UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

MONISSE POSTIGO ALVES

Soluções globais para as equações de Navier-Stokes com quimiotaxia e em domínios finos

Campinas

2019

Monisse Postigo Alves

Soluções globais para as equações de Navier-Stokes com quimiotaxia e em domínios finos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Lucas Catao de Freitas Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Monisse Postigo Alves e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catao de Freitas Ferreira.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

AL87s

Alves, Monisse Postigo, 1991-
Soluções globais para as equações de Navier-Stokes com quimiotaxia e em domínios finos / Monisse Postigo Alves. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Lucas Catao de Freitas Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Boa-colocação global. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Morrey, Espaços de. 4. Besov, Espaços de. 5. Soluções brandas (Equações diferenciais parciais). I. Ferreira, Lucas Catao de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Global solutions for Navier-Stokes equations with chemotaxis effects and in thin domains
Palavras-chave em inglês:
Global well-posedness
Navier-Stokes equations
Morrey spaces
Besov spaces
Mild solutions (Partial differential equations)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutora em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catao de Freitas Ferreira [Orientador]
Élder Jesús Villamizar-Roa
Ademir Pastor Ferreira
Marcelo Martins dos Santos
Arlúcio da Cruz Viana
Data de defesa: 31-05-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: http://orcid.org/0000-0002-8608-8159
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8242836852954709

Tese de Doutorado defendida em 31 de maio de 2019 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATAO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR-ROA

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). ARLÚCIO DA CRUZ VIANA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

"Este trabalho é dedicado ao meu pai Geraldino (in memorian), que infelizmente não pode estar presente neste momento tão importante da minha vida."

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Amélia, que sempre foi minha maior fonte de inspiração e força. Sou grata ao meu pai, Geraldino (*in memoriam*), que não pode estar presente neste momento tão incrível da minha vida, mas se hoje consegui concluir essa etapa, foi graças a ele também. Gostaria de agradecer imensamente a minha irmã, Luciana, que me incentivou a continuar na vida acadêmica. Eu sou grata principalmente a Luciana e ao meu cunhado, Neiton, por presentiar a família com as minha sobrinhas, Ana Clara e Laura, que são as paixões da minha vida e minha ruína financeira rsrsrs.

Agradeço também aos meus amigos e colegas, pelo incentivo e pelo apoio constante. Agradeço ao meu namorado Altair, que jamais me negou apoio, carinho e incentivo. Obrigada pelo suporte e por ouvir minhas lamentações. Sem você do meu lado esse trabalho não seria possível.

Agradeço a esta universidade, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade de ter feito parte do corpo discente da pós-graduação.

Agradeço ao Prof. Lucas Catão de Freitas Ferreira, que com paciência e dedicação me orientou durante o meu doutorado e que me ajudou bastante a concluir este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Este trabalho também foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)(Processo 140681/2017-5).

Resumo

Nesta tese, analisamos dois problemas em dinâmica dos fluidos. O primeiro problema aborda o sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^N$, considerando dados iniciais em espaços de Besov-Morrey homogêneo crítico e a força em espaços de Morrey. Obtemos um resultado de boa-colocação usando um argumento de contração em um espaço crítico dependendo do tempo. A teoria desenvolvida aqui melhora resultados anteriores no sentido que ela permite considerar uma classe maior de dados iniciais, soluções e forças. Depois, mostramos que sob condições adicionais de homogeneidade nos dados iniciais e na força, a solução obtida é auto-similar. Além disso, mostramos que as soluções são assintoticamente estáveis sob pequenas perturbações nos dados iniciais, quando o tempo vai para o infinito.

No segundo problema, consideramos as equações de Navier-Stokes no domínio fino $\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, onde $N \geqslant 2$ e $\varepsilon > 0$ é a espessura do domínio. Usamos um espaço $\mathcal{PM}^{l_1,l_2}$ o qual é baseado na transformada de Fourier, contínua em $\mathbb{R}^N$ e periódica na última coordenada, e obtemos um resultado de boa-colocação global de soluções brandas para ε suficientemente pequeno dependendo do tamanho do dado inicial que pode ser arbitrariamente grande no espaço $\mathcal{PM}^{l_1,l_2}$. E por último, são dadas condições sob as quais a solução é regular para $t > 0$ e assim satisfazendo as equações no sentido clássico. Nossa abordagem permite considerar taxas de controle δ da espessura ε próximas de 1, isto é, $\varepsilon \leqslant C\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{l_1,l_2}}^{-\frac{1}{\delta}}$ com $0 < \delta < 1$. Assim, além de dados sem regularidade do tipo Sobolev ou com normas de Sobolev arbitrariamente grandes, podemos considerar taxas δ melhores que resultados anteriores.

Palavras-chave: Sistema de Keller-Segel, Equações de Navier-Stokes, Espaços de Morrey, Espaços de Besov-Morrey, Domínios finos, Soluções brandas.

Abstract

In the present work, we analyze two problems in fluid dynamics. The first one concerns with the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^N$, with the initial data in critical homogeneous Besov-Morrey spaces and the force term in Morrey spaces. We obtain a well-posedness result by using a contraction argument in a time-dependent critical space. This result improves the previous ones in the sense that they allow us to consider a larger class of initial data, solutions and forces. After that, assuming homogeneity conditions on the initial data and forces, we show that the obtained solution is self-similar. Moreover, we also prove that the solutions are asymptotically stable under small pertubations on the initial data, as the time goes to infinity.

The second one concerns with the Navier-Stokes equations in the thin domain $\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, where $N \geqslant 2$ and $\varepsilon > 0$ is the thickness of the domain. We use a space $\mathcal{PM}^{l_1,l_2}$ which is based on the Fourier transform, continuous in $\mathbb{R}^N$ and periodic in the n-th coordinate. We obtain a global well-posedness result for ε sufficiently small depending on the initial data that can be arbitrarily large in the space $\mathcal{PM}^{l_1,l_2}$. Finally, we provide conditions for the solution to be regular when $t > 0$ and then to satisfy the equations in the classic sense. Our approach allows us to consider control rates δ of the thickness close to 1, that is, $\varepsilon \leqslant C\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{l_1,l_2}}^{-\frac{1}{\delta}}$, where $0 < \delta < 1$. Thus, besides covering data without Sobolev regularity or with large Sobolev norms, we are able to consider δ-rates better than previous results.

Keywords: Keller-Segel system, Navier-Stokes equations, Morrey spaces, Besov-Morrey spaces, Thin domain, Mild solutions.

Sumário

Introdução

Nesta tese, consideramos dois problemas em dinâmica dos fluidos. No primeiro problema tratamos o sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes e no segundo as equações de Navier-Stokes clássicas em domínios finos.

A seguir faremos uma descrição de cada um desses problemas, discutindo sua bibliografia e nossos resultados.

Sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes

Consideramos o sistema de Keller-Segel acoplado às equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t n + u\cdot\nabla n = \Delta n - \nabla\cdot(n\nabla c) - \nabla\cdot(n\nabla v) & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ \partial_t c + u\cdot\nabla c = \Delta c - nc & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ \partial_t v + u\cdot\nabla v = \Delta v - \gamma v + n & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ \partial_t u + (u\cdot\nabla)u = \Delta u - \nabla\pi - nf & \text{em } \mathbb{R}^N\times(0,\infty),\\ \nabla\cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N\times[0,\infty),\\ n(x,0)=n_0(x),\ \ c(x,0)=c_0(x),\ \ v(x,0)=v_0(x),\ \ u(x,0)=u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

onde $N\geqslant 2$ é a dimensão e $\gamma\geqslant 0$. As variáveis $n=n(x,t)$ e $c=c(x,t)$ representam a densidade celular e a concentração de oxigênio, respectivamente. Enquanto as variáveis $v=v(x,t)$ e $u=u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\dots,u_N(x,t))$ representam, respectivamente, a concentração de uma substância química e o campo de velocidades do fluido. E por fim, $\pi=\pi(x,t)$ denota a pressão do fluido e a função $f=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_N(x))$, que é independente do tempo, denota um campo de força agindo sobre o movimento do fluido.

O sistema (1) corresponde a um modelo de quimiotaxia dupla que descreve o movimento de bactérias em um fluido viscoso incompressível (veja, e.g., [40] e [12]). Em busca de “alimento” as bactérias nadam em direção a uma concentração mais alta de oxigênio e atrativos químicos. O movimento do fluido é modelado pelas equações de Navier-Stokes sob a influência de uma força $-nf$ que pode ser produzida por diferentes mecanismos, por exemplo, a força devido à agregação de bactérias no fluido gerando uma espécie de força de empuxo (do inglês *buoyancy force*). Por sua vez, o atrativo químico v é produzido pelas próprias bactérias, o qual degrada-se a uma taxa constante $\gamma\geqslant 0$.

A seguir, apresentaremos uma análise de alguns resultados sobre as equações (1) e sistemas relacionados. Em primeiro lugar, recordamos o clássico sistema de Keller-Segel

(sem acoplamento com fluido)

$$\begin{cases} \partial_t n = \Delta n - \nabla \cdot (n\nabla v) \\ \varepsilon \partial_t v = \Delta v - \gamma v + \beta n, \end{cases} \tag{2}$$

o qual tem sido estudado por vários autores. Tal sistema modela a agregação de espécies biológicas (como amebas e bactérias, por exemplo) se movendo em direção a concentração de um produto químico, secretado por eles mesmos, ou de moléculas de alimentos (por exemplo, glicose). O sistema se divide em dois casos básicos, quando $\varepsilon = 0$ (elíptico-parabólico) e quando $\varepsilon = 1$ (parabólico-parabólico). Para o caso parabólico-parabólico com $\gamma = 0$, é conhecido que existe um valor limite $8\pi/\beta$ para a massa inicial que decide entre a existência de solução global e o blow-up da solução em tempo finito. Para mais detalhes, sugerimos os trabalhos Blanchet-Dolbeault-Perthame [4] e Dolbeault-Perthame [11]. Agora, considerando o caso parabólico-parabólico em 2D, com domínio limitado e suave Ω sob as condições de Neumann, Nagai-Senba-Yoshida [37] provaram a existência de soluções globais para $\gamma \geqslant 0$, $\beta > 0$ e dados iniciais não negativos $n_0, v_0 \in H^{1+\delta}(\Omega)$ com massa $M = \displaystyle\int_\Omega n_0 < 4\pi/\beta$. Além disso, a massa $8\pi/\beta$ é um valor limiar para a existência global de soluções ou *blow-up* (veja [20]).

No caso $\Omega = \mathbb{R}^2$, Calvez-Corrias [5] obtiveram soluções globais para a massa subcrítica $M < 8\pi/\beta$, $\varepsilon > 0$ e $\gamma \geqslant 0$, bem como soluções blow-up para $\varepsilon = 0$ e $M > 8\pi/\beta$. Para $N \geqslant 3$, Corrias-Perthame [10] provaram a existência de solução fraca para (2) com $\varepsilon = \alpha = \beta = 1$ e dado pequeno $n_0 \in L^a(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla v_0 \in L^a(\mathbb{R}^N)$, onde $N/2 < a \leqslant N$. Posteriormente, Kozono-Sugiyama [28] consideraram (2) com $\varepsilon = \beta = 1$ e mostraram que se $\max\{1, N/4\} < a \leqslant N/2$ e $(n_0, v_0) \in H^{\frac{N}{a}-2,a}(\mathbb{R}^N) \times H^{\frac{N}{a},a}(\mathbb{R}^N)$ é pequeno o suficiente, então existe uma única solução branda global. Kozono-Sugiyama [27] estenderam os resultados de [28] para $L^{(N/2,\infty)} \times BMO$ e $N \geqslant 2$, onde BMO representa o espaço das funções de oscilação média limitada e $L^{(p,\infty)}$ é o L^p-fraco. Resultados de soluções brandas globais com dados iniciais pequenos em espaços críticos maiores podem ser encontrados na literatura, como o espaço de Besov $\dot{B}^{-(2-\frac{N}{p})}_{p,\infty} \times \dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p,\infty}$ [46] (com $\gamma = 0$ e $\varepsilon = \beta = 1$), o espaço de Morrey [3, 41] e o espaço de Besov-Morrey $\mathcal{N}^{-(2-\frac{N}{q})}_{q,q_1,\infty} \times \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ [16]. Para mais detalhes sobre estes espaços, veja a seção 1.4 (páginas 28 e 30) onde eles estão definidos.

No contexto de fluidos com quimiotaxia (do inglês, *chemotaxis-fluids*), Lorz [34] considerou (2) com $\varepsilon = 0$ acoplado as equações de Stokes em 2D e sem concentração de oxigênio (i.e., $c = 0$). E o resultado obtido foi a existência de soluções globais para dados iniciais pequenos $u_0 \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$ e $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Por sua vez, considerando domínios suaves e limitados, Winkler [42] analisou (1) sem atrativo químico (i.e., $v = 0$) e mostrou a existência e unicidade de solução global clássica em 2D e obteve soluções globais fracas em $3D$ em [43]. Zhang [47] obteve a boa-colocação global para (2.1) com $v = 0$ e dados iniciais nos espaços de Besov não-homogêneos

$$(n_0, c_0, u_0) \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^N) \times B^{s+1}_{p,r}(\mathbb{R}^N) \times B^{s+1}_{p,r}(\mathbb{R}^N),$$

onde $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$ e $s > \dfrac{N}{p} + 1$ com $N = 2, 3$. Considerando (1) com $v = 0$, Choe-Lkhagvasuren [9] mostraram a existência de solução branda global para dados iniciais pequenos (n_0, c_0, u_0) nos espaços de Besov críticos

$$\dot{B}_{r,1}^{-2+\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{-1+\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \text{ para } r \in [1, 3),$$

onde $\dot{B}^s_{p,r}$ denota os espaços de Besov homogêneos ($\dot{B}^s_{p,r} = \mathcal{N}^s_{p,p,r}$). Posteriormente, Zhao-Zhou [48] estenderam o resultado obtido em [9] para $r \in [1, 6)$.

Em comparação com os modelos mencionados acima, o sistema (1) consiste em um modelo de fluido com dupla quimiotaxia que considera o efeito da concentração de oxigênio e do atrativo químico. Em [26], Kozono-Miura-Sugiyama obtiveram a existência de soluções brandas globais para (1) considerando $N \geqslant 3$, dados iniciais pequenos $n_0 \in L_w^{\frac{N}{2}}$, $c_0 \in L^\infty$ com $\nabla c_0 \in L^N_w$, $v_0 \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ com $\nabla v_0 \in L^N_w$ e $u_0 \in L^N_w$, e força pequena $f \in L^N_w$, onde $\mathcal{P}$ denota o conjunto dos polinômios com N variáveis. No caso $N = 2$, a condição $n_0 \in L^1_w$ é substituída por $n_0 \in L^1$. Mencionamos também o artigo [13] onde os autores obtiveram soluções globais no *framework* de L^p em domínios limitados, com condições de pequenez adequadas nos dados, para um modelo de fluido com dupla quimiotaxia e um termo logístico.

Nesta tese, provamos a boa-colocação para (1) com dados iniciais pequenos em espaços de Besov-Morrey crítico $\mathcal{N}^s_{q,q_1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ (para a definição, veja (1.14), página 30). Mais precisamente, consideramos a seguinte classe crítica de dados iniciais

$$\begin{aligned} &n_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{q}-2}_{q,q_1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad c_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ com } \nabla c_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}(\mathbb{R}^N), \\ &v_0 \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ com } \nabla v_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ e } u_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{p}-1}_{p,p_1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \nabla \cdot u_0 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

onde os expoentes p, p_1, q, q_1, r, r_1 e N_1 satisfazem condições adequadas (para mais detalhes, veja Suposição 2.1 na seção 2.1). Para os expoentes acima, temos as seguintes inclusões contínuas e estritas

$$\begin{aligned} &L^1 \hookrightarrow \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}^{\frac{2}{q}-2}_{q,q_1,\infty} \ (N=2), \quad L_w^{\frac{N}{2}} \hookrightarrow \mathcal{M}^{\frac{N}{2}}_{\frac{N}{2}\frac{q_1}{q}} \hookrightarrow \mathcal{N}^{\frac{N}{q}-2}_{q,q_1,\infty} \ (q_1 < q), \\ &L^N_w \hookrightarrow \mathcal{M}^N_{N\frac{r_1}{r}} \hookrightarrow \mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty} \ (r_1 < r) \text{ e } L^N_w \hookrightarrow \mathcal{N}^{\frac{N}{p}-1}_{p,p_1,\infty} \ (p_1 < p), \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\mathcal{M}^p_{p_1}$ denota o espaço de Morrey e $\mathcal{M}^1_1 = \mathcal{M}$ o espaço das medidas de Radon finitas com sinal (veja (1.8)). Aqui consideramos boa-colocação no sentido de Hadamard, isto é, existência, unicidade e dependência contínua em relação aos dados iniciais (em algum sentido apropriado).

Tendo em vista as inclusões acima, nossa classe de dados iniciais é maior do que aquela de Kozono-Miura-Sugiyama [26]. Além disso, o campo de força f é assumido pertencendo ao espaço de Morrey $\mathcal{M}^N_{N_1}(\mathbb{R}^N)$, onde N_1 pode ser tomado igual a $N\dfrac{r_1}{r}$ com

r_1 menor e próximo de r e $p/p_1 = r/r_1$. Assim, por (4) nossa classe de forças f é maior que a de [26]. Para $N = 3$ e $r \in [1, 6)$, existem índices p, p_1, q e q_1 satisfazendo a Suposição 2.1 tais que

$$\dot{B}_{r,1}^{-2+\frac{3}{r}} \hookrightarrow \mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{3}{q}-2}, \quad \dot{B}_{r,1}^{\frac{3}{r}} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^{0} \hookrightarrow L^\infty, \quad \dot{B}_{r,1}^{-1+\frac{3}{r}} \hookrightarrow \mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{3}{p}-1}.$$

Então, no caso do sistema (1) sem atrativo químico (i.e., $v = 0$), nossa classe de dados iniciais é maior que a de [9, 48]. Vale ressaltar que os espaços de Besov-Morrey foram introduzidos em [29] (veja também [35]) para estudar as equações de Navier-Stokes.

As soluções brandas são obtidas por meio de um argumento de contração em um espaço crítico dependente do tempo definido em (2.9). Sob condições adicionais de homogeneidade nos dados iniciais n_0, c_0, v_0, u_0 e na força externa f, podemos garantir que a solução obtida no Teorema 2.3 (página 35) é autossimilar quando $\gamma = 0$. Mostramos também que as soluções são assintoticamente estáveis sob pequenas perturbações iniciais, quando o tempo vai para o infinito. Como subproduto, no caso $\gamma = 0$ obtemos uma classe de soluções assintoticamente autossimilares. Além disso, cabe mencionar que os resultados ainda são verdadeiros se considerarmos os sinais $(+)$ ou $(-)$ em frente a qualquer uma das não-linearidades no lado direito da primeira equação em (1), cobrindo assim casos repulsivos $(+)$, atrativos $(-)$ e um misto deles.

Nossos resultados sobre o sistema (1), contidos no Capítulo 2, foram publicados em [15]. Depois da defesa da tese e da publicação do artigo [15], tomamos conhecimento do trabalho [45], onde os autores consideraram o sistema (1), sem o atrativo químico v (i.e., $v = 0$), no contexto dos espaços de Besov-Morrey e mostraram resultados de existência e comportamento assintótico sob condições de pequenez nos dados iniciais e força externa f.

Equações de Navier-Stokes em domínios finos

Implicitamente já apresentamos as equações de Navier-Stokes, uma vez que o sistema (1) sem o efeito da quimiotaxia se resume nas equações de Navier-Stokes, isto é, para $n = c = v = 0$ o sistema (1) é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla \pi = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5}$$

O problema de existência de solução global ainda é um problema em aberto para as equações de Navier-Stokes em dimensão 3, sendo este um dos sete problemas do milênio proposto pelo Instituto de Matemática Chay (veja www.claymath.org/millennium-problems). Entretanto, existem vários trabalhos sobre existência de soluções globais no tempo com dado inicial suficientemente pequeno em algum espaço, para mais detalhes, sugerimos os trabalhos de Giga-Miyakawa [18], Kozono-Yamazaki [29], Barraza [2], Cannone [6], Yamazaki [44], Koch-Tataru [25], Cannone-Karch [7], Miao-Yuan [36] e Ferreira [14].

Nessa tese vamos trabalhar como as equações de Navier-Stokes no domínio fino N dimensional $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, onde $N \geqslant 2$ e $\varepsilon > 0$ é a espessura. Uma motivação para estudar este tipo de domínio, deve-se ao fato que as equações de Navier-Stokes em dimensão 2 tem solução global regular para qualquer dado inicial regular (veja, por exemplo, [39]). Assim, para $N = 3$ uma intuição é que o fluido em um domínio fino tem pouco espaço adicional (em relação ao plano) advindo da terceira dimensão para permitir uma dinâmica de formação de singularidade, e então pode-se esperar resultados melhores de boa-colocação global.

A seguir, vamos mencionar alguns trabalhos da literatura envolvendo as equações de Navier-Stokes em domínios finos.

Para o domínio fino $Q_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$, onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$ e $0 < \varepsilon \leqslant 1$, Iftimie-Raugel em [22] provaram a existência e unicidade de solução global se

$$\|Mu_0\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-\beta}, \quad \|(Mu_0)_3\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\beta} \text{ e } \|(I-M)u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(Q_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}},$$

onde $1/2 < s < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1/2$ e M denota o operador média na direção da espessura fina. Posteriormente, no domínio $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \varepsilon]$ com condições de contorno periódicas, onde $L_1, L_2 > 0$ e $0 < \varepsilon < 1/2$, Kukavica-Ziane em [30] provaram a existência e unicidade de solução suave se

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{\nu}{C(L_1, L_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\log \varepsilon|^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

Casado-Díaz, Laynez e Suárez-Grau em [8] estudaram o comportamento assintótico das soluções das equações de Navier-Stokes em um domínio fino satisfazendo condições de contorno do tipo Navier em um domínio periódico. Liao em [32] mostrou a existência de solução global para as equações de Navier-Stokes não-homogêneas

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) - \Delta u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases}$$

em domínios finos $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]$ com condições de fronteira de Dirichlet e assumindo que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C. \tag{7}$$

As equações de Navier-Stokes no domínio fino $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$ com condições de Dirichlet tem a forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla \pi = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \nabla \cdot u_0 = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \times [0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0,\varepsilon\} \times (0,\infty), \\ u(x,s,0) = u_0(x,s) & \text{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Para o problema (8), mostramos boa-colocação no sentido de Hadamard, isto é, existência, unicidade e dependência contínua nos dados iniciais (veja Teorema 3.11, página 68), para quaisquer dados iniciais em um espaço cuja norma depende da transformada de Fourier contínua em $\mathbb{R}^{N-1}$ e periódica na n-ésima coordenada, a saber o espaço $\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$ (veja definição 3.3, página 57). De fato, para um dado inicial arbitrário $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, assumimos a condição

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } 0 < \delta < 1, \tag{9}$$

a qual impõe uma condição de espessura máxima no domínio fino para obter a boa-colocação. Além disso, garantimos a persistência da solução no espaço do dado inicial. Ou seja, obtemos a boa-colocação com persistência da solução para dado inicial $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, onde a "taxa de controle"δ da espessura do domínio pode chegar arbitrariamente próxima de 1 (veja Observação 3.12, página 70). Reescrevendo a condição (9) como $\varepsilon \leqslant \tilde{C}\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}^{-\frac{1}{\delta}}$, pode-se notar que quanto maior a taxa de controle da espessura, menos fino precisa ser o domínio para que tenhamos a boa-colocação global.

Em seguida investigamos a regularidade das soluções obtidas no Teorema 3.11. Com a ajuda de uma norma auxiliar, primeiro mostramos que as soluções dadas no Teorema 3.11 são de fato contínuas no tempo para $t > 0$ nas respectivas normas e não apenas fracamente contínuas. Depois, mostramos que elas são suaves e satisfazem (8) no sentido clássico para $t > 0$ (veja Teorema 3.24, página 83 e Teorema 3.28, página 87). Garantimos a suavidade da solução para uma taxa de controle δ podendo chegar próxima de 1, isto é, com a condição (veja Observação 3.29, página 87)

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } 0 < \delta < 1.$$

Além disso, garantimos simultaneamente a persistência de solução no espaço do inicial e a suavidade da solução para uma taxa de controle δ podendo chegar próxima de $\dfrac{2}{N+1}$, isto é, com a condição (veja Observação 3.29, página 87)

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } 0 < \delta < \frac{2}{N+1}.$$

Comparando nossos resultados com o obtido por Liao em [32], temos que a taxa de controle δ em (9) pode aproximar-se de 1 enquanto em Liao a taxa de controle de espessura é no máximo $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ (ver (7)). A nossa taxa também é melhor que a obtida por Kukavica-Ziane, pois a sua melhor taxa é de $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|\log\varepsilon|^{-\frac{3}{2}}$, para $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Ressaltamos que as conclusões acima são em relação as taxas de controle da espessura e não em relação aos espaços de dados iniciais. Entretanto, cabe mencionar que nossos resultados permitem considerar dados iniciais sem regularidade do tipo Sobolev ou com normas de Sobolev arbitrariamente grandes independentemente da espessura ε do domínio.

Organização da tese

Este trabalho está organizado em três capítulos. O Capítulo 1 é dedicado às preliminares para o desenvolvimento adequado do texto. Neste capítulo abordamos conceitos como função e distribuição periódica, transformada de Fourier, espaços de Besov-Morrey e Morrey, entre outros. Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos os resultados obtidos, e suas correspondentes demonstrações, para os problemas (1) e (8), respectivamente.

1 Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, como a classe de Schwartz, transformada de Fourier, distribuições periódicas e temperadas, espaços de Besov e Besov-Morrey, além de outros.

1.1 Funções periódicas e distribuições periódicas

Nesta seção abordaremos brevemente o conceito de transformada de Fourier em distribuições periódicas. A seção está baseada em [23].

Dado $\varepsilon > 0$, definimos o conjunto $\mathbb{T}_\varepsilon$ por

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} := \{[x] : x \in \mathbb{R}\},$$

onde cada classe de equivalência $[x]$ é definida por $[x] := \{y \in \mathbb{R} : x = y \, mod \, \varepsilon\}$. Dizemos que f é uma função definida em $\mathbb{T}_\varepsilon$, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e

$$f(s + \varepsilon) = f(s), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

As funções definidas em $\mathbb{T}_\varepsilon$ são chamadas de funções periódicas de período ε.

Definição 1.1. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o espaço $L^p(\mathbb{T}_\varepsilon)$ é definido por

$$L^p(\mathbb{T}_\varepsilon) = \left\{ f : \mathbb{T}_\varepsilon \to \mathbb{C} : \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_\varepsilon)} < \infty \right\},$$

onde $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}_\varepsilon)} = \left(\int_{\mathbb{T}_\varepsilon} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\varepsilon |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Observação 1.2. Note que para $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ vale

$$L^\infty(\mathbb{T}_\varepsilon) \subset L^p(\mathbb{T}_\varepsilon) \subset L^q(\mathbb{T}_\varepsilon) \subset L^1(\mathbb{T}_\varepsilon).$$

A seguir temos a definição de transformada e série de Fourier em $L^1(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

Definição 1.3. Seja f uma função definida em $\mathbb{T}_\varepsilon$ tal que $f \in L^1(\mathbb{T}_\varepsilon)$. A transformada de Fourier de f é a sequência complexa $\mathcal{F}f = \widehat{f} = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(s) e^{-2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}} \, ds.$$

O número $\widehat{f}(k)$ é chamado de o k-ésimo coeficiente de Fourier de f e a série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}}$$

é a série de Fourier de f em $s \in \mathbb{T}_\varepsilon$.

Denotaremos por $C^n(\mathbb{T}_\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, a coleção de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n e periódicas de período ε. No caso $n = 0$, denotaremos simplesmente por $C(\mathbb{T}_\varepsilon)$. Usaremos também a notação $\mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$ para representar o conjunto de todas as funções definidas em $\mathbb{T}_\varepsilon$ e que são infinitamente diferenciáveis.

Relembraremos a seguir algumas propriedades e resultados envolvendo os coeficientes de Fourier.

Proposição 1.4. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{T}_\varepsilon)$. Então, para todo $k, m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $j \in \mathbb{N}$, temos que*

1. $\widehat{f+g}(k) = \widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)$;
2. $\widehat{\lambda f}(k) = \lambda \widehat{f}(k)$;
3. $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$;
4. $\left(e^{2\pi i \frac{m(\cdot)}{\varepsilon}} f\right)^\wedge (k) = \widehat{f}(k-m)$;
5. $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$, *onde* $(f * g)(x) := \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^\varepsilon f(x-y)g(y)\,dy$;
6. $\widehat{f^{(j)}}(k) = \left(\dfrac{2\pi i k}{\varepsilon}\right)^j \widehat{f}(k)$, *sempre que* $f \in C^j(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

Proposição 1.5. *(Teorema da transformada inversa de Fourier) Suponha que $L^1(\mathbb{T}_\varepsilon)$ e que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$, então*

$$f(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}}, \text{ em quase todo ponto.}$$

Proposição 1.6. *Os seguintes resultados são válidos para $f, g \in L^2(\mathbb{T}_\varepsilon)$:*

1. *(Identidade de Plancherel)*

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}_\varepsilon)} = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2;$$

2. *(Relação de Parseval)*

$$\int_{\mathbb{T}_\varepsilon} f(s)\overline{g(s)}\,ds = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)};$$

3. *Para todo $m \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\widehat{fg}(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{g}(m-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m-k)\widehat{g}(k).$$

A seguir, vamos relembrar uma caracterização do espaço $\mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$ em termos da transformada de Fourier. Para tal fim, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.7. O espaço das sequências de decrescimento rápido, denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{Z})$, é o conjunto de todas as sequências $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^j \, |\alpha_j| < \infty, \; \forall \, j \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.8. *A transformada de Fourier* $\hat{}: \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon) \to \mathscr{S}(\mathbb{Z})$ *é um isomorfismo e um homeomorfismo, isto é, é linear, bijetiva, contínua e com inversa contínua.*

A seguir, vamos dar a definição formal de uma distribuição periódica.

Definição 1.9. Uma distribuição ε-periódica é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon) \to \mathbb{C}$ tal que existe uma sequência $(\Psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$ tal que

$$T(f) = \langle T, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_0^\varepsilon \Psi_k(s) f(s)\, ds, \text{ para todo } f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon).$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ o espaço das distribuições ε-periódicas.

Proposição 1.10. *Seja* $f \in C(\mathbb{T}_\varepsilon)$. *Então a fórmula*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_0^\varepsilon f(s)\varphi(s)\, ds, \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon),$$

define uma distribuição ε*-periódica* T_f. *A função* $f \in C(\mathbb{T}_\varepsilon) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ *é linear, injetora e contínua no sentido que se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}_\varepsilon)$ *converge uniformemente para* f *então* $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \to \langle T_f, \varphi\rangle$*, para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

Vários conceitos e propriedades podem ser estendidos para $\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ usando dualidade. Então, para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ temos as seguintes definições:

1. **Derivada**: Dado $j \in \mathbb{N}$, definimos a distribuição periódica $f^{(j)}$ por

$$\langle f^{(j)}, \varphi\rangle = (-1)^j \langle f, \varphi^{(j)}\rangle, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon).$$

2. **Produto**: Seja $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$, definimos a distribuição temperada ψf por

$$\langle \psi f, \varphi\rangle = \langle f, \psi\varphi\rangle, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon).$$

3. **Convolução tipo 1**: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$, a convolução de f e φ é a função

$$(f * \varphi)(s) = \frac{1}{\varepsilon} \langle f, \sigma_s \widetilde{\varphi}\rangle, \; \forall s \in \mathbb{R},$$

onde $\sigma_s\varphi(x) = \varphi(x+s)$ e $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Além disso, $f * \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

4. **Convolução tipo 2**: Seja $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$, definimos a distribuição temperada $f * g$ por
$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{g} * \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon).$$

5. **Transformada de Fourier**: A transformada de Fourier em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ é a função $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida por
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\varepsilon} \langle f, e^{-2\pi i \frac{k(\cdot)}{\varepsilon}} \rangle, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Na proposição abaixo, reunimos algumas propriedades de distribuições em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

Proposição 1.11. *Seja $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$ e $k \in \mathbb{Z}$, então*

1. *(Relação de Parseval)*
$$\langle f, \varphi \rangle = \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \widehat{\varphi}(-k);$$
2. $\widehat{f * \varphi}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(k)$ *e* $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$;
3. $\widehat{f^{(j)}}(k) = \left(\dfrac{2\pi i k}{\varepsilon} \right)^j \widehat{f}(k)$;
4. $\widehat{f\varphi}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \widehat{\varphi}(k - m)$.

Para finalizar a parte de distribuições periódicas, vamos caracterizar $\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ em termos da transformada de Fourier. Para isto, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 1.12. Uma sequência complexa $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é dita de crescimento lento se existe uma constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$|\alpha_k| \leqslant C|k|^m, \ \forall k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$
O conjunto de todas as sequências será denotado por $\mathscr{S}'(\mathbb{Z})$.

Observação 1.13. $\mathscr{S}'(\mathbb{Z})$ é o dual topológico de $\mathscr{S}(\mathbb{Z})$.

Proposição 1.14. *Seja $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z})$. Então existe uma única $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ tal que $\widehat{f} = \alpha$. Reciprocamente, se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon)$ então $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z})$. Em outras palavras,*
$$(\mathcal{D}'(\mathbb{T}_\varepsilon))^\wedge = \mathscr{S}(\mathbb{Z}).$$

1.2 Espaço de Schwartz e distribuições temperadas

Nesta seção, vamos definir a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^N$, onde $N \in \mathbb{N}$, e introduziremos o espaço de Schwartz e o espaço das distribuições temperadas. A seção está baseada em [19].

Vamos começar definindo a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.15. Para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx.$$

Note que a função $\widehat{f}$ é bem definida para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$. Na sequência apresentaremos algumas propriedades envolvendo a transformada de Fourier, tais propriedades podem ser encontradas em [17].

Proposição 1.16. *Para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, temos que*

1. $\left(e^{2\pi i \eta \cdot (\cdot)} f\right)^\wedge (\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta)$ *e* $(\sigma_y f)^\wedge (\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot y} \widehat{f}(\xi)$*, onde* $\sigma_y f(x) = f(x+y)$*;*
2. $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\,\widehat{g}$*;*
3. *Se* $x^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leqslant k$*, então* $\widehat{f} \in C^k$ *e* $\partial^\alpha \widehat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge$*;*
4. *Se* $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ *para* $|\alpha| \leqslant k$ *e* $\partial^\alpha f \in C_0$ *para* $|\alpha| \leqslant k-1$*, então* $(\partial^\alpha f)^\wedge (\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$*;*
5. $\displaystyle\int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}$*.*

A seguir, vamos relembrar a definição de transformada de Fourier inversa.

Definição 1.17. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, definimos a transformada de Fourier inversa de f, denotada por $f^\vee$ ou $\mathcal{F}^{-1}(f)$, como a função em $\mathbb{R}^N$ dada por

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x).$$

O resultado a seguir justifica o por quê da função $f^\vee$ ser chamada de transformada de Fourier inversa.

Proposição 1.18. *(Teorema da transformada inversa de Fourier) Se $f \in L^1$ e $\widehat{f} \in L^1$, então f é igual q.t.p a uma função contínua f_0 e*

$$(\widehat{f})^\vee = (f^\vee)^\wedge = f_0.$$

Na sequência vamos definir os espaços de Schwartz e veremos como a transformada de Fourier se comporta nesse espaço.

Definição 1.19. O espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^N$ é o espaço de funções

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N \right\},$$

onde α, β são multi-índices e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right|.$$

Definição 1.20. Sejam $f_k, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ para $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência f_k converge para f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se para todo multi-índice α e β temos que

$$\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)(x) \right| \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

O próximo resultado é um resumo de algumas propriedades de $\mathcal{S}$ envolvendo espaços de Lebesgue, convolução e transformada de Fourier.

Proposição 1.21.

1. *Se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in \mathcal{S}$;*
2. *Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ temos a inclusão contínua $\mathcal{S} \subset L^p$;*
3. *$\wedge$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

Agora, vamos relembrar a definição de distribuição temperada e mencionar algumas de suas propriedades. O espaço dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares e contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, é chamado de espaço das distribuições temperadas e é denotada por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. A noção de convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é dada via a topologia do espaço dual, isto é,

$$f_k \to f \text{ em } \mathcal{S}' \Leftrightarrow f_k, f \in \mathcal{S}' \quad \text{e} \quad \langle f_k, \phi \rangle \to \langle f, \phi \rangle, \, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

onde $\langle f, \phi \rangle$ denota a ação da distribuição temperada f em $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Vários conceitos e propriedades podem ser estendidos para $\mathcal{S}'$ usando dualidade. Então, para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ temos as seguintes definições:

1. **Derivada**: Dado um multi-índice α, definimos a distribuição temperada $\partial^\alpha f$ por

$$\langle \partial^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \phi \rangle, \, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

2. **Multiplicação por funções de crescimento lento**: Seja ψ uma função de crescimento lento, definimos a distribuição temperada ψf por

$$\langle \psi f, \phi \rangle = \langle f, \psi \phi \rangle, \, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

3. **Convolução**: Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, definimos a distribuição temperada $f * \psi$ por
$$\langle f * \psi, \phi \rangle = \langle f, \phi * \tilde{\psi} \rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$
onde $\tilde{\psi}(x) := \psi(-x)$.

4. **Transformada de Fourier**: A transformada de Fourier (resp. transformada de Fourier inversa) em $\mathcal{S}'$ é definida por
$$\langle \widehat{f}, \phi \rangle = \langle f, \widehat{\phi} \rangle \quad (\text{resp. } \langle \check{f}, \phi \rangle = \langle f, \check{\phi} \rangle),\ \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Veremos que muitas das propriedades da transformada de Fourier que são satisfeitas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, também são cumpridas no contexto das distribuições temperadas.

Proposição 1.22. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, então*

1. $(f + g)^\wedge = \widehat{f} + \widehat{g}$;
2. $(\gamma f)^\wedge = \gamma \widehat{f}$;
3. $\left(e^{2\pi i \eta \cdot (\cdot)} f\right)^\wedge (\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta)$ *e* $(\sigma_y f)^\wedge (\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot y} \widehat{f}(\xi)$, *onde* $\sigma_y f(x) = f(x + y)$;
4. $\partial^\alpha \widehat{f} = (-2\pi i x)^\alpha f$ *e* $(\partial^\alpha f)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}$;
5. *Se* $f_j \to f$ *em* $\mathcal{S}'$, *então* $\widehat{f_j} \to \widehat{f}$ *em* $\mathcal{S}'$;
6. $(\phi * f)^\wedge = \widehat{\phi}\widehat{f}$ *e* $\widehat{\phi f} = \widehat{\phi} * \widehat{f}$.

A seguir vamos discutir sobre as distribuições temperadas módulo polinômios. Para isso, primeiro considere $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os polinômios de N variáveis com coeficientes complexos, isto é, $\mathcal{P}$ é composto por elementos da forma
$$\sum_{|\beta| \leqslant m} C_\beta x^\beta = \sum_{\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta_1 + \ldots + \beta_N \leqslant m} C_{(\beta_1, \ldots, \beta_N)} x_1^{\beta_1} \cdots x_N^{\beta_N},$$
onde $C_\beta \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Sejam $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, definimos a relação de equivalência $f \sim g$ se, e somente se, $f - g \in \mathcal{P}$ e assim o conjunto $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}$ (ou simplesmente $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$) é formado por todas as classes de equivalência geradas a partir da relação de equivalência $\sim$. O conjunto $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ é chamado o espaço de distribuições temperadas módulo polinômios. Então, dois elementos f e g pertencendo a mesma classe serão indentificados, isto é, $f = g$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}$. Além disso, vale que
$$f = g \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P} \Leftrightarrow \langle \widehat{f}, \phi \rangle = \langle \widehat{g}, \phi \rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ com } \operatorname{supp} \phi \subset \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

O próximo resultado fornece uma caracterização para as distribuições temperadas módulo polinômios.

Proposição 1.23. *Seja $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço de todas as funções Schwartz ϕ tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} x^\gamma \phi(x)\, dx = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathbb{N}^N$. Então, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^N)$ é subespaço de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ com a mesma topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\left(\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^N)\right)' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}.$$

Observação 1.24. Como consequência da proposição anterior, temos que $f_j \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}$ se, e somente se, $f_j, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}$ e $\langle f_j, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$, para todo $\phi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^N)$.

1.2.1 Distribuições temperadas em variáveis não-periódica e periódica

A seguir, vamos definir o conceito de transformada de Fourier para funções definidas em $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon$.

Definição 1.25. Seja $v \in L^1(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$. A transformada de Fourier em $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}$ é definida por

$$\widehat{v}(\xi, k) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x, s) e^{-2\pi i\left[\xi\cdot x + \frac{ks}{\varepsilon}\right]}\, ds\, dx. \tag{1.1}$$

Podemos estender o conceito de espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon$, isto é,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N \right\},$$

onde α, β são multi-índices e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{(x,s)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon} \left|(x,s)^\alpha \partial^\beta f(x,s)\right|.$$

Note que $\mathcal{S}(\mathbb{T}_\varepsilon) = \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$, pois $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é uma classe intermediária entre todas as funções suaves e as funções suaves de suporte compacto. Mas em $\mathbb{T}_\varepsilon$, as funções sempre tem suporte compacto.

Em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ temos as seguintes definições:

Definição 1.26. Para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, temos

1. (Convolução)

$$(f * g)(x, s) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x-y, s-r) g(y, r) dr\, dy,\ \forall\, (x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon.$$

2. (Transformada de Fourier)

$$\widehat{f}(\xi, k) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x, s) e^{-2\pi i\left[\xi\cdot x + \frac{ks}{\varepsilon}\right]} ds\, dx,\ \forall\, (\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}.$$

De modo análogo a seção 1.3, definimos $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ como sendo o espaço dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ e definimos de modo similar os conceitos de derivada, multiplicação, convolução e transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ como definido em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, temos as seguintes propriedades em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$:

Proposição 1.27. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ e $k \in \mathbb{Z}$, então*

1. $\widehat{f * \varphi}(\xi, k) = \widehat{f}(\xi, k)\widehat{\varphi}(\xi, k)$;
2. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi, k) = (2\pi i(\xi, k))^\alpha \dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha_N}} \widehat{f}(\xi, k)$, *onde* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$;
3. $\widehat{f\varphi}(\xi, k) = \displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \widehat{f}(\eta, m)\widehat{\varphi}(\xi - \eta, k - m)\, d\eta$.

1.2.2 Kernel de Schwartz

Nessa seção vamos enunciar o teorema do Kernel de Schwartz. Antes de enunciar tal resultado vamos definir o conceito de produto tensorial. O conteúdo desta seção pode ser encontrado em [21].

Definição 1.28. Se Ω_j é um aberto em $\mathbb{R}^{N_j}$, $j = 1, 2$ e $\varphi_j \in C(\Omega_j)$, então a função $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ em $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_1 + N_2}$ definida por

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x_1, x_2) := \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2),\ x_j \in \Omega_j$$

é chamada de produto direto (ou tensorial) de φ_1 e φ_2.

Proposição 1.29. *Sejam Ω_1 e Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^{N_1}$ e $\mathbb{R}^{N_2}$, respectivamente. Toda distribuição $k \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ define um operador $K : \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ linear e contínuo tal que*

$$\langle k, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle K\varphi_2, \varphi_1 \rangle,\ \textit{para todo } \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1) \textit{ e } \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2). \tag{1.2}$$

Reciprocamente, para cada operador linear e contínuo K existe uma única distribuição $k \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que (1.2) é válida. A distribuição k é chamada o kernel do operador K.

Observação 1.30. O teorema permanece válido se $\mathcal{D}$ é substituído por $\mathcal{S}$ e se $\Omega_1 = \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 = \mathbb{R}^{N_2}$ (veja [38]).

1.3 Lemas técnicos

Nesta seção, abordaremos alguns lemas técnicos que serão usados na demonstração dos resultados centrais deste trabalho. A seguir, apresentaremos um resultado sobre convolução de funções homogêneas, a prova deste resultado pode ser encontrada em [33].

Lema 1.31. *Sejam $0 < \alpha, \beta < N$ tais que $0 < \alpha + \beta < N$. Então,*

$$\left(\frac{1}{|x|^{N-\alpha}} * \frac{1}{|x|^{N-\beta}}\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \frac{1}{|y-x|^{N-\beta}}\, dx = C(\alpha,\beta)\frac{1}{|y|^{N-(\alpha+\beta)}}, \tag{1.3}$$

onde

$$C(\alpha,\beta) = \frac{c_\alpha c_\beta c_{N-\alpha-\beta}}{c_{\alpha+\beta} c_{N-\alpha} c_{N-\beta}} \quad e \quad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Lema 1.32. *Para $k \in \mathbb{Z}$, $0 < b, c < 1$ e $1 < b + c < 2$, temos que*

$$\left(\frac{1}{|m|^b} * \frac{1}{|m|^c}\right)(k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \leqslant \max\{3^b, 3^c\}\, C(1-b, 1-c)\frac{1}{|k|^{b+c-1}}, \tag{1.4}$$

onde a constante $C(\cdot,\cdot)$ está definida no Lema 1.31.

Demonstração. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^+\setminus\{k\}} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^-} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\ &=: S_1 + S_2.\end{aligned}$$

Note que para $m > k$ a sequência $\left(\frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ é descrescente, então pelo Teste da Integral, podemos estimar S_1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \int_{k+1}^{\infty} \frac{1}{|k-x|^b}\frac{1}{|x|^c}\, dx \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \left(\frac{1}{|x|^b} * \frac{1}{|x|^c}\right)(k) \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + C(1-b,1-c)\frac{1}{|k|^{b+c-1}}, \text{ pela desigualdade (1.3).} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} &= \frac{1}{|k-1|^b} + \frac{1}{|k-2|^b}\frac{1}{2^c} + \ldots + \frac{1}{\left|k - \lceil\frac{k-1}{2}\rceil\right|^b}\frac{1}{\left|\lceil\frac{k-1}{2}\rceil\right|^c} \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{2^b}\frac{1}{|k-2|^c} + \frac{1}{|k-1|^c}, \end{aligned}$$

onde $\lceil y\rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant y\}$.

Seja $C_l := \sup\limits_{k\geqslant 2l} \dfrac{k+l}{k-l}$, onde $l > 1$. Note que a função $f(k) = \dfrac{k+l}{k-l}$ é decrescente, pois $f'(k) = \dfrac{-2l}{(k-l)^2} < 0$. Assim, concluímos que $C_l = \dfrac{2l+l}{2l-l} = 3$ e consequentemente vale a desigualdade

$$\frac{1}{|k-l|} \leqslant 3\frac{1}{|k+l|}, \text{ para todo } k \geqslant 2l.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} &\leqslant 3^b\left(\frac{1}{|k+1|^b}+\frac{1}{|k+2|^b}\frac{1}{2^c}+\ldots+\frac{1}{\left|k+\lceil\frac{k-1}{2}\rceil\right|^b}\frac{1}{\left|\lceil\frac{k-1}{2}\rceil\right|^c}\right)\\
&\quad +3^c\left(+\ldots+\frac{1}{2^b}\frac{1}{|k+2|^c}+\frac{1}{|k+1|^c}\right)\\
&\leqslant 3^b\sum_{m=1}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil}\frac{1}{|k+m|^b}\frac{1}{|m|^c}+3^c\sum_{m=1}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil}\frac{1}{|k+m|^c}\frac{1}{|m|^b}\\
&\leqslant 3^b\sum_{m\in\mathbb{Z}^+}\frac{1}{|k+m|^b}\frac{1}{|m|^c}+3^c\sum_{m\in\mathbb{Z}^+}\frac{1}{|k+m|^c}\frac{1}{|m|^b}.
\end{aligned}$$

Como $\left(\frac{1}{|k+m|^b}\frac{1}{|m|^c}\right)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ e $\left(\frac{1}{|k+m|^c}\frac{1}{|m|^b}\right)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ são sequências decrescentes segue novamente pelo Teste da Integral e pelo Lema 1.31 que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} &\leqslant 3^b\int_1^\infty\frac{1}{|k+x|^b}\frac{1}{|x|^c}\,dx+3^c\int_1^\infty\frac{1}{|k+x|^c}\frac{1}{|x|^b}\,dx\\
&\leqslant \max\{3^b,3^c\}\left(\frac{1}{|x|^b}*\frac{1}{|x|^c}\right)(-k)\\
&\leqslant \max\{3^b,3^c\}\,C(1-b,1-c)\,\frac{1}{|k|^{b+c-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S_1\leqslant\max\{3^b,3^c\}\,C(1-b,1-c)\,\frac{1}{|k|^{b+c-1}}. \tag{1.5}$$

Agora, para estimar S_2 basta observar que

$$\left(\frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c}\right)_{m\in\mathbb{Z}^-}=\left\{\frac{1}{|k+m|^b}\frac{1}{|m|^c}\right\}_{m\in\mathbb{Z}^+},$$

a qual é uma sequência decrescente como já observamos acima. Então,

$$S_2\leqslant C(1-b,1-c)\,\frac{1}{|k|^{b+c-1}}. \tag{1.6}$$

Pelas estimativas (1.5) e (1.6) resulta que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c}\leqslant\max\{3^b,3^c\}\,C(1-b,1-c)\,\frac{1}{|k|^{b+c-1}},\ \text{para } k\in\mathbb{Z}^+. \tag{1.7}$$

Finalmente, para o caso $k \in \mathbb{Z}^-$, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^-\setminus\{k\}} \frac{1}{|k-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{|-k_1-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^-\setminus\{-k_1\}} \frac{1}{|-k_1-m|^b}\frac{1}{|m|^c}, \\
&\quad \text{(onde } k=-k_1) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k_1+m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^-\setminus\{-k_1\}} \frac{1}{|k_1+m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^-} \frac{1}{|k_1-m|^b}\frac{1}{|m|^c} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^+\setminus\{k_1\}} \frac{1}{|k_1-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k_1\}} \frac{1}{|k_1-m|^b}\frac{1}{|m|^c} \\
&\leqslant \max\{3^b,3^c\}\, C(1-b,1-c)\, \frac{1}{|k_1|^{b+c-1}} \quad \text{(usando a desigualdade (1.7))} \\
&= \max\{3^b,3^c\}\, C(1-b,1-c)\, \frac{1}{|k|^{b+c-1}},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

1.4 Espaços de Morrey e Besov-Morrey

Nesta seção trataremos dos espaços de Morrey e Besov-Morrey. Para mais detalhes sobre esses espaços, veja [24, 29, 35].

Definição 1.33. Para $1 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$, o espaço de Morrey $\mathcal{M}^p_{p_1} = \mathcal{M}^p_{p_1}(\mathbb{R}^N)$ é definido como o conjunto de todas as funções mensuráveis u tais que

$$\|u\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N}\sup_{R>0} R^{\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}}\|u\|_{L^{p_1}(D(x_0,R))} < \infty, \tag{1.8}$$

onde $D(x_0,R)$ denota a bola fechada em $\mathbb{R}^N$ com centro x_0 e raio R.

Observação 1.34.

1. O espaço $\mathcal{M}^p_{p_1}$ equipado com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}$ é um espaço de Banach.
2. No caso $p_1 = 1$, $\mathcal{M}^p_1$ é um espaço de medidas de Radon com sinal e $\|u\|_{L^1(D(x_0,R))}$ significa a variação total da medida u na bola $D(x_0,R)$.
3. Para $1 < p < \infty$ temos que $\mathcal{M}^p_p = L^p$ e $\mathcal{M}^1_1 = \mathcal{M}$ onde $\mathcal{M}$ representa o espaço de medidas de Radon com variação total finita.
4. No caso $p = p_1 = \infty$, consideramos $\mathcal{M}^\infty_\infty = L^\infty$.

A seguir veremos a relação entre os espaços de Morrey e os espaços L^p-fraco.

Proposição 1.35. [29] *Para todo p e p_1 tal que $1 \leqslant p_1 < p < \infty$, o espaço $L^{p,\infty}$ está contido em $\mathcal{M}^p_{p_1}$.*

Agora, veremos a desigualdade de Hölder e estimativas do semigrupo do calor nos espaços de Morrey.

Lema 1.36. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $1 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $1 \leqslant r_1 \leqslant r \leqslant \infty$. Se $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ e $\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q_1}$, então*

$$\|fg\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \leqslant \|f\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \|g\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}, \tag{1.9}$$

para todo $f \in \mathcal{M}^p_{p_1}$ e $g \in \mathcal{M}^q_{q_1}$.

Denotaremos por $\{e^{t\Delta}\}_{t \geqslant 0}$ o semigrupo do calor, isto é,

$$\left(e^{t\Delta} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} U(x-y,t) f(y)\, dy,$$

com $U(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$. Temos as seguintes estimativas em espaços de Morrey.

Lema 1.37. *[24] Seja $1 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant q_1 \leqslant q < \infty$. Se $p \geqslant q$ e $\dfrac{p}{p_1} \geqslant \dfrac{q}{q_1}$, então existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \leqslant C\, t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} \|f\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}, \tag{1.10}$$

$$\|\partial_x e^{t\Delta} f\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \leqslant C\, t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}. \tag{1.11}$$

Além disso, para $1 \leqslant q_1 \leqslant q < \infty$, vale que

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leqslant C\, t^{-\frac{N}{2q}} \|f\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}, \tag{1.12}$$

$$\|\partial_x e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leqslant C\, t^{-\frac{N}{2q} - \frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}, \tag{1.13}$$

onde $C > 0$ é uma constante universal.

Para definir os espaços de Besov-Morrey é necessário a definição de uma função auxiliar, como é feito a seguir.

Seja $\chi(z)$ uma função suave em $[0,\infty)$ tal que

$$0 \leqslant \chi(z) \leqslant 1, \quad \chi(z) \equiv 1 \text{ para } z \leqslant \frac{3}{2} \text{ e supp } \chi \subset \left[0, \frac{5}{3}\right).$$

Considere a sequência de funções $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ definidas por

$$\varphi_j(\xi) = \chi(2^{-j}|\xi|) - \chi(2^{1-j}|\xi|).$$

Segue que $\varphi_j(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e temos a decomposição diádica

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall\, \xi \neq 0.$$

Com essa construção, podemos definir os espaços de Besov-Morrey.

Definição 1.38. Sejam $1 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Besov-Morrey homogêneo $\mathcal{N}^s_{p,p_1,r} = \mathcal{N}^s_{p,p_1,r}(\mathbb{R}^N)$ é o conjunto de toda $u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ tal que $\varphi_j^\vee * u \in \mathcal{M}^p_{p_1}$ para todo j e

$$\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj} \|\varphi_j^\vee * u\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, & \text{para } 1 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant r < \infty,\ s \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj} \|\varphi_j^\vee * u\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \right) < \infty, & \text{para } 1 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant \infty,\ r = \infty,\ s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.14}$$

onde $\mathcal{P}$ denota o conjunto de polinômios com N variáveis.

Observe que $\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}} = 0$ se, e somente se, $\varphi_j^\vee * u = (\varphi_j\, \widehat{u})^\vee = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Então, segue que $\varphi_j(\xi)\, \widehat{u}(\xi) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$; isso implica que supp $\widehat{u} = \{0\}$ e portanto $u \in \mathcal{P}$ (ou, equivalentemente, $u \equiv 0$ em $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$). E como as outras propriedades que definem uma norma são verificadas para $\|\cdot\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}}$, temos que $(\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}})$ é um espaço normado. Além disso, $\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}$ é completo e portanto é Banach.

Observação 1.39. Para $p = p_1$ o espaço de Besov-Morrey $\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}$ coincide com o espaço de Besov homogêneo $\dot{B}^s_{p,r}$, isto é,

$$\mathcal{N}^s_{p,p,r} = \dot{B}^s_{p,r}.$$

A seguir iremos enunciar algumas propriedades dos espaços de Besov-Morrey.

Proposição 1.40. *[29, 35] Sejam $1 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então,*

1. *Se $1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant r \leqslant \bar{r} \leqslant \infty$, temos que*

$$\mathcal{N}^s_{p,p_1,r} \hookrightarrow \mathcal{N}^s_{p,p_2,\bar{r}};$$

2. $\mathcal{N}^s_{p,p_1,r} \hookrightarrow \dot{B}^{s-N/p}_{\infty,r}$;
3. $\mathcal{N}^{N/p}_{p,p_1,1} \hookrightarrow L^\infty$;
4. $\mathcal{N}^s_{p,p_1,r} \hookrightarrow \mathcal{N}^{s-\frac{N(1-\theta)}{p}}_{\frac{p}{\theta},\frac{p_1}{\theta},r}$, $\forall\, \theta \in (0,1)$;
5. *Seja $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, para todo $\lambda > 0$, então*

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}} \cong \lambda^{s-N/p} \|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,r}},$$

onde $a \cong b$ significa que existem contantes C_1 e C_2 positivas tais que $C_1 a \leqslant b \leqslant C_2 a$.

Uma propriedade muito útil dos espaços de Besov-Morrey é a equivalência de normas com respeito ao semigrupo do calor como veremos na sequência.

Proposição 1.41. *[35] Sejam $1 \leqslant p_1 \leqslant p < \infty$ e $s < 0$, então*

$$\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,p_1,\infty}} \cong \sup_{t>0} t^{-\frac{s}{2}} \|e^{t\Delta} u\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}. \tag{1.15}$$

1.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos relembrar os espaços de Sobolev e ver um resultado importante de regularidade. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [1].

Definição 1.42. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}$ como o espaço de todas as funções $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $\partial^\alpha h \in L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, onde $\partial^\alpha h$ denota a derivada de h no sentido de distribuições.

O espaço $W^{m,p}$ é munido com a norma

$$\begin{aligned} \|h\|_{m,p} &:= \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leqslant p < \infty; \\ \|h\|_{m,\infty} &:= \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Além disso, $(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach para $p \in [1, \infty]$.

O resultado a seguir mostra que se o índice de regularidade m for suficientemente grande, então funções em espaços de Sobolev, e algumas de suas derivadas, são funções contínuas e limitadas. Tal resultado faz parte de um conjunto de imersões conhecidas como imersões de Sobolev. Para mais detalhes veja [1].

Proposição 1.43. *Sejam $j \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ inteiros e $p \in [1, \infty)$. Se $mp > N$ ou $m = N$ e $p = 1$, então temos a seguinte imersão contínua*

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^j_B,$$

onde C^j_B denota o espaço das funções $f \in C^j(\mathbb{R}^N)$ tais que $\partial^\alpha f$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$.

Observação 1.44. O resultado anterior permanece válido quando $\mathbb{R}^N$ é substituído pelo domínio $\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, desde que este satisfaz a propriedade do cone (veja [1]).

2 Sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^N$

Como já foi antecipado na introdução, o objeto deste capítulo é o estudo do sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes. Mostraremos a boa-colocação global do sistema para dados iniciais pequenos nos espaços de Besov-Morrey, reveja a seção 1.4 no qual definimos tais espaços.

2.1 Resultados

Nessa seção vamos apresentar os espaços que utilizaremos para trabalhar com as equações em questão e enunciaremos os resultados obtidos. Antes disso, vamos relembrar as equações que modelam o sistema de Keller-Segel acoplado com as equações de Navier-Stokes em dimensão N. Como apresentado em (1), o sistema consiste das seguintes equações:

$$\begin{cases} \partial_t n + u \cdot \nabla n = \Delta n - \nabla \cdot (n \nabla c) - \nabla \cdot (n \nabla v) & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \partial_t c + u \cdot \nabla c = \Delta c - nc & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \partial_t v + u \cdot \nabla v = \Delta v - \gamma v + n & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \Delta u - \nabla \pi - nf & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ n(x,0) = n_0(x), \;\; c(x,0) = c_0(x), \;\; v(x,0) = v_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $N \geqslant 2$ e $\gamma \geqslant 0$.

Para determinar o espaço adequado para tais equações, faremos uma análise de escala para encontrar os índices adequados dos espaços de Besov-Morrey. Sendo assim, primeiramente note que para $\gamma \neq 0$, o sistema (2.1) não tem relação de escala. No entanto, podemos considerar para (2.1) a escala do caso $\gamma = 0$. Assuma temporariamente que $\gamma = 0$ e que a força f é uma distribuição homogênea de grau -1, isto é,

$$f(x) = \lambda f(\lambda x), \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Assim, se (n, c, v, u, π) é uma solução clássica de (2.1), então $(n_\lambda, c_\lambda, v_\lambda, u_\lambda, \pi_\lambda)$ também é solução de (2.1), onde

$$\begin{aligned} n_\lambda(x,t) &:= \lambda^2\, n(\lambda x, \lambda^2 t), \\ c_\lambda(x,t) &:= c(\lambda x, \lambda^2 t), \\ v_\lambda(x,t) &:= v(\lambda x, \lambda^2 t), \\ u_\lambda(x,t) &:= \lambda\, u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ \pi_\lambda(x,t) &:= \lambda^2\, \pi(\lambda x, \lambda^2 t). \end{aligned}$$

Ou seja, o sistema (2.1) tem a seguinte relação de escala:

$$(n, c, v, u) \to (\lambda^2\, n(\lambda x, \lambda^2 t), c(\lambda x, \lambda^2 t), v(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda\, u(\lambda x, \lambda^2 t)). \tag{2.2}$$

Em particular, tomando $t = 0$ em (2.2) temos a seguinte relação de escala para os dados inicais

$$(n_0, c_0, v_0, u_0) \to (\lambda^2\, n_0(\lambda x), c_0(\lambda x), v_0(\lambda x), \lambda\, u_0(\lambda x)). \tag{2.3}$$

Soluções invariantes por (2.2) são chamadas de soluções autossimilares. Então, para (n, c, v, u, π) ser uma solução autossimilar é necessário que os dados iniciais n_0, c_0, v_0, u_0 e a força f sejam funções homogêneas de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1, respectivamente. Motivados pela análise de escala feita acima e pelo *scaling* dos espaços de Besov-Morrey (veja Proposição 1.40, pág. 30), consideraremos a seguinte classe crítica de dados iniciais (i.e., invariante pela relação de escala (2.3))

$$\begin{aligned} & n_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{q}-2}_{q,q_1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad c_0 \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ com } \nabla c_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right), \\ & v_0 \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ com } \nabla v_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ e } u_0 \in \mathcal{N}^{\frac{N}{p}-1}_{p,p_1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ com } \nabla\cdot u_0 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

com $\nabla\cdot u_0 = 0$ e a força $f \in \mathcal{M}^N_{N_1}\left(\mathbb{R}^N\right)$, onde os expoentes p, p_1, q, q_1, r, r_1 e N_1 satisfazem as condições enunciadas na seguinte suposição:

Suposição 2.1. *Assuma que $N \geqslant 2$ e $\gamma \geqslant 0$. Para $N \geqslant 3$, suponha que os expoentes p, q e r satisfaçam ou (i) ou (ii) ou (iii) em que*

$$\begin{array}{llll} (i) & \frac{N}{2} < q < N, & N < p < \frac{Nq}{N-q}, & N < r < \frac{Nq}{N-q}; \\ (ii) & q = N, & N < p < \infty, & N < r < \infty; \\ (iii) & N < q < 2N, & N < p < \frac{Nq}{q-N}, & q \leqslant r < \frac{Nq}{q-N}. \end{array}$$

No caso $N = 2$ assumimos que p, q e r satisfaçam a condição (iii) acima. Além disso, *suponha também que* p_1, q_1, r_1 *e* N_1 *satisfaçam as seguintes condições:*

$$(A) \quad 1 \leqslant p_1 \leqslant p, \qquad 1 \leqslant q_1 \leqslant q, \quad 1 \leqslant r_1 \leqslant r, \quad 1 \leqslant N_1 \leqslant N;$$

$$(B) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \leqslant 1, \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} \leqslant 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_1} \leqslant 1, \quad \frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1} \leqslant 1;$$

$$(C) \quad \frac{p}{p_1} \leqslant \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1};$$

$$(D) \quad p_1\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1}\right) \leqslant p\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q}\right).$$

Observação 2.2. É sempre possível encontrar índices p_1, q_1, r_1 e N_1 suficientemente próximos de p, q, r e N, respectivamente, satisfazendo (i), (ii) ou (iii) e de tal forma que (A), (B), (C) e (D) também ocorram. Em outras palavras, a Suposição 2.1 é um conjunto não-vazio.

Agora, seja $\mathcal{Z}$ um espaço de Banach continuamente incluído em $\mathcal{S}'$. Denotamos por $BC_w\left((0,\infty);\mathcal{Z}\right)$ a classe de funções limitadas de $(0,\infty)$ em $\mathcal{Z}$ que são fracamente contínuas no tempo no sentido de $\mathcal{S}'$. Assim, definimos os seguintes espaços funcionais

$$X_1 := \left\{n : t^{-\frac{N}{2q}+1}\, n \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^q_{q_1}\right)\right\}, \tag{2.5}$$

$$X_2 := \left\{c : c \in BC_w\left((0,\infty);L^\infty\right) \text{ com } t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\, \nabla c \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^r_{r_1}\right)\right\}, \tag{2.6}$$

$$X_3 := \left\{v : v(\cdot,t) \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ para } t \in (0,\infty) \text{ e } t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\, \nabla v \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^r_{r_1}\right)\right\}, \tag{2.7}$$

$$X_4 := \left\{u : t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}}\, u \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^p_{p_1}\right)\right\}, \tag{2.8}$$

que são espaços de Banach dotados das respectivas normas

$$\|n\|_{X_1} := \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2q}+1}\, \|n(t)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}},$$
$$\|c\|_{X_2} := \sup_{t>0} \|c(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\, \|\nabla c(t)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}},$$
$$\|v\|_{X_3} := \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\, \|\nabla v(t)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}},$$
$$\|u\|_{X_4} := \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}}\, \|u(t)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}.$$

Na sequência, apresentamos os espaços $\mathcal{X}$ e $\mathcal{I}$ definidos por

$$\mathcal{X} := \left\{(n,c,v,u) : n \in X_1,\ c \in X_2,\ v \in X_3,\ u \in X_4\right\} \tag{2.9}$$

com a norma

$$\|(n,c,v,u)\|_{\mathcal{X}} := \|n\|_{X_1} + \|c\|_{X_2} + \|v\|_{X_3} + \|u\|_{X_4},$$

e

$$\mathcal{I} := \{(n_0, c_0, v_0, u_0) : n_0,\ c_0, v_0 \text{ e } u_0 \text{ sob as condições (2.4)}\}$$

com a norma

$$\|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}} := \|n_0\|_{\mathcal{N}^{\frac{N}{q}-2}_{q,q_1,\infty}} + \|c_0\|_{L^\infty} + \|\nabla c_0\|_{\mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}} + \|\nabla v_0\|_{\mathcal{N}^{\frac{N}{r}-1}_{r,r_1,\infty}} + \|u_0\|_{\mathcal{N}^{\frac{N}{p}-1}_{p,p_1,\infty}}.$$

Note que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{I}$ são espaços de Banach equipados com as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, respectivamente.

Vamos denotar por $\mathbb{P} = I + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$ o projetor de Leray-Helmholtz, onde $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_N)$ é um vetor em que cada componente $\mathcal{R}_j$ representa a j-ésima transformada de Riesz. Aplicando $\mathbb{P}$ na quarta equação em (2.1) e usando o princípio de Duhamel, o sistema (2.1) pode ser formalmente convertido para a seguinte formulação integral:

$$\begin{cases} n(t) &= e^{t\Delta} n_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u \cdot \nabla n)(\tau)\, d\tau - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c + n\nabla v)(\tau)\, d\tau, \\ c(t) &= e^{t\Delta} c_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u \cdot \nabla c + nc)(\tau)\, d\tau, \\ v(t) &= e^{-\gamma t} e^{t\Delta} v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta}(u \cdot \nabla v - n)(\tau)\, d\tau, \\ u(t) &= e^{t\Delta} u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\, d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(nf)(\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{2.10}$$

Na sequência, uma 4-upla (n, c, v, u) satisfazendo (2.10) é chamada de *solução branda* de (2.1). A seguir, apresentamos nosso resultado principal para o sistema (2.1).

Teorema 2.3. *Sejam $N \geqslant 2$ e os índices p, p_1, q, q_1, r, r_1 e N_1 como na Suposição 2.1. Suponha que os dados iniciais $(n_0, c_0, v_0, u_0) \in \mathcal{I}$ e a força externa $f \in \mathcal{M}^N_{N_1}(\mathbb{R}^N)$. Então, existem constantes positivas ε, δ ($\delta = C\varepsilon$) e K_1 tais que o sistema (2.1) tem uma única solução branda global $(n, c, v, u) \in \mathcal{X}$ satisfazendo $\|(n, c, v, u)\|_{\mathcal{X}} \leqslant 2K_1\varepsilon$ e $\nabla \cdot u = 0$ para $t > 0$, quando $\|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}} \leqslant \delta$.*

Como o espaço $\mathcal{X}$ é crítico em relação a relação de escala do caso $\gamma = 0$, é possível obter soluções autossimilares assumindo a homogeneidade correta nos dados iniciais e na força.

Corolário 2.4. *(Soluções autossimilares) Sejam $N \geqslant 3$ e $\gamma = 0$. Assuma que (n_0, c_0, v_0, u_0) e f sejam como no Teorema 2.3. Suponha que as funções n_0, c_0, v_0, u_0 e f sejam homogêneas de grau $-2, 0, 0, -1$ e -1, respectivamente. Então, a solução (n, c, v, u) obtida no Teorema 2.3 é autossimilar, isto é, para todo $\lambda > 0$ temos que*

$$n(x,t) = \lambda^2 n(\lambda x, \lambda^2 t),\ c(x,t) = c(\lambda x, \lambda^2 t),\ v(x,t) = v(\lambda x, \lambda^2 t) \ \text{ e } \ u(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

E por último, mostramos uma resultado de estabilidade assintótica para soluções do sistema (2.1), o qual descrevemos a seguir.

Teorema 2.5. *Assuma as hipóteses do Teorema 2.3. Suponha que (n, c, v, u) e $(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{u})$ são duas soluções dadas pelo Teorema 2.3 correspondendo aos dados iniciais (n_0, c_0, v_0, u_0) e $(\tilde{n}_0, \tilde{c}_0, \tilde{v}_0, \tilde{u}_0)$, respectivamente. Então, temos que*

$$\lim_{t\to\infty} \Big(t^{-\frac{N}{2q}+1} \|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} + \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} + t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} + t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla e^{-\gamma t} e^{t\Delta}(v_0 - \tilde{v}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} + t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \Big) = 0, \tag{2.11}$$

se, e somente se,

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{N}{2q}+1} \|n(\cdot,t) - \tilde{n}(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} = \lim_{t\to\infty} \|c(\cdot,t) - \tilde{c}(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla(c(\cdot,t) - \tilde{c}(\cdot,t))\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla(v(\cdot,t) - \tilde{v}(\cdot,t))\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} = \lim_{t\to\infty} t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} = 0. \tag{2.12}$$

Observação 2.6. (Soluções assintoticamente autossimilares) No caso $\gamma = 0$, o Teorema 2.5 juntamente com o Corolário 2.4 fornecem uma classe de soluções que são assintoticamente autossimilares quando $t \to \infty$. De fato, para dados iniciais $(\tilde{n}_0, \tilde{c}_0, \tilde{v}_0, \tilde{u}_0) = (n_0, c_0, v_0, u_0) + (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ com $\varphi_i \in C_0^\infty$ e n_0, c_0, v_0, u_0 e f como no Corolário 2.4, temos que a solução correspondente $(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{u})$ é "atraída" para a solução autossimilar (n, c, v, u) no sentido de (2.12).

2.2 Demonstrações dos resultados

Nesta seção apresentaremos as demonstrações dos resultados enunciados na seção 2.1. Na demonstração do resultado de boa-colocação para o sistema (2.1), utilizaremos o seguinte lema abstrato que nos permitirá simplificar algumas contas grandes de ponto fixo.

Lema 2.7. *Para $1 \leqslant i \leqslant 4$, sejam X_i espaços de Banach com a norma $\|\cdot\|_{X_i}$. Considere o espaço $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ que é Banach equipado com a norma*

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} + \|x_3\|_{X_3} + \|x_4\|_{X_4},$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{X}$. Para cada índice i, j, k tal que $1 \leqslant i, j, k \leqslant 4$, assuma que $B^k_{i,j} : X_i \times X_j \to X_k$ é um operador bilinear contínuo, isto é, existe uma constante $C^k_{i,j} > 0$ tal que

$$\left\|B^k_{i,j}(x_i, x_j)\right\|_{X_k} \leqslant C^k_{i,j} \, \|x_i\|_{X_i} \, \|x_j\|_{X_j}, \text{ para todo } (x_i, x_j) \in X_i \times X_j. \tag{2.13}$$

Assuma também que $L_3 : X_1 \to X_3$ e que $L_4 : X_1 \to X_4$ sejam operadores lineares contínuos tais que

$$\|L_3\|_{X_1 \to X_3} \leqslant \rho \text{ e } \|L_4\|_{X_1 \to X_4} \leqslant \theta.$$

Além disso, considere as constantes K_1 *e* K_2 *definidas por*

$$K_1 := 1+\rho+\theta \quad e \quad K_2 := (\rho+\theta)\sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^1 + \sum_{k,i,j=1}^{4} C_{i,j}^k$$

e sejam $0<\varepsilon<\dfrac{1}{4K_1K_2}$ *e* $\mathcal{B}_\varepsilon := \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant 2\,K_1\,\varepsilon\}$. *Se* $\|y\|_{\mathcal{X}} \leqslant \varepsilon$, *então existe uma única solução* $x \in \mathcal{B}_\varepsilon$ *para a equação* $x = y + B(x)$, *onde* $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $B(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x))$ *e*

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= \sum_{i,j=1}^{4} B_{i,j}^1(x_i, x_j),\\
B_2(x) &= \sum_{i,j=1}^{4} B_{i,j}^2(x_i, x_j),\\
B_3(x) &= \sum_{i,j=1}^{4} B_{i,j}^3(x_i, x_j) + (L_3 \circ (y_1 + B_1))(x),\\
B_4(x) &= \sum_{i,j=1}^{4} B_{i,j}^4(x_i, x_j) + (L_4 \circ (y_1 + B_1))(x).
\end{aligned}$$

Ademais, a solução depende continuamente de y *no seguinte sentido: se* $\|\tilde{y}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x})$ *e* $\|\tilde{u}\| \leqslant 2K_1\varepsilon$, *então*

$$\|x-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{1}{1-4K_1K_2\varepsilon}\|y-\tilde{y}\|_{\mathcal{X}}.$$

Demonstração. Para todo $x \in \mathcal{X}$, segue de (2.13) que

$$\begin{aligned}
\|B_1(x)\|_{X_1} &\leqslant \sum_{i,j=1}^{4} \left\|B_{i,j}^1(x_i, x_j)\right\|_{X_1}\\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^1\, \|x_i\|_{X_i}\, \|x_j\|_{X_j}\\
&\leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^1\right) \|x\|_{\mathcal{X}}^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Analogamente, temos que

$$\|B_2(x)\|_{X_2} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^2\right) \|x\|_{\mathcal{X}}^2. \tag{2.15}$$

Em seguida, usando (2.13) e (2.14), estimamos B_3 do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|B_3(x)\|_{X_3} &\leqslant \sum_{i,j=1}^{4} \left\|B^3_{i,j}(x_i,x_j)\right\|_{X_3} + \|(L_3 \circ (y_1 + B_1))(x)\|_{X_3} \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{4} C^3_{i,j}\,\|x_i\|_{X_i}\,\|x_j\|_{X_j} + \rho\,\|(y_1 + B_1)(x)\|_{X_1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{4} C^3_{i,j}\right)\|x\|^2_{\mathcal{X}} + \rho\left(\|y\|_{\mathcal{X}} + \left(\sum_{i,j=1}^{4} C^1_{i,j}\right)\|x\|^2_{\mathcal{X}}\right) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{4} C^3_{i,j} + \rho\sum_{i,j=1}^{4} C^1_{i,j}\right)\|x\|^2_{\mathcal{X}} + \rho\,\|y\|_{\mathcal{X}}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Similarmente, temos que

$$\|B_4(x)\|_{X_4} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{4} C^4_{i,j} + \theta\sum_{i,j=1}^{4} C^1_{i,j}\right)\|x\|^2_{\mathcal{X}} + \theta\,\|y\|_{\mathcal{X}}. \qquad (2.17)$$

Agora, considere a função $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida por $\mathcal{F}(x) = y + B(x)$. Para $x \in \mathcal{B}_\varepsilon$, segue das estimativas (2.14)-(2.17) que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(x)\|_{\mathcal{X}} &\leqslant \|y\|_{\mathcal{X}} + \sum_{k=1}^{4}\|B_k(x)\|_{X_k} \\
&\leqslant (1+\rho+\theta)\|y\|_{\mathcal{X}} + \left((\rho+\theta)\sum_{i,j=1}^{4} C^1_{i,j} + \sum_{k,i,j=1}^{4} C^k_{i,j}\right)\|x\|^2_{\mathcal{X}} \\
&\leqslant K_1\,\varepsilon + K_2\,4\,K_1^2\,\varepsilon^2 = (1 + 4\,K_1\,K_2\,\varepsilon)\,K_1\,\varepsilon \leqslant 2\,K_1\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{F}(\mathcal{B}_\varepsilon) \subset \mathcal{B}_\varepsilon$. Agora, para $x, z \in \mathcal{B}_\varepsilon$ temos a estimativa

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(z)\|_{\mathcal{X}} &= \|B(x) - B(z)\|_{\mathcal{X}} \\
&= \sum_{k=1}^{4} \|B_k(x) - B_k(z)\|_{X_k} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{4} \sum_{i,j=1}^{4} \left\|B_{i,j}^k(x_i - z_i, x_j) + B_{i,j}^k(z_i, x_j - z_j)\right\|_{X_k} \\
&\quad + \sum_{l=3}^{4} \|(L_l \circ (B_1(x) - B_1(z)))\|_{X_l} \\
&\leqslant \sum_{k,i,j=1}^{4} C_{i,j}^k \left(\|x_i - z_i\|_{X_i} \|x_j\|_{X_j} + \|z_i\|_{X_i} \|x_j - z_j\|_{X_j}\right) \\
&\quad +(\rho + \theta) \|B_1(x) - B_1(z)\|_{X_1} \\
&\leqslant \sum_{k,i,j=1}^{4} C_{i,j}^k \|x - z\|_{\mathcal{X}} (\|x\|_{\mathcal{X}} + \|z\|_{\mathcal{X}}) \\
&\quad + (\rho + \theta) \sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^1 \left(\|x_i - z_i\|_{X_i} \|x_j\|_{X_j} + \|z_i\|_{X_i} \|x_j - z_j\|_{X_j}\right) \\
&\leqslant \left((\rho + \theta) \sum_{i,j=1}^{4} C_{i,j}^1 + \sum_{k,i,j=1}^{4} C_{i,j}^k\right) \|x - z\|_{\mathcal{X}} (\|x\|_{\mathcal{X}} + \|z\|_{\mathcal{X}}) \\
&\leqslant K_2\, 4\, K_1\, \varepsilon \,\|x - z\|_{\mathcal{X}}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Como $4K_1K_2\varepsilon < 1$, então $\mathcal{F}$ é uma contração em $\mathcal{B}_\varepsilon$ e segue pelo teorema do ponto fixo de Banach que $\mathcal{F}$ possui um único ponto fixo $x \in \mathcal{B}_\varepsilon$.

Para finalinar a prova do lema, vamos mostrar a dependência contínua da solução. Sejam x e $\tilde{x}$ como no enunciado, então pela desigualdade (2.18) temos que

$$\|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}} + \|B(x) - B(\tilde{x})\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}} + 4\, K_1\, K_2\, \varepsilon \,\|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}},$$

ou seja,

$$\|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{1}{1 - 4K_1K_2\varepsilon} \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}}.$$

■

Observação 2.8. Para a demonstração do Corolário 2.4, é útil destacar que a solução obtida através do lema 2.7 é o limite em $\mathcal{X}$ da sequência de iterações $x^{(1)} = y$ e $x^{(m+1)} = \mathcal{F}(x^{(m)})$, onde $m \geqslant 1$.

Com o objetivo de provar os resultados já enunciados, vamos introduzir uma função auxiliar $\mathcal{F}$. Para cada 4-upla de dados iniciais (n_0, c_0, v_0, u_0) e força f, consideramos

$\mathcal{F}(n,c,v,u) = (\mathcal{N},\mathcal{C},\mathcal{V},\mathcal{U})$, onde cada componente é definida do seguinte modo:

$$\begin{cases} \mathcal{N}(t) &= e^{t\Delta}n_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla n)(\tau)\,d\tau - \int_0^t \nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c)(\tau)\,d\tau \\ & \quad - \displaystyle\int_0^t \nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla v)(\tau)\,d\tau, \\ &=: e^{t\Delta}n_0 + B^1_{4,1}(u,n)(t) + B^1_{1,2}(n,c)(t) + B^1_{1,3}(n,v)(t), \\ \mathcal{C}(t) &= e^{t\Delta}c_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c)(\tau)\,d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)\,d\tau, \\ &=: e^{t\Delta}c_0 + B^2_{4,2}(u,c)(t) + B^2_{1,2}(n,c)(t), \\ \mathcal{V}(t) &= e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla v)(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}n(\tau)\,d\tau, \\ &=: e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0 + B^3_{4,3}(u,v)(t) + L_3(n)(t), \\ \mathcal{U}(t) &= e^{t\Delta}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)\,d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(nf)(\tau)\,d\tau, \\ &=: e^{t\Delta}u_0 + B^4_{4,4}(u,u)(t) + L_4(n)(t), \qquad 0<t<\infty. \end{cases} \tag{2.19}$$

Os operadores bilineares $B^k_{i,j}$ e os operadores lineares L_j definidos acima serão o objeto de estudo das próximas duas seções.

2.2.1 Estimativas para os termos bilineares em (2.19)

Lema 2.9. *Assuma as hipóteses do Teorema 2.3. Existem constantes positivas C_i, para $1 \leqslant i \leqslant 9$, tais que*

$$\left\|B^1_{4,1}(u,n)\right\|_{X_1} \leqslant C_1\|u\|_{X_4}\|n\|_{X_1}, \tag{2.20}$$
$$\left\|B^1_{1,2}(n,c)\right\|_{X_1} \leqslant C_2\|n\|_{X_1}\|c\|_{X_2}, \tag{2.21}$$
$$\left\|B^1_{1,3}(n,v)\right\|_{X_1} \leqslant C_3\|n\|_{X_1}\|v\|_{X_3}, \tag{2.22}$$
$$\left\|B^2_{4,2}(u,c)\right\|_{X_2} \leqslant C_4\|u\|_{X_4}\|c\|_{X_2}, \tag{2.23}$$
$$\left\|B^2_{1,2}(n,c)\right\|_{X_2} \leqslant C_5\|n\|_{X_1}\|c\|_{X_2}, \tag{2.24}$$
$$\left\|B^3_{4,3}(u,v)\right\|_{X_3} \leqslant C_6\|u\|_{X_4}\|v\|_{X_3}, \tag{2.25}$$
$$\left\|B^4_{4,4}(u,\tilde{u})\right\|_{X_4} \leqslant C_7\|u\|_{X_4}\|\tilde{u}\|_{X_4}, \tag{2.26}$$

para todo $n \in X_1, c \in X_2, v \in X_3$ e $u, \tilde{u} \in X_4$.

Demonstração. Das condições (i), (ii) e (iii) na Suposição 2.1, temos que

$$\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} + \frac{N}{2p} + \frac{N}{2q} > 0.$$

Além disso, tomando $s_1 = \dfrac{p_1 q_1}{p_1 + q_1}$, segue das condições (A), (B) e (C) da Suposição 2.1 que

$$1 \leqslant s_1 \leqslant \frac{pq}{p+q} \leqslant q \quad \text{e} \quad \frac{q}{q_1} \geqslant \frac{pq}{p+q}\frac{1}{s_1}.$$

Portanto, estimamos $B^1_{4,1}(u,n)$ em $\mathcal{M}^q_{q_1}$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\left\|B^1_{4,1}(u,n)(t)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} &= \left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla n)(\tau)\,d\tau\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(un)(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\,\|(un)(\tau)\|_{\mathcal{M}^{\frac{pq}{p+q}}_{s_1}}\,d\tau, \text{ por (1.11)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|u(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,\|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,d\tau, \text{ por (1.9)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{2q}-1}\,d\tau\,\|u\|_{X_4}\,\|n\|_{X_1} \\
&= C\,t^{\frac{N}{2q}-1}\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}, -\frac{1}{2}+\frac{N}{2p}+\frac{N}{2q}\right)\|u\|_{X_4}\,\|n\|_{X_1},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $\beta(\cdot,\cdot)$ denota a função beta. Como $\dfrac{1}{2}-\dfrac{N}{2p} > 0$ e $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{N}{2p}+\dfrac{N}{2q} > 0$, segue que $\beta\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{N}{2p}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{N}{2p}+\dfrac{N}{2q}\right) < \infty$. Logo, vale que

$$\left\|B^1_{4,1}(u,n)(t)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \leqslant C_1\,t^{\frac{N}{2q}-1}\,\|u\|_{X_4}\,\|n\|_{X_1}, \tag{2.28}$$

para todo $t > 0$, onde $C_1 = C(N,p,p_1,q,q_1)$.

Agora, tomando $s_2 = \dfrac{r_1 q_1}{r_1 + q_1}$, temos que

$$\frac{1}{2}-\frac{N}{2r} > 0, \quad -\frac{1}{2}+\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r} > 0, \quad 1 \leqslant s_2 \leqslant \frac{rq}{r+q} \leqslant q \quad \text{e} \quad \frac{q}{q_1} \geqslant \frac{rq}{r+q}\frac{1}{s_2},$$

e assim segue que

$$\begin{aligned}
\left\|B^1_{1,2}(n,c)(t)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} &= \left\|\int_0^t \nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c)(\tau)\,d\tau\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c)(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\,\|(n\nabla c)(\tau)\|_{\mathcal{M}^{\frac{rq}{r+q}}_{s_2}}\,d\tau, \text{ por (1.11)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\,\|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,\|\nabla c(\tau)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\,d\tau, \text{ por (1.9)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{2q}-1}\,\tau^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\,d\tau\,\|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2} \\
&= C\,t^{\frac{N}{2q}-1}\,\|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2}\,\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2r}, -\frac{1}{2}+\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r}\right) \\
&= C_2\,t^{\frac{N}{2q}-1}\,\|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $t > 0$, onde $C_2 = C(N, q, q_1, r, r_1)$. Similarmente,

$$\begin{aligned}\left\|B^1_{1,3}(n,v)(t)\right\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} &\leqslant C\, t^{\frac{N}{2q}-1}\, \|n\|_{X_1}\, \|v\|_{X_3}\, \beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2r}, -\frac{1}{2}+\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r}\right)\\ &= C_3\, t^{\frac{N}{2q}-1}\, \|n\|_{X_1}\, \|v\|_{X_3}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

para $t > 0$, onde $C_3 = C_3(N, q, q_1, r, r_1)$. Portanto, seguem de (2.28)-(2.30) as desigualdades (2.20), (2.21) e (2.22).

Agora, de (i), (ii) e (iii) na Suposição 2.1, temos que

$$\frac{1}{2}-\frac{N}{2p} > 0, \quad 1-\frac{N}{2q} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r} > 0.$$

E tomando $s_3 = \dfrac{p_1 r_1}{p_1 + r_1}$, novamente pelas condições (A), (B) e (C) da Suposição 2.1 vale que

$$1 \leqslant s_3 \leqslant \frac{pr}{p+r} \leqslant r \quad \text{e} \quad \frac{r}{r_1} \geqslant \frac{pr}{p+r}\frac{1}{s_3}.$$

Portanto, temos as seguintes estimativas para $B^2_{4,2}$ e $\nabla B^2_{4,2}$ em L^∞ e $\mathcal{M}^r_{r_1}$, respectivamente:

$$\begin{aligned}\left\|B^2_{4,2}(u,c)(t)\right\|_{L^\infty} &= \left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c)(\tau)\, d\tau\right\|_{L^\infty}\\ &\leqslant \int_0^t \left\|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(uc)(\tau)\right\|_{L^\infty}\, d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\, \|(uc)(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\, d\tau, \text{ por (1.13)}\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\, \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\, \|c(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\, \tau^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\, d\tau\, \|u\|_{X_4}\, \|c\|_{X_2}\\ &= C\, \|u\|_{X_4}\, \|c\|_{X_2} \beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}, \frac{1}{2}+\frac{N}{2p}\right)\\ &= C_{4,1}\, \|u\|_{X_4}\, \|c\|_{X_2} \end{aligned} \tag{2.31}$$

e

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla B^2_{4,2}(u,c)(t)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &= \left\|\nabla \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c)(\tau)\, d\tau\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\\
&\leqslant \int_0^t \left\|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c)(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\ \|(u\cdot\nabla c)(\tau)\|_{\mathcal{M}^{\frac{pr}{p+r}}_{s_3}}\, d\tau,\ \text{por } (1.11)\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\ \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\ \|\nabla c(\tau)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\, d\tau,\ \text{por } (1.9)\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, d\tau\, \|u\|_{X_4}\,\|c\|_{X_2}\\
&\leqslant C\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{2p}+\frac{N}{2r}\right)\ \|u\|_{X_4}\,\|c\|_{X_2}\\
&= C_{5,1}\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \|u\|_{X_4}\,\|c\|_{X_2}, \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

para todo $t>0$, em que $C_{4,1}=C_{4,1}(N,p,p_1)$ e $C_{5,1}=C_6(N,p,p_1,r,r_1)$.

Por sua vez, podemos estimar $B^2_{1,2}$ e $\nabla B^2_{1,2}$ em L^∞ e $\mathcal{M}^r_{r_1}$, respectivamente, da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left\|B^2_{1,2}(n,c)(t)\right\|_{L^\infty} &= \left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)\, d\tau\right\|_{L^\infty}\\
&\leqslant \int_0^t \left\|e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)\right\|_{L^\infty} d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}}\ \|(nc)(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, d\tau,\ \text{por } (1.12)\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}}\ \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\ \|c(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}}\,\tau^{\frac{N}{2q}-1}\, d\tau\, \|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2}\\
&= C\,\|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2}\,\beta\left(1-\frac{N}{2q},\frac{N}{2q}\right)\\
&= C_{4,2}\,\|n\|_{X_1}\,\|c\|_{X_2}, \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla B^2_{1,2}(n,c)(t)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &= \left\|\nabla \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)\, d\tau\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\, d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\, \|(nc)(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, d\tau, \text{por } (1.11) \\
&\leqslant C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, \|c(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \tau^{\frac{N}{2q}-1}\, d\tau\, \|n\|_{X_1}\, \|c\|_{X_2} \\
&\leqslant C\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r}, \frac{N}{2q}\right)\, \|n\|_{X_1}\, \|c\|_{X_2} \\
&= C_{5,2}\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \|n\|_{X_1}\, \|c\|_{X_2}, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, onde $C_{4,2} = C_{4,2}(N,q,q_1)$ e $C_{5,2} = C_{5,2}(N,q,q_1,r,r_1)$. Tomando $C_4 = C_{4,1} + C_{4,2}$ e $C_5 = C_{5,1} + C_{5,2}$, as estimativas (2.23) e (2.24) seguem de (2.31)-(2.34).

Procedendo de forma similar a (2.31), podemos estimar $\nabla B^3_{4,3}$ em $\mathcal{M}^r_{r_1}$ como

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla B^3_{4,3}(u,v)(t)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &= \left\|\nabla \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\, e^{(t-\tau)\Delta}\, (u\cdot\nabla v)(\tau)\, d\tau\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \\
&\leqslant C\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}, \frac{N}{2p}+\frac{N}{2r}\right)\, \|u\|_{X_4}\|v\|_{X_3} \\
&= C_6\, t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\, \|u\|_{X_4}\|v\|_{X_3}, \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, onde $C_6 = C_6(N,p,p_1,r,r_1)$ e assim obtemos a desigualdade (2.25).

Finalmente, como o operador projeção $\mathbb{P}$ é limitado nos espaços de Morrey (ver

[24, Lema 4.2]) temos que

$$\begin{aligned}
\left\|B^4_{4,4}(u,\tilde{u})(t)\right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} &= \left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\,\mathbb{P}(u\cdot\nabla\tilde{u})\,d\tau\right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\mathbb{P}\,\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(u\otimes\tilde{u})(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t \left\|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}\,(u\otimes\tilde{u})(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\,\|(u\otimes\tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2}}_{\frac{p_1}{2}}}\,d\tau,\text{ por (1.11)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|u(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,\|\tilde{u}(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,d\tau,\ \text{ por (1.9)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\tau^{\frac{N}{p}-1}\,d\tau\,\|u\|_{X_4}\|\tilde{u}\|_{X_4} \\
&\leqslant C\,t^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{p}\right)\,\|u\|_{X_4}\|\tilde{u}\|_{X_4} \\
&= C_7\,t^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|u\|_{X_4}\|\tilde{u}\|_{X_4}, \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, onde $C_7 = C_7(N, p, p_1)$ e consequentemente obtemos (2.26).

■

2.2.2 Estimativas para os termos lineares em (2.19)

Lema 2.10. *Assuma as hipóteses do Teorema 2.3. Existem constantes $\rho, \theta > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\|L_3(n)\|_{X_3} &\leqslant \rho\,\|n\|_{X_1}, \qquad (2.37)\\
\|L_4(n)\|_{X_4} &\leqslant \theta\,\|n\|_{X_1}, \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

para todo $n \in X_1$.

Demonstração. De (i), (ii) e (iii) na Suposição 2.1, temos que $\dfrac{1}{2}+\dfrac{N}{2p}-\dfrac{N}{2q} > 0$ e usando (1.11), podemos estimar $\nabla L_3(n)$ em $\mathcal{M}^r_{r_1}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\|\nabla L_3(n)(t)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &= \left\|\nabla\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\,e^{(t-\tau)\Delta}\,n(\tau)\,d\tau\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}n(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\,\|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\,t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\,\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2r},\frac{N}{2q}\right)\,\|n\|_{X_1} \\
&= \rho\,t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}}\,\|n\|_{X_1}, \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, onde $\rho = \rho(N, q, q_1, r, r_1)$, no que resulta (2.37).

Agora, considerando $s_4 = \dfrac{N_1 q_1}{N_1 + q_1}$, por (A), (B) e (D) da Suposição 2.1, temos que

$$1 \leqslant s_4 \leqslant \frac{Nq}{N+q} \leqslant p \quad \text{e} \quad \frac{p}{p_1} \geqslant \frac{Nq}{N+q}\frac{1}{s_4}.$$

Então, $L_4(n)$ pode ser estimada da seguinte forma em $\mathcal{M}^p_{p_1}$:

$$\begin{aligned}
\|L_4(n)(t)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} &= \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(nf)(\tau)\,d\tau \right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \\
&\leqslant \int_0^t \left\|\mathbb{P}\,e^{(t-\tau)\Delta}(nf)(\tau)\right\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\,d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\,\|nf(\tau)\|_{\mathcal{M}^{\frac{Nq}{N+q}}_{s_4}}\,d\tau, \text{por (1.10)} \\
&\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}+\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|f\|_{\mathcal{M}^N_{N_1}}\,\|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\,d\tau, \text{por (1.9)} \\
&\leqslant C\,t^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|f\|_{\mathcal{M}^N_{N_1}}\,\|n\|_{X_1}\,\beta\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2p}-\frac{N}{2q},\frac{N}{2q}\right) \\
&= \theta\,t^{\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}}\,\|n\|_{X_1},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

para todo $t > 0$, onde $\theta = \theta(N, N_1, p, p_1, q, q_1, f)$ e consequentemente obtemos (2.38).

■

2.2.3 Prova do Teorema 2.3

Considere X_1, X_2, X_3 e X_4 como em (2.5)-(2.8), isto é,

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \left\{n : t^{-\frac{N}{2q}+1}\,n(\cdot) \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^q_{q_1}\right)\right\}, \\
X_2 &:= \left\{c : c \in BC_w\left((0,\infty);L^\infty\right) \ \text{ com } t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\,\nabla c(\cdot) \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^r_{r_1}\right)\right\}, \\
X_3 &:= \left\{v : v(.,t) \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ para } t \in (0,\infty) \text{ e } t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}}\,\nabla v \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^r_{r_1}\right)\right\}, \\
X_4 &:= \left\{u : t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}}\,u(\cdot) \in BC_w\left((0,\infty);\mathcal{M}^p_{p_1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

E seja $y := \left(e^{t\Delta}n_0, e^{t\Delta}c_0, e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}u_0\right)$. Então, para $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ e $x = (n, c, v, u) \in \mathcal{X}$, definimos os seguintes operadores:

$$B_1(x) := B^1_{4,1}(u,n) + B^1_{1,2}(n,c) + B^1_{1,3}(n,v), \tag{2.41}$$

$$B_2(x) := B^2_{4,2}(u,c) + B^2_{1,2}(n,c), \tag{2.42}$$

$$B_3(x) := B^3_{4,3}(u,v) + L_3 \circ \left(e^{t\Delta}n_0 + B_1\right)(x), \tag{2.43}$$

$$B_4(x) := B^4_{4,4}(u,u) + L_4 \circ \left(e^{t\Delta}n_0 + B_1\right)(x). \tag{2.44}$$

Assim, pelo Lema 2.9, os operadores $B^k_{i,j}$ em (2.41)-(2.44) são bilineares e contínuos. Além disso, pelo Lema 2.10, L_3 e L_4 são operadores lineares e contínuos. Também não é difícil ver que os operadores $B_{i,j}^k$, L_3 and L_4 são fracamente contínuos no tempo para $t > 0$, bem como são os outros termos lineares envolvendo o núcleo do calor em (2.10).

Em seguida, definimos

$$K_1 = 1 + \rho + \theta \quad \text{e} \quad K_2 = (\rho + \theta)(C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^{9} C_i. \tag{2.45}$$

Em vista da equivalência de normas (1.15), temos

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\mathcal{X}} &= \|e^{t\Delta}n_0\|_{X_1} + \|e^{t\Delta}c_0\|_{X_2} + \|e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0\|_{X_3} + \|e^{t\Delta}u_0\|_{X_4} \\
&= \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2q}+1} \|e^{t\Delta}n_0\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + \sup_{t>0} \|e^{t\Delta}c_0\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla e^{t\Delta}c_0\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\
&\quad + \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2r}+\frac{1}{2}} \|\nabla e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} + \sup_{t>0} t^{-\frac{N}{2p}+\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}u_0\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leqslant C_0 \left(\|n_0\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{N}{q}-2}} + \|c_0\|_{L^\infty} + \|\nabla c_0\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r}-1}} + \|\nabla v_0\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r}-1}} + \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p}-1}} \right) \\
&= C_0 \|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}} \leqslant \varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

desde que $\|(n_0, c_0, v_0, u_0)\|_{\mathcal{I}} \leqslant \delta = \dfrac{\varepsilon}{C_0}$. Se $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4K_1K_2}$, então o Lema 2.7 garante que existe uma única solução $(n, c, v, u) \in \mathcal{X}$ de (2.10) tal que $\|(n, c, v, u)\|_{\mathcal{X}} \leqslant 2K_1\varepsilon$, bem como a continuidade da solução em relação ao dado inicial.

■

2.2.4 Prova do Corolário 2.4

Como usamos um argumento de ponto fixo para provar o Lema 2.3, a solução (n, c, v, u) é o limite da seguinte sequência de Picard no espaço $\mathcal{X}$ (veja Observação 2.8, página 39):

$$(n^{(1)}, c^{(1)}, v^{(1)}, u^{(1)}) = (e^{t\Delta}n_0, e^{t\Delta}c_0, e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}u_0)$$

e

$$(n^{(m+1)}, c^{(m+1)}, v^{(m+1)}, u^{(m+1)}) = \mathcal{F}(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)}), \text{ para } m \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} n^{(m+1)} &= e^{t\Delta}n_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(\tau)\,d\tau \\ & \quad - \displaystyle\int_0^t \nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n^{(m)}\nabla c^{(m)} + n^{(m)}\nabla v^{(m)})(\tau)\,d\tau, \\ c^{(m+1)} &= e^{t\Delta}c_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla c^{(m)} + n^{(m)}c^{(m)})(\tau)\,d\tau, \\ v^{(m+1)} &= e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla v^{(m)} - n^{(m)})(\tau)\,d\tau, \\ u^{(m+1)} &= e^{t\Delta}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(u^{(m)}\cdot\nabla u^{(m)})\,d\tau - \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(n^{(m)}f)(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Vamos provar o resultado usando indução finita sobre m. De fato, note que para $\lambda > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2\, n^{(1)}(\lambda x, \lambda^2 t) &= \lambda^2\, e^{\lambda^2 t\Delta}n_0(\lambda x) \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi\lambda^2 t)^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|\lambda x - y|^2}{4\lambda^2 t}\right) n_0(y)\,dy \\ &= \lambda^{2+N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi\lambda^2 t)^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|\lambda x - \lambda z|^2}{4\lambda^2 t}\right) n_0(\lambda z)\,dz, \text{ fazendo } y = \lambda z \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|x - z|^2}{4t}\right) n_0(\lambda z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|x - z|^2}{4t}\right) n_0(z)\,dz, \text{ pois } n_0 \text{ é homogênea de grau } -2 \\ &= e^{t\Delta}n_0(x) = n^{(1)}(x,t). \end{aligned}$$

Analogamente, usando que c_0, v_0 e u_0 são homogêneas de grau $0, 0$ e -1, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} c^{(1)}(x,t) &= c^{(1)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ v^{(1)}(x,t) &= v^{(1)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ u^{(1)}(x,t) &= \lambda\, u^{(1)}(\lambda x, \lambda^2 t). \end{aligned}$$

Agora, suponha que o resultado seja válido para $k \leqslant m$, isto é,

$$\begin{aligned} n^{(k)}(x,t) &= \lambda^2\, n^{(k)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ c^{(k)}(x,t) &= c^{(k)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ v^{(k)}(x,t) &= v^{(k)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ u^{(k)}(x,t) &= \lambda\, u^{(k)}(\lambda x, \lambda^2 t). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Para $k = m+1$ temos que

$$(n^{(m+1)}, c^{(m+1)}, v^{(m+1)}, u^{(m+1)}) = \mathcal{F}(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)}).$$

Primeiramente vamos provar que

$$\lambda^2 n^{(m+1)}(\lambda x, \lambda^2 t) = n^{(m+1)}(x,t). \tag{2.48}$$

Para isso, note que

$$\begin{aligned} n^{(m+1)}(\lambda x, \lambda^2 t) &= \mathcal{F}_1\left(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)}\right)(\lambda x, \lambda^2 t) \\ &= e^{\lambda^2 t\Delta} n_0(\lambda x) + B^1_{4,1}(u^{(m)}, n^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t) + B^1_{1,2}(n^{(m)}, c^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t) \\ &\quad + B^1_{1,3}(n^{(m)}, v^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t), \end{aligned}$$

então fazendo a mudança de variável $\tau = \lambda^2\sigma$, temos que

$$\begin{aligned} &\lambda^2 B^1_{4,1}(u^{(m)}, n^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t) \\ &= -\lambda^2 \int_0^{\lambda^2 t} e^{(\lambda^2 t-\tau)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(\lambda x, \tau)\, d\tau \\ &= -\lambda^4 \int_0^{t} e^{(\lambda^2 t-\lambda^2\sigma)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(\lambda x, \lambda^2\sigma)\, d\sigma \\ &= -\lambda^4 \int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi\lambda^2(t-\sigma))^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|\lambda x - y|^2}{4\lambda^2(t-\sigma)}\right)(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(y, \lambda^2\sigma)\, dy\, d\sigma. \end{aligned}$$

Fazendo $y = \lambda z$, obtemos que

$$\begin{aligned} &= -\lambda^{4+N} \int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi\lambda^2(t-\sigma))^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|\lambda x - \lambda z|^2}{4\lambda^2(t-\sigma)}\right)(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(\lambda z, \lambda^2\sigma)\, dz\, d\sigma \\ &= -\lambda^{4} \int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-\sigma))^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|x - z|^2}{4(t-\sigma)}\right)(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(\lambda z, \lambda^2\sigma)\, dz\, d\sigma \\ &= -\lambda^{3} \int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-\sigma))^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|x - z|^2}{4(t-\sigma)}\right)(u^{(m)}(\lambda z, \lambda^2\sigma)\cdot\nabla[n^{(m)}(\lambda z, \lambda^2\sigma)])\, dz\, d\sigma \\ &= -\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-\sigma))^{\frac{N}{2}}}\, exp\left(\frac{-|x - z|^2}{4(t-\sigma)}\right)(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(z, \sigma)\, dz\, d\sigma, \text{ por (2.47)} \\ &= -\int_0^{t} e^{(t-\sigma)\Delta}(u^{(m)}\cdot\nabla n^{(m)})(x,\sigma)\, d\sigma \\ &= B^1_{4,1}(u^{(m)}, n^{(m)})(x,t). \end{aligned}$$

De maneira similar, concluímos que $\lambda^2 B^1_{1,2}(n^{(m)}, c^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t) = B^1_{1,2}(n^{(m)}, c^{(m)})(x,t)$ e $\lambda^2 B^1_{1,3}(n^{(m)}, v^{(m)})(\lambda x, \lambda^2 t) = B^1_{1,3}(n^{(m)}, v^{(m)})(x,t)$. Como já provamos que $\lambda^2 n^{(1)}(\lambda x, \lambda^2 t) = n^{(1)}(x,t)$ garantimos que (2.48) vale.

Para as outras coordenadas obtemos similarmente que

$$\begin{aligned} c^{(m+1)}(x,t) &= c^{(m+1)}(\lambda x, \lambda^2 t), \\ , v^{(m+1)}(x,t) &= v^{(m+1)}(\lambda x, \lambda^2 t) \text{ e} \\ u^{(m+1)}(x,t) &= \lambda\, u^{(m+1)}(\lambda x, \lambda^2 t) \end{aligned}$$

e isso completa a prova da indução finita.

Por fim, como (n, c, v, u) é o limite em $\mathcal{X}$ da sequência $\left((n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, u^{(m)})\right)_{m\in\mathbb{N}}$ e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ é invariante por escala, obtemos que a solução (n, c, v, u) é autossimilar.

■

2.2.5 Prova do Teorema 2.5

Primeiramente, vamos mostrar que (2.11) implica (2.12). Sejam (n, c, v, u) e $(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{u})$ duas soluções brandas dadas pelo Teorema 2.3 e sejam

$$l_q = -\frac{N}{2q} + 1, \;\; \mu_r = -\frac{N}{2r} + \frac{1}{2} \text{ e } \mu_p = -\frac{N}{2p} + \frac{1}{2}.$$

Estimando a diferençã $n - \tilde{n}$ na norma $t^{l_q}\|\cdot\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}$, obtemos que

$$\begin{aligned} t^{-\frac{N}{2q}+1}\|n(t) - \tilde{n}(t)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} &\leqslant t^{l_q}\|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \\ &\quad + t^{l_q}\int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla n - \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, d\tau \\ &\quad + t^{l_q}\int_0^t \|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c + n\nabla v - \tilde{n}\nabla\tilde{c} - \tilde{n}\nabla\tilde{v})(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, d\tau \\ &:= t^{l_q}\,\|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} + J_1(t) + J_2(t). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Agora vamos estimar as integrais J_1 e J_2. Para estimar J_1 procedemos similarmente a (2.27) e obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} &J_1(t) \\ &\leqslant \tilde{C}_1\, t^{l_q}\int_0^t (t-\tau)^{\mu_p-1}\left(\|(u-\tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\|n(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\|(n-\tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\right) d\tau \\ &\leqslant \tilde{C}_1\, t^{l_q}\int_0^t (t-\tau)^{\mu_p-1}\,\tau^{-\mu_p-l_q}\,\tau^{\mu_p}\|(u-\tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\|n\|_{X_1}\, d\tau \\ &\quad + \tilde{C}_1\, t^{l_q}\int_0^t (t-\tau)^{\mu_p-1}\,\tau^{-\mu_p-l_q}\,\tau^{l_q}\|\tilde{u}\|_{X_4}\|(n-\tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, d\tau, \text{ tomando } \tau = tz \\ &= \tilde{C}_1\int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1}\, z^{-\mu_p-l_q}\,(tz)^{\mu_p}\|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\|n\|_{X_1}\, dz \\ &\quad + \tilde{C}_1\int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1}\, z^{-\mu_p-l_q}\,(tz)^{l_q}\|\tilde{u}\|_{X_4}\|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, dz. \end{aligned} \tag{2.50}$$

De maneira similar, segue de (2.29) e de (2.30) que

$$\begin{aligned} J_2(t) \leqslant\ & \tilde{C}_2 \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \|c\|_{X_2} \, dz \\ & + \tilde{C}_2 \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{\mu_r} \|\nabla(c-\tilde{c})(tz)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \|\tilde{n}\|_{X_1} \, dz \\ & + \tilde{C}_3 \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \|v\|_{X_3} \, dz \\ & + \tilde{C}_3 \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{\mu_r} \|\nabla(v-\tilde{v})(tz)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \|\tilde{n}\|_{X_1} \, dz. \end{aligned} \tag{2.51}$$

A seguir, estimamos as diferenças $c-\tilde{c}$, $v-\tilde{v}$ e $u-\tilde{u}$ nas normas $\|\cdot\|_{L^\infty} + t^{\mu_r}\|\nabla\cdot\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}$, $t^{\mu_r}\|\nabla\cdot\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}$ e $t^{\mu_p}\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}$, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \|(c-\tilde{c})(t)\|_{L^\infty} & \leqslant \|e^{t\Delta}(c_0-\tilde{c}_0)\|_{L^\infty} + \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c + nc - \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau)\|_{L^\infty} \, d\tau \\ & := \|e^{t\Delta}(c_0-\tilde{c}_0)\|_{L^\infty} + J_3(t), \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} & t^{\mu_r}\|\nabla(c-\tilde{c})(t)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \\ & \quad \leqslant t^{\mu_r}\|\nabla e^{t\Delta}(c_0-\tilde{c}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} + t^{\mu_r}\int_0^t \|\nabla e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla c + nc - \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \, d\tau \\ & \quad := t^{\mu_r}\|\nabla e^{t\Delta}(c_0-\tilde{c}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} + J_4(t), \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} t^{\mu_r}\|\nabla(v-\tilde{v})(t)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} & \leqslant t^{\mu_r}\|\nabla e^{-\gamma t}e^{t\Delta}(v_0-\tilde{v}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \\ & \quad + t^{\mu_r}\int_0^t \|\nabla e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}(u\cdot\nabla v + n - \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{v} - \tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} \, d\tau \\ & := t^{\mu_r}\|\nabla e^{-\gamma t}e^{t\Delta}(v_0-\tilde{v}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} + J_5(t) \end{aligned} \tag{2.54}$$

e

$$\begin{aligned} t^{\mu_p}\|(u-\tilde{u})(t)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} & \leqslant t^{\mu_p}\|e^{t\Delta}(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} + t^{\mu_p}\int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla u - \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \, d\tau \\ & \quad + t^{\mu_p}\int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(nf - \tilde{n}f)(\tau)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \, d\tau \\ & := t^{\mu_p}\|e^{t\Delta}(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} + J_6(t) + J_7(t). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Tendo em vista as desigualdades (2.31), (2.33), (2.32), (2.34), (2.35), (2.36), (2.39) e (2.40), temos as seguintes estimativas para as integrais J_3, J_4, J_5, J_6 e J_7:

$$J_3(t) \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} & \leqslant \tilde{C_{4,1}} \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1} z^{-\mu_p} \Big((tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L_\infty} \Big) \, dz \\ & \quad + \tilde{C_{4,2}} \int_0^1 (1-z)^{l_q - 1} z^{-l_q} \Big((tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{n}\|_{X_1} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L_\infty} \Big) \, dz, \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$
\begin{aligned}
&J_4(t) \qquad\qquad (2.58)\\
&\leqslant \tilde{C_{5,1}} \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \|c\|_{X_2}\, dz \\
&\quad + \tilde{C_{5,1}} \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} \|\tilde{u}\|_{X_4} (tz)^{\mu_r} \|\nabla(c-\tilde{c})(tz)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\, dz \\
&\quad + \tilde{C_{5,2}} \int_0^1 (1-z)^{l_q-\mu_r-1} z^{-l_q} \Big((tz)^{l_q} \| (n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{n}\|_{X_1} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L_\infty} \Big)\, dz,
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

$$
\begin{aligned}
J_5(t) \;\leqslant\; & \tilde{C}_6 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \|v\|_{X_3}\, dz \\
& + \tilde{C}_6 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} \|\tilde{u}\|_{X_4} (tz)^{\mu_r} \|\nabla(v-\tilde{v})(tz)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}\, dz \\
& + \tilde{\rho} \int_0^1 (1-z)^{l_q-\mu_r-1} z^{-l_q} (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, dz,
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

$$
\begin{aligned}
J_6(t) \;\leqslant\; & \tilde{C}_7 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-2\mu_p} (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} \|u\|_{X_4}\, dz \\
& + \tilde{C}_7 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-2\mu_p} (tz)^{\mu_p} \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}\, dz
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

e

$$
J_7(t) \leqslant \tilde{\theta} \int_0^1 (1-z)^{l_q-\mu_p-1} z^{-l_q} (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}\, dz. \tag{2.62}
$$

Agora, defina os seguintes limites:

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \limsup_{t\to\infty} t^{l_q} \|n(\cdot,t) - \tilde{n}(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}}, \\
A_2 &:= \limsup_{t\to\infty} \|c(\cdot,t) - \tilde{c}(\cdot,t)\|_{L^\infty}, \\
A_3 &:= \limsup_{t\to\infty} t^{\mu_r} \|\nabla(c(\cdot,t) - \tilde{c}(\cdot,t))\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}, \\
A_4 &:= \limsup_{t\to\infty} t^{\mu_r} \|\nabla(v(\cdot,t) - \tilde{v}(\cdot,t))\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}}, \\
A_5 &:= \limsup_{t\to\infty} t^{\mu_p} \|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}}.
\end{aligned}
$$

Como $\|(n,c,v,u)\|_{\mathcal{X}}, \|(\tilde{n},\tilde{c},\tilde{v},\tilde{u})\|_{\mathcal{X}} \leqslant 2K_1\varepsilon$, segue que A_1, A_2, A_3, A_4, $A_5 < \infty$. Tomando o $\limsup_{t\to\infty}$ em (2.49), (2.52), (2.53), (2.54) e (2.55), e usando (2.50), (2.51) e (2.57)-(2.62), obtemos as seguintes estimativas para os A_i:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\leqslant 0 + \tilde{C_1}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1}\, z^{-\mu_p - l_q}\, dz\ (A_5 + A_1) \\
&\quad + \tilde{C_2}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1}\, z^{-l_q - \mu_r}\, dz\, (A_1 + A_3) \\
&\quad + \tilde{C_3}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_r - 1}\, z^{-l_q - \mu_r}\ (A_1 + A_4)\, dz \\
&\leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, [C_1\ (A_1 + A_5) + C_2\ (A_1 + A_3) + C_3\ (A_1 + A_4)]\,, \qquad (2.63) \\
A_2 &\leqslant 0 + \tilde{C_{4,1}}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1}\, z^{-\mu_p}\, dz\ \ (A_5 + A_2) \\
&\quad + \tilde{C_{5,1}}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{l_q - 1}\, z^{-l_q}\, dz\ \ (A_1 + A_2) \\
&\leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, [C_{4,1}\, (A_2 + A_5) + C_{5,1}\, (A_1 + A_2)]\,, \\
A_3 &\leqslant 0 + \tilde{C_{4,2}}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1}\, z^{-\mu_p - \mu_r}\, dz\ \ (A_5 + A_3) \\
&\quad + \tilde{C_{5,2}}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{l_q - \mu_r - 1}\, z^{-l_q}\, dz\ \ (A_1 + A_2) \\
&\leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, [C_6\ (A_3 + A_5) + C_7\ (A_1 + A_2)]\,, \\
A_4 &\leqslant 0 + \tilde{C_6}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1}\, z^{-\mu_p - \mu_r}\, dz\ (A_5 + A_4) + \tilde{\rho} \int_0^1 (1-z)^{l_q - \mu_r - 1}\, z^{-l_q}\, dz\, A_1 \\
&\leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, [C_6\ (A_4 + A_5)] + \rho\, A_1, \\
A_5 &\leqslant 0 + \tilde{C_7}\, 2\, K_1\, \varepsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p - 1}\, z^{-2\mu_p}\, dz\ (A_5 + A_5) + \tilde{\theta} \int_0^1 (1-z)^{l_q - \mu_p - 1}\, z^{-l_q}\, dz\, A_1 \\
&\leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, [C_7\, 2\, A_5] + \theta\, A_1,
\end{aligned}
$$

onde $\{C_1, C_2, C_3, C_4 = C_{4,1} + C_{4,2}, C_5 = C_{5,1} + C_{5,2}, C_6, C_7, C_6, C_7\}$ e $\{\rho, \theta\}$ são como nos Lemas 2.9 e 2.10, respectivamente.

Recordando que $K_1 = 1 + \rho + \theta$ e $K_2 = (\rho + \theta)(C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^{9} C_i$ (veja (2.45)) e somando todos os A_i's, concluímos que

$$
\begin{aligned}
& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\
&\quad \leqslant 2\, K_1\, \varepsilon \Big[A_1\ (C_1 + C_2 + C_3 + C_{5,1} + C_{5,2}) + A_2\ (C_{4,1} + C_{5,1} + C_{5,2}) \\
&\qquad + A_3\ (C_2 + C_{4,2}) + A_4\ (C_3 + C_6) + A_5\ (C_1 + C_{4,1} + C_{4,2} + C_6 + 2C_7) \Big] + (\rho + \theta) A_1 \\
&\quad \leqslant 2\, K_1\, \varepsilon \Big[A_1 \big(C_1 + C_2 + C_3 + C_{5,1} + C_{5,2} + (\rho + \theta)[C_1 + C_2 + C_3]\big) \\
&\qquad + A_2\ (C_{4,1} + C_{5,1} + C_{5,2}) +\ A_3\ (C_2 + C_{4,2} + (\rho + \theta) C_2) + A_4\ (C_3 + C_6 + (\rho + \theta) C_3) \\
&\qquad + A_5\ (C_1 + C_{4,1} + C_{4,2} + C_6 + 2C_7 + (\rho + \theta) C_1) \Big], \text{ por } (2.63) \\
&\quad \leqslant 2\, K_1\, \varepsilon\, (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \times \\
&\qquad [C_1 + C_2 + C_3 + C_{4,1} + C_{5,1} + C_{4,2} + C_{5,2} + C_6 + 2C_7 + (\rho + \theta)(C_1 + C_2 + C_3)]\,.
\end{aligned}
$$

Como $C_4 = C_{4,1} + C_{4,2}$ e $C_5 = C_{5,1} + C_{5,2}$, note que

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{5,1} + C_{5,2} + C_6 + 2C_7 + (\rho + \theta)(C_1 + C_2 + C_3) \leqslant 2\, K_2,$$

então

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \leqslant 4\, K_1\, K_2\, \varepsilon\, (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)\,.$$

Por outro lado, temos que $4K_1K_4\varepsilon < 1$ e assim segue que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0$.

Agora vamos mostrar que (2.12) implica em (2.11). Usando as estimativas (2.49) e (2.52)-(2.55) e a hipótese $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0$ (veja (2.12)), obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sup\, t^{l_q} \|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{\mathcal{M}^q_{q_1}} &\leqslant A_1 + \lim_{t\to\infty} \sup\,(J_1(t) + J_2(t)) \\
&\leqslant A_1 + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_1\, (A_1 + A_5) + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_2\, (A_1 + A_3) \\
&\quad + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_3\, (A_1 + A_4) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
\lim_{t\to\infty} \sup\, \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} &\leqslant A_2 + \lim_{t\to\infty} \sup J_3(t) \\
&\leqslant A_2 + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_{4,1}\, (A_2 + A_5) + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_{5,1}\, (A_1 + A_2) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0, \\
\lim_{t\to\infty} \sup\, t^{\mu_r} \|\nabla e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &\leqslant A_3 + \lim_{t\to\infty} \sup J_4(t) \\
&\leqslant A_3 + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_{4,2}\, (A_3 + A_5) + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_{5,2}\, (A_1 + A_2) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0, \\
\lim_{t\to\infty} \sup\, t^{\mu_r} \|\nabla e^{-\gamma t} e^{t\Delta}(v_0 - \tilde{v}_0)\|_{\mathcal{M}^r_{r_1}} &\leqslant A_4 + \lim_{t\to\infty} \sup J_5(t) \\
&\leqslant A_4 + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_6\, (A_4 + A_5) + \rho\, A_1 \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sup\, t^{\mu_p} \|e^{t\Delta}(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{\mathcal{M}^p_{p_1}} &\leqslant A_5 + \lim_{t\to\infty} \sup\,(J_6(t) + J_7(t)) \\
&\leqslant A_5 + 2\, K_1\, \varepsilon\, C_7\, 2A_5 + \theta\, A_1 \\
&= 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

e com isso concluímos a prova do resultado.

■

3 Equações de Navier-Stokes em domínios finos

Neste capítulo vamos trabalhar com as equações de Navier-Stokes N-dimensional em domínios finos $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, onde $N \geqslant 2$ e $\varepsilon > 0$. Mostraremos a existência e unicidade de solução suave para tais equações quando a espessura ε é suficientemente pequena.

3.1 Formulação Integral via transformada de Fourier

Como já foi visto na introdução, as equações de Navier-Stokes em Ω_ε, com a condição de contorno de Dirichlet, têm a forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla \pi = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega_\varepsilon \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0, \varepsilon\} \times (0, \infty), \\ u(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.1}$$

O espaço que utilizaremos para trabalhar tais equações é inspirado nos espaços $\mathcal{PM}^a$, cuja definição relembramos a seguir.

Definição 3.1. Seja $0 \leqslant a < N$. O espaço $\mathcal{PM}^a$ é definido por

$$\mathcal{PM}^a := \left\{ v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \widehat{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|v\|_{\mathcal{PM}^a} < \infty \right\}, \tag{3.2}$$

onde

$$\|v\|_{\mathcal{PM}^a} := ess \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\xi|^a\, |\widehat{v}(\xi)|.$$

Observação 3.2. O espaço $\mathcal{PM}^a$ equipado com a norma $\| \cdot \|_{\mathcal{PM}^a}$ é Banach.

Espaços como o $\mathcal{PM}^a$ envolve transformada de Fourier (contínua) e como podemos observar, funções definidas em $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon] = \overline{\Omega_\varepsilon}$ não têm tal transformada definida, ao menos diretamente. Assim, com o intuito de contornar tal situação vamos estender periodicamente funções definidas em $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon]$, isto é, dada uma função $v : \mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^N$ a função $v_{per} : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$v_{per}(x, s) = v_{per}(x, s + \varepsilon), \text{ para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v_{per}|_{\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon]} = v$$

é denominada a extensão periódica de v. Observe que v_{per} é uma função definida em $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon$ e sendo assim v_{per} tem transformda de Fourier definida no sentido de (1.1), veja página 24, isto é, contínua nas $(N-1)$-coordenadas e periódica na última coordenada.

Voltando as equações de Navier-Stokes em domínios finos, vemos que a solução u com a condição de contorno de Dirichlet é uma função em $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon]$. Então, considerando a extensão periódica de u e u_0, onde por abuso de notação denotaremos ainda por u e u_0, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}\varepsilon \times (0, \infty), \\ u(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon, \end{cases} \tag{NS}$$

onde $\mathbb{Z}\varepsilon = \{\ldots, -3\varepsilon, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots\}$.

Utilizando o princípio de Duhamel, o problema (NS) pode ser convertido para a seguinte equação integral

$$u(t) = G_\varepsilon(t) u_0 - \int_0^t G_\varepsilon(t - \sigma) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.3}$$

Relembrando que $\mathbb{P}$ é o operador projeção de Helmholtz-Leray, como já foi mencionado no capítulo 2. Além disso, $G_\varepsilon(t)u_0$ denota a solução do problema linear do calor (ou a ação do semigrupo do calor $\{G_\varepsilon(t)\}_{t \geqslant 0}$), ou seja, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}\varepsilon \times (0, \infty), \\ u(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon. \end{cases} \tag{EC}$$

Para simplificar a notação, denotaremos o termo quadrático em (3.3) por

$$B(u, v)(x, s, t) := - \int_0^t G_\varepsilon(t - \sigma) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(\sigma)\, d\sigma. \tag{3.4}$$

Na sequência, vamos caracterizar a transformada de Fourier de $G_\varepsilon(t)u_0$. Para tal fim, aplicamos a transformada de Fourier em (EC) e obtemos o sistema

$$\begin{cases} \widehat{\dfrac{\partial v}{\partial t}}(\xi, k, t) - \widehat{\Delta v}(\xi, k, t) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z} \times (0, \infty), \\ \widehat{v}(\xi, k, t) = \widehat{u_0}(\xi, k, t) & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier, o sistema (EC) é formamelmente equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{v}}{\partial t}(\xi, k, t) + 4\pi^2 \left(|\xi|^2 + \left| \dfrac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \widehat{v}(\xi, k, t) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z} \times (0, \infty), \\ \widehat{v}(\xi, k, t) = \widehat{u_0}(\xi, k, t) & \text{em } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Portanto, resolvendo a EDO (3.6) concluímos que

$$(\widehat{G_\varepsilon(t)u_0})(\xi,k) = \widehat{v}(\xi,k,t) = e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k).$$

Assim, aplicando a transformada de Fourier e procedendo similarmente como no caso de (EC), obtemos a seguinte equação em variáveis de Fourier formalmente equivalente a (NS) e (3.3)

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,k,t) &= e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k)\\ &\quad -2\pi i\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma,\end{aligned}$$

para todo $(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}$. Como veremos posteriormente, esta última equação inspirará a definição de solução que utilizaremos para estudar (NS) em nosso *framework*.

3.2 Espaços Funcionais

Nesta seção definiremos o espaço que utilizamos para estudar o sistema (NS) e estabeleceremos a noção de solução que empregamos neste trabalho.

Primeiramente, pela Proposição 1.29 e Observação 1.30 (página 25), para cada $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)$ podemos definir um operador $V:\mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1})$ dado por

$$\langle V(\varphi_2),\varphi_1\rangle = \langle v,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle = \langle v,\varphi_1(x)\varphi_2(s)\rangle, \tag{3.7}$$

para todo $\varphi_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$ e $\varphi_2\in\mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$. No caso $\varphi_2=1$, note que $V(1)$ corresponde a "média" da distribuição v em relação a variável s, isto é, no toro $\mathbb{T}_\varepsilon$.

Agora, considere K o conjunto das distribuições $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)$ tais que $V(1)=0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1})$. Logo, $v\in K$ se e somente se

$$\langle V(1),\varphi_1(x)\rangle = \langle v,\varphi_1\otimes 1\rangle = 0,\ \text{para todo } \varphi_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1}). \tag{3.8}$$

Assim, podemos reescrever o conjunto K como

$$K = \left\{v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon) : \langle v,\varphi_1\otimes 1\rangle = 0,\ \forall\ \varphi_1\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1})\right\}.$$

A seguir, definiremos o espaço $\mathcal{PM}^{b,c}$ baseado no já conhecido espaço $\mathcal{PM}^a$.

Definição 3.3. Sejam $N\geqslant 2$, $\varepsilon>0$ e $b,c>0$. O espaço $\mathcal{PM}^{b,c}$ é definido como o conjunto das classes de equivalência das distribuições $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)/K$ tais que $\widehat{v}(\cdot,k)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})$, para todo $k\in\mathbb{Z}$ e

$$\|v\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^b\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}}|\xi|^c\,|\widehat{v}(\xi,k)| < \infty,$$

ou seja,

$$\mathcal{PM}^{b,c} = \left\{v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)/K : \widehat{v}(\cdot,k)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})\,\forall\,k\in\mathbb{Z}\text{ e }\|v\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}<\infty\right\}.$$

Observação 3.4. $\mathcal{PM}^{b,c}$ é Banach.

A seguir, daremos uma generalização do produto de funções no espaço $\mathcal{PM}^{b,c}$.

Definição 3.5. Sejam $0 < b_1, b_2 < 1$ e $0 < c_1, c_2 < N-1$ tais que $1 < b_1 + b_2 < 2$ e $N-1 < c_1 + c_2 < 2(N-1)$. Sejam também $u \in \mathcal{PM}^{b_1,c_1}$ e $v \in \mathcal{PM}^{b_2,c_2}$, definimos $u \cdot v$, em variáveis de Fourier por

$$\widehat{u \cdot v}(\xi, k) = (\widehat{u} * \widehat{v})(\xi, k).$$

Proposição 3.6. *Sejam índices b_1, b_2, c_1 e c_2 satisfazendo*

$$0 < b_1, b_2 < 1, \quad 1 < b_1 + b_2 < 2, \quad 0 < c_1, c_2 < N-1 \text{ e } N-1 < c_1 + c_2 < 2(N-1).$$

Então, se $u \in \mathcal{PM}^{b_1,c_1}$ e $v \in \mathcal{PM}^{b_2,c_2}$ vale que $u \cdot v \in \mathcal{PM}^{b_1+b_2-1,c_1+c_2-(N-1)}$.

Demonstração. Como $0 < c_1 + c_2 < N-1$ e $N-1 < c_1, c_2 < 2(N-1)$ temos pelo Lema 1.31 (página 26) que $|\xi|^{-c_1} * |\xi|^{-c_2} \leqslant C\, |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Sejam $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}$. Como u e v tem média nula no sentido de distribuições, obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{uv}(\xi,k)| &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta,m)\, \widehat{v}(\xi-\eta,k-m)|\, d\eta, \text{ pela Proposição 1.27} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta,m)\, \widehat{v}(\xi-\eta,k-m)|\, d\eta \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\eta|^{c_1}\, |\widehat{u}(\eta,m)|\, |\xi-\eta|^{c_2}\, |\widehat{v}(\xi-\eta,k-m)|}{|\eta|^{c_1}|\xi-\eta|^{c_2}}\, d\eta \\
&\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \|\widehat{u}(\cdot,m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_1})}\, \|\widehat{v}(\cdot,k-m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_2})} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{|\eta|^{c_1}|\xi-\eta|^{c_2}}\, d\eta \\
&\leqslant C\, |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \|\widehat{u}(\cdot,m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_1})}\, \|\widehat{v}(\cdot,k-m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_2})}.
\end{aligned}$$

Agora, como $0 < b_1, b_2 < 1$ e $1 < b_1 + b_2 < 2$ segue pelo Lema 1.32 (página 26) que $(|m|^{-b_1} * |m|^{-b_2})(k) \leqslant C\, |k|^{1-b_1-b_2}$ e portanto

$$\begin{aligned}
|\widehat{uv}(\xi,k)| &\leqslant C\, |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{|m|^{b_1}\, \|\widehat{u}(\cdot,m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_1})}\, |k-m|^{b_2}\, \|\widehat{v}(\cdot,k-m)\|_{L^\infty(|\cdot|^{c_2})}}{|m|^{b_1}\, |k-m|^{b_2}} \\
&\leqslant C\, |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{1}{|m|^{b_1}\, |k-m|^{b_2}}\, \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1,c_1}}\, \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2,c_2}} \\
&\leqslant C\, |k|^{1-b_1-b_2}\, |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2}\, \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1,c_1}}\, \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2,c_2}}.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\|u \cdot v\|_{\mathcal{PM}^{b_1+b_2-1,c_1+c_2-(N-1)}} \leqslant C\, \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1,c_1}}\, \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2,c_2}}.$$

■

Agora, usaremos o espaço $\mathcal{PM}^{b,c}$ com os índices b e c sob as condições

$$\frac{1}{2} < b < 1, \quad \frac{N-1}{2} < c < N-1, \quad b+c > N-1, \tag{3.9}$$

para definirmos o espaço $\mathcal{X}_{b,c}$ de todas as funções vetoriais $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ com $u_j : (0,\infty) \to \mathcal{PM}^{b,c}$ tais que

$$t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} u_j \in C_w((0,\infty); \mathcal{PM}^{b,c}),$$

onde $C_w((0,\infty); Y)$ denota o conjunto de todas as funções fracamente contínuas em $(0,\infty)$ com valores no espaço $Y \subset \mathcal{S}'$ no sentido de distriuições.

O espaço $\mathcal{X}_{b,c}$ é normado com a norma definida por

$$\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} := \sup_{t>0} t^a \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}},$$

onde $a := \dfrac{b+c-(N-1)}{2}$ e $\|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = \max\{\|u_1(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}, \ldots, \|u_N(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\}$. Além disso, o espaço $\left(\mathcal{X}_{b,c}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\right)$ é Banach.

A seguir, estabeleceremos o conceito de solução branda para o sistema (NS).

Definição 3.7. Sejam b e c satisfazendo as condições (3.9) e $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$ no sentido de distribuições. Uma solução branda do sistema (NS) é um vetor $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ tal que cada componente $t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} u_j$ pertence ao espaço $C_w((0,\infty), \mathcal{PM}^{b,c})$, $\nabla \cdot u = 0$ para $t > 0$, e que satisfaz a equação

$$u(t) \;=\; G_\varepsilon(t)u_0 + B(u,u)(t) \tag{3.10}$$

onde (3.10) é no sentido de distribuições $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)/K$, sendo os operadores $G_\varepsilon(t)$ e $B(u,u)$ definidos via transformada de Fourier como

$$\widehat{G_\varepsilon(t)u_0} = e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \widehat{u_0}(\xi,k) \tag{3.11}$$

e

$$\widehat{B(u,u)}(t) = -2\pi i \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi,k) \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\widehat{u \otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\, d\sigma, \tag{3.12}$$

para todo $t > 0$.

3.3 Soluções Globais no Tempo

De forma similar ao que foi feito no capítulo 2, utilizaremos um lema abstrato que nos permitirá evitar enfadonhas contas de ponto fixo (veja [31, Teorema 13.2]).

Lema 3.8. *Seja* $(\mathcal{X}_{b,c}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_{b,c}})$ *um espaço de Banach e* $B : \mathcal{X}_{b,c} \times \mathcal{X}_{b,c} \to \mathcal{X}_{b,c}$ *uma forma bilinear contínua, isto é, existe uma contante* $K_2 > 0$ *tal que*

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant K_2 \, \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \, \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}, \ \textit{para todo } u, v \in \mathcal{X}_{b,c}.$$

Então, se $0 < \eta < \dfrac{1}{4K_1K_2}$ *e se* $y \in \mathcal{X}_{b,c}$ *com* $\|y\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant K_1\eta$, *a equação* $u = y + B(u,u)$ *possui uma única solução* u *em* $\mathcal{X}_{b,c}$, *tal que* $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant 2K_1\eta$.

Além disso, a solução depende continuamente de y *no seguinte sentido: se* $\|\tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant K_1\eta$, $\tilde{u} = \tilde{y} + B(\tilde{u},\tilde{u})$ *e* $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant 2K_1\eta$, *então*

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \frac{1}{1 - 4K_1K_2\eta} \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}}.$$

Demonstração. Considere a aplicação $F : \mathcal{X}_{b,c} \to \mathcal{X}_{b,c}$ dada por $F(u) = y + B(u,u)$. Para $u \in \bar{B}(0, 2K_1\eta)$, onde $\bar{B}(0, 2K_1\eta) = \{u \in \mathcal{X}_{b,c} : \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant 2K_1\eta\}$, obtemos que

$$\|F(u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \|y\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u,u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant K_1\eta + K_2 4K_1^2\eta^2 = K_1\eta(1 + 4K_1K_2\eta) < 2\,K_1\,\eta$$

e consequentemente temos $F\left(\bar{B}(0, 2K_1\eta)\right) \subset \bar{B}(0, 2K_1\eta)$.

Agora, se $u, v \in \bar{B}(0, 2K_1\eta)$, então

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} &\leqslant \|B(u, u-v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u-v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\leqslant K_2 \, \|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \left(\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\right) \\
&\leqslant 4K_1K_2\eta \, \|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},
\end{aligned}$$

e obtemos que F é uma contração em $\bar{B}(0, 2K_1\eta)$, pois $4K_1K_2\eta < 1$. Portanto, segue pelo teorema do ponto fixo de Banach que a aplicação F possui um único ponto fixo $u \in \bar{B}(0, 2K_1\eta)$, a qual é a solução desejada.

Para demonstrar a dependência contínua, considere u e $\tilde{u}$ como no enunciado. Segue então que

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u,u) - B(\tilde{u},\tilde{u})\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + 4K_1K_2\eta\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

ou seja,

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \frac{1}{1 - 4K_1K_2\eta} \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

o que nos dá o resultado desejado.

■

Com o propósito de aplicar o Lema 3.8, precisamos verificar que $G_\varepsilon u_0 \in \mathcal{X}_{b,c}$ (com controle da norma por u_0) e que a forma bilinear em (3.4) é contínua em $\mathcal{X}_{b,c}$. Estas questões serão abordadas nos próximos dois lemas.

Lema 3.9. *Seja $d > 0$ tal que $(N-1) - c < d$, com b, c sob as condições (3.9). Se $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, então $t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} G_\varepsilon(\cdot)u_0 \in C_w((0,\infty); \mathcal{PM}^{b,c})$ e vale a desigualdade*

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \tilde{C}_1 \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},$$

onde $\tilde{C}_1 = C_1 \varepsilon^{b-d}$ é uma constante positiva. Além disso, $G_\varepsilon(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{S}'$, quando $t \to 0^+$.

Demonstração. Como a função $e^{-x}x^p$ é limitada em $x > 0$, para $p \in (0,1)$, segue a seguinte desigualdade para $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned}
&|k|^b\,|\xi|^c \left|\widehat{G_\varepsilon(t)u_0}(\xi,k)\right| \\
&= |k|^b\,|\xi|^c\, e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\, |\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\leqslant |k|^b\,|\xi|^c \left(4\pi^2 t\, \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{-\frac{b-d}{2}} \sup_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(e^{-4\pi^2 t\,\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2}\left(4\pi^2 t\,\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{b-d}{2}}\right) \\
&\quad \times \left(4\pi^2 t\; |\xi|^2\right)^{-\frac{c+d-(N-1)}{2}} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}}\left(e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\left(4\pi^2 t\; |\xi|^2\right)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}}\right) |\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\leqslant C\, t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}}\, |k|^b\,|\xi|^c \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^{-b+d} |\xi|^{(N-1)-c-d}\, |\widehat{u_0}(\xi,k)|\,, \text{ pois } c+d-(N-1) > 0 \\
&= C\,\varepsilon^{b-d}\, t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}}\, |k|^d\,|\xi|^{(N-1)-d}\, |\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\leqslant C_1\,\varepsilon^{b-d}\, t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}}\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},
\end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(b,c,N) > 0$ e portanto, $\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant C_1\,\varepsilon^{b-d}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}$.

Agora vamos mostrar a continuidade fraca com respeito a t. Pela propriedade do semigrupo $G_\varepsilon(t)$, é suficiente mostrar isto somente para $t = 0$. Logo, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle G_\varepsilon(t)u_0 - u_0, \varphi\rangle| &= \left|\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(G_\varepsilon(t)u_0 - u_0\right)^\wedge(\xi,k)\, \widehat{\varphi}(\xi,-k)\, d\xi\right| \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1\right| |\widehat{u_0}(\xi,k)|\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi \\
&=: \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} I(\xi,k)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Seja $k \in \mathbb{Z}^*$, então como $1 \leqslant |k|^d |\xi|^{(N-1)-d}$ em $\mathbb{R}^{N-1} \backslash B(0,1)$ podemos estimar $I(\xi,k)$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&I(\xi,k)\\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| |\widehat{u_0}(\xi,k)|\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}\backslash B(0,1)} \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| |\widehat{u_0}(\xi,k)|\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi\\
&\quad + \int_{B(0,1)} \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| |\widehat{u_0}(\xi,k)|\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{N-1}\backslash B(0,1)} \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi\\
&\quad + \int_{B(0,1)} \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}\; |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi\\
&\leqslant 4\pi^2 t\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \sup_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1}{4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right|\\
&\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}\backslash B(0,1)} \left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \right) |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi + \int_{B(0,1)} \frac{|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\; d\xi \right]\\
&\leqslant C\, t\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \Bigg[\|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1}\\
&\qquad + \int_{B(0,1)} \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}}\, d\xi \left(\|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty} \right) \Bigg]\\
&\leqslant C\, t\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \Bigg[\|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1}\\
&\qquad + \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty} \Bigg]
\end{aligned}
$$

e similarmente temos também

$$
I(\xi,0) \;\leqslant\; C\, t\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \left[\|\widehat{\varphi}(\cdot,0)\|_{L^1(|\cdot|^2)} + + \|\widehat{\varphi}(\cdot,0)\|_{L^\infty(|\cdot|^2)} \right].
$$

Como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, então

$$
C_\varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^1} + \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty(|\cdot|^2)} + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \|\widehat{\varphi}(\cdot,-k)\|_{L^\infty} \right] < \infty.
$$

Portanto, vale que

$$
|\langle G_\varepsilon(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle| \;\leqslant\; \varepsilon\, C\, t\, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}\, C_\varphi \longrightarrow 0,
$$

quando $t \to 0^+$ e com isso concluímos a prova do lema.

■

Lema 3.10. *O operador $B(\cdot,\cdot)$ definido em (3.4) é contínuo no espaço $\mathcal{X}_{b,c}$, isto é, existe uma constante $\tilde{C}_2 = C_2\,\varepsilon^{1-b} > 0$ tal que*

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant \tilde{C}_2\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

para todo $u, v \in \mathcal{X}_{b,c}$. Além disso, $B(u,v) \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{S}'$, quando $t \to 0^+$.

Demonstração. Como $\dfrac{N-1}{2} < c < N-1$, temos pelo Lema 1.31 que $|\xi|^{-c} * |\xi|^{-c} \leqslant C(c)\,|\xi|^{(N-1)-2c}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Sejam $(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}$ e $\sigma > 0$. Como u e v tem média nula no sentido de distribuições, obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{uv}(\xi,k,\sigma)| &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta,m,\sigma)\,\widehat{v}(\xi-\eta,k-m,\sigma)|\;d\eta \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta,m,\sigma)\,\widehat{v}(\xi-\eta,k-m,\sigma)|\;d\eta \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\eta|^c\,\widehat{u}(\eta,m,\sigma)\,|\xi-\eta|^c\,\widehat{v}(\xi-\eta,k-m,\sigma)}{|\eta|^c|\xi-\eta|^c}\,d\eta \\
&\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \|\widehat{u}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,\|\widehat{v}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{1}{|\eta|^c|\xi-\eta|^c}\,d\eta \\
&\leqslant C\,|\xi|^{(N-1)-2c}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \|\widehat{u}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,\|\widehat{v}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Relembrando que a transformada de Fourier do operador B nas variávies (ξ,k) é dado por

$$\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t) := -\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)2\pi i\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes v}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma,$$

e como $\dfrac{1}{2} < b < 1$, segue pelo Lema 1.32 que $(|m|^{-b} * |m|^{-b})(k) \leqslant C\,|k|^{1-2b}$. Assim, temos a seguinte estimativa para $\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)$ quando $k \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad\leqslant C\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\left|\widehat{(u\otimes v)}(\xi,k,\sigma)\right|\,d\sigma \\
&\quad\leqslant C\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right||\xi|^{(N-1)-2c} \\
&\qquad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\|\widehat{u}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,\|\widehat{v}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,d\sigma,\ \text{por (3.13)} \\
&\quad= C|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \\
&\qquad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\frac{|m|^b\,\|\widehat{u}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,|k-m|^b\,\|\widehat{v}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}}{|m|^b\,|k-m|^b}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant C|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\frac{1}{|m|^b\,|k-m|^b} \\
&\qquad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant C|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}|k|^{1-2b}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad= C|k|^{1-2b}|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Agora, pela estimativa acima e usando que $(N-1)-c>0$ e $1-b>0$, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
&|k|^b\,|\xi|^c\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad\leqslant\; C\,|k|^{1-b}\,|\xi|^{(N-1)-c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad=\; C\,\varepsilon^{1-b}\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^{1-b}|\xi|^{(N-1)-c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\,\varepsilon^{1-b}\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{(N-1)-c}{2}+\frac{1-b}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\,\varepsilon^{1-b}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \\
&\qquad\times\left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}}\left(4\pi^2(t-\sigma)\right)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\,\varepsilon^{1-b}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t (t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\qquad\times\operatorname*{ess\,sup}_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*} e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \\
&\quad\leqslant\; C\,\varepsilon^{1-b}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,t^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}+N-b-c}\int_0^1(1-z)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}\,z^{(N-1)-b-c}\,dz,\ \text{fazendo } \sigma=tz \\
&\quad=\; C\,\varepsilon^{1-b}\,t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\beta\left(\frac{-(N+1)+c+b}{2}+1,N-b-c\right),
\end{aligned}
$$

onde $\beta(\cdot,\cdot)$ denota a função beta.

Como $N-1<b+c<N$, segue que $\beta\left(\dfrac{-(N+1)+c+b}{2}+1,N-b-c\right)<\infty$. Logo,

$$
|k|^b\,|\xi|^c\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right|\leqslant C_2\,\varepsilon^{1-b}\,t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}, \tag{3.15}
$$

onde $C_2=C_2(b,c,N)>0$ e portanto

$$
\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\leqslant C_2\,\varepsilon^{1-b}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}.
$$

Para concluir o lema temos que provar a continuidade fraca. Sejam $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)$ e $t>0$ fixos. Para cada $s<t$, temos

$$
|\langle B(u,v)(t)-B(u,v)(s),\varphi\rangle|\;\leqslant\;\varepsilon\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)-\widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)\right||\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi.
$$

Usando as estimativas da primeira parte, temos a seguinte estimativa para a diferença entre $\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)$ e $\widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)$ para $k \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t) - \widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)\right| \\
&\quad \leqslant C \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \Bigg[\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left|\widehat{(u \otimes v)}(\xi,k,\sigma)\right| d\sigma \\
&\qquad + \int_0^s \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| \left|\widehat{(u \otimes v)}(\xi,k,\sigma)\right| d\sigma \Bigg] \\
&\quad \leqslant C \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \\
&\qquad \times \Bigg[\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&\qquad + \int_0^s \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| \sigma^{-2a} \, d\sigma \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\text{onde } a = \frac{b + c - (N-1)}{2}. \tag{3.16}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \sigma^{-2a} \, d\sigma &\leqslant \int_s^t \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&= \frac{t^{-2a+1} - s^{-2a+1}}{-2a+1}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&\quad \leqslant \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left| e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&\quad \leqslant 4\pi^2 (t-s) \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right|^2 \\
&\qquad \times \sup_{(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1}{4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&\quad \leqslant C \, 4\pi^2 (t-s) \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right|^2 \int_0^s \sigma^{-2a} \, d\sigma \\
&\quad \leqslant C \, 4\pi^2 (t-s) \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{s^{-2a+1}}{-2a+1}.
\end{aligned}
$$

Então, utilizando as estimativas acima em (3.16), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t) - \widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)\right| \\
&\quad \leqslant C \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\qquad \times \left[t^{-2a+1} - s^{-2a+1} + (t-s) \, s^{-2a+1} \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right|^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

e similarmente temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,0,t)-\widehat{B(u,v)}(\xi,0,s)\right| \;&\leqslant\; C\,|\xi|\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad\times\left[t^{-2a+1}-s^{-2a+1}+(t-s)\,s^{-2a+1}\,|\xi|^2\right].
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Então, por (3.17) e (3.18) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&|\langle B(u,v)(t)-B(u,v)(s),\varphi\rangle| \\
&\quad\leqslant\; C\,\varepsilon\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,(t^{-2a+1}-s^{-2a+1}) \\
&\qquad\times\Bigg[\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|k|^{1-2b}\,|\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi \\
&\qquad+\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\xi|\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|\widehat{\varphi}(\xi,0)|\,d\xi\Bigg]+\,C\,\varepsilon\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,(t-s)\,s^{-2a+1} \\
&\qquad\times\Bigg[\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|^3\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|k|^{1-2b}\,|\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi \\
&\qquad+\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\xi|^3\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|\widehat{\varphi}(\xi,0)|\,d\xi\Bigg] \\
&\quad=:\; C\,\varepsilon\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,(t^{-2a+1}-s^{-2a+1})\,[S_1+S_2] \\
&\qquad+C\,\varepsilon\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,(t-s)\,s^{-2a+1}\,[S_3+S_4].
\end{aligned}
$$

Agora, vamos estimar S_1, S_2, S_3 e S_4 separadamente. Começando com S_1, temos que

$$
\begin{aligned}
S_1 \;&=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|k|^{1-2b}\,|\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi \\
&=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|k|^{-1-2b}\Bigg[\int_{B(0,1)}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,|k|^2\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^{N-1}\setminus B(0,1)}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,|k|^2\,|\xi|^{2(N-1)}\,|\xi|^{-(N-1)-2c}\,|\widehat{\varphi}(\xi,-k)|\,d\xi\Bigg] \\
&\leqslant\; C\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|k|^{-1-2b}\Bigg[\left\||(\xi,k)|\,|k|^2\widehat{\varphi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})}\int_{B(0,1)}|\xi|^{(N-1)-2c}\,d\xi \\
&\quad+C\,\left\||(\xi,k)|\;\;|k|^2\,|\xi|^{2(N-1)}\,\widehat{\varphi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})}\int_{\mathbb{R}^{N-1}\setminus B(0,1)}|\xi|^{-(N-1)-2c}\,d\xi\Bigg] \\
&\leqslant\; C\left(\left\||(\xi,k)|\,|k|^2\widehat{\varphi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})}+\left\||(\xi,k)|\;\;|k|^2\,|\xi|^{2(N-1)}\,\widehat{\varphi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})}\right)<\infty
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\xi|\, |\xi|^{(N-1)-2c}\, |\widehat{\varphi}(\xi,0)|\, d\xi \\
&= \int_{B(0,1)} |\xi|\, |\xi|^{(N-1)-2c}\, |\widehat{\varphi}(\xi,0)|\, d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}\setminus B(0,1)} |\xi|^{2(N-1)+1}\, |\xi|^{-(N-1)-2c}\, |\widehat{\varphi}(\xi,0)|\, d\xi \\
&\leqslant C\left(\left\| |\xi| \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} + \left\| |\xi|^{2(N-1)+1}\, \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo ao que foi utilizado para estimar S_1 e S_2, obtemos que

$$\begin{aligned}
S_3 &\leqslant C\left(\left\| |(\xi,k)|^3\, |k|^2 \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} + \left\| |(\xi,k)|^3\;\; |k|^2\, |\xi|^{2(N-1)}\, \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} \right) < \infty \\
S_4 &\leqslant C\left(\left\| |\xi|^3 \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} + \left\| |\xi|^{2(N-1)+3}\, \widehat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\langle B(u,v)(t) - B(u,v)(s), \varphi\rangle| \leqslant C(\varphi)\, \varepsilon\, \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\, \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \left[(t^{-2a+1} - s^{-2a+1}) + (t-s)\, s^{-2a+1} \right],$$

onde $C(\varphi)$ é uma constante que também depende da função φ. Para o caso $t < s$ obtém-se similarmente expressões que vão para zero quando $s \to t$. Por fim, a demonstração da propriedade de convergência a zero quando $t \to 0^+$ pode ser obtida analogamente por uma combinação de argumentos das demonstrações acima e do Lema 3.9.

■

E finalmente, a seguir vamos enunciar e provar um resultado de boa-colocação para o sistema (NS) nos espaços $\mathcal{X}_{b,c}$.

Teorema 3.11. *Sejam índices b, c tais que*

$$\frac{1}{2} < b < 1, \qquad \frac{N-1}{2} < c < N-1, \qquad b + c > N-1.$$

Assuma que $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$, onde $d > (N-1) - c$, satisfaça

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \leqslant \eta, \;\; \text{para algum } 0 < \eta < \frac{1}{4C_1C_2\varepsilon^{1-d}},$$

onde C_1, C_2 são as constantes dos Lemas 3.9 e 3.10, respectivamente. Então, existe uma solução branda do sistema (NS) no espaço $\mathcal{X}_{b,c}$. Esta é a única solução branda satisfazendo a condição $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant 2C_1\varepsilon^{b-d;}\eta$ e ela depende continuamente do dado inicial u_0 no sentido do Lema 3.8. Além disso, $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{S}'$ quando $t \to 0^+$.

Além disso, sob a condição adicional $2b - 1 < d < 2(N-1) - 2c$ garantimos a propriedade de persistência $u \in L^\infty\left((0,\infty); \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}\right)$.

Demonstração. Note que o operador $B(\cdot,\cdot)$, definido em (3.4), é um operador bilinear e segue pelo Lema 3.10 que $B(\cdot,\cdot)$ também é um operador contínuo em $\mathcal{X}_{b,c}$.

Agora, pelo Lema 3.9, temos que

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant C_1\,\varepsilon^{b-d}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \leqslant C_1\,\varepsilon^{b-d}\,\eta.$$

E portanto, pelo Lema 3.8 existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_{b,c}$ da equação $u = G_\varepsilon(\cdot)u_0 + B(u,u)$, tal que $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leqslant 2C_1\,\varepsilon^{b-d}\eta$. A convergência fraca para o dado inicial segue das convergências das partes linear e bilinear mostradas nos Lemas 3.9 e 3.10.

Para mostrar que $u \in L^\infty\left((0,\infty);\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}\right)$ sejam $(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*$ e $t>0$, então pela desigualdade (3.14) segue que

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(\xi,k,t)| &\leqslant \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k)\right| \\
&\quad + \left|\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\,2\pi i\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\widehat{(u\otimes u)}(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\right| \\
&\leqslant |\widehat{u_0}(\xi,k)| + C\,|k|^{1-2b}\,|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad \times \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&=: |\widehat{u_0}(\xi,k)| + J(\xi,k,t).
\end{aligned}$$

Logo, como $1+d-2b,\ 2(N-1)-2c+d>0$ temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
&|k|^d\,|\xi|^{(N-1)-d}\,J(\xi,k,t) \\
&\quad\leqslant C\,|k|^{1+d-2b}\,|\xi|^{2(N-1)-2c-d}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad= C\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\varepsilon^{1+d-2b}\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^{1+d-2b}|\xi|^{2(N-1)-(2c+d)}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \\
&\quad\quad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant C\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\varepsilon^{1+d-2b}\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{1+d-2b}{2}+\frac{2(N-1)-(2c+d)}{2}+\frac{1}{2}} \\
&\quad\quad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant C\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\varepsilon^{1+d-2b}\int_0^t \frac{1}{4\pi^2(t-\sigma)^{N-b-c}}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\quad= C\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\varepsilon^{1+d-2b}\,t^{-N+b+c+(N-1)-b-c+1}\int_0^1 (1-z)^{-N+b+c}\,z^{(N-1)-b-c}\,dz \\
&\quad= C\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\varepsilon^{1+d-2b}\,\beta\left(-(N-1)+b+c,N-b-c\right).
\end{aligned}$$

Como $b+c>N-1$ e $b+c<N$, segue que $\beta\left(-(N-1)+b+c,N-b-c\right)<\infty$.

Portanto, para todo $t > 0$ temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^d \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^{(N-1)-d}|\widehat{u}(\xi,k,t)| \\ &\leqslant \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} + C\,\varepsilon^{1+d-2b}\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}} < \infty,\end{aligned}$$

ou seja, $u \in L^\infty\Big((0,\infty);\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}\Big)$.

■

Observação 3.12. Para d sob a condição

$$\max\{(N-1)-c, 2b-1\} < d < 2(N-1)-2c,$$

isto é, para d como no Teorema 3.11 com a condição adicional que garante a persistência do dado inicial, temos que pelas condições sob os índices, podemos aproximar b de $\frac{1}{2}$ pela esquerda e c de $N-1$ pela direita e depois aproximamos d de $\max\{(N-1)-c, 2b-1\}$ e assim teremos que d se aproxima de 0 pela esquerda e consequentemente $1-d$ se aproxima de 1. Por outro lado, podemos também aproximar b de $\frac{1}{2}$ e c de $(N-1)-b$ e depois aproximamos d de $2(N-1)-2c$ e assim teremos que d se aproxima de 1 pela direita. Em outras palavras, para cada taxa de controle da espessura $\delta \in (0,1)$, escolhendo os parâmetros de forma adequada, podemos usar o Teorema 3.11 para obter soluções globais para (NS) com dados iniciais satisfazendo

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < \frac{1}{4C_1C_2\varepsilon^\delta}, \quad \text{onde } 0 < \delta < 1.$$

3.4 Regularidade da solução

O objetivo dessa seção é mostrar que a solução fornecida pelo Teorema 3.11 é de classe C^∞.

3.4.1 Norma regularizante

Nesta seção introduziremos uma norma regularizante e apresentaremos uma extensão dos Lemas 3.9 e 3.10 para tal norma.

Definição 3.13. Sejam $\tilde{b}, \tilde{c} > 0$ tais que

$$N-1 < \tilde{b} + \tilde{c} < N, \tag{3.19}$$

então definimos os espaços

$$\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}} := \left\{ v : (0,\infty) \to \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} : \|v\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} := \sup_{t>0} t^{\frac{\tilde{b}+\tilde{c}-(N-1)}{2}} \|v(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} < \infty \right\}.$$

O objetivo agora é estabeceler uma estimativa para $G_\varepsilon(\cdot)u_0$ e $B(u,v)$ em $\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}$, quando $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$ e $u,v \in \mathcal{X}_{b,c}$ com os índices b, c e d sob as hipóteses do Teorema 3.11. Para isso, vamos precisar das seguintes condições para $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$:

$$2b-1<\tilde{b}, \quad \max\{(N-1)-d, 2c-(N-1)\}<\tilde{c} \quad \text{e} \quad \tilde{b}+\tilde{c}<2b+2c-(N-1). \tag{3.20}$$

A seguir, apresentaremos uma generalização para a estimativa do termo linear e bilinear em $\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}$.

Lema 3.14. *Seja $d>0$ tal que $(N-1)-c<d$, com b,c sob as condições (3.9). Se $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, então*

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} \leqslant \tilde{C}_3 \, \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},$$

onde $\tilde{C}_3 = C_3\,\varepsilon^{b-d}$ é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*$, então

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{G_\varepsilon(t)u_0}(\xi,k)\right| &= e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\;|\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\leqslant \frac{e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}}{|k|^d\,|\xi|^{(N-1)-d}}\;\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}.
\end{aligned}$$

Então, como $\tilde{c}+d-(N-1)>0$, segue que

$$\begin{aligned}
|k|^{\tilde{b}}\,|\xi|^{\tilde{c}}\left|\widehat{G_\varepsilon(t)u_0}(\xi,k)\right| &\leqslant |k|^{\tilde{b}-d}\,|\xi|^{\tilde{c}+d-(N-1)}\,e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\;\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \\
&\leqslant \varepsilon^{\tilde{b}-d}\,\left(4\pi^2 t\right)^{-\frac{\tilde{b}-d}{2}}\,\sup_{k\in\mathbb{Z}^*} e^{-4\pi^2 t\,\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2}\left(4\pi^2 t\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{\tilde{b}-d}{2}}\;\left(4\pi^2 t\right)^{-\frac{\tilde{c}+d-(N-1)}{2}} \\
&\quad\times \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}} e^{-4\pi^2 t\,|\xi|^2}\left(4\pi^2 t\,|\xi|^2\right)^{\frac{\tilde{c}+d-(N-1)}{2}}\;\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \\
&\leqslant C_3\,\varepsilon^{\tilde{b}-d}\,t^{-\frac{\tilde{b}+\tilde{c}-(N-1)}{2}}\;\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},
\end{aligned}$$

onde $C_3 = C_3(\tilde{b},\tilde{c},d,N)>0$.

Portanto, $\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} \leqslant C_3\,\varepsilon^{\tilde{b}-d}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}$.

■

Lema 3.15. *Sejam $u,v\in\mathcal{X}_{b,c}$, então existe uma constante $C_4>0$ tal que*

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} \leqslant C_4\,\varepsilon^{1-2b+\tilde{b}}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}.$$

para todo $u,v\in\mathcal{X}_{b,c}$.

Demonstração. Pela desigualdade (3.14) temos que

$$\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right| \leqslant C\,|k|^{1-2b}\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma,$$

para todo $(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*$ e $t>0$. Então, multiplicando $|k|^{\tilde b}\,|\xi|^{\tilde c}$ em ambos os lados da desigualdade acima e estimando, obtemos

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{\tilde c}\,|k|^{\tilde b}\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right| \\
&\leqslant C\,|\xi|^{(N-1)-2c+\tilde c}\,|k|^{1-2b+\tilde b}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&= C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\,|\xi|^{(N-1)-2c+\tilde c}\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^{1-2b+\tilde b}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Como $(N-1)-2c+\tilde c,\,1-2b+\tilde b>0$, segue que

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{\tilde c}\,|k|^{\tilde b}\left|\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)\right| \\
&\leqslant C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac12+\frac{(N-1)-2c+\tilde c}{2}+\frac{1-2b+\tilde b}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\leqslant C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad\times\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{l}{2}}\left(4\pi^2(t-\sigma)\right)^{-\frac{l}{2}}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma,
\end{aligned}$$

onde $l:=(N-1)+2-2b-2c+\tilde b+\tilde c$. O termo no lado direito da última desigualdade pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
&C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\operatorname*{ess\,sup}_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{l}{2}} \\
&\quad\times\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{l}{2}}\,\sigma^{(N-1)-b-c}\,d\sigma \\
&\leqslant C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,t^{-\frac{l}{2}+(N-1)-b-c+1}\int_0^1(1-z)^{-\frac{l}{2}}\,z^{(N-1)-b-c}\,dz \\
&= C\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\,t^{-\frac{\tilde b+\tilde c-(N-1)}{2}}\,\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\beta\left(\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde b-\tilde c}{2},N-b-c\right).
\end{aligned}$$

Desde que $-(N-1)+2b+2c-\tilde b-\tilde c>0$ e que $N-b-c>0$, então chegamos a estimativa

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{X}_{\tilde b,\tilde c}}\leqslant C_4\,\varepsilon^{1-2b+\tilde b}\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\,\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

onde $C_4=C_4(b,c,\tilde b,\tilde c,N)>0$.

■

Definição 3.16 (Norma regularizante)**.** Sejam b, c e d índices como na hipótese do Teorema 3.11, isto é,

$$\frac{1}{2} < b < 1, \quad \frac{N-1}{2} < c < N-1, \quad b+c > N-1 \quad \text{e} \quad (N-1)-c < d.$$

Sejam também $\tilde{b}, \tilde{c} > 0$ tais que

$$2b-1 < \tilde{b}, \ \max\{(N-1)-d, 2c-(N-1)\} < \tilde{c} \text{ e } (N-1) < \tilde{b}+\tilde{c} < 2b+2c-(N-1). \quad (3.21)$$

Então definimos o espaço

$$\mathcal{Y} \coloneqq \mathcal{X}_{b,c} \cap \mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}},$$

que equipado com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}} \coloneqq \|\cdot\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|\cdot\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}}$ é um espaço de Banach.

Observação 3.17. Seja u a solução dada pelo Teorema 3.11, então pelos Lema 3.9 (veja página 61) e Lema 3.14, obtemos que

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{Y}} &= \|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} \\ &\leqslant C_1\,\varepsilon^{b-d} + C_3\,\varepsilon^{\tilde{b}-d} < \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue pelos Lema 3.10 (veja página 63) e Lema 3.15 que

$$\begin{aligned} \|B(u,u)\|_{\mathcal{Y}} &= \|B(u,u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u,u)\|_{\mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}} \\ &\leqslant C_2\,\varepsilon^{1-b}\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}} + C_4\,\varepsilon^{1-2b+\tilde{b}}\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_{b,c}} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, como $u = G_\varepsilon(\cdot)u_0 + B(u,u)$ então garantimos que a solução u dada pelo Teorema 3.11 pertence ao espaço $\mathcal{Y}$, onde $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_{b,c} \cap \mathcal{X}_{\tilde{b},\tilde{c}}$.

3.4.2 Continuidade Forte no Tempo

Já vimos que as soluções dadas pelo Teorema 3.11 são fracamente contínuas. Nesta seção vamos verificar que tais soluções são também contínuas para $t > 0$ na norma dos espaços do tipo $\mathcal{PM}^{b,c}$. Para isso, vamos começar definindo o seguinte espaço:

Definição 3.18. Sejam os índices $b, c, d, \tilde{b}$ e $\tilde{c}$ sob as condições da Definição 3.16, então definimos por $\mathcal{Y}C\left((0,\infty); \mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}\right)$ o sub-espaço das funções $v \in \mathcal{Y}$ contínuas em $t > 0$ em relação as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}$. O espaço $\mathcal{Y}C\left((0,\infty); \mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}\right)$ é normado com a mesma norma do espaço $\mathcal{Y}$.

Os próximos dois resultados estabelecem a continuidade forte da parte linear e da parte bilinear, respectivamente.

Lema 3.19. *Seja* $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, *então* $G_\varepsilon(t)u_0 \in \mathcal{YC}\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right)$.

Demonstração. Seja t>0 fixo e $0 < s < t$, então para $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$ temos

$$
\begin{aligned}
&|k|^b\,|\xi|^c\,\left|\widehat{G_\varepsilon(t)u}_0(\xi,k) - \widehat{G_\varepsilon(s)u}_0(\xi,k)\right| \\
&\quad = |k|^b\,|\xi|^c \left| e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - e^{-4\pi^2 s\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| |\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\quad \leqslant |k|^b\,|\xi|^c\, e^{-4\pi^2 s\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left| e^{-4\pi^2 (t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1 \right| |\widehat{u_0}(\xi,k)| \\
&\quad \leqslant |k|^{b-d}\,|\xi|^{c+d-(N-1)}\, e^{-4\pi^2 s\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\, 4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right) \\
&\quad\quad \times \operatorname*{ess\,sup}_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2 (t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} - 1}{4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \right| \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \\
&\quad \leqslant C\,(t-s)\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}\,\varepsilon^{b-d}\,\left(4\pi^2 s\right)^{-\frac{b-d+c+d-(N-1)+2}{2}} \\
&\quad\quad \times \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left[e^{-4\pi^2 s\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2} \left(4\pi^2 s\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{b-d}{2}} \right] \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}} \left[e^{-4\pi^2 s|\xi|^2} \left(4\pi^2 s|\xi|^2\right)^{\frac{c+d-(N-1)+2}{2}} \right] \right. \\
&\quad\quad \left. + \sup_{k\in\mathbb{Z}^*} \left[e^{-4\pi^2 s\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2} \left(4\pi^2 s\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)^{\frac{b-d+2}{2}} \right] \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}} \left[e^{-4\pi^2 s|\xi|^2} \left(4\pi^2 s|\xi|^2\right)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}} \right] \right) \\
&\quad \leqslant C\,\varepsilon^{b-d}\,(t-s)\,s^{\frac{(N-1)-2-b-c}{2}}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|G_\varepsilon(t)u_0 - G_\varepsilon(s)u_0\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leqslant C\,(t-s)\,s^{\frac{(N-1)-2-b-c}{2}}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}}.
$$

Fazendo $s \to t^-$ na expressão acima temos que o lado direito vai para zero. De modo análogo, quando $t < s$ obtemos a seguinte estimativa:

$$
\|G_\varepsilon(t)u_0 - G_\varepsilon(s)u_0\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leqslant C\,(s-t)\,t^{\frac{(N-1)-2-b-c}{2}}\,\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},
$$

que também vai a zero quando $s \to t^+$ e assim concluímos a continuidade para $t > 0$.

Note que a única condição necessária para valer o resultado acima é que $c + d - (N-1) > 0$ e como vale também que $\tilde{c} + d - (N-1) > 0$, então o resultado vale para $\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$.

■

Proposição 3.20. *Sejam* $u, v \in \mathcal{YC}\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right)$, *então*

$$
B(u,v) \in \mathcal{YC}\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right).
$$

Demonstração. Sejam $t > 0$ fixo e $\eta > 0$ qualquer. Escolheremos um número $\delta \in (0, t)$, então para $s \in \left[t - \dfrac{\delta}{2}, t + \dfrac{\delta}{2}\right]$ temos a seguinte identidade para $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$:

$$|k|^b\, |\xi|^c \left(\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t) - \widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)\right) = |k|^b\, |\xi|^c \left(\int_0^t f_{\xi,k,t}(\sigma)\, d\sigma - \int_0^s f_{\xi,k,s}(\sigma)\, d\sigma\right), \quad (3.22)$$

onde $f_{\xi,k,t}(\sigma) := e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi,k) 2\pi i \left(\xi, \dfrac{k}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\widehat{u \otimes v}\right)(\xi,k,\sigma)$.

Fazendo as mudanças de variáveis $\tau = t - \sigma$ e $\tau = s - \sigma$ no lado direito de (3.22) temos

$$\begin{aligned}
&|k|^b\, |\xi|^c \left(\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t) - \widehat{B(u,v)}(\xi,k,s)\right) \\
&\quad = |k|^b\, |\xi|^c \left(-\int_t^0 f_{\xi,k,t}(t-\tau)\, d\tau + \int_s^0 f_{\xi,k,s}(s-\tau)\, d\tau\right) \\
&\quad = \int_0^{t-\delta} |k|^b\, |\xi|^c \left(f_{\xi,k,t}(t-\tau) - f_{\xi,k,s}(s-\tau)\right) d\tau + \int_{t-\delta}^t |k|^b\, |\xi|^c f_{\xi,k,t}(t-\tau)\, d\tau \\
&\qquad - \int_{t-\delta}^s |k|^b\, |\xi|^c f_{\xi,k,s}(s-\tau)\, d\tau \\
&\quad =: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Na sequência vamos estimar I_2 e I_3 usando a desigualdade (3.14). Então,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leqslant C\, |k|^b\, |\xi|^c\, |\xi|^{(N-1)-2c}\, |k|^{1-2b} \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad \times \int_{t-\delta}^t e^{-4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} (t-\tau)^{(N-1)-b-c}\, d\tau \\
&\leqslant C\, \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \sup_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*} e^{-4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)} \left[4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \\
&\quad \times \int_{t-\delta}^t (4\pi^2\tau)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} (t-\tau)^{(N-1)-b-c}\, d\tau \\
&\leqslant C(\varepsilon)\, (t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{(N-1)-b-c}\, d\tau \\
&\leqslant C(\varepsilon)\, (t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}}\, \delta^{N-b-c}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant C(\varepsilon)\, (t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \int_{t-\delta}^s (s-\tau)^{(N-1)-b-c}\, d\tau \\
&\leqslant C(\varepsilon)\, (t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} (s-t+\delta)^{N-b-c} \\
&\leqslant C(\varepsilon)\, (t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}}\, \delta^{N-b-c},
\end{aligned}$$

pois $s \leqslant t + \dfrac{\delta}{2}$ e $N - b - c > 0$.

Podemos notar que a constante $C(\varepsilon)$ depende apenas de b, c, N e ε, além disso podemos assumir a mesma constante para $|I_1|, |I_2|$ e $|I_3|$. Agora, tomando

$$\delta < \min\left\{ \frac{t}{2}, \left(\frac{\eta}{3C(\varepsilon)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \right)^{\frac{1}{N-b-c}} \right\},$$

temos que

$$|I_2|, |I_3| \leqslant C(\varepsilon) \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \delta^{N-b-c} \leqslant \frac{\eta}{3}.$$

Para estimar I_1, vamos primeiramente estimar a diferença entre $(\widehat{u \otimes v})(t-\tau)$ e $(\widehat{u \otimes v})(s-\tau)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\widehat{u \otimes v}\right)(\xi, k, t-\tau) - \left(\widehat{u \otimes v}\right)(\xi, k, s-\tau)\right| \\
&\quad \leqslant \left|\left(\widehat{u \otimes v}\right)(\xi, k, t-\tau) - \left(u(t-\tau) \otimes v(s-\tau)\right)^{\wedge}(\xi, k)\right| \\
&\qquad + \left|\left(u(t-\tau) \otimes v(s-\tau)\right)^{\wedge}(\xi, k) - \left(\widehat{u \otimes v}\right)(\xi, k, s-\tau)\right| \\
&\quad \leqslant C\,|k|^{1-2b}\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,\|u(t-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad + C\,|k|^{1-2b}\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,\|v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Note que se $\tau \in (0, t-\delta)$, então $t-\tau,\ s-\tau \in \left[\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}\right]$ uma vez que $t-\frac{\delta}{2} \leqslant s \leqslant t+\frac{\delta}{2}$. Como por hipótese u e v são contínuas logo são limitadas em $\left[\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}\right]$ e com isso temos a seguinte estimativa para I_1 usando a desigualdade (3.23):

$$\begin{aligned}
&|I_1| \\
&\leqslant C\,|k|^{1-b}\,|\xi|^{(N-1)-c}\left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \\
&\quad \times \left(\int_0^{t-\delta} e^{-4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \|u(t-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t-\delta} e^{-4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \|v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,d\tau \right) \\
&\leqslant C(\varepsilon) \sup_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}^*} \left[e^{-4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left(4\pi^2\tau\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right)^{\frac{(N-1)-c-b+2}{2}} \right] \\
&\quad \times \left(\int_0^{t-\delta} (4\pi^2\tau)^{-\frac{(N-1)-c-b+2}{2}} \|u(t-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t-\delta} (4\pi^2\tau)^{-\frac{(N-1)-c-b+2}{2}} \|v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,\|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\,d\tau \right) \\
&\leqslant C(\varepsilon)\,(t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \sup_{\tau\in[\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}]} \|u(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{\tau\in[0,t-\delta]} \|v(t-\tau) - v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad + C(\varepsilon)\,(t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \sup_{\tau\in[\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}]} \|v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{\tau\in[0,t-\delta]} \|u(t-\tau) - u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}$$

Por hipótese u e v são contínuas, então são uniformemente contínuas no intervalo $\left[\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}\right]$ e assim existe $\gamma \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ tal que $|(t-\tau)-(s-\tau)| = |t-s| < \gamma$ tal que

$$\|v(t-\tau)-v(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} < \frac{\eta}{6C(\varepsilon)}\left((t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \sup_{\tau\in[\frac{\delta}{2},t+\frac{\delta}{2}]}\|u(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\right)^{-1}$$

e

$$\|u(t-\tau)-u(s-\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} < \frac{\eta}{6C(\varepsilon)}\left((t-\delta)^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \sup_{\tau\in[\frac{\delta}{2},t+\frac{\delta}{2}]}\|v(\tau)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\right)^{-1}.$$

Sendo assim, para $|t-s| < \gamma$ temos que

$$|I_1| \leqslant \frac{\eta}{3}.$$

Portanto, juntando todas as estimativas para I_1, I_2 e I_3 concluímos que

$$\|B(u,v)(t)-B(u,v)(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} < \eta,$$

sempre que $|t-s| < \gamma$. De modo similar se prova que $B(u,v)(\cdot)$ é contínua em $t>0$ na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}$.

■

Uma consequência das estimativas apresentadas na Observação 3.17 juntamente com os Lemas 3.19 e 3.20 é que a solução do Teorema 3.11 pertence ao espaço $\mathcal{Y}C\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right)$, em outras palavras, podemos enunciar o seguite resultado:

Proposição 3.21. *Assuma as condições do Teorema 3.11 e que os índices $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$ são como na Definição 3.16. Então, a solução u obtida no Teorema 3.11 satisfaz*

$$u \in \mathcal{Y}C\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right),$$

e em particular $u \in C\left((0,\infty), \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}\right)$.

3.4.3 Soluções C^∞

O objetivo dessa seção é provar que as soluções obtidas pelo Teorema 3.11 são funções de classe C^∞ para $t>0$. Para tal fim vamos apresentar os seguintes espaços:

Definição 3.22. Sejam $M \in \mathbb{N}$ e $s \in (0,T)$, com $T<\infty$. Denotamos por $F_M = F_M(s,T)$ o espaço das funções vetoriais $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_N(t))$ com $v_j(t) : (s,T) \to \mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$ tais que

$$\partial^\alpha v_j \in C\left((s,T); \mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}\right), \ |\alpha| \leqslant M-1 \tag{3.24}$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e as derivadas são no sentido de distribuições em relação às variáveis espaciais. Denotaremos por $E_M = E_M(s,T)$ o espaço das funções $v \in F_M(s,T)$ tais que

$$(t-s)^{\frac{1}{2}}\partial^\alpha v_j \in C\left((s,T);\mathcal{PM}^{b,c}\cap\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}\right),\ |\alpha| = M, \tag{3.25}$$

Os espaços F_M e E_M são Banach equipados com normas definidas, respectivamente, por

$$\|g\|_{F_M} := \sum_{|\alpha|\leqslant M-1}\left(\sup_{s<t<T}\|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \sup_{s<t<T}\|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\right), \tag{3.26}$$

$$\|g\|_{E_M} := \|g\|_{F_M} + \sum_{|\alpha|=M}\left(\sup_{s<t<T}(t-s)^{\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \sup_{s<t<T}(t-s)^{\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha g(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\right). \tag{3.27}$$

Agora, para $s > 0$ considere a equação

$$v(t) = G_\varepsilon(t-s)u(s) - \int_s^t G_\varepsilon(t-\sigma)\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes v)(\sigma)\,d\sigma,$$

onde u é a solução do sistema (2.1) dada pelo Teorema 3.11. Definimos o termo bilinear da equação acima por

$$B_s(v,w) := -\int_s^t G_\varepsilon(t-\sigma)\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes w)(\sigma)\,d\sigma,$$

e consequentemente em variáveis de Fourier temos que

$$\widehat{B_s(v,w)}(t) = -2\pi i\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{v\otimes w}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma. \tag{3.28}$$

O próximo resultado estabelece a continuidade de B_s em F_M e E_M.

Proposição 3.23. *Sejam $s < T$ e $v,w \in F_N(s,T)$ (ou $E_N(s,T)$), então $B_s(v,w)$ é contínua nos espaços $F_N(s,T)$ e $E_N(s,T)$, isto é, existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\|B_s(v,w)\|_{F_M} &\leqslant C\left[(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}} + (T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\right]\|v\|_{F_M}\|w\|_{F_M}\\ \|B_s(v,w)\|_{E_M} &\leqslant C\left[(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}} + (T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\right]\|v\|_{E_M}\|w\|_{E_M}.\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $v,w \in F_M$ (ou E_M) e $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leqslant M$. Mostraremos primeiramente que vale a seguinte identidade:

$$\partial^\alpha\widehat{B_s(v,w)}(t) = \sum_{|\gamma|+|\rho|=|\alpha|} B_s(\widehat{\partial^\gamma v,\partial^\rho} w)(t). \tag{3.29}$$

De fato, para $|\alpha| = 1$ temos que

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}\widehat{B_s(v,w)}(\xi,k,t) &= -2\pi i\xi_i\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)2\pi i\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{v\otimes w}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\ &= -\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)2\pi i\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(2\pi i\xi_i\,\widehat{v\otimes w}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma,\end{aligned}$$

se $j \in \{1, \dots N-1\}$. Para $j = N$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_N} \widehat{B_s(v}, w)(\xi, k, t) \\
&\quad = -\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\frac{2\pi i k}{\varepsilon} \widehat{v \otimes w}\right)(\xi, k, \sigma)\, d\sigma.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
2\pi i \xi_i \widehat{v \otimes w}(\xi, k, \sigma) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} 2\pi i \xi_i\, \widehat{v}(\eta, m, \sigma)\, \widehat{w}(\xi - \eta, k - m, \sigma)\, d\eta \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} 2\pi i \eta_i\, \widehat{v}(\eta, m, \sigma)\, \widehat{w}(\xi - \eta, k - m, \sigma)\, d\eta \\
&\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} 2\pi i (\xi_i - \eta_i)\, \widehat{v}(\eta, m, \sigma)\, \widehat{w}(\xi - \eta, k - m, \sigma)\, d\eta \\
&= \partial_{x_j} \widehat{v \otimes} w(\xi, k, t) + v \widehat{\otimes \partial_{x_j}} w(\xi, k, t)
\end{aligned}
$$

e analogamente temos

$$
\frac{2\pi i k}{\varepsilon} \widehat{v \otimes w}(\xi, k, \sigma) = \partial_{x_N} \widehat{v \otimes} w(\xi, k, t) + v \widehat{\otimes \partial_{x_N}} w(\xi, k, t).
$$

Juntando as igualdades obtidas acima, concluímos que

$$
\partial_{x_j} \widehat{B_s(v}, w)(t) = B_s \widehat{(\partial_{x_j} v}, w)(t) + B_s \widehat{(v, \partial_{x_j}} w)(t),
$$

para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, ou seja, está provado o caso $|\alpha| = 1$. O caso geral segue usando o princípio da indução finita.

Prosseguindo com a prova, para $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$ vamos estimar $\widehat{B_s(v, w)}(\xi, k, t)$

de maneira semelhante a estimativa $\widehat{B(u,v)}(\xi,k,t)$ no Lema 3.10. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{B_s(v,w)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad \leqslant C\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+|\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)} \left|\widehat{(v\otimes w)}(\xi,k,\sigma)\right| d\sigma \\
&\quad \leqslant C\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| |\xi|^{(N-1)-2c} \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+|\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \|\widehat{v}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)} \|\widehat{w}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\, d\sigma, \text{ por } (3.13) \\
&\quad = C|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{|m|^b\|\widehat{v}(\cdot,m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}\,|k-m|^b\,\|\widehat{w}(\cdot,k-m,\sigma)\|_{L^\infty(|\cdot|^c)}}{|m|^b\,|k-m|^b}\, d\sigma \\
&\quad \leqslant C\,|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}} \frac{1}{|m|^b\,|k-m|^b} \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} d\sigma \\
&\quad \leqslant C\,|\xi|^{(N-1)-2c}\,|k|^{1-2b}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} d\sigma.
\end{aligned}
$$

E pela estimativa acima, temos que

$$
\begin{aligned}
&|k|^b\,|\xi|^c\left|\widehat{B_s(v,w)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad \leqslant C\,|k|^{1-b}\,|\xi|^{(N-1)-c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} d\sigma \\
&\quad \leqslant C\,\varepsilon^{1-b} \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad \times \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} (4\pi^2(t-\sigma))^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}}\, d\sigma \\
&\quad \leqslant C\,\varepsilon^{1-b} \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \int_s^t (t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}} d\sigma \\
&\quad \leqslant C\,(T-s)^{\frac{-N+1+b+c}{2}} \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|B_s(v,w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leqslant C\,(T-s)^{\frac{-N+1+b+c}{2}} \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&|k|^{\tilde{b}}\,|\xi|^{\tilde{c}}\left|\widehat{B_s(v,w)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad\leqslant\; C|k|^{1-2b+\tilde{b}}|\xi|^{(N-1)-2c+\tilde{c}}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right| \sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad\quad\times\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \\
&\quad\quad\times\left[4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{(N+1)-2b-2c+\tilde{b}+\tilde{c}}{2}}\left(4\pi^2(t-\sigma)\right)^{-\frac{(N+1)-2b-2c+\tilde{b}+\tilde{c}}{2}}d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\,(T-s)^{\frac{-N+1+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\|B_s(v,w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\leqslant C\,(T-s)^{\frac{-N+1+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\sup_{s<\sigma<T}\|v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
$$

Agora, se $|\alpha|\leqslant M-1$ concluímos de (3.29) que

$$
\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha B_s(v,w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad\leqslant\sum_{|\gamma|+|\rho|=|\alpha|}\|B_s(\partial^\gamma v,\partial^\rho w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad\leqslant\sum_{|\gamma|+|\rho|=|\alpha|} C\,(T-\sigma)^{\frac{-N+1+b+c}{2}}\sup_{s<\sigma<T}\|\partial^\gamma v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|\partial^\rho w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Similarmente, temos

$$
\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha B_s(v,w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} \\
&\quad\leqslant\sum_{|\gamma|+|\rho|=|\alpha|} C\,(T-s)^{\frac{-N+1+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\sup_{s<\sigma<T}\|\partial^\gamma v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|\partial^\rho w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Por outro lado, se $\alpha\in\mathbb{N}^N$ com $|\alpha|=M$, então

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{B_s(\partial^\alpha v,w)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad\leqslant\; C\,|k|^{1-2b}\,|\xi|^{(N-1)-2c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\sup_{s<\sigma<T}(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}\,\|\partial^\alpha v(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad\quad\times\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
&|\xi|^c\,|k|^b\,\left|B_s\widehat{(\partial^\alpha v, w)}(\xi,k,t)\right| \\
&\quad\leqslant\; C\,|k|^{1-b}\,|\xi|^{(N-1)-c}\left|\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\right|\sup_{s<\sigma<T}(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}\,\|\partial^\alpha v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad\times\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma \\
&\quad\leqslant\; C\sup_{s<\sigma<T}(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}\,\|\partial^\alpha v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\qquad\times\int_s^t (t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

A integral em (3.32) pode ser estimada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\int_s^{s+\frac{1}{2}(t-s)}(t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma &\leqslant \left(\frac{1}{2}(t-s)\right)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}\int_s^{s+\frac{1}{2}(t-s)}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma \\
&= 2^{\frac{(N+1)-b-c}{2}}(t-s)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}\left.\frac{(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}}{2}\right|_s^{s+\frac{1}{2}(t-s)} \\
&= C\,(t-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{s+\frac{1}{2}(t-s)}^t(t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}(\sigma-s)^{-\frac{1}{2}}\,d\sigma &\leqslant \left(\frac{1}{2}(t-s)\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{s+\frac{1}{2}(t-s)}^t(t-\sigma)^{\frac{-(N+1)+b+c}{2}}\,d\sigma \\
&= 2^{\frac{1}{2}}\,(t-s)^{-\frac{1}{2}}\left.\frac{2(\sigma-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}}{-(N-1)+b+c}\right|_{s+\frac{1}{2}(t-s)}^t \\
&\leqslant C\,(t-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, das estimativas acima concluímos que

$$
\begin{aligned}
&(t-s)^{\frac{1}{2}}\,\|B_s(\partial^\alpha v, w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \\
&\quad\leqslant\; C\,(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}\sup_{s<\sigma<T}(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}\,\|\partial^\alpha v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

De maneira similiar, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&(t-s)^{\frac{1}{2}}\,\|B_s(\partial^\alpha v, w)(t)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} \\
&\quad\leqslant\; C\,(T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\sup_{s<\sigma<T}(\sigma-s)^{\frac{1}{2}}\,\|\partial^\alpha v(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\sup_{s<\sigma<T}\|w(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Portanto, segue de (3.30) e (3.31) que

$$
\|B_s(v,w)\|_{F_M}\leqslant C\left[(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}+(T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\right]\|v\|_{F_M}\,\|w\|_{F_M}.
$$

Similarmente por (3.30), (3.31), (3.33) e (3.34), temos

$$
\|B_s(v,w)\|_{E_M}\leqslant C\left[(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}}+(T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\right]\|v\|_{E_M}\,\|w\|_{E_M}.
$$

■

Teorema 3.24. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.11 e seja u a solução do sistema (NS), então*

$$\partial_t^k \partial^\alpha u(t) \in C((0,\infty); \mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}), \tag{3.35}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Demonstração Vamos começar mostrando o resultado para o caso $k = 0$. Provaremos (3.35) por indução na ordem das derivadas sobre às variáveis espaciais.

Para $|\alpha| = 0$, o resultado segue pela Proposição 3.21. Então, suponha que (3.35) é válido para $|\alpha| \leqslant M-1$. Para mostrar (3.35) quando $|\alpha| = M$ vamos resolver a equação

$$v(t) = G_\varepsilon(t-s)u(s) - \int_s^t G_\varepsilon(t-\sigma)\mathbb{P}\nabla \cdot (v \otimes v)(\sigma)\, d\sigma \tag{3.36}$$

no espaço E_M.

Afirmação: $G_\varepsilon(t-s)u(s) \in E_M$.

De fato, para $|\alpha| \leqslant M-1$ pela hipótese de indução temos que

$$|k|^b\,|\xi|^c \left|\partial^\alpha \widehat{G_\varepsilon(t-s)u}(\xi,k,s)\right| \leqslant |k|^b\,|\xi|^c\, e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left|\widehat{\partial^\alpha u}(\xi,k,s)\right| \leqslant \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$$

e assim

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leqslant \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.$$

Analogamente, vale que $\|\partial^\alpha G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} \leqslant \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}$.

Se $|\alpha| = N$ com $\alpha = \beta + e_j$, onde $|\beta| = N-1$ e e_j é o $j-$ésimo vetor da base canônica, então

$$\begin{aligned}
&|\xi|^c\,|k|^b \left|\partial^\alpha \widehat{G_\varepsilon(t-s)u}(\xi,k,s)\right| \\
&\quad \leqslant C \left|\left(\xi, \frac{k}{\varepsilon}\right)\right| |\xi|^c\,|k|^b\, e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \left|\widehat{\partial^\beta u}(\xi,k,s)\right| \\
&\quad \leqslant C \sup_{(\xi,k)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}} \left[4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2 + \left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)} \\
&\qquad \times (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\partial^\beta u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{s<\sigma<T} (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\partial^\alpha G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leqslant C\, \|\partial^\beta u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}. \tag{3.37}$$

Além disso, claramente vale (3.37) substituindo $\mathcal{PM}^{b,c}$ por $\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$.

Pelas estimativas acima, podemos garantir que existe um constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{E_M} &\leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant M-1} \left(\|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\right),\\
\|G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{F_M} &\leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant M-1} \left(\|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\right).
\end{aligned}$$

E com isso finalizamos a prova da afirmação.

Agora, seja $L > 0$ tal que

$$L \geqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant M-1} \left(\|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \|\partial^\alpha u(s)\|_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\right),$$

então $\|G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{E_M}, \|G_\varepsilon(t-s)u(s)\|_{F_M} \leqslant L$. Além disso, podemos escolher um $T > s$ tal que

$$L < \frac{1}{4C\left[(T-s)^{\frac{-(N-1)+b+c}{2}} + (T-s)^{\frac{-(N-1)+2b+2c-\tilde{b}-\tilde{c}}{2}}\right]}$$

e assim pela Proposição 3.23 e pelo Lema 3.8 garantimos que existe uma única solução v de (3.36) nas bolas fechadas $B_{E_M}(0, 2L)$ e $B_{F_M}(0, 2L)$. Seja $T_0 > 0$ fixo tal que $T_0 > T$,então pela hipótese de indução concluímos que a solução u dada pelo Teorema 3.11 satisfaz

$$\|u\|_{F_M(s,T)} \leqslant \|u\|_{F_M(s,T_0)} < \infty.$$

Ademais, podemos escolher L de modo que $\|u\|_{F_M(s,T_0)} \leqslant 2L$ (diminuindo o valor de T caso for necessário), ou seja, u restrito ao intervalo (s, T) está na bola $B_{F_M}(0, 2L)$.

Agora mostraremos que $u(t)$ com t restrito ao intervalo (s, T) satisfaz (3.36). De fato, temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}(\xi,k,t) - \widehat{G_\varepsilon(t-s)u}(\xi,k,s)\\
&= e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k) - 2\pi i\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\
&\quad - e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u}(\xi,k,s)\\
&= e^{-4\pi^2 t\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k) - 2\pi i\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\
&\quad - e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}e^{-4\pi^2 s\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{u_0}(\xi,k)\\
&\quad + e^{-4\pi^2(t-s)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}2\pi i\int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\
&= -2\pi i\int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\
&\quad + 2\pi i\int_0^s e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma\\
&= -2\pi i\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)\left(|\xi|^2+\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2\right)}\widehat{\mathbb{P}}(\xi,k)\left(\xi,\frac{k}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\widehat{u\otimes u}\right)(\xi,k,\sigma)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $B_{E_M}(0,2L) \subset B_{F_M}(0,2L)$ e que $u|_{(s,T)}$ coincide com v, então pela unicidade da solução garantimos que $u|_{(s,T)} \in B_{E_M}(0,2L)$. Pela arbitrariedade de $s > 0$ concluímos que (3.35) vale para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $k = 0$.

A segunda parte da prova é mostrar que (3.35) é válido para todo $k \in \mathbb{N}$. Procederemos novamente por indução, mas agora em k. Suponha que (3.35) vale para todo $k \leqslant M - 1$, então aplicando $\partial_t^M \partial^\alpha$ à (3.3) temos que

$$\begin{aligned} \partial_t^M \partial^\alpha u(x,s,t) &= \partial_t^M \partial^\alpha \left[G_\varepsilon(t) u_0 - \int_0^t G_\varepsilon(t-\sigma) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(\sigma)\, d\sigma \right] \\ &= \partial_t^{M-1} (\Delta \partial^\alpha u)(x,s,t) - \mathbb{P}\nabla \cdot \partial_t^M \partial^\alpha (u \otimes u)(x,s,t) \end{aligned}$$

e em variáveis de Fourier

$$\partial_t^M \widehat{\partial^\alpha u}(\xi,k,t) = \partial_t^{M-1} (\Delta \partial^\alpha u)^\wedge(x,s,t) - 2\pi i \sum_{\gamma+\rho=\alpha} \sum_{k+l=M-1} \widehat{\mathbb{P}}(\xi,k) \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\rho u)^\wedge(\xi,k,t).$$

Pela hipótese de indução segue que a primeira parcela da identidade acima está em $\mathcal{PM}^{b,c} \cap \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$. Em contrapartida, pelas propriedades da transforma de Fourier o termo $2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\rho u)^\wedge(\xi,k,t)$ pode ser expressado pela transformada de um somatório de produtos de devivadas de u, onde a ordem das derivadas espaciais ou permanecem igual ou acrescenta 1 e as derivadas temporais permanecem iguais. Por outro lado, sabemos que o operador $\mathbb{P}$ leva $\mathcal{PM}^{b,c}$ em $\mathcal{PM}^{b,c}$ e que pela hipótese de indução os fatores do produto $\mathbb{P}\nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\rho u)(t)$ estão em $\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$, com $\tilde{b}, \tilde{c}$ sobre as condições (3.21). Por outro lado, podemos tomar índices b_1 e c_1 sobre as condições (3.21) tal que $b - b_1 + 1$ e $c - c_1 + (N-1)$ também estejam sobre as condições (3.21) e assim utilizando a hipótese de indução juntamente com a Proposição 3.6 concluímos que $\mathbb{P}\nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\rho u)(t)$ tem componentes em $\mathcal{PM}^{b,c}$. De maneira análoga concluímos que $\mathbb{P}\nabla \cdot (\partial_t^k \partial^\gamma u \otimes \partial_t^l \partial^\rho u)(t)$ tem componentes em $\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}$, o que completa a prova do resultado.

■

Antes de apresentar o resultado de regularidade, vamos apresentar um resultado que relaciona as normas em L^q e $\mathcal{PM}^{b,c}$, para índices adequados. Para isso, precisamos da seguinte suposição.

Suposição 3.25. *Suponha que os índices b, c e d satisfaçam as seguintes condições*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & \dfrac{N-1}{2} & < & c & < N-1; \\ (ii) & (N-1) - c & < & d & ; \\ (iii) & \max\left\{ \dfrac{(N-1)-d}{N-1}, \dfrac{2c-(N-1)}{N-1}, \dfrac{1}{2} \right\} & < & b & < 1; \\ (iv) & N-1 & < & b+c & . \end{array}$$

Além disso, suponha também que os índices $\tilde{b}, \tilde{c}$ satisfaçam as seguintes condições

$$
\begin{aligned}
(v) \quad & \max\left\{2c-(N-1),(N-1)-d,\frac{N-1}{2}\right\} < \tilde{c} < \min\{c, b(N-1)\}\,; \\
(vi) \quad & \max\{b,(N-1)-\tilde{c}\} < \tilde{b} < \min\{N-\tilde{c}, -(N-1)+2b+2c-\tilde{c}\}\,.
\end{aligned}
$$

Observação 3.26. (1) Vejamos que é possivel encontrar índices nas condições da Suposição 3.25.

$$
\begin{aligned}
\text{De } (i): \quad & c < N-1 \Rightarrow 2c-(N-1) < c; \\
\text{De } (ii): \quad & (N-1)-c < d \Rightarrow (N-1)-d < c; \\
\text{De } (iii): \quad & \frac{2c-(N-1)}{N-1} < b \Rightarrow 2c-(N-1) < b(N-1); \\
\text{De } (iii): \quad & \frac{(N-1)-d}{N-1} < b \Rightarrow (N-1)-d < b(N-1); \\
\text{De } (iii): \quad & \frac{1}{2} < b \Rightarrow \frac{N-1}{2} < b(N-1); \\
\text{De } (iii) \text{ e } (v): \quad & b<1 \quad \text{e} \quad \tilde{c} < c < N-1 \Rightarrow b+\tilde{c} < N \Rightarrow b < N-\tilde{c}; \\
\text{De } (iv) \text{ e } (v): \quad & b+c > N-1 \quad \text{e} \quad c > \tilde{c} \\
& \Rightarrow -(N-1)+b+2c-\tilde{c} > 0 \Rightarrow b < -(N-1)+2b+2c-\tilde{c}; \\
\text{De } (iv): \quad & b+c > N-1 \Rightarrow 2(N-1) < 2b+2c; \\
& \Rightarrow (N-1)-\tilde{c} < -(N-1)+2b+2c-\tilde{c}.
\end{aligned}
$$

(2) É importante ressaltar que os índices b, c e d na Suposição 3.25 estão nas condições do Teorema 3.11 e que os índices $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$ estão também sob as condições (3.21).

Lema 3.27. *Sejam índices $b, c, \tilde{b}$ e $\tilde{c}$ como na Suposição 3.25. Então para $q \in \left(\frac{N-1}{(N-1)-\tilde{c}}, \min\left\{\frac{1}{1-b}, \frac{N-1}{(N-1)-c}\right\}\right)$ e para $v \in \mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}} \cap \mathcal{PM}^{b,c}$, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$
\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)} \leqslant C\left(\|v\|^p_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} + \|v\|^p_{\mathcal{PM}^{b,c}}\right)^{\frac{1}{p}},
$$

onde p é o expoente conjugado de q.

Demonstração. Como p é o expoente conjugado de q, isto é, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, então

$$
\begin{aligned}
& \frac{N-1}{(N-1)-\tilde{c}} < q < \min\left\{\frac{1}{1-b}, \frac{N-1}{(N-1)-c}\right\} \\
& \Rightarrow \max\left\{1-b, \frac{(N-1)-c}{(N-1)}\right\} < \frac{1}{q} < \frac{(N-1)-\tilde{c}}{N-1} \\
& \Rightarrow \frac{\tilde{c}}{N-1} < \frac{1}{p} = 1-\frac{1}{q} < \min\left\{b, \frac{c}{(N-1)}\right\} \Rightarrow \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{N-1}{c}\right\} < p < \frac{N-1}{\tilde{c}}.
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{N-1}{2} < \tilde{c}$, $b < 1$ e $c < N-1$, então $1 < \max\left\{\dfrac{1}{b}, \dfrac{N-1}{c}\right\} < p < \dfrac{N-1}{\tilde{c}} < 2$ e assim pela desigualdade de Hausdorff-Young (veja [49, p. 190]) segue que

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{L^q(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)} &\leqslant C\,\|\widehat{v}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z})},\\
&= C\int_{\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{Z}} |\widehat{v}(\xi,k)|^p\, d\xi\otimes d\mu \ (\mu \text{ é a medida de contagem})\\
&\leqslant C\|v\|^p_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|^{\tilde{b}p}}\int_{|\xi|\leqslant 1}\frac{1}{|\xi|^{\tilde{c}p}}\,d\xi + C\|v\|^p_{\mathcal{PM}^{b,c}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|^{bp}}\int_{|\xi|>1}\frac{1}{|\xi|^{cp}}\,d\xi.
\end{aligned}$$

Agora note que temos $\tilde{c} < \dfrac{N-1}{p} < c$ e $\dfrac{1}{p} < b < \tilde{b}$, então

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|^{\tilde{b}p}},\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|k|^{bp}},\quad \int_{|\xi|\leqslant 1}\frac{1}{|\xi|^{\tilde{c}p}}\,d\xi \quad \text{e} \quad \int_{|\xi|>1}\frac{1}{|\xi|^{cp}}\,d\xi \text{ são finitos,}$$

e portanto $\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{T}_\varepsilon)} \leqslant C\left(\|v\|^p_{\mathcal{PM}^{\tilde{b},\tilde{c}}} + \|v\|^p_{\mathcal{PM}^{b,c}}\right)^{\frac{1}{p}}$.

■

E para finalizar temos o resultado que garante que a solução do Teorema 3.11 é C^∞.

Teorema 3.28. *A solução branda u do sistema (2.1) dada pelo Teorema 3.11 é uma função vetorial de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times(0,\varepsilon)\times\mathbb{R}^+)$. Em particular, a solução é clássica para $t > 0$.*

Demonstração. Podemos concluir do Lema 3.27 e do Teorema 3.24 que $\partial^k u_j(t) \in W^{l,q}(\mathbb{R}^{N-1}\times(0,\varepsilon))$, com $q \in \left(\dfrac{N-1}{(N-1)-\tilde{c}}, \min\left\{\dfrac{1}{1-b}, \dfrac{N-1}{(N-1)-c}\right\}\right)$ e para todo $l \geqslant 1$ e inteiro. E segue pela Proposição 1.43 (veja página 31), a imersão de Sobolev, que cada $\partial^k u_j(t)$ é uma função C^∞. Agora, para concluir que $\partial_t^k u_j(t)$ são contínuas em $t > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ basta usar um procedimento de indução em k para o sistema (NS), o que prova o resultado.

■

Observação 3.29.

1. Foi provado que a solução dada pelo Teorema 3.11 é suave, porém com algumas restrições adicionais em alguns parâmetros, uma vez que os índices b, c e d são como na Suposição 3.25.

2. Para os índices b, c e d como na Suposição 3.25 podemos tomar o índice c próximo de $N-1$ e consequentemente obtemos d próximo de 0. Por outro lado, podemos aproximar c de $\dfrac{N-1}{2}$ e consequentemente obtemos d próximo de 1. Assim, recordando a

condição sobre o dado inicial u_0 no Teorema 3.11, isto é, $\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-(1-d)}$ obtemos para cada $\delta \in (0,1)$ soluções globais suaves para dados iniciais satisfazendo

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } C > 0 \text{ é uma constante.}$$

3. Os Teoremas 3.11 e 3.28 fornecem uma classe de soluções suaves e com persistência no dado inicial, isto é,

$$u \in L^\infty\big((0,\infty);\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}\big) \cap C^\infty\big(\mathbb{R}^{N-1} \times (0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^+\big).$$

Para isso ocorrer os índices b, c e d devem satisfazer as condições (i)-(iv) da Suposição 3.25 e $2b-1 < d < 2(N-1)-2c$, ou seja, os índices devem estar sob as seguintes condições:

$$(a) \qquad \frac{N-1}{2} < c < \frac{N-1}{N+1}\left(N+\frac{1}{2}\right);$$

$$(b) \qquad \max\left\{\frac{2c-(N-1)}{N-1}, (N-1)-c, \frac{1}{2}\right\} < b < \left(N-\frac{1}{2}\right) - c;$$

$$(c) \quad \max\{(N-1)-c, 2b-1, (N-1)(1-b)\} < d < 2(N-1)-2c.$$

Note que podemos aproximar c de $\dfrac{N-1}{N+1}\left(N+\dfrac{1}{2}\right)$ e assim d se aproxima de $2(N-1)-2c$, então $1-d$ se aproxima de $\dfrac{2}{N+1}$. Por outro lado, podemos aproximar b de $\dfrac{1}{2}$ e consequentemente $1-d$ se aproxima de 0. Logo, temos a persistência e a suavidade da solução u quando

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } 0 < \delta < \frac{2}{N+1}.$$

Observe que quanto maior a dimensão N menor será o limite da taxa de espessura . Em particular, para $N=3$ temos que

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ onde } 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Referências

[1] Adams, R. A., and Fournier, J. J. F. *Sobolev spaces*, second ed., vol. 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Barraza, O. A. Self-similar solutions in weak L^p-spaces of the Navier-Stokes equations. *Rev. Mat. Iberoamericana 12*, (2) (1996), 411–439.

[3] Biler, P. Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis. *Adv. Math. Sci. Appl. 8*, (2) (1998), 715–743.

[4] Blanchet, A., Dolbeault, J., and Perthame, B. Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron. J. Differential Equations* (2006), No. 44, 32pp.

[5] Calvez, V., and Corrias, L. The parabolic-parabolic Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *Commun. Math. Sci. 6*, (2) (2008), 417–447.

[6] Cannone, M. A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. *Rev. Mat. Iberoamericana 13*, (3) (1997), 515–541.

[7] Cannone, M., and Karch, G. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system? *J. Differential Equations 197*, (2) (2004), 247–274.

[8] Casado-Díaz, J., Luna-Laynez, M., and Suárez-Grau, F. J. Asymptotic behavior of the Navier-Stokes system in a thin domain with Navier condition on a slightly rough boundary. *SIAM J. Math. Anal. 45*, (3) (2013), 1641–1674.

[9] Choe, H. J., and Lkhagvasuren, B. Global existence result for chemotaxis Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. *J. Math. Anal. Appl. 446*, (2) (2017), 1415–1426.

[10] Corrias, L., and Perthame, B. Critical space for the parabolic-parabolic Keller-Segel model in $\mathbb{R}^d$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342*, (10) (2006), 745–750.

[11] Dolbeault, J., and Perthame, B. Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339*, (9) (2004), 611–616.

[12] Dombrowski, C., Cisneros, L., Chatkaew, S., Goldstein, R., and O Kessler, J. Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. *Physical review letters (93)* (09 2004), 098103.

[13] Duarte-Rodríguez, A., and Ferreira, L. C., and Villamizar-Roa, É. J. Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B 24*, (2) (2019), 423–447.

[14] Ferreira, L. C. F. On a bilinear estimate in weak-Morrey spaces and uniqueness for Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures Appl. (9) 105*, (2) (2016), 228–247.

[15] Ferreira, L. C. F., and Postigo, M. Global well-posedness and asymptotic behavior in Besov-Morrey spaces for chemotaxis-Navier-Stokes fluids. *Journal of Mathematical Physics 60*, (6) (2019), 061502, 19 pp. (preprint arXiv:1811.02709v1).

[16] Ferreira, L. C. F., and Precioso, J. C. Existence and asymptotic behaviour for the parabolic–parabolic keller–segel system with singular data. *Nonlinearity 24*, (5) (2011), 1433–1449.

[17] Folland, G. B. *Real analysis*, second ed. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[18] Giga, Y., and Miyakawa, T. Navier-Stokes flow in $\mathbf{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces. *Comm. Partial Differential Equations 14*, (5) (1989), 577–618.

[19] Grafakos, L. *Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[20] Herrero, M. A., and Velázquez, J. J. L. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 24*, (4) (1997), 633–683 (1998).

[21] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[22] Iftimie, D., and Raugel, G. Some results on the Navier-Stokes equations in thin 3D domains. *J. Differential Equations 169*, (2) (2001), 281–331.

[23] Iorio, Jr., R. J., and Iorio, V. d. M. a. *Fourier analysis and partial differential equations*, vol. 70 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] Kato, T. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 22*, (2) (1992), 127–155.

[25] Koch, H., and Tataru, D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. *Adv. Math. 157*, (1) (2001), 22–35.

[26] Kozono, H., Miura, M., and Sugiyama, Y. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid. *J. Funct. Anal. 270*, (5) (2016), 1663–1683.

[27] Kozono, H., and Sugiyama, Y. The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ and its application to self-similar solutions. *Indiana Univ. Math. J. 57*, (4) (2008), 1467–1500.

[28] Kozono, H., and Sugiyama, Y. Global strong solution to the semi-linear Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with small data in scale invariant spaces. *J. Differential Equations 247*, (1) (2009), 1–32.

[29] Kozono, H., and Yamazaki, M. Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Comm. Partial Differential Equations 19*, (5-6) (1994), 959–1014.

[30] Kukavica, I., and Ziane, M. On the regularity of the Navier-Stokes equation in a thin periodic domain. *J. Differential Equations 234*, (2) (2007), 485–506.

[31] Lemarié-Rieusset, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, vol. 431 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[32] Liao, X. On the strong solutions of the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations in a thin domain. *Differential Integral Equations 29*, (1-2) (2016), 167–182.

[33] Lieb, E. H., and Loss, M. *Analysis*, second ed., vol. 14 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[34] Lorz, A. A coupled Keller-Segel-Stokes model: global existence for small initial data and blow-up delay. *Commun. Math. Sci. 10*, (2) (2012), 555–574.

[35] Mazzucato, A. L. Besov-Morrey spaces: function space theory and applications to non-linear PDE. *Trans. Amer. Math. Soc. 355*, (4) (2003), 1297–1364.

[36] Miao, C.-x., and Yuan, B.-q. Weak Morrey spaces and strong solutions to the Navier-Stokes equations. *Sci. China Ser. A 50*, (10) (2007), 1401–1417.

[37] Nagai, T., Senba, T., and Yoshida, K. Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial. Ekvac. 40*, (3) (1997), 411–433.

[38] Schwartz, L. Théorie des distributions à valeurs vectorielles. II. *Ann. Inst. Fourier. Grenoble 8* (1958), 1–209.

[39] Temam, R. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, second ed., vol. 66 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995.

[40] Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., Wolgemuth, C. W., Kessler, J. O., and Goldstein, R. E. Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences 102*, (7) (2005), 2277–2282.

[41] Wakabayashi, F. The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type in Morrey space. *J. Differential Equations 265*, (9) (2018), 4661–4686.

[42] Winkler, M. Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier-)Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. *Comm. Partial Differential Equations 37*, (2) (2012), 319–351.

[43] Winkler, M. Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis–Navier–Stokes system. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis 33*, (5) (2016), 1329–1352.

[44] Yamazaki, M. The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force. *Math. Ann. 317*, (4) (2000), 635–675.

[45] Yang, M., Fu, Z., and Sun, J. Existence and large time behavior to coupled chemotaxis-fluid equations in Besov–Morrey spaces. *Journal of Differential Equations 266*, (9) (2019), 5867–5894.

[46] Zhai, Z. Global well-posedness for nonlocal fractional Keller-Segel systems in critical Besov spaces. *Nonlinear Anal. 72*, (6) (2010), 3173–3189.

[47] Zhang, Q. Local well-posedness for the chemotaxis-Navier-Stokes equations in Besov spaces. *Nonlinear Anal. Real World Appl. 17* (2014), 89–100.

[48] Zhao, J., and Zhou, J. Temporal decay in negative besov spaces for the 3d coupled chemotaxis–fluid equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications 42* (2018), 160–179.

[49] Zygmund, A. *Trigonometrical series*. Dover Publications, New York, 1955.