



MICHAEL SANTOS GONZALES GARGATE

SINGULARIDADES DE FEIXES INSTANTON
SOBRE \mathbb{P}^3

CAMPINAS

2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Michael Santos Gonzales Gargate

Singularidades de feixes instanton sobre \mathbb{P}^3

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Univer-
sidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de
Doutor em matemática.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MICHAEL
SANTOS GONZALES GARGATE, E ORIENTADA PELO
PROF DR. MARCOS BENEVENUTO JARDIM.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink, which appears to read "Marcos Jardim", is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

G589s Gonzales Gargate, Michael Santos, 1984-
Singularidades de feixes instanton sobre P^3 / Michael Santos Gonzales
Gargate. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Instantons. 2. Singularidades (Matemática). I. Jardim, Marcos
Benevenuto, 1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Singularities of instanton sheaf on P^3

Palavras-chave em inglês:

Instantons

Singularities (Mathematics)

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Simone Marchesi

Henrique Nogueira de Sá Earp

Maurício Barros Corrêa Júnior

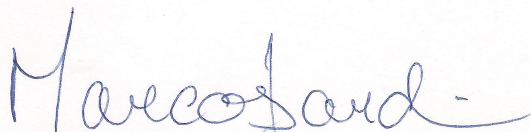
Abdelmoubine Amar Henni

Data de defesa: 25-03-2014

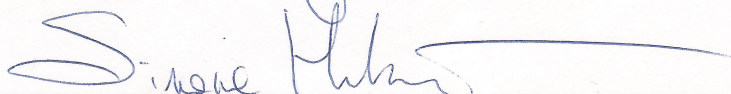
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de março de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



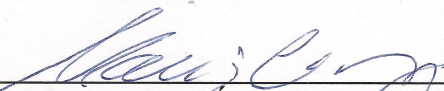
Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



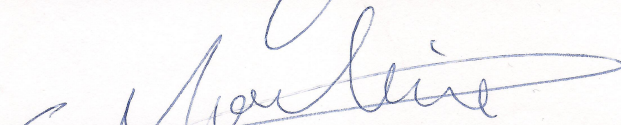
Prof(a). Dr(a). SIMONE MARCHESI



Prof(a). Dr(a). HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP



Prof(a). Dr(a). MAURÍCIO BARROS CORRÊA JÚNIOR



Prof(a). Dr(a). ABDELMOUBINE AMAR HENNI

Abstract

In this thesis we study the singular locus of instanton sheaves on the projective space \mathbb{P}^3 . We prove that the singular locus $\text{Sing}(E)$ of a non-locally free instanton sheaf E of rank 2 has pure dimension 1, and that the double dual E^{**} is a locally free instanton sheaf (Theorem 3.1.5). Both statements are false if the rank of E is larger than 2.

We also consider the sheaves $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ and $Q_E = E^{**}/E$. When E is a non-locally free instanton sheaf of rank 2, we show that S_E and Q_E are rank 0 instantons, according to a definition of Hauzer and Langer in [10]. In addition, we show that both are supported on the singular locus $\text{Sing}(E)$ and have the same Hilbert polynomial (Sections 3.1.2 and 3.1.3).

Finally, we present some properties of the singular locus. We guarantee that the singular locus is contained in a complete intersection curve of degree c^2 , where $c = c_2(E)$ is called the *charge* of E (Proposition 3.2.1). Moreover, based on the notion of elementary transformations for instantons given by Jardim, Markushevich and Tikhomirov in [16], we construct an example of a rank 2 instanton sheaf whose singular locus is not connected (Section 3.2.3).

We also provide examples of rank 3 instanton sheaves whose singular loci are a single point, and a straight line plus a point.

Resumo

Nesta tese estudamos o conjunto singular de feixes instanton sobre o espaço projetivo \mathbb{P}^3 . Um dos resultados principais mostra que o conjunto singular de um feixe instanton não localmente livre de posto 2 tem dimensão pura 1, e que o duplo dual E^{**} é um feixe instanton localmente livre (Teorema 3.1.5). Ambos enunciados são falsos quando o posto de E é maior que 2.

Também consideramos os feixes $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ e $Q_E = E^{**}/E$. Se E é feixe instanton não localmente livre de posto 2 em \mathbb{P}^3 , mostramos que S_E e Q_E são feixes instanton de posto 0, conforme definição introduzida por Hauzer e Langer em [10]. Além disso, mostramos que S_E e Q_E são suportados no conjunto singular $\text{Sing}(E)$ e possuem o mesmo polinômio de Hilbert (Seções 3.1.2 e 3.1.3).

Finalmente, apresentamos algumas propriedades do conjunto singular. Garantimos que o conjunto singular está contido em uma curva de interseção completa de grau c^2 , onde $c = c_2(E)$ é chamada a *carga* de E (Proposição 3.2.1). Por outro lado, baseado na noção de transformações elementares para instantons dada por Jardim, Markushevich e Tikhomirov em [16], constituímos um exemplo de feixe instanton de posto 2 cujo conjunto singular não é conexo (Seção 3.2.3).

Fornecemos também exemplos de feixes instantons de posto 3 cujo conjunto singular consiste de um ponto, e um ponto e uma reta.

Sumário

Abstract	vi
Resumo	vi
Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Feixes coerentes sobre variedades algébricas	6
1.2 Feixes coerentes e conjunto singular	11
2 Feixes Instanton	20
2.1 Mônadas	21
2.2 Feixes lineares	23
2.3 Feixes instanton	27
2.4 Configurações ADHM	30
2.4.1 Configurações ADHM 0-dimensionais	30
2.4.2 Configurações ADHM 1-dimensionais	30
3 Conjunto Singular de Feixes Instanton	33
3.1 Feixes instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3	34
3.1.1 Complexo de Eagon–Northcott do conjunto singular	41

3.1.2	Propriedades dos feixes S_E e Q_E	43
3.1.3	Polinômio de Hilbert de S_E e Q_E	45
3.2	Propriedades do conjunto singular $\text{Sing}(E)$	48
3.2.1	$\text{Sing}(E)$ está contido numa curva de grau c^2	48
3.2.2	Transformações elementares para instantons	50
3.2.3	Exemplo de posto 2	51
3.2.4	Exemplo de posto 3	54
	Referências	56

Dedico

Aos meus pais Nicolas Gonzales e Felicitas Gargate.

Aos meus irmãos Ivan, Karen e Renzo.

A minha tia Blandina Gargate, por ter-me apoiado sempre.

Agradecimentos

Aos meus pais, por todo o esforço que fizeram para ser a pessoa que sou agora.

A minha tia Blandina que eu considero como a minha segunda mãe. Assim como aos meus Padrinhos Miguel e Esther, dos quais sempre tive o apoio que precisei.

A meu irmão Ivan, que sempre me apoiou, e porque apesar de tudo, não deixou de acreditar em mim. Assim como aos meus irmãos Karen e Renzo, sei que sempre contarei com vocês em tudo. Também como esquecer de meus primos Jean Pierre, Ericka e meus sobrinhos Josue e Luana Camila, e a minha cunhada Nadia Rios.

Ao Prof. Dr. Marcos Jardim, por ter-me guiado com sua experiência e ter muita paciência nestes 4 anos de orientação.

Aos membros todos presentes na banca, agradeço pelas sugestões e conselhos.

A minha amiga Jaqueline Siqueira e ao Prof. Dr. Nivaldo Medeiros, por ter-me ajudado no momento mas difícil que tive no Brasil, estou inteiramente agradecido por isso.

Aos amigos e colegas que tenho na UNICAMP. Agradeço de forma muito especial aos amigos Carlos Rubianes, Aldo Medina, Francielle Lima, Valter Camargo, Adson Motta, Lucas Castello, Dennis Espejo, sempre presentes nos dias bons e nos não tão bons.

Ao prof. Luiz Antonio Pareja (in memoriam), pelo apoio constante desde minha formação.

Por fim, à CAPES pelo auxílio financeiro.

Introdução

A classificação de instantons na esfera 4-dimensional realizada por Atiyah, Drinfeld, Hitchin e Manin no artigo [2] forneceu uma interessante ligação entre a física teórica e a geometria algébrica, posto que a demonstração realizada utilizou-se de certos fibrados algébricos em \mathbb{P}^3 . Diferentes aspectos desta ligação entre física teórica e a geometria algébrica foi intensamente explorada por inúmeros autores nos últimos 35 anos. Neste trabalho focaremos em um aspecto bastante particular desta ligação, estudando os chamados fibrados instanton.

Os fibrados em \mathbb{P}^3 que originalmente surgiram na classificação de instantons por Atiyah, Drinfeld, Hitchin e Manin foram posteriormente batizados de fibrados instanton matemáticos (no original em inglês, *mathematical instanton bundles*), ou simplesmente fibrados instanton. Motivados por um trabalho de Mamone Capria e Salamon [22], Okonek e Spindler [24] generalizaram este conceito para espaços projetivos de dimensão ímpar. Mais recentemente, Jardim [15] estendeu ainda mais o conceito para incluir feixes não necessariamente localmente livres em espaços projetivos de qualquer dimensão. Há uma vasta literatura sobre fibrados instanton, veja por exemplo [1, 3, 17, 29]; o estudo de feixes instanton não localmente livres é, entretanto, bem mais recente.

Um dos problemas cruciais na teoria de fibrados instantons é o estudo das propriedades geométricas do espaço de módulos de fibrados instanton de posto 2 em \mathbb{P}^3 . Trabalhos recentes de Tikhomirov [30, 31], Jardim e Verbitsky [19] e Markushevich e Tikhomirov [23] estabeleceram que o espaço de módulos $\mathcal{I}(c)$ de fibrados instanton de posto 2 e carga c

em \mathbb{P}^3 é uma variedade não singular, irredutível e racional de dimensão $8c - 3$, resolvendo questões em aberto há mais de 30 anos. O próximo passo é estudar a compactificação deste espaço de módulos; para tanto, faz-se necessário entender feixes instantons não localmente livres de posto 2 em \mathbb{P}^3 . Nesta tese, focamos no estudo do conjunto singular destes feixes.

Feixes instantons são definidos como o feixes livres de torção dados como a cohomologia de uma mônada linear da forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{r+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^c.$$

onde $c = h^1(E(-1))$ é chamada a *carga* de E e r o posto de E (ver Definição 2.1.2).

O *conjunto singular* do feixe E é definido como:

$$\text{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid E_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, x}\}$$

onde E_x representa a haste de E no ponto $x \in \mathbb{P}^3$ (ver Definição 1.1.3).

O objetivo desta tese é o estudo do conjunto singular de feixes instanton E não localmente livres de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 . Não é difícil ver que se E é um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 então $\dim \text{Sing}(E) = 1$ (Proposição 3.1.1). Mas não é claro que a dimensão é pura, isto é, $\text{Sing}(E)$ poderia conter componentes de dimensão zero.

Assim, um dos principais resultados deste trabalho é dado pelo seguinte teorema.

Teorema. Seja E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , então:

- (1) O conjunto singular $\text{Sing}(E)$ tem dimensão pura 1.
- (2) E^{**} é um feixe instanton localmente livre.

Aqui (1) nos diz que o conjunto singular é uma curva em \mathbb{P}^3 . Por outro lado, (2) nos dá uma classificação neste caso, pois para posto maior que 2 ambas afirmações são falsas (ver Observação 3.1.6).

Assim dada a curva $\text{Sing}(E)$ em \mathbb{P}^3 , nos perguntamos:

Que propriedades tem esta curva?

Apresentamos algumas de suas propriedades, como por exemplo, segundo a definição de configurações ADHM, garantimos que o conjunto singular está contido em uma curva de interseção completa de grau c^2 , e apresentamos um exemplo no qual o conjunto singular é a união disjunta de duas retas, isto é, não é conexo.

Por outro lado, na demonstração do Teorema principal 3.1.5, definimos os feixes $Q_E = E^{**}/E$ e $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$. Fornecemos também alguns resultados sobre estes feixes.

Descrevemos agora o conteúdo desta tese.

Capítulo 1. Neste capítulo começaremos com algumas definições básicas para a leitura dos capítulos seguintes. Começamos com resultados importantes sobre feixes coerentes sobre variedades projetivas, assim como as definições de feixes localmente livres, livres de torção e feixes reflexivos. Relembramos também a definição de classes de Chern e apresentamos algumas de suas propriedades. Definimos o conjunto singular para feixes coerentes, ressaltando algumas de suas propriedades. Constituímos assim um esboço dos pré-requisitos para a compreensão dos capítulos seguintes. Neste capítulo usamos como referência [4, 7, 21, 24].

Capítulo 2. Na Seção 2.1, introduzimos a noção de mônada. Esta foi estudada primeiro por Horrocks em [13], onde provou que todo feixe localmente livre E sobre o espaço projetivo \mathbb{P}^3 pode ser obtido como a cohomologia de uma mônada da forma

$$\oplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_i) \longrightarrow \oplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b_j) \longrightarrow \oplus_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_k).$$

Nesta tese, trabalhamos com mônadas lineares sobre \mathbb{P}^3 dadas como acima com $a_i = -1$ para todo i , $b_j = 0$ para todo j , e $c_k = 1$ para todo k , cuja existência, está garantida por um resultado dado por Floystad em [5] (ver Teorema 2.1.3).

Na Seção 2.2, vemos a definição de feixes instanton. Primeiramente definimos os chamados feixes lineares, os quais são definidos como a cohomologia da mônada linear

Também definimos nesta seção o nosso objeto de estudo, que é o conjunto singular de feixes, apresentando um resultado importante sobre sua codimensão (Proposição 2.2.5).

Assim, definimos feixes instanton e relembramos algumas de suas propriedades existentes na literatura, como por exemplo a noção de μ -estabilidade o qual será útil para garantir uma propriedade importante no caso em que o feixe seja de tipo de quebra trivial (Ver Definição 2.3.2 e Observação 2.3.13).

Já na última seção, tratamos sobre configurações ADHM (Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin) onde vemos sua conexão com as mônadas, a qual será fundamental para garantir uma propriedade do conjunto singular. Aqui temos como referências [2, 11, 17].

Capítulo 3. Consideramos o feixe instanton E de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 definido como a cohomologia da mônada

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c,$$

e observamos que $c_1(E) = c_3(E) = 0$ e a carga $c = c_2(E)$.

Na Seção 3.1, definimos o conjunto singular como sendo os pontos $x \in \mathbb{P}^3$ nos quais a haste E_x não é livre. Mostramos o resultado principal (Teorema 3.1.5).

”O conjunto singular de E quando não vazio tem dimensão pura 1”

Isto é, o conjunto singular é uma curva em \mathbb{P}^3 . Como consequência, provamos também que o duplo dual E^{**} do feixe instanton E é um feixe instanton localmente livre. Observamos que ambos resultados são falsos quando o posto de E é maior que 2 (Observação 3.1.6).

Ainda nesta seção escrevemos o complexo de Eagon–Northcott do conjunto singular, o qual pode ser útil para um estudo futuro referente a este trabalho; aqui, temos como referência [4, 20]. Também apresentamos resultados decorrentes da demonstração do Teorema Principal 3.1.5, onde, baseados na definição dada por Hauzer e Langer em [10] (ver Definição 3.1.11), mostramos que os feixes $Q_E = E^{**}/E$ e $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ são

feixes instanton de posto zero. Além disso, mostramos também que ambos feixes tem o mesmo suporte, isto é, $\text{Supp}(Q_E) = \text{Supp}(S_E) = \text{Sing}(E)$.

Em seguida, provamos que os polinômios de Hilbert de ambos os feixes são iguais, e escrevemos explicitamente o respectivo polinômio de Hilbert.

Na Seção 3.2, apresentamos algumas propriedades obtidas sobre o conjunto singular de feixes instanton por exemplo, baseados na relação existente entre mônadas e as configurações ADHM, mostramos que o conjunto singular do feixe instanton está contido em uma curva de interseção completa de grau c^2 , onde c é o valor da carga de E .

Logo, passamos a construir feixes instanton baseados na definição de transformações elementares para instantons dado por Jardim, Markushevich e Tikhomoriv em [16]. Assim apresentamos um caso especial onde o conjunto singular do feixe instanton não é conexo. Além disso, construímos um exemplo de feixe instanton de posto 3, cujo conjunto singular é a união de um ponto e uma reta.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciamos alguns resultados de feixes coerentes e resultados importantes sobre o conjunto singular de feixes.

Na Seção 1.1, introduzimos algumas definições sobre feixes coerentes e dimensão homológica. Aqui, definimos feixes coerentes k -sizígia, assim como o conjunto singular para feixes coerentes, importante nos capítulos seguintes. As referências para esta seção são [7, 24, 32].

Na Seção 1.2, apresentamos as definições de feixes coerentes localmente livres, livres de torção e reflexivos e sua relação com o conjunto singular de feixes. As referências para esta seção são [7, 21, 27, 32].

1.1 Feixes coerentes sobre variedades algébricas

Considere X um espaço topológico. A seguinte definição pode ser encontrada em [7, Capítulo 2].

Definição 1.1.1. *Um **pré-feixe** E de grupos abelianos sobre X consiste do seguinte:*

- (1) *Para todo subconjunto aberto $U \subset X$, um grupo abeliano $E(U)$.*

(2) Para toda inclusão $V \subset U$ de subconjuntos abertos de X , um morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : E(U) \rightarrow E(V)$.

Os morfismos ρ_{UV} são chamados morfismos restrição e satisfazem:

- $E(\emptyset) = 0$.
- ρ_{UU} é o mapa identidade $E(U) \rightarrow E(U)$.
- Se $W \subset V \subset U$ são subconjuntos abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Se E é um pré-feixe sobre X e U subconjunto aberto de X , então $E(U)$ é chamado de seções de E sobre U .

Definição 1.1.2. Um pré-feixe E sobre um espaço topológico X é um **feixe** se satisfaz as seguintes condições:

- (1) Se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U , e se $s \in E(U)$ é um elemento tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i , então $s = 0$.
- (2) Se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U , e se temos elementos $s_i \in E(V_i)$ para cada i , com a propriedade que para cada i, j ; $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe um elemento $s \in E(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i .

A seção s cuja existência é garantida por (2) é chamada de colagem de seções s_i .

No que segue, considere X uma variedade projetiva, não singular, de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{K} . Estas definições e resultados podem ser encontradas em [7, 14, 24, 32].

Definição 1.1.3 ([7], Capítulo 2, Pág. 61). Seja E um pré-feixe sobre X , e x um ponto de X , definimos a **haste** E_x de E para x por:

$$E_x = \varinjlim_{x \in U} E(U),$$

onde o lado direito é o limite direto dos grupos $E(U)$, para todos os conjuntos abertos U contendo x , para a ordem $U < V$ definida por $V \subset U$. (ver [7, Capítulo II, Página 66])

Um elemento de E_x é representado pelos pares $\langle U, s \rangle$, onde U é uma vizinhança aberta de x , e s é um elemento de $E(U)$. Dois pares $\langle U, s \rangle$ e $\langle V, t \rangle$ definem o mesmo elemento de E_x se, e somente se, existe uma vizinhança aberta W de x com $W \subset U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Assim podemos ver os elementos da haste E_x como germes de seções locais de E para o ponto x .

Por outro lado, seja \mathcal{O}_X o feixe das funções regulares sobre X (ver [7, Capítulo I]). Lembrando que um feixe sobre X é dito um \mathcal{O}_X -módulo, quando a seguinte condição é satisfeita: para cada conjunto aberto U , $E(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo, tal que para conjuntos abertos $V \subset U$ o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times E(U) & \longrightarrow & E(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times E(V) & \longrightarrow & E(V) \end{array}$$

comuta. Para mais detalhes ver [7, Capítulo 2] e [32, Página 17].

Note que a haste E_x de E para o ponto x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo. Assim definamos:

Definição 1.1.4 ([32], Definição 4.25, Pág. 30). *Um \mathcal{O}_X -módulo E sobre X é dito **coerente**, ou **feixe coerente**, se satisfaz as seguintes condições:*

- (1) E é um \mathcal{O}_X -módulo finitamente gerado.
- (2) Para um conjunto aberto arbitrário U de X e para um homomorfismo arbitrário de \mathcal{O}_U -módulos

$$\varphi : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \longrightarrow E|_U \rightarrow 0,$$

$\ker \varphi$ é um \mathcal{O}_X -módulo finitamente gerado.

Agora considere E um feixe coerente sobre X . Então:

Definição 1.1.5 ([14], Definition 1.1.1). *O suporte de E é definido como sendo o conjunto fechado*

$$\text{Supp}(E) = \{x \in X \mid E_x \neq 0\}.$$

A dimensão de $\text{Supp}(E)$ é chamada a dimensão do feixe E e denotado por

$$\dim E = \dim \text{Supp}(E).$$

Definição 1.1.6 ([14], Definition 1.1.2). *O feixe coerente E é de dimensão pura d se $\dim(F) = d$, para todo subfeixe coerente não trivial $F \subset E$.*

Se E e F são \mathcal{O}_X -módulos, denote por $\text{Hom}(E, F)$ o grupo de homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos, e por $\mathcal{H}om(E, F)$ o feixe Hom (ver [7, Capítulo II]). Para E fixo, $\text{Hom}(E, \cdot)$ e $\mathcal{H}om(E, \cdot)$ são funtores exatos covariantes à esquerda. Defina os funtores $\text{Ext}^i(E, \cdot)$ como o funtor derivado à direita de $\text{Hom}(E, \cdot)$ e $\mathcal{E}xt^i(E, \cdot)$ como o funtor derivado à direita de $\mathcal{H}om(E, \cdot)$. Para mais detalhes sobre funtores derivados ver [7, Capítulo III, Seção 6] e [12, Capítulo 5].

Assim tem-se:

Proposição 1.1.7 ([7], Cap. III, Proposição 6.3). *Para qualquer \mathcal{O}_X -módulo E , temos:*

- (1) $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, E) = E$;
- (2) $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X, E) = 0$, para $i > 0$;
- (3) $\text{Ext}^i(\mathcal{O}_X, E) \cong H^i(X, E)$, para todo $i \geq 0$.

Proposição 1.1.8 ([7], Cap. III, Proposição 6.4). *Se $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, então para qualquer \mathcal{O}_X -módulo H temos a sequência exata longa*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(F, H) \rightarrow \text{Hom}(E, H) \rightarrow \text{Ext}^1(G, H) \rightarrow \dots$$

e igualmente para feixes $\mathcal{E}xt$.

Também, Hartshorne em [7] mostra a seguinte resultado:

Proposição 1.1.9 ([7], Cap. III, Proposição 6.8). *Seja E um feixe coerente sobre X , F um \mathcal{O}_X -módulo e $x \in X$ um ponto. Então temos*

$$(\mathcal{E}xt^i(E, F))_x \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^i(E_x, F_x)$$

para todo $i \geq 0$.

Em seguida apresentamos alguns resultados dados em [24, Capítulo 2]. Para isto começamos com a seguinte definição:

Definição 1.1.10 ([24], Capítulo 2). A *dimensão homológica* $dh E_x$ de E_x sobre $\mathcal{O}_{X,x}$, é o comprimento minimal de uma resolução livre de E_x .

Aqui $dh E_x$ é o menor inteiro k tal que para todo $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo M finitamente gerado e para todo $i > k$ tem-se:

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^i(E_x, M) = 0.$$

A dimensão homológica pode ser estimada como segue

Lema 1.1.11 ([24], Lema 1.1.1). $dh E_x \leq q$ quando para todo $i > q$, tem-se:

$$(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(E, \mathcal{O}_X))_x = 0.$$

Agora estimamos a dimensão do suporte dos feixes $\mathcal{E}xt$.

Lema 1.1.12 ([24], Lema 1.1.2). Para E feixe coerente sobre a variedade X n -dimensional, tem-se:

$$\dim(\text{Supp } \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(E, \mathcal{O}_X)) \leq n - i, \text{ para todo } i.$$

Definição 1.1.13 ([24], Definição 1.1.3). O m -ésimo conjunto singular da dimensão homológica de E é definido como sendo:

$$S_m(E) = \{x \in X \mid dh E_x \geq n - m\}.$$

Aqui do lema (1.1.11), tem-se que:

$$S_m(E) = \bigcup_{i=n-m}^n \text{Supp}(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(E, \mathcal{O}_X)).$$

Portanto, como consequência do Lema (1.1.12) obtemos:

Lema 1.1.14 ([24], Lema 1.1.4). Os conjuntos $S_m(E)$ são fechados em X , de codimensão $\geq n - m$.

A haste E_x de E para $x \in X$ é livre se, e somente se, a dimensão homológica de E_x é zero. Assim temos a seguinte definição

Definição 1.1.15. *Seja E um feixe coerente sobre X , o conjunto*

$$\text{Sing}(E) := \{x \in X \mid E_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{X,x}\},$$

*é chamado o **conjunto singular** de E .*

Observação 1.1.16. Observe que o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ é igual a $S_{n-1}(E)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \text{Sing}(E) &= \{x \in X \mid E_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X \mid dh E_x \geq 1 = n - (n - 1)\} \\ &= S_{n-1}(E). \end{aligned}$$

1.2 Feixes coerentes e conjunto singular

Nesta seção vamos definir os diferentes tipos de feixes coerentes, a saber, feixes coerentes localmente livres, livres de torção e reflexivos. Apresentamos alguns resultados fundamentais para a demonstração dos resultados nos seguintes capítulos.

Para isto, considere da mesma forma X uma variedade projetiva não singular de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{K} . Os seguintes resultados podem ser encontradas em [21, Capítulo V], [24, Capítulo 2].

Para feixes coerentes, definimos o feixe k -sizígia E como segue:

Definição 1.2.1 ([24], Definição 1.1.5). *Um feixe coerente E sobre X é um **feixe k -sizígia** se existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus p_1} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus p_2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus p_k}.$$

Da mesma forma, se diz que E é um feixe localmente k -sizígia, se para todo aberto $U \subset X$ existe uma sequência exata.

$$0 \longrightarrow E|_U \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_1} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus p_k}.$$

Para conjuntos singulares de feixes tem-se a seguinte estimativa para a codimensão

Teorema 1.2.2 ([24], Teorema 1.1.6). *Para a codimensão do conjunto singular $\text{Sing}(E)$ de um feixe coerente E que é um feixe localmente k -sizígia, tem-se que:*

$$\text{codim}(\text{Sing}(E), X) > k.$$

Definição 1.2.3 ([7], Capítulo II). *Um \mathcal{O}_X -módulo E é dito **localmente livre** se X pode ser recoberto por conjuntos abertos U tal que $E|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo livre. Neste caso o posto de E sobre tais conjuntos abertos é o número de cópias do feixe estrutural e para $x \in X$ a haste E_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre.*

Um feixe localmente livre de posto 1 é também chamado de **feixe invertível**.

Observação 1.2.4. A restrição $E|_{X \setminus \text{Sing}(E)}$ é um feixe localmente livre. Note que se E é um feixe localmente livre, então $\text{Sing}(E) = \emptyset$.

Definição 1.2.5 ([24], Definição 1.1.7). *Um feixe coerente E sobre X é **livre de torção**, se para $x \in X$ a haste E_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre de torção, isto é se, dados $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $a \in E_x$ tais que $fa = 0$, então $f = 0$ ou $a = 0$.*

Feixes localmente livres são livres de torção. Subfeixes de um feixe livre de torção são também feixes livres de torção.

Lema 1.2.6 ([24], Capítulo 2, Lema 1.1.8). *Seja E um feixe coerente livre de torção de posto r . Para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x e um monomorfismo de feixes*

$$E|_U \hookrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r}.$$

Assim feixes livres de torção são feixes localmente 1-sizígia. Então pelo Teorema 1.2.2, tem-se:

Corolário 1.2.7. *O conjunto singular de um feixe coerente livre de torção tem codimensão pelo menos 2.*

Seja $E^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X)$ o feixe dual do feixe coerente E e $\mu : E \rightarrow E^{**}$ o morfismo canônico. Então $\ker \mu$ é o subfeixe de torção $T(E)$ de E , isto é,

$$\ker \mu_x = \{a \in E_x \mid fa = 0 \text{ para algum } f \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\}\}, \quad x \in X.$$

Observação 1.2.8. Um feixe livre de torção é naturalmente um subfeixe do seu duplo dual, ou seja, o morfismo

$$\mu : E \rightarrow E^{**},$$

é injetivo.

Definição 1.2.9 ([24], Definição 1.1.9). *Um feixe coerente E tal que o morfismo natural $\mu : E \rightarrow E^{**}$ é um isomorfismo é chamado **reflexivo**.*

Lema 1.2.10 ([24], Capítulo 2, Lema 1.1.10). *O conjunto singular de um feixe coerente reflexivo tem codimensão pelo menos 3.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.2 é suficiente provar que feixes reflexivos são feixes localmente 2-sizígia. Como E^* é coerente, temos uma sequência exata

$$\mathcal{O}_U^q \rightarrow \mathcal{O}_U^p \rightarrow E^*|_U \rightarrow 0$$

sobre um conjunto aberto U . Assim temos a seguinte sequência exata dual

$$0 \rightarrow E^{**}|_U \rightarrow \mathcal{O}_U^q \rightarrow \mathcal{O}_U^p.$$

Como E é reflexivo temos $E|_U \cong E^{**}|_U$. Segue pela Definição 1.2.1 que E é localmente 2-sizígia como desejado. \square

Observação 1.2.11. Para todo feixe E , o dual E^* é reflexivo, pois $E^* \cong E^{***}$.

Definição 1.2.12 ([24], Definição 1.1.14). *Seja E um feixe livre de torção de posto r sobre X .*

$$\det E = (\Lambda^r E)^{**}$$

*é chamado o **fibrado determinante** de E .*

O fibrado determinante $\det E$, é de fato um feixe invertível sobre X , pois tem-se o seguinte resultado:

Lema 1.2.13 ([24], Lema 1.1.15). *Um feixe reflexivo de posto 1 é um feixe invertível.*

Classes de Chern. A definição de classe de Chern de E pode ser encontrada em [6, Capítulo 2], [7, Apêndice A].

Seja X uma variedade projetiva não singular sobre \mathbb{K} . Um ciclo de codimensão r sobre X é um elemento de um grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades irredutíveis fechadas de X de codimensão r .

Se diz que dois ciclos de codimensão r Z e Z' são racionalmente equivalentes se existe um ciclo V sobre $X \times \mathbb{P}^1$ cujas restrições para duas fibras $V \cap X \times \{t_0\}$ e $V \cap X \times \{t_1\}$ são respectivamente Z e Z' . Esta é uma relação de equivalência, e denote a classe de equivalência de ciclos de codimensão r por $A^r(X)$. Assim temos o anel graduado, o anel de Chow $A(X) = \bigoplus_{r=0}^n A^r(X)$, onde $n = \dim X$ com $A^0(X) = \mathbb{Z}$ e $A^k(X) = 0$ para $k > \dim X$.

Exemplo 1.2.14. $A(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$, onde h é a classe de um hiperplano (e h^i é a classe de um subespaço linear de codimensão i). Em particular $A^m(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ para $0 \leq m \leq n$, gerado pelas classes de um $(n - m)$ -plano.

Seja E um feixe localmente livre de posto r sobre X , $\mathbb{P}(E)$ o fibrado projetivo associado, e $\zeta \in \mathbb{P}(E)$ a classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Seja a projeção $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, então π^* faz de $A(\mathbb{P}(E))$ um $A(X)$ -módulo livre gerado por $1, \zeta, \dots, \zeta^{r-1}$.

Assim tem-se a seguinte definição:

Definição 1.2.15. *Seja E um feixe localmente livre sobre uma variedade projetiva X não singular. Para cada $i = 0, 1, \dots, r$ defina a i -ésima classe de Chern $c_i(E) \in A^i(X)$ por $c_0(E) = 1$ e*

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \pi^*(c_i(E)) \cdot \zeta^{r-i} = 0$$

Em seguida apresentamos algumas propriedades das classes de Chern.

A classe de Chern total de E é definido como a soma:

$$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_r(E),$$

e o polinômio de Chern é dado pela série de potências formal

$$c_E(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E)t^i = 1 + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \dots$$

satisfazendo o seguinte:

(1) Para todo $k > rk(E)$, tem-se $c_k(E) = 0$.

(2) Se $E \cong \mathcal{O}_X(D)$ para um divisor D , então

$$c_i(E) = 1 + Dt;$$

(3) Fórmula de Whitney ([6, Página 51]): para qualquer sequência exata

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0.$$

de feixes localmente livres sobre X , então

$$c_E(t) = c_{E'}(t) \cdot c_{E''}(t) \quad e \quad c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E') \cdot c_j(E'').$$

(4) Se E se quebra em soma direta de feixes invertíveis L_i , então

$$c_E(t) = \prod_{i=1}^r c_{L_i}(t).$$

(5) Se E não se quebra sobre X podemos escrever

$$c_E(t) = \prod_{i=1}^r (1 + a_i t),$$

aqui a classe de Chern pode ser resolvido em termos dos elementos formais a_1, \dots, a_r que são chamados de raízes de E . Assim tem-se

$$c_{\Lambda^p E}(t) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} (1 + (a_{i_1} + \dots + a_{i_p})t),$$

onde $\Lambda^p E$ denota o p -ésimo produto exterior de E .

Em particular,

$$c_1(\Lambda^r E) = c_1(E), \tag{1.2.1}$$

para $r = rk(E)$.

Definição 1.2.16. *Seja E um feixe coerente e*

$$0 \rightarrow E^n \rightarrow E^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow E^0 \rightarrow E \rightarrow 0$$

uma resolução livre por feixes localmente livres. Então definimos:

$$c_E(t) = \prod_{i=0}^n c_{E^i}(t)^{(-1)^i}.$$

Considere agora $X = \mathbb{P}^n$ e note que $c_i(E) \in \mathbb{Z}$ (Exemplo 1.2.14).

Exemplo 1.2.17. O polinômio de Chern de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)$ é $1 + l \cdot t$, e o polinômio de Chern de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^p$ é $(1 + l \cdot t)^p$. Também $c_k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)^p) = \binom{p}{k}$.

Por outro lado, da Definição 1.2.12 e de (1.2.1) temos:

Definição 1.2.18 ([24], Página 81). *Seja E um feixe coerente livre de torção de posto r sobre \mathbb{P}^n . Podemos definir a primeira classe de Chern de E por*

$$c_1(E) = c_1(\det E).$$

onde $\det E$ denota o fibrado determinante de E .

Observação 1.2.19. Aqui, como o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ tem codimensão pelo menos 2, existem retas $l \subset \mathbb{P}^n$ que não intersectam $\text{Sing}(E)$. Seja $l \subset \mathbb{P}^n$ tal que

$$E|_l = \mathcal{O}_l(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_l(a_r).$$

Então

$$c_1(E) = a_1 + \cdots + a_r.$$

Enunciamos a seguir resultados para as classes de Chern, os quais podem ser encontrados em [9].

Lema 1.2.20 ([9], Lema 2.1). *Seja E um feixe coerente de posto $r \geq 0$ sobre \mathbb{P}^n , e seja $k \in \mathbb{Z}$. Então as classes de Chern de $E(k)$ é dado por*

$$c_i(E(k)) = c_i(E) + (r - i + 1)k c_{i-1}(E) + \binom{r - i + 2}{2} k^2 c_{i-2}(E) + \cdots + \binom{r}{i} k^i.$$

Corolário 1.2.21 ([9], Corolário 2.2). *Seja E um feixe coerente de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 com classes de chern c_1, c_2, c_3 . Então as classes de Chern de $E(k)$ são:*

$$\begin{aligned} c_1(E(k)) &= c_1 + 2k; \\ c_2(E(k)) &= c_2 + c_1 k + k^2; \\ c_3(E(k)) &= c_3. \end{aligned}$$

Note em particular que c_3 não muda se torcemos o feixe E .

Demonstração. Do Lema 1.2.20 temos:

$$\begin{aligned} c_1(E(k)) &= c_1(E) + (2 - 1 + 1)k c_0(E) \\ &= c_1(E) + 2k. \\ c_2(E(k)) &= c_2(E) + (2 - 2 + 1)k c_1(E) + \binom{2-2+2}{2} k^2 \\ &= c_2(E) + c_1(E)k + k^2. \\ c_3(E(k)) &= c_3(E) + (2 - 3 + 1)k c_2(E) + \binom{2-3+2}{2} k^2 c_1(E) + \binom{2}{3} k^3 \\ &= c_3(E). \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.22. *Para qualquer feixe E sobre uma variedade projetiva, se define a característica de Euler como:*

$$\chi(E) = \sum (-1)^i h^i(E),$$

onde $h^i(E) = \dim H^i(E)$

Em seguida apresentamos uma propriedade importante da característica de Euler.

Se $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ é uma sequência exata de feixes coerentes sobre uma variedade projetiva, então

$$\chi(G) = \chi(F) + \chi(H),$$

isto é, a característica de Euler é aditiva sobre sequências exatas.

Mais geralmente, se $0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_n \rightarrow 0$ é uma sequência exata de feixes coerentes, então

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \chi(F_i) = 0.$$

Sobre \mathbb{P}^3 tem-se o seguinte resultado como aplicação do Teorema generalizado de Grothendieck–Hirzebruch–Riemman–Roch (ver [15, Apêndice A, 4.1]).

Teorema 1.2.23 (Riemann–Roch). *Seja E um feixe coerente de posto r sobre \mathbb{P}^3 , com classes de Chern c_1, c_2, c_3 , e seja $\chi(E)$ a característica de Euler. Então*

$$\chi(E) = r + \binom{c_1 + 3}{3} - 2c_2 + \frac{1}{2}(c_3 - c_1c_2) - 1.$$

Em seguida, apresentamos dois resultados sobre feixes reflexivos de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 fundamentais na demonstração do Teorema principal 3.1.5 no capítulo 3. O primeiro é dado por Hartshorne em [9, Proposição 1.10], e o segundo é dado por Roggero em [27, Teorema 2.3].

Proposição 1.2.24 ([9], Proposição 1.10). *Seja F um feixe reflexivo de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 . Então*

$$F^* \cong F \otimes (\det F)^*.$$

Teorema 1.2.25 ([27], Teorema 2.3). *Seja F um feixe reflexivo de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , com $c_1 = 0$ ou $c_1 = -1$. Então, F é localmente livre se, e somente se, $H^2(F(p)) = 0$, para algum $p \leq -2$.*

Por outro lado, sobre \mathbb{P}^n tem-se a seguinte fórmula de Bott [24, Página 4].

$$h^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{n+k}{k} & , \text{ para } q = 0, k \geq 0 \\ \binom{-k-1}{-k-1-n} & , \text{ para } q = n, k \leq -n - 1 \\ 0 & , \text{ outro caso} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Capítulo 2

Feixes Instanton

Neste Capítulo apresentamos alguns resultados sobre feixes instanton. As referências são [5, 15, 17].

Na Seção 2.1, começamos com a definição de mônadas, em particular mônadas lineares, cuja existência é garantida por Fløystad em [5].

Na Seção 2.2, damos a definição de feixes lineares, mencionando suas propriedades fundamentais para a definição de feixes instanton. Assim, definimos o conjunto singular para feixes coerentes e mostramos que este coincide com o lugar de degenerescência da mônada, o qual será nosso objeto de estudo.

Na Seção 2.3, definimos os feixes instanton, ressaltando algumas de suas propriedades, como por exemplo a μ -estabilidade sendo muito importante para garantir uma propriedade dos feixes instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 (Ver Observação 2.3.13).

Na Seção 2.4, damos a definição de configurações ADHM, onde apresentamos a relação existente com as mônadas, a qual será uma ferramenta importante para determinar uma propriedade do conjunto singular definido na seção anterior.

2.1 Mônadas

Mônadas são muito úteis quando queremos construir feixes localmente livres com alguns invariantes fixados, como por exemplo posto, determinante, classes de Chern, etc. Aqui temos como referência [13, 24].

Definição 2.1.1. *Seja X uma variedade projetiva suave. Uma **mônada** sobre X é um complexo de feixes localmente livres:*

$$M^\bullet : A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \quad (2.1.1)$$

tal que o morfismo α é injetivo e o morfismo β é sobrejetivo. O feixe $E := \ker \beta / \text{ima } \alpha$ é chamada a cohomologia da monáda M^\bullet .

O conjunto

$$S(E) = \{x \in X \mid \alpha(x) \text{ não é injetiva}\}$$

é chamada o **lugar de degenerescência** da mônada M^\bullet . $\alpha(x)$ denota o mapa na fibra sobre o ponto $x \in X$.

A mônada (2.1.1) dá origem ao seguinte diagrama com linhas e colunas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \beta & & \downarrow & \\
 & & & & C & \xlongequal{\quad} & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

onde $K := \ker \beta$, $Q := \text{Coker } \alpha$ e $E = \ker \beta / \text{ima } \alpha$. O feixe $K = \ker \beta$ é um feixe localmente livre.

Deste diagrama podemos deduzir que se o feixe coerente E sobre X é a cohomologia da mônada M^\bullet , então:

$$(i) \ rk(E) = rk(B) - rk(A) - rk(C).$$

$$(ii) \ c_E(t) = c_B(t) \cdot c_A(t)^{-1} \cdot c_C(t)^{-1}.$$

Definição 2.1.2 (Mônada Linear). *Uma **mônada linear** é uma mônada cujos mapas são matrizes de formas lineares, ou seja, mônadas da forma:*

$$\mathcal{O}_X(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X(1)^{\oplus c} \quad (2.1.2)$$

onde o morfismo α é injetivo e o morfismo β é sobrejetivo.

Nesta tese, vamos nos concentrar em mônadas lineares sobre \mathbb{P}^n (em particular para $n = 3$). Floystad em [5], classifica completamente as mônadas lineares sobre \mathbb{P}^n , e mostra uma condição necessária e suficiente para a existência de mônadas da forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}. \quad (2.1.3)$$

Mais precisamente, Fløystad mostra o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3. *Seja $n \geq 1$. Existe a mônada linear da forma (2.1.3) sobre \mathbb{P}^n se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita:*

$$(1) \ b \geq 2c + n - 1 \quad e \quad b \geq a + c;$$

$$(2) \ b \geq a + c + n.$$

2.2 Feixes lineares

Nesta Seção apresentamos alguns resultados referente a feixes lineares, os quais serão fundamentais para a definição de feixes instanton na seguinte seção. Estes resultados podem ser encontrados em [15].

Primeiro começamos com a seguinte definição:

Definição 2.2.1. *Um feixe coerente E sobre \mathbb{P}^n é dito **feixe linear** se pode ser representado como a cohomologia de uma mônada linear da forma:*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}. \quad (2.2.1)$$

Proposição 2.2.2 ([15], Proposição 2). *Se E é um feixe linear sobre \mathbb{P}^n , então*

- (1) *Para $n \geq 2$, $H^0(E(-1)) = H^n(E(-n)) = 0$, $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \text{coker } \alpha^*$ e $\mathcal{E}xt^p(E(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ para $p \geq 2$ e todo k .*
- (2) *Para $n \geq 3$, $H^1(E(-2)) = H^{n-1}(E(1-n)) = 0$;*
- (3) *Para $n \geq 4$, $H^p(E(k)) = 0$, $2 \leq p \leq n-2$ e $\forall k$.*

Demonstração. Suponha que E é a cohomologia da mônada (2.2.1). Note que núcleo $K = \ker \beta$ é localmente livre, e que temos as seguintes sequências exatas curtas para todo $k \in \mathbb{Z}$:

$$0 \rightarrow K(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^b(k) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k+1)^c \rightarrow 0 \quad (2.2.2)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)^a \xrightarrow{\alpha} K(k) \rightarrow E(k) \rightarrow 0 \quad (2.2.3)$$

Da primeira sequência vemos que: $H^p(K(k)) = 0$ para $p = 0, 1$ e $p+k \leq 1$; para $2 \leq p \leq n-1$ e $\forall k$; e para $p = n$ e $k \leq -n$.

Da segunda sequência tem-se que $H^p(K(k)) \cong H^p(E(k))$ para $p = 0$ e $k \leq 0$; para $1 \leq p \leq n-2$ e $\forall k$; e para $p \geq n-1$ e $k \geq -n$.

Dualizando a sequência (2.2.2), obtemos que $H^0(K^*(k)) = 0$ para $k \leq -1$. Da mesma forma dualizando a sequência (2.2.3) e como K é localmente livre obtemos:

$$0 \rightarrow E^*(-k) \rightarrow K^*(-k) \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k+1)^a \rightarrow \mathcal{E}xt^1(E(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow 0. \quad (2.2.4)$$

Assim desta sequência e juntando as igualdades dadas acima temos o resultado. \square

Jardim em [15] mostra o seguinte resultado muito importante para garantir que um feixe livre de torção sobre \mathbb{P}^n seja linear.

Teorema 2.2.3 ([15], Teorema 3). *Seja E um feixe livre de torção sobre \mathbb{P}^n satisfazendo:*

- Para $n \geq 2$, $H^0(E(-1)) = H^n(E(-n)) = 0$;
- Para $n \geq 3$, $H^1(E(-2)) = H^{n-1}(E(1-n)) = 0$;
- Para $n \geq 4$, $H^p(E(k)) = 0$, $2 \leq p \leq n-2$ e $\forall k$;

então E é um feixe linear.

Na Definição 2.1.1, vimos que o lugar de degenerescência da mônada (2.2.1) é definido como o conjunto:

$$S(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \alpha(x) \text{ não é injetiva}\},$$

e lembrando da Definição 1.1.15 do conjunto singular:

$$\text{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid E_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, x}\},$$

provamos o seguinte Lema.

Lema 2.2.4. *Sejam $S(E)$ o lugar de degenerescência da mônada (2.2.1) e $\text{Sing}(E)$ o conjunto singular do feixe linear E . Então*

$$\text{Sing}(E) = S(E).$$

Demonstração. Da Observação 1.1.16, temos que $\text{Sing}(E) = S_{n-1}(E)$. Além disso, da Proposição 2.2.2, $\mathcal{E}xt^p(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ para $p \geq 2$.

Portanto,

$$\text{Sing}(E) = S_{n-1}(E) = \text{Supp}(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))$$

Por outro lado, considere a múnada linear (2.2.1), e denote por $K = \ker \beta$, então a múnada pode ser quebrada em duas sequências exatas

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^b \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^c \rightarrow 0. \quad (2.2.5)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^a \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow 0. \quad (2.2.6)$$

Dualizando a sequência (2.2.5), obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^a \rightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow 0. \quad (2.2.7)$$

Agora, mostremos que $\text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = S(E)$. Para isto, tome $x \in \text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, na haste para $x \in \mathbb{P}^n$, assim temos:

$$x \in \text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \iff \alpha_x^* \text{ não é sobrejetivo},$$

aqui, o Lema de Nakayama (ver [24, Pág. 3]), nos garante que α_x^* é sobrejetivo se, e somente se, $\alpha^*(x)$ é sobrejetivo, onde α_x representa o mapa induzido na haste para $x \in \text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_x^* \text{ não é sobrejetivo} &\iff \alpha^*(x) \text{ não é sobrejetivo} \\ &\iff \alpha(x) \text{ não é injetivo} \\ &\iff x \in S(E). \end{aligned}$$

Daqui, concluímos que $\text{Sing}(E) = S(E)$. □

Em seguida, apresentamos um resultado importante, que nos dá informação sobre a codimensão do conjunto singular $\text{Sing}(E)$ do feixe linear E .

Proposição 2.2.5 ([15], Proposição 4). *Seja E um feixe linear, então:*

- (1) *E é localmente livre se, e somente se, o conjunto singular é vazio;*
- (2) *E é reflexivo se, e somente se, o conjunto singular é uma subvariedade de codimensão pelo menos 3;*
- (3) *E é livre de torção se, e somente se, o conjunto singular é uma subvariedade de codimensão pelo menos 2.*

Demonstração. Do Lema 2.2.4 temos que $\text{Sing}(E) = \text{Supp } \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. Assim, a afirmação (1) é verdadeira, pois $\text{Sing}(E) = \emptyset$ se, e somente se, $(\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}))_x = 0$ para todo $x \in \mathbb{P}^n$, o qual implica $\mathcal{E}xt^1(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, x}) = 0$, isto é, E é localmente livre.

Por outro lado, da Observação 1.1.16 $\text{Sing}(E) = S_{n-1}(E)$. De [28, Prop. 1.20], tem-se:

- Se $\text{codim } \Sigma \geq 2$, então $\dim S_m(E) \leq m - 1$ para todo $m < n$, portanto E é um feixe localmente 1-sizígia ;
- Se $\text{codim } \Sigma \geq 3$, então $\dim S_m(E) \leq m - 2$ para todo $m < n$, portanto E é um feixe localmente 2-sizígia.

Logo a Proposição segue do Lema 1.1.8 e 1.1.10 de [24]:

- (1) E é livre de torção se, e somente se, é um feixe localmente 1-sizígia.
- (2) E é reflexivo se, e somente se, é um feixe localmente 2-sizígia .

□

2.3 Feixes instanton

Nesta Seção apresentamos o conceito de feixes instanton, os quais podem ser obtidos como a cohomologia de múnadas lineares e escrevemos alguns resultados importantes. Para esta seção temos como referência [15].

Definição 2.3.1. *Um feixe instanton sobre \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) é um feixe linear coerente livre de torção E sobre \mathbb{P}^n com $c_1(E) = 0$. O inteiro $c = -\chi(E(-1))$ é chamado a **carga** de E e se verifica que*

$$c = h^1(E(-1)) = c_2(E).$$

Definição 2.3.2. *Um feixe é dito **tipo de quebra trivial**, se existe uma reta $l \subset \mathbb{P}^n$ tal que*

$$E|_l \cong \mathcal{O}_l^{rk(E)}.$$

Segue do Teorema 2.2.3, que todo feixe instanton de posto r e carga c é a cohomologia de uma múnada linear da forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus c} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c} \quad (2.3.1)$$

para algum mapa injetivo α , degenerando em codimensão pelo menos 2, e algum mapa sobrejetivo β , tal que $\beta\alpha = 0$.

Observação 2.3.3. Segue do Teorema 2.1.3 que não existem feixes instanton de posto $r \leq n - 2$.

Um resultado importante para feixes instanton é dada pela seguinte Proposição.

Proposição 2.3.4 ([15], Proposição 11). *Se E é um feixe instanton não trivial de posto $n - 1$ sobre \mathbb{P}^n , então $H^0(E) = 0$. Se E é localmente livre, então $H^0(E^*) = 0$.*

Observação 2.3.5. Em particular, não existem feixes localmente livres de posto $2m - 1$ sobre \mathbb{P}^{2m} .

Lembremos agora a seguinte definição:

Definição 2.3.6 (Mumford-Takemoto). *Um feixe E livre de torção sobre \mathbb{P}^n é dito μ -semi-estável se para todo subfeixe coerente $0 \neq F \subset E$ tem-se:*

$$\mu(F) = \frac{c_1(F)}{rk(F)} \leq \frac{c_1(E)}{rk(E)} = \mu(E)$$

onde $c_1(E)$ é a primeira classe de Chern do feixe E e $rk(E)$ o posto de E .

Além disso, se para todo subfeixe coerente $0 \neq F \subset E$, com $0 < rk(F) < rk(E)$ tem-se:

$$\frac{c_1(F)}{rk(F)} < \frac{c_1(E)}{rk(E)},$$

então E é dito μ -estável.

Um feixe é *propriamente semi-estável* se este é semi-estável mas não estável.

A seguinte observação decorre diretamente da definição de estabilidade:

Observação 2.3.7. Se E é um feixe livre de torção de posto 2 sobre \mathbb{P}^n com primeira classe de Chern ímpar, então tem-se que E é μ -estável se, e somente se, é μ -semi-estável.

Lema 2.3.8 ([24], Lema 1.2.4).

- E é μ -semi-estável, se e somente se, E^* é μ -semi-estável.
- E é μ -semi-estável, se e somente se, $E(k)$ é μ -semi-estável para $k \in \mathbb{Z}$.

Para qualquer feixe E livre de torção de posto r sobre \mathbb{P}^n , existe um inteiro k_E unicamente determinado tal que

$$c_1(E(k_E)) = c_1(E) + rk_E \in \{0, -1, \dots, -r + 1\};$$

aqui $E_{norm} = E(k_E)$ é chamado a normalização de E .

Note que se E tem de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , então $c_1(E(k_E)) \in \{0, -1\}$, e

$$k_E = \begin{cases} -\frac{c_1(E)}{2} & , \text{ se } c_1(E) \text{ é par.} \\ -\frac{c_1(E)+1}{2} & , \text{ se } c_1(E) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definição 2.3.9. *Um feixe E é dito normalizado se $-r + 1 \leq c_1(E) \leq 0$.*

Para feixes reflexivos de posto 2 sobre \mathbb{P}^n , tem-se um critério muito útil de estabilidade:

Lema 2.3.10 ([24], Capítulo 2, Lema 1.2.5). *Seja E um feixe reflexivo de posto 2 sobre \mathbb{P}^n . Então, E é μ -estável se, e somente se, E_{norm} não tem seções, isto é, $H^0(\mathbb{P}^n, E_{norm}) = 0$. Se $c_1(E)$ é par, então E é μ -semi-estável se, e somente se, $H^0(E_{norm}(-1)) = 0$.*

Para feixes instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , tem-se os seguintes resultados:

Proposição 2.3.11 ([15], Proposição 14). *Se E é um feixe instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , então E é μ -semi-estável. Além disso, E é μ -estável se $H^0(E) = 0$.*

Lema 2.3.12 ([18], Lema 3.12). *Se E é um feixe coerente livre de torção μ -semi-estável de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 com $c_1(E) = 0$, então existe um reta l tal que $E|_l \cong \mathcal{O}_l^2$.*

Observação 2.3.13. Como todo feixe instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 é μ -semi-estável, então pelo Lema 2.3.12, concluímos que todo feixe E instanton de posto 2 é de *tipo de quebra trivial*.

No seguinte capítulo vamos considerar o feixe instanton E não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , definido como a cohomologia de uma mônada linear da forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus c} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus c},$$

e estudar o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ de E . Assim, apresentaremos resultados nessa direção.

2.4 Configurações ADHM

Nesta seção apresentamos um conceito fundamental para a construção de instantons, usando métodos de algebra linear, o qual foi dado por Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin [ADHM] dado em [2]. Assim apresentamos algumas definições fundamentais e a relação existente com a mônadas definidas anteriormente.

As referências para esta seção são [11, 17].

2.4.1 Configurações ADHM 0-dimensionais

Sejam V e W espaços vetoriais complexos, com $\dim V = c$ e $\dim W = r$, e considere os mapas $B_1, B_2 \in \text{End}(V)$, $i \in \text{Hom}(W, V)$ e $j \in \text{Hom}(V, W)$.

Definição 2.4.1. *Defina*

$$\mathbf{B} = \text{Hom}(V, V) \oplus \text{Hom}(V, V) \oplus \text{Hom}(W, V) \oplus \text{Hom}(V, W),$$

sendo o espaço de todos as possíveis configurações ADHM (B_1, B_2, i, j) .

O ponto $X = (B_1, B_2, i, j) \in \mathbf{B}$ é dito estável, se não existe subespaço próprio $S \subset V$ tal que $B_k(S) \subset S$ ($k = 1, 2$), e $i(W) \subset S$.

A equação ADHM é:

$$[B_1, B_2] + ij = 0. \tag{2.4.1}$$

2.4.2 Configurações ADHM 1-dimensionais

Da mesma forma, considere V e W espaços vetoriais complexos com $\dim V = c$ e $\dim W = r$, e defina $\widetilde{W} = V \oplus V \oplus W$.

Seja $\mathbb{B} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{B}$ com $\widetilde{X} = (B_{kl}, i_k, j_k) \in \mathbb{B}$ ($k, l = 1, 2$), o chamado configuração ADHM 1-dimensional.

O grupo $GL(V)$ atua naturalmente sobre \mathbb{B} , da seguinte forma:

$$g(B_{kl}, i_k, j_k) = (gB_{kl}g^{-1}, gi_k, j_kg^{-1}), \quad g \in GL(V). \tag{2.4.2}$$

Equivalentemente, podemos ver um elemento em \mathbb{B} como uma seção holomorfa do fibrado $\mathbf{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ definindo:

$$\tilde{B}_1 = zB_{11} + wB_{21} \quad e \quad \tilde{B}_2 = zB_{12} + wB_{22}, \quad (2.4.3)$$

$$\tilde{i} = zi_1 + wi_2 \quad e \quad \tilde{j} = zj_1 + wj_2. \quad (2.4.4)$$

Em outras palavras, $\mathbb{B} = \mathbf{B} \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, com z, w denotando uma base de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, ou equivalentemente a uma escolha de coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^1 .

Assim, os mapas (2.4.3) e (2.4.4), podem ser visto em particular como:

$$\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in Hom(V, V) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)),$$

$$\tilde{i} \in Hom(W, V) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)),$$

$$\tilde{j} \in Hom(V, W) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)).$$

Dado um ponto $p \in \mathbb{P}^1$, o mapa avaliação:

$$ev_p : H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)_p \cong \mathbb{C}$$

pode ser tensorizado com o mapa identidade para obter o mapa:

$$ev_p : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)_p \cong \mathbf{B}.$$

Denote a imagem de $\tilde{X} \in \mathbb{B}$ por $\tilde{X}_p = ev_p(\tilde{X})$.

Definição 2.4.2. *A configuração ADHM 1-dimensional $\tilde{X} = (B_{kl}, i_k, j_k)$ é dito globalmente estável, se \tilde{X}_p é estável para todo $p \in \mathbb{P}^1$.*

Para mais detalhes ver [11, 17].

Por outro lado, as equações da configuração ADHM 1-dimensional são:

$$[B_{11}, B_{12}] + i_1 j_1 = 0, \quad (2.4.5)$$

$$[B_{21}, B_{22}] + i_2 j_2 = 0, \quad (2.4.6)$$

$$[B_{11}, B_{22}] + [B_{21}, B_{12}] + i_1 j_2 + i_2 j_1 = 0. \quad (2.4.7)$$

Note que as equações (2.4.5)-(2.4.7) são equivalentes a

$$[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2] + \tilde{i} \tilde{j} = 0, \quad \forall [z, w] \in \mathbb{P}^1. \quad (2.4.8)$$

Observação 2.4.3. As soluções de (2.4.5)-(2.4.7), são preservadas pela ação do grupo $GL(V)$ dada em (2.4.2).

Para feixes instanton tem-se os seguintes resultados:

Seja (B_{kl}, i_k, j_k) uma configuração *ADHM* 1-dimensional, e defina:

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} \tilde{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\beta} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \quad (2.4.9)$$

onde os mapas α e β para $[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3$ são dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} zB_{11} + wB_{21} + x \\ zB_{12} + wB_{22} + y \\ zj_1 + wj_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

$$\beta = (-zB_{12} - wB_{22} - y \quad zB_{11} + wB_{21} + x \quad zi_1 + wi_2). \quad (2.4.11)$$

Assim tem-se:

Proposição 2.4.4. *Dados α e β definidos acima (2.4.10), (2.4.11). Então:*

- (1) $\beta \circ \alpha = 0$ se, e somente se, (B_{kl}, i_k, j_k) satisfaz as equações (2.4.5)-(2.4.7).
- (2) $\alpha(P)$ é injetivo fora de uma subvariedade de codimensão pelo menos 2, para $P = [x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3$. Em particular, α é injetivo como mapa de feixes.
- (3) β é sobrejetivo se, e somente se, (B_{kl}, i_k, j_k) é globalmente estável; neste caso $\ker \beta / \text{im} \alpha$, é feixe instanton.

Para mais detalhes ver [17, Seção 2].

Capítulo 3

Conjunto Singular de Feixes Instanton

Seja E um feixe instanton de posto r e carga c sobre \mathbb{P}^n definido como a cohomologia da mônada linear

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{r+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^c. \quad (3.0.1)$$

Aqui o conjunto singular de E é dado por

$$\text{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid E_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, x}\}.$$

Também definimos o lugar de degenerescência da monáda como:

$$S(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \alpha(x) \text{ não injetiva}\}.$$

Além disso, o Lema (2.2.4) garante que estes conjuntos são iguais, isto é,

$$\text{Sing}(E) = S(E).$$

Como E é livre de torção, temos que $\text{codim Sing}(E) \geq 2$, isto é, $\dim \text{Sing}(E) \leq 1$.

3.1 Feixes instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3

Considere agora o feixe instanton E de posto 2 e carga c sobre \mathbb{P}^3 . Em outras palavras, E é definido como a cohomologia da mônada linear

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c. \quad (3.1.1)$$

Proposição 3.1.1. *Seja E o feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 . Então:*

$$\dim \text{Sing}(E) = 1.$$

Demonstração. Se $\dim \text{Sing}(E) = 0$, então pela Proposição 2.2.5 temos que E é reflexivo. Mas todo feixe reflexivo de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 com $c_1(E) = 0$ é localmente livre (ver [15, Proposição 19]), isto é, o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ é vazio, assim teríamos uma contradição.

Portanto, concluímos que:

$$\dim \text{Sing}(E) = 1.$$

□

Observação 3.1.2. Não é claro que o conjunto singular tem dimensão pura 1, ou seja, $\text{Sing}(E)$ pode ter componentes de dimensão zero.

O seguinte exemplo pode ser encontrado em [17].

Exemplo 3.1.3. *Seja o feixe E definido como a cohomologia da mônada linear:*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$$

onde, α e β são definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \beta = \begin{pmatrix} -y & x & z & w \end{pmatrix}.$$

Vemos que o morfismo β é sobrejetivo para todo $[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3$, enquanto α é injetiva sempre que $x, y \neq 0$. Então, aplicando a Proposição 2.2.5, temos que o feixe E é livre de torção, mas não localmente livre. Em particular o conjunto singular de E consiste da reta dada por $\{x = y = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.

Lema 3.1.4. *Seja E feixe instanton não localmente livre sobre \mathbb{P}^3 e o quociente $Q_E = E^{**}/E$. Então:*

$$\text{Supp}(Q_E) \subset \text{Sing}(E),$$

em particular, $\dim Q_E \leq 1$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{P}^3 \setminus \text{Sing}(E)$, então E_x é um \mathcal{O}_x -módulo livre, assim

$$E_x \cong E_x^{**} \Rightarrow (Q_E)_x = 0.$$

Portanto,

$$x \in \mathbb{P}^3 \setminus \text{Supp}(Q_E).$$

□

Em seguida apresentamos um dos resultados mais importantes desta tese.

Teorema 3.1.5. *Seja E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , então:*

- (1) *O conjunto singular $\text{Sing}(E)$ tem dimensão pura 1;*
- (2) *E^* e E^{**} são feixes instanton localmente livres.*

Antes de demonstrar o resultado, devemos ter em conta a seguinte observação:

Observação 3.1.6. *Ambas afirmações são falsas para feixes instanton não localmente livres com posto maior que 2.*

O seguinte exemplo pode se encontrado em [17].

De fato.- Para isto, por exemplo considere a mônada

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^5 \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$$

onde, α e β são definidas por

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad e \quad \beta = \begin{pmatrix} -y & x & z & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o feixe E definido pela mônada tem posto 3, onde o morfismo β é sobrejetivo para todo $[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3$, e α é injetiva para os pontos onde $x, y, z \neq 0$.

Então, temos que E é reflexivo ($E \cong E^{**}$), pois seu conjunto singular $\text{Sing}(E)$ é o ponto $[0 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^3$, isto é, tem codimensão 3.

Por outro lado, temos que o feixe E é localmente livre, se e somente se, o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ é vazio. Portanto, E não é localmente livre.

Por isto, concluimos que o feixe E^{**} não é localmente livre. Além disso, seu conjunto singular $\text{Sing}(E)$ tem dimensão zero.

Demonstração. (Teorema 3.1.5) Seja E o feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 , definido como a cohomologia da mônada (3.1.1). Seja $K = \ker \beta$, de maneira que a mônada pode ser quebrada em duas sequências exatas

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \rightarrow 0 \quad (3.1.2)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} K \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (3.1.3)$$

Dualizando a sequência (3.1.3), obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \rightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \rightarrow 0. \quad (3.1.4)$$

Seja $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, assim quebramos a sequência (3.1.4) em duas sequências exatas curtas:

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\alpha^*} A \rightarrow 0 \quad (3.1.5)$$

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \rightarrow S_E \rightarrow 0 \quad (3.1.6)$$

onde $A = \text{Im } \alpha^*$.

Logo, passando as cohomologias em cada sequência, temos para $k \in \mathbb{Z}$:

$$(a) \quad \cdots \rightarrow H^1(K^*(k)) \rightarrow H^1(A(k)) \rightarrow H^2(E^*(k)) \rightarrow H^2(K^*(k)) \rightarrow \cdots$$

$$(b) \quad \cdots \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) \rightarrow H^0(S_E(k)) \rightarrow H^1(A(k)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) \rightarrow \cdots$$

Da mesma forma, dualizando a sequência (3.1.2), e passando as cohomologias para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(c) \quad \cdots \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) \rightarrow H^1(K^*(k)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) \rightarrow H^2(K^*(k)) \rightarrow H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) \rightarrow \cdots$$

Daqui usando a fórmula de Bott 1.2.2 obtemos:

Para $k \geq -2$:

$$(i) \quad H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) = 0, \text{ pois } H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k-3)^c) = 0.$$

Portanto, na sequência (c), temos $H^2(K^*(k)) = 0$, pois $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Na sequência (c), temos que $H^1(K^*(k)) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$, e como $H^2(K^*(k)) = 0$, então na sequência (a) concluímos que:

$$H^1(A(k)) \cong H^2(E^*(k)).$$

Para $k \leq -2$:

(i) Na sequência (b), vemos que $H^0(S_E(k)) \cong H^1(A(k))$, pois $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) = 0$ e $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, em particular para $k = -2$, das considerações dadas acima concluímos que

$$H^2(E^*(-2)) \cong H^1(A(-2)) \cong H^0(S_E(-2)). \quad (3.1.7)$$

Aplicando a Proposição 1.2.24 para o feixe reflexivo E^* , obtemos

$$E^{**} \cong E^* \otimes (\det E^*)^* \cong E^* \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_1(E^*)))^* \cong E^*(-c_1(E^*)) \cong E^*, \quad (3.1.8)$$

pois $\det(E^*) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_1(E^*))$ e $c_1(E^*) = c_1(E) = 0$.

Logo, em particular temos

$$H^2(E^*(-2)) \cong H^2(E^{**}(-2)). \quad (3.1.9)$$

Portanto, de (3.1.7) e (3.1.9) concluímos que

$$H^0(S_E(-2)) \cong H^2(E^*(-2)) \cong H^2(E^{**}(-2)). \quad (3.1.10)$$

Agora mostremos que $H^2(E^{**}(-2)) = 0$.

Para isto, considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E^{**} \longrightarrow Q_E \longrightarrow 0 \quad (3.1.11)$$

onde Q_E é o quociente E^{**}/E .

Pelo Lema 3.1.4, temos que $\dim \text{Supp}(Q_E) \leq 1$, assim:

$$H^2(Q_E(k)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, calculando as cohomologias na sequência (3.1.11), em particular para $k = -2$, temos:

$$\cdots \longrightarrow H^2(E(-2)) \longrightarrow H^2(E^{**}(-2)) \longrightarrow H^2(Q_E(-2)) \longrightarrow \cdots \quad (3.1.12)$$

Além disso, do fato que $H^2(E(-2)) = 0$ pois E é um feixe instanton, concluímos da sequência (3.1.12) acima que:

$$H^2(E^{**}(-2)) = 0. \quad (3.1.13)$$

Assim, das igualdades dadas em (3.1.10), concluímos que:

$$H^0(S_E(-2)) \cong H^2(E^*(-2)) \cong H^2(E^{**}(-2)) = 0.$$

Portanto, como $\text{Supp}(S_E) = \text{Sing}(E)$ e $H^0(S_E(-2)) = 0$, implica que o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ não pode ter componentes de dimensão zero, isto é, o conjunto singular é uma subvariedade de dimensão pura 1.

Isto completa a parte (1) do Teorema 3.1.5.

A parte (2) do Teorema 3.1.5 segue do Teorema 1.2.25 dada por Roggero em [27], pois $H^2(E^{**}(-2)) = 0$ o qual implica que o feixe E^{**} é localmente livre. Da mesma forma prova-se que o feixe E^* é localmente livre, pois $H^2(E^*(-2)) = 0$.

Resta apenas mostrar que E^{**} é feixe instanton. De fato;

- Pela dualidade de Serre temos que $H^1(E^{**}(-2)) \cong H^2(E^{***}(-2))^* \cong H^2(E^*(-2))^*$. Então por (3.1.8), concluímos que:

$$H^1(E^{**}(-2)) = 0.$$

- Da sequência (3.1.11), temos que $H^3(E(k)) \cong H^3(E^{**}(k))$, pois $H^2(Q_E(k)) = H^3(Q_E(k)) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como $H^3(E(-3)) = 0$, pois E é um feixe instanton. Então:

$$H^3(E^{**}(-3)) = 0.$$

- Pela dualidade de Serre, temos que $H^0(E^{**}(-1)) \cong H^3(E^{***}(-3))^*$, mas por (3.1.8) $E^* \cong E^{**}$, assim

$$H^0(E^{**}(-1)) \cong H^3(E^*(-3))^* \cong H^3(E^{**}(-3))^* = 0.$$

Então,

$$H^0(E^{**}(-1)) = 0.$$

Portanto, concluímos que E^{**} é um feixe instanton. Como $E^* \cong E^{**}$ (3.1.8) segue que E^* também é feixe instanton.

Isto completa a prova da parte (2) do teorema. \square

Por outro lado, como foi mostrado no Teorema 3.1.5 que E^{**} é localmente livre, então da sequência (3.1.11) mostramos que:

Lema 3.1.7. *Seja E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 e Q_E o feixe quociente E^{**}/E . Então:*

$$\text{Supp}(Q_E) = \text{Sing}(E).$$

Demonstração. Do Lema 3.1.4 basta mostrar que $\text{Sing}(E) \subset \text{Supp}(Q_E)$. Para isto, tome $x \in \text{Sing}(E)$, então pela definição temos que E_x não é um \mathcal{O}_x -módulo livre.

Por outro lado, observe que a sequência (3.1.11), induz para cada $x \in \text{Sing}(E)$ uma sequência exata

$$0 \longrightarrow E_x \longrightarrow E_x^{**} \longrightarrow (Q_E)_x \longrightarrow 0.$$

Daqui concluímos que $(Q_E)_x \neq 0$, pois do contrário, se $(Q_E)_x = 0$, então $E_x \cong E_x^{**}$. Porém do Teorema principal 3.1.5 temos que E^{**} é localmente livre, o qual implica que E_x é um \mathcal{O}_x -módulo livre, o que é uma contradição.

Portanto, $x \in \text{Supp}(Q_E)$, isto é,

$$\text{Sing}(E) \subset \text{Supp}(Q_E).$$

\square

Assim temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.8. *Todo feixe instanton E não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 pode ser incluído unicamente em um feixe instanton localmente livre F . Além disso, o quociente F/E é um feixe de torção suportado sobre dimensão pura 1.*

Demonstração. Para isto, considere $F := E^{**}$. \square

3.1.1 Complexo de Eagon–Northcott do conjunto singular

Uma ferramenta importante para o estudo de propriedades do conjunto singular é dada pelo complexo de **Eagon–Northcott**. Por enquanto não temos um resultado nesta direção, mas é importante deixar registrado para um estudo futuro. Como referência temos [4, Apêndice 2.6], [20, Definição 2.1] e [26, Capítulo 2].

Considere E e F feixes localmente livres sobre uma variedade projetiva X com $rk(E) = e$, $rk(F) = f$.

Definição 3.1.9 ([26], Definição 2.1 e 2.4). *Seja $\varphi : E \rightarrow F$ um morfismo. Então:*

$$D_k(\varphi) = \{x \in X \mid rk(\varphi(x)) \leq k\},$$

é chamado o k -ésimo lugar de degenerescência de φ . Se diz que $D_k(\varphi)$ tem a codimensão esperada se

$$\text{codim } D_k(\varphi) = (e - k)(f - k).$$

Se $k = \min\{rk(E), rk(F)\} - 1$, dizemos que $D_k(\varphi)$ é o lugar de degenerescência maximal. Note que se $k = e - 1$ e $f \geq e$, tem-se $\varphi(x)$ não é injetivo quando $x \in D_k(\varphi)$, aqui denotamos por $Z = D_{e-1}(\varphi)$.

Considere o morfismo injetivo $\varphi : E \rightarrow F$. Podemos associar ao dual φ^* o complexo de **Eagon–Northcott** (ver [4, Apêndice 2.6], [20, Definição 2.1]).

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigwedge^f F^* \otimes \text{Sym}^{f-e}(E) \otimes \bigwedge^e E \rightarrow \bigwedge^{f-1} F^* \otimes \text{Sym}^{f-e-1}(E) \otimes \bigwedge^e E \rightarrow \dots \\ \rightarrow \bigwedge^e F^* \otimes \text{Sym}^0(E) \otimes \bigwedge^e E \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

onde $\text{Sym}^k(E)$ é o k -ésimo produto simétrico de E e $\bigwedge^l(E)$ a l -ésima potência exterior de E .

Observação 3.1.10. A seqüência acima é uma resolução de \mathcal{O}_Z se, e somente se, Z tem a codimensão esperada.

Por outro lado, temos o feixe instanton definido como a cohomologia da múnada linear (3.1.1):

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c,$$

onde o lugar de degenerescência é dado por

$$S(E) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \alpha(x) \text{ não injetiva}\},$$

e mostramos que

$$\text{Sing}(E) = S(E).$$

Agora considere a sequência exata obtida da múnada acima

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} K \rightarrow E \rightarrow 0,$$

onde $K = \ker \beta$, $rk(K) = c + 2$ e o mapa injetivo α , assim

$$\text{Sing}(E) = D_{c-1}(\alpha).$$

Portanto, para α^* temos o seguinte complexo Eagon-Northcott:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigwedge^{c+2} K^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c-2)^{\frac{c^2+c}{2}} &\rightarrow \bigwedge^{c+1} K^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c-1)^c \rightarrow \\ &\rightarrow \bigwedge^c K^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Sing}(E)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Observe que o mapa $\lambda = \Lambda^c \alpha^*(-c)$ fornece estrutura de esquema a $\text{Sing}(E)$.

No Teorema principal 3.1.5 mostramos que $\dim \text{Sing}(E) = 1$, isto é,

$$\text{codim} \text{Sing}(E) = 2,$$

mas, a codimensão esperada do conjunto singular $\text{Sing}(E) = D_{c-1}(\alpha)$ é igual a:

$$(c+2 - (c-1)) - (c - (c-1)) = 3.$$

Portanto, concluímos da Observação 3.1.10 que o complexo (3.1.14) acima não é uma resolução. Mas, este complexo pode ser fundamental para um estudo futuro das propriedades do conjunto singular de feixes instanton.

3.1.2 Propriedades dos feixes S_E e Q_E

Outro resultado importante desta tese, decorre da sequência (3.1.11), onde definimos o feixe Q_E como sendo o quociente E^{**}/E . Também temos o feixe $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, ambos feixes foram fundamentais na demonstração do nosso resultado principal (Teorema 3.1.5). Portanto, apresentamos resultados obtidos para tais feixes Q_E e S_E .

Considere a seguinte definição, dada por Hauzer e Langer em [10, Def. 6.1]:

Definição 3.1.11. *Um feixe instanton de posto zero E sobre \mathbb{P}^3 é um feixe de dimensão pura 1 tal que $H^0(\mathbb{P}^3, E(-2)) = 0$ e $H^1(\mathbb{P}^3, E(-2)) = 0$.*

Segundo esta definição temos:

Proposição 3.1.12. *Seja E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 . Então, o feixe Q_E é um feixe instanton de posto zero.*

Demonstração. Do Lema 3.1.7 e da Definição 1.1.5 temos que Q_E é um feixe de dimensão pura 1, pois do resultado principal dado no Teorema 3.1.5, temos que $\text{Sing}(E)$ é uma subvariedade de dimensão pura 1.

Agora mostremos que $H^0(Q_E(-2)) = 0$ e $H^1(Q_E(-2)) = 0$. Para isto, temos que a sequência (3.1.11) induz a seguinte sequência exata em cohomologia

$$\begin{aligned} \cdots H^0(E^{**}(-2)) \longrightarrow H^0(Q_E(-2)) \longrightarrow H^1(E(-2)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(E^{**}(-2)) \longrightarrow H^1(Q_E(-2)) \longrightarrow H^2(E(-2)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Aqui da definição de feixe instanton, tem-se:

$$H^1(E(-2)) = 0, \quad H^2(E(-2)) = 0.$$

Também como E^{**} é feixe instanton temos que:

$$H^0(E^{**}(-2)) = H^1(E^{**}(-2)) = 0.$$

Assim a sequência acima, implica que $H^0(Q_E(-2)) = 0$ e $H^1(Q_E(-2)) = 0$.

Portanto, concluímos que Q_E é um feixe instanton de posto zero. \square

Da mesma forma para $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, segundo a Definição 3.1.11, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.13. *Seja E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 . Então, o feixe $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ é um feixe instanton de posto zero.*

Demonstração. Como $\text{Supp}(S_E) = \text{Sing}(E)$, temos que S_E tem dimensão pura 1.

Como E^* é feixe instanton, temos que $H^3(E^*(-2)) = 0$

Por outro lado, das sequências (3.1.5) e (3.1.6) temos as sequências exatas em cohomologia:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^2(K^*(-2)) \rightarrow H^2(A(-2)) \rightarrow H^3(E^*(-2)) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) \rightarrow H^1(S_E(-2)) \rightarrow H^2(A(-2)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Destas duas sequências, obtemos que $H^2(A(-2)) = 0$, pois

$$H^2(K^*(-2)) = H^3(E^*(-2)) = 0.$$

O qual implica que

$$H^1(S_E(-2)) = 0.$$

Portanto, concluímos que S_E é um feixe instanton de posto zero. □

3.1.3 Polinômio de Hilbert de S_E e Q_E

Definição 3.1.14. O polinômio de Hilbert $P_E(k)$ para E é definido por

$$P_E(k) = \chi(E(k)) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i h^i(E(k)),$$

onde $h^i(E(k)) = \dim H^i(E(k))$.

Da mesma forma, considere E um feixe instanton não localmente livre de posto 2 e carga c , definido como a cohomologia da mônada

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \quad (3.1.15)$$

Aqui esta mônada (3.1.15), pode ser quebrada em duas sequências exatas

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \rightarrow 0 \quad (3.1.16)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \xrightarrow{\alpha} K \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (3.1.17)$$

onde $K = \ker \beta$. Assim para $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) = \chi(K(k)) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c),$$

$$\chi(K(k)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) + \chi(E(k)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_E(k) = \chi(E(k)) &= (2+2c) \cdot \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)) - c \cdot (\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})(k-1)) - c \cdot \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)) \\ &= \frac{1}{3}k^3 + 2k^2 + \left(\frac{11}{3} - c\right)k + 2(1-c). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Também, dualizando as sequências (3.1.16) e (3.1.17) obtemos:

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^c \rightarrow S_E \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^c \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{2+2c} \rightarrow K^* \rightarrow 0$$

onde $S_E = \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$. Aqui vemos que

$$\chi(K^*(k)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c),$$

então,

$$\begin{aligned} P_{S_E}(k) &= \chi(E^*(k)) - \chi(K^*(k)) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) \\ &= \chi(E^*(k)) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)^{2+2c}) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k-1)^c) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k+1)^c) \\ &= \chi(E^*(k)) - \chi(E(k)). \end{aligned}$$

Além disso, como por (3.1.8) temos $E^* \cong E^{**}$, então:

$$P_{S_E}(k) = P_{E^{**}}(k) - P_E(k). \quad (3.1.19)$$

Por outro lado, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{**} \rightarrow Q_E \rightarrow 0$$

onde $Q_E = E^{**}/E$, assim

$$P_{Q_E}(k) = P_{E^{**}}(k) - P_E(k). \quad (3.1.20)$$

Portanto, de (3.1.19) e (3.1.20), concluímos:

$$P_{S_E}(k) = P_{Q_E}(k).$$

Hartshorne em [8] mostra o seguinte resultado:

Lema 3.1.15 ([8], Lema 8.1). *Seja E um feixe localmente livre de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 com classes de Chern $c_1(E) = 0$ e $c_2(E) = c'$. Então*

$$\chi(E(k)) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) - c'(k+2),$$

para qualquer $k \in \mathbb{Z}$.

Aqui como E^{**} é localmente livre (Teorema 3.1.5) de posto 2 e $c_1(E^{**}) = 0$, se $c' = c_2(E^{**})$, então pelo Lema 3.1.15 acima temos:

$$P_{E^{**}}(k) = \chi(E^{**}(k)) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) - c'(k+2) \quad (3.1.21)$$

Logo, de (3.1.18) e (3.1.21) na igualdade (3.1.19) obtemos

$$\begin{aligned} P_{S_E}(k) &= \chi(E^{**}(k)) - \chi(E(k)) \\ &= (c - c')k + 2(c - c'). \end{aligned}$$

Observação 3.1.16. Em resumo, nesta última parte mostramos:

- $\text{Supp}(Q_E) = \text{Supp}(S_E) = \text{Sing}(E)$.
- S_E e Q_E são feixes instanton de posto zero.
- $P_{S_E}(k) = P_{Q_E}(k) = (c - c')k + 2(c - c')$

Entretanto, isso não garante que $S_E \cong Q_E$.

Não conhecemos contra-exemplos para esta afirmação.

3.2 Propriedades do conjunto singular $\text{Sing}(E)$

Na Seção 3.1, estudamos o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ de feixes instanton de posto 2 sobre \mathbb{P}^3 que não são localmente livres, e apresentamos o resultado principal no Teorema 3.1.5, onde mostramos que $\text{Sing}(E)$ tem dimensão pura 1. Aqui, note que $\text{Sing}(E)$ é uma curva em \mathbb{P}^3 . Então é razoável se perguntar:

Que propriedades tem esta curva $\text{Sing}(E)$?

Aqui apresentamos algumas propriedades.

3.2.1 $\text{Sing}(E)$ está contido numa curva de grau c^2

Nesta seção, começaremos mostrando uma propriedade do conjunto singular $\text{Sing}(E)$, como consequência da relação entre as equações da configuração ADHM 1-dimensional e o complexo:

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\beta} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \quad (3.2.1)$$

com $\dim V = c$, $\dim W = r$ e $\widetilde{W} = V \oplus V \oplus W$, onde os mapas α, β são dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} zB_{11} + wB_{21} + x \\ zB_{12} + wB_{22} + y \\ zj_1 + wj_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$\beta = (-zB_{12} - wB_{22} - y \quad zB_{11} + wB_{21} + x \quad zi_1 + wi_2). \quad (3.2.3)$$

Suponhamos que o mapa α é injetivo e o mapa β é sobrejetivo, isto é, o complexo acima define uma mônada linear sobre \mathbb{P}^3 de posto r e carga c .

Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.1. *O conjunto singular de todo feixe instanton não localmente livre de posto r e de carga c de tipo de quebra trivial, está contido em uma curva de interseção completa Γ de grau c^2 .*

Demonstração. O fato de o mapa β ser sobrejetivo implica pela parte (3) da Proposição 2.4.4 que o feixe cohomologia $E = \ker \beta / \text{im} \alpha$ é um feixe instanton livre de torção.

Por outro lado, pela parte (1) da Proposição 2.4.4, o mapa $\alpha(P)$ é injetivo fora de uma subvariedade de codimensão pelo menos 2, aqui vimos que os pontos onde o mapa $\alpha(P)$ não é injetivo coincide com o conjunto singular $\text{Sing}(E)$ do feixe cohomologia E .

Assim, do mapa α dado em (3.2.2), tem-se que α é injetiva sobre a reta l_∞ dada por $\{z = w = 0\}$.

Agora, considere $P = [x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3 \setminus l_\infty$, e $v \in V$, tal que $\alpha(P)(v) = 0$, isto é,

$$\begin{cases} (zB_{11} + wB_{21})v = -xv, \\ (zB_{12} + wB_{22})v = -yv, \\ (zj_1 + wj_2)v = 0. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Aqui, v é um autovetor comun de $zB_{11} + wB_{21}$ e $zB_{12} + wB_{22}$, com autovalores $-x$ e $-y$ respectivamente. Logo, para $z, w \neq 0$ fixos, concluímos que $\alpha(P)$ não é injetivo para os pontos dentro de uma curva de interseção completa Γ de grau c^2 , dado por:

$$\Gamma = \begin{cases} \det(zB_{11} + wB_{21} + x) = 0 \\ \det(zB_{12} + wB_{22} + y) = 0 \end{cases}$$

Como os pontos donde o mapa $\alpha(P)$ não é injetivo é igual ao conjunto singular $\text{Sing}(E)$ da mônada (3.2.1), então concluímos que $\text{Sing}(E)$ está contida na curva de interseção completa Γ de grau c^2 . \square

3.2.2 Transformações elementares para instantons

Nesta seção apresentamos um resultado muito importante dado por Jardim, Markushevich e Tikhomirov em [16] onde, partindo de um feixe instanton livre de torção de posto e carga arbitrária, os autores constroem feixes instanton livres de torção com características importantes.

Para isto, seja Σ uma curva reduzida localmente de interseção completa de gênero aritmético g . Seja \mathcal{L} um feixe invertível sobre Σ ; o grau de \mathcal{L} é o inteiro

$$\deg \mathcal{L} = \chi(\mathcal{L}) + g - 1,$$

dado pelo Teorema de Riemann–Roch (Ver [7, Capítulo IV, Teorema 1.3]), onde χ é a característica de Euler. Assim para $k \in \mathbb{Z}$ seja o conjunto

$$Pic^k(\Sigma) := \{[\mathcal{L}] \in Pic\Sigma \mid \deg \mathcal{L} = k\}.$$

Definição 3.2.2 (Transformações elementares para instantons). *Seja Σ como acima e F um feixe instanton sobre \mathbb{P}^3 . Uma **transformação elementar** $(\Sigma, \mathcal{L}, \varphi)$ para F consiste do seguinte:*

- a) Um mergulho $\iota : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ de grau d ;
- b) Um feixe invertível $\mathcal{L} \in Pic^{g-1}(\Sigma)$ tal que

$$h^0(\iota_*\mathcal{L}) = h^1(\iota_*\mathcal{L}) = 0;$$

- c) Um morfismo sobrejetivo $\varphi : F \rightarrow \iota_*\mathcal{L}(2)$.

Segundo esta definição, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. *Dado um feixe instanton F sobre \mathbb{P}^3 de posto r e carga c , e uma transformação elementar $(\Sigma, \mathcal{L}, \varphi)$ para F como acima. Então, o feixe $E := \ker \varphi$ é um feixe instanton de posto r e carga $c + d$.*

Além disso, $E^ \simeq F^*$ e, se F é localmente livre, $E^{**}/E \simeq \iota_*\mathcal{L}(2)$.*

O feixe $E := \ker \varphi$ é chamado uma *transformação elementar* de F ao longo de Σ .

Em seguida, usaremos este resultado para apresentar 2 exemplos. Para isto considere F um feixe instanton de posto r e carga c sobre \mathbb{P}^3 .

- Para posto 2, faremos uma construção de um feixe instanton de posto 2 cujo conjunto singular é dado pela união de duas retas disjuntas.
- Para posto 3, da mesma forma construímos um feixe instanton de posto 3 cujo singular é dado pela união disjunta de um ponto e uma reta.

3.2.3 Exemplo de posto 2

Agora, seja Σ_1 uma reta em \mathbb{P}^3 e o mergulho $\iota : \Sigma_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ com

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_{\Sigma_1}(-P_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \text{ para } P_1 \in \Sigma_1.$$

Portanto, temos

$$h^0(\iota_* \mathcal{O}_{\Sigma_1}(-P_1)) = h^1(\iota_* \mathcal{O}_{\Sigma_1}(-P_1)) = 0.$$

Consideramos F um feixe instanton localmente livre de posto 2. Como F é de *tipo de quebra trivial* temos que existe um morfismo sobrejetivo

$$\varphi : F \longrightarrow \iota_* \mathcal{L}_1(2).$$

Assim temos a transformação elementar $(\Sigma_1, \mathcal{L}_1, \varphi)$ para F .

Então, pela Proposição 3.2.3, o feixe definido por $E_1 = \ker \varphi$, é um feixe instanton de posto 2, onde

$$E_1^{**} \cong F \quad e \quad E_1^{**}/E_1 \cong \iota_* \mathcal{L}_1(2).$$

Daqui, tem-se que

$$\text{Supp}(\iota_* \mathcal{L}_1(2)) \cong \text{Supp}(E_1^{**}/E_1) \cong \Sigma_1.$$

Por outro lado, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\delta} F \xrightarrow{\varphi} \iota_* \mathcal{L}_1(2) \rightarrow 0, \quad (3.2.5)$$

onde vemos que:

$$\text{Supp}(\iota_*\mathcal{L}_1(2)) = \text{Sing}(E_1),$$

pois, F é localmente livre. Portanto, concluímos que $\text{Sing}(E_1) = \Sigma_1$.

Considere agora Σ_2 outra reta em \mathbb{P}^3 disjunta a Σ_1 e o mergulho $j : \Sigma_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, onde para Σ_2 , temos $\mathcal{L}_2 \cong \mathcal{O}_{\Sigma_2}(-P_2)$ para $P_2 \in \Sigma_2$. Então, da mesma forma temos:

$$h^0(j_*\mathcal{O}_{\Sigma_2}(-P_2)) = h^1(j_*\mathcal{O}_{\Sigma_2}(-P_2)) = 0.$$

Aqui, considere um morfismo sobrejetor

$$\psi : E_1 \rightarrow j_*\mathcal{L}_2(2).$$

Logo, tome $E_2 = \ker \psi$ tal que a sequência

$$0 \rightarrow E_2 \xrightarrow{\beta} E_1 \xrightarrow{\psi} j_*\mathcal{L}_2(2) \rightarrow 0 \quad (3.2.6)$$

seja exata.

Assim, temos uma transformação elementar $(\Sigma_2, \mathcal{L}_2, \psi)$ para E_1 . Segue da Proposição 3.2.3 que E_2 é um feixe instanton.

Observe que $E_1^* \cong F^*$ e $E_2^* \cong E_1^*$, portanto $E_2^{**} \cong E_1^{**} \cong F$.

Voltando na sequência (3.2.6), podemos obter um morfismo injetivo

$$\alpha : E_2 \rightarrow E_1^{**},$$

e denote por $Q = \text{Coker } \alpha$. Assim, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow E_2 \xrightarrow{\alpha} E_1^{**} \rightarrow Q \rightarrow 0, \quad (3.2.7)$$

donde vemos que:

$$\text{Supp } Q = \text{Sing}(E_2),$$

pois, $E_1^{**} \simeq F$ é localmente livre.

Assim, das seqüências (3.2.6) e (3.2.7), podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow{\cong} & E_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \lambda & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\delta} & E_1^{**} & \xrightarrow{\varphi} & \iota_* \mathcal{L}_1(2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
 & & j_* \mathcal{L}_2(2) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & \iota_* \mathcal{L}_1(2) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Donde o Lema da serpente (ver [33, Lema 1.3.2]), nos garante a seqüência exata

$$0 \rightarrow j_* \mathcal{L}_2(2) \rightarrow Q \rightarrow \iota_* \mathcal{L}_1(2) \rightarrow 0. \quad (3.2.8)$$

Afirmção. Dada a seqüência 3.2.8. Então

$$\text{Supp } Q = \text{Supp } (j_* \mathcal{L}_2(2)) \cup \text{Supp } (\iota_* \mathcal{L}_1(2)).$$

De fato.- A seqüência (3.2.8) induz para cada $x \in \mathbb{P}^3$ a seqüência exata

$$0 \rightarrow (j_* \mathcal{L}_2(2))_x \rightarrow Q_x \rightarrow (\iota_* \mathcal{L}_1(2))_x \rightarrow 0.$$

Temos portanto que

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Supp } Q &\Leftrightarrow Q_x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow (j_* \mathcal{L}_2(2))_x \neq 0 \text{ ou } (\iota_* \mathcal{L}_1(2))_x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \text{Supp } (j_* \mathcal{L}_2(2)) \cup \text{Supp } (\iota_* \mathcal{L}_1(2)).
 \end{aligned}$$

Mas $\text{Supp } (\iota_* \mathcal{L}_1(2)) = \Sigma_1$ e $\text{Supp } (j_* \mathcal{L}_2(2)) = \Sigma_2$.

Portanto

$$\text{Supp } Q = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

isto é,

$$\text{Sing}(E_2) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$$

Assim, construímos o feixe instanton E_2 de posto 2 em \mathbb{P}^3 , cujo conjunto singular é dada pela união de duas retas disjuntas. Procedendo desta forma, pode-se produzir instantons livres de torção com qualquer número de componentes irredutíveis.

Portanto, concluímos que no caso geral o conjunto singular estudado não é conexo.

3.2.4 Exemplo de posto 3

Pela Observação 3.1.6 temos que existem feixes instanton de *tipo de quebra trivial* E_1 de posto 3 cujo conjunto singular é um ponto $P \in \mathbb{P}^3$. E_1 é um feixe reflexivo, mas não localmente livre.

Seja Σ uma reta em \mathbb{P}^3 tal que $\Sigma \cap \{P\} = \emptyset$, e seja $\iota : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ o seu mergulho em \mathbb{P}^3 . Logo, como E_1 é de *tipo de quebra trivial*, existe um morfismo sobrejetivo

$$\varphi : E_1 \rightarrow \iota_*\mathcal{L}(2).$$

Temos portanto uma transformação elementar $(\Sigma, \mathcal{L}, \varphi)$ para E_1 .

Tome $E_2 = \ker \varphi$; pela Proposição 3.2.3 temos que E_2 é um feixe instanton de posto 3 com:

$$E_2^* \cong E_1^* \quad e \quad \text{Supp}(\iota_*\mathcal{L}(2)) = \Sigma, \quad (3.2.9)$$

e tem-se a sequência exata

$$0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \iota_*\mathcal{L}(2) \longrightarrow 0. \quad (3.2.10)$$

Por outro lado, como E_1 é reflexivo e por (3.2.9), temos que $E_2^{**} \cong E_1^{**} \cong E_1$, isto é,

$$\text{Sing}(E_2^{**}) = \text{Sing}(E_1) = \{P\}.$$

Assim da sequência (3.2.10) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_2^{**} \longrightarrow \iota_*\mathcal{L}(2) \longrightarrow 0. \quad (3.2.11)$$

Além disso, temos que a sequência (3.2.11) induz a sequência exata

$$0 \longrightarrow (E_2)_x \longrightarrow (E_2^{**})_x \longrightarrow (\iota_*\mathcal{L}(2))_x \longrightarrow 0. \quad (3.2.12)$$

para cada $x \in \mathbb{P}^3$.

Tome agora $x \notin \Sigma \cup \{P\}$, então

$$(\iota_*\mathcal{L}(2))_x = 0 \quad e \quad (E_2^{**})_x \text{ é livre.}$$

Assim, temos da sequência (3.2.12) que $(E_2^{**})_x \cong (E_2)_x$, isto é, $(E_2)_x$ é livre o qual implica que $x \notin \text{Sing}(E_2)$.

Portanto,

$$\text{Sing}(E_2) \subset \Sigma \cup \{P\}.$$

Por outro lado, seja $x = \{P\}$, então

$$(E_2^{**})_x \text{ não é livre e } (\iota_*\mathcal{L}(2))_x = 0 \text{ pois } x \notin \text{Supp}(\iota_*\mathcal{L}(2)),$$

assim, da sequência (3.2.12) obtemos que $(E_2)_x \cong (E_2^{**})_x$ não é livre. Logo

$$x \in \text{Sing}(E_2).$$

Agora, se $x \in \Sigma$ então

$$(\iota_*\mathcal{L}(2))_x \neq 0 \quad e \quad (E_2^{**})_x \text{ é livre,}$$

e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & (E_2)_x & \longrightarrow & (E_2^{**})_x & \longrightarrow & (\iota_*\mathcal{L}(2))_x \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\
 & & (E_2^{**})_x & \xrightarrow{\cong} & (E_2^{**})_x & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (E_2^{**})_x / (E_2)_x & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Isto é,

$$\frac{(E_2^{**})_x}{(E_2)_x} \cong (\iota_* \mathcal{L}(2))_x.$$

Daqui $(E_2)_x \not\cong (E_2^{**})_x$, pois do contrario $(\iota_* \mathcal{L}(2))_x = 0$, que é uma contradição. Assim $(E_2)_x$ não é livre, isto é,

$$x \in \text{Sing}(E_2).$$

Portanto concluímos que

$$\text{Sing}(E_2) = \Sigma \cup \{P\}.$$

Assim, foi construído um feixe instanton de posto 3 cujo conjunto singular é união de uma reta e um ponto.

Observe que:

- Q_{E_2} é suportado em Σ enquanto S_{E_2} é suportado em $\Sigma \cup \{P\}$.
- Q_{E_2} é instanton de posto zero, mas S_{E_2} não é.
- Q_{E_2} tem dimensão pura 1, mas S_{E_2} não.

Referências

- [1] Ancona V., Ottaviani G., *Stability of special instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . Trans. Am. Math. Soc. **341** (1994), 677–693.
- [2] Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu., *Construction of instantons*. Phys. Lett **65A** (1978), 185–187.
- [3] Coandă I., Tikhomirov A., Trautmann G., *Irreducibility and smoothness of the moduli space of mathematical 5-instanton over \mathbb{P}^3* . Internat. J. Math. **14** (2003), 1–45.
- [4] Eisenbud D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Grad. Texts in Math. **150**. Springer - Verlag, (1995).
- [5] Fløystad G., *Monads on projective spaces*. Comm. Algebra **28** (2000), 5503–5516.
- [6] Fulton W., *Intersection theory*. Springer-Verlag, New York (1998).
- [7] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York (1977).
- [8] Hartshorne R., *Stable vector bundles*. Math. Ann. **238** (1978), 229–280.
- [9] Hartshorne R., *Stable Reflexive Sheaves*. Math. Ann. **254** (1980), 121–176.
- [10] Hauzer M., Langer A., *Moduli Spaces of Framed Perverse Instanton Sheaves on \mathbb{P}^3* . Glasgow Math. J. **53** (2011), 51–96.
- [11] Henni A., Jardim M., Martins R. V., *ADHM construction of perverse instanton sheaves*. A ser publicado em Glasgow Math. J., (2014). Disponível em arXiv:1201.57657v1.

-
- [12] Hilton P.J., Stammbach U., *A curse in homological algebra*. Springer Verlag, New York (1970).
- [13] Horrocks G., *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*. Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 689–713.
- [14] Huybrechts D., Lehn M., *The geometry of moduli spaces of sheaves*. Cambridge University Press, (2010).
- [15] Jardim M., *Instanton Sheaves on Complex Projective Spaces*. Collect. Math. **57**(2006), 69–91.
- [16] Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A., *Degeneration of instanton bundles*. Em preparação.
- [17] Jardim M., Frenkel I., *Complex ADHM equation, and sheaves on \mathbb{P}^3* . J. Algebra **319** (2008), 2913–2937.
- [18] Jardim M., Verbitsky M., *Moduli space of framed instanton bundles on $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ and twistor sections of moduli spaces of instantons on \mathbb{C}^2* . Adv. Math. **227** (2011), 1526–1538.
- [19] Jardim M., Verbitsky M., *Trihyperkahler reduction and instanton bundles on \mathbb{P}^3* . A ser publicado em Compositio Math (2014). Disponível em arXiv:1103.4431.
- [20] Kleppe J., Miró-Roig R. M., *Dimension of families of determinantal schemes*. Trans. Am. Math. Soc. **357** (2004), 2871–2907.
- [21] Kobayashi S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*. Princeton University, (1987).
- [22] Mamone Capria M., Salamon S. M., *Yang–Mills fields on quaternionic spaces*. Non-linearity **1** (1988), 517–530.

-
- [23] Markushevich, D., Tikhomirov, A. S., *Rationality of instanton moduli*. Disponível em arXiv:1012.4132.
- [24] Okonek C., Schneider M., Spindler H, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*. Birkhäuser Verlag (1988).
- [25] Okonek C, Spindler H, *Mathematical instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . J. Reine Agnew. Math. **364** (1986), 35–50.
- [26] Ottaviani G., *Some construction of projective varieties*. Barcelona (2005).
- [27] Roggero M., *On the rank 2 reflexive sheaves and the subcanonical curves in \mathbb{P}^3* . Comm. Alg. **16** (1988), 1779–1790.
- [28] Siu Y., Trautmann G., *Gap-sheaves and Extension of Coherent Analytic Sub-sheaves*. Springer-verlag, Berlin-New York, (1971).
- [29] Spindler H., Trautmann G., *Special instanton bundles on \mathbb{P}_{2N+1} , their geometry and their moduli*. Math. Ann. **286** (1990), 559–592.
- [30] Tikhomirov, A. S., *Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space*. Izvestiya: Mathematics **76** (2012), 991–1073.
- [31] Tikhomirov, A. S., *Moduli of mathematical instanton vector bundles with even c_2 on projective space*. Izvestiya: Mathematics **77** (2013), 1331–1355.
- [32] Ueno K., *Algebraic Geometry 2 - Sheaves and Cohomology*. Amer. Math. Soc. **197**, Rhode Island (2000).
- [33] Weibel C., *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge Univ. Press, (1994).