Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Aproximação de Funções Holomorfas em Espaços de Dimensão Infinita

Erhan Çalışkan†
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

†Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Aproximação de Funções Holomorfas em Espaços de Dimensão Infinita

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Erhan Çalışkan** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de Março de 2003.

Prof.Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui.**

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. João Bosco Prolla.

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Profa. Dra. Luiza Amália Moraes.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP** como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTOR em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Caliskan, Erhan

C129a Aproximação de funções holomorfas em espaços de dimensão infinita/Erhan Caliskan -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Analise funcional. 2.Teoria da aproximação. 3. Banach, Espaços de. 4. Aplicações holomorfas. I. Ascui, Jorge Tulio Mujica. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 11 de março de 2003 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). JOÃO BOSCO PROLLA

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

annem Makbule' ye...

Agradecimentos

Agradeço

ao professor Jorge Mujica, pela sua orientação, paciência e compreensão durante a preparação desta tese.

ao professor Mário Matos, pelas discussões proveitosas.

ao professor Luiz San Martin, pela ajuda nos processos burocráticos nos primeiros dias no Brasil.

aos colegas Daniel, Marcela, Daniela, Cristiane, Ximena e Alcindo por toda amizade e pelas correções do português.

a Cidinha, Ednaldo e Tânia, pela ajuda na SPG do IMECC.

à CAPES, pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Resumo

Nesta tese consideramos o espaço das funções holomorfas limitadas, o espaço das funções holomorfas de tipo limitado e o espaço das funções holomorfas, respectivamente, e estudamos as relações entre eles e a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação compacta. Começamos com o estudo da propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação compacta. Depois disso, nós investigamos as condições necessárias e suficientes para o pré-dual do espaço das funções holomorfas limitadas, $G^{\infty}(U)$, construído por J. Mujica em [33], ter a propriedade de aproximação compacta. Depois nós investigamos as condições necessárias e suficientes para o pré-dual do espaço das funções holomorfas de tipo limitado, $G_b(U)$, construído por P. Galindo, D. Garcia e M. Maestre em [20], ter a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação compacta. Finalmente consideramos quando o pré-dual do espaço de funções holomorfas, $G(U)$, construído por P. Mazet em [27], tem a propriedade de aproximação compacta. Como temos a linearização dos polinômios homogêneos, obtemos resultados análogos para os pré-duais dos espaços de polinômios m-homogêneos, $Q(^m E)$, também.

Abstract

In this thesis we consider the space of bounded holomorphic mappings, the space of holomorphic mappings of bounded type and the space of holomorphic mappings, respectively, and study relations between them and the approximation property and the compact approximation property. We begin with the study of the approximation property and the compact approximation property. After this, we examine necessary and sufficient conditions for the predual of the space of bounded holomorphic mappings, $G^{\infty}(U)$, constructed by J. Mujica in [33], to have the compact approximation property. Then, we examine necessary and sufficient conditions for the predual of the space of holomorphic mappings of bounded type, $G_b(U)$, constructed by P. Galindo, D. Garcia e M. Maestre in [20], to have the approximation property and the compact approximation property. Finally we consider when the predual of the space of holomorphic mappings, $G(U)$, constructed by P. Mazet in [27], has the compact approximation property. Since we have the linearization of homogeneous polynomials, we obtain also similar results for the preduals of spaces of m-homogeneous polynomials, $Q(^mE)$.

Lista de Símbolos

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$: o corpo de todos os números reais, e o corpo de todos os números complexos, respectivamente.
- $\mathbb{K}$: o corpo dos escalares sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^+, \mathbb{N}$: o conjunto de todos os números reais positivos, e o conjunto de todos os números inteiros positivos, respectivamente, e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- E, F: espaços de Banach complexos (ou espaços localmente convexos complexos de Hausdorff).
- U : subconjunto aberto não-vazio de E.
- U_E : a bola unitária aberta de E.
- B_E : a bola unitária fechada de E.
- I_E, I_M: a aplicação identidade sobre E, e sobre qualquer subespaço M de E, respectivamente.
- c_0 : espaço das seqüências que tendem a zero.
- l^p : espaço das seqüências p-somáveis.
- $\simeq$: isomorfismo algébrico.
- $\cong$: isomorfismo topológico.
- $| \, . \, |$: o módulo.
- $\| \, . \, \|$: a norma.
- $f \,|_A$: a restrição da aplicação f ao conjunto A.
- A° : o polar do conjunto A.
- $\Gamma(A)$: a envoltória convexa e equilibrada do conjunto A.
- $\overline{A}^{\,\tau}$: o fecho de conjunto A para a topologia τ.
- $< A >$: o subespaço gerado pelo conjunto A.
- $< E, F >$: a dualidade (ou sistema dual) entre E e F.

- $\bigotimes_{s,n,\pi} E$: o espaço de produtos tensoriais simétricos de n-cópias de E com a topologia projetiva π.
- Λ : um conjunto dirigido.
- $\prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$: o produto topológico dos espaços localmente convexos E_α.
- $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$: a soma direta localmente convexa dos espaços localmente convexos E_α.
- $proj_{\alpha\in\Lambda}\, E_\alpha$: o limite projetivo dos espaços localmente convexos E_α.
- $ind_{\alpha\in\Lambda}\, E_\alpha$: o limite indutivo dos espaços localmente convexos E_α.
- $L(E;F)$: o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de E em F.
- $L_k(E;F)$: o subespaço vetorial de $L(E;F)$ de todos os operadores compactos.
- $E' \bigotimes F$: o subespaço vetorial de $L(E;F)$ de todos os operadores de posto finito.
- $\mathcal{P}(E;F)$: o espaço vetorial de todos os polinômios contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}_f(E;F) = \mathcal{P}_f(E) \bigotimes F$: o subespaço de todos os membros de tipo finito de $\mathcal{P}(E;F)$.
- $\mathcal{P}_k(E;F)$: o subespaço de todos os membros compactos de $\mathcal{P}(E;F)$.
- $\mathcal{P}_w(E;F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(E;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E.
- $\mathcal{P}_{wu}(E;F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(E;F)$ que são fracamente uniformemente contínuos nos limitados de E.
- $\mathcal{P}(^mE;F)$: o subespaço de todos os membros m-homogêneos de $\mathcal{P}(E;F)$, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.
- $\mathcal{P}_w(^mE;F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.
- $\mathcal{P}_{wu}(^mE;F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são fracamente uniformemente contínuos nos limitados de E, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.
- $\mathcal{H}(U;F)$: o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de U em F.
- $\mathcal{H}^\infty(U;F)$: o subespaço de todos os membros limitados de $\mathcal{H}(U;F)$.
- $\mathcal{H}^\infty_K(U;F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ que têm imagem relativamente compacta.

- $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: cobertura aberta enumerável e crescente de subconjuntos de U.
- $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$: o subespaço de todas os membros de $\mathcal{H}(U; F)$ que são limitadas sobre U_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}(\mathcal{U}; F)$ que têm imagem relativamente compacta sobre U_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ que têm posto finito.
- $\mathcal{H}_b(U; F)$: o subespaço de todos os membros de tipo limitado de $\mathcal{H}(U; F)$.
- $\mathcal{H}_c(U; F)$: o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}(U; F)$ que têm imagem relativamente compacta sobre subconjuntos U-limitados.
- $G^\infty(U)$, $G^\infty(\mathcal{U})$, $G_b(U)$, $G(U)$, $Q(^nE)$: o pré-dual de $\mathcal{H}^\infty(U)$, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, $\mathcal{H}_b(U)$, $\mathcal{H}(U)$, $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, (respectivamente).
- $\mathcal{V}_0(E)$: a coleção de vizinhanças de zero em E.
- τ_c: a topologia compacto-aberta.
- τ_ω: a topologia de Nachbin (compacto-portada).
- τ_δ : a topologia bornológica.
- τ_γ : a topologia localmente convexa sobre $\mathcal{H}^\infty(U; F)$ ou $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$.
- $\sigma(E, E')$: a topologia fraca sobre E.
- $\sigma(E', E)$: a topologia fraca-estrela sobre E'.
- $\tau(E, F)$: a topologia de Mackey sobre E.
- $(L(E; F), c)$: o espaço de aplicações lineares contínuas de E em F, com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos, convexos e equilibrados de E.
- E'_c : o dual de E com a topologia c.
- $L_\epsilon(E'_c; F)$: o espaço de aplicações lineares continuas de E'_c em F, com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos equicontínuos de E'.
- $E\epsilon F$: o produto-ϵ dos espaços E e F.
- E'_b : o dual de E com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos limitados de E.
- $\mathcal{S}$: o conjunto de todas as seqüências escalares $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \mid \alpha_n \mid^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

Introdução

A propriedade de aproximação foi introduzida por A. Grothendiek em [21]. A investigação de diversas variantes da propriedade de aproximação e as relações entre elas foram iniciadas por ele. O contra-exemplo de P. Enflo [17], que mostra a existência de espaços de Banach sem a propriedade de aproximação, deu um rumo para pesquisar mais profundamente e descobrir que espaços encontrados em análise funcional têm essa propriedade ou não. Por exemplo, ainda não se sabe se o espaço de funções holomorfas limitadas sobre o disco unitário aberto, $\mathcal{H}^\infty(\triangle)$, tem a propriedade de aproximação. O objetivo deste trabalho é investigar as relações entre certas variantes da propriedade de aproximação e certas classes de funções holomorfas.

O fundamento de nossos resultados nesta direção, essencialmente, é baseado na linearização de funções holomorfas. Nos primeiros três capítulos restringimos a nossa atenção ao caso dos espaços de Banach. No primeiro capítulo damos o teorema de linearização, tanto para funções holomorfas limitadas quanto para polinômios homogêneos, e suas conseqüências.

No segundo capítulo estudamos as variantes da propriedade de aproximação (propriedade de aproximação métrica, propriedade de aproximação compacta e propriedade de aproximação compacta métrica) e as relações entre elas. E neste capítulo estudamos também a relação entre espaços de Banach e seus duais no sentido de ter a propriedade de aproximação (métrica) e a propriedade de aproximação compacta (métrica). Os seguintes problemas, que ainda permanecem abertos, foram as motivações principais neste capítulo:

1) Será que um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação compacta cada vez que seu dual E' a tem ?

2) Se E' tem a propriedade de aproximação compacta será que ele tem a propriedade de aproximação compacta métrica ?

Na seção 3.1 mostramos que um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação compacta se e só se o pré-dual do espaço de polinômios m-homogenêos, $Q(^mE)$, tem a propriedade de aproximação compacta para cada $m \in \mathbb{N}$. Em seguida adaptando um resultado de J. Mujica ([33], Theorem 5.4) mostramos que um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação compacta se e só se o pré-dual do espaço de funções holomorfas limitadas, $G^\infty(U)$, tem a propriedade de aproximação compacta, onde U é um aberto limitado e equilibrado em E. Na seção 3.2 obtemos resultados análogos para a propriedade de aproximação compacta métrica.

O espaço $G^\infty(\mathcal{U})$ foi construído por J. Mujica em [34]. No capítulo 4, obtemos resultados preliminares que serão usados no capítulo 6 em que obtemos condições necessárias e suficientes para $G^\infty(\mathcal{U})$ ter a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação compacta. Para conseguir nossos resultados usamos o limite projetivo de espaços $\mathcal{H}^\infty(U_n; F)$, onde U_n é subconjunto aberto limitado equilibrado de um subconjunto aberto equilibrado U para cada $n \in \mathbb{N}$, e o limite indutivo de espaços $G^\infty(U_n)$, que é topologicamente isomorfo a $G^\infty(\mathcal{U})$, obtido por J. Mujica em [34]. Usando estas ferramentas damos isomorfismos algébricos entre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ e $L(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ e entre alguns de seus subespaços. Além disso, definimos uma espécie da topologia projetiva τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ e provamos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F), \tau_\gamma)$ é topologicamente isomorfo a $(L(G^\infty(\mathcal{U}); F), \tau_c)$, sendo F um espaço localmente convexo. Na Proposição 4.2.15 (no caso geral Proposição 4.2.18) damos uma caracterização desta topologia através de seminormas que será útil na Proposição 4.2.21.

No capítulo 5, paralelamente ao capítulo 2, primeiro damos resultados básicos para a propriedade de aproximação em espaços localmente convexos. Na seção 5.3 tentamos obter resultados correspondentes para a propriedade de aproximação compacta. Em geral é mais difícil conseguir resultados análogos para o caso da propriedade de aproximação compacta. Porém, mostramos que se $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de um espaço localmente convexo E, então E tem a propriedade de aproximação compacta se e só se cada E_n tem a propriedade de aproximação compacta, que é similar a um resultado de C. Boyd, S. Dineen, P. Rueda em [9].

Usando os resultados dos capítulos 3, 4 e 5, na seção 6.1 mostramos que se U é um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach E e $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura enumerável crescente de subconjuntos abertos equilibrados e limitados de U, então $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a propriedade de aproximação se e só se E tem a propriedade de aproximação se e só se $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$ é τ_γ-denso em $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ para cada espaço localmente convexo F

(equivalentemente para cada espaço de Banach F). Para obter este resultado usamos as técnicas de J. Mujica [33] (que foram usadas também no capítulo 3 para provar o Teorema 3.1.3 e a Proposição 3.2.2). Na seção 6.3 obtemos os mesmos resultados para a propriedade de aproximação compacta. Entretanto, não sabemos se o mesmo método funciona no caso da propriedade de aproximação compacta. Para obter o resultado correspondente no caso da propriedade de aproximação compacta, primeiro mostramos que $\{Q(^nE)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de $G^{\infty}(\mathcal{U})$ e conseqüentemente obtemos que $G^{\infty}(\mathcal{U})$ tem a propriedade de aproximação compacta se e só se E tem a propriedade de aproximação compacta. Mas o fato que E tem a propriedade de aproximação compacta se e só se $\mathcal{H}_K^{\infty}(\mathcal{U};F)$ é τ_γ-denso em $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U};F)$ para cada espaço localmente convexo completo F (equivalentemente para cada espaço de Banach F), foi obtido independentemente (usando o método do Teorema 6.1.1). Os resultados das seções 6.2 e 6.4 são conseqüências particulares das seções 6.1 e 6.3 (respectivamente). Pois em [34] (Proposition 7.1), J. Mujica provou que sempre existe uma seqüência fundamental de subconjuntos, com as propriedades dadas no Teorema 6.1.1 (e no Teorema 6.3.5), de um subconjunto aberto e equilibrado U num espaço de Banach E.

No capítulo 7, o último capítulo, usando $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de espaços de funções holomorfas e de seus pré-duais, e um resultado de M.Schottenloher [44], provamos que para um subconjunto aberto equilibrado U de um espaço de Fréchet E são equivalentes:

(a) E tem a propriedade de aproximação compacta,

(b) $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ tem a propriedade de aproximação compacta,

(c) $G(U)$ tem a propriedade de aproximação compacta,

(d) $Q(^nE)$ tem a propriedade de aproximação compacta, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Isto é análogo a um resultado de C. Boyd [8], em que foi provado para a propriedade de aproximação, sendo E Fréchet-Montel.

Capítulo 1

Espaços de Polinômios Homogêneos e Espaços de Funções Holomorfas Limitadas

A maior parte deste capítulo está dedicada aos resultados de J. Mujica [33] sobre funções holomorfas limitadas em espaços de Banach. Os resultados principais são os teoremas da linearização, um para funções holomorfas limitadas, devido a J. Mujica [33], e outro para polinômios homogêneos, essencialmente devido a R. Ryan [42], que aqui nós provaremos usando o método de J. Mujica. Citamos [14], [15] e [32] para as propriedades de polinômios e funções holomorfas em espaços de dimensão infinita.

1.1 Espaços de Polinômios Homogêneos e Espaços de Funções Holomorfas Limitadas

As letras $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam respectivamente o corpo de todos os números reais e o corpo de todos os números complexos, e $\mathbb{K}$ denota o corpo dos escalares sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^+$ denota o conjunto de todos os números reais positivos e $\mathbb{N}$ denota o conjunto de todos os números inteiros positivos, e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

E e F, a menos que indicado, denotam espaços de Banach complexos e I_E, I_M denotam a aplicação identidade sobre E, e sobre qualquer subespaço M de E respectivamente.

$L(E;F)$ denota o espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de E em F e τ_c denota a topologia compacto-aberta.

Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Banach E. Denotamos por $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de U em F, por $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ o subespaço de todos os membros limitados de $\mathcal{H}(U;F)$ e por $\mathcal{H}^\infty_K(U;F)$ o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ que têm imagem relativamente compacta. No caso $F = \mathbb{C}$ denotaremos $\mathcal{H}^\infty(U;\mathbb{C})$ por $\mathcal{H}^\infty(U)$.

Teorema 1.1.1. *([33], Theorem 2.1) Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Banach E. Então existem um espaço de Banach $G^\infty(U)$ e uma função $\delta_U \in \mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U))$ com $\| \delta_U \|= 1$ e com a seguinte propriedade universal: Para cada espaço de Banach F e cada função $f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$, existe um único operador $T_f \in L(G^\infty(U);F)$ tal que $T_f \circ \delta_U = f$. A correspondência*

$$f \in \mathcal{H}^\infty(U;F) \longrightarrow T_f \in L(G^\infty(U);F)$$

é um isomorfismo isométrico. Essas propriedades caracterizam $G^\infty(U)$ de maneira única a menos de um isomorfismo isométrico.

O espaço $G^\infty(U)$ é definido como o subespaço fechado de todos os $u \in \mathcal{H}^\infty(U)'$ tais que $u\,|_{B_{\mathcal{H}^\infty(U)}}$ é τ_c-contínuo, e a função avaliação $\delta_U : x \in U \longrightarrow \delta_x \in G^\infty(U)$ é definida por $\delta_x : f \in \mathcal{H}^\infty(U) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{C}$ para todo $x \in U$. $G^\infty(U)$ é dito o pré-dual de $\mathcal{H}^\infty(U)$. O seguinte resultado dá relação entre E e $G^\infty(U)$.

Proposição 1.1.2. *([33], Proposition 2.3) Seja E um espaço de Banach.*

(a) Se U é um conjunto aberto limitado em E, então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G^\infty(U)$.

(b) Se U é a bola unitária aberta de E, então E é isometricamente isomorfo a um subespaço 1-complementado de $G^\infty(U)$.

Definição 1.1.3. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja*

$$(x,y) \in E \times F \longrightarrow < x,y > \in \mathbb{K}$$

uma forma bilinear com os seguintes propriedades:

(1) *se* $<x, y>= 0$ *para cada* $y \in F$, *então* $x = 0$,

(2) *se* $<x, y>= 0$ *para cada* $x \in E$, *então* $y = 0$.

Neste caso diremos que o par $<E, F>$ *é um sistema dual ou uma dualidade.*

Definição 1.1.4. *O conjunto* $A^\circ = \{x' \in E' : |<x', x>| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}$ *é chamado o polar do subconjunto* $A \subset E$.

Denotamos por $\mathcal{P}(E; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios contínuos de E em F e por $\mathcal{P}(^mE; F)$ o subespaço de todos os membros m-homogêneos de $\mathcal{P}(E; F)$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$. No caso $F = \mathbb{C}$ denotaremos $\mathcal{P}(^mE; \mathbb{C})$ por $\mathcal{P}(^mE)$.

O resultado correspondente do problema de linearização para o espaço $\mathcal{P}(^mE; F)$ foi provado por R.Ryan [42] usando métodos de produto tensorial. Este resultado foi enunciado em [33] sem demonstração. A demonstração é uma modificação óbvia da demonstração do Teorema 2.1 em [33], que nós incluímos aqui para a conveniência do leitor.

Teorema 1.1.5. *([33], Theorem 2.4) Seja* E *um espaço de Banach e seja* $m \in \mathbb{N}$. *Então existem um espaço de Banach* $Q(^mE)$ *e um polinômio* $q_m \in \mathcal{P}(^mE; Q(^mE))$ *com* $\| q_m \| = 1$ *e com a seguinte propriedade universal: Para cada espaço de Banach* F *e cada polinômio* $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, *existe um único operador* $T_P \in L(Q(^mE); F)$ *tal que* $T_P \circ q_m = P$. *A correspondência*

$$P \in \mathcal{P}(^mE; F) \longrightarrow T_P \in L(Q(^mE); F)$$

é um isomorfismo isométrico. Essas propriedades caracterizam $Q(^mE)$ *de maneira única a menos de um isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Seja $m \in \mathbb{N}$, e seja $B_{\mathcal{P}(^mE)}$ a bola unitária fechada de $\mathcal{P}(^mE)$. Pelo Teorema de Ascoli $B_{\mathcal{P}(^mE)}$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{P}(^mE)$ para a topologia compacto-aberta τ_c. Seja $Q(^mE)$ o subespaço fechado de todos os $v \in \mathcal{P}(^mE)'$ tais que $v\mid_{B_{\mathcal{P}(^mE)}}$ é τ_c-contínuo. Seja

$$J_E : P \in \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \widehat{P} \in Q(^mE)'$$

a função avaliação, i.e, $\widehat{P}(\nu) = \nu(P)$ para cada $P \in \mathcal{P}(^mE)$ e $\nu \in Q(^mE)$. Pelo teorema de Ng [39] J_E é um isomorfismo isométrico. Seja

$$q_m : x \in E \longrightarrow \delta_x \in Q(^mE)$$

a função avaliação, i.e, $\delta_x(P) = P(x)$ para cada $x \in E$ e $P \in \mathcal{P}(^mE)$. Como

$$J_E P(q_m(x)) = \widehat{P}(\delta_x) = \delta_x(P) = P(x) \text{ para todo } x \in E \quad (*)$$

segue que $q_m \in \mathcal{P}(^mE; Q(^mE))$. Mais ainda temos

$$\begin{aligned}\| q_m \| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \| q_m(x) \| = \sup_{\|x\|\leq 1} \| \delta_x \| = \sup_{\|x\|\leq 1} (\sup_{\|P\|\leq 1} | \delta_x(P) |) \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} (\sup_{\|P\|\leq 1} | P(x) |) = \sup_{\|P\|\leq 1} (\sup_{\|x\|\leq 1} | P(x) |) \\ &= \sup_{\|P\|\leq 1} \| P \| = 1.\end{aligned}$$

Denotamos por $^\circ$ os polares com respeito ao sistema dual $< Q(^mE), Q(^mE)' >$. Afirmamos que a bola unitária fechada $J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})^\circ$ de $Q(^mE)$ coincide com a envoltória convexa, equilibrada, fechada $\overline{\Gamma} q_m(U_E)$ de $q_m(U_E)$, onde U_E denota a bola unitária aberta de E. Para mostrar que $J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})^\circ = \overline{\Gamma} q_m(U_E)$, basta provar que $J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)}) = \overline{\Gamma} q_m(U_E)^\circ$. Para isso vamos usar a sobrejetividade de J_E. Consideremos os seguintes conjuntos.

$$J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)}) = \{J_E(P) \in Q(^mE)' : \| P \| \leq 1, \ P \in \mathcal{P}(^mE)\},$$

$$q_m(U_E)^\circ = \{\widehat{P} \in Q(^mE)' : | \widehat{P}(\nu) | \leq 1 \text{ para todo } \nu \in q_m(U_E)\}.$$

Se $J_E(P) \in J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})$, então temos que

$$| J_E(P)(q_m(x)) | = | \widehat{P}(q_m(x)) | = | \delta_x(P) | = | P(x) | \leq \| P \| \leq 1 \text{ para todo } x \in U_E.$$

Daí $J_E(P) \in q_m(U_E)^\circ$, e portanto $J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)}) \subset q_m(U_E)^\circ$. Agora se $\widehat{P} \in q_m(U_E)^\circ$, como J_E é sobrejetiva, existe $P \in \mathcal{P}(^mE)$ tal que $J_E(P) = \widehat{P}$ e portanto temos $| P(x) | = | \delta_x(P) | = | \widehat{P}(\delta_x) | \leq 1$ para todo $x \in U_E$. Logo $| P(\bar{x}) | \leq 1$ para todo $\bar{x} \in B_E$. Daí $\| P \| \leq 1$ e portanto $\widehat{P} = J_E(P) \in J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})$. Logo $q_m(U_E)^\circ \subset J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})$. Logo $J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)}) = q_m(U_E)^\circ$, o que queríamos provar. Portanto pelo Teorema do Bipolar e pelo Teorema de Hahn-Banach temos que

$$J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})^\circ = (q_m(U_E)^\circ)^\circ = \overline{\Gamma} q_m(U_E).$$

Note que, em particular, $q_m(U_E)$ gera um subespaço denso de $Q(^mE)$. De fato: Se $\nu \in Q(^mE)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\| \nu \| \leq n$. Portanto $\| \frac{\nu}{n} \| \leq 1$ e daí

$$| \widehat{P}(\frac{\nu}{n}) | = | J_E(P)(\frac{\nu}{n}) | \leq \| J_E(P) \| . \| \frac{\nu}{n} \| \leq \| P \| .1 \leq 1 \text{ para } \| P \| \leq 1.$$

Então $\frac{\nu}{n} \in J_E(B_{\mathcal{P}(^mE)})^\circ = \overline{\Gamma} q_m(U_E)$. Logo $\nu \in n\overline{\Gamma} q_m(U_E) \subset \overline{< q_m(U_E) >}$. Portanto $Q(^mE) \subset \overline{< q_m(U_E) >}$, e daí temos $Q(^mE) = \overline{< q_m(U_E) >}$.

Afirmamos que o par $(Q(^mE), q_m)$ tem a propriedade universal desejada. De fato: Se $P \in \mathcal{P}(^mE)$, então definamos $T_P = J_E P \in Q(^mE)'$. Portanto por (*) temos que $T_P \circ q_m = J_E P \circ q_m = P$. Se $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, então definamos $T_P : Q(^mE) \longrightarrow F''$ por

$$T_P \nu(\psi) = \nu(\psi \circ P)$$

para cada $\nu \in Q(^mE)$ e $\psi \in F'$. É facíl mostrar que T_P é linear. Como

$$\begin{aligned}
\| T_P \| &= \sup_{\|\nu\| \leq 1} \| T_P \nu \| = \| \sup_{\|\nu\| \leq 1} (\sup_{\|\psi\| \leq 1} \| T_P \nu(\psi) \|) = \| \sup_{\|\psi\| \leq 1} (\sup_{\|\nu\| \leq 1} \| \nu(\psi \circ P) \|) \\
&= \sup_{\|\psi\| \leq 1} \| \psi \circ P \| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} (\sup_{\|x\| \leq 1} | \psi \circ P(x) |) \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} (\sup_{\|\psi\| \leq 1} | \psi(P(x)) |) = \sup_{\|x\| \leq 1} \| P(x) \| \\
&= \| P \|
\end{aligned}$$

então $T_P \in L(Q(^mE); F'')$. Mais ainda, como

$$(T_P \delta_x)(\psi) = \delta_x(\psi \circ P) = \psi \circ P(x) = \psi(P(x)) = \widetilde{P(x)}(\psi) \text{ para todo } x \in E \text{ e } \psi \in F',$$

(onde $\widetilde{P(x)} \in F''$ corresponde a $P(x) \in F$) temos que $T_P \circ q_m(x) = T_P \delta_x = P(x) \in F$ para cada $x \in E$. Logo $T_P(< q_m(U_E) >) \subset F$. Portanto como

$$T_P(Q(^mE)) = T_P(\overline{< q_m(U_E) >}) \subset \overline{T_P(< q_m(U_E) >)} \subset \overline{F} = F$$

concluímos que $T_P \in L(Q(^mE); F)$. A unicidade de T_P segue também do fato que $q_m(U_E)$ gera um subespaço denso de $Q(^mE)$. Com efeito; se $T_P - T_P' = 0$ em $q_m(U_E)$, então por linearidade $T_P - T_P' = 0$ em $< q_m(U_E) >$, e daí por continuidade $T_P - T_P' = 0$ em $\overline{< q_m(U_E) >} = Q(^mE)$. Logo $T_P = T_P'$.

Finalmente, a unicidade de $Q(^mE)$ com respeito o isomorfismo isométrico segue da propriedade universal, junto com a isometria $\| T_P \| = \| P \|$. De fato: Suponhamos que existe outro espaço de Banach $Q(^mE)_1$ e existe outro polinômio q_m^1 com a propriedade universal. Então temos o seguinte diagrama comutativo :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "q_m^1"] \arrow[d, "q_m"'] & Q(^mE)_1 \arrow[dl, shift left, "T_m"] \\
Q(^mE) \arrow[ur, shift left, "T_m^1"] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que a existência de T_m^1 e T_m são garantidas pela propriedade universal com $\| T_m \| = \| q_m \| = 1$ e $\| T_m^1 \| = \| q_m^1 \| = 1$. Como $T_m^1 \circ q_m(x) = q_m^1(x)$ para todo $x \in E$, então $T_m \circ T_m^1 \circ q_m(x) = T_m \circ q_m^1(x) = q_m(x)$ para todo $x \in E$, e por densidade temos que $T_m \circ T_m^1(\nu) = \nu$ para todo $\nu \in Q(^mE)$. Analogamente temos que $T_m^1 \circ T_m(\nu_1) = \nu_1$ para todo $\nu_1 \in Q(^mE)_1$. Logo $T_m^1 \circ T_m = T_m \circ T_m^1 = Id$. Logo $Q(^mE) \cong Q(^mE)_1$. Como $\| \nu_1 \| = \| T_m^1 \circ T_m(\nu_1) \| \leq \| T_m(\nu_1) \| \leq \| \nu_1 \|$, segue que $\| \nu_1 \| = \| T_m(\nu_1) \|$ para cada $\nu_1 \in Q(^mE)_1$. Então $Q(^mE)$ é isometricamente isomorfo a $Q(^mE)_1$. Isto completa a demonstração. ■

Observação 1.1.6. *(a) Na demonstração do teorema anterior para cada* $m \in \mathbb{N}$ *nós definimos*

$$Q(^mE) = \{\nu \in \mathcal{P}(^mE)' : \nu \mid_{B_{\mathcal{P}(^mE)}} \text{ é } \tau_c\text{-contínuo}\}.$$

Mas por ([30], Theorem 2.1) se $\nu \in \mathcal{P}(^mE)'$ *é* τ_c*-contínuo sobre* $B_{\mathcal{P}(^mE)}$*, então ele é* τ_c*-contínuo sobre toda* $\mathcal{P}(^mE)$*. (Para demonstração veja [29], Teorema 30.7 e Corolario 30.9.) Portanto podemos tomar* $Q(^mE) = (\mathcal{P}(^mE), \tau_c)'$.

(b) No teorema anterior a correspondência

$$P \in (\mathcal{P}(^mE; F), \tau_c) \longrightarrow T_P \in (L(Q(^mE); F), \tau_c)$$

é um isomorfismo topológico também com respeito a topologia compacto-aberta τ_c*. (Veja [42], ou [33], Theorem 4.1.)*

$Q(^mE)$ é dito o pré-dual de $\mathcal{P}(^mE)$. A seguinte proposição dá a relação entre $Q(^mE)$

e $G^\infty(U)$.

Proposição 1.1.7. *([33], Proposition 2.6) Seja E um espaço de Banach.*
(a) Se U é um subconjunto aberto limitado de E, então $Q(^mE)$ é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G^\infty(U)$.
(b) Se U é a bola unitária aberta de E, então $Q(^mE)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço 1-complementado de $G^\infty(U)$.

Observe que $Q(^1E)$ é isometricamente isomorfo a E. Portanto a Proposição 1.1.7 inclui a Proposição 1.1.2 como caso particular.

Definição 1.1.8. *(Operador compacto) Sejam E e F espaços de Banach.*
(a) Diz-se que $T \in L(E;F)$ é um operador compacto se existe alguma vizinhança V de zero em E tal que $T(V)$ é relativamente compacto em F, ou seja equivalentemente, se T leva subconjuntos limitados de E em subconjuntos relativamente compactos de F.

(b) (Polinômio compacto) Diz-se que o polinômio $P \in \mathcal{P}(E;F)$ é compacto se cada $x \in E$ tem uma vizinhança $V_x \subset E$ tal que $P(V_x)$ é relativamente compacto em F (veja [3], pg 16, ou [15], pg 88).

$L_k(E;F)$ denota o subespaço vetorial de todos os operadores compactos de $L(E;F)$. $\mathcal{P}_k(E;F)$ denota o subespaço de todos os membros compactos de $\mathcal{P}(E;F)$, e $\mathcal{P}_k(^mE;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são compactos, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.

Por ([3], Proposition 3.4), o polinômio $P \in \mathcal{P}(E;F)$ é compacto se e só se existe uma vizinhança de zero V em E tal que $P(V)$ é relativamente compacto em F. Portanto, analogamente ao caso linear, o polinômio $P \in \mathcal{P}(E;F)$ é compacto se e só se $P(B)$ é relativamente compacto em F para cada limitado B em E.

Observação 1.1.9. *Sejam E, F, G espaços de Banach.*
(a) Se $T \in L(E;F)$ e $T_1 \in L_k(F;G)$ então $T_1 \circ T \in L_k(E;G)$. Se $T \in L_k(E;F)$ e $T_1 \in L(F;G)$ então $T_1 \circ T \in L_k(E;G)$.

Em geral temos o seguinte:

(b) Se $P \in \mathcal{P}(E;F)$ *e* $P_1 \in \mathcal{P}_k(F;G)$, *então* $P_1 \circ P \in \mathcal{P}_k(E;G)$. *Se* $P \in \mathcal{P}_k(E;F)$ *e* $P_1 \in \mathcal{P}(F;G)$, *então* $P_1 \circ P \in \mathcal{P}_k(E;G)$.

Usando os teoremas da linearização podemos traduzir certas propriedades de uma função $f \in \mathcal{H}(U;F)$ (resp. de um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$) em propriedades do operador correspondente $T_f \in L(G^\infty(U);F)$ (resp. $T_P \in L(Q(^mE);F)$). O resultado a seguir é um exemplo nesta direção.

Proposição 1.1.10. *([33], Proposition 3.4) Sejam* E *e* F *espaços de Banach, seja* U *um subconjunto aberto de* E, *e seja* $m \in \mathbb{N}$.

(a) Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ *é compacto (resp. fracamente compacto) se, e só se o operador correspondente* $T_P \in L(Q(^mE);F)$ *é compacto(resp. fracamente compacto).*

(b) Uma função $f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$ *tem imagem relativamente compacta (resp. imagem relativamente fracamente compacta) se, e só se o operador correspondente* $T_f \in L(G^\infty(U);F)$ *é compacto(resp. fracamente compacto).*

O seguinte teorema vai fornecer uma das ferramentas mais importantes deste trabalho, que é uma caracterização através de seminormas da única topologia localmente convexa τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ tal que a aplicação $f \longrightarrow T_f$ é um isomorfismo topológico entre $(\mathcal{H}^\infty(U;F),\tau_\gamma)$ e $(L(G^\infty(U);F),\tau_c)$. No capítulo 4, usando esta topologia, definiremos um espécie da topologia projetiva que nós permitira obter alguns resultados importantes neste trabalho.

Teorema 1.1.11. *([33], Theorem 4.8) Sejam* E *e* F *espaços de Banach, e seja* U *um subconjunto aberto de* E. *Seja* τ_γ *a topologia localmente convexa sobre* $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ *gerada por todas as seminormas da forma*

$$p(f) = \sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel,$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty$ *varia sobre todas as seqüências em* U, *e* $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ *varia sobre todas as seqüências de números positivos tendendo a zero. Então a função*

$$f \in (\mathcal{H}^\infty(U;F),\tau_\gamma) \longrightarrow T_f \in (L(G^\infty(U);F),\tau_c)$$

é um isomorfismo topológico.

O resultado seguinte dá a relação entre a topologia compacto-aberta τ_c e a topologia τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$.

Proposição 1.1.12. *([33], Proposition 4.9) Sejam E e F espaços de Banach, e seja U um subconjunto aberto de E. Então*

(a) $\tau_\gamma \geq \tau_c$ *sobre* $\mathcal{H}^\infty(U;F)$.

(b) τ_γ *coincide com* τ_c *sobre cada subconjunto limitado (em norma) de* $\mathcal{H}^\infty(U;F)$.

(c) Se U é limitado, então τ_γ *coincide com* τ_c *sobre* $\mathcal{P}(^mE;F)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Trocando a topologia τ_γ pela topologia compacto-aberta τ_c sobre $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ temos o seguinte resultado.

Corolário 1.1.13. *([33], Corollary 4.10) Sejam E e F espaços de Banach, e seja U um subconjunto aberto de E. Então:*

(a) A função

$$T \in (L(G^\infty(U);F),\tau_c) \longrightarrow T \circ \delta_U \in (\mathcal{H}^\infty(U;F),\tau_c)$$

é contínua.

(b) A restrição da função inversa

$$f \in (\mathcal{H}^\infty(U;F),\tau_c) \longrightarrow T_f \in (L(G^\infty(U);F),\tau_c)$$

a cada subconjunto limitado (em norma) de $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ *é contínua.*

A seguir enunciaremos uma parte de um resultado de J. Mujica em [33].

Proposição 1.1.14. *([33], Proposition 5.2) Sejam E e F espaços de Banach, e seja U um subconjunto aberto, equilibrado de E. Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$ e seja*

$$S_m f(x) = \sum_{k=0}^{m} P^k f(0)(x),$$

e

$$\sigma_m f(x) = \tfrac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_k f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m+1-k}{m+1} P^k f(0)(x).$$

Se $\| f(x) \| \leq c$ *para todo* $x \in U$, *então* $\| \sigma_m f(x) \| \leq c$ *para todo* $x \in U$ *e* $m \in \mathbb{N}$, *e* $\sigma_m f \longrightarrow f$ *em* $(\mathcal{H}^\infty(U;F),\tau_\gamma)$.

Para conseguir nossos resultados neste trabalho, um dos conceitos utilizados é o de polinômio fracamente contínuo sobre os conjuntos limitados, que definiremos a seguir.

Definição 1.1.15. *A função $f : E \longrightarrow F$ é dita fracamente contínua nos limitados de E se para cada conjunto limitado $B \subset E$, $\epsilon > 0$ e $x_0 \in B$ existem $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ e $\delta > 0$ tais que se $x \in B$, $| \varphi_i(x_0 - x) | < \delta$, $(i = 1, \ldots, k)$, então $\| f(x_0) - f(x) \| < \epsilon$.*

$\mathcal{P}_w(E;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(E;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E e $\mathcal{P}_w(^mE;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.

A próxima definição está inspirada nos polinômios homogêneos e será útilizada nas Proposições 1.1.19 e 1.1.21, e usando estas provaremos que E tem a propriedade de aproximação compacta métrica se e só se $Q(^mE)$ tem a propriedade de aproximação compacta métrica para cada $m \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.16. *Para cada polinômio $P \in \mathcal{P}(E;F)$ definamos a norma de P por*

$$\| P \| := \sup_{\|x\| \leq 1} \| P(x) \|.$$

Lema 1.1.17. *Sejam E e F espaços de Banach.*
(a) Se $P \in \mathcal{P}_w(E;F)$ é tal que $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^n$, onde para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ P^j é um polinômio j-homogêneo, então $P^j \in \mathcal{P}_w(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Se $\| P \| \leq c$, $c > 0$, então $\| P^j \| \leq c$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$.
(b) Se $P \in \mathcal{P}_k(E;F)$ é tal que $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^n$, onde para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ P^j é um polinômio j-homogêneo, então $P^j \in \mathcal{P}_k(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Se $\| P \| \leq c$, $c > 0$, então $\| P^j \| \leq c$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$.

Demonstração: (a) Seja $P \in \mathcal{P}_w(E;F)$ tal que $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^n$, onde para cada $j = 0, 1 \ldots, n$ P^j é um polinômio j-homogêneo. Como $P \in \mathcal{P}(E;F)$, a demonstração de ([32], Proposition 2.9.(b)) mostra que $P^j \in \mathcal{P}(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1 \ldots, n$. Mas a mesma demonstração mostra que $P^j \in \mathcal{P}_w(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1 \ldots, n$ também. De fato; se $n = 0$, então $P^0 = P \in \mathcal{P}_w(^0E;F)$. Se $n = 1$, então para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$P(\lambda x) = \sum_{j=0}^{1} \lambda^j P^j(x) \quad \text{e} \quad \lambda^1 P(x) = \sum_{j=0}^{1} \lambda^1 P^j(x).$$

Daí, $P(\lambda x) - \lambda^1 P(x) = (1-\lambda)P^0(x)$. Escolhamos um $\lambda \neq 1$. Então $P^0 \in \mathcal{P}_w({}^0E; F)$. Como $P = P^0 + P^1$, logo $P^1 \in \mathcal{P}_w({}^1E; F)$. Se $n = 2$, então para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$P(\lambda x) = \sum_{j=0}^{2} \lambda^j P^j(x) \quad \text{e} \quad \lambda^2 P(x) = \sum_{j=0}^{2} \lambda^2 P^j(x).$$

Daí, $P(\lambda x) - \lambda^2 P(x) = (1-\lambda^2)P^0(x) + (\lambda - \lambda^2)P^1(x)$, que é um polinômio fracamente contínuo nos limitados de E e tem grau no máximo 1, onde escolhamos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda^j - \lambda^2 \neq 0$ para $j = 0, 1$. Então pelo caso $n = 1$ temos que $P^0 \in \mathcal{P}_w({}^0E; F)$ e $P^1 \in \mathcal{P}_w({}^1E; F)$. Como $P = P^0 + P^1 + P^2$, então $P^2 \in \mathcal{P}_w({}^2E; F)$. Continuando assim suponhamos que para $n - 1 \geq 2$ isto é verdade e provemos para n. Para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$P(\lambda x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j P^j(x) \quad \text{e} \quad \lambda^n P(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^n P^j(x).$$

Daí, $P(\lambda x) - \lambda^n P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda^j - \lambda^n) P^j(x)$, que é um polinômio fracamente contínuo nos limitados de E e tem grau no máximo $n-1$, onde escolhamos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda^j - \lambda^n \neq 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Portanto por hipótese de indução concluímos que $P^j \in \mathcal{P}_w({}^jE; F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Mas como $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^{n-1} + P^n$, então $P^n \in \mathcal{P}_w({}^nE; F)$.

Agora suponhamos que para $c > 0$ temos $\| P \| \leq c$. Então, como pela formula integral de Cauchy (veja ([32], Corollary 7.3.))

$$P^j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{P(\xi x)}{\xi^{m+1}} \, d\xi \quad \text{para todo } x \in E, \ j = 0, 1, \ldots, n$$

segue que $\| P^j \| \leq \| P \| \leq c$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$.

(b) A mesma demonstração de (a) funciona. ■

O resultado seguinte é enunciado sem demonstração em [37] para polinômios com valores escalares.

Proposição 1.1.18. *([37], Proposition 2.1) Sejam E e F espaços de Banach. São equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}(E;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_c}$.

(b) $\mathcal{P}(^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_w(^mE;F)}^{\tau_c}$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: **(a) $\Longrightarrow$ (b):** Sejam $m \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de E (podemos supor que K é convexo e equilibrado também). Como $P \in \mathcal{P}(E;F)$, por (a) existe um $P_w \in \mathcal{P}_w(E;F)$ tal que $\| P(x) - P_w(x) \| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Sempre podemos escrever $P_w = P_w^0 + P_w^1 + \ldots + P_w^n$, com $n \geq m$, onde P_w^j é um polinômio j-homogêneo para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Pelo Lema 1.1.17 temos que $P_w^j \in \mathcal{P}_w(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Agora pela formula integral de Cauchy para todo $x \in E$ temos que

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{P(\xi x)}{\xi^{m+1}}\, d\xi \quad \text{e} \quad P_w^m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{P_w(\xi x)}{\xi^{m+1}}\, d\xi.$$

Portanto para todo $x \in K$ temos que

$$\begin{aligned} \| P(x) - P_w^m(x) \| &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{P(\xi x) - P_w(\xi x)}{\xi^{m+1}}\, d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1} \| P(\xi x) - P_w(\xi x) \| \, | d\xi | \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=1} \epsilon \, | d\xi | = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo temos (b).

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sejam $P \in \mathcal{P}(E;F)$, $\epsilon > 0$ e $K \subset E$ um subconjunto compacto, convexo e equilibrado. Suponhamos que $P = P^0 + P^1 + \ldots P^n$, onde $P^j \in \mathcal{P}(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Por (b), para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ existe um $P_w^j \in \mathcal{P}_w(^jE;F)$ tal que

$$\| P^j(x) - P_w^j(x) \| \leq \frac{\epsilon}{n+1} \quad \text{para todo } x \in K.$$

Seja $P_w = P_w^0 + P_w^1 + \ldots + P_w^n$. Portanto para todo $x \in K$ temos que

$$\| P(x) - P_w(x) \| \leq \| P^0(x) - P_w^0(x) \| + \| P^1(x) - P_w^1(x) \| + \ldots + \| P^n(x) - P_w^n(x) \|$$

$$\leq (n+1)\frac{\epsilon}{n+1} \leq \epsilon.$$

Logo temos (a). ■

Proposição 1.1.19. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach. Se* $B_{\mathcal{P}(E;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c}$ *então* $B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(^mE;F)}}^{\tau_c}$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A mesma demonstração da Proposição 1.1.18 funciona.

As mesmas demonstrações das Proposições 1.1.18 e 1.1.19 funcionam para os seguintes resultados:

Proposição 1.1.20. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach. São equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}(E;F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_c}$.

(b) $\mathcal{P}(^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_k(^mE;F)}^{\tau_c}$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.1.21. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach. Se* $B_{\mathcal{P}(E;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c}$ *então* $B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(^mE;F)}}^{\tau_c}$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

A Propriedade de Aproximação e a Propriedade de Aproximação Compacta em Espaços de Banach

Neste capítulo estudamos a propriedade de aproximação (métrica) e a propriedade de aproximação compacta (métrica). Nas seções 2.1 e 2.2 enunciamos definições e resultados conhecidos sobre a propriedade de aproximação (métrica). Entre estes resultados os mais interessantes são os sobre espaços de Banach e seus duais topológicos com relação a ter a propriedade de aproximação (métrica) e a relação entre a propriedade de aproximação e a propriedade de aproximação métrica. Nesta direção, nas seções 2.3 e 2.4 investigamos o caso da propriedade de aproximação compacta (métrica). No caso do espaços de Banach reflexivo, mostramos que E tem a propriedade de aproximação compacta (métrica) se e só se E' tem a propriedade de aproximação compacta (métrica). Mas o caso geral permanece um problema aberto para a propriedade de aproximação compacta, e para a propriedade de aproximação compacta métrica temos resposta negativa, devida a P.G. Casazza e H. Jarchow [11]. No seção 2.4 mostramos a relação entre a propriedade de aproximação compacta e a propriedade de aproximação compacta métrica, provando que um espaço de Banach E reflexivo tem a propriedade de aproximação compacta se e só se E tem a propriedade de aproximação compacta métrica. Mas aqui também o caso geral é um problema aberto, i.e, não sabemos se E' tem a propriedade de aproximação compacta métrica cada vez que E' tem a propriedade de aproximação compacta.

2.1 A Propriedade de Aproximação em Espaços de Banach

O problema da aproximação em espaços de Banach, superficialmente, é decidir se é verdade que para um espaço de Banach E dado, cada operador em $L(E;E)$ pode ser aproximado pelos operadores de posto finito, uniformemente sobre conjuntos compactos. "Quase todos" os espaços concretos que aparecem em análise funcional têm essa propriedade. Os espaços que admitem uma resposta positiva para o problema acima são ditos tendo a propriedade de aproximação.

Embora S. Banach [4] e contemporâneos dele soubessem várias formulações equivalentes da propriedade de aproximação (veja [40] também), o primeiro trabalho sistemático de variantes dessa propriedade foi feito por A. Grothendieck [21]. Ele encontrou várias formulações equivalentes e conseqüências mas não a solução. Ele conjecturou uma resposta negativa. Foi P. Enflo [17] quem respondeu o problema da aproximação de forma negativa, construindo o primeiro exemplo de um espaço de Banach sem a propriedade de aproximação.

Definição 2.1.1. *Um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação (a PA abreviado) se para todo $\epsilon > 0$ e para todo conjunto compacto $K \subset E$ existe um operador de posto finito $T \in L(E;E)$ (i.e, dim $T(E) < \infty$) tal que $\| Tx - x \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.*

Cada espaço de Banach com uma base de Schauder tem a PA. De fato: se $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E;E)$ é a sequência de projeções canônicas, então $P_n x \longrightarrow x$ para cada $x \in E$. Mas como $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma familia equicontínua e como a topologia da convergência pontual e a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos compactos coincidem sobre subconjuntos equicontínuos (veja [32], Proposition 9.11), então concluímos que $P_n x \longrightarrow x$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto $K \subset E$.

Se E tem a PA, então é fácil mostrar que cada subespaço complementado de E também tem a PA. Porém os exemplos de Enflo [17] e Davie [13] mostram que existem espaços de Banach separáveis reflexivos (por exemplo os espaços de todas as sequências p-somáveis l^p, $2 < p < \infty$) que têm a PA, mas tem um subespaço fechado sem a PA.

Para estudar a PA (e a PA compacta) precisamos o seguinte resultado, devido a Grothendieck [21], o que dá uma representação do dual de espaço dos operadores $(L(E;F), \tau_c)$.

Proposição 2.1.2. *([26], Proposition 1.e.3) O dual do espaço* $(L(E;F), \tau_c)$ *é formado por todos os funcionais* $\varphi : L(E;F) \longrightarrow \mathbb{K}$ *que admitem uma representação da forma*

$$\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{'}(Tx_i) \quad \textit{para todo} \quad T \in L(E;F),$$

onde $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset E$, *e* $(y_i^{'})_{i=1}^{\infty} \subset F^{'}$ *tais que* $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \| . \| y_i^{'} \| < \infty$.

Lembramos que o subespaço de todos os operadores de posto finito de $L(E;F)$ pode ser canonicamente identificado com $E^{'} \bigotimes F$, ou seja $T \in L(E;F)$ tem posto finito se e só se podemos escrever $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(x) y_i$, para cada $x \in E$, com $(x_i^{'})_{i=1}^{n} \subset E^{'}$ e $(y_i)_{i=1}^{n} \subset F$. (Isto segue do Teorema de Hahn-Banach.) Portanto denotaremos por $E^{'} \bigotimes F$ o subespaço de todos os membros de $L(E;F)$ que têm posto finito.

Teorema 2.1.3. *([26], Theorem 1.e.4) Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) E tem a PA.

(ii) $L(E;E) = \overline{E^{'} \bigotimes E}^{\tau_c}$.

(iii) Para cada espaço de Banach F, $L(F;E) = \overline{F^{'} \bigotimes E}^{\tau_c}$.

(iv) Para cada espaço de Banach F, $L(E;F) = \overline{E^{'} \bigotimes F}^{\tau_c}$.

(v) Para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ *e* $(x_n^{'})_{n=1}^{\infty} \subset E^{'}$ *tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n^{'} \| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(x)(x_n) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in E,$$

temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n) = 0.$

Este teorema tem várias conseqüências. Por exemplo: Se E é um espaço de Banach sem a PA, então existe um subespaço separável $M \subset E$ tal que para cada subespaço $M \subset N \subset E$, N não tem a PA. (Veja [10], pg 14.) Outra consequência, devida a A.Grothendieck ([21], Proposition 36), é a seguinte:

Proposição 2.1.4. *(Veja [26], Theorem 1.e.7) Seja E um espaço de Banach. Se E' tem a PA então E tem a PA. Em particular, se E é reflexivo então E tem a PA se e só se E' tem a PA.*

No caso não reflexivo existem espaços de Banach com base de Schauder mas cujo dual não tem a PA (veja [26], Theorem 1.e.7 (b)), i.e, a recíproca da proposição anterior é falsa (veja [10], pg's 16-19 também).

2.2 A Propriedade de Aproximação Métrica em Espaços de Banach

Na definição da propriedade de aproximação não tem nenhuma restrição sobre a norma dos operadores de posto finito que aproximam à identidade sobre um conjunto compacto. Agora definiremos uma forma mais forte da propriedade de aproximação colocando a restrição sobre a norma do operador aproximado de posto finito.

Definição 2.2.1. *Um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação métrica (a PAM abreviado) se para todo $\epsilon > 0$ e para todo conjunto compacto $K \subset E$ existe um operador de posto finito $T \in L(E;E)$ com $\| T \| \leq 1$ tal que $\| Tx - x \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.*

Analogamente ao caso da PA, se E tem a PAM, então cada subespaço complementado de E tem a PAM.

Proposição 2.2.2. *([26], Proposition 1.e.14) Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) E tem a PAM.

(ii) $B_{L(E;E)} = \overline{B_{E' \otimes E}}^{\tau_c}$.

(iii) Para cada espaço de Banach F, $B_{L(F;E)} = \overline{B_{F' \otimes E}}^{\tau_c}$.

(iv) Para cada espaço de Banach F, $B_{L(E;F)} = \overline{B_{E' \otimes F}}^{\tau_c}$.

(v) Para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $(x_n^{'})_{n=1}^{\infty} \subset E^{'}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n^{'} \| < \infty \quad e \quad | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(Tx_n) | \leq 1 \quad para\ todo\ \ T \in B_{E' \otimes E},$$

temos que $| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(x_n) | \leq 1.$

Em ([21], Proposition 40) A. Grothendieck mostra que se E' tem a PAM então E tem a PAM.

Os resultados seguintes, devidos a A. Grothendieck [21], dão relações entre a PA e a PAM.

Teorema 2.2.3. *(veja [26], Theorem 1.e.15, e [10], Theorem 3.6) Cada espaço dual separável com a PA tem a PAM.*

Teorema 2.2.4. *(veja [10], Theorem 3.7) Cada espaço Banach reflexivo com a PA tem a PAM.*

Notemos que a PA, em geral, não implica a PAM. Em [18] T. Figiel e W.B. Johnson construiram um espaço de Banach com a PA, mas não tem a PAM.

2.3 A Propriedade de Aproximação Compacta em Espaços de Banach

Nesta seção estudaremos um variante da propriedade de aproximação, chamado a propriedade de aproximação compacta, que é uma propriedade mais fraca. No início da parte da PA mencionamos sobre a existência de espaços de Banach sem a PA. Depois de primeiro contra-exemplo de P. Enflo para a PA, o método que foi usado por P. Enflo para resolver a problema de aproximação foi simplificado por A.M. Davie [13]. Essa versão modificada do método de Enflo dá um critério geral para um espaço não ter a PA. Como mencionado em ([26], Vol I, pg 94), os espaços que foram obtidos por A.M. Davie em [13] na verdade não tem a propriedade de aproximação compacta (veja [26], Vol II, pg 102, e [10], pg's 15, 16 também).

Definição 2.3.1. *Um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação compacta (a PAC abreviado) se para todo $\epsilon > 0$ e para todo conjunto compacto $K \subset E$ existe um operador compacto $T \in L(E;E)$ tal que $\| Tx - x \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.*

É claro que a PA implica a PAC. Mas a recíproco em geral não é verdade. Em [47] G. Willis construiu um espaço de Banach separável e reflexivo que tem a PAC, mas não tem a PA. Analogamente ao caso da PA temos

Observação 2.3.2. *Se E tem a PAC, então cada subespaço complementado de E tem a PAC.*

Demonstração: Seja M um subespaço complementado de E. Então existe uma projeção $P \in L(E;M)$. Seja $K \subset M$ compacto e $\epsilon > 0$ dados. Já que E tem a PAC, existe um operador compacto $T : E \longrightarrow E$ tal que

$$\| Tx - x \| < \frac{\epsilon}{\| P \|} \text{ para todo } x \in K.$$

Portanto existe $T_M = T|_M : M \longrightarrow E$ linear compacto tal que

$$\| T_M(x) - x \| < \frac{\epsilon}{\| P \|} \text{ para todo } x \in K.$$

Daí temos que $\| P \circ T_M(x) - x \| = \| P \circ T_M(x) - P(x) \| < \epsilon$ para todo $x \in K$. Como $P \circ T_M \in L_k(M;M)$, então provamos que M tem a PAC. ■

A seguir apresentamos uma caracterização da PAC, que é similar a uma caracterização da PA devida a A. Grothendieck [21].

Proposição 2.3.3. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) E tem a PAC.

(ii) $L(E;E) = \overline{L_k(E;E)}^{\tau_c}$.

(iii) Para cada espaço de Banach F, $L(F;E) = \overline{L_k(F;E)}^{\tau_c}$.

(iv) Para cada espaço de Banach F, $L(E;F) = \overline{L_k(E;F)}^{\tau_c}$.

(v) Para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $(x_n^{'})_{n=1}^{\infty} \subset E^{'}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n^{'} \| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(Tx_n) = 0 \quad \text{para todo } T \in L_k(E;E),$$

temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(x_n) = 0$.

Demonstração: $(i) \Longrightarrow (iii)$ Seja $T \in L(F;E)$. Seja $K \subset F$ compacto. Então $T(K)$ é compacto em E. Daí dado $\epsilon > 0$, por (i) temos um operador compacto $T_1 : E \longmapsto E$ tal que

$$\| T_1Ty - Ty \| \leq \epsilon \text{ para todo } y \in K.$$

Como T_1T é compacto, temos (iii).

$(i) \Longrightarrow (iv)$ Seja $T \in L(E;F)$. Dado $K \subset E$ compacto e $\epsilon > 0$, por (i) temos um operador compacto $T_1 : E \longrightarrow E$ tal que

$$\| T_1x - x \| \leq \frac{\epsilon}{\| T \|} \text{ para todo } x \in K.$$

Então $\| TT_1x - Tx \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$. Como TT_1 é compacto, temos (iv).

$(iii), (iv) \Longrightarrow (ii)$ Fazendo $F = E$ temos (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Como $I_E \in L(E;E)$, temos (i).

$(i) \Longleftrightarrow (v)$ Pela Proposição 2.1.2 (v) diz que, se $\varphi \in (L(E;E), \tau_c)^{'}$ e $\varphi(T) = 0$ para cada $T \in L_k(E;E)$, então $\varphi(I_E) = 0$. Por um corolário do teorema de Hahn-Banach isto é equivalente dizer que $I_E \in \overline{L_k(E;E)}^{\tau_c}$, ou seja (i). ∎

Definição 2.3.4. *Um espaço de Banach E é dito fracamente compactamente gerado (FCG abreviado) se existe um subconjunto fracamente compacto K de E tal que $E = \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} nK)}$.*

Notemos que os espaços separáveis e reflexivos são FCG. (Veja [25].)

Teorema 2.3.5. *([25], Theorem 2.1) Seja E um espaço de Banach FCG, e seja M um subespaço fechado separável de E. Então existe um subespaço separável N de E contendo M e uma projeção P de E sobre N tal que $\| P \| = 1$.*

Este teorema é dado em [24] (Proposition 1) para espaços reflexivos, que é um caso particular.

Corolário 2.3.6. *Seja E um espaço de Banach FCG sem a PAC. Então*

(a) Existe um subespaço fechado separável $M \subset E$ tal que para cada subespaço complementado N com $M \subset N \subset E$, N não tem a PAC.

(b) Existe um subespaço complementado e separável de E sem a PAC.

Demonstração: Como (b) é consequência de (a) e o Teorema 2.3.5, só provaremos (a). Pela Proposição 2.3.3 existem $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $(x_n')_{n=1}^{\infty} \subset E'$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n' \| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(Tx_n) = 0 \text{ para todo } T \in L_k(E;E), \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n) \neq 0.$$

Seja $M = \overline{<(x_n)_{n=1}^{\infty}>}$. Seja N um subespaço complementado de E tal que $M \subset N \subset E$ e seja $P \in L(E;N)$ uma projeção. Provaremos que N não tem a PAC. Suponhamos que N tem a PAC. Sejam $(y_n := x_n)_{n=1}^{\infty} \subset N$ e $(y_n' := x_n' |_N)_{n=1}^{\infty} \subset N'$. Então temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| y_n \| . \| y_n' \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n' \| < \infty \text{ e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(Sy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' |_N (Sy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(Sx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(S \circ P\, x_n) = 0$$

para todo $S \in L_k(N;N)$, pois $S \circ P \in L_k(E;N) \subset L_k(E;E)$ para todo $S \in L_k(N;N)$. Daí pela Proposição 2.3.3 temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(y_n) = 0, \text{ ou seja } \sum_{n=1}^{\infty} x_n' |_N (y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n) = 0.$$

Contradição. Logo N não tem a PAC. ∎

Corolário 2.3.7. *Seja E um espaço de Banach FCG. São equivalentes:*

(a) E tem a PAC.

(b) Cada subespaço complementado de E tem a PAC.

(c) Cada subespaço complementado e separável de E tem a PAC.

O corolário anterior foi enunciado em [12] para espaços de Banach reflexivos (como conseqüência de ([24], Proposition 1)). Portanto isto melhora [12], Proposition 3.

Lema 2.3.8. *Sejam E e F espaços de Banach com F reflexivo. Dado $S \in L(F^{'};E^{'})$, sempre existe um único $T \in L(E;F)$ tal que $S = T^{'}$. Se $S \in L_k(F^{'};E^{'})$, então $T \in L_k(E;F)$.*

Demonstração: Seja $S \in L(F^{'};E^{'})$. Como F é reflexivo, temos que $S^{'} \in L(E^{''};F^{''}) = L(E^{''};F)$. Seja $T = S^{'}|_E \in L(E;F)$. Então $T^{'} \in L(F^{'};E^{'})$. Como para todo $y^{'} \in F^{'}$ e $x \in E$ $< T^{'}y^{'}, x > = < y^{'}, Tx > = < y^{'}, S^{'}x > = < Sy^{'}, x >$, daí $T^{'} = S$. Suponha existe $T_1 \in L(E;F)$ tal que $T_1^{'} = S$ também. Daí $T^{'} = T_1^{'}$. Portanto para todo $y^{'} \in F^{'}$ e $x \in E$ temos $< y^{'}, Tx > = < T^{'}y^{'}, x > = < T_1^{'}y^{'}, x > = < y^{'}, T_1x >$. Logo $T = T_1$. Se S é compacto, então por Teorema de Schauder T é compacto. ∎

Corolário 2.3.9. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Então $E^{'}$ tem a PAC se e só se E tem a PAC.*

Demonstração: (i) Suponhamos que $E^{'}$ tem a PAC. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $(x_n^{'})_{n=1}^{\infty} \subset E^{'}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \cdot \| x_n^{'} \| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (T^{'}x_n^{'})(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{'}(Tx_n) = 0 \ \text{ para todo } T \in L_k(E;E).$$

Como E é reflexivo, pelo Lema 2.3.8 segue que $\sum_{i=1}^{\infty} (Sx_n^{'})(x_n) = 0$ para todo $S \in L_k(E^{'}, E^{'})$, ou seja $\sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(Sx_n^{'}) = 0$ para todo $S \in L_k(E^{'};E^{'})$, onde $J : E \longrightarrow E^{''}$ é a aplicação canônica com $J(x)(x^{'}) := x^{'}(x)$ para todo $x^{'} \in E^{'}$ e $x \in E$.

Daí, como $(x_n^{'})_{n=1}^{\infty} \subset E^{'}$ e $(J(x_n))_{n=1}^{\infty} \subset E^{''}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n^{'} \| \cdot \| J(x_n) \| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(Sx_n^{'}) = 0 \ \text{ para todo } S \in L_k(E^{'};E^{'})$$

e como E' tem a PAC, então pela Proposição 2.3.3 temos que $\sum_{n=1}^{\infty} J(x_n)(x_n') = 0$.
Logo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n) = 0$. Portanto, novamente pela Proposição 2.3.3 E tem a PAC.

(ii) Suponhamos que E tem a PAC. Como E é reflexivo, então E'' tem a PAC. Mas pelo (i) isto implica que E' tem a PAC. ∎

No caso não reflexivo, existem espaços de Banach com a PAC, cujos duais não tem a PAC (veja [10], pg's 16-19).

Notemos que existem vários resultados importantes sobre a PA que ainda não se sabe se permanecem válidos no caso da PAC. Por exemplo, se E é um espaço de Banach (não reflexivo), não sabemos se E tem a PAC cada vez que E' tem a PAC. Porém temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.10. *Seja E um espaço de Banach. Se E' tem a PAC, então para cada espaço de Banach F reflexivo $L(E;F) = \overline{L_k(E;F)}^{\tau_c}$.*

Demonstração: Seja $T \in L(E;F)$ e seja $\varphi \in (L(E;F), \tau_c)'$ tal que $\varphi(S) = 0$ para todo $S \in L_k(E;F)$. Daí pela Proposição 2.1.2 existem $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset E$ e $(y_i')_{i=1}^{\infty} \subset F'$ com $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \| . \| y_i' \| < \infty$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty}(S'y_i')(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i'(Sx_i) = \varphi(S) = 0$ para todo $S \in L_k(E;F)$. Como F é reflexivo, pelo Lema 2.3.8 temos que $\sum_{i=1}^{\infty}(Ry_i')(x_i) = 0$ para todo $R \in L_k(F';E')$. Daí $\sum_{i=1}^{\infty}(Ry_i')(x_i) = 0$ para todo $R \in L(F';E')$. De fato; se definimos um funcional ψ sobre $(L(F';E'), \tau_c)$ por $\psi(R) := \sum_{i=1}^{\infty}(Ry_i')(x_i)$ para todo $R \in L(F';E')$, então pela Proposição 2.1.2 $\psi \in (L(F';E'), \tau_c)'$. Seja $R \in L(F';E')$. Como E' tem a PAC, pela Proposição 2.3.3 temos que $L(F';E') = \overline{L_k(F';E')}^{\tau_c}$. Agora, como $\psi(P) = 0$ para todo $P \in L_k(F';E')$, então temos que $\psi(R) = 0$. Daí, como $T' \in L(F';E')$ então temos

$$\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i'(Tx_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(T'y_i')(x_i) = \psi(T') = 0.$$

Então $T \in \overline{L_k(E;F)}^{\tau_c}$, pois caso contrario pelo teorema de Hahn-Banach existiria um $\varphi \in (L(E;F), \tau_c)'$ tal que $\varphi(S) = 0$ para todo $S \in \overline{L_k(E;F)}^{\tau_c}$, mas $\varphi(T) \neq 0$, o que é absurdo. Logo $L(E;F) = \overline{L_k(E;F)}^{\tau_c}$ para todo F Banach reflexivo. ∎

Observação: A proposição anterior, em particular, implica o Corolário 2.3.9.

2.4 A Propriedade de Aproximação Compacta Métrica em Espaços de Banach

Nesta seção vamos colocar a restrição sobre a norma dos operadores compactos que aproximam a identidade sobre um conjunto compacto dado.

Definição 2.4.1. *Um espaço de Banach E tem a propriedade de aproximação compacta métrica (a PACM abreviado) se para todo $\epsilon > 0$ e para todo subconjunto compacto $K \subset E$ existe um $T \in L_k(E;E)$ com $\| T \| \leq 1$ tal que $\| Tx - x \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.*

Já sabemos que mesmo o PACM não implica a PA (veja [47], Proposition 4).

As demonstrações desta seção são análogas às demonstrações da seção 2.3, por isso vamos omití-las.

Observação 2.4.2. *Se E tem a PACM, então cada subespaço 1-complementado de E tem a PACM.*

Proposição 2.4.3. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) E tem a PACM.

(ii) $B_{L(E;E)} = \overline{B_{L_k(E;E)}}^{\tau_c}$.

(iii) Para cada espaço de Banach F, $B_{L(F;E)} = \overline{B_{L_k(F;E)}}^{\tau_c}$.

(iv) Para cada espaço de Banach F, $B_{L(E;F)} = \overline{B_{L_k(E;F)}}^{\tau_c}$.

(v) Para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $(x_n')_{n=1}^{\infty} \subset E'$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| . \| x_n' \| < \infty \quad e \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(Tx_n) \right| \leq 1 \quad para\ todo\ T \in B_{L_k(E;E)},$$

temos que $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x_n)| \leq 1.$

Demonstração: A demonstração da equivalência de $(i), (ii), (iii)$, e (iv) é análoga à demonstração do Proposição 2.3.3. Por outro lado, pela Proposição 2.1.2, (v) diz que, se $\varphi \in (L(E;E), \tau_c)'$ e $|\varphi(T)| \leq 1$ para cada $T \in B_{L_k(E;E)}$, então $|\varphi(I_E)| \leq 1$. Por um teorema de separação de Hahn-Banach isto é equivalente a dizer que $I_E \in \overline{B_{L_k(E;E)}}^{\tau_c}$, ou seja (i). ∎

Corolário 2.4.4. *Seja E um espaço de Banach FCG sem a PACM. Então*

(a) Existe um subespaço fechado separável $M \subset E$ tal que para cada subespaço 1-complementado N com $M \subset N \subset E$, N não tem a PACM.

(b) Existe um subespaço 1-complementado e separável de E sem a PACM.

Corolário 2.4.5. *Seja E um espaço de Banach FCG. São equivalentes:*

(a) E tem a PACM.

(b) Cada subespaço 1-complementado de E tem a PACM.

(c) Cada subespaço 1-complementado e separável de E tem a PACM.

Lema 2.4.6. *Sejam E e F espaços de Banach com F reflexivo. Dado $S \in B_{L(F';E')}$, sempre existe um único $T \in B_{L(E;F)}$ tal que $S = T'$. Se $S \in B_{L_k(F';E')}$, então $T \in B_{L_k(E;F)}$.*

Demonstração: Seja $S \in B_{L(F';E')}$. Então pelo Lema 2.3.8 existe um único $T \in L(E;F)$ tal que $S = T'$. Mas $\| T \| \leq 1$, pois $\| S \| = \| T' \| = \| T \|$. ∎

Corolário 2.4.7. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Então E' tem a PACM se, e só se E tem a PACM.*

O corolário anterior no caso geral não é verdade. Em [11] P.G. Casazza e H. Jarchow mostraram que existe um espaço de Banach E sem a PACM cujos duais E', E'', ... têm a PACM. (Na verdade eles mostraram que existe um espaço de Banach E sem a propriedade de aproximação compacta limitada, a propriedade mais fraca do que a PACM, mas cujos duais E', E'', ... têm a PACM. (Para definições veja [10] também.))

Proposição 2.4.8. *Seja E um espaço de Banach. Se E' tem a PACM, então para cada espaço de Banach F reflexivo $B_{L(E;F)} = \overline{B_{L_k(E;F)}}^{\tau_c}$.*

A seguir vamos dar as relações entre a PAC e a PACM.

Diremos que um operador linear $S : E' \longrightarrow F'$ é fraca-estrela contínuo se

$$S : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow (F', \sigma(F', F))$$

é contínuo, onde $\sigma(E', E)$ e $\sigma(F', F)$ denotam as topologias fraca-estrelas sobre E' e F' respectivamente.

Teorema 2.4.9. *([10], Theorem 8.6) Se E' é separável e tem a PAC dado por operadores fraca-estrela contínuos, então E' tem a PACM.*

Corolário 2.4.10. *Cada espaço de Banach E reflexivo com a PAC tem a PACM.*

Demonstração: Suponhamos que E tem a PAC. Portanto pelo Corolário 2.3.9 E' tem a PAC. Provaremos que E' tem a PACM. Suponhamos, por absurdo, que E' não tem a PACM. Então pelo Corolário 2.4.4 existe um subespaço 1-complementado e separável M de E' sem a PACM. Agora, pela Observação 2.3.2 o subespaço M tem a PAC. Portanto como M é reflexivo, pelo Teorema 2.4.9 M tem a PACM. Contradição. Logo E' tem a PACM. Daí pelo Corolário 2.4.7 E tem a PACM. ∎

Portanto, pelo corolário anterior, se E é um espaço de Banach reflexivo, então E' tem a PAC se e só se E' tem a PACM. Mas caso geral permanece um problema aberta, i.e, ainda não se sabe se E' tem a PACM cada vez que E' tem a PAC (veja [10], pg 50).

Capítulo 3

Funções Holomorfas Limitadas e a Propriedade de Aproximação Compacta

Neste capítulo examinamos quando o pré-dual de $\mathcal{H}^\infty(U)$, $G^\infty(U)$, com U aberto equilibrado e limitado num espaço de Banach E, (resp. o pré-dual de $\mathcal{P}(^nE)$, $Q(^nE)$) tem a PAC e a PACM. Primeiro mostramos que para cada $n \in \mathbb{N}$ $Q(^nE)$ tem a PAC se e só se E tem a PAC se e só se cada polinômio sobre E com valores num espaço de Banach pode ser aproximado uniformemente sobre conjuntos compactos por polinômios compactos, ou equivalentemente por polinômios que são fracamente contínuos nos limitados. Nós mostramos também que $G^\infty(U)$ tem a PAC se e só se E tem a PAC se e só se para cada espaço de Banach F, cada $f \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$ está no τ_γ-fecho do subespaço de todas as $g \in \mathcal{H}^\infty(U; F)$ com imagem relativamente compacta. Usando as mesmas técnicas na seção 3.2 estendemos estes resultados para a PACM.

Os resultados principais deste capítulo serão publicados no artigo [12].

3.1 Funções Holomorfas Limitadas e a Propriedade de Aproximação Compacta

Nesta seção temos dois resultados. O primeiro melhora um resultado de J. Mujica e M. Valdivia em [37], o que foi provado em [12] (Corollary 7) usando o Teorema 3.1.3. Mas aqui nós provaremos diretamente que E tem a PAC se e só se $Q(^nE)$ tem a PAC para cada $n \in \mathbb{N}$. O outro é a versão da PAC de um resultado de J. Mujica ([33], Theorem 5.4) em que foi provado para o caso da PA. Neste resultado, Teorema 3.1.3, usando as técnicas de J. Mujica e os resultados de R.M. Aron, C. Hervés e M. Valdivia [1], e R.M. Aron e J.B. Prolla [2] obtemos condições necessárias e suficientes para $G^\infty(U)$, com U aberto equilibrado e limitado em E, ter a PAC.

Definição 3.1.1. *(Veja [2], pg 197.) Sejam E e F espaços de Banach. A função $f : E \longrightarrow F$ é dita fracamente uniformemente contínua nos limitados de E se para cada conjunto limitado $B \subset E$ e $\epsilon > 0$, existem $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ e $\delta > 0$ tais que se $x, y \in B$, $| \varphi_i(x-y) | < \delta$, $(i = 1, \ldots, k)$, então $\| f(x) - f(y) \| < \epsilon$.*

$\mathcal{P}_{wu}(E;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(E;F)$ que são fracamente uniformemente contínuos nos limitados de E e $\mathcal{P}_{wu}(^mE;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são fracamente uniformemente contínuos nos limitados de E, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Lembramos que por R.M. Aron, C. Hervés e M. Valdivia ([1], Theorem 2.9) sempre temos que $\mathcal{P}_w(E;F) = \mathcal{P}_{wu}(E;F)$.

Proposição 3.1.2. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E tem a PAC.

(b) Para cada espaço de Banach F, $\mathcal{P}(E;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_c}$.

(c) Para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_w(^mE;F)}^{\tau_c}$.

(d) Para cada espaço de Banach F, $\mathcal{P}(E;F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_c}$.

(e) Para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_k(^mE;F)}^{\tau_c}$.

(f) $Q(^mE)$ tem a PAC para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: **(a)$\Longrightarrow$ (b)** ([35], Proposition 3.3) Sejam $P \in \mathcal{P}(E;F)$, $K \subset E$ um subconjunto compacto e $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\| P(x) - P(y) \| \leq \epsilon$ sempre que $x \in K$ e $\| y - x \| < \delta$. Seja $T \in L_k(E;E)$ tal que $\| Tx - x \| < \delta$ para todo $x \in K$. Então $\| P(T(x)) - P(x) \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$. Como por ([2], Proposition 2.5) $T \in L_w(E;E)$, então $P \circ T \in \mathcal{P}_w(E;F)$. Daí temos (b).

(b)$\Longrightarrow$ (c) Segue da Proposição 1.1.18.

(c)$\Longrightarrow$ (e) Por ([1], Theorem 2.9) temos $\mathcal{P}_w({}^mE;F) = \mathcal{P}_{wu}({}^mE;F)$ e por ([2], Lemma 2.2) temos $\mathcal{P}_{wu}({}^mE;F) \subset \mathcal{P}_k({}^mE;F)$. Portanto por (c) temos que

$$\mathcal{P}({}^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_w({}^mE;F)}^{\tau_c} \subset \overline{\mathcal{P}_k({}^mE;F)}^{\tau_c} \subset \mathcal{P}({}^mE;F).$$

Logo temos (e).

(e)$\Longrightarrow$ (f) Suponhamos que $\mathcal{P}({}^mE;F) = \overline{\mathcal{P}_k({}^mE;F)}^{\tau_c}$ para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$. Daí pela Observação 1.1.6 (b) e Proposição 1.1.10 temos que $L(Q({}^mE);F) = \overline{L_k(Q({}^mE);F)}^{\tau_c}$ para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$. Logo $Q({}^mE)$ tem a PAC para cada $m \in \mathbb{N}$.

(f)$\Longrightarrow$(a): Suponhamos que $Q({}^mE)$ tem a PAC para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $Q({}^1E)$ é isometricamente isomorfo a E, então E tem a PAC também.

(b)$\Longrightarrow$ (d) Por ([1], Theorem 2.9) temos $\mathcal{P}_w(E;F) = \mathcal{P}_{wu}(E;F)$ e por ([2], Lemma 2.2) temos $\mathcal{P}_{wu}(E;F) \subset \mathcal{P}_k(E;F)$. Portanto por (b) temos que

$$\mathcal{P}(E;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_c} \subset \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_c} \subset \mathcal{P}(E;F).$$

Logo temos (d).

(d)$\Longrightarrow$ (e) Segue da Proposição 1.1.20. ∎

Este resultado melhora [35], Proposition 3.3 e [37], Proposition 2.2.

O resultado seguinte é similar a um resultado de J. Mujica ([33], Theorem 5.4). Lembramos que a topologia τ_γ foi introduzido no Teorema 1.1.11, que a seguir nós usaremos.

Teorema 3.1.3. *Seja E um espaço de Banach, e seja $U \subset E$, um subconjunto aberto, limitado e equilibrado. São equivalentes:*

(a) E tem a PAC.

(b) Para cada espaço de Banach F, $\mathcal{H}^\infty(U;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_\gamma}$.

(c) Para cada espaço de Banach F, $\mathcal{H}^\infty(U;F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_\gamma}$.

(d) Para cada espaço de Banach F, $\mathcal{H}^\infty(U;F) = \overline{\mathcal{H}^\infty_K(U;F)}^{\tau_\gamma}$.

(e) $\delta_U \in \overline{\mathcal{H}^\infty_K(U;G^\infty(U))}^{\tau_\gamma}$.

(f) $G^\infty(U)$ tem a PAC.

(g) Para cada espaço de Banach F, e para cada subconjunto aberto $V \subset F$, $\mathcal{H}^\infty(V;E) = \overline{\mathcal{H}^\infty_K(V;E)}^{\tau_\gamma}$.

(h) $I_U \in \overline{\mathcal{H}^\infty_K(U;E)}^{\tau_\gamma}$.

Demonstração: **(a) $\Longrightarrow$ (b) :** Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$. Seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U;F), \tau_\gamma)$. Então pela Proposição 1.1.14 existe $P \in \mathcal{P}(E;F)$ tal que

$$p(P-f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^n$, onde $P^j \in \mathcal{P}(^jE;F)$ para cada $j = 0,1,\ldots,n$. Pela Proposição 1.1.12 $\tau_\gamma = \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^kE;F)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Daí, como E tem a PAC, pela Proposição 3.1.2 existem $Q^j \in \mathcal{P}_w(^jE;F)$ tais que

$$p(Q^j - P^j) < \frac{\epsilon}{2(n+1)} \quad \text{para cada } j = 0,1,\ldots,n.$$

Note que $Q^0 + Q^1 + \ldots + Q^n = Q \in \mathcal{P}_w(E;F)$. Agora como

$$\begin{aligned} p(Q-P) &\leq p(Q^0 - P^0) + p(Q^1 - P^1) + \ldots + p(Q^n - P^n) \\ &< (n+1)\frac{\epsilon}{2(n+1)} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

então segue-se que $p(Q-f) \leq p(Q-P) + p(P-f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Daí temos (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c): Por ([1], Theorem 2.9) temos que $\mathcal{P}_w(E;F) = \mathcal{P}_{wu}(E;F)$, por ([2], Lemma 2.2) temos que $\mathcal{P}_{wu}(E;F) \subset \mathcal{P}_k(E;F)$. Então segue que

$$\mathcal{P}_w(E;F) \subset \mathcal{P}_k(E;F) \subset \mathcal{H}^\infty(U;F).$$

Portanto por (b) temos que

$$\mathcal{H}^\infty(U;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_\gamma} \subset \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_\gamma} \subset \mathcal{H}^\infty(U;F).$$

Logo temos (c).

(c) $\Longrightarrow$ (d): Como U é limitado temos que $\mathcal{P}_k(E;F) \subset \mathcal{H}_K^\infty(U;F) \subset \mathcal{H}^\infty(U;F)$. Portanto por (c) temos que

$$\mathcal{H}^\infty(U;F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U;F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \mathcal{H}^\infty(U;F).$$

Logo temos (d).

(d) $\Longrightarrow$ (e): Sabemos do Teorema 1.1.1 que $\delta_U \in \mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U))$. Mas em (d) tomando $F = G^\infty(U)$ temos que $\mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U)) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U;G^\infty(U))}^{\,\tau_\gamma}$. Portanto temos (e).

(e) $\Longrightarrow$ (f): Consideremos $I : G^\infty(U) \longrightarrow G^\infty(U)$ a aplicação identidade. Por (e) existe uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}_K^\infty(U;G^\infty(U))$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} \delta_U$. Pelo Teorema 1.1.1 e Proposição 1.1.10 temos uma rede correspondente $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(G^\infty(U);G^\infty(U))$. Além disso, pelo Teorema 1.1.1 I corresponde a δ_U. Por outro lado, pelo Teorema 1.1.11 temos o isomorfismo topológico

$$(\mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U)),\ \tau_\gamma) \cong (L(G^\infty(U);G^\infty(U)),\ \tau_c).$$

Então pelo isomorfismo $T_{f_\alpha} \xrightarrow{\tau_c} I$. Daí temos que $I \in \overline{L_k(G^\infty(U);G^\infty(U))}^{\,\tau_c}$. Portanto $G^\infty(U)$ tem a PAC.

(f) $\Longrightarrow$ (a): Pela Proposição 1.1.2 E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado M de $G^\infty(U)$. Como $G^\infty(U)$ tem a PAC, então M tem a PAC. Daí E tem a PAC.

(a) $\Longrightarrow$ (g): Suponhamos que E tem a PAC. Seja F um espaço de Banach e seja $V \subset F$ um aberto. Então pela Proposição 2.3.3

$$L(G^\infty(V);E) = \overline{L_k(G^\infty(V);E)}^{\,\tau_c}.$$

Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(V;E)$. Então, pelo Teorema 1.1.1 existe $T_f \in L(G^\infty(V);E)$. Daí existe uma rede $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(G^\infty(V);E)$ tal que $T_\alpha \xrightarrow{\tau_c} T_f$. Pelo Teorema 1.1.11 temos que

$$(L(G^\infty(V);E),\ \tau_c) \cong (\mathcal{H}^\infty(V;E),\ \tau_\gamma) \qquad (*).$$

Pelo Teorema 1.1.1 $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ corresponde a uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em $\mathcal{H}^\infty(V;E)$. Como para todo $\alpha \in \Lambda$ T_{f_α} é compacto, então pela Proposição 1.1.10 para todo $\alpha \in \Lambda$ f_α tem imagem relativamente compacto, i.e, $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}_K^\infty(V;E)$. Já que pelo isomorfismo $(*)$ $f_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} f$, então mostramos que $\mathcal{H}_K^\infty(V;E)$ é $\tau_\gamma-$denso em $\mathcal{H}^\infty(V;E)$.

(g) $\Longrightarrow$ (a): Para cada espaço de Banach F e para cada $V \subset F$ aberto, suponhamos que $\mathcal{H}^\infty(V;E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(V;E)}^{\tau_\gamma}$. Então, em particular, temos que

$$\mathcal{H}^\infty(U_F;E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U_F;E)}^{\tau_\gamma} \qquad (*)$$

onde U_F é a bola unitária aberta em F. Seja $T \in L(G^\infty(U_F);E)$. Então pelo Teorema 1.1.1 existe $f \in \mathcal{H}^\infty(U_F;E)$ tal que $T = T_f$. Daí por (*) existe uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}_K^\infty(U_F;E)$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} f$. Por outro lado pelo Teorema 1.1.11 temos o isomorfismo topológico

$$(\mathcal{H}^\infty(U_F;E),\ \tau_\gamma) \cong (L(G^\infty(U_F);E),\ \tau_c) \qquad (**).$$

Pelo Teorema 1.1.1 $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ corresponde a uma rede $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ em $L(G^\infty(U_F);E)$. Como $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}_K^\infty(U_F;E)$, então pela Proposição 1.1.10 $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(G^\infty(U_F);E)$. Mais ainda, por (**) temos $T_{f_\alpha} \xrightarrow{\tau_c} T_f$, ou seja, para todo espaço de Banach F temos que

$$L(G^\infty(U_F);E) = \overline{L_k(G^\infty(U_F);E)}^{\tau_c}.$$

Agora, seja $A \in L(F;E)$. Pela Proposição 1.1.2 existem operadores $S \in L(F;G^\infty(U_F))$ e $R \in L(G^\infty(U_F);F)$ tais que $R \circ S(y) = y$ para todo $y \in F$. Então $A \circ R \in L(G^\infty(U_F);E)$ e portanto existe uma rede $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(G^\infty(U_F);E)$ que τ_c-converge a $A \circ R$. Daí, $B_\alpha \circ S \in L_k(F;E)$ e τ_c-converge a $A \circ R \circ S = A$. Portanto mostramos que $L(F;E) = \overline{L_k(F;E)}^{\tau_c}$. Então pela Proposição 2.3.3 E tem a PAC.

(d) $\Longrightarrow$ (h): De (d) temos que $\mathcal{H}^\infty(U;E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}^{\tau_\gamma}$. Considere $I_U : U \longrightarrow U \subset E$ a aplicação identidade. Como U é limitado, então $I_U \in \mathcal{H}^\infty(U;E)$. Daí temos (h).

(h) $\Longrightarrow$ (d): Suponhamos que $I_U \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}^{\tau_\gamma}$. Seja F um espaço de Banach, seja $f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$ e seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U;F),\ \tau_\gamma)$. Queremos encontrar $g \in \mathcal{H}_K^\infty(U;F)$ tal que $p(g-f) < 1$. Podemos supor que

$$p(h) = \sup_j \alpha_j \parallel h(x_j) \parallel \quad \text{para todo} \quad h \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty \subset U$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in c_0$ com $\alpha_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.1.14 existe $P \in \mathcal{P}(E;F)$ tal que

$$p(P-f) < \tfrac{1}{2}\,.$$

Escrevemos $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^m$ com $P^k \in \mathcal{P}(^kE; F)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, m$. Certamente $P^0 \in \mathcal{H}_K^\infty(U; F)$ (pois por definição $P^0 \in F$). Agora para cada $k = 1, \ldots, m$ encontraremos $u_k \in \mathcal{H}_K^\infty(U; E)$ tal que

$$p(P^k \circ u_k - P^k) < \frac{1}{2m} \qquad (*).$$

Então segue-se que

$$P^0 + \sum_{k=1}^{m} P^k \circ u_k \in \mathcal{H}_K^\infty(U; F)$$

e

$$p(P^0 + \sum_{k=1}^{m} P^k \circ u_k - f) = p(P - P^1 - P^2 - \ldots - P^m + \sum_{k=1}^{m} P^k \circ u_k - f)$$

$$\leq p(P - f) + p(P^1 \circ u_1 - P^1) + \ldots + p(P^m \circ u_m - P^m)$$

$$< \frac{1}{2} + m\frac{1}{2m} = 1$$

o que prova (d).

Agora fixamos k com $1 \leq k \leq m$. Seja $\beta_j = \sqrt[k]{\alpha_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e seja $K = \{\beta_j\ x_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Como U é limitado, então $\lim\limits_{j \to \infty} \beta_j\ x_j \longrightarrow 0$. Daí K é compacto. Portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\| P^k(y) - P^k(x) \| < \frac{1}{2m}$$

sempre que $x \in K$ e $\| y - x \| < \delta$. Por (h) existe $u_k \in \mathcal{H}_K^\infty(U; E)$ tal que

$$\sup_j \beta_j \| u_k(x_j) - I(x_j) \| = \sup_j \| \beta_j u_k(x_j) - \beta_j x_j \| < \delta.$$

Portanto temos que

$$p(P^k \circ u_k - P^k) = \sup_j \alpha_j \| P^k \circ u_k(x_j) - P^k(x_j) \|$$

$$= \sup_j \| P^k(\beta_j u_k(x_j)) - P^k(\beta_j\ x_j) \| < \frac{1}{2m}$$

mostrando que u_k satisfaz (*). ∎

Observação: No item (g) se escrevemos $\mathcal{H}^\infty(U_E; E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U_E; E)}^{\tau_\gamma}$, o teorema continua válido.

3.2 Funções Holomorfas Limitadas e a Propriedade de Aproximação Compacta Métrica

Os resultados desta seção são similares aos resultados da seção anterior. Aqui provamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ $Q(^nE)$ tem a PACM se e só se E tem a PACM se e só se $G^\infty(U)$, U bola unitária aberta em E, tem a PACM. Para as demonstrações os mesmos raciocínios que foram usados lá aqui funcionam também. Para a conveniência do leitor nós incluímos as demonstrações.

O resultado seguinte é similar à Proposição 3.1.2.

Proposição 3.2.1. *Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) E tem a PACM.

(b) Para cada espaço de Banach F, $B_{\mathcal{P}(E;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c}$.

(c) Para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$, $B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(^mE;F)}}^{\tau_c}$.

(d) Para cada espaço de Banach F, $B_{\mathcal{P}(E;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c}$.

(e) Para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$, $B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(^mE;F)}}^{\tau_c}$.

(f) $Q(^mE)$ tem a PACM para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: **(a)$\Longrightarrow$ (b)** Sejam $P \in B_{\mathcal{P}(E;F)}$, $K \subset E$ um subconjunto compacto e $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\| P(x) - P(y) \| \leq \epsilon$ sempre que $x \in K$ e $\| y - x \| < \delta$. Seja $T \in B_{L_k(E;E)}$ tal que $\| Tx - x \| < \delta$ para todo $x \in K$. Então $\| P(T(x)) - P(x) \| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$. Como por ([2], Proposition 2.5) $T \in L_w(E;E)$, então $P \circ T \in \mathcal{P}_w(E;F)$. Como $\| P \circ T \| \leq 1$, temos (b).

(b)$\Longrightarrow$ (c) Segue da Proposição 1.1.19.

(c)$\Longrightarrow$ (e) Por ([1], Theorem 2.9) temos $B_{\mathcal{P}_w(^mE;F)} = B_{\mathcal{P}_{wu}(^mE;F)}$ e por ([2], Lemma 2.2) temos $B_{\mathcal{P}_{wu}(^mE;F)} \subset B_{\mathcal{P}_k(^mE;F)}$. Portanto por (c) temos que

$$B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(^mE;F)}}^{\tau_c} \subset \overline{B_{\mathcal{P}_k(^mE;F)}}^{\tau_c} \subset B_{\mathcal{P}(^mE;F)}.$$

Logo temos (e).

(e)$\Longrightarrow$ (f) Suponhamos que $B_{\mathcal{P}(^mE;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(^mE;F)}}^{\tau_c}$ para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$. Daí pelo Teorema 1.1.5 e Proposição 1.1.10 temos que $B_{L(Q(^mE);F)} = \overline{B_{L_k(Q(^mE);F)}}^{\tau_c}$ para cada espaço de Banach F e para cada $m \in \mathbb{N}$. Então pela Proposição 2.4.3 $Q(^mE)$ tem a PACM para cada $m \in \mathbb{N}$.

(f)$\Longrightarrow$(a): Suponhamos que $Q(^mE)$ tem a PACM para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $Q(^1E)$ é isometricamente isomorfo a E, então E tem a PACM também.

(b)$\Longrightarrow$ (d) Por ([1], Theorem 2.9) temos $B_{\mathcal{P}_w(E;F)} = B_{\mathcal{P}_{wu}(E;F)}$ e por ([2], Lemma 2.2) temos $B_{\mathcal{P}_{wu}(E;F)} \subset B_{\mathcal{P}_k(E;F)}$. Portanto por (b) temos que

$$B_{\mathcal{P}(E;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c} \subset \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c} \subset B_{\mathcal{P}(E;F)}.$$

Logo temos (d).

(d)$\Longrightarrow$ (e) Segue da Proposição 1.1.21. ∎

Proposição 3.2.2. *Seja E um espaço de Banach e seja U a bola unitária aberta de E. São equivalentes:*

(a) E tem a PACM.

(b) Para cada espaço de Banach F, $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c}$.

(c) Para cada espaço de Banach F, $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c}$.

(d) Para cada espaço de Banach F, $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;F)}}^{\tau_c}$.

(e) $\delta_U \in \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;G^\infty(U))}}^{\tau_c}$.

(f) $G^\infty(U)$ tem a PACM.

(g) Para cada espaço de Banach F, e cada subconjunto aberto $V \subset F$, $B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(V;E)}}^{\tau_c}$.

(h) $I_U \in \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}}^{\tau_c}$.

Demonstração: (a) $\Longrightarrow$ (b): Seja $f \in B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$, e seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U;F), \tau_c)$. Como $\| f \| \leq 1$, então $\| f(x) \| \leq 1$ para todo $x \in U$. Portanto pela Proposição 1.1.14 temos que $\| \sigma_m f(x) \| \leq 1$ para todo $x \in U$ e $m \in \mathbb{N}$. Daí, como pela Proposição 1.1.12 $\tau_\gamma = \tau_c$ sobre $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$, existe $P \in \mathcal{P}(E;F)$ tal que

$$p(P - f) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{com} \quad \| P(x) \| \leq 1 \ \text{ para todo } \ x \in U.$$

Como E tem a PACM, então pelo Proposição 3.2.1 existe $Q \in \mathcal{P}_w(E;F)$ tal que

$$p(Q-P) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{com} \quad \| Q(x) \| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in U.$$

Portanto temos que $p(Q-f) \leq p(Q-P) + p(P-f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Como $\| Q(\bar{x}) \| \leq 1$ para todo $\bar{x} \in B_E$ também, então provamos que $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c}$.

(b)$\Longrightarrow$(c): Por ([1], Theorem 2.9) temos que $\mathcal{P}_w(E;F) = \mathcal{P}_{wu}(E;F)$, por ([2], Lemma 2.2) temos que $\mathcal{P}_{wu}(E;F) \subset \mathcal{P}_k(E;F)$. Então segue que $B_{\mathcal{P}_w(E;F)} \subset B_{\mathcal{P}_k(E;F)} \subset B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$.

Portanto por (b) temos que $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_w(E;F)}}^{\tau_c} \subset \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c} \subset B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$.
Então temos (c).

(c)$\Longrightarrow$(d): Como U é bola unitária (aberta) temos que $B_{\mathcal{P}_k(E;F)} \subset B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;F)} \subset B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$.

Daí por (c) temos que $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{P}_k(E;F)}}^{\tau_c} \subset \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;F)}}^{\tau_c} \subset B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$. Então temos (d).

(d) $\Longrightarrow$ (e): Sabemos, por Teorema 1.1.1, que $\delta_U \in B_{\mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U))}$. No item (d) tomando $F = G^\infty(U)$ obteremos $B_{\mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U))} = \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;G^\infty(U))}}^{\tau_c}$. Logo temos (e).

(e) $\Longrightarrow$ (f): Suponhamos que $\delta_U \in \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;G^\infty(U))}}^{\tau_c}$. Seja $I : G^\infty(U) \longrightarrow G^\infty(U)$ a aplicação identidade. Por (e) existe uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;G^\infty(U))}$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_c} \delta_U$. Portanto pelo Teorema 1.1.1 e pela Proposição 1.1.10 temos uma rede correspondente $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{L_k(G^\infty(U);G^\infty(U))}$ para $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Pelo Teorema 1.1.1 I corresponde a δ_U e pelo Corolário 1.1.13

$$(B_{\mathcal{H}^\infty(U;G^\infty(U))}, \tau_c) \cong (B_{L(G^\infty(U);G^\infty(U))}, \tau_c).$$

Então pelo isomorfismo $T_{f_\alpha} \xrightarrow{\tau_c} I$. Daí temos $I \in \overline{B_{L_k(G^\infty(U);G^\infty(U))}}^{\tau_c}$. Portanto pela Proposição 2.4.3 $G^\infty(U)$ tem a PACM.

(f) $\Longrightarrow$ (a): Pela Proposição 1.1.2 E é isomorfo a um subespaço 1-complementado M de $G^\infty(U)$. Como $G^\infty(U)$ tem a PACM então M tem a PACM, e daí pelo isomorfismo E tem a PACM.

(a) $\Longrightarrow$ (g): Suponhamos que E tem a PACM. Então pela Proposição 2.4.3, para cada espaço de Banach F e para cada conjunto $V \subset F$ aberto temos que

$$B_{L(G^\infty(V);E)} = \overline{B_{L_k(G^\infty(V);E)}}^{\tau_c} \; (*).$$

Seja $f \in B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)}$. Então pelo Teorema 1.1.1 existe um único operador $T_f \in L(G^\infty(V);E)$ com $\| f \| = \| T_f \| \leq 1$, i.e, existe único $T_f \in B_{L(G^\infty(V);E)}$. Por outro lado por (*) existe uma rede $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{L_k(G^\infty(V);E)}$ tal que $T_\alpha \xrightarrow{\tau_c} T_f$. Pelo Corolário 1.1.13 temos

$$(B_{L(G^\infty(V);E)},\ \tau_c) \cong (B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)},\ \tau_c)\ (**).$$

Pelo Teorema 1.1.1 $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ corresponde a uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em $B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)}$, e daí pela Proposição 1.1.10 $(f_\alpha)_{\in\Lambda} \subset B_{\mathcal{H}^\infty_K(V;E)}$. Além disso pelo isomorfismo (**) $f_\alpha \xrightarrow{\tau_c} f$. Isto quer dizer que $B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(V;E)}}^{\tau_c}$.

(g) $\Longrightarrow$ (a): Suponhamos que para cada espaço de Banach F e para cada subconjunto aberto $V \subset F$ $B_{\mathcal{H}^\infty(V;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(V;E)}}^{\tau_c}$. Então, em particular, temos que

$$B_{\mathcal{H}^\infty(U_F;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(U_F;E)}}^{\tau_c}.$$

Seja $T \in B_{L(G^\infty(U_F);E)}$. Então pelo Teorema 1.1.1 $T = T_f$, onde $f \in B_{\mathcal{H}^\infty(U_F;E)}$, e daí pela igualdade acima existe uma rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{\mathcal{H}^\infty_K(U_F;E)}$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_c} f$. Por outro lado, pelo Corolário 1.1.13 temos que

$$(B_{\mathcal{H}^\infty(U_F;E)},\ \tau_c) \cong (B_{L(G^\infty(U_F);E)},\ \tau_c).$$

Pelo Teorema 1.1.1 $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ corresponde a uma rede $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ em $B_{L(G^\infty(U_F);E)}$. Como $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{\mathcal{H}^\infty_K(U_F;E)}$, então pela Proposição 1.1.10 $(T_{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{L_k(G^\infty(U_F);E)}$. Além disso pelo isomorfismo acima $T_{f_\alpha} \xrightarrow{\tau_c} T_f$. Isto quer dizer que para cada espaço de Banach F

$$B_{L(G^\infty(U_F);E)} = \overline{B_{L_k(G^\infty(U_F);E)}}^{\tau_c}.$$

Agora, seja $A \in B_{L(F;E)}$ dado. Pela Proposição 1.1.2 sabemos que existem $S \in B_{L(F;G^\infty(U_F))}$ e $R \in B_{L(G^\infty(U_F);F)}$ tais que $R \circ S(y) = y$ para todo $y \in F$. Então $A \circ R \in B_{L(G^\infty(U_F);E)}$ e portanto existe uma rede $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset B_{L_k(G^\infty(U_F);E)}$ que τ_c-converge a $A \circ R$. Daí, para todo $\alpha \in \Lambda$ $B_\alpha \circ S \in B_{L_k(F;E)}$ e τ_c-converge a $A \circ R \circ S = A$. Portanto mostramos que $B_{L(F;E)} = \overline{B_{L_k(F;E)}}^{\tau_c}$. Então pela Proposição 2.4.3 E tem a PACM.

(d) $\Longrightarrow$ (h): Por (d) temos $B_{\mathcal{H}^\infty(U;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}^\infty_K(U;E)}}^{\tau_c}$. Considere $I_U : U \longrightarrow U \subset E$ a aplicação identidade. Como U é a bola unitária aberta, então $I_U \in \mathcal{H}^\infty(U;E)$ e $\| I_U \| \leq 1$.

Daí $I_U \in B_{\mathcal{H}^\infty(U;E)}$. Logo temos (h).

(h) $\Longrightarrow$ (d): Suponhamos que $I_U \in \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}}^{\tau_c}$. Seja F um espaço de Banach qualquer, seja $f \in B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)}$ e seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U;F),\ \tau_c)$. Podemos supor que

$$p(h) = \sup_{x \in K} \| h(x) \| \quad \text{para todo} \quad h \in \mathcal{H}^\infty(U;F),$$

onde K é um subconjunto compacto de U. Então pela Proposição 1.1.14 existe um $P \in \mathcal{P}(E;F)$ tal que

$$p(P - f) < \frac{1}{2} \quad \text{com} \quad \| P(x) \| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad x \in U.$$

Como K é compacto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\| P(y) - P(x) \| < \frac{1}{2}$$

sempre que $x \in K$ e $\| y - x \| < \delta$. Por outro lado, por (h) existe $h \in B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}$ tal que

$$\sup_{x \in K} \| h(x) - x \| < \delta.$$

Então $p(P \circ h - P) = \sup_{x \in K} \| P \circ h(x) - P(x) \| = \sup_{x \in K} \| P(h(x)) - P(x) \| < \frac{1}{2}$.

Note que $P \circ h \in \mathcal{H}_K^\infty(U;F)$, e como

$$\| P \circ h \| = \sup_{x \in U} \| P \circ h(x) \| = \sup_{x \in U} \| P(h(x)) \| \leq 1,$$

(pois $\| h(x) \| \leq 1$ para todo $x \in U$) então $P \circ h \in B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;F)}$. Daí temos que

$$p(P \circ h - f) \leq p(P \circ h - P) + p(P - f) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Isto quer dizer que $f \in \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;F)}}^{\tau_c}$. Portanto $B_{\mathcal{H}^\infty(U;F)} = \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;F)}}^{\tau_c}$. ∎

Observação: No item (g) se escrevemos $B_{\mathcal{H}^\infty(U;E)} = \overline{B_{\mathcal{H}_K^\infty(U;E)}}^{\tau_c}$, a proposição continua válida.

Capítulo 4

Espaços de Funções Holomorfas de Tipo Limitado

Este capítulo está dedicado aos resultados preliminares que serão usados no Capítulo 6, em particular, para examinar sob que condições $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PAC cada vez que E a tem. A ferramenta principal desta seção é o limite projetivo. Usando a topologia localmente convexa que foi definida no Capítulo 1 (Teorema 1.1.11), definimos uma topologia projetiva sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ por $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F), \tau_\gamma) := proj_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}^\infty(U_n; F), \tau_{\gamma_n})$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ τ_{γ_n} é a topologia associada a cada U_n que foi definida no Teorema 1.1.11. Através do limite projetivo obtemos alguns isomorfismos álgebricos e topológicos entre espaços $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F), \tau_\gamma)$ e $(L(G^\infty(\mathcal{U}); F), \tau_c)$ e entre seus subespaços $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$ e $G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F$ (resp. $\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; F)$ e $L_k(G^\infty(\mathcal{U}); F)$). Além disso daremos uma descrição da topologia projetiva τ_γ através de seminormas que será usada na demonstração da Proposição 4.2.21. Na ultima seção deste capítulo, observamos que os resultados que foram obtidos para os espaços $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$ em particular são válidos para espaços de funções holomorfas de tipo limitado, $\mathcal{H}_b(U; F)$, e conseqüentemente para $G_b(U)$, escolhendo uma seqüência fundamental adequada $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos U-limitados.

4.1 Topologias Projetivas e Indutivas

Nesta seção daremos definições da topologia indutiva (resp. projetiva) e do limite indutivo (resp. projetivo). Citamos [5], [7], [15], [19], [22], [23] e [43] para as propriedades do limite projetivo e indutivo.

Denotaremos por $\mathcal{V}_0(E)$ a coleção de vizinhanças de zero num espaço vetorial topológico E, por $\Gamma(A)$ a envoltória convexa e equilibrada do subconjunto $A \subset E$. Todos os espaços localmente convexos (abreviado elc) serão considerados Hausdorff e complexos.

Definição 4.1.1. *Seja E um espaço vetorial, seja $(E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de elc's, indexados por um conjunto dirigido Λ, e seja $\Pi_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ uma aplicação linear para cada $\alpha \in \Lambda$. Chamemos de topologia indutiva em E com relação à família de aplicações $(\Pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, a topologia localmente convexa mais fina em E tal que cada Π_α é contínua.*

Os subconjuntos convexos, equilibrados e absorventes V de E com $\Pi_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{V}_0(E_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$, formam uma base de vizinhanças de zero para a topologia indutiva.

Observação 4.1.2. *(Veja [7], TVS II.28, § 4, 4, ou [22], pg. 157.) Sejam $(E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de elc's, e E um espaço vetorial, munido da topologia indutiva com relação a uma família de aplicações lineares $\Pi_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$. Se E coincide com o subespaço vetorial gerado pelo conjunto $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \Pi_\alpha(E_\alpha)$, então os conjuntos $V = \Gamma(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \Pi_\alpha(V_\alpha))$, onde $V_\alpha \in \mathcal{V}_0(E_\alpha)$, formam uma base de vizinhanças de zero para a topologia indutiva.*

Definição 4.1.3. *Seja $(E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de elc's. Seja $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ o subespaço de todos os elementos $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ tais que $x_\alpha \neq 0$ para apenas um conjunto finito de índices. O espaço $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$, munido da topologia indutiva com relação às aplicações canônicas $\Pi_\alpha : E_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ é chamado de soma direta localmente convexa da família $(E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.*

Definição 4.1.4. *(Veja [5], pg 41.) Seja E um espaço vetorial, e seja $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma familia de subespaços localmente convexos de E com as topologias τ_α tal que*

$E = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$. *Se* $\alpha \leq \beta$ *suponhamos que* E_α *é subespaço de* E_β *tal que a inclusão canônica* $i_{\alpha\beta} : (E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E_\beta, \tau_\beta)$ *é contínua. Então* $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *é dito sistema indutivo injetivo de elc's. Agora o espaço* E *tem a topologia localmente convexa mais fina* τ *tal que faz todas as injeções naturais* $i_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \hookrightarrow (E, \tau)$ *contínuas.* (E, τ) *é dito limite indutivo localmente convexa do sistema* $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *e escrevamos* $E = ind_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$.

Temos os seguintes definições: (Veja [5], Appendix.)

(a) O limite indutivo $E = ind_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ é dito compactamente regular se para cada compacto K de (E, τ) existe $\alpha = \alpha(K) \in \Lambda$ tal que K está contido e é compacto em (E_α, τ_α).

(b) O limite indutivo $E = ind_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ é dito limitadamente retrativo se para cada limitado B de (E, τ) existe $\alpha = \alpha(B) \in \Lambda$ tal que B está contido e é limitado em (E_α, τ_α) e $\tau|_B = \tau_\alpha|_B$.

Claramente (b) implica (a).

O limite indutivo enumerável $E = ind_{n \in \mathbb{N}} E_n$ de espaços Fréchet (resp. Banach) é dito espaço-(LF) (resp., -(LB)).

Definição 4.1.5. *Seja* E *um conjunto, seja* $(E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de espaços topológicos, indexados por um conjunto dirigido* Λ, *e seja* $\Pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$ *uma aplicação para cada* $\alpha \in \Lambda$. *Chamemos de topologia projetiva em* E *com relação à família de aplicações* $(\Pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, *a topologia mais fraca em* E *tal que cada* Π_α *é contínua.*

Os conjuntos $\bigcap_{\alpha \in A} \Pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ com $A \subset \Lambda$ finito e V_α aberto em E_α, formam uma base para os abertos da topologia projetiva.

Definição 4.1.6. *Seja* $(E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma familia de espaços vetoriais topológicos. A família* $\{E_\alpha, \Pi_{\alpha\beta}\}$ *é dito sistema projetivo se dado* $\alpha \leq \beta$ *em* Λ, *existe* $\Pi_{\alpha\beta} \in L(E_\beta; E_\alpha)$ *tal que*

(1) $\Pi_{\alpha\alpha} : E_\alpha \longrightarrow E_\alpha$ *é a identidade para cada* $\alpha \in \Lambda$,

(2) $\Pi_{\alpha\beta} \circ \Pi_{\beta\gamma} = \Pi_{\alpha\gamma}$, *se* $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

O limite projetivo dos espaços E_α, ou mais precisamente, do sistema projetivo $\{E_\alpha, \Pi_{\alpha\beta}\}$, denotaremos por $proj_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$, é definido por

$$proj_{\alpha\in\Lambda}\, E_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha : x_\alpha = \Pi_{\alpha\beta}(x_\beta) \ \text{ sempre que } \ \alpha \leq \beta\}.$$

$proj_{\alpha\in\Lambda}\, E_\alpha$ é um subespaço fechado de $\prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$, com a topologia induzida pela topologia produto. Já sabemos que cada elc completo é topologicamente isomorfo a um limite projetivo de espaços de Banach. (Veja, por exemplo, [43], § 5.4, pg 53.)

4.2 Os Espaços $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$

Em [20] P. Galindo, D. Garcia e M. Maestre obtiveram um teorema de linearização para funções holomorfas de tipo limitado. Eles construíram, para um subconjunto aberto e equilibrado U de um espaço de Banach E, um espaço-(LB) $G_b(U)$ e uma função holomorfa de tipo limitado $\delta_U : U \longrightarrow G_b(U)$ tal que para cada espaço de Banach F e cada função holomorfa de tipo limitado $f : U \longrightarrow F$ existe um único operador contínuo $T_f : G_b(U) \longrightarrow F$ tal que $T_f \circ \delta_U = f$. Em [34] J. Mujica generalizou o resultado deles a uma classe de funções holomorfas mais geral, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$, incluíndo as funções holomorfas de tipo limitado, $\mathcal{H}_b(U;F)$, e obteve um teorema de linearização para esta classe construindo um espaço-(LB) completo $G^\infty(\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U} = (U_n)$ é uma cobertura aberta enumerável e crescente de um subconjunto aberto U de um espaço localmente convexo E.

Nesta seção nós estudaremos em espaços $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$. Para isso definiremos uma espécie da topologia projetiva sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e daremos algumas isomorfismos algébricas e topológicas com relação a $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$.

Definição 4.2.1. *Sejam E e F elc's, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U. $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ denota o elc*

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \{f \in \mathcal{H}(U;F) : f(U_n) \text{ é limitado em } F \text{ para cada } n\},$$

munido da topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos U_n.

Se X é um conjunto e Y é um espaço vetorial, então a aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita de posto finito se o subespaço $< f(X) >$ gerado por $f(X)$ é de dimensão finita. O subespaço de todas as funções de posto finito de $\mathcal{H}(U;F)$ pode ser canonicamente identificado com $\mathcal{H}(U)\bigotimes F$, ou seja $f \in \mathcal{H}(U;F)$ tem posto finito se e só se podemos escrever $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)b_i$, para cada $x \in U$, com $f_i \in \mathcal{H}(U)$ e $b_i \in F$ para todo $i = 1,\ldots,n$. (De maneira abreviado escrevemos $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes b_i$.) Portanto $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes F$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ que têm posto finito.

Denotamos por $\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U};F)$ o subespaço de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ definido por

$$\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U};F) = \{f \in \mathcal{H}(U;F) : f(U_n) \text{ é relativamente compacto em } F \text{ para cada } n\}.$$

Se $F = \mathbb{C}$ então denotamos $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\mathbb{C})$ por $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$.

Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de um subconjunto aberto U de um elc E, e seja F um elc. Para cada n, $m \in \mathbb{N}$, com $n \leq m$, definamos as aplicações

$$\Pi_{nm} : \mathcal{H}^\infty(U_m;F) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$$

por $\Pi_{nm}(f) := f\,|_{U_n}$, para todo $f \in \mathcal{H}^\infty(U_m;F)$. Então claramente $\{\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \Pi_{nm}\}$ é um sistema projetivo e denotaremos por $proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$ o limite projetivo deste sistema.

Observação 4.2.2. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto e conexo de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U. Então temos os seguintes isomorfismos algébricos:*

(a) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$ *para cada elc* F.

(b) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes F \simeq [proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n)]\bigotimes F \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, [\mathcal{H}^\infty(U_n)\bigotimes F]$ *para cada elc* F.

(c) $\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U};F) \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty_K(U_n;F)$ *para cada elc* F.

Demonstração: (a) Consideramos a função $h : \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) \longrightarrow proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$, definido por $h(f) = (f\,|_{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Como para cada $n \leq m$, pela definição das aplicações $\Pi_{nm} : \mathcal{H}^\infty(U_m;F) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$ temos $\Pi_{nm}(f\,|_{U_m}) = (f\,|_{U_m})\,|_{U_n} = f\,|_{U_n}$, então $(f\,|_{U_n})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$. Logo h está bem definida. É claro que h é linear e injetiva. h é sobrejetiva também, pois dado $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$ definimos uma função f sobre U por $f(x) := f_n(x)$ se $x \in U_n$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$, então temos que $f_m\,|_{U_n} = \Pi_{nm}(f_m) = f_n$ para cada n, $m \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$. Isto mostra que f está bem definida. É claro que $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Logo h é sobrejetiva.

(b) Se $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$ então claramente $(f|_{U_n})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\ [\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes F]$. Para mostrar a recíproca seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\ [\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes F]$. Então a função correspondente f, definido por $f(x) = f_n(x)$ para cada $x \in U_n$, pertence a $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$, pois como $f(U_1) = f_1(U_1) \subset \overline{< f_1(U_1) >}$, e $U_1 \subset U$, então por ([32], Exercise 5.F) temos que $f(U) \subset \overline{< f_1(U_1) >}$, ou seja $\overline{< f(U) >} \subset \overline{< f_1(U_1) >}$. Logo $dim < f(U) >= dim < f_1(U_1) >$ e portanto $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$.

(c) Se $f \in \mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U};F)$ então claramente $(f|_{U_n})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{H}^\infty_K(U_n;F)$. Reciprocamente seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{H}^\infty_K(U_n;F)$. Então a função correspondente f, definido por $f(x) = f_n(x)$ para cada $x \in U_n$, pertence a $\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U};F)$. ■

Definição 4.2.3. *Sejam E e F espaços de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U. Definamos a topologia projetiva τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ com relação as restrições*

$$R_n : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n}),$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ τ_{γ_n} é a topologia associada a cada U_n que foi definida no Teorema 1.1.11.

Observação 4.2.4. *Sejam E e F espaços de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U tal que cada U_n é limitado e equilibrado. Se $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ então $\sigma_m f \xrightarrow{\tau_\gamma} f$, onde a sequência $(\sigma_m f)_{m\in\mathbb{N}}$ é a mesma sequência que foi definida na Proposição 1.1.14.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ $f|_{U_n} \in \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$. Portanto pela Proposição 1.1.14 para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\sigma_m(f|_{U_n}) \xrightarrow{\tau_{\gamma_n}} f|_{U_n}$. Como para cada $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ $\sigma_m(f|_{U_n}) = (\sigma_m f)|_{U_n}$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $R_n(\sigma_m f) \xrightarrow{\tau_{\gamma_n}} R_n(f)$, onde R_n's são da definição anterior. Daí por ([19], § 6, Satz 2.4, pg 36) temos que $\sigma_m f \xrightarrow{\tau_\gamma} f$. ■

Proposição 4.2.5. *Sejam E e F espaços de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U. Então $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_c)$ é topologicamente isomorfo a $proj_{n\in\mathbb{N}}\ (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{c_n})$ com respeito a* *topologia compacta aberta e a topologia projetiva respectivamente, onde τ_{c_n} é a topologia compacta aberta associada a U_n para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Pelo Observação 4.2.2 (a) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e $proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$ são algebricamente isomorfos. Agora definamos a topologia projetiva τ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ com relação as restrições $R_n : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ a restrição $R_n' : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_c) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$ é contínua. De fato; dado uma seminorma contínua q sobre $(\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$, então para cada $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ temos que

$$q \circ R_n'(f) = q(f\,|_{U_n}) \leq c \sup_{x\in K} \| f\,|_{U_n}(x) \| = c \sup_{x\in K} \| f(x) \|$$

onde K é um subconjunto compacto de U_n, e $c > 0$. Como K é um subconjunto compacto de U também, então $\sup\limits_{x\in K} \| f(x) \|$ define uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_c)$. Logo R_n' é contínua. Daí pela definição da topologia projetiva τ temos que $\tau_c \geq \tau$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Agora consideremos a aplicação

$$h : proj_{n\in\mathbb{N}}\, (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n}) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_c)$$

definida por $h((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f$ para todo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$, onde $f(x) = f_n(x)$ para todo $x \in U_n$. Seja K um subconjunto compacto em U e seja q a seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_c)$ tal que $q(f) = \| f \|_K$ para todo $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Mas como cada compacto K de U está contido e é compacto em algum U_n, então temos $q \circ h((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = q(f) = \| f \|_K = \| f_n \|_K = p_n \circ \Pi_n((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$, onde p_n é uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$ e Π_n é a projeção sobre $proj_{n\in\mathbb{N}}\, (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$. Como $p_n \circ \Pi_n$ define uma seminorma contínua sobre $proj_{n\in\mathbb{N}}\, (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{c_n})$, isto mostra que h é contínua. Portanto a topologia projetiva τ é mais fina do que τ_c sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. Logo $\tau = \tau_c$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$. ■

Proposição 4.2.6. *Sejam E e F espaços de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente de U tal que cada U_n é limitado e equilibrado. Então*

(a) $\tau_\gamma \geq \tau_c$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$.

(b) $\tau_\gamma = \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^mE;F)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: (a) Pela Proposição 4.2.5 τ_c é a topologia mais fraca sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$

tal que cada restrição $R_n^{'} : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_c) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{c_n})$ é contínua. Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "R_n"'] \arrow[dr, "R_n^{'} \circ Id"] & (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_c) \arrow[d, "R_n^{'}"] \\
(\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n}) \arrow[r, "Id_n"] & (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{c_n})
\end{tikzcd}$$

onde Id e Id_n são aplicações identidades sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e $\mathcal{H}^\infty(U_n;F)$, respectivamente. Por definição de τ_γ e pela Proposição 1.1.12 para cada $n \in \mathbb{N}$ o composto $Id_n \circ R_n$ é contínua. Como $R_n^{'} \circ Id = Id_n \circ R_n$, então $R_n^{'} \circ Id$ é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo Id é contínua. Logo $\tau_\gamma \geq \tau_c$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$.

(b) Seja $m \in \mathbb{N}$. Por (a) temos que $\tau_\gamma \geq \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^mE;F)$. Agora mostremos que $\tau_\gamma \leq \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^mE;F)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer e consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{P}(^mE;F), \tau_c) \arrow[r, hook, "I"] \arrow[dr, "R_n"'] & (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \arrow[d, "R_n^{'}"] \\
& (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n})
\end{tikzcd}$$

Seja q uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n})$. Para cada $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ temos

$$\begin{aligned} q \circ R_n(P) = q(P\mid_{U_n}) &\leq c \sup_j \alpha_j \parallel P\mid_{U_n}(x_j) \parallel \\ &= c \sup_j \alpha_j \parallel P(x_j) \parallel = c \sup_j \parallel P((\alpha_j)^{\frac{1}{m}} x_j) \parallel, \end{aligned}$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty \subset U_n$, $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in c_0$ com $\alpha_j > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e $c > 0$. Seja $\beta_j = \sqrt[m]{\alpha_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e seja $K = \{\beta_j\, x_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Como U_n é limitado, então $\lim_{j\to\infty} \beta_j\, x_j \longrightarrow 0$. Daí K é compacto em U_n (daí é compacto em E). Portanto $\sup_j \parallel P(\beta_j x_j) \parallel$ define uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{P}(^mE;F), \tau_c)$. Logo R_n é contínua. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ $R_n = R_n^{'} \circ I$, então pelas propriedades da topologia projetiva a aplicação inclusão I é contínua. Logo $\tau_\gamma \leq \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^mE;F)$. ■

Teorema 4.2.7. *([34], Theorem 2.1) Seja* U *um subconjunto aberto de um elc* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma cobertura aberta enumerável e crescente de* U. *Então existem um espaço-DF completo tonelado* $G^\infty(\mathcal{U})$ *e uma função* $\delta_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))$ *com a seguinte propriedade universal: Para cada elc completo* F *e cada função* $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$, *existe um único operador* $T_f \in L(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ *tal que* $T_f \circ \delta_{\mathcal{U}} = f$. *Esta propriedade caracteriza* $G^\infty(\mathcal{U})$ *de maneira única a menos de um isomorfismo topológico.*

Lembramos que um elc E é dito tonelado se cada subconjunto convexo, equilibrado, absorvente e fechado de E é uma vizinhança de zero em E (veja [23], § 21, 2.), e um elc E é dito um espaço-DF se

(a) E tem uma seqüência fundamental de conjuntos limitados, e

(b) se U_n é uma seqüência de vizinhanças convexas, equilibradas e fechadas de zero em E e se $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ absorve cada conjunto limitado, então U é uma vizinhança de zero em E (Veja [23], § 29, 3). Cada espaço normado é um espaço-DF, e o dual forte de um espaço metrizável é um espaço-DF.

O espaço $G^\infty(\mathcal{U})$ é definido da seguinte maneira: Para cada sequência $\alpha = (\alpha_n)$ de números estritamente positivos, seja $B_{\mathcal{U}}^{\alpha} = \{f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) : \| f \|_{U_n} \leq \alpha_n \text{ para cada } n\}$. Então definimos $G^\infty(\mathcal{U}) = \{u \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})' : u\,|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} \text{ é } \tau_c\text{-contínuo para cada } \alpha\}$, munido da topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos $B_{\mathcal{U}}^{\alpha}$. A função avaliação $\delta_{\mathcal{U}} : x \in U \longrightarrow \delta_x \in G^\infty(\mathcal{U})$ é definida por $\delta_x : f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{C}$ para todo $x \in U$. Como no caso das funções holomorfas limitadas aqui também as avaliações δ_x, $x \in U$, geram um subespaço vetorial denso de $G^\infty(\mathcal{U})$ (veja [34], Theorem 2.1 e [36], Theorem 2.1).

Teorema 4.2.8. *([34], Theorem 3.2) Seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $G^\infty(\mathcal{U}) = ind_{n\in\mathbb{N}}\, G^\infty(U_n)$ *e este limite indutivo é limitadamente retrativo.*

Definição 4.2.9. *Sejam* E *e* F *espaços localmente convexos. Diz-se que um operador* *linear e contínuo* $T \in L(E;F)$ *é um operador compacto se existe alguma vizinhança* V *de zero em* E *tal que* $T(V)$ *é relativamente compacto em* F.

Observação 4.2.10. *Seja* E *um espaço de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então temos os seguintes isomorfismos algébricos:*

(a) $L(G^\infty(\mathcal{U});F) \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, L(G^\infty(U_n);F)$ *para cada elc* F.

(b) $L_k(G^\infty(\mathcal{U});F) \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, L_k(G^\infty(U_n);F)$ *para cada espaço de Fréchet* F.

Demonstração: (a) Segue do Teorema 4.2.8 e ([28], § 1, Satz 3).

(b) Suponhamos que $T \in L_k(G^\infty(\mathcal{U});F)$. Então existe $V \in \mathcal{V}_0(G^\infty(\mathcal{U}))$ tal que $\overline{T(V)}$ é compacto em F. Portanto $i_n^{-1}(V) \in \mathcal{V}_0(G^\infty(U_n))$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ $i_n : G^\infty(U_n) \hookrightarrow G^\infty(\mathcal{U})$ é a aplicação inclusão. Portanto para a aplicação correspondente $(T\mid_{G^\infty(U_n)})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, L(G^\infty(U_n);F)$ temos que $\overline{T\mid_{G^\infty(U_n)}(i_n^{-1}(V))} \subset \overline{T(V)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo $(T\mid_{G^\infty(U_n)})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, L_k(G^\infty(U_n);F)$. Reciprocamente seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}}\, L_k(G^\infty(U_n);F)$. Mostraremos que existe $W \in \mathcal{V}_0(G^\infty(\mathcal{U}))$ tal que $\overline{T(W)}$ é compacto em F, onde o operador correspondente T é definido por $T(x) = T_n(x)$ para cada $x \in G^\infty(U_n)$. Por hipótese para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{V}_0(G^\infty(U_n))$ tal que $\overline{T_n(U_n)}$ é compacto em F. Dai por ([31], Lemma 7.8) existe uma seqüência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n\overline{T_n(U_n)}$ é relativamente compacto em F. Pela Observação 4.1.2 o conjunto $W = \Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} i_n(c_nU_n))$ é uma vizinhança de zero em $G^\infty(\mathcal{U})$ e temos que $T(W) = \Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} T \circ i_n(c_nU_n)) = \Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(c_nU_n)) \subset \overline{\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n\overline{T_n(U_n)})}$.

Como $\overline{\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n\overline{T_n(U_n)})}$ é relativamente compacto em F, então $T(W)$ é relativamente compacto em F. Portanto provamos que $T \in L_k(G^\infty(\mathcal{U});F)$. ∎

Proposição 4.2.11. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados,* *e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $(L(G^\infty(\mathcal{U}); F), \tau_c)$ *é topologicamente isomorfo a* $proj_{n\in\mathbb{N}} \, (L(G^\infty(U_n); F), \tau_{c_n})$.

Demonstração: Pela Observação 4.2.10 $L(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ e $proj_{n\in\mathbb{N}} \, L(G^\infty(U_n); F)$ são algebricamente isomorfos. Como o limite indutivo $ind_{n\in\mathbb{N}} \, G^\infty(U_n)$ é limitadamente retrativo, então é compactamente regular. Portanto cada compacto de $G^\infty(\mathcal{U})$ está contido e é compacto em $G^\infty(U_n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente como cada $G^\infty(U_n)$ é um subespaço vetorial de $G^\infty(\mathcal{U})$, e a inclusão $G^\infty(U_n) \hookrightarrow G^\infty(\mathcal{U})$ é contínua, então para cada $n \in \mathbb{N}$, cada compacto de $G^\infty(U_n)$ é um compacto de $G^\infty(\mathcal{U})$. Portanto pelo racíocinio da Proposição 4.2.5 temos o isomorfismo. ∎

Observação 4.2.12. *Seja* E *um espaço de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então temos os seguintes isomorfismos algébricos:*

(a) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) \simeq L(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ *para cada elc completo* F.

(b) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F \simeq G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F$ *para cada elc completo* F.

(c) $\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; F) \simeq L_k(G^\infty(\mathcal{U}); F)$ *para cada espaço de Banach* F .

Demonstração: (a) Por ([34], Proposition 2.2) temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) \simeq L(G^\infty(\mathcal{U}); F)$.
(b) Pelo Teorema 4.2.7 temos que $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$ se e só se $dim < f(U) >= dim < T_f \circ \delta_{\mathcal{U}}(U) >< \infty$ se e só se $dim < T_f(\delta_{\mathcal{U}}(U)) >< \infty$ se e só se $T_f \in G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F$. Daí temos (b).
(c) Se $f \in \mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; F)$ então pelo Observação 4.2.2 temos que $(f|_{U_n})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\infty_K(U_n; F)$. Portanto pela parte (a) e pela Proposição 1.1.10 temos uma aplicação correspondente $(T_{f|_{U_n}})_{n\in\mathbb{N}} \in proj_{n\in\mathbb{N}} \, L_k(G^\infty(U_n); F)$ e pela Observação 4.2.10 o operador correspondente T_f pertence a $L_k(G^\infty(\mathcal{U}); F)$. Da mesma maneira podemos mostrar o recíproco também. ∎

Observação 4.2.13. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e* *equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então temos $G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F \simeq [proj_{n\in\mathbb{N}}\, G^\infty(U_n)'] \bigotimes F \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, [G^\infty(U_n)' \bigotimes F]$ algébricamente.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.2.8 e por ([19], § 26, Satz 1.2, pg 142) temos que $G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F \simeq [proj_{n\in\mathbb{N}}\, G^\infty(U_n)'] \bigotimes F$. Agora provaremos que $G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, [G^\infty(U_n)' \bigotimes F]$. Pela Observação 4.2.12 (a) temos que $proj_{n\in\mathbb{N}}\, L(G^\infty(U_n);F) \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}^\infty(U_n;F)$. Daí por ([33], Proposition 3.1) temos que $proj_{n\in\mathbb{N}}\, [G^\infty(U_n)' \bigotimes F] \simeq proj_{n\in\mathbb{N}}\, [\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes F]$. Pela Observação 4.2.2 (b) temos que $proj_{n\in\mathbb{N}}\, [\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes F] \simeq \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F$. Como pela Observação 4.2.12 (b) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F \simeq G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes F$, então provamos o isomorfismo. ∎

Proposição 4.2.14. *Sejam E e F espaços de Banach, seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma)$ é topologicamente isomorfo a $(L(G^\infty(\mathcal{U});F), \tau_c)$.*

Demonstração: Por definição de τ_γ temos $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \cong proj_{n\in\mathbb{N}}\, (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n})$. Pelo Teorema 1.1.11 temos isomorfismo topológico $(\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n}) \cong (L(G^\infty(U_n);F), \tau_{c_n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto temos isomorfismo topológico $proj_{n\in\mathbb{N}}\, (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n}) \cong proj_{n\in\mathbb{N}}\, (L(G^\infty(U_n);F), \tau_{c_n})$. Como pela Proposição 4.2.11 $proj_{n\in\mathbb{N}}\, (L(G^\infty(U_n);F), \tau_{c_n}) \cong (L(G^\infty(\mathcal{U});F), \tau_c)$, então provamos o isomorfismo topológico. ∎

Proposição 4.2.15. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então para cada espaço de Banach F, a topologia projetiva τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ é gerada por todas as seminormas contínuas da forma*

$$p(f) = \sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel,$$

onde $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ varia sobre todas as seqüências em U tais que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset U_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ varia sobre todas as seqüências de números positivos tendendo a zero.

Demonstração: A topologia projetiva τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ está definida pelas seminormas contínuas da forma $q_n \circ R_n$, onde $R_n : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F),\tau_{\gamma_n})$ é a restrição, e q_n varia sobre as seminormas contínuas que definem a topologia τ_{γ_n} sobre $\mathcal{H}^\infty(U_n;F)$. (Veja [7], TVS II, pg 5.) Em particular podemos tomar

$$q_n(f) = \sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{H}^\infty(U_n;F),$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty \subset U_n$, e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in c_0$ com $\alpha_j > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Portanto para todo $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ temos que

$$q_n \circ R_n(f) = q_n(f\,|_{U_n}) = \sup_j \alpha_j \parallel f\,|_{U_n}(x_j) \parallel = \sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel.$$

Isto completa a demonstração. ∎

Como na definição da topologia projetiva τ_γ o espaço de chegada das funções holomorfas é um espaço de Banach, para estudar a relação entre o espaço $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$, sendo F espaço localmente convexo, e a PA e a PAC, vamos precisar de uma forma mais geral desta definição, pois mais adiante, no seção 6.1, para provar que $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PA cada vez que E a tem, vamos ter que usar a forma mais geral da definição da topologia projetiva τ_γ. Por isso, antes temos que redefinir a topologia τ_γ de forma mais geral do que foi dada no Teorema 1.1.11.

Definição 4.2.16. *Seja E um espaço de Banach, seja F um elc, e seja U um subconjunto aberto de E. Seja $\tilde{\tau}_\gamma$ a topologia localmente convexa sobre $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ gerada pelas seminormas contínuas da forma*

$$\tilde{p}(f) = \sup_j \alpha_j \, p(f(x_j)), \quad f \in \mathcal{H}^\infty(U;F)$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty$ varia sobre todas as seqüências em U e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ varia sobre todas as seqüências de números positivos tendendo a zero, e p varia sobre as seminormas contínuas sobre F.

Se F for espaço normado esta topologia coincide com a topologia τ_γ dada no Teorema 1.1.11. É a observação acima e esta definição que motiva a seguinte definição.

Definição 4.2.17. *Seja E um espaço de Banach e seja F um elc. Seja U um subconjunto aberto de E e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável e crescente* *de U. Definamos a topologia projetiva $\tilde{\tau}_\gamma$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ com relação às restrições*

$$\tilde{R}_n : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tilde{\tau}_\gamma) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tilde{\tau}_{\gamma_n}),$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{\tau}_{\gamma_n}$ é a topologia associada a cada U_n que foi dada na definição anterior.

Proposição 4.2.18. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então*
(a) Para cada elc F, a topologia projetiva $\tilde{\tau}_\gamma$ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ é gerada por todas as seminormas contínuas da forma

$$\tilde{p}(f) = \sup_j \alpha_j \; p(f(x_j)),$$

onde $(x_j)_{j=1}^\infty$ varia sobre todas as seqüências em U tal que $(x_j)_{j=1}^\infty \subset U_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ varia sobre todas as seqüências de números positivos tendendo a zero, e p varia sobre as seminormas contínuas sobre F.
(b) $\tilde{\tau}_\gamma$ coincide com a topologia projetiva τ_γ sobre $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ se F for normado.

Demonstração: **(a)** A mesma demonstração da Proposição 4.2.15 funciona.
(b) Seja F um espaço normado e consideremos a aplicação identidade

$$Id : (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \longrightarrow (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tilde{\tau}_\gamma).$$

Dada uma seminorma contínua $\tilde{p}$ sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tilde{\tau}_\gamma)$, para cada $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ temos que $\tilde{p} \circ Id(f) = \tilde{p}(f) \leq c_1 \sup_j \alpha_j \; p(f(x_j)) \leq c_1 \sup_j \alpha_j \; c \parallel f(x_j) \parallel$, onde $c > 0$ tal que $p(f(x_j)) \leq c \parallel f(x_j) \parallel$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e $c_1 > 0$. Como $\sup_j (\alpha_j \; c) \parallel f(x_j) \parallel$ define uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma)$, então a identidade Id é contínua. Logo $\tau_\gamma \geq \tilde{\tau}_\gamma$. Agora consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tilde{\tau}_\gamma) \arrow[r, "Id^{-1}"] \arrow[dr, "R_n'"'] & (\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma) \arrow[d, "R_n"] \\
& (\mathcal{H}^\infty(U_n;F), \tau_{\gamma_n})
\end{tikzcd}$$

Seja q uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(U_n; F), \tau_{\gamma_n})$. Então para cada $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ temos que $q \circ R_n'(f) = q(f|_{U_n}) \leq c \sup_j \alpha_j \parallel f|_{U_n}(x_j) \parallel = c \sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel$, onde $c > 0$. Como a norma $\parallel . \parallel$ também é uma seminorma contínua sobre F então $\sup_j \alpha_j \parallel f(x_j) \parallel$ define uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F), \tilde{\tau}_\gamma)$. Portanto para cada $n \in \mathbb{N}$ R_n' é contínua. Daí pelas propriedades da topologia projetiva Id^{-1} é contínua. Logo $\tau_\gamma \leq \tilde{\tau}_\gamma$. ■

Considerando a proposição anterior, por conveniência, só usaremos a notação τ_γ para a topologia projetiva $\tilde{\tau}_\gamma$.

Definição 4.2.19. *(Veja [15], pg 84.) Sejam E e F elc's, e seja $n \in \mathbb{N}$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é dito de tipo finito se ele é gerado pela combinação linear das funções $\phi^n \bigotimes y$ $(\phi \in E', y \in F)$, onde $\phi^n \bigotimes y(x) = \phi^n(x)y$ para cada $x \in E$.*

$\mathcal{P}_f(^nE; F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^nE; F)$ que são de tipo finito, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, e $\mathcal{P}_f(E; F)$ denota o subespaço de todos os $P \in \mathcal{P}(E; F)$ da forma $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$, com $P_j \in \mathcal{P}_f(^jE; F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, m$. É claro que $\mathcal{P}_f(E; F) = \mathcal{P}_f(E) \bigotimes F$.

Definição 4.2.20. *Dado um conjunto A num espaço vetorial E, o funcional de Minkowski P_A de A é uma função de E em $\mathbb{R}^+ \bigcup \{\infty\}$ definido por*

$$P_A(x) = \begin{cases} inf\ \{\rho > 0 : x \in \rho A\} & , \ se \quad x \in \rho A \quad para\ algum \quad \rho > 0 \\ \infty & , \ se \quad x \notin \rho A \quad para\ todo \quad \rho > 0 \end{cases}$$

Se A é absorvente, então P_A é finito. Se A é absorvente, equilibrado e convexo, então P_A é uma seminorma em E e $\{x \in E : P_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : P_A(x) \leq 1\}$. Já sabemos que um conjunto absorvente, equilibrado e convexo A num espaço vetorial topológico é uma vizinhança de zero se e só se o funcional de Minkowski P_A é contínua. (Veja, por exemplo, [22], 2, § 4, pg's 94-95.)

Proposição 4.2.21. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Se $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes F}$ *para cada* F *Banach, então temos que* $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes F}$ *para cada* F *elc.*

(b) Se $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{P}_f(E;F)}$ *para cada* F *Banach, então temos que* $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{P}_f(E;F)}$ *para cada* F *elc.*

Demonstração: (a) Suponhamos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};G),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes G}$ para cada G Banach. Seja F um elc e seja $V \in \mathcal{V}_0(F)$, V convexa equilibrada e aberta. Seja P_V o funcional de Minkowski de V, seja F_V o espaço normado $F_V = (F,P_V)/P_V^{-1}(0)$ e seja $\widetilde{F}_V$ seu completamento. Então por hipótese temos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\widetilde{F}_V),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes \widetilde{F}_V}$. Seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\widetilde{F}_V),\tau_\gamma)$. Pela Proposição 4.2.15 podemos supor que

$$p(\tilde{f}) = \sup_i \alpha_i \parallel \tilde{f}(x_i) \parallel \quad \text{para todo} \quad \tilde{f} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\widetilde{F}_V),$$

onde $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, $\alpha_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset U_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$, seja $\epsilon > 0$ e seja P uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma)$. Queremos encontrar $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes F$ tal que $P(f-g) \leq \epsilon$. Pela Proposição 4.2.18 podemos supor que

$$P(f) = \sup_i \alpha_i \, P_V(f(x_i)) \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F).$$

Seja $\Pi_V \in L(F;F_V)$ a aplicação canônica, ou seja a aplicação composta

$$\Pi_V : F \longrightarrow (F,P_V) \longrightarrow (F,P_V)/P_V^{-1}(0) = F_V \subset \widetilde{F}_V.$$

Como $\Pi_V \circ f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};\widetilde{F}_V)$, então existe um $\tilde{g} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})\bigotimes \widetilde{F}_V$ com $\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) b_j$ para cada $x \in U$, onde $\varphi_j \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e $b_j \in \widetilde{F}_V$, tal que

$$p(\Pi_V \circ f - \tilde{g}) = \sup_i \alpha_i \parallel \Pi_V \circ f(x_i) - \tilde{g}(x_i) \parallel < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado para cada $j \in \mathbb{N}$ existe um $a_j \in F$ tal que

$$\parallel \Pi_V(a_j) - b_j \parallel < \frac{\epsilon}{2k \sup_i \alpha_i \mid \varphi_j(x_i) \mid}.$$

Portanto para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que

$$\parallel \Pi_V(\alpha_i f(x_i) - \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i) a_j) \parallel = \parallel \alpha_i \Pi_V \circ f(x_i) - \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i) \Pi_V(a_j) \parallel$$

$$\leq \| \alpha_i \Pi_V \circ f(x_i) - \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i) b_j \| + \| \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i)(b_j - \Pi_V(a_j)) \|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Daí para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $\Pi_V(\alpha_i f(x_i) - \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i) a_j) \in \epsilon \Pi_V(V)$ pois $\Pi_V(V) = U_{F_V}$ pela propriedade de aplicação quociente Π_V. Portanto temos que $\alpha_i f(x_i) - \alpha_i \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_i) a_j \in \epsilon \Pi_V^{-1}(\Pi_V(V)) = \epsilon V$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Daí definindo uma função de tipo finito $g : U \longrightarrow F$ com $g(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) a_j$ para cada $x \in U$, obtemos $\alpha_i f(x_i) - \alpha_i g(x_i) = \alpha_i(f(x_i) - g(x_i)) \in \epsilon V$ para cada $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $\alpha_i P_V(f(x_i) - g(x_i)) \leq \epsilon$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo $P(f-g) = \sup_i \alpha_i \, P_V(f(x_i) - g(x_i)) \leq \epsilon$.

(b) Como $\mathcal{P}_f(E;F) = \mathcal{P}_f(E) \bigotimes F$ a mesma demonstração de (a) funciona. ■

Definição 4.2.22. *(Veja [3], pg 10, e [15], pg 166.) Sejam E e F elc's e seja U um subconjunto aberto de E. Seja τ_c a topologia compacto-aberta sobre $\mathcal{H}(U;F)$ gerada pelas seminormas da forma*

$$p(f) = \sup_{x \in K} q(f(x)), \quad f \in \mathcal{H}(U;F)$$

onde K varia sobre todos os compactos de U e q varia sobre as seminormas contínuas sobre F.

As mesmas demonstrações das Proposições 4.2.11 e 4.2.14 funcionam para o seguinte:

Proposição 4.2.23. *Seja E um espaço de Banach, seja F um elc completo, seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U tal que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então*

(a) $(L(G^\infty(\mathcal{U});F), \tau_c)$ é topologicamente isomorfo a $proj_{n \in \mathbb{N}} \, (L(G^\infty(U_n);F), \tau_{c_n})$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ τ_{c_n} é a topologia compacto-aberta associada a cada U_n.

(b) $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F), \tau_\gamma)$ é topologicamente isomorfo a $(L(G^\infty(\mathcal{U});F), \tau_c)$.

4.3 O Espaço das Funções Holomorfas de Tipo Limitado

Um caso especial importante da seção anterior é dado pelas funções holomorfas de tipo limitado, que introduziremos a seguir.

Definição 4.3.1. *Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Banach E. Se $U \neq E$ e $x \in U$, então $d_U(x)$ denota a distancia de x a $E \backslash U$. Como $\mid d_U(x) - d_U(y) \mid \leq \| x - y \|$ para todo $x, y \in U$, então d_U é uma função contínua sobre U. Se $U = E$ então por conveniência definimos $d_U(x) = \infty$ para todo $x \in E$. Um conjunto A é dito U-limitado se A é limitado e $\inf_{x \in A} d_U(x) > 0$.*

Se F é um elc, então $\mathcal{H}_b(U; F)$ denota o seguinte espaço localmente convexo

$$\mathcal{H}_b(U; F) = \{f \in \mathcal{H}(U; F) : f(A) \text{ é limitado em } F \text{ para cada conjunto } U\text{-limitado } A\},$$

munido da topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos U-limitados. Se $F = \mathbb{C}$ então denotamos $\mathcal{H}_b(U; \mathbb{C})$ por $\mathcal{H}_b(U)$. Chamemos os membros de $\mathcal{H}_b(U; F)$ de funções holomorfas de tipo limitado.

Observação 4.3.2. *É claro que $\mathcal{H}_b(U; F) = \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ se $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência fundamental de conjuntos abertos U-limitados, e portanto temos $G_b(U) = G^\infty(\mathcal{U})$. Em ([34], Proposition 7.1) J. Mujica mostrou que dado um subconjunto aberto e equilibrado U num espaço de Banach, sempre existe uma seqüência fundamental $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abertos U-limitados que satisfaz os hipóteses de todos os resultados da seção anterior. Neste caso obtemos todos os resultados da seção anterior como casos particulares tomando $\mathcal{H}_b(U; F)$ e $G_b(U)$ no lugar de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$ e $G^\infty(\mathcal{U})$ respectivamente. (Veja [34] também.)*

Capítulo 5

A Propriedade de Aproximação e a Propriedade de Aproximação Compacta em Espaços Localmente Convexos

No Capítulo 2 estudamos a PA e a PAC em espaços de Banach. Neste capítulo estudamos as mesmas propriedades em espaços localmente convexos. Na seção 5.1 mostramos a relação entre as topologias c e ε sobre $L(E;F)$ e redemonstramos o isomorfismo topológico entre $E\varepsilon F$ e $F\varepsilon E$ que é dito produto-ε de E e F introduzido por L. Schwartz ([45], [46]). Na seção 5.2 enunciamos os resultados conhecidos sobre a PA em espaços localmente convexos. Na seção 5.3 paralelamente à seção 5.2 tentamos provar os resultados análogas para a PAC, e mostramos que se $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma decomposição $\mathcal{S}$-absoluta de espaço localmente convexo E, então E tem a PAC se e só se cada E_n tem a PAC.

5.1 O Produto-ε

Para estudar a PA e a PAC em espaços localmente convexos vamos dar as definições necessárias e alguns resultados preliminares.

Nesta seção E e F, a menos que indicado, denotam espaços localmente convexos de Hausdorff (abreviado elc). $\sigma(E, E')$ denota a topologia fraca sobre E, e $\sigma(E', E)$ denota a topologia fraca-estrela sobre E'.

Definição 5.1.1. *Seja $\tau(E, F)$ a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos convexos, equilibrados e $\sigma(F, E)$-compactos de F, com respeito ao sistema dual $< E, F >$. $\tau(E, F)$ é chamada a topologia de Mackey. Diremos que E é um espaço de Mackey se E é um elc cuja topologia coincide com $\tau(E, E')$.*

Notemos que um elc E é um espaço de Mackey se, e só se para cada elc F, uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ pertence a $L(E; F)$ sempre que $\psi \circ T \in E'$ para cada $\psi \in F'$. (Veja [38], Proposition 28 e Exercise 21.)

Definição 5.1.2. *$(L(E; F), c)$ denota o espaço vetorial $L(E; F)$, munido da topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos, convexos e equilibrados de E, ou seja a topologia que admite como base de vizinhanças de zero os conjuntos da forma $W(K; V) = \{T \in L(E; F) : T(K) \subset V\}$, onde K varia entre os subconjuntos compactos, convexos e equilibrados de E, e V varia entre as vizinhanças de zero de F, que são convexas, equilibradas e fechadas. No caso $F = \mathbb{C}$ denotaremos $(L(E; F), c)$ por E'_c.*

$L_\epsilon(E'_c; F)$ denota o espaço vetorial $L(E'_c; F)$, munido da topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos equicontínuos de E', ou seja a topologia que admite como base de vizinhanças de zero os conjuntos da forma $W(U^\circ; V) = \{T \in L(E'_c; F) : T(U^\circ) \subset V\}$, onde U e V variam entre as vizinhanças de zero de E e F respectivamente, que são convexas, equilibradas e fechadas.

Para elc's E e F o produto-ε de E e F foi introduzido por L. Schwartz ([45], [46]) como o espaço localmente convexo $E\epsilon F := L_\epsilon(E'_c; F)$.

Nesta seção a coleção de vizinhanças de zero em E que são convexas, equilibradas e fechadas, será denotada por $\mathcal{V}_0(E)$.

Sejam E e F elc's. Diremos que $T \in L(E;F)$ é um mergulho se T é um isomorfismo topológico entre E e um subespaço de F.

Proposição 5.1.3. *Seja E um elc.*
(a) $(E_c')' = E$ (algebricamente).
(b) Se E é um espaço de Mackey, então $(E_c')_c' = E$.
(c) Se $E = F_c'$, onde F é espaço de Mackey, então $(E_c')_c' = E$. Se E, em particular, é um espaço-DFC, então $(E_c')_c' = E$.
(d) A inclusão

$$J : (L(E;F), c) \hookrightarrow L_\epsilon((E_c')_c'; F)$$

é sempre um mergulho. Se $(E_c')_c' = E$, então J é sobrejetivo.
(e) A identidade

$$I : (L(E_c';F), c) \longrightarrow L_\epsilon(E_c'; F)$$

é sempre contínua. Se $(E_c')_c' = E$, então I é um homeomorfismo.

Demonstração: (a) Como os compactos de E são $\sigma(E, E')$-compactos, então temos que $c \leq \tau(E', E)$, onde $\tau(E', E)$ denota a topologia de Mackey sobre E'. Portanto temos $\sigma(E', E) \leq c \leq \tau(E', E)$. Daí pelo Teorema de Mackey-Arens temos que $(E', c)' = E$, ou seja $(E_c')' = E$.

(b) Consideremos a função identidade $Id : (E_c')_c' \longrightarrow E$. Esta função é contínua. De fato; seja $V \in \mathcal{V}_0(E)$. Então pelo Teorema de Alaoglu V° é $\sigma(E', E)$-compacto em E'. Daí como V° é equicontínua, e como $\sigma(E', E)$ e a topologia de E_c' induzem a mesma topologia sobre os subconjuntos equicontínuos (veja, por exemplo, [23], § 21, 6.(2)), V° é um subconjunto compacto de E_c'. Portanto $(V^\circ)^\circ = V^{\circ\circ}$ é uma vizinhança de zero em $(E_c')_c'$. Daí, pelo Teorema do Bipolar e pelo Teorema de Hahn-Banach temos que

$$Id(V^{\circ\circ}) = V^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(V)}^{\sigma((E_c')', E_c')} = \overline{V}^{\sigma(E, E_c')} = \overline{V} = V.$$

Logo Id é contínua. Por outro lado, como E é espaço de Mackey, a aplicação inversa Id^{-1}

pertence a $L(E;(E_c')_c')$, pois $\psi \circ Id^{-1} = \psi \in ((E_c')_c')' = E_c'$ para cada $\psi \in ((E_c')_c')'$. Logo $(E_c')_c' = E$.

(c) Seja $E = F_c'$, onde F é espaço de Mackey. Então pelo item (b) obtemos que $(E_c')_c' = ((F_c')_c')_c' = F_c' = E$. Lembremos que E é dito um espaço-DFC, se $E = F_c'$ para um espaço de Fréchet F adequado. Como cada espaço de Fréchet é um espaço de Mackey então, se E é um espaço-DFC, neste caso também temos $(E_c')_c' = E$.

(d) No item (b) mostramos que a função identidade $Id : (E_c')_c' \longrightarrow E$ é contínua. Portanto para cada elc F temos que $L(E;F) \subset L((E_c')_c';F)$. Agora consideremos a inclusão

$$J : T \in (L(E;F),c) \hookrightarrow T \circ Id \in L_\epsilon((E_c')_c';F).$$

Se $\Phi \subset (E_c')'$ é equicontínuo (podemos supor que Φ é convexo e equilibrado também) e $\sigma((E_c')', E_c')$-fechado, então pelo teorema de Alaoglu Φ é $\sigma((E_c')', E_c')$-compacto, logo Φ é compacto em $(E_c')_c'$. Logo $\Phi = Id(\Phi)$ é compacto em E. Daí J é contínua. Reciprocamente se K é um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de E, então K° é uma vizinhança de zero em E_c'. Daí $(K^\circ)^\circ$ é equicontínua em $(E_c')'$. Como pelo Teorema do Bipolar e pelo Teorema de Hahn-Banach $K = (K^\circ)^\circ$, então a função inversa

$$J^{-1} : T \circ Id \in (J(L(E;F)), \epsilon) \subset L_\epsilon((E_c')_c';F) \longrightarrow T \in (L(E;F),c)$$

é contínua. Logo J é um mergulho. Se $(E_c')_c' = E$, é claro que $L((E_c')_c';F) = L(E;F)$. Logo $L_\epsilon((E_c')_c';F) = (L(E;F),c)$.

(e) Seja F um elc. Se Φ é um subconjunto equicontínuo de E' (podemos supor que Φ é convexo e equilibrado também) e $\sigma(E',E)$-fechado, então pelo Teorema de Alaoglu Φ é $\sigma(E',E)$-compacto em E', e portanto Φ é compacto em E_c'. Daí a função identidade $I : (L(E_c';F),c) \longrightarrow L_\epsilon(E_c';F)$ é contínua. Agora suponhamos que $(E_c')_c' = E$. Se K é compacto, convexo e equilibrado em E_c', então $K^\circ \in \mathcal{V}_0((E_c')_c')$, e daí $K = K^{\circ\circ}$ é equicontínua em $((E_c')_c')_c' = E_c'$. Então a função inversa $I^{-1} : L_\epsilon(E_c';F) \longrightarrow (L(E_c';F),c)$ é contínua. Logo $L_\epsilon(E_c';F) = (L(E_c';F),c)$. ■

Lema 5.1.4. *Sejam E e F elc's, sejam A e B subconjuntos de F e E, respectivamente,* *e seja* $T : E \longrightarrow F$ *um operador linear contínuo. Se* $T(B) \subset A$*, então* $T^{'}(A^{\circ}) \subset B^{\circ}$.

Demonstração: Seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Então temos o operador adjunto $T^{'} : F^{'} \longrightarrow E^{'}$ definido por $< T^{'}y^{'}, x >=< y^{'}, Tx >$ para todo $y^{'} \in F^{'}$ e $x \in E$. Como $A \subset F$ e $B \subset E$, então temos que

$$A^{\circ} = \{y^{'} \in F^{'} : |< y^{'}, y >| \leq 1 \text{ para todo } y \in A\},$$

$$B^{\circ} = \{x^{'} \in E^{'} : |< x^{'}, x >| \leq 1 \text{ para todo } x \in B\}.$$

Como $T(B) \subset A$, para cada $y^{'} \in A^{\circ}$ segue que $|< T^{'}y^{'}, x >|=|< y^{'}, Tx >| \leq 1$ para todo $x \in B$, e daí $T^{'}(y^{'}) \in B^{\circ}$. Logo $T^{'}(A^{\circ}) \subset B^{\circ}$. ■

Proposição 5.1.5. *([45], Expose n° 8) Sejam* E *e* F *elc's.* $F\varepsilon E$ *é topologicamente isomorfo a* $E\varepsilon F$.

Demonstração: (Para demonstração veja [41], Proposition 8.1 também.) Primeiro mostraremos que se $T \in L(F_c^{'}; E)$ então o operador adjunto $T^{'}$ pertence a $L(E_c^{'}; F)$, onde $T^{'}$ é definido por $< T^{'}x^{'}, y^{'} >=< x^{'}, Ty^{'} >$ para todo $x^{'} \in E_c^{'}$ e $y^{'} \in F^{'}$. Como pela Proposição 5.1.3 $(F_c^{'})^{'} = F$ então $T^{'}x^{'} \in F$ para todo $x^{'} \in E^{'}$. Mostremos que $T^{'}$ é linear. Sejam $x^{'}, x_1^{'}, x_1^{'} \in E^{'}$, $y^{'} \in F^{'}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer. Então temos que $< T^{'}(x_1^{'} + x_2^{'}), y^{'} >=< x_1^{'}, Ty^{'} > + < x_2^{'}, Ty^{'} >=< T^{'}x_1^{'} + T^{'}x_2^{'}, y^{'} >$, e $< T^{'}(\alpha x^{'}), y^{'} >= \alpha < x^{'}, Ty^{'} >=< \alpha(T^{'}x^{'}), y^{'} >$. Logo $T^{'}$ é linear. Provaremos que $T^{'}$ é contínua. Seja $V \in \mathcal{V}_0(F)$. Pelo Teorema de Alaoglu V° é $\sigma(F^{'}, F)$-compacto em $F^{'}$. Como V° é equicontínua, então V° é compacto em $F_c^{'}$. Daí $T(V^{\circ})$ é compacto em E, e portanto $[T(V^{\circ})]^{\circ} \in \mathcal{V}_0(E_c^{'})$. Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach e pelo Teorema do Bipolar temos $V = \overline{\Gamma(V)} = \overline{\Gamma(V)}^{\sigma(F,F^{'})} = V^{\circ\circ}$. Como $T(V^{\circ}) \subset T(V^{\circ})$, pelo Lema 5.1.4 temos $T^{'}([T(V^{\circ})]^{\circ}) \subset V^{\circ\circ} = V$. Portanto $T^{'}$ é um operador linear e contínuo de $E_c^{'}$ em F. Agora consideremos a aplicação

$$h : T \in L_{\epsilon}(F_c^{'}; E) \longrightarrow T^{'} \in L_{\epsilon}(E_c^{'}; F).$$

Como para todo T, T_1, $T_2 \in L(F_c^{'}; E)$ e para todo escalares $\alpha \in \mathbb{K}$, $(T_1 + T_2)^{'} = T_1^{'} + T_2^{'}$ e $(\alpha T)^{'} = \alpha T^{'}$, e como $T^{'} = 0$ implica $T = 0$, então h é linear e injetiva. E h é sobrejetiva também, pois dado $T \in L(E_c^{'}; F)$ então $T^{'} \in L(F_c^{'}; E)$ e $T^{''} \in L(E_c^{'}; F)$. Como

$T'' = T$, então $h(T') = T$. Daí mostramos que h é um isomorfismo algébrico. Provaremos que h é um homeomorfismo. Seja $W = \{S \in L(E'_c; F) : S(U^\circ) \subset V\}$, com $U \in \mathcal{V}_0(E)$ e $V \in \mathcal{V}_0(F)$, uma vizinhança básica de zero em $L_\epsilon(E'_c; F)$. Como V° é um subconjunto equicontínuo de F', então $M := \{T \in L(F'_c; E) : T(V^\circ) \subset U\}$ é uma vizinhança básica de zero em $L_\epsilon(F'_c; E)$. Agora se $T(V^\circ) \subset U$, então pelo Lema 5.1.4 $T'(U^\circ) \subset V^{\circ\circ} = V$. Isto quer dizer que se $T \in M$, então $T' \in W$, ou seja $h(M) \subset W$. Logo h é contínuo. Então, pela simetria, a aplicação inversa h^{-1} também é contínua. Daí temos isomorfismo topológico entre $F\varepsilon E$ e $E\varepsilon F$. ■

Proposição 5.1.6. *Sejam E e F elc's. Então $T \in L(F'_c; E)$ é compacto se e só se $T' \in L(E'_c; F)$ é compacto.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $T \in L_k(F'_c; E)$. Então existe $K \subset F$ compacto, convexo e equilibrado tal que $\overline{T(K^\circ)}$ é compacto em E, onde K° é uma vizinhança de zero em F'_c. Seja $L = \overline{T(K^\circ)}$. Então L° é uma vizinhança de zero em E'_c e como $T(K^\circ) \subset L$, pelo Lema 5.1.4 temos que $T'(L^\circ) \subset K^{\circ\circ} = K$. Logo $\overline{T'(L^\circ)} \subset K$. Logo $\overline{T'(L^\circ)}$ é compacto em F. Então $T' \in L_k(E'_c; F)$.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que $T' \in L_k(E'_c; F)$. Então pela parte anterior $T'' \in L_k(F'_c; E)$. Como $T'' = T$, então $T \in L_k(F'_c; E)$. ■

5.2 A Propriedade de Aproximação em Espaços Localmente Convexos

A seguinte definição, de L. Schwartz [45] para a PA, foi denominada a PA fraca por G. Köthe (veja [23], § 43, 1).

Definição 5.2.1. *Diz-se que um elc E tem a PA se para cada subconjunto convexo, compacto e equilibrado K de E e para cada vizinhança de zero V em E existe um operador de posto finito $T \in L(E; E)$ tal que $Tx - x \in V$ para todo $x \in K$.*

Esta definição de L. Schwartz é um pouco diferente daquela de A. Grothendieck (veja [21], § 5, pg 167) que usa a topologia da convergência uniforme sobre todos os precompactos de E no lugar da topologia da convergência uniforme sobre todos os compactos, convexos e equilibrados de E. Se E for quase-completo então as duas definições coincidem pelo fato que num espaço quase-completo, o envoltória convexo e equilibrado de um precompacto é relativamente compacto.

Se um elc E tem a PA, então cada subespaço complementado de E tem a PA. (Veja [23], § 43, 4.(1).)

O teorema seguinte resume os resultados de A. Grothendieck ([21], Chapitre I, no 5) e L. Schwartz ([45], Exposé no 14) (veja [16], Theorem 1.2 também).

Teorema 5.2.2. *([21],[45]) Para um elc E os seguintes condições são equivalentes:*
(1) E tem a PA.
(2) $(L(E;E),c) = \overline{E' \bigotimes E}$.
(3) $(L(E;F),c) = \overline{E' \bigotimes F}$ para todo elc F (equivalentemente para todo espaço de Banach F).
(4) $(L(F;E),c) = \overline{F' \bigotimes E}$ para todo elc F.
(5) $F \epsilon E = \overline{F \bigotimes E}$ para todo elc F (equivalentemente para todo espaço de Banach F).
(6) $E \epsilon F = \overline{E \bigotimes F}$ para todo elc F (equivalentemente para todo espaço de Banach F).

Como mencionado em [16] no teorema acima não se sabe se a condição (4) para cada F Banach é equivalente à mesma condição para cada F elc.

Corolário 5.2.3. *([16], Corollary 1.3.) Um elc E tem a PA se E_c' tem a PA.*

Em particular temos o seguinte resultado.

Corolário 5.2.4. *([23], § 43, 4.(12)) Um elc E reflexivo tem a PA se e só se E_c' tem a PA.*

5.3 A Propriedade de Aproximação Compacta em Espaços Localmente Convexos

Paralelamente aos resultados sobre a PA vamos obter alguns resultados para a PAC. Comparando com o caso da PA, é mais difícil obter resultados análogas à PAC.

Definição 5.3.1. *Diremos que um elc E tem a PAC se para cada subconjunto convexo, compacto e equilibrado K de E e para cada vizinhança de zero em E existe um operador compacto $T \in L(E;E)$ tal que $Tx - x \in V$ para todo $x \in K$, ou seja, equivalentemente, um elc E tem a PAC se $I_E \in \overline{L_k(E;E)}^{\,c}$.*

Como no caso da PA temos o seguinte resultado conhecido, cuja demonstração incluímos para a conveniência do leitor.

Proposição 5.3.2. *Se um elc E tem a PAC, então cada subespaço complementado de E tem a PAC.*

Demonstração: Seja M um subespaço complementado de E. Então existe uma projeção $P \in L(E;M)$. Já que E tem a PAC, existe uma rede $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(E;E)$ tal que $T_\alpha \xrightarrow{c} I_E$. Portanto temos uma rede $(T_\alpha^M := T_\alpha\,|_M)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(M;E)$ tal que $T_\alpha^M \xrightarrow{c} I_M := I_E\,|_M$. Então, como $P \circ T_\alpha^M \xrightarrow{c} P \circ I_M$ temos que $P \circ T_\alpha^M \xrightarrow{c} I_M$, e como $(P \circ T_\alpha^M)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(M;M)$ provamos que M tem a PAC. ■

A demonstração da seguinte proposição segue do argumento em [23] (§ 43, 4.(2) e (3)), onde foi feito para a PA.

Proposição 5.3.3. *(a) A soma direta localmente convexa $E = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ dos elc's E_α tem a PAC se e só se todo E_α tem a PAC.*
(b) O produto topológico $E = \prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ dos elc's E_α tem a PAC se e só se todo E_α tem a PAC.

Demonstração: **(a)** ($\Longrightarrow$) Segue da Proposição 5.3.2.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que E_α tem a PAC para cada $\alpha \in \Lambda$. Seja $K \subset \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ um sub-

conjunto compacto. Então por ([23], §18. 5. (4)) segue que K está contido num conjunto $K_{\alpha_1} \bigoplus \ldots \bigoplus K_{\alpha_n}$ tal que K_{α_i} é compacto em E_{α_i} para cada $i = 1 \ldots n$. Seja $U \in \mathcal{V}_0(E)$. Então U contém uma soma $U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_n$, onde $U_i \in \mathcal{V}_0(E_{\alpha_i})$ para cada $i = 1 \ldots n$. Por hipótese existe $T_{\alpha_i} \in L_k(E_{\alpha_i}; E_{\alpha_i})$ tal que $(T_{\alpha_i} - I_i)x^{(i)} \in U_i$ para todo $x^{(i)} \in K_{\alpha_i}$, onde I_i é a identidade sobre E_{α_i} para cada $i = 1 \ldots n$. Estendendo cada T_{α_i} a $T'_{\alpha_i} \in L_k(E; E)$, através da projeção Π_{α_i}, obteremos $(\sum_{i=1}^{n} T'_{\alpha_i} - I)x \in U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_n$ para todo $x \in K$.

(b) $(\Longrightarrow)$ Segue da Proposição 5.3.2.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos que E_α tem a PAC para cada $\alpha \in \Lambda$. Seja $K \subset \prod_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ um subconjunto compacto. Então K está contido num conjunto $\prod_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ tal que K_α é compacto em E_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Podemos supor que $U \in \mathcal{V}_0(E)$ é da forma $(\prod_{\alpha_i \in A} U_{\alpha_i}) \times (\prod_{\alpha \notin A} E_\alpha)$, onde A é um subconjunto finito de Λ. Sejam $\prod_{\alpha_i \in A} E_{\alpha_i} = E_A$, $\prod_{\alpha_i \in A} U_{\alpha_i} = U_A$, $\prod_{\alpha_i \in A} x_{\alpha_i} = x_A$. Como A é finito temos $E_A = \bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda} E_{\alpha_i}$. Portanto aplicando a parte (a) a E_A, encontramos $T_A \in L_k(E_A; E_A)$ tal que $(T_A - I_A)x_A \in U_A$ para todo $x_A \in \prod_{\alpha_i \in A} K_{\alpha_i}$. Estendemos T_A a $T \in L_k(E; E)$ definindo $Tx_\alpha = 0$ para todo $x_\alpha \in E_\alpha$, $\alpha \notin A$, e obteremos $(T - I)x \in U$ para todo $x \in K$. ■

O resultado seguinte é similar a Teorema 5.2.2.

Proposição 5.3.4. *Seja E um elc. Consideremos os seguintes condições:*

(1) E tem a PAC.

(2) $(L(E; E), c) = \overline{L_k(E; E)}$.

(3) $(L(E; F), c) = \overline{L_k(E; F)}$ para todo F elc.

(4) $(L(F; E), c) = \overline{L_k(F; E)}$ para todo F elc.

(5) $F \epsilon E = \overline{L_k(F'_c; E)}$ para todo F elc.

(6) $E \epsilon F = \overline{L_k(E'_c; F)}$ para todo F elc.

Sempre temos que (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longleftrightarrow$ (6), *e mais ainda (5) implica* (4$'$) $(L(F; E), c) = \overline{L_k(F; E)}$ *para todo F elc tal que $(F'_c)'_c = F$.*

Demonstração: **(1)$\Longrightarrow$(3):** Suponhamos que E tem a PAC. Daí existe uma rede $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(E;E)$ tal que $T_\alpha \xrightarrow{c} I_E$. Seja F um elc qualquer e seja $T \in L(E;F)$. Então temos que $T \circ T_\alpha \xrightarrow{c} T \circ I_E = T$. Como $(T \circ T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(E;F)$ temos (3).

(1)$\Longrightarrow$(4): Suponhamos que E tem a PAC. Daí existe uma rede $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(E;E)$ tal que $T_\alpha \xrightarrow{c} I_E$. Seja F um elc qualquer e seja $T \in L(F;E)$. Então temos que $T_\alpha \circ T \xrightarrow{c} I_E \circ T = T$. Como $(T_\alpha \circ T)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(F;E)$ temos (4).

(4)$\Longrightarrow$(2) , **(3)$\Longrightarrow$(2)** e **(2)$\Longrightarrow$(1):** Óbvios.

(5)$\Longleftrightarrow$(6): Conseqüência imediata da Proposição 5.1.5 e da Proposição 5.1.6.

(4)$\Longrightarrow$(5): Por (4) temos que $(L(F_c';E),c) = \overline{L_k(F_c';E)}$ para todo F elc. Portanto pela Proposição 5.1.3 (e) temos que $L_\epsilon(F_c';E) = \overline{L_k(F_c';E)}$ para todo F elc.

(5)$\Longrightarrow$ (4$'$): Por (5) temos que $L_\epsilon((F_c')_c';E) = \overline{L_k((F_c')_c';E)}$ para todo F elc. Se $(F_c')_c' = F$, então pela Proposição 5.1.3 (d) temos que $(L(F;E),c) = \overline{L_k(F;E)}$. ■

Não sabemos se na proposição anterior, em geral, (5) implica (4), e não sabemos se as condições (3), (4), (5) e (6) para cada espaço de Banach F são equivalentes às mesmas condições para cada elc F.

Corolário 5.3.5. *Seja E um elc tal que $(E_c')_c' = E$. Então E tem a PAC se, e só se E_c' tem a PAC. Em particular um elc E reflexivo tem a PAC se e só se E_c' tem a PAC.*

Demonstração:($\Longrightarrow$) Suponhamos que E tem a PAC. Pela Proposição 5.3.4 temos que $L_\epsilon(E_c';F) = \overline{L_k(E_c';F)}$ para todo F elc. Então pelo Proposição 5.1.3 temos que $(L(E_c';F),c) = \overline{L_k(E_c';F)}$ para todo F elc. Pela Proposição 5.3.4 E_c' tem a PAC.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que E_c' tem a PAC. Pela Proposição 5.3.4 temos que $L_\epsilon((E_c')_c';F) = \overline{L_k((E_c')_c';F)}$ para todo F elc. Daí pelo Proposição 5.1.3 temos que $(L(E;F),c) = \overline{L_k(E;F)}$ para todo F elc. Logo E tem a PAC.

A segunda afirmação segue do fato que cada elc reflexivo é em particular tonelado e portanto espaço de Mackey. ■

A seguir daremos a definição de decomposição de Schauder que é útil em holomorfia em dimensão infinita.

Definição 5.3.6. *(Veja [15], pg 188-190.) Uma seqüência de subespaços* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de um elc* E *é uma decomposição de Schauder de* E *se*

(a) para cada $x \in E$ *existe uma única seqüência de vetores* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in E_n$ *para todo* n, *tal que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m} x_n$

(b) as projeções $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *definidas por* $u_m(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) := \sum_{n=1}^{m} x_n$ *são contínuas.*

Denotaremos por $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as seqüências escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\limsup_{n \longrightarrow \infty} | \alpha_n |^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

Definição 5.3.7. *(a) Uma decomposição de Schauder* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de um elc* E *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição se para cada* $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ *e* $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E$, $x_n \in E_n$ *para todo* n,

$\alpha.x := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in E$.

(b) Uma $\mathcal{S}$*-decomposição é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta se para cada seminorma contínua* p *sobre* E *e cada* $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$, $p_\alpha(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E) := \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n | p(x_n)$ *define uma seminorma contínua sobre* E.

Para outros detalhes sobre decomposição de Schauder e $\mathcal{S}$-decomposição veja [15], § 3.3.

Em [9] C. Boyd, S. Dineen e P. Rueda provaram que se $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma decomposição $\mathcal{S}$-absoluta de um elc E, então E tem a PA se e só se cada E_n tem a PA (veja [9], Proposition 1). A demonstração deles funciona no caso da PAC também, que nós incluímos aqui para a conveniência do leitor.

Proposição 5.3.8. *Se* $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta do elc* E, *então* E *tem a PAC se e só se cada* E_n *tem a PAC.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que E tem a PAC. Como cada E_n é complementado em E, então cada E_n tem a PAC.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que cada E_n tem a PAC. Seja K um subconjunto compacto de E, seja p uma seminorma contínua sobre E satisfazendo a condição da definição acima com $\alpha_n = 1$ para todo n e seja $\epsilon > 0$. Seja $u_n(\sum_{m=1}^{\infty} x_m) = \sum_{m=1}^{n} x_m$ para todo $\sum_{m=1}^{\infty} x_m \in E$ e seja $u^n = I_E - u_n$. Por ([15], Lemma 3.33) existe um inteiro positivo n_0 tal que $\sup\ \{p(u^{n_0}(x)) : x \in K\} \leq \epsilon$. Como $u_{n_0}(E) = \sum_{n=1}^{n_0} E_n =: F_{n_0}$ tem a PAC (pela Proposição 5.3.3), e como $u_{n_0}(K)$ é um subconjunto compacto de F_{n_0}, então existe um operador compacto $T \in L_k(F_{n_0}; F_{n_0})$ tal que $\sup_{x \in K} p(u_{n_0}(x) - T(u_{n_0}(x))) \leq \epsilon$. Usando a inclusão natural $F_{n_0} \hookrightarrow E$ temos um operador compacto $R := T \circ u_{n_0} \in L_k(E; E)$. Se $x \in K$ então; $p(x - R(x)) = p(x - u_{n_0}(x)) + p(u_{n_0}(x) - T(u_{n_0}(x)))$

$$= p(u^{n_0}(x)) + p(u_{n_0}(x) - T(u_{n_0}(x)))$$

e portanto temos que $\sup_{x \in K} p(x - R(x)) \leq 2\epsilon$. Daí obtemos que $I_E \in \overline{L_k(E; E)}^{\,c}$. Logo E tem a PAC. ■

Este resultado sera útil nas próximas seções.

Já sabemos que se $E = proj_{\alpha \in \Lambda}\, E_\alpha$ é tal que cada elc E_α tem a PA, então E tem a PA. (Isto segue de dois resultados do livro de G. Köthe ([23], § 43, 1, (2) e (3))). Mas não sabemos se o mesmo vale no caso da PAC, ie, se $E = proj_{\alpha \in \Lambda}\, E_\alpha$ é tal que cada elc E_α tem a PAC, será que E tem a PAC ?

Capítulo 6

Funções Holomorfas de Tipo Limitado, a Propriedade de Aproximação e a Propriedade de Aproximação Compacta

Em [33] J. Mujica investigou condições necessárias e suficientes para $G^{\infty}(U)$, U aberto limitado e equilibrado em E, ter a PA, e no Capítulo 3 usando as técnicas de J. Mujica obtemos condições necessárias e suficientes para $G^{\infty}(U)$ ter a PAC. Aqui nós vamos obter resultados análogas para uma classe de funções holomorfas mais geral, $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}; F)$, e em particular para funções holomorfas de tipo limitado. O método que foi usado no [33] (Theorem 5.4) (e no Teorema 3.1.3) aqui também funciona para obter condições necessárias e suficientes para $G^{\infty}(\mathcal{U})$ ter a PA, onde $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência fundamental adequada de subconjuntos abertos, limitados e equilibrados de um aberto e equilibrado U em E (Teorema 6.1.1). Mas não sabemos se o mesmo método funciona no caso da PAC (Teorema 6.3.5). Por isso para obter que $G^{\infty}(\mathcal{U})$ tem a PAC cada vez que E a tem nós seguimos outro caminho. Damos uma S-decomposição absoluta de $G^{\infty}(\mathcal{U})$ e usando isto provamos o resultado desejado. Os resultados principais deste capítulo (Teorema 6.1.1, e

Teorema 6.3.5), em particular, são válidos para a classe de funções holomorfas de tipo limitado, escolhendo uma seqüência fundamental adequada $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos U-limitados.

6.1 A Propriedade de Aproximação e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$

O seguinte resultado melhora um resultado de J. Mujica ([34], Theorem 4.2) que afirma que um espaço de Banach E tem a PA se e só se o espaço-DF completo tonelado $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PA, e que foi obtido usando um resultado de K.D. Bierstedt e R. Meise ([6], Satz 1.2).

Teorema 6.1.1. *Seja* E *um espaço de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *São equivalentes:*

(a) E *tem a PA.*

(b) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{P}_f(E;F)}^{\tau_\gamma}$ *para cada espaço de Banach* F *(equivalentemente para cada elc* F*).*

(c) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F}^{\tau_\gamma}$ *para cada espaço de Banach* F *(equivalentemente para cada elc* F*).*

(d) $\delta_{\mathcal{U}} \in \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes G^\infty(\mathcal{U})}^{\tau_\gamma}$.

(e) $G^\infty(\mathcal{U})$ *tem a PA.*

(f) Para cada espaço de Banach F, *e para cada subconjunto aberto e equilibrado* $V \subset F$, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};E) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \bigotimes E}^{\tau_\gamma}$, *onde* $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* V *tal que* $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ *e* $\rho_n V_n \subset V_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(g) $I_U \in \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes E}^{\tau_\gamma}$.

Demonstração: **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** : Seja F um espaço de Banach, seja $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$ e seja p uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\ \tau_\gamma)$. Então pela Observação 4.2.4 existe $P \in \mathcal{P}(E;F)$ tal que

$$p(P - f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $P = P^0 + P^1 + \ldots + P^n$, onde $P^j \in \mathcal{P}(^jE;F)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Pela Proposição 4.2.6 $\tau_\gamma = \tau_c$ sobre $\mathcal{P}(^kE;F)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Daí, como E tem a PA, então por ([33], Lemma 5.3) existem $Q^j \in \mathcal{P}_f(^jE;F)$ tais que

$$p(Q^j - P^j) < \frac{\epsilon}{2(n+1)} \text{ para cada } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Note que $Q^0 + Q^1 + \ldots + Q^n = Q \in \mathcal{P}_f(E;F)$, e como

$$\begin{aligned} p(Q - P) &\leq p(Q^0 - P^0) + p(Q^1 - P^1) + \ldots + p(Q^n - P^n) \\ &< (n+1)\frac{\epsilon}{2(n+1)} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

então $p(Q - f) \leq p(Q - P) + p(P - f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Daí temos (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c): Seja F um espaço de Banach. Como

$$\mathcal{P}_f(E;F) = \mathcal{P}_f(E) \bigotimes F \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),$$

então por (b) temos que

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{P}_f(E;F)}^{\tau_\gamma} \subset \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F}^{\tau_\gamma} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F).$$

Logo temos (c).

O fato que as condições (b) e (c) para cada espaço de Banach F são equivalentes as mesmos condições para cada elc F segue da Proposição 4.2.21.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Por (c) e pela Proposição 4.2.21 para cada F elc temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes F}^{\tau_\gamma}$. Como $G^\infty(\mathcal{U})$ é um elc (completo) então obtemos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};G^\infty(\mathcal{U})) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes G^\infty(\mathcal{U})}^{\tau_\gamma}$. Mas pelo Teorema 4.2.7 $\delta_\mathcal{U} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};G^\infty(\mathcal{U}))$. Logo temos (d).

(d) $\Longrightarrow$ (e): Por (d) existe um rede $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes G^\infty(\mathcal{U})$ tal que $g_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} \delta_\mathcal{U}$. Como $G^\infty(\mathcal{U})$ é um elc (completo), pela Observação 4.2.12 temos um rede correspondente $(T_{g_\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \subset G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes G^\infty(\mathcal{U})$. Pelo Teorema 4.2.7 a aplicação identidade $I : G^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow G^\infty(\mathcal{U})$ corresponde a $\delta_\mathcal{U}$. Como pela Proposição 4.2.23 $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};G^\infty(\mathcal{U})), \tau_\gamma) \cong L(G^\infty(\mathcal{U});G^\infty(\mathcal{U})), \tau_c)$ então temos que $T_{g_\alpha} \xrightarrow{\tau_c} I$, ou seja $I \in \overline{G^\infty(\mathcal{U})' \bigotimes G^\infty(\mathcal{U})}^{\tau_c}$. Logo $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PA.

(e) $\Longrightarrow$ (a): Por ([34], Proposition 2.4) E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de $G^\infty(\mathcal{U})$. Portanto por (e) E tem a PA.

(c) $\Longrightarrow$ (g): Por (c) temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};E) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes E}^{\tau_\gamma}$. Como a aplicação identidade $I_U : U \longrightarrow U \subset E$ é limitada sobre cada U_n, então $I_U \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};E)$. Daí temos (g).

(g) $\Longrightarrow$ (a): Suponhamos que $I_U \in \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes E}^{\tau_\gamma}$. Provaremos que $I_U |_{U_n} \in \overline{\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes E}^{\tau_{\gamma n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese existe um rede $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}) \bigotimes E$ tal que $g_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} I_U$. Pelo Observação 4.2.2 para cada $\alpha \in \Lambda$ g_α corresponde a uma sequência $(g_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $proj_{n\in\mathbb{N}} [\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes E]$, onde $g_\alpha^n = g_\alpha |_{U_n} \in \mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto temos $g_\alpha |_{U_n} = R_n(g_\alpha) \xrightarrow{\tau_{\gamma n}} R_n(I) = I_U |_{U_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $I_U |_{U_n} \in \overline{\mathcal{H}^\infty(U_n) \bigotimes E}^{\tau_{\gamma n}}$. Dai por ([33], Theorem 5.4) E tem a PA, ou seja (a).

(a) $\Longrightarrow$ (f): Seja V um subconjunto aberto e equilibrado de F, e seja $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de V tal que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e $\rho_n V_n \subset V_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então por (a) temos que $(L(G^\infty(\mathcal{V});E),\tau_c) = \overline{G^\infty(\mathcal{V})' \bigotimes E}$. (Veja [21], § 5, Proposition 35, ou [23], § 43, 1, (1).) Daí pela Proposição 4.2.14 e Observação 4.2.12 temos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};E),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \bigotimes E}$.

(f) $\Longrightarrow$ (a): Por (f) temos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};E),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}) \bigotimes E}$. Daí pela Proposição 4.2.14 e Observação 4.2.12 temos que $(L(G^\infty(\mathcal{V});E),\tau_c) = \overline{G^\infty(\mathcal{V})' \bigotimes E}$. Seja $A \in L(F;E)$. Então por ([34], Proposition 2.4) existem operadores $S \in L(F;G^\infty(\mathcal{V}))$ e $R \in L(G^\infty(\mathcal{V});F)$ tais que $R \circ S(y) = y$ para todo $y \in F$. Então $A \circ R \in L(G^\infty(\mathcal{V});E)$ e portanto existe uma rede $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset G^\infty(\mathcal{V})' \bigotimes E$ tal que $B_\alpha \xrightarrow{\tau_c} A \circ R$ em $(L(G^\infty(\mathcal{V});E),\tau_c)$. Daí, $(B_\alpha \circ S)_{\alpha\in\Lambda} \subset F' \bigotimes E$ e $B_\alpha \circ S \xrightarrow{\tau_c} A \circ R \circ S = A$ em $(L(F;E),\tau_c)$. Portanto mostramos que $L(F;E) = \overline{F' \bigotimes E}^{\tau_c}$. Então pelo Teorema 2.1.3 E tem a PA. ∎

6.2 A Propriedade de Aproximação e Funções Holomorfas de Tipo Limitado

Como falamos no início deste capítulo, a proposição seguinte é um caso particular do teorema anterior pela mesma razão que nos mencionamos na seção 4.3, ou seja, por um resultado de

J. Mujica em [34] que mostra que dado um subconjunto aberto e equilibrado U num espaço de Banach E sempre existe uma seqüência fundamental $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos U-limitados que satisfaz as hipóteses do Teorema 6.1.1. Portanto do Teorema 6.1.1 em particular obtemos o seguinte resultado.

Proposição 6.2.1. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E. São equivalentes:*

(a) E tem a PA.

(b) $\mathcal{H}_b(U;F) = \overline{\mathcal{P}_f(E;F)}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F (equivalentemente para cada elc F).

(c) $\mathcal{H}_b(U;F) = \overline{\mathcal{H}_b(U)\bigotimes F}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F (equivalentemente para cada elc F).

(d) $\delta_{\mathcal{U}} \in \overline{\mathcal{H}_b(U)\bigotimes G_b(U)}^{\tau_\gamma}$.

(e) $G_b(U)$ tem a PA.

(f) Para cada espaço de Banach F, e para cada subconjunto aberto e equilibrado $V\subset F$, $\mathcal{H}_b(V;E) = \overline{\mathcal{H}_b(V)\bigotimes E}^{\tau_\gamma}$.

(g) $I_U \in \overline{\mathcal{H}_b(U)\bigotimes E}^{\tau_\gamma}$.

6.3 A Propriedade de Aproximação Compacta e $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$

A seguir enunciaremos um resultado de C.Boyd no qual a soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n f(0)(x)$$

denota a expansão da série de Taylor da função $f\in\mathcal{H}(U)$, $U\subset E$ aberto, ao redor de 0 com $P^n f(0)\in\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Lema 6.3.1. *([8], Lemma 2.12) Seja U um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach E, seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}$ e seja $(f_\beta)_\beta$ uma família de funções em $\mathcal{H}(U)$ que é uniformemente limitado sobre alguma vizinhança de um conjunto compacto e equilibrado K. Então existe um $M>0$ tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid \alpha_n \mid\mid P^n f_\beta(0) \mid\mid_V \leq M$$

para cada β e para alguma vizinhança V de K.

Em [8] C. Boyd deu uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de $G(U)$, pré-dual de $\mathcal{H}(U)$, U sendo um subconjunto aberto e equilibrado de um elc E. Usando o mesmo raciocínio da demonstração dele (veja [8], Proposition 2.15) provaremos um resultado parecido para $G^\infty(\mathcal{U})$. Com este resultado é possível obter propriedades topológicas de $G^\infty(\mathcal{U})$ utilizando as propriedades correspondentes de $Q(^nE)$.

Proposição 6.3.2. *Seja U um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach E, e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta enumerável crescente de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de U. Então $\{Q(^nE)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta para $G^\infty(\mathcal{U})$.*

Demonstração: Seja $B = \{f_\beta\}_\beta$ uma família de funções localmente limitadas em $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Como $(1, 2^2, \ldots, n^2, \ldots) \in \mathcal{S}$ segue do Lema 6.3.1 que para cada x podemos escolher uma vizinhança V_x de Γ_x, envoltória equilibrada de $\{x\}$, que é compacta, tal que

$$\sup_\beta \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \parallel P^n f_\beta(0) \parallel_{V_x} = M_x < \infty.$$

Portanto para cada m e para cada β temos que

$$\parallel m^2 \sum_{n=m}^{\infty} P^n f_\beta(0) \parallel_{V_x} \leq \sum_{n=m}^{\infty} n^2 \parallel P^n f_\beta(0) \parallel_{V_x} \leq M_x.$$

Portanto o conjunto $\widetilde{B} := \{m^2 \sum_{n=m}^{\infty} P^n f_\beta(0)\}_{m,\beta}$ é localmente limitado também.

Seja $\phi \in G^\infty(\mathcal{U})$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\phi_n(\sum_{k=0}^{\infty} P^k f(0)) := \phi(P^n f(0))$, $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ $B^n := \{P \in \mathcal{P}(^nE) : \parallel P \parallel = \sup_{\|x\|\leq 1} \mid P(x) \mid \leq 1\}$ é um conjunto localmente limitado de funções holomorfas em $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$, então segue da definição de $G^\infty(\mathcal{U})$ que $\phi_n \mid_{B^n} = \phi \mid_{B^n}$ é τ_c-contínua e portanto $\phi_n \in Q(^nE)$. Como ϕ é τ_c-contínua sobre $\widetilde{B}$ e a expansão da série de Taylor de f_β ao redor de 0 converge a f_β na topologia τ_c, temos que

$$\| \phi - \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k \|_B = \sup_\beta | (\phi - \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k)(f_\beta) | = \sup_\beta | \phi(\sum_{n=m}^{\infty} P^n f_\beta(0)) | \leq \frac{1}{m^2} \| \phi \|_{\tilde{B}} \longrightarrow 0$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Daí $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \in G^\infty(\mathcal{U})$.

Como $(\alpha_1, 2^2\alpha_2, \ldots, n^2\alpha_n, \ldots) \in \mathcal{S}$ para $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, segue do Lemma 6.3.1 que para cada $x \in U$, podemos encontrar $N_x > 0$ tal que

$$\sup_\beta \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \alpha_n \| P^n f_\beta(0) \|_{W_x} \leq N_x$$

para algum vizinhança W_x de Γ_x. Em particular o conjunto $B' := \{n^2\alpha_n P^n f_\beta(0)\}_{n,\beta}$ é localmente limitado (em $\mathcal{P}(^nE)$).

Seja $\phi_\eta \longrightarrow 0$ em $G^\infty(\mathcal{U})$ (para a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos localmente limitados de $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$). Como cada subconjunto localmente limitado de $\mathcal{P}(^nE)$ é localmente limitado em $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U})$ e

$$\| (\phi_\eta)_n \|_{\{P^n f_\beta(0)\}_\beta} = \sup_\beta | \phi_\eta(P^n f_\beta(0)) | \leq \frac{1}{n^2\alpha_n} \| \phi_\eta \|_{B'}$$

então $(\phi_\eta)_n \longrightarrow 0$ em $Q(^nE)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto mostra que $\{Q(^nE)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma decomposição de Schauder para $G^\infty(\mathcal{U})$.

Para $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \in G^\infty(\mathcal{U})$ e $(\alpha_n)_n \in \mathcal{S}$ temos que

$$\| \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n \phi_n \|_B \leq \sum_{n=k}^{\infty} | \alpha_n | \| \phi_n \|_B = \sum_{n=k}^{\infty} \sup_\beta | \phi(\alpha_n P^n f_\beta(0)) |$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sup_\beta | \phi(n^2\alpha_n P^n f_\beta(0)) | \leq \| \phi \|_{B'} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Isto mostra que $\{Q(^nE)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição para $G^\infty(\mathcal{U})$, e tomando $k = 0$ vemos que a $\mathcal{S}$-decomposição é absoluta. ∎

A seguir daremos duas definições, que já foram dadas antes no caso de espaços de Banach.

Definição 6.3.3. *Sejam E e F elc's. Uma função $f : E \longrightarrow F$ é dita fracamente* *contínua nos limitados de* E *se para cada conjunto limitado* $B \subset E$, $\epsilon > 0$, $x_0 \in B$ *e seminorma contínua* p *sobre* F *existem* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ *e* $\delta > 0$ *tais que se* $x \in B$, $|\varphi_i(x_0 - x)| < \delta$, $(i = 1, \ldots, k)$, *então* $p(f(x_0) - f(x)) < \epsilon$.

Como no caso de espaços de Banach $\mathcal{P}_w(E;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(E;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E e $\mathcal{P}_w(^mE;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são fracamente contínuos nos limitados de E, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. A definição do polinômio compacto no caso de elc's é a mesma do caso de espaços de Banach, ou seja:

Definição 6.3.4. *(Veja [3], pg 16, ou [15], pg 88.) Sejam* E *e* F *elc's. Diz-se que o polinômio* $P \in \mathcal{P}(E;F)$ *é compacto se cada* $x \in E$ *tem uma vizinhança* $V_x \subset E$ *tal que* $P(V_x)$ *é relativamente compacto em* F.

Novamente $\mathcal{P}_k(E;F)$ denota o subespaço de todos os membros compactos de $\mathcal{P}(E;F)$, e $\mathcal{P}_k(^mE;F)$ denota o subespaço de todos os membros de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que são compactos, para cada $m \in \mathbb{N}_0$.

Agora vamos dar o resultado principal desta seção.

Teorema 6.3.5. *Seja* E *um espaço de Banach, seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de* E, *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de* U *tal que* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *e* $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, *com* $\rho_n > 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *São equivalentes:*

(a) E *tem a PAC.*

(b) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_\gamma}$ *para cada espaço de Banach* F *(equivalentemente para cada elc completo* F*).*

(c) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_\gamma}$ *para cada espaço de Banach* F *(equivalentemente para cada elc completo* F*).*

(d) $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U};F)}^{\tau_\gamma}$ *para cada espaço de Banach* F *(equivalentemente para cada elc completo* F*).*

(e) $\delta_{\mathcal{U}} \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U};G^\infty(\mathcal{U}))}^{\tau_\gamma}$.

(f) $G^\infty(\mathcal{U})$ *tem a PAC.*

(g) Para cada espaço de Banach F, e para cada subconjunto aberto e equilibrado $V \subset F$, $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V}; E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{V}; E)}^{\,\tau_\gamma}$, onde $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de V tal que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e $\rho_n V_n \subset V_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(h) $I_U \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; E)}^{\,\tau_\gamma}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos as implicações para F Banach.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Na demonstração do Teorema 3.1.3 em (a) $\Longrightarrow$ (b) usando Observação 4.2.4 e Proposição 4.2.6 obtemos (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c): Seja F um espaço de Banach. Pela demonstração do Teorema 3.1.3 temos que $\mathcal{P}_w(E; F) \subset \mathcal{P}_k(E; F) \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$. Então por (b) temos que

$$\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) = \overline{\mathcal{P}_w(E; F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \overline{\mathcal{P}_k(E; F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F).$$

Logo temos (c).

(c) $\Longrightarrow$ (d): Seja F um espaço de Banach. Como $\mathcal{P}_k(E; F) \subset \mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; F) \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$, por (c) temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) = \overline{\mathcal{P}_k(E; F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; F)}^{\,\tau_\gamma} \subset \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F)$. Logo temos (d).

(d) $\Longrightarrow$ (h): Por (d) temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; E) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; E)}^{\,\tau_\gamma}$. Como a aplicação identidade $I_U : U \longrightarrow U \subset E$ é limitada sobre cada U_n, então $I_U \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; E)$. Daí temos (h).

(h) $\Longrightarrow$ (a): Suponhamos que $I_U \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; E)}^{\,\tau_\gamma}$. Provaremos que $I_U|_{U_n} \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U_n; E)}^{\,\tau_{\gamma_n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese existe um rede $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U}; E)$ tal que $g_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} I_U$. Pelo Observação 4.2.2 para cada $\alpha \in \Lambda$ g_α corresponde a uma sequência $(g_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $proj_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{H}_K^\infty(U_n; E)$, onde $g_\alpha^n = g_\alpha|_{U_n} \in \mathcal{H}_K^\infty(U_n; E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto temos $g_\alpha|_{U_n} = R_n(g_\alpha) \xrightarrow{\tau_{\gamma_n}} R_n(I) = I_U|_{U_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $I_U|_{U_n} \in \overline{\mathcal{H}_K^\infty(U_n; E)}^{\,\tau_{\gamma_n}}$. Dai pelo Teorema 3.1.3 E tem a PAC, ou seja (a).

(a) $\Longleftrightarrow$ (f): Por (a) e pela Proposição 3.1.2 E tem a PAC se e só se $Q(^nE)$ tem a PAC para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto pelas Proposições 5.3.8 e 6.3.2 para cada $n \in \mathbb{N}$ $Q(^nE)$ tem a PAC se e só se $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PAC.

(a) $\Longrightarrow$ (g): Seja V um subconjunto aberto e equilibrado de F, e seja $\mathcal{V} =$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos abertos, limitados, e equilibrados de V tal que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e $\rho_n V_n \subset V_{n+1}$, com $\rho_n > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então por (a) temos que $(L(G^\infty(\mathcal{V});E),\tau_c) = \overline{L_k(G^\infty(\mathcal{V});E)}$. Daí pela Proposição 4.2.14 e Observação 4.2.12 $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};E),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{V};E)}$.

(g) $\Longrightarrow$ (a): Por (g) temos que $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{V};E),\tau_\gamma) = \overline{\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{V};E)}$. Daí pela Proposição 4.2.14 e Observação 4.2.12 temos que $(L(G^\infty(\mathcal{V});E),\tau_c) = \overline{L_k(G^\infty(\mathcal{V});E)}$. Seja $A \in L(F;E)$. Então por ([34], Proposition 2.4) existem operadores $S \in L(F;G^\infty(\mathcal{V}))$ e $R \in L(G^\infty(\mathcal{V});F)$ tais que $R\circ S(y) = y$ para todo $y \in F$. Então $A\circ R \in L(G^\infty(\mathcal{V});E)$ e portanto existe uma rede $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(G^\infty(\mathcal{V});E)$ tal que $B_\alpha \xrightarrow{\tau_c} A\circ R$. Daí, $(B_\alpha\circ S)_{\alpha\in\Lambda} \subset L_k(F;E)$ e $B_\alpha \circ S \xrightarrow{\tau_c} A\circ R\circ S = A$. Portanto mostramos que $L(F;E) = \overline{L_k(F;E)}^{\tau_c}$. Logo E tem a PAC.

Para mostrar a equivalência de (e) com os items anteriores precisa mostrar que a condição (d) para cada espaço de Banach F é equivalente à mesma condição para cada elc completo F. Só mostraremos a equivalência para o item (b), e a mesma demonstração vai funcionar para (c) também. Como $\mathcal{P}_k(E;F) \subset \mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U};F)$, sendo F elc, então por (c) a mesma equivalência segue-se para item (d).

Suponhamos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F. Seja $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F)$, sendo F elc completo, seja $\epsilon > 0$ e seja $\tilde{p}$ uma seminorma contínua sobre $(\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),\tau_\gamma)$. Pela Proposição 4.2.18 podemos supor que

$$\tilde{p}(f) = \sup_j \alpha_j\, p(f(x_j)) \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U};F),$$

onde $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$, $\alpha_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset U_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e p é uma seminorma contínua sobre F. Como U_m é limitado, então $B = \overline{\Gamma}(f(U_m))$ é limitado em F. Como F é um elc completo, já sabemos que o subespaço vetorial gerado por B, i.e, $F_B = \bigcup_{n=1}^\infty nB$ é um espaço de Banach, normado pelo funcional de Minkowski p_B, tal que a injeção $i_B : F_B \hookrightarrow F$ é contínua. Como, por hipótese e pelas equivalências anteriores, E tem a PAC, então pelo Teorema 3.1.3 temos que $\mathcal{H}^\infty(U_m;F_B) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F_B)}^{\tau_{\gamma m}}$. Como $f|_{U_m} \in \mathcal{H}^\infty(U_m;F_B)$ então existe $P \in \mathcal{P}_w(E;F_B)$ tal que

$$\sup_j \alpha_j \, p_B(P(x_j) - f|_{U_m}(x_j)) < \frac{\epsilon}{c},$$

onde $c > 0$ é tal que $p(y) \leq c.p_B(y)$ para todo $y \in F_B$. Daí temos que

$$\begin{aligned}\tilde{p}(P - f) &= \sup_j \alpha_j \, p(P(x_j) - f(x_j)) = \sup_j \alpha_j \, p(P(x_j) - f|_{U_m}(x_j)) \\ &\leq \sup_j \alpha_j \, c \, p_B(P(x_j) - f|_{U_m}(x_j)) \\ &\leq c.\frac{\epsilon}{c} = \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, como $P = i_B \circ P \in \mathcal{P}_w(E; F)$, então temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) = \overline{\mathcal{P}_w(E; F)}^{\tau_\gamma}$ para cada elc completo F.

Agora podemos mostrar a equivalência de (e) com os items anteriores.

(d) $\Longrightarrow$ (e): Por (d) e pela observação acima para cada F elc completo temos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; F) = \overline{\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; F)}^{\tau_\gamma}$. Como $G^\infty(\mathcal{U})$ é um elc completo então obtemos que $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U})) = \overline{\mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))}^{\tau_\gamma}$. Mas pelo Teorema 4.2.7 $\delta_\mathcal{U} \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))$. Logo temos (e).

(e) $\Longrightarrow$ (h): Por (e) existe um rede $(g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))$ tal que $g_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} \delta_\mathcal{U}$. Consideramos a identidade $I_U : U \longrightarrow U \subset E$. Como $I_U \in \mathcal{H}^\infty(\mathcal{U}; E)$ então pelo Teorema 4.2.7 existe $T_{I_U} \in L(G^\infty(\mathcal{U}); E)$ tal que $T_{I_U} \circ \delta_U = I_U$. Portanto temos que $T_{I_U} \circ g_\alpha \xrightarrow{\tau_\gamma} T_{I_U} \circ \delta_U = I_U$. Como $(T_{I_U} \circ g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; E)$, então temos (h). ■

Não sabemos se o método que foi usado no Teorema 6.1.1, para provar que $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PA cada vez que E a tem, funciona no caso da PAC. (Pois não sabemos se $T_f \in L_k(G^\infty(\mathcal{U}); G^\infty(\mathcal{U}))$ cada vez que $f \in \mathcal{H}^\infty_K(\mathcal{U}; G^\infty(\mathcal{U}))$.) Mas observe que usando a $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de $G^\infty(\mathcal{U})$, que nós usamos na demonstração do teorema anterior para provar que $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PAC cada vez que E a tem, é possível dar outra demonstração que $G^\infty(\mathcal{U})$ tem a PA cada vez que E a tem (usando [9], Proposition 1, e [33], Corollary 5.5).

6.4 A Propriedade de Aproximação Compacta e Funções Holomorfas de Tipo Limitado

Seja $\mathcal{H}_c(U;F)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas $f \in \mathcal{H}(U;F)$ tal que $f(A)$ é relativamente compacto em F para cada conjunto U-limitado A. Se $F = \mathbb{C}$, então denotamos $\mathcal{H}_c(U;\mathbb{C})$ por $\mathcal{H}_c(U)$. É claro que $\mathcal{H}_K^\infty(\mathcal{U};F) = \mathcal{H}_c(U;F)$ se $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência fundamental de conjuntos abertos U-limitados. Analogamente ao caso da PA (na Proposição 6.2.1) do Teorema 6.3.5 em particular obtemos o seguinte resultado.

Proposição 6.4.1. *Seja E um espaço de Banach, seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E. São equivalentes:*

(a) E tem a PAC.

(b) $\mathcal{H}_b(U;F) = \overline{\mathcal{P}_w(E;F)}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F (equivalentemente para cada elc completo F).

(c) $\mathcal{H}_b(U;F) = \overline{\mathcal{P}_k(E;F)}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F (equivalentemente para cada elc completo F).

(d) $\mathcal{H}_b(U;F) = \overline{\mathcal{H}_c(U;F)}^{\tau_\gamma}$ para cada espaço de Banach F (equivalentemente para cada elc completo F).

(e) $\delta_U \in \overline{\mathcal{H}_c(U;G_b(U))}^{\tau_\gamma}$.

(f) $G_b(U)$ tem a PAC.

(g) Para cada espaço de Banach F, e para cada subconjunto aberto e equilibrado $V \subset F$,
$\mathcal{H}_b(V;E) = \overline{\mathcal{H}_c(V;E)}^{\tau_\gamma}$.

(h) $I_U \in \overline{\mathcal{H}_c(U;E)}^{\tau_\gamma}$.

Capítulo 7

Funções Holomorfas e a Propriedade de Aproximação Compacta

No último capítulo deste trabalho a ferramenta chave é a $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de espaços $\mathcal{H}(U;F)$ (resp. $\mathcal{H}(K;F)$) e $G(U)$ (resp. $G(K)$), onde U (resp. K) é aberto (resp. compacto) e equilibrado num elc E, e F é um espaço de Banach. Na seção 7.1 usando resultados de $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de $\mathcal{H}(U;F)$ e $\mathcal{H}(K;F)$, devidos a S. Dineen (veja [15]), obtemos facilmente dois resultados gerais para a PAC que serão usados na seção seguinte. Em seguida, na seção 7.2, combinando resultados de $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de $G(U)$ e $G(K)$, devidos a C. Boyd [8], e resultados da seção 7.1, provamos nosso resultado principal, Proposição 7.2.8, que é análoga a um resultado de C. Boyd [8] que foi provado para a PA.

7.1 Funções Holomorfas e a Propriedade de Aproximação Compacta

Como mencionamos acima a ferramenta principal desta seção é a $\mathcal{S}$-decomposição absoluta de espaços localmente convexos que nós definimos na seção 5.3. Graças a esta decomposição conseguiremos alguns resultados imediatamente.

Definição 7.1.1. *Seja* U *um subconjunto aberto de um elc* E *e seja* F *um espaço normado. Uma seminorma* p *sobre* $\mathcal{H}(U;F)$ *é dita portada pelo conjunto compacto* K *de* U *se para cada vizinhança* V, $K \subset V \subset U$, *existe* $C_V > 0$ *tal que* $p(f) \leq C_V \| f \|_V$, *para todo* $f \in \mathcal{H}(U;F)$. *A topologia* τ_ω *sobre* $\mathcal{H}(U;F)$ *é a topologia gerada por todas as seminormas portados por subconjuntos compactos de* U.

Seja U *um subconjunto aberto de um elc* E *e seja* F *um espaço normado. Uma seminorma* p *sobre* E *é dito* τ_δ*-contínua, se para cada cobertura aberta enumerável crescente* $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* U *existe um inteiro* n_0 *e* $C > 0$ *tal que* $p(f) \leq C \| f \|_{U_{n_0}}$, *para todo* $f \in \mathcal{H}(U;F)$. *A topologia* τ_δ *sobre* $\mathcal{H}(U;F)$ *é a topologia gerado por todas as seminormas* τ_δ*-contínuas.*

τ_ω chama-se topologia de Nachbin (ou topologia compacto-portada), e τ_δ chama-se topologia bornológica.

Proposição 7.1.2. *([15], Proposition 3.36) Seja* U *um subconjunto aberto e equilibrado de um elc* E *e seja* F *um espaço de Banach. Então*

(a) $\{(\mathcal{P}(^nE;F),\tau_c)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta para* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_c)$.

(b) $\{(\mathcal{P}(^nE;F),\tau_\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta para* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega)$ *e* $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\delta)$.

Seja K um subconjunto compacto de um elc E e seja F um elc. Denotamos por $\mathcal{H}(K;F)$ o espaço dos germes de funções holomorfas de K em F. Se sabe que $\mathcal{H}(K;F) = ind_{V \supset K}\, \mathcal{H}^\infty(V;F)$, onde V varia sobre os subconjuntos abertos de E que contém K (veja [15]). Citamos [15] para as propriedades dos germes de funções holomorfas.

Proposição 7.1.3. *([15], Proposition 4.29) Seja* K *um subconjunto compacto e equilibrado de um elc* E *e seja* F *um elc completo. Então*

(a) $\{(\mathcal{P}(^nE;F),\tau_c)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta para* $(\mathcal{H}(K;F),\tau_c)$.

(b) $\{(\mathcal{P}(^nE;F),\tau_\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma* $\mathcal{S}$*-decomposição absoluta para* $(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega)$.

Das Proposições 5.3.8, 7.1.2 e 7.1.3 imediatamente obtemos os seguintes resultados.

Proposição 7.1.4. *Seja* E *um elc e seja* F *um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) $(\mathcal{P}(^mE;F),\tau_c)$ *tem a PAC para cada* $m \in \mathbb{N}$.

(b) $(\mathcal{H}(U;F),\tau_c)$ *tem a PAC para um (daí para cada) aberto e equilibrado* U *de* E.

(c) $(\mathcal{H}(K;F),\tau_c)$ *tem a PAC para um (daí para cada) compacto e equilibrado* K *de* E.

Proposição 7.1.5. *Seja* E *um elc e seja* F *um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) $(\mathcal{P}(^mE;F),\tau_\omega)$ *tem a PAC para cada* $m\in\mathbb{N}$.

(b) $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega)$ *tem a PAC para um (daí para cada) aberto e equilibrado* U *de* E.

(c) $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\delta)$ *tem a PAC para um (daí para cada) aberto e equilibrado* U *de* E.

(d) $(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega)$ *tem a PAC para um (daí para cada) compacto e equilibrado* K *de* E.

7.2 Pré-duais de Espaços de Funções Holomorfas e a Propriedade de Aproximação Compacta

Em [27] P. Mazet mostra que para um subconjunto aberto U de um elc E existe um elc completo $G(U)$ e uma função $\delta_U\in\mathcal{H}(U;G(U))$ com o seguinte propriedade universal: Para cada elc completo F e cada função $f\in\mathcal{H}(U;F)$ existe um único operador $T_f\in L(G(U);F)$ tal que $f=T_f\circ\delta_U$. Em particular, tomando $F=\mathbb{C}$ obtemos que $G(U)$ é o pré-dual de $\mathcal{H}(U)$. Em [36] J. Mujica e L. Nachbin deram outra demonstração desse resultado baseado um resultado sobre limites indutivos de espaços de Banach, onde $G(U)$ é definido da seguinte maneira: Se $\mathcal{U}=(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura enumerável aberta de U, e $\alpha=(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números estritamente positivos, seja $B^\alpha_{\mathcal{U}}=\{f\in\mathcal{H}(U):\|f\|_{U_j}\le\alpha_j$ para cada $j\}$. Então definimos $G(U)=\{u\in\mathcal{H}(U)':u\,|_{B^\alpha_{\mathcal{U}}}$ é τ_c-contínuo para cada $\alpha\}$, munido da topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos $B^\alpha_{\mathcal{U}}$.

Enquanto $G(U)$ é o pré-dual do $\mathcal{H}(U)$, para cada $n\in\mathbb{N}$ e cada elc E $\mathcal{P}(^nE)$ também tem o pré-dual. De fato; em [42] R. Ryan mostra que para cada elc E e cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\delta_n\in\mathcal{P}(^nE;\widehat{\bigotimes_{s,n,\pi}}E)$ com a seguinte propriedade universal: Dado um elc completo F e $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$ existe um único $T_P\in L(\widehat{\bigotimes_{s,n,\pi}}E;F)$ tal que $P=T_P\circ\delta_n$, onde $\widehat{\bigotimes_{s,n,\pi}}E$ é o completamento do espaço de produtos tensoriais simétricos de n-cópias de E, com a topologia projetiva π (para definição veja [15], pg's 18-19). Em [8] C. Boyd adaptando a demonstração de ([36], Theorem 2.1) deu uma demonstração alternativa deste resultado, onde $\widehat{\bigotimes_{s,n,\pi}} E$ é substituído por $Q(^nE)$ o qual foi definido da seguinte maneira (veja [8], Theorem 2.10): Seja α uma seminorma sobre E e seja

$$B_\alpha^n = \{P \in \mathcal{P}(^nE) : | P(x) | \leq 1 \text{ para } x \in E \text{ com } \alpha(x) \leq 1\}.$$

Então definimos $Q(^nE) = \{\phi \in \mathcal{P}(^nE)' : \phi |_{B_\alpha^n}$ é τ_c-contínuo para cada $\alpha\}$, munido da topologia da convergência uniforme sobre todos os conjuntos B_α^n. Notamos que $\widehat{\bigotimes_{s,n,\pi}} E$ é topologicamente isomorfo ao $Q(^nE)$ ([8], Corollary 2.11). Usando esta descrição de $Q(^nE)$, em [8], C. Boyd deu uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta para $G(U)$ com U um subconjunto aberto e equilibrado de E. Além disso, em [8] C. Boyd provou a existência de um elc completo $G(K)$, com K compacto em E, tal que $\mathcal{H}(K) = G(K)_i'$, onde $G(K)_i'$ denota o dual indutivo de $G(K)$. Portanto, $G(K)$ é o pré-dual de $\mathcal{H}(K)$. Analogamente ao $G(U)$, usando a descrição acima de $Q(^nE)$ em [8] C. Boyd deu uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta para $G(K)$ também, onde K é um subconjunto compacto e equilibrado em E. Citamos [8] para as propriedades de $G(K)$ e citamos [5] para a definição do dual indutivo de um elc.

Proposição 7.2.1. *([8], Proposition 2.15) Se U é um subconjunto aberto e equilibrado de um elc E, então $\{Q(^nE)\}_{n=0}^\infty$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta para $G(U)$.*

Proposição 7.2.2. *([8], Proposition 2.16) Se K é um subconjunto compacto e equilibrado de um elc E, então $\{Q(^nE)\}_{n=0}^\infty$ é uma $\mathcal{S}$-decomposição absoluta para $G(K)$.*

Das Proposições 5.3.8, 7.2.1 e 7.2.2 imediatamente obtemos o seguinte resultado.

Proposição 7.2.3. *Seja E um elc. São equivalentes:*

(a) $Q(^mE)$ tem a PAC para cada $m \in \mathbb{N}$.

(b) $G(U)$ tem a PAC para um (daí para cada) aberto equilibrado U de E.

(c) $G(K)$ tem a PAC para um (daí para cada) compacto equilibrado K de E.

Para obter o resultado principal desta seção precisamos alguns resultados preliminares.

Definição 7.2.4. *Um espaço topológico de Hausdorff X é dito um k-espaço se um conjunto $A \subset X$ é aberto sempre que $A \cap K$ é aberto em K para cada subconjunto compacto K de X.*

Cada espaço localmente compacto, cada espaço primeiro enumerável (em particular cada espaço metrizável) e cada espaço-DFC é um k-espaço. Cada subconjunto aberto (fechado) de um k-espaço também é um k-espaço.

Teorema 7.2.5. *([44], Theorem 2.3.) Seja E um k-espaço e seja F um elc quase-completo.*
(a) Seja U um subconjunto aberto de E, então a aplicação

$$f \in (\mathcal{H}(U;F), \tau_c) \longrightarrow S_f \in L_\epsilon(F_c'; (\mathcal{H}(U), \tau_c)).$$

é um isomorfismo topológico, onde para cada $f \in \mathcal{H}(U;F)$, $S_f : F_c' \longrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_c)$ é definida por $S_f(\varphi) = \varphi \circ f$ se $\varphi \in F_c'$. A aplicação inversa é dada por

$$S \in L_\epsilon(F_c'; (\mathcal{H}(U), \tau_c)) \longrightarrow S' \circ \varepsilon \in (\mathcal{H}(U;F), \tau_c),$$

onde S' é a aplicação adjunta de S, e $\varepsilon : U \longrightarrow (\mathcal{H}(U), \tau_c)_c'$ é a função avaliação definida por $\varepsilon(x) : g \in \mathcal{H}(U) \longrightarrow g(x) \in \mathbb{C}$ para todo $x \in U$ e $g \in \mathcal{H}(U)$.
(b) (Veja [3], Proposition 1.1.) Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer, então a aplicação

$$P \in (\mathcal{P}(^nE;F), \tau_c) \longrightarrow S_P \in L_\epsilon(F_c'; (\mathcal{P}(^nE), \tau_c)).$$

é um isomorfismo topológico, onde para cada $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $S_P : F_c' \longrightarrow (\mathcal{P}(^nE), \tau_c)$ é definida por $S_P(\varphi) = \varphi \circ P$ se $\varphi \in F_c'$. A aplicação inversa é dada por

$$S \in L_\epsilon(F_c'; (\mathcal{P}(^nE), \tau_c)) \longrightarrow S' \circ \varepsilon \in (\mathcal{P}(^nE;F), \tau_c),$$

onde S' é a aplicação adjunta de S, e $\varepsilon : E \longrightarrow (\mathcal{P}(^nE), \tau_c)_c'$ é a função avaliação definida por $\varepsilon(x) : Q \in \mathcal{P}(^nE) \longrightarrow Q(x) \in \mathbb{C}$ para todo $x \in E$ e $Q \in \mathcal{P}(^nE)$.

Definição 7.2.6. *(Veja [3]) Sejam E e F elc's e seja U um subconjunto aberto de E. Diz-se que a função $f \in \mathcal{H}(U;F)$ é compacta se cada $x \in U$ tem uma vizinhança $V_x \subset U$ tal que $f(V_x)$ é relativamente compacto em F.*

Proposição 7.2.7. *Seja E um espaço metrizável e seja F um elc quase-completo.*
(a) *Se U é um subconjunto aberto de E, então $f \in \mathcal{H}(U;F)$ é compacta se e só se $S_f \in L(F_c';(\mathcal{H}(U),\tau_c))$ é compacto.*
(b) *Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Então $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é compacto se e só se $S_P \in L(F_c';(\mathcal{P}(^nE),\tau_c))$ é compacto.*

Demonstração:(a) $(\Longrightarrow)$ Consideramos a aplicação

$$f \in \mathcal{H}(U;F) \longrightarrow S_f \in L(F_c';(\mathcal{H}(U),\tau_c)).$$

Seja $f \in \mathcal{H}(U,F)$ compacto e seja $a \in U$. Então a tem uma vizinhança V_a em U tal que $\overline{f(V_a)}$ é compacto em F. Seja $K = \overline{f(V_a)}$. Então $K^\circ \in \mathcal{V}_0(F_c')$. Daí $S_f(K^\circ)$ é localmente limitado. De fato: como $K^\circ \supset \{\psi \in F_c' : |<\psi, f(x)>| \leq 1$ para todo $x \in V_a\}$ então $| S_f(\psi)(x) | = | \psi \circ f(x) | \leq 1$ para todo $x \in V_a$ e $\psi \in K^\circ$. Logo $S_f(K^\circ)$ é localmente limitado. Portanto, por ([15], 3.2, Lemma 3.25) $\overline{S_f(K^\circ)}$ é compacto em $(\mathcal{H}(U),\tau_c)$. Logo S_f é um operador compacto.
$(\Longleftarrow)$ Agora consideramos a aplicação inversa

$$S \in L(F_c';(\mathcal{H}(U),\tau_c)) \longrightarrow S' \circ \varepsilon \in \mathcal{H}(U;F),$$

onde S' é a aplicação adjunta de S, e $\varepsilon : U \longrightarrow (\mathcal{H}(U),\tau_c)_c'$ é a função avaliação que foi definida no Teorema 7.2.5. Seja $S \in L(F_c';(\mathcal{H}(U),\tau_c))$ compacto. Então pela Proposição 5.1.6 a aplicação adjunta $S' \in L((\mathcal{H}(U),\tau_c)_c';F)$ também é compacta. Portanto existe um conjunto compacto $K \subset (\mathcal{H}(U),\tau_c)$ tal que $\overline{S'(K^\circ)}$ é compacto em F, onde $K^\circ = \{\psi \in (\mathcal{H}(U),\tau_c)' : | \psi(g) | \leq 1$ para todo $g \in K\}$ e $K^\circ \in \mathcal{V}_0((\mathcal{H}(U),\tau_c)_c')$. Como K é limitado em $(\mathcal{H}(U),\tau_c)$ a mesma demonstração de ([32], Proposition 9.15) mostra que K é localmente limitado. Então para cada $a \in U$ existe uma vizinhança V_a em U e $c_a > 0$ tais que $| g(x) | \leq c_a$ para todo $x \in V_a$ e $g \in K$, ou seja $\frac{1}{c_a} | \varepsilon(x)(g) | = | \frac{1}{c_a}\varepsilon(x)(g) | \leq 1$ para todo $x \in V_a$ e $g \in K$. Como $\frac{1}{c_a}\varepsilon(x) \in (\mathcal{H}(U),\tau_c)'$ para cada $x \in V_a$, então $\frac{1}{c_a}\varepsilon(V_a) \subset K^\circ$. Portanto $\overline{\frac{1}{c_a}S' \circ \varepsilon(V_a)} = \overline{S'(\frac{1}{c_a}\varepsilon(V_a))} \subset \overline{S'(K^\circ)}$. Logo $\overline{S' \circ \varepsilon(V_a)}$ é compacto em F. Então $S' \circ \varepsilon$ é uma aplicação compacta.
(b) A mesma demonstração de (a) funciona. ■

Combinando a Proposição 7.1.4 e a Proposição 7.2.3, para espaços de Fréchet obtemos o seguinte resultado.

Proposição 7.2.8. *Seja* E *um espaço de Fréchet. São equivalentes:*

(a) $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$ *tem a PAC para um (daí para cada) aberto e equilibrado* U *de* E*.*

(b) $(\mathcal{H}(K), \tau_c)$ *tem a PAC para um (daí para cada) compacto e equilibrado* K *de* E*.*

(c) $(\mathcal{P}(^mE), \tau_c)$ *tem a PAC para cada* $m \in \mathbb{N}$*.*

(d) $Q(^mE)$ *tem a PAC para cada* $m \in \mathbb{N}$*.*

(e) $G(U)$ *tem a PAC para um (daí para cada) aberto e equilibrado* U *de* E*.*

(f) $G(K)$ *tem a PAC para um (daí para cada) compacto e equilibrado* K *de* E*.*

(g) E *tem a PAC.*

(h) $(\mathcal{P}(^mE; F), \tau_c) = \overline{\mathcal{P}_k(^mE; F)}$ *para cada* F *elc (equivalentemente para cada* F *Fréchet) e para cada* $m \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração: A equivalência de (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) segue da Proposição 7.1.4 e a equivalência de (d) $\Longleftrightarrow$ (e) $\Longleftrightarrow$ (f) segue da Proposição 7.2.3.

(c)$\Longleftrightarrow$(d): Como E é espaço de Fréchet então $Q(^mE)$ também é espaço de Fréchet (para cada $m \in \mathbb{N}$) (veja [42], pg 50). Portanto pelo Corolário 5.3.5, $Q(^mE)$ tem a PAC se e só se $Q(^mE)'_c$ tem a PAC, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por ([42], Corollary 2.2), $Q(^mE)'_c$ tem a PAC se e só se $(\mathcal{P}(^mE), \tau_c)$ tem a PAC, para cada $m \in \mathbb{N}$.

(c)$\Longrightarrow$(g): Por (c) E'_c tem a PAC. Portanto pelo Corolário 5.3.5 E tem a PAC.

(g)$\Longrightarrow$(h): Suponhamos que E tem a PAC. Seja $m \in \mathbb{N}$, seja F um elc e seja p uma seminorma contínua sobre F. Seja $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$, seja K um subconjunto compacto de E e seja $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $p(P(x) - P(y)) \leq \epsilon$ sempre que $x \in K$ e $d(y, x) < \delta$, onde d é uma métrica sobre E. Seja $T \in L_k(E; E)$ tal que $d(Tx, x) < \delta$ para todo $x \in K$. Então $p(P(T(x)) - P(x)) \leq \epsilon$ para todo $x \in K$. Como $P \circ T \in \mathcal{P}_k(^mE; F)$ daí temos (h).

(h)$\Longrightarrow$(c): Seja $m \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $(\mathcal{P}(^mE; F), \tau_c) = \overline{\mathcal{P}_k(^mE; F)}$ para todo F elc (quase-completo). Como E é Fréchet, então em particular é um k-espaço. Portanto pelo Teorema 7.2.5 e pela Proposição 7.2.7 obteremos

$$F\varepsilon(\mathcal{P}(^mE),\tau_c) = \overline{L_k(F'_c;(\mathcal{P}(^mE),\tau_c))} \quad \text{para todo } F \text{ elc quase-completo. (*)}$$

Por ([42], Proposition 3.3) e ([8], Corollary 2.11) temos que $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_b = Q(^mE)$. Como um subespaço fechado de um espaço semi-Montel é semi-Montel, e como $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)$ é um subespço fechado (e complementado) em $(\mathcal{H}(U),\tau_c)$ (veja, por exemplo [14], Proposition 2.40), então $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)$ é um espaço semi-Montel. Daí temos que $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_c = (\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_b = Q(^mE)$, que é um espaço de Fréchet (em particular quase-completo), onde b indica a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)$. Portanto por (*) temos que

$$(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_c\varepsilon(\mathcal{P}(^mE),\tau_c) = \overline{L_k(((\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_c)'_c;(\mathcal{P}(^mE),\tau_c))}.$$

Por ([42], Corollary 2.2) e ([8], Corollary 2.11) temos que $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c) = Q(^mE)'_c$. Como $((\mathcal{P}(^mE),\tau_c)'_c)'_c = Q(^mE)'_c = (\mathcal{P}(^mE),\tau_c)$ pela Proposição 5.1.3 (d) temos que

$$(L((\mathcal{P}(^mE),\tau_c);(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)),c) = \overline{L_k((\mathcal{P}(^mE),\tau_c);(\mathcal{P}(^mE),\tau_c))}.$$

Então pela Proposição 5.3.4 $(\mathcal{P}(^mE),\tau_c)$ tem a PAC, ou seja temos (c).

O fato que o item (h) para cada Fréchet F é equivalente à mesma condição para cada elc F segue do fato que, para $m=1$, pela Proposição 5.3.4, E tem a PAC. Portanto pela implicação $(g) \Longrightarrow (h)$ temos a equivalência. ■

Corolário 7.2.9. *Seja E em espaço de Fréchet-Montel tal que $G(E)$ é Montel e seja U um subconjunto aberto e equilibrado de E. Então E tem a PAC se e só se $(\mathcal{H}(U),\tau_\delta)$ tem a PAC.*

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Suponhamos que E tem a PAC. Então pela Proposição 7.2.8 $(\mathcal{P}(^nE),\tau_c)$ tem a PAC para cada $n\in\mathbb{N}$. Como por hipótese e por ([8], Theorem 4.2) $\tau_c = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, então $(\mathcal{P}(^nE),\tau_\omega)$ tem a PAC para cada $n\in\mathbb{N}$. Daí pelas Proposições 7.1.2 e 5.3.8 $(\mathcal{H}(U),\tau_\delta)$ tem a PAC.

$(\Longleftarrow)$ Como, por ([15], Proposition 3.22), E'_c é complementado em $(\mathcal{H}(U),\tau_\delta)$ então E'_c tem a PAC e pelo Corolário 5.3.5 E tem a PAC. ■

Bibliografia

[1] R.M. Aron, C. Hervés, M. Valdivia, Weakly continuous mappings on Banach spaces, J. Funct. Anal. 52(1983), 189-204.

[2] R.M. Aron, J.B. Prolla, Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces, J. Reine Angew. Math. 313(1980), 195-216.

[3] R.M. Aron, M. Schottenloher, Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property, J. Funct. Anal. 21 (1976), 7-30.

[4] S. Banach, Théorie des Opérations Linéaires, Warszawa, 1932.

[5] K.D. Bierstedt, An introduction to locally convex inductive limits, in "Functional Analysis and its Applications" (H. Hobge-Nlend, Ed.), World Scientific, Singapure, 1988, pp. 35-133.

[6] K.D. Bierstedt, R. Meise, Bemerkungen über die Approximationseigenshaft lokalkonvexer Funktionenräume, Math. Ann. 209 (1974), 99-107.

[7] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, Topological Vector Spaces, Chapters 1-5, Springer-Verlag, 1987.

[8] C. Boyd, Preduals of the space of holomorphic functions on a Fréchet space. Ph.D. Thesis, University College, Dublin, 1992.

[9] C. Boyd, S. Dineen, P. Rueda, Weakly uniformly continuous holomorphic functions and the approximation property, Indag. Math., N.S., 12 (2) (2001), 147-156.

[10] P.G. Casazza, Approximation Properties, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, edited by W. Johnson and J. Lindenstrauss, North-Holland, Amsterdam, 2001, pp. 271-316.

[11] P.G. Casazza, H. Jarchow, Self-induced compactness in Banach spaces, Proc. Roy. Soc. Edinburg. Section A 126 (1996), 355-362.

[12] E. Çalışkan, Bounded holomorphic mappings and the compact approximation property, Port. Math., a aparecer.

[13] A.M. Davie, The approximation problem for Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 261-266.

[14] S. Dineen, Complex Analysis on Locally Convex Spaces, North-Holland Math. Stud., 57, 1981.

[15] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 1999.

[16] S. Dineen, J. Mujica, The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces I, preprint, 2002.

[17] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), 309-317.

[18] T. Figiel, W.B. Johnson, The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 197-200.

[19] K. Floret, J. Wloka, Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. Lecture Notes in Mathematics 56. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968.

[20] P. Galindo, D. Garcia and M. Maestre, Holomorphic mappings of bounded type, J. Math. Anal. Appl., 166 (1992), 236-246.

[21] A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Mem. of the Amer. Math. Soc, 16, 1955

[22] J. Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions, Vol I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[23] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1969, 1979.

[24] J. Lindenstrauss, On nonseparable reflexive Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 967-970.

[25] J. Lindenstrauss, Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate, in: Symposium On Infinite Dimensional Topology, edited by R.D. Anderson, Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press, 1972, pp. 235-273.

[26] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977, 1979.

[27] P. Mazet, Analytic Sets in Locally Convex Spaces. North-Holland Math. Stud., 89, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[28] R. Meise, Räume holomorpher Vektorfunktionen mit Wachstumsbedingungen und topologische Tensorprodukte, Math. Ann. 199 (1972), 293-312.

[29] J. Mujica, Gérmenes Holomorfas y Funciones Holomorfas en Espacios de Fréchet, Publicaciones de Departamento de Teoria de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago, 1978.

[30] J. Mujica, Complex homomorphisms of the algebras of holomorphic functions on Fréchet spaces, Math. Ann. 241 (1979), 73-82, Springer-Verlag.

[31] J. Mujica, Domains of holomorphy in (DFC)-spaces, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Property, edited by S. Machado, Springer, Berlin, 1981, pp. 500-533.

[32] J. Mujica, Complex Analysis In Banach Spaces, North-Holland Math.Stud.,vol.120 North-Holland, Amsterdam, 1986.

[33] J. Mujica, Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 867-887.

[34] J. Mujica, Linearization of holomorphic mappings of bounded type, in "Progress in Funtional Analysis" (K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth and M. Maestre, Eds), pp. 149-162, North-Holland, Math. Stud, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1992.

[35] J. Mujica, Reflexive spaces of homogeneous polynomials, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 (2001), 211-223.

[36] J. Mujica, L. Nachbin, Linearization of holomorphic mappings on locally spaces, J. Math. Pures Appl, 71 (1992), 543-560.

[37] J. Mujica, M. Valdivia, Holomorphic germs on Tsirelson's space, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1379-1384.

[38] L. Nachbin, Topics On Topological Vector Spaces, Textos de Métodos Matemáticos, Universidade Federal de Rio de Janeiro, 1963.

[39] K.F. Ng, On a theorem of Dixmier, Math. Scand. 29 (1971), 279-280.

[40] A. Pełczyński, On some problems of Banach, Russian Math. Surveys 28 (1973), 67-76.

[41] J.B. Prolla, Approximation of Vector Valued Functions, North-Holland Math. Stud., Vol. 25, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[42] R. Ryan, Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy. Ph.D. Thesis, Trinity College, Dublin, 1980.

[43] H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1971.

[44] M. Schottenloher, ε-product and continuation of analytic mappings, in: Analyse fonctionelle et applications, Actualités Sci. Indust. No.1367, Hermann, Paris, (1975), pp. 261-270.

[45] L. Schwartz, Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. Séminaire Schwartz, 1953/1954.

[46] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectoriels. Ann. Ins. Fourier 7 (1957), 1-141.

[47] G. Willis, The compact approximation property does not imply the approximation property, Studia Math. 103 (1992), 99-108.

Índice