1} é um domínio, temos pelo Lema 2.2 que $z \in \mathsf{A}_n$ pode se escrever na forma

$$z = \sum_{i_n j_n \geqslant 0} \beta_{i_n j_n} x_n^{i_n} y_n^{j_n},$$

onde $\beta_{i_n j_n} \in \mathsf{A}_{n-1}$. Pela hipótese de indução temos que,

$$\beta_{i_n j_n} = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}\geqslant 0\\ j_1,\ldots,j_{n-1}\geqslant 0}} \alpha_{i_1\ldots i_{n-1}j_1\ldots j_{n-1}} x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} y_1^{j_1}\cdots y_{n-1}^{j_{n-1}},$$

assim

$$z = \sum_{i_n,j_n\geqslant 0}\Big(\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1}\geqslant 0\\ j_1,\ldots,j_{n-1}\geqslant 0}} \alpha_{i_1\ldots i_{n-1}j_1\ldots j_{n-1}} x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} y_1^{j_1}\cdots y_{n-1}^{j_{n-1}}\Big) x_n^{i_n} y_n^{j_n}.$$

Finalmente, como $y_k x_n = x_n y_k$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$, pois em A_n os geradores de índice distinto comutam, então

$$z = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n\geqslant 0\\ j_1,\ldots,j_n\geqslant 0}} \alpha_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1}\cdots y_n^{j_n}.$$

□

Por comodidade na escrita introduzimos a notação multi-índice. Um ***multi-índice*** $\underline{i}$ é um elemento de $\mathbb{N}_0^n$ (onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), digamos $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$. Definimos o ***comprimento*** de $\underline{i}$ como sendo $|\underline{i}| = i_1 + \cdots + i_n$. Por $x^{\underline{i}}$ denotamos o monômio $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, o grau desse monômio é o comprimento de $\underline{i}$, é dizer $\deg(x^{\underline{i}}) = |\underline{i}|$. Um par $(\underline{i}, \underline{j})$ de multi-índices em $\mathbb{N}_0^n$ é também um multi-índice em $\mathbb{N}_0^{2n}$. Se não houver espaço para confusão, o multi-índice $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$ será escrito simplesmente como 0.

Em $\mathbb{N}_0^n$ definimos a relação de ordem parcial “ $\preceq$ ” por: $\underline{i} \preceq \underline{j}$ se, e somente se $i_k \leqslant j_k$ para todo $1 \leqslant k \leqslant n$. Note que, se $\underline{i} \preceq \underline{j}$ então $|\underline{i}| \leqslant |\underline{j}|$. Logo, se $|\underline{i}| > |\underline{j}|$ existe um $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $i_k > j_k$, daí que $\underline{i} \npreceq \underline{j}$. Se $\underline{i} \preceq \underline{j}$ também escrevemos $\underline{j} \succeq \underline{i}$.

Observação 2.11. *Usando notação multi-índice, reescrevemos a proposição 2.10 assim: Para $n \in \mathbb{Z}^+$, cada $z \in \mathsf{A}_n$ pode ser escrito na forma,*

$$z = \sum_{\underline{i},\underline{j}\succeq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}.$$

Agora, seja $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ o anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em $\mathbb{F}$, então $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n])$ é a $\mathbb{F}$-álgebra dos endomorfismos $\mathbb{F}$-lineais do $\mathbb{F}$-espaço vetorial $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, onde a multiplicação é a composição de endomorfismos. É claro que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n])$ é um anel não-comutativo com unidade a aplicação identidade.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, as aplicações lineais $f_i, \partial_i : \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] \to \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ definidas por $f_i(h(z_1, \ldots, z_n)) = z_i h(z_1, \ldots, z_n)$ e $\partial_i(h(z_1, \ldots, z_n)) = \dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ para todo $h \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$, onde $\dfrac{\partial h}{\partial z_i}$ é a derivada parcial de h respeito a z_i, são endomorfismo de $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$.

Definição 2.12. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos a álgebra A'_n como sendo a subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n])$ gerada pelos endomorfismos $f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$. É dizer,*

$$\mathsf{A}'_n = alg_{\mathbb{F}}\{f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}.$$

No caso particular $n = 1$, usaremos f e ∂ no lugar de $f_1, \partial_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z])$, respectivamente. Assim, $\mathsf{A}'_1 = alg_{\mathbb{F}}\{f, \partial\}$.

Observe que em A'_1, aplicando a regra de Leibniz's para a derivação do produto temos:

$$(\partial \cdot f)(h) = \frac{\partial}{\partial z}(zh) = z\frac{\partial h}{\partial z} + h = f(\partial h) + h = (f \cdot \partial + 1)(h),$$

portanto $\partial \cdot f = f \cdot \partial + 1$, onde 1 é a aplicação identidade em $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z])$. Esta propriedade se estende naturalmente a A'_n.

Lema 2.13. *Em A'_n temos as seguintes relações:*

a) $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ *e* $f_i f_j = f_j f_i$.

b) $\partial_i f_j = f_j \partial_i + \delta_{ij}$,

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Demonstração. O item *a*) é claro pela definição de f_i e ∂_i. Vamos provar o item *b*). Seja $h \in \mathbb{F}[z_1 \ldots, z_n]$, então pela regra de Leibniz's para a derivação do produto temos,

$$\partial_i f_j(h) = \partial_i(z_j h) = \begin{cases} h + z_i \partial_i(h) & se \quad i = j \\ z_j \partial_i(h) & se \quad i \neq j \end{cases} = \begin{cases} (1 + f_i \partial_i)(h) & se \quad i = j \\ f_j \partial_i(h) & se \quad i \neq j \end{cases}$$

onde 1 é a aplicação identidade em $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[z_1 \ldots, z_n])$. Portanto, $\partial_i f_j = f_j \partial_i + \delta_{ij}$. □

As relações obtidas no lema anterior permitem expressar a álgebra A'_n como um quociente assim,

$$\mathsf{A}'_n = \mathbb{F}\langle f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle / \mathrm{id}\{\partial_i f_j - f_j \partial_i - \delta_{ij}\}.$$

Usando notação multi-índice, denotamos por $f^{\underline{i}}$ e $\partial^{\underline{j}}$ os monômios $f_1^{i_1} \cdots f_n^{i_n}$ e $\partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}$, respectivamente.

Proposição 2.14. *Para $n \in \mathbb{Z}^+$, cada $g \in \mathsf{A}'_n$ pode ser escrito na forma*

$$g = \sum_{\underline{i}, \underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}.$$

Demonstração. Escrevendo A'_n recursivamente como $\mathsf{A}'_{n-1}\langle f_n, \partial_n \rangle$ e usando a relação $\partial_n f_n = f_n \partial_n + 1$, o resultado é obtido da mesma forma que na prova da Proposição 2.10. □

Consideremos o homomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle \longrightarrow \mathsf{A}'_n$ definida por:

$$\phi(x_i) = f_i \quad \text{e} \quad \phi(y_i) = \partial_i$$

Lema 2.15. *O homomorfismo ϕ induz um homomorfismo de álgebras $\overline{\phi} : \mathsf{A}_n \longrightarrow \mathsf{A}'_n$.*

Demonstração. Pelo parte b) do Lema 2.13, temos que:

$$\phi(y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}) = \partial_i f_j - f_j \partial_i - \delta_{ij} = 0.$$

Portanto, ϕ induz um homomorfismo de álgebras $\overline{\phi} : \mathsf{A}_n \longrightarrow \mathsf{A}'_n$. □

Agora, vamos provar que a representação para os elementos de A'_n, obtida na Proposição 2.14, é única. Para isso, consideramos primeiro o seguinte resultado.

Lema 2.16. *Sejam $\underline{i}, \underline{j} \in \mathbb{N}_0^n$ então*

$$\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{i}}) = \begin{cases} c(\underline{i}, \underline{j}) z^{\underline{i}-\underline{j}} & \text{se } \ \underline{j} \preceq \underline{i} \\ \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

onde $c(\underline{i}, \underline{j}) = \dfrac{\underline{i}!}{(\underline{i} - \underline{j})!}$ e $\underline{i}! = i_1! \cdots i_n!$. Em particular, $\partial^{\underline{i}}(z^{\underline{i}}) = c(\underline{i}, \underline{i}) = \underline{i}!$.

Demonstração. É claro que $\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{i}}) = \partial_1^{j_1}(z_1^{i_1}) \cdots \partial_n^{j_n}(z_n^{i_n})$. Logo, se $\underline{j} \preceq \underline{i}$ então $j_k \leqslant i_k$ para todo $1 \leqslant k \leqslant n$, daí que $\partial_k^{j_k}(z_k^{i_k}) = \dfrac{i_k!}{(i_k - j_k)!} z_k^{i_k - j_k}$. Portanto,

$$\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{i}}) = \frac{i_1!}{(i_1 - j_1)!} z_1^{i_1 - j_1} \cdots \frac{i_n!}{(i_n - j_n)!} z_n^{i_n - j_n} = \frac{\underline{i}!}{(\underline{i} - \underline{j})!} z^{\underline{i}-\underline{j}}.$$

Caso contrario, existe $1 \leqslant k \leqslant n$ tal que $j_k > i_k$, daí que $\partial_k^{j_k}(z_k^{i_k}) = 0$, assim $\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{i}}) = 0$. □

Proposição 2.17. *A representação de $g \in \mathsf{A}'_n$ na forma*

$$g = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}.$$

é única.

Demonstração. Suponhamos que g tem duas representações na forma desejada, digamos

$$\sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}} = g = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \beta_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}.$$

Consideremos o operador linear

$$D = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \gamma_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}} = 0,$$

onde $\gamma_{\underline{i}\underline{j}} = \alpha_{\underline{i}\underline{j}} - \beta_{\underline{i}\underline{j}}$. Vamos provar que $D \neq 0$, é dizer que existe $h \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ tal que $D(h) \neq 0$, o que será uma contradição. Seja $\underline{k}$ um multi-índice tal que $\gamma_{\underline{i}\underline{k}} \neq 0$ para algum multi-índice $\underline{i}$ e $\gamma_{\underline{i}\underline{j}} = 0$ para todo índice $\underline{j}$ tal que $|\underline{j}| > |\underline{k}|$, então

$$D(z^{\underline{k}}) = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \gamma_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}(z^{\underline{k}}) = \sum_{\substack{0 \leq \underline{j} \leq \underline{k} \\ \underline{i} \geq 0}} \gamma_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}(z^{\underline{k}}),$$

Logo pelo Lema 2.16,

$$D(z^{\underline{k}}) = \sum_{\underline{i} \geq 0} \gamma_{\underline{i}\underline{k}} f^{\underline{i}}(c(\underline{k}, \underline{j}) z^{\underline{k}-\underline{j}}) = \sum_{\underline{i} \geq 0} \gamma_{\underline{i}\underline{k}} c(\underline{k}, \underline{j}) z^{\underline{i}+\underline{k}-\underline{j}},$$

onde $c(\underline{k}, \underline{j}) = \dfrac{\underline{k}!}{(\underline{k} - \underline{j})!}$. Como $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ temos que $c(\underline{k}, \underline{j}) \neq 0$, ademais pela escolha de $\underline{k}$ temos que $\gamma_{\underline{i}\underline{k}} \neq 0$ para algum $\underline{i}$, daí que $D(z^{\underline{k}}) \neq 0$. Portanto, $D \neq 0$. □

A seguir uma consequência do Lema 2.15 e da Proposição 2.17.

Proposição 2.18. *A representação de $z \in \mathsf{A}_n$ na forma*

$$z = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}.$$

é única.

Demonstração. Suponhamos que $z \in \mathsf{A}_n$ tem duas representações digamos,

$$\sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}} = z = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \beta_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}}$$

Sabemos, pelo Lema 2.15, que o homomorfismo de álgebras $\overline{\phi} : \mathsf{A}_n \longrightarrow \mathsf{A}'_n$ é tal que $x_i \mapsto f_i$ e $y_i \mapsto \partial_i$, daí que:

$$\sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}} = \overline{\phi}(z) = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \beta_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}$$

Portanto, $\overline{\phi}(z) \in \mathsf{A}'_n$ tem duas representações, o qual não é possível pois contradiz a Proposição 2.17.

□

Teorema 2.19. $\mathsf{A}_n \cong \mathsf{A}'_n$

Demonstração. Pelo Lema 2.15, o homomorfismo de álgebras $\overline{\phi} : \mathsf{A}_n \longrightarrow \mathsf{A}'_n$ satisfaz que $x_i \mapsto f_i$ e $y_i \mapsto \partial_i$, logo é suficiente provar que $\overline{\phi}$ é bijetiva. De fato, pela Proposição 2.14 todo $g \in \mathsf{A}'_n$ pode ser expressado na forma:

$$g = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}},$$

logo existe $z \in \mathsf{A}_n$ definido por

$$z = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}},$$

tal que $\overline{\phi}(z) = h$. Portanto $\overline{\phi}$ é sobrejetora.

Por outro lado, seja $w \in \mathsf{A}_n$ e suponhamos que $\overline{\phi}(w) = 0$. Pela Proposição 2.14, podemos escrever w assim:

$$w = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \beta_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}},$$

daí que

$$\overline{\phi}(w) = \sum_{\underline{i},\underline{j} \geq 0} \beta_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}} = 0.$$

Por conseguinte, pela unicidade da representação de $\overline{\phi}(w)$, temos que $\beta_{\underline{i}\underline{j}} = 0$ para todos os multi-índices $\underline{i}, \underline{j} \geq 0$. Logo $w = 0$, e portanto $\overline{\phi}$ é injetora. □

A_n é central e simples

Agora, focaremos nosso interesse em demonstrar que a álgebra A_n é central simples, ou seja, queremos provar que A_n não tem ideais próprios não nulos, e que seu centro é $\mathbb{F}$. A seguir, uma propriedade interessante sobre o produto tensorial de álgebras centrais simples, a prova deste resultado pode ser encontrada em ([8], Corolário 3.6.).

Lema 2.20. *Se A e B são álgebras centrais simples, então $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ é uma álgebra central simples.*

O resultado a seguir nos permite ver a álgebra A_n como um produto tensorial de n cópias da álgebra A_1, denotamos esse produto por $\mathsf{A}_1^{\otimes n} = \underbrace{\mathsf{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{A}_1}_{n\text{-fatores}}$.

Lema 2.21. *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, a n-ésima álgebra de Weyl A_n é isomorfa com o produto tensorial de n copias da primeira álgebra de Weyl A_1. É dizer*

$$\mathsf{A}_n \cong \underbrace{\mathsf{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{A}_1}_{n\text{-fatores}} = \mathsf{A}_1^{\otimes n}$$

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathsf{A}_n \to \mathsf{A}_1^{\otimes n}$ definida por:

$$\begin{aligned} x_i &\to 1^{\otimes(i-1)} \otimes x \otimes 1^{\otimes(n-i)} \\ y_i &\to 1^{\otimes(i-1)} \otimes y \otimes 1^{\otimes(n-i)} \\ 1 &\to 1^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Note que φ está bem definido, pois está definido nos geradores. Para provar que φ é um homomorfismo é suficiente, pela propriedade universal, analisar as imagens das relações definidas em A_n. Então

$$\varphi(y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}) = \begin{cases} 1^{\otimes(i-1)} \otimes (y-y) \otimes 1^{\otimes(j-i-1)} \otimes (x-x) \otimes 1^{\otimes(n-j)} & \text{se } i < j \\ 1^{\otimes(i-1)} \otimes (yx - xy - 1) \otimes 1^{\otimes(n-i)} & \text{se } i = j \\ 1^{\otimes(i-1)} \otimes (x-x) \otimes 1^{\otimes(j-i-1)} \otimes (y-y) \otimes 1^{\otimes(n-j)} & \text{se } i > j \end{cases}$$

de onde $\varphi(y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}) = 0$ em $\mathsf{A}_1^{\otimes n}$. Portanto, φ é um homomorfismo de álgebras.

Por outro lado, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos as aplicações $\phi_i : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_n$, definidas por $x \mapsto x_i$, $y \mapsto y_i$, $1 \mapsto 1$. Como $\phi_i(yx - xy - 1) = y_i x_j - x_j y_i - 1 = 0$ em A_n, então, pela propriedade universal, ϕ_i é um homomorfismo de álgebras. Dado que para cada $i \neq j$, $\phi_i(\mathsf{A}_1)$ e $\phi_j(\mathsf{A}_1)$ comutam, e $\phi_i|_{\mathbb{F}} = \phi_j|_{\mathbb{F}}$ então pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathsf{A}_1^{\otimes n} \to \mathsf{A}_n$ tal que $\phi \cdot \pi_i = \phi_i$ (onde $\pi_i : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1^{\otimes n}$ denota a inclusão canônica, definida por $a \mapsto 1^{\otimes(i-1)} \otimes a \otimes 1^{\otimes(n-i)}$ para cada gerador $a \in \mathsf{A}_1$).

Não é difícil ver que, $\varphi \cdot \phi = id_{\mathsf{A}_1^{\otimes n}}$ e $\phi \cdot \varphi = id_{\mathsf{A}_n}$. Portanto, φ é um isomorfismo de álgebras. □

Em virtude dos dois lemas anteriores, para provar que A_n é central simples, basta demonstrar que A_1 possui essas propriedades. Isso será provado abaixo.

Proposição 2.22. *A álgebra de Weyl A_1 é central simples.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.19, $\mathsf{A}_1 \cong \mathsf{A}_1'$. Provemos primeiro que A_1' é central. Suponhamos que $g \in \mathsf{Z}(\mathsf{A}_1')$, então como $g \in \mathsf{A}_1'$ existe um inteiro $k \geqslant 1$ e polinômios $g_0, \ldots, g_k \in \mathbb{F}[f]$ tais que

$$g = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} f^i \partial^j = \sum_{j=0}^{k} g_j(f) \partial^j.$$

Pelo Lema 2.3 sabemos que $[\partial, f^i] = i f^{i-1} = (f^i)'$, então

$$0 = [\partial, g] = \sum_{j=0}^{k} [\partial, g_j(f)] \partial^j = \sum_{j=0}^{k} g_j'(f) \partial^j,$$

daí que $g_j'(f) = 0$ para $0 \leqslant j \leqslant k$. Logo g_j são constantes, assim $g_j(f) \in \mathbb{F}$ para $0 \leqslant j \leqslant k$. Portanto,

$$g = \sum_{j=0}^{k} a_j \partial^j,$$

onde $a_j = g_j(f)$ para $0 \leqslant j \leqslant k$. Pelo Lema 2.3 sabemos que $[\partial^j, f] = j\partial^{j-1}$, então

$$0 = [g, f] = \sum_{j=0}^{k} a_j[\partial^j, f] = \sum_{j=0}^{k} a_j j \partial^{j-1},$$

de onde $ja_j = 0$ para $0 \leqslant j \leqslant k$. Como $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ então $a_j = 0$ se $j \neq 0$, e assim $g = a_0 \in \mathbb{F}$. Portanto $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1') = \mathbb{F}$.

Agora provemos que A_1' é simples. Seja $0 \neq I$ um ideal bilateral de A_1'. Note que para cada $h \in \mathsf{A}_1'$ temos que $[h, I] = hI - Ih \subseteq I$. Seja $0 \neq g \in I$, então existe um inteiro $k \geqslant 0$ e $g_0, \ldots, g_k \in \mathbb{F}[f]$, com $g_k \neq 0$ tais que

$$g = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} f^i \partial^j = \sum_{j=0}^{k} g_j(f) \partial^j.$$

Pelo Lema 2.3 sabemos que $[\partial^j, f] = j\partial^{j-1}$, então $[g, f] = \sum_{j=1}^{k} g_j(f) j \partial^{j-1} \in I$. Repetindo o processo k vezes temos,

$$[\cdots[[g, f], f], \ldots, f] = k! g_k(f) \in I,$$

de onde $g_k(f) \in I$. Pelo Lema 2.3 sabemos que $[\partial, f^i] = i f^{i-1}$, então se $\alpha = \deg(g_k(f))$ e l é seu coeficiente líder temos que

$$[\partial, \ldots, [\partial, [\partial, g_k(f)]] \cdots] = l\alpha! \in I.$$

Logo, como $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ e $= l\alpha! \in I$ concluímos que $1 \in I$. Portanto, $I = \mathsf{A}_1'$. □

Teorema 2.23. *A n-ésima álgebra de Weyl A_n' é central simples.*

Demonstração. Pela Proposição 2.22 A_1 é central simples. Então, pelos Lemas 2.20 e 2.21, $\mathsf{A}_n \cong \mathsf{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{A}_1$ é central simples. □

2.2 Álgebra de Weyl sobre corpos de característica positiva

Na seção anterior definimos a álgebra de Weyl A_n e a álgebra A_n' sobre um corpo de característica zero, porém, as definições tem sentido sem nenhuma restrição sobre a característica do corpo. Ainda vários resultados da seção anterior continuam sendo certos quando a característica é positiva, outros não. Aqui apresentamos alguns desses resultados que não são preservados.

Desde agora, consideramos que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica positiva $p > 0$ e as álgebras A_n e A'_n definidas sobre $\mathbb{F}$. Neste caso, demostraremos que A'_n não é um domínio, e que A_n não é simples, para mas detalhes ver [26]. Por outro lado, vamos provar que o conjunto $\{f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}} \mid \underline{i} \geq 0 \ \text{ e } \ 0 \leq \underline{j} < p\}$ é uma base para A'_n, o que permite concluir, junto com a Proposição 2.18, que A_n e A'_n não são isomorfos neste caso. Finalmente, damos uma álgebra isomorfa a A'_n.

Lema 2.24. *Em* $\mathsf{A}'_n = \operatorname{alg}_{\mathbb{F}}\{f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *temos* $\partial_i^p = 0$. *Além disso,* $\partial_i^{p-1} \neq 0$.

Demonstração. É suficiente provar que $\partial_i^p(z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}) = 0$. Observa-se que: Se $k_i < p$ então $\partial_i^p(z_i^{k_i}) = 0$, daí que

$$\partial_i^p(z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}) = z_1^{k_1} \cdots z_{i-1}^{k_{i-1}} \partial_i^p(z_i^{k_i}) z_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots z_n^{k_n} = 0.$$

Agora, como $p \mid k_i(k_i-1)\cdots(k_i-p+1)$ então $\partial_i^p(z_i^{k_i}) = k_i(k_i-1)\cdots(k_i-p+1)z_i^{k_i-p} = 0$, portanto

$$\partial_i^p(z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}) = z_1^{k_1} \cdots z_{i-1}^{k_{i-1}} \partial_i^p(z_i^{k_i}) z_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots z_n^{k_n} = 0.$$

Por outro lado, como $\partial_i^{p-1}(z_i^{p-1}) = (p-1)(p-2)\cdots 1 \neq 0$, então $\partial_i^{p-1} \neq 0$. □

O lema anterior implica que A'_n tem elementos nilpotentes, e em particular implica que A'_n não é um domínio.

Corolário 2.25. A'_n *não é um domínio*

Demonstração. Pelo Lema 2.24, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ temos que $\partial_i, \partial_i^{p-1} \neq 0$, mais $\partial_i \partial_i^{p-1} = \partial_i^p = 0$. □

Lema 2.26. *Para todo* $z \in \mathsf{A}_1$ *temos*

a) $yz - zy = \dfrac{dz}{dx}$.

b) $xz - zx = -\dfrac{dz}{dy}$.

Demonstração. Provemos o item a). Sabemos que cada $z \in \mathsf{A}_1$ tem a forma $z = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} x^i y^j$, logo é suficiente provar o resultado para cada termo $x^i y^j$. Pelo Lema 2.3 temos,

$$y(x^i y^j) = x^i y^{j+1} + i x^{i-1} y^j = (x^i y^j) y + \frac{d}{dx}(x^i y^j).$$

A prova do item b) é similar. □

O seguinte resultado é consequência direta do lema anterior.

Corolário 2.27. A_1 *não é simples.*

Demonstração. Seja $z = x^p \in \mathsf{A}_n$, claramente x^p comuta com x. Vejamos que x^p comuta com y, de fato pelo Lema 2.26 temos

$$yx^p - x^p y = \frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1} = 0.$$

Assim x^p comuta com x e y, logo comuta com cada elemento de A_1, assim o ideal $I = \mathrm{id}\{x^p\}$ é um ideal bilateral de A_1. Portanto, A_1 não é simples. $\square$

Outra propriedade que não se preserva quando trabalhamos com característica positiva é o fato que a álgebra de Weyl seja central, pois por exemplo o centro de A_1 é o anel de polinômios $\mathbb{F}[x^p, y^p]$.

Proposição 2.28. *O centro da álgebra de Weyl* A_1 *é* $\mathsf{Z}(\mathsf{A}_1) = \mathbb{F}[x^p, y^p]$.

Demonstração. Do Lema 2.26, x^p e y^p comutam com x e y, daí que comutam com cada elemento de A_1, assim $x^p, y^p \in \mathsf{Z}(\mathsf{A}_1)$. Portanto, $\mathbb{F}[x^p, y^p] \subseteq \mathsf{Z}(\mathsf{A}_1)$. Seja $a \in \mathsf{A}_1 \backslash \mathbb{F}[x^p, y^p]$, então pela Proposição 2.10, podemos escrever $a \in \mathsf{A}_1$ na forma

$$a = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} x^i y^j.$$

Seja $b \in \mathsf{A}_1$, obtido de a eliminando os elementos $\alpha_{ij} x^i y^j$ tais que $i, j \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$, e dizer

$$b = \sum_{p \nmid i,\ p \nmid j} \alpha_{ij} x^i y^j.$$

É claro que $b \neq 0$. Se b contém algum $\alpha_{ij} x^i y^j$ tal que $p \nmid i$, então podemos escrever b na forma

$$b = \sum_{p \nmid i} x^i p_i(y),$$

assim, pelo Lema 2.26

$$yb - by = \frac{d}{dx}\left(\sum_{p \nmid i} x^i p_i(y)\right) = \sum_{p \nmid i} i x^{i-1} p_i(y) \neq 0$$

em A_1, daí que $b \notin \mathsf{Z}(\mathsf{A}_1)$. Por outro lado, se b contém algum termo $\alpha_{ij} x^i y^j$ tal que $p \nmid j$, então podemos escrever b na forma

$$b = \sum_{p \nmid j} p_j(x) y^j,$$

assim, pelo Lema 2.26

$$bx - xb = \frac{d}{dy}\left(\sum_{p \nmid j} p_j(x) y^j\right) = \sum_{p \nmid i} j p_j(x) y^{j-1} \neq 0$$

em A_1, daí que $b \notin \mathsf{Z}(\mathsf{A}_1)$. Em ambos casos, b não é central. Portanto, $\mathsf{Z}(\mathsf{A}_1) = \mathbb{F}[x^p, y^p]$. $\square$

Observação 2.29. *O resultado anterior permite concluir que* A_1 *é um módulo sobre* $\mathbb{F}[x^p, y^p]$. *Mas ainda, é possível provar que o centro da n-ésima álgebra de Weyl* A_n *é* $\mathsf{Z}(\mathsf{A}_n) = \mathbb{F}[x_1^p, \ldots, x_n^p, y_1^p, \ldots, y_n^p]$.

Ainda que a álgebra A'_n não seja isomorfa com A_n, existe uma bálgebra que é isomorfa A'_n, para mostrar isto, começaremos dando uma base para A'_n. Notamos por $\underline{p}$ (ou simplesmente p) o multi-índice $(p, \ldots, p) \in \mathbb{N}_0^n$.

Lema 2.30. *Uma base de* $\mathsf{A}'_n = alg_{\mathbb{F}}\{f_1, \ldots, f_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}$ *é o conjunto*

$$\beta'_n = \{f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}} \mid \underline{i} \geq 0 \quad e \quad 0 \leq \underline{j} < p\}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.14 e o Lema 2.24 é claro que β'_n gera A'_n como espaço vetorial. Portanto é suficiente provar que β'_n é linearmente independente.

Suponhamos que existem escalares não todos nulos $\alpha_{\underline{i}\underline{j}} \in \mathbb{F}$, tais que

$$\sum_{\substack{0 \leq \underline{j} < p \\ \underline{i} \geq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}} = 0$$

em A'_n. Consideremos o operador

$$D = \sum_{\substack{0 \leq \underline{j} < p \\ \underline{i} \geq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}},$$

e provemos que $D \neq 0$, e dizer que existe $p \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ tal que $D(p) \neq 0$. O que constitui em uma contradição. Seja $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$ um multi-índice, com $0 \leq \underline{k} < p$, tal que $\alpha_{\underline{i}\underline{k}} \neq 0$ para algum $\underline{i} \geq 0$, mais $\alpha_{\underline{i}\underline{j}} = 0$ para todo multi-índice $0 \leq \underline{j} < p$ tal que $|\underline{j}| > |\underline{k}|$, então

$$D(z^{\underline{k}}) = \sum_{\substack{0 \leq \underline{j} < p \\ \underline{i} \geq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{k}}) = \sum_{\substack{0 \leq \underline{j} \leq \underline{k} < p \\ \underline{i} \geq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}}\partial^{\underline{j}}(z^{\underline{k}}),$$

logo pelo Lema 2.16

$$D(z^{\underline{k}}) = \sum_{\underline{i} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{k}} f^{\underline{i}}(c(\underline{k}, \underline{j}) z^{\underline{k}-\underline{j}}) = \sum_{\underline{i} \geq 0} \alpha_{\underline{i}\underline{k}} c(\underline{k}, \underline{j}) z^{\underline{i}+\underline{k}-\underline{j}},$$

onde $c(\underline{k}, \underline{j}) = \dfrac{\underline{k}!}{(\underline{k} - \underline{j})!}$. Como $\operatorname{char} \mathbb{F} = p > 0$ então $c(\underline{k}, \underline{j}) \neq 0$, pois $0 \leq \underline{k} < p$. Ademais pela escolha de $\underline{k}$ temos que $\alpha_{\underline{i},\underline{k}} \neq 0$ para algum $\underline{i}$. Assim $\alpha_{\underline{i}\underline{k}} c(\underline{k}, \underline{j}) \neq 0$ para algum $\underline{i}$, Portanto, $D(z^{\underline{k}}) \neq 0$. □

Denotemos por I' o ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle$ gerado pelas relações $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[y_i, y_j] = 0$ e $y_i^p = 0$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Lema 2.31. *A aplicação linear* $\varphi : \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I' \longrightarrow \mathsf{A}'_n$ *definida por:*

$$\varphi(x_i) = f_i \quad e \quad \varphi(y_i) = \partial_i$$

é um homomorfismo de álgebras.

Demonstração. Pela propriedade universal, é suficiente analisar as imagens das relações definidas em $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I'$. Pelos Lemas 2.13 e 2.24 temos que,

$$\begin{aligned}\varphi(y_i x_i - x_i y_i - 1) &= \partial_i f_i - f_i \partial_i - 1\\ \varphi(y_i x_j - x_j y_i) &= \partial_i f_j - f_j \partial_i\\ \varphi(y_i^p) &= \partial_i^p = 0\end{aligned}$$

então temos que φ é um homomorfismo de álgebras. □

Teorema 2.32. $\mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I' \cong \mathsf{A}'_n$

Demonstração. Pelo Lema 2.31 a aplicação $\varphi : \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I' \longrightarrow \mathsf{A}'_n$ dada por $\varphi(x_i) = f_i$ e $\varphi(y_i) = \partial_i$ é um homomorfismo de álgebras. Assim é suficiente provar que φ é bijetiva. Seja $g \in \mathsf{A}'_n$ qualquer. Pelo Lema 2.30, é possível escrever g de forma única na forma,

$$g = \sum_{\substack{0 \preceq \underline{j} \prec p\\ \underline{i} \succeq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}}.$$

Logo existe $z \in \mathsf{A}_n$, definido por:

$$z = \sum_{\substack{0 \preceq \underline{j} \prec p\\ \underline{i} \succeq 0}} \alpha_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}},$$

tal que $\varphi(z) = g$. Portanto, φ é sobrejetora.

Por outro lado, seja $w \in \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle/I'$ e suponhamos que $\varphi(w) = 0$. Pelas condições $y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}$ e y_i^p para $1 \leqslant i, j \leqslant n$, e de igual maneira que na Proposição 2.10, se pode escrever w na forma,

$$w = \sum_{\substack{0 \preceq \underline{j} \prec p\\ \underline{i} \succeq 0}} \beta_{\underline{i}\underline{j}} x^{\underline{i}} y^{\underline{j}},$$

de onde

$$\varphi(w) = \sum_{\substack{0 \preceq \underline{j} \prec p\\ \underline{i} \succeq 0}} \beta_{\underline{i}\underline{j}} f^{\underline{i}} \partial^{\underline{j}} = 0.$$

Assim, pela unicidade da representação de $\varphi(w) \in \mathsf{A}'_n$ temos que $\beta_{\underline{i}\underline{j}} = 0$ para todos os multi-índices $\underline{i} \succeq 0,\ 0 \preceq \underline{j} \prec p$. Logo $w = 0$, e portanto φ é injetora. □

CAPÍTULO 3

IDENTIDADES POLINOMIAIS DA ÁLGEBRA DE WEYL

Neste capítulo, nos concentramos no estudo das identidades polinomiais da álgebra de Weyl. Começamos justificando porque a álgebra de Weyl A_n definida sobre um corpo $\mathbb{F}$ com característica zero ($\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$) não possui identidades polinomiais não triviais. Além disso, demonstramos que se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito com característica positiva ($\operatorname{char}\mathbb{F} = p > 0$), então as identidades de A_n são as mesmas que as identidades da álgebra de matrizes da ordem p^n. No caso de $\mathbb{F}$ ser finito, a igualdade não é certa, porém provamos que as identidades da primeira álgebra de Weyl A_1 estão contidas estritamente nas identidades da álgebra de matrizes de ordem p.

O seguinte resultado garante que a primeira álgebra de Weyl A_1, que é isomorfa a álgebra $\mathsf{A}_1' := \underset{\mathbb{F}}{\operatorname{alg}}\{f, \partial\}$, não é uma PI-álgebra.

Proposição 3.1. *Se* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$*, então* A_1' *não satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Demonstração. Antes de provar a afirmação, note que se $h_i := f^i\partial^{i-1}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ então, $h_n h_{n-1} \cdots h_1(1) = 1!2!\cdots(n-1)!z^n \neq 0$ para cada $n \geqslant 1$, isto pelo Lema 2.16. Suponhamos que f é uma identidade polinomial não trivial de A_1', então pelo Teorema 1.29, podemos supor f multilinear de grau n, e dizer

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n x_{n-1} \cdots x_1 + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(n)} x_{\sigma(n-1)} \cdots x_{\sigma(1)}.$$

Se σ é não trivial, existe um índice j_0 tal que $j_0 = \min\{j \mid \sigma(j) \neq j\}$. Como $\sigma(i) = i$ para cada $i < j_0$ então $\sigma(j_0) > j_0$, assim

$$h_{\sigma(j_0)}h_{\sigma(j_0-1)}\cdots h_{\sigma(1)}(1) = h_{\sigma(j_0)}(h_{j_0-1}\cdots h_1(1)) = 1!2!\cdots(j_0-2)!f^{\sigma(j_0)}\partial^{\sigma(j_0)-1}(z^{j_0-1}) = 0,$$

pois $\sigma(j_0) > j_0$ implica, pelo Lema 2.16, $\partial^{\sigma(j_0)-1}(z^{j_0-1}) = 0$. Daí que

$$f(h_1, h_2, \ldots, h_n)(1) = h_n h_{n-1}\cdots h_1(1) = 1!2!\cdots(n-1)!z^n \neq 0,$$

pois a $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$. Assim, $f(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq 0$ em A_1'. Portanto, A_1' não é uma PI-álgebra. □

Em geral, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2. *Se* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, *então* A_n *não é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.23, sabemos que A_n é central simples, e dado que esta álgebra é unitária temos que é primitiva (ver exemplo 1.35). Suponhamos que A_n satisfaz uma identidade polinomial, então pelo Teorema de Kaplansky a dimensão de A_n sobre $\mathbb{F}$ deverá ser finita, mas isto é uma contradição pois da Proposição 2.18 a dimensão de A_n é infinita. Portanto, A_n não é uma PI-álgebra. □

Embora A_n não tenha identidades polinomiais não triviais, alguns subespaços de A_n satisfazem certas identidades polinomiais. A saber, denotemos por $\mathsf{A}_n^{(1,1)}$ o $\mathbb{F}$-span de $x_i y_j$ em A_n para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$ e por $\mathsf{A}_n^{(-,r)}$ o $\mathbb{F}$-span de $a y_{j_1}\cdots y_{j_r}$ em A_n para todos $1 \leqslant j_1, \ldots, j_r \leqslant n$ e $a \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. Lembremos que o polinômio standard de grau N é definido por

$$\mathrm{St}_N(t_1, \ldots, t_N) = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma t_{\sigma(1)}\cdots t_{\sigma(N)},$$

onde S_N denota o grupo simétrico sobre $\{1, \ldots, N\}$. Dzhumadil'daev em [3, 4] estudo o polinômio standard St_N de grau N sobre alguns subespaços de A_n. E dizer, ele mostrou que:

- St_N é uma identidade polinomial para $\mathsf{A}_n^{(-,1)}$ no caso $N \geqslant n^2 + 2n$;
- St_N não é uma identidade polinomial para $\mathsf{A}_n^{(-,1)}$ no caso $N < n^2 + 2n - 1$;
- St_N é uma identidade polinomial para $\mathsf{A}_1^{(-,r)}$ se e somente se $N > 2r$;
- o grau mínimo de uma identidade não trivial em $\mathsf{A}_1^{(-,r)}$ é $2r + 1$.

Usando a abordagem teórica de grafos combinatória, Dzhumadil'daev e Yeliussizov [5] estabeleceram que

- St_{2n} é uma identidade polinomial para $\mathsf{A}_n^{(1,1)}$ se e somente se $n = 1, 2, 3$.

Observe que o espaço $\mathsf{A}_n^{(-,1)}$ junto com a multiplicação dada pelo colchete de Lie é a n-ésima álgebra de Witt W_n, que é uma álgebra de Lie de dimensão infinita simples. As identidades polinomiais da álgebra de Lie W_n foram estudadas por Mishchenko em [27], Razmyslov em [33] e outros. Uma conhecida conjectura aberta afirma que todas as identidades polinomiais de W_1 seguem a identidade de Lie standard

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma [[[[t_0, t_{\sigma(1)}]t_{\sigma(2)}]t_{\sigma(3)}]t_{\sigma(4)}].$$

Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas para W_1 foram descritas por Freitas, Koshlukov e Krasilnikov em [17].

3.1 Identidades Polinomiais para A_n sobre um corpo de característica positiva

Nesta seção consideramos $\mathbb{F}$ um corpo com $\operatorname{char} \mathbb{F} = p > 0$, e vamos estudar as identidades polinomiais da álgebra de Weyl A_n sobre $\mathbb{F}$. Começaremos mostrando alguns exemplos de identidades polinomiais multilineares para a álgebra de Weyl.

O resultado a seguir pode ser útil quando trabalhamos com identidades polinomiais multilineares para a álgebra de Weyl. Lembremos que em notação multi-índice, $\underline{i}$ denota a n-tupla $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$, e $x^{\underline{i}}$ denota o monômio $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$.

Lema 3.3. *Seja $f \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ um polinômio multilinear. Então f é identidade polinomial para A_n se, e somente se, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in S = \{x^{\underline{i}} y^{\underline{j}} : 0 \preceq \underline{i}, \underline{j} \prec p\}$.*

Demonstração. Suponha que f é identidade não trivial para A_n, então $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ para cada $b_1, \ldots, b_n \in \mathsf{A}_n$, em particular $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in S$. Reciprocamente, como f é multilinear é suficiente provar, pela Observação 1.19, que f se anula numa base de A_n. Sabemos, pela Proposição 2.10, que $\beta = \{x^{\underline{i}} y^{\underline{j}} : \underline{i}, \underline{j} \geq 0\}$ é uma base de A_n. Sejam $b_1, \ldots, b_n \in \beta$, então como $\mathsf{Z}(\mathsf{A}_n) = \mathbb{F}[x_1^p, \ldots, x_n^p, y_1^p, \ldots, y_n^p]$ (veja Observação 2.29) temos que $b_k = c_k w_k$, onde $c_k \in \mathsf{Z}(\mathsf{A}_n)$ e $w_k \in S$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, daí que

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(c_1 w_1, \ldots, c_n w_n) = c_1 \cdots c_n f(w_1, \ldots, w_n) = 0,$$

pois, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_k \in S$. Portanto, f é identidade polinomial não trivial para A_n. $\square$

O reconhecido teorema de Amitsur e Levitzki (Teorema 1.21) estabelece que o polinômio standard St_{2n} é uma identidade polinomial para M_n, em particular St_{2p} satisfaz a álgebra M_p de matrizes $p \times p$ sobre $\mathbb{F}$. O seguinte resultado mostra que o polinômio standard St_{2p} é uma identidade polinomial para a álgebra de Weyl A_1, no caso $p = 2$ e $p = 3$.

Proposição 3.4. *Para a álgebra de Weyl* A_1 *temos que:*

a) Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$, *então* $\mathrm{St}_4 = 0$ *é uma identidade polinomial para* A_1.

b) Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, *então* $\mathrm{St}_6 = 0$ *é uma identidade polinomial para* A_1.

Demonstração. a) Como o polinômio St_4 é multilinear então, do Lema 3.3, é suficiente provar que St_4 torna-se zero no conjunto $S = \{1, x, y, xy\}$. Sejam $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$, então se $a_i = a_j$ para algum $i \neq j$ temos que $\mathrm{St}_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$, pois o polinômio standard é anti-simétrico. Suponhamos que $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$, então para cada permutação $\sigma \in S_4$ existe $1 \leqslant i \leqslant 4$ tal que $a_{\sigma(i)} = 1$, daí que

$$\mathrm{St}_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)} = 4 \sum_{\pi \in \mathrm{S}_3} (-1)^{\pi} b_{\pi(1)} b_{\pi(2)} b_{\pi(3)},$$

onde $b_1, b_2, b_3 \in \{x, y, xy\}$. Assim, $\mathrm{St}_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$, pois $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$. Portanto, St_4 é uma identidade polinomial para A_1.

b) Como St_6 é multilinear então, pelo Lema 3.3, é suficiente provar que St_6 se anula no conjunto $S = \{1, x, y, xy, x^2, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2\}$. Sejam $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in S$, então se $a_i = a_j$ para algum $i \neq j$ temos que $\mathrm{St}_6(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0$, pois o polinômio standard é anti-simétrico. Suponhamos que $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$. Como o polinômio standard St_6 se pode reescrever na forma

$$\mathrm{St}_6(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{8} \sum_{\sigma \in S_6} (-1)^{\sigma} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}][x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}][x_{\sigma(5)}, x_{\sigma(6)}],$$

então se $a_i = 1$ para algum $1 \leqslant i \leqslant 6$, temos que $\mathrm{St}_6(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0$. Além disso, se $a_i \neq 1$ para cada $1 \leqslant i \leqslant 6$, nos verificamos computacionalmente que para cada conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \subseteq S \backslash \{1\}$, com $\mid B \mid = 6$, $\mathrm{St}_6(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = 0$. Portanto, St_6 é uma identidade polinomial para A_1. □

Da Proposição 3.4 surgem naturalmente as seguintes perguntas. Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$, o polinômio standard St_{2p} é uma identidade polinomial para a álgebra de Weyl A_1? É válida a igualdade $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) = \mathrm{Id}(M_p)$?

A continuação, provaremos que se $\mathbb{F}$ é infinito então $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$. Enquanto se $\mathbb{F}$ é um corpo finito a igualdade não acontece.

3.1.1 Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito

Denotemos por $\widetilde{M}_n = M_n(\mathbb{F}[x,y])$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}[x,y]$, e por $M_n = M_n(\mathbb{F})$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$, I_n a matriz identidade em M_n, e E_{ij} é a matriz elementar $n \times n$ tal que a (i,j)-ésima entrada é 1 e as outras entradas são 0. Nesta subseção, provaremos que as identidades polinomiais de A_n e M_{p^n} são as mesmas, é dizer, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$.

Antes de apresentar a prova da igualdade referida, consideremos as propriedades das seguintes matrizes de M_p:

$$A_0 = \sum_{i=1}^{p-1} E_{i+1,i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot E_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 3.5. *Para A_0 e B_0 temos as seguintes propriedades.*

a) Para todo $1 \leqslant k < p$ temos que

$$A_0^k = \sum_{i=1}^{p-k} E_{k+i,i} \quad e \quad B_0^k = \sum_{i=1}^{p-k} \frac{(k+i-1)!}{(i-1)!} E_{i,k+i},$$

onde A_0^0 e B_0^0 são definidos sendo I_p.

b) $B_0A_0 - A_0B_0 = I_p$.

Demonstração. a) Provemos a fórmula para A_0^k por indução sobre k. Para $k = 1$ a afirmação se cumpre. Suponha que a afirmação é válida para algum $k < p-1$. Então

$$A_0^{k+1} = \left(\sum_{j=1}^{p-k} E_{k+j,j}\right)\left(\sum_{r=1}^{p-1} E_{r+1,r}\right) = \sum_{i=1}^{p-(k+1)} E_{(k+1)+i,i},$$

e temos o resultado para A_0^k.

Agora, para B_0^k também usamos indução sobre k. Para $k = 1$ a afirmação se cumpre. Suponha que a afirmação é válida para algum $k < p-1$. Então

$$B_0^{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{p-k} \frac{(k+i-1)!}{(i-1)!} E_{i,k+i}\right)\left(\sum_{r=1}^{p-1} r \cdot E_{r,r+1}\right) = \sum_{i=1}^{p-(k+1)} \frac{(i+k)!}{(i-1)!} E_{i,(k+1)+i},$$

e temos o resultado para B_0^k.

b) Notemos que

$$\begin{aligned} B_0A_0 - A_0B_0 &= \left(\sum_{i=1}^{p-1} iE_{i,i+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{p-1} E_{j+1,j}\right) - \left(\sum_{j=1}^{p-1} E_{j+1,j}\right)\left(\sum_{i=1}^{p-1} iE_{i,i+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} iE_{i,i} - \sum_{i=1}^{p-1} iE_{i+1,i+1} \\ &= I_p \end{aligned}$$

□

Lema 3.6. *Uma base para $M_p(\mathbb{F})$ é o conjunto*

$$\beta = \{A_0^r B_0^s \mid 0 \leqslant r, s < p\}.$$

Demonstração. Como $|\beta| = p^2 = \dim_{\mathbb{F}} M_p(\mathbb{F})$ então é suficiente provar que β é um conjunto linearmente independente. Suponhamos que existem escalares, não todos nulos, $\alpha_{rs} \in \mathbb{F}$ com $0 \leqslant r, s < p$ tais que:

$$\sum_{0 \leqslant r,s < p} \alpha_{rs} A_0^r B_0^s = 0.$$

Seja $s_0 = \min\{s \mid \alpha_{rs} \neq 0 \ \text{ para algúm } \ 0 \leqslant r < p\}$, então temos

$$0 = \sum_{0 \leqslant r < p} \alpha_{rs_0} A_0^r B_0^{s_0} + \sum_{\substack{0 \leqslant r < p \\ s_0 < s < p}} a_{rs} A_0^r B_0^s.$$

Como $0 \leqslant s_0 < s < p$ então $0 \leqslant p - s_0 - 1 < p$ e $s + p - s_0 - 1 > p - 1$ dai que, pelo Lema 3.5, $B_0^{s+p-s_0-1} = 0$ e $B_0^{p-s_0-1} \neq 0$. Logo, multiplicando pela direita por $B_0^{p-s_0-1}$, temos

$$0 = \sum_{0 \leqslant r < p} \alpha_{rs_0} A_0^r B_0^{p-1} + \sum_{\substack{0 \leqslant r < p \\ s_0 < s < p}} a_{rs} A_0^r B_0^{s+p-s_0-1},$$

de onde

$$0 = \sum_{0 \leqslant r < p} \alpha_{rs_0} A_0^r B_0^{p-1}.$$

Seja $r_0 = \max\{r \mid \alpha_{rs_0 \neq 0}\}$, então é claro que $\alpha_{r_0 s_0} \neq 0$. Assim

$$0 = \alpha_{r_0 s_0} A_0^{r_0} B_0^{p-1} + \sum_{0 \leqslant r < r_0} \alpha_{rs_0} A_0^r B_0^{p-1}.$$

Como $r_0 \geqslant 0$ então $p - r_0 - 1 < p$, dai que, pelo Lema 3.5, $A_0^{p-r_0-1} \neq 0$. Logo, multiplicando pela esquerda por $A_0^{p-r_0-1}$ temos

$$0 = \alpha_{r_0 s_0} A_0^{p-1} B_0^{p-1} + \sum_{0 \leqslant r < r_0} \alpha_{rs_0} A_0^{p-r_0-1+r} B_0^{p-1}.$$

Como $r < r_0$ então $p-r_0-1+r < p-1$, logo, pelo Lema 3.5, temos que $A_0^{p-r_0-1+r} \neq A_0^{p-1}$. Daí que,

$$0 = \alpha_{r_0s_0}A_0^{p-1}B_0^{p-1} = \alpha_{r_0s_0}(p-1)!E_{pp}.$$

De onde $\alpha_{r_0s_0}(p-1)! = 0$. Como $(p-1)! \neq 0$ módulo p, temos que $\alpha_{r_0s_0} = 0$. Isto é uma contradição. Portanto, β é uma base para $M_p(\mathbb{F})$. □

Lembremos que dadas A e B duas $\mathbb{F}$-álgebras, o produto tensorial $A \otimes B$ também é uma álgebra, em particular, temos que $M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F})$ é uma álgebra, para $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, esta álgebra é isomorfa com a álgebra $M_{nm}(\mathbb{F})$.

Exemplo 3.7. *$M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F}) \cong M_{nm}(\mathbb{F})$, como álgebra. De fato, dado que $M_{nm}(\mathbb{F})$ é um espaço vetorial e $f : M_n(\mathbb{F}) \times M_m(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$ definida por:*

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

para todo $A \in M_n(\mathbb{F})$ e $B \in M_m(\mathbb{F})$, é uma aplicação bilinear, então pela propriedade universal existe uma única transformação linear $\psi : M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$ tal que $\psi(A \otimes B) = f(A, B)$. Como $\dim(M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F})) = \dim(M_n(\mathbb{F}))\dim(M_m(\mathbb{F})) = n^2m^2 = \dim(M_{nm}(\mathbb{F}))$, de onde segue que $M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F}) \cong M_{nm}(\mathbb{F})$ como espaço vetorial. Além disso, não é difícil verificar que $\psi((A \otimes B)(C \otimes D)) = \psi(A \otimes B)\psi(C \otimes D)$, pois $f(AC, BD) = f(A, B)f(C, D)$ para todo $A, C \in M_n$ e $B, D \in M_m$, e portanto ψ é um homomorfismo de álgebras.

Para uma álgebra A, denotaremos por $A^{\otimes n}$ o produto tensorial $\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ fatores}}$. Note que, o exemplo anterior pode-se generalizar ao produto tensorial de mas de duas álgebras, e portanto temos que $M_{p^n}(\mathbb{F}) \cong M_p(\mathbb{F}) \otimes \cdots \otimes M_p(\mathbb{F}) = M_p^{\otimes n}$.

Seja $\phi_n : \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle \to M_{p^n} \cong \underbrace{M_p \otimes \cdots \otimes M_p}_{n \text{ fatores}} = M_p^{\otimes n}$ o homomorfismo de álgebras definido por

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto I_p^{\otimes(i-1)} \otimes A_0 \otimes I_p^{\otimes(p-i)}, \\ y_i &\mapsto I_p^{\otimes(i-1)} \otimes B_0 \otimes I_p^{\otimes(p-i)}, \\ 1 &\mapsto I_p^{\otimes n}, \end{aligned}$$

onde $A_0, B_0 \in M_p$ são as matrizes definidas no início da seção.

Lema 3.8. *O homomorfismo ϕ_n induz um homomorfismo sobrejetivo $\overline{\phi_n} : \mathsf{A}_n \to M_{p^n}$. Em particular, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) \subset \mathrm{Id}(M_{p^n})$.*

Demonstração. Pela parte b) do Lema 3.5 temos que se $M = \phi_n(y_ix_j - x_jy_i - \delta_{ij})$, então

$$M = \begin{cases} I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (B_0 - B_0) \otimes I_p^{\otimes(j-i-1)} \otimes (A_0 - A_0) \otimes I_p^{\otimes(p-j)} & \text{se } i < j \\ I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (B_0A_0 - A_0B_0 - I_p) \otimes I_p^{\otimes(p-i)} & \text{se } i = j \\ I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (A_0 - A_0) \otimes I_p^{\otimes(j-i-1)} \otimes (B_0 - B_0) \otimes I_p^{\otimes(p-j)} & \text{se } i > j \end{cases}$$

de onde $\phi_n(y_ix_j - x_jy_i - \delta_{ij}) = 0$ em M_{p^n}. Portanto, ϕ_n induz o homomorfismo de álgebras $\overline{\phi_n} : \mathsf{A}_n \to M_{p^n}$.

Seja $C = C_1 \otimes \cdots \otimes C_n \in M_p^{\otimes n}$ qualquer, onde cada $C_k \in M_p$ para $1 \leqslant k \leqslant n$ Pelo Lema 3.6, $\{A_0^iB_0^j \mid 0 \leqslant i, j < p\}$ é uma base de M_p, então cada C_k pode ser escrito na forma

$$C_k = \sum_{0 \leqslant i_k, j_k < p} \alpha_{i_kj_k} A_0^{i_k} B_0^{j_k},$$

para alguns $\alpha_{i_kj_j} \in \mathbb{F}$. Definamos $z \in \mathsf{A}_n$ por

$$z = \sum_{\substack{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n < p \\ 0 \leqslant j_1, \ldots, j_n < p}} \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2} \cdots \alpha_{i_nj_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n},$$

onde $\alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2} \cdots \alpha_{i_nj_n} \in \mathbb{F}$, então temos que

$$\overline{\phi_n}(z) = \sum_{\substack{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n < p \\ 0 \leqslant j_1, \ldots, j_n < p}} \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2} \cdots \alpha_{i_nj_n} \overline{\phi_n}(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n})$$

Como $\overline{\phi_n}(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}) = A_0^{i_1} B_0^{j_1} \otimes \cdots \otimes A_0^{i_n} B_0^{j_n}$, então

$$\begin{aligned} \overline{\phi_n}(z) &= \sum_{\substack{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n < p \\ 0 \leqslant j_1, \ldots, j_n < p}} \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2} \cdots \alpha_{i_nj_n} (A_0^{i_1} B_0^{j_1} \otimes \cdots \otimes A_0^{i_n} B_0^{j_n}) \\ &= \sum_{0 \leqslant i_1, j_1 < p} \alpha_{i_1j_1} A_0^{i_1} B_0^{j_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{0 \leqslant i_n, j_n < p} \alpha_{i_nj_n} A_0^{i_n} B_0^{j_n} \\ &= C_1 \otimes \cdots \otimes C_n = C. \end{aligned}$$

Assim, para cada $C \in M_{p^n}$ existe $z \in \mathsf{A}_n$ tal que $\overline{\phi_n}(z) = C$. Portanto, $\overline{\phi_n}$ é sobrejetiva. Em particular, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) \subset \mathrm{Id}(M_{p^n})$. $\square$

Agora, seja $\varphi_n : \mathbb{F}\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \rangle \to \widetilde{M}_{p^n} \cong \underbrace{\widetilde{M}_p \otimes \cdots \otimes \widetilde{M}_p}_{n \text{ fatores}} = \widetilde{M}_p^{\otimes n}$ o homomorfismo de álgebras definido por

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto I_p^{\otimes(i-1)} \otimes A \otimes I_p^{\otimes(n-i)}, \\ y_i &\mapsto I_p^{\otimes(i-1)} \otimes B \otimes I_p^{\otimes(n-i)}, \\ 1 &\mapsto I_p^{\otimes n}, \end{aligned}$$

onde $A = xI_p + A_0$, $B = yI_p + B_0 \in \widetilde{M}_p$.

Lema 3.9. *O homomorfismo φ_n induz o homomorfismo injetivo $\overline{\varphi_n} : \mathsf{A}_n \to \widetilde{M}_{p^n}$. Em particular,* $\mathrm{Id}(\widetilde{M}_{p^n}) \subset \mathrm{Id}(\mathsf{A}_n)$.

Demonstração. Seja $\varphi_n(y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}) = M$, então

$$M = \begin{cases} I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (B - B) \otimes I_p^{\otimes(j-i-1)} \otimes (A - A) \otimes I_p^{\otimes(n-j)} & \text{se } i < j \\ I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (BA - AB - I) \otimes I_p^{\otimes(n-i)} & \text{se } i = j \\ I_p^{\otimes(i-1)} \otimes (A - A) \otimes I_p^{\otimes(j-i-1)} \otimes (B - B) \otimes I_p^{\otimes(n-j)} & \text{se } i > j \end{cases}$$

Como $BA - AB = (yI + B_0)(xI + A_0) - (xI + A_0)(y + B_0) = B_0A_0 - A_0B_0$, então da parte $b)$ do Lema 3.5, temos que $\varphi(y_i x_j - x_j y_i - \delta_{ij}) = 0$ em $\widetilde{M}_p^{\otimes n}$. Portanto, φ_n induz o homomorfismo de álgebras $\overline{\varphi_n} : \mathsf{A}_n \to \widetilde{M}_{p^n}$.

Suponha que existe um elemento não nulo $z \in \mathsf{A}_n$ tal que $\overline{\varphi_n}(z) = 0$. Pela Proposição 2.10, pode-se escrever $z \in \mathsf{A}_n$ na forma

$$z = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geqslant 0 \\ j_1,\dots,j_n \geqslant 0}} \alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n},$$

daí que

$$\overline{\varphi_n}(z) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geqslant 0 \\ j_1,\dots,j_n \geqslant 0}} \alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} \overline{\varphi_n}(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n})$$

Como $\overline{\varphi_n}(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}) = A^{i_1}B^{j_1} \otimes \cdots \otimes A^{i_n}B^{j_n}$, então

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_n}(z) &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geqslant 0 \\ j_1,\dots,j_n \geqslant 0}} \alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} (A^{i_1}B^{j_1} \otimes \cdots \otimes A^{i_n}B^{j_n}) \\ &= \sum_{\substack{i_2,\dots,i_n \geqslant 0 \\ j_2,\dots,j_n \geqslant 0}} [(\sum_{i_1, j_1 \geqslant 0} \alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} A^{i_1}B^{j_1}) \otimes A^{i_2}B^{j_2} \otimes \cdots \otimes A^{i_n}B^{j_n}] \end{aligned}$$

As igualdades

$$A^i = \begin{pmatrix} x^i & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^j = \begin{pmatrix} y^j & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

implicam que a entrada $(1,1)$ de A^iB^j é $(A^iB^j)_{1,1} = x^iy^j \neq 0$ em $\mathbb{F}[x,y]$, por conseguinte $A^iB^j \neq 0$ em $\widetilde{M}_p$. Logo, em vista que $\overline{\varphi_n}(z) = 0$ e $A^{i_k}B^{j_k} \neq 0$ para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, então para cada $i_2, \dots, i_n, j_2, \dots, j_n \geqslant 0$ temos que

$$\sum_{i_1, j_1 \geqslant 0} \alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} A^{i_1}B^{j_1} = 0.$$

Assim $\alpha_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} = 0$ para todo $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n \geqslant 0$. Logo, $z = 0$. Isto é uma contradição. Portanto, φ_n é injetiva. Em particular, $\mathrm{Id}(\widetilde{M}_{p^n}) \subset \mathrm{Id}(\mathsf{A}_n)$ ☐

Uma prova alternativa do lema a seguir pode-se encontrar em ([8], Lema 4.1). Este resultado serão usado na prova do Teorema 3.11.

Lema 3.10. *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra, então $M_n(A) \cong M_n(\mathbb{F}) \otimes A$.*

Demonstração. Seja β uma base de A, então $\widetilde{\beta} = \{aE_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n, \;\; a \in \beta\}$ é uma base de $M_n(A)$. A transformação linear $\varphi : M_n(A) \to M_n(\mathbb{F}) \otimes A$, definida por $\varphi(aE_{ij}) = E_{ij} \otimes a$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Para provar que φ é un homomorfismo de álgebras, observe que para $aE_{ij}, bE_{rs} \in \widetilde{\beta}$ temos que

$$(aE_{ij})(bE_{rs}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq r; \\ (ab)E_{is} & \text{se } j = r. \end{cases}$$

Usando este fato, temos que $\varphi((aE_{ij})(bE_{rs})) = \varphi(aE_{ij})\varphi(bE_{rs})$, logo, pela linearidade φ é um homomorfismo de álgebras. □

A igualdade dada no teorema seguinte é válida só no caso que $\mathbb{F}$ seja um corpo infinito, no entanto, todos os resultados apresentados nesta subseção até aqui continuam sendo válidos para qualquer corpo $\mathbb{F}$ de característica positiva. Na subseção seguinte vamos provar que a igualdade não é certa quando o corpo $\mathbb{F}$ é finito.

Teorema 3.11. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica p, A_n a álgebra de Weyl sobre $\mathbb{F}$ e M_{p^n} a álgebra de matrizes $p^n \times p^n$ sobre $\mathbb{F}$, então $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.8 temos que $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) \subset \mathrm{Id}(M_{p^n})$. Mas ainda, da Proposição 1.32, para um corpo infinito $\mathbb{F}$ e uma $\mathbb{F}$-álgebra comutativa C as identidades para uma $\mathbb{F}$-álgebra A e $C \otimes_{\mathbb{F}} A$ são as mesmas. Em particular como $\mathbb{F}[x, y]$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra comutativa e M_{p^n} é uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{F}$, então

$$\mathrm{Id}(\mathbb{F}[x, y] \otimes M_{p^n}) = \mathrm{Id}(M_{p^n}).$$

Pelo Lema 3.10 temos o isomorfismo $\widetilde{M}_{p^n} = M_{p^n}(\mathbb{F}[x, y]) \cong \mathbb{F}[x, y] \otimes M_{p^n}(\mathbb{F})$, que implica que $\mathrm{Id}(\widetilde{M}_{p^n}) = \mathrm{Id}(M_{p^n})$. Portanto, do Lema 3.9, temos $\mathrm{Id}(M_{p^n}) \subset \mathrm{Id}(\mathsf{A}_n)$. O que finaliza a prova. □

3.1.2 Se $\mathbb{F}$ é um corpo finito

Nesta subseção fornecemos identidades polinomiais da álgebra de Matrizes M_p que não são identidade para a álgebra de Weyl A_1. Começaremos considerando os casos particulares $p = 2$ e $p = 3$, e finalmente analisamos o caso geral. Lembremos, do Lema 3.8, que $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_n) \subset \mathrm{Id}(M_{p^n})$.

Em 1978, Maltsev e Kuzmin em [32] descrevem as identidades polinomiais para $M_2(\mathbb{F})$, no caso que $\mathbb{F}$ é um corpo finito de ordem $q = p^k$. Eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 3.12 (Maltsev e Kuzmin, 1978). *Se $\mathbb{F}$ é um corpo finito de ordem $q = p^k$, então o ideal das identidades polinomiais da álgebra M_2 é gerado pelos polinômios*

$$f_1(x, y) = (x - x^q)(y - y^{q^2})(1 - [x, y]^{q-1}),$$
$$f_2(x, y) = (x - x^q) \circ (y - y^{q^2})[(x - x^q) \circ (y - y^q)]^q,$$

onde $[x, y] = xy - yx$, $x \circ y = xy + yx$.

O resultado anterior é valido no caso particular $q = 2^k$, daí que $f_1(x, y)$ e uma identidade da álgebra de matrizes M_2. Porém, $f_1(x, y)$ não é identidade para a álgebra A_1, definida sobre um corpo de característica 2. De fato, para $x \in \mathsf{A}_1$ temos

$$f_1(x, x) = (x - x^q)(x - x^{q^2}) = x^{q^2+q} + x^{q^2+1} + x^{q+1} + x^2.$$

Como $q = 2^k$ então $q^2 + q > q^2 + 1 > q + 1 > 2$, logo $f_1(x, x) \neq 0$ em A_1. Portanto, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) \subsetneq \mathrm{Id}(M_2)$.

Em 1981, G.k. Genov em [11] descreve as identidades polinomiais da álgebra de matrizes M_3, para um corpo finito $\mathbb{F}$ de ordem $q = p^k$. Além disso, provaram que o polinômio $F(n, q, x, y)$ definido por:

$$g(x)[1 - (y(\mathrm{ad}x)^{n-1})^{q-1}][1 - (y(\mathrm{ad}x)^{n-2})^{q-1}] \cdots [1 - (y\mathrm{ad}x)^{q-1}](y^q - y),$$

onde $y\mathrm{ad}x = [y, x]$ e $g(x) = (x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x) \cdots (x^{q^n} - x)$, é uma identidade polinomial para M_n.

Proposição 3.13 (Genov, 1981). *Se $\mathbb{F}$ é um corpo finito de ordem $q = p^k$, então $F(n, q, x, y) = 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra M_n.*

Em particular se $q = 3^k$ e $n = 3$, da proposição anterior, temos que

$$F(3, q, x, y) = (x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x)(1 - (y(\mathrm{ad}x)^2)^{q-1})(1 - (y(\mathrm{ad}x))^{q-1})(y^q - y)$$

é uma identidade da álgebra de matrizes M_3. Não obstante, $F(3, q, x, y)$ não é identidade para A_1, definida sobre um corpo de característica 3. De fato, para $x \in \mathsf{A}_1$, como $x\mathrm{ad}x = [x, x] = 0$ e $x(\mathrm{ad}x)^2 = [x, [x, x]] = 0$ então

$$F(3, q, x, x) = (x^q - x)(x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x) \neq 0$$

em A_1, pois expandindo $F(3, q, x, x)$ obtemos

$$F(3, q, x, x) = x^{q^3+q^2+q} - x^{q^3+q^2+1} - x^{q^3+q+1} + x^{q^3+2} - x^{q^2+q+1} + x^{q^2+2} + x^{q+2} - x^3,$$

de onde é claro que cada termo é diferente já que seus exponentes são diferentes quando $q = 3^k$. Daí que $F(3, q, x, x) \neq 0$ em A_1. Portanto, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) \subsetneq \mathrm{Id}(M_3)$.

Da Proposição 3.13, temos o seguinte resultado mas geral.

Corolário 3.14. *Se* $\mathbb{F}$ *é um corpo finito de ordem* $q = p^k$*, então* $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) \subsetneq \mathrm{Id}(M_p)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.8 temos em particular que $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) \subset \mathrm{Id}(M_p)$. Além disso, pela Proposição 3.13, sabemos que $F(p, q, x, y) = g(x)r(x)(y^q - y)$, onde

$$g(x) = (x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x) \cdots (x^{q^p} - x)$$
$$r(x) = [1 - (y(\mathrm{ad}x)^{p-1})^{q-1}][1 - (y(\mathrm{ad}x)^{p-2})^{q-1}] \cdots [1 - (y\mathrm{ad}x)^{q-1}]$$

é uma identidade para a álgebra de matrizes M_p. Considere $x \in \mathsf{A}_1$, logo como $x(\mathrm{ad}x)^m = [x[x, \ldots, [x, x]]] = 0$ para cada $1 \leqslant m \leqslant p - 1$, então

$$F(p, q, x, x) = (x^q - x)(x^{q^2} - x) \cdots (x^{q^p} - x).$$

Dado que $q = p^k$, então cada termo na expansão de $F(p, q, x, x)$ será diferente, portanto $F(p, q, x, x) \neq 0$ em A_1. Isto é, $F(p, q, x, x)$ não é identidade para A_1. Portanto, $\mathrm{Id}(\mathsf{A}_1) \subsetneq \mathrm{Id}(M_p(\mathbb{F}))$. □

CAPÍTULO 4

IDENTIDADES POLINOMIAIS PARA UMA FAMÍLIA PARAMÉTRICA DE SUBÁLGEBRAS DA ÁLGEBRA DE WEYL

Suponhamos $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p > 0$. Neste capítulo estudamos as identidades polinomiais para uma família de álgebras $\mathcal{A}_h$ unitárias de dimensão infinita, que são parametrizadas por um polinômio $h \in \mathbb{F}[x]$. Quando $h \neq 0$ estas álgebras são subálgebras da álgebra de Weyl A_1. Nosso objetivo principal é mostrar que cada subálgebra desta família tem as mesmas identidades polinomiais que a álgebra M_p de matrizes $p \times p$ sobre $\mathbb{F}$.

Definição 4.1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo, e seja $h \in \mathbb{F}[x]$. A álgebra $\mathcal{A}_h$ é a álgebra associativa unitária sobre $\mathbb{F}$ com geradores x, y com a relação $yx - xy = h$ (equivalentemente $[y, x] = h$, donde $[y, x] = yx - xy$); i.e.*

$$\mathcal{A}_h = \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - h\}$$

Os casos parciais da construção dada são a álgebra de Weyl $\mathcal{A}_1 = \mathsf{A}_1$, a álgebra polinomial $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}[x, y]$, e a álgebra universal envelopante $\mathcal{A}_x$ da álgebra de Lie não-abeliana de dimensão dois.

A álgebra $\mathcal{A}_h$ foi considerada em 2015 por G. Benkart, S.A. Lopes e M. Ondrus em [10] como um objeto natural na teoria de extensões de Ore (ou em inglês "skew polynomial ring"). É dizer, $\mathcal{A}_h$ é uma extensão de Ore $A = R[y; \sigma, \delta]$ obtida tomando $R = \mathbb{F}[x]$, $\sigma : R \to R$ é o automorfismo identidade Id_R sobre R e $\delta : R \to R$ uma derivação com $\delta(f) = f'h$ para todo $f \in R$, onde f' é a derivada usual de f sobre R. Como os geradores da álgebra $\mathcal{A}_h$ satisfazem a relação $[y, x] = h$, então em $\mathcal{A}_h$ se cumpre que $[y, f] = f'h$ para todo $f \in R$.

4.1 $\mathcal{A}_h$ como extensão de Ore

A seguir apresentamos alguns conceitos básicos sobre extensões de Ore, as provas podem-se consultar em ([18], capítulo 2). Seja R um anel com unidade e $\sigma : R \to R$ um endomorfismo de R.

Definição 4.2. *Uma σ-derivação de R é uma aplicação linear $\delta : R \to R$ com a seguinte propriedade,*

$$\delta(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s), \quad \textit{para todo } r, s \in R$$

Notemos que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1)1 + \sigma(1)\delta(1) = \delta(1) + \delta(1)$, donde $\delta(1) = 0$.

Se σ é a aplicação identidade de R, a propriedade acima é conhecida como regra de Leibniz, e neste caso as σ-derivações são simplesmente derivações de R.

Exemplo 4.3. *A seguir alguns exemplos de derivações.*

a) $\delta = 0$ *é uma σ-derivação para toda σ.*

b) Seja $R = \mathbb{F}[x]$ o anel de polinômios sobre o corpo $\mathbb{F}$ então $\delta : R \to R$ definida por $\delta(f(x)) = f'(x)$ é uma derivação de R, onde $\delta = \dfrac{df}{dx}$ é a derivada usual de f respeito a x.

c) Seja $R = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então a regra $\delta(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ é uma derivação de R, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, onde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada parcial de f com respeito a x_i.

Dado um anel R, $\sigma : R \to R$ um endomorfismo de R e $\delta : R \to R$ uma σ-derivação de R, é possível construir um anel A que contém a R como subanel, que tem como elementos, "polinômios" numa variável y com coeficientes a esquerda, e com multiplicação que satisfaz a relação $yr = \sigma(r)y + \delta(r)$, para todo $r \in R$. Dito anel é chamado de extensão de Ore de R. Mas especificamente.

Definição 4.4. *Seja $\delta : R \to R$ uma σ-derivação de R, uma* ***extensão de Ore*** *de R é um anel A que satisfaz as seguintes propriedades:*

a) R é subanel de A.

b) Existe um elemento $y \in A$ tal que A é um R-módulo livre à esquerda com base $\{1, y, y^2, \ldots\}$.

c) $yr = \sigma(r)y + \delta(r)$, para todo $r \in R$.

Denotamos dito anel por $A = R[y; \sigma, \delta]$.

Se δ é a derivação nula, escrevemos $R[y; \sigma]$, no lugar de $R[y; \sigma, 0]$. Se $\sigma = Id_R$ é a aplicação identidade em R, escrevemos $R[y; \delta]$, no lugar de $R[y; Id_R, \delta]$. O anel $R[y; \delta]$ é conhecido também como um ***anel de operadores diferenciais***.

O lema a seguir (corolario da Observaçõa 2.1 provada em [22] por Awami, Van den Berg e Van Oystaeyen, ou Proposição 3.2 de [15]) nos dá as maneiras de ver em geral as extensões de Ore.

Lema 4.5. *Suponha que $A = R[y; \sigma, \delta]$ é uma extensão de Ore de $R = \mathbb{F}[x]$, onde σ é um automorfismo de R. Então A é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

- *o plano quântico, i.e., $A \cong \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - qxy\}$ para algum $q \in \mathbb{F}^*$;*
- *a álgebra de Weyl quântica, i.e., $A \cong \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - qxy - 1\}$ para algum $q \in \mathbb{F}^*$;*
- *a álgebra $\mathcal{A}_h$ para algum $h \in \mathbb{F}[x]$.*

Muitas propriedades da extensão de Ore $A = R[y; \sigma, \delta]$ são herdadas da álgebra subjacente R. A saber, quando σ é um automorfismo,então

- A é um R-módulo livre à esquerda com base $\{1, y, y^2, \ldots\}$ (veja Proposição 2.3 de [18]).
- Se R é Noetheriano à esquerda (resp. direita), então $A = R[y; \sigma, \delta]$ é Noetheriano à esquerda (resp. direita) (veja Teorema 2.6 de [18]).
- Se R é um domínio, então $A = R[y; \sigma, \delta]$ é um domínio (veja Exercício 20 de [18]).

As extensões de Ore possuem a seguinte propriedade universal.

Teorema 4.6. *Seja $A = R[y; \sigma, \delta]$ uma extensão de Ore de R. Suponhamos que T é um anel, $\phi : R \to T$ é um homomorfismo de anéis e $z \in T$ tal que $z\phi(r) = \phi(\sigma(r))z + \phi(\delta(r))$ para todo $r \in R$. Então existe um único homomorfismo de anéis $\Phi : A \to T$ tal que $\Phi\mid_R = \phi$ e $\Phi(y) = z$.*

Como consequência da propriedade universal e o seguinte lema, podemos demonstrar que a álgebra $\mathcal{A}_h$ é uma extensão de Ore.

Lema 4.7. *Em $\mathcal{A}_h$ temos que $[y, f] = f'h$ para cada $f \in \mathbb{F}[x]$.*

Demonstração. É suficiente considerar $f = x^i$ com $i \in \mathbb{N}$. Para $i = 1$ é claro. Suponhamos que a afirmação é valida para $i = k - 1$. Então

$$[y, x^k] = x[y, x^{k-1}] + [y, x]x^{k-1} = (k-1)x^{k-1}h + hx^{k-1} = kx^{k-1}h.$$

É dizer, $[y, x^i] = (x^i)'h$. E portanto, $[y, f] = f'h$ para todo $f \in \mathbb{F}[x]$. $\square$

Lema 4.8. *A álgebra* $\mathcal{A}_h$ *é a extensão de Ore* $A = R[y; \sigma, \delta]$, *onde* $R = \mathbb{F}[x]$, $\sigma = \mathrm{Id}_R$ *e* $\delta(f) = hf'$. *É dizer,*

$$\mathcal{A}_h = \mathbb{F}\langle x, y\rangle/\mathrm{id}\{yx - xy - h\} \cong \mathbb{F}[x][y; \delta]$$

Demonstração. Consideremos o homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{F}\langle x, y\rangle \to A$ definido por $\varphi(x) = x$ e $\varphi(y) = y$, então como $\varphi(yx - xy - h) = yx - xy - h = 0$, pois em A temos que $\delta(x) = h = yx - xy$, então $\mathrm{id}\{yx - xy - h\} \subseteq ker\varphi$. Logo, pelo teorema fundamental do homomorfismo, φ induz um homomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{A}_h \to A$ tal que $\psi \mid_{\mathbb{F}\langle x,y\rangle} = \varphi$, i.e., $\psi(x) = x$ e $\psi(y) = y$. Por outro lado, dada a extensão de Ore $A = \mathbb{F}[x][y; \delta]$ o homomorfismo $\phi : \mathbb{F}[x] \to \mathcal{A}_h$ definido por $\phi(x) = x$, satisfaz que $y\phi(f) = \phi(\sigma(f))y + \phi(\delta(f))$ para todo $f \in \mathbb{F}[x]$. De fato, seja $f(x) = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$, então como $\sigma(x) = x$ e $\delta(x^i) = ix^{i-1}h$ temos

$$\phi(\sigma(f))y + \phi(\delta(f)) = \sum_i a_i(x^i y + ix^{i-1}h) = \sum_i a_i yx^i = y\phi(f),$$

pois do Lema 4.7, $yx^i = x^i y + ix^{i-1}h$. Logo, pela propriedade universal, ϕ induz um homomorfismo $\Phi : A \to \mathcal{A}_h$ tal que $\Phi \mid_{\mathbb{F}[x]} = \phi$ e $\Phi(y) = y$, é dizer $\Phi(x) = x$ e $\Phi(y) = y$. Notemos que $\psi = \Phi^{-1}$. Portanto, Φ é um isomorfismo de álgebras. $\square$

Dado que $\mathcal{A}_h$ é a extensão de Ore $A = \mathbb{F}[x][y; \delta]$, então das propriedades mencionadas acima temos que $\mathcal{A}_h$ é um $\mathbb{F}[x]$-módulo livre à esquerda com base $\{1, y, y^2, \ldots\}$, portanto

$$\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{F}[x]y^i.$$

Também $\mathcal{A}_h$ é um domínio Noetheriano à esquerda (resp. direita), uma vez que essas propriedades são herdadas de $\mathbb{F}[x]$. Além disso, ambos conjuntos $\{x^i y^j \mid i, j \geqslant 0\}$ e $\{y^j x^i \mid i, j \geqslant 0\}$ são bases para a álgebra $\mathcal{A}_h$.

4.2 Propriedades para $\mathcal{A}_h$

Alguns resultados sobre a estrutura da álgebra $\mathcal{A}_h$ são demonstrados por G. Benkart, S.A. Lopes e M. Ondrus, [10], a continuação vamos apresentar alguns deles. Considere $f, g \in \mathbb{F}[x]$ elementos fixos e suponha que os geradores de $\mathcal{A}_f$ sejam $x, y, 1$, e os geradores de $\mathcal{A}_g$ sejam $x, \widehat{y}, 1$. A afirmação a seguir estabelece uma relação entre $\mathcal{A}_f$ e $\mathcal{A}_g$.

Lema 4.9. *Para $f, g \in \mathbb{F}[x]$, suponha que $f|g$ e $g = fr$. Então a aplicação $\mathbb{F}$-linear $\psi : \mathcal{A}_g \to \mathcal{A}_f$ definido por $x \mapsto x$ e $\widehat{y} \mapsto yr$, é um homomorfismo injetivo de álgebras.*

Demonstração. Para provar que ψ é um homomorfismo, é suficiente, pela propriedade universal, analisar as imagens da condição em $\mathcal{A}_g$. Como

$$\psi(\widehat{y}x - x\widehat{y} - g) = yrx - xyr - g = (yx - xy)r - g = fr - g = 0,$$

temos que ψ é um homomorfismo.

Para provar que ψ é injetivo, suponha que $ker\psi \neq 0$, então existe $a \in \mathcal{A}_g$ diferente de zero, tal que $\psi(a) = 0$. Como $\{x^i\widehat{y}^j \mid i, j \geqslant 0\}$ é uma base para $\mathcal{A}_g$, então a tem a forma:

$$a = \sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{ij} x^i \widehat{y}^j,$$

onde $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$. Portanto,

$$\psi(a) = \sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{i,j} x^i (yr)^j = \sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{i,j} x^i r^j y^j + \text{termos inferiores},$$

daí que

$$\sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{i,j} r^j x^i y^j = 0.$$

Como $\{x^i y^j \mid i, j \geqslant 0\}$ é uma base de $\mathcal{A}_f$, então $\alpha_{i,j} r^j = 0$. Logo, $\alpha_{i,j} = 0$ pois $r^j \neq 0$, assim $a = 0$, o que é uma contradição. Portanto, ψ é injetivo. □

Uma consequência imediata do lema anterior é a seguinte.

Corolário 4.10. *Para todo $h \in \mathbb{F}[x]$ diferente de zero, a aplicação $\psi : \mathcal{A}_h \to \mathsf{A}_1$ definida por $x \mapsto x$ e $\widehat{y} \mapsto yh$ é um homomorfismo injetivo.*

Para distinguir os geradores da álgebras $\mathcal{A}_h$ e da álgebra de Weyl A_1, em diante usaremos a seguinte **Convenção 1**: Os geradores de $\mathcal{A}_h$ serão x, $\widehat{y}$, 1 e os geradores de A_1 serão $x, y, 1$. Quando $\mathcal{A}_h$ for visto como uma subálgebra de A_1, o qual denotamos $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$, então $\widehat{y} = yh$.

Observação 4.11. *Considerando $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$ como na convenção 1, temos:*

a) Para $j \in \mathbb{Z}$, $(\widehat{y} + jh')h = h(\widehat{y} + (j+1)h')$.

b) Para $i \in \mathbb{N}$, $y^i h^i = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (i-1)h')$

Demonstração. Para o item $a)$ note que $[\widehat{y}, f] = f'h$ para todo $f \in \mathbb{F}[x]$, então

$$(\widehat{y} + jh')h = \widehat{y}h + jh'h = h\widehat{y} + h'h + jh'h = h(\widehat{y} + (j+1)h').$$

O item $b)$ é obtido por indução. Para $i = 1$, é claro pois $yh = \widehat{y}$. Para $i = 2$ temos que

$$y^2h^2 = y\widehat{y}h = y(h\widehat{y} + h'h) = yh\widehat{y} + yh'h = \widehat{y}\widehat{y} + \widehat{y}h' = \widehat{y}(\widehat{y} + h').$$

Suponhamos que a afirmação é verdade para $i = k - 1 > 1$, e provemos que se cumpre para $i = k$. De fato,

$$\begin{aligned} y^kh^k &= y(y^{k-1}h^{k-1})h \\ &= y(\widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (k-2)h'))h \end{aligned}$$

Aplicando o item $a)$ k vezes, temos

$$y^kh^k = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (k-1)h')$$

Portanto, obtemos o resultado. □

O Lema a seguir descreve uma maneira de reconhecer os elementos da álgebra $\mathcal{A}_h$ dentro da álgebra de Weyl A_1.

Lema 4.12. *Considerando $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$ como na convenção 1, então*

$$\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{F}[x]h^iy^i = \bigoplus_{i \geqslant 0} y^ih^i\mathbb{F}[x].$$

Demonstração. Provemos que $\bigoplus_{i=0}^{n} \widehat{y}^i\mathbb{F}[x] = \bigoplus_{i=0}^{n} y^ih^i\mathbb{F}[x]$ para todo $n \geqslant 0$, de onde concluiremos também que $\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{F}[x]y^ih^i$. Pela Observação 4.11, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$y^ih^i = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (i-1)h') \in \mathcal{A}_h,$$

isto implica que $y^ih^i\mathbb{F}[x] \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n} \widehat{y}^i\mathbb{F}[x]$ para $0 \leqslant i \leqslant n$, de onde $\bigoplus_{i=0}^{n} y^ih^i\mathbb{F}[x] \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n} \widehat{y}^i\mathbb{F}[x]$.

Para a outra inclusão, provemos usando indução que $\widehat{y}^n \in \bigoplus_{i=0}^{n} y^ih^i\mathbb{F}[x]$. Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro pois $\widehat{y} = yh$. Para $n = 2$, da Observação 4.11 temos $y^2h^2 = \widehat{y}^2 + \widehat{y}h'$, daí que $\widehat{y}^2 = y^2h^2 - yhh' \in \bigoplus_{i=0}^{2} y^ih^i\mathbb{F}[x]$. Suponhamos que a afirmação é certa para $n - 1$ e provemos que se cumpre para n. De novo, pela Observação 4.11, tomando $i = n$ temos $y^nh^n = \widehat{y}^n + a$, onde $a \in \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{y}^j\mathbb{F}[x]$. Então, pela hipótese de indução $\widehat{y}^n = y^n h^n + a$, onde $a \in \bigoplus_{i=0}^{n-1} y^i h^i \mathbb{F}[x]$. daí que, $\widehat{y}^n \in \bigoplus_{i=0}^{n} y^i h^i \mathbb{F}[x]$. E assim, $\bigoplus_{i=0}^{n} \widehat{y}^i \mathbb{F}[x] \subseteq \bigoplus_{i=0}^{n} y^i h^i \mathbb{F}[x]$. Em conclusão,

$$\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i=0}^{n} \widehat{y}^i \mathbb{F}[x] = \bigoplus_{i=0}^{n} y^i h^i \mathbb{F}[x],$$

para todo $n \geqslant 0$.

Agora, para concluir a prova é suficiente provar que $h^i y^i \in \mathcal{A}_h$. Consideremos o anti-homomorfismo $\phi : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1$, definido por $\phi(x) = x$ e $\phi(y) = -y$. Note que $\phi(\psi(\widehat{y})) = \phi(yh) = -hy = -yh + h' = -\widehat{y} + h'$, logo ϕ restrito a $\mathcal{A}_h$ é um anti-homomorfismo de $\mathcal{A}_h$. Aplicando a restrição a $\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} y^i h^i \mathbb{F}[x]$, obtemos $\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{F}[x] h^i y^i$, e também que

$$h^i y^i = (\widehat{y} - ih')(\widehat{y} - (i-1)h') \cdots (\widehat{y} - h') \in \mathcal{A}_h.$$

$\square$

Lembremos da Proposição 2.22 que: se a característica de $\mathbb{F}$ é 0, o centro de A_1 é $\mathbb{F}$; e da Proposição 2.28, se a característica de $\mathbb{F}$ é $p > 0$, o centro de A_1 é $\mathbb{F}[x^p, y^p]$. Esses resultados, juntamente com o seguinte lema, nos permitirão descrever o centro de $\mathcal{A}_h$.

Lema 4.13. *Consideremos $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$ como na convenção 1, e seja $\delta : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ a derivação com $\delta(f) = hf'$ para todo $f \in \mathbb{F}[x]$. Então*

a) $[\widehat{y}^n, f] = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta^j(f) \widehat{y}^{n-j}$ *em* $\mathcal{A}_h$,

b) $[y^n, f] = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} y^{n-j}$ *em* A_1,

onde $f^{(j)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^j (f)$.

Demonstração. Provamos o item a) por indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é valido pois $[\widehat{y}, f] = f'h = \delta(f)$. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para $n = k - 1$. Note que $[\widehat{y}, f] = \delta(f)$ para cada $f \in \mathbb{F}[x]$, implica $[\widehat{y}, \delta^j(f)] = \delta^{j+1}(f)$ para cada $j \geqslant 1$. Então

$$
\begin{aligned}
[\widehat{y}^k, f] &= \widehat{y}[\widehat{y}^{k-1}, f] + [\widehat{y}, f]\widehat{y}^{k-1},\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \widehat{y}\delta^j(f)\widehat{y}^{k-j-1} + \delta(f)\widehat{y}^{k-1},\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} [\delta^j(f)\widehat{y} + \delta^{j+1}(f)]\widehat{y}^{k-j-1} + \delta(f)\widehat{y}^{k-1},\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \delta^j(f)\widehat{y}^{k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \delta^{j+1}(f)\widehat{y}^{k-j-1} + \delta(f)\widehat{y}^{k-1},\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \delta^j(f)\widehat{y}^{k-j} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j-1} \delta^{j}(f)\widehat{y}^{k-j} + \delta(f),\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \delta^j(f)\widehat{y}^{k-j} + \delta(f),\\
&= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \delta^j(f)\widehat{y}^{k-j}.
\end{aligned}
$$

Isso conclui a prova. A prova de $b)$ é similar. $\square$

Antes de determinar o centro de $\mathcal{A}_h$, observe que considerando $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$, é válida a seguinte identidade, $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h = \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$. De fato, como $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$, então $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$, daí que $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) \cap \mathcal{A}_h = \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$. Reciprocamente, seja $z \in \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$, então $[x, z] = 0$ e $[\widehat{y}, z] = 0$, então $0 = [\widehat{y}, z] = [yh, z] = [y, z]h + y[h, z] = [y, z]h$, mais como $h \neq 0$ então $[y, z] = 0$, logo $z \in \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1)$. Daí que, $z \in \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$, e assim $z \in \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$. Portanto, $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$. Em conclusão, $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h = \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$

Teorema 4.14. *Consideremos $\mathcal{A}_h \subseteq \mathsf{A}_1$ como na convenção 1, temos que:*

a) Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, então o centro de $\mathcal{A}_h$ é $\mathbb{F}$.

b) Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = p > 0$, então o centro de $\mathcal{A}_h$ é a álgebra polinomial $\mathbb{F}[x^p, h^py^p]$, onde

$$h^py^p = y^ph^p = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (p-1)h') = \widehat{y}^p - \frac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y}.$$

Demonstração. Se $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, então da Proposição 2.22 temos que $\mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) = \mathbb{F}$, e pela observação anterior $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$, assim $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) = \mathbb{F}$. Suponhamos agora que $\operatorname{char}\mathbb{F} = p > 0$, então $x^p, h^py^p \in \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$, daí que $x^p, h^py^p \in \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$. Para cada $k \geqslant 0$, $h^{kp}y^{kp} = (h^p)^k(y^p)^k = (h^py^p)^k$, Assim x^p e h^py^p são algebricamente independentes, de onde temos que $\mathbb{F}[x^p, h^py^p] \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$. Reciprocamente, seja $z \in \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$, então $z \in \mathrm{Z}(\mathsf{A}_1) \cap \mathcal{A}_h$, logo pelos Lemas 4.12 e 4.13, podemos escrever z na forma,

$$z = \sum_{i \equiv 0 (\bmod p)} r_i y^i,$$

onde $r_i \in \mathbb{F}[x^p]$ tal que $h^i \mid r_i$ para todo $i \equiv 0(\text{mod} p)$. Como $h^i \in \mathbb{F}[x^p]$ para $i \equiv 0(\text{mod} p)$, então existe $c_i \in \mathbb{F}[x^p]$ tal que $z = \sum_{i\equiv 0(\bmod p)} c_i h^i y^i \in \mathbb{F}[x^p, h^p y^p]$. Daí que, $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathbb{F}[x^p, h^p y^p]$. Portanto, $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) = \mathbb{F}[x^p, h^p y^p]$. Por outro lado, da Observação 4.11 considerando $i = p$ obtemos a relação $h^p y^p = y^p h^p = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (p-1)h')$. Portanto, só falta mostrar que $h^p y^p = \widehat{y}^p - \dfrac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y}$. Pelo Lema 4.12 podemos escrever $h^p y^p \in \mathcal{A}_h$ na forma

$$h^p y^p = \sum_{n=0}^{p} f_n \widehat{y}^n,$$

onde $f_n \in \mathbb{F}[x]$ para todo $n \geqslant 0$, e $f_p = 1$. Então

$$\begin{aligned}
[h^p y^p, x] &= \sum_{n=1}^{p} f_n [\widehat{y}^n, x], \\
&= \sum_{n=1}^{p} f_n \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta^j(x) \widehat{y}^{n-j} \right), \\
&= f_p \delta^p(x) + \sum_{n=1}^{p-1} f_n \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta^j(x) \widehat{y}^{n-j} \right), \\
&= \delta^p(x) + \binom{p-1}{1} f_{p-1} \delta(x) \widehat{y}^{p-2} + \text{termos de menor ordem},
\end{aligned}$$

como $h^p y^p \in \mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$ então $[h^p y^p, x] = 0$, logo

$$0 = \delta^p(x) + \binom{p-1}{1} f_{p-1} \delta(x) \widehat{y}^{p-2} + \text{termos de menor ordem},$$

como $\delta(x) = h \neq 0$ então $f_{p-1} = 0$, assim

$$0 = \delta^p(x) + \binom{p-2}{1} f_{p-2} \delta(x) \widehat{y}^{p-3} + \text{termos de menor ordem},$$

continuando desta forma, obtemos $f_n = 0$ para $n = p-1, p-2, \ldots, 2$. Daí que $0 = \delta^p(x) + f_1 \delta(x)$, ou de forma equivalente $f_1 = -\dfrac{\delta^p(x)}{h}$, pois h sempre divide a $\delta^k(x)$ para todo $k \geqslant 1$. Em consequência, $h^p y^p = \widehat{y}^p - \dfrac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y} + f_0$. Então

$$0 = [\widehat{y}, \widehat{y}^p - \frac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y} + f_0] = [\widehat{y}, \widehat{y}^p] + [\widehat{y}, -\frac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y}] + [\widehat{y}, f_0] = -[\widehat{y}, -\frac{\delta^p(x)}{h}]\widehat{y} + h f_0'.$$

Mas então,

$$\widehat{y}^p - \widehat{y}\frac{\delta^p(x)}{h} + f_0 = \widehat{y}^p - \frac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y} + f_0 = h^p y^p = \widehat{y}(\widehat{y} + h')(\widehat{y} + 2h') \cdots (\widehat{y} + (p-1)h') \in \widehat{y}\mathcal{A}_h,$$

e assim $f_0 \in \widehat{y}\mathcal{A}_h$. Isso só acontece se $f_0 = 0$. E portanto, $h^p y^p = \widehat{y}^p - \dfrac{\delta^p(x)}{h}\widehat{y}$. $\square$

Outro resultado importante sobre a álgebra $\mathcal{A}_h$ diz respeito à sua simplicidade, ou seja, quais são as condições para que essas subálgebras sejam simples. Lembremos que um elemento $v \in \mathcal{A}_h$ é **normal** se $v\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h v$. Em particular, na álgebra $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}[x, y]$ cada elemento é normal. Na álgebra de Weyl A_1 os elementos normais são precisamente os elementos centrais.

Lema 4.15. *Seja g um fator de $h \in \mathbb{F}[x]$. Então g é um elemento normal de $\mathcal{A}_h$.*

Demonstração. Escrevamos $h = gf$ para $f \in \mathbb{F}[x]$. Então, pelo Lema 4.7,

$$\widehat{y}g = g\widehat{y} + hg' = g\widehat{y} + gfg' = g(\widehat{y} + f + g') \in g\mathcal{A}_h.$$

Além disso, $g\widehat{y} = (\widehat{y} - fg')g \in \mathcal{A}_h g$. Como $\mathcal{A}_h = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{F}[x]\widehat{y}^i$, temos que $\mathcal{A}_h g \subseteq g\mathcal{A}_h$ e $g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_h g$. Assim, $g\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h g$ □

Lema 4.16. *A álgebra $\mathcal{A}_h$ é simples se, e somente, se $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ e $h \in \mathbb{F}^*$.*

Demonstração. Suponhamos $\mathcal{A}_h$ simples. Se $b \neq 0$ é um elemento normal de $\mathcal{A}_h$, então $b\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h b = \mathcal{A}_h$, isto pela simplicidade, assim b é uma unidade. Como as unidades de $\mathcal{A}_h$ são os elementos de $\mathbb{F}^*$, então pelo Lema 4.15 temos que $h \in \mathbb{F}^*$, e também $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h) = \mathbb{F}$. Logo, pelo Teorema 4.14, $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Reciprocamente, se $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ e $h \in \mathbb{F}^*$, então $\mathcal{A}_h$ é isomorfo com a álgebra de Weyl A_1, mas sabemos que essa álgebra é simples, pela Proposição 2.22. □

Proposição 4.17. *Seja $h \in \mathbb{F}^*$ e $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero, então $\mathcal{A}_h$ não é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Como $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$ e $h \in \mathbb{F}^*$ então do lema anterior $\mathcal{A}_h$ é simples, e como $\mathcal{A}_h$ é unitária, pelo Exemplo 1.35, é primitiva. Além disso $\mathcal{A}_h$ é central. Portanto, pelo Teorema de Kaplansky, se $\mathcal{A}_h$ tem uma identidade polinomial então sua dimensão deve ser finita, mais sabemos que $\mathcal{A}_h$ tem dimensão infinita, o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{A}_h$ não possui identidades polinomiais não triviais. □

Observa-se que se, $\mathbb{F}$ tem característica positiva $p > 0$, o centro de $\mathcal{A}_h$ é a álgebra polinomial $\mathbb{F}[x^p, h^p y^p]$ e $\mathcal{A}_h$ é um módulo livre sobre seu centro $\mathrm{Z}(\mathcal{A}_h)$. Logo a álgebra $\mathcal{A}_h$ terá identidades polinomiais (veja [30], Lema 1.19). Portanto, faz sentido estudar as identidades polinomiais para $\mathcal{A}_h$ neste caso.

4.3 Identidades polinomiais para $\mathcal{A}_h$

A partir de agora, seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 0$. Lembremos da Subseção 3.1.1 que, M_p denota a álgebra de matrizes $p \times p$ sobre $\mathbb{F}$, $\widetilde{M_p}$ denota a álgebra de matrizes $p \times p$ sobre $\mathbb{F}[x, y]$, e $A = xI_p + A_0$ e $B = yI_p + B_0$ são matrizes em $\widetilde{M}_p$, onde I_p é a identidade em $\widetilde{M}_p$, e

$$A_0 = \sum_{i=1}^{p} E_{i+1,j} \quad \text{e} \quad B_0 = \sum_{i=1}^{p} i \cdot E_{i,j+1}.$$

Definamos o homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{F}[x, y] \to \widetilde{M}_p$ por

$$x \mapsto A, \quad y \mapsto B, \quad 1 \mapsto I_p,$$

Lema 4.18. *O homomorfismo φ induz o homomorfismo injetivo $\overline{\varphi} : \mathsf{A}_1 \to \widetilde{M}_p$. Em particular, a restrição de $\overline{\varphi}$ a $\mathcal{A}_h \subset \mathsf{A}_1$ é o homomorfismo injetivo $\mathcal{A}_h \to \widetilde{M}_p$.*

Demonstração. Pela parte b) do Lema 3.5 temos que

$$\overline{\varphi}(yx - xy - 1) = BA - AB - I_p = B_0A_0 - A_0B_0 - I_p = 0.$$

Portanto, φ induz o homomorfismo $\overline{\varphi} : \mathsf{A}_1 \to \widetilde{M}_p$. Suponhamos que existe um elemento não nulo $z \in \mathsf{A}_1$ tal que $\overline{\varphi}(z) = 0$. Como $\{x^i y^j \mid i, j \geqslant 0\}$ é uma $\mathbb{F}$-base de A_1 temos que

$$z = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} x^i y^j$$

para alguns $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$. Assim,

$$0 = \overline{\varphi}(z) = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} \overline{\varphi}(x)^i \overline{\varphi}(y)^j = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} A^i B^j.$$

As igualdades

$$A^i = \begin{pmatrix} x^i & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^j = \begin{pmatrix} y^j & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

implicam que a entrada $(1, 1)$ de $A^i B^j$ é $(A^i B^j)_{1,1} = x^i y^j$. Daí que

$$0 = (\overline{\varphi}(z))_{1,1} = \sum_{i,j \geqslant 0} \alpha_{ij} x^i y^j \quad \text{em} \quad \mathbb{F}[x, y].$$

Daí que, $\alpha_{ij} = 0$ para cada $i, j \geqslant 0$, e $z = 0$; que é uma contradição. Portanto, $\overline{\varphi}$ é injetivo. $\square$

O seguinte resultado é válido somente quando o corpo $\mathbb{F}$ for infinito, entretanto, o lema anterior continua sendo válido para qualquer $\mathbb{F}$ com característica positiva.

Corolário 4.19. *Se $\mathbb{F}$ um corpo infinito, então* $\mathrm{Id}(M_p) \subset \mathrm{Id}(\mathcal{A}_h)$.

Demonstração. O Lema 4.18 implica que $\mathrm{Id}(\widetilde{M}_p) \subset \mathrm{Id}(\mathcal{A}h)$. Pela Proposição 1.32, como $\mathbb{F}[x,y]$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra comutativa e M_p é uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{F}$, então

$$\mathrm{Id}(\mathbb{F}[x,y] \otimes M_p) = \mathrm{Id}(M_p).$$

Além disso, pelo Lema 3.10 se A é uma $\mathbb{F}$-álgebra então $M_n(A) \cong A \otimes M_n(\mathbb{F})$. En particular temos $\widetilde{M}_p = M_p(\mathbb{F}[x,y]) \cong \mathbb{F}[x,y] \otimes M_p(\mathbb{F})$. Portanto, $\mathrm{Id}(M_p) = \mathrm{Id}(\widetilde{M}_p)$. O que conclui a prova. $\square$

Para cada $\alpha \in \mathbb{F}$ consideremos o homomorfismo de avaliação $\epsilon_\alpha : \mathbb{F}[x,y] \to \mathbb{F}$ de álgebras unitárias definido por

$$x \mapsto \alpha, \quad y \mapsto 0$$

e estendemos isso para o homomorfismo de avaliação $\varepsilon_\alpha : \widetilde{M}_p \to M_p$. Pelo Lema 4.18,temos que $\mathcal{A}_h$ é subálgebra de $\widetilde{M}_p$, então podemos considerar as imagens de $x, \widehat{y} \in \mathcal{A}_h$ em M_p, que iremos denotar por C_α e D_α, respectivamente.

$$\begin{aligned} C_\alpha = \varepsilon_\alpha(\overline{\varphi}(x)) &= \varepsilon_\alpha(A) &&= \alpha I_p + A_0, \\ D_\alpha = \varepsilon_\alpha(\overline{\varphi}(\widehat{y})) &= \varepsilon_\alpha(Bh(A)) &&= B_0 \varepsilon_\alpha(h(A)). \end{aligned}$$

Para obter a descrição explícita da matriz D_α nos calculamos $h(A)$. Para $r \geqslant 1$ denotamos a r-ésima derivada de h por $h^{(r)} = \dfrac{d^r h}{dx^r}$.

Lema 4.20.

$$h(A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i-j)!} h^{(i-j)}(x) E_{ij}.$$

Demonstração. Introduzimos a seguinte notação, que será usada apenas nesta prova. Ou seja, nós definimos $x^{-r} = 0$ no case $r \geqslant 1$ e $\binom{k}{r} = 0$ no caso $r > k$. Começamos com o caso de $h = x^k$ para algum $k \geqslant 1$. Como $A_0^r = 0$ para todo $r \geqslant p$, temos

$$h(A) = A^k = (xI_p + A_0)^k = \sum_{r=0}^{p-1} \binom{k}{r} x^{k-r} A_0^r$$

A parte $a)$ do Lema 3.5 implica

$$h(A) = \sum_{r=0}^{p-1} \binom{k}{r} x^{k-r} \left(\sum_{i=1}^{p-r} E_{r+i,i} \right) = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p-r} \binom{k}{r} x^{k-r} E_{r+i,i}.$$

reagrupando os termos temos

$$h(A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \binom{k}{i-j} x^{k-(i-j)} E_{ij}. \tag{4.1}$$

Note que para $0 \leqslant r < p$ nós podemos reescrever

$$\binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{r!} h^{(r)}(x),$$

onde $r!$ é diferente de zero um $\mathbb{F}$. Portanto, a equação 4.1 implica que a afirmação é válida para $h = x^k$. O caso geral segue da prova do caso parcial e da linearidade da derivada. □

O lema 4.20 junto com a definição de D_α implicam de forma imediata o seguinte resultado.

Corolário 4.21.

$$D_\alpha = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{i}{(i-j+1)!} h^{(i-j+1)}(\alpha) E_{ij}$$

Exemplo 4.22. *Se a característica do corpo* $\mathbb{F}$ *é* $p = 3$ *temos que*

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} h'(\alpha) & h(\alpha) & 0 \\ h''(\alpha) & 2h'(\alpha) & 2h(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De maneira abreviada, denotamos a (i, j)-ésima entrada da matriz D_α por $\xi_{i,j} \in \mathbb{F}$ e para todo $1 \leqslant k < p$ definimos

$$D_{\alpha,k} = D_\alpha - \sum_{r=0}^{k-1} \xi_{k,k-r} A_0^r = D_\alpha - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{p-r} \xi_{k,k-r} E_{r+i,i} \tag{4.2}$$

Aplicamos o seguinte lema técnico para demonstrar a Proposição 4.24.

Lema 4.23. *Para todo* $1 \leqslant r \leqslant p$ *e* $1 \leqslant k < p$ *temos*

$$E_{rk} D_{\alpha,k} = k h(\alpha) E_{r,k+1}.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} E_{rk} D_{\alpha,k} &= \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{i+1} \xi_{i,j} E_{rk} E_{ij} - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{p-j} \xi_{k,k-j} E_{rk} E_{i+j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \xi_{k,j} E_{rj} - \sum_{j=1}^{k} \xi_{k,j} E_{rj}. \\ &= \xi_{k,k+1} E_{r,k+1}. \end{aligned}$$

A igualdade $\xi_{k,k+1} = kh(\alpha)$ conclui a prova. □

Proposição 4.24. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{F}$ *com* $h(\alpha) \neq 0$ *temos que*

$$\varepsilon_\alpha(\mathcal{A}_h) = M_p.$$

Em particular, $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \subset \mathrm{Id}(M_p)$ *para* $h \neq 0$.

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{L} = \varepsilon_\alpha(\mathcal{A}_h) = \underset{\mathbb{F}}{\mathrm{alg}}\{I_p, C_\alpha, D_\alpha\}$. Como $A_0 = C_\alpha - \alpha I_p \in \mathcal{L}$, obtemos que

$$\mathcal{A}_0^k = \sum_{i=1}^{p-k} E_{k+i,i} \in \mathcal{L},$$

para todo $0 \leqslant k < p$. Em particular, $E_{p1} = \mathcal{A}_0^{p-1} \in \mathcal{L}$. A igualdade 4.2 implica que $D_{\alpha,k} \in \mathcal{L}$ para todo $0 \leqslant k < p$. A igualdade $\mathcal{L} = M_p$ resultará da seguinte afirmação:

$$\{E_{rk} \mid 1 \leqslant 1 < r, k \leqslant p\} \subset \mathcal{L}. \tag{4.3}$$

Para provar a afirmação vamos usar indução descendente sobre r.

Suponhamos $r = p$. Temos que $E_{p1} \in \mathcal{L}$. O Lema 4.23 implica que $E_{p1}D_{\alpha,1} = h(a)E_{p2} \in \mathcal{L}$. Como $E_{p1}, D_{\alpha,1} \in \mathcal{L}$ e $h(\alpha) \neq 0$, nós concluímos que $\mathcal{E}_{p-2} \in \mathcal{L}$. Similarmente a equação $E_{p2}D_{\alpha,2} = 2h(\alpha)E_{p3} \in \mathcal{L}$ implica $E_{p3} \in \mathcal{L}$. Repetindo este argumento obtemos que $E_{pk} \in \mathcal{L}$ para todo $1 \leqslant k \leqslant p$. Suponhamos que para algum $1 < r_0 \leqslant p$ a afirmação 4.3 é válida para todo $r > r_0$, é dizer, $E_{rk} \in \mathcal{L}$ para todo $1 \leqslant k \leqslant p$. Dado que

$$A_0^{r-1} - \sum_{k+2}^{p-r+1} E_{(r-1)+k,k} = E_{r1},$$

nós obtemos que $E_{r1} \in \mathcal{L}$. O Lema 4.23 implica que $E_{r1}D_{\alpha,1} = h(\alpha)E_{r2} \in \mathcal{L}$. Portanto, $E_{r2} \in \mathcal{L}$. Repetindo o argumento obtemos que $E_{r,k+1} \in \mathcal{L}$ para todo $1 \leqslant k < p$, pois $E_{rk}D_{\alpha,k} = kh(\alpha)E_{r,k+1}$. Portanto, a prova da afirmação 4.3 é concluída.

Existe $h \in \mathbb{F}$ com $h(\alpha) \neq 0$, porque $h \neq 0$ e $\mathbb{F}$ é infinito. Como ε_α é um homomorfismo de álgebras, nos obtemos que $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \subset \mathrm{Id}(M_p)$. $\square$

Para ilustrar a prova da Proposição 4.24, repetimos essa mesma no caso particular $p = 3$ no exemplo a seguir.

Exemplo 4.25. *Suponha $p = 3$ e $h(\alpha) \neq 0$. Então $A_0 = E_{21} + E_{32}$,*

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad e \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} h'(\alpha) & h(\alpha) & 0 \\ h''(\alpha) & 2h'(\alpha) & 2h(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos a provar que $\mathcal{L} = \underset{\mathbb{F}}{\mathrm{alg}}\{I_p, C_\alpha, D_\alpha\}$ coincide com M_3. Consideremos os seguintes elementos de $\mathcal{L}$:

$$D_{\alpha,1} = D_\alpha - h'(\alpha)I_3 = \begin{pmatrix} 0 & h(\alpha) & 0 \\ h''(\alpha) & h'(\alpha) & 2h(\alpha) \\ 0 & 0 & -h'(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D_{\alpha,2} = D_\alpha - 2h'(\alpha)I_3 - h''(\alpha)A_0 = \begin{pmatrix} -h'(\alpha) & h(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 2h(\alpha) \\ 0 & -h''(\alpha) & -2h'(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Note que $A_0 = C_\alpha - \alpha I_3$ *e* $A_0^2 = E_{31}$ *pertencem* $\mathcal{L}$. *Como*

$$E_{31}D_{\alpha,1} = h(\alpha)E_{3,2} \quad e \quad E_{32}D_{\alpha,2} = 2h(\alpha)E_{3,3},$$

temos que $E_{32}, E_{33} \in \mathcal{L}$. *Assim* $A_0 - E_{32} = E_{21}$ *pertence a* $\mathcal{L}$, *Como*

$$E_{21}D_{\alpha,1} = h(\alpha)E_{22} \quad e \quad E_{22}D_{\alpha,2} = 2h(\alpha)E_{23},$$

temos que $E_{22}, E_{23} \in \mathcal{L}$. *Daí que* $I_3 - E_{22} - E_{33} = E_{11}$ *pertence a* $\mathcal{L}$, *Como*

$$E_{11}D_{\alpha,1} = h(\alpha)E_{12} \quad e \quad E_{12}D_{\alpha,2} = 2h(\alpha)E_{13},$$

temos que $E_{12}, E_{13} \in \mathcal{L}$. *Portanto,* $\mathcal{L} = M_3$.

Teorema 4.26. *Seja* $\mathbb{F}$ *um corpo infinito de característica* $p > 0$, *seja* $h \in \mathbb{F}[x]$ *distinto de zero, então*

$$\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Id}(M_p).$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.19 temos que $\mathrm{Id}(M_p) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{A}_h)$ e pela Proposição 4.24 temos que $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \subseteq \mathrm{Id}(M_p)$. Portanto, concluímos o resultado. □

Agora, suponhamos que $\mathbb{F}$ é um corpo finito de ordem $q = p^k$, e $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ para um corpo finito $\mathbb{K}$. Quando consideremos a álgebra $\mathcal{A}_h$ sobre $\mathbb{K}$, nos escrevemos $\mathcal{A}_h(\mathbb{K})$. Então temos o seguente resultado.

Teorema 4.27. *Se* $\mathbb{F}$ *é um corpo finito de ordem* $q = p^k$, *e* $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ *para um corpo finito* $\mathbb{K}$, *então:*

a) $\mathrm{Id}(M_p(\mathbb{K})) \cap \mathbb{F}\langle X\rangle \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{A}_h)$, *se* $h \neq 0$.

b) $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \subset \mathrm{Id}(M_p)$, *se* h *é diferente de zero sobre* $\mathbb{F}$.

c) $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \neq \mathrm{Id}(M_p)$.

Demonstração. Como $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}_h(\mathbb{K})$, como espaços vetoriais, então temos que $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h(\mathbb{K})) \cap \mathbb{F}\langle X\rangle \subset \mathrm{Id}(\mathcal{A}_h)$. Logo, o pelo Teorema 4.26, concluímos a prova da parte *a*), pois $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) = \mathrm{Id}(M_p)$ se $h \neq 0$. Pela Proposição 4.24, temos que $\mathrm{Id}(\mathcal{A}_h) \subset \mathrm{Id}(M_p)$ para $h \neq 0$, de onde concluímos a parte *b*). Agora, consideremos $F(n, q, x, y)$ definido por:

$$g(x)[1 - (y(\mathrm{ad}x)^{n-1})^{q-1}][1 - (y(\mathrm{ad}x)^{n-2})^{q-1}] \cdots [1 - (y\mathrm{ad}x)^{q-1}](y^q - y),$$

onde $y\mathrm{ad}x = [y, x]$ e $g(x) = (x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x) \cdots (x^{q^n} - x)$. Genov em ([11], Em 1981) demonstro que $F(p, q, x, y)$ é uma identidade polinomial para M_p. Como $x\mathrm{ad}x = [x, x] = 0$ para $x \in \mathcal{A}_h$, então

$$F(p, q, x, x) = (x^q - x)(x^{q^2} - x)(x^{q^3} - x) \cdots (x^{q^p} - x).$$

Pelo Lema 4.12, temos que os elementos $x, x^2, x^3, \ldots$ são linearmente independentes em $\mathcal{A}_h$, portanto $F(p, q, x, x) \neq 0$ em $\mathcal{A}_h$. Portanto, $F(p, q, x, x)$ não é identidade polinomial para $\mathcal{A}_h$. Isso conclui a parte c).

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs vol. 122, AMS, 2005.

[2] A.R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras* (Russian), Algebra i Logika. **26** (1987), 597–641. Translation: Algebra and Logic 26 (1988), 362–397.

[3] A.S. Dzhumadil'daev, *N-commutators*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), no. 3, 516–553.

[4] A. Dzhumadil'daev, *$2p$-commutator on differential operators of order p*, Lett. Math. Phys. **104** (2014), no. 7, 849–869,

[5] A.S. Dzhumadil'daev, D. Yeliussizov, *Path decompositions of digraphs and their applications to Weyl algebra*, Adv. in Appl. Math. **67** (2015), 36–54.

[6] A.Ya. Belov, *On non-Specht varieties* (Russian), Fundam. Prikl. Mat. **5** (1999), no. 1, 47–66.

[7] A.Ya. Belov, *Counterexamples to the Specht problem* (Russian), Mat. Sb. **191** (2000), no. 3, 13-24. Translation: Sb. Math. **191** (2000), no. 3, 329–340.

[8] B. Farb, R. K. Dennis, *Noncommutative Algebra*, Springer-Verlag, 1993.

[9] D. Cook, *The Weyl algebras*. Singapore; New York: Springer, 2000. Monograph of Bachelor of Science, School of Mathematics, The University of New South Wales, 2004.

[10] G. Benkart, S.A. Lopes, M. Ondrus, *A parametric family of subalgebras of the Weyl algebra I*. Structure and automorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 3, 1993–2021.

[11] G. Genov, *Basis for identities of a third order matrix algebra over a finite field*, Algebra Log. **20** (1981) 241–257.

[12] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York, 1950.

[13] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Carus Math. Monographs 15, Wiley and Sons, Inc., New York, 1968

[14] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer.Math. Soc. **54** (1948), 496–500.

[15] J. Alev and F. Dumas, *Invariants du corps de Weyl sous l'action de groupes finis* (French, with English summary), Commun. Algebra **25** (1997), no. 5, 1655–1672.

[16] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. 377, 53–67, 2004.

[17] J.A. Freitas, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *$\mathbb{Z}$-graded identities of the Lie algebra W_1*, J. Algebra **427** (2015), 226–251.

[18] K. R. Goodearl, R. B. Warfield Jr, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, 2004.

[19] L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Rings Theory*, Academic Press, New York, 1980.

[20] L.H. Rowen, *Graduate algebra: Commutative view*, American Mathematical Soc, 2006.

[21] L.H. Rowen, *Graduate algebra: Noncommutative view*, American Mathematical Soc, 2008.

[22] M. Awami, M. Van den Bergh, and F. Van Oystaeyen, *Note on derivations of graded rings and classification of differential polynomial rings*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A **40** (1988), no. 2, 175–183. Deuxième Contact Franco-Belge en Algèbre (Faulx-les-Tombes, 1987).

[23] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme* (German), Math. Ann. **85** (1922), 184—194.

[24] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $\neq 2$*, J. Algebra **241** (2001), 410—434.

[25] S. A. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449-463.

[26] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-Modules*, Cambridge University Press, 1995.

[27] S.P. Mishchenko, *Solvable subvarieties of a variety generated by a Witt algebra*, Math. USSR Sb. **64** (1989), no. 2, 415–426.

[28] V. Drensky, *A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra Logic **20** (1981), 188—194.

[29] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Springer, Singapore, 1999.

[30] V. Drensky, E. Formanek, *Polynomial identity rings*, CRM Barcelona, Springer Basel AG, 2004.

[31] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme* (German), Math. Ann. **113** (1936), 528—567.

[32] Yu. N. Maltsev and E.N. Kuzmin, *A basis for identities of the algebra of second order matrices over a finite field*, Álgebra Logic **17** (1978), 17–21.

[33] Yu. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Transl. Math. Monogr., vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[34] Y. Tsuchimoto, *Preliminaries on Dixmier Conjecture*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.Ser. A Math. **24** (2003), 43–59.