UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

André Ferreira e Pereira

Estudo de Boa Colocação para Modelos Isotérmicos de Campo de Fase Envolvendo Fluidos Multifásicos

Campinas
2019

André Ferreira e Pereira

Estudo de Boa Colocação para Modelos Isotérmicos de Campo de Fase Envolvendo Fluidos Multifásicos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Gabriela del Valle Planas

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno André Ferreira e Pereira e orientada pela Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas.

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414e

Pereira, André Ferreira e, 1989-
Estudo de boa colocação para modelos isotérmicos de campo de fase envolvendo fluidos multifásicos / André Ferreira e Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Gabriela Del Valle Planas.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelos de campo de fase. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Allen-Cahn, Equação de. 4. Cahn-Hilliard, Equações de. 5. Existência de solução (Equações diferenciais). 6. Regularidade eventual (Equações diferenciais parciais). I. Planas, Gabriela Del Valle, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Well-posedness study of isothermal phase-field models for multiphase flow
Palavras-chave em inglês:
Phase field models
Navier-Stokes equations
Allen-Cahn equation
Cahn-Hilliard equation
Existence of solution (Differential equations)
Eventual regularity (Partial differential equations)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Gabriela Del Valle Planas [Orientador]
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara
Ma To Fu
Luís Henrique de Miranda
Marcelo Martins dos Santos
Data de defesa: 12-07-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-6712-2016
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4310469223479857

Tese de Doutorado defendida em 12 de julho de 2019 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). MA TO FU

Prof(a). Dr(a). LUÍS HENRIQUE DE MIRANDA

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Em primeiro lugar e acima de tudo eu agradeço àquele de quem emana toda verdade, o Pai, e ao Filho por meio de quem tudo o que foi feito se fez, sem o qual nada do que existe teria vindo à existência, Ele que é o verbo de Deus. Também sou grato ao Espírito que é fonte de vida. Sou grato a Deus por esse fato geral de que ele é o autor da existência e da vida, mas sou igualmente grato a Ele pela forma específica em que, na sua soberania, decidiu criar todas as coisas, pois Ele não se limitou a trazer à existência objetos materiais, nem sequer limitou-se a dar a alguns desses objetos vida, mas também deu-nos a capacidade de entender. O fato que entendemos, isso é, que temos a capacidade de apreender verdades, de raciocinar, nos faz superiores aos outros seres. Entretanto, a nossa razão não é o que há de mais elevado, ela está submissa à própria verdade, pois ela se dá justamente ao propósito de buscar a verdade que é quem a julga. Se o que há de mais elevado em nós, que é a razão, está submissa à verdade, então não há nada mais nobre do que o empreendimento em buscar a verdade. Por alguma razão Deus nos deu a matemática, que aparentemente é o mecanismo humano mais impressionante para se buscar verdades, não que eu pense que por meio dela somos capazes de alcançar todas as verdades (longe disso!), nem que ela seja perfeita no intuito de alcançar aquelas verdades que fazem parte da realidade física, mas que, dados certos postulados, ela se propõe a extrair dali apenas afirmações verdadeiras. Esse fato para mim é o que há de mais belo na matemática, eu o vejo como um fragmento do que há de mais sublime, é um pequena demonstração disponibilizada por Deus para que possamos ter uma pequena noção, nem que seja de maneira abstrata e irreal, do quão maravilhoso é estar em contato com a Verdade, e eu sou profundamente grato a Deus por isso.

Sou grato também à minha família, Manuela, Nicole e Giovana. Elas são pessoas maravilhosas que estiveram comigo durante esse período de doutoramento, cada detalhe do convívio familiar certamente teve implicações nessa tese. O esforço da Manuela ao se dedicar no cuidado das crianças e da casa não pode deixar de ser reconhecido aqui, pois isso a fez coparticipante desse trabalho. Sacrifícios foram feitos para que chegássemos até aqui, e eu reconheço todos eles. Pelo carinho e amor demonstrados sou igualmente grato, isso traz ânimo e coragem pra prosseguir.

Minha gratidão também aos demais familiares, meus pais, irmã, cunhados e sogros, que de uma forma ou de outra estiveram por perto, seja fisicamente seja em oração, demonstrando cuidado e preocupação. Incluo nessa lista os meus irmãos em Cristo, que participaram desses momento comigo.

Agradeço à professora Gabriela, que já vem me ensinado por um bom tempo. Sempre vejo nela exemplo de esforço e dedicação, de modo que ela extrapola a função de orientadora, quando com sua atitude e competência ensina princípios que vão além da condução de uma tese. Condução essa, aliás, que foi feita de maneira muito sábia, tendo empatia com minhas dificuldades e limitações, me fornecendo os meios para superar tais empecilhos.

Agradeço aos meus colegas de trabalho do CEFET-MG, que entenderam a importância desse tempo de preparação e pesquisa, de forma que me concederam o afastamento, sem o qual eu não teria concluído o doutorado.

Agradeço os funcionários do IMECC que trabalham para fornecer as condições necessárias para um ambiente adequado para o estudo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço esse apoio financeiro fornecido no primeiro ano do doutorado, certamente foi fundamental para que eu pudesse me dedicar ao estudo e, consequentemente, superar os grandes desafios do primeiro ano de doutorado.

“Eu tinha prometido, se te lembras, de haver de provar que existe uma realidade muito mais sublime do que a nossa mente e nossa razão. Ei-la diante de ti: é a própria Verdade!”
(Sto. Agostinho.)

Resumo

Neste trabalho apresentamos a análise matemática de três modelos de campo de fase que modelam processos isotérmicos. Em dois desses modelos consideramos efeitos de movimentação descritos pelas equações de Navier-Stokes.

O primeiro problema diz respeito a um modelo tridimensional de solidificação de uma liga binária com convecção e sob o efeito de um campo magnético. Discutimos a boa colocação do modelo. Além disso, investigamos a existência de solução quando o coeficiente de difusão da concentração se anula para algum valor do campo de fase.

O segundo modelo estudado é um sistema Cahn-Hilliard/Allen-Cahn que modela um processo de solidificação de uma liga binária. Esse modelo é capaz de prever um fenômeno observável conhecido por *solute trapping*. Para um problema não degenerado revisitamos resultados de existência de solução fraca, mostramos um princípio do máximo, provamos a existência de solução forte (global para o caso bidimensional e local para o caso tridimensional) e por fim obtemos um resultado de continuidade com respeito aos dados iniciais. Além disso, provamos que um sistema degenerado tem uma solução fraca.

O último modelo descreve um fluido multifásico que está sob o efeito de um campo elétrico. Provamos a existência de solução fraca global. Além disso mostramos resultados de regularidade, global no caso bidimensional e local no caso tridimensional.

Palavras-chave: campo de fase, mudança de fase, existência e regularidade de soluções, solidificação, equações de Navier-Stokes, equação de Allen-Cahn, equação de Cahn-Hilliard.

Abstract

In this work, we present a mathematical analysis of three different phase-field models which describe isothermal processes. In two of these models, we consider convection effects that are described by Navier-Stokes equations.

In the first problem, we deal with a three-dimensional model of solidification for a binary alloy with melt convection and under a magnetic field effect. The well-posedness of the model is discussed. Moreover, the existence of a solution when the diffusion coefficient of the concentration equation vanishes for some values of the phase-field is investigated.

The second model studied here is a Cahn-Hilliard/Allen-Cahn system that models a process of solidification of a binary alloy. This model is able to predict an observable phenomenon called *solute trapping*. We revisit results of existence of weak solutions, show a maximum principle, prove the existence of strong solution (global to the bidimensional case and local to the three-dimensional case), and we take a result of continuity with respect to initial data, to a non-degenerate problem. Furthermore, we prove that a degenerate system has a weak solution.

The last problem concerns with a system of equations describing a multi-phase flow under the effect of an electric field. We prove the existence of global weak solutions, global regularity in the bidimensional case and local regularity in the three-dimensional case.

Keywords: phase-field, phase transition, existence and regularity of solution, solidification, Navier-Stokes equations, Allen-Cahn equation, Cahn-Hilliard equation.

Sumário

Introdução

Modelos de campo de fase alcançaram considerável importância por serem úteis na modelagem e simulação de vários fenômenos complexos de crescimento de estruturas. Esse tipo de modelo surge como uma aplicação da teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau [26]. Basicamente, o modelo é derivado a partir de um funcional de energia livre ou de entropia livre que depende de um parâmetro de ordem, conhecido como campo de fase, que caracteriza as diferentes fases. Podemos citar exemplos do modelo de campo de fase aplicado para modelar: processos de solidificação de ligas binárias [46, 47, 48]; separação de fase de fluidos multifásicos [50, 31]; crescimento de tumores [5]; cristalização [24]; forma de uma membrana celular [29]; dano de materiais [7], entre outros. Neste trabalho o modelo de campo de fase é usado para descrever processos de solidificação e processos de separação de fase, ou concentração de soluto no solvente.

Esse tipo de modelo tem sido usado com sucesso para modelar processos de solidificação tanto para materiais puros quanto para ligas binárias. Podemos mencionar [12, 27, 13, 41, 28, 38, 8, 34], entre outros, onde são feitas análises teórica e numérica. No caso de liga binária, o funcional de energia livre (ou de entropia) também depende da concentração do soluto no solvente, veja por exemplo [46, 47, 48].

Modelos de campo de fase para solidificação têm sido estendidos para incluir efeitos de convecção, veja, por exemplo, [3, 6, 45, 36, 37, 9]. De fato, a convecção tem um efeito importante no comportamento do material influenciando no padrão da solidificação; a microestrutura em evolução pode produzir fenômenos complicados e inesperados.

Recentemente, Belmiloudi e Rasheed propuseram, em [40], um modelo de campo de fase para ligas binárias que incorpora convecção e a ação de um campo magnético. As equações da concentração, do campo de fase e da temperatura são deduzidas de um funcional de entropia, o efeito de convecção é incluído acoplando-se a equação de Navier-Stokes e o efeito do campo magnético é introduzido por meio de uma termo de força de Lorentz na equação de Navier-Stokes. Dessa forma, o modelo se transforma em um modelo da magneto-hidrodinâmica (MHD) em que o campo magnético induzido é desprezível quando comparado com o campo magnético imposto. Isso acontece, por exemplo, quando o número de Reynolds magnético é suficientemente pequeno (para uma discussão mais detalhada veja [15]). A análise matemática do caso bidimensional foi feita em [39], pelos mesmos autores que propuseram o modelo. No Capítulo 2 desse trabalho fazemos a análise matemática do caso isotérmico tridimensional e mostramos a existência de solução fraca para um caso quando o coeficiente de difusão da equação da concentração pode se anular. As incógnitas desse modelo são o campo de velocidade $\mathbf{u}$, a pressão p, a função potencial do campo elétrico ϕ, o campo de fase ψ que representa a fase sólida/líquida da liga e a concentração c do soluto no solvente, cuja evolução é dada pelo seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
&\rho_0\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big)=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{A}_1(\psi,c)+b(\psi)((-\nabla\phi+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}),\\
&\text{div } \mathbf{u}=0,\\
&\Delta\phi=\text{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}),\\
&\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi=\epsilon^2\Delta\psi+A_2(\psi,c),\\
&\frac{\partial c}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)c=\text{div}(D(\psi)\nabla c+A_3(\psi,c)\nabla\psi),
\end{aligned}
$$

em $\Omega\times(0,+\infty)$, onde $\mathbf{B}$ representa o campo magnético, $\rho_0>0$ é a densidade, $\mu>0$ é a viscosidade, $\epsilon>0$ é um parâmetro pequeno, $D\geq 0$ é o coeficiente de difusão e $\mathbf{A}_1$, b, A_2 e A_3 são funções não lineares. No caso degenerado, as funções não lineares $\mathbf{A}_1$, A_2 e A_3 tomam uma forma específica, que será discutida detalhadamente no Capítulo 2. Consideramos a condição homogênea de Neumann sobre a fronteira para ϕ, ψ e c, já para $\mathbf{u}$ admitimos a condição homogênea de Dirichlet.

Naturalmente, devido às equações de Navier-Stokes, no caso tridimensional os resultados de regularidade são locais no tempo. Além disso, quando comparado com a análise feita em [39], temos dificuldades adicionais devido ao termo extra $b(\psi)\nabla\phi$ na equação da velocidade e por causa da equação do potencial elétrico ϕ, que, como explicado mais detalhadamente no Capítulo 2, não aparece no modelo bidimensional.

Outras duas equações relacionadas com modelos de campo de fase são a equação de Cahn-Hilliard (**C-H**) e a equação de Allen-Cahn (**A-C**), onde ambas as equações modelam um campo auxiliar que descreve algum tipo de interface. Essencialmente, a diferença é que a equação **C-H** está relacionada com algum parâmetro de ordem que é conservado enquanto que a equação **A-C** está associada com um parâmetro de ordem que não é conservado. No nosso caso, no Capítulo 3, a equação **C-H** está modelando a concentração c de uma determinada substância na outra e a equação **A-C** está modelando um parâmetro de ordem ϕ que descreve a solidificação da liga binária. Estas equações foram propostas em [49] e surgiram a partir de uma modificação do modelo apresentado em [48], essa modificação é feita com o intuito de abranger um fenômeno observado experimentalmente, conhecido como *solute trapping.* Estudamos no Capítulo 3 um sistema de equações que é obtido por meio de uma pequena modificação, que será detalhada na Seção 3.1, nas seguintes equações propostas em [49]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t}&=-M_1\left(\frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi,c)-\epsilon^2\Delta\phi\right),\\
\frac{\partial c}{\partial t}&=\nabla\cdot M_2\left(c(1-c)\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial c}(\phi,c)-\delta^2\Delta c\right)\right),
\end{aligned}
$$

em $\Omega\times(0,+\infty)$, com Ω um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, M_1 e M_2 constantes positivas, $f=f(\phi,c)$ a densidade de energia livre e c, Δc e ϕ satisfazendo a condição homogênea de Neumann sobre a fronteira.

Um profundo trabalho sobre existência de solução para um sistema degenerado de Cahn-Hilliard/Allen-Cahn foi feito por Dal Passo, Giacomeli e Novick-Cohen em [14]. O principal resultado neste artigo é um teorema sobre solução fraca para um problema degenerado, onde eles permitem que a mobilidade se degenere (tanto com respeito a ϕ quanto com respeito a c) bem como é permitido singularidade nas derivadas f_ϕ e f_c da densidade de energia livre f. Para esse fim, primeiramente eles estudaram um sistema regularizado, ou seja, quando a mobilidade é maior que uma constante positiva e as derivadas da densidade de energia livre têm mais regularidade do que no problema original. Demonstra-se a existência de solução fraca para esse problema regularizado, e então eles mostram que uma sequência de soluções do problema regularizado converge para uma solução fraca do problema singular-degenerado.

No Capítulo 3, procedemos na mesma direção que em [14], mas existem algumas diferenças no problema resolvido aqui quando comparado com o deles. Primeiramente, apesar de o nosso resultado sobre solução fraca para o problema não degenerado (veja o Teorema 2.3.2) poder ser visto como um caso particular do Teorema 2.1 em [14], nós exploramos mais a fundo, na Seção 3.2, o problema não degenerado, provando a existência de solução forte local e a unicidade desta solução. Em segundo lugar, no caso degenerado, fomos capazes de evitar as singularidades na derivadas da densidade de energia livre, que é diferente da densidade de energia livre deles, e como veremos na Seção 3.1, essa forma específica da energia livre nos permite estabelecer o sistema de equações de uma forma ligeiramente diferente, de modo que os coeficientes das derivadas da concentração c não tenham singularidades. Vamos permitir que a mobilidade se degenere apenas com respeito ao parâmetro de ordem ϕ, mas nossa demonstração de existência é independente do princípio do máximo e nossa definição de solução fraca para o problema degenerado é ligeiramente diferente. Por exemplo, no nosso caso não foi necessário tomar funções teste que tenham suporte compactamente contido no conjunto onde $0 < c < 1$, como pode ser visto na Seção 3.3.

Como já comentamos anteriormente, os modelos de campo de fase são úteis para descrever fluidos multifásicos, um caso bastante interesante e de grande importância na ciência são os fenômenos da eletrohidrodinâmica em fluidos multifásicos, também conhecidos com "*electrowetting*" no caso em que acontecem efeitos de "parede", isto é, a solução toca uma parede sólida. Este tipo de fenômeno ocorre, por exemplo, quando se tem uma gota de uma determinada substância imersa em um fluido sofrendo o efeito de um campo elétrico, veja por exemplo [16, 20, 31, 50]. Nestes tipos de modelos são combinadas as equações de Navier-Stokes para a velocidade do fluido, de Cahn-Hilliard para o campo de fase, da densidade de carga e do potencial elétrico, de modo que se tem um sistema de equações altamente não linear e envolvendo equações de naturezas distintas. No nosso caso, temos as equações de Navier-Stokes que é um sistema de equações de segunda ordem (descrevendo a velocidade de fluido $\mathbf{u}$ e a pressão p), a equação de Cahn-Hilliard que é de quarta ordem (modelando o parâmetro de ordem c e o potencial químico ϕ), a equação da densidade de carga elétrica ρ que é essencialmente uma equação do transporte (e portanto de primeira ordem) e a equação do potencial elétrico V que é uma equação elíptica de segunda ordem. O sistema de equações que nos dá a evolução no tempo de $\mathbf{u}$, p, V, ρ, c e ϕ é dado por:

$$
\begin{aligned}
&\rho_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + 2\mathrm{div}(\mu(c)D(\mathbf{u})) - \rho\nabla V + \phi\nabla c,\\
&\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0,\\
&\epsilon_0\epsilon_\gamma\Delta V = -\rho,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = -\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_\gamma}\rho,\\
&\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \mathrm{div}(M(c)\nabla\phi),\\
&\phi = \Psi'(c) - \delta^2\Delta c,
\end{aligned}
$$

satisfeito em $\Omega\times(0,+\infty)$, onde $D(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$, ρ_0 é a densidade de massa volumétrica, μ é a viscosidade, ϵ_0 é a permissividade do vácuo, ϵ_γ é a constante dielétrica, σ é a condutividade elétrica, $\delta > 0$ é o coeficiente do gradiente de energia do soluto, M é a mobilidade do campo de fase e Ψ é um potencial de poço duplo (*double well potential*) com mínimos em 0 e 1. Além disso, supomos que a densidade de carga elétrica total é nula, isso é, $\int_\Omega \rho = 0$, e admitiremos as seguintes condições de contorno:

$$
\mathbf{u} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\times(0,+\infty),
$$

em que $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior. Essas equações podem ser vistas como um caso do sistema mais geral de equações proposto em [50], pois assumimos que a densidade de massa, a constante dielétrica e a condutividade elétrica são constantes. Por outro lado, diferentemente do proposto em [50], permitimos que a mobilidade dependa da concentração.

Talvez o trabalho que mais se aproxime do que fizemos no Capítulo 4 da presente tese seja o artigo [16]. Do ponto de vista físico, essencialmente a diferença é que em [16] é considerado o efeito de parede citado anteriormente. No caso da gota imersa em um fluido podemos pensar que o efeito de parede consiste do fato que a gota toca um eletrodo. Do ponto de vista da análise matemática, em [16] são demonstrados resultados de existência de solução fraca em dimensão dois e três. Foi estudado tanto o caso em que a condutividade elétrica não se degenera quanto o caso em que se degenera no exterior da gota. No nosso caso, a equação para a densidade de carga elétrica ρ é uma equação de transporte, já em [16], essa equação é de segunda ordem. Todavia, mostramos, além do resultado de existência de solução fraca, resultados de regularidade de solução tanto para o caso bidimensional quanto para o caso tridimensional. Naturalmente, por conta das equações de Navier-Stokes, provamos apenas resultados de regularidade global para o caso bidimensional. Observamos que as técnicas utilizadas em nosso trabalho são diferentes das de [16] onde é aplicado o método de Galerkin. Aqui combinamos semi-Galerkin, regularização parabólica e ponto fixo, o que nos permite aprofundar a análise da regularidade das soluções.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os principais resultados preliminares utilizados ao longo dos demais capítulos. Começamos fixando algumas notações, depois apresentamos resultados como a desigualdade de Young, desigualdades de Gronwall, resultados de imersão e de interpolação e, por fim, uma vez que no Capítulo 4 aplicamos o método de regularização parabólica, apresentamos alguns resultados para uma equação do transporte regularizada.

1.1 Notações

Notações de conjuntos

1. Em geral, Ω denotará um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

2. Dado um $T > 0$ qualquer, em geral denotamos $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

3. $\partial\Omega$ denotará a fronteira do conjunto Ω.

4. Diremos que a fronteira de Ω, $\partial\Omega$, é de classe C^k se é uma superfície que localmente pode ser parametrizada por uma função de classe C^k de forma que, localmente, os pontos de Ω fiquem do mesmo lados da superfície. Diremos que $\partial\Omega$ é de classe C^∞ se é de classe C^k para todo $k = 1, 2, 3, \cdots$, (veja [17, Apêndice C.1]).

5. Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $B_1 = B(x, \rho)$ uma bola aberta centrada em x e de raio ρ e B_2 uma bola aberta que não contém x, o conjunto

$$C_x = B_1 \cap \{x + \lambda(y - x), y \in B_2, \lambda > 0\}$$

é chamado de cone finito em $\mathbb{R}^n$ de altura ρ e com vértice em x.

6. Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem a *propriedade do cone* se existe um cone finito C tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito C_x contido em Ω e congruente à C.

7. Nos capítulos 2, 3 e 4, Ω será um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞. Veja em [2, Cap. 4, item 4.11] que Ω com estas propriedades satisfaz a propriedade do cone.

Notação de espaços de funções

1. $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$.
2. $C^k_c(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega);\ \text{supp}(u)$ é compacto$\},\ \text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}$.
3. $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$ e $C^\infty_c(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty C^k_c(\Omega)$.
4. $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço $C^\infty_c(\Omega)$, com a seguinte noção de convergência: $u_n \to u$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se exite um compacto $K \subset \Omega$ tal que $u_n \subset C^\infty_c(K)$ e $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ uniformemente $\forall\ \alpha$, onde α está denotando um multi-índice. Dizemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é os espaço das *funções teste* em Ω.
5. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado o espaço das *distribuições* sobre Ω.
6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $\gamma \in (0, 1]$. O espaço de Hölder
$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$$
consiste de todas as funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$, tal que a norma
$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$
é finita. Onde,
$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$
e
$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$
No caso particular em que $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, dizemos que u é uma *função Lipschitz.*
7. $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é Lebesgue mensurável, $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, estará munido com a seguinte norma:
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}|u| = \inf\{C > 0 : |\{x : |f(x)| > C\}| = 0\} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$
No caso $p = 2$ temos um espaço de Hilbert munido com o produto interno
$$(u, v) = \int_\Omega uv,$$
para todo $u,\ v \in L^2(\Omega)$.
8. $\mathbf{L}^p(\Omega) = \{\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n) \mid u_i \in L^p(\Omega)\} = L^p(\Omega)^n$, com norma
$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/n}.$$
No caso $p = 2$, o produto interno fica definido da seguinte maneira:
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i),$$
onde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

9. $W^{k,p}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}$ com $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, α é um multi-índice e $D^\alpha u$ denota a derivada de ordem α de u no sentido das distribuições. Esse espaço estará munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ munido com a norma acima é um espaço de Banach e é chamado *espaço de Sobolev*.

10. $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ é um caso particular em que o espaço de Sobolev é de Hilbert quando munido do produto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \text{ para todo } u,\ v \in H^k(\Omega).$$

11. $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}}$ munido com a mesma norma de $W^{k,p}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ com produto interno de $H^k(\Omega)$.

12. $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)^n$, $\mathbf{H}^k(\Omega) = H^k(\Omega)^n$, $\mathbf{W}_0^{k,p}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)^n$ e $\mathbf{H}_0^k(\Omega) = H_0^k(\Omega)^n$. Todos esses espaços são munidos com as normas e produtos internos usuais, assim como fizemos para $\mathbf{L}^p(\Omega)$.

13. $H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta$, para todo $s \geq 0$ real , $m = s/(1-\theta)$, m inteiro, $0 < \theta < 1$. Aqui $[H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta$ denota um espaço intermediário entre $H^m(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, veja [32, Seção 2 do Capítulo 1].

14. $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in (C_c^\infty(\Omega))^n \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$.

15. $H = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbf{L}^2} = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^n \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$.

16. $V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbf{H}_0^1} = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$.

17. $\mathbf{H} = H \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\mathbf{V} = V \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

18. Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $T > 0$ fixado.

    (a) $L^p(0, T; X) = \{u : [0, T] \to X \mid \|u\|_{L^p(0,T;X)} \leq \infty\}$, onde

    $$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

    (b) $C([0, T]; X) = \{u : [0, T] \to X \mid \|u\|_{C([0,T];X)} \leq \infty\}$, onde

    $$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|.$$

    (c) $W^{1,p}(0, T; X) = \{u : [0, T] \to X \mid u,\ u' \in L^p(0, T; X)\}$, onde u' denota a derivada fraca de u em $[0, T]$, ou seja,

    $$\int_0^T \phi'(t) u(t) \mathrm{dt} = -\int_0^T \phi(t) u'(t) \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(0, T).$$

Notações da Análise Funcional

1. Seja E um espaço normado, com norma $\|\cdot\|$, e E' seu dual topológico.

   (a) Diremos que x_n converge para x na topologia fraca de E, ou que x_n converge fracamente para x em E, e denotamos por
   $$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E,$$
   se para todo funcional em $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$.

   (b) Diremos que f_n converge fraco-estrela para f em E', ou que f_n converge para f na topologia fraca-estrela de E', e denotamos por
   $$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E',$$
   se para todo $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$.

2. Sejam X e Y espaços de Banach, diremos que X está *continuamente imerso* em Y e denotamos por
   $$X \hookrightarrow Y,$$
   se $X \subset Y$ e o operador inclusão é contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que
   $$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall \ x \in X.$$

3. Sejam X e Y espaços de Banach, diremos que X está *compactamente imerso* em Y e denotamos por
   $$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y,$$
   se $X \subset Y$ e o operador inclusão é compacto e contínuo, isto é, toda sequência limitada em X tem subsequência convergente em Y e
   $$X \hookrightarrow Y.$$

1.2 Algumas desigualdades

Nesta seção, listamos algumas desigualdades que serão frequentemente usadas no decorrer deste trabalho.

Os dois próximos teoremas podem ser encontrados no apêndice de Evans [17].

Teorema 1.2.1 (Desigualdade de Young com η)**.** Sejam a, $b > 0$, $1 < p$, $q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para qualquer $\eta > 0$

$$ab \leq \eta a^p + C(\eta) b^q$$

onde $C(\eta) = \frac{1}{(\eta p)^{p/q} q}$.

Teorema 1.2.2 (Desigualdades de Gronwall linear)**.** Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$ e que satisfaz:

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \ \text{ q.t.p em } [0, T],$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções somáveis não negativas em $[0,T]$. Então,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^T \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right] \quad \forall\ t \in [0,T].$$

Em particular, se

$$\frac{d}{dt}\eta \leq \phi\eta \text{ em } [0,T] \text{ e } \eta(0) = 0,$$

então,

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0,T].$$

Outro resultado que será importante é a seguinte desigualdade de Gronwall não linear (veja página 362 de [35]):

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Gronwall não linear)**.** Sejam x, a, b, e k funções contínuas e não negativas em $[0,T]$, $n \geq 2$ um número natural e a/b uma função não decrescente. Se

$$x(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t k(s)x^n(s)ds, \quad t \in [0,T],$$

então

$$x(t) \leq a(t)\left(1 - (n-1)\int_0^t k(s)b(s)a^{n-1}(s)ds\right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad 0 \leq t \leq T_*,$$

em que $T_* = \sup\left\{t \in [0,T] : (n-1)\int_0^t kba^{n-1}ds < 1\right\}$.

1.3 Resultados de imersões e de regularidade

O próximo teorema pode ser encontrado em [17, Teorema 3, cap. 5, sec. 5.6]. Como veremos, uma consequência desse resultado é a desigualdade de Poincaré.

Teorema 1.3.1. Assuma que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < n$. Então temos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ e C depende apenas de $p,\ q,\ n$ e Ω.

Note que dado $1 \leq q < \infty$, existe $p < n$, suficientemente próximo de n, tal que $q = p^*$. Mas como $q = p^* > p$, segue que, $\|\nabla u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^q}$, e portanto

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^q},\ \forall\ u \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{1.3.1}$$

Chamaremos esta última desigualdade de desigualdade de Poincaré.

Quando não temos a propriedade que u se anula na fronteira, temos a seguinte versão da desigualdade de Poincaré que é conhecida como desigualdade de Poincaré-Wirtinger. Esse resultado pode ser encontrado em [17, Teorema 1, cap. 5, sec. 5.8].

Teorema 1.3.2 (Desigualdade de Poincaré-Wirtinger)**.** Seja Ω um subconjunto aberto limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Assuma que $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C, dependendo apenas de $n,\ p$ e Ω, tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.3.2}$$

para cada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $(u)_\Omega := \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u$.

Os dois próximos resultados são, respectivamente, o Teorema 6 da seção 5.6 e o Teorema 1 da seção 5.7 de Evans [17].

Teorema 1.3.3 (Desigualdade geral de Sobolev)**.** Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$, e $\partial\Omega$ é C^1.

(i) Se $k < \frac{n}{p}$. Então,

$$W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q \leq \frac{np}{n-pk}$. Além disso, a inclusão é contínua, isto é, existe uma constante $C > 0$ (que depende apenas de k, p e n) tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

(ii) se $k > \frac{n}{p}$. Então,

$$W^{k,p}(\Omega) \subset C^{k-l-1,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

para todo l satisfazendo $l < \frac{n}{p} < l+1$ e

$$\gamma = \begin{cases} l+1-\frac{n}{p}, \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é inteiro} \\ \text{qualquer número positivo menor que 1, se } \frac{n}{p} \text{ é inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, a inclusão é contínua.

Teorema 1.3.4 (Rellich-Kondrachov)**.** Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$, e $\partial\Omega$ é C^1. Então,

1. se $1 \leq p < n$ tem-se
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < p^* := \frac{np}{n-p}$,
2. se $p = n$ tem-se
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < +\infty$.

Corolário 1.3.5. Assuma que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$, e $\partial\Omega$ é C^1. Então,

1. se $1 \leq p < n$ tem-se
$$W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < p^* := \frac{np}{n-p}$,
2. se $p = n$ tem-se
$$W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$$
para cada $1 \leq q < +\infty$.

Demonstração. Seja u_k uma sequência limitada de $W^{1+m,p}(\Omega)$, então $D^\alpha u_k$ é limitado em $W^{1,p}$ para todo α tal que $|\alpha| \leq m$. Então, pelo teorema de Rellich-Kondrachov, seque que existe uma subsequência tal que

$$D^\alpha u_{k_s} \to D^\alpha u \;\text{ em }\; L^q(\Omega) \quad \forall\, |\alpha| \leq m.$$

Ou seja, existe $u \in L^p(\Omega)$ e uma subsequência u_{k_s}, tal que

$$u_{k_s} \to u \;\text{ em }\; W^{m,q}(\Omega).$$

Note que essa argumentação se aplica para os dois itens do corolário. □

O seguinte teorema nos dá um resultado de regularidade elíptica para um operador coercivo, para a demonstração veja, por exemplo, [19, Theorem 7.32].

Teorema 1.3.6. Seja $\partial\Omega$ de classe C^∞. Suponha que X seja $H_0^1(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$, que D seja tal que

$$D(v,u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (\partial^\alpha v, a_{\alpha,\beta}\partial^\beta u), \quad a_{\alpha,\beta} \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

e que existem constantes $C > 0$ e $\lambda > 0$ tais que

$$D(v,v) \geq C\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)}, \;\forall\, v \in X.$$

Além disso, suponha que $u \in X$ e $f \in L^2(\Omega)$ satisfazem $D(v,u) = (v,f)$ para todo $v \in X$. Se $f \in H^k(\Omega)$ $(k = 0,1,2,\cdots)$, então $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$, independente de u e f, tal que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Quando $k > 0$, o próximo resultado é um corolário do último teorema, se trata do caso em que $D(v,u) = (\nabla u, \nabla v)$. No caso $k = 0$, veja [23, Teorema 2.3.3.6] junto com [43, Proposição 7.7].

Corolário 1.3.7. Sejam $\partial\Omega$ de classe C^∞, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in H^k(\Omega)$ e $\partial u/\partial\mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, então vale que $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$, independente de u, tal que a seguinte estimativa elíptica é satisfeita

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k} + \|u\|_{L^2}). \tag{1.3.3}$$

Demonstração. Suponhamos que $k > 0$ e consideremos o caso particular do último teorema em que $D(v,u) = (\nabla v, \nabla u)$ tal que $v,\ u \in H^1(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|v - (v)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

então,

$$\begin{aligned}
D(v,v) = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C_1}\|v-(v)_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \min\{1/2, 1/(2C_1)\}(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}) - \frac{1}{2C_1}\|(v)_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \lambda\|v\|^2_{L^2},
\end{aligned}$$

onde $C = \min\{1/2, 1/(2C_1)\}$ e $\lambda = 1/(2C_1)$.

Assim, podemos aplicar o teorema anterior para $f = -\Delta u$, já que pelo fato de que $u \in H^2(\Omega)$ satisfaz $\partial u/\partial \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue, integrando por partes, que

$$D(v,u) = -\int_\Omega \Delta u v = (v,f), \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Dessa forma, obtemos que se $f \in H^k(\Omega)$, segue que $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k} + \|u\|_{L^2}).$$

□

Uma versão similar da próxima proposição pode ser encontrada em [43, Prop. 7.6]. Entretanto, apresentaremos uma demonstração utilizando o conhecido teorema de Lax-Milgram, que afirma que dada uma forma bilinear, contínua e coerciva, $D : H \times H \to \mathbb{R}$, onde H é um espaço Hilbert, e uma funcional $f \in H'$, existe único $u \in H$ tal que $D(u,v) = \langle f, v\rangle$ para todo $v \in H$ (veja, por exemplo, [17, Teorema 1, cap. 6]).

Proposição 1.3.8. Seja $\partial\Omega$ de classe C^∞. Dado $f \in L^2(\Omega)$, o problema

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

tem uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ se, e somente se,

$$\int_\Omega f = 0.$$

Desde que essa condição valha a solução u é única a menos da soma por uma constatante e pertence a $H^{k+2}(\Omega)$ se $f \in H^k(\Omega)$, $k \geq 0$.

Demonstração. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema, isso é

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv, \quad \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

Então, tomando em particular $v = 1$, segue que

$$\int_\Omega f = 0.$$

Suponhamos agora que $\int_\Omega f = 0$. Consideremos o subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ (e portanto de Hilbert com o produto interno induzido de $H^1(\Omega)$), definido por

$$A := \left\{ u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; (u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u = 0 \right\}.$$

Consideremos também a forma bilinear $D : A \times A \to \mathbb{R}$ definida por

$$D(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

É fácil ver que D é contínuo, além disso, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), existe $C_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}|B(u,u)| = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C_1}\|u-(u)_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min\{1/2, 1/(2C_1)\}\|u\|^2_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

o que mostra que D é coercivo. Então, dado $f \in L^2(\Omega)$, pelo teorema de Lax-Milgram, existe único $u \in A$, tal que

$$D(u,v) = (f,v),\ \forall\ v \in A.$$

Resta provar que essa última expressão vale para todo $v \in H^1(\Omega)$. De fato, se $v \in H^1(\Omega)$, $v - (v)_\Omega \in A$, então

$$D(u,v) = D(u, v-(v)_\Omega) = (f, v-(v)_\Omega) = (f,v) - (v)_\Omega \int_\Omega f.$$

Lembrando que $\int_\Omega f = 0$, segue que $D(u,v) = (f,v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Como $A \approx H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, seque que a solução u é a única em $H^1(\Omega)$ a menos da soma por uma constante. A regularidade é dada pelo Corolário 1.3.7. □

Assim como o corolário anterior, a próxima proposição pode ser vista como um resultado de existência de solução. Essa proposição tem um papel importante para recuperar a pressão nas equações de Navier-Stokes.

Proposição 1.3.9 (Prop. 1.1, Capítulo I em [44])**.** Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f = (f_1, \cdots, f_n)$, tal que $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$. Uma condição necessária e suficiente para que exista $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$f = \nabla p,$$

é que

$$\langle f, \mathbf{v}\rangle = 0,\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

O próximo resultado pode ser encontrado em [44, Prop.1.2 item (i), Capítulo I]. A vantagem do próximo teorema quando comparado com a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), é que neste caso não é necessário ter como hipótese que $p \in L^2(\Omega)$ para obter a desigualdade, ao invés disso, esse fato aparece como uma tese da proposição. Além disso, essa proposição pode ser vista como um resultado de regularidade para a proposição anterior.

Proposição 1.3.10. Sejam Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial\Omega$ é localmente Lipschitz e $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $\partial p/\partial x_i \in L^2(\Omega)$, para $i = 1, \cdots, n$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $C > 0$ é uma constante que pode depender de Ω, mas não da pressão p.

O próximo lema pode ser encontrado em [33, Lema 3.4], e nos dá uma estimativa para a norma L^2 da pressão que aparece na decomposição de Helmholtz de $-\Delta v$, $v \in V \cap H^2(\Omega)^n$, isso é ,

$$-\Delta v = Av + \nabla p, \tag{1.3.4}$$

onde A é o operador de Stokes e $p \in H^1(\Omega)$ é tal que $\int_\Omega p = 0$.

Lema 1.3.11. Seja $v \in V \cap (H^2(\Omega))^n$ e considere a decomposição de Helmholtz de $-\Delta v$ (isso é, a decomposição em (1.3.4)). Então, para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ϵ independente de v tal que vale a seguinte estimativa:

$$\|p\|_{L^2} \leq C_\epsilon \|\nabla v\|_{L^2} + \epsilon \|Av\|_{L^2}.$$

O teorema a seguir será de importância fundamental para se obter obter convergência forte de subsequências que estão limitadas em espaços convenientes, e como veremos nos próximos capítulos, estas convergências fortes serão essenciais devido às não linearidades presentes em todas as equações estudadas neste trabalho. Este teorema é conhecido como Lema de Aubin-Lions-Simon e sua demonstração pode ser encontrada em [42, Corolário 4].

Teorema 1.3.12. Sejam X, B e Y espaços de Banach, onde $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$.

1. Sejam F limitado em $L^p(0,T;X)$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} : f \in F \right\}$ limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então, F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.

2. Sejam F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitado em $L^r(0,T;Y)$ para algum $r > 1$. Então, F é relativamente compacto em $C([0,T];B)$.

1.4 Resultados de Interpolação

Sejam X e Y espaços de Hilbert separáveis satisfazendo:

$$X \subset Y, \ X \text{ denso em } Y \text{ com injeção contínua.} \tag{1.4.1}$$

Denotamos por $[X,Y]_\theta$ o espaço intermediário. Para detalhes sobre a definição desses espaços veja [32, Seção 2 do Capítulo 1].

O seguinte resultado nos dá uma desigualdade de interpolação para X e Y com as propriedades acima. Veja [32, Proposição 2.3].

Proposição 1.4.1. Para X e Y satisfazendo a propriedade (1.4.1) e todo $u \in X$,

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta.$$

Vale lembrar aqui a definição do espaço de Sobolev fracionário:

$$H^s(\Omega) := [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta, \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ real }, m = s/(1-\theta), \ m \text{ inteiro}, \ 0 < \theta < 1.$$

Estamos interessados em interpolações entre esses espaços de Sobolev, para isso apresentamos primeiro o seguinte teorema que nos dá os espaços intermediários entre dois espaços de Sobolev fracionários. Este teorema pode ser encontrado em [32, Teorema 9.6].

Teorema 1.4.2. Assuma que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1. Então,

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega)$$

para todo $s_i > 0$, $s_2 < s_1$, $0 < \theta < 1$.

Desses dois últimos resultados, e também da definição de $H^s(\Omega)$, seque a seguinte desigualdade de interpolação:

$$\|u\|_{H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}} \leq C\|u\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|u\|_{H^{s_2}}^{\theta} \tag{1.4.2}$$

para todo $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$, $s_2 < s_1$, $0 < \theta < 1$. A constante $C > 0$ pode depender de θ, s_1, e s_2.

Outro resultado que será importante nesse trabalho é a interpolação de Gagliardo-Nirenberg (veja, [21, Teorema 10.1]):

Teorema 1.4.3. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega$ de classe C^m, e seja $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \leq r,\ q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j, $0 \leq j < m$, e para qualquer número a no intervalo $[j/m, 1]$, dado que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}.$$

Se $m - j - n/r$ não é um inteiro não negativo, então

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,r}}^{a}\|u\|_{L^q}^{1-a}, \tag{1.4.3}$$

onde a constante C depende apenas de Ω, r, q, m, j e a.

Se $m - j - n/r$ é um inteiro não negativo, então (1.4.3) é satisfeita para $a = j/m$.

Temos dois casos particulares do último teorema que são de especial importância ao longo deste trabalho:

1. $n = 2$, $j = 0$, $p = 4$, $r = 2$, $m = 1$, $a = 1/2$ e $q = 2$, temos que

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{H^1}^{1/2}\|u\|_{L^2}^{1/2}, \text{ para todo } u \in H^1(\Omega). \tag{1.4.4}$$

   Pela desigualdade de Poincaré, se $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{L^2}^{1/2}, \text{ for any } f \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4.5}$$

2. $n = 3$, $j = 0$, $p = 4$, $r = 2$, $m = 1$, $a = 3/4$ e $q = 2$, temos que

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{H^1}^{3/4}\|u\|_{L^2}^{1/4}, \text{ para todo } u \in H^1(\Omega). \tag{1.4.6}$$

   Pela desigualdade de Poincaré, se $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{3/4}\|u\|_{L^2}^{1/4}, \text{ for any } f \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4.7}$$

Outro importante resultado de interpolação é o seguinte teorema:

Teorema 1.4.4 (Teorema 5.9 em [2])**.** Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a propriedade do cone e com fronteira C^1. Suponha também que $q > p > 1$, $mp > n$ e $mp - p < n$. Então, existe C (que pode depender de m, n, p, q e do volume do cone) tal que se $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}}^{\theta}\|u\|_{L^q}^{1-\theta},$$

para todo $x \in \Omega$, e $\theta = \frac{np}{np+(mp-n)q}$.

Nos resultados a seguir admitimos que fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^∞, que em particular satisfaz a propriedade do cone (veja o Capítulo IV [2]).

Um caso particular do último teorema que será importante no presente trabalho é conhecido como desigualdade de Agmon.

Corolário 1.4.5 (Desigualdade de Agmon)**.** Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira de classe C^∞. Então, existe $C > 0$ tal que se $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq K\|u\|_{H^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2}. \tag{1.4.8}$$

Demonstração. Tomando $n = 3$, $p = 2$, $q = 6$, $m = 2$, no teorema anterior, temos $q > p > 1$, $4 = mp > n = 3$ e $2 = mp - p < n = 3$. Então, $\theta = \frac{np}{np+(mp-n)q} = \frac{6}{6+(4-3)6} = \frac{1}{2}$. Lembrando que a inclusão $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ é contínua, segue o corolário. $\square$

O próximo lema é uma consequência da desigualdade de Agmon apresentada no corolário acima.

Lema 1.4.6. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira de classe C^∞. Se $u \in H^3(\Omega)$ e satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, existe $C = C(\Omega)$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\Delta u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^{1/2} \tag{1.4.9}$$

Além disso, se $u \in H^4(\Omega)$ e $\frac{\partial \Delta u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\Delta^2 u\|_{L^2}^{1/4}\|\Delta u\|_{L^2}^{3/4}. \tag{1.4.10}$$

Demonstração. Observe que, pela desigualdade Agmon (1.4.8), temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^\infty}^2 = \|\nabla(u - (u)_\Omega)\|_{L^\infty}^2 &\leq C\|\nabla(u - (u)_\Omega)\|_{H^1}\|\nabla(u - (u)_\Omega)\|_{H^2}\\ &\leq C\|u - (u)_\Omega\|_{H^2}\|u - (u)_\Omega\|_{H^3}.\end{aligned}$$

Agora, pela regularidade elíptica e pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), segue que

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^\infty}^2 &\leq C(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u - (u)_\Omega\|_{L^2})(\|\Delta u\|_{H^1} + \|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)})\\ &\leq C(\|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})(\|\nabla\Delta u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando novamente a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla(u - (u)_\Omega)\|_{L^2}^2 &= -\int_\Omega (u - (u)_\Omega)\Delta u + \int_{\partial\Omega} (u - (u)_\Omega)\nabla u \cdot \mathbf{n}\\ &\leq \|u - (u)_\Omega\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq C\|\Delta u\|_{L^2}.$$

Além disso, $\|\Delta u\|_{L^2} \leq C\|\nabla\Delta u\|_{L^2}$, já que

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega \nabla u\nabla\Delta u + \int_{\partial\Omega} \Delta u\nabla u \cdot \mathbf{n} \leq C\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\infty}^2 &\leq C\|\Delta u\|_{L^2}(\|\nabla \Delta u\|_{L^2} + 2\|\Delta u\|_{L^2}) \\
&\leq C\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla \Delta u\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Donde segue (1.4.9).

Ademais, temos o seguinte resultado de interpolação:

$$
\|\nabla \Delta u\|_{L^2} \leq \|\Delta^2 u\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta u\|_{L^2}^{1/2}. \tag{1.4.11}
$$

De fato, integrando por partes e usando que $\frac{\partial \Delta u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla \Delta u\|_{L^2}^2 &= -\int_\Omega \Delta u \Delta^2 u + \int_{\partial\Omega} \Delta u \nabla \Delta u \cdot \mathbf{n} \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2}\|\Delta^2 u\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\Delta^2 u\|_{L^2}^{1/4}\|\Delta u\|_{L^2}^{3/4}.
$$

□

Lema 1.4.7. Seja Ω um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^2$ com fronteira de classe C^∞. Se $u \in H^4(\Omega)$ e satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, então existe $C = C(\Omega)$ tal que

$$
\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta^2 u\|_{L^2}^{1/2}. \tag{1.4.12}
$$

Demonstração. Pela imersão de Sobolev $H^{3/2}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ e usando a definição $H^{3/2}(\Omega) := [H^3(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2}$, junto com a interpolação (1.4.2), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\infty} &\leq C\|\nabla u\|_{H^{3/2}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{H^3}^{1/2} \\
&\leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|u - (u)_\Omega\|_{H^4}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a regularidade elíptica e a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), segue que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^\infty}^2 &\leq C\|\nabla u\|_{L^2}(\|\Delta u\|_{H^2} + \|\nabla u\|_{L^2}) \\
&\leq C\|\nabla u\|_{L^2}(\|\Delta^2 u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}).
\end{aligned}
$$

Como vimos no último lema

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2} &\leq C\|\Delta u\|_{L^2}, \\
\|\Delta u\|_{L^2} &\leq C\|\nabla \Delta u\|_{L^2}, \\
\|\nabla \Delta u\|_{L^2} &\leq C\|\Delta^2 u\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Então temos o resultado desejado. □

1.5 Resultados envolvendo operadores

Operador de superposição

Seja $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos o operador de superposição gerado por f por $\tilde{f}(u)(x) = f(x, u(x))$. Eventualmente, pode ser que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, neste caso $\tilde{f}(u) = f \circ u$.

Um resultado envolvendo operadores de superposição é o Teorema 9.7 em [4], que enunciamos abaixo.

Teorema 1.5.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, e seja $kp > n$. Suponha que a função f seja $k-$vezes continuamente diferenciável em $\Omega \times \mathbb{R}$. Então o operador de superposição $\tilde{f}$ gerado por f mapeia $W^{k,p}(\Omega)$ em si mesmo e é limitado e contínuo.

Um caso que o último teorema não se aplica e que precisaremos na presente tese é quando $k = 1$, $p = 2$ e $n = 2, 3$. Por isso enunciamos o próximo teorema como em Kavian [25] Teorema 16.7.

Teorema 1.5.2. Sejam $1 \leq q \leq p < n$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Então, $\tilde{f}$ é um operador contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,q}(\Omega)$ se, e somente se, f é localmente lipschitziana e sua derivada (que existe q.t.p em $\mathbb{R}$) satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$\exists\ a,\ b \geq 0, \text{ tal que } \forall\ s \in \mathbb{R},\ |f'(s)| \leq a + b|s|^{n(p-q)/(qN-qp)}.$$

Se $1 \leq p \leq \infty$ e f é lipschitziana em $\mathbb{R}$, então, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ temos que $\tilde{f}(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla\tilde{f}(u) = f'(u)\nabla u \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, se $1 \leq p < \infty$, o operador $\tilde{f}$ é contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ (em geral, se $p = \infty$, $\tilde{f}$ não é contínuo de $W^{1,\infty}(\Omega)$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$).

A seguinte proposição é importante na demonstração de existência de solução fraca para um caso degenerado das equações estudadas no Capítulo 2 e é demonstrada em [30, Proposição 3.1]. Essencialmente, essa proposição estabelece que um operador de Nemytskii é fracamente sequencialmente contínuo se, e somente se, a função que dá origem à ele for afim.

Proposição 1.5.3. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e seja $f \in C(\mathbb{R})$ tal que $|f(t)| \leq a + b|t|$ para $a, b \geq 0$. Então, o operador de superposição de Nemytskii $\tilde{f} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $p < +\infty$, definido por $\tilde{f}(u) = f \circ u$, é fracamente sequencialmente contínuo se, e somente se, f é uma função afim.

Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

Usaremos a seguinte versão do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (veja o Teorema 11.6 em [22]) no Capítulo 4:

Teorema 1.5.4. [Ponto fixo de Leray-Schauder] Seja X um espaço de Banach e S um operador compacto de $X \times [0, 1]$ para X, tal que $S(x, 0) = 0$ para todo $x \in X$. Suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que

$$\|x\|_X < M$$

para todo $(x, \lambda) \in X \times [0, 1]$ satisfazendo $x = S(x, \lambda)$. Então, o operador $S_1 = S(\cdot, 1) : X \to X$ tem um ponto fixo.

1.6 Equação de transporte regularizada

Nesta seção demonstramos alguns resultados relacionados com a equação do transporte regularizada. Apesar desses resultados serem, essencialmente, uma aplicação relativamente simples do método de Faedo-Galerkin, daremos breves demonstrações dos mesmos. Faremos isso por não termos encontrado esses resultados enunciados exatamente na maneira que desejamos aplicar.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞, $T > 0$. Nessa seção estaremos interessados no problema:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + \alpha\rho = \epsilon\Delta\rho \text{ em } Q_T, \tag{1.6.1}$$

$$\rho(0) = \rho_0 \text{ em } \Omega \tag{1.6.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \tag{1.6.3}$$

onde $\mathbf{u} \subset C([0,T]; V)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, α e ϵ são constantes positivas. Veja que, como $V = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \mid \text{div } \mathbf{v} = 0\}$, em particular

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega. \tag{1.6.4}$$

Ao longo desta seção estaremos interessados no caso particular em que $\mathbf{u} \in C([0,T]; W_k)$, onde $W_k = span\{(\mathbf{w}_i)_{1 \leq i \leq k}\}$, com $\mathbf{w}_i$ sendo as autofunções do operador de Stokes. Por isso, por uma questão de simplicidade, sempre vamos enunciar os resultados a seguir com essa hipótese sobre $\mathbf{u}$, entretanto, certamente essa não é a hipótese mais fina para $\mathbf{u}$.

Teorema 1.6.1. [Solução fraca] Se $\rho_0 \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{u} \in C([0,T]; W_k)$, existe uma única

$$\rho \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)') \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$$

tal que ρ é uma solução fraca de (1.6.1)-(1.6.3), ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t}, e \right\rangle + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho, e) + \alpha\,(\rho, e) + \epsilon\,(\nabla\rho, \nabla e) = 0 \tag{1.6.5}$$

$$\rho(0) = \rho_0 \tag{1.6.6}$$

para todo $e \in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em $(0,T)$. Além disso, se $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$|\rho(x,t)| \leq \|\rho_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p $x \in \Omega$.

Demonstração. Consideremos $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ os autovalores do operador $-\Delta$ e $(e_i)_{i\geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções associadas, de forma que $(e_i)_{i\geq 1}$ seja um conjunto ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$, isto é

$$-\Delta e_i = \mu_i e_i \text{ em } \Omega, \ \frac{\partial e_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \ i = 1, 2, \cdots$$

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Denotamos por $E_m = span\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ e por L_m a projeção L^2-ortogonal (e também H^1-ortogonal) em E_m.

Para cada $\epsilon > 0$ fixado temos o seguinte problema aproximado

$$\left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t}, e\right) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_m, e) + \alpha\,(\rho_m, e) + \epsilon\,(\nabla\rho_m, \nabla e) = 0 \tag{1.6.7}$$

$$\rho_m(0) = L_m(\rho_0) \tag{1.6.8}$$

com $e \in E_m$. Esse sistema linear de EDO tem uma solução $\rho_m = \sum_{i=1}^m \rho_i^m(t)e_i \in C([0,T];E_m)$ em para todo $T > 0$. Escolhendo ρ_m como função teste, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_m\|_{L^2}^2 + \alpha\|\rho_m\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 = 0, \tag{1.6.9}$$

uma vez que, usando (1.6.4), temos que

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\rho_m\rho_m = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla(\rho_m^2/2) = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\text{div }\mathbf{u})\rho_m^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\rho_m^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Integrando (1.6.9) sobre $(0,t)$, $t\in(0,T]$, segue que

$$\|\rho_m(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha\int_0^t \|\rho_m\|_{L^2}^2 + 2\epsilon\int_0^t \|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 = \|\rho_m(0)\|_{L^2}^2 \leq \|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

Assim,

$$\|\rho_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2\alpha\|\rho_m\|_{L^2(0,T;L^2)} + 2\epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|\rho_0\|_{L^2}^2. \tag{1.6.10}$$

Além disso, por (1.6.7), temos que

$$\left\langle\frac{\partial\rho_m}{\partial t}, e\right\rangle \leq C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\|e\|_{L^4} + \|\rho_m\|_{L^2}\|e\|_{L^2} + \|\nabla\rho_m\|_{L^2}\|\nabla e\|_{L^2}\right).$$

Pela imersão de Sobolev, e como $\mathbf{u}\in C([0,T];V)\subset L^\infty(0,T;L^4(\Omega))$, obtemos

$$\left\langle\frac{\partial\rho_m}{\partial t}, e\right\rangle \leq C\left(\|\rho_m\|_{L^2} + \|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right)\|e\|_{H^1}$$

para todo $e\in E_m$. Assim,

$$\left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'}^2 \leq C\|\rho_m\|_{H^1}^2.$$

De onde obtemos a estimativa

$$\left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C.$$

A demonstração de existência segue das estimativas feitas acima, tomando-se o limite quando $m\to\infty$ na equação (1.6.7).

Para mostrar unicidade, tomemos ρ_1 e ρ_2 soluções de (1.6.5) com condições iniciais $\rho_{0,1}$ e $\rho_{0,2}$ respectivamente. Sejam $\rho = \rho_1 - \rho_2$ e $\rho_0 = \rho_{0,1} - \rho_{0,2}$. Claro que ρ satisfaz

(1.6.5) e (1.6.6). Como para q.t.p $t \in [0,T]$, $\rho(t) \in H^1(\Omega)$, podemos tomar $\rho(t)$ como função teste em (1.6.5). Além disso, como $\rho \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$, temos que $\rho \in C([0,T],L^2(\Omega))$ e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|_{L^2}^2 + \alpha\|\rho\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\rho\|_{L^2}^2 = 0,$$

Daí podemos concluir (integrando sobre $(0,t)$) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\rho\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\|\rho_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Em particular, se $\rho_{0,1} = \rho_{0,2}$ obtemos a unicidade de solução.

Tomemos $\rho_{\rho_0}^+(x,t) = \max\{\rho(x,t) - \|\rho_0\|_{L^\infty}, 0\}$ como função teste em (1.6.5), então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_{\rho_0}^+\|_{L^2}^2 + \alpha\|\rho_{\rho_0}^+\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\rho_{\rho_0}^+\|_{L^2}^2 = 0.$$

Integrando sobre $(0,t)$, $t \in (0,T]$, temos

$$\|\rho_{\rho_0}^+(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha\int_0^t \|\rho_{\rho_0}^+\|_{L^2}^2 + 2\epsilon\int_0^t \|\nabla\rho_{\rho_0}^+\|_{L^2}^2 = \|\rho_{\rho_0}^+(0)\|_{L^2}^2 = 0.$$

De onde segue que

$$\rho(x,t) \leq \|\rho_0\|_{L^\infty}$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p $x \in \Omega$.

Escolhendo $\rho_{\rho_0}^-(x,t) = \min\{\rho(x,t) + \|\rho_0\|_{L^\infty}, 0\}$ como função teste, obtemos que

$$\rho(x,t) \geq -\|\rho_0\|_{L^\infty}$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p $x \in \Omega$. $\square$

Corolário 1.6.2. Sejam $\rho_0 \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em $C([0,T];W_k)$ e ρ_1 e ρ_2 as soluções fracas associadas à $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ respectivamente. Então, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\rho\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}^2$$

onde $\rho = \rho_1 - \rho_2$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial\rho_1}{\partial t}, e \right\rangle + ((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\rho_1, e) + (\rho_1, e) + \epsilon(\nabla\rho_1, \nabla e) = 0 \\ \left\langle \frac{\partial\rho_2}{\partial t}, e \right\rangle + ((\mathbf{u}_2\cdot\nabla)\rho_2, e) + (\rho_2, e) + \epsilon(\nabla\rho_2, \nabla e) = 0, \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

para todo $e \in H^1(\Omega)$.

Agora, subtraindo as equações em (1.6.11) e tomando ρ como função teste, como $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|_{L^2}^2 + \|\rho\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\rho\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\rho_1 \\ &\leq \|\rho_1\|_{L^2}\|\nabla\rho\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Então, usando que $\rho_1 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pela desigualdade de Young

$$\frac{d}{dt}\|\rho\|_{L^2}^2 + 2\|\rho\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\nabla\rho\|_{L^2}^2 \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2.$$

Integrando sobre $(0,t)$, com $t \in [0,T]$, temos

$$\|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\rho\|_{H^1}^2 \leq C\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\rho(0)\|_{L^2}^2 = C\int_0^T \|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2.$$

□

Teorema 1.6.3. Se $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ e $\mathbf{u} \in C([0,T];W_k)$, a solução fraca ρ dada pelo teorema anterior tem a seguinte regularidade

$$\rho \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Além disso, ρ é a única solução forte do problema (1.6.1)-(1.6.3), ou seja, existe única ρ com a regularidade acima satisfazendo as equações (1.6.1)-(1.6.3) para q.t.p. $(x,t) \in Q_T$. Mais ainda, assim como no Teorema 1.6.1, se $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ temos que

$$|\rho(x,t)| \leq \|\rho_0\|_{L^\infty}$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p $x \in \Omega$.

Demonstração. Agora vamos supor que $\rho_0 \in H^1(\Omega)$. Tomando como função teste $\frac{\partial\rho_m}{\partial t} - \Delta\rho_m$ em (1.6.7) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\rho_m\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\Delta\rho_m\|_{L^2}^2 \\ &= -\left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_m, \frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho_m, \Delta\rho_m),\end{aligned}$$

afinal $\frac{\partial\rho_m}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\epsilon}{2}\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\rho_m\|_{L^2}^2\right) + \left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\Delta\rho_m\|_{L^2}^2 \\ \leq C(\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2} + \|\nabla\rho_m\|_{L^2}\|\Delta\rho_m\|_{L^2}).\end{aligned}$$

Aplicando Young,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\epsilon}{2}\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\rho_m\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + c\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\Delta\rho_m\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla\rho_m\|_{L^2}^2.$$

De onde segue que, ρ_m é uma sequência uniformemente limitada em

$$L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

□

Observação 1.6.4. Na verdade, a demonstração do último teorema funciona para $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T,W^{1,\infty}(\Omega))$ com div $\mathbf{u} = 0$ em Ω e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, se $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ e $\mathbf{u}$ satisfaz essas condições, temos uma solução forte para o problema, isto é, existe um único $\rho \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + \alpha\rho = \epsilon\Delta\rho \text{ q.t.p em } Q_T,\\ \rho(0) = \rho_0 \text{ q.t.p em } \Omega,\\ \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Lema 1.6.5. Sejam $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \in [2,\infty]$ e $\mathbf{u} \in C([0,T];V)$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Seja ρ a solução fraca dada pelo Teorema 1.6.1, associada com $\mathbf{u}$, então

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \|\rho_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.6.12}$$

Demonstração. Como $C^\infty(\bar{\Omega})$ é um subconjunto denso de $L^p(\Omega)$, temos que para cada $0 < \delta < 1$ existe $\rho_0^\delta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$\|\rho_0 - \rho_0^\delta\|_{L^p} \leq \delta.$$

Pelo Teorema 1.6.3, temos que existe ρ_δ satisfazendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_\delta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho_\delta + \alpha\rho_\delta = \epsilon\Delta\rho_\delta \text{ q.t.p em } Q_T,\\ \rho_\delta(0) = \rho_0^\delta \text{ q.t.p em } \Omega,\\ \frac{\partial \rho_\delta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\rho_\delta|\rho_\delta|^{p-2}$ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\rho_\delta\|_{L^p}^p + \|\rho_\delta\|_{L^p}^p + (p-1)\epsilon\int_\Omega |\rho_\delta|^{p-2}|\nabla\rho_\delta|^2 = 0.$$

Integrando sobre $(0,t)$, com $t \in (0,T]$, obtemos

$$\|\rho_\delta(t)\|_{L^p}^p + p\int_0^t \|\rho_\delta\|_{L^p}^p + p(p-1)\epsilon\int_0^t\int_\Omega |\rho_\delta|^{p-2}|\nabla\rho_\delta|^2 = \|\rho_\delta(0)\|_{L^p}^p = \|\rho_0^\delta\|_{L^p}^p \tag{1.6.13}$$

Uma vez que $|\|\rho_0^\delta\|_{L^p} - \|\rho_0\|_{L^p}| \leq \|\rho_0 - \rho_0^\delta\|_{L^p} \leq \delta$, segue que

$$\|\rho_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \delta + \|\rho_0\|_{L^p(\Omega)},$$

Assim, quando $\delta \to 0^+$,

$$\rho_\delta \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \text{ em } L^\infty(0,T;L^p(\Omega)).$$

Então, pelo princípio da semicontinuidade inferior das normas,

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \liminf \|\rho_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \|\rho_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

Capítulo 2

Modelo de Campo de Fase Tridimensional para Solidificação Sob o Efeito de um Campo Magnético

Nosso objetivo nesse capítulo é estender a análise de [39], onde os autores mostram existência de solução fraca global e solução forte local para um caso bidimensional não degenerado. No caso considerado em [39] a equação do potencial elétrico se trivializa, uma vez que se consideramos que a movimentação ocorre plano xz, temos que $\mathbf{u} = (u_1, 0, u_3)$ e $\mathbf{B} = (B_1, 0, B_3)$, de onde segue que $\mathbf{u}\times\mathbf{B} = (0, u_3B_1 - u_1B3, 0)$. Assim $\Delta\phi = \text{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0$ (veja a equação (2.0.3) abaixo). Com a condição de fronteira $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos que o campo elétrico no caso bidimensional $E = -\nabla\phi = \mathbf{0}$. No caso tridimensional, que é fisicamente mais interessante, essa simplificação não pode ser feita, de modo que ficamos obrigados a lidar com a equação do potencial elétrico. Além disso surge um novo termo nas equações de Navier-Stokes, devido ao efeito de convecção gerado pelo campo elétrico. Contornamos esse problema introduzindo um operador linear $\mathcal{T}$ que depende de $\mathbf{u}$ no lugar deste termo extra que aparece nas equações de Navier-Stokes, de forma que o sistema de equações que apresentaremos a seguir será um caso particular do sistema com o operador $\mathcal{T}$ (veja os detalhes na Seção 2.2). Além disso, permitimos, na Seção 2.4, que o coeficiente de difusão na equação da concentração se anule, o que também é fisicamente interessante, uma vez que é esperado que na fase sólida esta degeneração ocorra.

Mais precisamente, o modelo no caso em que Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^∞ é dado por:

$$\rho_0\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{A}_1(\psi, c) + b(\psi)((-\nabla\phi + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}), \tag{2.0.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{2.0.2}$$

$$\Delta\phi = \text{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}), \tag{2.0.3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi = \epsilon^2\Delta\psi + A_2(\psi, c), \tag{2.0.4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \text{div}(D(\psi)\nabla c + A_3(\psi, c)\nabla\psi), \tag{2.0.5}$$

em $\Omega\times(0, +\infty)$ junto com as condições iniciais e de contorno

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0, +\infty), \tag{2.0.6}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad c(0) = c_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.0.7}$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal exterior à $\partial\Omega$. As variáveis desconhecidas são o campo de velocidade $\mathbf{u}$, a pressão p, a função potencial ϕ do campo elétrico, o campo de fase ψ que representa a fase sólida/líquida da liga e a concentração c do soluto no solvente. Aqui, $\mathbf{B}$ representa o campo magnético, $\rho_0 > 0$ é a densidade, $\mu > 0$ é a viscosidade, $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, $D \geq 0$ é o coeficiente de difusão e $\mathbf{A}_1$, b, A_2, A_3 são funções não lineares. Para mais detalhes sobre o modelo, o leitor pode consultar [40], entretanto, por uma questão de completude, vamos apresentar na seção 2.1 uma pequena dedução baseada em um funcional de energia livre.

Como comentamos anteriormente, no caso bidimensional a equação (2.0.3) e o termo $\nabla\phi$ na equação (2.0.1) não aparecem no sistema, de modo que os argumentos em [39] falham aqui. Os maiores desafios na análise matemática do problema (2.0.1)-(2.0.7) vêm do fato de que a equação (2.0.3) tem uma característica diferente das demais e da perda do caráter parabólico da equação da concentração (2.0.5). Para lidarmos com o caso degenerado, primeiramente consideramos o problema não degenerado (quando $D \geq D_0 > 0$) e investigamos a existência, regularidade e propriedades de suas soluções. Só então atacamos o caso onde o coeficiente de difusão D pode se anular para algum valor do campo de fase ψ, de modo que a equação da concentração se degenera nesses valores. Do ponto de vista da física, o coeficiente de difusão se anula na fase sólida. Como é esperado, para o caso degenerado, há uma perda de regularidade para a concentração quando comparado com o caso não degenerado.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 apresentamos uma breve dedução do modelo baseada em um funcional de energia livre. Na Seção 2.2 introduzimos um problema mais geral a ser estudado, do qual o sistema (2.0.1)-(2.0.7) é um caso particular. Também, estabelecemos as hipóteses e introduzimos algumas notações. Na Seção 2.3 atacamos o problema não degenerado. Mostramos existência de solução fraca, investigamos algumas propriedades da solução e provamos a existência de solução forte. Um princípio do máximo é estabelecido assim como a continuidade da solução forte em relação aos dados iniciais e ao campo magnético, consequentemente, a solução forte será única. Finalmente, na Seção 2.4, é provada a existência de solução fraca (em um sentido que será exposto precisamente) para o problema degenerado.

2.1 Uma breve dedução do modelo

Apresentamos aqui uma breve dedução do modelo baseada no funcional de energia livre de Ginzburg-Landau. Observe que em [40] a descrição da equação de evolução do campo de fase e da concentração é dada baseada em um funcional de entropia.

Seja Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$. A região Ω é ocupada por uma liga binária, onde B é o soluto e A é o solvente. Vamos considerar um processo isotérmico onde a transição ocorre na temperatura crítica T_M. A liga está sob o efeito de um campo magnético que induz movimentação na parte líquida. Denotamos por $\mathbf{u}$ a velocidade de fluido, c a concentração do soluto B no solvente A e ψ o campo de fase. O funcional de energia livre de Ginzburg-Landau pode ser expresso na forma (veja [48]):

$$F(\psi, c) = \int_\Omega f(\psi, c) + \frac{\varepsilon^2}{2}|\nabla\psi|^2,$$

onde $\varepsilon > 0$ é uma constante e f é a densidade de energia livre dada por

$$f(\psi, c) = (1-c)f^A(\psi) + cf^B(\psi) + \frac{RT_M}{v_m}[(1-c)\ln(1-c) + c\ln(c)],$$

onde R é a constante de Boltzmann e v_m é o volume molar. As densidades de energia livre f^A e f^B dos materiais A e B, respectivamente, podem ser expressas como

$$f^A(\psi) = W_A\psi^2(\psi-1)^2,$$
$$f^B(\psi) = W_B\psi^2(\psi-1)^2,$$

onde W_A e W_B são constantes.

Como o campo de fase é uma quantidade não conservada e a concentração é uma quantidade conservada, temos que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi = -M_1\frac{\delta F}{\delta\psi}, \tag{2.1.1}$$
$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = -\nabla\cdot\mathbf{J}_c, \tag{2.1.2}$$

onde $M_1 > 0$ é uma constante positiva,

$$\mathbf{J}_c = M(\psi,c)\nabla\frac{\delta F}{\delta c},$$

e M é escolhida de forma que no estado sólido/líquido a equação se torne a equação clássica de difusão. Em particular, M pode ter a forma (veja [47])

$$M(\psi,c) = -\frac{v_m}{RT_M}D(\psi)c(1-c)$$

onde D é uma função crescente tal que $D(0) = D_s$ e $D(1) = D_l$, onde D_s e D_l são, respectivamente, os coeficientes de difusão do sólido e do líquido.

A derivada de Gâteaux de F com respeito à ψ na direção de $\eta \in C^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\begin{aligned}\delta^\psi_\eta F(\psi,c) &= \frac{d}{d\lambda}F(\psi+\lambda\eta,c)\bigg|_{\lambda=0} = \int_\Omega \frac{d}{d\lambda}\left(f(\psi+\lambda\eta,c)+\frac{\varepsilon^2}{2}|\nabla(\psi+\lambda\eta)|^2\right)\bigg|_{\lambda=0}\\ &= \int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial\psi}(\psi,c)\eta + \varepsilon^2\nabla\psi\cdot\nabla\eta\right) = \int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial\psi}(\psi,c) - \varepsilon^2\Delta\psi\right)\eta\end{aligned}$$

onde integramos por partes e usamos que $\nabla\psi\cdot\mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega\times(0,\infty)$, sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal exterior à $\partial\Omega$. Então,

$$\frac{\delta F}{\delta\psi} = \frac{\partial f}{\partial\psi}(\psi,c) - \varepsilon^2\Delta\psi.$$

Analogamente,

$$\frac{\delta F}{\delta c} = \frac{\partial f}{\partial c}(\psi,c).$$

Dessa forma, (2.1.1) e (2.1.2) implicam que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi = M_1\Big(\varepsilon^2\Delta\psi - \frac{\partial f}{\partial\psi}(\psi,c)\Big), \tag{2.1.3}$$
$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = -\nabla\cdot\left(M(\psi,c)\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial c}(\psi,c)\right)\right). \tag{2.1.4}$$

Podemos ver que

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = (1-c)\frac{\partial f^A}{\partial \psi} + c\frac{\partial f^B}{\partial \psi} = \frac{\partial f^A}{\partial \psi} + c\left(\frac{\partial f^B}{\partial \psi} - \frac{\partial f^A}{\partial \psi}\right),$$

então,

$$-\frac{\partial f}{\partial \psi} = F_1(\psi) + cF_2(\psi),$$

onde F_1 e F_2 são polinômios cúbicos na variável ψ, satisfazendo $F_1(0) = F_2(0) = F_1(1) = F_2(1) = 0$. Além disso,

$$\nabla\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial \psi}\nabla\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 c}\nabla c = -F_2(\psi)\nabla\psi + \frac{RT_M}{v_m}\frac{1}{c(1-c)}\nabla c.$$

Substituindo as últimas expressões em (2.1.3) e (2.1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi &= M_1\left(\varepsilon^2\Delta\psi + F_1(\psi) + cF_2(\psi)\right),\\
\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c &= -\nabla\cdot\left(M(\psi,c)\left(-F_2(\psi)\nabla\psi + \frac{RT_M}{v_m}\frac{1}{c(1-c)}\nabla c\right)\right).
\end{aligned}$$

As equações para a evolução do campo de velocidade $\mathbf{u}$ do fluido e da pressão p são deduzidas das leis de conservação de momento e de massa como em [40]. Devido ao efeito do campo magnético, a força de Lorentz aparece na equação de Navier-Stokes. Dessa forma, acoplamos a seguinte equação às equações anteriores:

$$\begin{aligned}
\rho_0\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big) &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{A}_1(\psi,c) + b(\psi)((-\nabla\phi + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}),\\
\text{div }\mathbf{u} &= 0,\\
\Delta\phi &= \text{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{A}_1(\psi,c) = \mathbf{E}_1(\psi) + c\mathbf{E}_2(\psi)$ é a aproximação de Boussinesq tal que $\mathbf{A}_1(0,c) = 0$, b é uma função satisfazendo $b(0) = 0$, ϕ é a função potencial do campo elétrico, $\rho_0 > 0$ é a densidade média do fluido, $\mu > 0$ é a viscosidade e $\mathbf{B}$ é o campo magnético induzido.

Assim, denotando $\epsilon = \sqrt{M_1}\varepsilon$, $A_2(\psi,c) = M_1(F_1(\psi)+cF_2(\psi))$ e $A_3(\psi,c) = M(\psi,c)F_2(\psi)$, temos que a evolução de $(\mathbf{u},p,\phi,\psi,c)$ é dada pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&\rho_0\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{A}_1(\psi,c) + b(\psi)((-\nabla\phi + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}),\\
&\text{div }\mathbf{u} = 0,\\
&\Delta\phi = \text{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}),\\
&\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi = \epsilon^2\Delta\psi + A_2(\psi,c),\\
&\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \text{div}(D(\psi)\nabla c + A_3(\psi,c)\nabla\psi).
\end{aligned}$$

2.2 Apresentação do problema, notações e hipóteses

Nessa seção estabelecemos um problema mais geral a ser estudado, do qual o sistema (2.0.1)-(2.0.7) é um caso particular. Também, apresentamos as hipóteses sobre os termos que aparecem na equação e, além disso, fixamos algumas notações que serão usadas ao longo do capítulo.

Vamos considerar seguinte sistema de equações:

$$\rho_0\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{A}_1(\psi, c) + b(\psi)((\mathcal{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}) \ \text{ em } \ Q_T, \tag{2.2.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \ \text{ em } \ Q_T, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\psi = \epsilon^2\Delta\psi + A_2(\psi, c) \ \text{ em } \ Q_T, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \operatorname{div}(D(\psi)\nabla c + A_3(\psi, c)\nabla\psi) \ \text{ em } \ Q_T, \tag{2.2.4}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial\mathbf{n}} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \ \ \psi(0) = \psi_0, \ \ c(0) = c_0 \ \text{ em } \ \Omega, \tag{2.2.6}$$

onde $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $T > 0$, e $\mathcal{T} : (L^2(\Omega))^3 \to (L^2(\Omega))^3$ é um operador linear satisfazendo

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{u})\|_{L^2} \le C\|\mathbf{u}\|_{L^2} \tag{2.2.7}$$

com $C > 0$ sendo uma constante independente de $\mathbf{u}$.

Observe que, pela Proposição 1.3.8, para cada $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$ podemos definir

$$\mathcal{T}(\mathbf{u}) = -\nabla\phi$$

onde $\phi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = \operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

com $\mathbf{B} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$. Multiplicando a equação (2.2.8) por ϕ, integrando sobre Ω, aplicando o teorema de integração por partes e a desigualdade de Young, vemos facilmente que $\mathcal{T}$ satisfaz (2.2.7). De modo que, uma vez obtida uma solução de (2.2.1)-(2.2.6), pelo argumento anterior, encontramos, em particular, uma solução de (2.0.1)-(2.0.7).

Para tratar o caso não degenerado usamos as mesmas hipóteses encontradas em [39] para as funções não lineares e pedimos mais regularidade para o campo magnético para lidar com o problema elíptico (2.2.8). Então, assumimos que

(H1) $\mathbf{A}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 2, 3$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções Lipschitz e limitadas,

(H2) $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz e limitada e existe uma constante D_0 tal que

$$0 < D_0 \le D(r), \ \forall\, r \in \mathbb{R},$$

(H3) $\mathbf{B} \in L^\infty(0, T; \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega))$.

Note que, do ponto de vista da física, um princípio do máximo deve valer para ψ e c. Então, admitimos mais hipóteses no comportamento dos termos não lineares que serão necessárias para obtermos o princípio do máximo:

(H4) $A_2(r, s) = 0$ para $r \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, (H5) $A_3(r,s) = 0$ para $s \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $\forall\ r \in \mathbb{R}$.

Entretanto, se permitirmos que o coeficiente D se anule, será necessário que $\mathbf{A}_1$ e A_2 sejam funções afins na segunda variável e que A_3 tenha a forma específica do modelo apresentado na seção anterior. Do ponto de vista da matemática, devido a baixa regularidade da concentração quando a equação se degenera, o argumento aplicado usa o fato que os operadores de Nemytskii associados a $\mathbf{A}_1$ e A_2 são fracamente sequencialmente contínuos, que, na verdade, só ocorre se essas funções forem afins, veja, por exemplo a Proposição 1.5.3. Isto significa que no modelo físico as formas destas funções têm um papel importante.

Por mera questão de simplicidade, vamos assumir a partir de agora que

$$\rho_0 = \mu = \epsilon = 1.$$

Como nesse capítulo estamos interessados apenas no caso tridimensional, a notação dos espaços usuais de campos de vetores com divergente nulo fica da seguinte forma:

$$H = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$
$$V = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Lembrando que

$$\mathbf{H} = H \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = V \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

O produto interno tanto em H quanto em $L^2(\Omega)$ será denotado por $(\cdot,\cdot)$ e o produto de dualidade entre $H^1(\Omega)'$ (ou V') e $H^1(\Omega)$ (ou V) será denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em H e $A = -P\Delta$ o operador de Stokes.

Consideremos as seguintes formas trilineares contínuas

$$b_u(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i(\partial_i v_j) w_j,\ \forall\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (V)^3,$$
$$b_\psi(\mathbf{u}; \psi, z) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla\psi z,\ \forall\ (\mathbf{u}, \psi, z) \in \mathbf{V},$$
$$b_c(\mathbf{u}; c, z) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla c z,\ \forall\ (\mathbf{u}, c, z) \in \mathbf{V},$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Observe que

$$b_u(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad b_\psi(\mathbf{u}; \psi, \psi) = 0, \quad b_c(\mathbf{u}; c, c) = 0 \quad \text{para} \quad (\mathbf{u}, \psi, c) \in \mathbf{V}.$$

A estimativa elíptica (1.3.3) e as desigualdades de interpolação (1.4.6) e (1.4.7) serão frequentemente usadas durante esse capítulo, por isso reescrevo essa desigualdades a seguir.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $u \in H^1(\Omega)$ tais que $\Delta u \in H^k(\Omega)$ e $\partial u/\partial \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, então vale que $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$, independente de u, tal que a estimativa (1.3.3) é satisfeita, isto é

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C(\|\Delta u\|_{H^k} + \|u\|_{L^2}). \tag{2.2.9}$$

Além disso, temos a interpolação de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$ (1.4.6), ou seja,

$$\|f\|_{L^4} \leq C\|f\|_{H^1}^{3/4}\|f\|_{L^2}^{1/4}, \text{ para todo } f \in H^1(\Omega). \tag{2.2.10}$$

E em particular, se $f = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos (1.4.7), isto é,

$$\|f\|_{L^4} \leq C\|\nabla f\|_{L^2}^{3/4}\|f\|_{L^2}^{1/4}, \text{ para todo } f \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2.11}$$

2.3 Problema não degenerado

Nessa seção, estudamos o problema (2.2.1)-(2.2.6) assumindo que o coeficiente de difusão $D \geq D_0 > 0$. Dividimos a análise em três subseções, na primeira a existência de solução fraca é estabelecida, na segunda investigamos algumas propriedades de regularidade e, finalmente, a continuidade da solução forte em relação aos dados iniciais e ao campo magnético é provada.

2.3.1 Existência de solução fraca

Nessa subseção, discutimos a existência de solução fraca para o problema (2.2.1)-(2.2.6). A demonstração é baseada no método de Faedo-Galerkin e segue na mesma linha do caso bidimensional considerado em [39, Theorem 2.1]. Entretanto, no nosso caso, temos que lidar com o operador $\mathcal{T}$ e usar a desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg tridimensional, o que gera algumas dificuldades adicionais, em particular, para tratar os termos não lineares.

Primeiramente introduzimos a definição de solução fraca para o problema (2.2.1)-(2.2.6).

Definição 2.3.1 (Solução fraca)**.** Dizemos que $(\mathbf{u}, \psi, c)$ é uma solução fraca para o problema (2.2.1)-(2.2.6) se

$$(\mathbf{u}, \psi, c) \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \text{ com } \Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\Big) \in L^{4/3}(0, T; \mathbf{V}')$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \Big\rangle + \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + b_u(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ = \int_\Omega \mathbf{A}_1(\psi, c)\mathbf{v} + \int_\Omega b(\psi)((\mathcal{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})\mathbf{v}, \ \forall \ \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$\Big\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, z \Big\rangle + \int_\Omega \nabla \psi \cdot \nabla z + b_\psi(\mathbf{u}; \psi, z) = \int_\Omega A_2(\psi, c) z, \tag{2.3.2}$$

$$\Big\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z \Big\rangle + \int_\Omega (D(\psi)\nabla c + A_3(\psi, c)\nabla \psi) \cdot \nabla z + b_c(\mathbf{u}; c, z) = 0, \tag{2.3.3}$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$, q.t.p. em $(0, T)$, e as condições iniciais $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $c(0) = c_0$, $\psi(0) = \psi_0$.

Esta definição difere da definição de solução fraca em [39] por dois aspectos, em primeiro lugar, aqui aparece o termo extra $\mathcal{T}(\mathbf{u})$ na equação da velocidade, além disso, as derivadas temporais de $\mathbf{u}$, ψ e c têm menos regularidade no tempo. Esta perca de regularidade ocorre devido aos termos trilineares que aparecem na formulação fraca, que são estimados utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg tridimensional, que é diferente do da desigualdade no caso bidimensional.

Em seguida estabelecemos e provamos o teorema que garante existência de solução fraca.

Teorema 2.3.2 (Existência de solução fraca)**.** Assuma que as hipóteses (H1)-(H3) são satisfeitas e que $(\mathbf{u}_0, \psi_0, c_0) \in \mathbf{H}$. Então, existe pelo menos uma solução fraca para o problema (2.2.1)-(2.2.6).

Demonstração. Aplicamos o método de Faedo-Galerkin. Sejam $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ os autovalores do operador de Stokes e $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções correspondentes. Essas autofunções formam uma base ortogonal e completa em H, V e $V \cap H^2(\Omega)$. Denotamos $W_m := \text{span}\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}$ e seja P_m a projeção ortogonal de H em W_m.

De maneira similar, sejam $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ as autofunções do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Neumann homogênea e $(e_i)_{i\geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções associadas, tal que $(e_i)_{i\geq 1}$ forma uma base ortogonal e completa em $L^2(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$. Denotamos $E_m := \text{span}\{e_1, ..., e_m\}$ e seja L_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em E_m.

Introduzimos o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$ encontrar

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{i=1}^m u_i^m(t)\mathbf{w}_i \in W_m, \;\; \psi_m(t) = \sum_{i=1}^m \psi_i^m(t)e_i \in E_m \text{ e } \;\; c_m(t) = \sum_{i=1}^m c_i^m(t)e_i \in E_m, \tag{2.3.4}$$

tais que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{v} + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \\
&\qquad = \int_\Omega \mathbf{A}_1(\psi_m, c_m)\mathbf{v} + \int_\Omega b(\psi_m)((\mathcal{T}(\mathbf{u}_m) + \mathbf{u}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})\mathbf{v} && (2.3.5)\\
&\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega \nabla \psi_m \cdot \nabla z + b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m; \psi_m, z) = \int_\Omega A_2(\psi_m, c_m)z && (2.3.6)\\
&\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega (D(\psi_m)\nabla c_m + A_3(\psi_m, c_m)\nabla \psi_m) \cdot \nabla z + b_c(\mathbf{u}_m; c_m, z) = 0, && (2.3.7)\\
&\qquad (\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m)(0) = (P_m\mathbf{u}_0, L_m\psi_0, L_m c_0) && (2.3.8)
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in W_m$ e $z \in E_m$. Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias não linear de primeira ordem para $(u_i^m,\ \psi_i^m,\ c_i^m)$ que tem uma única solução definida num intervalo maximal $(0, T_m)$ com $0 < T_m \leq T$. Para verificar que este sistema de EDO tem única solução no intervalo maximal, essencialmente, é necessário mostrar que a parte não linear do sistema é uma função localmente Lipschitz na segunda variável, e então aplicar o teorema de Picard.

A seguir obteremos algumas estimativas independentes de m para $(\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m)$, que nos permitirão mostrar que $T_m = T$, para qualquer $T > 0$, e também serão cruciais para passarmos ao limite nas equações do problema aproximado (2.3.5)-(2.3.8). Vamos denotar por C uma constante positiva independente de m que pode mudar em cada passo das contas.

Tomando $\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m$ como funções teste em (2.3.5)-(2.3.7), respectivamente, integrando por partes, usando as hipóteses (H1)-(H3), e as desigualdades de Hölder e de Young, temos que

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \leq C(1 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{T}(\mathbf{u}_m)\|_{L^2}^2), \tag{2.3.9}$$

$$\frac{d}{dt}\|\psi_m\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla \psi_m\|_{L^2}^2 \leq C(1 + \|\psi_m\|_{L^2}^2), \tag{2.3.10}$$

$$\frac{d}{dt}\|c_m\|_{L^2}^2 + D_0\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla \psi_m\|_{L^2}^2. \tag{2.3.11}$$

Multiplicando a equação (2.3.11) por $1/C$ e adicionando (2.3.10) e (2.3.9), observando que, por (2.2.7), $\|\mathcal{T}(\mathbf{u}_m)\|_{L^2} \leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}$, podemos aplicar o Lemma de Gronwall e concluir que, independentemente de m,

$$(\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_m; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T_m; \mathbf{V}). \tag{2.3.12}$$

Com isso, podemos concluir que $T_m = T$.

Das equações (2.3.5)-(2.3.7), temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{V'} &\leq C(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}^2 + 1 + \|\mathcal{T}(\mathbf{u}_m)\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}),\\
\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C(\|\nabla \psi_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\psi_m\|_{L^4} + 1),\\
\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C(\|\nabla c_m\|_{L^2} + \|\nabla \psi_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|c_m\|_{L^4}).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2.10) e (2.2.7), podemos estimar

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{V'} &\leq C(\|\mathbf{u}_m\|_V + \|\mathbf{u}_m\|_V^{3/2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^{1/2} + 1),\\
\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C(\|\nabla \psi_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_V^{3/4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^{1/4}\|\psi_m\|_{H^1}^{3/4}\|\psi_m\|_{L^2}^{1/4} + 1),\\
\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C(\|\nabla c_m\|_{L^2} + \|\nabla \psi_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_V^{3/4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^{1/4}\|c_m\|_{H^1}^{3/4}\|c_m\|_{L^2}^{1/4}).
\end{aligned}$$

Dessa forma, de (2.3.12), inferimos que, independentemente de m

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \frac{\partial \psi_m}{\partial t}, \frac{\partial c_m}{\partial t}\right) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; \mathbf{V}'). \tag{2.3.13}$$

Como a imersão de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$ é compacta, segue do Teorema 1.3.12 e das estimativas (2.3.12)-(2.3.13), que existe $(\mathbf{u}, \psi, c) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap W^{1,4/3}(0, T; \mathbf{V}')$, e uma subsequência de $(\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m)$, que denotamos com o mesmo subíndice, tal que

$$(\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m) \rightharpoonup (\mathbf{u}, \psi, c) \text{ fracamente em } L^2(0, T; \mathbf{V}), \tag{2.3.14}$$

$$(\mathbf{u}_m, \psi_m, c_m) \to (\mathbf{u}, \psi, c) \text{ fortemente em } L^2(0, T; \mathbf{H}). \tag{2.3.15}$$

Observe que pelas hipóteses (H1)-(H3), as não linearidades são funções Lipschitz e limitadas, de forma que podemos passar ao limite nelas (veja, por exemplo [39, Lemma 2.4]). Além disso, de (2.2.7) vale que $\mathcal{T}(\mathbf{u}_m) \to \mathcal{T}(\mathbf{u})$ fortemente em $L^2(0; T; L^2(\Omega))$. Dessa forma, com essas convergências podemos passar ao limite nas equações (2.3.5)-(2.3.8) e concluir que existe pelo menos uma solução fraca para (2.2.1)-(2.2.6). $\square$

Como uma consequência do Teorema 2.3.2 obtemos a existência de uma solução fraca para (2.0.1)-(2.0.7).

Corolário 2.3.3. Seja $(\mathbf{u}_0, \psi_0, c_0) \in \mathbf{H}$ e assuma que (H1)-(H3) são satisfeitas. Então, existe uma solução fraca $(\mathbf{u}, \phi, \psi, c)$ para o problema (2.0.1)-(2.0.7) no seguinte sentido:

$$(\mathbf{u}, \psi, c) \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}), \quad \phi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)/\mathbb{R}),$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}\right) \in L^{4/3}(0, T; \mathbf{V}'),$$

e satisfazem

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle + \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + b_u(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{2.3.16}$$

$$= \int_\Omega \mathbf{A}_1(\psi, c)\mathbf{v} + \int_\Omega b(\psi)((-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})\mathbf{v} \tag{2.3.17}$$

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla z dx = \int_\Omega (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla z \tag{2.3.18}$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla z + b_\psi(\mathbf{u}; \psi, z) = \int_\Omega A_2(\psi, c) z \tag{2.3.19}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega (D(\psi)\nabla c + A_3(\psi, c)\nabla\psi) \cdot \nabla z + b_c(\mathbf{u}; c, z) = 0, \tag{2.3.20}$$

para todo $\mathbf{v} \in V$ e $z \in H^1(\Omega)$ no sentido das distribuições em $(0, T)$ e $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $c(0) = c_0$, $\psi(0) = \psi_0$.

Demonstração. Seja $(\mathbf{u}, \psi, c)$ uma solução fraca dada pelo Teorema 2.3.2, com

$$\mathcal{T}(\mathbf{u}) = -\nabla\phi,$$

onde $\phi(t) \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ é a única função satisfazendo (2.2.8). Em particular,

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla z dx = \int_\Omega (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla z \quad \text{para todo } z \in H^1(\Omega).$$

Tomando $\phi(t)$ como função teste, segue que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\mathcal{T}(\mathbf{u})\|_{L^2} = \|\nabla\phi\|_{L^2} \le C\|\mathbf{u}\|_{L^2},$$

daí $\nabla\phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Além disso, aplicando a Proposição 1.3.10, deduzimos que $\phi(t) \in L^2(\Omega)$ e

$$\|\phi(t)\|_{L^2/\mathbb{R}} \le C\|\nabla\phi(t)\|_{L^2}.$$

Então, $\phi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$.

Além disso, devido ao fato que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ e $\mathbf{B} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$, segue que $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \in L^2((0, T) \times \Omega)$. Assim, multiplicando a equação (2.2.8) por $\Delta\phi$, integrando sobre $(0, T) \times \Omega$ e aplicabdo a desigualdade de Young, obtemos que

$$\|\Delta\phi\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \le C\|\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}.$$

Então, $\phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega)/\mathbb{R})$. □

2.3.2 Regularidade da solução

Nessa subseção, primeiro melhoramos a regularidade do campo de velocidade, e como consequência mostramos que o campo de fase é mais regular. Diferentemente do caso bidimensional, a solução forte das equações de Navier-Stokes no caso tridimensional é local no tempo, de modo que isso implica regularidade local para o campo de fase e para a concentração. Então, provaremos a existência de solução forte local para o problema (2.2.1)-(2.2.6). Finalmente, com hipóteses adicionais sobre as não linearidades, um princípio do máximo para o campo de fase e para a concentração é estabelecido.

Teorema 2.3.4 (Regularidade local)**.** Seja $(\mathbf{u}_0, \psi_0, c_0) \in V \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e suponha satisfeitas as hipóteses (H1)-(H3). Então, existe $T_* > 0$ tal que a solução fraca dada pelo Teorema 2.3.2 tem a seguinte regularidade

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; H),\\
&\psi \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Demonstração. Para estabelecer a regularidade da solução, obtemos estimativas a priori para derivadas de maior ordem das soluções aproximadas. Primeiramente, como os dados iniciais são mais regulares, vale que

$$\|P_m \mathbf{u}_0\|_V \le C\|\mathbf{u}_0\|_V \text{ e } \|\nabla L_m \psi_0\|_{L^2} \le C\|\nabla\psi_0\|_{L^2},$$

onde C é uma constante independente de m.

Para o campo de velocidades, notamos que $\mathbf{A}_1(\psi_m, c_m) + b(\psi_m)((\mathcal{T}(\mathbf{u}_m) + \mathbf{u}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})$ é limitada em $L^\infty(0, T; H)$ independentemente de m. Assim, podemos proceder como no Teorema 3.11 do capítulo III de [44] para obter que existe $T^* > 0$ tal que

$$(\mathbf{u}_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; H) \tag{2.3.21}$$

independentemente de m, daí segue a regularidade para o limite $\mathbf{u}$. Ou seja, multiplicando a equação (2.3.5) por λ_i (com $\mathbf{v} = \mathbf{w}_i$) obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\nabla \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \nabla \mathbf{w}_i\right) &+ (A\mathbf{u}_m, A\mathbf{w}_i) + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{w}_i)\\
&= (\nabla \mathbf{A}_1(\psi_m, c_m), \nabla \mathbf{w}_i) + (\nabla b(\psi_m)((T(\mathbf{u}_m) + \mathbf{u}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), \nabla \mathbf{w}_i)\\
&= (\mathbf{A}_1(\psi_m, c_m), A\mathbf{w}_i) + (b(\psi_m)((T(\mathbf{u}_m) + \mathbf{u}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), A\mathbf{w}_i).
\end{aligned}$$

Multiplicando por u_i^m e somando sobre $i = 1, \cdots, m$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)\\
&= (\mathbf{A}_1(\psi_m, c_m), A\mathbf{u}_m) + (b(\psi_m)((T(\mathbf{u}_m) + \mathbf{u}_m \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), A\mathbf{u}_m).
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, o fato que $\mathbf{A}_1$ e b são limitadas e (2.2.7), segue que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &+ 2\|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le C\left(|b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)| + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev no termo $|b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)|$, obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)| &\le \int_\Omega |\mathbf{u}_m||\nabla \mathbf{u}_m|^{1/2}|\nabla \mathbf{u}_m|^{1/2}|A\mathbf{u}_m|\\
&\le \|\mathbf{u}_m\|_{L^6(\Omega)}\||\nabla \mathbf{u}_m|^{1/2}\|_{L^4(\Omega)}\||\nabla \mathbf{u}_m|^{1/2}\|_{L^{12}(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\\
&= \|\mathbf{u}_m\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^{1/2}_{L^6(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\\
&= C\|\nabla \mathbf{u}_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}+\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Lembrando que $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^\infty(0,T;H)$ e usando adequadamente a desigualdade de Young, seque que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\left(1+\|\nabla \mathbf{u}_m\|^6_{L^2(\Omega)}\right).$$

Agora, usando a equivalência das normas $\|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ e $\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^2(\Omega)}$ (veja, por exemplo, o Lema 3.7 no capítulo III de [44]), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^2(\Omega)}\leq C\left(1+\|\nabla \mathbf{u}_m\|^6_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.3.22}$$

Dessa forma, integrando sobre $(0,t)$, com $t\in(0,T)$ e usando que

$$\|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)},$$

obtemos

$$\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)}+Ct+C\int_0^t\|\nabla \mathbf{u}_m\|^6_{L^2(\Omega)}.$$

Então, do Teorema 1.2.3 segue que

$$\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\leq (\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)}+Ct)\left[1-2C\int_0^t(\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)}+Cs)^2ds\right]^{-\frac{1}{2}}$$

para todo $t\in[0,T_*]$, onde $T_*=sup\left\{t\ \middle|2C\int_0^t(\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)}+Cs)^2ds<1\right\}$. Vale observar que T_* não depende de m.

Dessa forma, $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T_*;V)$. Daí, usando (2.3.22), segue que $\mathbf{u}_m$ está uniformemente limitada em $L^2(0,T_*;H^2(\Omega))$.

Agora, multiplicando a equação (2.3.5) por $\frac{\partial u_i^m}{\partial t}$ (com $\mathbf{v}=\mathbf{w}_i$) e somando sobre $i=1,2,\cdots,m$, obtemos

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}+b_u(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t})$$
$$=\int_\Omega \mathbf{A}_1(\psi_m,c_m)\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}+\int_\Omega b(\psi_m)((T(\mathbf{u}_m)+\mathbf{u}_m\times\mathbf{B})\times\mathbf{B})\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, usando (2.2.7) e o fato que as funções b e $\mathbf{A}_1$ são limitadas, segue que existe uma constante $C>0$, tal que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t})\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Usando a imersão de Sobolev (i. e., $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, com imersão contínua), a estimativa (2.3.21) e a desigualdade de Young, segue que existe uma constante (que também denotaremos por C) tal que

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^2(\Omega)} + 1\right),$$

para todo $t \in [0, T_*]$.

Integrando sobre $[0, T_*]$, temos

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{u}_m(T_*)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq CT_* + C\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T_*;H^2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dessa forma, usando que $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^2(0, T_*; H^2(\Omega))$, que

$$\|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}$$

e que $\mathbf{u}_0 \in V$, segue que existe uma constante $C > 0$ que não depende de m e tal que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{2.3.23}$$

Dessa forma, concluímos que $\mathbf{u} \in H^1(0, T_*; H)$.

Agora, mostraremos a regularidade de ψ. Para isso, tomamos $-\Delta\psi_m \in E_m$ como uma função teste em (2.3.6) e usamos a desigualdade de Hölder para obter que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + \|\Delta\psi_m\|^2_{L^2} &\leq |b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m; \psi_m, \Delta\psi_m)| + \left|\int_\Omega A_2(\psi_m, c_m)\Delta\psi_m\right| \\ &\leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla\psi_m\|_{L^4}\|\Delta\psi_m\|_{L^2} + \|\Delta\psi_m\|_{L^2}\right).\end{aligned}$$

Como $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, usando a estimativa (2.3.21) e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2.10), segue que, para todo $t \in [0, T_*]$,

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + 2\|\Delta\psi_m\|^2_{L^2} \leq C(\|\nabla\psi_m\|^{3/4}_{H^1}\|\nabla\psi_m\|^{1/4}_{L^2}\|\Delta\psi_m\|_{L^2} + \|\Delta\psi_m\|_{L^2}).$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando a estimativa elíptica (2.2.9), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + 2\|\Delta\psi_m\|^2_{L^2} &\leq C(\|\psi_m\|^{3/2}_{H^2}\|\nabla\psi_m\|^{1/2}_{L^2} + 1) + \|\Delta\psi_m\|^2_{L^2} \\ &\leq C(\|\Delta\psi_m\|^{3/2}_{L^2}\|\nabla\psi_m\|^{1/2}_{L^2} + \|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + 1) + \|\Delta\psi_m\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Young e rearranjando os termos, chegamos em

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + 1\right) + \|\Delta\psi_m\|^2_{L^2} \leq C\left(\|\nabla\psi_m\|^2_{L^2} + 1\right). \tag{2.3.24}$$

Então, o lema de Gronwall implica que, independentemente de m

$$(\nabla\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega)),$$

que, junto com a estimativa (2.3.12), nos dá que

$$(\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \tag{2.3.25}$$

independentemente de m. Integrando-se (2.3.24) sobre $[0,T_*]$, usando-se (2.3.25) e a estimativa elíptica (2.2.9), deduzimos que independentemente de m

$$(\psi_m) \text{ é limitada em } L^2(0,T_*;H^2(\Omega)). \tag{2.3.26}$$

Consequentemente, o limite $\psi \in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega))$.

Finalmente, tomando $\dfrac{\partial \psi^m}{\partial t} \in E_m$ como função teste em (2.3.6) e usando as desigualdades de Hölder e de Young, temos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi_m\|_{L^2}^2 &\le C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla\psi_m\|_{L^4}\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2}\Big)\\ &\le C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_V^2\|\psi_m\|_{H^2}^2+1\Big) + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Integrando sobre $[0,T_*]$, usando (2.3.21) e (2.3.26), segue que

$$\Big(\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\Big) \text{ é limitada em } L^2(0,T_*;L^2(\Omega)). \tag{2.3.27}$$

Isso completa a demonstração.

□

Observação 2.3.5. Com a regularidade obtida, do Teorema 1.3.9, existe uma distribuição $p \in L^2(0,T_*;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}_1(\psi,c) - b(\psi)((\mathcal{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}) = -\nabla p$$

q.t.p. em $\Omega\times(0,T_*)$.

Teorema 2.3.6 (Existência de solução forte)**.** Seja $(\mathbf{u}_0,\psi_0,c_0) \in V\times H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ com $\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$ e assuma que (H1)-(H3) são satisfeitas. Então, existe $T_*>0$ tal que

$$\begin{aligned}&\mathbf{u} \in L^\infty(0,T_*;V)\cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T_*;H),\\ &p\in L^2(0,T_*;H^1(\Omega)/\mathbb{R})\\ &\psi\in L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T_*;H^3(\Omega))\cap H^1(0,T_*;H^1(\Omega)),\\ &c\in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega))\cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T_*;L^2(\Omega)),\end{aligned}$$

e $(\mathbf{u},p,\psi,c)$ satisfaz as equações (2.2.1)-(2.2.6) q.t.p. em $\Omega\times(0,T_*)$.

Demonstração. A regularidade de $\mathbf{u}$ é dada no teorema anterior. A seguir, vamos obter novas estimativas a priori para as soluções aproximadas. Tomando $\Delta^2\psi_m \in E_m$ como função teste em (2.3.6), integrando por partes e usando que $\frac{\partial\Delta\psi_m}{\partial\mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\Delta\psi_m\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^2\\ &\qquad\le 2\Big(|b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m;\psi_m,\Delta^2\psi_m)| + \int_\Omega |\nabla A_2(\psi_m,c_m)||\nabla\Delta\psi_m|\Big).\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Para estimar o primeiro termo do lado direito, integramos por partes, de modo que podemos reescrevê-lo da seguinte forma

$$b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m;\psi_m,\Delta^2\psi_m) = -\int_\Omega(\nabla\mathbf{u}_m\cdot\nabla\psi_m + \mathbf{u}_m\cdot D^2\psi_m)\cdot\nabla\Delta\psi_m,$$

então, usando a desigualdade de Hölder e de Gagliardo-Nirenberg, segue que

$$\begin{aligned}
&|b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m;\psi_m,\Delta^2\psi_m)| \\
&\leq \Big(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla\psi_m\|_{L^4}+\|D^2\psi_m\|_{L^4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\Big)\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2} \\
&\leq C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}\|\psi_m\|_{H^2}+\|D^2\psi_m\|_{L^2}^{1/4}\|D^2\psi_m\|_{H^1}^{3/4}\|\mathbf{u}_m\|_V\Big)\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2} \\
&\leq C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}\|\psi_m\|_{H^2}+\|\psi_m\|_{H^2}^{1/4}\|\psi_m\|_{H^3}^{3/4}\Big)\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2},
\end{aligned}$$

onde foi usada a imersão de Sobolev e o fato que a sequência $\mathbf{u}_m$ é limitada em $L^\infty(0,T_*;V)$ (veja (2.3.21)).

Agora, usando a desigualdade de Young e a estimativa elíptica (2.2.9), obtém-se que

$$\begin{aligned}
&|b_{\psi_m}(\mathbf{u}_m;\psi_m,\Delta^2\psi_m)| \\
&\leq C\Big(\big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}^2+1\big)\|\psi_m\|_{H^2}^2+\|\psi_m\|_{H^2}^{1/2}\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^{3/2}\Big)+\frac{1}{4}\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}^2\big(\|\Delta\psi_m\|_{L^2}^2+\|\psi_m\|_{L^2}^2\big)+\|\psi_m\|_{H^2}^2\Big)+\frac{1}{2}\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

A limitação do segundo termo do lado direito de (2.3.28) segue das desigualdades de Hölder e Young,

$$\int_\Omega |\nabla A_2(\psi_m,c_m)||\nabla\Delta\psi_m| \leq C\Big(\|\nabla\psi_m\|_{L^2}^2+\|\nabla c_m\|_{L^2}^2\Big)+\frac{1}{2}\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^2.$$

Usando as últimas estimativas em (2.3.28), temos que

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\psi_m\|_{L^2}^2+\|\nabla\Delta\psi_m\|_{L^2}^2 \leq C\Big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}^2\|\Delta\psi_m\|_{L^2}^2+\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}^2+\|\psi_m\|_{H^2}^2+\|c_m\|_{H^1}^2\Big). \quad (2.3.29)$$

Por (2.3.12) e das regularidades melhoradas (2.3.21) e (2.3.26), sabemos que $\mathbf{u}_m$ e ψ_m estão limitadas em $L^2(0,T_*;H^2(\Omega))$ e c_m em $L^2(0,T_*;H^1(\Omega))$. Consequentemente, pelo lema de Gronwall

$$(\Delta\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega)),$$

onde usamos que $\psi_0\in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}=0$ sobre $\partial\Omega$ implica que $\|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2}\leq\|\Delta\psi_0\|_{L^2}$. Então, pela estimativa elíptica com (2.3.12), concluímos que

$$(\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega)). \quad (2.3.30)$$

Integrando (2.3.29) sobre $[0,T_*]$, usando as limitações acima e a estimativa elíptica (2.2.9), inferimos que

$$(\psi_m) \text{ é limitada em } L^2(0,T_*;H^3(\Omega)). \quad (2.3.31)$$

Agora mostremos a regularidade de c_m. Tomando $-\Delta c_m\in E_m$ com função teste em (2.3.7), integrando por partes e usando as hipóteses (H1)-(H3), temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2+D_0\int_\Omega|\Delta c_m|^2 \\
&\qquad\leq C\int_\Omega\Big(|\nabla\psi_m||\nabla c_m|+|\nabla\psi_m|^2+|\Delta\psi_m|\Big)|\Delta c_m|+b_c(\mathbf{u}_m;c_m,\Delta c_m),
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + 2D_0\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 \\
&\qquad \leq C\Big(\|\nabla\psi_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^4} + \|\nabla\psi_m\|_{L^4}^2 + \|\Delta\psi_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^4}\Big)\|\Delta c_m\|_{L^2} \\
&\qquad \leq C\Big(\|\psi_m\|_{H^2}\|\nabla c_m\|_{L^4} + \|\psi_m\|_{H^2}^2 + \|\psi_m\|_{H^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{V}\|\nabla c_m\|_{L^4}\Big)\|\Delta c_m\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Note que $\mathbf{u}_m$ é limitada em $L^\infty(0,T_*;V)$ e ψ_m em $L^\infty(0,T_*;H^2)$, assim, aplicando a desigualdade de Young, inferimos

$$\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + D_0\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C(\|\nabla c_m\|_{L^4}^2 + 1).$$

Aplicando as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg (2.2.10), a desigualdade de Young, e então a estimativa elíptica (2.2.9), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + D_0\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla c_m\|_{H^1}^{3/2} + 1\right) \\
&\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + 1\right) + \frac{D_0}{2}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall junto com (2.3.12), e usando que $c_0 \in H^1(\Omega)$, deduzimos que

$$(c_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega)). \tag{2.3.32}$$

Uma vez que melhoramos a regularidade da solução, usando as equações, pode ser provado que $\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^2(0,T_*;H^1(\Omega))$ e $\frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(0,T_*;L^2(\Omega))$ como no Teorema 2.3 em [39], já que a demonstração não depende da dimensão. Ou seja, para provar que $\psi \in H^1(0,T_*;H^1(\Omega))$ multiplicamos a equação (2.3.6), com $z = e_i$, por $\mu_i\frac{\partial\psi_i^m}{\partial t}$ e somamos sobre $i = 1, 2, \cdots, m$, obtendo

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\psi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = b_{\psi_m}\left(\mathbf{u}_m;\psi_m,\Delta\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right) + \int_\Omega A_2(\psi_m,c_m)\Delta\frac{\partial\psi_m}{\partial t} \\
&= -\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_m\cdot\nabla\psi_m)\cdot\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t} - \int_\Omega \nabla A_2(\psi_m,c_m)\cdot\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t} \\
&= -\int_\Omega (\nabla\mathbf{u}_m\cdot\nabla\psi_m + \nabla(\nabla\psi_m)\cdot\mathbf{u}_m)\cdot\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t} - \int_\Omega \nabla A_2(\psi_m,c_m)\cdot\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t} \\
&\leq C\left(\left(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\psi_m\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla(\nabla\psi_m)\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)}\right)\left\|\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\quad \left. + \left(\|\nabla\psi_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Então, aplicando a imersão de Sobolev, as estivas (2.3.30) e (2.3.21) e a desigualdade de Young, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon^2\frac{d}{dt}\|\Delta\psi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\qquad \leq C\left(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\nabla(\nabla\psi_m)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\nabla\psi_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando sobre $[0, T_*]$, usando as estimativas (2.3.21), (2.3.31) e (2.3.32), segue que

$$\left\| \nabla \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} \leq C$$

onde usamos também que $\|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}$, já que $\psi_0 \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial \psi_0}{\partial t} = 0$. Dessa forma, de (2.3.27) temos que

$$\|\psi_m\|_{H^1(0,T_*;H^1(\Omega))} \leq C. \tag{2.3.33}$$

Portanto, de (2.3.30), (2.3.31) e (2.3.33), concluímos que

$$\psi \in L^\infty(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; H^1(\Omega)).$$

Agora, multiplicamos a equação (2.3.7) por $\frac{\partial c_i^m}{\partial t}$, com $z = e_i$, e somando sobre $i = 1, 2, \cdots, m$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega (D(\psi_m)\nabla c_m + A_3(\psi_m, c_m)\nabla\psi_m) \cdot \nabla \frac{\partial c_m}{\partial t} - b_c\left(\mathbf{u}_m; c_m, \frac{\partial c_m}{\partial t}\right) \\
&= \int_\Omega \nabla(D(\psi_m)\nabla c_m + A_3(\psi_m, c_m)\nabla\psi_m)\frac{\partial c_m}{\partial t} - b_c\left(\mathbf{u}_m; c_m, \frac{\partial c_m}{\partial t}\right) \\
&= \int_\Omega \nabla D(\psi_m) \cdot \nabla c_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \int_\Omega D(\psi_m)\Delta c_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \int_\Omega \nabla A_3(\psi_m, c_m)\nabla\psi_m \frac{\partial c_m}{\partial t} \\
&+ \int_\Omega A_3(\psi_m, c_m)\Delta\psi_m \frac{\partial c_m}{\partial t} - b_c\left(\mathbf{u}_m; c_m, \frac{\partial c_m}{\partial t}\right) \\
&\leq C\Big(\int_\Omega |\nabla\psi_m||\nabla c_m|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega |\Delta c_m|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega |\nabla\psi_m|_2^2\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right| \\
&+ \int_\Omega |\nabla c_m||\nabla\psi_m|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right| + \int_\Omega |\Delta\psi_m|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right| + \left|b_c\left(\mathbf{u}_m; c_m, \frac{\partial c_m}{\partial t}\right)\right|\Big).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\Big(\|\nabla\psi_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^4(\Omega)} + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\psi_m\|^2_{L^4(\Omega)} + \|\Delta\psi_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|\mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla c_m\|_{L^4(\Omega)}\Big)\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando a imersão de Sobolev e as estimativas (2.3.21) e (2.3.30), concluímos que existe uma constante $C > 0$, tal que para todo $t \in [0, T_*]$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta c_m\|_{L^2(\Omega)} + 1\right)\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\left(\|c_m\|_{H^2(\Omega)} + 1\right)\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos que

$$\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|c_m\|_{H^2(\Omega)} + 1\right).$$

Integrando sobre $[0, T_*]$, concluímos que

$$\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{2.3.34}$$

Sendo assim, por (2.3.32) e (2.3.34) concluímos que

$$c \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)).$$

Isso completa a prova. □

Agora, retornamos para o problema original (2.0.1)-(2.0.7) e discutimos a regularidade da função potencial ϕ. Temos duas situações dependendo da regularidade do campo magnético $\mathbf{B}$.

1. Se $\mathbf{B} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$, como $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V)$, vale que $\operatorname{div}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{B}(t)) \in L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega))$. Então, para q.t.p. $t \in (0, T_*)$ a solução de (2.2.8) satisfaz $\phi(t) \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Dessa forma, multiplicando a equação (2.2.8) por $\Delta\phi(t)$ e integrando sobre Ω, segue que
$$\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})\|_{L^2}^2.$$
Isso implica que $\phi \in L^\infty(0, T_*; H^2(\Omega)/\mathbb{R}))$.

2. Se $\mathbf{B} \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\Omega))$, como $\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega))$, temos que $\operatorname{div}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{B}(t)) \in L^2(0, T_*; H^1(\Omega))$. Então, para q.t.p. $t \in (0, T_*)$, $\phi(t) \in H^3(\Omega)/\mathbb{R}$. Aplicando o gradiente na equação (2.2.8), multiplicando a equação resultante por $\Delta\nabla\phi(t)$ e integrando sobre Ω, obtemos
$$\|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})\|_{L^2}^2,$$
daí $\phi \in L^2(0, T_*; H^3(\Omega)/\mathbb{R}))$.

Finalizamos a presente seção notando que, sobre hipóteses físicas nos termos não lineares, um princípio do máximo para o campo de fase e para a concentração é válido. Isto será útil para lidarmos com o caso degenerado. Assim, assumindo que os termos não lineares A_2 e A_3 satisfazem as hipóteses extras (H4) e (H5), ou seja,

(H4) $A_2(r, s) = 0$ para $r \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

(H5) $A_3(r, s) = 0$ para $s \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $\forall\ r \in \mathbb{R}$,

vale a seguinte proposição:

Proposição 2.3.7 (Princípio do Máximo)**.** Além das hipóteses no Teorema 2.3.6 assuma que (H4)-(H5) são satisfeitas e que

$$0 \leq \psi_0 \leq 1,\ 0 \leq c_0 \leq 1, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então,
$$0 \leq \psi \leq 1,\ 0 \leq c \leq 1, \quad \text{q.t.p. em } \Omega \times (0, T_*).$$

Vamos omitir a demonstração, uma vez que não difere em nada da demonstração em [39].

2.3.3 Dependência contínua

Nesta subseção provamos a continuidade da solução forte em relação aos dados iniciais e ao campo magnético, consequentemente temos a unicidade da solução forte local.

Teorema 2.3.8. Sejam $(\mathbf{u}_0^i, \psi_0^i, c_0^i) \in V \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ satisfazendo $\frac{\partial \psi_0^i}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, $i = 1, 2$. Assuma que (H1)-(H3) são satisfeitas. Sejam $(\mathbf{u}_i, \phi_i, c_i)$ as soluções fortes locais de (2.2.1)-(2.2.6) com dados iniciais $(\mathbf{u}_0^i, \psi_0^i, c_0^i)$ e campo magnético $\mathbf{B}_i$, definidas em $[0, T_*^i]$, $i = 1, 2$. Então, vale que

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^\infty(0,T_*;L^2)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^\infty(0,T_*;H^1)} + \|c_1 - c_2\|_{L^\infty(0,T_*;L^2)} \\
&\leq C\left(\|\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2\|_{L^2} + \|\psi_0^1 - \psi_0^2\|_{H^1} + \|c_0^1 - c_0^2\|_{L^2} + \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|_{L^\infty(Q)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3.35}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^2(0,T_*;H^1)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(0,T_*;H^2)} + \|c_1 - c_2\|_{L^2(0,T_*;H^1)} \\
&\leq C\left(\|\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2\|_{L^2} + \|\psi_0^1 - \psi_0^2\|_{H^1} + \|c_0^1 - c_0^2\|_{L^2} + \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|_{L^\infty(Q)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3.36}
$$

onde $C > 0$ é uma constante e $T_* = \min\{T_*^1, T_*^2\}$. Consequentemente, a solução forte local dada pelo Teorema 2.3.6 é única.

Demonstração. Denotamos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\phi = \phi_2 - \phi_1$, $c = c_1 - c_2$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$. Vamos derivar uma desigualdade diferencial que nos permitirá aplicar o lema de Gronwall e concluir o resultado. Observe que $\mathbf{u}, \psi$ e c satisfazem, para todo $\mathbf{v} \in V$ e $z \in H^1(\Omega)$, as seguintes equações

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} &+ \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + b_u(\mathbf{u}; \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_2; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\
&= \int_\Omega [(\mathbf{A}_1(\psi_1, c_1) - \mathbf{A}_1(\psi_2, c_2))\mathbf{v} + (b(\psi_1) - b(\psi_2))\mathcal{T}(\mathbf{u}_1)\mathbf{v} + b(\psi_2)\mathcal{T}(\mathbf{u})\mathbf{v}] \\
&+ \int_\Omega (b(\psi_1) - b(\psi_2))((\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_1)\mathbf{v} \\
&+ \int_\Omega b(\psi_2)\big((\mathbf{u} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_1 + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_1 + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}\big)\mathbf{v},
\end{aligned}
\tag{2.3.37}
$$

$$
\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial t} z + \int_\Omega \nabla \psi \cdot \nabla z + b_\psi(\mathbf{u}; \psi_1, z) + b_\psi(\mathbf{u}_2; \psi, z) = \int_\Omega (A_2(\psi_1, c_1) - A_2(\psi_2, c_2))z,
\tag{2.3.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} z &+ \int_\Omega [D(\psi_2)\nabla c + (D(\psi_1) - D(\psi_2))\nabla c_1] \cdot \nabla z + b_c(\mathbf{u}; c_1, z) + b_c(\mathbf{u}_2; c, z) \\
&= \int_\Omega [(A_3(\psi_1, c_1) - A_3(\psi_2, c_2))\nabla \psi_1 \cdot \nabla z + A_3(\psi_2, c_2)\nabla \psi \cdot \nabla z]
\end{aligned}
\tag{2.3.39}
$$

com

$$
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2, \quad \psi(0) = \psi_0^1 - \psi_0^2 \quad \text{e} \quad c(0) = c_0^1 - c_0^2.
$$

Tomando $\mathbf{u} \in V$ como uma função teste em (2.3.37), usando as hipóteses (H1)-(H3), (2.2.7), e a desigualdade de Hölder, podemos estimar

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 +&\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\\ \leq& C\Big(\|\mathbf{u}\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}_1\|_{L^2} + (\|\psi\|_{L^2} + \|c\|_{L^2})\|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^4}\|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\mathcal{T}(\mathbf{u}_1)\|_{L^2}\\ &+ \|\mathcal{T}(\mathbf{u})\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^4}\|\mathbf{u}_1\|_{L^4}\|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\mathbf{B}\|_{L^\infty}\Big).\end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{u}_i \in L^\infty(0,T_*;V)$. Então, por Gagliardo-Nirenberg (2.2.11) e pela desigualdade de Young segue que

$$\frac{d}{dt}\,\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|c\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}\|_{L^\infty}^2\big). \tag{2.3.40}$$

Tomando $\psi \in H^1(\Omega)$ como função teste em (2.3.38), notando que $\psi_1 \in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega))$, como anteriormente temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\|\psi\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 &\leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\psi_1\|_{L^2}\|\psi\|_{L^4} + \|\psi\|_{L^2}^2 + \|c\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\big)\\ &\leq C\big(\|\psi\|_{H^1}^2 + \|c\|_{L^2}^2\big) + \frac{1}{4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Agora, escolhemos $-\Delta\psi \in H^1(\Omega)$ como função teste em (2.3.38) e usamos a desigualdade de Hölder para encontrar

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\psi_1\|_{L^4} + \|\mathbf{u}_2\|_{L^4}\|\nabla\psi\|_{L^4} + \|\psi\|_{L^2} + \|c\|_{L^2}\big)\|\Delta\psi\|_{L^2}.$$

Como $\psi_1 \in L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega))$ e $\mathbf{u}_2 \in L^\infty(0,T_*;V)$, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2.10), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2}^2\\ &\leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^{1/4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^{3/4} + \|\nabla\psi\|_{L^2}^{1/4}\|\nabla\psi\|_{H^1}^{3/4} + \|\psi\|_{L^2} + \|c\|_{L^2}\big)\|\Delta\psi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young e a estimativa elíptica (2.2.9), inferimos que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|c\|_{L^2}^2\big) + \frac{1}{4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2. \tag{2.3.42}$$

Finalmente, tomamos $c \in H^1(\Omega)$ como função teste em (2.3.39) e usamos as hipóteses (H1)-(H3), e como antes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|c\|_{L^2}^2 &+ D_0\|\nabla c\|_{L^2}^2\\ &\leq C\big(\|\psi\|_{L^\infty}\|\nabla c_1\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^4}\|\nabla\psi_1\|_{L^4} + \|c\|_{L^4}\|\nabla\psi_1\|_{L^4} + \|\nabla\psi\|_{L^2}\big)\|\nabla c\|_{L^2}\\ &+ \|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla c_1\|_{L^2}\|c\|_{L^4}.\end{aligned}$$

Relembrando que $\psi_1 \in L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega))$ e $c_1 \in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega))$, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.2.10), e a estimativa elíptica (2.2.9) obtém-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|c\|_{L^2}^2 &+ D_0\|\nabla c\|_{L^2}^2\\ &\leq C\big(\|\Delta\psi\|_{L^2} + \|c\|_{L^2}^{1/4}\|c\|_{H^1}^{3/4} + \|\psi\|_{H^1}\big)\|\nabla c\|_{L^2} + C\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}\|c\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young chegamos em

$$\frac{d}{dt}\|c\|_{L^2}^2 + D_0\|\nabla c\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|c\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2\big). \tag{2.3.43}$$

Somando (2.3.40), (2.3.41), (2.3.42) e (2.3.43) multiplicado por $\eta > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \eta\|c\|_{L^2}^2) + \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta\psi\|_{L^2} + \eta D_0\|\nabla c\|_{L^2}^2 \\ \leq C\big(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|c\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}\|_{L^\infty}^2\big) + \eta C\Big(\|\Delta\psi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\Big).\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Escolhemos $\eta C = \frac{1}{4}$ e aplicamos o lema de Gronwall para obter

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi(t)\|_{H^1}^2 + \|c(t)\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2\|_{L^2}^2 + \|\psi_0^1 - \psi_0^2\|_{H^1}^2 + \|c_0^1 - c_0^2\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{B}\|_{L^\infty}^2\big),$$

para todo $t \in [0, T_*]$, que é (2.3.35). Integrando (2.3.44) sobre $(0, T_*)$ deduzimos (2.3.36). Isso finaliza a demonstração. □

Observação 2.3.9. Observemos que dados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{B}$, a solução ϕ do problema (2.2.8) é única e uma vez que o operador $\mathcal{T}(\mathbf{u}) = -\nabla\phi$ é linear, segue que o problema (2.0.1)-(2.0.7) também tem uma única solução forte local.

2.4 Problema degenerado

Nessa seção consideramos uma versão estendida do problema (2.2.1)-(2.2.6) quando a equação da concentração se degenera. Como mencionado, essa degeneração ocorre quando o coeficiente de difusão D se anula, que, do ponto de vista da física, acontece na fase sólida. Mais precisamente, no lugar da hipótese (H2) assumiremos que $D(r) \geq 0, \ \forall\ r \in \mathbb{R}$. Dessa forma, perde-se o caráter parabólico da equação da concentração (2.2.4). Como é esperado, a regularidade da concentração será muito fraca, de modo que para sermos capazes de lidarmos com as não linearidades do problema teremos que explorar as formas específicas das funções $\mathbf{A}_1, A_2$ e A_3 dadas no modelo

Então, assumiremos as seguintes hipóteses para o caso degenerado:

(H1') $\mathbf{A}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $A_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$\mathbf{A}_1(r,s) = \mathbf{E}_1(r) + s\mathbf{E}_2(r) \text{ e } A_2(r,s) = F_1(r) + sF_2(r),$$

onde $\mathbf{E}_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções Lipschitz e limitadas,

(H2') $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz e limitada tal que

$$0 \leq D(r), \ \forall\ r \in \mathbb{R},$$

(H3') $A_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$A_3(r,s) = D(r)D_2(r,s),$$

onde $D_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções Lipschitz e limitadas,

(H4') $\mathbf{B} \in L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega))$.

Como no caso não degenerado, admitiremos mais hipóteses no comportamento dos termos não lineares que levam ao princípio do máximo:

(H5') $F_i(r) = 0$, para todo $r \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$,

(H6') $D_2(r, s) = 0$ para todo $s \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ e $r \in \mathbb{R}$.

O princípio do máximo é importante para superar as dificuldades que surgem por causa da baixa regularidade da concentração.

Assim como anteriormente, assumimos que $\mathcal{T} : (L^2(\Omega))^3 \to (L^2(\Omega))^3$ é uma transformação linear satisfazendo (2.2.7).

Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.1 (Existência de solução para o problema degenerado)**.** Seja $(\mathbf{u}_0, \psi_0, c_0) \in V \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi_0,\ c_0 \leq 1$ q.t.p. em Ω e suponha que as hipóteses (H1')-(H6') são satisfeitas. Então, existem $T_* > 0$ e $(\mathbf{u}, p, \psi, c, J)$ tais que

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)),\\
&p \in L^2(0, T_*; H^1(\Omega)/\mathbb{R}),\\
&\psi \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)),\\
&c \in L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; (H^1(\Omega))'),\\
&J \in (L^2(Q_{T_*}))^3,\\
&0 \leq\ \psi,\ c \leq 1 \text{ q.t.p. em } Q_{T_*},
\end{aligned}
$$

e satisfazem

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u}\\
&\quad + \mathbf{A}_1(\psi, c) + b(\psi)((\mathcal{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \text{ q.t.p. em } Q_{T_*}, && (2.4.1)\\
&\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ q.t.p. em } Q_{T_*} && (2.4.2)\\
&\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\psi = \Delta\psi + A_2(\psi, c) \text{ q.t.p. em } Q_{T_*}, && (2.4.3)\\
&\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u} = 0 \text{ q.t.p. em } \partial Q_{T_*}, && (2.4.4)\\
&\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega \big(J + D(\psi)D_2(\psi, c)\nabla\psi - \mathbf{u}c\big) \cdot \nabla z = 0\\
&\quad \text{q.t.p. } t \in (0, T_*), \text{ para todo } z \in H^1(\Omega), && (2.4.5)\\
&\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \psi(0) = \psi_0 \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } c(0) = c_0 \text{ em } H^1(\Omega)', && (2.4.6)
\end{aligned}
$$

onde J é dado por:

$$J = \nabla(D(\psi)c) - c\nabla D(\psi),$$

com derivadas no sentido das distribuições.

Demonstração do Teorema 2.4.1

Para demonstrar esse teorema, vamos regularizar o coeficiente D seguindo as ideias em [41, 28]. Mais precisamente, seja

$$D^\lambda(r) = D(r) + \lambda \quad \text{onde} \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Portanto, D^λ é uma função Lipschitz e limitada tal que

$$0 < \lambda \leq D^\lambda(r) \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}.$$

Além do mais, para aplicarmos os resultados do caso não degenerado, definimos

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}}_1(r,s) =& \mathbf{E}_1(r) + \Pi(s)\mathbf{E}_2(r),\\ \widetilde{A}_2(r,s) =& F_1(r) + \Pi(s)F_2(r),\end{aligned}$$

onde Π é uma função de truncamento

$$\Pi(s) = \begin{cases} 1, & s > 1 \\ s, & 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Dessa forma, $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ e $\widetilde{A}_2$ são funções Lipschitz e limitadas. Observemos que, uma vez que o princípio do máximo é provado, $\widetilde{\mathbf{A}}_1$ e $\widetilde{A}_2$ serão funções afins na segunda variável.

Para um $\lambda > 0$ fixado, consideramos o sistema (2.2.1)-(2.2.6) substituindo D por D^λ apenas na frente de ∇c na equação da concentração:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\lambda}{\partial t} + (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{u}_\lambda = -\nabla p_\lambda + \Delta \mathbf{u}_\lambda + \widetilde{\mathbf{A}}_1(\psi_\lambda, c_\lambda) + b(\psi_\lambda)((\mathcal{T}(\mathbf{u}_\lambda) + \mathbf{u}_\lambda \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), \tag{2.4.7}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_\lambda) = 0, \tag{2.4.8}$$

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial t} + (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)\psi_\lambda = \Delta \psi_\lambda + \widetilde{A}_2(\psi_\lambda, c_\lambda), \tag{2.4.9}$$

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla)c_\lambda = \operatorname{div}(D^\lambda(\psi_\lambda)\nabla c_\lambda + D(\psi_\lambda)D_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\nabla \psi_\lambda), \tag{2.4.10}$$

$$\mathbf{u}_\lambda = \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c_\lambda}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{2.4.11}$$

$$\mathbf{u}_\lambda(0) = \mathbf{u}_0, \quad \psi_\lambda(0) = \psi_0^\lambda, \quad c_\lambda(0) = c_0^\lambda \ \text{ in } \ \Omega, \tag{2.4.12}$$

onde $\psi_0^\lambda \in H^2(\Omega)$ e $c_0^\lambda \in H^1(\Omega)$ são tais que $\psi_0^\lambda \to \psi_0 \in H^1(\Omega)$ e $c_0^\lambda \to c_0$ em $L^2(\Omega)$. Note que $\|\psi_0^\lambda\|_{H^1}$ e $\|c_0^\lambda\|_{L^2}$ são limitadas independentemente de λ. Esse fato será usado quando estivermos obtendo estimativas uniformes em λ.

Os Teoremas 2.3.6 e 2.3.8 fornecem existência de uma única solução forte local para este sistema regularizado e, das demonstrações, fica claro que o tempo local de existência não depende de λ. Além disso, o princípio do máximo vale para o campo de fase e para a concentração (veja a Proposição 2.3.7). Reunimos esses resultados na seguinte proposição.

Proposição 2.4.2 (Solução local para o sistema regularizado)**.** Suponha que as hipóteses (H1')-(H6') são satisfeitas e que $(\mathbf{u}_0, \psi_0^\lambda, c_0^\lambda) \in V \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ com $0 \leq \psi_0^\lambda,\ c_0^\lambda \leq 1$ q.t.p. em Ω. Então, para cada $\lambda \in (0, 1]$, existem $T_* > 0$ (independente de λ) e $(\mathbf{u}_\lambda, p_\lambda, \psi_\lambda, c_\lambda)$ tais que

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_\lambda \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)),\\ &p_\lambda \in L^2(0, T_*; H^1(\Omega)/\mathbb{R}),\\ &\psi_\lambda \in L^\infty(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; H^1(\Omega)),\\ &c_\lambda \in L^\infty(0, T_*; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)),\\ &0 \leq \psi_\lambda,\ c_\lambda \leq 1 \quad \text{q.t.p. em } \Omega \times (0, T_*),\end{aligned}$$

e satisfazem as equações (2.4.7)-(2.4.12) q.t.p. em $\Omega \times (0, T_*)$.

Note que, como $0 \leq c_\lambda \leq 1$, vale que $\Pi(c_\lambda) = c_\lambda$, então

$$\widetilde{\mathbf{A}}_1(\psi_\lambda, c_\lambda) = \mathbf{E}_1(\psi_\lambda) + c_\lambda \mathbf{E}_2(\psi_\lambda) = \mathbf{A}_1(\psi_\lambda, c_\lambda) \text{ e}$$
$$\widetilde{A}_2(\psi_\lambda, c_\lambda) = F_1(\psi_\lambda) + c_\lambda F_2(\psi_\lambda) = A_2(\psi_\lambda, c_\lambda).$$

Agora, nosso objetivo é obter algumas estimativas uniformes em λ, e, consequentemente, convergências para a solução do problema regularizado, de modo que sejamos capazes de passar o limite no sistema (2.4.7)-(2.4.12), quando $\lambda \to 0^+$, e mostrar a existência de solução para o problema degenerado.

Lema 2.4.3 (Estimativas de energia)**.** Existe $C > 0$ independente de λ, tal que

$$\|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^\infty(0,T_*;H)} + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2(0,T_*;V)} \leq C, \tag{2.4.13}$$
$$\|\psi_\lambda\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega))} + \|\psi_\lambda\|_{L^2(0,T_*;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{2.4.14}$$
$$\|c_\lambda\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega))} + \int_0^{T_*} \int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2 \leq C. \tag{2.4.15}$$

Demonstração. Multiplicando (2.4.7) por $\mathbf{u}_\lambda$, integrando sobre Ω, e usando as hipóteses (H1')-(H6'), segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_\lambda\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \mathbf{A}_1(\psi_\lambda, c_\lambda)\mathbf{u}_\lambda + \int_\Omega b(\psi_\lambda)((\mathcal{T}(\mathbf{u}_\lambda) + \mathbf{u}_\lambda \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})\mathbf{u}_\lambda \\ &\leq C\left(\|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathcal{T}(\mathbf{u}_\lambda)\|_{L^2}\|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq C\left(1 + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

Assim, pelo lema de Gronwall obtemos (2.4.13).

De forma análoga, multiplicando (2.4.9) por ψ_λ, integrando sobre Ω, e usando que A_2 é limitada, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\nabla\psi_\lambda\|_{L^2}^2 = \int_\Omega A_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\psi_\lambda \leq C\|\psi_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C\left(1 + \|\psi_\lambda\|_{L^2}^2\right).$$

O lema de Gronwall nos dá (2.4.14).

Finalmente, multiplicando (2.4.10) por c_λ, integrando sobre Ω, e usando que D_2 é limitada e que $D < D + \lambda = D^\lambda$, vale que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c_\lambda\|_{L^2}^2 + \int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2 &= -\int_\Omega D(\psi_\lambda)D_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\nabla\psi_\lambda \cdot \nabla c_\lambda \\ &\leq C\int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla\psi_\lambda||\nabla c_\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2 + C\|\nabla\psi_\lambda\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Rearranjando os termos e integrando no tempo obtemos (2.4.15). □

As estimativas acima só nos garantem convergência fraca. Para passar o limite nos termos não lineares é necessário algumas convergências fortes. Para esse fim, vamos obter novas estimativas independentes de λ.

Lema 2.4.4 (Estimativas adicionais)**.** Existe $C > 0$, independente de λ, tal que

$$\|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^\infty(0,T_*;V)} + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2(0,T_*;H^2(\Omega))} \le C, \tag{2.4.16}$$

$$\|\psi_\lambda\|_{L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega))} + \|\psi_\lambda\|_{L^2(0,T_*;H^2(\Omega))} \le C, \tag{2.4.17}$$

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T_*;L^2(\Omega))} \le C, \tag{2.4.18}$$

$$\left\|\frac{\partial c_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T_*;(H^1(\Omega))')} \le C. \tag{2.4.19}$$

Demonstração. As estimativas (2.4.16)-(2.4.18) são provadas de forma análoga às do Teorema 2.3.4 já que elas não dependem da regularidade da concentração.

Multiplicando (2.4.10) por $z \in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω, e usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} z\right| &\le \int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda||\nabla z| + C\int_\Omega |\nabla \psi_\lambda||\nabla z| + \int_\Omega |\mathbf{u}_\lambda c_\lambda \cdot \nabla z| \\ &\le C\left(\left(\int_\Omega D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2\right)^{1/2} + \|\nabla\psi_\lambda\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_\lambda\|_{L^2}\|c_\lambda\|_{L^\infty}\right)\|\nabla z\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando as estimativas do Lema 2.4.3 e o fato que $0 \le c_\lambda \le 1$, chegamos em (2.4.19). □

Das estimativas uniformes obtidas nos lemas anteriores, deduziremos algumas convergências para a solução do sistema regularizado.

Lema 2.4.5. Existe $(\mathbf{u}, \psi, c)$ tal que

$$\begin{aligned}&\mathbf{u} \in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T_*;L^2(\Omega)),\\ &\psi \in L^\infty(0,T_*;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T_*;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T_*;L^2(\Omega)),\\ &c \in L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T_*;(H^1(\Omega))'),\\ &0 \le \psi,\ c \le 1 \text{ q.t.p. em } \Omega \times (0,T_*),\end{aligned}$$

e uma subsequência de $(\mathbf{u}_\lambda, \psi_\lambda, c_\lambda)$ (denotada com o mesmo subíndice), tal que, quando $\lambda \to 0^+$,

$$(\mathbf{u}_\lambda, \psi_\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{u}, \psi) \quad \text{fracamente em } L^2(0,T_*;(H^2(\Omega))^2), \tag{2.4.20}$$

$$(\mathbf{u}_\lambda, \psi_\lambda) \to (\mathbf{u}, \psi) \quad \text{fortemente em } L^2(0,T_*;V \times H^1(\Omega)) \cap C([0,T_*];H \times L^2(\Omega)), \tag{2.4.21}$$

$$c_\lambda \rightharpoonup c \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega \times (0,T_*)), \tag{2.4.22}$$

$$c_\lambda \to c \quad \text{fortemente em } C([0,T_*];H^1(\Omega)'), \tag{2.4.23}$$

$$c_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} c \quad \text{fracamente-* in } L^\infty(\Omega \times (0,T_*)). \tag{2.4.24}$$

Demonstração. As convergências (2.4.20) e (2.4.22) seguem diretamente dos lemas acima. Além disso, como as imersões de $(H^2(\Omega) \cap V) \times H^2(\Omega)$ em $V \times H^1(\Omega)$ e de $V \times H^1(\Omega)$ em $H \times L^2(\Omega)$ são compactas, aplicando o Teorema 1.3.12, concluímos que $(\mathbf{u}_\lambda, \psi_\lambda)$ é relativamente compacto em $L^2(0,T_*;V \times H^1(\Omega)) \cap C([0,T_*];H \times L^2(\Omega))$ e portanto vale (2.4.21).

Analogamente, pelas estimativas (2.4.14) e (2.4.19) e como a imersão de $L^2(\Omega)$ em $(H^1(\Omega))'$ é compacta, temos que (c_λ) é relativamente compacta em $C([0,T_*];(H^1(\Omega))')$, daí seque (2.4.23).

A convergência (2.4.24) é uma consequência direta do princípio do máximo. □

Relembre que $0 \le c_\lambda,\ c \le 1$, então $\widetilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1$ e $\widetilde{A}_2 = A_2$ são afins na segunda variável. Assim, a partir de agora, $\mathbf{A}_1(r,s) = \mathbf{E}_1(r) + s\mathbf{E}_2(r)$ e $A_2(r,s) = F_1(r) + sF_2(r)$.

Comparando com a passagem ao limite na demonstração de existência da solução fraca, a principal diferença aqui consiste em lidarmos com os termos não lineares envolvendo a concentração. Juntamos essas convergências no próximo lema.

Lema 2.4.6. Quando $\lambda \to 0^+$, vale que

$$\mathbf{A}_1(\psi_\lambda, c_\lambda) \rightharpoonup \mathbf{A}_1(\psi, c) \text{ fracamente em } L^2(Q_{T_*})^3, \tag{2.4.25}$$
$$A_2(\psi_\lambda, c_\lambda) \rightharpoonup A_2(\psi, c) \text{ fracamente em } L^2(Q_{T_*}), \tag{2.4.26}$$
$$D^\lambda(\psi_\lambda)\nabla c_\lambda \rightharpoonup \nabla(D(\psi)c) - c\nabla D(\psi) \text{ fracamente em } L^2(Q_{T_*})^3, \tag{2.4.27}$$
$$D(\psi_\lambda)D_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\nabla\psi_\lambda \rightharpoonup D(\psi)D_2(\psi, c)\nabla\psi \text{ fracamente em } L^2(Q_{T_*})^3, \tag{2.4.28}$$
$$\mathbf{u}_\lambda c_\lambda \rightharpoonup \mathbf{u}c \text{ fracamente em } L^2(Q_{T_*}), \tag{2.4.29}$$

lembrando que $Q_{T_*} = \Omega \times (0, T_*)$.

Demonstração. Devido a convergência fraca de c_λ, o fato de que $\mathbf{A}_1$ e A_2 são afins na segunda variável é crucial para mostrar as convergências (2.4.25) e (2.4.26). De fato, como $\mathbf{E}_i$ e $F_i,\ i = 1, 2$, são funções Lipschitz e limitadas, vale que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_i(\psi_\lambda) \to \mathbf{E}_i(\psi) \text{ fortemente em } (L^p(Q_{T_*}))^3 \text{ e}\\
&F_i(\psi_\lambda) \to F_i(\psi) \text{ fortemente em } L^p(Q_{T_*}),\ \text{ para qualquer } p \in [1, \infty).
\end{aligned}$$

Além disso, como os operadores de Nemytskii associados a $\mathbf{A}_1$ e A_2 são sequencialmente contínuos (veja a Proposição 1.5.3), usando (2.4.22), seguem (2.4.25) e (2.4.26).

A demonstração das convergências (2.4.27) e (2.4.28) são mais técnicas e análogas às demonstrações em [41, Lemas 2,3,4], então vamos omitir alguns detalhes.

Utilizando a estimativa (2.4.15), existe uma constante $C > 0$, independente de λ, tal que

$$\begin{aligned}
\|D^\lambda(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda\|^2_{L^2(Q_{T_*})} &= \int_{Q_{T_*}} |D^\lambda(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda|^2\\
&\le C\int_{Q_{T_*}} D^\lambda(\phi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2\\
&\le C.
\end{aligned}$$

Então, existe $J \in L^2(Q_T)^3$ tal que uma subsequência de $D^\lambda(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda$ satisfaz

$$D^\lambda(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda \rightharpoonup J \quad \text{em } L^2(Q_{T_*})^3. \tag{2.4.30}$$

Por outro lado, segue do fato que $D(\psi_\lambda)c_\lambda \rightharpoonup D(\psi)c$ em $L^2(Q_{T_*})$, que

$$\nabla(D(\psi_\lambda)c_\lambda) \to \nabla(D(\psi)c) \text{ em } \mathcal{D}'(Q_{T_*}). \tag{2.4.31}$$

Além disso temos que

$$\nabla D(\psi_\lambda)c_\lambda \to \nabla D(\psi)c \text{ em } \mathcal{D}'(Q_{T_*}), \tag{2.4.32}$$

pois

$$\nabla D(\psi_\lambda)c_\lambda \rightharpoonup \nabla D(\psi)c \text{ em } L^1(Q_{T_*})^3.$$

Para ver que essa última convergência é verdadeira, seja $\mathbf{v} \in L^\infty(Q_{T_*})^3$, então

$$\int_{Q_{T_*}} (c_\lambda \nabla D(\psi_\lambda) - c\nabla D(\psi)) \cdot \mathbf{v} \tag{2.4.33}$$
$$= \int_{Q_{T_*}} (c_\lambda - c)\nabla D(\psi) \cdot \mathbf{v} + \int_{Q_{T_*}} c_\lambda(\nabla D(\psi_\lambda) - \nabla D(\psi)) \cdot \mathbf{v}.$$

Mas, por (H2'), $D \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Assim, usando a desigualdade de Hölder, segue que existem constantes positivas C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned} \|\nabla D(\psi) \cdot \mathbf{v}\|^2_{L^2(Q_{T_*})} &= \|D'(\psi)\nabla\psi \cdot \mathbf{v}\|^2_{L^2(Q_{T_*})} \leq C_1\|\nabla\phi \cdot \mathbf{v}\|^2_{L^2(Q_{T_*})} \\ &\leq C_1\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(Q_{T_*})}\|\nabla\phi\|^2_{L^2(Q_{T_*})} \leq C_2. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\nabla D(\psi) \cdot \mathbf{v} \in L^2(Q_{T_*})$. Como $c_\lambda \rightharpoonup c$ em $L^2(Q_{T_*})$, segue que o primeiro termo do lado direito de (2.4.33) tende a zero. Usando que $\nabla D(\psi_\lambda) \to \nabla D(\psi)$ em $L^2(Q_{T_*})^3$ e que $0 \leq c_\lambda \leq 1$ q.t.p em Q_{T_*}, segue que o segundo termo do lado direito de (2.4.33) tende a zero.

Note ainda que, como $\lambda \leq D^\lambda$

$$\lambda \int_{Q_{T_*}} |\nabla c_\lambda|^2 \leq \int_{Q_{T_*}} D^\lambda(\psi_\lambda)|\nabla c_\lambda|^2 \leq C,$$

onde usamos (2.4.15). Disso segue que

$$\|\lambda \nabla c_\lambda\|_{L^2(Q_{T_*})} \leq \lambda C.$$

Ou seja, quando $\lambda \to 0^+$

$$\lambda \nabla c_\lambda \to 0 \ \text{ em } \ L^2(Q_{T_*})^3.$$

Como,

$$D^\lambda(\psi_\lambda)\nabla c_\lambda = D(\psi_\lambda)\nabla c_\lambda + \lambda\nabla c_\lambda = \nabla(D(\psi_\lambda)c_\lambda) - \nabla D(\psi_\lambda)c_\lambda + \lambda\nabla c_\lambda$$

segue de (2.4.31), (2.4.32) e da última convergência que

$$D^\lambda(\psi_\lambda)\nabla c_\lambda \to \nabla(D(\psi)c) - c\nabla D(\psi) \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q_{T_*}).$$

Então, pela unicidade do limite, obtemos que $J = \nabla(D(\psi)c) - c\nabla D(\psi)$.

Para demostrar (2.4.28), começamos observando que em [41] foi provado que

$$D(\psi_\lambda)D_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\nabla\psi_\lambda \rightharpoonup D(\psi)D_2(\psi, c)\nabla\psi \ \text{ fracamente em } \ L^1(Q_{T_*})^3. \tag{2.4.34}$$

Entretanto, como $D(\psi_\lambda)D_2(\psi_\lambda, c_\lambda)\nabla\psi_\lambda$ é uniformemente limitada em $L^2(Q_{T_*})^3$, pela unicidade do limite segue (2.4.28).

Para demonstrar (2.4.34), seja $\mathbf{v} \in L^\infty(Q_{T_*})^3$, então

$$\begin{aligned} &\int_{Q_{T_*}} (D(\psi_\lambda)D_2(c_\lambda, \psi_\lambda)\nabla\psi_\lambda - D(\psi)D_2(c, \psi)\nabla\psi) \cdot \mathbf{v} \\ &= \int_{Q_{T_*}} D(\psi_\lambda)\left(D_2(c_\lambda, \psi_\lambda) - D_2(c, \psi)\right)\nabla\psi \cdot \mathbf{v} \\ &+ \int_{Q_{T_*}} \left(D(\psi_\lambda) - D(\psi)\right) D_2(c, \psi)\nabla\psi \cdot \mathbf{v} \\ &+ \int_{Q_{T_*}} D(\psi_\lambda)D_2(c_\lambda, \psi_\lambda)(\nabla\psi_\lambda - \nabla\psi) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Devido à convergência forte (2.4.21) e usando as hipóteses sobre as não linearidades, é fácil ver que os dois últimos termos da última equação tendem a zero. Assim, a dificuldade está em mostrar a convergência do primeiro termo do lado direito da última equação. Omitimos os detalhes dessa demonstração, mas, essencialmente, isto segue do fato que

$$D(\psi_\lambda)c_\lambda \to D(\psi)c \quad \text{fortemente em } L^2(Q_{T_*}), \tag{2.4.35}$$

pois, usando que D_2 é Lipschitz, que D é não negativa e aplicando a desigualdade de Hölder, segue que existe uma constante $C > 0$, independente de λ, tal que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} D(\psi_\lambda)\left(D_2(c_n,\psi_\lambda) - D_2(c,\psi)\right)\nabla\psi\cdot\mathbf{v}\right| \\
&\le \int_{Q_T} D(\psi_\lambda)\left(|c_n - c| + |\psi_\lambda - \psi|\right)|\nabla\psi||\mathbf{v}| \\
&\le C\left(\int_{Q_T} |D(\psi_\lambda)c_n - D(\psi_\lambda)c||\nabla\psi| + \int_{Q_T} |\psi_\lambda - \psi||\nabla\psi|\right) \\
&\le C\left(\int_{Q_T} |D(\psi_\lambda)c_n - D(\psi)c||\nabla\psi| + \int_{Q_T} |D(\psi) - D(\psi_\lambda)||c||\nabla\psi|\right) \\
&\quad +C\left(\int_{Q_T} |\psi_\lambda - \psi||\nabla\psi|\right).
\end{aligned}$$

Note que os dois últimos termos tendem a zero pela convergência forte (2.4.21) e usando que $c \in L^\infty(Q_{T_*})$, já o primeiro termo por causa de (2.4.35). A demonstração de (2.4.35) é exatamente como em [41, Lema 4].

Finalmente, para $v \in L^2(Q_{T_*})$, temos que

$$\int_0^{T_*}\int_\Omega (\mathbf{u}_\lambda c_\lambda - \mathbf{u}c)v = \int_0^{T_*}\int_\Omega c_\lambda(\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u})v + \int_0^{T_*}\int_\Omega (c_\lambda - c)\mathbf{u}v.$$

Já que $0 \le c_\lambda \le 1$, pela convergência forte (2.4.21), o primeiro termo do lado direito tende a zero quando $\lambda \to 0^+$. O segundo termo tende a zero por (2.4.24). □

As convergências dos Lemas 2.4.5 e 2.4.6 nos permitem passar o limite no sistema (2.4.7)-(2.4.12), quando $\lambda \to 0^+$, e mostrar a existência de solução para o problema degenerado. Isso completa a demonstração do Teorema 2.4.1.

Capítulo 3

Análise Matemática para um Sistema do Tipo Cahn-Hilliard/Allen-Cahn

Wheeler, Boettinger e McFadden em 1992 propuseram um modelo de campo de fase para um processo de solidificação isotérmico de uma liga binária (veja [48]), esse modelo descreve a concentração do soluto no solvente c e campo de fase ϕ e é deduzido a partir do seguinte funcional de energia livre:

$$F(\phi, c) = \int_\Omega f(\phi, c) + \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla\phi|^2 dV,$$

onde ϵ é uma constante positiva e f é a densidade de energia livre.

No ano seguinte, em [49], os mesmos autores generalizaram esse funcional de energia livre, permitindo a dependência de ∇c, ou seja,

$$F(\phi, c) = \int_\Omega f(\phi, c) + \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{\delta^2}{2}|\nabla c|^2 dV.$$

onde $\delta > 0$ é uma constante.

A equação da concentração obtida a partir desse primeiro funcional de energia livre é uma equação de segunda ordem na variável espacial, enquanto o novo funcional fornece uma equação de quarta ordem para a concentração, conhecida como equação de Cahn-Hilliard. A evolução de ϕ é dada por uma equação do tipo Allen-Cahn e permanece a mesma nos dois modelos. A vantagem desse novo modelo é a capacidade de prever um fenômeno observado experimentalmente, conhecido como *solute trapping*, que é o aprisionamento de soluto na parte sólida (especialmente quando se tem um processo de rápida solidificação), provocando assim uma diminuição da segregação entre soluto e solvente na parte líquida. As equações para a evolução do campo de fase ϕ e para a concentração c propostas em [49] são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -M_1\left(\frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi, c) - \epsilon^2\Delta\phi\right) \quad \text{em } Q_T, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla\cdot M_2\left(c(1-c)\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial c}(\phi, c) - \delta^2\Delta c\right)\right) \quad \text{em } Q_T, \end{aligned}$$

onde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, com Ω um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $T > 0$, M_1 e M_2 constantes positivas e $f = f(\phi, c)$ a densidade de energia livre que apresentaremos na próxima seção, onde faremos uma breve dedução do modelo.

A análise matemática (i. e., existência, unicidade, e princípio do máximo) para o problema proposto em [48], foi feita por Rappaz e Scheid em [38], e um caso degenerado foi estudado por Scheid em [41]. Assim como foi sugerido em [49], admitimos que M_2 seja uma função de ϕ, digamos que $M_2 := D(\phi)$, e provamos a existência de solução fraca, um princípio do máximo, regularidade e um resultado de continuidade das soluções em relação aos dados iniciais, para um sistema não degenerado. Esse sistema não degenerado consiste essencialmente em substituir $D(\phi)c(1-c)$ por $(D(\phi)+\lambda)(c(1-c)+\alpha)$ onde λ e α são constantes positivas. Por causa desta substituição o coeficiente de mobilidade não se degenera. Por fim, tomamos o limite quando $\lambda \to 0^+$, encontrando uma solução para um caso degenerado.

3.1 Uma breve dedução do modelo

Seja Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com fronteira suave $\partial\Omega$. A região Ω é ocupada por uma liga binária, onde B é o soluto e A o solvente. Supomos que seja um processo isotérmico de transição que ocorre na temperatura crítica T_M. Denotamos por c a concentração do soluto B no solvente A e por ϕ a variável campo de fase. Seguindo Wheeler, Boettinger e McFadden [49], começamos por introduzir o funcional de energia livre de Ginzburg-Landau:

$$F(\phi, c) = \int_\Omega f(\phi, c) + \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{\delta^2}{2}|\nabla c|^2 dV$$

onde ϵ e δ são constantes positivas e f é a densidade de energia livre dada por

$$f(\phi, c) = (1-c)f^A(\phi) + cf^B(\phi) + \frac{RT_M}{v_m}[(1-c)\ln(1-c) + c\ln(c)]$$

em que R é a constante de Boltzmann, v_m é o volume molar e as funções f^A e f^B são as densidades de energia livre de A e B respectivamente, e podem ser dadas por

$$f^A(\phi) = W_A\phi^2(\phi-1)^2,$$
$$f^B(\phi) = W_B\phi^2(\phi-1)^2,$$

onde W_A e W_B são constantes. A única diferença entre o modelo proposto em [49] quando comparado com o proposto em [48] é a adição do termo $\dfrac{\delta^2}{2}|\nabla c|^2$ no funcional de energia livre.

Usando que ϕ é uma quantidade não conservada e a concentração é uma quantidade conservada, os autores de [49] deduziram que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -M_1\frac{\delta F}{\delta\phi}, \tag{3.1.1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_c, \tag{3.1.2}$$

onde M_1 é uma constante positiva e $\mathbf{J}_c = -M_2 c(1-c)\nabla\dfrac{\delta F}{\delta c}$, sendo que M_2 pode ser uma constante positiva ou M_2 pode depender de ϕ, o que permite diferenciar a mobilidade da liga nas fases sólida e líquida. Aqui consideramos o caso em que M_2 depende de ϕ, mais precisamente, tomamos

$$\mathbf{J}_c = M(\phi, c)\nabla \frac{\delta F}{\delta c},$$

onde M é escolhida do seguinte modo:

$$M(\phi, c) = -\frac{v_m}{RT_M} D(\phi)c(1-c),$$

com D sendo uma função crescente tal que $D(0) = D_s$ e $D(1) = D_l$, onde D_s e D_l são os coeficientes de difusão no estado líquido e sólido, respectivamente. Note que é esperado que $D_s = 0$ (veja [41]), uma vez que espera-se que no estado sólido não haja mais mudança na concentração. Daí a importância de se estudar o caso degenerado. Vamos tratar essa situação na última seção do presente capítulo.

Agora, calculando-se a derivada variacional, temos que

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi, c) - \epsilon^2 \Delta \phi,$$
$$\frac{\delta F}{\delta c} = \frac{\partial f}{\partial c}(\phi, c) - \delta^2 \Delta c.$$

Assim, (3.1.1) e (3.1.2) implicam que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M_1 \left(\epsilon^2 \Delta \phi - \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi, c) \right), \tag{3.1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{v_m}{RT_M} D(\phi)c(1-c) \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial c}(\phi, c) - \delta^2 \Delta c \right) \right). \tag{3.1.4}$$

Podemos ver que

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = (1-c)\frac{\partial f^A}{\partial \phi} + c\frac{\partial f^B}{\partial \phi} = \frac{\partial f^A}{\partial \phi} + c\left(\frac{\partial f^B}{\partial \phi} - \frac{\partial f^A}{\partial \phi} \right),$$

dessa forma,

$$-\frac{\partial f}{\partial \phi} = F_1(\phi) + cF_2(\phi),$$

onde F_1 e F_2 são polinômios cúbicos na variável ϕ, satisfazendo $F_1(0) = F_2(0) = F_1(1) = F_2(1) = 0$. Além disso,

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial \phi} \nabla \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 c} \nabla c = -F_2(\phi)\nabla \phi + \frac{RT_M}{v_m} \frac{1}{c(1-c)} \nabla c.$$

Então, (3.1.3) e (3.1.4) nos dá

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M_1 \left(\epsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) \right), \tag{3.1.5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D(\phi) \left(D_2(\phi, c)\nabla \phi - D_1(c)\delta^2 \nabla \Delta c + \nabla c \right) \right), \tag{3.1.6}$$

onde estamos denotando $D_1(c) := \frac{v_m}{RT_M} c(1-c)$ e $D_2(\phi, c) := -D_1(c)F_2(\phi)$.

3.2 O problema não degenerado

Vamos começar estudando uma versão regularizada das equações (3.1.5)-(3.1.6). Admitiremos que c, Δc e ϕ satisfazem a condição de Neumann homogênea sobre a fronteira. Além disso, consideraremos as condições iniciais $\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$. Por simplicidade, $\epsilon = \delta = M_1 = 1$, e no lugar das funções $F_1(\phi) + cF_2(\phi)$, $D(\phi)D_2(\phi, c)$, e $D(\phi)D_1(c)\delta^2$, colocaremos, respectivamente, $A_1(\phi, c)$, $A_2(\phi, c)$ e $A_3(\phi, c)$. Ou seja, estamos em busca de ϕ e c satisfazendo as equações

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi + A_1(\phi, c), \quad \text{em} \;\; Q_T, \tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (A_2(\phi, c)\nabla\phi - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c + D(\phi)\nabla c) \quad \text{em} \;\; Q_T, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \partial\Omega \times (0, T), \tag{3.2.3}$$

$$\phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 \quad \text{em} \;\; \Omega. \tag{3.2.4}$$

onde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$.

Ao longo dessa seção estaremos sob as seguintes condições:

(H1) $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções Lipschitz e limitadas.

(H2) $A_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz e limitada e existe $A_0 > 0$ tal que

$$0 < A_0 \leq A_3(r), \;\; \forall \; r \in \mathbb{R}^2.$$

O próximo teorema pode ser visto como uma extensão para os casos de dimensão 2 e 3 do Teorema 2.1 em [14], onde é demonstrado um caso unidimensional. Usando o método de Faedo-Galerkin, não é difícil obter a demonstração diretamente para o nosso caso. Entretanto, como a demonstração é muito similar a do teorema citado, vamos apenas dar um esboço da demonstração.

Teorema 3.2.1 (Solução fraca)**.** Se $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, existe uma *solução fraca* (ϕ, c) para o problema (3.2.1)-(3.2.4) no seguinte sentido:

$$\phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)'),$$

$$c \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)')$$

e as equações

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla z = \int_\Omega A_1(\phi, c) z, \tag{3.2.5}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega (A_2(\phi, c)\nabla\phi - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c + D(\phi)\nabla c) \cdot \nabla z = 0, \tag{3.2.6}$$

$$\phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega \tag{3.2.7}$$

são satisfeitas para todo $z \in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em $(0, T)$.

Demonstração. Vamos aplicar o método de Faedo-Galerkin. Sejam $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ os autovalores de $-\Delta$ e $(e_i)_{i \geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções associadas satisfazendo a condição de Neumann sobre a fronteira, de forma que $(e_i)_{i \geq 1}$ é um conjunto ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$ e ortogonal em $H^1(\Omega)$. Denotemos por $E_m := span\{(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq m}\}$ e L_m a projeção ortogonal de L^2 (and também H^1) em E_m.

Seja $(\phi_m, c_m) \in H^1(0, T_m; (E_m)^2)$, onde $T_m > 0$ é o tempo maximal de existência, a solução do seguinte problema aproximado:

$$\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot \nabla z = \int_\Omega A_1(\phi_m, c_m) z \tag{3.2.8}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega (D(\phi_m)\nabla c_m + A_2(\phi_m, c_m)\nabla\phi_m - A_3(\phi_m, c_m)\nabla\Delta c_m) \cdot \nabla z = 0, \tag{3.2.9}$$

$$(\phi_m(0), c_m(0)) = (L_m(\phi_0), L_m(c_0)) \tag{3.2.10}$$

para todo $z \in E_m$. Nesse caso, a solução (ϕ_m, c_m) tem a seguinte forma:

$$\phi_m = \sum_{i=1}^m \phi_m^i(t) e_i, \quad \text{e} \quad c_m = \sum_{i=1}^m c_m^i(t) e_i$$

onde $\phi_m^i,\ c_m^i \in H^1([0, T_m])$.

Multiplicando a equação (3.2.8) por $\phi_m^i(t)$, com $z = e_i$, e somando sobre $i = 1, 2, \cdots, m$, vemos que existe uma constante $C > 0$, independente de m, tal que

$$\frac{d}{dt}\|\phi_m\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 \leq C\left(1 + \|\phi_m\|_{L^2}^2\right). \tag{3.2.11}$$

Escolhendo $z = e_i\mu_i$ na equação (3.2.9), multiplicando esta equação por $c_m^i(t)$ e somando sobre $i = 1, 2, \cdots, m$, temos que existe uma constante C, tal que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + A_0\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right). \tag{3.2.12}$$

Multiplicando a equação (3.2.12) por $\delta = 1/C$ e somando com (3.2.11), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|\phi_m\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + 1\right) + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \delta A_0\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C\left(1 + \|\phi_m\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right).$$

Com essa estimativa de energia, aplicando a desigualdade de Gronwall, usando que c_m é conservado, aplicando estimativas elípticas e a desigualdade de Poincaré-Wirtinger, concluímos que

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{3.2.13}$$

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C, \tag{3.2.14}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de m. Daí $T_m = T$, para todo $T > 0$.

Aplicando a desigualdade de Hölder nas equações (3.2.8) e (3.2.9), fica fácil mostrar que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} + \left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C, \tag{3.2.15}$$

Lembrando que pelo Corolário 1.3.4, $H^3(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^2(\Omega)$, usando essas últimas estimativas junto com o lema de Aubin-Lions-Simon, obtemos as seguintes convergências:

$$\phi_m \rightharpoonup \phi \text{ em } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{3.2.16}$$

$$c_m \rightharpoonup c \text{ em } L^2(0, T; H^3(\Omega)), \tag{3.2.17}$$

$$\phi_m \to \phi \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T], (H^1(\Omega))'), \tag{3.2.18}$$

$$c_m \to c \text{ em } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)). \tag{3.2.19}$$

Essas convergências são suficientes para tomar o limite nas equações (3.2.8)-(3.2.9), obtendo assim as equações (3.2.5)-(3.2.6). □

Observação 3.2.2. Uma solução fraca c, dada pelo teorema acima, satisfaz a condição de fronteira

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ q.t.p. em } (0,T)$$

no sentido do operador traço. De fato, o espaço

$$V := \left\{ v \in H^2(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

é um subespaço fechado de $H^2(\Omega)$. Então, $L^2(0,T;V)$ é um subespaço fechado de $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Dessa forma $c_m \in L^2(0,T;V)$ e por (3.2.19) segue que

$$c_m \to c \text{ em } L^2(0,T;V).$$

Para ver que V é de fato um subespaço fechado de $H^2(\Omega)$, consideremos o operador linear $T : H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ definido por

$$T(v) := \left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \nabla v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}.$$

O operador T está bem definido no sentido do traço, já que $\nabla v \cdot \mathbf{n} \in H^1(\Omega)$. Além disso, como o operador traço é contínuo, segue que T é contínuo e portanto $V = T^{-1}(0)$ é um subespaço fechado de $H^2(\Omega)$.

Teorema 3.2.3 (Regularidade para ϕ)**.** Suponha que as hipóteses **(H1)-(H2)** são satisfeitas e $c_0 \in H^1(\Omega)$.

(i) Se $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, ϕ tem a seguinte regularidade:

$$\phi \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

(ii) Se $\phi_0 \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$,

$$\phi \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega))$$

e a equação (3.2.1) é satisfeita q.t.p. em Q_T.

Demonstração. No item (i) a ideia é tomar $(\phi_m^i(t)\mu_i + \frac{\partial \phi_m^i}{\partial t}(t))e_i$ como função teste em (3.2.8), somar sobre $i = 1, \cdots, m$, obtendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi_m\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2$$
$$= -\int_\Omega A_1(\phi_m, c_m)\Delta\phi_m + \int_\Omega A_1(\phi_m, c_m)\frac{\partial \phi_m}{\partial t}.$$

Então, depois de aplicar as desigualdades de Hölder e Young e o lema de Gronwall, obtemos a seguinte estimativa:

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C. \tag{3.2.20}$$

No item (ii) tomamos $(\phi_m^i(t)\mu_i^2+\frac{d\phi_m^i}{dt}(t)\mu_i)e_i$ como função teste em (3.2.8), somamos sobre $i=1,\cdots,m$, e obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|_{L^2}^2+\|\nabla\Delta\phi_m\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_m\|_{L^2}^2\\&=\int_\Omega A_1(\phi_m,c_m)\Delta^2\phi_m+\int_\Omega\nabla A_1(\phi_m,c_m)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\\&=-\int_\Omega\left(\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\nabla\phi_m+\frac{\partial A_1}{\partial c}\nabla c_m\right)\nabla\Delta\phi_m+\int_\Omega\left(\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\nabla\phi_m+\frac{\partial A_1}{\partial c}\nabla c_m\right)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, usando o fato que $A_1\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, aplicando a desigualdade de Young, integrando sobre $[0,T]$ e aplicando as estimativas (3.2.13), (3.2.14) e (3.2.20) junto com as estimativas elípticas obtemos a seguinte estimativa:

$$\|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}+\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\leq C. \tag{3.2.21}$$

□

Nosso principal resultado nessa seção é o seguinte teorema que nos dá uma solução forte global no tempo quando $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, e solução forte local no tempo quando $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. As ideias centrais para provar esse teorema podem ser encontradas na demonstração do Teorema 2.2 em [10].

Teorema 3.2.4 (Solução forte)**.** Suponha que as hipóteses **(H1)**-**(H2)** são satisfeitas. Se $(\phi_0,c_0)\in H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial c_0}{\partial\mathbf{n}}=0$ em $\partial\Omega$, a solução (ϕ,c) dada pelo Teorema 3.2.1 tem a seguinte regularidade:

- se $\Omega\subset\mathbb{R}^2$,

$$\phi\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^3(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.2.22}$$
$$c\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^4(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.23}$$

  para todo $T>0$ fixado;

- se $\Omega\subset\mathbb{R}^3$,

$$\phi\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^3(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.2.24}$$
$$c\in L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega))\cap L^2(0,T_*;H^4(\Omega))\cap H^1(0,T_*;L^2(\Omega)), \tag{3.2.25}$$

  para todo T_* satisfazendo $4T_*C^5(\|c_0\|_{H^2}^2+1)^4<1$ (a constante C aparece na demonstração do teorema).

Demonstração. Note que, como $\phi_0\in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathbf{n}}=0$ sobre $\partial\Omega$, a regularidade de ϕ é dada no Teorema 3.2.3, item (ii), tanto para $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Multiplicando a equação (3.2.9) por $c_m^i\mu_i^2$, com $z=e_i$, somando sobre $i=1,\cdots,m$, e integrando por partes, usando que $\frac{\partial\phi_m}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial c_m}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial\Delta c_m}{\partial\mathbf{n}}=0$ sobre $\partial\Omega$, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2+\int_\Omega A_3(\phi_m,c_m)|\Delta^2c_m|^2\\&\qquad=\int_\Omega\nabla\cdot(D(\phi_m)\nabla c_m+A_2(\phi_m,c_m)\nabla\phi_m)\Delta^2c_m\\&\qquad+\int_\Omega\left(\frac{\partial A_3}{\partial\phi}(\phi_m,c)\nabla\phi_m+\frac{\partial A_3}{\partial c}(\phi_m,c)\nabla c_m\right)\cdot\nabla\Delta c_m\Delta^2c_m.\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: Usando as hipóteses **(H1)-(H2)** e a desigualdade de Hölder na última equação, temos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + 2A_0\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \leq & C\Big(\|\nabla\phi_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^4} + \|\nabla\phi_m\|_{L^4}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2} + \|\Delta\phi_m\|_{L^2} \\ & + \big(\|\nabla\phi_m\|_{L^4} + \|\nabla c_m\|_{L^4}\big)\|\nabla\Delta c_m\|_{L^4}\Big)\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Então, pelas imersões de Sobolev $H^1 \subset L^4$, a estimativa (3.2.21) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + A_0\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq C\Big(1 + \|\nabla c_m\|_{L^4}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta c_m\|_{L^4}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^4}^2\|\nabla\Delta c_m\|_{L^4}^2\Big). \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, estimativa elípticas, e a estimativa (3.2.13), segue que

$$\|\nabla c_m\|_{L^4}^2 \leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla c_m\|_{H^1} \leq C(\|\Delta c_m\|_{L^2} + 1),$$

e que

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^4}^2 &\leq C\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{H^1} \\ &\leq C\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\big(\|\Delta c_m\|_{H^2} + \|c_m\|_{L^2}\big) \\ &\leq C\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\big(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2} + \|\Delta c_m\|_{L^2} + 1\big).\end{aligned}$$

Aplicando essas estimativas em (3.2.27) e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \frac{A_0}{2}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq C\big(1 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\Delta c_m\|_{L^2}^2\big).\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Como $\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2$ é uma função integrável (veja a estimativa (3.2.14)) podemos aplicar a desigualdade de Gronwall, obtendo

$$\|\Delta c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\Delta c_m(0)\|_{L^2}^2 + 1\right).$$

Usando que $\|\Delta c_m(0)\|_{L^2} \leq C\|c_0\|_{H^2}^2$, $c_0 \in H^2(\Omega)$, a estimativa elíptica (1.3.3) e a estimativa (3.2.13), concluímos que

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.2.29}$$

Agora, podemos obter que

$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} \leq C \tag{3.2.30}$$

integrando a desigualdade (3.2.28) sobre $[0,T]$, usando a estimativa (3.2.29) e que

$$\|c_m\|_{H^4} \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2} + \|\Delta c_m\|_{L^2} + \|c_m\|_{L^2}).$$

Caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$**:** Nesse caso a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg não funciona para estimar

$$\int_\Omega |\nabla c_m \cdot \nabla\Delta c_m \Delta^2 c_m|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade (1.4.10), no Lema 1.4.6, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla c_m \cdot \nabla \Delta c_m \Delta^2 c_m| &\leq \|\nabla c_m\|_{L^\infty} \|\nabla \Delta c_m\|_{L^2} \|\Delta^2 c_m\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/4} \|\Delta c_m\|_{L^2}^{3/4} \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta c_m\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta^2 c_m\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{7/4} \|\Delta c_m\|_{L^2}^{5/4} \\ &\leq C(\epsilon \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + C(\epsilon)\|\Delta c_m\|_{L^2}^{10}),\end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade de Young com $p = 8/7$ e $q = 8$.

Escolhendo ϵ adequadamente na última estimativa, usando a estimativa (3.2.26), e estimando os outros termos como no caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, somos capazes de obter que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + A_0 \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq C\left(\|\nabla c_m\|_{H^2}^2 + \|\nabla \phi_m\|_{H^2}^2 + 1 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^{10} + \|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Integrando sobre $(0, t)$, com $t \in [0, T]$, temos que existe $C > 0$, tal que

$$\|\Delta c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|c_0\|_{H^2}^2 + 1 + \int_0^t \|\Delta c_m\|_{L^2}^{10} dt\right).$$

Então, aplicando o Lema de Gronwall não linear (Teorema 1.2.3), temos que

$$\|\Delta c_m\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Omega))} \leq C$$

para todo T_* satisfazendo $4T_* C^5(\|c_0\|_{H^2}^2 + 1)^4 < 1$. Ou seja,

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T_*;H^2(\Omega))} \leq C.$$

Integrando a desigualdade (3.2.31) sobre $[0, T_*]$, é fácil ver, usando as estimativas obtidas até aqui, que

$$\|c_m\|_{L^2(0,T_*;H^4(\Omega))} \leq C.$$

Agora podemos multiplicar a equação (3.2.9) por $\frac{\partial c_m^i}{\partial t}$, com $z = e_i$, e somar sobre $i = 1, \cdots, m$, aplicar as desigualdades de Hölder, a desigualdade de Young e usar que $D \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e $A_1,\ A_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, obtendo

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \leq C\Big(&\|\nabla \phi_m \cdot \nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi_m\|_{L^4}^4 \\ &+ \|\nabla \phi_m \cdot \nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m \cdot \nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2\Big).\end{aligned}$$

Usando a imersão de Sobolev ($H^1 \subset L^4$), a desigualdade de Young e as estimativa (3.2.29) e (3.2.21), temos que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(1 + \|c_m\|_{H^4}^2\right).$$

Integrando essa estimativa sobre $[0, T]$ e usando a estimativa (3.2.30), obtemos

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

□

Observação 3.2.5. Com o último teorema estamos em condições de recuperar as equações (3.2.1)-(3.2.4). Para esse fim, tomamos $z \in C_c^\infty(\Omega)$ nas equações (3.2.8)-(3.2.9). Então aplicamos integração por partes, usamos as estimativas obtidas na demonstração do último teorema e tomamos o limite nessas equações. Assim, as equações (3.2.1) e (3.2.2) são recuperadas. Por outro lado, tomamos $z \in H^1(\Omega)$ em (3.2.5)-(3.2.6). Então, integrando novamente por partes e comparando as equações obtidas com as equações (3.2.1)-(3.2.2), podemos dizer que para q.t.p. $t \in (0, T)$

$$\int_{\partial\Omega} z\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\int_{\partial\Omega} z(A_2(\phi, c)\nabla\phi - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c + D(\phi)\nabla c) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$. Então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ a.e. on } \partial\Omega \text{ and}$$

$$\int_{\partial\Omega} z(D(\phi)\nabla c - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Pela observação 3.2.2, segue que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ a.e. in } \partial\Omega \times (0, T)$$

com T sendo T_* no caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e qualquer constante positiva no caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

3.2.1 Continuidade em relação aos dados iniciais

Nessa seção provamos um resultado que garante que as soluções fortes dependem continuamente dos dados iniciais (ϕ_0, c_0), de onde concluímos que a solução forte é única. Para demonstrar isso precisamos tomar os dados iniciais $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H_2^\alpha(\Omega)$, onde $H_2^\alpha(\Omega)$ é o seguinte subespaço fechado de $H^2(\Omega)$:

$$H_2^\alpha(\Omega) := \left\{ c \in H^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega c = \alpha \right\}.$$

Antes de apresentarmos o principal teorema, provamos dois lemas técnicos. O primeiro lema afirma, essencialmente, que a concentração c é uma quantidade conservada. O segundo lema fornece duas consequências da desigualdade de Poincaré-Wirtinger (veja o Teorema 1.3.2).

Lema 3.2.6. Suponha que as hipóteses **(H1)-(H2)** são satisfeitas, $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H_2^\alpha(\Omega)$ e $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, a solução forte c, dada pelo Teorema 3.2.4, satisfaz

$$\int_\Omega c = \int_\Omega c_0 \quad \forall\, t \in [0, T],$$

em que $T = T_*$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $T > 0$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.4 temos que a equação (3.2.2) é satisfeita q.t.p. em Ω e no sentido das distribuições em $[0, T]$, isso é, para todo $\phi \in C_c^\infty(0, T)$

$$-\int_\Omega \int_0^T c\phi'(s) ds dx = \int_\Omega \int_0^T \nabla \cdot (A_2(\phi, c)\nabla\phi - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c + D(\phi)\nabla c)\, \phi(s) ds dx.$$

Então, usando as condições sobre a fronteira

$$-\int_0^T \int_\Omega c\ dx\ \phi'(s) ds = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (A_2(\phi, c)\nabla\phi - A_3(\phi, c)\nabla\Delta c + D(\phi)\nabla c) \cdot \mathbf{n} dA\ \phi(s) ds = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega c\ dx = 0$$

no sentido das distribuições. Isso implica que $\int_\Omega c\ dx$ é constante q.t.p. em $[0, T]$. Mas, como $c \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, segue que $\int_\Omega c\ dx \in C([0, T])$, e então é constante para todo $t \in [0, T]$. Ou seja,

$$\int_\Omega c\ dx = \int_\Omega c_0\ dx.$$

$\square$

Lema 3.2.7. Se $c \in H_2^0(\Omega)$, então

$$\|c\|_{H^1} \leq C\|\nabla c\|_{L^2}.$$

Se, além disso $\Delta c \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, então $c \in H^3(\Omega)$ e

$$\|c\|_{H^3} \leq C\|\nabla\Delta c\|_{L^2}.$$

Demonstração. Como $c \in H_2^0(\Omega)$, $(c)_\Omega = 0$, então pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger

$$\|c\|_{H^1}^2 = \|\nabla c\|_{L^2}^2 + \|c - (c)_\Omega\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla c\|_{L^2}^2.$$

Agora, se além disso temos que $\Delta c \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue da estimativa elíptica (veja, por exemplo, o Teorema 7.32 em [19]) que $c \in H^3(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \|c\|_{H^3}^2 &\leq C(\|\Delta c\|_{H^1}^2 + \|c\|_{L^2}^2) = C(\|\nabla\Delta c\|_{L^2}^2 + \|\Delta c\|_{L^2}^2 + \|c - (c)_\Omega\|_{L^2}^2) \\ &\leq C(\|\nabla\Delta c\|_{L^2}^2 + \|\Delta c\|_{L^2}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2). \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Assim como na demonstração do Lema 1.4.6, é fácil ver, integrando por partes, que

$$\|\nabla c\|_{L^2} \leq C\|\Delta c\|_{L^2} \ \text{ e } \ \|\Delta c\|_{L^2} \leq C\|\nabla\Delta c\|_{L^2}. \tag{3.2.33}$$

Então, usando (3.2.32) e (3.2.33), segue que

$$\|c\|_{H^3} \leq C\|\nabla\Delta c\|_{L^2}.$$

$\square$

Agora estamos em condições de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.2.8 (Continuidade em relação aos dados iniciais)**.** Suponha que **(H1)** e **(H2)** são satisfeitas e que $(\phi_0^i, c_0^i) \in H^2(\Omega) \times H_2^\alpha(\Omega)$ com $\frac{\partial \phi_0^i}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c_0^i}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, $i = 1, 2$. Considere (ϕ^i, c^i) a solução forte associada com o dado inicial (ϕ_0^i, c_0^i), definida no intervalo $(0, T_*^i)$, $i = 1, 2$. Então, temos as seguintes estimativas:

$$\|\phi^1 - \phi^2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|c^1 - c^2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(\|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla c_0^1 - \nabla c_0^2\|_{L^2(\Omega)})$$

e

$$\|\phi^1 - \phi^2\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|c^1 - c^2\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C(\|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla c_0^1 - \nabla c_0^2\|_{L^2(\Omega)})$$

onde $T = T_* = \min\{T_*^1, T_*^2\}$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e $C > 0$ é uma constante.

Demonstração. Sejam $\phi = \phi^1 - \phi^2$ e $c = c^1 - c^2$, então pelas equações (3.2.5) e (3.2.6), temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} z + \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla z = \int_\Omega (A_1(\phi^1, c^1) - A_1(\phi^2, c^2))z, \tag{3.2.34}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} z + \int_\Omega \left(A_2(\phi^1, c^1)\nabla\phi^1 - A_3(\phi^1, c^1)\nabla\Delta c^1 + D(\phi^1)\nabla c^1\right) \cdot \nabla z \\ - \int_\Omega \left(A_2(\phi^2, c^2)\nabla\phi^2 - A_3(\phi^2, c^2)\nabla\Delta c^2 + D(\phi^2)\nabla c^2\right) \cdot \nabla z = 0 \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

$$\phi(0) = \phi_0^1 - \phi_0^2, \; c(0) = c_0^1 - c_0^2 \;\text{ q.t.p em }\; \Omega$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$.

Tomando $z = \phi - \Delta\phi$ na equação (3.2.34) e usando que A_1 é uma função Lipschitz, as desigualdades de Hölder e de Young e que $c \in H_2^0(\Omega)$ junto com a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), obtemos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq C(\|\phi\|_{L^2}^2 + \|c\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}) \leq C(\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2). \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Agora, escolhendo $z = -\Delta c$ na equação (3.2.35) e rearranjando os termos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c\|_{L^2}^2 + \int_\Omega A_3(\phi^1, c^1)|\nabla\Delta c|^2 &= -\int_\Omega (A_3(\phi^1, c^1) - A_3(\phi^2, c^2))\nabla\Delta c^2 \cdot \nabla\Delta c \\ &\int_\Omega (D(\phi^1) - D(\phi^2))\nabla c^1 \cdot \nabla\Delta c + \int_\Omega D(\phi^2)\nabla c \cdot \nabla\Delta c \\ &+ \int_\Omega (A_2(\phi^1, c^1) - A_2(\phi^2, c^2))\nabla\phi^1 \cdot \nabla\Delta c + \int_\Omega A_2(\phi^2, c^2)\nabla\phi \cdot \nabla\Delta c. \end{aligned}$$

Usando que A_i e D, $i = 2, 3$ são funções de Lipschitz e limitadas, que $0 < A_0 \leq A_3$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c\|_{L^2}^2 + A_0\|\nabla\Delta c\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq C\left(\|\phi\|_{L^4}\|\nabla\Delta c^2\|_{L^4} + \|c\|_{L^4}\|\nabla\Delta c^2\|_{L^4} + \|\phi\|_{L^4}\|\nabla c^1\|_{L^4}\right. \\ &\qquad \left. + \|\nabla c\|_{L^2} + \|\nabla\phi\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^4}\|\nabla\phi^1\|_{L^4} + \|c\|_{L^4}\|\nabla\phi^1\|_{L^4}\right)\|\nabla\Delta c\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Então, aplicando a desigualdade de Young, usando que $c^1, \phi^1 \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e a imersão de Sobolev ($H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$) junto com o Lema 3.2.7, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\nabla c\|_{L^2}^2 + \frac{A_0}{2}\|\nabla\Delta c\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\left(\|\phi\|_{H^1}^2\|c^2\|_{H^4}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2\|c^2\|_{H^4}^2 + \|\phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2\right) \\
&= C\left(\|\phi\|_{H^1}^2(\|c^2\|_{H^4}^2 + 1) + \|\nabla c\|_{L^2}^2(\|c^2\|_{H^4}^2 + 1)\right) \\
&= C(\|c^2\|_{H^4}^2 + 1)(\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2).
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Assim, as desigualdades (3.2.36) e (3.2.37) implicam que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2) + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta c\|_{L^2}^2 \\
\leq C(\|c^2\|_{H^4}^2 + 1)(\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla c\|_{L^2}^2)
\end{aligned}$$

Como $c^2 \in L^2(0,T;H^4(\Omega))$, podemos aplicar o lema de Gronwall e concluir que

$$\|\phi\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla c_0^1 - \nabla c_0^2\|_{L^2(\Omega)}),$$

e que

$$\|\phi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\nabla\Delta c\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla c_0^1 - \nabla c_0^2\|_{L^2(\Omega)})$$

onde $T = T_*$ no caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $C > 0$ é uma constante.

Deste modo, pelo Lema 3.2.7, o resultado desejado fica provado. □

3.2.2 Princípio do Máximo

Nossa intenção agora é provar que, impondo hipóteses apropriadas sobre as não linearidades e escolhendo as condições iniciais ϕ_0 e c_0 com valores dentro do intervalo $[0,1]$, os valores de ϕ e c permanecem dentro do intervalo $[0,1]$. Do ponto de vista da física, essa propriedade é esperada. Entretanto, para provar isso é necessário impor hipóteses mais restritivas sobre as não linearidades. Contudo, exatamente essa propriedade esperada pode ser usada para justificar que essas hipóteses adicionais são razoáveis, como discutiremos mais detalhadamente na observação depois do teorema.

Teorema 3.2.9 (Princípio do máximo)**.** Suponha válidas as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.1. Seja (ϕ, c) uma solução fraca para as equações (3.2.1)-(3.2.4).

(i) Se $0 \leq \phi_0 \leq 1$ q.t.p. em Ω e

(H3) $A_1(\phi, c) = 0 \;\; \forall\, \phi \in (-\infty, 0] \cap [1, \infty)$,

então $0 \leq \phi \leq 1$ q.t.p. em Ω e para todo $t \in [0,T]$.

(ii) Se $0 \leq c_0 \leq 1$ q.t.p. em Ω e

(H4) $A_2(\phi, c) = \dfrac{\partial A_3}{\partial \phi}(\phi, c) = \dfrac{\partial A_3}{\partial c}(\phi, c) = 0 \;\; \forall\, c \in (-\infty, 0] \cap [1, \infty)$,

então $0 \leq c \leq 1$ q.t.p. em Ω e para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. Provaremos apenas o item (ii), o item (i) é demostrado da mesma maneira e as contas são mais simples.

Tomando $z = c^- = -\max\{0, -c\}$ na equação (3.2.6), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c^-\|_{L^2}^2 + \int_\Omega D(\phi)|\nabla c^-|^2 - \int_\Omega A_3(\phi, c)\nabla\Delta c \cdot \nabla c^- = -\int_\Omega A_2(\phi, c)\nabla\phi \cdot \nabla c^-.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c^-\|_{L^2}^2 &+ \int_\Omega D(\phi)|\nabla c^-|^2 + \int_\Omega A_3(\phi, c)|\Delta c^-|^2 \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial A_3}{\partial \phi}(\phi, c)\Delta c\nabla\phi \cdot \nabla c^- - \int_\Omega \frac{\partial A_3}{\partial c}(\phi, c)\Delta c|\nabla c^-|^2 - \int_\Omega A_2(\phi, c)\nabla\phi \cdot \nabla c^-.\end{aligned}$$

Usando a hipótese **(H4)** segue que o lado direito da última equação é nulo, assim, pela hipótese **(H2)** segue que

$$\frac{d}{dt}\|c^-\|_{L^2}^2 + 2D_0\|\nabla c^-\|_{L^2}^2 + 2A_0\|\Delta c^-\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Integrando sobre $[0, t]$, com $t \in [0, T]$, obtemos

$$\|c^-(t)\|_{L^2}^2 + 2D_0\int_0^t \|\nabla c^-\|_{L^2}^2 dt + 2A_0\int_0^t \|\Delta c^-\|_{L^2}^2 dt \leq \|c^-(0)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Então, temos que $c^-(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$ e q.t.p. em Ω, isto é, $0 \leq c(t)$ para todo $t \in [0, T]$ e q.t.p. em Ω.

Escolhendo $z = (c-1)^+ = \max\{0, c-1\}$ podemos concluir, usando os mesmos argumentos, que $(c-1)^+(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$ e q.t.p. em Ω, e portanto, $c \leq 1$ para todo $t \in [0, T]$ e q.t.p. em Ω. □

Observação 3.2.10. As hipóteses sobre os termos não lineares dadas em **(H1)** – **(H4)** são muito fortes quando comparadas com os termos que aparecem no modelo original (3.1.5)-(3.1.6). Isso acontece por dois motivos, primeiramente porque o termo $A_3(\phi, c) = D(\phi)D_1(c) = D(\phi)c(1-c)$ degenera quando $c = 0$, $c = 1$ ou $\phi = 0$. Enfrentaremos, em partes, esse primeiro problema na próxima seção, onde consideraremos o caso em que A_3 se degenere quando $\phi = 0$.

O segundo problema é que no modelo original os termos não lineares não são limitados. Para resolver essa questão, a ideia é tomar $A_1(r, s) = F_1(r) + sF_2(r)$ se $(r, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e $A_1(r, s) = 0$ caso contrário; $A_2(r, s) = D(r)D_2(r, s)$ se $(r, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e $A_1(r, s) = 0$ caso contrário; $A_3(r, s) = D(r)D_1(s) + A_0$ se $s \in [0, 1]$ e $A_3(r, s) = A_0$ caso contrário. A função D é suave e crescente dentro do intervalo $[0, 1]$, satisfazendo $D(r) = 0$ se $r \leq 0$ e $D(r) = D_s$ se $r \geq 1$. Com essas restrições nossos resultados são aplicáveis. Além disso, nesse caso as hipóteses **(H3)** e **(H4)** são satisfeitas, de modo que o teorema do princípio do máximo acima implica que $0 \leq c \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq 1$. Assim, a forma dos termos não lineares fora de $[0, 1] \times [0, 1]$ não é importante no modelo.

3.3 Um caso degenerado

Lembre que no problema original, apresentado na Seção 3.1, a função A_3 tem basicamente a forma $D(r)s(1-s)$, onde $D(0) = 0$. Entretanto, o caso estudado até aqui pode ser aplicado apenas para uma função A_3 que não se degenera. Podemos, por exemplo, depois de fazer os ajustes discutidos na Observação 3.2.10, aplicar os resultados anteriores para $A_3(r,s) = (D(r)+\lambda)(s(1-s)+\alpha)$, para λ e α constantes positivas, já que A_3 definida assim satisfaz a hipótese **(H2)**. Nessa seção, nosso objetivo é, essencialmente, provar a existência de solução fraca no caso $\lambda = 0$, ou seja, em um caso onde A_3 se degenera. O fato de que A_3 pode se degenerar faz com que percamos as estimativas para c_m em $L^2(0,T;H^3(\Omega))$, de modo que não é possível abordar esse caso via o método de Faedo-Galerkin, como foi feito na seção anterior. Além disso, pelo mesmo motivo, precisamos introduzir uma nova noção de solução faca do problema, uma vez que o termo que envolve derivadas espaciais de ordem 3 na formulação fraca da equação de Cahn-Hilliard não fica bem definido.

Estabelecemos esse problema da seguinte maneira: encontrar ϕ e c tais que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi + A_1(\phi,c), \quad \text{em} \quad Q_T, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla\cdot\Big(D(\phi)\big(D_2(\phi,c)\nabla\phi - D_1(c)\nabla\Delta c + \nabla c\big)\Big) \quad \text{em} \quad Q_T, \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.3.3}$$

$$\phi(0) = \phi_0, \; c(0) = c_0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{3.3.4}$$

onde $Q_T = \Omega\times(0,T)$ e $T > 0$. Admitimos as seguintes hipóteses sobre os termos não lineares:

(H1') $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $D_2 : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $i = 1,2$, são funções Lipschitz e limitadas. Além disso,

$$0 \le D(r), \; 0 < D_0 \le D_1(r) \; \forall \, r \in \mathbb{R}.$$

(H2') $D \in C^2(\mathbb{R})$ e D'' é limitada.

Observação 3.3.1. No modelo original $D_1(c) = \frac{v_m}{RT_M}c(1-c)$, assim, D_1 degenera quando $c = 0$ ou $c = 1$, mas aqui não permitiremos que isso ocorra, ou seja, ainda estaremos em um caso aproximado do modelo original. Apesar disso, nessa seção estamos admitindo que D se degenere quando $\phi = 0$.

Definição 3.3.2. Diremos que (ϕ, c, J) é uma solução fraca para o problema degenerado (3.3.1)-(3.3.4) se

$$\phi \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$c \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;(H^1(\Omega))'),$$

$$J \in L^2(Q_T)^n$$

e satisfazem as seguintes equações

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi + A_1(\phi,c), \quad \text{q.t.p em} \quad Q_T, \tag{3.3.5}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z\right\rangle + \int_\Omega (D(\phi)(\nabla c + D_2(\phi,c)\nabla\phi) - D_1(c)J)\cdot\nabla z = 0, \tag{3.3.6}$$

$$\phi(0) = \phi_0, \; c(0) = c_0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega, \tag{3.3.7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{3.3.8}$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$, no sentido das distribuições em $(0,T)$ e para todo $\mathbf{v} \in C_c^\infty(Q_T)^n$, J satisfaz:

$$\int_{Q_T} J \cdot \mathbf{v} = \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(\nabla D(\phi) \cdot \mathbf{v}). \tag{3.3.9}$$

Observação 3.3.3. A caracterização de J foi motivada pelo fato que gostaríamos que $J = D(\phi)\nabla\Delta c$, mas isso não é possível por causa da baixa regularidade de c. Poderíamos primeiramente tentar definir $J = \nabla(D(\phi)\Delta c) - \nabla D(\phi)\Delta c$, mas sequer sabemos se $c(t) \in H^2(\Omega)$. Entretanto, sabemos que, integrando por partes, para todo $\mathbf{v} \in C_c^\infty(Q_T)^n$

$$\int_{Q_T} (\nabla(D(\phi)\Delta c) - \nabla D(\phi)\Delta c) \cdot \mathbf{v} = \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(\nabla D(\phi) \cdot \mathbf{v}),$$

e o lado direito da última equação faz sentido mesmo para $c \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

O teorema que apresentamos a seguir estabelece a existência de solução no sentido da última definição e é, talvez, o resultado mais importante desse capítulo.

Teorema 3.3.4. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$ e suponha que as hipóteses **(H1')** e **(H2')** são satisfeitas. Então, existe uma solução fraca (ϕ, c, J) para o problema degenerado no sentido da Definição 3.3.2.

A ideia essencial para provar esse teorema é substituir $D(\cdot)$ por $D(\cdot) + \lambda$, onde $\lambda > 0$, no termo com derivadas de quarta ordem, então aplicamos o Teorema 3.2.1 para esse problema modificado, obtendo assim uma solução aproximada que depende de λ. Então deduzimos algumas estimativas independentes de λ, estimativas essas que nos permitem tomar o limite quando $\lambda \to 0^+$. Finalmente provamos a caracterização de J dada em (3.3.9).

Mais precisamente, seja $0 < \lambda < 1$ e $D_\lambda(\cdot) = D(\cdot) + \lambda$. Suponhamos que $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ e que a hipótese **(H1')** é válida. Aplicando o Teorema 3.2.1 temos que $(\phi_\lambda, c_\lambda)$ satisfaz

$$\phi_\lambda \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;(H^1(\Omega))'),$$
$$c_\lambda \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;(H^1(\Omega))')$$

e

$$\left\langle \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega \nabla\phi_\lambda \cdot \nabla z = \int_\Omega A_1(\phi_\lambda, c_\lambda) z, \tag{3.3.10}$$

$$\left\langle \frac{\partial c_\lambda}{\partial t}, z \right\rangle + \int_\Omega (D(\phi_\lambda)(\nabla c_\lambda + D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda) - D_1(c_\lambda)D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla\Delta c_\lambda) \cdot \nabla z = 0, \tag{3.3.11}$$

$$\phi_\lambda(0) = \phi_0, \ c_\lambda(0) = c_0 \ \text{ q.t.p em } \ \Omega \tag{3.3.12}$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em $(0,T)$.

Lema 3.3.5. Se $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ e **(H1')** é satisfeita, a solução $(c_\lambda, \phi_\lambda)$ de (3.3.10)-(3.3.12) satisfaz as seguintes estimativas

$$\|c_\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\phi_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.3.13}$$

$$\|\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \int_0^T \int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \leq C, \tag{3.3.14}$$

$$\left\| \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} + \left\| \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq C, \tag{3.3.15}$$

com $C > 0$ independente de λ.

Demonstração. Escolhendo $z = -\Delta c_\lambda$ na equação (3.3.11) e integrando por partes, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \int_\Omega D_1(c_\lambda)D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 = \int_\Omega (D(\phi_\lambda)(\nabla c_\lambda + D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda))\cdot\nabla\Delta c_\lambda.$$

Usando a hipótese **(H1')** e que $D(\phi_\lambda) \leq D_\lambda(\phi_\lambda)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + &D_0\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \\ &\leq C\left(\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda\cdot\nabla\Delta c_\lambda + \int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda\cdot\nabla\Delta c_\lambda\right).\end{aligned}$$

Agora, a aplicação da desigualdade de Young e o fato de D_λ e D_2 serem limitadas implicam que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + D_0\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \leq C\left(\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2\right). \tag{3.3.16}$$

Além disso, tomando ϕ_λ como função teste na equação (3.3.10), segue que

$$\frac{d}{dt}\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 \leq C(\|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + 1)$$

Portanto, multiplicando a equação (3.3.16) por δ e somando com essa última equação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\delta\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\phi_\lambda\|_{L^2}^2\right) + &\delta D_0\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 + 2\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\delta\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \delta\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + 1).\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \dfrac{1}{C}$ seque a seguinte estimativa de energia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C}\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\phi_\lambda\|_{L^2}^2\right) + &\frac{D_0}{C}\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 + \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\Big(\frac{1}{C}\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + 1\Big)\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Então, pelo lema de Gronwall, segue que existe uma constante $C > 0$ independente de λ, tal que

$$\|\nabla c_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\phi_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Além disso, integrando a equação (3.3.17) sobre $[0, T]$, temos que

$$\|\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \int_0^T\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \leq C.$$

Como

$$\|c_\lambda(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|c_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla c_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

precisamos provar que

$$\|c_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Para isso, tomemos c_λ como uma função teste em (3.3.11). Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|c_\lambda\|_{L^2}^2 \leq & C\int_\Omega \left(|\nabla c_\lambda|^2 + |\nabla \phi_\lambda||\nabla c_\lambda| + D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda||\nabla c_\lambda|\right)\\ & \leq C\left(\|\nabla c_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2\right).\end{aligned}$$

Integrando sobre $(0,t)$, com $t \in [0,T]$, temos

$$\|c_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla c_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2\right) + \|c_0\|_{L^2}^2.$$

Usando as estimativas obtidas até aqui, segue que $\|c_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$, como queríamos demonstrar.

Agora, para todo $z \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \frac{\partial c_\lambda}{\partial t}, z\right\rangle\right| &\leq \left|\int_\Omega (D(\phi_\lambda)(\nabla c_\lambda + D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda) - D_1(c_\lambda)D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla\Delta c_\lambda)\cdot\nabla z\right|\\ &\leq C\left(\int_\Omega (D_\lambda(\phi_\lambda)\left(|\nabla c_\lambda| + |\nabla\phi_\lambda| + |\nabla\Delta c_\lambda|\right))^2\right)^{1/2}\|\nabla z\|_{L^2}\\ &\leq C\left(\int_\Omega \left(|\nabla c_\lambda|^2 + |\nabla\phi_\lambda|^2 + D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2\right)\right)^{1/2}\|z\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left\|\frac{\partial c_\lambda}{\partial t}\right\|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq C\int_\Omega \left(|\nabla c_\lambda|^2 + |\nabla\phi_\lambda|^2 + D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2\right).$$

Integrando sobre $[0,T]$ e usando as estimativas já obtidas, segue que

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial c_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2\\ &\leq C\left(\|\nabla c_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2\right) \leq C.\end{aligned}$$

Além disso, podemos ver que

$$\left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 \leq C\left(\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + 1\right) \leq C.$$

□

Lema 3.3.6. Seja $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ e suponha válida a hipótese **(H1')**. Então existe uma subsequência de $(\phi_\lambda, c_\lambda)$ satisfazendo

$$\phi_\lambda \to \phi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega))\cap C([0,T];(H^1(\Omega))'), \tag{3.3.18}$$
$$c_\lambda \to c \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega)), \tag{3.3.19}$$
$$A_1(\phi_\lambda, c_\lambda) \to A_1(\phi, c) \text{ em } L^p(Q_T),\ p\in[1,\infty), \tag{3.3.20}$$
$$D_2(\phi_\lambda, c_\lambda) \to D_2(\phi, c) \text{ em } L^p(Q_T),\ p\in[1,\infty), \tag{3.3.21}$$
$$D(\phi_\lambda) \to D(\phi) \text{ em } L^p(Q_T),\ p\in[1,\infty), \tag{3.3.22}$$
$$D_1(c_\lambda) \to D_1(c) \text{ em } L^p(Q_T),\ p\in[1,\infty), \tag{3.3.23}$$
$$D(\phi_\lambda)\nabla c_\lambda \rightharpoonup D(\phi)\nabla c \text{ em } L^2(Q_T), \tag{3.3.24}$$
$$D(\phi_\lambda)D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda \rightharpoonup D(\phi)D_2(\phi,c)\nabla\phi \text{ em } L^2(Q_T), \tag{3.3.25}$$
$$\lambda\nabla\Delta c_\lambda \to 0, \text{ em } L^2(Q_T)^n. \tag{3.3.26}$$

Além disso, existe $J \in L^2(Q_T)^n$ tal que

$$D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla\Delta c_\lambda \rightharpoonup J \text{ in } L^2(Q_T)^n. \tag{3.3.27}$$

Demonstração. As convergências fortes (3.3.18) e (3.3.19) são consequências das estimativas no lema acima e da aplicação do lema de Aubin-Lions-Simon (Teorema 1.3.12).

Com essas convergências fortes para ϕ_λ e c_λ e o fato que A_1, D, D_1 e D_2 são funções Lipschitz e limitadas, usando o teorema da convergência dominada provamos as convergências (3.3.20), (3.3.21), (3.3.22) e (3.3.23).

As convergências fracas (3.3.24) e (3.3.25) podem ser provadas usando as convergências fortes para as funções não lineares junto com as convergências fracas:

$$\nabla c_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla c \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\nabla \phi_\lambda \rightharpoonup \nabla \phi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

que são consequências imediatas do último lema. De fato, para mostrar (3.3.25), note que, como D e D_2 são funções limitadas e por (3.3.14), segue que

$$\|D(\phi_\lambda)D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\nabla\phi_\lambda\|_{L^2(Q_T)} \le \|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2(Q_T)} \le C.$$

Assim, existe $I \in L^2(Q_T)$ tal que uma subsequência $D(\phi_\lambda)D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\nabla\phi_\lambda \rightharpoonup I$ fracamente em $L^2(Q_T)$. Para ver que $I = D(\phi)D_2(\phi,c)\nabla\phi$, seja $v \in L^p(Q_T)$, com $p > 2$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (D(\phi_\lambda)D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\nabla\phi_\lambda - D(\phi)D_2(\phi,c)\nabla\phi)v \\
&= \int_{Q_T} (D(\phi_\lambda)-D(\phi))D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\nabla\phi_\lambda v + \int_{Q_T} D(\phi)(D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)-D_2(\phi,c))\nabla\phi_\lambda v \\
&\quad + \int_{Q_T} D(\phi)(\nabla\phi_\lambda - \nabla\phi)D_2(\phi,c)v.
\end{aligned}$$

O terceiro termo tente a zero por causa da convergência $\nabla\phi_\lambda \rightharpoonup \nabla\phi$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Para ver que os dois primeiros também tendem a zero, aplicamos a desigualdade de Hölder e obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (D(\phi_\lambda)-D(\phi))D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\nabla\phi_\lambda v + \int_{Q_T} D(\phi)(D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)-D_2(\phi,c))\nabla\phi_\lambda v \\
&\le \|D(\phi_\lambda)-D(\phi)\|_{L^q}\|D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)\|_{L^\infty}\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}\|v\|_{L^p} \\
&\quad + \|D(\phi)\|_{L^\infty}\|D_2(\phi_\lambda,c_\lambda)-D_2(\phi,c)\|_{L^q}\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}\|v\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}=1$. Como $p > 2$, temos que $q < \infty$, então, podemos usar as convergências (3.3.21) e (3.3.22), o fato que D e D_2 são limitadas e a estimativa (3.3.14), para concluir que esses termos também tendem a zero. Assim, pela unicidade do limite temos que $I = D(\phi)D_2(\phi,c)\nabla\phi$. A demostração de (3.3.24) é análoga.

Para provar (3.3.26) note que, como D é uma função não negativa, temos que

$$\|\lambda\nabla\Delta c_\lambda\|^2_{L^2(Q_T)} = \lambda^2\int_{Q_T}|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \le \lambda\int_{Q_T} D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \le \lambda C,$$

onde estamos usando (3.3.14) novamente.

A convergência (3.3.27) é uma aplicação imediata do último lema, já que

$$\|D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla\Delta c_\lambda\|^2_{L^2(Q_T)} \le C\int_0^T\int_\Omega D_\lambda(\phi_\lambda)|\nabla\Delta c_\lambda|^2 \le C.$$

□

Observação 3.3.7. Veja que com essas últimas convergências podemos tomar o limite nas equações (3.3.10)-(3.3.11) e obter as equações (3.3.5)-(3.3.6) na definição 3.3.2. Entretanto, não podemos fornecer ainda a caracterização de J como apresentado em (3.3.9). Nosso propósito nos próximos resultados é provar exatamente essa caracterização de J. Até aqui foi exigido apenas que $\phi_0 \in L^2(\Omega)$ e foi usada apenas a hipótese **(H1')**, agora, para caracterizar J, precisamos de mais regularidade para ϕ e para o termo não linear D, dessa forma, vamos impor mais regularidade para ϕ_0.

Lema 3.3.8. Seja $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$ e suponha que a hipótese **(H1')** é valida. Então,

$$\|\phi_\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.3.28}$$

$$\text{a menos de uma subsequência } \phi_\lambda \to \phi \text{ in } L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.3.29}$$

e para todo $\mathbf{v} \in C_c^\infty(Q_T)^n$,

$$\int_{Q_T} \nabla(D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} \to \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Demonstração. Como $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, pelo Teorema 3.2.3, item (ii), temos que $(\phi_\lambda, c_\lambda)$ satisfaz as equações (3.3.10)-(3.3.12), com

$$\phi_\lambda \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)).$$

Então, escolhendo $z = -\Delta\phi_\lambda$ na equação (3.3.10) e integrando por partes, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \epsilon^2\|\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega A_1(\phi_\lambda, c_\lambda)\Delta\phi_\lambda \leq C\|\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Young e integrando sobre $(0,t)$, onde $t \in (0,T]$, segue que

$$\|\nabla\phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}^2 \leq CT + \|\nabla\phi_0\|_{L^2}^2.$$

Assim,

$$\|\phi_\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C.$$

Agora, escolhendo $z = \frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}$ na equação (3.3.10), segue que

$$\left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega A_1(\phi_\lambda, c_\lambda)\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t} \leq C\left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2}.$$

Dessa forma, a desigualdade de Young implica que

$$\left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla\phi_\lambda\|_{L^2}^2 \leq C.$$

Então,

$$\left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Como $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ com imersão compacta, $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, $\{\phi_\lambda\}$ é limitado em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $\{\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\}$ é limitado em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, segue que $\{\phi_\lambda\}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Ou seja, existe uma subsequência de ϕ_λ, tal que

$$\phi_\lambda \to \phi \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Agora, seja $\mathbf{v} \in (C_c^\infty(Q_T))^n$, integrando por partes duas vezes temos que

$$\int_{Q_T} \nabla(D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} = \int_{Q_T} \nabla c_\lambda \cdot \nabla(D(\phi_\lambda)\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} \nabla(D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} - \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&= \int_{Q_T} (\nabla c_\lambda \cdot \nabla(D(\phi_\lambda)\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v})) \\
&= \int_{Q_T} (\nabla c_\lambda - \nabla c) \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{Q_T} \nabla c_\lambda \cdot (\nabla(D(\phi_\lambda)\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v})) \\
&= \int_{Q_T} (\nabla c_\lambda - \nabla c) \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{Q_T} (D(\phi_\lambda) - D(\phi))\nabla c_\lambda \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&+ \int_{Q_T} \nabla c_\lambda \cdot \nabla(D(\phi_\lambda) - D(\phi))\nabla \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da última equação tende a zero, uma vez que como sabemos $\nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}) \in L^2(Q_T)^n$ e $\nabla c_\lambda \rightharpoonup \nabla c$ em $L^2(Q_T)^n$. O segundo termo também tende a zero, já que $\nabla c_\lambda \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ está limitada em $L^2(Q_T)$ e $D(\phi_\lambda) \to D(\phi)$ em $L^2(Q_T)$. Agora, como D é uma função Lipschitz segue que $D(\cdot) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ é um operador contínuo, para todo $t \in [0,T]$ fixado (veja o Teorema 1.5.2). Então, como $\nabla \cdot \mathbf{v}\nabla c_\lambda$ está uniformemente limitado em $L^2(Q_T)$, segue que o terceiro termo tende a zero. De fato, para todo $t \in [0,T]$, e usando (3.3.29), segue que

$$\|D(\phi_\lambda) - D(\phi)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \to 0.$$

Em particular, temos que

$$\|\nabla(D(\phi_\lambda) - D(\phi))\|_{L^2(Q_T)} \to 0,$$

de onde segue que facilmente que o terceiro termo tende a zero quando $\lambda \to 0^+$.

Com isso fica provado que

$$\int_{Q_T} \nabla(D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} \to \int_{Q_T} \nabla c \cdot \nabla(D(\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Agora, note que

$$\int_{Q_T} \nabla(D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} = \int_{Q_T} \nabla(D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda) \cdot \mathbf{v} + \int_{Q_T} \lambda\nabla\Delta c_\lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Mas, por causa de (3.3.26), segue que

$$\left|\int_{Q_T} \lambda\nabla\Delta c_\lambda \cdot \mathbf{v}\right| \le \|\lambda\nabla\Delta c_\lambda\|_{L^2(Q_T)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(Q_T)} \to 0.$$

Dessa forma,

$$\int_{Q_T} \nabla(D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda)\cdot\mathbf{v} \to \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(D(\phi)\nabla\cdot\mathbf{v}).$$

□

Lema 3.3.9. Se $(\phi_0, c_0) \in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ e as hipóteses **(H1')** e **(H2')** são válidas, temos que

$$\|\phi_\lambda\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|\phi_\lambda\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} + \left\|\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C, \tag{3.3.30}$$

$$\phi_\lambda \to \phi \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.3.31}$$

e para todo $\mathbf{v}\in C_c^\infty(Q_T)^n$,

$$-\int_{Q_T} \nabla D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v} \to \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v}).$$

Demonstração. Nesta demonstração precisamos fazer as estimativas no problema aproximado, pois não temos regularidade suficiente para utilizar o teorema de integração por partes no problema apenas regularizado. Ou seja, dado $(\phi_0, c_0)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$, assim como no Teorema 3.2.1, consideramos $(\phi_\lambda, c_\lambda)\in H^1(0,T;(E_m)^2)$ a solução do seguinte problema aproximado:

$$\left(\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega \nabla\phi_\lambda\cdot\nabla z = \int_\Omega A_1(\phi_\lambda, c_\lambda)z,$$

$$\left(\frac{\partial c_\lambda}{\partial t}, z\right) + \int_\Omega (D(\phi_\lambda)(\nabla c_\lambda + D_2(\phi_\lambda, c_\lambda)\nabla\phi_\lambda) - D_1(c_\lambda)D_\lambda(\phi_\lambda)\nabla\Delta c_\lambda)\cdot\nabla z = 0,$$

$$(\phi_\lambda(0), c_\lambda(0)) = (L_m(\phi_0), L_m(c_0)),$$

para todo $z\in E_m$. Apesar de estarmos indexando a solução $(\phi_\lambda, c_\lambda)$ do sistema acima apenar em λ, evidentemente, estas soluções dependem também de m. Com isso, podemos proceder exatamente como no Teorema 3.2.3, para obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\phi_\lambda\|_{L^2}^2\\ &= -\int_\Omega\left(\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\nabla\phi_\lambda + \frac{\partial A_1}{\partial c}\nabla c_\lambda\right)\nabla\Delta\phi_\lambda + \int_\Omega\left(\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\nabla\phi_\lambda + \frac{\partial A_1}{\partial c}\nabla c_\lambda\right)\nabla\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, usando o fato que $A_1\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, aplicando a desigualdade de Young, integrando sobre $[0,T]$ e aplicando as estimativas (3.3.13) e (3.3.14) junto com as estimativas elípticas, obtemos exatamente a estimativa (3.3.30) para as soluções do problema aproxima. Mas como a constante C é independente de m e λ, podemos tomar o limite nas estimativas obtidas quando $m\to\infty$, chegando assim precisamente em (3.3.30).

Com essas estimativas temos que $\{\phi_\lambda\}$ é limitado em $L^2(0,T;H^3(\Omega))$ e $\left\{\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial t}\right\}$ é limitado em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Como $H^3(\Omega)\subset H^2(\Omega)$ compactamente (veja o Corolário 1.3.5) e $H^2(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ continuamente, segue que

$$\phi_\lambda \to \phi \text{ em } L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Agora podemos ver que

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_T}\nabla D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v}-\int_{Q_T}\nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v})\\
&=\int_{Q_T}\nabla c_\lambda\cdot\nabla(\nabla D(\phi_\lambda)\cdot\mathbf{v})-\int_{Q_T}\nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v})\\
&=\int_{Q_T}(\nabla c_\lambda-\nabla c)\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v})+\int_{Q_T}\nabla c_\lambda\cdot\nabla((\nabla D(\phi_\lambda)-\nabla D(\phi))\cdot\mathbf{v})\\
&=\int_{Q_T}(\nabla c_\lambda-\nabla c)\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v})+\int_{Q_T}\nabla c_\lambda\cdot\left(\partial^2[D(\phi_\lambda)-D(\phi)]\mathbf{v}\right)\\
&+\int_{Q_T}\nabla c_\lambda\cdot\nabla(D(\phi_\lambda)-D(\phi))\nabla\cdot\mathbf{v},
\end{aligned}$$

onde $\partial^2[D(\phi_\lambda)-D(\phi)]$ está denotando a matriz hessiana $\left[\frac{\partial^2(D(\phi_\lambda)-D(\phi))}{\partial x_i\partial x_j}\right]$.

O primeiro termo do lado direito da última equação tende a zero, pois $\nabla c_\lambda \rightharpoonup \nabla c$ em $(L^2(Q_T))^n$ e $(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v})\in L^2(Q_T)^n$. O terceiro termo vai a zero pela mesma razão que no lema anterior.

Para mostrar que o segundo termo tende a zero note que usando a hipótese **(H2')** e aplicando o Teorema 1.5.1, podemos concluir que, $D(\cdot):H^2(\Omega)\to H^2(\Omega)$ é um operador contínuo, para todo $t\in[0,T]$, dessa forma, usando (3.3.31), temos que para todo $t\in[0,T]$

$$\|D(\phi_\lambda(t))-D(\phi(t))\|_{H^2}\to 0.$$

Particularmente,

$$\|\partial^2 D(\phi_\lambda(t))-\partial^2 D(\phi(t))\|_{L^2}\to 0.$$

Sendo assim, como D'' é uma função limitada e ϕ_λ está limitada em $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, segue que

$$\|\partial^2 D(\phi_\lambda(t))\|_{L^2}^2\le C$$

onde a constante $C>0$ é independente de λ e estamos usando a estimativa (3.3.30). Então, pelo teorema da convergência dominada, obtemos que

$$\|\partial^2 D(\phi_\lambda)-\partial^2 D(\phi)\|_{L^2(Q_T)}\to 0.$$

Com isso é fácil ver que o segundo termo tende a zero.

Isso prova que

$$-\int_{Q_T}\nabla D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v}\to\int_{Q_T}\nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v}).$$

Entretanto

$$-\int_{Q_T}\nabla D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v}=-\int_{Q_T}\nabla D(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v}-\int_{Q_T}\lambda\nabla\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v},$$

e já vimos no último lema que este último termo tende a zero. □

Observação 3.3.10. Com esse dois lemas a caracterização de J em (3.3.9) fica estabelecida. De fato, por um lado, usando os dois lemas, temos

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} D_\lambda(\phi)\nabla\Delta c_\lambda \cdot \mathbf{v} &= \int_{Q_T} \nabla(D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda)\cdot \mathbf{v} - \int_{Q_T} \nabla D_\lambda(\phi_\lambda)\Delta c_\lambda \cdot \mathbf{v}\\ &\to \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(D(\phi)\nabla\cdot\mathbf{v}) + \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v}),\end{aligned}$$

por outro lado, usando a convergência (3.3.27) obtemos que

$$\int_{Q_T} D_\lambda(\phi)\nabla\Delta c_\lambda\cdot\mathbf{v} \to \int_{Q_T} J\cdot\mathbf{v}.$$

Então,

$$\int_{Q_T} J\cdot\mathbf{v} = \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(D(\phi)\nabla\cdot\mathbf{v}) + \int_{Q_T} \nabla c\cdot\nabla(\nabla D(\phi)\cdot\mathbf{v}).$$

Com isso o Teorema 3.3.4 fica demonstrado.

Observação 3.3.11. Note que não foi necessário o princípio do máximo para provar a existência de solução fraca. No entanto, o fato que $0 \le c \le 1$ e $0 \le \phi \le 1$ é uma propriedade física esperada. Para ver a validade dessa propriedade assumimos que $0 \le \phi_0 \le 1$ e $A_1(r,s) = 0\ \ \forall\, r \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$, então aplicando o Teorema 3.2.9, temos que $0 \le \phi_\lambda \le 1$. Mas usando a convergência (3.3.18), podemos afirmar que $\phi_\lambda(x,t) \to \phi(x,t)$ q.t.p. em Q_T. Dessa forma, concluímos que $0 \le \phi \le 1$ a.e. in Q_T.

Da mesma forma, assumindo que $0 \le c_0 \le 1$, que D é uma função crescente e suave dentro do intervalo $[0,1]$, $D(r) = 0$ se $r \le 0$, $D(r) = D_s$ se $r \ge 1$ e $D_2(r,s) = D_1'(s) = 0\ \ \forall\, s \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$, temos que $0 \le c \le 1$ q.t.p. em Q_T, onde estamos usando a convergência (3.3.19).

Capítulo 4

Existência e Regularidade para a Solução de um Sistema Multifásico da Eletrohidrodinâmica

Yang, Li e Ding propuseram em [50] o seguinte sistema de equações para descrever um fluido multifásico sob o efeito de um campo elétrico:

$$
\begin{aligned}
&\rho_0(c)\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + 2\mathrm{div}(\mu(c)D(\mathbf{u})) - \rho\nabla V - \frac{1}{2}\epsilon_0|\nabla V|^2\nabla\epsilon_\gamma(c) + \phi\nabla c,\\
&\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0,\\
&\nabla\cdot(\epsilon_0\epsilon_\gamma(c)\nabla V) = -\rho\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = \nabla\cdot(\sigma(c)\nabla V),\\
&\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \mathrm{div}(M\nabla\phi),\\
&\phi = \Psi'(c) - \delta^2\Delta c
\end{aligned}
$$

todas as equações satisfeitas em $Q_T = \Omega\times(0,T)$, com Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. As incógnitas são: a função $\mathbf{u}$ que representa o campo de velocidade do fluido, a pressão p, o potencial elétrico V ($E = -\nabla V$ onde E é o campo elétrico), a densidade de carga livre ρ, o campo de fase c e o potencial químico ϕ. Os demais termos são dados: $\rho_0 > 0$ é a densidade de massa volumétrica, $\mu > 0$ é a viscosidade, $\epsilon_0 > 0$ é a permissividade de vácuo, ϵ_γ é a constante dielétrica, σ é a condutividade elétrica, $\delta > 0$ é o coeficiente do gradiente de energia do soluto, M é a mobilidade do campo de fase e Ψ um polinômio de quarta ordem com mínimos em 0 e 1, e é conhecido como potencial de poço duplo (*double well potential*). Aqui $D(\mathbf{u}) := (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ é a parte simétrica do gradiente.

Vamos estudar o caso em que a densidade de massa volumétrica ρ_0, a constante dielétrica ϵ_γ e a condutividade dielétrica σ são constantes positivas. Nesse caso a equação do potencial elétrico e a equação de densidade de carga livre podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= -\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_\gamma}\rho,\\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = \sigma\Delta V &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_\gamma}\rho.
\end{aligned}
$$

Assumimos aqui que a mobilidade do campo de fase M dependa de c. Admitimos a condição de contorno de Neumann homogênea para c, V e Δc, já para $\mathbf{u}$ colocamos a condição de Dirichilet homogênea. Além disso, supomos que a carga livre total é nula, isso é, $\int_\Omega \rho = 0$. Veja que essa condição é aceitável do ponto de vista da física, uma vez que a carga elétrica pode ser negativa em uma determinada região e positiva em outra, de modo que a carga livre total seja nula.

Então, no nosso caso, as equações que descrevem a evolução no tempo de $\mathbf{u}$, p, V, ρ, c e ϕ são dadas por:

$$\rho_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + 2\mathrm{div}(\mu(c)D(\mathbf{u})) - \rho\nabla V + \phi\nabla c \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.1}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.2}$$

$$\epsilon_0\epsilon_\gamma \Delta V = -\rho \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = -\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_\gamma}\rho \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \mathrm{div}(M(c)\nabla\phi) \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.5}$$

$$\phi = \Psi'(c) - \delta^2\Delta c \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.0.6}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \tag{4.0.7}$$

$$\int_\Omega \rho = 0, \tag{4.0.8}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad c(0) = c_0 \ \text{ em } \ \Omega, \tag{4.0.9}$$

onde $T > 0$, a fronteira $\partial\Omega$ é classe C^∞ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior.

Provamos a existência de solução para um problema mais geral, que é introduzido na próxima seção.

4.1 O sistema de equações e algumas notações

A partir de agora, por uma questão de simplicidade, vamos supor que todas as constantes sejam unitárias, ou seja, $\rho_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_\gamma} = \delta = 1$. Além disso, investigaremos o seguinte modelo mais geral:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + 2\mathrm{div}(\mu(c)D(\mathbf{u})) + \rho\mathcal{T}(\rho) + \phi\nabla c \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.1.1}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.1.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho = 0 \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)c = \mathrm{div}(M(c)\nabla\phi) \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.1.4}$$

$$\phi = \Psi'(c) - \Delta c \ \text{ em } \ Q_T, \tag{4.1.5}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Delta c}{\partial n} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \tag{4.1.6}$$

$$\int_\Omega \rho = 0, \tag{4.1.7}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad c(0) = c_0 \ \text{ em } \ \Omega, \tag{4.1.8}$$

onde $\mathcal{T} : L^2(\Omega) \to (H^1(\Omega))^n$, $n = 2, 3$, é um operador linear satisfazendo

$$\|\mathcal{T}(\rho)\|_{H^1} \leq C\|\rho\|_{L^2}. \tag{4.1.9}$$

As hipóteses sobre M, μ, e Ψ são:

$$0 < \mu_0 < \mu(s) < \mu_1, \ \forall\ s \in \mathbb{R}, \quad \text{e } \mu \in C^1(\mathbb{R}) \text{ com } \mu' \leq C, \tag{4.1.10}$$

$$0 < M_0 < M(s) < M_1, \ \forall\ s \in \mathbb{R}, \quad \text{e } M \in C^2(\mathbb{R}) \text{ com } M' \text{ e } M'' \text{ limitadas.} \tag{4.1.11}$$

A função $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e existem constantes $C_1 > 0$ e $C > 0$, tais que

$$\Psi(s) \geq -C_1, \tag{4.1.12}$$

$$|\Psi'''(s)| \leq C(|s| + 1) \quad \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{4.1.13}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\Psi(s)| &\leq C(|s|^4 + 1), \\ |\Psi'(s)| &\leq C(|s|^3 + 1), \\ |\Psi''(s)| &\leq C(|s|^2 + 1), \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e alguma constante $C > 0$.

Observação 4.1.1. As hipóteses sobre Ψ são satisfeitas para o caso do potencial de poço duplo $\Psi(x) = x^2(x-1)^2$, que é a situação de maior interesse aqui, uma vez que nossas equações estão baseadas no modelo proposto em [50], onde Ψ tem exatamente essa forma. As nossas hipóteses sobre Ψ são similares, por exemplo, às hipóteses em [10, 1].

Observação 4.1.2. Se $\rho \in L^2(\Omega)$ satisfizer a condição (4.1.7), pela Proposição 1.3.8, existe único $V \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\Delta V = -\rho \ \text{ em } \ \Omega, \tag{4.1.15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \tag{4.1.16}$$

Assim, $\mathcal{T} : L^2(\Omega) \to (H^1(\Omega))^n$, $n = 2, 3$, dado por $\mathcal{T}(\rho) = -\nabla V$, está bem definido. Como $V \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\int_\Omega V = 0. \tag{4.1.17}$$

Com isso vemos que a condição (4.1.9) é satisfeita nesse caso particular. De fato, multiplicando a equação (4.1.15) por $-V + \Delta V$, integrando sobre Ω, aplicando o teorema de integração por partes e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\|\mathrm{div}\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\|\rho\|_{L^2(\Omega)}\|V\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho\|_{L^2}\|\mathrm{div}\mathcal{T}(\rho)\|_{L^2}\right).$$

Então, por (4.1.17) a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2) pode ser aplicada para se obter que

$$\|V\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla V\|_{L^2(\Omega)} = C\|\mathcal{T}(\rho)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dessa forma, usando a desigualdade de Young, segue que

$$\|\mathrm{div}\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\rho\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(\rho)\|_{H^1} &= \|\nabla V\|_{H^1} \leq \|V\|_{H^2} \leq C(\|\Delta V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2}) \\ &\leq C\left(\|\Delta V\|_{L^2} + \|\nabla V\|_{L^2}\right) = C\left(\|\mathrm{div}\mathcal{T}(\rho)\|_{L^2} + \|\mathcal{T}(\rho)\|_{L^2}\right) \leq C\|\rho\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Isso mostra que, se o problema (4.1.1)-(4.1.8) tem uma solução, então, em particular, o problema (4.0.1)-(4.0.9) também tem uma solução.

Observação 4.1.3. Na formulação integral podemos escrever o termo "$\phi\nabla c$" (do lado direito da equação da velocidade) de duas outras maneiras: $-\nabla\phi c$ e $-\Delta c\nabla c$. Isso ocorre porque a função teste para a equação de Navier-Stokes tem divergente nulo. Então, por meio do teorema de integração por partes, temos que

$$\int_\Omega \phi\nabla c\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega c\nabla\phi\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{v})\phi c = -\int_\Omega c\nabla\phi\cdot\mathbf{v} \tag{4.1.18}$$

Por outro lado, usando que $\phi = \Psi'(c) - \Delta c$, e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\nabla c\cdot\mathbf{v} &= \int_\Omega \Psi'(c)\nabla c\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \Delta c\nabla c\cdot\mathbf{v} \\ &= -\int_\Omega \Psi(c)\mathrm{div}(\mathbf{v}) - \int_\Omega \Delta c\nabla c\cdot\mathbf{v} = -\int_\Omega \Delta c\nabla c\cdot\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Observação 4.1.4. Relembramos aqui as definições dos seguintes espaços:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{\mathbf{v}\in(C_c^\infty(\Omega))^n \mid \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0\}, \\ H = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbf{L}^2} &= \{\mathbf{v}\in(L^2(\Omega))^n \mid \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbf{H}_0^1} &= \{\mathbf{v}\in(H_0^1(\Omega))^n \mid \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0\},\end{aligned}$$

onde $n = 2$ ou $n = 3$.

Na próxima seção definiremos o que é uma solução fraca para problema (4.1.1)-(4.1.8), nessa definição aparecerão as seguintes formas trilineares contínuas:

$$\begin{aligned}b_u(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i(\partial_i v_j)w_j,\ \forall\ (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in(V)^3, \\ b(\mathbf{u};c,z) &= \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla cz,\ \forall\ (\mathbf{u},c,z)\in V\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{u} = (u_1,\cdots,u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1,\cdots,v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1,\cdots,w_n)$, $n = 2,3$. Observe que

$$b_u(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0, \quad b(\mathbf{u};c,c) = 0 \quad \text{para} \quad (\mathbf{u},c)\in V\times H^1(\Omega).$$

4.2 Solução fraca

Nosso propósito nessa seção é provar o seguinte resultado de existência de solução fraca para o problema (4.1.1)-(4.1.8).

Teorema 4.2.1. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $(\mathbf{u}_0, \rho_0, c_0) \in H \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Então, existem $\mathbf{u}$, ρ, c e ϕ tais que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V),\\
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \text{ se } n=2 \text{ e } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^{4/3}(0,T;V') \text{ se } n=3,\\
&\rho \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;W^{1,3}(\Omega)'),\\
&c \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)'),\\
&\phi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

e satisfazem as seguintes equações:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle + \int_\Omega \mu(c) D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \rho \mathcal{T}(\rho) \cdot \mathbf{v} + \int_\Omega \phi \nabla c \cdot \mathbf{v}, \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho) + \rho = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T), \tag{4.2.2}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, z \right\rangle + b(\mathbf{u}; c, z) + \int_\Omega M(c) \nabla \phi \cdot \nabla z = 0, \tag{4.2.3}$$

$$\phi = \Psi'(c) - \Delta c \text{ q.t.p. em } Q_T, \tag{4.2.4}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ c(0) = c_0 \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \rho(0) = \rho_0 \text{ em } H^1(\Omega)', \tag{4.2.5}$$

para todo $\mathbf{v} \in V$ e $z \in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em t. Na equação (4.2.1), $D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) := tr(D(\mathbf{u})^T D(\mathbf{v}))$. A solução $(\mathbf{u}, \rho, c, \phi)$ é chamada *solução fraca* para o problema (4.1.1)-(4.1.8).

A estratégia consiste em demonstrar que um problema aproximado regularizado tem solução, então mostramos que o limite dessas soluções é uma solução fraca no sentido introduzido no teorema acima. Na próxima subseção introduzimos precisamente esse problema aproximado regularizado e mostramos que esse problema tem uma solução.

4.2.1 Problema aproximado regularizado

Utilizamos o método de regularização parabólica que consiste em adicionar $\epsilon\Delta\rho$ do lado direito da equação (4.1.3) (veja, por exemplo, [18]). As equações restantes são aproximadas pelo método de Faedo-Galerkin. Nessa seção usamos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (veja o Teorema 1.5.4) para mostrar que este problema aproximado regularizado tem uma solução.

Para introduzir esse problema, sejam $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ os autovalores do operador de Stokes e $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções associadas. Essas autofunções formam uma base ortogonal em H, V e $V \cap H^2(\Omega)$. Denotamos por $W_m = \text{span}\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}$ e seja P_m a projeção ortogonal de H em W_m.

Semelhantemente, sejam $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ os autovalores do operador $-\Delta$ com condição de Neumann homogênea sobre a fronteira e $(e_i)_{i\geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ as autofunções correspondentes, tal que $(e_i)_{i\geq 1}$ forma uma base ortogonal completa em $L^2(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$. Denotamos por $E_m = \text{span}\{e_1, ..., e_m\}$ e por L_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em E_m.

A dependência de $\epsilon > 0$ é omitida na próxima proposição para simplificar a notação.

Proposição 4.2.2. Suponha que $(\mathbf{u}_0, \rho_0, c_0) \in H \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Existe $(\mathbf{u}_m, c_m, \rho_m)$, onde $\mathbf{u}_m \in C([0,T]; W_m)$, $c_m \in C([0,T]; E_m)$ e

$$\rho_m \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)') \cap C([0,T];L^2(\Omega))$$

satisfazendo o seguinte sistema aproximado regularizado:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \int_\Omega \mu(c_m) D(\mathbf{u}_m) : D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = (\rho_m \mathcal{T}(\rho_m) + \phi_m \nabla c_m, \mathbf{v}), \tag{4.2.6}$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho_m}{\partial t}, e \right\rangle + b(\mathbf{u}_m; \rho_m, e) + (\rho_m, e) + \epsilon(\nabla \rho_m, \nabla e) = 0, \tag{4.2.7}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, z\right) + b(\mathbf{u}_m; c_m, z) + \int_\Omega M(c_m) \nabla \phi_m \cdot \nabla z = 0, \tag{4.2.8}$$

$$\phi_m = L_m(\Psi'(c_m)) - \Delta c_m, \tag{4.2.9}$$

$$(\mathbf{u}_m, c_m)(t=0) = (\mathbf{P}_m(\mathbf{u}_0), L_m(c_0)), \ \rho_m(0) = \rho_0, \tag{4.2.10}$$

para todo $\mathbf{v} \in W_m$, $e \in H^1(\Omega)$ e $z \in E_m$. Na equação (4.2.6), $D(\mathbf{u}_m) : D(\mathbf{v}) := tr(D(\mathbf{u}_m)^T D(\mathbf{v}))$.

Demonstração. A ideia é mostrar que o seguinte operador tem ponto fixo:

$$\tilde{\mathbf{u}} \to \rho \to (\mathbf{u}_m, c_m) \to \mathbf{u}_m,$$

onde $\tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T]; W_m)$, ρ é a solução de (4.2.7) com $\tilde{\mathbf{u}}$ no lugar de $\mathbf{u}_m$, $(\mathbf{u}_m, c_m)$ é a solução das equações aproximadas (4.2.6), (4.2.8) e (4.2.9), com ρ no lugar de ρ_m na equação (4.2.6) e $\mathbf{u}_m$ é a projeção de $(\mathbf{u}_m, c_m)$ na primeira variável. Essa construção nos dá um operador S_1 que leva $\tilde{\mathbf{u}}$ em $\mathbf{u}_m$. Vamos usar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.5.4) para provar que esse operador tem um ponto fixo. Mais precisamente, queremos provar que existe $\mathbf{u}_m \in C([0,T]; W_m)$ tal que $S_1 \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_m$.

O Teorema 1.5.4 será aplicado no operador S, tal que $S(\tilde{\mathbf{u}}, \lambda) = \mathbf{u}_m$, em que S é construído da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{u}}, \lambda) \in C([0,T]; W_m) \times [0,1] \to \rho \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)') \\ \to (\mathbf{u}_m, c_m) \in H^1(0,T; W_m \times E_m) \to \mathbf{u}_m \in H^1(0,T; W_m) \subset C([0,T], W_m),\end{aligned}$$

onde $\tilde{\mathbf{u}} \in C([0,T]; W_m)$ e pelo Teorema 1.6.1 existe um único $\rho \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)')$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t}, e \right\rangle + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\rho, e) + (\rho, e) + \epsilon\,(\nabla \rho, \nabla e) = 0, \\ \rho(0) = \rho_0,\end{aligned}$$

para todo $e \in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em $(0,T)$.

Tomando $\lambda \in [0,1]$, para cada $\rho \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)')$ fixado, existe $(\mathbf{u}_m, c_m) \in H^1(0,T_m; W_m \times E_m)$, tal que

$$\mathbf{u}_m(\cdot, t) = \sum_{i=1}^m u_i^m(t) \mathbf{w}_i, \quad c_m(\cdot, t) = \sum_{i=1}^m c_i^m(t) e_i, \tag{4.2.11}$$

onde u_i^m, $c_i^m \in H^1(0,T_m)$, e de modo que $(\mathbf{u}_m, c_m)$ é a única solução para o sistema

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \int_\Omega \mu(c_m) D(\mathbf{u}_m) : D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = (\lambda \rho \mathcal{T}(\rho) + \phi_m \nabla c_m, \mathbf{v}), \tag{4.2.12}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, z\right) + b(\mathbf{u}_m; c_m; z) + \int_\Omega M(c_m) \nabla \phi_m \cdot \nabla z = 0, \tag{4.2.13}$$

$$\phi_m = L_m(\Psi'(c_m)) - \Delta c_m, \tag{4.2.14}$$

$$(\mathbf{u}_m, c_m)(t=0) = \lambda(\mathbf{P}_m(\mathbf{u}_0), L_m(c_0)), \tag{4.2.15}$$

para todo $\mathbf{v} \in W_m$ e $z \in E_m$, onde $[0, T_m]$, $T_m > 0$ é o intervalo maximal de existência.

Podemos afirmar que essa solução existe e é única pelo fato destas equações formarem um sistema de EDO em que a parte não linear é uma função localmente Lipschitz.

Agora precisamos mostrar que a solução do sistema acima é válida em $[0, T]$, para todo $T > 0$. Por (4.2.12), tomando $\mathbf{u}_m$ como função teste, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \left\|\sqrt{\mu(c_m)}D(\mathbf{u}_m)\right\|_{L^2}^2 = \lambda\int_\Omega \rho\mathcal{T}(\rho)\mathbf{u}_m + \int_\Omega \phi_m \nabla c_m \cdot \mathbf{u}_m \tag{4.2.16}$$

Escolhendo ϕ_m como função teste em (4.2.13), segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right) + \int_\Omega M(c_m)|\nabla\phi_m|^2 = -\int_\Omega \phi_m\nabla c_m \cdot \mathbf{u}_m.$$

Somando essa última estimativa com (4.2.16), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right)\\ &+ 2\left\|\sqrt{\mu(c_m)}D(\mathbf{u}_m)\right\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega M(c_m)|\nabla\phi_m|^2 = \lambda\int_\Omega \rho\mathcal{T}(\rho)\mathbf{u}_m.\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, a estimativa (4.1.9) e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right) &+ 2\mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2\\ &\le C(\|\rho\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho)\|_{L^4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4})\\ &\le C\|\rho\|_{L^2}^4 + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Como $2\int_\Omega \Psi(c_m) \ge -C_1$ (veja (4.1.12)), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m) + C_1\right) + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2\\ &\le C\Big(\|\rho\|_{L^2}^4 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m) + C_1\Big).\end{aligned}$$

Dessa maneira, pela desigualdade de Gronwall, pela propriedade (4.1.14), e usando que a inclusão $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ é contínua, segue que

$$\begin{aligned}&\|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m(t)) + C_1\\ &\le C\left(\|\nabla c_m(0)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m(0)) + 1 + \int_0^{T_m}(\|\rho\|_{L^2}^4 + C_1)\right)\\ &\le C\left(\|\nabla c(0)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2}^2 + \|c_m(0)\|_{L^4}^4 + 1 + \int_0^{T_m}(\|\rho\|_{L^2}^4 + C_1)\right)\\ &\le C\left(\|c_0\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|c_0\|_{H^1}^4 + 1 + \int_0^{T_m}(\|\rho\|_{L^2}^4 + C_1)\right),\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_m]$.

Consequentemente, nossa solução é definida em $[0,T]$, para todo $T>0$, uma vez que, caso contrário $\lim_{t\to T_m}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}=\infty$, mas isso não é possível por causa da nossa última estimativa.

Como $H^1(0,T;W_m)\subset C([0,T];W_m)$, o operador

$$\begin{aligned} S: C([0,T];W_m)\times[0,1] &\to C([0,T],W_m)\\ (\tilde{\mathbf{u}},\lambda) &\to S(\tilde{\mathbf{u}},\lambda)=\mathbf{u}_m \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

está bem definido.

Devemos provar que S, como definido acima, satisfaz as hipóteses do Teorema 1.5.4. Temos que $S(\tilde{\mathbf{u}},0)=0$, para todo $\tilde{\mathbf{u}}\in C([0,T];W_m)$, já que a equação (4.2.12)-(4.2.15) com $\lambda=0$ é um sistema de EDO que tem apenas a solução trivial.

Vejamos a continuidade de S. Sejam $(\tilde{\mathbf{u}}_1,\lambda_1)$ e $(\tilde{\mathbf{u}}_2,\lambda_2)$ em $C([0,T];W_m)\times[0,1]$. Pelo Teorema 1.6.1, existem $\rho_1,\ \rho_2\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega)')$ satisfazendo

$$\left\langle \frac{\partial\rho_i}{\partial t},e\right\rangle+((\tilde{\mathbf{u}}_i\cdot\nabla)\rho_i,e)+(\rho_i,e)+\epsilon\,(\nabla\rho_i,\nabla e)=0,$$
$$\rho_i(0)=\rho_0 \text{ em } \Omega,$$

para todo $e\in H^1(\Omega)$ e no sentido das distribuições em $(0,T)$, $i=1,2$.

Seja $(\mathbf{u}_m^i,c_m^i)$ a solução do sistema (4.2.12)-(4.2.15), associada com (λ_i,ρ_i), $i=1,2$. Definimos $\mathbf{u}_m=\mathbf{u}_m^1-\mathbf{u}_m^2$, $\tilde{\mathbf{u}}=\tilde{\mathbf{u}}_1-\tilde{\mathbf{u}}_2$, $c_m=c_m^1-c_m^2$, $\phi_m=\phi_m^1-\phi_m^2$, $\rho=\rho_1-\rho_2$ e $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$. Pela equação (4.2.12) e usando (4.1.19), obtemos:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{u}_m^1}{\partial t},\mathbf{v}\right)+\int_\Omega\mu(c_m^1)D(\mathbf{u}_m^1):D(\mathbf{v})+b_u(\mathbf{u}_m^1;\mathbf{u}_m^1,\mathbf{v})=\lambda_1\int_\Omega\rho_1\mathcal{T}(\rho_1)\cdot\mathbf{v}-\int_\Omega\Delta c_m^1\nabla c_m^1\cdot\mathbf{v};$$
$$\left(\frac{\partial\mathbf{u}_m^2}{\partial t},\mathbf{v}\right)+\int_\Omega\mu(c_m^2)D(\mathbf{u}_m^2):D(\mathbf{v})+b_u(\mathbf{u}_m^2;\mathbf{u}_m^2,\mathbf{v})=\lambda_2\int_\Omega\rho_2\mathcal{T}(\rho_2)\cdot\mathbf{v}-\int_\Omega\Delta c_m^2\nabla c_m^2\cdot\mathbf{v}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e tomando $\mathbf{u}_m$ como função teste, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2&+\int_\Omega\mu(c_m^1)D(\mathbf{u}_m):D(\mathbf{u}_m)\\ &=\lambda_1\int_\Omega\rho\mathcal{T}(\rho_1)\cdot\mathbf{u}_m+\lambda\int_\Omega\rho_2\mathcal{T}(\rho_1)\cdot\mathbf{u}_m+\lambda_2\int_\Omega\rho_2\mathcal{T}(\rho)\cdot\mathbf{u}_m\\ &-\int_\Omega\Delta c_m^1\nabla c_m\cdot\mathbf{u}_m-\int_\Omega\Delta c_m\nabla c_m^2\cdot\mathbf{u}_m\\ &-b_u(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m^2,\mathbf{u}_m)-\int_\Omega(\mu(c_m^1)-\mu(c_m^2))D(\mathbf{u}_m^2):D(\mathbf{u}_m)\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Ademais, usando a equação (4.2.13), obtemos que

$$\left(\frac{\partial c_m^1}{\partial t},z\right)+b(\mathbf{u}_m^1;c_m^1,z)+\int_\Omega M(c_m^1)\nabla\phi_m^1\cdot\nabla z=0,$$
$$-\left(\frac{\partial c_m^2}{\partial t},z\right)-b(\mathbf{u}_m^2;c_m^2;z)-\int_\Omega M(c_m^2)\nabla\phi_m^2\cdot\nabla z=0.$$

Somando essas equações e tomando $-\Delta c_m$ como função teste, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_m\|_{L^2}^2+\int_\Omega M(c_m^1)|\nabla\Delta c_m|^2 &= b(\mathbf{u}_m;c_m^1,\Delta c_m)+b(\mathbf{u}_m^2;c_m,\Delta c_m)\\ &+\int_\Omega M(c_m^1)(\Psi''(c_m^1)-\Psi''(c_m^2))\nabla c_m^1\cdot\nabla\Delta c_m\\ &+\int_\Omega M(c_m^1)\Psi''(c_m^2)\nabla c_m\cdot\nabla\Delta c_m\\ &+\int_\Omega (M(c_m^1)-M(c_m^2))\Psi''(c_m^2)\nabla c_m^2\cdot\nabla\Delta c_m\\ &-\int_\Omega (M(c_m^1)-M(c_m^2))\nabla\Delta c_m^2\cdot\nabla\Delta c_m.\end{aligned}\tag{4.2.20}$$

As equações (4.2.19) e (4.2.20) implicam que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2+\|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right)+2\mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2+2M_0\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2\\ &\le\lambda_1\int_\Omega|\rho||\mathcal{T}(\rho_1)||\mathbf{u}_m|+\lambda\int_\Omega|\rho_2||\mathcal{T}(\rho_1)||\mathbf{u}_m|+\lambda_2\int_\Omega|\rho_2||\mathcal{T}(\rho)||\mathbf{u}_m|\\ &+\int_\Omega|\Delta c_m^1||\nabla c_m||\mathbf{u}_m|+\int_\Omega|\Delta c_m||\nabla c_m^2||\mathbf{u}_m|+|b_u(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m^2,\mathbf{u}_m)|\\ &+\int_\Omega|(\mu(c_m^1)-\mu(c_m^2))||D(\mathbf{u}_m^2)||D(\mathbf{u}_m)|+|b(\mathbf{u}_m;c_m^1,\Delta c_m)|\\ &+|b(\mathbf{u}_m^2;c_m,\Delta c_m)|+\int_\Omega|M(c_m^1)||\Psi''(c_m^1)-\Psi''(c_m^2)||\nabla c_m^1||\nabla\Delta c_m|\\ &+\int_\Omega|M(c_m^1)||\Psi''(c_m^2)||\nabla c_m||\nabla\Delta c_m|\\ &+\int_\Omega|M(c_m^1)-M(c_m^2)||\Psi''(c_m^2)||\nabla c_m^2||\nabla\Delta c_m|\\ &+\int_\Omega|M(c_m^1)-M(c_m^2)||\nabla\Delta c_m^2||\nabla\Delta c_m|=\sum_{i=1}^{13}J_i,\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

onde os J_i, $i=1,\cdots,13$, são definidos de acordo com a ordem de aparição em (4.2.21).

O próximo passo é estimar termo a termo do lado direito dessa última equação. Aqui C denota uma constante genérica que pode depender de m, ρ_0, $|\Omega|$.

Pela desigualdade de Hölder, pela hipótese (4.1.9), usando a imersão $H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega)$ e o fato que $\rho_i\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $i=1,2$, obtemos que

$$\begin{aligned}J_1&\le C\|\rho\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_1)\|_{L^4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\le C\|\rho\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_1)\|_{H^1}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}\le C\|\rho\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}\\ J_3&\le C\|\rho_2\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho)\|_{L^4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\le C\|\rho_2\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho)\|_{H^1}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}\le C\|\rho\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando novamente que $\rho_i\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $i=1,2$, segue que

$$J_2\le C|\lambda|\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando que $\|\Delta c_m^1\|_{L^\infty}\le C$, $\|\nabla c_m^2\|_{L^\infty}\le C$ (lembrando que aqui C pode depender de m) e que $\|\Delta c_m\|_{L^2}\le C\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}$, vemos que

$$\begin{aligned}J_4&\le C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}\\ J_5&\le C\|\Delta c_m\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}\le C\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Como $\|\nabla \mathbf{u}_m^2\|_{L^\infty} \leq C$, existe uma constante $C > 0$ (que depende de m), tal que

$$J_6 \leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2.$$

Usando que $\|D(\mathbf{u}_m^2)\|_{L^\infty} \leq C$, μ é uma função Lipschitz e que

$$\int_\Omega c_m = \int_\Omega c_m^1 - \int_\Omega c_m^2 = \lambda_1 \int_\Omega L_m c_0 - \lambda_2 \int_\Omega L_m c_0 = \lambda \int_\Omega L_m c_0,$$

segue que

$$\begin{aligned} J_7 &\leq \|D(\mathbf{u}_m^2)\|_{L^\infty}\|\mu'\|_{L^\infty}\|c_m\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2} \\ &\leq C\left(\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|(c_m)_\Omega\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}\right) \\ &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2} + |\lambda|\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que $\|c_m^1\|_{L^\infty} \leq C$, $\|\mathbf{u}_m^2\|_{L^\infty} \leq C$ e usando novamente que $\|\Delta c_m\|_{L^2} \leq \|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} J_8 &\leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2} \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}; \\ J_9 &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2} \leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}. \end{aligned}$$

A próxima estimativa é consequência do fato que M é uma função limitada, que Ψ'' é uma função Lipschitz e que $\|\nabla c_m^1\|_{L^\infty} \leq C$,

$$J_{10} \leq C\|c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} \leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} + |\lambda|\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\right).$$

Usando (4.1.11) e (4.1.14), o fato que $\|c_m^2\|_{L^\infty} \leq C$, obtemos

$$J_{11} \leq C\|M\|_{L^\infty}\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}.$$

Aplicando (4.1.11), a estimativa (4.1.14) e usando que $\|c_m^i\|_{L^\infty} \leq C$, $\|\nabla c_m^i\|_{L^\infty} \leq C$ e $\|\nabla\Delta c_m^i\|_{L^\infty} \leq C$, $i = 1, 2$, podemos obter as duas próximas estimativas:

$$\begin{aligned} J_{12} &\leq C\|M\|_{L^\infty}\|c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} \leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} + |\lambda|\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\right); \\ J_{13} &\leq C\|M\|_{L^\infty}\|c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} \leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} + |\lambda|\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}\right). \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Young, segue que

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leq C\|\rho\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2}\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2;\\
J_2 &\leq C\left(|\lambda|^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\right);\\
J_3 &\leq C\|\rho\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2}\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2;\\
J_4 &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\right);\\
J_5 &\leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_6 &\leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2;\\
J_7 &\leq C\left(|\lambda|^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\right);\\
J_8 &\leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_9 &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_{10} &\leq C\left(|\lambda|^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right) + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_{11} &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_{12} &\leq C\left(|\lambda|^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right) + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2;\\
J_{13} &\leq C\left(|\lambda|^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right) + \frac{M_0}{7}\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Usando as estimativas para cada J_i em (4.2.21), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\right) &+ \mu_0\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + M_0\|\nabla \Delta c_m\|_{L^2}^2\\
&\leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\rho\|_{L^2}^2 + |\lambda|^2\right).
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall segue que

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 &\leq e^{CT}\left(\|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\|\rho\|_{L^2}^2 + |\lambda|^2\right)\right)\\
&\leq e^{CT}\left(|\lambda|^2\|\mathbf{P}_m\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + |\lambda|^2\|\nabla L_m c_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\|\rho\|_{L^2}^2 + |\lambda|^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

Como $\|\mathbf{P}_m\mathbf{u}_0\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$, $\|\nabla L_m c_0\|_{L^2} \leq C\|\nabla c_0\|_{L^2}$ e $(\mathbf{u}_0, c_0) \in H \times H^1(\Omega)$, obtemos que

$$
\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(|\lambda|^2 + \|\rho\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\right)
$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $\tilde{\mathbf{u}}_i$, $i = 1, 2$.

Usando o Corolário 1.6.2, obtemos que

$$
\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(|\lambda|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}^2\right),
$$

com $C > 0$ sendo uma constante independente de $\tilde{\mathbf{u}}_1$ e $\tilde{\mathbf{u}}_2$.

Sendo assim,

$$\|\mathbf{u}_m\|_{C([0,T];W_m)} \leq C\left(|\lambda|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{C([0,T];W_m)}\right)^{1/2} = C\|(\tilde{\mathbf{u}},\lambda)\|_{C([0,T];W_m)\times[0,1]}.$$

Ou seja, S é um operador uniformemente contínuo.

Agora provemos que S é um operador compacto. Seja $(\tilde{\mathbf{u}}_n,\lambda_n)$ uma sequência limitada em $C([0,T];W_m)\times[0,1]$ e ρ_n a solução fraca associada com $\tilde{\mathbf{u}}_n$ (veja o Teorema 1.6.1).

Seja $(\mathbf{u}_n, c_n)$ a solução do sistema (4.2.12)-(4.2.15) associado com (λ_n,ρ_n) (por uma questão de simplicidade omitimos o índice m). Então, usando (4.1.18), segue que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t},\mathbf{v}\right) + \int_\Omega \mu(c_n)D(\mathbf{u}_n):D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_n;\mathbf{u}_n,\mathbf{v}) = \left(\lambda_n\rho_n\mathcal{T}(\rho_n) - c_n\nabla\phi_n,\mathbf{v}\right). \quad (4.2.22)$$

Procedendo como em (4.2.17), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_n\|^2_{L^2} + \|\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2\int_\Omega \Psi(c_n)\right) + 2\mu_0\|\nabla\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2M_0\|\nabla\phi_n\|^2_{L^2} = \lambda_n\int_\Omega \rho_n\mathcal{T}(\rho_n)\mathbf{u}_n.$$

Então, usando a estimativa (1.6.12) e a hipótese (4.1.9) temos que existe uma constate $C>0$ independente de n, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_n\|^2_{L^2} + \|\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2\int_\Omega \Psi(c_n)\right) &+ 2\mu_0\|\nabla\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2M_0\|\nabla\phi_n\|^2_{L^2}\\ &\leq C|\lambda_n|\|\rho_n\|_{L^2}\|\mathcal{T}\rho_n\|_{L^4}\|\mathbf{u}_n\|_{L^4}\\ &\leq C|\lambda_n|\|\rho_n\|^2_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}\\ &\leq C|\lambda_n|^2 + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_n\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_n\|^2_{L^2} + \|\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2\int_\Omega \Psi(c_n)\right) + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_n\|^2_{L^2} + 2M_0\|\nabla\phi_n\|^2_{L^2} \leq C|\lambda_n|^2.$$

Integrando sobre $(0,T)$ e usando (4.1.14), segue que

$$\begin{aligned}&\|\nabla c_n(t)\|^2_{L^2} + \|\mathbf{u}_n(t)\|^2_{L^2} + 2\int_\Omega \Psi(c_n)\\ &\qquad\leq C\left(|\lambda_n|^2\|c_0\|^2_{H^1} + |\lambda_n|^2\|\mathbf{u}_0\|^2_{L^2} + |\lambda_n|^4\|c_0\|^4_{H^1} + 1 + T|\lambda_n|^2\right),\end{aligned}$$

onde a constante C é independente de n.

Mas, veja que

$$\|c_n\|_{H^1} \leq \|c_n - (c_n)_\Omega\|_{H^1} + \|(c_n)_\Omega\|_{H^1} \leq \|\nabla c_n\|_{L^2} + \|(c_n)_\Omega\|_{H^1},$$

e como $\int_\Omega c_n = \int_\Omega L_m c_0$

$$\begin{aligned}\|(c_n)_\Omega\|^2_{H^1} = \|\nabla(c_n)_\Omega\|^2_{L^2} + \|(c_n)_\Omega\|^2_{L^2} &= \frac{1}{|\Omega|}\left|\int_\Omega c_n\right|^2\\ &= \frac{1}{|\Omega|}\left|\int_\Omega L_m c_0\right|^2 \leq C\|c_0\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

com C independente de n.

Desse modo, existe uma constante $C > 0$ independente de n, tal que

$$\begin{aligned}
\|c_n\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C; \\
\|\mathbf{u}_n\|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq C; \\
\|\nabla\phi_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C; \\
\|\mathbf{u}_n\|_{L^2(0,T;V)} &\leq C.
\end{aligned}$$

Então, escolhendo $\partial\mathbf{u}_n/\partial t$ como função teste em (4.2.22), temos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\left(\|D(\mathbf{u}_n)\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_n\|_{L^\infty}\|\mathbf{u}_n\|_{L^2} + |\lambda_n|\|\rho_n\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_n)\|_{L^4} + \|\nabla\phi_n\|_{L^2}\|c_n\|_{H^1}\right)\left\|\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}\right\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Como a constante $C > 0$ pode depender de m, e usando a ortogonalidade de $(\mathbf{w}_i)_{1\leq i\leq m}$ em H e V, obtemos que

$$\left\|\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}\right\|_{W_m}^2 = \left\|\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}^2 + 1 + |\lambda_n|^2 + \|\nabla\phi_n\|_{L^2}^2\right).$$

onde a constante $C > 0$ não depende de n. Dessa forma,

$$\left\|\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;W_m)} \leq C.$$

Então, provamos que $\mathbf{u}_n$ é uma sequência limitada em $H^1(0,T;W_m)$. Como a inclusão $H^1(0,T;W_m) \subset C([0,T];W_m)$ é compacta pelo teorema de Arzelà-Ascoli, concluímos que S é um operador compacto.

Finalmente, mostraremos que se $(\mathbf{u}_m,\lambda) \in C([0,T];W_m)\times[0,1]$, é tal que $S(\mathbf{u}_m,\lambda) = \mathbf{u}_m$, então

$$\|\mathbf{u}_m\|_{C([0,T];W_m)} \leq C$$

onde $C > 0$ é independente de $(\mathbf{u}_m,\lambda)$. De fato, como $S(\mathbf{u}_m,\lambda) = \mathbf{u}_m$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\mathbf{u}_m}{\partial t},\mathbf{v}\right) + \int_\Omega \mu(c_m)D(\mathbf{u}_m) : D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{v}) \\
= \left(\lambda\rho_m\mathcal{T}(\rho_m) + \phi_m\nabla c_m,\mathbf{v}\right),
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

$$\left\langle\frac{\partial\rho_m}{\partial t},e\right\rangle + b(\mathbf{u}_m;\rho_m,e) + (\rho_m,e) + \epsilon(\nabla\rho_m,\nabla e) = 0, \tag{4.2.24}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t},z\right) + b(\mathbf{u}_m;c_m;z) + \int_\Omega M(c_m)\nabla\phi_m\cdot\nabla z = 0, \tag{4.2.25}$$

$$\phi_m = L_m(\Psi'(c_m)) - \Delta c_m, \tag{4.2.26}$$

$$(\mathbf{u}_m,c_m)(t=0) = \lambda(\mathbf{P}_m(\mathbf{u}_0),L_m(c_0)),\ \rho_m(0) = \rho_0, \tag{4.2.27}$$

para todo $\mathbf{v} \in W_m$, $e \in H^1(\Omega)$ e $z \in E_m$.

Adicionalmente, procedemos como em (4.2.17) para obter

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right) + 2\left\|\sqrt{\mu(c_m)}D(\mathbf{u}_m)\right\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega M(c_m)|\nabla\phi_m|^2$$
$$= \lambda\int_\Omega \rho_m\mathcal{T}(\rho_m)\cdot\mathbf{u}_m.$$

Então, usando as desigualdades de Hölder e de Sobolev, a estimativa (4.1.9), e que $\lambda \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right) &+ 2\mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\|\rho_m\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_m)\|_{L^4}\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}) \\ &\leq C(\|\rho_m\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_m)\|_{H^1}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}) \\ &\leq C\|\rho_m\|_{L^2}^4 + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Então, a estimativa (1.6.12), que é independente de m e ϵ, implica que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m)\right) + \mu_0\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 \leq C. \tag{4.2.28}$$

Integrando sobre $(0,t)$, $t \in (0,T]$, e pela propriedade (4.1.14), segue que

$$\begin{aligned}&\|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m(t)) \\ &\quad\leq C\left(|\lambda|^2\|c_0\|_{H^1}^2 + |\lambda|^2\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + |\lambda|^4\|c_0\|_{L^4}^4 + 1\right).\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Uma vez que $c_0 \in H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ e $\lambda \leq 1$, essa última desigualdade nos dá que existe uma constante $C > 0$, independente de $\mathbf{u}_m$ e λ, tal que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{C([0,T];W_m)} \leq C. \tag{4.2.30}$$

Dessa forma, todas as hipóteses no Teorema 1.5.4 são satisfeitas. Assim,

$$S_1 = S(\cdot,1) : C([0,T];W_m) \to C([0,T];W_m)$$

tem um ponto fixo. □

4.2.2 Existência de solução fraca global para um problema regularizado

Um resultado intermediário, importante para provar o Teorema 4.2.1, é o seguinte lema, que nos dá a solução para o problema regularizado. Aqui a constante $C > 0$ nas estimativas sempre serão independentes de m, mas podem depender de ϵ.

Lema 4.2.3 (Solução fraca para o problema regularizado)**.** Suponha que $(\mathbf{u}_0, \rho_0, c_0) \in H \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Então, existem $\mathbf{u}_\epsilon$, ρ_ϵ, c_ϵ e ϕ_ϵ satisfazendo as seguintes regularidades

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\epsilon \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V),\\
&\rho_\epsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
&\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t}, \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t}\right) \in L^2(0,T;V') \times L^2(0,T;H^1(\Omega)') \text{ se } n=2,\\
&\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t}, \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t}\right) \in L^{4/3}(0,T;V') \times L^{4/3}(0,T;H^1(\Omega)') \text{ se } n=3,\\
&c_\epsilon \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)'),\\
&\phi_\epsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),
\end{aligned}$$

e as seguintes equações

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle + \int_\Omega \mu(c_\epsilon) D(\mathbf{u}_\epsilon) : D(\mathbf{v}) + b_u(\mathbf{u}_\epsilon; \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon) + \phi_\epsilon \nabla c_\epsilon) \cdot \mathbf{v}, \quad (4.2.31)$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t}, z \right\rangle + b(\mathbf{u}_\epsilon; \rho_\epsilon, z) + \int_\Omega \rho_\epsilon z + \epsilon \int_\Omega \nabla \rho_\epsilon \cdot \nabla z = 0 \quad (4.2.32)$$

$$\left\langle \frac{\partial c_\epsilon}{\partial t}, z \right\rangle + b(\mathbf{u}_\epsilon; c_\epsilon, z) + \int_\Omega M(c_\epsilon) \nabla \phi_\epsilon \cdot \nabla z = 0 \quad (4.2.33)$$

em $\mathcal{D}'((0,T))$, para todo $\mathbf{v} \in V$ e $z \in H^1(\Omega)$.

$$\phi_\epsilon = \Psi'(c_\epsilon) - \Delta c_\epsilon \text{ q.t.p. em } Q_T, \quad (4.2.34)$$

$$\mathbf{u}_\epsilon(0) = \mathbf{u}_0,\ c_\epsilon(0) = c_0,\ \rho_\epsilon(0) = \rho_0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (4.2.35)$$

Demonstração. Seja $(\mathbf{u}_m, \rho_m, c_m)$ uma sequência de soluções das equações (4.2.6)-(4.2.10), dada pela Proposição 4.2.2. Assim como foi feito para obter (1.6.10), temos que

$$\|\rho_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \epsilon \|\nabla \rho_m\|_{L^2(Q_T)} \le \|\rho_0\|_{L^2}. \quad (4.2.36)$$

Pelas equações (4.2.6)-(4.2.10), obtemos aqui exatamente a estimativa (4.2.28):

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m) \right) + \mu_0 \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0 \|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 \le C.$$

Integrando sobre $(0,t)$, $t \in (0,T]$, e usando (4.1.14), obtemos a estimativa (4.2.29) com $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla c_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \Psi(c_m(t)) + \mu_0 \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 2M_0 \int_0^t \|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 \\
\le C \left(\|c_0\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|c_0\|_{L^4}^4 + 1 \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma, usando novamente que $\|(c_m)_\Omega\|_{H^1(\Omega)} \le C\|c_0\|_{L^2(\Omega)}$ e lembrando que de (4.1.12), $2\int_\Omega \Psi(c_m(t)) + 2|\Omega| C_1 \ge 0$, segue que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \le C; \quad (4.2.37)$$

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \le C; \quad (4.2.38)$$

$$\|\nabla \phi_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C; \quad (4.2.39)$$

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;V)} \le C. \quad (4.2.40)$$

Observe ainda que, multiplicando (4.2.9) por $-\Delta c_m$, integrando sobre Ω e integrando por partes, obtemos que

$$\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \nabla\phi_m \nabla c_m + \int_\Omega \Psi'(c_m)\Delta c_m.$$

Assim, pela aplicação da desigualdade de Hölder segue que

$$\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla\phi_m\|_{L^2}\|\nabla c_m\|_{L^2} + \|\Psi'(c_m)\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2}.$$

Então, a desigualdade de Young implica que

$$\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2).$$

Usando (4.1.14) e a imersão de Sobolev ($H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq 6$), temos que

$$\begin{aligned}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 &\leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|c_m\|_{L^6}^6 + 1)\\ &\leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^6 + \|c_m\|_{H^1}^2 + 1).\end{aligned}$$

Isso implica que c_m é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$, ou seja

$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{4.2.41}$$

Multiplicando (4.2.9) por $\Delta^2 c_m$, integrando sobre Ω, e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \nabla\phi_m\nabla\Delta c_m + \int_\Omega \nabla\Psi'(c_m)\nabla\Delta c_m\\ &\leq \|\nabla\phi_m\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2} + \|\nabla\Psi'(c_m)\|_{L^2}\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Então, concluímos usando a desigualdade de Young que

$$\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2).$$

Agora, a hipótese (4.1.14), a desigualdade de Hölder com $p = 3$ e $q = 3/2$, a imersão de Sobolev ($H^1 \subset L^6$) e a estimativa (4.2.37) implicam que

$$\begin{aligned}\|\nabla\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |\Psi''(c_m)\nabla c_m|^2 \leq C\int_\Omega (|c_m|^4+1)|\nabla c_m|^2\\ &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |c_m|^4|\nabla c_m|^2\right)\\ &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \||c_m|^4\|_{L^{3/2}}\||\nabla c_m|^2\|_{L^3}\right)\\ &= C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|c_m\|_{L^6}^4\|\nabla c_m\|_{L^6}^2\right)\\ &\leq C\left(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|c_m\|_{H^1}^4\|\nabla c_m\|_{H^1}^2\right)\\ &\leq C\left(1 + \|c_m\|_{H^2}^2\right).\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

Dessa forma,

$$\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|c_m\|_{H^2}^2 + 1).$$

Então, integrando sobre $[0,T]$ e usando a estimativa (4.2.39) e (4.2.41), obtemos que

$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leq C. \tag{4.2.43}$$

Agora queremos estimar ϕ_m em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Veja que, usando (4.2.9), o teorema do divergente, e o fato que $\frac{\partial c_m}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, podemos ver que

$$\int_\Omega \phi_m = \int L_m(\Psi'(c_m)) - \int \Delta c_m = \int_\Omega L_m(\Psi'(c_m)) + \int_{\partial\Omega} \nabla c_m \cdot \mathbf{n} = \int_\Omega L_m(\Psi'(c_m)).$$

Então, a hipótese (4.1.14) e a imersão de Sobolev ($H^1 \subset L^6$) implicam

$$\begin{aligned}(\phi_m)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi_m \leq C \int_\Omega |L_m(\Psi'(c_m))| \leq C\|L_m \Psi'(c_m)\|_{L^2} \\ \leq C\|\Psi'(c_m)\|_{L^2} \leq C(\|c_m\|_{L^6}^3 + 1) \leq C(\|c_m\|_{H^1}^3 + 1) \leq C,\end{aligned}$$

onde a estimativa (4.2.37) foi usada. Aplicando a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (1.3.2), obtemos

$$\begin{aligned}\|\phi_m\|_{H^1}^2 &= \|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\phi_m\|_{L^2}^2 = \|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\phi_m + (\phi_m)_\Omega - (\phi_m)_\Omega\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\phi_m - (\phi_m)_\Omega\|_{L^2}^2 + \|(\phi_m)_\Omega\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + 1).\end{aligned}$$

Integrando sobre $[0,T]$ e usando (4.2.39), segue que

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \tag{4.2.44}$$

Por causa da não linearidade, as estimativas acima não são suficientes para tomar o limite nas equações (4.2.6)-(4.2.9). Por isso, estimamos as derivadas temporais de $\mathbf{u}_m$, ρ_m e c_m. Por (4.2.6), para todo $\mathbf{v} \in W_m$ temos que

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{v}\right)\right| \\ &\leq C\left((\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}^2)\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2} + (\|\rho_m\|_{L^2}\|\mathcal{T}(\rho_m)\|_{L^4} + \|\phi_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^2})\|\mathbf{v}\|_{L^4}\right) \\ &\leq C\left(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}^2 + \|\rho_m\|_{L^2}^2 + \|\phi_m\|_{H^1}\|c_m\|_{H^1}\right)\|\mathbf{v}\|_{H^1},\end{aligned}$$

onde a imersão de Sobolev ($H^1 \subset L^4$) e a estimativa (4.1.9) foram usadas. Usando as estimativas (4.2.37) e (1.6.12), segue que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{V'} \leq C\left(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}^2 + \|\phi_m\|_{H^1} + 1\right).$$

Pela equação (4.2.7), para todo $e \in H^1(\Omega)$,

$$\left\langle \frac{\partial \rho_m}{\partial t}, e\right\rangle \leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\rho_m\|_{L^4} + \|\rho_m\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right)\|\nabla e\|_{L^2}.$$

Por (4.2.36), temos que

$$\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} \leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\rho_m\|_{L^4} + 1 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: neste caso, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^2$ ($\|f\|_{L^4} \leq C\|f\|_{L^2}^{1/2}\|f\|_{H^1}^{1/2}$) e usando a estimativa (4.2.38), obtemos

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{V'} \leq C\left(\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\phi_m\|_{H^1} + 1\right).$$

Isso implica que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;V')} \leq C. \tag{4.2.45}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{1/2}\|\rho_m\|_{H^1}^{1/2} + 1 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right)\\ &\leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\rho_m\|_{H^1} + 1 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right).\end{aligned}$$

Daí, usando as estimativas (4.2.40) e (4.2.36), segue que

$$\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C. \tag{4.2.46}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: já neste caso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em $\mathbb{R}^3$ ($\|f\|_{L^4} \leq C\|f\|_{L^2}^{1/4}\|f\|_{H^1}^{3/4}$) e pela estimativa (4.2.38), segue que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{V'} \leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{3/2} + \|\phi_m\|_{H^1} + 1\right).$$

Dessa foram,

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^{4/3}(0,T;V')} \leq C. \tag{4.2.47}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} &\leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{3/4}\|\rho_m\|_{H^1}^{3/4} + 1 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right)\\ &\leq C\left(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{3/2} + \|\rho_m\|_{H^1}^{3/2} + 1 + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\right).\end{aligned}$$

Daí, usando as estimativas (4.2.40) e (4.2.36), segue que

$$\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|_{L^{4/3}(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C. \tag{4.2.48}$$

Agora, a equação (4.2.8) implica que

$$\left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}, z\right\rangle \leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|c_m\|_{L^4} + \|\nabla\phi_m\|_{L^2}\right)\|\nabla z\|_{L^2}.$$

A imersão de Sobolev ($H^1 \subset L^4$) e as estimativas (4.2.36), (1.6.12) e (4.2.37) nos dão que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{(H^1)'} \leq C\left(\|\mathbf{u}_m\|_{H^1} + \|\nabla\phi_m\|_{L^2}\right).$$

Então, podemos usar as estimativas (1.6.10) e (4.2.40) para mostrar que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C. \tag{4.2.49}$$

As estimativas acima nos dão as seguintes convergências:

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V), \tag{4.2.50}$$
$$\rho_m \rightharpoonup \rho_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{4.2.51}$$
$$c_m \rightharpoonup c_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^3(\Omega)), \tag{4.2.52}$$
$$\phi_m \rightharpoonup \phi_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{4.2.53}$$
$$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H), \tag{4.2.54}$$
$$\rho_m \to \rho_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.2.55}$$
$$c_m \to c_\epsilon \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{4.2.56}$$

onde as convergências fracas seguem diretamente das estimativas, e as convergências fortes são consequências das estimativas juto com o teorema de Aubin-Lions-Simon (veja o Teorema (1.3.12)).

Essas últimas convergências nos permitem tomar o limite quando $m \to \infty$ nas equações (4.2.6)-(4.2.10), nos dando as equações (4.2.31)-(4.2.35). □

4.2.3 Demonstração do teorema de solução faca (Teorema 4.2.1)

Para concluir a demonstração do Teorema 4.2.1 é suficiente mostrar que as seguintes convergências são satisfeitas:

$$\mathbf{u}_\epsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V); \tag{4.2.57}$$
$$\rho_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{4.2.58}$$
$$c_\epsilon \rightharpoonup c \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^3(\Omega)); \tag{4.2.59}$$
$$\phi_\epsilon \rightharpoonup \phi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)); \tag{4.2.60}$$
$$\mathbf{u}_\epsilon \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H); \tag{4.2.61}$$
$$\epsilon\nabla\rho_\epsilon \to 0 \text{ em } L^2(Q_T); \tag{4.2.62}$$
$$c_\epsilon \to c \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^2(\Omega)); \tag{4.2.63}$$
$$\rho_\epsilon \to \rho \quad \text{em} \quad C(0,T;(H^1(\Omega))'). \tag{4.2.64}$$

Algumas dessas convergências são obtidas aplicando-se o princípio da semicontinuidade inferior das normas nas estimativas independentes de ϵ, dadas na subseção anterior. Entretanto, algumas das estimativas não são independentes de ϵ, por isso precisaremos de novas estimativas satisfazendo essa condição. Além disso, aqui não temos que ρ_ϵ converge fortemente para ρ em $L^2(Q_T)$, de modo que precisamos justificar adequadamente a convergência do termo $\int_\Omega \rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon)\cdot\mathbf{v}$ para $\int_\Omega \rho\mathcal{T}(\rho)\cdot\mathbf{v}$, na formulação fraca da equação da velocidade (4.2.1), apenas utilizando as convergências mais fracas (4.2.58) e (4.2.64).

Note que as estimativas (4.2.36)-(4.2.40), (4.2.43)-(4.2.45), (4.2.47) e (4.2.49) são todas independentes de ϵ, de forma que pelo princípio da semicontinuidade inferior das normas, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{L^2(0,T;V)} &\le \liminf_{m\to\infty} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;V)} \le C,\\
\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\le \liminf_{m\to\infty} \|\rho_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C,\\
\epsilon\|\nabla\rho_\epsilon\|^2_{L^2(Q_T)} &\le \liminf_{m\to\infty} \epsilon\|\nabla\rho_m\|^2_{L^2(Q_T)} \le C,\\
\|c_\epsilon\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} &\le \liminf_{m\to\infty} \|c_m\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \le C,\\
\|\phi_\epsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\le \liminf_{m\to\infty} \|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C,\\
\left\|\frac{\partial c_\epsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} &\le \liminf_{m\to\infty} \left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \le C,\\
\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;V')} &\le \liminf_{m\to\infty} \left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;V')} \le C, \text{ se } n=2,\\
\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t}\right\|_{L^{4/3}(0,T;V')} &\le \liminf_{m\to\infty} \left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^{4/3}(0,T;V')} \le C, \text{ se } n=3,
\end{aligned}$$

onde $C>0$ é independente de ϵ.

Ademais, usando que $\epsilon\|\nabla\rho_\epsilon\|^2_{L^2} \le C$, segue que

$$\|\epsilon\nabla\rho_\epsilon\|^2_{L^2(Q_T)} = \epsilon^2\|\nabla\rho_\epsilon\|^2_{L^2(Q_T)} \le \epsilon C.$$

Com essas estimativas seguem as convergências (4.2.57)-(4.2.63). Resta provar a convergência (4.2.64). Pela equação (4.2.32) e usando a desigualdade de Hölder temos, para todo $z \in W^{1,3}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial t}, z\right\rangle &\le C(\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{L^6}\|\rho_\epsilon\|_{L^2}\|\nabla z\|_{L^3} + \|\rho_\epsilon\|_{L^2}\|z\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla\rho_\epsilon\|_{L^2}\|\nabla z\|_{L^2})\\
&\le C(\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{L^6}\|\rho_\epsilon\|_{L^2} + \|\rho_\epsilon\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla\rho_\epsilon\|_{L^2})\|z\|_{W^{1,3}}.
\end{aligned}$$

Usando a imersão $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, as estimativas independentes de ϵ acima, e o fato que $\epsilon < 1$, segue que

$$\left\|\frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;(W^{1,3})')} \le C(\|\mathbf{u}_\epsilon\|^2_{L^2(0,T;V)} + 1 + \epsilon^2\|\nabla\rho_\epsilon\|^2_{L^2(Q_T)}) \le C,$$

onde $C>0$ é independente de ϵ.

Agora, como $L^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^1(\Omega)' \hookrightarrow W^{1,3}(\Omega)'$, ρ_ϵ está limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $\frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial t}$ está limitada em $L^2(0,T;W^{1,3}(\Omega)')$, segue, pelo Teorema 1.3.12, que, a menos de uma subsequência,

$$\rho_\epsilon \to \rho \text{ fortemente em } C([0,T];H^1(\Omega)').$$

Agora podemos provar que

$$\int_\Omega \rho_\epsilon\mathcal{T}(\rho_\epsilon)\cdot\mathbf{v} \to \int_\Omega \rho\mathcal{T}(\rho)\cdot\mathbf{v}, \tag{4.2.65}$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

Como $\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C$, segue pela desigualdade de Hölder ($p=4/3,\ q=4$), pela imersão $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ e pela estimativa $\|\mathcal{T}(\rho)\|_{H^1} \le C\|\rho\|_{L^2}$ que

$$\|\rho_\epsilon\mathcal{T}(\rho_\epsilon)\|^{3/2}_{L^{3/2}(\Omega)} \le \|\rho_\epsilon\|^{3/2}_{L^3(\Omega)}\|\mathcal{T}(\rho_\epsilon)\|^{3/2}_{L^6(\Omega)} \le C\|\mathcal{T}(\rho_\epsilon)\|^{3/2}_{H^1(\Omega)} \le C\|\rho_\epsilon\|^{3/2}_{L^2(\Omega)} \le C.$$

Integrando sobre $(0,T)$, segue que

$$\|\rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon)\|_{L^p(0,T;L^{3/2}(\Omega))} \leq C, \ \forall\, p > 1,$$

e portanto existe $J \in L^p(0,T;L^{3/2}(\Omega))$ tal que $\rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon) \rightharpoonup J$ em $L^p(0,T;L^{3/2}(\Omega))$, $\forall\, p > 1$. Em particular, para todo $\mathbf{v} \in V \subset L^3(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v} \to \int_\Omega J \cdot \mathbf{v}.$$

Então basta mostrar que converge para $\rho\mathcal{T}(\rho)$ no sentido das distribuições e usar a unicidade do limite. Seja $\mathbf{v} \in C_c^\infty(Q_T)$, temos que mostrar que $\int_{Q_T} (\rho_\epsilon \mathcal{T}(\rho_\epsilon) - \rho\mathcal{T}(\rho)) \cdot \mathbf{v} \to 0$. Mas como

$$\int_{Q_T} \rho_\epsilon(\mathcal{T}(\rho_\epsilon) - \rho\mathcal{T}(\rho)) \cdot \mathbf{v} = \int_{Q_T} (\rho_\epsilon - \rho)\mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v} + \int_{Q_T} (\mathcal{T}(\rho_\epsilon) - \mathcal{T}(\rho))\rho \cdot \mathbf{v},$$

$\rho_\epsilon \rightharpoonup \rho$ em $L^2(Q_T)$, $\mathcal{T}$ é fracamente sequencialmente contínuo (veja a Observação 4.2.4 abaixo) e $\rho\mathbf{v} \in L^2(Q_T)$ temos que o segundo termo tende a zero. Então bata demonstrar que

$$\int_{Q_T} (\rho_\epsilon - \rho)\mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v} \to 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} (\rho_\epsilon - \rho)\mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v} &= \int_0^T \langle(\rho_\epsilon - \rho), \mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v}\rangle_{(H^1)',H^1} \\
&\leq \int_0^T \|\rho_\epsilon - \rho\|_{H^1(\Omega)'} \|\mathcal{T}(\rho_\epsilon) \cdot \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq T\|\mathbf{v}\|_{C^\infty(Q_T)} \|\rho_\epsilon - \rho\|_{C([0,T];H^1(\Omega)')} \|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Basta usar que $\rho_\epsilon \to \rho$ fortemente em $C([0,T];H^1(\Omega)')$. Pela unicidade de limite $J = \rho\mathcal{T}(\rho)$, portando vale a convergência (4.2.65).

Essas convergências nos permitem tomar o limite nas equações no Lema 4.2.3 e obter as equações no Teorema 4.2.1.

Observação 4.2.4. Todo operador linear contínuo é fracamente sequencialmente contínuo (Veja [11, Teorema 3.10]). Para ver isso no caso particular de $\mathcal{T} : L^2(Q_T) \to L^2(Q_T)$, sejam $\rho_\epsilon \rightharpoonup \rho$ fracamente em $L^2(Q_T)$ e $f \in L^2(Q_T)' = L^2(Q_T)$. Definimos $g(\rho) := f(\mathcal{T}(\rho))$. Então,

$$|g(\rho)| = |f(\mathcal{T}(\rho))| \leq \|f\|\|\mathcal{T}(\rho)\|_{L^2(Q_T)} \leq \|f\|\|\mathcal{T}\|\|\rho\|_{L^2(Q_T)}.$$

Portanto $g \in L^2(Q_T)'$ e $f(\mathcal{T}(\rho_\epsilon)) = g(\rho_\epsilon) \to g(\rho) = f(\mathcal{T}(\rho))$. Que é o mesmo que dizer que $\mathcal{T}(\rho_\epsilon) \rightharpoonup \mathcal{T}(\rho)$ fracamente em $L^2(Q_T)$.

4.3 Regularidade da solução

Nessa seção demonstramos alguns resultados de regularidade para a solução dada no Teorema 4.2.1. Aqui é necessário pedir que $\mathbf{u}_0 \in V$, $c_0 \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial c_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, como é sabido, para obtermos regularidade para o campo de velocidades, é necessário que a força externa na equação da velocidade esteja em $L^2(Q_T)$. Para que isso seja possível, pedimos que $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \geq 3$. Assim, pela estimativa (1.6.12), ρ_m satisfaz a seguinte estimativa

$$\|\rho_m\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq \|\rho_0\|_{L^p(\Omega)}, \; p \geq 3. \tag{4.3.1}$$

Daí já segue que $\rho \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$.

Então, usando essa regularidade para ρ, ou seja, que $\rho \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$, $p \geq 3$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder e obter que

$$\|\rho\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\rho\|^2_{L^p(\Omega)}\|\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^{2q}(\Omega)},$$

onde $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim, $2 \leq 2q \leq 6$, e então pela propriedade (4.1.9),

$$\|\rho\mathcal{T}(\rho)\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\int_0^T \|\mathcal{T}(\rho)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\rho\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

Além disso, como $p \geq 3$, pela equação (4.2.7), temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \rho_m}{\partial t}, z\right\rangle &\leq C(\|\mathbf{u}_m\|_{L^6}\|\rho_m\|_{L^3}\|\nabla z\|_{L^2} + \|\rho_m\|_{L^2}\|z\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2}\|\nabla z\|_{L^2})\\ &\leq C(\|\mathbf{u}_m\|_{L^6}\|\rho_m\|_{L^3} + \|\rho_m\|_{L^2} + \epsilon\|\nabla\rho_m\|_{L^2})\|z\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Usando a imersão $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, as estimativas (4.2.40) e (4.2.36) (que são independentes de m e ϵ), e o fato que $\epsilon < 1$, segue que

$$\left\|\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;(H^1)')} \leq C(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;V)} + 1 + \epsilon^2\|\nabla\rho_m\|^2_{L^2(Q_T)}) \leq C,$$

onde $C > 0$ é independente de m e ϵ. Ou seja, temos o seguinte resultado de regularidade para ρ.

Proposição 4.3.1. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ e $(\mathbf{u}_0, \rho_0, c_0) \in H \times L^p(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $p \geq 3$. Então,

$$\rho \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)'). \tag{4.3.2}$$

Observação 4.3.2. Note que a regularidade de ρ dada em (4.3.2) é independente da regularidade de $\mathbf{u}$ e c, isso é, essa regularidade vale para as soluções fracas, bastando para isso pedir que ρ_0 seja mais regular.

A ideia para obter mais regularidade para $\mathbf{u}$ e c é fazer estimativas mais regulares, independentes de m e ϵ, para a solução do problema aproximado regularizado (4.2.6)-(4.2.10), e então aplicar o princípio da semicontinuidade inferior. Isso nos dará as mesmas estimativas para o sistema regularizado.

Como é de se esperar, mostramos regularidade global apenas para o caso bidimensional, para o caso tridimensional temos um resultado de regularidade local.

Teorema 4.3.3 (Regularidade global)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $\mathbf{u}_0 \in V$, $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \geq 3$, $c_0 \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial c_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, $\mathbf{u}$, c e ρ dados pelo Teorema 4.2.1 satisfazem as seguintes regularidades:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\ &c \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\ &\rho \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)').\end{aligned}$$

para todo $T > 0$.

O teorema que estabelece regularidade local para o caso tridimensional é o seguinte:

Teorema 4.3.4 (Regularidade local)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que $\mathbf{u}_0 \in V$, $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $p \geq 3$, $c_0 \in H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial c_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, existe T_* suficientemente pequeno, tal que $\mathbf{u}$ e c dados pelo Teorema 4.2.1 satisfazem as seguintes regularidades:

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)),$$
$$c \in L^\infty(0, T_*; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_*; H^4(\Omega)) \cap H^1(0, T_*; L^2(\Omega)).$$

Estimativas independentes da dimensão

Seja $(\mathbf{u}_m, \rho_m, c_m)$ a solução aproximada-regularizada, dada pela Proposição 4.2.2. Apesar dassa solução depender de m e ϵ, por simplicidade, indexamos apenas em m. Mas, como já dissemos, queremos estimativas independentes de m e ϵ, de modo que aqui C representa uma constante genérica positiva independente de m e ϵ.

Multiplicando a equação (4.2.6) por λ_i (com $\mathbf{v} = \mathbf{w}_i$) e usando (4.1.19), segue que

$$\left(\nabla \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \nabla \mathbf{w}_i\right) - \int_\Omega \operatorname{div}(\mu(c_m)\nabla \mathbf{u}_m) \cdot A\mathbf{w}_i + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{w}_i)$$
$$= (\rho_m \mathcal{T}(\rho_m), A\mathbf{w}_i) - (\Delta c_m \nabla c_m, A\mathbf{w}_i).$$

Agora, multiplicando a equação acima por u_i^m e somando sobre $i = 1, \cdots, m$, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \mu(c_m)\Delta \mathbf{u}_m \cdot A\mathbf{u}_m + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)$$
$$= (\rho_m \mathcal{T}(\rho_m), A\mathbf{u}_m) - (\Delta c_m \nabla c_m, A\mathbf{u}_m) - \int_\Omega \mu'(c_m)\nabla c_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \cdot A\mathbf{u}_m.$$

Pelo Lema 1.3.11, como $\mathbf{u}_m \in (H^2(\Omega))^n \cap V$, existe $p_m \in H^1(\Omega)$, satisfazendo $\int_\Omega p_m = 0$, tal que

$$A\mathbf{u}_m = -\Delta \mathbf{u}_m + \nabla p_m.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \mu(c_m)|A\mathbf{u}_m|^2 + b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) = (\rho_m \mathcal{T}(\rho_m), A\mathbf{u}_m)$$
$$-(\Delta c_m \nabla c_m, A\mathbf{u}_m) - \int_\Omega \mu'(c_m)\nabla c_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \cdot A\mathbf{u}_m + \int_\Omega \mu(c_m)\nabla p_m \cdot A\mathbf{u}_m.$$

Agora, usando que μ' é Lipschitz, a desigualdade de Hölder, a estimativa (4.1.9) e (1.6.12), o fato que

$$\int_\Omega \mu(c_m)\nabla p_m \cdot A\mathbf{u}_m = -\int_\Omega \mu'(c_m) p_m \nabla c_m \cdot A\mathbf{u}_m,$$

e a desigualdade de Young, segue que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2} + \mu_0\|A\mathbf{u}_m\|^2_{L^2} \leq C\big(\|\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2} + \|\Delta c_m\|^2_{L^2}\|\nabla c_m\|^2_{L^\infty}$$
$$+\|\nabla c_m\|^2_{L^\infty}\|\nabla \mathbf{u}_m\|^2_{L^2} + \|p_m\|^2_{L^4}\|\nabla c_m\|^2_{L^4} + 1\big) \tag{4.3.3}$$
$$= \sum_{i=1}^{4} J_i + C.$$

Tomando $\Delta^2 c_m$ como função teste em (4.2.8) e integrando por partes, obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + b(\mathbf{u}_m; c_m, \Delta^2 c_m) - \int_\Omega \operatorname{div}(M(c_m)\nabla\phi_m)\Delta^2 c_m = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 &+ \int_\Omega M(c_m)|\Delta^2 c_m|^2 \\ &= -b(\mathbf{u}_m; c_m, \Delta^2 c_m) + \int_\Omega M'(c_m)\nabla c_m \cdot \nabla\phi_m \Delta^2 c_m + \int_\Omega M(c_m)\Delta\Psi'(c_m)\Delta^2 c_m.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, usando que M e M' são ambas funções limitadas e aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 &+ M_0\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\left(\|\mathbf{u}_m \cdot \nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m \cdot \nabla\phi_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2\right) = \sum_{i=1}^{3} K_i.\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Caso bidimensional: demonstração do Teorema 4.3.3

Primeiro vamos estimar c_m, para isso precisamos estimar os três termos K_i, $i = 1, \cdots, 3$, no lado direito de (4.3.4).

Usando a interpolação (1.4.12) e as estimativas (4.2.37) e (4.2.38), segue que

$$K_1 \leq \|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\|\nabla c_m\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + C.$$

Para estimar K_3 seguimos as ideias presentes em [10, Teorema 2.2]. Veja que

$$\Delta\Psi'(c_m) = \nabla \cdot (\Psi''(c_m)\nabla c_m) = \Psi'''(c_m)\nabla c_m \cdot \nabla c_m + \Psi''(c_m)\Delta c_m.$$

Então, usando (4.1.13), segue que

$$\begin{aligned}\|\Delta\Psi'(c_m)\|_{L^2} &\leq \|\Psi'''(c_m)|\nabla c_m|^2\|_{L^2} + \|\Psi''(c_m)\Delta c_m\|_{L^2} \\ &\leq \|\Psi'''(c_m)\|_{L^\infty}\|\nabla c_m\|_{L^4}^2 + \|\Psi''(c_m)\|_{L^\infty}\|\Delta c_m\|_{L^2} \\ &\leq C((\|c_m\|_{L^\infty} + 1)\|\nabla c_m\|_{L^4}^2 + (\|c_m\|_{L^\infty}^2 + 1)\|\Delta c_m\|_{L^2}) \\ &\leq C((\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty} + 1)\|\nabla c_m\|_{L^4}^2 + (\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty}^2 + 1)\|\Delta c_m\|_{L^2}),\end{aligned}$$

onde $(c_m)_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega c_m$ e nessa última desigualdade a constante C é reajustada usando que

$$\int_\Omega c_m = \int_\Omega L_m c_0,$$

isso é, $\|(c_m)_\Omega\|_{L^\infty} \leq C\int_\Omega |L_m c_0| \leq C\|c_0\|_{L^2}$.

Agora, seja $0 < \theta < 3$, como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $H^{1+\theta}(\Omega) \subset L^\infty$ e pela interpolação $H^{1+\theta} = [H^4, L^2]_{\frac{3-\theta}{4}}$ (note que $0 < (3-\theta)/4 < 3/4 < 1$, como exigido no Teorema 1.4.2 e veja (1.4.2)), segue que

$$\begin{aligned}\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty} &\leq C\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^{1+\theta}} \\ &\leq C\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^4}^{\frac{1+\theta}{4}}\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^2}^{\frac{3-\theta}{4}} \\ &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{\frac{3-\theta}{4}}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{1+\theta}{4}}.\end{aligned}$$

Usando que $H^2 = [H^4, H^1]_{\frac{2}{3}}$ temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta c_m\|_{L^2} &\leq \|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^2} \\
&\leq C\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^1}^{\frac{2}{3}} \|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^4}^{\frac{1}{3}} \\
&\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

Usando que $H^{1/2}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ continuamente e a interpolação $H^{1/2} = [H^3, L^2]_{1/6}$, segue que

$$
\|\nabla c_m\|_{L^4} \leq C\|\nabla c_m\|_{H^{1/2}} \leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{5/6} \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/6}.
$$

Por essas três últimas estimativas a usando que a sequência c_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta \Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 &\leq C\big((\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty}^2 + 1)\|\nabla c_m\|_{L^4}^4 + (\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty}^4 + 1)\|\Delta c_m\|_{L^2}^2\big) \\
&\leq C\big((\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{1+\theta}{2}} + 1)\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + (\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{(1+\theta)} + 1)\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\big).
\end{aligned}
$$

Escolhendo, em particular, $\theta = \frac{1}{4}$ (é suficiente qualquer $\theta < 1/3$), obtemos

$$
\|\Delta \Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 \leq C\big(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{23}{12}} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\big). \tag{4.3.5}
$$

Como todas as potências acima são menores que 2, segue, aplicando a desigualdade de Young, que

$$
K_3 \leq C + \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2.
$$

Para estimar K_2, usamos a desigualdade de Gagliardo-Nirenbeng no caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Isso nos dá que

$$
\begin{aligned}
K_2 &\leq \|\nabla c_m\|_{L^4}^2 \|\nabla \phi_m\|_{L^4}^2 = \|\nabla(c_m - (c_m)_\Omega)\|_{L^4}^2 \|\nabla(\phi_m - (\phi_m)_\Omega)\|_{L^4}^2 \\
&\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2}\|\nabla \phi_m\|_{L^2}\|\Delta \phi_m\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Agora, por (4.3.5), temos que

$$
\|\Delta \phi_m\|_{L^2} \leq \|\Delta \Psi'(c_m)\|_{L^2} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2} \leq C(1 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}) \tag{4.3.6}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
K_2 &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2}\|\nabla \phi_m\|_{L^2}(1 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\|\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2) + \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Então, substituindo K_1, K_2 e k_3 em (4.3.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{2}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \\
&\quad \leq C(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\|\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 + 1).
\end{aligned} \tag{4.3.7}
$$

Como (4.2.37) e (4.2.44) implicam que a função $f_m = \|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c_m\|_{L^2}^2\|\nabla \phi_m\|_{L^2}^2$ é integrável sobre $[0, T]$, podemos aplicar a desigualdade de Gronwall, de modo que obtemos

$$
\|\Delta c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \exp\Big(\int_0^T f_m\Big)\Big(\|\Delta c_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \Big(\|\nabla c_m\|_{L^2}^2 + C\Big)\Big).
$$

Assim, usando a estimativa (2.3.32), obtemos que

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq C, \tag{4.3.8}$$
$$\|c_m\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} \leq C, \tag{4.3.9}$$

onde a última estimativa segue integrando (4.3.7) sobre $[0,T]$, usando (4.3.8) e aplicando as estimativas elípticas e a estimativa (4.2.43).

Além dessas estimativas, por (4.3.6) e usando (4.3.9) junto com estimativa elíptica, temos que

$$\|\phi_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{4.3.10}$$

Agora vamos estimar os termos J_i, $i = 1, \cdots, 4$, do lado direito de (4.3.3). Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg no caso $\Omega \in \mathbb{R}^2$ e a desigualdade de Young, é fácil ver que

$$J_1 \leq \frac{\mu_0}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^4.$$

Usando a interpolação (1.4.12), a estimativa (4.3.8), e a desigualdade de Young, segue que

$$J_2 \leq C\|\Delta c_m\|_{L^2}^2\|\Delta^2 c_m\|_{L^2} \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + 1);$$
$$J_3 \leq C\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\|\Delta^2 c_m\|_{L^2} \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^4);$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, relembrando que $\int_\Omega p_m = 0$, e usando que $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, segue que

$$J_4 \leq C\|p_m\|_{L^2}\|\nabla p_m\|_{L^2}\|c_m\|_{H^2}^2.$$

Lembrando que c_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e usando o Lema 1.3.11, obtemos que para todo $\delta > 0$ existe C_δ, tal que

$$\begin{aligned} J_4 &\leq C(C_\delta\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \delta\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2})\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2} \\ &\leq CC_\delta\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2} + \delta C\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\mu_0}{8}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_\delta\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \delta C\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

onde foi aplicada a desigualdade de Young, C é independente de δ, e $\tilde{C}_\delta = CC_\delta$. Escolhendo $\delta = \mu_0/8C$, obtemos

$$J_4 \leq \frac{\mu_0}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2.$$

Substituindo J_i, $i = 1, \cdots, 4$, em (4.3.3), seque que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \leq C\big((\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 1)\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + 1\big) \tag{4.3.11}$$

Dessa forma, usando as estimativas (4.2.40) e (4.3.9) e aplicando a desigualdade de Gronwall , segue que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C. \tag{4.3.12}$$

Integrando (4.3.11) sobre $[0,T]$ e usando (4.3.12), usando que $\|\mathbf{u}_m\|_{H^2} \leq C\|A\mathbf{u}_m\|_V$, concluímos que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{4.3.13}$$

Multiplicando (4.2.8) por $\frac{dc_m^i}{dt}$ com $z = e_i$ e somando sobre $i = 1, 2, \cdots$, temo que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 &= -\int_\Omega \mathbf{u}_m \cdot \nabla c_m \frac{\partial c_m}{\partial t} - \int_\Omega M(c_m)\nabla\phi_m \cdot \nabla\frac{\partial c_m}{\partial t} \\
&= -\int_\Omega \mathbf{u}_m \cdot \nabla c_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \int_\Omega M'(c_m)\nabla c_m \cdot \nabla\phi_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \int_\Omega M(c_m)\Delta\phi_m \frac{\partial c_m}{\partial t} \\
&\leq C(\|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^4} + \|\nabla c_m\|_{L^4}\|\nabla\phi_m\|_{L^4} + \|\Delta\phi_m\|_{L^2})\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, usando a imersão $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ e as estimativas (4.3.10), (4.3.12) e (4.3.8), segue que

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)}^2 = \int_0^T \left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^T (\|\mathbf{u}_m\|_V^2\|c_m\|_{H^2}^2 + (\|c_m\|_{H^2}^2 + 1)\|\phi_m\|_{H^2}^2) \leq C.$$

Agora, multiplicando a equação (4.2.6) por $\frac{du_m^i}{dt}$ com $\mathbf{v} = \mathbf{w}_i$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \operatorname{div}(\mu(c_m)D(\mathbf{u}_m))\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} - b_u(\mathbf{u}_m; \mathbf{u}_m, \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}) + \Big(\rho_m\mathcal{T}(\rho_m) + \phi_m\nabla c_m, \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\Big) \\
&\leq \big(\|\nabla c_m\|_{L^4}\|D\mathbf{u}_m\|_{L^4} + \|\mathbf{u}_m\|_{H^2} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^4} \\
&\quad + \|\rho_m\|_{L^3}\|\mathcal{T}(\rho_m)\|_{L^6} + \|\phi_m\|_{L^4}\|\nabla c_m\|_{L^4}\big)\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, as imersões $H^1(\Omega) \subset L^k(\Omega)$, $4 \leq k \leq 6$, e as estimativas (4.3.1), (4.1.9), (4.3.12) e (4.3.8)

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 \leq \big(\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}^2 + 1 + \|\phi_m\|_{H^1}^2\big).$$

Integrando sobre $[0,T]$ e usando as estimativas (4.2.44) e (4.3.13), seque que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

Como a constante $C > 0$ em todas as estimativas acima é independente de m e ϵ, segue o resultado desejado.

Caso tridimensional: demonstração do Teorema 4.3.4

Como no caso bidimensional, mostraremos primeiro a regularidade para c. Usando a interpolação (1.4.10), a estimativa (4.2.38) e a desigualdade de Young, segue que

$$K_1 \leq C\|\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\|\Delta c_m\|_{L^2}^{3/2}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2} \leq \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + C\|\Delta c_m\|_{L^2}^2.$$

Agora vamos estimar K_3. Usando a desigualdade de Agmon (1.4.8) e a interpolação $H^2 = [H^4, H^1]_{\frac{2}{3}}$ (veja (1.4.2)), temos

$$\begin{aligned}\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty} &\leq C\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^1}^{1/2}\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^2}^{1/2} \\ &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{1/2}(\|\nabla c_m\|_{L^2}^{2/3}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/3})^{1/2} \\ &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{5/6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/6}.\end{aligned}$$

Como no caso bidimensional, por essa mesma interpolação, temos que

$$\|\Delta c_m\|_{L^2} \leq \|c_m - (c_m)_\Omega\|_{H^2} \leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}.$$

Usando que $H^{3/4}(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ continuamente e pela interpolação $H^{3/4} = [H^3, L^2]_{3/4}$, segue que

$$\begin{aligned}\|\nabla c_m\|_{L^4} &\leq C\|\nabla(c_m - (c_m)_\Omega)\|_{H^{3/4}} \\ &\leq C\|\nabla c_m\|_{L^2}^{3/4}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/4}.\end{aligned}$$

Por essas três últimas estimativas, e usando que c_m está uniformemente limitado em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ temos que

$$\begin{aligned}\|\Delta\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 &\leq C((\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty}^2 + 1)\|\nabla c_m\|_{L^4}^4 + (\|c_m - (c_m)_\Omega\|_{L^\infty}^4 + 1)\|\Delta c_m\|_{L^2}^2) \\ &\leq C((\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} + 1)\|\Delta^2 c_m\|_{L^2} + (\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + 1)\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{\frac{2}{3}})\end{aligned}$$

Então, reajustando a constante $C > 0$, temos

$$\|\Delta\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{2/3} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{4/3})$$

Aplicando a desigualdade de Young seque que,

$$K_3 \leq C + \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2.$$

Para estimar K_2, usamos a desigualdade de Agmon (1.4.10), então

$$K_2 \leq \|\nabla c_m\|_{L^\infty}^2\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 \leq C\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2$$

Agora, por (4.2.42) e usando que $\|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2}$, temos que

$$\|\nabla\phi_m\|_{L^2}^2 \leq C(\|\nabla\Psi'(c_m)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta c_m\|_{L^2}^2) \leq C(1 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}\|\Delta c_m\|_{L^2}).$$

Então,

$$K_2 \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2}^{3/2} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2}\|\Delta c_m\|_{L^2}^{7/2} + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{3/2}\|\Delta c_m\|_{L^2}^{5/2}).$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young, obtemos que

$$K_2 \leq \frac{M_0}{6}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + C\|\Delta c_m\|_{L^2}^{10}.$$

Substituindo K_1, K_2 e K_3 em (4.3.4) obtemos que

$$\frac{d}{dt}\|\Delta c_m\|_{L^2}^2 + \frac{M_0}{2}\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 \leq C\left(1 + \|\Delta c_m\|_{L^2}^{10}\right). \tag{4.3.14}$$

Integrando sobre $(0,t)$, com $t \in [0,T]$, temos que existe $C>0$, tal que

$$\|\Delta c_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|c_0\|_{H^2}^2 + 1 + \int_0^t \|\Delta c_m\|_{L^2}^{10} dt\right).$$

Então, aplicando o Teorema 1.2.3, temos que

$$\|\Delta c_m\|_{L^\infty(0,T_*^1;L^2(\Omega))} \leq C$$

para todo T_*^1 satisfazendo $4T_*^1 C^5(\|c_0\|_{H^2}^2 + 1)^4 < 1$. Ou seja,

$$\|c_m\|_{L^\infty(0,T_*^1;H^2(\Omega))} \leq C. \tag{4.3.15}$$

Integrando (4.3.14) sobre $[0,T_*^1]$, usando (4.3.15) e estimativas elípticas, obtemos que

$$\|c_m\|_{L^2(0,T_*^1;H^4(\Omega))} \leq C. \tag{4.3.16}$$

Agora vamos estimar os termos J_i, $i=1,\cdots 4$, em (4.3.3). Usando as desigualdades de Hölder, Gagliardo-Nirenberg no caso $\Omega \in \mathbb{R}^3$ e de Young, é fácil ver que

$$J_1 \leq \frac{\mu_0}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + C\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^6.$$

Usando a interpolação (1.4.10), a estimativa (4.3.15) e a desigualdade de Young, segue que

$$J_2 \leq C\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2} \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + 1),$$
$$J_3 \leq C\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^{1/2} \leq C(\|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{8/3}),$$

para todo $t \in [0,T_*^1]$.

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, lembrando que $\int_\Omega p_m = 0$, e aplicando a imersão $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, temos

$$J_4 \leq C\|p_m\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla p_m\|_{L^2}^{3/2}\|c_m\|_{H^2}^2.$$

Lembrando que c_m está uniformemente limitado em $L^\infty(0,T_*^1;H^2(\Omega))$ e usando o Lema 1.3.11, temos que para qualquer $\epsilon > 0$ existe C_ϵ, tal que

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq C(C_\epsilon\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2} + \epsilon\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2})^{1/2}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq C\sqrt{C_\epsilon}\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{1/2}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^{3/2} + \sqrt{\epsilon}C\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{\mu_0}{8}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_\epsilon\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + \sqrt{\epsilon}C\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade aplicamos a desigualdade de Young, C não depende de ϵ e $\tilde{C}_\epsilon$ é uma constante que depende de ϵ. Escolhendo $\sqrt{\epsilon} = \mu_0/8C$, segue que existe $C>0$, tal que

$$J_4 \leq \frac{\mu_0}{4}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + C\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2,$$

para todo $t \in [0,T_*^1]$.

Assim, substituindo $J_1, \cdots, J_4$ em (4.3.3), temos que vale a seguinte estimativa de energia no intervalo $(0, T_*^1)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 &+ \mu_0\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^6 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^{8/3} + \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^2 + 1) \\ &\leq C(\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^6 + \|\Delta^2 c_m\|_{L^2}^2 + 1)\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de m e ϵ.

Integrando essa última estimativa sobre $(0, t)$, $t \in (0, T_*^1]$, usando a estimativa (4.3.16), segue que

$$\|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C\Big(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + 1 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2}^6\Big)$$

Aplicando novamente o Teorema 1.2.3, segue que

$$\|\nabla \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 \leq C$$

para todo $t \in [0, T_*]$, para todo $T_* \in (0, T_*^1]$ satisfazendo $2C^3(\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + 1)^2 T_* < 1$. Ou seja,

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C. \tag{4.3.18}$$

Integrando (4.3.17) sobre $[0, T_*]$, usando (4.3.18) e a equivalência das normas $\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2}$ e $\|\mathbf{u}_m\|_{H^2}$, segue que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T_*;H^2(\Omega))} \leq C.$$

O fato que $\dfrac{\partial c_m}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}$ estão uniformemente limitadas em $L^2(0, T_*; L^2(\Omega))$ seque exatamente como no caso bidimensional.

Com essas estimativas são independentes de m e ϵ, segue o resultado de regularidade local dado no Teorema 4.3.4.

Referências

[1] H. Abels and D. Breit. Weak solutions for a non-newtonian diffuse interface model with different densities. *Nonlinearity*, 29, 09 2015.

[2] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press New York, 1975.

[3] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. A phase-field model of solidification with convection. *Phys. D*, 135:175–194, 2000.

[4] J. Appell and P. P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators*. Cambridge University Press, 1990.

[5] S. Astanin and L. Preziosi. *Multiphase Models of Tumour Growth*, pages 1–31. Birkhäuser Boston, Boston, 2008.

[6] C. Beckermann, H. J. Diepers, I. Steinbach, A. Karma, and X. Tong. Modeling Melt Convection in Phase-Field Simulations of Solidification. *J. Comput. Phys.*, 154:468–496, September 1999.

[7] J. L. Boldrini, E. A. Barros de Moraes, L. R. Chiarelli, F. G. Fumes, and M. L. Bittencourt. A non-isothermal thermodynamically consistent phase field framework for structural damage and fatigue. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 312:395 – 427, 2016. Phase Field Approaches to Fracture.

[8] J. L. Boldrini and G. Planas. Weak solutions of a phase-field model for phase change of an alloy with thermal properties. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 14(25):1177–1193, 2002.

[9] J. L. Boldrini and G. Planas. A tridimensional phase-field model with convection for phase change of an alloy. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(2):429–450, 2005.

[10] F. Boyer. Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation. *Asymptot. Anal.*, 20:pp 175–212, 1999.

[11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[12] G. Caginalp. An analysis of a phase field model of a free boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92(3):205–245, 1986.

[13] G. Caginalp and W. Xie. Phase-field and sharp-interface alloys models. *Phys. Rev. E*, 3(48):1897–1909, 1993.

[14] R. Dal Passo, A. Novick-Cohen, and L. Giacomelli. Existence for an Allen-Cahn/Cahn-Hilliard system with degenerate mobility. *Interfaces Free Bound.*, 1:199–226, 01 1999.

[15] P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[16] C. Eck, M. Fontelos, G. Grün, F. Klingbeil, and O. Vantzos. On a phase-field model for electrowetting. *Interfaces Free Bound.*, 11, 01 2009.

[17] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[18] L. C. F. Ferreira, G. Planas, and E. J. Villamizar-Roa. On the nonhomogeneous Navier-Stokes system with Navier friction boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.*, 45(4):2576–2595, 2013.

[19] G. B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.

[20] M. A. Fontelos, G. Grün, and S. Jörres. On a phase-field model for electrowetting and other electrokinetic phenomena. *SIAM J. Math. Analysis*, 43:527–563, 01 2011.

[21] A. Friedman. *Partial differential equations*. Dover Publications, Mineola, New York, 2008.

[22] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 2001.

[23] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Monographs and studies in mathematics 24. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

[24] J. Heulens, B. Blanpain, and N. Moelans. A phase field model for isothermal crystallization of oxide melts. *Acta Mater.*, 59(5):2156 – 2165, 2011.

[25] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, 1993.

[26] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1958.

[27] J. S. Langer. Models of pattern formation in first-order phase transitions. In G. Grinstein and G. Mazenko, editors, *Directions in condensed matter physics*, World Scientific Series on Directions in Condensed Matter Physics, pages 165–186. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1986.

[28] Ph. Laurençot. Weak solutions to a phase-field model with non-constant thermal conductivity. *Quart. Appl. Math.*, (4):739–760, 1997.

[29] G. R. Lázaro, I. Pagonabarraga, and A. Hernández-Machado. Elastic and dynamic properties of membrane phase-field models. *Eur. Phys. J. E*, 40(9):77, Sep 2017.

[30] H. Le Dret. *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Universitext, Elsevier, 2018.

[31] Y. Lin, P. Skjetne, and P. Carlson. A phase field model for multiphase electrohydrodynamic flow. *Int. J. Multiphas. Flow*, 45:1 – 11, 2012.

[32] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications:*. Number v. 181, pt. 1 - v. 183, pt. 1 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, 1972.

[33] S. A. Lorca and J. L. Boldrini. The initial value problem for a generalized boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 36(4):457–480, May 1999.

[34] P. Marín-Rubio and G. Planas. Global attractor and omega-limit sets structure for a phase-field model of thermal alloys. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 4(13):1676–1691, 2012.

[35] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, and A. M. Fink. *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, volume 53 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[36] G. Planas and J. L. Boldrini. Weak solutions of a phase-field model with convection for solidification of an alloy. *Commun. Appl. Anal.*, 8(4):503–532, 2004.

[37] G. Planas and J. L. Boldrini. A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy. *J. Math. Anal. Appl.*, 303(2):669–687, 2005.

[38] J. Rappaz and J. F. Scheid. Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of a binary alloy. *Math. Methods Appl. Sci.*, 23(6):491–513, 2000.

[39] A. Rasheed and A. Belmiloudi. An analysis of a phase-field model for isothermal binary alloy solidification with convection under the influence of magnetic field. *J. Math. Anal. Appl.*, 390(1):244–273, 2012.

[40] A. Rasheed and A. Belmiloudi. Mathematical modelling and numerical simulation of dendrite growth using phase-field method with a magnetic field effect. *Commun. Comput. Phys.*, 14(2):477–568, 2013.

[41] J. F. Scheid. Global solutions to a degenerate solutal phase-field model for the solidification of a binary alloy. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 5:207–217, 2004.

[42] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(O,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146(1):65–96, 1986.

[43] M. E. Taylor. *Partial differential equations I. Basic theory*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2011.

[44] R. Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, revised edition, 1979.

[45] X. Tong, C. Beckermann, A. Kerma, and Q. Li. Phase-field simulations of dendritic crystal growth in a forced flow. *Phys. Rev. E*, 63:061601–1–061601– 16, 2001.

[46] S.-L. Wang, R.F. Sekerka, A.A. Wheeler, B.T. Murray, S.R. Coriell, R.J. Braun, and G.B. McFadden. Thermodynamically-consistent phase-field models for solidification. *Phys. D*, 69(1-2):189–200, 1993.

[47] J.A. Warren and W.J. Boettinger. Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field method. *Acta Metall. Mater.*, 43(2):689–703, 1995.

[48] A. A. Wheeler, W. J. Boettinger, and G. B. McFadden. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys. *Phys. Rev. A*, 45:7424–7439, May 1992.

[49] A. A. Wheeler, W. J. Boettinger, and G. B. McFadden. Phase-field model of solute trapping during solidification. *Phys. Rev. E*, 47:1893–1909, Mar 1993.

[50] Q. Yang, B. Q. Li, and Y. Ding. 3d phase field modeling of electrohydrodynamic multiphase flows. *Int. J. Multiphas. Flow*, 57:1 – 9, 2013.