



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

PAMMELA RAMOS DA CONCEIÇÃO

**Generalizações de equações diferenciais
envolvendo a derivada de Schwarz**

Campinas

2020

Pammela Ramos da Conceição

Generalizações de equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov

Coorientador: Stylianos Dimas

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Pammela Ramos da Conceição e orientada pelo Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C744g Conceição, Pammela Ramos da, 1993-
Generalizações de equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz / Pammela Ramos da Conceição. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.

Coorientador: Stylianos Dimas.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Simetrias de Lie. 2. Derivada de Schwarz. 3. Equação de Kummer-Schwarz generalizada. 4. Linearização. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov, 1962-. II. Dimas, Stylianos. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Generalizations of differential equations involving the Schwarzian derivative

Palavras-chave em inglês:

Lie symmetries

Schwarzian derivative

Generalized Kummer-Schwarz equation

Linearization

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Yuri Dimitrov Bozhkov [Orientador]

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Edmundo Capelas de Oliveira

Paolo Piccione

Antônio José da Silva Neto

Data de defesa: 18-12-2020

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-2107-380X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3055105792915110>

**Tese de Doutorado defendida em 18 de dezembro de 2020 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). YURI DIMITROV BOZHKO

Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). PAOLO PICCIONE

Prof(a). Dr(a). ANTÔNIO JOSÉ DA SILVA NETO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A Deus e à minha mãe Palmerina Ramos da Conceição.

Agradecimentos

Antes de tudo, sou grata a Deus por estar comigo em todos os momentos me guiando, me capacitando e me sustentando com sua imensa graça e bondade. Pela minha mãe Palmerina Ramos da Conceição por todo apoio e orações que tem me dado não somente durante o doutorado como também em todas as etapas da minha vida. Meus agradecimentos ao Professor e Orientador Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov pela amizade e parceria durante a minha trajetória, desde o mestrado até este doutorado, nas dificuldades e nos estudos. Ao Professor e Coorientador Dr. Stylianos Dimas por ter se juntado a mim e ao Dr. Bozhkov neste desafio, sua participação e contribuição foi de grandíssima importância. Agradeço ao Professor Dr. Meleshko por nos fornecer com prontidão o sistema correto sobre linearização de equações diferenciais e a toda banca examinadora que tornou possível a conclusão de mais esta etapa.

Aos amigos da Igreja Batista Fonte que me acompanharam, torceram e oraram por mim durante este período. Minha alegria em Campinas foi ter conhecido, crescido e aprendido com vocês! À minha querida amiga Sinelandia que desde o início desta etapa esteve presente, com sua amizade, suas orações, seu carinho e sua gentileza. A todos os amigos do Espírito Santo, que torceram por mim e que estiveram comigo. Aos colegas do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) pela alegre convivência, trocas de experiências e conhecimentos. Muito Obrigada!

Agradeço ao IMECC pela oportunidade de realizar este trabalho tão importante na minha vida acadêmica. Os desafios e etapas da vida não são vencidos sozinho, e eu sou imensamente grata por todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a minha vitória.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*”Não que possamos reivindicar qualquer coisa
com base em nossos próprios méritos,
mas a nossa capacidade vem de Deus”.
(Bíblia Sagrada, 2 Coríntios 3:5)*

Resumo

Nesta tese, com as lentes da teoria de Sophus Lie de simetrias de equações diferenciais, trabalhamos com generalizações da equação diferencial de Kummer-Schwarz (EKS). Iniciamos com uma abordagem preliminar, envolvendo conceitos, aplicações na matemática, propriedades, simetrias de Lie, simetrias de contato e linearização da EKS e da derivada de Schwarz. Em seguida, sugerimos uma generalização da EKS e obtivemos resultados concernentes a ela. Tais resultados envolvem linearização de equações, grupos contínuos de equivalência e simetrias de contato. Além disso, estendemos nossa pesquisa para sistemas de equações diferenciais de terceira ordem e apresentamos uma expressão geral para o cálculo das simetrias de Lie para tais sistemas. Por fim, fizemos um estudo sobre equações diferenciais parciais (EDPs), mais especificamente, a equação Schwarziana de Korteweg-de Vries (SKdV) e sistemas de EDPs envolvendo a derivada de Schwarz.

Palavras-chave: Simetrias de Lie. Derivada de Schwarz. Equação de Kummer-Schwarz generalizada. Linearização.

Abstract

In this thesis, under the lens of Sophus Lie's theory of symmetries of differential equations, we work with generalizations of the Kummer-Schwarz differential equation (KSE). We start with a preliminary approach involving concepts, applications in mathematics, properties, Lie point symmetries, contact symmetries and linearization of the KSE and the Schwarzian derivative. Then, we suggest a generalization of KSE and we obtain results concerning to it. Such results involve linearization of equations, continuous equivalence groups and contact symmetries. Furthermore, we extend our research to systems of third-order differential equations and we present a general expression for the calculation of Lie symmetries for such systems. Finally, we carried out a study on partial differential equations (PDEs), more specifically, the Schwarzian Korteweg-de Vries equation (SKdV) and PDE systems involving the Schwarzian derivative.

Keywords: Lie symmetries. Schwarzian derivative. Generalized Kummer-Schwarz equation. Linearization.

Lista de tabelas

Tabela 1	– Grupos contínuos de equivalência de Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4	46
Tabela 2	– Simetrias de contato EKSG	71
Tabela 3	– Simetrias de Lie do sistema (6.17)	77
Tabela 4	– Simetrias de Lie do sistema (6.35)	80
Tabela 5	– Simetrias da equação $S(u) = f(u)u_{tt}$	99
Tabela 6	– Simetrias da equação $S(u) = f(u)(u_{tt})^n, n \neq 0, f \neq 0$	104

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias
EDPs	Equações Diferenciais Parciais
EKS	Equação de Kummer-Schwarz
EKSG	Equação de Kummer-Schwarz Generalizada
EKSGs	Equações de Kummer-Schwarz Generalizadas
SKdV	Equação Schwarziana de Korteweg–de Vries
cte	constante

Sumário

	Introdução	14
I	PRELIMINARES	17
1	A DERIVADA DE SCHWARZ	18
1.1	O que é a derivada de Schwarz ou Schwarziano?	18
1.2	Principais propriedades da derivada de Schwarz	20
1.3	Equação de Kummer-Schwarz (EKS)	22
2	UM ESTUDO COM SIMETRIAS DA EKS	24
2.1	Simetrias de Lie da EKS	24
2.2	Simetrias de contato de EKS	28
2.3	Linearização da EKS	29
II	GENERALIZAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ENVOLVENDO A DERIVADA DE SCHWARZ	35
3	LINEARIZAÇÃO DA EKSG	38
4	O GRUPO CONTÍNUO DE EQUIVALÊNCIA DA EKSG	45
4.1	Grupo contínuo de equivalência da EKSG	46
4.1.1	Caso 1: $n \notin \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$	49
4.1.2	Caso 2: $n = -\frac{3}{2}$	49
4.1.3	Caso 3: $n = -\frac{3}{2}$	50
4.2	Grupo contínuo de equivalência de $y'' + n\frac{(y')^2}{y} = 0$	53
5	SIMETRIAS DE CONTATO DE EKSG	57
5.1	Para $n = -2$	58
5.2	Para $n = -1$	60
5.3	Para $n = -3$	61
5.4	Para $n = 0$	63
5.4.1	Para $W \neq 0$	64
5.4.2	Para $W = 0$	64
5.5	Para $n = -\frac{3}{2}$	66

5.6	Para $n \notin \left\{-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0\right\}$	68
5.6.1	Para $A = 0$	68
5.6.2	Para $A \neq 0$	69
III	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EDPS ENVOLVENDO O SCHWARZIANO	73
6	SISTEMAS DE EDO ENVOLVENDO O SCHWARZIANO	74
6.1	Simetrias de Lie de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de 3ª ordem	74
6.2	Sistemas de EDO envolvendo o Schwarziano	77
6.2.1	Sistema de EDO 1 do tipo da EKSG	77
6.2.2	Sistema de EDO 2 do tipo da EKSG	80
6.3	Sistema gerais de EDOs de terceira ordem envolvendo o Schwarziano admitindo $sl(2, \mathbb{R})$	83
6.4	Existência de um Lagrangiano para sistemas	86
7	O SCHWARZIANO E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	90
7.1	A Equação Schwarziana de Korteweg–de Vries	90
7.2	Sistemas de EDP envolvendo o Schwarziano	93
7.3	Generalização da equação de Kummer-Schwarz para EDP hiperbólicas	97
7.3.1	Cálculo do grupo contínuo de equivalência da EDP	97
7.3.2	Cálculo das Simetrias de Lie da EDP	99
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICES	114
	APÊNDICE A – CÁLCULO DAS TRANSFORMAÇÕES DE CONTATO DO TEOREMA 5	115
A.1	Equação (3.1)	116
A.2	Equação (3.2)	118
A.3	Equação (3.3)	119
	APÊNDICE B – INFINITESIMAIS PROLONGADOS ATÉ A TERCEIRA ORDEM	121

Introdução

O presente trabalho aborda uma pesquisa sobre equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz. A derivada de Schwarz, derivada Schwarziana ou apenas Schwarziano é definida pela seguinte expressão

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \quad (1)$$

em que y é uma função de x , y' , y'' , y''' são suas derivadas e $y' \neq 0$. De acordo com [46], o nome derivada de Schwarz foi dado por Cayley. Entretanto, este afirma que o próprio Schwarz disse não ser o precursor dessa expressão e que essa, surge mesmo que implicitamente na dissertação de Lagrange em “*Sur la construction des cartes géographiques*” (1781). Contudo, não foi fácil identificar o Schwarziano na obra de Lagrange. Joseph Sylvester (1814-1897), um matemático inglês com contribuições na teoria de matrizes [43], tentou encontrar a derivada Schwarziana nos trabalhos de Lagrange, mas não obteve êxito. Schwarz estava correto. Posteriormente foi descoberto que Lagrange introduziu uma versão do Schwarziano no seu trabalho mas, em lugar de $S(y)$ encontra-se $\frac{\phi''}{\phi}$ em que $\phi = \frac{1}{\sqrt{y'}}$, o que mostra a dificuldade em identificar que Lagrange de fato foi o possível precursor de tal expressão.

Posterior a Lagrange, a expressão apareceu no artigo de Kummer em 1836, tendo participação em diversas áreas da matemática. Em Equações Diferenciais, por exemplo, encontramos o Schwarziano relacionado ao potencial da equação de segunda ordem de Sturm-Liouville $\varphi''(x) + u(x)\varphi(x) = 0$, em que $u(x) = \frac{S(y)}{2}$, $y(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ e φ_1 e φ_2 são soluções linearmente independentes da equação [46]. Em Geometria Diferencial, vemos o Schwarziano sendo tratado no espaço de Lorentz [17]. Neste contexto, a derivada de Schwarz apresenta a curvatura e é encontrada nos estudos de curvas geodésicas nos espaços de curvatura constante [37]. Grande motivação para esta tese, foi o fato de que uma das equações envolvendo o Schwarziano, que iremos abordar, se encontra na prova do teorema que diz que uma superfície no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante K é (localmente) isométrica à esfera ($K > 0$), ao plano Euclidiano ($K = 0$) ou ao plano de Lobachevsky ($K < 0$) [16].

Em Análise Matemática, os trabalhos [41, 42] de Nehari são dedicados aos estudos de funções univalentes, nos quais o Schwarziano desempenha um papel muito importante, vide também [35]. A formidável j -função de Dedekind [15] é definida por uma equação diferencial específica envolvendo a derivada de Schwarz.

Gibbons faz aplicações na Física Matemática moderna, mostrando como a derivada de Schwarz está na fórmula de mudança de densidade da "dark energy" sob

re-parameterizações temporais [24]. A chamada mecânica Schwarziana unidimensional, cuja integral de ação envolve a derivada de Schwarz, está sendo estudada intensivamente (ver por exemplo [49, 40, 2] e as referências neles). Além dessas áreas, podemos encontrar o Schwarziano na Análise Complexa, Mecânica Quântica, Mecânica Clássica, etc [8, 14, 46].

A derivada de Schwarz é um operador totalmente ligado à transformação de *Möbius* [3], isto é, a transformação linear fracional definida por

$$z(y) = \frac{ay + b}{cy + d} \quad \text{e} \quad ad - bc \neq 0.$$

Temos duas funções $y(x)$ e $z(x)$ que são ligadas por uma transformação de *Möbius* se, e somente se, $S(z) = S(y)$, e, em particular, $S(z) = 0$ quando $y = x$. Isso significa que o Schwarziano é invariante sobre as transformações lineares fracionais. O grande fato das transformações de *Möbius* é que elas mapeiam círculos em círculos e esferas em esferas.

Se tomarmos $S(y) = 0$, teremos a conhecida equação de Kummer-Schwarz (EKS), cuja solução representa uma família de hipérboles. Existem muitos resultados sobre a EKS como soluções, linearizações, simetrias de Lie, equações equivalentes, etc [19, 28, 46]. Além disso, tem-se estudado a partir dessa equação, equações mais gerais, como é o caso abordado por P. Leach [36], que considera as seguintes generalizações

$$y'''y' + n(y'')^2 = 0 \quad \text{e} \quad y^{(m-1)}y^{(m+1)} + n(y^{(m)})^2 = 0.$$

Há estudos que consideram o Schwarziano diferente de zero. Por exemplo, em [12, 14, 16, 18] os autores trabalham a derivada de Schwarz igual a uma função específica. Há também na literatura estudos envolvendo a EKS e sistemas de Lie, ou seja, um sistema de equações diferenciais que admite uma regra de superposição [14, 12]. Em artigos e pesquisas há estudos de equações diferenciais parciais que englobam a derivada Schwarziana, como é o caso da equação Schwarziana de Korteweg-de Vries (SKdV) [22]

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} = S(u), \quad u = u(t, x),$$

caso particular importante da equação de Krichever-Novikov [34]

$$\frac{u_t}{u_x} = S(u) + \frac{P(u)}{u_x^2}$$

onde $P(u)$ é polinômio cúbico com coeficientes constantes.

Nosso objetivo nesta tese é propor e estudar, sob as lentes da teoria de Sophus Lie de Simetrias de Equações Diferenciais [4, 29, 47], generalizações de equações diferenciais envolvendo o Schwarziano e apresentar importantes resultados referente a tais equações.

A tese está estruturada em três partes: a parte I, que chamamos Preliminares, envolve dois capítulos que abordam conceitos gerais do Schwarziano e da EKS. Nela serão

encontrados definição, propriedades e exemplos de aplicações envolvendo a derivada de Schwarz na matemática. Além disso, serão apresentadas as simetrias de Lie e de contato da EKS e cálculos referentes à resolução da EKS por simetrias de Lie e a linearização dessa equação, ainda, apresentaremos alguns resultados que serão úteis para os estudos na parte II.

As partes II e III, são destinadas a apresentar todos os nossos resultados referentes às generalizações da EKS. Na parte II, teremos três capítulos nos quais propomos e estudamos uma nova generalização da EKS, denominada Equação de Kummer-Schwarz Generalizada (EKSG), a saber

$$\frac{y'''}{y'} + n \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y, y'), \quad (2)$$

em que $n \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e f uma função arbitrária de seus argumentos. Inicialmente, apresentaremos, no capítulo 3, resultados importantes sobre a linearização de tal equação. Veremos os casos em que (2) é linearizável a $u'''(t) = 0$. Nesta tese, entende-se que uma equação diferencial é linearizável quando existe uma transformação (mudança de variável) que mapeia a equação dada à uma equação linear. Em seguida, no capítulo 4, faremos considerações relacionadas ao grupo contínuo de equivalência de casos particulares da EKSG. Por fim, no capítulo 5, realizaremos o cálculo das simetrias de contato de (2). Resultados envolvendo um caso particular da EKSG, a saber,

$$S(y) = g(y)(y')^2,$$

foram publicados no artigo [8].

Na parte III, teremos dois capítulos que têm por objetivo estender o estudo de generalizações da equação de Kummer-Schwarz para sistemas de equações diferenciais e para equações diferenciais parciais (EDPs). Primeiramente, no capítulo 6, levando para o campo de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), mostramos explicitamente a fórmula para o cálculo de simetrias de Lie de sistemas de EDO de terceira ordem gerais e como exemplo, consideramos dois sistemas de EDO envolvendo o Schwarziano. Apresentaremos seus respectivos grupos de simetrias de um parâmetro. Encontraremos o sistema de EDO de ordem três mais geral admitindo a representação da álgebra $sl(2, \mathbb{R})$, a saber, $\partial_x, x\partial_x$ e $x^2\partial_x$, que será um sistema de equações do tipo da EKSG. Além disso, verificaremos a inexistência de Lagrangiano para uma generalização dos sistemas estudados.

Finalmente, o capítulo 7 é uma abordagem sobre Equações Diferenciais Parciais, com destaque para a equação Schwarziana de Korteweg-de Vries (SKdV) que envolve explicitamente o Schwarziano e, em seguida, um estudo em sistemas de EDPs envolvendo a derivada de Schwarz. Além disso, apresentaremos uma possível generalização de um caso particular da EKSG, a saber, $n = -\frac{3}{2}$ e $f = g(y)(y')^2$, para o campo de EDPs e suas respectivas simetrias de Lie. Parte dos resultados obtidos nos capítulos 6 e 7 foram publicados em [9].

Parte I

Preliminares

1 A derivada de Schwarz

1.1 O que é a derivada de Schwarz ou Schwarziano?

A derivada de Schwarz ou derivada Schwarziana ou ainda apenas Schwarziano, é dada pela seguinte expressão:

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2, \quad (1.1)$$

em que y é uma função de x (que pode ser real ou complexa) e y''' , y'' e y' são suas derivadas com relação à variável independente x e $y' \neq 0$. Também podemos encontrar na literatura a derivada de Schwarz (1.1) expressa na seguinte forma [5, 48]:

$$S(y(x)) = \left(\frac{y''}{y'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \quad (1.2)$$

Se $S(y) = 0$, temos a chamada equação de Kummer-Schwarz (EKS). A EKS está diretamente relacionada com a equação de Riccati $w' - \frac{1}{2}w^2 = 0$ em que na expressão (1.2) tomamos $w = \frac{y''}{y'}$. A derivada de Schwarz tem aparições em diversas áreas da matemática, como Análise Complexa, Equações diferenciais, Dinâmica Unidimensional, Sistemas Integráveis, Teoria de Campo Conforme e ainda para a Teoria de Teichmüller [46]. Observemos alguns exemplos de aplicações em que o Schwarziano está presente:

Exemplo 1. Equação de Sturm-Liouville

Considere a equação diferencial de 2ª ordem de Sturm-Liouville [46]

$$\psi''(x) + u(x)\psi(x) = 0, \quad (1.3)$$

tal que o potencial $u(x)$ é uma função contínua. As soluções desta equação são dadas por duas soluções linearmente independentes (LI) ψ_1 e ψ_2 . Se conhecermos $y(x) = \frac{\psi_1}{\psi_2}$ pode-se reconstruir o potencial $u(x)$ dado por

$$u(x) = \frac{1}{2}S(y).$$

De fato, como $y(x) = \frac{\psi_1}{\psi_2}$ então $\psi_1 = y\psi_2$ e por serem ψ_1 e ψ_2 duas soluções LI, o Wronskiano $W(\psi_1, \psi_2) \neq 0$. De acordo com [45], $W(\psi_1, \psi_2) = c = cte$, logo:

$$W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' = c \neq 0 \quad e \quad \psi_1 = y\psi_2 \implies y' = \frac{c}{\psi_2^2}.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}S(y) = \frac{1}{2} \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{4} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = -\frac{\psi_2''}{\psi_2} = u(x).$$

Portanto, a partir do Schwarziano podemos obter o potencial da equação de Sturm-Liouville.

Exemplo 2. Plano de Lorentz com métrica $g = dx dy$ [46]

Considere uma curva $y = f(x)$. Se $f'(x) > 0$ então a curvatura é $\varrho(x) = f''(f')^{-\frac{3}{2}}$ e a derivada Schwarziana aparece em $\varrho'(x) = \frac{S(f)}{\sqrt{f'}}$, em outras palavras "a derivada Schwarziana é curvatura".

Exemplo 3. Geodésicas [37]

A derivada de Schwarz também é encontrada nos estudos de curvas geodésicas nos espaços de curvatura constante, [37]. A equação de Kummer-Schwarz $S(y) = 0$ é um caso particular da Equação Diferencial Ordinária (EDO) de terceira ordem para uma curva geodésica na superfície

$$2y'y''' - 3(y'')^2 + A(y')^2 - B(y')^4 = 0.$$

Exemplo 4. Equação de Ermakov-Pinney [19]

De acordo com [19], a equação $S(y) = 0$ está relacionada à equação de Ermakov-Pinney. Toda equação de Ermakov-Pinney

$$y'' + b(x)y = y^{-3}$$

pode ser transformada em uma equação da forma $v'' = v^{-3}$. Por certo, utilizando a seguinte transformação [28]

$$t = \int \frac{1}{f^2} dx \quad e \quad v(t) = \frac{y}{f}$$

tal que f é solução da equação homogênea $y'' + b(x)y = 0$, obtemos

$$y(x) = v(t)f(x),$$

$$y'(x) = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} f + v f' = \frac{v'}{f} + v f',$$

$$y''(x) = \frac{dv'}{dt} \frac{dt}{dx} \frac{1}{f} - \frac{v' f'}{f^2} + \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} f' + v f'' = \frac{v''}{f^3} + v f'',$$

que substituindo na equação de Ermakov-Pinney nos dá

$$v(t)'' = v(t)^{-3}.$$

Realizando a seguinte mudança $u(t) = \frac{1}{v^2(t)}$ temos

$$uu'' - \frac{3}{2}(u')^2 + 2u^4 = 0.$$

A partir daí, utilizando a transformação de Riccati $u(t) = \alpha \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$ em que $\alpha^2 = -\frac{1}{4}$ obtemos finalmente a equação de Kummer-Schwarz homogênea

$$S(\omega) = \frac{\omega'''}{\omega'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\omega''}{\omega'} \right)^2 = 0.$$

Além das aplicações acima encontramos muitas outras, por exemplo, em [5], Brown e Porter em seus trabalhos, sob as lentes da derivada de Schwarz, estudam "mapeamentos numéricos conformais no disco unitário (ou um retângulo) no domínio one-tooth gear-shaped"[5], Bidabad e Sedighi tratam o Schwarziano em "transformação conformal na variedade de Finsler"[3], Langley que aborda a "derivada de Schwarz e a propriedade de Wiman-Valiron"[33], etc.

1.2 Principais propriedades da derivada de Schwarz

As principais propriedades de $S(y)$ são:

Propriedade 1. *Dadas duas funções f e g então:*

$$S(f \circ g)(x) = S(f)(g(x))(g'(x))^2 + S(g)(x) \quad \text{em que} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)). \quad (1.4)$$

Demonstração. Note que $S(f \circ g)(x) = S(f(g))(x)$. Antes de calcular $S(f \circ g)(x)$, vamos calcular a derivada de f com relação a x :

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g)g'(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(g(x)) = f''(g)(g'(x))^2 + f'(g)g''(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}f(g(x)) = f'''(g)(g'(x))^3 + 3f''(g)g'(x)g''(x) + f'(g)g'''(x).$$

Assim

$$\begin{aligned} S(f \circ g)(x) &= \frac{f'''(g)(g'(x))^3 + 3f''(g)g'(x)g''(x) + f'(g)g'''(x)}{f'(g)g'(x)} \\ &\quad - \frac{3}{2} \left[\frac{(f''(g))^2(g'(x))^4 + 2f''(g)(g'(x))^2f'(g)g''(x) + (f'(g))^2(g''(x))^2}{(f'(g))^2(g'(x))^2} \right] \\ &= \left[\frac{f'''(g)}{f'(g)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(g)}{f'(g)} \right)^2 \right] (g'(x))^2 + \left[\frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 \right] \\ &= S(f)(g(x))(g'(x))^2 + S(g)(x). \end{aligned}$$

□

Propriedade 2. Tem-se que $z(x) = \frac{ay(x) + b}{cy(x) + d}$ se, e somente se, $S(y) = S(z)$ em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com $ad - bc \neq 0$ e y é uma função de x . Em particular, z é uma transformação linear fracional, também chamada de Transformação de Möbius

$$z(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (1.5)$$

se, e somente se, $S(z) = 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Calculamos as derivadas,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{ay'}{cy + d} - \frac{cy'(ay + b)}{(cy + d)^2}, \\ z''(x) &= \frac{2c^2y'^2(ay + b)}{(cy + d)^3} - \frac{cy''(ay + b)}{(cy + d)^2} + \frac{ay''}{cy + d} - \frac{2acy'^2}{(cy + d)^2}, \\ z'''(x) &= -\frac{6c^3y'^3(ay + b)}{(cy + d)^4} + \frac{6c^2y'y''(ay + b)}{(cy + d)^3} - \frac{cy'''(ay + b)}{(cy + d)^2} \\ &\quad + \frac{6ac^2y'^3}{(cy + d)^3} + \frac{ay'''}{cy + d} - \frac{6acy'y''}{(cy + d)^2}, \end{aligned}$$

tal que $(')$ é a derivada da função com relação ao seu argumento. Substituindo z na derivada de Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} S(z) &= \left(-\frac{6c^3y'^3(ay + b)}{(cy + d)^4} + \frac{6c^2y'y''(ay + b)}{(cy + d)^3} - \frac{cy'''(ay + b)}{(cy + d)^2} + \frac{6ac^2y'^3}{(cy + d)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ay'''}{cy + d} - \frac{6acy'y''}{(cy + d)^2} \right) \left(\frac{ay'}{cy + d} - \frac{cy'(ay + b)}{(cy + d)^2} \right)^{-1} - \\ &\quad \frac{3}{2} \left[\left(\frac{2c^2y'^2(ay + b)}{(cy + d)^3} - \frac{cy''(ay + b)}{(cy + d)^2} + \frac{ay''}{cy + d} - \frac{2acy'^2}{(cy + d)^2} \right)^2 \left(\frac{ay'}{cy + d} - \frac{cy'(ay + b)}{(cy + d)^2} \right)^{-2} \right] \end{aligned}$$

que simplificando resulta em

$$S(z) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'^2} = S(y). \quad (1.6)$$

O caso $S(z) = 0$ é percebido ao tomar $y(x) = x$ na equação (1.6) acima.

$\Leftarrow$) Considere $z = \varphi(y) = (\varphi \circ y)(x)$. Aplicando a Propriedade 1, obtemos que:

$$S(z)(x) = S(\varphi \circ y)(x) = S(\varphi)(y(x))(y'(x))^2 + S(y)(x),$$

como $S(y) = S(z)$ então

$$S(\varphi)(y(x))(y'(x))^2 = 0,$$

e como $y'(x) \neq 0$ pela definição do Schwarziano $S(y)$ então $S(\varphi)(y) = 0$, cuja solução geral é dada por

$$z(x) = \frac{ay(x) + b}{cy(x) + d} \text{ em que } ad - bc = c. \quad (1.7)$$

□

1.3 Equação de Kummer-Schwarz (EKS)

Se a derivada de Schwarz é nula, isto é,

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0, \quad (1.8)$$

temos a chamada **Equação de Kummer-Schwarz (EKS)**. Essa equação representa a equação de uma família de hipérboles dada na seguinte forma [29]:

$$\Phi \equiv (y - a)(b - cx) - 1 = 0. \quad (1.9)$$

De fato, fazendo $(D_x \Phi) = 0$, $(D_x^2 \Phi) = 0$ e $(D_x^3 \Phi) = 0$, no qual D_x é o operador de derivada total com respeito a x

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \cdots + y^{(k)} \partial_{y^{(k-1)}} \dots$$

temos

$$D_x \Phi = y'(b - cx) - c(y - a) = 0, \quad (1.10)$$

$$D_x^2 \Phi = y''(b - cx) - 2cy' = 0, \quad (1.11)$$

$$D_x^3 \Phi = y'''(b - cx) - 3cy'' = 0. \quad (1.12)$$

Vamos supor $y' \neq 0$ isto é, excluindo a solução constante $y = a$, de (1.10) e (1.11), obtemos:

$$(b - cx) = \frac{c(y - a)}{y'}$$

e

$$c = \frac{y''(b - cx)}{2y'}. \quad (1.13)$$

Substituindo em (1.12), temos:

$$y''' \frac{c(y - a)}{y'} - 3y'' \frac{y''(b - cx)}{2y'} = 0,$$

$$\left(y''' - \frac{3y''^2}{2y'} \right) \left(\frac{c(y - a)}{y'} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Como excluímos a solução $y = a$, concluímos que a equação diferencial da família de hipérboles dada na forma (1.9) é

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0,$$

como queríamos mostrar. A EKS (1.8) pode ser facilmente resolvida pelo método tradicional, vide [6] para técnicas de resolução de EDO, e sua solução é dada por (1.7). A equação (1.8) pode ser resolvida a partir do conhecimento de **Simetrias de Lie** e sobre isto estudaremos mais no próximo capítulo.

2 Um estudo com Simetrias da EKS

Apesar de existir um campo vasto de estudos e resultados complexos a respeito da teoria de Sophus Lie de simetrias, o conceito de simetria é bastante simples. É a ação sobre um determinado objeto, que pode ser uma simples imagem, função, sistema de equações diferenciais, dentre outros, que o deixa inalterado, isto é, o objeto não sofre variação com esta ação. Neste caso dizemos que o objeto é simétrico ou invariante sobre esta ação. Por exemplo, considere um círculo c_1 , se girarmos c_1 em torno de um ângulo α , este não sofrerá nenhuma alteração, da mesma forma, se fizermos uma reflexão em torno do seu centro de massa, o círculo resultante continuará idêntico ao primeiro, nisto dizemos que c_1 é invariante ou simétrico por rotação e por reflexão em torno do centro de massa. Ambas ações fazem parte de um grupo de simetrias do círculo.

Em termos Matemáticos [29], temos que: dado um objeto A qualquer, um grupo de simetria de A é o conjunto G de todas as transformações invertíveis $T : A \longrightarrow A$, que deixam A invariante, que contenha a identidade I , a inversa T^{-1} , $\forall T \in G$ e o produto (ou composição) $T_1 T_2$, $\forall T_1, T_2 \in G$. Um grupo de simetrias de Lie, são grupos de simetrias infinitos e que dependem de um ou mais parâmetros contínuos (consideraremos apenas o caso de grupo de Lie de um parâmetro e equações com apenas uma variável dependente).

Nas próximas seções, vamos apresentar as simetrias de Lie, ou seja, transformações que dependem de uma variável independente x e uma variável dependente $y(x)$ (podem ser mais de uma variável dependente e independente, porém neste capítulo estaremos considerando apenas uma variável) e as simetrias de contato que além da variável dependente e independente, também considera a primeira derivada da variável dependente, isto é, $y'(x)$. O leitor que deseja aprofundar seus conhecimentos de simetrias de Lie pode consultar as seguintes referências: [4, 29, 44, 47, 50].

2.1 Simetrias de Lie da EKS

Antes de obtermos as simetrias de Lie admitidas pela EKS, vejamos de forma resumida, como encontrar as simetrias de Lie admitidas por determinada equação diferencial, vide [4] e [29]. Em outras palavras, como encontrar transformações invertíveis que deixam uma determinada equação diferencial invariante.

Considere a transformação de 1-parâmetro ε dada pelas equações

$$\bar{x} = \varphi(x, y; \varepsilon), \quad \bar{y} = \psi(x, y; \varepsilon), \quad (2.1)$$

em que φ e ψ são funcionalmente independentes, isto é, o Jacobiano $J(\varphi, \psi) \neq 0$, ou seja,

$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$. À (2.1) associamos o operador diferencial

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.2)$$

chamado gerador infinitesimal de (2.1), em que as funções $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$, denominadas infinitesimais, são dadas pelas equações

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \left. \frac{\partial \varphi(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \\ \eta(x, y) = \left. \frac{\partial \psi(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \end{cases} \quad (2.3)$$

O teorema a seguir pode ser considerado como definição da noção de Simetria de Lie de uma equação diferencial.

Teorema 1. [4] *Uma equação diferencial*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.4)$$

admite grupo de simetrias de Lie (2.1) se, e somente se,

$$X^{(n)} (y^{(n)} - F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})) = 0 \quad \text{quando} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.5)$$

em que $X^{(n)}$ é o prolongamento de ordem n do gerador de simetria (2.2)

$$X^{(n)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \quad (2.6)$$

no qual

$$\eta^{(i)} = D_x \eta^{(i-1)} - y^{(i)} D_x \xi, \quad (2.7)$$

para $i = 1 : n$, $\eta^{(0)} = \eta$ e $D_x = \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + y'' \frac{d}{dy'} + \dots$ é derivada total com respeito a x .

Multiplicando a EKS (1.8) por $2y'^2$ e aplicando a condição (2.5), obtemos:

$$3(y'')^2 \eta^{(1)} - 6y' y'' \eta^{(2)} + 2(y')^2 \eta^{(3)} = 0, \quad (2.8)$$

substituindo os valores de $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ dados em (2.7) e utilizando a equação (1.8), obtemos a chamada equação determinante

$$\begin{aligned} & (y'')^2 (3\eta_x) + (y')^2 (y'')^2 (-3\xi_y) + y' y'' (-6\eta_{xx}) + (y')^2 y'' (-6\eta_{xy}) + \\ & (y')^3 y'' (-6\xi_{xy}) + (y')^4 y'' (-6\xi_{yy}) + (y')^2 (2\eta_{xxx}) + (y')^3 (6\eta_{xxy} - 2\xi_{xxx}) + \\ & (y')^4 (6\eta_{xyy} - 6\xi_{xxy}) + (y')^5 (2\eta_{yyy} - 6\xi_{yy}) + (y')^6 (-2\xi_{yyy}) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

que é uma identidade em $1, y$, e nas derivadas de y .

A partir dos coeficientes de $(y'')^2$ e $(y')^2(y'')$ concluímos que $\eta_x = 0$ e $\xi_y = 0$, o que implica $\eta = \eta(y)$ e $\xi = \xi(x)$. Por fim, nos resta as equações determinantes $\xi_{xxx} = 0$ e $\eta_{yyy} = 0$ que produzem

$$\begin{cases} \xi = \xi(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3, \\ \eta = \eta(y) = a_4y^2 + a_5y + a_6, \end{cases} \quad (2.10)$$

em que $a_i = cte$ para $i = 1 : 6$. Portanto as Simetrias de Lie admitidas por (1.8) são:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial y}, X_6 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.12)$$

Os geradores de simetria de Lie (2.11) e (2.12) formam uma álgebra de Lie isomorfa à álgebra $sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$ e os grupos contínuos de simetrias de um parâmetro se dão por resolver as chamadas **equações de Lie** que são as seguintes:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = \xi(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{x}|_{\varepsilon=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \eta(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{y}|_{\varepsilon=0} = y, \end{cases} \quad (2.13)$$

Note que as soluções $(\bar{x}, \bar{y})$ de (2.13) são também soluções da EKS, e esse é o ponto central para entender a definição de simetria de Lie, em outras palavras, uma simetria de Lie de uma equação diferencial é uma transformação invertível que mapeia qualquer solução da equação diferencial a outra solução da mesma equação diferencial.

Uma vez encontrados os geradores de simetrias da equação diferencial (1.8), podemos utilizá-los para resolver nossa EDO. Observando a seção 3.4 do livro [4], vamos resolver a EDO de EKS utilizando o método de invariantes diferenciais. Este método tem como objetivo reduzir a ordem da equação diferencial utilizando seus invariantes, por exemplo, busca-se $u(x, y)$ e $v(x, y, y')$ tal que $Xu = 0$ e $X^{(1)}v = 0$ e em seguida, calcula-se a derivada total de tais invariantes até a ordem menos um da equação original e fazendo as devidas substituições tem-se uma nova equação com a ordem reduzida. Considerando os geradores X_1 e X_2 em (2.11), realizamos os seguintes passos:

Passo 1: Calculamos as extensões de $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ e $X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}$ até a primeira e segunda ordens respectivamente.

$$X_1 = X_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2^{(1)} = x \frac{\partial}{\partial x} - y' \frac{\partial}{\partial y'}, \quad X_2^{(2)} = x \frac{\partial}{\partial x} - y' \frac{\partial}{\partial y'} - 2y'' \frac{\partial}{\partial y''}.$$

Passo 2: Encontramos dois invariantes de $X_1^{(2)}$, calculando $X_1 u = 0$ e $X_1^{(1)} v = 0$ obtendo dessa forma,

$$\begin{aligned} u_x = 0 &\implies u = u(y) = y, \\ v_x = 0 &\implies v = v(y, y') = y'. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dv}{du} = \frac{y''}{y'} = v'.$$

Passo 3: Calcular $X_2 u$, $X_2^{(1)} v$ e $X_2^{(2)} v'$ para que possamos escrever $X_2^{(1)}$ e $X_2^{(2)}$ em termos de u, v e v'

$$X_2 u = 0, \quad X_2^{(1)} v = -v, \quad X_2^{(2)} v' = -v'.$$

Em termos de u, v e v' , $X_2^{(1)}$ e $X_2^{(2)}$ se tornam, respectivamente,

$$X_2^{(1)} = -v \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{e} \quad X_2^{(2)} = -v \frac{\partial}{\partial v} - v' \frac{\partial}{\partial v'}.$$

Passo 4: Encontramos dois invariantes de $X_2^{(3)}$, fazendo $X_2^{(1)} U = 0$ e $X_2^{(2)} V = 0$

$$\begin{aligned} U_v = 0 &\rightarrow U = U(u) = u = y, \\ \frac{dv}{v} = \frac{dv'}{v'} &\rightarrow V = \frac{v'}{v} = \frac{y''}{y'^2}. \end{aligned}$$

Assim, utilizando (1.8)

$$\frac{dV}{dU} = \frac{V_x + y'V_y + y''V_{y'} + y'''V_{y''}}{U_x + y'U_y} = \frac{-2y''^2}{y'^4} + \frac{y'''}{y'^3} = -\frac{4V^2}{2} + \frac{3y''^2}{2y'^4} = \frac{-V^2}{2},$$

isto é,

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-V^2}{2}. \quad (2.14)$$

Dessa forma, reduzimos a equação (1.8) a uma equação de ordem 1. A solução de (2.14) é dada por

$$V = \frac{2}{U + c_1}. \quad (2.15)$$

Passo 5: Voltamos às variáveis u, v e v' obtendo

$$\frac{v'}{v} = \frac{2}{u + c_1}, \quad (2.16)$$

cuja solução é dada por

$$v = c_2(u + c_1)^2. \quad (2.17)$$

Passo 6: Por fim, retornamos às variáveis originais x, y e y'

$$y' = c_2(y + c_1)^2, \quad (2.18)$$

obtendo, então, a solução da equação (1.8)

$$y = \frac{-1}{c_2 x + c_3} - c_1, \quad (2.19)$$

em que c_1, c_2 e c_3 são constantes de integração.

2.2 Simetrias de contato de EKS

Vimos na seção anterior, que as Simetrias de Lie são transformações que envolvem variáveis independentes (no nosso caso x) e a variável dependente $y(x)$. No caso das simetrias de contato, além das variáveis dependente e independente, também consideramos a primeira derivada da variável dependente. Em outras palavras, uma **transformação de contato de um parâmetro** [26, 29] é a transformação invertível

$$\bar{x} = \varphi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y} = \psi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y}' = \phi(x, y, y'; \varepsilon), \quad (2.20)$$

envolvendo a variável independente x , a variável dependente y e sua primeira derivada y' , e satisfazendo a condição de contato

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{d}y}{dx} = \bar{y}'.$$

O correspondente gerador infinitesimal

$$X = \xi(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} \quad (2.21)$$

determina simetria de contato (2.20) se, e somente se, as coordenadas ξ, η e $\eta^{(1)}$ podem ser representadas na forma

$$\xi = -\frac{\partial Q}{\partial y'}, \quad \eta = Q - y' \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \eta^{(1)} = \frac{\partial Q}{\partial x} + y' \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (2.22)$$

com $Q = Q(x, y, y')$. A condição de invariância para uma simetria de contato é análoga ao teorema 1.

Teorema 2. *Uma equação diferencial*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.23)$$

admite grupo de simetrias de contato (2.21) se, e somente se,

$$X^{(n)} (y^{(n)} - F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})) = 0 \quad \text{quando} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.24)$$

em que $X^{(n)}$ é o prolongamento de ordem n do gerador de simetria (2.21)

$$X^{(n)} = -\frac{\partial Q}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \left(Q - y' \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(k)} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} \quad (2.25)$$

no qual

$$\eta^{(k)} = D_x^k Q - y^{(k+1)} \frac{\partial Q}{\partial y'}, \quad (2.26)$$

para $k = 2 : n$.

Com cálculos semelhantes aos da seção anterior encontramos as simetrias de contato de EKS. As simetrias de contato da EKS são amplas e já conhecidas em [37] e são dadas por

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} - y' \frac{\partial}{\partial y'}, X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xy' \frac{\partial}{\partial y'}, \\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial y} + y' \frac{\partial}{\partial y'}, X_6 = y^2 \frac{\partial}{\partial y} + 2yy' \frac{\partial}{\partial y'}, \\
X_7 &= 2(y')^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} - y' \frac{\partial}{\partial y} \right], X_8 = 2(y')^{-\frac{1}{2}} \left[x \frac{\partial}{\partial x} - xy' \frac{\partial}{\partial y} - 2y' \frac{\partial}{\partial y'} \right] \\
X_9 &= 2(y')^{-\frac{1}{2}} \left[y \frac{\partial}{\partial x} - yy' \frac{\partial}{\partial y} - (y')^2 \frac{\partial}{\partial y'} \right] \\
X_{10} &= 2(y')^{-\frac{1}{2}} \left[xy \frac{\partial}{\partial x} - xyy' \frac{\partial}{\partial y} - 2y'(xy' + y) \frac{\partial}{\partial y'} \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

2.3 Linearização da EKS

Sabemos que a maioria das equações diferenciais ordinárias não são lineares, o que dificulta o processo de busca de soluções, estudo de estabilidade e instabilidade e comportamentos do modelo em determinada circunstância, porém, existem equações não-lineares que podem ser linearizadas através de uma ou mais mudanças de variáveis e então com quadraturas pode-se encontrar suas soluções e estudar seus comportamentos. Este processo de transformar uma dada equação diferencial não-linear em equações lineares equivalentes chama-se problema de linearização [38].

Segundo [38], o primeiro problema de linearização de uma EDO foi feito por Sophus Lie. Ele mostrou que as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que podem ser reduzidas a equações lineares, pelas mudanças na variável dependente e independente devem ter uma determinada forma, a saber, a equação deve ser no máximo cúbica na sua primeira derivada. Para equações diferenciais ordinárias de terceira ordem, Ibragimov e Meleshko [32, 38] chegaram a um resultado semelhante envolvendo simetrias de contato, que será apresentado posteriormente.

A equação de Kummer-Schwarz (1.8) é um exemplo de equação diferencial que não é linear, contudo é linearizável por diversas transformações, dentre elas encontramos a transformação de Legendre [28]

$$t = y', \quad u = xy' - y, \quad u' = x. \tag{2.28}$$

Observe que

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} = x, & y' &= \frac{dy}{dx} = t, \\ u'' &= \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dx}{dt}, & y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{d^2u}{dt^2}} = \frac{1}{u''}, \\ y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u''} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u''} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{u'''}{(u'')^2} \frac{1}{u''} = -\frac{u'''}{(u'')^3}, \end{aligned}$$

substituindo na EKS (1.8), temos

$$u''' + \frac{3}{2t}u'' = 0, \quad (2.29)$$

que é linear. Além disso, se realizarmos na equação (2.29) a seguinte mudança de variável

$$\tau = \sqrt{t} \implies dt = 2\sqrt{t}d\tau = 2\tau d\tau, \quad (2.30)$$

observando que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2\tau} \frac{du}{d\tau}, \\ \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{1}{2\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2\tau} \frac{du}{d\tau} \right) = \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{du}{d\tau} \right), \\ \frac{d^3u}{dt^3} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) = \frac{1}{2\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{du}{d\tau} \right) \right] = \frac{1}{8\tau^3} \left(\frac{d^3u}{d\tau^3} + \frac{3}{\tau^2} \frac{du}{d\tau} - \frac{3}{\tau} \frac{d^2u}{d\tau^2} \right), \end{aligned}$$

substituindo esses valores em (2.29), teremos a equação linear

$$\frac{d^3u}{d\tau^3} = 0, \quad \text{isto é, } u'''(\tau) = 0. \quad (2.31)$$

Em [38] e [32] consta o teorema que nos possibilita testar diretamente se uma equação de terceira ordem é linearizável à $u'''(t) = 0$ através de transformações de contato e apresenta um sistema de equações diferenciais que nos possibilitam encontrar a transformação que lineariza tal equação¹.

Teorema 3. (*N. Ibragimov e S. Meleshko*) Uma EDO de terceira ordem da forma

$$y''' + a(x, y, y')(y'')^3 + b(x, y, y')(y'')^2 + c(x, y, y')y'' + d(x, y, y') = 0, \quad (2.32)$$

¹ Vale ressaltar que tanto no livro [38], quanto no artigo [32] as equações do teorema não estão completas, todavia, o professor S. Meleshko nos enviou o sistema de equações correto, e é este que será apresentado a seguir. Deixamos a ele o nosso agradecimento por enviar tais equações e por tamanha prontidão em nos responder.

é linearizável à equação $u'''(t) = 0$ via transformações de contato se, e somente se, seus coeficientes satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
J_1 &= 27a_{px} + 27a_{py}p - 18a_pc - 18a_xb - 18a_ybp + 81a_y + 18b_pb - 9b_{pp} + \\
&18b_xa + 18b_yap - 36c_pa - 54a^2d + 18abc - 4b^3 = 0, \\
J_2 &= -18a_pd - 18a_xc + 9a_{xx} - 18a_ycp + 18a_{yx}p + 9a_{yy}p^2 + 6b_pc + 3b_{px} + \\
&3b_{py}p + 6b_xb + 6b_ybp + 24b_y - 6c_{pp} - 36d_pa - 18abd + 12ac^2 - 2b^2c = 0, \\
J_3 &= 36a_xd + 36a_ydp - 6b_{xx} - 12b_{yx}p - 6b_{yy}p^2 - 6c_pc + 3c_{px} + 3c_{py}p - 6c_xb - \\
&6c_ybp - 21c_y + 18d_pb + 9d_{pp} + 18d_xa + 18d_yap - 18acd + 12b^2d - 2bc^2 = 0, \\
J_4 &= -36b_xd - 36b_ydp + 18c_pd + 18c_xc + 9c_{xx} + 18c_ycp + 18c_{yx}p + 9c_{yy}p^2 - \\
&18d_pc - 27d_{px} - 27d_{py}p - 18d_xb - 18d_ybp + 54d_y + 54ad^2 - 18bcd + 4c^3 = 0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

no qual $p = y'$. Visto que (2.33) são satisfeitas, a transformação de contato

$$t = \varphi(x, y, p), \quad u = \psi(x, y, p), \quad q = g(x, y, p), \tag{2.34}$$

que mapeia a equação (2.32) à equação linear $u'''(t) = 0$ é obtida ao resolver as seguintes equações para as funções $\varphi(x, y, p)$, $\psi(x, y, p)$, $g(x, y, p)$, $k(x, y, p)$ e $H(x, y, p)$:

$$\psi_x = gH - p(g\varphi_y + k), \tag{2.35}$$

$$\psi_y = g\varphi_y + k, \tag{2.36}$$

$$\psi_p = g\varphi_p, \tag{2.37}$$

$$3\varphi_p^2g_x = -3kp\varphi_{pp} + 3H(g_p\varphi_p - akp) + \varphi_p(bkp - 3pg_p\varphi_y - 3k), \tag{2.38}$$

$$3\varphi_p^2g_y = 3k\varphi_{pp} + 3aHk + \varphi_p(3g_p\varphi_y - bk), \tag{2.39}$$

$$g_{pp}\varphi_p = g_p\varphi_{pp} + ak, \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
54\varphi_{yy}\varphi_p^2 &= H(-27p^2\varphi_p^2a_{yy} - 54p\varphi_p^2a_{xy} + 9\varphi_p^2b_{xp} + 9p\varphi_p^2b_{yp} + 18abd\varphi_p^2 \\
&- 12ac^2\varphi_p^2 + 36ca_x\varphi_p^2 + 18ac_x\varphi_p^2 + 36cp\varphi_p^2a_y + 18ap\varphi_p^2c_y \\
&+ 36ac\varphi_p\varphi_y - 54p\varphi_p a_y\varphi_y - 54a_x\varphi_p\varphi_y - 54a\varphi_y^2 - 27a_{xx}\varphi_p^2 + 2b^2c\varphi_p^2 \\
&- 12b^2\varphi_p\varphi_y + 6bc_p\varphi_p^2 - 6cb_p\varphi_p^2 - 18bb_x\varphi_p^2 - 18bp\varphi_p^2b_y - 18\varphi_p^2b_y \\
&+ 18b_p\varphi_p\varphi_y) + 2\varphi_p(9p^2\varphi_p^2b_{yy} + 18p\varphi_p^2b_{xy} - 9\varphi_p^2c_{xp} - 9p\varphi_p^2c_{yp} \\
&+ 18acd\varphi_p^2 - 27ad_x\varphi_p^2 - 54da_x\varphi_p^2 - 27ap\varphi_p^2d_y - 54dp\varphi_p^2a_y \\
&- 27ad\varphi_p\varphi_y - 12b^2d\varphi_p^2 + 2bc^2\varphi_p^2 + 3cb_x\varphi_p^2 + 6bc_x\varphi_p^2 + 3cp\varphi_p^2b_y \\
&+ 6bp\varphi_p^2c_y + 3bc\varphi_p\varphi_y - 9bd_p\varphi_p^2 + 9db_p\varphi_p^2 + 9b_x\varphi_p\varphi_y + 9p\varphi_p b_y\varphi_y \\
&+ 9b\varphi_y^2 + 9b_{xx}\varphi_p^2 + 18\varphi_p^2c_y - 9c_p\varphi_p\varphi_y) - 54\varphi_{pp}\varphi_y^2 + 108\varphi_p\varphi_y\varphi_{yp}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$54\varphi_{ppy}\varphi_p^2 = \varphi_p (27p^2\varphi_p^2a_{yy} + 54p\varphi_p^2a_{xy} - 9\varphi_p^2b_{xp} - 9p\varphi_p^2b_{yp} - 36abd\varphi_p^2 + \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & 18ac^2\varphi_p^2 - 9ac_x\varphi_p^2 - 36ca_x\varphi_p^2 - 18ac\varphi_p\varphi_y - 9ap\varphi_p^2c_y - \\ & 36cp\varphi_p^2a_y - 27ad_p\varphi_p^2 + 27a_x\varphi_p\varphi_y + 27p\varphi_pa_y\varphi_y - 27a\varphi_y^2 + \\ & 27a_{xx}\varphi_p^2 - 2b^2c\varphi_p^2 + 3b^2\varphi_p\varphi_y - 6bc_p\varphi_p^2 + 6cb_p\varphi_p^2 + 18bb_x\varphi_p^2 + \\ & 18bp\varphi_p^2b_y + 36\varphi_p^2b_y - 9b_p\varphi_p\varphi_y) - 54aH\varphi_{pp}\varphi_y \\ & + 54aH\varphi_p\varphi_{yp} - 18b\varphi_p^2\varphi_{yp} + 18b\varphi_p\varphi_{pp}\varphi_y - 27\varphi_{pp}^2\varphi_y + 108\varphi_p\varphi_{pp}\varphi_{yp} \\ & + 6H\varphi_p (9a^2d\varphi_p - abc\varphi_p - 3ab_x\varphi_p - 3ap\varphi_pb_y + 3ab\varphi_y + 3ac_p\varphi_p - \\ & 9\varphi_pa_y) + 3aH^2 (-6ac\varphi_p + 9a_x\varphi_p + 9p\varphi_pa_y - 9a\varphi_y + 2b^2\varphi_p - 3b_p\varphi_p), \end{aligned}$$

$$6\varphi_p\varphi_{ppp} = 9\varphi_{pp}^2 - 9a^2H^2 + \varphi_p (-3a_x\varphi_p - 3p\varphi_pa_y - 12a\varphi_y - b^2\varphi_p + \quad (2.43)$$

$$3b_p\varphi_p) + 6H\varphi_p (ab - a_p), \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} 54\varphi_p^2\varphi_{xx} = & 54aH^3 + 6(2pb^2 - 3b - 6acp - 3b_pp + 9pa_x + 9p^2a_y)\varphi_pH^2 + \\ & 54\varphi_{pp}H^2 + (-27a_{yy}\varphi_p^2p^4 + 36ca_y\varphi_p^2p^3 + 18ac_y\varphi_p^2p^3 - 18b_y\varphi_p^2bp^3 - \\ & 54a_y\varphi_p\varphi_yp^3 - 54\varphi_p^2a_{xy}p^3 + 9\varphi_p^2b_{yp}p^3 - 12\varphi_p\varphi_yb^2p^2 - 12\varphi_p^2ac^2p^2 - \\ & 27a_{xx}\varphi_p^2p^2 + 2b^2c\varphi_p^2p^2 + 18abd\varphi_p^2p^2 + 36ca_x\varphi_p^2p^2 - 54b_y\varphi_p^2p^2 + \\ & 6bc_p\varphi_p^2p^2 + 18ac_x\varphi_p^2p^2 - 54\varphi_y^2ap^2 - 18b_x\varphi_p^2bp^2 - 6b_p\varphi_p^2cp^2 + \\ & 36ac\varphi_p\varphi_yp^2 - 54a_x\varphi_p\varphi_yp^2 + 18b_p\varphi_p\varphi_yp^2 + 9\varphi_p^2b_{xp}p^2 + 108ad\varphi_p^2p - \\ & 36b_x\varphi_p^2p + 36c_p\varphi_p^2p - 12\varphi_p^2bcp - 18\varphi_p^2c + 54\varphi_p\varphi_y)H - 108p\varphi_p\varphi_{yp}H - \\ & 54\varphi_{pp}\varphi_y^2p^2 + 2(9\varphi_p^2b_{yy}p^4 + 3cb_y\varphi_p^2p^3 + 6bc_y\varphi_p^2p^3 - 9c_{yp}\varphi_p^2p^3 - \\ & 27d_y\varphi_p^2ap^3 - 54a_y\varphi_p^2dp^3 + 9b_y\varphi_p\varphi_yp^3 + 18\varphi_p^2b_{xy}p^3 + 2bc^2\varphi_p^2p^2 + 9b_{xx}\varphi_p^2p^2 + \\ & 18acd\varphi_p^2p^2 - 54da_x\varphi_p^2p^2 + 9db_p\varphi_p^2p^2 + 3cb_x\varphi_p^2p^2 + 6bc_x\varphi_p^2p^2 + 27c_y\varphi_p^2p^2 - \\ & 9c_{xp}\varphi_p^2p^2 + 9b\varphi_y^2p^2 - 27d_x\varphi_p^2ap^2 - 9d_p\varphi_p^2bp^2 - 12\varphi_p^2b^2dp^2 - 27\varphi_p\varphi_yadp^2 + \\ & 3bc\varphi_p\varphi_yp^2 + 9b_x\varphi_p\varphi_yp^2 - 9c_p\varphi_p\varphi_yp^2 + 6c^2\varphi_p^2p + 9c_x\varphi_p^2p - 27d_p\varphi_p^2p - \\ & 27\varphi_y^2p - 18\varphi_p^2bdp + 27d\varphi_p^2)\varphi_p + 108p^2\varphi_p\varphi_y\varphi_{yp}, \end{aligned}$$

$$54\varphi_p^2\varphi_{xy} = 3(-2b^2 + 6ac - 9a_yp - 9a_x + 3b_p)\varphi_pH^2 + (27\varphi_p^2a_{yy}p^3 + \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & 18bb_y\varphi_p^2p^2 - 9b_{yp}\varphi_p^2p^2 - 18c_y\varphi_p^2ap^2 - 36a_y\varphi_p^2cp^2 + 54a_y\varphi_p\varphi_yp^2 + \\ & 54\varphi_p^2a_{xy}p^2 + 12ac^2\varphi_p^2p + 27a_{xx}\varphi_p^2p + 6cb_p\varphi_p^2p + 18bb_x\varphi_p^2p + \\ & 36b_y\varphi_p^2p - 9b_{xp}\varphi_p^2p + 54a\varphi_y^2p - 18c_x\varphi_p^2ap - 6c_p\varphi_p^2bp - 2\varphi_p^2b^2cp - \\ & 36a_x\varphi_p^2cp - 36\varphi_p\varphi_yacp - 18\varphi_p^2abdp + 12b^2\varphi_p\varphi_yp + 54a_x\varphi_p\varphi_yp - \\ & 18b_p\varphi_p\varphi_yp + 6bc\varphi_p^2 + 18b_x\varphi_p^2 - 18c_p\varphi_p^2 - 54\varphi_p^2ad)H + \\ & 54\varphi_p\varphi_{yp}H - 108\varphi_{yp}\varphi_p\varphi_yp + \varphi_p(-18b_{yy}\varphi_p^2p^3 + 108da_y\varphi_p^2p^2 + \\ & 54ad_y\varphi_p^2p^2 - 36b_{xy}\varphi_p^2p^2 - 12c_y\varphi_p^2bp^2 - 6b_y\varphi_p^2cp^2 - 18b_y\varphi_p\varphi_yp^2 + \\ & 18\varphi_p^2c_{yp}p^2 - 4\varphi_p^2bc^2p - 18b_{xx}\varphi_p^2p + 24b^2d\varphi_p^2p + 108da_x\varphi_p^2p - 45c_y\varphi_p^2p + \\ & 18bd_p\varphi_p^2p + 54ad_x\varphi_p^2p - 12c_x\varphi_p^2bp - 18\varphi_y^2bp - 6b_x\varphi_p^2cp - 6\varphi_p\varphi_ybcp - \\ & 18b_p\varphi_p^2dp - 36\varphi_p^2acd + 54ad\varphi_p\varphi_yp - 18b_x\varphi_p\varphi_yp + 18c_p\varphi_p\varphi_yp + \\ & 18\varphi_p^2c_{xp}p - 6\varphi_p^2c^2 + 18bd\varphi_p^2 - 9c_x\varphi_p^2 + 27d_p\varphi_p^2 + 27\varphi_y^2) + 54p\varphi_y^2\varphi_{pp}, \end{aligned}$$

$$3\varphi_p\varphi_{px} = 3H\varphi_{pp} - 3p\varphi_p\varphi_{yp} + 3aH^2 - 2bH\varphi_p + c\varphi_p^2, \quad (2.46)$$

$$18\varphi_p^2H_x = 18H^2\varphi_{pp} - 18Hp\varphi_p\varphi_{yp} + H^2\varphi_p(-6acp + 9p^2a_y + 9pa_x + 2b^2p - 3pb_p - 6b) + 2H\varphi_p(9adp\varphi_p - bcp\varphi_p - 3p^2\varphi_pb_y - 3pb_x\varphi_p + 3pc_p\varphi_p - 3c\varphi_p + 9\varphi_y) + 18aH^3 + \varphi_p(-6bdp\varphi_p^2 + 2c^2p\varphi_p^2 + 3p^2\varphi_p^2c_y + 3pc_x\varphi_p^2 + 18d\varphi_p^2 - 9pd_p\varphi_p^2 - 9p\varphi_y^2), \quad (2.47)$$

$$18\varphi_pH_y = 18H\varphi_{yp} + H^2(6ac - 9pa_y - 9a_x - 2b^2 + 3b_p) + 2H\varphi_p(-9ad + bc + 3pb_y + 3b_x - 3c_p) + 6bd\varphi_p^2 - 2c^2\varphi_p^2 - 3c_x\varphi_p^2 - 3p\varphi_p^2c_y + 9d_p\varphi_p^2 + 9\varphi_y^2, \quad (2.48)$$

$$3\varphi_pH_p = 3H\varphi_{pp} + 3aH^2 - 2bH\varphi_p + \varphi_p(c\varphi_p + 3\varphi_y), \quad (2.49)$$

$$9\varphi_p^2k_x = 9Hk\varphi_{pp} + 9kp\varphi_{pp}\varphi_y - 18kp\varphi_p\varphi_{yp} + Hk(-6acp\varphi_p + 9p^2\varphi_pa_y + 9pa_x\varphi_p + 9ap\varphi_y + 2b^2p\varphi_p - 3b\varphi_p - 3pb_p\varphi_p) + k\varphi_p(9adp\varphi_p - bcp\varphi_p - 3p^2\varphi_pb_y - 3pb_x\varphi_p - 3bp\varphi_y + 3pc_p\varphi_p + 9\varphi_y) + 9aH^2k \quad (2.50)$$

$$9\varphi_p^2k_y = -9k\varphi_{pp}\varphi_y + 18k\varphi_p\varphi_{yp} + Hk(6ac\varphi_p - 9a_x\varphi_p - 9p\varphi_pa_y - 9a\varphi_y - 2b^2\varphi_p + 3b_p\varphi_p) + k\varphi_p(-9ad\varphi_p + bc\varphi_p + 3b_x\varphi_p + 3p\varphi_pb_y + 3b\varphi_y - 3c_p\varphi_p), \quad (2.51)$$

$$3\varphi_pk_p = 3k\varphi_{pp} + 3aHk - bk\varphi_p, \quad (2.52)$$

e

$$H = \varphi_x + p\varphi_y, \quad k = -\varphi_pg_x - \varphi_pg_yp + \varphi_xg_p + \varphi_yg_pp \neq 0. \quad (2.53)$$

Reescrevendo a equação (1.8) como

$$y''' - \frac{3}{2y'}(y'')^2 = 0, \quad (2.54)$$

temos uma equação da forma (2.32), em que $a = c = d = 0$ e $b = -\frac{3}{2y'}$, que substituindo em (2.33) obtemos $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0$, o que prova que a EKS é linearizável.

Outra forma de testar a linearização da EKS é dada por Sophus Lie que criou um teste para verificar se uma EDO de segunda ordem é linearizável e se o teste for positivo, ele apresenta como encontrar a transformação que lineariza a equação. O teste segue enunciado a seguir (para mais detalhes vide [38, 39]).

Teorema 4. (*S.Lie*) *Uma EDO de segunda ordem é linearizável, através da mudança da variáveis dependente e independente, à equação $w''(t) = 0$ se, e somente se, tem a forma*

$$y'' + a(x, y)(y')^3 + b(x, y)(y')^2 + c(x, y)y' + d(x, y) = 0, \quad (2.55)$$

com coeficientes satisfazendo as condições:

$$H = 3a_{xx} - 2b_{xy} + c_{yy} - 3a_xc + 3a_yd + 2b_xb - 3c_xa - c_yb + 6d_ya = 0, \quad (2.56)$$

$$K = b_{xx} - 2c_{xy} + 3d_{yy} - 6a_xd + b_xc + 3b_yd - 2c_yc - 3d_xa + 3d_yb = 0.$$

As transformações que a linearizam, isto é,

$$t = \varphi(x, y), \quad w = \psi(x, y), \quad (2.57)$$

são dadas ao resolver um sistema de equações diferenciais parciais (EDP), e este sistema depende do coeficiente a :

- Se $a = 0$ então $\varphi = \varphi(x)$ e o sistema é dado por

$$\begin{aligned} \psi_{yy} &= \psi_y b, \quad 2\psi_{xy} = \varphi_x^{-1} \psi_y \varphi_{xx} + c, \quad \psi_{xx} = \varphi_x^{-1} \psi_x \varphi_{xx} + \psi_y d, \\ 2\varphi_x \varphi_{xxx} - 3\varphi_{xx}^2 - \varphi_x^2 (4(d_y + bd) - (2c_x + c^2)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

- Se $a \neq 0$ então $\varphi_y \neq 0$ e o sistema de EDPs é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_y \psi_{yy} &= (\varphi_{yy} \psi_y + a\Delta), \quad 2\varphi_y^2 \psi_{xy} = 2\varphi_{xy} \varphi_y \psi_y - \varphi_{yy} \Delta - (a\varphi_x - b\varphi_y) \Delta, \\ \varphi_y^2 \psi_{xx} &= 2\varphi_{xy} \varphi_y \psi_x - \varphi_x \varphi_{yy} \psi_x - \varphi_x^2 \psi_x a + \varphi_x \varphi_y \psi_x b + \varphi_y^2 (\psi_y d - \psi_x c), \\ \varphi_y^2 \varphi_{xx} &= 2\varphi_{xy} \varphi_x \varphi_y - \varphi_x^2 \varphi_{yy} - \varphi_x^3 a + \varphi_x^2 \varphi_y b - \varphi_x \varphi_y^2 c + \varphi_y^3 d, \\ 2\varphi_y \varphi_{yyy} &= 3(\varphi_{yy}^2 - 2\varphi_{xy} \varphi_y a + 2\varphi_x \varphi_{yy} a + \varphi_x^2 a^2) - 2\varphi_x \varphi_y (a_y + ab) + \\ \varphi_y^2 (2b_y - 4a_x + 4ac - b^2), \\ 6\varphi_y^2 \varphi_{xyy} &= 3(4\varphi_{xy} \varphi_{yy} \varphi_y - \varphi_x \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_x \varphi_{yy} \varphi_y b - 2\varphi_{xy} \varphi_y^2 b) + 3\varphi_x^3 a^2 + \\ 3\varphi_x \varphi_y^2 (-2a_x + 2ac - b^2) &+ 2\varphi_y^3 (-b_x + 2c_y + 3ad), \end{aligned} \quad (2.59)$$

no qual $\Delta = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$.

Para podermos aplicar o Teorema 4 de Lie à EKS (1.8), que é de terceira ordem, no entanto, é necessário reduzir a ordem da equação. Note que $u = y$ e $v = y'$ são invariantes de ∂_x ² (simetria de Lie de (1.8)), então, fazendo essa mudança de variável, a equação (1.8) se torna:

$$v'' - \frac{1}{2v} (v')^2 = 0. \quad (2.60)$$

Aplicando o Teorema 4 à (2.60), concluímos mais uma vez que (1.8) é linearizável. Com este resultado, finalizamos a parte I desta tese que tratou algumas questões preliminares sobre a equação de Kummer-Schwarz e o Schwarziano. A seguir, iniciaremos um estudo envolvendo generalizações de tal equação e apresentaremos uma série de resultados que encontramos a partir dessas generalizações.

² Neste tese, utilizaremos ambas notações para geradores de simetrias: ∂_x e $\frac{\partial}{\partial x}$.

Parte II

Generalizações de equações diferenciais
envolvendo a derivada de Schwarz

Generalizações de equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz

Na Parte 1, vimos que a EKS

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0, \quad (2.61)$$

é notável por pelo menos duas razões: a primeira delas é que (2.61) possui simetrias de Lie isomorfas à álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$ e sua representação é dada pelos campos vetoriais

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.62)$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial y}, X_6 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.63)$$

Além disso, a equação de KS é linearizável por simetrias de contato. Leach [36] em seus trabalhos sugeriu generalizações da equação de KS, por exemplo, a equação

$$y' y''' + n(y'')^2 = 0, \quad (2.64)$$

que generaliza a equação (2.61), Leach a estuda sob o ponto de vista de simetrias e faz uma abordagem envolvendo análise de singularidades. Em [16], encontramos a seguinte equação

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^2 \quad (2.65)$$

na prova de um teorema que diz que uma superfície no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ com métrica $dl^2 = g(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ e curvatura Gaussiana constante K é (localmente) isométrica da esfera ($K > 0$), ao plano Euclidiano ($K = 0$) ou ao plano de Lobachevsky ($K < 0$). A equação (2.65) pode ser considerada uma generalização da equação (2.61), em que o Schwarziano é igual a $f(y)(y')^2$. Fizemos um estudo sobre esta equação, com abordagem na teoria de S. Lie de simetrias de equações diferenciais, que foi publicado em [8]. Casos particulares de (2.65) também são investigadas em [18]. De Lucas e Sardón [14] consideram uma equação da forma

$$S(y) = k(y')^2 + f(x),$$

em que k é constante e $f(x)$ é uma função de x , todavia, não estudam sob o olhar de simetrias de Lie, eles trabalham sob o ponto de vista de sistemas de Lie, isto é, "um sistema de equações diferenciais que admite uma regra de superposição" [12, 14]. N. Ibragimov, que foi um contribuinte para a expansão da teoria de estudos sobre simetrias de Lie, em [28],

juntamente com F. Mahomed, mostra uma série de equações diferenciais de terceira ordem admitindo Álgebras de Lie de dimensão 1,2,3 e 4 reais e dentre elas encontramos uma equação envolvendo o Schwarziano, a saber, $S(y) = f(x)$. Nossa proposta nos próximos três capítulos é estudar a seguinte generalização:

$$\frac{y'''}{y'} + n \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y, y'), \quad (2.66)$$

em que $n \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e f uma função arbitrária de seus argumentos. Note que, tanto (2.64) quanto (2.65) são abrangidas em (2.66) e além dessas muitas outras. Usamos a constante n para manter a forma como P. Leach escreve a equação (2.64) em seu trabalho [36]. Denotaremos (2.66) de **Equação Kummer-Schwarz generalizada (EKSG)** e **Equações Kummer-Schwarz generalizadas (EKSGs)** para as várias equações que são formadas a partir da EKSG para n e f específicos.

Observação 1. *Nesta parte (') sempre será a derivada da função com relação ao seu argumento.*

3 Linearização da EKSG

Podemos observar que para a maioria dos casos, a EKSG não é linear, no entanto, em alguns casos (2.66) pode ser linearizável seja por transformações de contato ou outra mudança da variável dependente e independente e é isso que veremos neste capítulo. A seguir, apresentaremos um dos nossos principais resultados. Mostraremos quais equações do tipo da EKSG são linearizáveis a $w'''(t) = 0$ que é a equação linear de terceira ordem mais simples que conhecemos, além disso, mostraremos quais são as transformações que as linearizam.

Teorema 5. *As únicas equações diferenciais da forma (2.66) que são linearizáveis a $w'''(t) = 0$ via transformações de contato*

$$t = \varphi(x, y, y'), \quad w = \psi(x, y, y'), \quad q = g(x, y, y'),$$

são:

$$\frac{y'''}{y'} = \frac{k_1}{y'} + k_2, \quad (3.1)$$

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^2 + k_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{y'''}{y'} - 3 \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^3 + k_1(y')^2, \quad (3.3)$$

em que k_1 e k_2 são constantes e f é uma função arbitrária de y .

Tais equações, são linearizadas pelas seguintes transformações de contato:

- Para (3.1)

$$\begin{cases} t = \frac{2g'(x)^2(h(x) + y)}{g'(x)(h'(x) + p) + g''(x)(h(x) + y)} - g(x), \\ w = -\frac{2g'(x)^3(h(x) + y)}{(g'(x)(h'(x) + p) + g''(x)(h(x) + y))^2}, \\ q = -\frac{2g'(x)}{g'(x)(h'(x) + p) + g''(x)(h(x) + y)}, \end{cases} \quad (3.4)$$

tal que

$$S(g)(x) = -\frac{k_2}{2} \text{ e } h'''(x) - k_2 h'(x) + k_1 = 0. \quad (3.5)$$

- Para (3.2)

$$\begin{cases} t = -\left(\frac{h'(y)}{g'(x)}y'\right)^{\frac{1}{2}}, \\ w = \frac{g(x)h'(y)y' - h(y)g'(x)}{2g'(x)}, \\ q = -g(x)\left(\frac{h'(y)}{g'(x)}y'\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.6)$$

tal que

$$S(g)(x) = k_1 \quad \text{e} \quad S(h)(y) = -f(y). \quad (3.7)$$

- Para (3.3)

$$\begin{cases} t = \frac{2y'g'(y)^2(h(y) + x)}{g'(y)(y'h'(y) + 1) + y'g''(y)(h(y) + x)} - g(y), \\ w = -\frac{2(y')^2g'(y)^3(h(y) + x)}{(g'(y)(y'h'(y) + 1) + y'g''(y)(h(y) + x))^2}, \\ q = -\frac{2y'g'(y)}{(g'(y)(y'h'(y) + 1) + y'g''(y)(h(y) + x))}, \end{cases} \quad (3.8)$$

tal que

$$S(g)(y) = \frac{k_1}{2} \quad \text{e} \quad h'''(y) + k_1h'(y) - f(y) = 0. \quad (3.9)$$

em que $S(*)$ é a derivada de Schwarz.

Demonstração. Para prova deste teorema, utilizaremos o Teorema 3 de Meleshko enunciado no capítulo 1. Para isso, reescrevemos a equação (2.66) na forma (2.32), em que $p = y'$

$$y''' + \frac{n}{p}(y'')^2 - f(y, p)p = 0. \quad (3.10)$$

Dessa forma, $a = 0, b = \frac{n}{p}, c = 0$ e $d = -f(y, p)p$. Substituindo esses coeficientes em J_1, J_2, J_3 e J_4 dados em (2.33), obtemos que:

- $J_1 = 0 \Leftrightarrow n(n+3)\left(n + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow n \in \left\{-3, -\frac{3}{2}, 0\right\};$
- $J_2 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{R} \text{ e } f = f(y, y');$
- $J_3 = 0$ se, e somente se

$$3pf_{pp} + 6(n+1)f_p + \frac{2n}{p}(2n+3)f = 0; \quad (3.11)$$

- $J_4 = 0$ se, e somente se

$$3pf_{yp} + (2n - 3)f_y = 0. \quad (3.12)$$

De $J_1 = 0$ já obtemos que $n \in \left\{-3, -\frac{3}{2}, 0\right\}$ então, para que (2.66) seja linearizável, é preciso analisarmos as equações (3.11) e (3.12) para tais valores de n .

- Se $n = -3$, a equação (3.11) produz $p^2 f_{pp} - 4pf_p + 6f = 0$, cuja solução é dada por

$$f(y, p) = g(y)(p)^3 + h(y)(p)^2, \quad (3.13)$$

substituindo em (3.12) temos que

$$3p[3g'(y)p^2 + 2h'(y)p] - 9[g'(y)p^3 + h'(y)p^2] = -3h'(y)p^2 = 0 \Rightarrow h(y) = k_1 = cte,$$

o que produz (3.3).

- Se $n = -\frac{3}{2}$, de (3.11) temos que $pf_{pp} - f_p = 0$, na qual a solução é

$$f(y, p) = g(y)(p)^2 + h(y), \quad (3.14)$$

substituindo em (3.12) temos que

$$6pg'(y)p - 6[g'(y)p^3 + h'(y)] = -6h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = k_1 = cte,$$

o que produz (3.2).

- Finalmente, se $n = 0$ de (3.11) temos que $3pf_{pp} + 6f_p = 0$ o que implica em

$$f(y, p) = \frac{g(y)}{p} + h(y), \quad (3.15)$$

substituindo em (3.12) temos que

$$3p\frac{g'(y)}{p^2} - 3\left(\frac{g'(y)}{p} + h'(y)\right) = 0 \Rightarrow g(y) = k_1 = cte \text{ e } h(y) = k_2 = cte,$$

fornecendo a equação (3.1), que por sua vez já é uma equação linear.

As transformações do teorema se verificam ao calcular $w'''(t)$. Tais transformações foram encontradas resolvendo o sistema do teorema 3 de Meleshko e o cálculo para encontrá-las pode ser visto no Apêndice A. $\square$

Observação 1. Note que em (3.5), (3.7) e (3.9) encontramos

$$S(g)(x) = a, \quad (3.16)$$

em que a é uma constante. Esta equação é integrável e sua solução depende do valor de a .

- Para $a = 0$ temos a EKS cuja solução é dada em (2.19).

- Para $a = \alpha^2 \neq 0$, a solução de (3.16) é dada por

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}c_2}{\alpha} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha(x + 2c_1)}{\sqrt{2}} \right) + c_3.$$

- Para $a = -\alpha^2 \neq 0$, a solução de (3.16) é dada por

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}c_2}{\alpha} \tanh \left(\frac{\alpha(x - 2c_1)}{\sqrt{2}} \right) + c_3,$$

em que c_1, c_2 e c_3 são constantes de integração.

A equação para $h(x)$ em (3.7) também é integrável e a solução depende da constante k_2 ser nula (a solução é um polinômio de grau no máximo 3 em x), positiva (solução dada em termos da função exponencial) ou negativa (solução dada em termos das funções seno e cosseno). Observe que a equação (3.1) já é uma equação linear, todavia a transformação (3.4) visa reduzi-la à $w'''(t) = 0$.

Uma segunda alternativa para encontrar equações do tipo (2.66) que são linearizáveis é o teorema 4 de Sophus Lie, que visa linearizar uma equação diferencial de segunda ordem da forma (2.55) à equação $w''(t) = 0$ através da mudança na variável dependente e independente. A partir dele, obtemos o resultado a seguir.

Teorema 6. *As equações diferenciais da forma (2.66) que são linearizáveis através da mudança nas variáveis dependente e independente $t = \varphi(y)$ e $w = \psi(y, y')$ a $w''(t) = 0$ têm a forma*

$$\frac{y'''}{y'} + n \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = (y')^{-n} h(y) + (y')^2 g(y), \quad (3.17)$$

em que h e g são funções arbitrárias de y . Algumas das transformações que linearizam (3.17) são

- Para $n \neq -2$

$$\begin{cases} t = \varphi(y) & \text{tal que } S(\varphi)(y) = -2(n+2)g(y), \\ w = \frac{1}{n+2} \sqrt{\varphi'}(y')^{n+2} + B(y) & \text{tal que } B''(y) - \frac{\varphi''}{\varphi'} B'(y) + \sqrt{\varphi'} h(y) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

- Para $n = -2$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{y}, \\ w = \frac{1}{y} \ln(y') + B(y) & \text{tal que } B''(y) - \frac{2}{y} B'(y) + \frac{1}{y} g(y) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

em que $S(\varphi)(y)$ é a derivada de Schwarz.

Demonstração. Primeiramente utilizamos a mudança de variável $y' = v(u)$ e reduzimos a equação (2.66) a uma equação diferencial de segunda ordem, em que $u = y^1$. Note que

$$\begin{aligned} v' &= \frac{dv}{du} = \frac{y''}{y'}, \\ v'' &= \frac{dv'}{du} = -\frac{(y'')^2}{(y')^3} + \frac{y'''}{(y')^2}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{y'''}{y'} = vv'' + (v')^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = (v')^2.$$

Substituindo em (2.66), temos a equação reduzida dada por

$$v'' + \frac{(n+1)}{v} (v')^2 = \frac{f(u, v)}{v}. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) tem a forma (2.55), em que v representa a variável dependente y e u a variável independente x , e portanto podemos utilizar as equações (2.56) do teorema de S. Lie para verificar para quais valores de n e f a equação (3.20) é linearizável a $w''(t) = 0$ em que $t = \varphi(u)$ e $w = \psi(u, v)$. Note que, segundo o teorema 4, os coeficientes de (3.20) são:

$$a = 0, \quad b = \frac{n+1}{v}, \quad c = 0 \quad \text{e} \quad d = -\frac{f(u, v)}{v}.$$

A equação $H = 0$ em (2.56) é satisfeita diretamente dos valores dos coeficientes. Já a equação $K = 0$, é satisfeita se, e somente se, $d_{vv} + b_v d + d_v b = 0$, ou seja,

$$\frac{v((1-n)f_v - vf_{vv}) + 2nf}{v^3} = 0, \quad (3.21)$$

cujas solução é dada por $f(u, v) = v^{-n}h(u) + v^2g(u)$, isto significa que

$$v'' + \frac{(n+1)}{v} (v')^2 = v^{-(n+1)}h(u) + vg(u), \quad (3.22)$$

é linearizável e voltando às variáveis originais obtemos (3.17). Note que a equação (3.17) abrange (3.1) e (3.2) para $k = 0$ e (3.3) do teorema 5. Para obter a mudança de variável $t = \varphi(u)$ e $w = \psi(u, v)$ que lineariza (3.22), precisamos resolver o sistema de equações (2.28), que substituindo os valores de a, b, c e d se tornam

$$\psi_{vv} = (n+1)v^{-1}\psi_v, \quad (3.23)$$

$$2\psi_{uv} = \varphi_u^{-1}\psi_v\varphi_{uu}, \quad (3.24)$$

$$\psi_{uu} = \varphi_u^{-1}\psi_u\varphi_{uu} - \psi_v(v^{-(n+1)}h(u) + vg(u)), \quad (3.25)$$

$$S(\varphi)(u) = -2(n+2)g(u), \quad (3.26)$$

em que $\varphi = \varphi(u)$ e $S(\varphi)$ é a derivada de Schwarz. Da equação (3.23) obtemos, para $n \neq -2$

$$\psi(u, v) = \frac{A(u)v^{n+2}}{n+2} + B(u), \quad (3.27)$$

¹ Utilizamos $u = y$ para evitar confusão da variável y como variável dependente na mudança de variável e variável dependente na variável original.

que substituindo em (3.24) produz

$$v^{n+1}(2A'(u)\varphi'(u) - A(u)\varphi''(u)) = 0,$$

que resolvendo para $A(u)$, obtemos

$$A(u) = c_1\sqrt{\varphi'(u)}, \quad (3.28)$$

em que c_1 é constante. Queremos que $c_1 \neq 0$ para que ψ dependa de v , porém, como buscamos uma transformação que lineariza (3.22), podemos supor $c_1 = 1$. Substituindo o que temos em (3.25), considerando a equação (3.26) obtemos

$$B''(u) - \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}B'(u) + h(u)\sqrt{\varphi'(u)} = 0. \quad (3.29)$$

Portanto, para $n \neq -2$ temos a seguinte transformação que lineariza (3.22)

$$\begin{cases} t = \varphi(u) & \text{tal que } S(\varphi)(u) = -2(n+2)g(u), \\ w = \frac{1}{n+2}\sqrt{\varphi'}v^{n+2} + B(u) & \text{tal que } B''(u) - \frac{\varphi''}{\varphi'}B'(u) + \sqrt{\varphi'}h(u) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

Para $n = -2$, realizando cálculos semelhantes aos feitos acima, obteremos a seguinte transformação (neste caso atribuímos alguns valores às constantes que surgiram)

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{u}, \\ w = \frac{1}{u}\ln(v) + B(u) & \text{tal que } B''(u) - \frac{2}{u}B'(u) + \frac{1}{u}g(u) = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Utilizando o fato de que $u = y$ e $v = y'$, as equações (3.30) e (3.31) se tornam, respectivamente, (3.18) e (3.19) como queríamos demonstrar. $\square$

O processo de linearização de uma equação diferencial visa facilitar o processo de busca de soluções. Os teoremas 5 e 6 são fortes pois, uma vez que as equações (3.1), (3.2) e (3.3) são linearizáveis, respectivamente, pelas transformações de contato (3.4), (3.6) e (3.8) à equação $w'''(t) = 0$ e (3.17) é linearizável pelas transformações (3.18), para $n \neq -2$, e (3.19), para $n = -2$, à $w''(t) = 0$, temos a seguinte solução

$$w = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3, \quad (3.32)$$

em que α_1, α_2 e α_3 são constantes ($\alpha_1 = 0$ no caso da equação (3.17)). Note que, ao retornar (3.32) às variáveis originais x e $y(x)$, teremos uma equação de primeira ordem, visto que as transformações dependem de y' , em outras palavras, de uma equação diferencial de terceira ordem, reduzimos à busca de soluções de uma equação de primeira ordem.

Observe que o teorema 6 fornece um grupo maior de equações diferenciais da forma da EKSG que podem ser linearizáveis e que inclusive as equações (3.1) e (3.2) para $k_1 = 0$ e (3.3), abrangidas no teorema 5, são linearizadas por tal teorema. Com

esta linearização abrimos as portas para que muitas EKSGs sejam estudadas com mais profundidade, visto que caímos dentro do campo das EDOs lineares e existem amplos estudos e resultados nesta área. Note que, neste capítulo abordamos equações do tipo da EKSG que são linearizáveis a $w'''(t) = 0$ através de um tipo determinado de transformações e não que apenas as que tratamos neste capítulo é que são linearizáveis. Por exemplo, a equação $\frac{y'''}{y'} = \frac{ay + b}{y'} + c$ é um caso de uma equação do tipo EKSG linear que não foi abordado neste capítulo. Todavia, este capítulo apresenta uma variedade de equações que ao serem reduzidas à equação de terceira ordem mais simples, $w'''(t) = 0$, possibilitam um estudo aprofundado de suas soluções, comportamentos, etc.

4 O grupo contínuo de equivalência da EKSG

Na parte I, vimos que simetrias de Lie levam soluções de uma equação diferencial a soluções da mesma equação diferencial. Em contrapartida, neste capítulo, veremos sobre grupos contínuos de equivalência que, por sua vez, mapeiam uma determinada equação diferencial a outra equação diferencial da mesma família, isto é, uma equação da mesma forma. Por conta disso, muitas vezes podemos trabalhar com equações mais simples, tornando o processo de encontrar soluções menos trabalhoso. Neste capítulo, vamos calcular o grupo contínuo de equivalência das equações de Kummer-Schwarz generalizadas (EKSGs) utilizando como referência os procedimentos análogos a [23], [30] e [31], e verificaremos se existe uma equação diferencial ordinária da mesma forma, porém mais simples.

Em [30] podemos encontrar a definição de transformação de equivalência para uma família de equações com a mudança de variável $\bar{x} = \varphi(x, y)$ e $\bar{y} = \rho(x, y)$ e a partir daí podemos estender o conceito de transformação contínua de equivalência para o campo das simetrias de contato.

Definição 1. (*Grupo contínuo de equivalência utilizando transformações de contato*) [30]
Considere a seguinte família de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem

$$y''' = F(x, y, y', y''). \quad (4.1)$$

Um grupo contínuo¹ de equivalência para a família de equações (4.1) é a mudança de variável

$$\bar{x} = \varphi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y} = \rho(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y}' = \rho(x, y, y'; \varepsilon), \quad (4.2)$$

em que ε é um parâmetro contínuo, que transforma toda equação da forma (4.1) numa equação da mesma forma:

$$\bar{y}''' = \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''). \quad (4.3)$$

A função $\bar{F}$ pode ser diferente da função original F . As equações (4.1) e (4.3) são ditas **equivalentes**. Como F pode mudar conforme a transformação, podemos tratar F como nova variável adicionando a (4.2) uma transformação arbitrária F . Considere então a transformação estendida:

$$\bar{x} = \varphi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y} = \psi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{y}' = \phi(x, y, y'; \varepsilon), \quad \bar{F} = \Phi(x, y, y', F; \varepsilon). \quad (4.4)$$

O gerador do grupo contínuo de equivalência no espaço estendido das variáveis (x, y, y', F) é dado por

$$Y = \xi(x, y, y')\partial_x + \eta(x, y, y')\partial_y + \zeta(x, y, y')\partial_{y'} + \mu(x, y, y', F)\partial_F. \quad (4.5)$$

¹ Nesta seção, a palavra contínuo(a) pode não aparecer no texto, por exemplo, pode aparecer apenas transformações de equivalência, mas fica subentendido que se trata de grupo contínuo de equivalência.

Como consideramos transformações de contato, as coordenadas ξ, η e ζ podem ser representadas na forma

$$\xi = -Q_{y'}, \quad \eta = Q - y'Q_{y'}, \quad \zeta = Q_x + y'Q_y, \quad (4.6)$$

com $Q = Q(x, y, y')$.

4.1 Grupo contínuo de equivalência da EKSG

Nesta seção, faremos o cálculo do grupo contínuo de equivalência da EKSG e obteremos resultados concernentes a ele.

Teorema 7. *A equação de EKSG (2.66) admite grupo contínuo de equivalência gerado por*

- Para $n \notin \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -x\partial_x + y'\partial_{y'} + 3F\partial_F, & Y_2 &= -\partial_x, & Y_3 &= \partial_y & e \\ Y_4 &= y\partial_y + y'\partial_{y'} + F\partial_F, \end{aligned} \quad (4.7)$$

e as transformações de equivalência são dadas na tabela a seguir.

Tabela 1 – Grupos contínuos de equivalência de Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4

$Y_1 :$	$\bar{x} = xe^{-\varepsilon},$	$\bar{y} = y,$	$\bar{y}' = y'e^\varepsilon,$	$\bar{F} = Fe^{3\varepsilon},$
$Y_2 :$	$\bar{x} = -\varepsilon + x,$	$\bar{y} = y,$	$\bar{y}' = y'$	$\bar{F} = F,$
$Y_3 :$	$\bar{x} = x,$	$\bar{y} = \varepsilon + y,$	$\bar{y}' = y',$	$\bar{F} = F,$
$Y_4 :$	$\bar{x} = x,$	$\bar{y} = ye^\varepsilon,$	$\bar{y}' = y'e^\varepsilon,$	$\bar{F} = Fe^\varepsilon.$

- Para $n = -3$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -x\partial_x + y'\partial_{y'} + 3F\partial_F, & Y_2 &= -\partial_x, & Y_3 &= \partial_y, \\ Y_4 &= y\partial_y + y'\partial_{y'} + F\partial_F & e \\ Y_\phi &= -\phi(y)\partial_x + (y')^2\phi'(y)\partial_{y'} + (4y'\phi'(y)F + (y')^4\phi'''(y))\partial_F. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Os grupos contínuos de equivalências de Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4 já foram dados acima. A transformação de equivalência para Y_ϕ é

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = -\phi(y)\varepsilon + x, \\ \bar{y} = y, \\ \bar{y}' = \frac{y'}{1 - y'\phi'(y)\varepsilon}, \\ \bar{F} = \frac{1}{(y'\phi'(y)\varepsilon - 1)^4} (\phi'''(y)(y')^4\varepsilon + F). \end{array} \right. \quad (4.9)$$

- Para $n = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -x\partial_x + y'\partial_{y'} + 3F\partial_F, \quad Y_2 = -\partial_x \quad \text{e} \\ Y_\phi &= \phi(y)\partial_y + y'\phi'(y)\partial_{y'} + (\phi'(y)F + (y')^3\phi'''(y))\partial_F. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os grupos contínuos de equivalências de Y_1 e Y_2 são mostrados na tabela 1. A transformação de equivalência para Y_ϕ é dada por

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = \omega^{-1}(\varepsilon + \omega(y)) \quad \text{em que} \quad \omega(y) = \int^y \frac{d\tau}{\phi(\tau)}, \\ \bar{y}' = y'\psi_y, \\ \bar{F} = \psi_y(y')^3 \left(S(\psi)(y) + \frac{F}{(y')^3} \right) \quad \text{em que} \quad \psi = \bar{y}. \end{cases} \quad (4.11)$$

em que $\phi = \phi(y)$ é uma função arbitrária de y .

Demonstração. Vamos encontrar o grupo contínuo de equivalência da equação de EKSG. A equação de EKSG (2.66) pode ser escrita como

$$y''' + \frac{n}{y'}(y'')^2 = f(y, y')y' \quad (4.12)$$

e o gerador de um grupo de equivalência contínuo de (4.12) é da forma (4.5). Considere o sistema associado a (4.12):

$$\begin{cases} y''' + \frac{n}{y'}(y'')^2 = F(x, y, y'), \\ F_x = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

As condições de invariança do sistema (4.13) são dadas pelas seguintes equações:

$$\tilde{Y} \left(y''' + \frac{n}{y'}(y'')^2 - F(x, y, y') \right) |_{(4.13)} = 0, \quad (4.14)$$

$$\tilde{Y}(F_x) |_{(4.13)} = 0, \quad (4.15)$$

em que $\tilde{Y}$ é a prolongação de (4.5)

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= -Q_{y'}\partial_x + (Q - y'Q_{y'})\partial_y + (Q_x + y'Q_y)\partial_{y'} + \mu(x, y, y', F)\partial_F + \\ &\quad \eta^{(2)}\partial_{y''} + \eta^{(3)}\partial_{y'''} + \mu^1\partial_{F_x}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

em [44] vemos que

$$\eta^{(k)} = D_x^k Q - y^{(k+1)}Q_{y'}, \quad (4.17)$$

em que $k = 2, 3$, D_x é o operador de derivada total,

$$\begin{aligned}\mu^1 &= \tilde{D}_x [\mu + Q_{y'} F_x - (Q - y' Q_{y'}) F_y - (Q_x + y' Q_y) F_{y'}] - Q_{y'} F_{xx} + \\ &\quad (Q - y' Q_{y'}) F_{xy} + (Q_x + y' Q_y) F_{xy'} - F_y \tilde{D}_x \eta = \mu_x - F_y \eta_x \\ &= \tilde{D}_x [\mu - (Q - y' Q_{y'}) F_y - (Q_x + y' Q_y) F_{y'}] \\ &= \mu_x - (Q_x - y' Q_{xy'}) F_y - (Q_{xx} + y' Q_{xy}) F_{y'},\end{aligned}\quad (4.18)$$

e $\tilde{D}_x = \partial_x + F_x \partial_F = \partial_x$. Da equação (4.15), temos que $\mu^1 = 0$ e considerando que F_y e $F_{y'}$ são agora algebricamente independentes, conclui-se que

$$\mu_x = 0 \Rightarrow \mu = \mu(y, y', F), \quad (4.19)$$

e

$$Q_x - y' Q_{xy'} = 0, \quad (4.20)$$

$$Q_{xx} + y' Q_{xy} = 0. \quad (4.21)$$

Derivando (4.20) com relação a y' , obtemos $Q_{xy'y'} = 0$ o que implica

$$Q = \Phi(x, y) y' + \psi(x, y) + \omega(y, y').$$

Substituindo Q encontrado em (4.20), teremos que $\psi = \psi(y)$. Em seguida, utilizando (4.21) obteremos $\Phi(x, y) = (\alpha_1 x + \alpha_2) + \varphi(y)$. Com isso,

$$Q = (\alpha_1 x + \alpha_2) y' + \varphi(y) y' + \psi(y) + \omega(y, y'), \quad (4.22)$$

A condição (4.14) produz

$$\eta^{(3)} + \frac{2n}{y'} y'' \eta^{(2)} - \frac{n}{(y')^2} (y'')^2 \zeta - \mu = 0, \quad (4.23)$$

em que $y''' = -\frac{n}{y'} (y'')^2 + F(x, y, y')$. Utilizando (4.17) temos

$$\begin{aligned}(y'')^3 \left[\omega_{y'y'y'} - \frac{n}{y'} \omega_{y'y'} \right] + (y'')^2 [(n+3)(\varphi' + \omega_{yy'}) + 3y' \omega_{yy'y'}] + \\ y'' [3\omega_{y'y'} F + 2(n+3)(y')^2 \varphi'' + 3(y')^2 \omega_{yy'y'} + (2n+3)y'(\psi'' + \omega_{yy})] +\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$(3\alpha_1 + 4y' \varphi' + 3y' \omega_{yy'} + \psi' + \omega_y) F + (y')^4 \varphi''' + (y')^3 (\psi''' + \omega_{yyy}) - \mu = 0,$$

que é uma identidade em y'' e $y'' F$. Do coeficiente de $y'' F$ temos $\omega_{y'y'} = 0$, o que implica,

$$\omega = \omega_1(y) y' + \omega_2(y).$$

Substituindo ω em (4.24) obteremos as seguintes equações determinantes:

$$(n+3)(\varphi' + \omega'_1) = 0, \quad (4.25)$$

$$(2n+3)(\psi'' + \omega''_2) = 0, \quad (4.26)$$

$$\mu = (3\alpha_1 + 4y'(\varphi' + \omega'_1) + \psi' + \omega'_2) F + (y')^4 (\varphi''' + \omega'''_1) + (y')^3 (\psi''' + \omega'''_2). \quad (4.27)$$

Dessa forma, temos três casos a considerar: $n \notin \left\{ -3, -\frac{3}{2} \right\}$, $n = -3$ e $n = -\frac{3}{2}$.

4.1.1 Caso 1: $n \notin \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

De (4.25) obtemos que $\varphi' + \omega_1' = 0$ que produz $\varphi = -\omega_1(y) + \alpha_3$. A equação (4.26) produz $\psi'' + \omega_2'' = 0$ que implica $\psi = -\omega_2(y) + \alpha_4 y + \alpha_5$ e com isso $\mu = (3\alpha_1 + \alpha_4)F$. Dessa forma,

$$Q = (\alpha_1 x + \alpha_2)y' + \alpha_4 y + \alpha_5,$$

que produz os geradores (4.7). Para encontrar os respectivos grupos contínuos de equivalência, basta resolvermos o seguinte sistema de equações de Lie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = \xi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \quad \bar{x}|_{\varepsilon=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \quad \bar{y}|_{\varepsilon=0} = y, \\ \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon} = \zeta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \quad \bar{y}'|_{\varepsilon=0} = y', \\ \frac{d\bar{F}}{d\varepsilon} = \mu(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{F}), \quad \bar{F}|_{\varepsilon=0} = F, \end{array} \right. \quad (4.28)$$

os termos ξ, η e ζ são dados em (4.6). Estas equações são facilmente resolvidas para a forma Q dada acima e a solução está apresentada no enunciado deste teorema.

4.1.2 Caso 2: $n = -3$

Se $n = -3$ então (4.25) está satisfeita. De (4.26) $\psi = -\omega_2(y) + \alpha_4 y + \alpha_3$ e fazendo $\phi(y) = \varphi(y) + \omega_1(y)$ teremos $\mu = (3\alpha_1 + \alpha_4 + 4y'\phi'(y))F + (y')^4\phi'''(y)$. Dessa forma,

$$Q = (\alpha_1 x + \alpha_2 + \phi(y))y' + \alpha_4 y + \alpha_3,$$

que produz os geradores (4.8). As transformações são calculadas resolvendo o sistema de equações de Lie (4.28) e já foram comentadas no caso $n \neq \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$ com exceção da transformação envolvendo a função arbitrária $\phi(y)$, cujo gerador é dado por

$$Y_\phi = -\phi(y)\partial_x + (y')^2\phi'(y)\partial_{y'} + (4y'\phi'(y)F + (y')^4\phi'''(y))\partial_F. \quad (4.29)$$

As equações de Lie associadas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = -\phi(\bar{y}) \quad ; \quad \bar{x}\Big|_{\varepsilon=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = 0 \quad ; \quad \bar{y}\Big|_{\varepsilon=0} = y, \\ \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon} = (\bar{y}')^2 \phi'(\bar{y}) \quad ; \quad \bar{y}'\Big|_{\varepsilon=0} = y', \\ \frac{d\bar{F}}{d\varepsilon} = (\bar{y}')^4 \phi'''(\bar{y}) + 4\bar{y}'\phi'(\bar{y})\bar{F} \quad ; \quad \bar{F}\Big|_{\varepsilon=0} = F. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

A segunda equação em (4.30) produz $\bar{y} = y$ que substituindo na primeira equação obtemos

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = -\phi(y) \Rightarrow \bar{x} = -\phi(y)\varepsilon + cte,$$

que ao aplicar a condição para $\varepsilon = 0$ nos dá $\bar{x} = -\phi(y)\varepsilon + x$. Visto que $\bar{y} = y$, a terceira equação é facilmente resolvida produzindo

$$\bar{y}' = \frac{y'}{1 - y'\phi'(y)\varepsilon}.$$

Finalmente, substituindo o que temos na última equação em (4.30)

$$\frac{d\bar{F}}{d\varepsilon} = \left(\frac{y'}{1 - y'\phi'(y)\varepsilon} \right)^4 \phi'''(y) + 4 \left(\frac{y'}{1 - y'\phi'(y)\varepsilon} \right) \phi'(y)\bar{F},$$

cuja solução após aplicar a condição para $\varepsilon = 0$ é dada por

$$\bar{F} = \frac{\phi'''(y)(y')^4\varepsilon + F}{(y'\phi'(y)\varepsilon - 1)^4}.$$

Em resumo, a solução das equações de Lie (4.30) são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = -\phi(y)\varepsilon + x, \\ \bar{y} = y, \\ \bar{y}' = \frac{y'}{1 - y'\phi'(y)\varepsilon}, \\ \bar{F} = \frac{1}{(y'\phi'(y)\varepsilon - 1)^4} (\phi'''(y)(y')^4\varepsilon + F). \end{array} \right. \quad (4.31)$$

4.1.3 Caso 3: $n = -\frac{3}{2}$

Se $n = -\frac{3}{2}$ então (4.26) está satisfeita. De (4.25) $\varphi = -\omega_1(y) + \alpha_3$ e fazendo $\phi(y) = \psi(y) + \omega_2(y)$ teremos $\mu = (3\alpha_1 + \phi'(y))F + (y')^3\phi'''(y)$. Daí,

$$Q = (\alpha_1 x + \alpha_2)y' + \phi(y),$$

que produz os geradores (4.10). As transformações são calculadas resolvendo o sistema de equações de Lie (4.28) e já foram comentadas no caso $n \neq \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$ com exceção da transformação envolvendo a função arbitrária $\phi(y)$, cujo gerador é dado por

$$Y_\phi = \phi(y)\partial_y + y'\phi'(y)\partial_{y'} + (\phi'(y)F + (y')^3\phi'''(y))\partial_F. \quad (4.32)$$

As equações de Lie associadas são

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = 0 & ; \quad \bar{x}\big|_{\varepsilon=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \phi(\bar{y}) & ; \quad \bar{y}\big|_{\varepsilon=0} = y, \\ \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon} = \bar{y}'\phi'(\bar{y}) & ; \quad \bar{y}'\big|_{\varepsilon=0} = y', \\ \frac{d\bar{F}}{d\varepsilon} = \phi'(\bar{y})\bar{F} + (\bar{y}')^3\phi'''(\bar{y}) & ; \quad \bar{F}\big|_{\varepsilon=0} = F. \end{cases} \quad (4.33)$$

A primeira equação nos dá claramente $\bar{x} = x$, resolvendo a segunda equação em (4.33) temos

$$\omega(\bar{y}) = \varepsilon + \omega(y) \implies \bar{y} = \omega^{-1}(\varepsilon + \omega(y)),$$

em que $\omega(\bar{y}) = \int^{\bar{y}} \frac{d\tau}{\phi(\tau)}$. A terceira equação pode ser reescrita como

$$\frac{d\bar{y}'}{d\bar{y}} = \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\bar{y}} = \bar{y}' \frac{\phi'(\bar{y})}{\phi(\bar{y})},$$

cujas soluções após aplicar a condição em $\varepsilon = 0$ é dada por

$$\bar{y}' = y' \frac{\phi(\bar{y})}{\phi(y)}.$$

Finalmente, a última equação em (4.33) pode ser reescrita como

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{y}} = \frac{d\bar{F}}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\bar{y}} = \frac{\phi'(\bar{y})}{\phi(\bar{y})}\bar{F} + \frac{C(\phi(\bar{y}))^3}{\phi(\bar{y})}\phi'''(\bar{y}),$$

ou melhor,

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{\bar{F}}{\phi(\bar{y})} \right) = C\phi(\bar{y})\phi'''(\bar{y}), \quad (4.34)$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$\bar{F} = C\phi(\bar{y}) \left(-\frac{1}{2}(\phi'(\bar{y}))^2 + \phi(\bar{y})\phi''(\bar{y}) + k \right), \quad (4.35)$$

em que $C = \frac{p^3}{(\phi(y))^3}$ e $k = cte$. Note que,

$$\frac{1}{\phi(\bar{y})} = \frac{d\omega(\bar{y})}{d\bar{y}} = \frac{d(\varepsilon + \omega(y))}{d\bar{y}} = \frac{d(\varepsilon + \omega(y))}{dy} \frac{dy}{d\bar{y}} = \frac{d\omega(y)}{dy} \frac{dy}{d\bar{y}} = \frac{1}{\phi(y)} \frac{dy}{d\bar{y}},$$

tomando $\frac{d\bar{y}}{dy} = \psi_y$ temos:

$$\phi(\bar{y}) = \phi(y)\psi_y. \quad (4.36)$$

Observe que:

$$\phi'(\bar{y}) = \frac{d\phi(\bar{y})}{d\bar{y}} = \frac{d}{dy} (\psi_y \phi(y)) \frac{dy}{d\bar{y}} = (\phi(y)\psi_{yy} + \phi'(y)\psi_y) \frac{1}{\psi_y},$$

ou seja,

$$\phi'(\bar{y}) = \phi(y) \frac{\psi_{yy}}{\psi_y} + \phi'(y) \quad (4.37)$$

e da mesma forma temos

$$\phi''(\bar{y}) = \phi'(y) \frac{\psi_{yy}}{\psi_y^2} + \phi(y) \frac{\psi_{yyy}\psi_y - \psi_{yy}^2}{\psi_y^3} + \phi''(y) \frac{1}{\psi_y}. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.36), (4.37) e (4.38) em (4.35) obtemos:

$$\bar{F} = \phi(y)\psi_y C \left(-\frac{1}{2}(\phi'(y))^2 + \phi(y)\phi''(y) + (\phi(y))^2 S(\phi)(y) + k \right). \quad (4.39)$$

Aplicando a condição em $\varepsilon = 0$ obtemos que $\psi_y = 1$ e

$$k = \frac{1}{2}(\phi'(y))^2 - \phi(y)\phi''(y) + \frac{F}{C\phi(y)},$$

assim,

$$\bar{F} = \psi_y(y')^3 \left(S(\psi)(y) + \frac{F}{(y')^3} \right). \quad (4.40)$$

Em resumo, a solução das equações de Lie (4.33) são dadas por

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = \omega^{-1}(\varepsilon + \omega(y)) \quad \text{em que} \quad \omega(y) = \int^y \frac{d\tau}{\phi(\tau)}, \\ \bar{y}' = y'\psi_y, \\ \bar{F} = \psi_y(y')^3 \left(S(\psi)(y) + \frac{F}{(y')^3} \right) \quad \text{em que} \quad \psi = \bar{y}, \end{cases} \quad (4.41)$$

e com isso está provado o teorema. $\square$

Note que Y_ϕ dados em (4.8) e (4.10) dependem de uma função arbitrária. Ao calcular as respectivas transformações de contato podemos utilizar este fato para modificarmos a função $\bar{F}$ de modo a obtermos uma equação diferencial equivalente mais simples para um dado F . Considerando o caso $n = -3$ e Y_ϕ , o grupo (4.31) nos dá

$$\bar{y}''' - 3 \frac{(\bar{y}'')^2}{\bar{y}'} = \bar{F}(\bar{y}, \bar{y}'). \quad (4.42)$$

Se tomarmos $F(y, y') = f(y)(y')^4$, obteremos a partir da transformação (4.31) o resultado a seguir.

Teorema 8. A equação

$$\frac{y'''}{y'} - 3 \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^3 \quad (4.43)$$

é equivalente, através da transformação de equivalência (4.31), em que

$$F(y, y') = f(y)(y')^4 \quad e \quad \phi'''(y) = -\frac{f(y)}{\varepsilon}, \quad (4.44)$$

e ε é o parâmetro da transformação, à

$$\frac{\bar{y}'''}{\bar{y}'} - 3 \left(\frac{\bar{y}''}{\bar{y}'} \right)^2 = 0. \quad (4.45)$$

Considerando o caso $n = -\frac{3}{2}$ e Y_ϕ , o grupo (4.31) nos dá

$$\bar{y}''' - \frac{3}{2} \frac{(\bar{y}'')^2}{\bar{y}'} = \bar{F}(\bar{y}, \bar{y}'). \quad (4.46)$$

Se tomarmos $F(y, y') = f(y)(y')^3$, obteremos a partir da transformação (4.42) o resultado a seguir.

Teorema 9. A equação (2.65)

$$S(y) = f(y)(y')^2 \quad (4.47)$$

é equivalente, através da transformação de equivalência (4.41), para $F(y, y') = f(y)(y')^3$ à EKS

$$S(\bar{y}) = 0 \quad (4.48)$$

em que $\bar{y}(y)$ é tal que

$$S(\bar{y})(y) = -f(y). \quad (4.49)$$

Esse resultado foi obtido em nosso artigo [8].

4.2 Grupo contínuo de equivalência de $y'' + n \frac{(y')^2}{y} = 0$

Através de transformações de equivalência mostramos que (4.43) e (4.47) são equivalentes a, respectivamente, (4.45) e (4.48) que podem ser abrangidas na seguinte equação

$$Y''' + n \frac{(Y'')^2}{Y'} = 0. \quad (4.50)$$

Se tomarmos $y = Y'$, teremos uma equação de segunda ordem

$$y'' + n \frac{(y')^2}{y} = 0. \quad (4.51)$$

Considere o sistema associado a (4.51)

$$\begin{cases} y'' + \nu(x, y) (y')^2 = 0, \\ \nu_x = 0. \end{cases} \quad (4.52)$$

Vamos buscar as transformações de equivalência de (4.52), porém não com transformações de contato e sim da forma $\bar{x} = \varphi(x, y)$ e $\bar{y} = \rho(x, y)$ com procedimentos análogos à referência [30], com o objetivo de reduzir as equações (4.45) e (4.48) a $\bar{Y}'''(\bar{X}) = 0$. Considere o gerador de grupo de equivalência no espaço estendido das variáveis (x, y, ν)

$$X = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \mu(x, y, \nu) \partial_\nu \quad (4.53)$$

e a prolongação de (4.53) dada por

$$\tilde{X} = X + \eta^{(1)} \partial_{y'} + \eta^{(2)} \partial_{y''} + \mu \partial_{\nu_x}. \quad (4.54)$$

com

$$\eta^{(i)} = D_x \eta^{(i-1)} - y^{(i)} D_x \xi, \quad (4.55)$$

em que $i = 1, 2$, $\eta^{(0)} = \eta$, D_x é o operador de derivada total e $\mu = \mu_x - \eta_x \nu_y$. Aplicando a condição de invariância $\tilde{X}(\nu_x)|_{(4.52)} = 0$ obtemos $\mu = \mu(y, \nu)$ e $\eta = \eta(y)$. Em seguida $\tilde{X}(y'' + \nu(x, y) (y')^2)|_{(4.52)} = 0$ produz

$$\eta^{(2)} + 2\nu y' \eta^{(1)} + \mu (y')^2 = 0, \quad (4.56)$$

isto é,

$$(y')^3 (\nu \xi_y - \xi_{yy}) + (y')^2 (\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \nu \eta_y + \mu) - \xi_{xx} y' = 0, \quad (4.57)$$

que é uma identidade em y' . Resolvendo (4.57) chegamos em

$$\begin{cases} \xi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta = \phi(y), \\ \mu = -\phi''(y) - \nu \phi'(y). \end{cases} \quad (4.58)$$

Portanto, os geradores de grupo de equivalência de (4.52) são dados por

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x \partial_x \quad \text{e} \quad X_\phi = \phi(y) \partial_y - (\phi''(y) + \nu \phi'(y)) \partial_\nu. \quad (4.59)$$

Resolvendo as equações de Lie para X_ϕ obtemos o seguinte grupo de equivalência associado

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = \omega^{-1}(\varepsilon + \omega(y)) \quad \text{em que} \quad \omega(y) = \int^y \frac{d\tau}{\phi(\tau)}, \\ \bar{\nu} = \frac{1}{\psi_y^2} (\nu \psi_y - \psi_{yy}) \quad \text{em que} \quad \psi_y = \frac{d\bar{y}}{dy}. \end{cases} \quad (4.60)$$

Note que,

$$\bar{\nu} = 0 \Leftrightarrow \psi_{yy} - \nu(y) \psi_y = 0. \quad (4.61)$$

Para $\nu = -\frac{3}{y}$ uma solução ψ em (4.61) é dada por $\psi = y^{-2}$ e para $\nu = -\frac{3}{2y}$, $\psi = y^{-\frac{1}{2}}$. Desse modo, $\bar{\nu} = 0$ e a equação (4.51) para estes valores de ν e ψ é reduzida, com a transformação (4.60) a $\bar{y}'' = 0$. Voltando para $y = Y'$, isto é, a equação (4.59) obtemos o resultado a seguir.

Teorema 10. *A equação (4.45)*

$$\frac{Y'''}{Y'} - 3 \left(\frac{Y''}{Y'} \right)^2 = 0, \quad (4.62)$$

é equivalente, através da transformação de equivalência

$$\begin{cases} \bar{X} = x, \\ \bar{Y} = \int Y'(x)^{-2} dx, \end{cases} \quad (4.63)$$

e a equação (4.48)

$$S(Y) = \frac{Y'''}{Y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{Y''}{Y'} \right)^2 = 0, \quad (4.64)$$

é equivalente, através da transformação de equivalência

$$\begin{cases} \bar{X} = x, \\ \bar{Y} = \int Y'(x)^{-\frac{1}{2}} dx, \end{cases} \quad (4.65)$$

$$a \bar{Y}'''(\bar{X}) = 0.$$

Se combinarmos os resultados obtidos nos teoremas 8, 9 e 10, teremos uma transformação que conduz as equações (4.43) e (4.47) a $u'''(t) = 0$. Tais transformações são dadas no teorema a seguir.

Teorema 11. *A equação (4.43)*

$$\frac{y'''}{y'} - 3 \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^3, \quad (4.66)$$

é equivalente, através da transformação

$$\begin{cases} t = \int \int \int f(y) dy^3 + x, \\ u = \int \left(\frac{1 + y' \int \int f(y) dy^2}{y'} \right)^2 dt \end{cases} \quad (4.67)$$

e a equação (4.47)

$$S(y) = f(y)(y')^2, \quad (4.68)$$

é equivalente, através da transformação

$$\begin{cases} t = x, \\ u = \int (y'\psi'(y))^{-\frac{1}{2}} dx \end{cases} \quad \text{em que} \quad S(\psi)(y) = -f(y), \quad (4.69)$$

a $u'''(t) = 0$.

Note que ambas equações (4.43) e (4.47) são abrangidas nos teoremas 5 e 6. Por outro lado, mostramos que tais equações também podem ser reduzidas a $u'''(t) = 0$ por meio de transformações de equivalência sem precisar resolver o extenso sistema de equações do teorema 3 de Ibragimov e Meleshko. Podemos observar que as transformações dadas no teorema 11 são mais simples e, diga-se de passagem, mais elegantes que as transformações do teorema 5, visto que, por exemplo, em (4.69) só precisamos nos atentar para u pois $t = x$, isto é, não há mudança na variável independente, e a integral tripla em (4.67) também aparece nas transformações (3.8) todavia temos uma expressão mais simples para t . Em contrapartida, se compararmos o teorema 11 com o teorema 6 veremos que a transformação (3.18) é mais simples visto que t não dependerá da função arbitrária que no caso do teorema 11 é $f(y)$. Neste capítulo, vimos mais uma forma de linearizar equações ao trabalhar grupos de equivalência e uma vez que são linearizadas, podemos usufruir de todos os resultados concernentes à equação $u'''(t) = 0$.

5 Simetrias de contato de EKSG

Até aqui, temos estudado a linearização da EKSG a $w'''(t) = 0$ e feito um estudo dentro de grupo contínuo de equivalência. Ambos, envolvendo em sua maioria transformações de contato. No capítulo 2, vimos a definição de simetria de contato, que é uma transformação que envolve as variáveis independente, dependente e sua primeira derivada. Neste capítulo, vamos utilizar o teorema 2 para encontrar as transformações de contato da EKSG. Neste cálculo, vamos excluir os casos abordados nos capítulos 3 e 4, visto que já encontramos maneiras de simplificar equações e estudar equações mais simples. Primeiramente, considere o gerador de simetria de contato de (2.66), estendido até a terceira derivada,

$$X = -Q_{y'}\partial_x + (Q - y'Q_{y'})\partial_y + (Q_x + y'Q_y)\partial_{y'} + \eta^{(2)}\partial_{y''} + \eta^{(3)}\partial_{y'''}, \quad (5.1)$$

em que, $Q = Q(x, y, y')$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ são dados em (2.26). Aplicando a condição de invariança (2.24) a (2.66) temos

$$X \left(y''' + n \frac{(y'')^2}{y'} - f(y, y')y' \right) \Big|_{(2.66)} = 0,$$

que produz

$$\eta^{(3)} + \frac{2n}{y'}y''\eta^{(2)} + (Q_x + y'Q_y) \left(-n \frac{(y'')^2}{(y')^2} - f_{y'}(y, y')y' - f(y, y') \right) - f_y(Q - y'Q_{y'})y' = 0. \quad (5.2)$$

Expandindo (5.2), temos:

$$\begin{aligned} & (y'')^3 \left(Q_{y'y'y'} - \frac{n}{y'}Q_{y'y'} \right) + (y'') \left((n+3)Q_{yy'} + 3y'Q_{yy'y'} - \frac{n}{(y')^2}Q_x + \frac{n}{y'}Q_{xy'} \right. \\ & \left. + 3Q_{xy'y'} \right) + y'' \left(3y'Q_{y'y'}f + 3(y')^2Q_{yy'y'} + (4n+3)Q_{xy} + (2n+3)y'Q_{yy} + \right. \\ & \left. 6y'Q_{xyy'} + \frac{2n}{y'}Q_{xx} + 3Q_{xxy'} \right) + (-y'Qf_y + (y')^2Q_{y'}f_y + Q_{xxx} - \\ & (y')^2f_{y'}Q_y + 3(y')^2Q_{yy'}f + (y')^3Q_{yyy} - fQ_x - y'f_{y'}Q_x + 3y'fQ_{xy'} + \\ & 3(y')^2Q_{xyy} + 3y'Q_{xxy}) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A equação (5.3) é uma identidade em y'' , que produz as seguintes equações determinantes:

$$Q_{y'y'y'} - \frac{n}{y'}Q_{y'y'} = 0, \quad (5.4)$$

$$(n+3)Q_{yy'} + 3y'Q_{yy'y'} - \frac{n}{(y')^2}Q_x + \frac{n}{y'}Q_{xy'} + 3Q_{xy'y'} = 0, \quad (5.5)$$

$$3y'Q_{y'y'}f + 3(y')^2Q_{yyy'} + (4n+3)Q_{xy} + (2n+3)y'Q_{yy} + 6y'Q_{xyy'} + \frac{2n}{y'}Q_{xx} + 3Q_{xxy'} = 0, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & -y'Qf_y + (y')^2Q_{y'}f_y + Q_{xxx} - (y')^2f_{y'}Q_y + 3(y')^2Q_{yy'}f + \\ & (y')^3Q_{yyy} - fQ_x - y'f_{y'}Q_x + 3y'fQ_{xy'} + 3(y')^2Q_{xyy} + 3y'Q_{xxy} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Da equação (5.4) temos inicialmente os seguintes casos a considerar:

- Para $n = -2$

$$Q = -\ln(y')c_1(x, y) + c_2(x, y) + y'c_3(x, y), \quad (5.8)$$

- Para $n = -1$

$$Q = y'(-1 + \ln(y'))c_1(x, y) + c_2(x, y) + y'c_3(x, y), \quad (5.9)$$

- Para $n \notin \{-2, -1\}$

$$Q = (y')^{n+2}c_1(x, y) + c_2(x, y) + y'c_3(x, y), \quad (5.10)$$

em que $c_1(x, y)$, $c_2(x, y)$ e $c_3(x, y)$ são funções arbitrárias de x e y . Se tomarmos (5.10) e substituirmos em (5.5), teremos o seguinte:

$$(y')^{n+3} [2(n+2)(2n+3)c_{1y}] + (y')^{n+2} [2(n+1)(2n+3)c_{1x}] + (y')^2(n+3)c_{3y} - nc_{2x} = 0. \quad (5.11)$$

Analisando as potências em y' , encontramos três casos a considerar:

- $n = -3$;
- $n = 0$;
- $n \notin \{-3, 0\}$. Neste caso, de (5.11) teremos

$$c_{2x} = 0, \quad c_{3y} = 0, \quad (2n+3)c_{1x} = 0 \quad \text{e} \quad (2n+3)c_{1y} = 0, \quad (5.12)$$

o que produz, $c_2 = c_2(y)$ e $c_3 = c_3(x)$. Quanto a $c_1(x, y)$ precisamos separar em mais dois casos: $n = -\frac{3}{2}$ e $n \neq -\frac{3}{2}$.

5.1 Para $n = -2$

Substituindo Q dado em (5.8) em (5.5) obtemos o seguinte:

$$2y'c_{1y} + (y')^2c_{3y} + 5c_{1x} - 2\ln(y')c_{1x} + 2c_{2x} = 0, \quad (5.13)$$

Derivando (5.13) com relação a y' , teremos a identidade em y'

$$y'c_{1y} + (y')^2c_{3y} - c_{1x} = 0,$$

que produz $c_1 = \alpha_1$ em que $\alpha_1 = cte$ ¹ e $c_3 = c_3(x)$. Substituindo em (5.13) temos $c_{2x} = 0$, isto é, $c_2 = c_2(y)$. Assim, $Q = -\alpha_1 \ln(y') + c_2(y) + y'c_3(x)$. Da equação (5.6), obtemos

$$3\alpha_1 \frac{f(y, y')}{y'} - y'c_2''(y) - c_3''(x) = 0. \quad (5.14)$$

Derivando (5.14) com relação a x , teremos $c_3'''(x) = 0$, ou seja, $c_3 = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4$ e, substituindo c_3 em (5.14) obtemos

$$3\alpha_1 \frac{f(y, y')}{y'} - y'c_2''(y) - 2\alpha_2 = 0. \quad (5.15)$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, então (5.15) nos dá uma expressão para $f(y, y')$

$$f(y, y') = \frac{c_2''(y)}{3\alpha_1} (y')^2 + \frac{2\alpha_2}{3\alpha_1} y',$$

que substituindo em (5.7) produz

$$4\alpha_2^2 x + 2\alpha_2 \alpha_3 - 2\alpha_2 c_2'(y) - 2y'c_2'(y)c_2''(y) + (2\alpha_1 - c_2(y) + \alpha_1 \ln(y'))y'c_2'''(y) = 0.$$

Do termo com x , temos $\alpha_2 = 0$ e daí

$$f(y, y') = \frac{c_2''(y)}{3\alpha_1} (y')^2$$

que já foi abordado no teorema 6, então encerramos o caso $\alpha_1 \neq 0$. Se $\alpha_1 = 0$, em (5.14), $y'c_2''(y) + 2\alpha_2 = 0$, o que implica, $c_2(y) = \alpha_5 y + \alpha_6$ e $\alpha_2 = 0$. Substituindo em (5.7), obtemos

$$-2\alpha_3 f + (\alpha_3 + \alpha_5)y'f_{y'} + (\alpha_6 + \alpha_5 y)f_y = 0. \quad (5.16)$$

Para $\alpha_5 \neq 0$, consideremos $\alpha_3 = \lambda_1 \alpha_5$ e $\alpha_6 = \lambda_2 \alpha_5$ em que λ_1 e λ_2 são constantes, logo (5.16) se torna

$$-2\lambda_1 f + (\lambda_1 + 1)y'f_{y'} + (\lambda_2 + y)f_y = 0. \quad (5.17)$$

Resolvendo (5.17) para f , obtemos $f(y, y') = (y + \lambda_2)^{2\lambda_1} g(A)$, em que $A = y'(y + \lambda_2)^{-(\lambda_1 + 1)}$. Q é dado por $Q = \alpha_5(y + \lambda_1 x y' + \lambda_2) + \alpha_4 y'$, que produz,

$$\xi = -\lambda_1 \alpha_5 x - \alpha_4, \quad \eta = \alpha_5(y + \lambda_2), \quad \eta^{(1)} = (\lambda_1 + 1)\alpha_5 y'.$$

Logo, neste caso temos os seguintes geradores de simetrias

$$X_1 = \partial_x \text{ e } X_2 = -\lambda_1 x \partial_x + (y + \lambda_2) \partial_y + (\lambda_1 + 1)y' \partial_{y'},$$

¹ α_i para i natural, em todo este capítulo será constante.

Por outro lado, se $\alpha_5 = 0$, (5.16) se torna

$$\alpha_3(y'f_{y'} - 2f) + \alpha_6f_y = 0.$$

Para $\alpha_6 \neq 0$, consideramos $\alpha_3 = \lambda\alpha_6$ e $\lambda = cte$ e daí, $\lambda(y'f_{y'} - 2f) + f_y = 0$, cuja solução é

$$f(y, y') = e^{2\lambda y} g(y'e^{-\lambda y})$$

e com isso, $Q = \alpha_6 + y'(\lambda\alpha_6x + \alpha_4)$ produz,

$$\xi = -\lambda\alpha_6x - \alpha_4, \quad \eta = \alpha_6, \quad \eta^{(1)} = \lambda\alpha_6y'$$

e temos as seguintes simetrias

$$X_1 = \partial_x \quad \text{e} \quad X_2 = -\lambda x \partial_x + \partial_y + \lambda y' \partial_{y'}.$$

Em contrapartida, para $\alpha_6 = 0$, (5.16) se torna $\alpha_3(-2f + y'f_{y'}) = 0$, o que implica em $\alpha_3 = 0$ pois, o caso $-2f + y'f_{y'} = 0$ recai no teorema 6 e, com isso, para $f(y, y')$ geral temos $Q = \alpha_4y'$, isto é, temos um único gerador de simetria $X_1 = \partial_x$.

5.2 Para $n = -1$

Para $n = -1$, temos que Q é dado em (5.9). Substituindo em (5.5), temos:

$$(3 + 2\ln(y'))c_{1y} + 2c_{3y} + 2\frac{c_{1x}}{y'} + \frac{c_{2x}}{(y')^2} = 0. \quad (5.18)$$

Derivando (5.18) com relação a y' , temos, $c_1 = \alpha_1$ e $c_2 = c_2(y)$. Voltando a (5.18), teremos $c_3 = c_3(x)$, assim, $Q = \alpha_1(-1 + \ln(y'))y' + c_2(y) + y'c_3(x)$. Substituindo em (5.6)

$$3\alpha_1f(y, y') + y'c_2''(y) + c_3''(x) = 0. \quad (5.19)$$

Derivando (5.19) com relação a x , temos $c_3 = \alpha_2x^2 + \alpha_3x + \alpha_4$ e, substituindo em (5.19) temos

$$3\alpha_1f(y, y') + y'c_2''(y) + 2\alpha_2 = 0. \quad (5.20)$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, então

$$f(y, y') = -\frac{c_2''(y)}{3\alpha_1}y' - \frac{2\alpha_2}{3\alpha_1}.$$

Substituindo o que temos em (5.7), analogamente ao caso $n = -2$, teremos uma identidade com x que produzirá $\alpha_2 = 0$ e com isso

$$f(y, y') = -\frac{c_2''(y)}{3\alpha_1}y'$$

que já está abordada no teorema 6. Se $\alpha_1 = 0$, de (5.19) teremos $c_2(y) = \alpha_5y + \alpha_6$ e $\alpha_2 = 0$, logo $Q = (\alpha_5y + \alpha_6) + y'(\alpha_3x + \alpha_4)$. Substituindo em (5.7) produz (5.16) e a partir daí temos cálculos equivalentes ao feito no caso $n = -2$.

5.3 Para $n = -3$

Para este caso temos Q dado em (5.10), de (5.11) obtemos

$$4c_{1x} + y'(c_{2x} + 2c_1y) = 0, \quad (5.21)$$

que produz $c_1 = c_1(y)$ e $c_2 = -2c_1'(y)x + c_4(y)$. Assim,

$$Q = \frac{c_1(y)}{y'} + y'c_3(x, y) + c_4(y) - 2xc_1'(y),$$

que substituindo em (5.6) nos dá

$$2\frac{f(y, y')c_1(y)}{(y')^2} + 4c_1''(y) - c_{3xx}(x, y) + y'(2xc_1'''(y) - c_4''(y) - c_{3xy}(x, y)) = 0. \quad (5.22)$$

Derivando (5.22) com relação a y' duas vezes, temos

$$c_1(y) [6f - 4y'f_{y'} + (y')^2f_{y'y'}] = 0. \quad (5.23)$$

O caso $6f - 4y'f_{y'} + (y')^2f_{y'y'} = 0$ tem solução $f = g(y)(y')^2 + h(y)(y')^3$ e já foi abordado no teorema 6 sobre linearização e, portanto, vamos desconsiderar este caso. Dessa forma, $c_1(y) = 0$, ou seja, $Q = c_4(y) + y'c_3(x, y)$. Com isso, de (5.22) obtemos:

$$c_{3xx}(x, y) + y'(c_4''(y) + c_{3xy}(x, y)) = 0, \quad (5.24)$$

que implica $c_{3xx} = 0$ e $c_4''(y) + c_{3xy}(x, y) = 0$, ou seja, $c_3 = c_5(y)x + c_6(y)$ e $c_5 = -c_4'(y) + \alpha_1$. Daí, $Q = c_4(y) + y'(c_6(y) + x(\alpha_1 - c_4'(y)))$. Substituindo em (5.7)

$$\begin{aligned} & x [3y'f(y, y')c_4''(y) + (y')^3c_4'''(y) - (y')^2c_4''(y)f_{y'}(y, y')] + \\ & f(y, y')(-2\alpha_1 + 2c_4'(y) - 3y'c_6'(y)) + \\ & f_{y'}(y, y')(\alpha_1y' + (y')^2c_6'(y)) + f_y(y, y')c_4(y) + 2(y')^2c_4'''(y) - (y')^3c_6'''(y) = 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

A equação (5.25) é uma identidade em x que produz

$$3y'f(y, y')c_4''(y) + (y')^3c_4'''(y) - (y')^2c_4''(y)f_{y'}(y, y') = 0, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} & f(y, y')(-2\alpha_1 + 2c_4'(y) - 3y'c_6'(y)) + \\ & f_{y'}(y, y')(\alpha_1y' + (y')^2c_6'(y)) + f_y(y, y')c_4(y) + 2(y')^2c_4'''(y) - (y')^3c_6'''(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Se considerarmos $c_4''(y) \neq 0$, resolvendo (5.26) com relação a $f(y, y')$, obtemos

$$f(y, y') = (y')^3h(y) - (y')^2\frac{c_4'''(y)}{c_4''(y)},$$

que já foi estudado no teorema 6. Assim, seja $c_4''(y) = 0$, isto é, $c_4(y) = \alpha_2y + \alpha_3$, que substituindo em (5.27) produz

$$\begin{aligned} & f(y, y')(2(\alpha_2 - \alpha_1) - 3y'c_6'(y)) + \\ & f_{y'}(y, y')(\alpha_1y' + (y')^2c_6'(y)) + f_y(y, y')(\alpha_2y + \alpha_3) - (y')^3c_6'''(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se $\alpha_2 \neq 0$, considere $\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_2$, $\alpha_3 = \lambda_2 \alpha_2$ e $c_6(y) = \alpha_2 g(y)$ em que λ_1 e λ_2 são constantes. Assim (5.28) se torna

$$f(y, y') (2(1 - \lambda_1) - 3y'g'(y)) + f_{y'}(y, y')(\lambda_1 y' + (y')^2 g'(y)) + f_y(y, y')(y + \lambda_2) - (y')^3 g'''(y) = 0. \quad (5.29)$$

Que resolvendo para $f(y, y')$ obtemos

$$f(y, y') = \exp \left(\int_1^y \frac{3y'g'(\varepsilon)(\lambda_2 + \varepsilon)^{\lambda_1} + (2\lambda_1 - 2)A}{A(\lambda_2 + \varepsilon)} d\varepsilon \right) \left(\int_1^y \frac{\exp \left(- \int_1^\delta \frac{3y'g'(\varepsilon)(\lambda_2 + \varepsilon)^{\lambda_1} + (2\lambda_1 - 2)A}{A(\lambda_2 + \varepsilon)} d\varepsilon \right) (y')^3 (\lambda_2 + \delta)^{3\lambda_1 - 1} g'''(\delta)}{\left((y + \lambda_2)^{\lambda_1} + y' \int_\delta^y (\lambda_2 + \tau)^{\lambda_1 - 1} g'(\tau) d\tau \right)^3} d\delta + h(B) \right) \quad (5.30)$$

em que

$$A = (y + \lambda_2)^{\lambda_1} + y' \int_1^y (\lambda_2 + \tau)^{\lambda_1 - 1} g'(\tau) d\tau - y' \int_1^\varepsilon (\lambda_2 + \tau)^{\lambda_1 - 1} g'(\tau) d\tau$$

e

$$B = \int_1^y (\lambda_2 + \tau)^{\lambda_1 - 1} g'(\tau) d\tau + \frac{(\lambda_2 + y)^{\lambda_1}}{y'}.$$

Com isso, $Q = \alpha_2(y + \lambda_2 + y'(g(y) + (\lambda_1 - 1)x))$ produz,

$$\xi = -\alpha_2(g(y) + (\lambda_1 - 1)x), \quad \eta = \alpha_2(y + \lambda_2), \quad \eta^{(1)} = \alpha_2(\lambda_1 y' + g'(y)(y')^2),$$

temos a seguinte simetria

$$X_1 = -(g(y) + (\lambda_1 - 1)x)\partial_x + (y + \lambda_2)\partial_y + (\lambda_1 y' + g'(y)(y')^2)\partial_{y'}.$$

Por outro lado, se $\alpha_2 = 0$ a equação (5.28) se torna

$$-f(y, y') (2\alpha_1 + 3y'c'_6(y)) + f_{y'}(y, y')(\alpha_1 y' + (y')^2 c'_6(y)) + \alpha_3 f_y(y, y') - (y')^3 c'''_6(y) = 0. \quad (5.31)$$

Para $\alpha_3 \neq 0$, façamos $\alpha_1 = \lambda \alpha_3$ e $c_6(y) = \alpha_3 g(y)$ e então (5.31) se torna

$$-f(y, y') (2\lambda + 3y'g'(y)) + f_{y'}(y, y')(\lambda y' + (y')^2 g'(y)) + f_y(y, y') - (y')^3 g'''(y) = 0, \quad (5.32)$$

cujas soluções em $f(y, y')$ é dada por

$$f(y, y') = e^{\int_1^y A d\delta} \left(\int_1^y \frac{\exp \left(3\lambda\tau - \int_1^\tau A d\delta \right) (y')^3 g'''(\tau)}{\left(y' \int_1^y e^{\lambda\varepsilon} g'(\varepsilon) d\varepsilon + e^{y\lambda} - y' \int_1^\tau e^{\lambda\varepsilon} g'(\varepsilon) d\varepsilon \right)^3} d\tau + h(B) \right) \quad (5.33)$$

em que

$$A = 2\lambda + \frac{3e^{\lambda\delta} y' g'(\delta)}{y' \int_1^y e^{\lambda\varepsilon} g'(\varepsilon) d\varepsilon + e^{y\lambda} - y' \int_1^\delta e^{\lambda\varepsilon} g'(\varepsilon) d\varepsilon} \quad \text{e} \quad B = \int_1^y e^{\lambda\varepsilon} g'(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{e^{\lambda y}}{y'}.$$

Com isso, $Q = \alpha_3(1 + g(y)y' + \lambda xy')$, produz,

$$\xi = -(g(y) + \lambda x)\alpha_3, \quad \eta = \alpha_3, \quad \eta^{(1)} = (\lambda y' + g'(y)(y')^2)\alpha_3,$$

temos o seguinte gerador de simetria

$$X_1 = -(g(y) + \lambda x)\partial_x + \partial_y + (\lambda y' + g'(y)(y')^2)\partial_{y'},$$

Em contrapartida, para $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ a equação (5.31) se torna

$$\begin{aligned} & -f(y, y')(2\alpha_1 + 3y'c'_6(y)) + \\ & f_{y'}(y, y')(\alpha_1 y' + (y')^2 c'_6(y)) - (y')^3 c'''_6(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Se $c'_6(y) \neq 0$, temos que (5.34) produz $f(y, y')$ da forma $f(y, y') = g(y)(y')^3 + h(y)(y')^2$ que já foi abrangida no teorema 6. Considerando que $c'_6(y) = 0$, isto é, $c_6(y) = \alpha_4$ e (5.34) se torna

$$-\alpha_1 (2f(y, y') - y'f_{y'}(y, y')) = 0. \quad (5.35)$$

Como, $2f(y, y') - y'f_{y'}(y, y') = 0$ produz $f(y, y') = h(y)(y')^2$, já foi abordado no teorema 6, então $\alpha_1 = 0$ e para $f(y, y')$ geral, $Q = \alpha_4 y'$, isto é, temos um único gerador de simetria $X_1 = \partial_x$.

5.4 Para $n = 0$

Neste caso temos, $Q = (y')^2 c_1(x, y) + c_2(x, y) + y'c_3(x, y)$, que substituindo em (5.5) produz

$$4y'c_{1y} + c_{3y} + 2c_{1x} = 0, \quad (5.36)$$

isso implica $c_1 = c_1(x)$ e $c_3 = -2c'_1(x)y + c_4(x)$ e assim Q toma a forma

$$Q = c_1(x)(y')^2 + c_2(x, y) + (-2c'_1(x)y + c_4(x))y'. \quad (5.37)$$

Observe que, se $c_1(x) = 0$, a característica Q é linear na primeira derivada y' . Em [4] encontramos o seguinte resultado a respeito disso, adaptado ao nosso caso:

Teorema 12. [4] *Uma simetria de contato*

$$X = -Q_{y'}\partial_x + (Q - y'Q_{y'})\partial_y + Q_x + y'Q_y\partial_{y'}$$

é uma simetria de Lie se, e somente se, $Q_{y'y'} = 0$, ou seja, Q é linear em y' .

Portanto, se $c_1(x) = 0$ temos que as simetrias de contato encontradas serão simetrias de Lie. Em [21] é estudada a classificação de Lie, isto é, simetrias de Lie da equação $y''' = f(y, y')$ que é semelhante a este caso, a saber, quando $n = 0$. Portanto, visto

que já foram estudadas as simetrias de Lie da EKSG para $n = 0$, vamos desconsiderar todos os casos em que encontrarmos a característica Q linear na primeira derivada, fazendo uso do teorema 12 e de [21]. Substituindo (5.37) em (5.6) obtemos

$$2y'f(y, y')c_1(x) + y'(-4c_1''(x) + c_{2yy}(x, y)) + c_4''(x) - 2yc_1'''(x) + c_{2xy}(x, y) = 0. \quad (5.38)$$

Consideremos o Wronskiano W do conjunto $R = \{1, y', y'f(y, y')\}$, a saber

$$W = -2f_{y'}(y, y') - y'f_{y'y'}(y, y').$$

5.4.1 Para $W \neq 0$

Para $W \neq 0$, isto é, o conjunto R é LI, temos que (5.38) implica $c_1(x) = 0$, $c_{2yy}(x, y) = 0$ e $c_4''(x) + c_{2xy}(x, y) = 0$. Com isso, tiramos que $c_2(x, y) = (\alpha_1 - c_4'(x))y + c_6(x)$ e daí, $Q = y'c_4(x) + c_6(x) + y(\alpha_1 - c_4'(x))$, que é linear na primeira derivada, e como dito anteriormente, vamos desconsiderar este caso.

5.4.2 Para $W = 0$

Por outro lado, se $W = 0$, temos que $f(y, y')$ tem a forma $f(y, y') = -\frac{g(y)}{y'} + h(y)$. Vamos supor $g(y) \neq 0$, e se $g'(y) = 0$ então $h'(y) \neq 0$, caso contrário já foi abordado nos teoremas 5 e 6. Substituindo em (5.38), temos

$$-2g(y)c_1(x) + c_4''(x) - 2yc_1'''(x) + c_{2xy}(x, y) + y'(2h(y)c_1(x) - 4c_1''(x) + c_{2yy}(x, y)) = 0, \quad (5.39)$$

que produz

$$-2g(y)c_1(x) + c_4''(x) - 2yc_1'''(x) + c_{2xy}(x, y) = 0, \quad (5.40)$$

$$2h(y)c_1(x) - 4c_1''(x) + c_{2yy}(x, y) = 0. \quad (5.41)$$

Resolvendo (5.41) com relação a $c_2(x, y)$, obtemos

$$c_2(x, y) = c_5(x)y + c_6(x) + \int \int^y -2(h(\tau)c_1(x) - 2c_1''(x))d\tau^2,$$

que substituindo em (5.40) nos dá

$$-2g(y)c_1(x) + c_5'(x) + c_4''(x) - 2yc_1'''(x) + \int^y (-2h(\tau)c_1'(x) + 4c_1'''(x))d\tau = 0. \quad (5.42)$$

Derivando (5.42) duas vezes com relação a y , temos:

$$-h'(y)c_1'(x) + c_1(x)g''(y) = 0, \quad (5.43)$$

- Considere que $h'(y) = 0$, logo, $g'(y) \neq 0$ e com isso $h(y) = A = cte$. Em (5.43), $c_1(x)g''(y) = 0$.

– Seja $g''(y) = 0$, isso é, $g(y) = ay + b$ em que a e b são constantes e $a \neq 0$.

Nota 1. Seja a expressão para $c_2(x, y)$ para $h(y) = A$ dada por

$$c_2(x, y) = c_5(x)y + c_6(x) - c_1(x)Ay^2 + 2c_1''(x)y^2.$$

Voltando a (5.42), temos

$$-2bc_1(x) + c_5'(x) + c_4''(x) + y(-2ac_1(x) - 2Ac'(x) + 2c_1'''(x)) = 0,$$

que produz

$$c_1'''(x) - Ac'(x) - ac_1(x) = 0, \quad (5.44)$$

$$c_4''(x) + c_5'(x) - 2bc_1(x) = 0 \quad (5.45)$$

Olhando para (5.7) temos um identidade em y e y' que produz:

$$-ac_1(x) - 7Ac_1'(x) + 7c_1'''(x) = 0, \quad (5.46)$$

$$2bc_1'(x) + 2Ac_4'(x) + 3c_5''(x) + c_4'''(x) = 0, \quad (5.47)$$

$$2ac_1'(x) - 10Ac_1''(x) + 10c_1'''(x) = 0, \quad (5.48)$$

$$aAc_1(x) + A^2c_1'(x) + 4ac_1''(x) - 3Ac_1'''(x) + 2c_1^{(5)}(x) = 0, \quad (5.49)$$

$$2Abc_1(x) - 3ac_4'(x) - Ac_5'(x) + 2bc_1''(x) + c_5'''(x) = 0, \quad (5.50)$$

$$-bc_5(x) + ac_6(x) - 3bc_4'(x) - Ac_6'(x) + c_6'''(x) = 0. \quad (5.51)$$

De (5.44), temos $ac_1(x) = c_1'''(x) - Ac_1'(x)$. Substituindo em (5.46), obtemos $ac_1(x) = 0$ como $a \neq 0$ então $c_1(x) = 0$. Com isso, Q da forma $Q = c_2(x, y) + y'c_3(x, y)$, que é linear na primeira derivada e então paramos por aqui.

– Se $g''(y) \neq 0$, isso significa que (de (5.43)), $c_1(x) = 0$ e de (5.42) temos que $c_5(x) = -c_4'(x) + \alpha_1$. Com isso, $Q = y'c_4(x) + c_6(x) + y(\alpha_1 - c_4'(x))$ e novamente, temos Q linear na primeira derivada.

- Em contrapartida, seja $h'(y) \neq 0$. Substituindo Q e f na equação (5.7), encontraremos uma identidade em y' e observando o coeficiente de $(y')^3$, temos $c_1(x)h'(y) = 0$ o que implica $c_1(x) = 0$. Com isso, $c_3 = c_4(x)$, $c_2 = c_5(x)y + c_6(x)$ e então $Q = y'c_4(x) + c_5(x)y + c_6(x)$, mais uma vez, Q é linear na primeira derivada.

Por fim, excluindo-se os casos abordados nos teoremas 5 e 6, todas as simetrias de contato estudadas para o caso $n = 0$ são simetrias de Lie e para tal, utilizamos o fato de que em [21] encontra-se a classificação geral.

5.5 Para $n = -\frac{3}{2}$

Neste caso, a equação (5.11) é satisfeita e Q se torna

$$Q = c_1(x, y)\sqrt{y'} + c_2(y) + y'c_3(x).$$

Substituindo o que temos em (5.6) obtemos

$$-c_1(x, y)f(y, y') + 2(y')^2c_{1yy}(x, y) - 2c_{1xx}(x, y) = 0, \quad (5.52)$$

Note que o Wronskiano em y' do conjunto $S = \{1, (y')^2, f(y, y')\}$ é dado por

$$W = 2(y'f_{y'y'}(y, y') - f_{y'}(y, y')).$$

Se $W \neq 0$, isto é, se S é LI, então (5.52) produz $c_1(x, y) = 0$ daí $Q = c_2(y) + c_3(x)y'$. Substituindo em (5.7)

$$\begin{aligned} 2f(y, y')c_3'(x) + (y')^2c_2'''(y) - y'c_2(y)f_{y'}(y, y') - \\ y'c_3'(x)f_{y'}(y, y') - c_2(y)f_y(y, y') + c_3'''(x) = 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Derivando (5.53) com relação a x e a y' , temos

$$-c_3''(x)(y'f_{y'y'}(y, y') - f_{y'}(y, y')) = 0 \Rightarrow c_3''(x) = 0 \Rightarrow c_3 = \alpha_1 x + \alpha_2.$$

Com isso, (5.53) se torna

$$2\alpha_1 f(y, y') + (y')^2c_2'''(y) - \alpha_1 y'f_{y'}(y, y') - y'c_2'(y)f_{y'}(y, y') - c_2(y)f_y(y, y') = 0. \quad (5.54)$$

Se $c_2(y) \neq 0$, resolvendo (5.54) com relação a f , temos

$$f(y, y') = e^{4h(y)}g(y'e^{-2h(y)}h'(y)) + S(h(y))(y')^2, \quad (5.55)$$

em que $S(h(y))$ é o Schwarziano de $h(y)$ e $h'(y) = \frac{\alpha_1}{2c_2(y)}$. Dessa forma, $Q = c_2(y) + (\alpha_1 x + \alpha_2)y'$, e daí,

$$\xi = -(\alpha_1 x + \alpha_2), \quad \eta = \frac{\alpha_1}{2h'(y)}, \quad \eta^{(1)} = \alpha_1 y' \left(1 - \frac{h''(y)}{2h'(y)^2}\right),$$

que produz

$$X_1 = \partial_x \text{ e } X_2 = -x\partial_x + \frac{1}{2h'(y)}\partial_y + \left(1 - \frac{h''(y)}{2h'(y)^2}\right)y'\partial_{y'}.$$

Se $c_2(y) = 0$ então, (5.54) produz $\alpha_1 = 0$, caso contrário, teremos $f(y, y') = g(y)(y')^2$ que já foi abordado nos teoremas 5 e 6. Com isso, temos para f geral $Q = \alpha_2 y'$ que implica em $X = \partial_x$.

Por outro lado, se $W = 0$ então $f(y, y')$ toma a forma $f(y, y') = g(y)(y')^2 + h(y)$. Neste

caso, vamos considerar apenas $h'(y) \neq 0$ pois o caso de $h(y)$ constante já foi abordado no teorema 5. Substituindo em (5.52) obtemos

$$(y')^2(g(y)c_1(x, y) - 2c_{1yy}(x, y)) + (h(y)c_1(x, y) + 2c_{1xx}(x, y)) = 0, \quad (5.56)$$

que produz

$$h(y)c_1(x, y) + 2c_{1xx}(x, y) = 0, \quad (5.57)$$

$$g(y)c_1(x, y) - 2c_{1yy}(x, y) = 0, \quad (5.58)$$

Substituindo em (5.7), temos uma identidade em y' que produz

$$-2g(y)c_2'(y) - c_2(y)g'(y) + c_2'''(y) = 0, \quad (5.59)$$

$$2h(y)c_3'(x) - c_2(y)h'(y) + c_3'''(x) = 0, \quad (5.60)$$

$$-c_1(x, y)g'(y) - c_{1y}(x, y)g(y) + 2c_{1yyy}(x, y) = 0, \quad (5.61)$$

$$-g(y)c_{1x}(x, y) + 2c_{1xyy}(x, y) = 0, \quad (5.62)$$

$$h(y)c_{1x}(x, y) + 2c_{1xxx}(x, y) = 0, \quad (5.63)$$

$$-c_1(x, y)h'(y) + 3h(y)c_{1y}(x, y) + 6c_{1xxy}(x, y) = 0, \quad (5.64)$$

As equações (5.61), (5.62) e (5.63) seguem direto de (5.57) e (5.58). Substituindo (5.57) em (5.64) resulta em $-4c_1(x, y)h'(y) = 0$, que implica $c_1(x, y) = 0$ pois $h'(y) \neq 0$. Derivando (5.60) com relação a x e y , obtemos $h'(y)c_3''(x) = 0$ e isto significa que $c_3''(x) = 0$, ou seja, $c_3(x) = \alpha_1 x + \alpha_2$. Voltando à (5.60)

$$2\alpha_1 h(y) - c_2(y)h'(y) = 0,$$

que produz, $c_2 = \frac{2h(y)}{h'(y)}\alpha_1$ que em (5.59)

$$-\frac{2\alpha_1}{h'(y)^4} (h(y) (g'(y)h'(y))^3 - 2h''(y) (g(y)h'(y))^2 + 3h'''(y)h'(y) - 3h''(y)^2) + h^{(4)}(y)h'(y)^2 + h'(y)^2 (2h'(y) (g(y)h'(y) + h'''(y)) - 3h''(y)^2)) = 0. \quad (5.65)$$

Para $\alpha_1 = 0$, (5.65) é satisfeita e $Q = \alpha_2 y'$ produz $X_1 = \partial_x$. Para $\alpha_1 \neq 0$, temos que (5.65) produz

$$g(y) = k \left(\frac{h'(y)}{h(y)} \right)^2 - S(h(y))$$

em que $k = cte$ e $S(h(y))$ é a derivada de Schwarz. Com isso, $Q = \frac{2h(y)}{h'(y)}\alpha_1 + (\alpha_1 x + \alpha_2)y'$ daí,

$$\xi = -(\alpha_1 x + \alpha_2), \quad \eta = \frac{2h(y)}{h'(y)}\alpha_1, \quad \eta^{(1)} = \left(1 + 2 \frac{h'(y)^2 - h''(y)h(y)}{h'(y)^2} \right) \alpha_1 y',$$

que produz

$$X_1 = \partial_x, \quad \text{e} \quad X_2 = -x\partial_x + 2 \frac{h(y)}{h'(y)}\partial_y + \left(1 + 2 \frac{h'(y)^2 - h''(y)h(y)}{h'(y)^2} \right) y'\partial_{y'}.$$

5.6 Para $n \notin \left\{-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0\right\}$

Neste caso, temos $Q = (y')^{n+2}c_1(x, y) + c_2(x, y) + y'c_3(x, y)$ e de (5.12) temos que $c_2 = c_2(y)$, $c_3 = c_3(x)$ e $c_1 = \alpha_1$, logo, $Q = (y')^{n+2}\alpha_1 + c_2(y) + y'c_3(x)$. Substituindo em (5.6)

$$3\alpha_1(n+1)(n+2)(y')^{n+1}f(y, y') + (2n+3)(c_3''(x) + y'c_2''(y)) = 0. \quad (5.66)$$

Derivando (5.66) com relação a x , temos $c_3'''(x) = 0$ que implica $c_3 = \alpha_2x^2 + \alpha_3x + \alpha_4$, daí (5.66) se torna

$$3\alpha_1(n+1)(n+2)(y')^{n+1}f(y, y') + (2n+3)(2\alpha_2 + y'c_2''(y)) = 0. \quad (5.67)$$

Substituindo Q em (5.7), obtemos uma identidade em x que produz

$$\alpha_2(2f(y, y') - y'f_{y'}(y, y')) = 0, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(2f(y, y') - y'f_{y'}(y, y')) + (y')^2c_2'''(y) - y'c_2'(y)f_{y'}(y, y') + \\ \alpha_1(n+1)(y')^{n+2}f_y(y, y') - c_2(y)f_y(y, y') = 0. \end{aligned} \quad (5.69)$$

De (5.68), observe que $2f - y'f_{y'} = 0$ produz $f = g(y)(y')^2$ que é um caso já abordado no teorema 6. Vamos excluir este caso, logo, $\alpha_2 = 0$. Derivando (5.67) duas vezes com relação a y' , temos

$$\alpha_1(n(n+1)f(y, y') + 2y'(n+1)f_y(y, y') + (y')^2f_{y'y'}(y, y')) = 0. \quad (5.70)$$

Tome $A = n(n+1)f(y, y') + 2y'(n+1)f_y(y, y') + (y')^2f_{y'y'}(y, y')$, logo, (5.70) produz $\alpha_1A = 0$.

5.6.1 Para $A = 0$

Neste caso temos, $f(y, y') = (y')^{-(n+1)}g(y) + (y')^{-n}h(y)$ e $g(y) \neq 0$, o caso $g(y) = 0$ já foi abordado no teorema 6. Substituindo em (5.67)

$$3\alpha_1(n+1)(n+2)g(y) + y'(3\alpha_1(n+1)(n+2)h(y) + (2n+3)c_2''(y)) = 0. \quad (5.71)$$

Daí, temos o seguinte

$$\alpha_1g(y) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,$$

$$3\alpha_1(n+1)(n+2)h(y) + (2n+3)c_2''(y) = 0 \Rightarrow c_2''(y) = 0 \Rightarrow c_2 = \alpha_5y + \alpha_6.$$

Nos resta analisar (5.69), esse fornece uma identidade em y' que produz

$$(\alpha_5(n+1) + \alpha_3(n+3))g(y) - (\alpha_5y + \alpha_6)g'(y) = 0, \quad (5.72)$$

$$(\alpha_5n + \alpha_3(n+2))h(y) - (\alpha_5y + \alpha_6)h'(y) = 0. \quad (5.73)$$

Para $\alpha_5 \neq 0$, fazamos $\alpha_3 = \lambda_1 \alpha_5$ e $\alpha_6 = \lambda_2 \alpha_5$ em que λ_1 e λ_2 são constantes. Então (5.72) e (5.73) produzem $g(y) = k_1(\lambda_2 + y)^{(n+3)\lambda_1 + (n+1)}$ e $h(y) = k_2(\lambda_2 + y)^{(n+2)\lambda_1 + n}$ e $Q = \alpha_5(y + \lambda_2 + \lambda_1 xy') + \alpha_4 y'$ e então,

$$\xi = -\alpha_4 - \lambda_1 \alpha_5 x, \quad \eta = (\lambda_2 + y) \alpha_5, \quad \eta^{(1)} = (\lambda_1 + 1) \alpha_5 y'.$$

Assim, temos as seguintes simetrias

$$X_1 = \partial_x \quad \text{e} \quad X_2 = -\lambda_1 x \partial_x + (\lambda_2 + y) \partial_y + (\lambda_1 + 1) y' \partial_{y'}.$$

Por outro lado, se $\alpha_5 = 0$, as equações (5.72) e (5.73) se tornam

$$\alpha_3(n+3)g(y) - \alpha_6 g'(y) = 0, \tag{5.74}$$

$$\alpha_3(n+2)h(y) - \alpha_6 h'(y) = 0. \tag{5.75}$$

Se considerarmos $\alpha_6 \neq 0$ e com isso, tomando $\alpha_3 = \lambda \alpha_6$ e $\lambda = cte$, (5.74) e (5.75) produzem $g(y) = k_1 e^{(n+3)\lambda y}$ e $h(y) = k_2 e^{(n+2)\lambda y}$ e $Q = \alpha_6 + y'(\alpha_4 + \lambda \alpha_6 x)$, e então,

$$\xi = -\alpha_4 - \lambda \alpha_6 x, \quad \eta = \alpha_6, \quad \eta^{(1)} = \lambda \alpha_6 y'.$$

Assim, temos as seguintes simetrias

$$X_1 = \partial_x \quad \text{e} \quad X_2 = -\lambda x \partial_x + \partial_y + \lambda y' \partial_{y'}.$$

Se $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ então (5.74) implica $\alpha_3 = 0$ e temos $Q = \alpha_4 y'$, que produz apenas a simetria $X = \partial_x$.

5.6.2 Para $A \neq 0$

De (5.70), $\alpha_1 = 0$ e (5.67) implica $c_2''(y) = 0$, ou seja, $c_2 = \alpha_5 y + \alpha_6$. Substituindo em (5.69), temos

$$-2\alpha_3 f(y, y') + (\alpha_3 + \alpha_5) y' f_{y'}(y, y') + (\alpha_6 + \alpha_5 y) f_y(y, y') = 0, \tag{5.76}$$

Considerando que $\alpha_5 \neq 0$ e assim, escrevemos $\alpha_3 = \lambda_1 \alpha_5$ e $\alpha_6 = \lambda_2 \alpha_5$, a equação (5.76) implica em

$$f(y, y') = (y + \lambda_2)^{2\lambda_1} F(y'(y + \lambda_2)^{-(\lambda_1+1)})$$

Com isso, $Q = \alpha_5(y + \lambda_2 + \lambda_1 xy') + \alpha_4 y'$ que produz

$$X_1 = \partial_x \quad \text{e} \quad X_2 = -\lambda_1 x \partial_x + (\lambda_2 + y) \partial_y + (\lambda_1 + 1) y' \partial_{y'}.$$

Em contrapartida, se $\alpha_5 = 0$, (5.76) se torna

$$-2\alpha_3 f(y, y') + \alpha_3 y' f_{y'}(y, y') + \alpha_6 f_y(y, y') = 0, \tag{5.77}$$

Para $\alpha_6 \neq 0$ e $\alpha_3 = \lambda\alpha_6$, (5.77) nos dá $f(y, y') = e^{2\lambda y} F(y' e^{-y\lambda})$ e assim, $Q = \alpha_6 + y'(\alpha_4 + \lambda\alpha_6 x)$, e com isso,

$$X_1 = \partial_x \text{ e } X_2 = -\lambda x \partial_x + \partial_y + \lambda y' \partial_{y'}.$$

Se $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$, então (5.77) produz $\alpha_3 = 0$ e temos $Q = \alpha_4 y'$ dando apenas a simetria $X = \partial_x$.

Diante do que foi estudado neste capítulo, podemos unificar os resultados encontrados no teorema a seguir.

Teorema 13. *Excluindo-se os casos abordados nos teoremas 5 e 6, a EKSG admite, para dados n e $f(y, y')$, as simetrias de contato dadas na Tabela 2.*

Tabela 2 – Simetrias de contato EKSG

n	$f(y, y')$	Simetrias de contato
$n \in \mathbb{R}$	$f(y, y')$ caso geral	$X_1 = \partial_x$
$\in \{-2, -1\}$	$(y + \lambda_2)^{2\lambda_1} g(y'(y + \lambda_2)^{-(\lambda_1+1)}),$ $e^{2\lambda y} g(y' e^{-\lambda y}),$	$X_1, X_2 = -\lambda_1 x \partial_x + (y + \lambda_2) \partial_y + (\lambda_1 + 1) y' \partial_{y'}$ $X_1, X_3 = -\lambda x \partial_x + \partial_y + \lambda y' \partial_{y'}$
-3	da forma (5.30), da forma (5.33),	$X_4 = -(g(y) + (\lambda_1 - 1)x) \partial_x + (y + \lambda_2) \partial_y + (\lambda_1 y' + g'(y)(y')^2) \partial_{y'}$ $X_5 = -(g(y) + \lambda x) \partial_x + \partial_y + (\lambda y' + g'(y)(y')^2) \partial_{y'}$
$-\frac{3}{2}$	$e^{4h(y)} g\left(y' e^{-2h(y)} h'(y)\right) + S(h(y))(y')^2,$ $\left[k \left(\frac{h'(y)}{h(y)}\right)^2 - S(h(y))\right] (y')^2 + h(y),$	$X_1, X_6 = -x \partial_x + \frac{1}{2h'(y)} \partial_y + \left(1 - \frac{h''(y)}{2h'(y)^2}\right) y' \partial_{y'}$ $X_1, X_7 = -x \partial_x + 2 \frac{h(y)}{h'(y)} \partial_y + \frac{3h'(y)^2 - 2h''(y)h(y)}{h'(y)^2} y' \partial_{y'}$
$\notin \left\{-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0\right\}$	$(y')^{-n-1} (\lambda_2 + y)^{\lambda_1(n+2)+n} (k_1(\lambda_2 + y)^{\lambda_1+1} + k_2 y'),$ $(y')^{-(n+1)} k_1 e^{(n+3)\lambda y} + (y')^{-n} k_2 e^{(n+2)\lambda y},$ $(y + \lambda_2)^{2\lambda_1} F\left(y'(y + \lambda_2)^{-(\lambda_1+1)}\right),$ $e^{2\lambda y} F(y' e^{-y\lambda}),$	X_1, X_2 X_1, X_3 X_1, X_2 X_1, X_3
Nota: $h'(y) \neq 0$, $k_1 \neq 0$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ e k_2 são constantes.		

Neste capítulo, foi feito o cálculo das simetrias de contato da EKSG, excluindo-se os casos em que EKSG são linearizáveis pelos teoremas 5 e 6. Com esses cálculos, finalizamos a segunda parte desta tese. A seguir, na parte III, iniciaremos uma abordagem sobre sistemas de EDOs e equações diferenciais parciais, ainda no campo de simetrias de Sophus Lie.

Parte III

Sistemas de equações diferenciais e EDPs
envolvendo o Schwarziano

6 Sistemas de EDO envolvendo o Schwarziano

Neste capítulo, vamos estudar, ainda sobre as lentes de simetrias de Lie, sistemas de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem, especificamente, sistemas envolvendo equações do tipo das EKSGs, estudadas no capítulo 3, para funções f específicas. As simetrias de Lie são úteis pois, podem simplificar o sistema, pelo método de redução, podem ser usadas para validar modelagens matemáticas de equações diferenciais, etc. Inicialmente, vamos realizar uma abordagem teórica sobre o cálculo de simetrias de Lie de um sistema de EDO de ordem 3, que será dada na seção a seguir.

6.1 Simetrias de Lie de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de 3ª ordem

Em [50] é dada a condição de simetria para um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, no qual o sistema

$$\ddot{q}^i = \omega^i(x, q^j, \dot{q}^j); \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (6.1)$$

admite simetria de Lie, gerada por

$$X = \xi(x, q^j) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i(x, q^j) \frac{\partial}{\partial q^i} \quad (6.2)$$

se, e somente se,

$$[X^{(1)}, A] = X^{(1)}A - AX^{(1)} = \lambda A, \quad (6.3)$$

em que $\lambda = \lambda(x, q^j, \dot{q}^j)$ e A é o operador diferencial equivalente ao sistema (6.1)

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \omega^i(x, q^j, \dot{q}^j) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (6.4)$$

e $X^{(1)}$ é o prolongamento de X em (6.2) até a primeira derivada

$$X^{(1)} = \xi(x, q^j) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i(x, q^j) \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta^{i(1)}(x, q^j, \dot{q}^j) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \quad (6.5)$$

Nas equações (6.2), (6.4) e (6.5) temos a soma sobre o índice repetido i . Para simplificação de notação, para sistemas de equações diferenciais, utilizaremos o *ponto* acima de q^i representando a derivada de q^i com relação à variável independente t . Stephani [50] desenvolve a equação (6.3) e encontra a condição de simetria para o sistema (6.1) em termos de ξ e η^i .

Seguindo essa premissa, nossa proposta para esta seção é estender a condição de simetrias para sistemas de equações diferenciais de ordem três. Considere o seguinte sistema:

$$\ddot{q}^i = \omega^i(x, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j); \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (6.6)$$

e o gerador de simetria de Lie

$$X = \xi(x, q^j) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i(x, q^j) \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad (6.7)$$

com extensão até a segunda derivada dada por

$$X^{(2)} = \xi(x, q^j) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i(x, q^j) \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta^{i(1)}(x, q^j, \dot{q}^j) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \eta^{i(2)}(x, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}. \quad (6.8)$$

O sistema (6.6) admite simetria de Lie gerada por (6.7) se, e somente se,

$$[X^{(2)}, A] = X^{(2)}A - AX^{(2)} = \lambda A, \quad (6.9)$$

em que $\lambda = \lambda(x, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j)$ e A é o operador diferencial equivalente ao sistema (6.6)

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \omega^i(x, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}. \quad (6.10)$$

Observe que de (6.9), temos que:

$$\begin{aligned} & \left[\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta^{i(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \eta^{i(2)} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \omega^i \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \omega^i \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \right] \left[\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta^{i(1)} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \eta^{i(2)} \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \right] = \\ & \lambda \left[\frac{\partial}{\partial x} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \omega^i \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} \right], \end{aligned}$$

e, utilizando a propriedade distributiva e agrupando os termos em função das componentes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial q^i}$, $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ e $\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}$, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{d\xi}{dx} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\eta^{i(1)} - \frac{d\eta^i}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\eta^{i(2)} - \frac{d\eta^{i(1)}}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + (X^{(2)}\omega^i - A\eta^{i(2)}) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i} = \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \lambda \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \lambda \omega^i \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Comparando os termos da igualdade (6.11), observa-se da componente $\frac{\partial}{\partial x}$ que

$$\lambda = -\frac{d\xi}{dx}, \quad (6.12)$$

em que $\frac{d}{dx}$ é a derivada total com relação a x . Com isso, de $\frac{\partial}{\partial q^i}$ e $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ respectivamente, temos:

$$\eta^{i(1)} = \frac{d\eta^i}{dx} - \dot{q}^i \frac{d\xi}{dx} \quad \text{e} \quad \eta^{i(2)} = \frac{d\eta^{i(1)}}{dx} - \ddot{q}^i \frac{d\xi}{dx}. \quad (6.13)$$

Finalmente, a componente $\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^i}$ fornece

$$X^{(2)}\omega^i + \omega^i \frac{d\xi}{dx} - A\eta^{i(2)} = 0, \quad (6.14)$$

que nos dá a condição para que X em (6.7) seja simetria de Lie do sistema (6.6), visto que (6.12) e (6.13) estão inclusas no cálculo de (6.14). Expandindo (6.14) em termos de ξ e η^i , teremos (afim de simplificar a escrita, usaremos a seguinte notação: $_{,x} = \partial/\partial x$ e $_{,c} = \partial/\partial q^c$)

$$\begin{aligned} & 3(\xi_{,x} + \dot{q}^j \xi_{,j})\omega^i + \xi\omega^i_{,x} + \eta^l \omega^i_{,l} + (\eta^l_{,x} + \dot{q}^j \eta^l_{,j} - \dot{q}^l \xi_{,x} - \dot{q}^l \dot{q}^j \xi_{,j}) \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^l} + \\ & (\eta^l_{,xx} + \dot{q}^j \eta^l_{,xj} + \dot{q}^k \eta^l_{,xk} + \dot{q}^j \dot{q}^k \eta^l_{,jk} + \ddot{q}^k \eta^l_{,k} - 2\dot{q}^l \xi_{,x} - 2\dot{q}^j \dot{q}^l \xi_{,j} - \\ & \dot{q}^l \xi_{,xx} - \dot{q}^l \dot{q}^j \xi_{,xj} - \dot{q}^l \dot{q}^k \xi_{,xk} - \dot{q}^l \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,jk} - \dot{q}^l \ddot{q}^k \xi_{,k}) \frac{\partial \omega^i}{\partial \ddot{q}^l} - (\eta^i_{,l} - \dot{q}^i \xi_{,l})\omega^l \\ & - \eta^i_{,xxx} - \dot{q}^j \eta^i_{,xxj} - \dot{q}^k \eta^i_{,xxk} + \dot{q}^i \xi_{,xxx} - \ddot{q}^k \eta^i_{,xk} + 2\ddot{q}^i \xi_{,xx} - \dot{q}^j \dot{q}^k \eta^i_{,xjk} + 2\dot{q}^j \ddot{q}^i \xi_{,xj} + \\ & \dot{q}^i \dot{q}^j \xi_{,xxj} + \dot{q}^i \dot{q}^k \xi_{,xxk} + \dot{q}^i \ddot{q}^k \xi_{,xk} + \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,xjk} - \dot{q}^l \eta^i_{,xkl} - \dot{q}^j \dot{q}^l \eta^i_{,xjl} - \dot{q}^k \dot{q}^l \eta^i_{,xkl} + \\ & \dot{q}^i \dot{q}^l \xi_{,xkl} - \dot{q}^l \ddot{q}^i \eta^i_{,kl} + 2\dot{q}^l \ddot{q}^i \xi_{,xl} - \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \eta^i_{,jkl} + 2\dot{q}^j \dot{q}^l \ddot{q}^i \xi_{,jl} + \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^l \xi_{,xjl} + \\ & \dot{q}^i \dot{q}^k \dot{q}^l \xi_{,xkl} + \dot{q}^i \dot{q}^l \dot{q}^k \xi_{,kl} + \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \xi_{,jkl} - 2\dot{q}^l \eta^i_{,xl} + \ddot{q}^i \xi_{,xx} - \dot{q}^k \ddot{q}^l \eta^i_{,kl} - \dot{q}^j \ddot{q}^l \eta^i_{,jl} + \\ & 2\ddot{q}^i \dot{q}^l \xi_{,l} + \dot{q}^j \ddot{q}^i \xi_{,xj} + \dot{q}^i \ddot{q}^l \xi_{,xl} + \dot{q}^k \ddot{q}^i \xi_{,xk} + \dot{q}^k \ddot{q}^l \xi_{,xl} + \ddot{q}^i \ddot{q}^k \xi_{,k} \\ & + \dot{q}^j \dot{q}^k \ddot{q}^i \xi_{,jk} + \dot{q}^i \dot{q}^k \ddot{q}^l \xi_{,kl} + \dot{q}^i \dot{q}^j \ddot{q}^l \xi_{,jl} = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

trocando os índices mudos, obtemos¹

$$\begin{aligned} & 3(\xi_{,x} + \dot{q}^j \xi_{,j})\omega^i + \xi\omega^i_{,x} + \eta^l \omega^i_{,l} + (\eta^l_{,x} + \dot{q}^j \eta^l_{,j} - \dot{q}^l \xi_{,x} - \dot{q}^l \dot{q}^j \xi_{,j}) \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^l} + \\ & (\eta^l_{,xx} + 2\dot{q}^j \eta^l_{,xj} + \dot{q}^j \dot{q}^k \eta^l_{,jk} + \ddot{q}^k \eta^l_{,k} - 2\dot{q}^l \xi_{,x} - 2\dot{q}^j \dot{q}^l \xi_{,j} - \dot{q}^l \xi_{,xx} - 2\dot{q}^l \dot{q}^j \xi_{,xj} - \\ & \dot{q}^l \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,jk} - \dot{q}^l \ddot{q}^k \xi_{,k}) \frac{\partial \omega^i}{\partial \ddot{q}^l} - (\eta^i_{,l} - \dot{q}^i \xi_{,l})\omega^l - \eta^i_{,xxx} - 3\dot{q}^j \eta^i_{,xxj} + \\ & \dot{q}^i \xi_{,xxx} - 3\ddot{q}^k \eta^i_{,xk} + 3\ddot{q}^i \xi_{,xx} - 3\dot{q}^j \dot{q}^k \eta^i_{,xjk} + 6\dot{q}^j \ddot{q}^i \xi_{,xj} + 3\dot{q}^i \dot{q}^j \xi_{,xxj} + \\ & 3\dot{q}^i \ddot{q}^k \xi_{,xk} + 3\dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,xjk} - 3\dot{q}^l \ddot{q}^i \eta^i_{,kl} - \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \eta^i_{,jkl} + 3\dot{q}^j \dot{q}^l \ddot{q}^i \xi_{,jl} + 3\dot{q}^i \dot{q}^l \dot{q}^k \xi_{,kl} + \\ & \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \xi_{,jkl} + 3\ddot{q}^i \ddot{q}^l \xi_{,l} = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

¹ A equação (6.16) é uma generalização da fórmula semelhante de Stephani [50] para sistemas de equações diferenciais de ordem 2.

Teorema 14. *O sistema (6.16) determina as componentes $\xi(x, q^j)$ e $\eta^i(x, q^j)$ do gerador de simetria de Lie X em (6.7) em que um conjunto de equações ω^i em (6.6) é dado.*

6.2 Sistemas de EDO envolvendo o Schwarziano

Nesta seção, vamos encontrar as simetrias de Lie admitidas por dois sistemas de duas equações diferenciais de terceira ordem, utilizando os cálculos feitos na seção anterior.

6.2.1 Sistema de EDO 1 do tipo da EKSG

O primeiro sistema a ser estudado, envolve equações semelhantes a um caso particular da EKSG (2.66), dado por

$$\begin{cases} S(u) = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 = v^r, \\ S(v) = \frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{v_{xx}}{v_x} \right)^2 = u^s, \end{cases} \quad (6.17)$$

com $r, s \in \mathbb{R}$, $u^s = |u|^{s-1}u$ e $v^r = |v|^{r-1}v$. Este sistema pode ser chamado sistema do tipo Lane-Emden envolvendo o Schwarziano.

Observação 2. *O sistema de Lane-Emden*

$$\begin{cases} -\Delta u = v^r, \\ -\Delta v = u^s, \end{cases}$$

generaliza a equação de Lane-Emden

$$\Delta w + w^p = 0,$$

cuja forma radial descreve uma estrela como bola de gás condensado, vide [7] e [10].

Teorema 15. *O Sistema de equações (6.17) admite as simetrias de Lie dadas na Tabela 3.*

Tabela 3 – Simetrias de Lie do sistema (6.17)

Valores de $r, s \in \mathbb{R}$	Simetrias de Lie
$r \neq 0, s \neq 0$	$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x - \frac{2}{s}u\partial_u - \frac{2}{r}v\partial_v$
$r \neq 0, s = 0$	$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_u, X_3 = u\partial_u, X_4 = u^2\partial_u$
$r = 0, s \neq 0$	$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_v, X_3 = v\partial_v, X_4 = v^2\partial_v$

Demonstração. Inicialmente, vamos supor $u = q^1$ e $v = q^2$ para fins de substituição na condição de simetria (6.16). Note que

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} + (q^2)^r \dot{q}^1, \quad \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} + (q^1)^s \dot{q}^2 \\ \omega^i_{,x} &= 0 \quad e \quad \omega^i_{,i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \quad \omega^1_{,2} = r(q^2)^{r-1} \dot{q}^1, \quad \omega^2_{,1} = s(q^1)^{s-1} \dot{q}^2, \\ \frac{\partial \omega^1}{\partial \dot{q}^1} &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right)^2 + (q^2)^r, \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial \dot{q}^2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right)^2 + (q^1)^s, \\ \frac{\partial \omega^1}{\partial \dot{q}^2} &= \frac{\partial \omega^2}{\partial \dot{q}^1} = \frac{\partial \omega^1}{\partial \ddot{q}^2} = \frac{\partial \omega^2}{\partial \ddot{q}^1} = 0, \quad \frac{\partial \omega^1}{\partial \ddot{q}^1} = 3 \frac{\dot{q}^1}{\dot{q}^1}, \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial \ddot{q}^2} = 3 \frac{\dot{q}^2}{\dot{q}^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Substituindo os dados em (6.18) na condição de simetria (6.16), obtêm-se

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} + 3(\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) (q^2)^r \dot{q}^1 + \\ & \quad \frac{9}{2} (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} + \\ & \quad 3(\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) (q^1)^s \dot{q}^2 + \eta^1 s (q^1)^{s-1} \dot{q}^2 + \eta^2 r (q^2)^{r-1} \dot{q}^1 + \\ & \quad (\eta^1_{,x} + \dot{q}^1 \eta^1_{,1} + \dot{q}^2 \eta^1_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,x} - (\dot{q}^1)^2 \xi_{,1} - \dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,2}) \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right)^2 + (q^2)^r \right) + \\ & \quad (\eta^2_{,x} + \dot{q}^1 \eta^2_{,1} + \dot{q}^2 \eta^2_{,2} - \dot{q}^2 \xi_{,x} - (\dot{q}^2)^2 \xi_{,2} - \dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,1}) \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right)^2 + (q^1)^s \right) + \\ & \quad (\eta^1_{,xx} + 2\dot{q}^1 \eta^1_{,x1} + 2\dot{q}^2 \eta^1_{,x2} + (\dot{q}^1)^2 \eta^1_{,11} + 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \eta^1_{,12} + (\dot{q}^2)^2 \eta^1_{,22} + \ddot{q}^1 \eta^1_{,1} + \\ & \quad \ddot{q}^2 \eta^1_{,2} - 2\ddot{q}^1 \xi_{,x} - 3\ddot{q}^1 \dot{q}^1 \xi_{,1} - 2\ddot{q}^2 \dot{q}^1 \xi_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,xx} - 2(\dot{q}^1)^2 \xi_{,x1} - 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,x2} - \dot{q}^1 (\dot{q}^2)^2 \xi_{,22} - \\ & \quad \dot{q}^1 \ddot{q}^2 \xi_{,2} - (\dot{q}^1)^3 \xi_{,11} - 2(\dot{q}^1)^2 \dot{q}^2 \xi_{,12}) \left(3 \frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right) + (\eta^2_{,xx} + 2\dot{q}^1 \eta^2_{,x1} + 2\dot{q}^2 \eta^2_{,x2} + \\ & \quad (\dot{q}^1)^2 \eta^2_{,11} + 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \eta^2_{,12} + (\dot{q}^2)^2 \eta^2_{,22} + \ddot{q}^1 \eta^2_{,1} + \ddot{q}^2 \eta^2_{,2} - 2\ddot{q}^2 \xi_{,x} - 2\dot{q}^1 \ddot{q}^2 \xi_{,1} - 3\dot{q}^2 \ddot{q}^2 \xi_{,2} - \\ & \quad \dot{q}^2 \xi_{,xx} - 2(\dot{q}^2)^2 \xi_{,x2} - 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,x1} - (\dot{q}^1)^2 \dot{q}^2 \xi_{,11} - \dot{q}^2 \dot{q}^1 \xi_{,1} - (\dot{q}^1)^3 \xi_{,22} - \\ & \quad 2\dot{q}^1 (\dot{q}^2)^2 \xi_{,12}) \left(3 \frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right) + (\eta^1_{,1} - \dot{q}^1 \xi_{,1} + \eta^2_{,1} - \dot{q}^2 \xi_{,1}) \left(-\frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} - (q^2)^r \dot{q}^1 \right) + \\ & \quad (\eta^1_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,2} + \eta^2_{,2} - \dot{q}^2 \xi_{,2}) \left(-\frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} - (q^1)^s \dot{q}^2 \right) - \eta^i_{,xxx} - 3\dot{q}^j \eta^i_{,xxj} + \\ & \quad \dot{q}^i \xi_{,xxx} - 3\ddot{q}^k \eta^i_{,xk} + 3\ddot{q}^i \xi_{,xx} - 3\dot{q}^j \dot{q}^k \eta^i_{,xjk} + 6\dot{q}^j \ddot{q}^i \xi_{,xj} + 3\dot{q}^i \dot{q}^j \xi_{,xxj} + 3\dot{q}^i \ddot{q}^k \xi_{,xk} + \\ & \quad 3\dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,xjk} - 3\dot{q}^l \ddot{q}^k \eta^i_{,kl} - \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \eta^i_{,jkl} + 3\dot{q}^j \dot{q}^l \ddot{q}^i \xi_{,jl} + 3\dot{q}^i \dot{q}^l \ddot{q}^k \xi_{,kl} + \\ & \quad \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \xi_{,ijkl} + 3\ddot{q}^i \ddot{q}^l \xi_{,il} = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Atentando-se em (6.19) para os termos $\left(\frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right)^2$ e $\left(\frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right)^2$, respectivamente, obtêm-se que $\eta^1_{,x} = 0$ e $\eta^2_{,x} = 0$ que implica, $\eta^1 = \eta^1(q^i)$ e $\eta^2 = \eta^2(q^i)$, com isso, de $\frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1}$ e $\frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2}$ encontramos $\eta^2_{,1} = 0$ e $\eta^1_{,2} = 0$ e daí, $\eta^1 = \eta^1(q^1)$ e $\eta^2 = \eta^2(q^2)$, dos termos $(\ddot{q}^1)^2$ e $(\ddot{q}^2)^2$ temos que $\xi_{,1} = \xi_{,2} = 0$ logo, $\xi = \xi(x)$.

Finalmente, utilizando-se do que foi encontrado, a equação (6.19) será reduzida a

$$(\xi_{,xxx} + 2\xi_{,x}(q^2)^r + \eta^2 r(q^2)^{r-1})\dot{q}^1 + (\xi_{,xxx} + 2\xi_{,x}(q^1)^s + \eta^1 s(q^1)^{s-1})\dot{q}^2 + \eta^1_{,111}(\dot{q}^1)^3 + \eta^2_{,222}(\dot{q}^2)^3 = 0, \quad (6.20)$$

que dos termos $\dot{q}^1, \dot{q}^2, (\dot{q}^1)^3$ e $(\dot{q}^2)^3$ se obtêm

$$\xi_{,xxx} + 2\xi_{,x}(q^2)^r + \eta^2 r(q^2)^{r-1} = 0, \quad (6.21)$$

$$\xi_{,xxx} + 2\xi_{,x}(q^1)^s + \eta^1 s(q^1)^{s-1} = 0, \quad (6.22)$$

$$\eta^1_{,111} = 0, \quad (6.23)$$

$$\eta^2_{,222} = 0. \quad (6.24)$$

Derivando (6.21) com relação a x e em seguida, com relação a q^2 , tem-se:

$$\xi_{,xx} r(q^2)^{r-1} = 0 \implies \xi_{,xx} = 0 \text{ ou } r = 0. \quad (6.25)$$

- Se $r \neq 0$, então $\xi_{,xx} = 0$, o que implica que

$$\xi = \alpha_2 x + \alpha_1, \quad (6.26)$$

em que $\alpha_1, \alpha_2 = cte$. Substituindo (6.26) em (6.21) e dividindo a equação por $(q^2)^{r-1}$, têm-se:

$$r\eta^2 + 2\alpha_2 q^2 = 0,$$

logo,

$$\eta^2 = -\alpha_2 \frac{2}{r} q^2, \quad (6.27)$$

e (6.24) está satisfeita. Substituindo (6.26) e (6.27) em (6.22) e dividindo por $(q^1)^{s-1}$, obtém-se

$$s\eta^1 + 2\alpha_2 q^1 = 0, \quad (6.28)$$

- Se $s \neq 0$,

$$\eta^1 = -\alpha_2 \frac{2}{s} q^1, \quad (6.29)$$

e (6.23) está satisfeita. Portanto, o sistema (6.17) para $r, s \neq 0$ admite o grupo de Lie de 2 parâmetros gerado por (voltando para as variáveis u e v):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{s} u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{2}{r} v \frac{\partial}{\partial v}. \quad (6.30)$$

- Se $s = 0$, então (6.28) implica que $\alpha_2 = 0$ e então $\eta^2 = 0$. De (6.23) obtém-se:

$$\eta^1 = \alpha_5 (q^2)^2 + \alpha_4 q^2 + \alpha_3, \quad (6.31)$$

em que $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 = cte$. Então, temos que o sistema (6.17) para $r \neq 0$ e $s = 0$ admite um grupo de simetria de Lie de 4 parâmetros gerados por (voltando para as variáveis u e v):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, X_3 = u \frac{\partial}{\partial u} \text{ e } X_4 = u^2 \frac{\partial}{\partial u}. \quad (6.32)$$

- Se $r = 0$, então temos que $s \neq 0$ pois, caso contrário teremos em (6.17) duas equações KS2 independentes. Derivando (6.22) com relação a x e em seguida, com relação a q^1 , tem-se:

$$\xi_{,xx} s(q^1)^{s-1} = 0 \implies \xi_{,xx} = 0 \implies \xi = \alpha_2 x + \alpha_1,$$

com $\alpha_1, \alpha_2 = cte$. Substituindo em (6.21) e utilizando o fato que $r = 0$, tem-se que $\xi_{,x} = \alpha_2 = 0$. Logo, substituindo o que temos em (6.22), concluímos que $\eta^1 = 0$, satisfazendo assim (6.23). Finalmente, da equação (6.24) obtemos:

$$\eta^1 = \alpha_5 (q^1)^2 + \alpha_4 q^1 + \alpha_3, \quad (6.33)$$

em que $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 = cte$. Então, o sistema (6.17) para $r = 0$ e $s \neq 0$ admite um grupo de simetria de Lie de 4 parâmetros gerados por (voltando para as variáveis u e v):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial v}, X_3 = v \frac{\partial}{\partial v} \text{ e } X_4 = v^2 \frac{\partial}{\partial v}. \quad (6.34)$$

□

6.2.2 Sistema de EDO 2 do tipo da EKSG

O segundo sistema a ser estudado, envolve equações semelhantes à equação (2.65), dado por

$$\begin{cases} S(u) = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 = v^r (u_x)^2, \\ S(v) = \frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{v_{xx}}{v_x} \right)^2 = u^s (v_x)^2, \end{cases} \quad (6.35)$$

com $r, s \in \mathbb{R}$.

Teorema 16. *O Sistema de equações (6.35) admite as simetrias de Lie dadas na tabela 4.*

Tabela 4 – Simetrias de Lie do sistema (6.35)

Valores de $r, s \in \mathbb{R}$	Simetrias de Lie
$r \neq 0, s \neq \left\{0, \frac{4}{r}\right\}$	$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x, X_3 = x^2\partial_x$
$r \neq 0, s = \frac{4}{r}$	$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x, X_3 = x^2\partial_x, X_4 = u\partial_u - \frac{2}{r}\partial_v$
$r \neq 0, s = 0$	$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x, X_3 = x^2\partial_x, X_4 = \partial_u$
$r = 0, s \neq 0$	$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x, X_3 = x^2\partial_x, X_4 = \partial_v$

Demonstração. Analogamente ao Teorema 15, suponha $u = q^1$ e $v = q^2$ para fins de substituição na condição de simetria (6.16). Note que

$$\omega^1 = \frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} + (q^2)^r (\dot{q}^1)^3, \quad \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} + (q^1)^s (\dot{q}^2)^3, \quad (6.36)$$

Substituindo (6.36) na condição de simetria (6.16), obtêm-se

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} + 3 (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) (q^2)^r (\dot{q}^1)^3 + \\ & \frac{9}{2} (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} + \\ & 3 (\xi_{,x} + \dot{q}^1 \xi_{,1} + \dot{q}^2 \xi_{,2}) (q^1)^s (\dot{q}^2)^3 + \eta^1 s (q^1)^{s-1} (\dot{q}^2)^3 + \eta^2 r (q^2)^{r-1} (\dot{q}^1)^3 + \\ & (\eta^1_{,x} + \dot{q}^1 \eta^1_{,1} + \dot{q}^2 \eta^1_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,x} - (\dot{q}^1)^2 \xi_{,1} - \dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,2}) \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right)^2 + 3 (q^2)^r (\dot{q}^1)^2 \right) + \\ & (\eta^2_{,x} + \dot{q}^1 \eta^2_{,1} + \dot{q}^2 \eta^2_{,2} - \dot{q}^2 \xi_{,x} - (\dot{q}^2)^2 \xi_{,2} - \dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,1}) \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right)^2 + 3 (q^1)^s (\dot{q}^2)^2 \right) + \\ & (\eta^1_{,xx} + 2\dot{q}^1 \eta^1_{,x1} + 2\dot{q}^2 \eta^1_{,x2} + (\dot{q}^1)^2 \eta^1_{,11} + 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \eta^1_{,12} + (\dot{q}^2)^2 \eta^1_{,22} + \ddot{q}^1 \eta^1_{,1} + \\ & \ddot{q}^2 \eta^1_{,2} - 2\ddot{q}^1 \xi_{,x} - 3\dot{q}^1 \ddot{q}^1 \xi_{,1} - 2\dot{q}^2 \ddot{q}^1 \xi_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,xx} - 2(\dot{q}^1)^2 \xi_{,x1} - 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,x2} - \\ & \dot{q}^1 (\dot{q}^2)^2 \xi_{,22} - \dot{q}^1 \ddot{q}^2 \xi_{,2} - (\dot{q}^1)^3 \xi_{,11} - 2(\dot{q}^1)^2 \dot{q}^2 \xi_{,12}) \left(3 \frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right) + (\eta^2_{,xx} + 2\dot{q}^1 \eta^2_{,x1} + \\ & 2\dot{q}^2 \eta^2_{,x2} + (\dot{q}^1)^2 \eta^2_{,11} + 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \eta^2_{,12} + (\dot{q}^2)^2 \eta^2_{,22} + \ddot{q}^1 \eta^2_{,1} + \ddot{q}^2 \eta^2_{,2} - 2\ddot{q}^2 \xi_{,x} - \\ & 2\dot{q}^1 \ddot{q}^2 \xi_{,1} - 3\dot{q}^2 \ddot{q}^2 \xi_{,2} - \dot{q}^2 \xi_{,xx} - 2(\dot{q}^2)^2 \xi_{,x2} - 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 \xi_{,x1} - (\dot{q}^1)^2 \dot{q}^2 \xi_{,11} - \dot{q}^2 \ddot{q}^1 \xi_{,1} - \\ & (\dot{q}^1)^3 \xi_{,22} - 2\dot{q}^1 (\dot{q}^2)^2 \xi_{,12}) \left(3 \frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right) + \\ & (\eta^1_{,1} - \dot{q}^1 \xi_{,1} + \eta^2_{,1} - \dot{q}^2 \xi_{,1}) \left(-\frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1} - (q^2)^r (\dot{q}^1)^3 \right) + \\ & (\eta^1_{,2} - \dot{q}^1 \xi_{,2} + \eta^2_{,2} - \dot{q}^2 \xi_{,2}) \left(-\frac{3}{2} \frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2} - (q^1)^s (\dot{q}^2)^3 \right) - \\ & \eta^i_{,xxx} - 3\dot{q}^j \eta^i_{,xxj} + \dot{q}^i \xi_{,xxx} - 3\ddot{q}^k \eta^i_{,xk} + 3\ddot{q}^i \xi_{,xx} - 3\dot{q}^j \dot{q}^k \eta^i_{,xjk} + \\ & 6\dot{q}^j \ddot{q}^i \xi_{,xj} + 3\dot{q}^i \dot{q}^j \xi_{,xxj} + 3\dot{q}^i \dot{q}^k \xi_{,xk} + 3\dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \xi_{,xjk} - 3\dot{q}^l \ddot{q}^k \eta^i_{,kl} - \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \eta^i_{,jkl} + \\ & 3\dot{q}^j \dot{q}^l \ddot{q}^i \xi_{,jl} + 3\dot{q}^i \dot{q}^l \ddot{q}^k \xi_{,kl} + \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l \xi_{,jkl} + 3\ddot{q}^i \ddot{q}^l \xi_{,l} = 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Visto que da condição de simetria (6.19) do exemplo anterior e a equação (6.37) os coeficientes dos termos $\left(\frac{\ddot{q}^1}{\dot{q}^1} \right)^2$, $\left(\frac{\ddot{q}^2}{\dot{q}^2} \right)^2$, $\frac{(\ddot{q}^1)^2}{\dot{q}^1}$, $\frac{(\ddot{q}^2)^2}{\dot{q}^2}$, $(\ddot{q}^1)^2$ e $(\ddot{q}^2)^2$ não se alteram, obtemos analogamente que :

$$\eta^1 = \eta^1(q^1), \quad \eta^2 = \eta^2(q^2) \quad \text{e} \quad \xi = \xi(x). \quad (6.38)$$

Desse modo, utilizando-se de (6.38), a equação (6.37) será reduzida a

$$[\eta^2 r (q^2)^{r-1} + 2\eta^1_{,1} (q^2)^r - \eta^1_{,111}] (\dot{q}^1)^3 + \eta^1 s (q^1)^{s-1} + 2\eta^2_{,2} (q^1)^s - \eta^2_{,222}] (\dot{q}^2)^3 + \quad (6.39)$$

$$\xi_{,xxx} \dot{q}^1 + \xi_{,xxx} \dot{q}^2 = 0,$$

que dos termos $\dot{q}^1$ e $\dot{q}^2$ se obtém

$$\xi_{,xxx} = 0 \implies \xi = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3, \quad (6.40)$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = cte$. Dos termos, $(\dot{q}^1)^3$ e $(\dot{q}^2)^3$ temos o seguinte:

$$\eta^2 r (q^2)^{r-1} + 2\eta^1_{,1} (q^2)^r - \eta^1_{,111} = 0, \quad (6.41)$$

$$\eta^1 s (q^1)^{s-1} + 2\eta^2_{,2} (q^1)^s - \eta^2_{,222} = 0. \quad (6.42)$$

Derivando a equação (6.41) com relação a q^1 e em seguida, com relação a q^2 , temos

$$\eta^1_{,11} r (q^2)^{r-1} = 0 \implies r = 0 \text{ ou } \eta^1_{,11} = 0.$$

- Se $r \neq 0$ então

$$\eta^1_{,11} = 0 \implies \eta^1 = \alpha_4 q^1 + \alpha_5, \quad (6.43)$$

em que $\alpha_4, \alpha_5 = cte$. Substituindo em (6.41) e dividindo a equação por $(q^2)^{r-1}$, obtemos

$$\eta^2 = -\frac{2}{r} \alpha_4 q^2. \quad (6.44)$$

Substituindo (6.43) e (6.44) em (6.42) e dividindo a equação resultante por $(q^1)^{r-1}$, obtemos:

$$\left(s - \frac{4}{r}\right) \alpha_4 + \alpha_5 s = 0. \quad (6.45)$$

- Se $s \neq 0$

◊ Se $s \neq \frac{4}{r}$ então de (6.45) temos que $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, o que implica $\eta^1 = \eta^2 = 0$.

Portanto, o sistema (6.35) para $r \neq 0$ e $s \neq \left\{0, \frac{4}{r}\right\}$ admite grupo de Lie de 3 parâmetros gerado por:

$$X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } X_3 = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.46)$$

◊ Se $s = \frac{4}{r}$ então de (6.45) conclui-se que $\alpha_5 = 0$, logo

$$\begin{cases} \xi = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3, \\ \eta^1 = \alpha_4 q^1, \\ \eta^2 = -\frac{2}{r} \alpha_4 q^2, \end{cases}$$

que produz um grupo de Lie de 4 parâmetros gerados por X_1, X_2, X_3 em (6.46) adicionado de (em termos de u e v)

$$X_4 = u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{2}{r} v \frac{\partial}{\partial v}. \quad (6.47)$$

◦ Se $s = 0$ em (6.45) então $\alpha_4 = 0$ e com isso $\eta^1 = \alpha_5$ e $\eta^2 = 0$, logo o sistema (6.35) para $r \neq 0$ e $s = 0$ admite grupo de Lie de 4 parâmetros gerados por X_1, X_2, X_3 em (6.46) adicionado de (em termos de u e v)

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial u}. \quad (6.48)$$

- Seja $r = 0$ então temos que $s \neq 0$ pois, caso contrário teremos em (6.35) duas equações KS1 independentes. Derivando (6.42) com relação a q^1 e em seguida com relação a q^2 , como $s \neq 0$ então

$$\eta^2_{,22} = 0 \implies \eta^2 = \alpha_4 q^2 + \alpha_5, \quad (6.49)$$

em que $\alpha_4, \alpha_5 = cte$. Substituindo em (6.42) obtém-se

$$\eta^1 = -\frac{2}{s}\alpha_4 q^1.$$

Finalmente, substituindo o que temos em (6.41), visto que $r = 0$, obtemos $\alpha_4 = 0$ e portanto, o sistema (6.35) para $r = 0$ e $s \neq 0$ admite grupo de Lie de 4 parâmetros gerados por X_1, X_2, X_3 em (6.46) adicionado de (em termos de u e v)

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial v}. \quad (6.50)$$

□

6.3 Sistema gerais de EDOs de terceira ordem envolvendo o Schwarziano admitindo $sl(2, \mathbb{R})$

No estudo de simetrias de Lie de equações diferenciais, temos que, dada uma equação diferencial, podemos obter seus respectivos geradores de simetrias de Lie. Por outro lado, a partir de geradores de simetrias de Lie dados, podemos especificar as equações que admitem tais operadores. Em [8], mostramos que a equação (2.65)

$$S(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y)(y')^2$$

é a equação mais geral admitindo a álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ gerada por $Y_1 = \partial_x, Y_2 = x\partial_x, Y_3 = x^2\partial_x$, em que x é a variável independente da equação. O mesmo pode ser feito para sistemas de equações diferenciais. Dessa forma, vamos buscar o sistema mais geral da forma

$$\begin{cases} u_{xxx} = F(x, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \\ v_{xxx} = G(x, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \end{cases} \quad (6.51)$$

admitindo a álgebra $sl(2, \mathbb{R})$ gerada pelos mesmos geradores citados anteriormente e chegaremos ao seguinte resultado:

Teorema 17. *O sistema de terceira ordem da forma (6.51) mais geral admitindo a álgebra $sl(2, \mathbb{R}) = \text{Span} \{Y_1 = \partial_x, Y_2 = x\partial_x, Y_3 = x^2\partial_x\}$ envolve a derivada de Schwarz e é dado por:*

$$\begin{cases} S(u) = f\left(u, v, \frac{v_x}{u_x}, \frac{u_x v_{xx} - v_x u_{xx}}{(u_x)^3}\right) (u_x)^2, \\ S(v) = g\left(u, v, \frac{u_x}{v_x}, \frac{v_x u_{xx} - u_x v_{xx}}{(v_x)^3}\right) (v_x)^2. \end{cases} \quad (6.52)$$

Demonstração. Primeiramente, aplicando $Y_1^{(3)} = \frac{\partial}{\partial x}$ ao sistema (6.51) teremos que $F_x = G_x = 0$, o que implica que o sistema não depende explicitamente da variável independente x . Daí,

$$\begin{cases} u_{xxx} = F(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \\ v_{xxx} = G(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \end{cases} \quad (6.53)$$

Para $Y_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$ temos, $Y_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 2u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 3u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - v_x\frac{\partial}{\partial v_x} - 2v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_{xx}} - 3v_{xxx}\frac{\partial}{\partial v_{xxx}}$. Fazendo

$$Y_2^{(3)}(u_{xxx} - F) \Big|_{(6.53)} = 0,$$

obtém-se a seguinte EDP:

$$-3F + u_x F_{u_x} + 2u_{xx} F_{u_{xx}} + v_x F_{v_x} + 2v_{xx} F_{v_{xx}} = 0 \quad (6.54)$$

que resolvendo nos dá $a_1 = \frac{u_{xx}}{(u_x)^2}, b_1 = \frac{v_x}{u_x}, c_1 = \frac{v_{xx}}{(u_x)^2}, d_1 = \frac{F}{(u_x)^3}$, e, portanto, a solução da EDP (6.54) é

$$F = (u_x)^3 H(u, v, a_1, b_1, c_1).$$

Analogamente,

$$Y_2^{(3)}(v_{xxx} - G) \Big|_{(6.53)} = 0,$$

nos dá

$$-3G + u_x G_{u_x} + 2u_{xx} G_{u_{xx}} + v_x G_{v_x} + 2v_{xx} G_{v_{xx}} = 0, \quad (6.55)$$

que resolvendo nos dá $a_2 = \frac{v_{xx}}{(v_x)^2}, b_2 = \frac{u_x}{v_x}, c_2 = \frac{u_{xx}}{(v_x)^2}, d_1 = \frac{G}{(v_x)^3}$, e portanto a solução da EDP (6.54) é

$$G = (v_x)^3 I(u, v, a_2, b_2, c_2).$$

Desse modo, (6.53) se reduz à:

$$\begin{cases} u_{xxx} = (u_x)^3 H(u, v, a_1, b_1, c_1), \\ v_{xxx} = (v_x)^3 I(u, v, a_2, b_2, c_2). \end{cases} \quad (6.56)$$

Finalmente, de $Y_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$, temos $Y_3^{(3)} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2xu_x \frac{\partial}{\partial u_x} - 2(u_x + 2xu_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 6(u_{xx} + xu_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - 2xv_x \frac{\partial}{\partial v_x} - 2(v_x + 2xv_{xx}) \frac{\partial}{\partial v_{xx}} - 6(v_{xx} + xv_{xxx}) \frac{\partial}{\partial v_{xxx}}$. Fazendo

$$Y_3^{(3)} (u_{xxx} - (u_x)^3 H) \Big|_{(6.56)} = 0,$$

obtem-se a seguinte EDP:

$$2x(u_x)^4 H_{u_x} + 2(u_x)^3 (u_x + 2xu_{xx}) H_{u_{xx}} - 6u_{xx} + 2xv_x (u_x)^3 H_{v_x} + 2(v_x + 2xv_{xx}) (u_x)^3 H_{v_{xx}} = 0. \quad (6.57)$$

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} H_{u_x} &= -2 \frac{u_{xx}}{(u_x)^3} H_{a_1} - \frac{v_x}{(u_x)^2} H_{b_1} - 2 \frac{v_{xx}}{(u_x)^3} H_{c_1}, \\ H_{u_{xx}} &= \frac{1}{(u_x)^2} H_{a_1}, H_{v_x} = \frac{1}{u_x} H_{b_1}, H_{v_{xx}} = \frac{1}{(u_x)^2} H_{c_1}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Assim, dividindo (6.57) por $(u_x)^3$ e substituindo os dados obtidos em (6.58) teremos

$$\begin{aligned} 2xu_x \left(-2 \frac{u_{xx}}{(u_x)^3} H_{a_1} - \frac{v_x}{(u_x)^2} H_{b_1} - 2 \frac{v_{xx}}{(u_x)^3} H_{c_1} \right) + 2(u_x + 2xu_{xx}) \frac{1}{(u_x)^2} H_{a_1} - \\ 6 \frac{u_{xx}}{(u_x)^3} + 2xv_x \frac{1}{u_x} H_{b_1} + 2(v_x + 2xv_{xx}) \frac{1}{(u_x)^2} H_{c_1} = 0, \end{aligned}$$

que simplificando nos dá:

$$H_{a_1} + b_1 H_{c_1} = 3a_1, \quad (6.59)$$

resolvendo (6.59) temos, $a_3 = H - \frac{3}{2}a_1^2$ e $b_3 = c_1 - a_1b_1$ e portanto a solução da EDP (6.59) é dada por

$$H = \frac{3}{2}a_1^2 + f(u, v, b_1, c_1 - a_1b_1).$$

De modo análogo,

$$Y_3^{(3)} (v_{xxx} - (v_x)^3 I) \Big|_{(6.56)} = 0,$$

obtemos a seguinte EDP

$$I_{a_2} + b_2 I_{c_2} = 3a_2, \quad (6.60)$$

cuja solução é

$$I = \frac{3}{2}a_2^2 + g(u, v, b_2, c_2 - a_2b_2).$$

Logo, (6.56) se reduz a:

$$\begin{cases} u_{xxx} = (u_x)^3 \left(\frac{3}{2}a_1^2 + f(u, v, b_1, c_1 - a_1b_1) \right), \\ v_{xxx} = (v_x)^3 \left(\frac{3}{2}a_2^2 + g(u, v, b_2, c_2 - a_2b_2) \right). \end{cases} \quad (6.61)$$

Portanto, o sistema mais geral admitindo $sl(2, \mathbb{R})$ gerado por $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y_2 = x \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$, substituindo os valores de a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 é

$$\begin{cases} \frac{u_{xxx}}{u_x} = \frac{3}{2} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} + f \left(u, v, \frac{v_x}{u_x}, \frac{u_x v_{xx} - v_x u_{xx}}{(u_x)^3} \right) (u_x)^2, \\ \frac{v_{xxx}}{v_x} = \frac{3}{2} \frac{(v_{xx})^2}{(v_x)^2} + g \left(u, v, \frac{u_x}{v_x}, \frac{v_x u_{xx} - u_x v_{xx}}{(v_x)^3} \right) (v_x)^2, \end{cases} \quad (6.62)$$

que é equivalente ao sistema (6.52) o que prova o Teorema 17. Note que o sistema do tipo da EKSG (6.35) é um caso particular desse sistema, em que $f = v^r$ e $g = u^s$. Além disso, as equações em (6.62) são semelhantes a (2.65) com a diferença que agora temos a função arbitrária dependendo também da primeira e segunda derivadas de u e v . $\square$

Os resultados das seções 6.2 e 6.3 foram publicados em [9].

6.4 Existência de um Lagrangiano para sistemas

A existência de um Lagrangiano clássico para uma equação ou sistemas de equações diferenciais possui uma importante implicação na matemática e na física matemática, a saber, encontrar as suas leis de conservação. Em outras palavras, uma vez encontrado o Lagrangiano de um determinado sistema de equações diferenciais e tendo conhecidas suas simetrias, podemos utilizar o Teorema de Noether [13, 27] para calcular as primeiras integrais do sistema, ou seja, a função que é constante ao longo das soluções do sistema de equações. Nesta seção, vamos verificar se os sistemas (6.17), (6.35) e (6.52) possuem Lagrangiano. Em [44], existe um resultado a respeito da existência de um Lagrangiano L envolvendo a derivada de Frechét D_P e o sua adjunta D_P^* , em que $P \in \mathcal{A}^r$ e $\mathcal{A}^r$ é definido como o espaço vetorial das r -uplas de funções diferenciais². Antes de enunciarmos este resultado, vamos definir o que é a derivada de Frechét D_P e sua adjunta D_P^* .

Definição 2. [44] *Seja $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathcal{A}^r$ uma r -upla de funções diferenciáveis. A derivada de Frechét de P é o operador diferencial $D_P : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^r$ definida tal que*

$$D_P(Q) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} P[u + \epsilon Q[u]], \quad \forall Q \in \mathcal{A}^q.$$

² Uma função diferencial $P(x, u^{(n)})$ é uma função que depende analiticamente de x, u e as derivadas de u até uma ordem finita (no caso n) e $P \in C^\infty$ [44].

Em geral, se $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$ tal que u^i com $i = 1, \dots, q$ são variáveis dependentes de x , $P[u] = (P_1, P_2, \dots, P_r)$. A derivada de Frechét é o operador diferencial matricial $q \times r$ cujas componentes são dadas por:

$$[D_P]_{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial P_{\mu}}{\partial u_j^{\nu}} (D_x)^j, \quad \mu = 1, \dots, r \text{ e } \nu = 1, \dots, q \quad (6.63)$$

em que $u_j^{\nu} = \frac{\partial^j u^{\nu}}{\partial x^j}$ e D_x é a derivada total com relação a x . Definida a derivada de Frechét D_P , sua adjunta $D_P^* : \mathcal{A}^r \longrightarrow \mathcal{A}^q$ possui entradas

$$[D_P^*]_{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} (-D_x)^j \frac{\partial P_{\mu}}{\partial u_j^{\nu}}, \quad \mu = 1, \dots, r \text{ e } \nu = 1, \dots, q \quad (6.64)$$

Se $D_P = D_P^*$ então D_P é dito **autoadjunto**.

Teorema 18. [44] Seja $P[u] \in \mathcal{A}^P$ definida sobre uma região, verticalmente em forma de estrela, $M \subset X \times U$. Então P é a expressão de Euler-Lagrange para algum problema variacional $\mathcal{L} = \int L dx$, isto é, $P = E(L)$ se, e somente se, a derivada de Frechét D_P é autoadjunta: $D_P = D_P^*$. Neste caso, um Lagrangiano para P pode ser explicitamente construído usando a fórmula

$$L[u] = \int_0^1 u P[\lambda u] d\lambda. \quad (6.65)$$

A partir deste teorema podemos verificar se os sistemas (6.17), (6.35) e (6.52) possuem Lagrangiano, ou melhor, podemos verificar se o sistema mais geral

$$\begin{cases} S(u) = f(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \\ S(v) = g(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \end{cases} \quad (6.66)$$

possui Lagrangiano.

Teorema 19. O sistema (6.66) não possui Lagrangiano para quaisquer que sejam $f(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx})$ e $g(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx})$. Em particular, os sistemas (6.17), (6.35) e (6.52) não possuem Lagrangiano.

Demonstração. Pelo Teorema 18, o Lagrangiano L existe se, e somente se, $D_P = D_P^*$. Portanto, para mostrar que o sistema não possui Lagrangiano, basta mostrar que uma das componentes $[D_P]_{\mu\nu}$ é diferente de $[D_P^*]_{\mu\nu}$. No caso do sistema (6.66), isto já acontece na primeira componente $[D_P]_{11}$. Considerando $u = u^1$ e $v = u^2$, escrevemos

$$\begin{cases} P_1 = \frac{u_{xxx}^1}{u_x^1} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}^1}{u_x^1} \right)^2 - f(u^1, u^2, u_x^1, u_x^2, u_{xx}^1, u_{xx}^2), \\ P_2 = \frac{u_{xxx}^2}{u_x^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} \right)^2 - g(u^1, u^2, u_x^1, u_x^2, u_{xx}^1, u_{xx}^2). \end{cases} \quad (6.67)$$

Note que:

$$[D_P]_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial P_1}{\partial u_j^1} (D_x)^j = \frac{\partial P_1}{\partial u^1} + \frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} D_x + \frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} D_x^2 + \frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} D_x^3 \quad (6.68)$$

$$= -f_{u^1} + \left(-\frac{u_{xxx}^1}{(u_x^1)^2} + 3\frac{(u_{xx}^1)^2}{(u_x^1)^3} - f_{u_x^1} \right) D_x + \quad (6.69)$$

$$\left(-3\frac{u_{xx}^1}{(u_x^1)^2} - f_{u_{xx}^1} \right) D_x^2 + \frac{1}{u_x^1} D_x^3, \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} [D_P^*]_{11} Q &= \sum_{j=0}^{\infty} (-D_x)^j \frac{\partial P_1}{\partial u_j^1} Q = \frac{\partial P_1}{\partial u^1} Q - D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} Q \right) + D_x^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} Q \right) - D_x^3 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} Q \right) \\ &= \frac{\partial P_1}{\partial u^1} Q - D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} \right) Q - \frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} (D_x Q) + D_x^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} \right) Q + \\ &\quad 2D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} \right) (D_x Q) + \frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} (D_x^2 Q) - D_x^3 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) Q - \\ &\quad 3D_x^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) (D_x Q) - 3D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) (D_x^2 Q) - \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) (D_x^3 Q) \\ &= \left[\frac{\partial P_1}{\partial u^1} - D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} \right) + D_x^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} \right) - D_x^3 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) \right] Q + \\ &\quad \left[-\frac{\partial P_1}{\partial u_x^1} + 2D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} \right) - 3D_x^2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) \right] (D_x Q) + \\ &\quad \left[\frac{\partial P_1}{\partial u_{xx}^1} - 3D_x \left(\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right) \right] (D_x^2 Q) - \left[\frac{\partial P_1}{\partial u_{xxx}^1} \right] (D_x^3 Q), \end{aligned} \quad (6.71)$$

logo, realizando as devidas substituições, teremos a componente $[D_P^*]_{11}$ dada por:

$$\begin{aligned} [D_P^*]_{11} &= \left[-3\frac{(u_{xx}^1)^3}{(u_x^1)^4} + 4\frac{u_{xx}^1 u_{xxx}^1}{(u_x^1)^3} - \frac{u_{xxx}^1}{(u_x^1)^2} - f_{u^1} + D_x f_{u_x^1} - D_x^2 f_{u_{xx}^1} \right] + \\ &\quad \left[-2\frac{u_{xxx}^1}{(u_x^1)^2} + 3\frac{(u_{xx}^1)^2}{(u_x^1)^3} + f_{u_x^1} - 2D_x f_{u_{xx}^1} \right] D_x - f_{u_{xx}^1} D_x^2 - \frac{1}{u_x^1} D_x^3. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Assim, $[D_P]_{11} \neq [D_P^*]_{11}$, o que faz com que $[D_P] \neq [D_P^*]$. Desse modo, D_P não é autoadjunto e pelo Teorema 18 o sistema (6.66) não possui Lagrangiano. O sistema (6.17), (6.35) e (6.52) são casos particulares do sistema (6.66) para f e g específicos e portanto não possuem Lagrangiano. $\square$

Uma vez que o sistema (6.66) não possui Lagrangiano, não podemos então utilizar o teorema de Noether como ferramenta para encontrar suas Leis de conservação.

Neste capítulo, mostramos uma expressão geral para o cálculo de simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem três, e como aplicação, sugerimos ideias de novos sistemas de EDOs envolvendo equações do tipo da EKSG vistas na parte II e calculamos suas respectivas simetrias de Lie, também encontramos a partir de uma dada Álgebra de Lie, a saber, $sl(2, \mathbb{R}) = \text{Span} \{Y_1 = \partial_x, Y_2 = x\partial_x, Y_3 = x^2\partial_x\}$ um sistema de equações diferenciais semelhantes à respectiva EDO mais geral admitida por esta álgebra, que por sua vez, é uma equação do tipo EKSG. Por fim, esclarecemos a impossibilidade de sistemas de duas EDOs de terceira ordem envolvendo o Schwarziano possuírem Lagrangiano, simplificando o processo para estudos posteriores de tais sistemas no campo das leis de conservação. No próximo capítulo, faremos uma reflexão no campo das equações diferenciais parciais, trabalhando EDPs envolvendo a derivada de Schwarz.

7 O Schwarziano e equações diferenciais parciais

A derivada de Schwarz, além de possuir relevância no campo de equações diferenciais ordinárias, em particular, devido à equação de Kummer-Schwarz, também tem aparições no estudo de algumas equações diferenciais parciais (EDPs). O Schwarziano pode aparecer ao longo da análise de uma determinada EDP, como por exemplo, Weiss J. [51] ao estudar a equação de Kadomtsev-Petviashvili (KP), $U_{yy} + \frac{\partial}{\partial x}(U_t + UU_x + U_{xxx}) = 0$, um modelo que "descreve a dinâmica de sólidos e ondas não lineares em plasmas e superfluidos"[25, 51], inclui a derivada de Schwarz na abordagem sobre transformações de Backlund. Além disso, a derivada Schwarziana pode se apresentar de forma explícita, como é o caso na equação de Krichever-Novikov [20, 22]

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 + \frac{P(u)}{(u_x)^2}, \quad P^{(4)}(u) = 0. \quad (7.1)$$

Iniciaremos este capítulo, com uma abordagem sobre um caso particular da equação (7.1) em que $P(u) = 0$, denominada Equação Schwarziana de Korteweg–de Vries (SKdV) e outras EDPs envolvendo a derivada de Schwarz. Buscaremos uma boa extensão da equação SKdV para sistemas de duas equações diferenciais envolvendo simetrias de Lie e por fim, vamos propor uma generalização direta para EDPs de uma EKSG vista na parte II desta tese.

7.1 A Equação Schwarziana de Korteweg–de Vries

A equação diferencial parcial (EDP) denominada Schwarziana de Korteweg–de Vries (SKdV) [20] dada por

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 = S(u) \quad (7.2)$$

é uma EDP envolvendo a derivada de Schwarz que possui destaque nos estudos de simetrias de Lie envolvendo EDPs por admitir grande número de simetrias locais. Essas simetrias, encontradas em [1] e [11], formam álgebra 6-dimensional gerada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = u^2 \frac{\partial}{\partial u}, X_6 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{3} x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (7.3)$$

A equação (7.2) envolvendo o Schwarziano, é um caso particular da equação de Krichever-Novikov e a equação mais geral da forma

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) \quad (7.4)$$

a ser invariante por tal álgebra. De fato, considere uma EDP da forma (7.4). Note que a invariança de (7.4) por X_1, X_2, X_3 mostra que $F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ independe explicitamente das variáveis t, x e u , reduzindo (7.4) a

$$u_t = F(u_x, u_{xx}, u_{xxx}). \quad (7.5)$$

Observe que, levando em conta somente os termos u_t, u_x, u_{xx} e u_{xxx} envolvidos em (7.5), a extensão de X_4 até a terceira ordem é $X_4^{(3)} = u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots$, assim

$$X_4^{(3)} (u_t - F(u_x, u_{xx}, u_{xxx})) \Big|_{(7.5)} = 0$$

implica em

$$F - u_x F_{u_x} - u_{xx} F_{u_{xx}} - u_{xxx} F_{u_{xxx}} = 0.$$

Resolvendo a EDP acima, obtêm-se

$$c = \frac{u_{xx}}{u_x}, \quad w = \frac{u_{xxx}}{u_x}, \quad v = \frac{F}{u_x}, \quad (7.6)$$

que implica na solução $F = g(c, w)u_x$, no qual g é uma função arbitrária de c e w . Portanto, (7.5) se reduz a

$$u_t = g(c, w)u_x. \quad (7.7)$$

Olhando para $X_5^{(3)} = 2uu_t \frac{\partial}{\partial u_t} + 2uu_x \frac{\partial}{\partial u_x} + 2(u_x^2 + uu_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + 2(3u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots$, tem-se que

$$X_5^{(3)} (u_t - g(c, w)u_x) \Big|_{(7.7)} = 0.$$

Aplicando a regra da cadeia em $g(c, w)$, em que c e w são dados em (7.6), obtemos a seguinte EDP:

$$g_c + 3cg_w = 0,$$

cuja resolução nos dá

$$k = w - \frac{3}{2}c^2 = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 = S(u), \quad (7.8)$$

$S(u)$ é a derivada de Schwarz. Desse modo, temos a solução da EDP dada por $g = f(k) = f(S(u))$ e f é uma função arbitrária do Schwarziano. Assim, (7.7) se torna

$$u_t = f(S(u))u_x. \quad (7.9)$$

A equação (7.9) é a equação mais geral da forma (7.4) admitindo álgebra gerada por X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 dados em (7.3). Finalmente, com operador $X_6^{(3)} = -u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - \frac{1}{3}u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{2}{3}u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots$ obtemos

$$X_6^{(3)} (u_t - S(u)u_x) \Big|_{(7.9)} = 0,$$

que através do uso da regra da cadeia em $S(u)$ resulta na seguinte EDO:

$$f(S(u)) - S(u)f'(S(u)) = 0 \implies f(S(u)) = \alpha S(u), \quad (7.10)$$

em que $\alpha = cte$. Portanto, substituindo $f(S(u))$ dada em (7.10) na equação (7.9) obtemos

$$u_t = \alpha S(u)u_x. \quad (7.11)$$

A equação (7.11) com $\alpha = 1$ é a equação (7.2). Podemos facilmente reduzir a equação (7.11) a (7.2) utilizando a seguinte transformação

$$\bar{t} = \alpha t, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{u} = u. \quad (7.12)$$

Portanto, concluímos que a álgebra gerada por (7.3) especifica a equação Schwarziana de Korteweg–de Vries, ou seja, (7.2) é a equação mais geral da forma (7.4) admitindo (7.3).

Outra equação da forma (7.4), envolvendo o Schwarziano e que admite também uma álgebra de 6-dimensional, porém gerada por outros operadores, é dada por

$$u_t = \frac{S(u)}{(u_x)^2} \quad (7.13)$$

e admite as seguintes simetrias:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (7.14)$$

Observe que, esses geradores de simetrias de Lie são semelhantes aos geradores admitidos pela equação SKdV em (7.3) com a diferença que em X_4, X_5 e X_6 a variável dependente (u) é trocada com variável independente (x) e isso produziu uma equação diferencial diferente.

Uma terceira equação da forma (7.4) envolvendo a derivada de Schwarz é dada pela forma aparentemente mais simples

$$u_t = S(u), \quad (7.15)$$

em que $u = u(t, x)$. Note que, ao contrário de (7.2) e (7.13), quando realizados os cálculos de simetrias da equação (7.15), é encontrada uma álgebra de dimensão 5, a saber

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (7.16)$$

Por outro lado, a equação mais geral da forma (7.4) admitindo tais simetrias é

$$u_t = \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 f \left(\frac{u_{xxx}u_x}{(u_{xx})^2} \right), \quad (7.17)$$

no qual (7.15) é um caso particular de (7.17) para $f = \left[-\frac{3}{2} + \frac{u_{xxx}u_x}{(u_{xx})^2} \right]$, ou seja, a equação (7.17) juntamente com as simetrias (7.16) nos induz a pensar que está faltando pelo menos

uma simetria de (7.15) em (7.16), todavia ao realizar um cálculo "braçal" utilizando os procedimentos para exibir as simetrias de Lie de uma equação diferencial em [4] e [29] ou até mesmo por meios computacionais, se chegará a uma álgebra 5-dimensional como em (7.16). Isso, nos leva a concluir que, existem equações diferenciais (parciais) que não podem ser completamente especificadas pela álgebra a qual admite.

7.2 Sistemas de EDP envolvendo o Schwarziano

Na seção anterior, vimos que a equação Schwarziana de Korteweg–de Vries

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u_x} \right)^2 = S(u) \quad (7.18)$$

é a EDP mais geral, envolvendo a derivada de Schwarz, que admite álgebra 6-dimensional gerada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = u^2 \frac{\partial}{\partial u}, X_6 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (7.19)$$

Considerando a álgebra acima, vamos buscar um sistema de EDP da forma

$$\begin{cases} u_t = F(t, x, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}), \\ v_t = G(t, x, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}), \end{cases} \quad (7.20)$$

admitindo os seguintes geradores

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = \frac{\partial}{\partial u}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial v}, Y_5 = u \frac{\partial}{\partial u}, Y_6 = v \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y_7 &= u^2 \frac{\partial}{\partial u}, Y_8 = v^2 \frac{\partial}{\partial v}, Y_9 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Note que a invariância de (7.20) por Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 mostra que F e G independem explicitamente das variáveis t, x, u e v , reduzindo (7.20) a

$$\begin{cases} u_t = F(u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}), \\ v_t = G(u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx}). \end{cases} \quad (7.22)$$

Considerando o gerador Y_5 e seu prolongamento até a terceira derivada $Y_5^{(3)} = u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots$, aplicando a condição de invariância às equações (7.22) obtemos

$$Y_5^{(3)} (u_t - F(u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx})) \Big|_{(7.22)} = 0, \quad (7.23)$$

$$Y_5^{(3)} (v_t - G(u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, u_{xxx}, v_{xxx})) \Big|_{(7.22)} = 0, \quad (7.24)$$

que resulta nas seguintes equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem:

$$F - u_x F_{u_x} - u_{xx} F_{u_{xx}} - u_{xxx} F_{u_{xxx}} = 0, \quad (7.25)$$

$$u_x G_{u_x} + u_{xx} G_{u_{xx}} + u_{xxx} G_{u_{xxx}} = 0. \quad (7.26)$$

Resolvendo a equação (7.25) obtemos $\alpha_1 = \frac{u_{xx}}{u_x}$, $\alpha_2 = \frac{u_{xxx}}{u_x}$ e $\alpha_1 = \frac{F}{u_x}$, que implica na solução de (7.25)

$$F = u_x F_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx}).$$

Da mesma forma, de (7.26) obtemos $\alpha_1 = \frac{u_{xx}}{u_x}$ e $\alpha_2 = \frac{u_{xxx}}{u_x}$, que implica na solução de (7.26)

$$G = G_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx}),$$

logo,

$$\begin{cases} u_t = u_x F_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx}), \\ v_t = G_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx}). \end{cases} \quad (7.27)$$

O análogo é feito para Y_6 e o prolongamento $Y_6^{(3)} = v \frac{\partial}{\partial v} + v_t \frac{\partial}{\partial v_t} + v_x \frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_{xx}} + v_{xxx} \frac{\partial}{\partial v_{xxx}} + \dots$, temos

$$Y_6^{(3)}(u_t - u_x F_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx})) \Big|_{(7.27)} = 0, \quad (7.28)$$

$$Y_6^{(3)}(v_t - G_1(\alpha_1 \alpha_2, v_x, v_{xx}, v_{xxx})) \Big|_{(7.27)} = 0, \quad (7.29)$$

que resulta nas seguintes equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$v_x F_{1v_x} + v_{xx} F_{1v_{xx}} + v_{xxx} F_{1v_{xxx}} = 0, \quad (7.30)$$

$$G_1 - v_x G_{1v_x} - v_{xx} G_{1v_{xx}} - v_{xxx} G_{1v_{xxx}} = 0. \quad (7.31)$$

Resolvendo a equação (7.30) obtemos $\beta_1 = \frac{v_{xx}}{v_x}$ e $\beta_2 = \frac{v_{xxx}}{v_x}$ que implica na solução de (7.30)

$$F_1 = F_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2).$$

Da mesma forma, de (7.31) obtemos $\beta_1 = \frac{v_{xx}}{v_x}$, $\beta_2 = \frac{v_{xxx}}{v_x}$ e $\beta_3 = \frac{G_1}{v_x}$ que implica na solução de (7.31)

$$G_1 = v_x G_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2),$$

logo,

$$\begin{cases} u_t = u_x F_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2), \\ v_t = v_x G_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2). \end{cases} \quad (7.32)$$

De $Y_7^{(3)} = u^2 \frac{\partial}{\partial u} + 2uu_t \frac{\partial}{\partial u_t} + 2uu_x \frac{\partial}{\partial u_x} + 2(u_x^2 + uu_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + (6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots$ em (7.32), obtemos

$$Y_7^{(3)}(u_t - u_x F_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2)) \Big|_{(7.32)} = 0, \quad (7.33)$$

$$Y_7^{(3)}(v_t - v_x G_2(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2)) \Big|_{(7.32)} = 0, \quad (7.34)$$

e então as seguintes EDPs

$$F_{2\alpha_1} + 3\alpha_1 F_{2\alpha_2} = 0, \quad (7.35)$$

$$G_{2\alpha_1} + 3\alpha_1 G_{2\alpha_2} = 0, \quad (7.36)$$

que resolvendo ambas equações chega-se a $\alpha_4 = S(u)$, em que $S(u)$ é a derivada de Schwarz, e assim a solução de (7.35) e (7.36) são, respectivamente,

$$F_2 = F_3(\alpha_4, \beta_1, \beta_2) = F_3(S(u), \beta_1, \beta_2) \quad \text{e} \quad G_2 = G_3(\alpha_4, \beta_1, \beta_2) = G_3(S(u), \beta_1, \beta_2),$$

assim,

$$\begin{cases} u_t = u_x F_3(S(u), \beta_1, \beta_2), \\ v_t = v_x G_3(S(u), \beta_1, \beta_2). \end{cases} \quad (7.37)$$

Analogamente, aplicando $Y_8^{(3)} = v^2 \frac{\partial}{\partial v} + 2vv_t \frac{\partial}{\partial v_t} + 2vv_x \frac{\partial}{\partial v_x} + 2(v_x^2 + vv_{xx}) \frac{\partial}{\partial v_{xx}} + (6v_x v_{xx} + 2vv_{xxx}) \frac{\partial}{\partial v_{xxx}} + \dots$ a (7.37), obtemos as seguintes EDPs

$$F_{3\beta_1} + 3\beta_1 F_{3\beta_2} = 0, \quad (7.38)$$

$$G_{3\beta_1} + 3\beta_1 G_{3\beta_2} = 0, \quad (7.39)$$

cujas soluções são dadas, respectivamente, por

$$F_3 = F_4(S(u), S(v)) \quad \text{e} \quad G_3 = G_4(S(u), S(v)),$$

assim,

$$\begin{cases} u_t = u_x F_4(S(u), S(v)), \\ v_t = v_x G_4(S(u), S(v)). \end{cases} \quad (7.40)$$

Finalmente, $Y_9^{(3)} = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 3u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - 2u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 3u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - 3v_t \frac{\partial}{\partial v_t} - v_x \frac{\partial}{\partial v_x} - 2v_{xx} \frac{\partial}{\partial v_{xx}} - 3v_{xxx} \frac{\partial}{\partial v_{xxx}} + \dots$ aplicado a (7.40), tomando $\alpha_4 = S(u)$ e $\beta_4 = S(v)$, obtemos

$$Y_9^{(3)}(u_t - u_x F_4(\alpha_4, \beta_4)) \Big|_{(7.40)} = 0, \quad (7.41)$$

$$Y_9^{(3)}(v_t - v_x G_4(\alpha_4, \beta_4)) \Big|_{(7.40)} = 0, \quad (7.42)$$

que resulta nas seguintes EDPs, respectivamente:

$$-F_4 + \alpha_4 F_{4\alpha_4} + \beta_4 F_{4\beta_4} = 0, \quad (7.43)$$

$$-G_4 + \alpha_4 G_{4\alpha_4} + \beta_4 G_{4\beta_4} = 0. \quad (7.44)$$

Resolvendo a equação (7.43) obtemos o seguinte

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_4}{\beta_4} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{F_4}{\beta_4},$$

e portanto a solução de (7.43) é

$$F_4 = S(v)f\left(\frac{S(u)}{S(v)}\right).$$

Da mesma forma, resolvendo a equação (7.44) obtemos o seguinte

$$\lambda_3 = \frac{\beta_4}{\alpha_4} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = \frac{G_4}{\alpha_4},$$

e então a solução de (7.44) é

$$G_4 = S(u)g\left(\frac{S(v)}{S(u)}\right).$$

Com isso, concluímos com o seguinte teorema.

Teorema 20. *O sistema de EDPs da forma (7.20) mais geral admitida pelos geradores de simetria (7.21) é dado por*

$$\begin{cases} \frac{u_t}{u_x} = S(v)f\left(\frac{S(u)}{S(v)}\right), \\ \frac{v_t}{v_x} = S(u)g\left(\frac{S(v)}{S(u)}\right). \end{cases} \quad (7.45)$$

- Se $f = g = 1$, então temos o sistema envolvendo equações semelhantes à equação de SKdV

$$\begin{cases} u_t = S(v)u_x, \\ v_t = S(u)v_x. \end{cases} \quad (7.46)$$

- Seja $\alpha = \frac{S(u)}{S(v)}$ e $\beta = \frac{S(v)}{S(u)}$. Se $f(\alpha) = \alpha$ e $g(\beta) = \beta$, temos um sistema desacoplado de equações de SKdV.

Os resultados das seções 7.1 e 7.2 foram publicados em [9].

7.3 Generalização da equação de Kummer-Schwarz para EDP hiperbólicas

No capítulo 3, estudamos algumas generalizações da EKS no âmbito de Equações Diferenciais Ordinárias, por exemplo, a equação (2.65) $S(y) = f(y)(y')^2$. Nesta seção vamos propor uma generalização no âmbito de Equações Diferenciais Parciais, esta generalização se dá por trocar $y(x)$, que depende de apenas uma variável, por $u(t, x)$ e substituir o termo $(y')^2$ na equação (2.65), pela derivada parcial de segunda ordem de $u(t, x)$ com relação à t (u_{tt}), isto é:

$$S(u) = f(u)u_{tt} \quad (7.47)$$

em que $S(u)$ é o Schwarziano. Primeiramente, vamos encontrar o grupo contínuo de equivalência da equação (7.47), com $f(u) \neq 0$ (caso contrário teremos a equação de EKS já estudada). Em seguida, encontraremos os geradores de simetrias de Lie desta equação.

7.3.1 Cálculo do grupo contínuo de equivalência da EDP

Nesta seção, vamos calcular o grupo contínuo de equivalência da EDP (7.47) seguindo de modo análogo ao procedimento adotado no capítulo 4, em [23], [30] e [31]. Seja Y o gerador de um grupo de equivalência de (7.47) dado por

$$Y = \xi_1(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \mu(t, x, u, f) \frac{\partial}{\partial f}, \quad (7.48)$$

e sua prolongação $\tilde{Y}$

$$\tilde{Y} = Y + \eta_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{11}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta_{22}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \eta_{22}^{(3)} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial f_t} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial f_x} + \dots \quad (7.49)$$

Considere o sistema associado à EDP (7.47):

$$\begin{cases} -u_{tt}f(t, x, u) + \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} = 0, \\ f_t = 0, \quad f_x = 0, \end{cases} \quad (7.50)$$

com $\eta^{(0)} = \eta$, $\eta_i^{(1)}$ e $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$ dadas em [4]

$$\eta_i^{(1)} = D_i \eta - u_j D_i \xi_j, \quad (7.51)$$

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = D_{i_k} \eta^{(k-1)} - u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j} D_{i_k} \xi_j, \quad (7.52)$$

e ω_1 e ω_2 dados, respectivamente, por

$$\omega_1 = \tilde{D}_t \mu - f_t \tilde{D}_t \xi_1 - f_x \tilde{D}_t \xi_2 - f_u \tilde{D}_t \eta = \mu_t - f_u \eta_t, \quad (7.53)$$

$$\omega_2 = \tilde{D}_x \mu - f_t \tilde{D}_x \xi_1 - f_x \tilde{D}_x \xi_2 - f_u \tilde{D}_x \eta = \mu_x - f_u \eta_x, \quad (7.54)$$

em que $\tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + f_t \frac{\partial}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\tilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial x}$. As condições de invariância do sistema (7.50) são dadas pelas seguintes equações:

$$\tilde{Y} \left(-u_{tt}f(t, x, u) + \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} \right) \Big|_{(7.50)} = 0, \quad (7.55)$$

$$\tilde{Y}(f_t) \Big|_{(7.50)} = 0, \quad \tilde{Y}(f_x) \Big|_{(7.50)} = 0. \quad (7.56)$$

Das equações (7.56) e considerando que f e f' são agora algebricamente independentes, conclui-se que

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0 &\implies \mu_t = 0 \text{ e } \eta_t = 0, \\ \omega_2 = 0 &\implies \mu_x = 0 \text{ e } \eta_x = 0, \end{aligned}$$

isto significa que

$$\eta = \eta(u) \text{ e } \mu = \mu(u, f). \quad (7.57)$$

Olhando para a equação (7.55), temos:

$$\eta_2^{(1)} \left(-\frac{u_{xxx}}{(u_x)^2} + 3 \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^3} \right) - \frac{\mu}{f} \left(\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} \right) - f\eta_{11}^{(2)} - 3\eta_{22}^{(2)} \frac{u_{xx}}{(u_x)^2} + \frac{\eta_{222}^{(3)}}{u_x} = 0, \quad (7.58)$$

para soluções de (7.50). Utilizando o que encontramos em (7.57) e os valores de $\eta_2^{(1)}$, $\eta_{11}^{(2)}$, $\eta_{22}^{(2)}$ e $\eta_{222}^{(3)}$ em (7.51) e (7.52), temos:

$$\begin{aligned} &\left(\eta_u - 2\xi_{2x} + 2\xi_{1t} - \frac{\mu}{f} \right) \frac{u_{xxx}}{u_x} + \xi_{1x} \frac{u_t u_{xxx}}{(u_x)^2} - 2\xi_{2u} u_{xxx} + 3\xi_{1u} \frac{u_t u_{xxx}}{u_x} + \\ &\left(3\xi_{2x} + \frac{3\mu}{2f} + \frac{3}{2}\eta_u - 3\xi_{1t} \right) \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} - 3\xi_{1x} \frac{u_t (u_{xx})^2}{(u_x)^3} + \frac{3}{2}\xi_{2u} \frac{(u_{xx})^2}{u_x} - \frac{15}{2}\xi_{1u} \frac{u_t (u_{xx})^2}{(u_x)^2} + \\ &(\xi_{1tt}f - 3\xi_{1xxu})u_t + (\xi_{2tt}f - 3\xi_{2xxu})u_x + (2\xi_{2t}f - 6\xi_{1xu})u_{tx} + (2\xi_{1tu} - \eta_{uu})f(u_t)^2 + \\ &(2\xi_{2tu}f - 3\xi_{1uuu})u_t u_x + \xi_{1uu}f(u_t)^3 + \xi_{2uu}f(u_t)^2 u_x + 2\xi_{2u}u_t u_{tx} + 3\xi_{1x} \frac{u_t u_{xx}}{(u_x)^2} + \\ &6\xi_{1x} \frac{u_{tx} u_{xx}}{(u_x)^2} - 3\xi_{2xu} u_{xx} + 3\xi_{1xu} \frac{u_t u_{xx}}{u_x} - 3\xi_{2uu} u_x u_{xx} + 3\xi_{1u} \frac{u_t (u_{xx})^2}{u_x} + \\ &3\xi_{1u} \frac{u_{tx} u_{xx}}{u_x} - \xi_{2xxx} - \xi_{1xxx} \frac{u_t}{u_x} - 3\xi_{1xx} \frac{u_{tx}}{u_x} (-3\xi_{2xuu} + \eta_{uuu})(u_x)^2 - \xi_{2uuu}(u_x)^3 - \\ &\xi_{1uuu}u_t(u_x)^2 - 3\xi_{1uu}u_x u_{tx} - 3\xi_{1x} \frac{u_{txx}}{u_x} - 3\xi_{1u}u_{txx} = 0. \end{aligned} \quad (7.59)$$

De (7.59) obtemos uma identidade em $u_t, u_x, (u_x)^2, u_t u_x, \frac{u_{xx}}{u_x}, \dots$. Observando os coeficientes de u_{txx} e $\frac{u_{txx}}{u_x}$ obtemos que $\xi_{1u} = \xi_{1x} = 0$ e isto implica que $\xi_1 = \xi_1(t)$. Da

mesma forma, os coeficientes de u_{xxx} e u_{tx} , considerando que $f(u) \neq 0$ produz $\xi_{2u} = \xi_{2t} = 0$ e assim, $\xi_2 = \xi_2(x)$. Substituindo o que encontramos em (7.59) obteremos as seguintes equações determinantes:

$$\eta \frac{\mu}{f} + 2\xi_{2x} + \eta_u - 2\xi_{1t} = 0, \quad (7.60a)$$

$$\xi_{2xxx} = 0, \quad (7.60b)$$

$$\xi_{1tt} = 0, \quad (7.60c)$$

$$\eta_{uu} = 0. \quad (7.60d)$$

Derivando (7.60a) com relação a x , obtemos $\xi_{2xx} = 0$, isso implica em $\xi_2 = \alpha_1 x + \alpha_2$ em que $\alpha_1, \alpha_2 = cte$, com isso, (7.60b) está satisfeita. Da equação (7.60c), temos que $\xi_1 = \alpha_3 t + \alpha_4$ com $\alpha_3, \alpha_4 = cte$ e da equação (7.60d) obtemos $\eta = \alpha_5 u + \alpha_6$, em que $\alpha_5, \alpha_6 = cte$. Finalmente, substituindo o que temos em (7.60a) obtemos o valor de μ dado por $\mu = (-2\alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_5)f$. Portanto, os geradores de grupo de equivalência são:

$$\begin{aligned} X_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + 2f \frac{\partial}{\partial f}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial t}, X_5 = u \frac{\partial}{\partial u} - f \frac{\partial}{\partial f}, X_6 = \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

7.3.2 Cálculo das Simetrias de Lie da EDP

Teorema 21. A equação (7.47)

$$S(u) = f(u)u_{tt}$$

admite as simetrias de Lie dadas na tabela a seguir.

Tabela 5 – Simetrias da equação $S(u) = f(u)u_{tt}$

valores de $f(u)$	Simetrias de Lie
$f(u)$ arbitrária	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x$
$f(u) = k = cte$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x$ $X_4 = \partial_u, X_5 = t\partial_u, X_6 = t\partial_t + 2u\partial_u$
$f(u) = c(au + b)^{\frac{1}{a}}, a \neq \left\{\frac{1}{3}, 0\right\}$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x$ $X_4 = (1 + a)t\partial_t + 2(au + b)\partial_u$
$f(u) = ce^u$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x$ $X_4 = t\partial_t + 2b\partial_u$
$f(u) = c\left(\frac{1}{3}u + b\right)^3$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x$ $X_4 = 2t\partial_t + (u + 3b)\partial_u, X_5 = t^2\partial_t + (u + 3b)t\partial_u$

Demonstração. Considere o gerador de simetria de Lie prolongado até a terceira ordem

$$X^{(3)} = \xi_1 \partial_t + \xi_2 \partial_x + \eta \partial_u + \eta_1^{(1)} \partial_{ut} + \eta_2^{(1)} \partial_{ux} + \eta_{11}^{(2)} \partial_{utt} + \eta_{22}^{(2)} \partial_{u_{xx}} + \eta_{222}^{(3)} \partial_{u_{xxx}} + \dots$$

Aplicando à equação (7.47) a condição de invariância (2.4)

$$X^{(3)}(S(u) - f(u)u_{tt}) = 0 \quad \text{quando} \quad S(u) = f(u)u_{tt},$$

obtemos

$$-\eta \frac{f'(u)}{f(u)} \frac{u_{xxx}}{u_x} + \frac{3}{2} \eta \frac{f'(u)}{f(u)} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} - \eta_2^{(1)} \frac{u_{xxx}}{(u_x)^2} + 3\eta_2^{(1)} \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^3} - f(u)\eta_{11}^{(2)} - 3\eta_{22}^{(2)} \frac{u_{xx}}{(u_x)^2} + \frac{\eta_{222}^{(3)}}{u_x} = 0, \quad (7.62)$$

para as soluções de (7.47).

Observação 3. Os infinitesimais $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}, \eta_{22}^{(2)}$ e $\eta_{222}^{(3)}$, utilizados nos cálculos a seguir, foram colocados, de forma explícita, no Apêndice B.

Assim, substituindo (7.51) e (7.52) em (7.62) obtemos

$$\begin{aligned} & \left(-\eta \frac{f'(u)}{f(u)} - 2\xi_{2x} - \eta_u + 2\xi_{1t} \right) \frac{u_{xxx}}{u_x} + \left(\frac{3}{2}\eta + 3\xi_{2x} - 3\xi_{1t} + \frac{3}{2}\eta_u \right) \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^2} + \\ & -\eta_x \frac{u_{xxx}}{(u_x)^2} + \xi_{1x} \frac{u_t u_{xxx}}{(u_x)^2} - 2\xi_{2u} u_{xxx} + 3\xi_{1u} \frac{u_t u_{xxx}}{u_x} + 3\eta_x \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^3} - 3\xi_{1x} \frac{u_t (u_{xx})^2}{(u_x)^3} + \\ & \frac{3}{2}\xi_{2u} \frac{(u_{xx})^2}{u_x} - \frac{9}{2}\xi_{1u} \frac{u_t (u_{xx})^2}{(u_x)^2} + (-\eta_{tt}f(u) + 3\eta_{xxu} - \xi_{2xx}) + \\ & (\xi_{1tt}f(u) - 2\eta_{tu}f(u) - 3\xi_{1xu})u_t + (\xi_{2tt}f(u) + 3\eta_{xuu} - 3\xi_{2xu})u_x + \\ & (2\xi_{2t}f(u) - 6\xi_{1xu})u_{tx} + (2\xi_{1tu} - \eta_{uu})f(u)(u_t)^2 + (2\xi_{2tu}f(u) - 3\xi_{1xuu})u_t u_x + \\ & \xi_{1uu}f(u)(u_t)^3 + \xi_{2uu}f(u)(u_t)^2 u_x + 2\xi_{2u}f(u)u_t u_{tx} - 3\eta_{xx} \frac{u_{xx}}{(u_x)^2} - 3\eta_{xu} \frac{u_{xx}}{u_x} + \\ & 3\xi_{1xx} \frac{u_t u_{xx}}{(u_x)^2} + 6\xi_{1x} \frac{u_{tx} u_{xx}}{(u_x)^2} - 3\xi_{2xu} u_{xx} + 3\xi_{1xu} \frac{u_t u_{xx}}{u_x} - 3\xi_{2uu} u_x u_{xx} + \\ & 3\xi_{1u} \frac{u_{tx} u_{xx}}{u_x} + \eta_{xxx} \frac{1}{u_x} - \xi_{1xxx} \frac{u_t}{u_x} - 3\xi_{1xx} \frac{u_{tx}}{u_x} + \\ & (\eta_{uuu} - 3\xi_{2xuu})(u_x)^2 - \xi_{2uuu}(u_x)^3 - \xi_{1uuu}u_t(u_x)^2 - 3\xi_{1uu}u_x u_{tx} - 3\xi_{1x} \frac{u_{txx}}{u_x} - 3\xi_{1u}u_{txx} = 0 \end{aligned} \quad (7.63)$$

De (7.63) obtemos uma identidade em $u_t, u_x, (u_x)^2, u_t u_x, \frac{u_{xx}}{u_x}, \dots$. Observando os coeficientes de u_{txx} e $\frac{u_{txx}}{u_x}$ concluímos que $\xi_{1x} = \xi_{1u} = 0$ e isso implica $\xi_1 = \xi_1(t)$. Da mesma forma, os coeficientes de u_{xxx} e u_{tx} , considerando que $f(u) \neq 0$ produzem $\xi_{2t} = \xi_{2u} = 0$, e assim, $\xi_2 = \xi_2(x)$. De $\frac{(u_{xx})^2}{(u_x)^3}$ temos $\eta_x = 0$, logo, $\eta = \eta(t, u)$. Substituindo o que

encontramos em (7.63) obteremos, resumidamente, as seguintes equações determinantes:

$$\eta \frac{f'(u)}{f(u)} + 2\xi_{2x} + \eta_u - 2\xi_{1t} = 0, \quad (7.64a)$$

$$\eta_{tt}f(u) + \xi_{2xxx} = 0, \quad (7.64b)$$

$$\eta_{uu} = 0, \quad (7.64c)$$

$$\xi_{1tt} - 2\eta_{tu} = 0. \quad (7.64d)$$

Derivando (7.64a) com relação a x , obtemos $\xi_{2xx} = 0$, isso implica em $\xi_2 = \alpha_1 x + \alpha_2$ em que $\alpha_1, \alpha_2 = cte$. A equação (7.64b) se torna $\eta_{tt} = 0$, ou seja, $\eta = a(u)t + b(u)$. Substituindo η em (7.64c) obtemos $a''(u)t + b''(u) = 0$, assim, $a''(u) = 0$ e $b''(u) = 0$, logo $a(u) = \alpha_3 u + \alpha_4$ e $b(u) = \alpha_5 u + \alpha_6$ em que $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 = cte$, com isso, $\eta = \alpha_3 ut + \alpha_4 t + \alpha_5 u + \alpha_6$. Substituindo o que temos até aqui em (7.64d) obtemos

$$\xi_1''(t) - 2\alpha_3 = 0 \implies \xi_1 = \alpha_3 t^2 + \alpha_7 t + \alpha_8,$$

em que $\alpha_7, \alpha_8 = cte$. Finalmente, substituindo em (7.64a)

$$(\alpha_3 ut + \alpha_4 t + \alpha_5 u + \alpha_6) \frac{f'(u)}{f(u)} - 3\alpha_3 t + \alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7 = 0 \quad (7.65)$$

- Suponha $f'(u) = 0$, isto é, $f(u) = k = cte \neq 0$, de (7.65) obtemos $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_7 = \frac{\alpha_5}{2} + \alpha_1$, dessa forma

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_5}{2}\right)t + \alpha_8, \\ \xi_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta(t, u) = \alpha_4 t + \alpha_5 u + \alpha_6. \end{cases}$$

Portanto, a EDP $S(u) = ku_{tt}$ admite álgebra de Lie 6-dimensional gerada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = t \frac{\partial}{\partial u}, X_6 = t \frac{\partial}{\partial t} + 2u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (7.66)$$

- Suponha $f'(u) \neq 0$. Derivando a equação (7.65) com relação à t obtemos

$$(\alpha_3 u + \alpha_4) \frac{f'(u)}{f(u)} - 3\alpha_3 = 0,$$

como $f'(u) \neq 0$, podemos reescrever a equação acima como

$$(\alpha_3 u + \alpha_4) - 3\alpha_3 \frac{f(u)}{f'(u)} = 0. \quad (7.67)$$

Derivando (7.67) duas vezes com relação a u , obtemos $\alpha_3 \left(\frac{f(u)}{f'(u)} \right)'' = 0$, o que significa

$$\alpha_3 = 0 \text{ ou } \left(\frac{f(u)}{f'(u)} \right)'' = 0.$$

◦ Suponha $\left(\frac{f(u)}{f'(u)}\right)'' \neq 0$, logo $\alpha_3 = 0$. Substituindo em (7.67) temos $\alpha_4 = 0$, dessa forma (7.65) se torna

$$(\alpha_5 u + \alpha_6) \frac{f'(u)}{f(u)} + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7) = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $f(u)$ e dividindo por $f'(u)$ obtemos

$$(\alpha_5 u + \alpha_6) + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7) \frac{f(u)}{f'(u)} = 0. \quad (7.68)$$

Derivando duas vezes a equação (7.68) com relação a u obtemos

$$(\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7) \left(\frac{f(u)}{f'(u)}\right)'' = 0,$$

como $\left(\frac{f(u)}{f'(u)}\right)'' \neq 0$ então $\alpha_7 = \alpha_1 + \frac{\alpha_5}{2}$ que substituindo em (7.68) produz $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Assim, para $f(u)$ arbitrária temos:

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \alpha_1 t + \alpha_8, \\ \xi_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta(t, u) = 0. \end{cases}$$

Portanto, a EDP $S(u) = f(u)u_{tt}$ admite álgebra de Lie 3-dimensional gerada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (7.69)$$

◦ Suponha $\left(\frac{f(u)}{f'(u)}\right)'' = 0$, ou seja,

$$\frac{f(u)}{f'(u)} = au + b, \quad (7.70)$$

com $a, b = cte$, cuja solução para $a \neq 0$ é dada por

$$f(u) = c(au + b)^{\frac{1}{a}}, \quad (7.71)$$

em que $c = cte$, e a solução para $a = 0$ é

$$f(u) = ce^{\frac{u}{b}}, \quad (7.72)$$

em que $c = cte$ e $b \neq 0$.

• Seja $a \neq 0$. Substituindo (7.71) em (7.67)

$$\alpha_3(1 - 3a)u + (\alpha_4 - 3\alpha_3b) = 0, \quad (7.73)$$

isso implica $\alpha_3(1 - 3a) = 0$, e $\alpha_4 = 3\alpha_3b$. Desse modo, temos dois casos a considerar $a \neq \frac{1}{3}$, que implica $\alpha_3 = 0$ e $a = \frac{1}{3}$.

⊙ Se $a \neq \frac{1}{3}$, então $\alpha_3 = 0$ e neste caso $\alpha_4 = 0$. Voltando para (7.65) obtemos

$$\alpha_5 u + \alpha_6 + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7)(au + b) = 0,$$

ou seja,

$$((1+a)\alpha_5 + (2\alpha_1 - 2\alpha_7)a)u + (\alpha_6 + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7)b) = 0. \quad (7.74)$$

Como $a \neq 0$, a equação (7.74) implica em $\alpha_7 = \frac{(1+a)\alpha_5}{2a} + \alpha_1$ e $\alpha_6 = \alpha_5 \frac{b}{a}$. Assim, para $f(u) = c(au + b)^{\frac{1}{a}}$ e $a \neq \left\{\frac{1}{3}, 0\right\}$ temos:

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \left(\frac{(1+a)\alpha_5}{2a} + \alpha_1\right)t + \alpha_8, \\ \xi_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta(t, u) = \alpha_5 \left(u + \frac{b}{a}\right). \end{cases}$$

Portanto, a EDP $S(u) = c(au + b)^{\frac{1}{a}}u_{tt}$, com $a \neq \left\{\frac{1}{3}, 0\right\}$, admite álgebra de Lie 4-dimensional gerada por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } X_4 = (1+a)t \frac{\partial}{\partial t} + 2(au + b) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (7.75)$$

- Se $a = 0$, teremos $f(u)$ dada em (7.72). De (7.65) temos que

$$\alpha_5 u + \alpha_6 + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7)b = 0$$

e daí, $\alpha_5 = 0$ e $\alpha_7 = \alpha_1 + \frac{\alpha_6}{2b}$. Dessa forma,

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_6}{2b}\right)t + \alpha_8, \\ \xi_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta(t, u) = \alpha_6. \end{cases}$$

Portanto, as simetrias admitidas por $S(u) = ce^u u_{tt}$ são

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } X_4 = t \frac{\partial}{\partial t} + 2b \frac{\partial}{\partial u}. \quad (7.76)$$

⊙ Se $a = \frac{1}{3}$, temos de (7.71) que $\alpha_4 = 3\alpha_3 b$. Voltando a (7.65)

$$\frac{2}{3}(2\alpha_5 + \alpha_1 - \alpha_7)u + \alpha_6 + (\alpha_5 + 2\alpha_1 - 2\alpha_7)b = 0. \quad (7.77)$$

Da equação (7.77), $\alpha_7 = 2\alpha_5 + \alpha_1$ e $\alpha_6 = 3\alpha_5 b$. Assim,

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \alpha_3 t^2 + (2\alpha_5 + \alpha_1)t + \alpha_8, \\ \xi_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, \\ \eta(t, u) = \alpha_3(u + 3b)t + \alpha_5(u + 3b). \end{cases}$$

Portanto, a EDP $S(u) = c \left(\frac{1}{3}u + b \right)^3 u_{tt}$, admite álgebra de Lie 5-dimensional gerada por

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + (u + 3b) \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (u + 3b)t \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

□

Assim como com a equação (7.47) foi feito cálculo de simetrias de Lie para a equação $S(u) = f(u)(u_{tt})^2$ e observou-se a generalização no expoente de u_{tt} , dada no teorema a seguir.

Teorema 22. *A equação*

$$S(u) = f(u)(u_{tt})^n$$

admite as simetrias de Lie dadas na tabela 6.

Tabela 6 – Simetrias da equação $S(u) = f(u)(u_{tt})^n, n \neq 0, f \neq 0$

Valores de $f(u)$	Simetrias de Lie
$f(u)$ arbitrária	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + nx\partial_x$
$f(u) = k = cte$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + nx\partial_x$ $X_4 = \partial_u, X_5 = t\partial_u, X_6 = t\partial_t + 2u\partial_u$
$f(u) = c(au + b)^{\frac{1}{a}}, a \neq \left\{ \frac{1}{3}, 0 \right\}$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + nx\partial_x$ $X_4 = (1 + na)t\partial_t + 2n(au + b)\partial_u$
$f(u) = ce^u$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + nx\partial_x$ $X_4 = t\partial_t + 2nb\partial_u$
$f(u) = c \left(\frac{1}{3n}u + b \right)^{3n}$	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + nx\partial_x$ $X_4 = 2t\partial_t + (u + 3nb)\partial_u, X_5 = t^2\partial_t + (u + 3nb)t\partial_u$

Demonstração. A prova desse teorema é feita de forma análoga ao que foi feito para o caso $n = 1$. □

Neste capítulo, fizemos uma reflexão sobre algumas equações diferenciais parciais envolvendo o Schwarziano e suas simetrias, vimos a partir daí que, apensar de uma determinada equação admitir um certo conjunto de simetrias de Lie, tais simetrias não

necessariamente irão especificar completamente aquela equação, grosso modo, nem sempre temos um se, e somente se. Além disso, assim como fizemos com os sistemas de EDOs no capítulo 6, ao utilizar as simetrias de Lie admitidas pela equação de SKdV, para encontrar o sistema mais geral de um tipo de EDPs que admite tais geradores, encontramos sistemas de equações que são uma boa generalização da equação de SKdV para sistemas, o que nos faz pensar que geradores de simetrias admitidos por determinada equação envolvendo o Schwarziano levam a sistemas de equações diferenciais semelhantes, mas, para provar isto, seria necessário generalizar e não apenas utilizar exemplos. Por fim, propomos uma generalização direta de um caso particular da equação EKSG, a saber, $S(y) = f(y)(y')^2$ para o campo de EDPs e calculamos suas respectivas simetrias.

Os capítulos 6 e 7 são apenas um começo para amplos estudos que podem ser feitos envolvendo equações e sistemas de equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz, muito ainda pode ser estudado para tais equações e sistemas, como por exemplo, buscar leis de conservação e possíveis equivalências.

8 Considerações Finais

Ainda há muito o que estudar sobre equações envolvendo o Schwarziano, tanto no âmbito real, quanto em análise complexa. Nesta tese, obtivemos resultados que certamente serão úteis para estudos posteriores de modelos e equações envolvendo a EKSG. Esses resultados simplificarão o trabalho de futuros pesquisadores interessados, visto que nossos resultados envolvem a linearização de equações do tipo da EKSG, não só mostram um leque de EKSGs que são linearizáveis a $w'''(t) = 0$ como também apresentam as respectivas transformações que as linearizam. Uma vez que tais equações são linearizadas, podemos fazer uso de numerosas ferramentas do campo das equações lineares. Além de apresentar ideias de novos sistemas de equações diferenciais envolvendo o Schwarziano mostramos a impossibilidade de um sistema geral de duas equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz possuírem o Lagrangiano, o que implica não ser possível aplicar o famoso Teorema de Noether [27] para tais sistemas. A seguir, seguem, resumidamente, uma lista dos resultados que obtivemos nesta tese:

- Teorema 5: As únicas equações da forma da EKSG linearizáveis a $w'''(t) = 0$ via transformações de contato são: (3.1), (3.2) e (3.3) e as transformações que as linearizam são respectivamente (3.4), (3.6) e (3.8);
- Teorema 6: As equações diferenciais da forma EKSG que são linearizáveis através da mudança na variável dependente e independente a $w''(t) = 0$ tem a forma (3.17) e as transformações que linearizam são dadas por (3.18) e (3.19);
- Teorema 7: Grupo de equivalência da EKSG;
- Teorema 8: A equação (4.43) é equivalente a (4.45) através da transformação (4.31);
- Teorema 9: A equação (4.47) é equivalente a (4.48) através da transformação (4.41);
- Teorema 10: As equações (4.45) e (4.48) são equivalentes a $\bar{Y}'''(\bar{X}) = 0$ através da transformação (4.63) e (4.65) respectivamente;
- Teorema 11: As equações (4.43) e (4.47) são equivalente a $u'''(t) = 0$ através da transformação (4.67) e (4.69) respectivamente;
- Teorema 13: Excluindo-se os casos abordados nos teoremas 5 e 6, a EKSG admite, para dados n e $f(y, y')$, as simetrias de contato dadas na Tabela 2.
- Teorema 14: O sistema (6.16) determina as componentes $\xi(x, q^j)$ e $\eta^i(x, q^j)$ do gerador de simetria de Lie X em (6.7) em que um conjunto de equações ω^i em (6.6) é dado.

- Teorema 15: Simetrias de Lie do sistema (6.17);
- Teorema 16: Simetrias de Lie do sistema (6.35);
- Teorema 17: O sistema de terceira ordem da forma (6.51) mais geral admitindo a álgebra $sl(2, \mathbb{R}) = \text{Span}\{Y_1 = \partial_x, Y_2 = x\partial_x, Y_3 = x^2\partial_x\}$ envolve a derivada de Schwarz e é dado por (6.52);
- Teorema 19: O sistema (6.66) não possui Lagrangiano para quaisquer que sejam $f(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx})$ e $g(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx})$. Em particular, os sistemas (6.17), (6.35) e (6.52) não possuem Lagrangiano;
- Teorema 20: O sistema de EDPs da forma (7.20) mais geral admitida pelos geradores de simetria (7.21) é dado por (7.45);
- Teorema 21: Simetrias de Lie de $S(u) = f(u)u_{tt}$;
- Teorema 22: Simetrias de Lie de $S(u) = f(u)u_{tt}^n$.

A partir desta tese, até o presente momento foram realizadas as seguintes publicações:

- Bozhkov, Y. D.; da Conceição, P. R. On the generalizations of the Kummer–Schwarz equation. *Nonlinear Analysis*, Elsevier, v. 192, p. 111691, 2020.
- Bozhkov, Y. D.; da Conceição, P. R. Differential Equations Involving the Schwarzian Derivative. *AIP Conf. Proc.* 2020, 12a conferência online AMiTaNS’20. No prelo.

Finalmente, esta tese abordou, sob as lentes da teoria de simetria de Sophus Lie, um estudo aprofundado de equações diferenciais envolvendo o Schwarziano. Com esse estudo, obtivemos resultados relevantes. Com o objetivo de ampliar posteriormente os estudos referentes às equações diferenciais envolvendo a derivada de Schwarz, propomos uma extensão da EKSG no campo dos complexos. Consideramos soluções complexas da EKSG, isso é, soluções de

$$\frac{y'''}{y'} + (n_1 + in_2) \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = f(y, y'), \quad (8.1)$$

em que $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, ou seja, $y(x)$ é da forma $y(x) = u(x) + iv(x)$. A partir disso, fazendo $f(y, y') = f(u + iv, u' + iv') = U(u, v, u', v') + iV(u, v, u', v')$, reduzimos o estudo de (8.1) ao de um sistema de duas equações diferenciais relacionado as partes real e imaginária, a saber

$$\begin{cases} u'u''' - v'v''' + n_1(u'')^2 - 2n_2u''v'' - n_1(v'')^2 = U((u')^2 - (v')^2) - 2Vu'v', \\ u'v''' + v'u''' + n_2(u'')^2 + 2n_1u''v'' - n_2(v'')^2 = V((u')^2 - (v')^2) + 2Uu'v'. \end{cases} \quad (8.2)$$

O sistema acima é um sistema real de equações diferenciais. Para início da abordagem podemos buscar um modo de simplificá-lo, utilizando grupos contínuos de equivalência,

semelhante ao que foi realizado nesta tese e, posteriormente, buscar por simetrias de contato e possíveis soluções de (8.1).

Referências

- [1] Anco, S. C.; Avdonina, E. D.; Gainetdinova, A.; Galiakberova, L. R.; Ibragimov, N. H.; Wolf, T. *Symmetries and conservation laws of the generalized Krichever–Novikov equation*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, IOP Publishing, v. 49, n. 10, p. 105201, (2016). Citado na página 90.
- [2] Belokurov, V. V.; Shavgulidze, E. T. *Unusual view of the Schwarzian theory*, Modern Physics Letters A 33, No. 37, 1850221 (7 pages) (2018) Citado na página 15.
- [3] Bidabad, B.; Sedighi, F. *The Schwarzian derivative and conformal transformation on Finsler manifolds*. arXiv preprint arXiv:2002.08015, (2020). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 20.
- [4] Bluman, G. W.; Kumei, S. *Symmetries and differential equations*, Applied Mathematical Sciences. [S.l.]: Springer, v. 81, (1989) Citado 8 vezes nas páginas 15, 24, 25, 26, 63, 93, 97 e 121.
- [5] Brown, P. R.; Porter, R. M. *Numerical Conformal Mapping to One-Tooth Gear-Shaped Domains and Applications*. Computational Methods and Function Theory, v. 16, n. 2, p. 319-345, (2016). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- [6] Boyce, W.; DiPrima, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC, (2010). Citado na página 23.
- [7] Bozhkov, Y. *The group classification of Lane–Emden systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications v. 426, n. 1, p. 89-104, (2015). Citado na página 77.
- [8] Bozhkov, Y. D.; da Conceição, P. R. *On the generalizations of the Kummer–Schwarz equation*. Nonlinear Analysis, Elsevier, v. 192, p. 111691, (2020). Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 36, 53 e 83.
- [9] Y. D.; da Conceição, P. R. *Differential Equations Involving the Schwarzian Derivative*. AIP Conf. Proc. 2020, 12a Conferência internacional online AMiTaNS’20, v. 2302. p. 060001, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 16, 86 e 96.
- [10] Bozhkov, Y.; Martins, A. C. G. *Lie point symmetries of the Lane–Emden systems*. Journal of mathematical analysis and applications, v. 294, n. 1, p. 334-344, (2004). Citado na página 77.
- [11] Bruzón, M.; Gandarias, M. *Classical and nonclassical symmetries for the Krichever–Novikov equation*. Theoretical and Mathematical Physics, Springer, v. 168, n. 1, p. 875, (2011). Citado na página 90.

- [12] Carinena, J. F.; Grabowski, J.; de Lucas, J.; Sardón, C. *Dirac–Lie systems and Schwarzian equations*. Journal of Differential Equations, v. 257, n. 7, p. 2303-2340, (2014). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- [13] Conceição, P. R. da. *Estudo do problema de Kepler via simetrias de Lie*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2017). Citado na página 86.
- [14] De Lucas, J.; Sardón, C. *On Lie systems and Kummer-Schwarz equations*. Journal of Mathematical Physics, v. 54, n. 3, p. 033505, (2013). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- [15] Dedekind, R. *Über Die Elliptischen Modul-Functionen*, J. Reine Angew. Math, v. 83, p. 265-292, (1877). Citado na página 14.
- [16] Dubrovin, B.A; Fomenko A. T; Novikov S.P. *Modern geometry - methods and applications. part I. the geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, in: Graduate Texts in Mathematics, v. 93, Springer-Verlag, New York, (1992). Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 36.
- [17] Duval, C.; Ovsienko, V. *Lorentzian worldlines and the Schwarzian derivative*. Functional Analysis and its applications, v. 34, n. 2, p. 135-137, (2000). Citado na página 14.
- [18] El Basraoui, A; McKay, J. *The Schwarzian equation for completely replicable functions*. LMS Journal of Computation and Mathematics 20.1 p. 30-52, (2017). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- [19] Euler, M.; Euler, N.; Leach, P. *The Riccati and Ermakov-Pinney hierarchies*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Taylor and Francis, v. 14, n. 2, p. 290-310, (2007). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- [20] Euler, N.; Euler, M. *Multipotentialisations and iterating-solution formulae: the Krichever–Novikov equation*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, v. 16, n. supp01, p. 93-106, (2009). Citado na página 90.
- [21] Gainetdinova, A. A.; Ibragimov, N. H.; Meleshko, S. V. *Group classification of ODE $y''' = F(x, y, y')$* . Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 19, n. 2, p. 345-349, (2014). Citado 3 vezes nas páginas 63, 64 e 65.
- [22] Galiakberova, L. R.; Ibragimov, N. H. *Nonlinear self-adjointness of the Krichever–Novikov equation*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 19, n. 2, p. 361-363, (2014). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 90.

- [23] Gandarias, M. L.; Ibragimov, N. H. *Equivalence group of a fourth-order evolution equation unifying various non-linear models*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 259-268, (2008). Citado 2 vezes nas páginas 45 e 97.
- [24] Gibbons, G. W. *Dark energy and the Schwarzian derivative*. ArXiv:1403.5431, (2014). Citado na página 15.
- [25] Hua-Mei, L. I. *The Soliton Solution of $(3+1)$ -Dimensional Kadomtsev–Petviashvili Equations*. Communications in Theoretical Physics, v. 37, n. 5, p. 561, (2002). Citado na página 90.
- [26] Hydon, P. E. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. Cambridge University Press, v. 22, (2000). Citado na página 28.
- [27] Ibragimov, N. H. *Construction of conservation laws using symmetries*. In: Similarity and Symmetry Methods. Springer, Cham, p. 61-164, (2014). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 106.
- [28] Ibragimov, N. H. *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations*. [S.l.]: CRC press, v. 3, (1995). Citado 4 vezes nas páginas 15, 19, 29 e 36.
- [29] Ibragimov, N. H. *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*. [S.l.]: Wiley New York, v. 197, (1999). Citado 5 vezes nas páginas 15, 22, 24, 28 e 93.
- [30] Ibragimov, N. H. *Equivalence groups and invariants of linear and non-linear equations*. Archives of ALGA, ALGA Publications Karlskrona, Sweden, v. 1, p. 9-69, (2004). Citado 3 vezes nas páginas 45, 54 e 97.
- [31] Ibragimov, N. H. *Archives of ALGA*, v. 5, [S.l.]: ALGA publications, BTH, (2010). Citado 2 vezes nas páginas 45 e 97.
- [32] Ibragimov, N. H.; Meleshko, S. V. *Linearization of third-order ordinary differential equations by point and contact transformations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 308, n. 1, p. 266-289, (2005).
- [33] Langley, J. K. *The Schwarzian derivative and the Wiman-Valiron property*. Journal d'Analyse Mathématique, v. 130, n. 1, p. 71-89, (2016). Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- [34] Krichever, I. M.; Novikov, S. P. Sov. Math. Dokl. 20 , p. 650-654, (1979). Citado na página 20.
- [35] Lavie, M. *The Schwarzian derivative and disconjugacy of n -th order linear differential equations*, Canad. J. Math. 21, p. 235-239, (1969). Citado na página 15.

- [36] Leach, P. *Symmetry and singularity properties of the generalised Kummer–Schwarz and related equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, v. 348, n. 1, p. 487-493, (2008). Citado na página 14.
- [37] Leach, P.; Govinder, K. *On the uniqueness of the Schwarzian and linearisation by nonlocal contact transformation*. Journal of mathematical analysis and applications, Elsevier, v. 235, n. 1, p. 84-107, (1999). Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 37.
Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 29.
- [38] Meleshko, S. V. *Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, (2006). Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 33.
- [39] Meleshko, S. V. *On linearization of third-order ordinary differential equations*. Journal of Physics A: Mathematical and General, IOP Publishing, v. 39, n. 49, p. 15135, (2006). Citado na página 33.
- [40] Mertens, T. G.; Turiaci G. J.; Verlinde, H. L. *Solving the Schwarzian via the conformal bootstrap*, J. High Energy Phys. v. 2017, n. 8, p. 136, (2017). Citado na página 15.
- [41] Nehari, Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 55, n. 6, p. 545-551, (1949) Citado na página 14.
- [42] Nehari, Z. *Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative*, *Illinois Journal of Mathematics*, v. 23, n. 3, p. 345-351, (1979). Citado na página 14.
- [43] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F. *James Joseph Sylvester*, Mac Tutor. Link: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/>. Citado na página 14.
- [44] Olver, P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, v. 107, (2012). Citado 4 vezes nas páginas 24, 47, 86 e 87.
- [45] Ovsienko, V. *Lagrange Schwarzian derivative and symplectic Sturm theory*. In: *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Mathématiques*. [S.l.: s.n.], v. 2, n. 1, p. 73–96, (1993). Citado na página 18.
- [46] Ovsienko, V.; Tabachnikov, S. *What is the Schwarzian derivative?* *Notices of the AMS*, v. 56, n. 1, p. 34-36, (2009). Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 18 e 19.
- [47] Ovsyannikov, L. V. *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Pres, New York, (1982). Received: March, v. 15, (2014). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.
- [48] Plyushchay, M. S. *Schwarzian derivative treatment of the quantum second-order supersymmetry anomaly, and coupling-constant metamorphosis*. *Annals of Physics*, v. 377, p. 164-179, (2017). Citado na página 18.

-
- [49] Stanford, D.; Witten, E. *Fermionic localization of the Schwarzian theory*, J. High Energy Phys. 10 (2017), 008. Citado na página 15.
- [50] Stephani, H. *Differential Equations: their solution using symmetries*. [S.l.]: Cambridge University Press, (1989). Citado 3 vezes nas páginas 24, 74 e 76.
- [51] Weiss, J. *Modified equations, rational solutions, and the Painlevé property for the Kadomtsev–Petviashvili and Hirota–Satsuma equations*. Journal of mathematical physics, v. 26, n. 9, p. 2174-2180, (1985). Citado na página 90.
- [52] Wolfram Research, Inc., Mathematica (Student Edition), Version 11.3 and 12.1, Champaign, IL (2018/2021). Citado na página 116.
- [53] Wolfram Research, Inc., Wolfram|Alpha Knowledgebase, Champaign, IL (2019/2020). Citado na página 116.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo das transformações de contato do teorema 5

Este apêndice tem como objetivo expor o cálculo das transformações de contato (3.4), (3.6) e (3.8) que linearizam, respectivamente, as equações diferenciais (3.1), (3.2) e (3.3) à equação $u'''(t) = 0$. Para isso utilizamos o sistema de equações do teorema 3 de Meleshko. Reescrevendo a equação (2.66) na forma (3.10)

$$y''' + \frac{n}{p}(y'')^2 - f(y, p)p = 0,$$

em que $y' = p$, extraímos os valores das constantes a, b, c e d

$$a = 0, \quad b = \frac{n}{p}, \quad c = 0 \quad \text{e} \quad d = -f(y, p)p.$$

Considerando que $a = c = 0$, $b = b(p)$ e $d = d(y, p)$, as equações (2.35)-(2.52) se reduzem à

$$\psi_x = gH - p(g\varphi_y + k), \quad (\text{A.1})$$

$$\psi_y = g\varphi_y + k, \quad (\text{A.2})$$

$$\psi_p = g\varphi_p, \quad (\text{A.3})$$

$$3\varphi_p^2 g_x = -3kp\varphi_{pp} + 3Hg_p\varphi_p + \varphi_p(bkp - 3pg_p\varphi_y - 3k), \quad (\text{A.4})$$

$$3\varphi_p^2 g_y = 3k\varphi_{pp} + \varphi_p(3g_p\varphi_y - bk), \quad (\text{A.5})$$

$$g_{pp}\varphi_p = g_p\varphi_{pp}, \quad (\text{A.6})$$

$$54\varphi_{yy}\varphi_p^2 = 6H\varphi_p\varphi_y(-2b^2 + 3b_p) + 2\varphi_p(-12b^2d\varphi_p^2 - 9bd_p\varphi_p^2 + 9db_p\varphi_p^2 + 9b\varphi_y^2) - 54\varphi_{pp}\varphi_y^2 + 108\varphi_p\varphi_y\varphi_{yp} \quad (\text{A.7})$$

$$54\varphi_{ppy}\varphi_p^2 = 3\varphi_p^2\varphi_y(b^2 - 3b_p) - 18b\varphi_p^2\varphi_{yp} + 18b\varphi_p\varphi_{pp}\varphi_y - 27\varphi_{pp}^2\varphi_y + 108\varphi_p\varphi_{pp}\varphi_{yp}, \quad (\text{A.8})$$

$$6\varphi_p\varphi_{ppp} = 9\varphi_{pp}^2 + \varphi_p^2(-b^2 + 3b_p), \quad (\text{A.9})$$

$$54\varphi_p^2\varphi_{xx} = 6(2pb^2 - 3b - 3b_p p)\varphi_p H^2 + 54\varphi_{pp} H^2 + \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} & \varphi_p\varphi_y(-12b^2p^2 + 18b_p p^2 + 54)H - 108p\varphi_p\varphi_{yp}H - \\ & 54\varphi_{pp}\varphi_y^2p^2 + 2(9db_p\varphi_p^2p^2 + 9b\varphi_y^2p^2 - 9d_p\varphi_p^2bp^2 - 12\varphi_p^2b^2dp^2 - \\ & 27d_p\varphi_p^2p - 27\varphi_y^2p - 18\varphi_p^2bdp + 27d\varphi_p^2)\varphi_p + 108p^2\varphi_p\varphi_y\varphi_{yp}, \\ 54\varphi_p^2\varphi_{xy} &= 3(-2b^2 + 3b_p)\varphi_p H^2 + 6\varphi_p\varphi_y(2b^2p - 3b_p p)H + \quad (\text{A.11}) \\ & 54\varphi_p\varphi_{yp}H - 108\varphi_{yp}\varphi_p\varphi_{yp} + \varphi_p(24b^2d\varphi_p^2p + 18bd_p\varphi_p^2p - 18\varphi_y^2bp - \\ & 18b_p\varphi_p^2dp + 18bd\varphi_p^2 + 27d_p\varphi_p^2 + 27\varphi_y^2) + 54p\varphi_y^2\varphi_{pp}, \end{aligned}$$

$$3\varphi_p\varphi_{px} = 3H\varphi_{pp} - 3p\varphi_p\varphi_{yp} - 2bH\varphi_p, \quad (\text{A.12})$$

$$18\varphi_p^2 H_x = 18H^2\varphi_{pp} - 18Hp\varphi_p\varphi_{yp} + H^2\varphi_p(2b^2p - 3pb_p - 6b) + 18H\varphi_p\varphi_y + \varphi_p(-6bdp\varphi_p^2 + 18d\varphi_p^2 - 9pd_p\varphi_p^2 - 9p\varphi_y^2), \quad (\text{A.13})$$

$$18\varphi_p H_y = 18H\varphi_{yp} + H^2(-2b^2 + 3b_p) + 6bd\varphi_p^2 + 9d_p\varphi_p^2 + 9\varphi_y^2, \quad (\text{A.14})$$

$$3\varphi_p H_p = 3H\varphi_{pp} - 2bH\varphi_p + \varphi_p(3\varphi_y), \quad (\text{A.15})$$

$$9\varphi_p^2 k_x = 9Hk\varphi_{pp} + 9kp\varphi_{pp}\varphi_y - 18kp\varphi_p\varphi_{yp} + Hk\varphi_p(2b^2p - 3b - 3pb_p) + 3k\varphi_p\varphi_y(-bp + 3), \quad (\text{A.16})$$

$$9\varphi_p^2 k_y = -9k\varphi_{pp}\varphi_y + 18k\varphi_p\varphi_{yp} + Hk\varphi_p(-2b^2 + 3b_p) + 3k\varphi_p b\varphi_y, \quad (\text{A.17})$$

$$3\varphi_p k_p = 3k\varphi_{pp} - bk\varphi_p, \quad (\text{A.18})$$

onde k e H são dados em (2.53). Inicialmente, consideramos $b = \frac{n}{p}$. Resolvendo a equação (A.6) em termos de g , temos que¹

$$g = g_1(x, y)\varphi + g_2(x, y). \quad (\text{A.19})$$

Em seguida, utilizamos a equação (A.18) para obter uma expressão para k

$$k = k_1(x, y)p^{-\frac{n}{3}}\varphi_p. \quad (\text{A.20})$$

Da equação (A.4), sendo $k_1 \neq 0$, temos que

$$\varphi_{pp} = \frac{\varphi_p}{3pk_1}((n-3)k_1 - 3p^{n/3}(g_{1x}\varphi + g_{2x})), \quad (\text{A.21})$$

substituindo (A.21) em (A.5) obtemos uma expressão para φ

$$\varphi = -\frac{pg_{2y} + g_{2x} + p^{-\frac{n}{3}}k_1}{pg_{1y} + g_{1x}}. \quad (\text{A.22})$$

A partir daqui, vamos considerar as três equações (3.1), (3.2) e (3.3) particularmente.

A.1 Equação (3.1)

A equação (3.1) fornece $b = 0$ e $d = -C_1 - C_2p$. Substituindo (A.22) em (A.4), temos²

$$g_{2y}g_{1x} + g_{1y}(k_1 - g_{2x}) = 0, \quad (\text{A.23})$$

supondo $g_{1y} \neq 0$ obtemos uma expressão para k_1

$$k_1 = \frac{g_{1y}g_{2x} - g_{2y}g_{1x}}{g_{1y}}. \quad (\text{A.24})$$

¹ Os cálculos realizados neste apêndice foram feitos utilizando o software Mathematica [52]. O software também foi utilizado para alguns cálculos ao longo da tese, inclusive Wolfram|Alpha [53]

² Trocamos as constantes k_1 e k_2 pois utilizamos k_1 na expressão para k em (A.20)

Substituindo o que temos em (A.8), teremos

$$g_{2y}g_{1yy} - g_{1y}g_{2yy} = 0,$$

e isto implica que $g_2 = g_3(x)g_1 + g_4(x)$. A equação (A.15) produz

$$-2g_{3x}(g_{1y})^2 + g_1 + g_{3x}g_{1yy} + g_{4x}g_{1yy} = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$-g_{4xx}g_{1y} - 2g_{3x}g_{1y}g_{1x} + g_{4x}g_{1xy} + g_1(g_{3x}g_{1xy} - g_{3xx}g_{1y}) = 0. \quad (\text{A.26})$$

Resolvendo (A.25) para g_1 , supondo $g_{3x} \neq 0$ obtemos

$$g_1 = -\frac{g_5(x)g_{3x}g_{4x}y + g_5(x)g_6(x)g_{3x}g_{4x} + 1}{g_5(x)(y + g_6(x))g_{3x}^2}, \quad (\text{A.27})$$

em que $g_5(x) \neq 0$, substituindo g_1 em (A.26), temos

$$(g_5)^2 g_{3x} (g_{3x}g_{4xx} - g_{3xx}g_{4x})y - g_{3x} ((g_5)^2 g_6 g_{3xx}g_{4x} + g_{5x}) + (g_5)^2 g_6 g_{3x}^2 g_{4xx} - g_5 g_{3xx} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Em (A.28), temos uma identidade em y que produz

$$(g_{3x}g_{4xx} - g_{3xx}g_{4x}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$-g_{3x} ((g_5)^2 g_6 g_{3xx}g_{4x} + g_{5x}) + (g_5)^2 g_6 g_{3x}^2 g_{4xx} - g_5 g_{3xx} = 0. \quad (\text{A.30})$$

Resolvendo (A.29) para g_4 , obtemos $g_4 = \alpha_1 g_3 + \alpha_2$, tomemos $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$, assim $g_4 = 0$, que substituindo em (A.30) obtemos

$$g_{3x}g_{5x} + g_5 g_{3xx} = 0,$$

cuja solução para g_5 , tomando a constante de integração igual a um, é $g_5 = \frac{1}{g_{3x}}$. Até aqui, temos

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2g_{3x}^2(g_6 + y)}{g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y)} - g_3, \\ g &= -\frac{2g_{3x}}{g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y)}, \\ k &= \frac{2g_{3x}^3}{(g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y))^2}, \end{aligned}$$

em que $g_3 = g_3(x)$ e $g_6 = g_6(x)$. Com isso, (A.7),(A.9),(A.12),(A.16) e (A.17) estão satisfeitas. A equação (A.14) fornece o seguinte

$$2g_{3xxx}g_{3x} - 3(g_{3xx})^2 + C_2(g_{3x})^2 = 0, \quad (\text{A.31})$$

ou seja, $S(g_3)(x) = -\frac{C_2}{2}$. Substituindo o que temos em (A.13), teremos uma equação em termos de g_6 , C_1 e C_2

$$g_{6xxx} - C_2 g_{6x} + C_1 = 0. \quad (\text{A.32})$$

Daí, as equações (A.9) e (A.9) são satisfeitas. Finalmente, nos resta analisar as equações (A.1)-(A.3) e encontrar uma expressão para u . De (A.1), temos

$$u = -\frac{2g_{3x}^3(g_6 + y)}{(g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y))^2} + u_1(y, p), \quad (\text{A.33})$$

substituindo nas equações (A.2) e (A.3) teremos, respectivamente, $u_{1y} = 0$ e $u_{1p} = 0$, ou seja, $u_1 = cte$ que tomaremos como nula. Portanto, a transformação que lineariza (3.1) é dada por

$$\begin{cases} \varphi = \frac{2g_{3x}^2(g_6 + y)}{g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y)} - g_3, \\ u = -\frac{2g_{3x}^3(g_6 + y)}{(g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y))^2}, \\ g = -\frac{2g_{3x}}{g_{3x}(g_{6x} + p) + g_{3xx}(g_6 + y)}, \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

em que, $g_3(x)$ e $g_6(x)$ são tais que $S(g_3)(x) = -\frac{C_2}{2}$ e $g_{6xxx} - C_2g_{6x} + C_1 = 0$.

A.2 Equação (3.2)

A equação (3.2) fornece $b = -\frac{3}{2p}$ e $d = -f(y)p^3 - Cp$. Substituindo os dados que temos em (A.4), utilizando $n = -\frac{3}{2}$, obtemos uma identidade em p que produzirá³

$$(g_{1x}g_{2y} - g_{1y}g_{2x})^2 + g_{1y}g_{1x}k_1^2 = 0 \quad (\text{A.35})$$

Vamos supor que $g_{1x} = 0$ e $g_{2x} = 0$. Com isso (A.4), (A.5), (A.8), (A.9) e (A.17) estão satisfeitas. As equações (A.12) e (A.15) produzem

$$g_{1x}g_{2xx} - g_{1xx}g_{2x} = 0, \quad (\text{A.36})$$

que resolvendo para g_2 nos dá $g_2 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2$. Tomamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e com isso $g_2 = 0$. A equação (A.16) produz

$$g_{1xx}k_1 - 2g_{1y}k_{1x} = 0 \quad (\text{A.37})$$

cujas soluções para k_1 é dada por $k_1 = k_2(y)\sqrt{g_{1x}}$. As equações (A.7) e (A.14) produzem

$$2k_2k_{2yy} - 4k_{2y}^2 + f(y)k_2^2 = 0. \quad (\text{A.38})$$

As equações (A.9) e (A.13) nos fornecem uma expressão para g_1

$$-2g_{1xxx}g_{1x} + 3(g_{1xx})^2 + 2C(g_{1x})^2 = 0, \quad (\text{A.39})$$

³ Trocamos as constantes k_1 pois utilizamos k_1 na expressão para k em (A.20)

ou seja, $S(g_1)(x) = C$. Finalmente, de (A.1) temos uma expressão para $u = \psi$ dada por

$$u = \frac{g_1 k_2^2}{2g_{1x}} p + u_1(y, p), \quad (\text{A.40})$$

Substituindo em (A.3) temos que $u_{1p} = 0$, isto é, $u_1 = u_1(y)$ e então (A.2) produz (desconsiderando a constante de integração)

$$u_1 = -\frac{1}{2} \int_1^y k_2(\tau)^2 d\tau. \quad (\text{A.41})$$

Portanto, a transformação de contato que lineariza (3.2) à $u'''(t) = 0$ é dada por

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{k_2}{\sqrt{g_{1x}}} \sqrt{p}, \\ u = \frac{g_1 k_2^2}{2g_{1x}} p - \frac{1}{2} \int_1^y k_2(\tau)^2 d\tau, \\ g = -\frac{g_1 k_2}{\sqrt{g_{1x}}} \sqrt{p}, \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

em que, $g_1(x)$ e $k_2(y)$ são tais que $S(g_1)(x) = C$ e $2k_2 k_{2yy} - 4k_{2y}^2 + f(y)k_2^2 = 0$. Note que, como $k_2(y)$ é arbitrária, podemos tomar $(k_2)^2 = h_y(y)$ e o sistema (A.42) será o seguinte:

$$\begin{cases} \varphi = -\left(\frac{h_y}{g_{1x}} p\right)^{\frac{1}{2}}, \\ u = \frac{g_1 h_y p - h g_{1x}}{2g_{1x}}, \\ g = -g_1 \left(\frac{h_y}{g_{1x}} p\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

em que, $g_1(x)$ e $k_2(y)$ são tais que $S(g_1)(x) = C$ e $S(h)(y) = -f(y)$

A.3 Equação (3.3)

A equação (3.2) fornece $b = -\frac{3}{p}$ e $d = -f(y)p^4 - Cp^3$. Substituindo (A.22) em (A.5), temos⁴

$$g_{2x}g_{1y} + g_{1x}(k_1 - g_{2y}) = 0, \quad (\text{A.44})$$

supondo $g_{1x} \neq 0$ obtemos uma expressão para k_1

$$k_1 = \frac{g_{2y}g_{1x} - g_{1y}g_{2x}}{g_{1x}}. \quad (\text{A.45})$$

⁴ Trocamos as constantes k_1 pois utilizamos k_1 na expressão para k em (A.20)

Dessa forma, (A.4) e (A.9) estão satisfeitas. Substituindo o que temos em (A.15) produz três equações:

$$g_{1x}g_{2xx} - g_{1xx}g_{2x} = 0, \quad (\text{A.46})$$

$$-2g_{1x}g_{2x}g_{1xy} + 2(g_{1x})^2g_{2xy} - (g_{2y}g_{1x} - g_{1y}g_{2x})g_{1xx} = 0, \quad (\text{A.47})$$

$$(g_{1x})^2g_{2yy} - g_{1x}g_{2x}g_{1yy} - (g_{2y}g_{1x} - g_{1y}g_{2x})g_{1xy} = 0. \quad (\text{A.48})$$

A equação (A.44) produz $g_2 = g_3(y)g_1 + g_4(y)$ que substituindo em (A.47) e resolvendo para g_1 obtemos (supondo $g_{3y} \neq 0$)

$$g_1 = \frac{-xg_5(y)g_{3y}g_{4y} - g_5(y)g_6(y)g_{3y}g_{4y} - 1}{g_5(y)g_{3y}^2(x + g_6(y))}, \quad (\text{A.49})$$

em que $g_5(y) \neq 0$. Substituindo em (A.48) temos

$$g_5^2g_{3y}(g_{3y}g_{4yy} - g_{3yy}g_{4y})x - g_{3y}(g_5^2g_6g_{3yy}g_{4y} + g_{5y}) + g_5^2g_6g_{3y}^2g_{4yy} - g_5g_{3yy} = 0, \quad (\text{A.50})$$

que é uma identidade em x que produz

$$g_{3y}g_{4yy} - g_{3yy}g_{4y} = 0, \quad (\text{A.51})$$

$$-g_{3y}(g_5^2g_6g_{3yy}g_{4y} + g_{5y}) + g_5^2g_6g_{3y}^2g_{4yy} - g_5g_{3yy} = 0. \quad (\text{A.52})$$

Resolvendo (A.51), temos $g_4 = \alpha_1g_3 + \alpha_2$. Tomemos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e então $g_4 = 0$. Substituindo em (A.52) e resolvendo para g_5 teremos $g_5 = \frac{1}{g_{3y}}$, (considerando a constante de integração igual a 1). Com os dados que temos até aqui, (A.9) é completamente satisfeita. As equações (A.11) e (A.13) produzem

$$-2g_{3yyy}g_{3y} + 3(g_{3yy})^2 + C(g_{3y})^2 = 0, \quad (\text{A.53})$$

ou seja, $S(g_3)(y) = \frac{C}{2}$. As equações (A.7) e (A.14) produzem

$$g_{6yyy} + Cg_{6y} - f(y) = 0. \quad (\text{A.54})$$

Finalmente, nos resta utilizar (A.1)-(A.3) para encontrar $u = \psi$. De (A.1)

$$u = -\frac{2p^2g_{3y}^3(g_6 + x)}{(g_{3y}(pg_{6y} + 1) + pg_{3yy}(g_6 + x))^2} + u_1(y, p), \quad (\text{A.55})$$

substituindo nas equações (A.2) e (A.3) teremos, respectivamente, $u_{1y} = 0$ e $u_{1p} = 0$, ou seja, $u_1 = cte$ que tomaremos como nula. Portanto, a transformação que lineariza (3.1) é dada por

$$\begin{cases} \varphi = \frac{2pg_{3y}^2(g_6 + x)}{g_{3y}(pg_{6y} + 1) + pg_{3yy}(g_6 + x)} - g_3, \\ u = -\frac{2p^2g_{3y}^3(g_6 + x)}{(g_{3y}(pg_{6y} + 1) + pg_{3yy}(g_6 + x))^2}, \\ g = -\frac{2pg_{3y}}{g_{3y}(pg_{6y} + 1) + pg_{3yy}(g_6 + x)}, \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

em que, $g_3(y)$ e $g_6(x)$ são tais que $S(g_3)(y) = \frac{C}{2}$ e $g_{6yyy} + Cg_{6y} - f(y) = 0$.

APÊNDICE B – Infinitesimais prolongados até a terceira ordem

Este apêndice apresenta a fórmula explícita dos infinitesimais $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}, \eta_{22}^{(2)}$ dados em [4] e $\eta_{222}^{(3)}$ utilizados para calcular as simetrias de Lie de uma equação diferencial de uma variável dependente (u) e até duas variáveis independentes (t, x).

Considere $u(t, x)$ e o gerador de simetria dado por

$$X = \xi_1(t, x, u)\partial_t + \xi_2(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_y \quad (\text{B.1})$$

e o seu prolongamento até a terceira ordem

$$X^{(3)} = \xi_1\partial_t + \xi_2\partial_x + \eta\partial_u + \eta_1^{(1)}\partial_{u_t} + \eta_2^{(1)}\partial_{u_x} + \eta_{11}^{(2)}\partial_{u_{tt}} + \eta_{22}^{(2)}\partial_{u_{xx}} + \eta_{222}^{(3)}\partial_{u_{xxx}} + \dots$$

De (7.51) e (7.52), temos:

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - u_j D_i\xi_j, \quad (\text{B.2})$$

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = D_{i_k}\eta^{(k-1)} - u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j} D_{i_k}\xi_j. \quad (\text{B.3})$$

Em [4] encontramos $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}$ e $\eta_{22}^{(2)}$ dados por

$$\eta_1^{(1)} = \eta_t + (\eta_u - \xi_{1t})u_t - \xi_{2t}u_x - \xi_{1u}(u_t)^2 - \xi_{2u}u_t u_x, \quad (\text{B.4})$$

$$\eta_2^{(1)} = \eta_x + (\eta_u - \xi_{2x})u_t - \xi_{1x}u_x - \xi_{2u}(u_t)^2 - \xi_{1u}u_t u_x, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)} = & \eta_{1tt} + (2\eta_{tu} - \xi_{1tt})u_t - \xi_{2tt}u_x + (\eta_u - 2\xi_{1t})u_{tt} - 2\xi_{2t}u_{tx} \\ & + (\eta_{uu} - 2\xi_{1tu})(u_t)^2 - 2\xi_{2tu}u_t u_x - \xi_{1uu}(u_t)^3 - \xi_{2uu}(u_t)^2 u_x \\ & - 3\xi_{1u}u_t u_{tt} - \xi_{2u}u_x u_{tt} - 2\xi_{2u}u_t u_{tx}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \eta_{22}^{(2)} = & \eta_{2xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{2xx})u_x - \xi_{1xx}u_t + (\eta_u - 2\xi_{2x})u_{xx} - 2\xi_{1x}u_{tx} \\ & + (\eta_{uu} - 2\xi_{2xu})(u_x)^2 - 2\xi_{2xu}u_t u_x - \xi_{2uu}(u_x)^3 - \xi_{1uu}(u_x)^2 u_t \\ & - 3\xi_{2u}u_x u_{xx} - \xi_{1u}u_t u_{xx} - 2\xi_{2u}u_x u_{tx}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

e para $\eta_{222}^{(3)}$, de (B.3) obtemos

$$\eta_{222}^{(3)} = D_x\eta_{22}^{(2)} - (D_x\xi_1)u_{xxt} - (D_x\xi_2)u_{xxx}, \quad (\text{B.8})$$

que de (B.7) produz

$$\begin{aligned}
\eta_{222}^{(3)} = & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi_{2xxx}) u_x - \xi_{1xxx} u_t + (3\eta_{xu} - 3\xi_{2xx}) u_{xx} - 3\xi_{1xx} u_{tx} \\
& + (3\eta_{xuu} - 3\xi_{2xxu}) (u_x)^2 - 3\xi_{1xxu} u_t u_x + (\eta_{uuu} - 3\xi_{2xuu}) (u_x)^3 - 3\xi_{1xuu} u_t (u_x)^2 \\
& + (3\eta_{uu} - 9\xi_{2xu}) u_x u_{xx} - 3\xi_{1xu} u_t u_{xx} - 6\xi_{1xu} u_x u_{tx} - \xi_{2uuu} (u_x)^4 - \xi_{1uuu} u_t (u_x)^3 \\
& - 6\xi_{2uu} (u_x)^2 u_{xx} - 3\xi_{1uu} u_t u_x u_{xx} - 3\xi_{1uu} (u_x)^2 u_{tx} - 3\xi_{2u} (u_{xx})^2 - 3\xi_{1u} u_{tx} u_{xx} \\
& + (\eta_u - 3\xi_{2x}) u_{xxx} - 4\xi_{2u} u_x u_{xxx} - \xi_{1u} u_t u_{xxx} - 3\xi_{1x} u_{xxt} - 3\xi_{1u} u_x u_{xxx}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$