



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ELIANA FREDDI

UM ESTUDO SOBRE PROGRAMAÇÃO LINEAR E
APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

CAMPINAS

2019

ELIANA FREDDI

UM ESTUDO SOBRE PROGRAMAÇÃO LINEAR E APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Rodrigo Silva Lima

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ELIANA
FREDDI E ORIENTADA PELO PROF. DR. RODRIGO
SILVA LIMA.

CAMPINAS

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F871e Freddi, Eliana, 1962-
Um estudo sobre programação linear e aprendizagem baseada em problemas / Eliana Freddi. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Rodrigo Silva Lima.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Programação linear. 2. Aprendizagem baseada em problemas. 3. Modelagem. I. Lima, Rodrigo Silva, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study of linear programming and problem-based learning

Palavras-chave em inglês:

Linear programming

Problem-based learning

Modeling

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Rodrigo Silva Lima [Orientador]

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

João Luis Gonçalves

Data de defesa: 30-07-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: 0000-0002-0107-3485

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1569288584294526>

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de julho de 2019 e
aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). RODRIGO SILVA LIMA

Prof(a). Dr(a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). JOÃO LUIS GONÇALVES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus filhos: Gáudio Luiz, João Pedro, Samuel Francisco e Marcos José que me proporcionam vivenciar um Amor incondicional.

Agradecimentos

Ao Deus Trino, em quem encontrei o sentido de minha existência. A minha mãe pelo apoio e pela presença amorosa em horas incertas e aos meus filhos por serem minha motivação.

Ao meu orientador, Prof. Rodrigo Silva Lima por ter aceitado me conduzir pelo caminho do estudo de Programação Linear e Metodologia Ativa de Aprendizagem, um caminho longo mas muito agradável e de muito enriquecimento.

Aos professores da UFVJM (Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri) Fernando Soares Guimarães (Vice-Coordenador do curso de Matemática), Lais Couy (Coordenadora do Curso de Matemática) e Carlos Henrique Alexandrino (Diretor do Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia) que possibilitaram a realização de um Minicurso que compõe e enriquece meu trabalho, e aos demais professores dessa instituição que direta ou indiretamente contribuíram para que eu vencesse mais essa etapa, em especial ao professor Nolmar Melo de Souza que me apresentou a essa modalidade de mestrado.

Ao professor Cristiano Torezzan pela eficiente coordenação do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional e pelo apoio para que eu participasse do Minicurso ERPO. Aos professores: Sueli I. R. Costa por compartilhar seus conhecimentos, Ednei Reis por mostrar a lógica em Análise, Rodrigo Silva Lima por sua admirável didática e Kelly Cristina Poldi por sua disponibilidade e amabilidade em me ajudar.

Agradeço de forma especialíssima a Luciana Carrara Abreu por sua generosa e inestimável contribuição para que eu finalizasse esse trabalho em tempo hábil.

E por fim, mas não menos importante, aos meus colegas do mestrado que dividiram saberes e sabores, angústias e alegrias durante essa jornada, em especial ao Marcos Hada e Ricardo Soares Oliveira.

*“Ninguém é suficientemente perfeito, que não
possa aprender com o outro e ninguém é
totalmente destituído de valores que não
possa ensinar algo ao seu irmão.”*

São Francisco de Assis

Resumo

Este trabalho traz uma proposta alternativa para ensino de Programação Linear, através da metodologia ativa de Aprendizagem Baseada em Problemas. A Programação Linear é uma área da Pesquisa Operacional com inúmeras aplicações na solução de problemas de tomada de decisão, objetivando otimizar resultados. O ensino de Programação Linear pelo método de Aprendizagem Baseada em Problemas é bastante escasso na literatura. A metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de Programação Linear visa desenvolver habilidades de comunicação, de aprimoramento das relações interpessoais, de desenvolvimento do pensamento crítico e de análise como também de pesquisa individual, requisitos essenciais para um bom desempenho profissional. De forma geral, em cursos de engenharia as habilidades citadas não são trabalhadas a contento, o que ocasiona uma lacuna entre a formação acadêmica e as exigências do mercado de trabalho. Como experimentação do método de Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino introdutório de Programação Linear, foram ministrados dois minicursos em instituições públicas de ensino superior em que problemas de Programação Linear foram propostos para modelagem e resolução gráfica. Por fim, foram propostos problemas como sugestões de atividades para serem aplicadas em cursos de Programação Linear a serem desenvolvidas com a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas.

Palavras-chave:

Programação Linear. Aprendizagem Baseada em Problemas. Modelagem.

Abstract

This paper presents an alternative proposal for teaching Linear Programming, through the active methodology of Problem Based Learning. Linear Programming is an area of Operational Research with numerous applications in solving decision-making problems, aiming to optimize results. The teaching of Linear Programming by the Problem Based Learning method is quite scarce in the literature. The Problem Based Learning methodology in Linear Programming teaching aims to develop communication skills, enhancing interpersonal relationships, developing critical thinking and analysis as well as individual research, essential requirements for good professional performance. In general, in engineering courses the skills mentioned are not worked to the satisfaction, which causes a gap between academic background and the demands of the labor market. As an experimentation with the Problem Based Learning method in introductory Linear Programming teaching, two short courses were given in public higher education institutions in which Linear Programming problems were proposed for modeling and graphical resolution. Finally, problems were proposed as suggestions for activities to be applied in Linear Programming courses to be developed using the Problem Based Learning methodology.

Keywords: Linear Programming. Problem-Based Learning. Modeling.

Lista de Ilustrações

1	Construção do Modelo	43
2	Região factível	45
3	Representação gráfica do problema com 3 variáveis.	46
4	Direção do vetor gradiente e o plano perpendicular ao gradiente.	47
5	Gráfico 3D com as restrições, vetor gradiente e plano perpendicular ao gradiente	47
6	Gráfico com a representação da solução	48
7	Pontos positivos do Minicurso ERPO 2018	49
8	Hiperplano	52
9	Semi-espacos	52
10	Região factível, reta suporte do vetor gradiente e reta perpendicular ao gradiente	53
11	Sugestões para melhoria do Minicurso UFVJM - 2018	55
12	Solução gráfica: valor mínimo da função objetivo	95
13	Região factível- múltiplas soluções	112
14	Solução ótima - ponto em destaque	115

Lista de Tabelas

1	Avaliação no curso de PL através da ABP	40
2	Locais potenciais de turbinas eólicas.	57
3	Locais recomendados para turbinas eólicas.	58
4	Locais recomendados para turbinas eólicas grandes e regulares.	59
5	Ângulos do Sol em diferentes momentos do dia.	60
6	Energia mínima necessária para diferentes horários do dia e a energia total necessária que deve ser distribuída ao longo do dia.	61
7	Exemplo de ângulos do Sol em diferentes momentos do dia.	62
8	Ângulos dos painéis solares em diferentes momentos do dia.	62
9	Exemplo de alocação de energia.	63
10	Resposta: Ângulos dos painéis solares em diferentes momentos do dia. . . .	63
11	Sua resposta referente à alocação de energia.	64
12	Locais potenciais de turbinas eólicas.	65
13	Locais ótimos recomendados para turbinas eólicas.	67
14	Células preferencias para construção de turbinas grandes.	68
15	Locais ótimos para construção de turbinas regulares e grande.	69
16	Restrições de demanda de energia solar	70
17	Variáveis para modelagem do problema da demanda de energia solar	74

Lista de Abreviaturas e Siglas

ABP Aprendizagem Baseada em Problema.

EAD Ensino a Distância.

3ERPO III Encontro Regional de Pesquisa Operacional do Sudeste

ITA Instituto Tecnológico de Aeronáutica

PCN Parâmetros Curriculares Nacionais.

PL Programação Linear.

PO Pesquisa Operacional.

PBL Problem Based Learning.

TBL Team Based Learning.

AVAs Ambientes Virtuais de Aprendizagem

Sumário

1	Introdução	15
2	Metodologias ativas de ensino-aprendizagem	17
2.1	Aprendizagem ativa	17
2.2	A Teoria da escolha e a aprendizagem ativa	19
3	Aprendizagem Baseada em Problemas	21
3.1	Aspectos motivacionais e aplicação da ABP em cursos de graduação	22
3.1.1	Escolha do problema na ABP	23
3.2	Estrutura da metodologia de ABP	24
3.3	Vantagens e desvantagens da ABP	26
3.4	ABP no ensino de matemática	29
4	Programação Linear	34
4.1	Programação Linear e Aprendizagem Baseadas em Problemas	36
4.1.1	Como abordar a Programação Linear e a ABP no Ensino Médio . .	37
4.1.2	Ensino de Programação Linear através da ABP no Ensino Superior	38
5	Programação Linear e ABP no Ensino Superior	42
5.1	Estrutura Geral	42
5.2	Minicurso 1: III Encontro Regional de Pesquisa Operacional - UNICAMP .	44
5.3	Minicurso 2: UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri	49
6	Atividades de Programação Linear por meio de ABP	56
6.1	Sugestão de questões a serem propostas	57
6.2	Resolução das questões sugeridas	64
6.2.1	Resolução da questão 1 - Parques Eólicos	64
6.2.2	Resolução da questão 2 - Alocação de Painéis Solares	70
7	Conclusão	77
	Referências	81

Apêndice	87
A Minicurso aplicado no III Encontro Regional de Pesquisa Operacional do Sudeste	87
B Questionário do Minicurso 1 - III ERPO	99
C Minicurso aplicado na UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri	106
D Questionário do Minicurso 2 - UFVJM	118
E Simulações - Painéis Solares	123

1 Introdução

O cenário do mercado de trabalho e suas exigências tem se transformado em decorrência das mudanças tecnológicas, em que um grande volume de informações estão acessíveis e a tomada de decisão depende de escolhas que venham a ter maior eficiência para se chegar ao objetivo almejado. A Pesquisa Operacional, definida como “método de análise científica orientado para a procura da melhor maneira de tomar decisões a fim de conseguir os melhores resultados”[1], é uma área da matemática que surgiu durante a II Guerra Mundial, tendo como meta desenvolver estratégias de se alocar recursos escassos de maneira a se otimizar os resultados. A Pesquisa Operacional teve um grande desenvolvimento no pós-guerra e hoje é aplicada em instituições governamentais, indústrias, instituições financeiras e hospitais.[2]

Habilidades de comunicação, argumentação e de trabalho em equipe são imprescindíveis para um bom desempenho no mercado de trabalho. Nos cursos de graduação na área de exatas, mais especificamente em engenharia, essas habilidades geralmente não são desenvolvidas. As metodologias ativas surgem como opção para o ensino com o intuito de estimular o interesse e participação dos alunos, sendo uma das opções a Aprendizagem Baseada em Problemas, que além de ser um processo de ensino mais envolvente e desafiador, propicia o desenvolvimento de habilidades de comunicação oral e escrita, o trabalho em equipe, a autoavaliação e a avaliação dos pares, desenvolvimento do senso crítico, a capacidade de análise e a pesquisa individual.

Este trabalho objetiva estabelecer uma conexão entre Pesquisa Operacional e Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP). Buscou-se na literatura a definição de Programação Linear (PL) e do método de Aprendizagem Baseada em Problemas como também de sua aplicação no ensino de PL. Foram propostos dois minicursos em que a metodologia de ABP foi utilizada para ensino de introdução de PL e por fim há um capítulo com sugestões de problemas a serem propostos para aplicação do método ABP. Segue a descrição da estrutura do presente trabalho.

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre metodologias ativas de ensino e aprendizagem no segundo capítulo. A aprendizagem baseada em problemas foi o tema desenvolvido no terceiro capítulo. No quarto capítulo, o enfoque foi sobre Pesquisa Operacional e Programação Linear em que foi apresentado o estudo de Programação Linear por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas, tema bastante raro na literatura, com

dois exemplos de cursos aplicados: um no ensino médio (no Quênia) e outro no ensino superior em Engenharia Industrial (no México).

Foram aplicados dois minicursos com o intuito de se experimentar a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de Programação Linear, no capítulo 5. O tipo de pesquisa realizada nesse trabalho pode ser classificado, quanto à utilização de resultados de pesquisa aplicada, de natureza qualitativa, descritiva e exploratória (quanto aos fins) e quanto aos meios, pesquisa de laboratório.

No capítulo 6, sugestões de questões de Programação Linear a serem propostas são apresentadas. O capítulo 7 traz a conclusão.

2 Metodologias ativas de ensino-aprendizagem

O mercado de trabalho, por sua característica dinâmica e extremamente competitiva, requer constante busca de aprendizagem para melhorias de processos, motivação e desempenho dos funcionários. Palestras e aulas meramente expositivas outrora utilizadas para ensino tendem lentamente a dar lugar a abordagens mais participativas, através de metodologias de aprendizagem ativa. Há também a questão da tecnologia a ser explorada na aprendizagem como ferramenta a ser incorporada no processo de ensino, com possibilidade de utilização do aprendizado online ativo. Gerentes e professores necessitam se atualizarem continuamente e identificarem as necessidades de aprendizagem dos funcionários ou alunos. O uso da tecnologia é indispensável e a aprendizagem ativa é o melhor caminho conforme ilustram as pesquisas discutidas nesse capítulo.

2.1 Aprendizagem ativa

A aprendizagem ativa é basicamente, a aprendizagem cujo processo é centrado no aluno, isto é, a responsabilidade de aprender cabe ao aluno, ele é o protagonista no processo. Diverge do aprendizado passivo no qual o ensino cabe ao professor e o aluno, passivamente, assimila. Na metodologia ativa, o professor atua como mentor, que direciona os alunos para que o aprendizado ocorra por meio do estudo e resolução de situações propostas.

O primordial para o êxito da aprendizagem ativa é a motivação. Pesquisas atestam que ocorre uma maior motivação tanto para os alunos como para os mentores quando são empregadas metodologias ativas. As metodologias ativas também melhoram a capacidade dos alunos de ler, escrever, perceber e interpretar informações. [3]

Alguns exemplos de atividades ativas que envolvem tecnologia:[3]

1. *Salas de aula virtuais colaborativas*: oferecem recursos de videoconferência, material de apoio, avaliações, fóruns de discussão, enfim comunicação e compartilhamento para alunos e professores. Como exemplos de Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs) gratuitos pode-se citar o Moodle, o TelEduc e o AulaNet. [4]

2. *Mapeamento e debate*: ideias sobre a resolução de problemas são partilhadas e discutidas em grupo. Selecionam-se as melhores ideias para se resolver o problema. Os alunos utilizam aplicativos e criam um mapeamento ou árvore de ideias acessíveis aos

pares. [5]

3. *Fóruns de discussão on-line*: os alunos fazem e respondem perguntas, prioritariamente o professor não interage, deixando que os alunos mais inteirados no assunto respondam. [6]

4. *Sala de aula invertida*: o aluno estuda e pesquisa antes da aula, logo o tempo de aula fica para atividades de aprendizagem ativa. [7]

Abaixo são citados algumas das metodologias ativas de aprendizagem mais usuais:

1. *Aprendizagem Baseada em Projetos (em inglês Project Based Learning)*: é proposto um projeto para ser desenvolvido pelos alunos, com utilização de tecnologia e/ou outras fontes de informação. Favorece a capacidade de pesquisa e análise dos resultados. Cabe ao professor avaliar e indicar os erros e acertos no desenvolvimento do projeto.

De acordo com Bordenave e Pereira (1982, p. 233, apud Berbel, 2011), “o método de projetos tem como principal objetivo lutar contra a artificialidade da escola e aproximá-la o mais possível da realidade da vida”. [8]

2. *Aprendizagem Baseada em Problemas*: um problema é proposto e o aprendizado ocorre na busca da solução desse problema. O problema deve ser desafiador, motivador e contextualizado.

3. *Estudo de caso*: baseado em uma situação real (pode ser real, fictício ou adaptado da realidade) e com certo grau de complexidade, os alunos assumem sua aprendizagem, fazendo valer seus conhecimentos. A solução tem característica de ser mais aberta e ao mesmo tempo específica para aquele caso. Deve-se evitar generalizações. [9]

O estudo de caso é bastante empregado nos seguintes cursos, como exemplificado a seguir: Direito, Administração e Medicina.

4. *Aprendizagem entre pares ou times (em inglês Team Based Learning – TBL)*: trabalha-se em equipes ou times, o aprendizado é construído coletivamente, pela troca de ideias. Desenvolve-se a capacidade de argumentação, de se trabalhar em equipe e se propicia simultaneamente o aprender e ensinar [10].

Segundo Andriotis (2016) [3], a aprendizagem ativa traz vantagens com relação ao método tradicional:

“Há uma infinidade de estudos sobre os benefícios da aprendizagem ativa. A pesquisa provou que há um aumento no conhecimento de conteúdo para os participantes da abordagem. Além disso, o desenvolvimento do pensamento

crítico e a resolução de problemas são outros dois benefícios. O pensamento criativo, as habilidades colaborativas e interpessoais também mostram uma grande melhoria quando os métodos de aprendizagem ativos são implementados. Os benefícios mais importantes, no entanto, têm algo a ver com a motivação do aluno.”

2.2 A Teoria da escolha e a aprendizagem ativa

Na visão de William Glasser, psiquiatra norte-americano, autor do livro *Teoria da escolha* (2001), independentemente das circunstâncias, é possível se fazer escolhas satisfatórias. Na área da educação, o citado autor publicou em 1990 o livro *The quality school: managing students without coercion* (A escola de qualidade: gerenciando alunos sem coerção), no qual relaciona a teoria da escolha à dinâmica entre professor e aluno, em que atitudes de pressão ou recompensas demonstram ser ineficazes com o passar do tempo, e a motivação para o estudo é um movimento que se inicia de dentro para fora, sendo que há uma predisposição natural à aprendizagem do início ao fim da vida (apud Perissé, 2011) [11].

Para Glasser, conforme citado em <http://competenciatotal.blogspot.com/2018/10>, nenhum ser humano é totalmente desmotivado:

“Ninguém, apesar de todos os problemas enfrentados, acredita e deseja seu próprio fracasso. Pelo contrário, gosta de aprender diariamente.”

De acordo com a Teoria de Escolha de Glasser, pode-se afirmar que:

- “Tudo o que se faz é comportamento;
- quase todo comportamento é escolhido;
- somos conduzidos para satisfazermos cinco necessidades básicas: sobrevivência, amor e pertencimento, poder, liberdade e diversão.” [12]

Segundo essa teoria, o crucial é o sentimento de amor e pertencimento pois o relacionamento com outras pessoas é o alicerce para satisfação de todas as outras necessidades. Para Glasser os professores identificam-se com os gerentes, para os quais a eficácia do ensino passa pela conscientização de que o estudo traz um ganho positivo para a vida. Para se atingir esse objetivo, a aprendizagem proposta deve ser relevante e se ter um bom ambiente educacional para proporcionar relacionamento entre professor e aluno que seja favorável ao processo de ensino-aprendizagem. [13]

A metodologia tradicional de ensino-aprendizagem se caracteriza por aulas expositivas em que o professor explica o conteúdo, apresenta exemplos e propõe exercícios e posteriormente avalia a aprendizagem. Nesse modelo, o docente é o agente ativo e aos alunos cabe assimilar os conteúdos, ou seja, são agentes passivos do processo de aprendizagem. A metodologia ativa coloca os alunos como protagonistas do processo, incentivando a autonomia e o envolvimento no processo.

De acordo com Berbel (2011) [8]:

“As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras.”

A metodologia ativa empregada neste trabalho é a Aprendizagem Baseada em Problemas, descrita no próximo tópico.

3 Aprendizagem Baseada em Problemas

A Aprendizagem Baseada em Problemas (em inglês Problem Based Learning, PBL) é um processo de ensino que, como o nome sugere, baseia-se na aprendizagem que se dá na resolução de problemas ou de casos. Surgiu no final da década de 60, em 1969, na McMaster University (Canadá) e posteriormente na Universidade de Maastrich na Holanda. O processo pedagógico de aprendizagem baseada em problema, foi em sua origem aplicado em cursos de medicina em que, ao invés de se ter as disciplinas ensinadas de forma tradicional, ou seja, com aulas em que o professor expõe a matéria e os alunos tem que assimilar os conteúdos, na ABP é proposto um problema e o aluno é desafiado a buscar dados e informações para solucioná-lo, desta forma atua como agente ativo e não mais passivo no processo de aprendizagem. As disciplinas não mais são estruturadas em departamentos, mas de forma interdisciplinar em que a aprendizagem se dá pela busca de conhecimento para se solucionar problemas reais. Sendo assim, o ensino clínico começa no início do curso de medicina o que proporciona uma melhor integração entre teoria e prática.[14]

Barrows (1986, 1996, 2002) e Barrows & Tamblyn (1980), conforme citado por Walker e Leary (2009) [15] afirmam que:

“... a ABP é caracterizada como uma abordagem à aprendizagem na qual os alunos recebem mais domínio sobre o aprendizado do que uma abordagem tradicional, são solicitados a trabalhar em pequenos grupos e, mais importante, adquirem novos conhecimentos na busca de solução de problemas reais e problemas interdisciplinares representativos da prática profissional.”

Além das universidades de Maastricht (Holanda) e de McMaster (Canadá) a Universidade de Aalborg (Dinamarca) desde sua fundação, em 1974, adotou a aprendizagem baseada em problemas. Segundo Deelman e Hoeberigs (2009, p. 81, apud Finco, 2018) [16] é que:

... “os estudantes aprendam de forma ativa, que assimilem os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e a conduta profissional de forma significativa e em um contexto realista, para garantir que adquiram as competências necessárias para sua futura carreira profissional.”

De acordo com Souza e Dourado (2015) [17] verifica-se, através de vasta literatura sobre o assunto, que o processo de aprendizagem pelo método ABP fomenta a

obtenção de conhecimentos, competências e habilidades que favorecem atitudes que podem ser empregadas em outras áreas da vida: “Assim, a ABP apresenta-se como um modelo didático que promove uma aprendizagem integrada e contextualizada.”

Para Barrows (1986, p. 485, apud Finco, 2018) [16] há grande variação na metodologia de ABP que depende da escolha do problema, da sequência didática empregada, do envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem e da avaliação feita aos alunos.

Uma das características desse método é o fato de que o aluno é protagonista no processo de aprendizagem, ao professor cabe o papel de mediador. A valoração das atividades desenvolvidas no processo de busca de solução deve ser apresentada de forma clara no início do curso. A escolha do problema precisa objetivar o conteúdo a ser ensinado, e em observação às respostas dos alunos, é possível se verificar se realmente o objetivo pedagógico está sendo alcançado ou não. O processo é dinâmico, e caso a resolução do problema fuja do objetivo pensado a priori, é possível readaptá-lo ou, em último caso, substituí-lo. Hoje esse método é aplicado em vários países. A ABP é um método que articula teoria com prática, motiva os alunos e possibilita uma melhor formação profissional [18].

3.1 Aspectos motivacionais e aplicação da ABP em cursos de graduação

Na visão de Delisle (1997) [19], o alicerce da ABP está no movimento progressista e deve-se especialmente a John Dewey que percebeu que a vivência dos alunos fora da escola apontavam para áreas de interesse, o que conseqüentemente aumentava a motivação para aprender.

“Volte para o tipo de situação que causa a reflexão fora da escola na vida comum. Eles dão aos alunos algo a fazer, não é algo para aprender; e o fazer é de tal natureza que exige o pensamento, ou a observação intencional de conexões; aprendendo naturalmente resultados.” (Dewey 1916, p. 154, apud Delisle, 1997) [19]

Segundo Barrows (1985, apud Delisle, 1997) [19], a ABP foi desenvolvida para que estudantes de medicina que até então precisavam memorizar um volume enorme de informações, para posteriormente poderem diagnosticar e tratar os pacientes, passassem a aprender de forma mais prática, estudando situações reais em que a busca e a aplicação

do conhecimento atendessem as necessidades dos pacientes. Dessa forma, teoria e prática estão atreladas.

Em cursos de nível superior, especialmente no curso de medicina, a metodologia de ABP tem sido utilizada para resolver problemas contextualizados com a realidade. A princípio a ABP foi aplicada no curso de medicina, e posteriormente o método se mostrou consistente no ensino de engenharia química, engenharia biomédica, engenharia de computação, física, engenharia elétrica e de telecomunicações. [20]

Segundo Yeo (2005, apud Garcia-Reys & Garza, 2015) [21] a Aprendizagem Baseada em Problemas tem se expandido para **disciplinas** de outros cursos como o de Artes, Engenharia, Direito e Enfermagem, entre outros.

No Brasil os cursos de Medicina da Faculdade de Marília e da Universidade Federal de Londrina foram os primeiros a adotarem a ABP na formação dos médicos, em 1997 e 1998 respectivamente [22]. Em 2003 a Universidade Estadual de Feira de Santana implantou os cursos de Medicina e Engenharia da Computação (desde sua criação de forma a abranger todo o curso) utilizando o método ABP. Também em Engenharia da Computação, na Universidade Federal do Pampa incentiva-se a Aprendizagem Baseada em Problemas como metodologia de ensino, a qual consta do Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia de Software.

Tem-se várias opções para se trabalhar com a ABP: a metodologia ABP pode ser implementada no currículo todo, ou parcialmente ou ainda pontualmente. Segundo RIBEIRO (2008, apud Souza, 2011) [23], quanto ao formato a metodologia ABP pode ser aplicada integralmente nos cursos, ou de forma mesclada em que problemas são estruturados num eixo central com mais de uma disciplina como apoio, podendo-se utilizar aulas tradicionais (expositivas), e é denominada “ABP Híbrida”. O PBL pode ser implantado em disciplina(s) isolada(s), nesse caso é chamada de “ABP Parcial”. Finalmente, se a ABP for utilizado de forma restrita e específica em meio a aulas expositivas, com o objetivo aprofundar ou incluir conhecimento é chamada de “ABP Pontual”.

3.1.1 Escolha do problema na ABP

O problema é o ponto essencial da ABP, sendo que a diferença entre esse método e os demais é o fato de que o problema é proposto antes da exposição da teoria necessária para sua resolução, segundo Escrivão (2009) [18] :

“... a principal característica que difere a ABP de outros métodos ativos, colaborativos, centrados nos alunos, no processo e da aprendizagem baseada em casos é o emprego de problemas para iniciar, enfocar e motivar a aprendizagem de conteúdos específicos e para promover o desenvolvimento de habilidades e atitudes profissional e socialmente desejáveis.”

A aprendizagem acontece no processo de busca da solução do problema, portanto o problema é o núcleo central neste método. O problema não pode ser muito complexo, para não tornar acessível muitos campos de pesquisa ou áreas de aprendizagem, o que acarretaria a abertura de um leque de possibilidades e se perderia o foco no objetivo do que se quer ensinar. Por outro lado, se for extremamente fácil, não exigirá empenho na busca de solução pelos alunos. É necessário que o professor ou a equipe de professores, que pode ser interdisciplinar, conheça o nível de conhecimento dos alunos e visando o objetivo (do que se quer ensinar) possam escolher o problema mais adequado. Além da observação da eficácia do problema, durante o processo, do que se quer ensinar, ao final do curso uma avaliação do que os alunos acharam mais relevante em termos de aprendizagem, dará um retorno da adequação ou não do problema proposto. O problema é que direciona a aprendizagem.

“ Desta forma, o problema age como motivação e contexto para o conteúdo a ser aprendido e habilidades a serem desenvolvidas, criando também uma ponte entre a teoria e a prática. A necessidade de buscar a resolução do problema, dessa forma, retira o foco do aprendizado do professor e passa-o para o aluno, que é incentivado a aprender de forma mais independente e, principalmente, de forma colaborativa com seus colegas. “Aprender a aprender” talvez seja um dos principais objetivos da metodologia ABP. ” (Angelo et al., 2010)[20]

Outra característica importante é que o problema deve ser real ou próximo da realidade, e estar ligado a situações que o aluno poderá vir a encontrar na sua atuação profissional. A escolha do problema precisa levar em conta o nível de conhecimento dos alunos, sendo que o problema deve ser desafiador e ao mesmo tempo, estar em um nível de dificuldade possível de ser solucionado pelos alunos em questão.[18]

3.2 Estrutura da metodologia de ABP

Primeiramente deve estar clara a metodologia e a avaliação associada a “tarefas cumpridas”, ou seja, os alunos devem ter acesso a forma como será pontuada cada etapa do processo.

Basicamente a ABP funciona da seguinte forma: um problema é proposto e há uma discussão inicial, onde são levantadas hipóteses para solucioná-lo. Para validar as hipóteses, surgem dúvidas e questões que precisam de respostas. Os alunos, divididos em equipes, vão em busca das respostas a essas dúvidas. Cabe ao professor sugerir algumas fontes de pesquisa onde os alunos poderão seguramente procurar respostas pertinentes. Uma questão que precisa ser pensada é relacionada ao tempo, pois os alunos precisam ter disponibilidade para pesquisar e para os encontros dos grupos, onde serão discutidos os resultados das pesquisas. Nenhuma hipótese levantada por um dos membros do grupo deve ser descartada, por mais insignificante que pareça pois pode ser a chave do problema, ou ser um caminho para a resolução do mesmo. A ABP deve ser planejada de forma a oferecer o tempo necessário para a execução das atividades propostas. O professor deve acompanhar as etapas do processo, e orientar os grupos indicando possibilidades e corrigindo metas.

Abaixo é apresentado um modelo dos passos a serem dados para a solução do problema:

1. *Analisar o problema:* Observar e discutir o enunciado do problema, listando-se o que julgar relevante para sua solução. Caso não se tenha conhecimento suficiente para a resolução do problema, que esse fato seja motivador, um desafio a ser vencido. A aprendizagem se dará justamente na busca de conceitos e informações para solucionar o problema.

2. *Listar o que se sabe:* deve-se listar a sugestão de cada membro da equipe sobre a solução do problema, sendo que a contribuição de cada pessoa é importante, ou seja, recomenda-se não desprezar nenhuma opinião.

3. *Reescrever o enunciado do problema:* o grupo deve reescrever o problema a partir da análise do que se sabe e do que se precisa saber para chegar a resolução. O grupo deve estar de acordo e é aconselhável apresentar a análise ao instrutor e pedir um parecer. O enunciado do problema deve ser atualizado quando dados são descobertos e/ou descartados.

4. *Listar todas as possíveis soluções:* listar as soluções após apresentação, explicação e argumentação do processo de solução pelos componentes da equipe, de forma a se buscar um consenso sobre a ordenação da considerada a melhor solução à pior possibilidade.

5. *Organizar as atividades a serem executadas*: recomenda-se buscar o que falta para resolver o problema e qual a relação dessa(s) opção(ões) com a lista de soluções. Há concordância no grupo quanto a esses aspectos?

6. *Listar o que é preciso saber*: é aconselhável procurar dados para embasar a solução através de pesquisa e esquematizar as tarefas repetindo-se os prazos. Se a pesquisa der sustentação para a solução, ir para o passo seguinte. Caso contrário, voltar a lista das possíveis soluções (passo 4).

7. *Redigir e enviar a solução*: a resolução do problema deve ser detalhada com os dados que a embasam e com a descrição do processo de resolução. O nível de aprofundamento deve ser estabelecido na apresentação do problema proposto ou durante sua resolução, pelo professor. Pode-se também haver apresentação da solução para os outros grupos.

8. *Avaliação*: deve ocorrer a autoavaliação e também a avaliação dos membros do grupo de cada integrante. Os erros devem ser vistos como oportunidade de aprendizagem [24].

3.3 Vantagens e desvantagens da ABP

Um dos pontos positivos é a oportunidade que os alunos tem de trabalharem em equipe, dividirem as tarefas, desenvolverem a habilidade de comunicação oral e, se necessário, de argumentação em defesa do seu ponto de vista. Com a divisão de tarefas, também surge a oportunidade de pesquisa (ou investigação) individual, que exige uma postura autodidata e a possibilidade de familiarização com fontes de pesquisa como livro texto, material online, entrevistas, visitas, etc . Os registros dos resultados encontrados favorecem a comunicação por escrito. Cabe ao professor acompanhar e avaliar o desenvolvimento do trabalho, corrigindo a direção do caminho escolhido pelos alunos, se necessário for.

Outros aspectos positivos são: a motivação que pode ser estimulada em vista do problema a ser escolhido, a auto-avaliação como um componente da avaliação geral e ainda a avaliação dos colegas e a avaliação do método, o que desenvolve a habilidade de senso crítico e o desenvolvimento de um modo de avaliação construtiva, tão necessária nas relações de trabalho. Há também a possibilidade de mudança de tarefas internamente, na equipe: um é o líder, outro irá redigir, outro fará a apresentação oral do problema, outro

fará a pesquisa, ou seja, faz-se um rodízio das atribuições em cada etapa e assim todos terão as mesmas oportunidades de desenvolverem ou aprimorarem suas habilidades em vários aspectos. O método favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e de análise.

Há necessidade de organização e disciplina para pesquisa individual, que atua como incentivo à leitura, ao raciocínio e à argumentação para exposição das ideias no trabalho em grupo. O problema pode exigir conhecimentos multidisciplinares. O aspecto prático de se resolver um problema no âmbito da profissão escolhida é uma vantagem que se destaca. [14]

Verifica-se que há vantagem de liberação de tempo para os docentes durante a execução do processo, apesar da exigência de tempo na preparação e supervisão. Para os alunos constata-se que há mais satisfação em aprender através do método de ABP, por serem eles os protagonistas no processo. [25]

De acordo com Downing (2011, apud Garcia e Garza, 2015) [21] constatou-se que os alunos que tiveram sua aprendizagem por meio do método de ABP, obtiveram melhor desempenho que os alunos que aprenderam pelo método tradicional.

Na visão de Araújo e Sastre (2009, apud Machado et. al, 2012) [26] a metodologia de ABP também contribui para a:

- “integração entre Universidade e empresa, uma vez que os estudantes podem trazer para a Universidade problemas de diversos domínios e, paralelamente, os professores tutores manterem contato com empresas e seus problemas;
- integração entre ensino e pesquisa, porque os professores, ao supervisionarem grupos com problemas ainda não resolvidos, podem aplicar técnicas atuais;
- relação entre empresa e pesquisa, pois os problemas das empresas podem ser estudados diretamente pela academia.”

No primeiro caso citado, os alunos trariam para a Universidade, demandas da empresa, estariam propondo problemas reais para serem resolvidos.

Em contrapartida há algumas desvantagens na ABP, como os alunos se sentirem menos cobrados por não haver o método tradicional de avaliação (geralmente as provas) e podem ficar mais relapsos no início dos trabalhos. Também há a dificuldade de se trabalhar em grupo, podendo ocorrer de algum colega não fazer a tarefa estipulada e prejudicar os demais membros do grupo. Para atenuar esse aspecto entra a avaliação que os colegas farão internamente no grupo. Há um outro problema que pode surgir com relação a pesquisa: como hoje há uma infinidade de informações circulando, tem que se

tomar cuidado na escolha das fontes de pesquisa [14] . Cabe ao professor ir corrigindo o rumo da pesquisa, podendo indicar algumas fontes seguras (como bibliografia, banco de dados, sites), sanando assim possíveis equívocos.

Conforme artigo da 122^a Conferência e Exposição Anual da ASEE (American Society for Engineering Education, de junho de 2015) [21], um outro risco é de que os alunos foquem apenas a busca imediata da solução, sem atentarem para a importância da construção do conhecimento durante o processo da resolução do problema, *o foco deve ser a aprendizagem e não unicamente a resposta* e o problema é o meio pelo qual se atinge o objetivo de aprender determinado assunto.

Tempo na elaboração : a ABP é um desafio a quem a propõe, pois não existe uma receita pronta. É um modelo que tende a aprimorar-se com o tempo e a prática. Para isso é imprescindível que haja uma avaliação sistemática por parte dos professores que aplicam este método. A cada curso precisa-se mudar os problemas, caso contrário uma turma pode acabar utilizando os resultados de outra, e perde-se totalmente o objetivo de se utilizar a ABP. Exige-se tempo para planejamento, para acompanhamento dos resultados que os alunos vão obtendo, para avaliação durante o processo e para avaliação final. É um método mais trabalhoso para o professor do que o método tradicional, em que se prepara um curso que, com adaptações (se necessário), pode ser aplicado em vários semestres.

Há divergência quanto a eficácia do método de ABP relacionada ao suporte que os alunos necessitam. Para Smith e Cook (2012, apud Kim et al., 2018) [27] um bom resultado da aprendizagem por parte dos alunos, com a metodologia ABP, é fruto de se encontrar o suporte adequado e ainda depende se os alunos se sentem capazes ou não de transporem suas dificuldades. Os suportes podem ser: suporte conceitual, suporte do mentor (que pode ser dificultado caso o número de alunos seja maior que 20, pois a ajuda é individualizada), suporte computacional ou sugerido pelo professor ou pelos pares.

Na visão de Torp e Sage (1998, apud Kim et.al, 2018) [27]:

“uma síntese recente de modelos educacionais centrados no problema, incluindo ABP, mostrou uma grande diferença entre os ganhos de aprendizagem de diferentes faixas etárias, apesar de todos os grupos receberem apoio. Uma explicação possível é que a ABP originou-se em faculdades de medicina, que atende a uma população estudantil altamente motivada e autônoma e também possui um conjunto relativamente homogêneo de conhecimento específico de domínio e habilidades avançadas de resolução de problemas (Barrows, 1996). Em contraste com os estudantes de medicina, alunos do ensino básico não apenas carecem de conhecimentos e habilidades, mas também podem não ser

motivados por seu currículo nem ter o apoio adequado de seus professores (Torp e Sage, 1998).”

Para Schechter (2011, apud Garcia e Garza, 2015) [21], apesar das vantagens amplamente documentadas de se colocar atividades de ABP, existem algumas barreiras como: a mudança de mentalidade de professores e alunos, o foco dos alunos estar na busca de uma resposta rápida, quando o foco deve ser a análise do problema e a mudança no processo de aprendizado, enquanto na visão de Spronken & Harland (2009), citado por Garcia e Garza (2015) [21], as dificuldades de aplicação do método de ABP só desaparecem com o passar do tempo à medida que vai sendo praticado e desenvolvido, por meio de avaliação continuada das necessidades de aprendizagem dos professores, dessa forma, a implementação torna-se bem-sucedida.

3.4 ABP no ensino de matemática

A matemática é uma ciência que faz parte da vida de todas as pessoas e, direta ou indiretamente, todos se relacionam com ela. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) [28],

“Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.” (p. 111)

D’Ambrósio (2005) [29] entende a matemática:

“... como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.” (p. 102)

Dada a importância da matemática e conseqüentemente de seu ensino, e ainda o alto grau de dificuldade que muitos alunos apresentam nesse campo, as metodologias ativas, dentre elas a aprendizagem baseada em problemas, surge como uma opção para motivar o aprendizado e minimizar as dificuldades.

A seguir temos algumas considerações sobre ABP no ensino de matemática nos níveis fundamental e médio que estão em sintonia com alguns dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais. As metas para o ensino fundamental são desenvolver nos alunos a capacidade de:

- “posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- utilizar as diferentes linguagens verbal, musical, matemática, gráfica, [...] como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.” [30]

Segundo o PCN+ do Ensino Médio, três competências devem ser trabalhadas e alcançadas no ensino médio:

- “representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sócio cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.” [28]

E ainda, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) [28], é citada “Estratégias para a resolução de situações problema: identificar em dada situação problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.” (p. 115)

Vê-se que o enfoque dos PCNs é idêntico ao da ABP nos aspectos acima mencionados de desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação e em estratégias na busca de solução de problemas. Quanto a estruturação, a ABP apresenta algumas características específicas: segundo Ribeiro (2008, apud Dejuste e Silva, 2009) [31] o problema é o meio pelo qual se motiva e baliza a aprendizagem, num processo de construção do conhecimento e não de assimilação.

Um estudo de Merritt et al. (2017) [32] baseado na revisão de literatura de artigos periódicos para alunos da pré-escola até o ensino médio (idade de 3 a 18 anos), de aprendizagem baseada em problemas e aprendizagem baseada em projetos no ensino de matemática e ciência, apresentou os seguintes resultados:

- Inicialmente 504 artigos foram selecionados com alunos de todos os níveis, incluindo artigos de ensino superior que abordavam ABP (aprendizagem baseada em problemas e em projetos) nas áreas de matemática ou ciência.
- Esse número caiu para 80 após a revisão dos resumos utilizando 5 critérios: análise quantitativa, ABP, tipo de ABP (aprendizagem baseada em problemas ou em projetos), nível dos alunos (da pré-escola ao ensino superior) e sujeito (matemática, ciência, ambos ou outros). Restringindo-se os artigos com base nos critérios acima definidos e eliminando-se os de ensino superior, restaram 25.
- Para a última etapa da triagem, os artigos foram lidos integralmente e o critério de seleção foi: pesquisa com método experimental ou quase-experimental; definição de ABP; componentes da ABP na pesquisa e eficácia da ABP (atitude e desempenho). Restaram apenas nove artigos.

Em todos os nove artigos os alunos formaram equipes de quatro a seis alunos e destacou-se a importância do trabalho em grupo.

- Em sete artigos a pesquisa iterativa foi incluída na atividade de ABP.
- Em três, os alunos apresentaram para a turma suas soluções, desenvolvendo e exercitando a comunicação.
- Quatro artigos descreveram os professores com atitudes de mentores, sendo que um desses artigos, para alunos do primeiro grau, os professores ofereceram mais facilidades fazendo perguntas para que os alunos pudessem obter progresso na análise dos dados e verificação dos resultados.
- Em todos os nove estudos pode-se observar que os professores fizeram o papel de mentores e os alunos assumiram um papel ativo no processo de aprendizagem. [32]

Quanto a eficácia da ABP, constatou-se que essa metodologia agrega pontos positivos no desempenho, retenção de conhecimento, atitudes e desenvolvimento conceitual dos alunos. Quanto às atitudes dos alunos, não ficou claro quais foram essas atitudes. Merritt et al. (2017) [32] relatam que:

“[...] a revisão mostrou algumas diferenças entre os graus inferior e superior do grau elementar nos tipos de problemas ou componentes da ABP enfatizados,

indicando a necessidade de desenvolver diretrizes específicas para a aplicação da ABP em diferentes níveis. Com base nesses achados, recomendamos estudos mais empíricos da ABP nos graus primários inferiores. Esses estudos forneceriam mais informações sobre a eficácia da ABP para os alunos mais jovens, bem como quais componentes da ABP exigem mais andaimes nos níveis mais baixos.”

Em níveis de ensino fundamental e médio, em ciências e matemática, poucos estudos foram feitos e dos nove artigos analisados não foi encontrado nenhum que tratasse do ensino de matemática, pois os nove artigos eram na área de ciências, demonstrando haver uma grande lacuna nessa área.

Portanto, a nível de educação básica não há muito conhecimento sobre a aplicação da ABP e sua eficácia. O aprendizado que prima por mera repetição de forma mecânica dos conteúdos predomina os cenários educacionais, mesmo diante de movimentos na área educacional que indicam que o aprendizado ativo é mais envolvente e motivador. Hoje com o grande acesso a informação por meio da tecnologia, a tendência é que se valorize mais a busca de como se utilizar a informação ao invés de como memorizá-la. A aprendizagem baseada em problemas é uma metodologia ativa utilizada em ensino superior que, segundo Strobel e Barneveld (2009, apud Merritt et al., 2017) [32] é mais eficaz quanto a aquisição de habilidades e a retenção do conhecimento por prazo duradouro.

No ensino básico nota-se que a ABP é uma metodologia praticamente não explorada, pois para se propor uma atividade de aprendizagem baseada em problema, os alunos precisam ter uma base de conhecimento a partir da qual se propicie avançar em termos de aprendizagem. O problema proposto deve estar em um nível mais alto que o nível de conhecimento atual dos alunos, para que seja desafiador. Mas é preciso que se ofereça “andaimes”, isto é, suportes para que os alunos possam ter acesso a novos conhecimentos. O professor tem, a priori, duas questões a serem avaliadas: conhecer em que estágio de aprendizagem estão seus alunos e pensar formas de levá-los ao nível de aprendizagem que objetiva, como e quais suportes oferecer, levando em conta que alunos do ensino básico têm menos autonomia e menos bagagem de conhecimento que alunos do ensino superior. Por esse motivo, também há um maior risco de que, se a ajuda não vier em tempo oportuno, os alunos tendem a perder o interesse e motivação, por se sentirem incapazes de sobreporem sozinhos os obstáculos. [27]

Para o ensino superior, na visão de Oon-Seng Tan (2002, apud O’Brien et al., 2011) [33]:

“A implementação da aprendizagem baseada em problemas (ABP) implica não apenas o redesenho do currículo, mas também o desenvolvimento de abordagens efetivas de facilitação e cumulação. A inovação dos currículos de ABP tipicamente envolve uma mudança em três áreas de preocupação educacional: de que conteúdo cobrir e quais problemas do mundo real apresentar; do papel dos professores de palestrantes ao de mentores e do papel dos alunos como aprendizes passivos para o dos solucionadores de problemas ativos e aprendizes auto dirigidos.”

Algumas propostas de aplicação da metodologia de aprendizagem baseada em problemas a nível superior, em matemática, tem sido realizados no Brasil como por exemplo:

- O Ensino de Cálculo e Aprendizagem Baseada em Problemas: desafios e possibilidades (SOUZA, 2014); [34]
- Aplicação e avaliação do método de ABP em um componente curricular integrado de programação de computadores (ANGELO et al., 2014); [35]
- Uma ferramenta para o ensino de matemática utilizando a aprendizagem baseada em problemas em um ambiente para a educação à distância. (SILVA et al., 2016); [36]

Ainda, de acordo com Souza (2014) [34]:

“ Alguns referenciais teóricos denotam investigações positivas acerca de propostas de ensino com a ABP em diferentes áreas de conhecimento. Todavia, tais abordagens ainda não estão associadas ao ensino e a aprendizagem na área da Matemática.”

4 Programação Linear

Programação Linear (PL) é uma área da Pesquisa Operacional com o objetivo de aumentar a eficiência da operacionalização de recursos escassos, em processos de tomada de decisão. Os precursores na área de PL foram George Dantzig (EUA) e Leonid Kantorovich (na então União Soviética) na década de 40. Leonid V. Kantorovich e Tjalling C. Koopmans receberam o Prêmio Nobel de Ciências (em 1975, na Suécia) “por suas contribuições à teoria da alocação ótima de recursos” (Chvatal, 1983) [37]. Durante a Segunda Guerra Mundial, em problemas de transporte pelas forças armadas, a PL teve um impulso relevante.

Na Inglaterra, em 1941 iniciou-se a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, visando solucionar problemas de estratégias de guerra. Depois da guerra, Inglaterra e Estados Unidos avançaram no campo de Pesquisa Operacional. O matemático George Dantzig trabalhou em problemas de otimização linear e desenvolveu o método simplex para solucionar problemas de Programação Linear (PL). Na primeira conferência internacional de pesquisa operacional, em 1957, ficou clara a diferença de enfoque entre as pesquisas dos ingleses e norte americanos: enquanto os ingleses enfatizaram problemas pontuais, os americanos desenvolveram métodos matemáticos em vários campos como por exemplo teoria de estoques, otimização linear e fluxos de rede entre outros. A pesquisa operacional expandiu-se para os setores público e privado após 1950, em áreas de produção e logística como: metalurgia, finanças, alimentação, agricultura, telecomunicação, etc. [38]

No período pós-guerra, a Pesquisa Operacional ganhou espaço em organizações não militares, pois os problemas enfrentados nessas organizações eram do mesmo tipo, em termos de busca de aumento de eficiência, que os enfrentados nos campos de batalha. Em 1950 a Pesquisa Operacional já havia sido introduzida em organizações comerciais, governamentais e industriais. Segundo Hillier e Lieberman (2013) [39], destacam-se duas causas principais que motivaram, a partir de 1950, a rápida difusão da Pesquisa Operacional: a primeira é o desenvolvimento de pesquisas nessa área, como o desenvolvimento do Método Simplex por George Dantzig (1947), o desenvolvimento da teoria das filas, de programação linear e programação dinâmica. O outro motivo que impulsionou a difusão da PO foi a propagação do uso de recursos tecnológicos com a expansão do uso de computadores, o que possibilitou que cálculos numerosos fossem processados com rapidez e eficiência [39].

No Brasil a pesquisa operacional principiou-se em 1960, sendo que o primeiro simpósio brasileiro de pesquisa operacional aconteceu em 1968 no ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) [38].

Sobrapo (2009, apud Leigus et al., 2009) [40] conceituou a Pesquisa Operacional como sendo:

“uma disciplina científica de características horizontais com suas contribuições estendendo-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e a Gestão Empresarial”.

Na visão de Hillier e Lieberman (2013) [39], a pesquisa operacional aplica-se à direção e organização das atividades (operações), com a finalidade de obter a solução mais adequada ao problema: a melhor solução, nomeada de solução ótima. Colin (2015) [41] ressalta três características da PO: “uso de métodos matemáticos para resolver problemas, desejo constante por otimização e orientação a aplicações.”

Programação Linear: é uma especificação de problemas de otimização em que a função objetivo e as restrições são lineares.

Um problema de otimização linear é definido da seguinte forma (forma padrão de minimização):

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeita a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\text{e } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

Em que $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função objetivo que se quer minimizar, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ são variáveis não negativas, denominadas variáveis de decisão e os parâmetros c_j , b_i e a_{ij} com $j = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, m$ são conhecidos.

A função objetivo pode ser maximizada ou minimizada, dependendo do tipo de problema que se quer resolver. Por exemplo, em se tratando de encontrar o menor custo de produção é interessante que se busque o valor mínimo da função objetivo e se a questão envolver achar o maior lucro, deve-se procurar o valor máximo da função objetivo. Toda solução que atende a todas as restrições é chamada de solução viável ou solução factível e

a solução viável que resulta no melhor valor da função objetivo é denominada de solução ótima. Para Almeida (2016) [42] :

“Resolver um problema modelado como Otimização Linear é encontrar uma solução que atenda todas as restrições do problema e que seja a melhor possível, maximizar ou minimizar a função objetivo.”

Em 1947, George B. Dantzig desenvolveu o método Simplex e John Von Neumann, a teoria da dualidade, ambos os trabalhos são de grande importância em programação linear. O objetivo da programação linear é encontrar uma solução ótima na tomada de decisões de problemas nas áreas de economia e produção, e encontra aplicabilidade em indústrias e empresas. Para Mc Namara (1983), Dantzig (1998), Fagoyimbo et al. (2012) e Yahya et al.(2012), conforme citado por Nakhanul e Musasia (2015) [43]: “A programação linear é, portanto, uma parte importante da pesquisa operacional e continua a tornar o mundo economicamente mais eficiente.”

A disciplina de Programação Linear é ensinada em diversos cursos como por exemplo Engenharia Ambiental na Unesp (campus de Sorocaba e Iperó), Programação Linear ligada a problemas de transporte para Engenharia de Transporte, da USP, em Engenharia de Produção da Unicamp e em cursos de pós-graduação.

Algumas áreas de aplicação da programação linear: alimentação (dieta, composição de ração), rotas de transporte, siderurgia, petróleo, agricultura, finanças, mineração e localização industrial.

Utiliza-se programação linear na resolução de problemas de mistura (como rações e ligas metálicas), problemas de transporte, transbordo e designação, problemas de planejamento de produção (mix de produção, seleção de processos e dimensionamento de lotes), problemas de programação de projetos, problemas de gestão financeira (fluxo de caixa), problemas de meio ambiente (controle de agentes poluentes) e problemas de corte e empacotamento [38]. A importância da programação linear atribui-se ao vasto leque de aplicações em resolução de problemas de várias áreas.

4.1 Programação Linear e Aprendizagem Baseadas em Problemas

O estudo de Programação Linear por meio da ABP é bastante escasso, mas existe. Pode-se citar dois trabalhos nessa área: “*Uma Estrutura de Aprendizagem Baseada*

em *Problemas para Avaliar e Desenvolver Habilidades interpessoais em um Curso de Programação Linear*” de Heriberto Garcia-Reyes e Cesia de la Garza Garza (2015) [21], em que o ensino de Programação Linear pelo método da Aprendizagem Baseada em Problemas é aplicado para estudantes do curso de graduação de Engenharia Industrial, em Monterrey (México) e o outro trabalho é de Nakhanul e Musasia (2015) [43]: “*Técnica de Aprendizagem Baseada em Problemas e seu efeito na Aquisição de Habilidades de Programação Linear para Alunos do Ensino Médio*”, no Quênia.

4.1.1 Como abordar a Programação Linear e a ABP no Ensino Médio

Na literatura, foi encontrado um único trabalho sobre estudo de Programação Linear por meio da ABP no ensino médio, descrito a seguir. Em escolas de ensino médio no Quênia, Programação Linear faz parte do currículo obrigatório. Apesar disso, em muitas escolas não se ensina PL pois os professores consideram que seja um tópico que apresenta muita dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos. Em 2013, Nakhanul e Musasia (2015) fizeram um estudo com a finalidade de “investigar se a intervenção da Aprendizagem Baseada em Problemas pode encorajar e melhorar a aprendizagem dos alunos em programação linear.” [43]

Trinta escolas participaram da pesquisa e formou-se dois grupos (cada um com 15 escolas): um de controle e outro experimental, aos quais foram aplicados pré-teste de conhecimentos matemáticos e pós-teste para verificar o nível de desempenho em PL. Para o grupo de controle o ensino se deu por meio do método tradicional (método da tentativa e erro), enquanto para o grupo experimental aplicou-se o teste de origem e a técnica de pontos extremos.

O grupo experimental teve 745 alunos e o de controle 757, no total 1502 alunos participaram da pesquisa. PL faz parte do currículo do quarto ano do ensino médio, e tem como pré-requisito as inequações lineares e sua representação gráfica, que são ensinadas em anos anteriores. O estudo de Nakhanul e Musasia (2015, p. 70) [43] teve como meta “avaliar o efeito da técnica de aprendizagem baseada em problemas na motivação de alunos do ensino médio e aquisição de habilidades em programação linear” para isso, determinou-se o nível de conhecimento e analisou-se e as habilidades desenvolvidas em PL por meio da comparação entre o método tradicional e o teste de origem e técnica dos pontos extremos. O curso durou 2 semanas, sendo que na primeira trabalhou-se com construção de gráficos

de equações lineares, modelar inequações e representá-las graficamente, *sombrear as regiões indesejadas*, solucionar equações lineares e sistemas de equações lineares por método gráfico. Na segunda semana enfatizou-se a PL para solucionar problemas de otimização, para isso os alunos precisaram formular inequações, representá-las graficamente sombreando regiões indesejáveis e encontrando os pontos ótimos. Constatou-se com os resultados obtidos na pesquisa, que os alunos que participaram do grupo experimental, ou seja, aos quais foi aplicada a metodologia ABP, os resultados foram melhores tanto a nível de aquisição de conhecimento quanto ao desenvolvimento de habilidades em PL. Portanto conclui-se que o ensino pelo método ABP, pode contribuir para a ampliação do ensino de PL que consta do currículo em escolas de nível médio no Quênia.

4.1.2 Ensino de Programação Linear através da ABP no Ensino Superior

Segue a descrição de uma experiência do professor Dr. Heriberto Garcia-Reyes e da professora assistente Cesia de la Garza Garza, de Monterrey no México [21]. Na visão de Garcia & Garza (2015), a globalização e as inovações contínuas requerem dos profissionais, além do conhecimento, habilidades como: liderança, boa comunicação, saber trabalhar em equipe, pensamento crítico e criatividade na resolução de problemas, portanto o perfil dos engenheiros requisitados pelo mercado de trabalho tem mudado. Os cursos tradicionais não vinculam a teoria aos problemas reais e em vários países há uma divergência entre as habilidades desenvolvidas nas universidades e as habilidades necessárias ao mercado de trabalho, sendo que estudos mostram que há uma lacuna no desenvolvimento de habilidades na área de relações interpessoais e trabalho em equipe.

Programação Linear é uma das primeiras disciplinas a ser ministrada no curso de Engenharia Industrial. A disciplina é vasta para ser ministrada em *um semestre* e associar o desenvolvimento de habilidades nesse contexto não é tarefa fácil. Surgiu como opção buscar um método que possa atender a essa demanda e uma das maneiras de fazer do aluno um protagonista do processo de aprendizagem e desenvolver as habilidades que ele irá precisar em sua atuação profissional é pelo método de Aprendizagem Baseada em Problemas. Para o ensino de Programação Linear por meio da ABP, faz-se necessário estimular os alunos para que tirem proveito do método a fim de atingir-se o objetivo do curso. Verificou-se que o método de ABP em conjunto com o ambiente de aprendizagem virtual (como o WebCT e Blackboard) traz melhores resultados. As interações entre os

componentes do grupo e o professor são realizadas através do ambiente de aprendizagem virtual.

“ O curso de programação linear utiliza como suporte uma plataforma Blackboard. Os alunos usam esse espaço para interagir e documentar suas descobertas, acordos e listas de tarefas para resolver a ABP designada.”
(GARCIA & GARZA, 2015) [21]

A metodologia de ABP para solução dos problemas tem como principais atividades três etapas: obter informações, modelar matematicamente o problema e analisar os resultados a fim de fazer as alterações necessárias. O modelo conceitual para o ensino de programação linear através do ABP tem como sustentação a colaboração, o trabalho em equipe e o desafio.

Sequência de atividades da ABP propostas no curso de Programação Linear:

1) *Planejamento de produção*: introdução da ABP por meio de um desafio de formular e resolver um problema. A solução é encontrada usando como ferramenta planilha eletrônica, como o Excel. O problema apresentado refere-se ao planejamento de produção que envolve o tempo. Ao final do trabalho, os alunos entregam um relatório escrito que contém, além dos resultados do problema com as discussões e conclusões, todo o processo de aprendizagem obtido na atividade.

2) *Distribuição de Produtos*: a solução é encontrada por meio do uso do software LINDO, MPL, WinQSB, etc. Os alunos devem entregar um relatório escrito que, além da documentação do processo e análise dos resultados, tenha análise de sensibilidade.

3) *Mix de produtos*: analisar mudanças nos resultados do problema através de um conjunto de questionamentos “e se” quando há mudanças drásticas nos dados do problema. Problemas lineares devem ser modelados, solucionados e analisados por meio da pergunta “e se”. Um relatório escrito deve ser entregue, com documentação da análise realizada com conclusões e sugestões.

4) *Programação inteira*: coleta de informações, aprendizagem individual e apresentação oral dos resultados em aula. Aprendizagem de modelagem, pesquisa e resolução de programação inteira e de modelos de rede. Entrega do relatório escrito e de um vídeo explicando as etapas da solução, as conclusões e o depoimento do aprendizado pessoal e profissional de cada pessoa do grupo.

Cada relatório escrito que é enviado recebe uma resposta sobre os resultados e conclusões encontradas pelo grupo. Cada equipe deve agendar um tempo com o professor

para se inteirar do avanço na resolução do problema proposto. Caso o professor perceba que há erros gerais ou conceitos mal entendidos pelos alunos, pode saná-los na próxima aula.

As atividades acima são uma preparação para última atividade, que é uma apresentação oral de um tópico não explicado pelo professor. O tópico se refere a Programação Inteira e a problemas de rede, e cada grupo tem que fazer uma comparação entre algoritmos usando programação linear para encontrar a solução e um outro método (como planos de corte, por exemplo).

Na semana final do curso, cada equipe tem 25 minutos para apresentação dos resultados da última atividade e mais 10 minutos para responder questões formuladas pelos colegas e professor. Todos os participantes da equipe participam na apresentação e devem responder a pelo menos uma questão, assim todos têm a possibilidade de desenvolver a habilidade oral e todos precisam ter conhecimento da resolução do problema. Por fim, o professor comenta a respeito da solução do problema e sobre as habilidades escritas e orais dos alunos. Com base nas observações do professor, cada grupo grava um vídeo com uma apresentação final.

Forma de avaliação:

Na avaliação do curso de Programação Linear através do método de ABP, pode acontecer de um aluno com baixo desempenho no curso ter uma boa nota final em razão do bom desempenho do grupo. Para evitar essa falha na avaliação, chegou-se ao seguinte formato [21]:

Tipo de avaliação	% em relação ao total da nota
Provas parciais	40%
1 prova final	20%
Atividades ABP	10%
Atividade final de ABP	10%
Trabalho de casa	15%
Autoavaliação e avaliação dos pares	5%

Tabela 1: Avaliação no curso de PL através da ABP

A nota de cada aluno obtida na avaliação dos pares é multiplicada pela nota média das atividades de ABP (que é de no máximo 20%).

Avaliação do método de ABP pelos alunos:

Após o término do curso, convidou-se os alunos a responderem uma pesquisa relacionada aos benefícios do curso com a metodologia de ABP. A forma de avaliação foi através de nota (de acordo com uma escala numérica, escala de Likert) e explicação da razão dessa nota. Através de pesquisa anônima, os alunos avaliaram o curso sendo que de 237 alunos de Programação Linear nos anos de 2011, 2012 e 2013, 153 participaram da pesquisa. Pelos resultados constatou-se que a avaliação é positiva em relação ao método de aprendizagem baseada em problemas. Ressalta-se que o ponto alto na avaliação dos alunos refere-se ao uso de software para solucionar problemas de programação linear, em contrapartida, o ponto fraco está relacionado à melhoria de habilidades de autoaprendizagem para solucionar tópicos sem a explicação prévia do professor, aspecto que obteve a maior porcentagem dos alunos assinalando indiferença quanto ao método, o que deixa em aberto a questão de como solucionar esse limite.

Cabe ao professor averiguar o tempo para as tarefas, o trabalho na condução do curso e a mudança dos problemas apresentados a cada semestre, para evitar que uma turma se beneficie do trabalho da turma anterior. Há também alguns alunos que não se adequam ao formato da ABP, preferindo as aulas tradicionais, problema que é contornado motivando-os a procurar o atendimento para esclarecimento de conceitos e para elucidar pontos obscuros. A conclusão apresentada no artigo é que o método de ABP para ensino de Programação Linear, comprovadamente aumenta a eficácia do ensino, pois seu formato possibilita a autoaprendizagem por meio de pesquisa e o desenvolvimento de habilidades de compreensão de um problema real, modelagem e tomada de decisão.

“ Embora esta pesquisa tenha concluído ser muito útil o uso do ambiente de ABP, é importante que se observe que o tempo necessário para preparar, projetar e gerenciar o curso é maior que o tempo exigido por um curso tradicional. Este fato deve ser considerado para evitar que estudantes e professores fiquem sobrecarregados com muitas atividades de ABP no mesmo semestre. Qualquer pesquisa relacionada a encontrar esse equilíbrio será um trabalho futuro interessante.” (Garcia e Garza, 2015) [21]

O próximo capítulo traz a descrição de dois minicursos em que a metodologia de ABP foi aplicada para o ensino introdutório de programação linear.

5 Programação Linear e ABP no Ensino Superior

Como experimentação do método de ABP para ensino de introdução à Programação Linear, foram ministrados dois minicursos em universidades públicas: o primeiro na Unicamp (campus de Limeira-SP), no III Encontro Regional de Pesquisa Operacional do Sudeste – ERPO 2018, em 02 de maio de 2018 e o segundo na Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (campus de Teófilo Otoni-MG), nos dias 05 e 06 de dezembro de 2018. O objetivo para aplicação dos minicursos foi testar o método de aprendizagem baseada em problemas para ensino de introdução de programação linear com a finalidade de se verificar a funcionalidade ou não da ABP no ensino de PL e ao final de cada minicurso foi aplicado um questionário para avaliação do minicurso. Segue a descrição dos minicursos.

5.1 Estrutura Geral

Público alvo: alunos de graduação e professores de matemática do ensino superior.

Objetivo: utilizar técnicas da aprendizagem baseada em problemas para ensinar alguns tópicos introdutórios da disciplina de Programação Linear tais como modelagem e resolução gráfica de problemas.

Tempo: 2 horas - Minicurso ERPO e 4 horas o Minicurso da UFVJM;

Recursos: acesso a rede Wi-Fi, celular, tablet ou notebook com o aplicativo Desmos instalado (<https://www.desmos.com>), data-show, quadro, apagador, pincel e folhas impressas dos exercícios e questionário.

Observação: aplicou-se o questionário no final dos minicursos para coleta de dados e posterior avaliação da atividade proposta usando a metodologia PBL.

Metodologia: apresentou-se e analisou-se alguns tópicos sobre modelagem matemática, aprendizagem baseada em problemas e algumas noções básicas para introdução da resolução de um problema de Programação Linear, por meio de um exemplo.

Discutiu-se modelagem do problema conforme esquematizada na Figura 1, sendo que o processo de modelagem é constituído basicamente de 3 etapas: modelagem, validação e implementação. Colin (2015, p. 5) [41], define modelo como :“uma representação simplificada do comportamento da realidade expressa na forma de equações matemáticas

que serve para simular a realidade.”

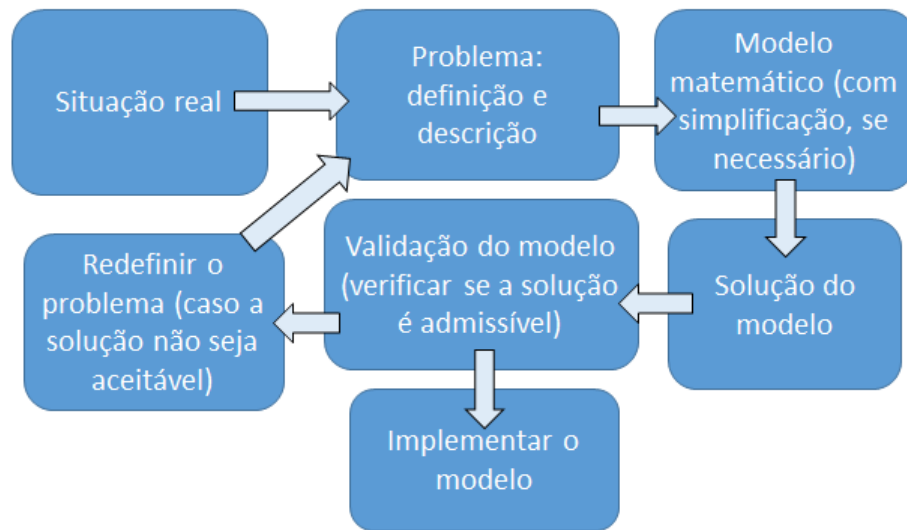


Figura 1: Construção do Modelo

Fonte: Adaptado de [44])

Na visão de Almeida et al. (2012) [44]:

“O ato de desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrito em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. E, ainda que não se possa falar em etapas bem definidas, é possível identificar elementos que caracterizam a Modelagem Matemática: o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são pré-definidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução.”

Foi apresentada a dinâmica da metodologia de aprendizagem baseada em problemas, com enfoque nas vantagens e desvantagens do método. Inicialmente trabalhou-se a modelagem e a construção gráfica, através do aplicativo Desmos (www.desmos.com), por meio de um exemplo. A resolução gráfica do problema foi proposta como desafio e ao final dos minicursos, cada participante recebeu um questionário para avaliação do minicurso, conforme consta nos apêndices B e D.

5.2 Minicurso 1: III Encontro Regional de Pesquisa Operacional - UNICAMP

No minicurso do ERPO foram propostos 3 exercícios: dois deles com duas variáveis, para serem modelados e resolvidos graficamente através do aplicativo Desmos. Um terceiro com 3 variáveis, para ser modelado e analisado/discutido se é possível ou não resolver graficamente através do Desmos ou um outro aplicativo. Para concluir foi apresentada a representação gráfica feita através do Mathematica e indagado qual seria a ideia de onde se buscar a solução ótima graficamente (se ela existir).

O primeiro desafio foi a escolha do tópico de Programação Linear a ser trabalhado no minicurso, tendo-se em vista que a inscrição foi feita na hora do evento, durante o credenciamento. Portanto, não se sabia de antemão quem estaria participando. O público alvo possível era de alunos de graduação e professores de matemática do ensino superior. Para ser possível abranger todos os participantes, a opção foi escolher a Introdução de Programação Linear. Os exercícios foram selecionados com base na grade curricular dos cursos de graduação do campus da Unicamp – Limeira.

Foram apresentados e discutidos alguns tópicos sobre: modelagem matemática, aprendizagem baseada em problemas e noções básicas para introdução da resolução de um problema de Programação Linear.

Atividades desenvolvidas: inicialmente foi proposto um problema para se encontrar qual a quantidade de cada produto que forneceria o lucro máximo. Os alunos receberam uma folha com os dados do problema e deveriam formulá-lo respondendo as questões propostas. A primeira instrução para a atividade era se agruparem em duplas ou trios. Depois de modelarem o problema colocando os dados em uma tabela dada na folha, deveriam escrever o problema na forma padrão: variáveis de decisão, função objetivo, restrições e tipo de variável. Em seguida, deveriam representar graficamente as restrições utilizando o aplicativo desmos e descobrirem como chegar a resolução gráfica do problema de produção. Segue abaixo o enunciado do problema:

Uma loja de artesanato faz e vende tigelas e canecas de cerâmica. A loja ganha U\$40 por tigela e U\$50 por caneca. Uma tigela requer 1 hora de trabalho e 4 libras de barro. Uma caneca exige 2 horas de trabalho e 3 libras de barro. Estão disponíveis 40 horas de trabalho por dia. A loja pode obter apenas 120 libras de barro por dia. Encontre o lucro máximo por dia e determine quanto de cada produto deve ser feito. (Adaptado de

[45]). Após a construção do gráfico foi proposto o desafio de como se encontrar a solução, graficamente.

Abaixo se encontra a construção do gráfico através do aplicativo Desmos, ressaltando-se o fato de que só interessam os pontos em que as variáveis de decisão são números inteiros, logo apenas os pontos destacados são soluções viáveis.

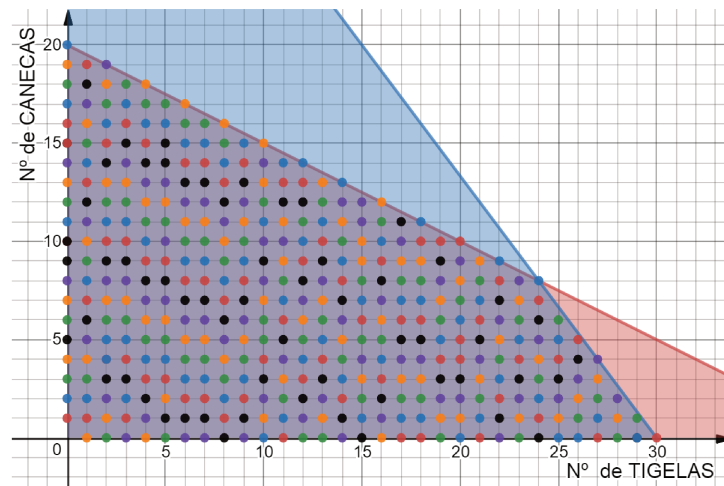


Figura 2: Região factível

Após o exemplo foram propostos mais três problemas: dois com duas variáveis e um com 3 variáveis, sendo que ao final foi aplicado um questionário para coleta de dados e avaliação da atividade proposta usando a metodologia de ABP. Havia 18 participantes no minicurso, 17 deles responderam ao questionário e 1 devolveu em branco sendo que havia 8 alunos de graduação, 6 de pós-graduação a nível de mestrado, 2 de doutorado, 1 professor universitário e mestrando e o 1 participante não respondeu ao questionário.

Todos os participantes do minicurso que responderam ao questionário tinham um conhecimento prévio de Programação Linear e foram unânimes em responder que o objetivo principal do minicurso (discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas) foi atingido. Também todos responderam que, como docentes, utilizariam essa metodologia no ensino das diversas disciplinas, alguns usando parcialmente a metodologia e outros selecionando disciplinas nas quais seria possível utilizá-la.

A última questão do questionário propunha que se apresentasse sugestões de melhorias para as atividades propostas no minicurso. As respostas foram bastante diversificadas: explorar problemas inteiros, solucionar problemas de dimensionamento de corte, dar oportunidade para os alunos criarem algum problema de PL, mostrar as

áreas profissionais que utilizariam PL, apresentar um slide com a forma padrão de cada problema, utilizar Geogebra 3D (pois é gratuito) com o problema de 3 variáveis e explorar mais a parte 3D.

Resultados e conclusões:

O tempo de duração do minicurso inviabilizou a possibilidade de pesquisa individual extraclasse e limitou o tempo de discussão de estratégias de resolução dos problemas. A maioria dos participantes trabalhou em duplas e constou-se que a maior parte do tempo do minicurso foi de participação ativa das pessoas, seja de interação entre os pares ou tirando dúvidas com quem estava ministrando o minicurso ou na modelagem dos problemas e construção gráfica.

Houve grande participação e envolvimento das pessoas que fizeram o minicurso, o que ficou comprovado pelas respostas do questionário, mais especificamente nas perguntas relacionadas ao objetivo do minicurso ter sido alcançado e que utilizariam a metodologia PBL se lecionassem. Quanto as sugestões apresentadas, algumas são inviáveis considerando o tempo do minicurso e o fato de não se saber antecipadamente o nível de conhecimento dos participantes, como por exemplo colocar problemas de corte e pedir que os alunos formassem um problema de PL. O aplicativo Desmos trabalha com áreas bidimensionais e o Geogebra 3D não faz a representação gráfica de inequações, o que impossibilita a utilização de ambos os softwares para solução gráfica de problema de PL com mais de duas variáveis. O último problema proposto, tridimensional, teve como objetivo instigar a discussão e análise se seria possível ou não resolver graficamente através do aplicativo Desmos ou outro aplicativo. Foi mostrada a apresentação gráfica do problema 3D, feita através do software Mathematica, e discutido a dificuldade de se chegar à solução graficamente em se tratando de mais de duas variáveis.

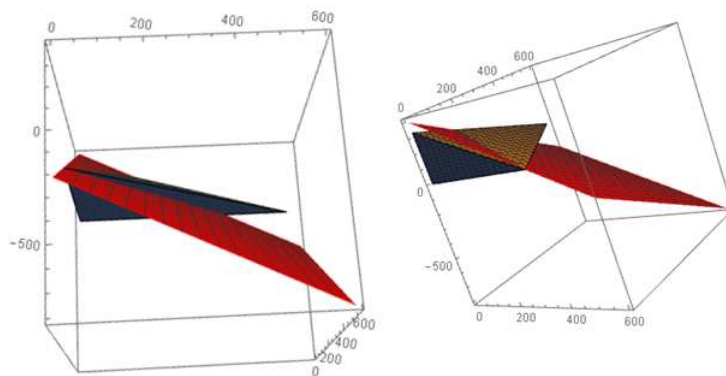


Figura 3: Representação gráfica do problema com 3 variáveis.

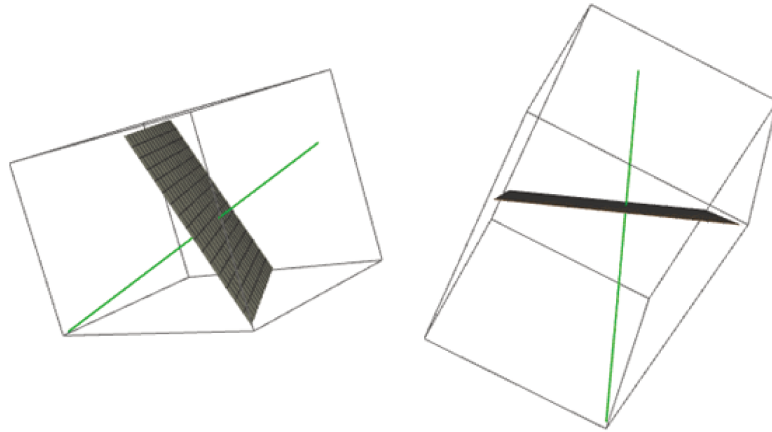


Figura 4: Direção do vetor gradiente e o plano perpendicular ao gradiente.

Ao se plotar simultaneamente o gráfico com as restrições, o vetor gradiente e o plano perpendicular a esse vetor, fica nítida a dificuldade que há em se buscar a solução ótima no problema com três variáveis.

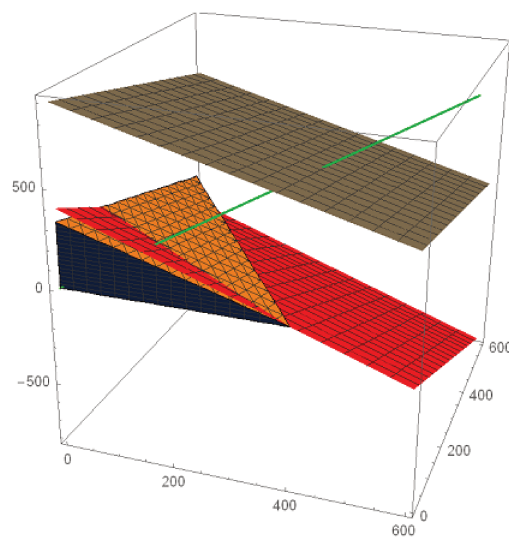


Figura 5: Gráfico com a representação das restrições, vetor gradiente e o plano perpendicular ao gradiente.

Abaixo o gráfico com a solução em destaque (ponto preto) de coordenadas $(x, y, z) = (0, 160, 240)$. A solução foi obtida pelo software Mathematica para ser apresentada aos participantes do minicurso com a finalidade de demonstrar que, para problemas a partir de três variáveis, não é viável a solução gráfica.

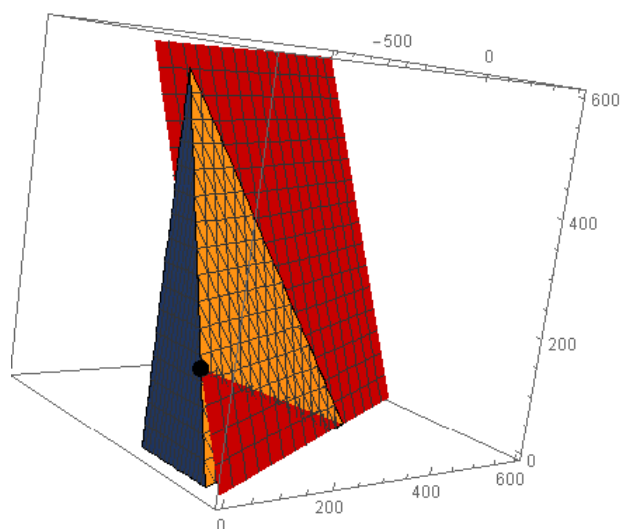


Figura 6: Gráfico com a representação das restrições e solução: ponto em destaque.

Por fim, foi discutido como se chegar a solução ótima com as seguintes respostas dos participantes: pelo método Simplex e método Dual (mais precisamente, métodos Primal Simplex e Dual Simplex). A resolução pelo método Dual Simplex se encontra no Apêndice A.

Um ponto muito positivo do minicurso foi a utilização do aplicativo desmos, um aplicativo gratuito que pode ser usado online, através do celular, notebook, etc. e por esse motivo foi selecionado para a resolução gráfica dos problemas. Nenhum dos participantes conhecia o aplicativo e vários dos alunos que responderam ao questionário, comentaram ter gostado dos resultados gráficos obtidos com essa ferramenta.

Uma das questões do questionário de avaliação do minicurso era sobre o objetivo do minicurso ter sido atingido (Objetivo: discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas).

Obs.: Todos marcaram SIM, mas nem todos os participantes deram sua opinião, sendo que alguns participantes ressaltaram mais de um ponto positivo. As respostas mais mencionadas estão representadas no gráfico 7 e todas as respostas constam do Apêndice B.

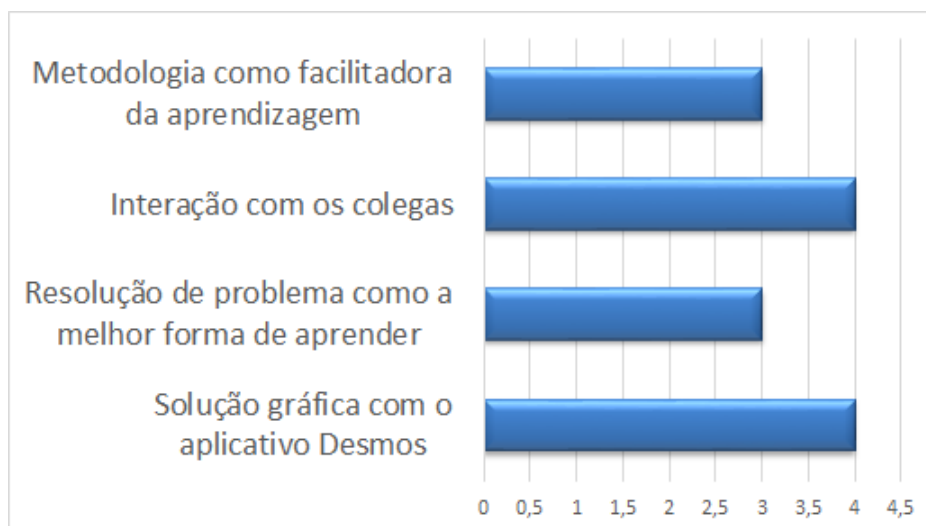


Figura 7: Pontos positivos destacados pelos participantes do Minicurso ERPO 2018

5.3 Minicurso 2: UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

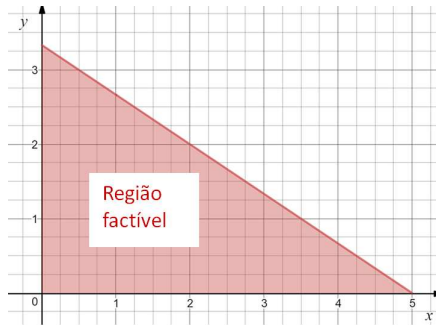
Quanto ao minicurso aplicado na UFVJM, houve alteração nos problemas, foi retirado o problema com 3 variáveis e acrescentou-se outros dois problemas, um com múltiplas (infinitas) soluções e outro com solução ilimitada e ainda foi proposto ao final dois desafios, para se alterar o tipo de solução modificando-se os dados dos dois últimos problemas. O problema tridimensional, apesar de ter trazido discussões interessantes, ficou um tanto deslocado da proposta de se trabalhar com o desmos (que trabalha dimensões bidimensionais), e ainda, iria ter um grau de dificuldade maior para alunos que nunca haviam trabalhado com programação linear na UFVJM.

Além da apresentação dos tópicos sobre modelagem, noções básicas para introdução da resolução de um problema de Programação Linear e aprendizagem baseada em problemas, acrescentou-se algumas informações mencionadas a seguir, tendo em vista que os alunos possivelmente não haviam estudado PL.

- A Pesquisa Operacional surgiu durante a 2ª Guerra Mundial, é uma ciência ligada a tomada de decisão com a finalidade de otimizar a alocação de recursos escassos de forma eficiente.
- Programação Linear é uma área da Pesquisa Operacional em que as funções do modelo, função objetivo e restrições são lineares.

- As representações gráficas de problemas de otimização linear, não linear e inteira estão ilustradas a seguir:

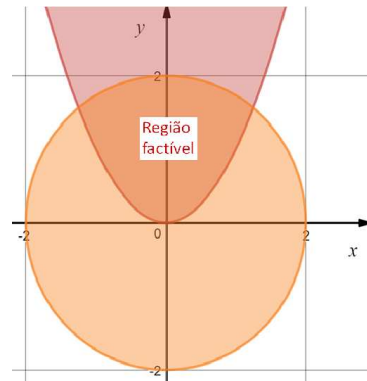
- Representação gráfica de um problema de otimização linear:



Função objetivo: $\min f(x, y) = 2x + y$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 2x + 3y \leq 10 \\ x \geq 0 \quad e \quad y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

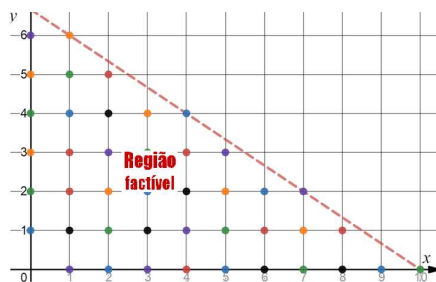
- Representação gráfica de um problema de otimização não linear



Função objetivo: $\min f(x, y) = x + y$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x^2 \leq y \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Representação gráfica de um problema de otimização inteira:



Função objetivo: $\min f(x, y) = 2x + y$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 20x + 30y \leq 200 \\ x \geq 0 \quad e \quad y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Áreas de aplicação da PL: alimentação (dieta, composição de ração), rotas de transporte, siderurgia, petróleo, agricultura, finanças, mineração e localização industrial.
- Aplicação da PL na resolução de problemas de: transporte, transbordo, designação, planejamento de produção (mix de produtos, dimensionamento de lotes e seleção de processos), gestão financeira e problemas de corte e empacotamento entre outros [38].

Os tópicos abaixo também foram acrescentados no minicurso da UFVJM:

1. Forma geral do problema de Otimização Linear:

$$\begin{aligned} \min \text{ (ou máx) } & f(x) \\ \text{sujeito a } & x \in \Omega \end{aligned}$$

em que:

- $f(x)$ é a função objetivo,
- x é a variável de decisão, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Ω é o conjunto factível (domínio e restrições).

Seja o problema na forma padrão de minimização:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{sujeito a } & x \in \Omega \end{aligned}$$

Uma solução x^* é factível (ou viável) quando satisfaz todas as restrições do problema, caso contrário a solução é *infactível*.

Se $\Omega = \emptyset$, o problema é infactível.

Uma solução x^* é ótima quando ela é factível e é o melhor valor da função objetivo:

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega.$$

Se para toda solução $\bar{x} \in \Omega$ existir outra solução $\tilde{x} \in \Omega$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, então o problema é ilimitado (custo $-\infty$).

2. Hiperplano e semi-espço:

Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo e b um escalar

$$x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad a^t \cdot x = b \text{ é um hiperplano,}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad a^t \cdot x \geq b \text{ é um semi-espço}$$

$$\text{assim como } x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad a^t \cdot x \leq b \text{ também é um semi-espço .}$$

Exemplos:

O minicurso ministrado na UFVJM teve mais tempo, 4 horas (duas horas em duas tardes) de minicurso enquanto que em Limeira foram 2 horas.

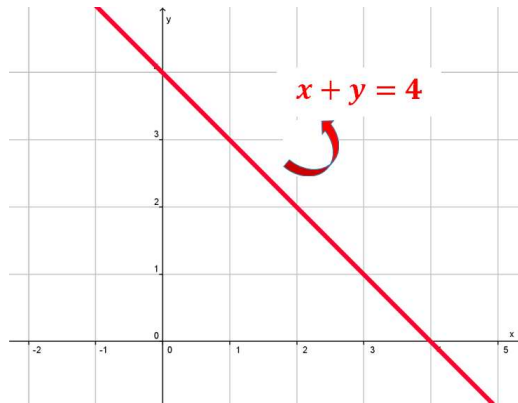


Figura 8: Hiperplano

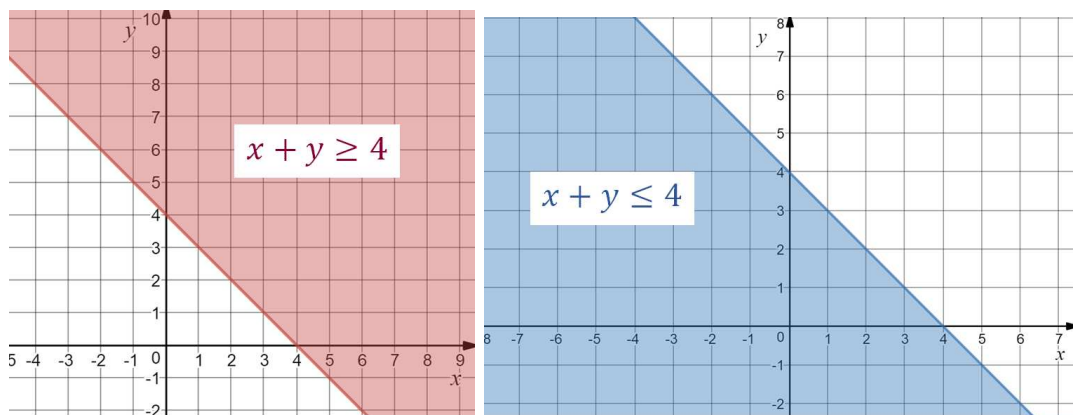


Figura 9: Semi-espacos

Os participantes formaram duplas ou trios e receberam uma folha com um exemplo, um problema a ser modelado (o mesmo do minicurso de Limeira) preenchendo-se uma tabela e posteriormente escrevendo o problema na forma padrão de PL. Os alunos foram no quadro para modelarem os problemas (preenchendo-se tabelas e escrevendo-se na forma padrão). Após a modelagem, foi pedido que representassem graficamente as restrições utilizando-se o aplicativo DESMOS. Após a construção gráfica, lançou-se o primeiro desafio: diante da região factível, descobrirem como chegar ao valor ótimo (se existisse), através de pesquisa online.

Depois dos alunos terem modelado e construído o gráfico através do aplicativo Desmos, isto é, depois de terem chegado à região factível, foi dado um tempo para pesquisarem como chegar a solução gráfica. Ocorreu que apenas uma aluna de uma dupla disse ter que usar o vetor gradiente para procurar a solução gráfica, mas não soube como ... Outro aluno identificou que a solução está num ponto extremo, e passou a calcular o valor da função objetivo nos vértices para encontrar o valor ótimo.

Foram propostos quatro problemas para serem modelados e resolvidos graficamente. O número de participantes foi de 10 alunos no primeiro dia, dentre os quais 3 eram do curso de licenciatura em Matemática e 7 do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BC & T) e 8 no segundo, todos de graduação. Apenas uma participante conhecia o aplicativo Desmos. Quatro pessoas responderam ter algum conhecimento prévio de programação linear, portanto 50% dos participantes.

Através do aplicativo Desmos, é possível se construir a reta suporte do vetor gradiente, a reta perpendicular à reta do gradiente (curva de nível), e por controle deslizante percorrer a região factível e chegar ao ponto que resulta no valor ótimo da função objetivo (quando este existe). Na Figura 10 está representado o gráfico de um problema de mistura (problema 2 proposto), no qual se indaga quais quantidades dos ingredientes A e B forneceria o custo mínimo de produção de ração.

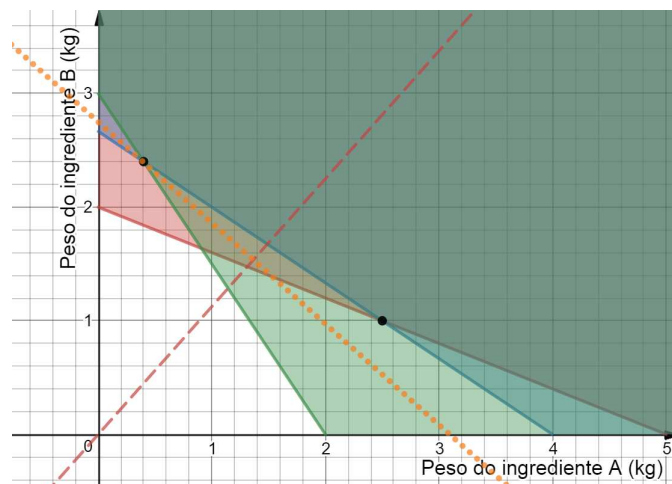


Figura 10: Região factível (região mais escura), reta suporte do vetor gradiente e reta perpendicular ao gradiente

As questões e resoluções dos problemas do minicurso UFVJM constam do apêndice C e o questionário com as respostas, do apêndice D. Abaixo estão algumas considerações sobre as respostas do questionário de avaliação do minicurso UFVJM.

Os participantes foram unânimes em responder que o objetivo do minicurso (discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a Aprendizagem Baseada em Problema) foi atingido e abaixo estão citadas algumas justificativas para as respostas dessa pergunta:

- “Sim. Calculamos a solução de diversos problemas, onde discutimos com colegas do minicurso o tema abordado.”

- “Sim. Através da PL foi possível uma análise gráfica e com a utilização da metodologia de aprendizagem conseguimos adquirir conhecimento para resolver os problemas.”
- “Sim. Nesses dois dias de minicurso creio que o que foi passado para nós supriu e cumpriu o objetivo, a metodologia utilizada foi boa, aprendi, adquiri conhecimento. Não conhecia o Desmos e achei muito boa a sua funcionalidade, é uma ferramenta muito boa.”
- “Sim. Pois abordou uma forma de ensino diferente e prática, o que desperta o interesse.”

Em alguns pontos das justificativas acima destacam-se características desejáveis da metodologia de ABP como a questão do trabalho em equipe, da metodologia “ser boa” e da forma de ensino ser “diferente e prática”.

À pergunta “Você, como docente, utilizaria essa metodologia na disciplina que leciona ou que vier a lecionar?”, todos responderam que sim. Eis algumas justificativas:

- “Pois é bastante didático, uma forma de atrair a atenção dos alunos.”
- “É uma boa forma de resolver problemas relacionados ao contexto de engenharia... , sendo de ótima aplicação em determinadas disciplinas do curso.”
- “Por que foi didática a forma de abordagem do tema e permite melhor compreensão do conteúdo.”
- “Por que é muito interessante. Existe a questão didática unida a prática além da análise gráfica que deixa o conteúdo mais didático.”
- “Pelo que eu vi, eu gostei, achei muito interessante tanto a metodologia utilizada para resolver os exercícios como também as ferramentas utilizadas e o conhecimento que pode ser utilizado em nossas vidas, na vida acadêmica. Pode nos auxiliar muito em problemas, trabalhos e atividades encontradas em nosso cotidiano.”
- “Utilizaria essa metodologia pois ela nos auxilia na resolução dos problemas sugeridos de programação linear e também na resolução gráfica.”

- “Por que é uma disciplina interessante do ponto de vista que foi aplicada e seria de muita valia no crescimento dos alunos.”

As respostas indicam que o nível de motivação e interesse podem ser ativados pela metodologia de aprendizagem baseada em problemas. A avaliação do curso pelos participantes do minicurso foi: muito bom (5 pessoas) e ótimo (3 pessoas).

Na última questão foi pedido que se apresentasse sugestões de melhoria para as atividades propostas. No gráfico 11 estão as respostas:



Figura 11: Sugestões para melhoria do Minicurso UFVJM - 2018

Foram propostos 4 problemas, além do exemplo e ao final do minicurso chegou-se ao terceiro problema para algumas duplas, sendo que para o último não houve tempo para modelagem e busca da solução.

O tempo novamente foi um fator limitante, pois o ritmo dos participantes foi mais lento do que no minicurso anterior, e não foi possível fazer todos os exercícios propostos. Esse foi um ponto que apareceu nas respostas do questionário como um fator a ser melhorado: aumentar o tempo do minicurso. A avaliação do minicurso foi de muito boa a ótima, e houve unanimidade quanto as repostas da pergunta de que o minicurso havia atendido o objetivo. Pode-se considerar que o resultado do minicurso atendeu as expectativas e foi bastante satisfatório.

6 Atividades de Programação Linear por meio de ABP

Para finalizar o trabalho foram selecionados dois problemas que podem ser propostos para ensino de Programação Linear, com grau de dificuldade crescente, em que o primeiro tem dados de custo e geração de energia em um parque de turbinas eólicas e o segundo tem duas questões relacionadas à produção e consumo de energia solar, a primeira com 10 variáveis (que são os ângulos de inclinação de cada um dos 10 painéis solares) e a segunda com mais de 30 variáveis (entre as quais se destaca o consumo de energia de vários aparelhos em diversos intervalos de tempo). O problema mais simples pode ser proposto para estudantes de ensino médio, podendo-se trabalhar as habilidades de raciocínio e modelagem, por exemplo. O problema da energia solar, sendo mais complexo, sugere-se que seja proposto para alunos do ensino superior.

Estando definidos os problemas o próximo passo é dividir a turma em grupos de no mínimo 3 e no máximo 5 alunos. O número de alunos por grupo depende do tempo disponível para a aplicação da atividade: quanto mais tempo disponível, menor pode ser o grupo. Para menos tempo, grupos mais numerosos são mais indicados, pois o tempo pode ser otimizado com a divisão das várias tarefas. Os próximos passos são: explicar como funciona a ABP e apresentar o problema.

A avaliação pode ser feita através da análise das resoluções e respostas escritas entregues por cada grupo, bem como da apresentação oral das soluções, com participação de todo o grupo, sendo que o professor e os colegas de outros grupos podem fazer perguntas para esclarecimento de possíveis dúvidas acerca da resolução.

As atividades sugeridas nesse capítulo foram extraídas do Desafio de Pesquisa Operacional (em inglês: “TORCH, The Operations Research Challenge”), em que as questões são formuladas por alunos universitários de três universidades canadenses, e propostas a alunos do ensino médio, em competições anuais. Os alunos são agrupados em equipes de 3 a 4 pessoas e tem um dia para resolverem de 5 a 10 questões relacionadas a pesquisa operacional em diversas áreas do conhecimento. A questão vem com a pontuação a ser obtida caso a resposta esteja correta. Um fato que merece destaque é que nenhum conhecimento prévio de Pesquisa Operacional é requisito para se participar do desafio. [46]

6.1 Sugestão de questões a serem propostas

1. Parques Eólicos

Para aumentar o fornecimento futuro de energia, a empresa Optimal Power Generation (OPG) iniciou um projeto de parque eólico perto de Toronto. Um parque eólico é um grupo de turbinas eólicas que converte a energia cinética do vento em energia elétrica. [47]

Após a inspeção inicial a OPG identificou 25 locais potenciais para turbinas eólicas. Cada localização potencial é representada por uma célula quadrada de 1×1 na Tabela 12. Os valores (x, y) em cada célula mostram o custo (\$ K) de construir uma turbina na célula e a quantidade de energia gerada (MW), respectivamente. Por exemplo, custa \$ 3K para construir uma turbina na célula superior esquerda e a energia de 8MW é gerada como resultado.

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 2: Locais potenciais de turbinas eólicas.

A OPG tem um orçamento total de US\$ 50 mil para o projeto do parque eólico e pode construir no máximo uma turbina em cada célula.

Pergunta-se:

- (a) A OPG gostaria de saber onde colocar as turbinas para maximizar a quantidade total de energia gerada, enquanto cumpre a restrição orçamentária. Quais células sua equipe recomenda que a OPG selecione para construir as turbinas? A quantidade total de energia gerada é a soma da quantidade de energia gerada

nas células selecionadas.

- (b) Suponhamos que, com o mesmo custo, a OPG possa construir uma grande turbina em um bloco quadrado de 2×2 em vez de construir quatro turbinas regulares em quatro células quadradas de 1×1 . A grande turbina gera mais 10MW de potência do que a quantidade total de energia gerada pelas quatro turbinas regulares correspondentes. Por exemplo, custa $3 + 3 + 14 + 13 = \$33K$ para construir uma grande turbina no bloco quadrado 2×2 superior esquerdo, gerando $(8 + 7 + 31 + 27) + 10 = 83MW$ de potência. Com a possibilidade de construir grandes turbinas, quais blocos e células sua equipe recomenda que a OPG selecione para construir as turbinas grandes e regulares a fim de maximizar a quantidade total de energia gerada? Observe que o orçamento total disponível ainda é de \$50.000 e cada célula pode ser usada para construir no máximo uma turbina, seja ela grande ou regular.

Respostas:

1. (a) Marque com x as células na Tabela 3 que sua equipe recomenda para construir as turbinas. A quantidade total de energia gerada é _____ MW.

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 3: Locais recomendados para turbinas eólicas.

- (b) Marque com * e x , respectivamente, os blocos e as células na Tabela 4 que sua equipe recomenda para construir as turbinas grandes e regulares. A quantidade total de energia gerada é _____ MW.

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 4: Locais recomendados para turbinas eólicas grandes e regulares.

2. Alocação de Painéis Solares

Sua empresa de engenharia foi contratada para construir painéis solares para abastecer um pequeno bairro [48]. São 10 painéis solares, que possuem ângulos que podem ser fixados independentemente. No entanto, uma vez que o ângulo é fixo, eles nunca podem ser alterados. Todas as casas neste bairro são “casas inteligentes”, e o sistema de painéis solares é capaz de alocar energia gerada em diferentes aparelhos em cada casa. Seu trabalho nesta questão é (1) decidir o ângulo de inclinação dos painéis solares, de modo a maximizar a absorção de energia e (2) chegar a uma alocação da energia gerada para os diferentes aparelhos em todas as casas.

Restrições:

Painéis solares: o ângulo de inclinação de cada painel solar afeta a quantidade de energia que pode produzir em uma hora do dia, dependendo de seu ângulo contra o ângulo do sol nesse intervalo de tempo (escolhemos duas horas como a unidade de medida resultando em 12 intervalos de duas horas em um dia). Excluimos os horários das 22:00 às 04:00 porque não há sol neste momento. O ângulo do sol para uma determinada hora do dia é dado na Tabela 5.

	AM					PM				
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo (em graus)	0	5	25	45	65	65	45	25	5	0

Tabela 5: Ângulos do Sol em diferentes momentos do dia.

A quantidade de energia que um painel solar pode gerar é uma função da diferença entre o ângulo definido entre o painel solar e o ângulo do sol em um determinado momento. Seja θ o ângulo de um painel solar, onde $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Vamos denotar α o ângulo do sol. Então a energia total, por painel solar, gerada em uma janela de duas horas (em unidades de energia) é:

$$E = \begin{cases} (100 - |\alpha - \theta|) & \text{se } \alpha > 0, \\ 0 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Requisitos de energia: o pequeno bairro tem um conjunto de casas cujas demandas de energia são combinadas, baseadas nos diferentes aparelhos: carro elétrico, AC / Aquecedor, iluminação e cozinha. Os requisitos de energia mudam ao longo do dia. O

número de unidades de energia necessárias para cada uma das demandas é dado na Tabela 6. Você precisa, ao longo do dia inteiro, satisfazer o “Total necessário”, listado como “Req. Total” na tabela. Observe que há uma quantidade mínima de energia que você deve alocar aos diferentes aparelhos e, em certos momentos, não é permitido alocar energia. O “x” significa que nenhuma energia pode ser alocada para aquele aparelho naquele momento.

		AM					PM				
Hora		04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
	“Req. Total” Total de energia requerida por dia	Energia mínima requerida por aparelho									
Carro elétrico	2000	300	100	50	x	x	x	x	50	100	300
Aquecedor	1600	300	50	0	x	0	0	x	0	50	300
Iluminação	2000	300	50	0	0	x	x	0	0	50	300
Cozinha	600	0	100	50	0	0	0	0	50	100	0

Tabela 6: Energia mínima necessária para diferentes horários do dia e a energia total necessária que deve ser distribuída ao longo do dia.

Bateria e Rede Elétrica: seu bairro também instalou uma bateria que pode armazenar energia ao longo do dia. A capacidade total da bateria é limitada a 1.000 unidades de energia. Toda energia gerada pelos painéis solares e não utilizada por qualquer aparelho é imediatamente transferida para a bateria. No entanto, como a bateria tem capacidade limitada, a energia solar transferida para a bateria quando estiver saturada será considerada como “transbordamento” para a rede elétrica principal. Isso causa instabilidade e você será cobrado US \$ 3 por unidade de energia de estouro.

Existem alguns casos em que você não consegue usar a energia da bateria, pelo fato dela estar descarregada. Nesse caso, você pode extrair energia da rede para atender à demanda a um custo de US \$ 3 por unidade de energia usada. Você não pode usar a rede elétrica principal para carregar a bateria.

Suposições e Parâmetros Adicionais:

1. Os painéis solares não precisam ser ajustados no mesmo ângulo.
2. Qualquer energia solar que não seja usada pelos aparelhos é automaticamente transferida para a bateria.
3. Se o seu bairro tem falta de energia (seja porque a energia solar é insuficiente ou você não pode optar por não usar a bateria), deve usar a energia da rede principal. O custo de usar energia da rede é de US \$ 3, o mesmo para qualquer eletrodoméstico.
4. A bateria não tem que ser usada sempre quando há uma falta de energia, você tem a

opção de extrair da rede.

5. A bateria tem uma capacidade máxima de 1000 unidades de energia. Quando a bateria estiver cheia, ela transborda e as unidades de energia extra causam instabilidade na rede principal. Essa instabilidade é um custo para o bairro e tem que pagar uma taxa de instabilidade, dependendo da quantidade de energia transbordada. O estouro da bateria custa US \$ 3 por unidade de energia.

6. Suponha que a bateria seja sempre recarregada no início do dia até a capacidade de um reator nuclear externo, de modo que às 04:00, a bateria esteja totalmente carregada para 1.000 unidades de energia.

Questão:

Encontre os ângulos apropriados dos 10 painéis solares e a alocação do total de energia gerada para os diferentes aparelhos em diferentes momentos do dia. Ou seja, você deve decidir quanto de energia é distribuída aos aparelhos, desde que satisfaçam as demandas mínimas e os totais necessários dados na Tabela 6. Encontre a alocação que minimiza o custo total para o bairro.

Obs.: para exemplificar a solução a questão traz um exemplo de resolução do problema, descrito abaixo.

	AM					PM				
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo α (em graus)	0	5	25	45	65	65	45	25	5	0

Tabela 7: Exemplo de ângulos do Sol em diferentes momentos do dia.

Considere o caso quando selecionamos o mesmo ângulo para todos os painéis solares (eles não precisam ser todos do mesmo ângulo). Esta é uma versão simplista.

	AM					PM				
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo θ (em graus)	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45

Tabela 8: Ângulos dos painéis solares em diferentes momentos do dia.

Exemplo de reposta de alocação de energia por aparelho.

Nota-se pelos dados da Tabela 9 que, para qualquer período de tempo, a energia total usada entre os aparelhos deve sempre somar um número menor ou igual do que a soma de energia fornecida pelas fontes: “Energia Solar”, “Bateria Usada” e “Energia da

	AM						PM			
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Energia Solar	0	600	800	1000	800	800	1000	800	600	0
Bateria Usada	1000	0	0	0	0	0	0	100	100	800
Energia da rede	0	100	100	0	0	0	0	0	0	200
Carro elétrico	300	200	500	x	x	x	x	500	200	300
Aquecedor	300	300	200	x	0	0	x	200	300	300
Iluminação	400	100	0	500	x	x	500	0	100	400
Cozinha	0	100	200	0	0	0	0	200	100	0
Transbordamento	0	0	0	0	300	800	500	0	0	0
Carga da bateria	0	0	0	500	1000	1000	1000	900	800	0

Tabela 9: Exemplo de alocação de energia.

Rede”. A energia total alocada para cada um dos aparelhos satisfaz a demanda requerida. Por exemplo, a soma da energia total alocada ao carro elétrico durante todo o tempo é exatamente 2000 unidades de energia. Às 10h, 1000 unidades de energia são geradas com 500 dedicadas à iluminação e as 500 restantes armazenadas na bateria. Além disso, às 12 horas, 800 unidades de energia são geradas, 500 das quais são alocadas para a bateria restante, e o restante transborda para a rede principal. Como pode ser visto na Tabela 9, o custo total para a vizinhança é $(100 + 100 + 200) \times \3 usando energia da rede e $(300 + 800 + 500) \times \3 de transbordamento estouro. Isso leva a um custo total de US \$ 6.000.

Responda:

1. Encontre o ângulo de inclinação mais adequado dos painéis solares, de modo a minimizar o custo. Dê sua resposta na Tabela 10.

	AM						PM			
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo θ (em graus)										

Tabela 10: Resposta: Ângulos dos painéis solares em diferentes momentos do dia.

2. Decidir quanto de energia deve ser distribuída aos aparelhos, desde que satisfaçam as demandas mínimas e os totais necessários dados na Tabela 6. Encontre a alocação que minimiza o custo total para o bairro, e preencha a Tabela 11.

Custo total em \$: _____

	AM					PM				
Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22
Energia Solar	0									
Bateria Usada										
Energia da rede										
Carro elétrico				x	x	x	x			
Aquecedor				x			x			
Iluminação					x	x				
Cozinha										
Transbordamento										
Carga da bateria										

Tabela 11: Sua resposta referente à alocação de energia.

6.2 Resolução das questões sugeridas

As questões propostas não tem uma única forma de resolução e podem ser solucionadas por estratégias distintas, em que as respostas podem ser mais ou menos apropriadas. As resoluções apresentadas em cada questão são uma das possibilidades.

6.2.1 Resolução da questão 1 - Parques Eólicos

Os recursos utilizados foram o Mathematica e o Excel.

Exercício 8 - Ano 2015 - Desafios da Pesquisa Operacional

Para aumentar o fornecimento futuro de energia, a empresa Optimal Power Generation (OPG) iniciou um projeto de parque eólico perto de Toronto. Um parque eólico é um grupo de turbinas eólicas que converte a energia cinética do vento em energia elétrica.

Após a inspeção inicial a OPG identificou 25 locais potenciais para turbinas eólicas. Cada localização potencial é representada por uma célula quadrada de 1 x 1 na Tabela 12. Os valores (x, y) em cada célula mostram o custo (\$ K) de construir uma turbina na célula e a quantidade de energia gerada (MW), respectivamente. Por exemplo, custa \$ 3K para construir uma turbina na célula superior esquerda e a energia de 8MW é gerada como resultado.

A OPG tem um orçamento total de US\$ 50 mil para o projeto do parque eólico e pode construir no máximo uma turbina em cada célula.

Pergunta-se:

1. A OPG gostaria de saber onde colocar as turbinas para maximizar a quantidade

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 12: Locais potenciais de turbinas eólicas.

total de energia gerada, enquanto cumpre a restrição orçamentária. Quais células sua equipe recomenda que a OPG selecione para construir as turbinas? A quantidade total de energia gerada é a soma da quantidade de energia gerada nas células selecionadas.

Solução:

Primeiramente interessa descobrir quais células apresentam o melhor custo/benefício, isto é, tem o menor custo de construção por MW de energia que irá gerar. Então dividindo-se o valor do custo x pela energia gerada y , obtem-se o custo da construção da célula por MW de energia que será gerada.

$$\left\{ \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{2}{4}, \frac{11}{21}, \frac{6}{13}, \frac{14}{31}, \frac{13}{27}, \frac{20}{44}, \frac{12}{25}, \frac{7}{16}, \frac{4}{8}, \frac{15}{31}, \frac{13}{25}, \frac{12}{24}, \frac{2}{5}, \right.$$

$$\left. \frac{7}{15}, \frac{11}{12}, \frac{15}{36}, \frac{12}{22}, \frac{4}{9}, \frac{10}{22}, \frac{7}{16}, \frac{8}{18}, \frac{12}{23}, \frac{2}{4} \right\}$$

$$= \{0,375 ; 0,42857 ; 0,5 ; 0,5238 ; 0,461538 ; 0,45161 ; 0,48148 ; 0,454545 ; 0,48 ; 0,4375 ; 0,5 ; 0,48387 ; 0,52 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,46667 ; 0,91667 ; 0,41667 ; 0,545455 ; 0,444444 ; 0,454545 ; 0,4375 ; 0,444444 ; 0,521739 ; 0,5\}$$

Ordenando os valores de forma crescente:

$$\left\{ \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{15}{36}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{4}{9}, \frac{8}{18}, \frac{14}{31}, \frac{10}{22}, \frac{20}{44}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{12}{25}, \frac{13}{27}, \frac{15}{31}, \frac{2}{4}, \right. \\ \left. \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{11}{22}, \frac{12}{24}, \frac{13}{25}, \frac{12}{23}, \frac{11}{21}, \frac{12}{22} \right\}$$

O próximo passo é modelar o problema tomando-se os valores acima em ordem crescente, tais que:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{8}, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{15}{36}, \dots, \quad \frac{x_{25}}{y_{25}} = \frac{12}{22}$$

de modo a definir os numeradores x_i com $1 \leq i \leq 25$ e os respectivos denominadores y_i , como $x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 15, \dots, x_{25} = 12$ e $y_1 = 8, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 36, \dots, y_{25} = 22$.

Modelagem do problema segundo a forma padrão de problemas de PL:

- Variáveis de Decisão: $x_i, \quad 1 \leq i \leq 25$: custo de construção de cada célula
- Função Objetivo: $\max z = \sum_{i=1}^k y_i, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq 25$
- Sujeito a: $\begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i \leq 50, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq 25 \\ x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 25 \end{cases}$

Atendendo-se a restrição do custo $\sum_{i=1}^k x_i \leq 50$, chega-se a:

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 3 + 2 + 15 + 3 + 7 + 7 + 4 + 8 = 49$$

A restrição de custo foi atendida: Custo = US\$49000. Agora basta somar os respectivos valores de y_i , com $i = 1, 2, \dots, 8$ para ver quanto de energia vai ser gerada:

$$\sum_{i=1}^8 y_i = 8 + 5 + 36 + 7 + 16 + 16 + 9 + 18 = 115$$

Vai ser gerada 115 MW de energia. Na tabela 13 as células em destaque indicam onde as usinas eólicas devem ser colocadas para obtenção do maior valor agregado, ou seja, melhor custo/benefício.

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 13: Locais ótimos recomendados para turbinas eólicas.

A quantidade total de energia gerada é **115 MW**.

- Suponhamos que, com o mesmo custo, a OPG possa construir uma grande turbina em um bloco quadrado de 2×2 em vez de construir quatro turbinas regulares em quatro células quadradas de 1×1 . A grande turbina gera mais 10MW de potência do que a quantidade total de energia gerada pelas quatro turbinas regulares correspondentes. Com a possibilidade de construir grandes turbinas, quais blocos e células sua equipe recomenda que a OPG selecione para construir as turbinas grandes e regulares a fim de maximizar a quantidade total de energia gerada? Observe que o orçamento total disponível ainda é de \$50.000 e cada célula pode ser usada para construir no máximo uma turbina, seja ela grande ou regular.

Resolvendo de forma lógica, interessa pegar as células selecionadas (que tem o menor custo para gerar energia) e sua vizinhança, para verificar a viabilidade de se construir uma usina grande, verificando o limite de 50 mil de custo.

(3 , 8)	(3 , 7)	(2 , 4)	(11 , 21)	(6 , 13)
(14 , 31)	(13 , 27)	(20 , 44)	(12 , 25)	(7 , 16)
(4 , 8)	(15 , 31)	(13 , 25)	(12 , 24)	(2 , 5)
(7 , 15)	(11 , 22)	(15 , 36)	(12 , 22)	(4 , 9)
(10 , 22)	(7 , 16)	(8 , 18)	(12 , 23)	(2 , 4)

Tabela 14: Células preferencias para construção de turbinas grandes.

Não é possível construir mais de uma grande turbina pela restrição do custo. Considerando-se as possibilidades de opções de se construir apenas uma turbina grande, dentre as destacadas na tabela 14 e testando mais algumas outras possibilidades, verifica-se abaixo qual das opções dará uma maior geração de energia, mantendo-se a restrição de custo:

Células	Energia a ser produzida e custo de construção das usinas grandes	Custo \ MW de energia produzida
(3, 8), (3, 7), (14, 31), (13, 27)	Energia1 = $(8 + 7 + 31 + 27) + 10 = 83$ Custo1 = 3 + 14 + 3 + 13 = 33	0,398
(11, 22), (15, 36), (7, 16), (8, 18)	Energia2 = $(22 + 36 + 16 + 18) + 10 = 102$ Custo2 = 11 + 15 + 7 + 8 = 41	0,402
(12, 25), (7, 16), (12, 24), (2, 5)	Energia3 = $(25 + 16 + 24 + 5) + 10 = 80$ Custo3 = 12 + 7 + 12 + 2 = 33	0,412
(12, 24), (2, 5), (12, 22), (4, 9)	Energia4 = $(24 + 5 + 22 + 9) + 10 = 70$ Custo4 = 12 + 2 + 12 + 4 = 30	0,429
(13, 25), (12, 24), (15, 36), (12, 22)	Energia5 = $(25 + 24 + 36 + 22) + 10 = 117$ Custo5 = 13 + 12 + 15 + 12 = 52	0,444
(15, 36), (12, 22), (8, 18), (12, 23)	Energia6 = $(36 + 22 + 18 + 23) + 10 = 109$ Custo6 = 15 + 12 + 8 + 12 = 47	0,432

As células em formato 2×2 que mais convém são $(3, 8)$, $(3, 7)$, $(14, 31)$, $(13, 27)$, pois tem uma maior eficiência. O custo para se construir uma turbina grande nessas quatro células é de \$33.000, portanto ainda sobram \$17.000 para construção de células unitárias. Para selecionar as opções mais convenientes, interessam as células com os valores ordenados de forma crescente da relação *custo de construção* \ *MW de energia gerada*:

$$\left\{ \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{15}{36}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{4}{9}, \frac{8}{18}, \frac{14}{31}, \frac{10}{22}, \frac{20}{44}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{12}{25}, \frac{13}{27}, \frac{15}{31}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{11}{22}, \frac{12}{24}, \frac{13}{25}, \frac{12}{23}, \frac{11}{21}, \frac{12}{22} \right\}$$

As células $(3, 8)$ e $(3, 7)$ já foram selecionadas para a consturção da turbina grande, então a melhor opção é tomar-se as células $(2, 5)$ e $(15, 36)$, o que resultará em:

$$\text{Energia} = (8 + 7 + 31 + 27) + 10 + 5 + 36 = 124 \text{ MW}$$

A um custo de:

$$\text{Custo} = 3 + 14 + 3 + 13 + 2 + 15 = 50$$

$*(3, 8)$	$*(3, 7)$	$(2, 4)$	$(11, 21)$	$(6, 13)$
$*(14, 31)$	$*(13, 27)$	$(20, 44)$	$(12, 25)$	$(7, 16)$
$(4, 8)$	$(15, 31)$	$(13, 25)$	$(12, 24)$	$\mathbf{x}(2, 5)$
$(7, 15)$	$(11, 22)$	$\mathbf{x}(15, 36)$	$(12, 22)$	$(4, 9)$
$(10, 22)$	$(7, 16)$	$(8, 18)$	$(12, 23)$	$(2, 4)$

Tabela 15: Locais ótimos para construção de turbinas regulares e grande.

$*$: blocos para construção de turbinas grandes e $\mathbf{x}$: células recomendadas para construção de turbinas regulares. A quantidade total de energia gerada é **124 MW**.

6.2.2 Resolução da questão 2 - Alocação de Painéis Solares

Há que se levar em conta que as demandas de energia nos intervalos de tempo variam, e nos intervalos de maior consumo há menor produção de energia solar (e vice-versa). O ideal é considerar que a energia solar produzida deve ser menor que a demanda, para evitar transbordamento de energia e há horários que a demanda de energia não é suprida pela produção de energia solar, que é nula e a melhor opção é, se possível, usar a energia da bateria (pois a energia da rede gera custo).

A formulação abaixo tem como objetivo o cálculo dos ângulos dos painéis solares, colocando-se a restrição de que a energia solar produzida deve ser menor ou igual à demanda total requerida, ou seja, 6200 e maior ou igual a 2600, conforme consta da tabela 16

APARELHO	Energia Mínima	Req. Total
Carro elétrico	900	2000
Aquecedor	700	1600
Luzes	700	2000
Cozinha	300	600
TOTAL	2600	6200

Tabela 16: Restrições de demanda de energia solar

Antes de fazer modelagem do problema, cabe uma ressalva: são modulares a função objetivo [49] e as restrições [50], portanto são não lineares. É possível linearizá-las modelando-se os valores absolutos da seguinte forma:

- $\min \sum_{i=1}^n c_i |x_i|$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}| \leq b \\ x_i \geq 0, c_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Tomando z_i tal que $|x_i|$ seja o menor número que satisfaz

$$x_i \leq z_i \text{ e } -x_i \leq z_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, n,$$

assim como $y_i \geq |x_i - x_{i+1}|$ que equivale a duas condições:

$$y_i \geq (x_i - x_{i+1}) \text{ e } y_i \geq -(x_i - x_{i+1}) \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Desta forma, obtem-se a formulação de programação linear:

- $\min \sum_{i=1}^n c_i z_i$
- Sujeito a:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \leq b \\ x_i \leq z_i, \quad -x_i \leq z_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \\ y_i \geq (x_i - x_{i+1}), \quad y_i \geq -(x_i - x_{i+1}) \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Voltando ao problema, segue a formulação do problema na forma padrão para se encontrar os 10 ângulos de inclinação dos painéis solares:

- Variáveis de Decisão:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \rho, \sigma, \phi, \lambda, \mu:$$

ângulos de inclinação dos 10 painéis solares

- Função Objetivo:

$$\begin{aligned} \min \quad z = & (100 - |5 - \alpha|) + (100 - |25 - \alpha|) + (100 - |45 - \alpha|) + (100 - |65 - \alpha|) \\ & + (100 - |65 - \alpha|) + (100 - |45 - \alpha|) + (100 - |25 - \alpha|) + (100 - |5 - \alpha|) + (100 - |5 - \beta|) \\ & + (100 - |25 - \beta|) + (100 - |45 - \beta|) + (100 - |65 - \beta|) + (100 - |65 - \beta|) + (100 - |45 - \beta|) \\ & + (100 - |25 - \beta|) + (100 - |5 - \beta|) + (100 - |5 - \gamma|) + (100 - |25 - \gamma|) + (100 - |45 - \gamma|) \\ & + (100 - |65 - \gamma|) + (100 - |65 - \gamma|) + (100 - |45 - \gamma|) + (100 - |25 - \gamma|) + (100 - |5 - \gamma|) \\ & + (100 - |5 - \delta|) + (100 - |25 - \delta|) + (100 - |45 - \delta|) + (100 - |65 - \delta|) + (100 - |65 - \delta|) \\ & + (100 - |45 - \delta|) + (100 - |25 - \delta|) + (100 - |5 - \delta|) + (100 - |5 - \theta|) + (100 - |25 - \theta|) \\ & + (100 - |45 - \theta|) + (100 - |65 - \theta|) + (100 - |65 - \theta|) + (100 - |45 - \theta|) + (100 - |25 - \theta|) \\ & + (100 - |5 - \theta|) + (100 - |5 - \rho|) + (100 - |25 - \rho|) + (100 - |45 - \rho|) + (100 - |65 - \rho|) \\ & + (100 - |65 - \rho|) + (100 - |45 - \rho|) + (100 - |25 - \rho|) + (100 - |5 - \sigma|) + (100 - |25 - \sigma|) \\ & + (100 - |45 - \sigma|) + (100 - |65 - \sigma|) + (100 - |65 - \sigma|) + (100 - |45 - \sigma|) + (100 - |25 - \sigma|) \\ & + (100 - |5 - \sigma|) + (100 - |5 - \phi|) + (100 - |25 - \phi|) + (100 - |45 - \phi|) + (100 - |65 - \phi|) \\ & + (100 - |65 - \phi|) + (100 - |45 - \phi|) + (100 - |25 - \phi|) + (100 - |5 - \phi|) + (100 - |5 - \lambda|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (100 - |25 - \lambda|) + (100 - |45 - \lambda|) + (100 - |65 - \lambda|) + (100 - |65 - \lambda|) + (100 - |45 - \lambda|) \\
& + (100 - |25 - \lambda|) + (100 - |5 - \lambda|) + (100 - |5 - \mu|) + (100 - |25 - \mu|) + (100 - |45 - \mu|) \\
& + (100 - |65 - \mu|) + (100 - |65 - \mu|) + (100 - |45 - \mu|) + (100 - |25 - \mu|) + (100 - |5 - \mu|) \\
& + (100 - |25 - \beta|) + (100 - |5 - \beta|) + (100 - |5 - \gamma|) + (100 - |25 - \gamma|) + (100 - |45 - \gamma|) \\
& + (100 - |65 - \gamma|) + (100 - |65 - \gamma|) + (100 - |45 - \gamma|) + (100 - |25 - \gamma|) + (100 - |5 - \gamma|) \\
& + (100 - |5 - \delta|) + (100 - |25 - \delta|) + (100 - |45 - \delta|) + (100 - |65 - \delta|) + (100 - |65 - \delta|) \\
& + (100 - |45 - \delta|) + (100 - |25 - \delta|) + (100 - |5 - \delta|) + (100 - |5 - \theta|) + (100 - |25 - \theta|) \\
& + (100 - |45 - \theta|) + (100 - |65 - \theta|) + (100 - |65 - \theta|) + (100 - |45 - \theta|) + (100 - |25 - \theta|) \\
& + (100 - |5 - \theta|) + (100 - |5 - \rho|) + (100 - |25 - \rho|) + (100 - |45 - \rho|) + (100 - |65 - \rho|) \\
& + (100 - |65 - \rho|) + (100 - |45 - \rho|) + (100 - |25 - \rho|) + (100 - |5 - \sigma|) + (100 - |25 - \sigma|) \\
& + (100 - |45 - \sigma|) + (100 - |65 - \sigma|) + (100 - |65 - \sigma|) + (100 - |45 - \sigma|) + (100 - |25 - \sigma|) \\
& + (100 - |5 - \sigma|) + (100 - |5 - \phi|) + (100 - |25 - \phi|) + (100 - |45 - \phi|) + (100 - |65 - \phi|) \\
& + (100 - |65 - \phi|) + (100 - |45 - \phi|) + (100 - |25 - \phi|) + (100 - |5 - \phi|) + (100 - |5 - \lambda|) \\
& + (100 - |25 - \lambda|) + (100 - |45 - \lambda|) + (100 - |65 - \lambda|) + (100 - |65 - \lambda|) + (100 - |45 - \lambda|) \\
& + (100 - |25 - \lambda|) + (100 - |5 - \lambda|) + (100 - |5 - \mu|) + (100 - |25 - \mu|) + (100 - |45 - \mu|) \\
& + (100 - |65 - \mu|) + (100 - |65 - \mu|) + (100 - |45 - \mu|) + (100 - |25 - \mu|) + (100 - |5 - \mu|)
\end{aligned}$$

- Sujeito a:
- Restrição de energia mínima requerida:

$$\begin{aligned}
& 2(100 - |5 - \alpha|) + 2(100 - |25 - \alpha|) + 2(100 - |45 - \alpha|) + 2(100 - |65 - \alpha|) + \\
& + 2(100 - |5 - \beta|) + 2(100 - |25 - \beta|) + 2(100 - |45 - \beta|) + 2(100 - |65 - \beta|) \\
& + 2(100 - |5 - \gamma|) + 2(100 - |25 - \gamma|) + 2(100 - |45 - \gamma|) + 2(100 - |65 - \gamma|) \\
& + 2(100 - |5 - \delta|) + 2(100 - |25 - \delta|) + 2(100 - |45 - \delta|) + 2(100 - |65 - \delta|) \\
& + 2(100 - |5 - \theta|) + 2(100 - |25 - \theta|) + 2(100 - |45 - \theta|) + 2(100 - |65 - \theta|) \\
& + 2(100 - |5 - \rho|) + 2(100 - |25 - \rho|) + 2(100 - |45 - \rho|) + 2(100 - |65 - \rho|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(100 - |5 - \sigma|) + 2(100 - |25 - \sigma|) + 2(100 - |25 - \sigma|) + 2(100 - |65 - \sigma|) \\
& + 2(100 - |5 - \phi|) + 2(100 - |25 - \phi|) + 2(100 - |45 - \phi|) + 2(100 - |65 - \phi|) \\
& + 2(100 - |5 - \lambda|) + 2(100 - |25 - \lambda|) + 2(100 - |45 - \lambda|) + 2(100 - |65 - \lambda|) \\
& + 2(100 - |5 - \mu|) + 2(100 - |25 - \mu|) + 2(100 - |45 - \mu|) + 2(100 - |65 - \mu|) \geq 2600
\end{aligned}$$

- Restrição do total máximo de energia requerida

$$\begin{aligned}
& 2(100 - |5 - \alpha|) + 2(100 - |25 - \alpha|) + 2(100 - |45 - \alpha|) + 2(100 - |65 - \alpha|) + \\
& + 2(100 - |5 - \beta|) + 2(100 - |25 - \beta|) + 2(100 - |45 - \beta|) + 2(100 - |65 - \beta|) \\
& + 2(100 - |5 - \gamma|) + 2(100 - |25 - \gamma|) + 2(100 - |45 - \gamma|) + 2(100 - |65 - \gamma|) \\
& + 2(100 - |5 - \delta|) + 2(100 - |25 - \delta|) + 2(100 - |45 - \delta|) + 2(100 - |65 - \delta|) \\
& + 2(100 - |5 - \theta|) + 2(100 - |25 - \theta|) + 2(100 - |45 - \theta|) + 2(100 - |65 - \theta|) \\
& + 2(100 - |5 - \rho|) + 2(100 - |25 - \rho|) + 2(100 - |45 - \rho|) + 2(100 - |65 - \rho|) \\
& + 2(100 - |5 - \sigma|) + 2(100 - |25 - \sigma|) + 2(100 - |25 - \sigma|) + 2(100 - |65 - \sigma|) \\
& + 2(100 - |5 - \phi|) + 2(100 - |25 - \phi|) + 2(100 - |45 - \phi|) + 2(100 - |65 - \phi|) \\
& + 2(100 - |5 - \lambda|) + 2(100 - |25 - \lambda|) + 2(100 - |45 - \lambda|) + 2(100 - |65 - \lambda|) \\
& + 2(100 - |5 - \mu|) + 2(100 - |25 - \mu|) + 2(100 - |45 - \mu|) + 2(100 - |65 - \mu|) \leq 6200
\end{aligned}$$

- Domínio

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \gamma \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \delta \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ, \\
& 0 \leq \rho \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \sigma \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \phi \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \lambda \leq 90^\circ, \quad 0 \leq \mu \leq 90^\circ
\end{aligned}$$

Os ângulos encontrados (através do Mathematica) foram:

$$\begin{aligned}
& \alpha = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \beta = 3.4322 * 10^{-9}, \\
& \gamma = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \delta = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \theta = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \rho = 3.4322 * 10^{-9}, \\
& \sigma = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \phi = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \lambda = 3.4322 * 10^{-9}, \quad \mu = 3.4322 * 10^{-9}
\end{aligned}$$

A próxima tabela traz os valores da energia solar produzida em cada intervalo de tempo, utilizando os valores dos ângulos encontrados acima.

Energia Solar produzida										
	AM				PM					
Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo α	0	5	25	45	65	65	45	25	5	0
Ângulo Θ										
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
3,4322E-09	0	95	75	55	35	35	55	75	95	0
Energia Solar produzida por intervalo	0	950	750	550	350	350	550	750	950	0
										TOTAL Energia Solar no dia 5200

O modelo foi simplificado para se encontrar os valores de energia gastos por aparelho, pensando no que seria o modelo ideal: que a demanda diária fosse igual a energia solar produzida no dia, o que evitaria o transbordamento de energia se houver excesso assim como a necessidade de se utilizar a energia da rede por falta de produção de energia solar. Considerou-se 1000 unidades de energia no primeiro horário, pois apesar de não haver energia solar, há a energia da bateria. No último horário ocorre o mesmo fato: não há energia solar portanto a energia utilizada é a da bateria. As variáveis receberam índices para possibilitar a modelagem, de acordo com a tabela 17:

Hora	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	Req. Total
Carro elétrico	x_1	x_2	x_3	-	-	-	-	x_8	x_9	x_{10}	2000
Aquecedor	y_1	y_2	y_3	-	y_5	y_6	-	y_8	y_9	y_{10}	1600
Iluminação	z_1	z_2	z_3	z_4	-	-	z_7	z_8	z_9	z_{10}	2000
Cozinha	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	600

Tabela 17: Variáveis para modelagem do problema da demanda de energia solar

Modelagem do problema segundo a forma padrão de problemas de PL:

- Variáveis de Decisão: $x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_8, y_9, y_{10}, z_1, z_2, z_3, z_4, z_7, z_8, z_9, z_{10}, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$ e w_{10}
- Função Objetivo: $\min z = |x_1 + y_1 + z_1 + w_1 - 1000| + |x_2 + y_2 + z_2 + w_2 - 950| + |x_3 +$

$$y_3 + z_3 + w_3 - 750| + |z_4 + w_4 - 550| + |z_5 + w_5 - 350| + |y_6 + w_6 - 350| + |z_7 + w_7 - 550| + |x_8 + y_8 + z_8 + w_8 - 750| + |x_9 + y_9 + z_9 + w_9 - 950| + |x_{10} + y_{10} + z_{10} + w_{10} - 1000|$$

- Sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 300, \quad y_1 \geq 300, \quad z_1 \geq 300, \quad w_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 100, \quad y_2 \geq 50, \\ z_2 \geq 50, \quad w_2 \geq 100, \quad x_3 \geq 50, \quad y_3 \geq 0, \quad z_3 \geq 0, \quad w_3 \geq 100, \\ z_4 \geq 0, \quad w_4 \geq 0, \quad y_5 \geq 0, \quad w_5 \geq 0, \quad y_6 \geq 0, \quad w_6 \geq 0, \\ z_7 \geq 0, \quad w_7 \geq 0, \quad x_8 \geq 50, \quad y_8 \geq 0, \quad z_8 \geq 0, \quad w_8 \geq 50, \\ x_9 \geq 100, \quad y_9 \geq 50, \quad z_9 \geq 50, \quad w_9 \geq 100, \quad x_{10} \geq 300, \quad y_{10} \geq 300, \\ z_{10} \geq 300, \quad w_{10} \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 2000, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_8 + y_9 + y_{10} \leq 1600, \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} \leq 2000, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 + w_9 + w_{10} \leq 600, \\ x_1 + y_1 + z_1 + w_1 \leq 1000 \end{array} \right.$$

Obs.: na modelagem há necessidade de se utilizar inequações referentes aos valores de demanda total requerida ao invés de equações, para evitar que o programa incorra em erro.

Utilizando-se recurso computacional, através do Mathematica chegou-se ao valor mínimo da função objetivo: $z = 1000$ e aos valores das demandas de energia de cada aparelho em cada intervalo: $\{1000 \{ x_1 \rightarrow 315,631 ; x_2 \rightarrow 379,68 ; x_3 \rightarrow 302,452 ; x_8 \rightarrow 322,781 ; x_9 \rightarrow 376,386 ; x_{10} \rightarrow 303,07 ; y_1 \rightarrow 315,571 ; y_2 \rightarrow 183,965 ; y_3 \rightarrow 132,637 ; y_5 \rightarrow 161,893 ; y_6 \rightarrow 161,931 ; y_8 \rightarrow 133,158 ; y_9 \rightarrow 183,905 ; y_{10} \rightarrow 326,941 ; z_1 \rightarrow 316,189 ; z_2 \rightarrow 236,889 ; z_3 \rightarrow 184,983 ; z_4 \rightarrow 244,929 ; z_7 \rightarrow 245,216 ; z_8 \rightarrow 187,648 ; z_9 \rightarrow 237,529 ; z_{10} \rightarrow 346,617 ; w_1 \rightarrow 10,0753 ; w_2 \rightarrow 127,51 ; w_3 \rightarrow 127,559 ; w_4 \rightarrow 28,6954 ; w_5 \rightarrow 28,7057 ; w_6 \rightarrow 28,644 ; w_7 \rightarrow 28,6806 ; w_8 \rightarrow 77,503 ; w_9 \rightarrow 127,500 ; w_{10} \rightarrow 15,127 \} \}$

Os valores das demandas foram colocados em tabelas, feita no Excel, e foi calculado o custo.

A tabela a seguir traz o cálculo dos valores do Total de energia requerida por aparelho/dia

Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	Demanda total Requerida por dia
Energia Solar	0	950	750	550	350	350	550	750	950	0	
Carro elétrico	316	380	302	0	0	0	0	323	376	303	2000
Aquecedor	315	184	133	0	162	162	0	133	184	327	1600
Iluminação	316	237	185	245	0	0	245	188	237	347	2000
Cozinha	10	127	128	29	29	29	29	77	127	15	600

Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Energia Solar	0	950	750	550	350	350	550	750	950	0
Bateria usada	957	0	0	0	0	0	0	0	0	992
Energia da rede	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Carro elétrico	316	380	302	0	0	0	0	323	376	303
Aquecedor	315	184	133	0	162	162	0	133	184	327
Iluminação	316	237	185	245	0	0	245	188	237	347
Cozinha	10	127	128	29	29	29	29	77	127	15
Transborda- mento	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Carga da bateria	43	65	67	343	502	661	937	966	992	0
Custo ZERO!!!!										

O custo é calculado pelo o somatório da energia da rede mais a energia que transborda, multiplicados por 3, ou seja:

$$Custo = \sum_{i=1}^{10} [3 \cdot (r_i + t_i)]$$

em que r_i é a Energia da Rede e t_i é a Energia que Transborda em cada intervalo i , ($i = 1, 2, 3 \dots 10$) de tempo. Portanto para os valores estipulados acima, o custo é zero.

Os ângulos encontrados na resolução acima são bem próximos de zero, então tomando outros valores próximos de zero, especificamente $0,5^\circ$ e 1° , foram feitas simulações que se encontram no Apêndice E, para se verificar outros cenários com ângulos próximos ao ideal mas que acarretarão geração de custo.

7 Conclusão

No ensino de matemática frequentemente é apresentado o conteúdo, exemplos e exercícios são propostos. Em geral o foco do ensino é a resolução de problemas, que muitas vezes se dá de forma mecânica e repetitiva, o que pode limitar o desenvolvimento do “pensamento matemático”, isto é, restringe a capacidade de resolver problemas um pouco (ou muito) diferentes ou de fazer conexões com outras áreas da matemática. Por meio da metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas, o problema é proposto antes da explicação da teoria, sendo que o objetivo é que os alunos aprendam matemática através da resolução do problema. O foco passa a ser a aprendizagem do(s) conteúdo(s), o processo de aprendizagem é ativo e, mais importante que obter a resposta é o caminho percorrido em que se constrói o conhecimento por meio de pesquisa, interação entre os pares e com o mentor (professor) dando suporte e direcionando o aprendizado.

Os desafios para se aplicar a metodologia ABP para o ensino fundamental e médio são maiores que para o ensino superior, pois para o ensino superior o nível de habilidades, conhecimento e autonomia é incomparavelmente maior. Talvez esse fato explique a razão de se ter o emprego da aprendizagem baseada em problema em diversos cursos superiores em contraste com a rara aplicação na educação básica. Entretanto, a meu ver a metodologia ativa para o ensino básico, como por exemplo a Aprendizagem Baseada em Projetos ou a Aprendizagem entre Pares ou Times, não deve ser colocada a parte tendo em vista os benefícios que pode trazer de motivação, engajamento e desenvolvimento de habilidades. Também os recursos computacionais devem ser explorados com uso de jogos educativos e aplicativos em que os alunos possam estar aprendendo de uma forma mais lúdica e mais ativa, participativa. No caso da metodologia de ABP para o ensino básico, há que se planejar uma forma de oferecer aos alunos suportes para que possam avançar na busca da solução, podendo ser com perguntas que os auxiliem a direcionar o aprendizado e/ou com indicação de fontes de pesquisa, de forma que não percam o interesse por não conseguirem vencer os obstáculos.

A aprendizagem baseada em problemas para o ensino de programação linear, apesar de escasso, se mostrou possível a partir do trabalho do professor Dr. Heriberto Garcia-Reyes e da professora assistente Cesia de la Garza Garza. Pode ser implementado em cursos de graduação, abrangendo vários tópicos de programação linear e obtendo resultados positivos em termos de aprendizado dos estudantes, segundo relato dos autores.

A ABP é utilizada como método de ensinar Programação Linear no curso de engenharia, tal que os tópicos como formulação, solução e análise de sensibilidade sejam abordados e, ao mesmo tempo, habilidades como trabalho em grupo, autonomia na aprendizagem e comunicação oral também sejam desenvolvidas. Através da interação com o professor e com os colegas, os alunos têm a possibilidade de resolver problemas reais e aprender conceitos por vezes complexos. Constatou-se que os alunos que tiveram sua aprendizagem por meio do método de ABP, obtiveram melhor desempenho que os alunos que aprenderam pelo método tradicional.

Dois minicursos foram ministrados com a finalidade de se averiguar a eficácia do método de aprendizagem baseada em problemas para o ensino introdutório de programação linear. Segue uma análise comparativa dos resultados dos dois minicursos: verificou-se que a dinâmica do segundo minicurso foi mais de acordo com a proposta de ABP em função de se ter disponível maior tempo para pesquisa, o que proporcionou maior envolvimento dos alunos. Também houve mais participação dos alunos, indo ao quadro para modelarem os problemas preenchendo tabelas e escrevendo os problemas na forma padrão. Em contrapartida, apesar do primeiro minicurso ter tido a metade do tempo do segundo, os participantes eram mais ágeis para modelarem os problemas e construir os gráficos das regiões factíveis. Uma explicação possível para esse fato é que 100% dos participantes do minicurso de Limeira (III ERPO) que responderam ao questionário já terem tido contato com PL, e boa parte ser de pós-graduandos. Em ambos os minicursos, após a construção da região factível através da representação das restrições, houve grande dificuldade em se associar o vetor gradiente da função objetivo para se procurar o valor ótimo, mesmo entre os participantes que haviam estudado programação linear, o que denota que essa estratégia exige um raciocínio não imediato.

Um ponto extremamente positivo foi que todos os alunos, de ambos os minicursos, responderam que o objetivo do minicurso foi atingido e que, como docentes, utilizariam essa metodologia na disciplina que lecionam (ou que viessem a lecionar) o que denota a eficácia da metodologia de ABP. Um aspecto interessante foi que as repostas dos questionários dos dois minicursos foram bem homogêneas, sendo que o perfil dos participantes dos minicursos eram bem distintos.

As sugestões para melhoria das atividades propostas nos minicursos são muito valiosas para aprimoramento da dinâmica de ABP, pois a reflexão sobre a prática é

que proporciona o avanço necessário para se atingir o objetivo do processo de ensino-aprendizagem. Pelo grau de envolvimento dos participantes dos dois minicursos e pelas respostas aos questionários foi possível avaliar positivamente o método de ABP para ensino introdutório de PL. Acredito que se a aplicação dos minicursos tivesse outra dinâmica, ou seja, não fosse com uma metodologia ativa, é provável que a avaliação feita pelos participantes não fosse tão positiva.

Para se trabalhar com a Aprendizagem Baseada em Problemas, há que se considerar vários aspectos, como a escolha do problema e sua adequação à proposta pedagógica, o uso de recursos tecnológicos, a dinâmica de acompanhamento e direcionamento dos alunos, a constante reflexão sobre a eficiência do processo de ensino/aprendizagem e a avaliação da metodologia. São muitas ações a serem implementadas e avaliadas, alguma simultaneamente que tornam a metodologia de aprendizagem baseada em problemas um desafio para quem a propõe.

De forma geral, para a aplicação da metodologia de aprendizagem baseada em problemas no ensino de matemática a nível superior, deve-se fazer uma análise da adequação ou não dessa metodologia, pois há disciplinas para os quais essa metodologia parece não ser a melhor opção, como por exemplo no ensino de cálculo e de álgebra, a menos que seja aplicada de forma pontual, em algum problema específico para aprofundamento da aprendizagem. Outras disciplinas como, por exemplo, programação linear (objeto de estudo desse trabalho), álgebra linear e geometria analítica poderiam ser ensinadas através da ABP ou outra metodologia ativa, como a sala de aula invertida.

A ABP é uma metodologia em perene construção e para quem se aventurar trilhar esse caminho, extremamente dinâmica e desafiadora. Por ser uma metodologia ativa, a ABP tem a característica de ser mais instigante e motivadora para os alunos, o que resulta em ganhos de envolvimento, aprendizagem e também no desenvolvimento de habilidades de comunicação, de trabalho em equipe e autoaprendizagem, necessárias ao bom desempenho profissional. O uso de recursos tecnológicos associados a estrutura da aprendizagem baseada em problemas compõe um cenário que agrega: um conjunto de meios disponíveis para pesquisa e um problema a ser solucionado, sendo que essa combinação, se bem trabalhada, certamente fará um diferencial na capacitação profissional, pois todo profissional se depara com situações problema e precisa encontrar os meios para solucioná-las. Portanto a aprendizagem baseada em problemas é um caminho promissor

para envolver os alunos e promover a aprendizagem.

Referências

- [1] D. P. D. L. PORTUGUESA, “Pesquisa operacional.”
- [2] P. A. BILINSKI, B. GROSS, C. W. N. FERNANDES, and L. B. BARBOSA, “Aplicação da pesquisa operacional na otimização da lucratividade de uma empresa no segmento de marcenaria,” 2016.
- [3] N. ANDRIOTIS, “10 métodos de aprendizagem ativos para alunos corporativos super engajados,” *Revista Educação*, 2016.
- [4] V. M. d. O. PAIVA, “Ambientes virtuais de aprendizagem: implicações epistemológicas,” *Educação em Revista*, vol. 26, no. 3, pp. 353–370, 2010.
- [5] A. OKADA, D. M. V. BARROS, and L. SANTOS, “Discutindo estilos de aprendizagem com tecnologias do projeto openlearn para videoconferência e mapeamento do conhecimento,” *Revista Estilos de Aprendizagem*, pp. 110–129, 2008.
- [6] T. OLIVEIRA and L. MORGADO, “Discussão online no ensino superior: o papel dos fóruns na aprendizagem colaborativa,” in *Atas do II Congresso TIC e Educação: Em direção à educação 2.0.*, pp. 3212–3221, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012.
- [7] J. A. VALENTE, “Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida,” *Educar em Revista*, no. 4, pp. 79–97, 2014.
- [8] N. A. N. BERBEL, “As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes,” *Semina: Ciências Sociais e Humanas*, vol. 32, no. 1, pp. 25–40, 2011.
- [9] S. V. W. B. OLIVEIRA and J. E. GIRALDI, “Técnicas de pesquisa - tipos de pesquisas,” *Edisciplinas USP*, Acesso em: 05 jan. 2019.
- [10] L. K. MICHAELSEN, A. B. KNIGHT, and L. D. FINK, *Team-based learning: A transformative use of small groups*. Greenwood publishing group, 2002.
- [11] G. PERISSÉ, “A teoria da escolha,” *Revista Educação*, 2011.
- [12] W. GLASSER, “Choice theory,” *William Glasser Institute-US*, 1998.

- [13] T. HUSSNG, “Understand three theories of classroom management,” *Universidade Husson Online*, 2016.
- [14] M. SOLEDADE, “Aprendizagem baseada em problemas (pbl), o que é?,” *Sílabe*, 2015.
- [15] A. WALKER and H. LEARY, “Uma metanálise de aprendizagem baseada em problemas: Diferenças entre tipos de problemas, tipos de implementação, disciplinas e níveis de avaliação,” *Jornal Interdisciplinar de Aprendizagem Baseada em Problemas*, vol. 3, no. 1, 2009. Purdue University Press.
- [16] G. F. MAIDAME, *Aprendizagem baseada em problemas no ensino fundamental II: aplicabilidade, potencial e reflexões de uma adaptação sob perspectivas geocientíficas*. PhD thesis, UNICAMP - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, 2018.
- [17] S. C. SOUZA and L. DOURADO, “Aprendizagem baseada em problemas (abp): Um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo,” *HOLOS*, vol. 5, no. 31, 2015.
- [18] E. ESCRIVÃO FILHO and L. R. d. C. RIBEIRO, “Aprendendo com pbl—aprendizagem baseada em problemas: relato de uma experiência em cursos de engenharia da eesc-usp,” *Revista Minerva*, vol. 6, no. 1, pp. 23–30, 2009.
- [19] R. DELISLE, *How to use problem-based learning in the classroom*. Ascd, 1997.
- [20] M. F. ANGELO, F. C. BERTONI, J. A. M. SANTOS, and A. C. Loula, “Análise da aplicação do método pbl no ensino de programação em engenharia de computação,” in *PBL 2010 Congresso Internacional*, (São Paulo), 2010.
- [21] H. GARCIA-REYS and C. d. I. G. GARZA, “A problem based learning framework to assess and develop soft skills in a linear programming course,” in *122nd ASEE Annual Conference & Exposition*, (Seattle, USA), pp. 26.86.1–26.86.16, 2015.
- [22] R. ZONTA, A. C. C. ROBLES, and S. GROSSEMAN, “Stress coping strategies developed by medical students of the federal university of santa catarina,” *Revista Brasileira de Educação Médica*, vol. 30, no. 3, pp. 147–153, 2006.
- [23] S. d. O. SOUZA, “Aprendizagem baseada em problemas (pbl – problem-based learning) : estratégia para o ensino e aprendizagem de algoritmos e conteúdos computacionais,” Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, 2001.

- [24] J. LANDSBERGER, “Study guides and strategies,” *Study Guides and Strategies*, 1996.
- [25] M. A. d. OLIVEIRA, *Metodologia do Ensino de Química e Estágio Supervisionado I*. Departamento de Química. Universidade Estadual de Londrina, Paraná.
- [26] A. MACHADO, A. V. MELLO, A. B. OLIVEIRA, A. G. GIRARDI, A. M. MELO, C. SHEPKE, C. Z. BILLA, C. TOLFO, D. WELFER, E. L. d. S. CARVALHO, F. N. KEPLER, J. P. S. d. SILVA, F. BINS FILHO, J. G. d. S. RECK, M. C. CERA, R. MACHADO, S. d. S. DEVINCENZI, S. L. S. MERGEN, and W. d. M. RECK, “Projeto pedagógico de curso de engenharia de software,” tech. rep., Fundação Universidade Federal do Pampa, 2012.
- [27] N. J. KIM, B. R. BELLAND, and D. AXELROD, “Scaffolding for optimal challenge in k–12 problem-based learning,” *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, vol. 13, 11 2018.
- [28] BRASIL, “Pcn+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias,” 2002.
- [29] U. d’AMBROSIO, “Sociedade, cultura, matemática e seu ensino,” *Educação e Pesquisa - São Paulo*, vol. 31, pp. 99–120, jan./abr. 2005.
- [30] BRASIL, “Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática,” *Brasília: MEC/SEF*, 1998.
- [31] M. T. DEJUSTE and V. SILVA, “A abordagem pbl e suas possibilidades no ensino da matemática,” *XIII INIC / IX EPG - UNIVAP*, 2009.
- [32] J. MERRITT, M. Y. LEE, P. RILLERO, and B. M. KINACH, “Problem-based learning in k–8 mathematics and science education: A literature review,” *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, vol. 11, 2017.
- [33] T. C. O’BRIEN, C. WALLACH, and C. MASH-DUNCAN, “Problem-based learning in mathematics,” *The Mathematics Enthusiast*, vol. 8, no. 1, 2011.

- [34] D. V. d. SOUZA, “O ensino de cálculo e aprendizagem baseada em problemas: desafios e possibilidade,” 2014.
- [35] M. F. ANGELO, A. C. LOULA, F. C. BERTONI, and J. A. M. SANTOS, “Aplicação e avaliação do método pbl em um componente curricular integrado de programação de computadores,” *Revista de Ensino de Engenharia*, vol. 33, no. 2, pp. 31–43, 2014.
- [36] J. F. SILVA, C. d. S. CRUZ, E. S. FUJIWARA, F. d. S. OUTA, and J. SCHIMIGUEL, “Uma ferramenta para o ensino de matemática utilizando a aprendizagem baseada em problemas em um ambiente para a educação à distância,” 2016.
- [37] V. CHVATAL, *Linear programming*. A series of Books in the Mathematical Science, New York, 1983.
- [38] M. ARENALES, V. ARMENTANO, R. MORABITO, and H. YANASSE, *Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia*. Elsevier Brasil, 2015.
- [39] F. S. HILLIER and G. J. LIEBERMAN, *Introdução à pesquisa operacional*. McGraw Hill, 2013.
- [40] A. LEIGUS, A. T. FENERICH, and M. d. F. MORAIS, “Aplicações da pesquisa operacional,” 2009.
- [41] E. C. COLIN, *Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas [Reimpr.]*. Livros Técnicos e Científicos, 2015.
- [42] M. H. ALMEIDA, “Otimização linear como ferramenta metodológica,” Master’s thesis, UNICAMP, 2016.
- [43] S. B. NAKHANUL and A. M. MUSASIA, “Problem based learning technique and its effect on acquisition of linear programming skills by secondary school students in kenya,” *Journal of Education and Practice*, vol. 6, no. 20, pp. 68–74, 2015.
- [44] L. M. W. d. ALMEIDA, E. TORTOLA, and R. F. MERLI, “Modelagem matemática – com o que estamos lidando: Modelos diferentes ou linguagens diferentes?,” *Acta Scientiae*, vol. 4, pp. 215–239, maio/ago. 2012.
- [45] R. S. RUSSEL and B. W. TAYLOR, *Operations management: Quality and competitiveness in a global environment*. Wiley, 5th ed., 2006.

- [46] Y. ALABOUDI, A. JEREMIAH, Q. POON, C. HENSHAW, J. PAK, M. ARAMON, T. TRAN, D. RIPS MAN, P. MAR, S. KOSCH, H. LI, and D. TEREKHOV, “Torch, the operations research challenge,” 2015.
- [47] Y. ALABOUDI, A. JEREMIAH, Q. POON, C. HENSHAW, J. PAK, M. ARAMON, T. TRAN, D. RIPS MAN, P. MAR, S. KOSCH, H. LI, and D. TEREKHOV, “Torch, the operations research challenge,” 2015. Problem 8: Wind Farm.
- [48] J. PAK, A. JEREMIAH, R. ALAM, Q. POON, D. RIPS MAN, S. KOSH, A. MOMODU, E. R. M. T. CHUNG, C. SUN, I. RUBENSTEIN, B. L. TREASURER, S. W. WRIGHT, C. STOESSER, A. SWEDAN, G. HUANG, and N. KAW, “The operations research challenge,” 2016. Problem 3 Solar Panel Allocation.
- [49] D. BERTSIMAS and J. N. TSITSIKLIS, *Introduction to linear optimization*, vol. 6. Athena Scientific Belmont, MA, 1997.
- [50] B. WOLFGANG, “Sum of absolute difference constraint in optimization problem.” Computational Science Stack Exchange. URL:<https://scicomp.stackexchange.com/q/30584> (version: 2018-11-25).
- [51] L. R. d. C. RIBEIRO and M. d. G. N. MIZUKAMI, “Uma implementação da aprendizagem baseada em problemas (pbl) na pós-graduação em engenharia sob a ótica dos alunos,” *Semina: Ciências Sociais e Humanas*, vol. 25, no. 1, pp. 89–102, 2004.
- [52] H. ANTON and C. RORRES, *Álgebra linear com aplicações*. Bookman Porto Alegre, 10th ed., 2012.
- [53] E. C. COLIN, *Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas*. Livros Técnicos e Científicos, 2007.
- [54] D. BERTSIMAS and J. N. TSITSIKLIS, *Introduction to linear optimization*. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [55] M. ARENALES, R. MORABITO, V. ARMENTANO, and H. YANASSE, *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Elsevier Brasil, 2015.

- [56] H. ANTON and C. RORRES, *Álgebra linear com aplicações*. Bookman Porto Alegre, 10th ed., 2012.

Apêndice

A Minicurso aplicado no III Encontro Regional de Pesquisa Operacional do Sudeste

III Encontro Regional e Pesquisa Operacional

Minicurso: Introdução ao estudo de programação linear pelo método de aprendizagem baseada em problemas

Eliana Freddi Bassoli (IMECC - Unicamp)

Rodrigo Silva Lima (IMC - UNIFEI)

Exemplo de modelagem e exercícios:

Uma loja de artesanato faz e vende tigelas e canecas de cerâmica. A loja ganha U\$40 por tigela e U\$50 por caneca. Uma tigela requer 1 hora de trabalho e 4 libras de barro. Uma caneca exige 2 horas de trabalho e 3 libras de barro. Estão disponíveis 40 horas de trabalho por dia. A loja pode obter apenas 120 libras de barro por dia. Encontre o lucro máximo por dia e determine quanto de cada produto deve ser feito. (Problema adaptado de [45])

INSTRUÇÕES PARA ATIVIDADE:

Escolha um(a) parceiro(a) para trabalhar em dupla.

1. Configurem duas variáveis para representar a quantidade de cada produto a fazer.
2. Desenvolvam uma fórmula para determinar o lucro.
3. Desenvolvam fórmulas para uso de recursos.
4. Preencham o quadro abaixo com os dados obtidos acima e associe aos termos: variáveis de decisão, função objetivo e restrições.

	Quantidade produzida	Trabalho (horas)	Argila (libras)	Preço unitário
Tijela				
Caneca				
Máximo por dia				

5. Desenvolvam fórmulas para uso de recursos.
6. Preencham o quadro abaixo com os dados obtidos acima e associe aos termos: variáveis de decisão, função objetivo e restrições.

Variáveis de decisão	Lucro	Trabalho	Argila
	Função objetivo	Restrição (horas)	Restrição (quantidade)

7. Escreva o problema na forma padrão.

Variáveis de Decisão:

Função Objetivo:

Restrições:

Não negatividade e tipo de variável:

Use o aplicativo Desmos (www.desmos.com) para representar graficamente o problema:

Desafio: pesquise como encontrar a solução gráfica.

Respostas:

1. Configurem duas variáveis para representar a quantidade de cada produto a fazer.

x : número de tigelas e

y : número de canecas.

2. Desenvolvam uma fórmula para determinar o lucro.

$$z = 40x + 50y$$

3. Preencham o quadro abaixo para visualizar melhor os dados do problema.

	Quantidade produzida	Trabalho (horas)	Argila (libras)	Preço unitário
Tijela	x	1	4	40
Caneca	y	2	3	50
Máximo por dia		40	120	-

4. Desenvolvam fórmulas para uso de recursos.

$$x + 2y \leq 40$$

$$4x + 3y \leq 120$$

5. Preencham o quadro abaixo com os dados obtidos acima e associe aos termos: variáveis de decisão, função objetivo e restrições.

Variáveis de decisão	Lucro	Trabalho	Argila
x : número de tigelas	Função objetivo	Restrição (horas)	Restrição (quantidade)
y : número de canecas	$z=40x + 50y$	$x + 2y \leq 40$	$4x + 3y \leq 120$

6. Escreva o problema na forma padrão.

Variáveis de Decisão: x : número de tigelas e y : número de canecas.

Função Objetivo: $\max z = 40x + 50y$

Restrições: $x + 2y \leq 40$ e $4x + 3y \leq 120$

Não negatividade e tipo de variável: $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$

Forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : número de tigelas e

y : número de canecas

- Função Objetivo: $\max z = 40x + 50y$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Use o aplicativo Desmos, www.desmos.com.br, para representar graficamente o problema.

Desafio: pesquise como encontrar a solução gráfica.

Como encontrar graficamente o valor ótimo (máximo ou mínimo) tendo a região factível? (Foi dado um tempo para os alunos pensarem, pesquisarem ou recordarem uma estratégia de resolução).

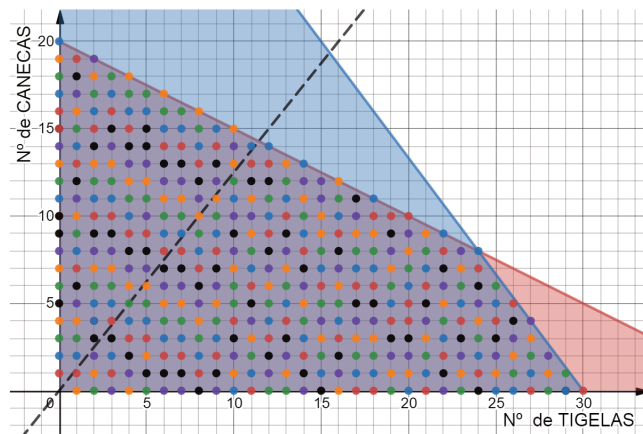
Tomando-se a função objetivo e calculando-se o gradiente, obtem-se a direção e sentido do crescimento dessa função:

$$\text{Vetor gradiente: } \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (40, 50)$$

A equação da reta suporte do vetor gradiente pode ser encontrada tomando-se os pontos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $(x_2, y_2) = (40, 50)$:

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} \text{ (coeficiente angular)}$$

$$\text{Equação da reta suporte do gradiente: } y = \frac{5}{4} \cdot x$$



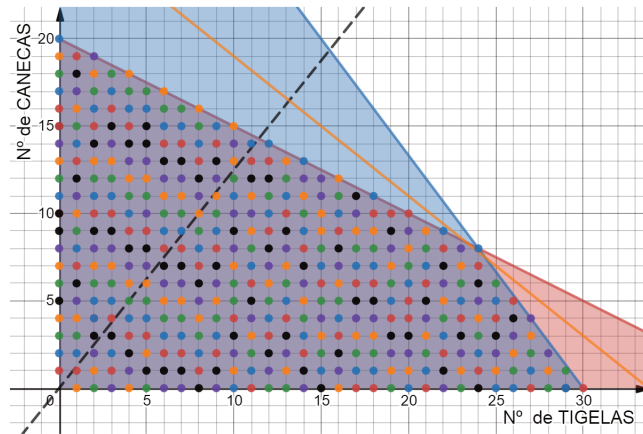
Percorrendo-se a região factível através de uma reta perpendicular a reta do gradiente da função objetivo temos que: no sentido do gradiente a função objetivo cresce e no sentido oposto, decresce.

Cálculo da equação da reta perpendicular a reta suporte do gradiente:

$$m_p = -\frac{1}{m_s} = -\frac{4}{5} \text{ (coeficiente angular da reta perpendicular)}$$

$$y = -\frac{4}{5} \cdot x + b$$

em que b na construção gráfica, feita com o aplicativo Desmos, irá variar através do controle deslizante. Abaixo está representada a região factível, a reta suporte do vetor gradiente e a reta perpendicular ao gradiente.



Neste exercício procura-se o valor máximo da função objetivo, então a reta perpendicular foi deslocada, por controle deslizante, no sentido do vetor gradiente e o ponto da região factível correspondente ao valor ótimo encontrado foi: $(24, 8)$, que corresponde a 24 tigelas e 8 canecas.

O valor do lucro máximo pode ser calculado através da função objetivo:

$$z = f(x, y) = 40 \cdot x + 50 \cdot y = 40 \cdot 24 + 50 \cdot 8 = 1360$$

Questões:

1. Uma empresa de contêineres de carga transporta os contêineres de duas companhias A e B. Cada contêiner da companhia A pesa 40 kg e tem volume de 54 decímetros cúbicos. Cada contêiner da companhia B pesa 50 kg e tem volume de 81 decímetros cúbicos. A cada contêiner transportado a empresa de transporte de carga cobra \$2,20 de frete da companhia A e \$3,00 de frete da companhia B. Sabendo que cada caminhão da empresa não pode transportar mais do que 37000 kg e não comporta mais de 54000 decímetros cúbicos, quantos contêineres da companhia A e B o caminhão deveria transportar para maximizar o valor do frete? Construa o gráfico e encontre a solução gráfica do problema. (Este problema foi adaptado de [52])

Resolução:

Primeiramente coloca-se os dados em uma tabela:

Companhia	Número de contêineres	Peso (Kg)	Volume (dm^3)	Preço por contêiner
A	x	40	54	2,20
B	y	50	81	3,00
Máximo que pode ser transportado por caminhão		37000	54000	-

Escrevendo-se na forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

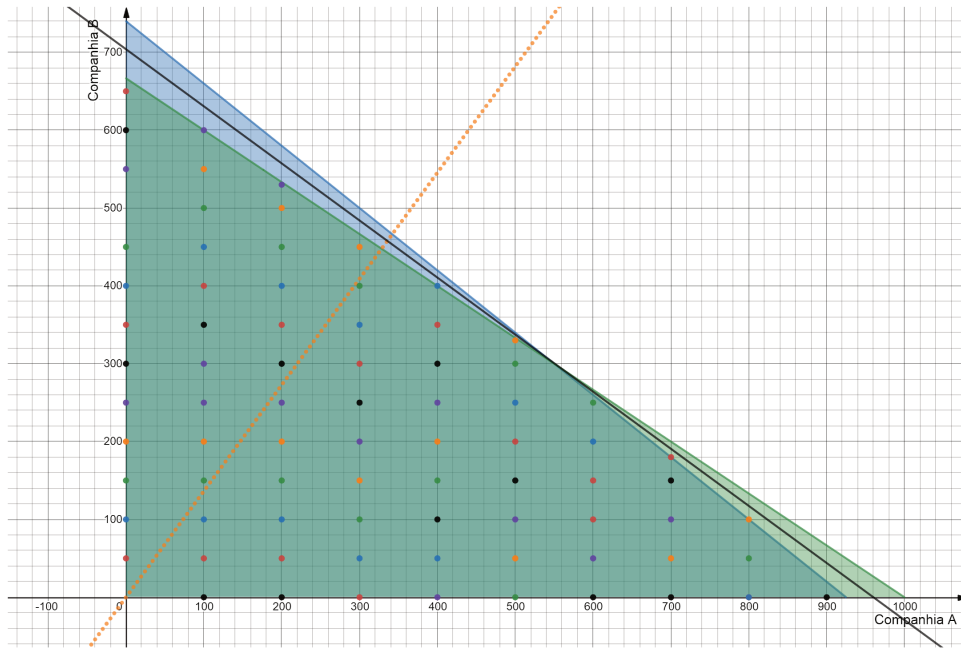
x : número de contêineres da companhia A

y : número de contêineres da companhia B

- Função Objetivo: $\max z = 2,20 \cdot x + 3,00 \cdot y$
- Sujeito a:

$$\begin{cases} 40 \cdot x + 50 \cdot y \leq 37000 \\ 54 \cdot x + 81 \cdot y \leq 54000 \\ x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Na figura abaixo tem-se a representação gráfica da região factível (com apenas alguns dos pares ordenados de números inteiros representados), a reta do vetor gradiente e a reta perpendicular a direção do gradiente.



O valor ótimo é (550, 300) que pode ser facilmente lido no gráfico se for utilizado o recurso de aproximação (zoom), o que resulta no transporte de 550 contêineres da Companhia A e 300 contêineres da Companhia B.



O lucro máximo é de:

$$\begin{aligned} \max z &= 2,20.x + 3,00.y \\ z &= 2,20 \cdot 550 + 3,00 \cdot 300 = 2110 \end{aligned}$$

2. Um fabricante produz sacos de ração para galinhas a partir de dois ingredientes, A e B. Cada saco deve conter:

- pelo menos 625g do nutriente N1;
- pelo menos 500g do nutriente N2;
- pelo menos 750 g do nutriente N3.

Preço do ingrediente A: 8 centavos o Kg e do ingrediente B: 9 centavos o Kg.

Tabela da relação entre nutriente por Kg de ingrediente:

Ingrediente	Peso do	Nutriente	Nutriente	Nutriente
Ingrediente	ingrediente (kg)	N1 (kg)	N2 (kg)	N3 (kg)
A	x	0,125	0,125	0,375
B	y	0,3125	0,1875	0,250
Mínimo de nutrientes por saco		0,625	0,500	0,750

Quanto de cada ingrediente o fabricante deve usar em cada saco para minimizar seus custos? Construa o gráfico e encontre a solução gráfica do problema. (Problema adaptado de [52])

Solução:

Escrevendo-se na forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : peso do ingrediente A (kg)

y : peso do ingrediente B (kg)

- Função Objetivo: $\min z = 0,08.x + 0,09.y$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 0,125.x + 0,125.y \geq 0,625 \\ 0,125.x + 0,1875.y \geq 0,500 \\ 0,375.x + 0,250.y \geq 0,750 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

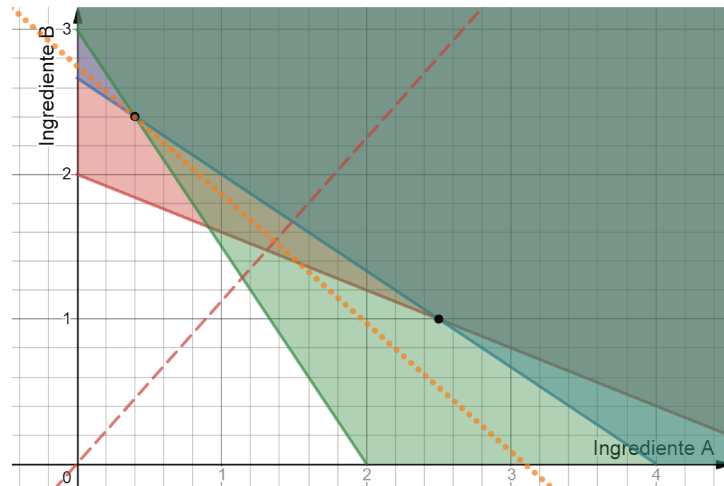


Figura 12: Região factível (mais escura) e o valor mínimo da função objetivo.

Obs.: nesta questão muitos dos participantes dos dois minicursos identificaram o ponto em destaque mais próximo do eixo x , ponto $(2,5, 1)$, como valor ótimo, quando na verdade a solução ótima é o ponto $(0,4, 2,4)$, que é encontrado deslocando-se a reta perpendicular à direção do vetor gradiente no sentido contrário ao do gradiente, isto é, no sentido de aproximação da origem, pois neste caso busca-se o valor mínimo da função objetivo. Portanto o fabricante deve usar em cada saco 0,4 Kg do ingrediente A e 2,4 Kg do ingrediente B para obter o menor custo de produção de ração.

O custo mínimo é de:

$$\begin{aligned}\min z &= 0,08.x + 0,09.y \\ z &= 0,08 \cdot 0,4 + 0,09 \cdot 2,4 = 0,248\end{aligned}$$

Portanto o custo mínimo é de aproximadamente \$ 0,25

3. (Seleção de culturas para plantio) Um fazendeiro dispõe de 400 hectares de terra cultivável e está interessado em decidir sobre o que vai plantar no próximo ano. Ele tem dúvidas a respeito de três produtos: milho, soja e trigo. Por outro lado, ele tem certeza que quer plantar em toda a sua propriedade. O plantio de milho requer investimento de R\$2000,00/ha, 20 homens-dia de trabalho para preparar um ha, e promove um lucro de R\$600,00/ha. O trigo requer R\$2400,00/ha investidos,

promove R\$800,00 de lucro e demanda 30 homens-dia de trabalho para preparar um ha. Finalmente a soja demanda 24 homens-dia, R\$1400,00/ha de investimentos e gera um lucro de R\$400,00 por ha. Dado o nível atual de desemprego, não existe limitação de mão de obra na região. Por outro lado, o fazendeiro só tem R\$800000,00 para investir em sua fazenda no próximo ano.

- Formule um modelo de programação linear para maximizar o lucro de fazendeiro, atendendo às restrições de recursos disponíveis.
- Como ficaria a representação gráfica do problema?
- É possível encontrar a solução através do gráfico? (Problema adaptado de [53])

Solução:

Tabela com os dados de problema:

Plantio de	Investimento R\$ por ha	Homens \ dia de trabalho por ha	Lucro R\$ por ha
Milho	2000	20	600
Soja	1400	24	400
Trigo	2400	30	800
Total de recurso			R\$ 800.000,00
Total de terra cultivada			400 hectares
Limitação de mão de obra na região			não há

Escrevendo-se na forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : hectares de milho plantado

y : hectares de soja plantada

z : hectares de trigo plantado

- Função Objetivo: $\max z = f(x, y, z) = 600x + 400y + 800z$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 2000.x + 1400.y + 2400.z \leq 800000 \\ x + y + z = 400 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0, \quad \text{com} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A resolução gráfica foi discutida anteriormente, ao final da seção 5.2. Abaixo segue a resolução pelo Método Dual:

- Variáveis de Decisão:

x : hectares de milho plantado

y : hectares de soja plantada

z : hectares de trigo plantado

Problema Primal:

- $\max z = f(x, y, z) = 600x + 400y + 800z$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 2000.x + 1400.y + 2400.z \leq 800000 \\ x + y + z = 400 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0, \quad \text{com} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

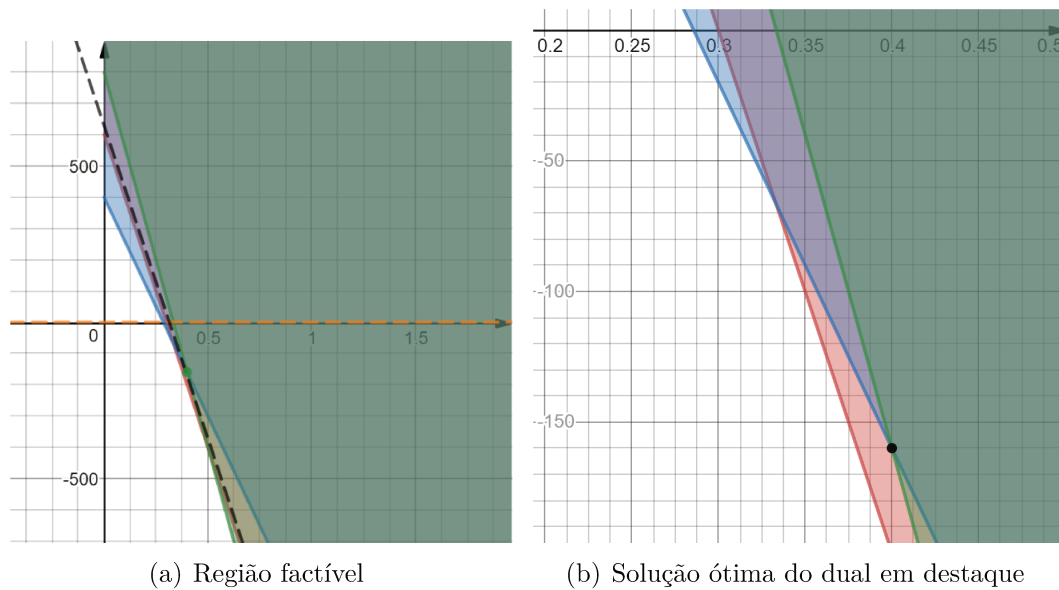
Problema Dual:

- $\min w = g(p, q) = 800000p + 400q$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 2000p + q \geq 600 \\ 1400p + q \geq 400 \\ 2400z + q \geq 800 \\ p \geq 0, \quad \text{e} \quad q \text{ livre} \quad \text{com} \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A seguir encontram-se os gráficos referentes ao problema dual:



$$(p, q) = (0.4, -160) \rightarrow \text{solução ótima do dual}$$

$$w = 800000p + 400q$$

$$w = 800000(0.4) + 400(-160) = 25600$$

Folgas complementares: (lembrando que $p = 0.4$ e $q = -160$)

$$p(800000 - 2000x - 1400y - 2400z) = 0 \quad (1)$$

$$q(x + y + z - 400) = 0 \quad (2)$$

$$x(600 - 2000p - q) = 0 \Rightarrow x(-40) = 0 \therefore x = 0$$

$$y(400 - 1400p - q) = 0 \Rightarrow y \cdot 0 = 0, \forall y$$

$$z(800 - 2400p - q) = 0 \Rightarrow z \cdot 0 = 0, \forall z$$

Então de (1) e (2):

$$0,4 \cdot (800000 - 2000x - 1400y - 2400z) = 0$$

$$(-160) \cdot (x + y + z - 400) = 0 \Rightarrow y = 400 - z$$

Substituindo -se $y = (400 - z)$ em (1) :

$$800000 - 2000x - 1400(400 - z) - 2400z = 0$$

$$\text{obtem-se } z = 240$$

$$\text{Portanto } y = 400 - 240 = 160$$

$$\text{Logo } x = 0, y = 160 \text{ e } z = 240$$

O lucro máximo é obtido com o cultivo de 160 hectares de soja e 240 hectares de trigo.

B Questionário do Minicurso 1 - III ERPO

Nome: (Opcional).

1. Sou:

- ☐ aluno de graduação;
- ☐ aluno de pós-graduação (mestrado);
- ☐ aluno de pós-graduação (doutorado);
- ☐ professor de ensino fundamental;
- ☐ professor de ensino médio;
- ☐ professor de ensino superior;
- ☐ outro. Especifique:

2. Você tinha algum conhecimento prévio ao minicurso, na área de Programação Linear (PL) ?

☐ Sim ☐ Não

3. Na sua opinião o objetivo principal do minicurso foi atingido? (Objetivo: discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas).

☐ Sim ☐ Não

Justifique:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Você, como docente, utilizaria essa metodologia na disciplina que leciona?

☐ Sim ☐ Não

Por quê?

.....

.....

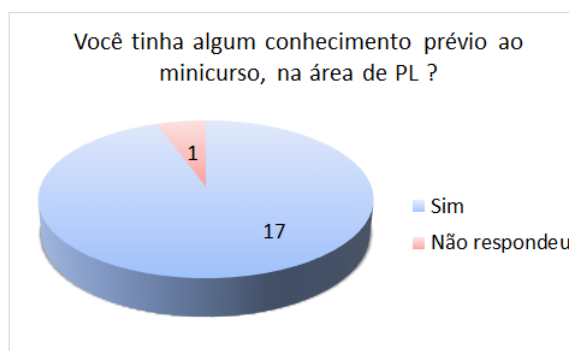
.....

Respostas do questionário

1)



2)



3) Na sua opinião o objetivo principal do minicurso foi atingido? (Objetivo: discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas).

obs.: Todos marcaram SIM, mas nem todos os participantes deram sua opinião.

- “Sim, com a exposição de problemas, ao invés de teoria, forçou os alunos a utilizarem conhecimentos mais básicos para a resolução destes problemas. Além disso, a discussão entre alunos proporcionou eliminar todas as dúvidas que alguns poderiam ter.”
- “Sim, a metodologia e objetivos foram seguidas e bem executadas.”
- “Sim. Apesar de ainda estar cursando a disciplina de PL na graduação, confirmo que o objetivo do minicurso foi atingido, ainda mais, me ofereceu um melhor entendimento da resolução gráfica de alguns problemas que ainda não tinha entendido em sala de aula.”

- “Sim. Houve trabalho em equipe, discussão dos problemas e resolução gráfica dos mesmos.”
- “Sim. A atividade foi bem lúdica, bem palpável. Gostei da maneira como foi abordado o assunto atingindo as minhas expectativas.”
- “Sim. Foi fácil entender os conceitos que foram ensinados.”
- “Sim. Resolução de problema é a melhor forma de aprender.”
- “Sim... nunca havia utilizado uma ferramenta computacional para resolver graficamente os problemas de PL.”
- “Sim. Consegui conhecer um software que produz o gráfico de problemas de PL e tive a oportunidade de implementar alguns exemplos e verificar o ponto de otimização.”
- “Sim. Nesse minicurso em específico, os colegas possuíam conhecimento prévio de PL, facilitando o aprendizado sobre a ferramenta.”
- “Sim. Tivemos a oportunidade de procurar a solução de problemas e ver sua solução via software.”
- “Sim. Foi interessante poder conhecer um novo software e praticar as resoluções de forma ativa.”
- “Sim. A ferramenta utilizada é excelente e certamente a metodologia, se aplicada em cursos de graduação facilitaria e aceleraria o aprendizado de Pesquisa Operacional.”

4) Você, como docente, utilizaria essa metodologia na disciplina que leciona?

() Sim () Não

Por quê?

Respostas:

- “Sim. Acredito que como aluno, em matérias fundamentais como cálculo ou física, a exposição de problemas antes da teoria, cria uma motivação para o aluno para a resolução de problemas, bem como lhe dá as ferramentas para transpor dificuldades das disciplinas em si.”
- “Sim. Acho boa a ideia de problematização ou de se basear em problemas reais para encontrar a solução do problema e mostrar na prática a metodologia.”

- Sim. Porque o PBL provoca a ajuda mútua, em alguns problemas com maior complexidade ele ajudaria.”
- “Sim. Acredito que na FCA (Faculdade de Ciências Aplicadas - UNICAMP - Campus de Limeira) essa metodologia já é utilizada parcialmente. Ocorre primeiro uma explanação teórica e posteriormente a fixação com exercícios que claramente é a forma mais produtiva. Eu usaria principalmente dessa forma.”
- “Sim. Para as disciplinas de exatas (Cálculo, Geometria Analítica, Álgebra)por exemplo, acredito que não caberia tal método, mas para as disciplinas mais específicas, tendo mais conhecimento básico matemático da base de exatas, acredito que há um aproveitamento melhor por essa metodologia.”
- “Sim. Pelo estímulo que a metodologia provoca.”
- “Sim. Foi bem explicado.”
- “Sim. A visualização gráfica nos pontos exatos facilita a compreensão da solução.”
- “Sim. Instiga os alunos a resolverem novos problemas e criarem vontade de aprender a matéria e até se aprofundarem na mesma.”
- “Sim. Iteratividade com software atrai a atenção dos alunos.”
- “Sim. Como a solução está nos vértices do politopo a solução gráfica ajuda a visualizar a solução e o aumento das restrições e do vetor gradiente.”
- “Sim. Na verdade eu ensinaria teoricamente e depois passaria alguns problemas para o aluno treinar a prática e verificar seu próprio aprendizado.”
- “Sim. Ainda não leciono, mas acredito que a metodologia permite melhor fixação do conteúdo e gestão de conhecimento entre os alunos.”
- “ Sim. Acredito que ela possa trazer uma forma diferente das tradicionais aulas expositivas,o que pode ativar a atenção dos alunos.”
- “Sim. Para mostrar a importância do uso de funções e retas no plano cartesiano, para alunos do ensino médio.”

- “Sim. A metodologia é muito eficiente trazendo a aplicação prática ao alcance dos alunos.”

5) Apresente sugestões de melhorias para as atividades propostas no minicurso.

- “Acredito que o curso poderia ter aprofundado um pouco mais na metodologia e trazer mais exemplos fora da modelagem, dentro de programação linear / pesquisa operacional, para maior aprofundamento.”
- “Talvez abranger outras metodologias de P.L. que possam ajudar a solucionar mais tipos de problemas, como dimensionamento de cortes.”
- “Eu recomendaria uma apresentação mais formal do conteúdo em si. Por exemplo, explicar o que é forma padrão, vetor gradiente e resolução gráfica, para que pessoas sem conhecimento prévio, possam entender melhor o minicurso.”
- “Apresentaria, no meio da resolução, alguns conceitos mais formais de forma prática.”
- “Como ainda sou leigo nessa parte da disciplina, não acho que tenha uma sugestão para tal minicurso.”
- “Eu sugeriria explorar problemas inteiros cuja solução não está nos vértices do politopo.”
- “Acrescentar 1 slide com a modelagem para facilitar a interpretação de alunos que não estão acostumados com modelagem.”
- “Ter um tipo de exercício levemente mais avançado para quem já domina o básico de PL, assim é possível aprofundar um pouco mais.”
- “Utilizar o **“Geogebra 3D”** pois é gratuito, com o problema de 3 variáveis.”
- “A parte tridimensional poderia ser mais bem explorada.”
- “Para mim foi bem feito, não vejo um ponto fraco na proposta.”
- “Desmos é uma ferramenta interessante que eu não conhecia - fácil de utilizar e gratuita, sendo possível conhecê-la até pelo “smartphone”. Tivemos apenas um caso de PL com 3 variáveis - talvez fosse interessante explorar mais exemplos.”

- “Talvez dar a oportunidade para os alunos criarem algum problema de PL.”
- “Mostrar as áreas profissionais que utilizariam PL na introdução do curso, valorizando ainda mais o método.”

C Minicurso aplicado na UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

05 e 06 de dezembro de 2018

Minicurso: Introdução ao estudo de programação linear pelo método de aprendizagem baseada em problemas

Eliana Freddi (IMECC - Unicamp)

Rodrigo Silva Lima (IMC - UNIFEI)

Exemplo de modelagem e exercícios:

Uma loja de artesanato faz e vende tigelas e canecas de cerâmica. A loja ganha U\$40 por tigela e U\$50 por caneca. Uma tigela requer 1 hora de trabalho e 4 libras de barro. Uma caneca exige 2 horas de trabalho e 3 libras de barro. Estão disponíveis 40 horas de trabalho por dia. A loja pode obter apenas 120 libras de barro por dia. Encontre o lucro máximo por dia e determine quanto de cada produto deve ser feito. (Problema adaptado de [45])

INSTRUÇÕES PARA A ATIVIDADE:

Escolha um(a) parceiro(a) para trabalhar em dupla.

1. Configurem duas variáveis para representar a quantidade de cada produto a fazer.
2. Desenvolvam uma fórmula para determinar o lucro.
3. Preencham o quadro abaixo para visualizar melhor os dados do problema.

	Quantidade produzida	Trabalho (horas)	Argila (libras)	Preço unitário
Tijela				
Caneca				
Máximo por dia				

4. Desenvolvam fórmulas para uso de recursos.

5. Preenchem o quadro abaixo com os dados obtidos acima e associe aos termos: variáveis de decisão, função objetivo e restrições.

Variáveis de decisão	Lucro	Trabalho	Argila
	Função objetivo	Restrição (horas)	Restrição (quantidade)

6. Escreva o problema na forma padrão.

Variáveis de Decisão:

Função Objetivo:

Restrições:

Não negatividade e tipo de variável:

Use o aplicativo Desmos, *www.desmos.com*, para representar graficamente o problema.

Desafio: pesquise como encontrar a solução gráfica.

Questões:

1. Uma empresa de contêineres de carga transporta os contêineres de duas companhias A e B. Cada contêiner da companhia A pesa 40 kg e tem volume de 54 decímetros cúbicos. Cada contêiner da companhia B pesa 50 kg e tem volume de 81 decímetros cúbicos. A cada contêiner transportado a empresa de transporte de carga cobra \$2,20 de frete da companhia A e \$3,00 de frete da companhia B. Sabendo que cada caminhão da empresa não pode transportar mais do que 37000 kg e não comporta mais de 54000 decímetros cúbicos, quantos contêineres da companhia A e B o caminhão deveria transportar para maximizar o valor do frete? Construa o gráfico e encontre a solução gráfica do problema. [1cm]
2. Um fabricante produz sacos de ração para galinhas a partir de dois ingredientes, A e B. Cada saco deve conter:
 - pelo menos 625g do nutriente N1;
 - pelo menos 500g do nutriente N2;
 - pelo menos 750 g do nutriente N3.

Preço do ingrediente A: 8 centavos o Kg e do ingrediente B: 9 centavos o Kg.

Tabela da relação de nutriente por Kg de ingrediente:

Ingrediente	Peso do ingrediente (kg)	Nutriente N1 (kg)	Nutriente N2 (kg)	Nutriente N3 (kg)
A	x	0.125	0.125	0.375
B	y	0.3125	0.1875	0.250
Mínimo de nutrientes por saco		0.625	0.500	0.750

Quanto de cada ingrediente o fabricante deve usar em cada saco para minimizar seus custos? Construa o gráfico e encontre a solução gráfica do problema. (Adaptado de[52])

As questões acima, incluindo-se o exemplo, são as mesmas do Minicurso 1, e estão solucionadas no Apêndice A, sendo que foi acrescentado, após se construir a região

factível do exemplo, um slide com as seguintes perguntas:

Como encontrar graficamente o valor ótimo (máximo ou mínimo) tendo a região factível?

É possível garantir que haverá solução?

A primeira pergunta foi respondida por dois alunos, uma aluna disse que é pelo gradiente da função objetivo e um aluno, que a solução está no vértice. A segunda pergunta não foi respondida por nenhum participante, esperava-se que encontrassem algo relacionado a convexidade e ao Teorema Fundamental da Programação Linear, citados abaixo:

Definição 1 (*Combinação convexa de x^1 e x^2 .*) Sejam x^1 e x^2 dois vetores do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que x é uma *combinação convexa* de x^1 e x^2 se $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. O conjunto de todas as combinações convexas de x^1 e x^2 é o segmento de reta entre x^1 e x^2 , o qual é denominado por $[x^1, x^2]$, ou seja, $[x^1, x^2] = \{x \in \mathbb{R}^n, x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2\}$. [55]

Definição 2 (*Conjunto convexo*). Dizemos que um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, é convexo se $[x^1, x^2] \subseteq S$, para todo x^1 e x^2 pertencentes a S , ou seja, toda combinação convexa de dois pontos em S também pertencem a S . [55]

Teorema: Valores máximos e mínimos. *Se a região viável de um problema de programação linear for não vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e esses ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável for ilimitada, então a função objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou mínimo, este ocorrerá num ponto extremo.* [56]

Infelizmente não houve tempo para que os participantes pesquisassem mais e trouxessem as respostas, pois o objetivo do minicurso era aplicar a metodologia de ABP e a proposta era de que os alunos respondessem aos desafios, sendo que apenas um aluno disse que o valor ótimo sempre estará no vértice, mas não respondeu o que

vem a garantir que haja solução ótima.

3. Um produtor de derivados do leite produz queijo e doce de leite. O produtor tem à disposição 800 litros de leite por dia oriundos de sua propriedade e de alguns vizinhos que fornecem para ele. A produção de cada quilo de queijo requer 9 litros de leite e a de cada quilo de doce requer 7 litros de leite. A rede de supermercados que compra dele estabelece um limite máximo de 90 Kg de queijo por dia. Ele também vende o doce a rede de supermercado e o excedente, vende para a vizinhança, logo não há restrição da quantidade produzida de doce. Além disso, por questões relacionadas com os equipamentos de produção, a quantidade de queijo produzida não pode exceder 150% da produção de doce. São necessários dois empregados que trabalham num regime de 7 horas diárias. Cada quilo de queijo requer 30 minutos de mão de obra e cada quilo de doce requer 12 minutos de mão de obra. O queijo é vendido a R\$15,00 o quilo e o doce é vendido a R\$12,00 o quilo. Formule um modelo para maximizar as receitas do produtor. (Problema adaptado de [53])

Solução:

Tabela com os dados do problema:

	Quantidade (Kg)	Leite gasto por Kg de produto	Tempo gasto na produção (minutos)	Preço por Kg em R\$	Limite máximo vendido por dia
Queijo	x	9	30	15	90 Kg
Doce	y	7	12	6	Sem restrição
Máximo por dia	$x \leq 1,5 y$	800	840 (2 funcionários)	-	-

Forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : quantidade de queijo (kg)

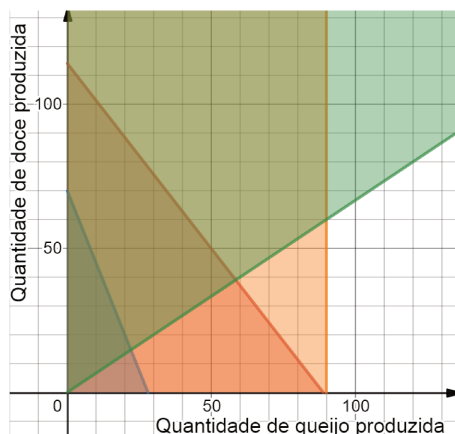
y : quantidade de doce (kg)

- Função Objetivo: $\max z = 15x + 6y$

- Sujeito a:

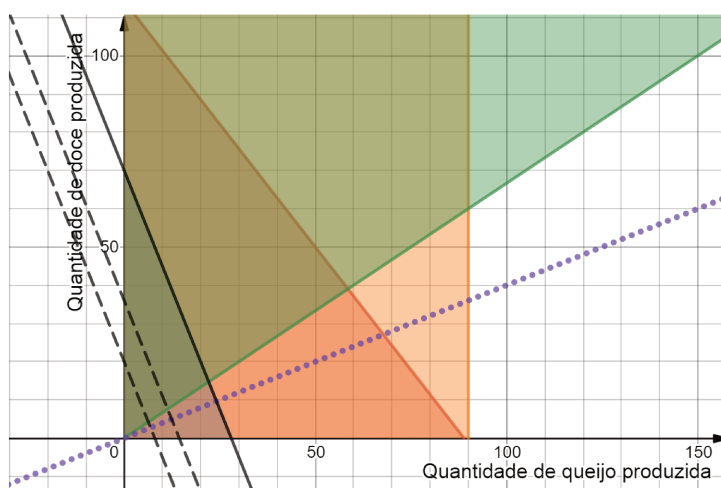
$$\begin{cases} 9x + 7y \leq 800 \\ 30x + 12y \leq 840 \\ x \leq 1,5y \\ x \leq 90 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Representação gráfica das restrições:



Solução gráfica:

- Vetor gradiente: $\langle 15, 6 \rangle$
- Equação da reta suporte do vetor gradiente: $y = \frac{6x}{15}$
- Equação da reta perpendicular a reta do vetor gradiente: $y = \frac{-5x}{2} + d$



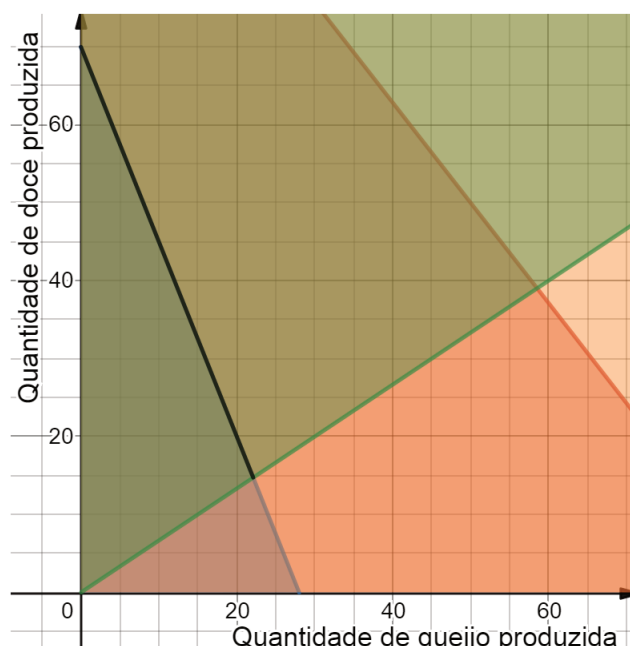


Figura 13: O segmento em destaque parece ser a solução ótima

Para se certificar que o segmento é a solução ótima, pode-se pegar alguns pontos desse segmento e se calcular o valor da função objetivo $z = 15x + 6y$:

$$(0, 70) \rightarrow z = 15.(0) + 6.(70) = 420$$

$$(18, 25) \rightarrow z = 15.(18) + 6.(25) = 420$$

$$(20, 20) \rightarrow z = 15.(20) + 6.(20) = 420$$

$$(22, 15) \rightarrow z = 15.(22) + 6.(15) = 420$$

Portanto há múltiplas soluções ótimas, pois cada ponto desse segmento é solução ótima.

4. Uma metalúrgica precisa produzir duas ligas metálicas: uma liga especial de baixa resistência e outra liga especial de alta resistência, simultaneamente. Para garantir a produção é necessário manter um estoque mínimo de uma tonelada de cobre, duas toneladas de zinco e três de chumbo. O preço está cotado em reais por tonelada da liga fabricada. A tabela a seguir informa a proporção de cada material na mistura para obtenção das ligas metálicas.

	Liga especial de baixa resistência	Liga especial de alta resistência	Estoque mínimo
Cobre	0.5	0.3	1t
Zinco	0.1	0.2	2t
Chumbo	0.4	0.5	3t
Valor de venda (R\$/t)	3000	2000	-

Qual é a máxima receita bruta? Modele o problema e encontre a solução gráfica.
(Este problema foi adaptado de [54])

Solução:

Forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : liga especial de baixa resistência (toneladas)

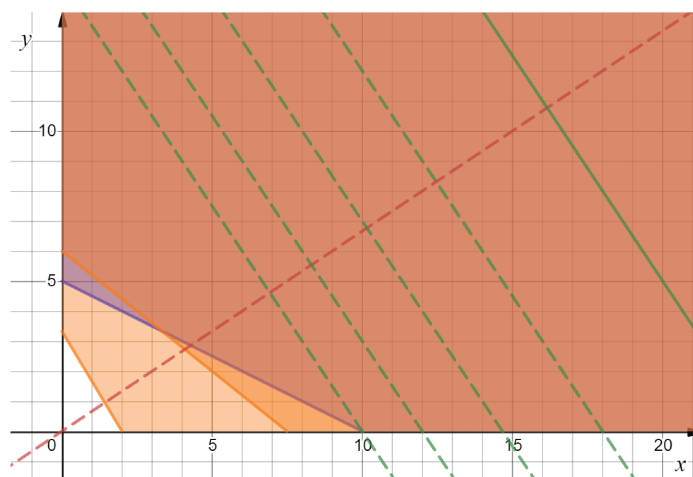
y : liga especial de alta resistência (toneladas)

- Função Objetivo: $\max z = 3000x + 2000y$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y \geq 1 \\ 0,1x + 0,2y \geq 2 \\ 0,4x + 0,5y \geq 3 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Representação gráfica:



Observa-se pelo gráfico que a região factível é ilimitada com infinitas soluções ótimas, pois o vetor gradiente cresce na direção da reta pontilhada em vermelho, no sentido de afastamento da origem (região factível ilimitada superiormente) portanto há um conjunto ilimitado de soluções ótimas.

Desafios:

1. Reformule o problema anterior de forma a mudar o tipo de solução.
2. Faça o mesmo (reformule e encontre outro tipo de solução) com o problema 3.

Possíveis soluções dos desafios:

1. Reformulação do problema 4 para obtenção de outro tipo de solução: uma opção para se obter outro tipo de solução é alterar as restrições, estipulando-se um estoque máximo de cada tipo de matéria prima, conforme descrito na próxima tabela. ([54])

	Liga especial de baixa resistência	Liga especial de alta resistência	Estoque máximo
Cobre	0.5	0.3	3t
Zinco	0.1	0.2	1t
Chumbo	0.4	0.5	3t
Valor de venda (R\$/t)	3000	2000	-

Forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

x : liga especial de baixa resistência (toneladas)

y : liga especial de alta resistência (toneladas)

- Função Objetivo: $\max z = 3000x + 2000y$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,3y \leq 3 \\ 0,1x + 0,2y \leq 1 \\ 0,4x + 0,5y \leq 3 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Representação gráfica das restrições:

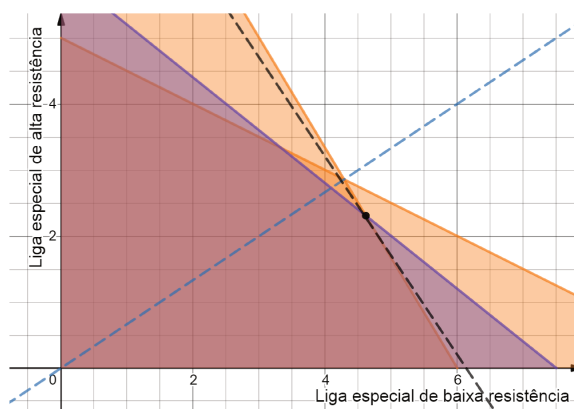
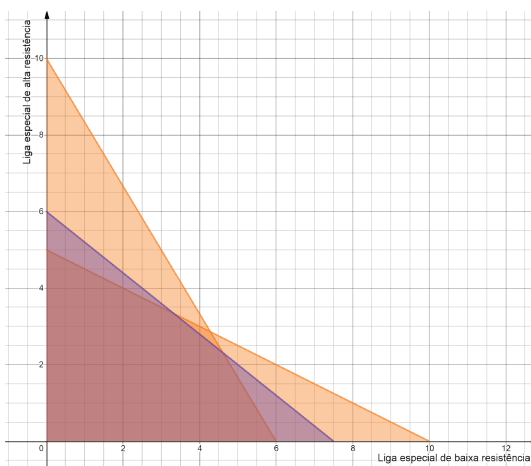


Figura 14: Solução ótima - ponto em destaque

A solução ótima é o ponto $(4,615385, 2,307692)$, ou seja, a produção de 4.28571 toneladas da liga metálica de baixa resistência e 2.857143 toneladas da liga metálica de alta resistência, resultando em um lucro de:

$$\begin{aligned} \max z &= 3000x + 2000y \rightarrow \\ z &= 3000(4,615385) + 2000(2,307692) = 18.461,54 \end{aligned}$$

O lucro máximo é de R\$18.461,54.

2. Reformulação do problema 3: uma possibilidade de reestruturação do problema é de alteração da função objetivo de tal forma que se possa encontrar uma única solução ótima. Reescrevendo-se o problema:

Um produtor de derivados do leite produz queijo e doce de leite. O produtor tem à disposição 800 litros de leite por dia oriundos de sua propriedade e de alguns vizinhos que fornecem para ele. A produção de cada quilo de queijo requer 9 litros de leite e a de cada quilo de doce requer 7 litros de leite. A rede de supermercados que compra dele estabelece um limite máximo de 90 Kg de queijo por dia. Ele também vende o doce a rede de supermercado e o excedente, vende para a vizinhança, logo não há restrição da quantidade produzida de doce. Além disso, por questões relacionadas com os equipamentos de produção, a quantidade de queijo produzida não pode exceder 150% da produção de doce. São necessários dois empregados que trabalham num regime de 7 horas diárias. Cada quilo de queijo requer 30 minutos de mão de obra e cada quilo de doce requer 12 minutos de mão de obra. O queijo é vendido a R\$21,00 o quilo e o doce é vendido a R\$20,00 o quilo. Formule um modelo para maximizar as receitas do produtor (Adaptado de [53]).

Solução:

Tabela com os dados do problema:

	Quantidade (Kg)	Leite gasto por Kg de produto	Tempo gasto na produção (minutos)	Preço por Kg em R\$	Limite máximo vendido por dia
Queijo	x	9	30	21	90 Kg
Doce	y	7	12	20	Sem restrição
Máximo por dia	$x \leq 1,5 y$	800	840 (2 funcionários)	-	-

Forma padrão:

- Variáveis de Decisão:

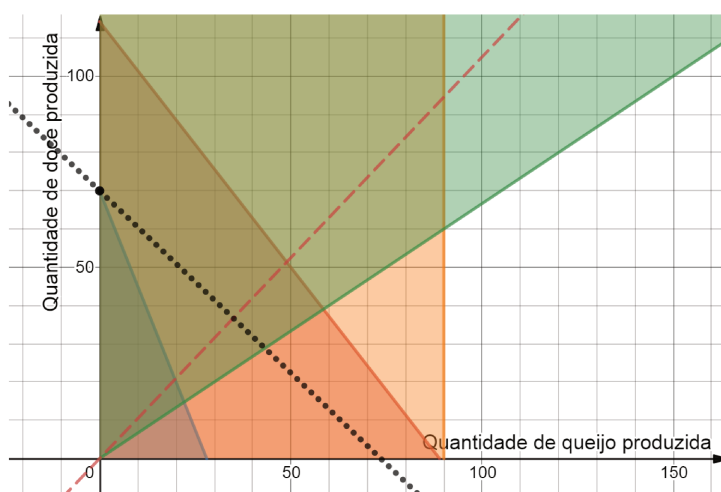
x : quantidade de queijo (kg)

y : quantidade de doce (kg)

- Função Objetivo: $\max z = 21x + 20y$

- Sujeito a:

$$\begin{cases} 9x + 7y \leq 800 \\ 30x + 12y \leq 840 \\ x \leq 1,5y \\ x \leq 90 \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



A máxima receita do produtor se dá quando da produção de 70 kg de doce e nenhuma de queijo, num valor de :

$$\begin{aligned} \max z = 21x + 20y &\rightarrow \\ z = 21 \cdot (170) + 20(0) &= 3570 \\ &\text{R\$3.570,00.} \end{aligned}$$

D Questionário do Minicurso 2 - UFVJM

Questionário: Minicurso UFVJM – 05 e 06 de dezembro de 2018.

Nome: (Opcional).

1. Sou:

() aluno de graduação;

() aluno de pós-graduação (mestrado);

() aluno de pós-graduação (doutorado);

() professor de ensino fundamental;

() professor de ensino médio;

() professor de ensino superior;

() outro. Especifique:.....

2. Você conhecia o aplicativo Desmos?

() Sim

() Não

3. Você tinha algum conhecimento prévio ao minicurso, na área de Programação Linear (PL) ?

() Sim

() Não

4. Na sua opinião o objetivo principal do minicurso foi atingido? (Objetivo: discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas).

() Sim

() Não

Justifique:

Respostas dos participantes do Minicurso 2 - UFVJM:

1. O questionário foi aplicado no 2º dia, com a presença de 8 participantes, todos alunos de graduação, sendo 1 do curso de Matemática e 7 do BC& T (Bacharelado em Ciência e Tecnologia).
2. Apenas um participante conhecia o aplicativo Desmos.
3. Quatro pessoas tinham algum conhecimento prévio ao minicurso na área de Programação Linear.
4. Na sua opinião o objetivo principal do minicurso foi atingido? (Objetivo: discutir a resolução gráfica de alguns problemas de PL utilizando a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas). Justifique.
 - “Sim. Calculamos a solução de diversos problemas, onde discutimos com colegas do minicurso o tema abordado.”
 - “Sim. O objetivo foi apresentado e atingido.”
 - “Sim. Análise da parte teórica e prática por uma metodologia simples e de fácil compreensão.”
 - “Sim. Através da PL foi possível uma análise gráfica e com a utilização da metodologia de aprendizagem conseguimos adquirir conhecimento para resolver os problemas.”
 - “Sim. Nesses dois dias de minicurso creio que o que foi passado para nós supriu e cumpriu o objetivo, a metodologia utilizada foi boa, aprendi, adquiri conhecimento. Não conhecia o Desmos e achei muito boa a sua funcionalidade, é uma ferramenta muito boa.”
 - “Sim. O objetivo principal do minicurso foi atingido, pois aprendemos técnicas para resolver gráficos de alguns problemas de PL, e encontrar soluções para alguns problemas sugeridos.”
 - “Sim. Pois abordou uma forma de ensino diferente e prática, o que desperta o interesse.”

- “Sim. Pois foram abordados vários problemas onde tivemos que solucionar a partir dos gráficos do programa Desmos.”

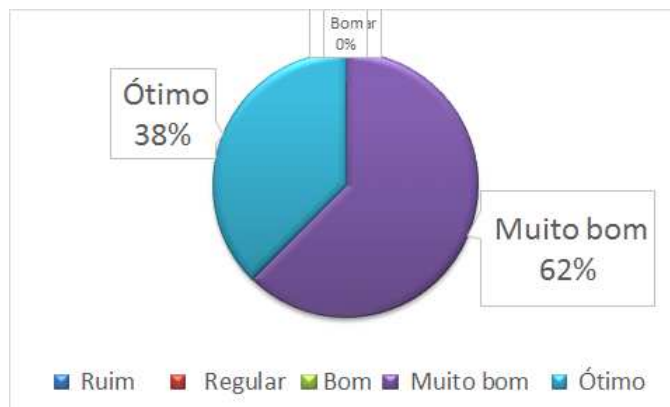
5. “Você, como docente, utilizaria essa metodologia na disciplina que leciona ou que vier a lecionar?”

Houve unanimidade nas respostas, todos responderam que sim.

“Por quê?” Eis as respostas:

- “Pois é bastante didático, uma forma de atrair a atenção dos alunos.”
- “É uma boa forma de resolver problemas relacionados ao contexto de engenharia em si, sendo de ótima aplicação em determinadas disciplinas do curso.”
- “Por que foi didática a forma de abordagem do tema e permite melhor compreensão do conteúdo.”
- “Por que é muito interessante. Existe a questão didática unida a prática além da análise gráfica que deixa o conteúdo mais didático.”
- “Pelo que eu vi, eu gostei, achei muito interessante tanto a metodologia utilizada para resolver os exercícios como também as ferramentas utilizadas e o conhecimento que pode ser utilizado em nossas vidas, na vida acadêmica. Pode nos auxiliar muito em problemas, trabalhos e atividades encontradas em nosso cotidiano.”
- “Utilizaria essa metodologia pois ela nos auxilia na resolução dos problemas sugeridos de programação linear e também na resolução gráfica.”
- “Por que é uma disciplina interessante do ponto de vista que foi aplicada e seria de muita valia no crescimento dos alunos.”
- “Por que ajudaria os discentes a visualizar melhor graficamente. Além de ser um método que pode ser utilizado no dia a dia.”

6. A avaliação do curso pelos participantes do minicurso foi: muito bom (5 pessoas) e ótimo (3 pessoas).



7. Na última questão foi pedido que se apresentasse sugestões de melhoria para as atividades propostas. Abaixo estão as respostas:

- “A minha única sugestão seria o aumento da carga horária, pois fiquei ansioso para terminar os exercícios que ficaram em aberto, tentarei fazer em casa.”
- “Mais tempo.”
- “Uma sugestão é o aumento da carga horária do minicurso (que é de 4 horas) para concluir as atividades propostas e sanar todas as dúvidas.”
- “Mais exercícios e exemplos.”
- “Não há muito o que melhorar, porém poderia ser mais usual, a explicação do docente um pouco mais extensa.”
- “Mais exemplos de aplicações desse minicurso.”
- “Estava bom, eu gostei. A metodologia utilizada foi boa, poderia analisar o local e as pessoas que vão se beneficiar e que vão ao evento e usar algo que vai auxiliar no desenvolvimento do curso, por exemplo, o aplicativo Desmos, utilizar outros como este.”
- “Aprofundar mais nas atividades, como utilizar mais variáveis.”

E Simulações - Painéis Solares

Os ângulos ideais encontrados na Seção 6.2.2, são bem próximos de zero, portanto é de se esperar que ângulos próximos desse valor gerem custos baixos. Abaixo estão duas simulações com os ângulos 0,5° e 1°.

1. Ângulo 0,5°:

Energia Solar produzida										
Hora	AM				PM					
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo α	0	5	25	45	65	65	45	25	5	0
Ângulo Θ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
0,5	0	95,5	75,5	55,5	35,5	35,5	55,5	75,5	95,5	0
Energia Solar produzida	0	955	755	555	355	355	555	755	955	0
										TOTAL E. Solar 5240

Consumo por aparelho:

Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	TOTAL
Energia Solar	0	955	755	555	355	355	555	755	955	0	5240
Bateria usada	958	0	0	0	0	0	0	0	0	992	
Energia da rede	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Carro elétrico	316	379	298	0	0	0	0	328	376	303	2000
Aquecedor	316	184	132	0	161	161	0	135	184	327	1600
Luzes	316	238	184	243	0	0	243	191	238	347	2000
Cozinha	10	127	127	29	29	29	29	78	127	15	600
Transbordamento	0	0	0	0	0	0	0	12	30	0	42
EC = Energia Consumida	958	928	741	272	190	190	272	732	925	992	
E SOLAR - EC	42	27	14	283	165	165	283	23	30	-992	
Carga da bateria	43	70	93	376	541	706	989	1012	1030	8	

Na última linha sabe-se que a carga da bateria é limitada em 1000 unidades de energia, portanto o que excede esse valor, transborda.

$$\text{Custo} = \sum_{i=1}^{10} [3 \cdot (r_i + t_i)] = 3 \cdot 42 = 126$$

2. Ângulo 1°

Energia Solar										
	AM				PM					
Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Ângulo α	0	5	25	45	65	65	45	25	5	0
Ângulo Θ										
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
1	0	96	76	56	36	36	56	76	96	0
Energia Solar / dia	0	960	760	560	360	360	560	760	960	0
TOTAL E. Solar										5280

Consumo por aparelho:

Hora	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	TOTAL
Energia Solar	0	960	760	560	360	360	560	760	960	0	5280
Bateria usada	957	0	0	0	0	0	0	0	0	992	
Energia da rede	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Carro elétrico	316	381	295	0	0	0	0	326	379	303	2000
Aquecedor	315	186	132	0	160	160	0	134	186	327	1600
Luzes	316	239	183	241	0	0	242	191	241	347	2000
Cozinha	10	127	127	28	29	29	29	78	128	15	600
Transbordamento	0	0	0	0	0	0	15	31	26	0	72
EC = Energia Consumida	957	933	737	269	189	189	271	729	934	992	
Diferença entre a energia solar	43	27	23	291	171	171	289	31	26	-992	
Carga da bateria	43	70	93	384	555	726	1015	1031	1026	8	

$$\mathbf{Custo} = \sum_{i=1}^{10} [3 \cdot (r_i + t_i)] = 3 \cdot 72 = 216$$

Pode-se observar que os valores de custo aumentam quando o valor do ângulo aumenta, o que era previsível pois o valor ótimo ocorre quando o ângulo é praticamente nulo. Os valores totais de energia solar no dia crescem com o aumento dos ângulos de inclinação:

Ângulos dos painéis solares	Total de Energia Solar produzida / dia
0.5°	5240
1°	5280
5°	5600

Como o consumo máximo é de 6200 unidades de energia, e é necessário o uso da carga da bateria no primeiro horário (a produção ideal seria em torno de 5200), portanto se a produção de energia solar aumentar, a energia que excede o consumo quando a carga da bateria estiver completa irá transbordar e gerar custo.