



VITOR MORETTO FERNANDES DA SILVA

**MÔNADAS SOBRE ESPAÇOS PROJETIVOS**

CAMPINAS  
2013





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA  
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

VITOR MORETTO FERNANDES DA SILVA

MÔNADAS SOBRE ESPAÇOS PROJETIVOS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica da Universidade Estadual de  
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a  
obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador:** Marcos Benevenuto Jardim

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO  
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO  
VITOR MORETTO FERNANDES DA SILVA E  
ORIENTADA PELO PROF. DR MARCOS BENEVENUTO  
JARDIM.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Marcos Jardim".

**Marcos Benevenuto Jardim**

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Si38m Silva, Vitor Moretto Fernandes da, 1985-  
Mônadas sobre espaços projetivos / Vitor Moretto Fernandes da Silva. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fibrados vetoriais. 2. Representações de quivers (Matemática). 3. Categorias  
(Matemática). I. Jardim, Marcos Benevenuto, 1973-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Monads on projective spaces

**Palavras-chave em inglês:**

Vector bundles

Representations of quivers (Mathematics)

Categories (Mathematics)

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutor em Matemática

**Banca examinadora:**

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Abdelmoubine Amar Henni

Renato Vidal da Silva Martins

Kostyantyn Yusenko

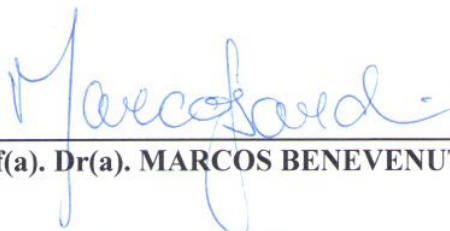
Henrique Nogueira de Sá Earp

**Data de defesa:** 09-12-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 09 de dezembro de 2013 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM**



---

**Prof(a). Dr(a). HENRIQUE NOGUEIRA DE SÁ EARP**



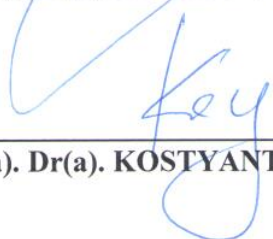
---

**Prof(a). Dr(a). ABDELMOUBINE AMAR HENNI**



---

**Prof(a). Dr(a). RENATO VIDAL DA SILVA MARTINS**



---

**Prof(a). Dr(a). KOSTYANTYN YUSENKO**

# Abstract

In this work, we study an equivalence between monads and representations of quivers. The second chapter presents a decomposability criterion for linear monads and, in particular, for instantons. In the third chapter we present new examples of monads on projective spaces of even dimension, which generalize the Horrocks-Mumford monad on  $\mathbb{P}^4$ .

# Resumo

Neste trabalho estudamos uma equivalência entre mônadas e representações de quivers. No segundo capítulo apresentamos um critério de decomponibilidade para mônadas lineares e, em particular, para instantons. No terceiro capítulo apresentamos exemplos de mônadas sobre espaços projetivos de dimensão par que generalizam a mônada de Horrocks-Mumford em  $\mathbb{P}^4$ .

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Resumo   | vi        |
| Abstract   | vi        |
| Agradecimentos   | ix        |
| Introdução   | 1         |
| <b>1 Conceitos Preliminares</b>                                    | <b>3</b>  |
| 1.1 Mônadas. . . . .   | 3         |
| 1.2 Quiver e Representações de Quivers . . . . .                   | 8         |
| 1.3 Funtor entre mônadas e representações de quivers. . . . .      | 15        |
| <b>2 Um critério de Decomponibilidade para fibrados instanton.</b> | <b>19</b> |
| <b>3 Mônadas Horrock-Mumford.</b>                                  | <b>26</b> |
| 3.1 Existência de mônadas HM generalizadas. . . . .                | 27        |
| 3.2 Cálculo de $H^i(E(j))$ . . . . .                               | 30        |
| 3.3 Mônadas $HM^{2p}$ . . . . .                                    | 38        |
| <b>A Variedade aritmeticamente Cohen-Macaulay</b>                  | <b>44</b> |

|                            |    |
|----------------------------|----|
| B Sistema de Raíces        | 46 |
| Referências bibliográficas | 51 |



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família e meus amigos.

Obrigado, Amanda.

Agradeço ao Marcos. Muito obrigado pelo apoio, paciência e amizades nesses anos.

Agradeço aos Professores Amar, Renato, Kostyantyn e Henrique que compuseram a banca de avaliação. Suas correções e comentários me ajudaram muito com o encerramento deste texto.

Muito obrigado ao IMECC. Agradeço aos professores e funcionários deste instituto que tanto contribuiu com minha formação.

Aos amigos do Lab e da Rep Host.

Agradeço à UTFPR-CP.

Agradeço aos amigos de Salamanca, em especial ao Professor Carlos.

Agradeço aos órgãos de fomentos CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

# Introdução

Nos anos 60, Horrocks [5] introduziu o conceito de mônada como ferramenta para construir fibrados vetoriais sobre espaços projetivos. Em [9], Jardim e Martins demonstram que sob certas condições da variedade base, todo fibrado vetorial é cohomologia de um certo tipo de mônada chamada *mônada Horrocks*. Resultados como estes são motivação para estudar mônadas sobre espaços projetivos. Fazemos isso através de uma equivalência entre mônadas lineares e representações de um certo quiver.

Nesta tese, o primeiro capítulo é dedicado às definições de quiver, mônada, cohomologia de uma mônada e do funtor que associa a cada mônada uma representação de um quiver.

No segundo capítulo apresentamos o resultado demonstrado no artigo [11] em conjunto com Jardim, que estabelece um critério de decomponibilidade para mônadas lineares e aplicamos este critério para fibrados instanton.

Fibrados vetoriais sobre espaços projetivos  $\mathbb{P}^n$  são objetos muito interessantes. Existem poucos exemplos de tais fibrados indecomponíveis de posto “baixo”, isto é, de posto  $r$  com  $2 \leq r \leq n - 1$  sobre  $\mathbb{P}^n$ .

Em 1973, Horrocks e Mumford criaram em [6] um fibrado vetorial indecomponível de posto 2 no espaço projetivo de dimensão 4, sendo o único

fibrado conhecido com posto 2 em  $\mathbb{P}^n$ , com  $n \geq 4$ . Este fibrado é obtido como cohomologia da *mônada de Horrocks-Mumford*. Motivados por este exemplo, apresentamos no terceiro capítulo novas mônadas sobre espaços projetivos de dimensão par cujas cohomologias generalizam o fibrado de Horrocks-Mumford. Mostramos que tais mônadas são indecomponíveis.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste Capítulo colocaremos algumas definições que serão base para o trabalho nos capítulos seguintes. Começaremos com a definição de mônadas e alguns resultados conhecidos da literatura. Como referência citamos [3], [8], [17], [18] e [22].

Na segunda seção temos definições e alguns exemplos de quivers e representações de quivers. Estes podem ser encontrados em [1], [12], [15], [21] e [23].

Terminando o capítulo, temos a construção de um funtor que fornece uma equivalência entre a categoria de mônadas particulares e uma subcategoria da categoria de representações de um quiver associado a estas mônadas.

### 1.1 Mônadas.

Seja  $\mathcal{V}(X)$  a categoria dos fibrados vetoriais sobre uma variedade complexa projetiva  $X$ .

**Definição 1.1** *Sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais sobre  $X$  de posto  $m$  e  $n$ , respectivamente, com  $m \leq n$ , e  $\phi : E \rightarrow F$  um morfismo de fibrados vetoriais. Definimos o local de degenerescência de  $\phi$  sendo o conjunto*

$$\Sigma_\phi = \{p \in X : \text{rk } \phi_p < m\}.$$

*Isto é, o local de degenerescência de um morfismo é o conjunto dos pontos  $p \in X$  onde a transformação linear  $\phi_p : E_p \rightarrow F_p$  induzida pelo morfismo de fibrados não é injetiva.*

A seguinte definição pode ser encontrada em [18], Definição 3.1.1.

**Definição 1.2** *Uma mônada  $M$  é um complexo da forma*

$$M : \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}$$

*onde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  são objetos da categoria  $\mathcal{V}(X)$ ,  $\Sigma_\alpha$  é vazio e o morfismo  $\beta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  é um morfismo sobrejetivo.*

Pode-se fazer a definição anterior usando em vez de  $\mathcal{V}(X)$  uma categoria abeliana qualquer. Para este trabalho, fixaremos a categoria dos fibrados vetoriais.

Ao fibrado  $E = \frac{\text{Im } \alpha}{\text{ker } \beta}$  chamaremos de *cohomologia da mônada  $M$* .

Uma mônada é completamente determinada pelo seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \ker(\beta) & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} & \longrightarrow & \text{coker}(\alpha) \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow \beta & & \downarrow & \\
& & & & \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$

Definimos morfismos entre mônadas como morfismos entre complexos, ou seja, a categoria das mônadas é uma subcategoria plena da categoria de complexos de fibrados vetoriais sobre a variedade  $X$ . Denotaremos  $\mathcal{M}(X)$  a categoria das mônadas sobre uma variedade  $X$ .

Note que um morfismo entre mônadas induz morfismo entre os fibrados cohomologia dessas mônadas. Temos assim, um funtor

$$\mathbf{H} : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X)$$

onde  $\mathcal{V}(X)$  é a categoria dos fibrados vetoriais sobre a variedade  $X$ .

No Apêndice A temos a definição de variedade aritmeticamente Cohen-Macaulay (ACM). Neste trabalho é suficiente lembrar a seguinte caracterização, dada em [9]:

**Proposição 1.3** *Uma variedade projetiva  $X \subset \mathbb{P}^r$  de dimensão pura  $n$  é ACM se e somente se  $H_*^1(\mathbb{P}^r, I_X) = 0$  e  $H^i(\mathcal{O}_X(k)) = 0$  para todo  $k$  quando  $1 \leq i \leq n - 1$ , onde  $I_X$  é o ideal saturado de  $X$ .*

Exemplos de variedades ACM são espaços projetivos e interseções completas.

A seguinte definição pode ser encontrada em [9] Definição 2.1.

**Definição 1.4** *Sejam  $X$  uma variedade ACM,  $\mathcal{O}_X(1)$  o fibrado de linha amplo sobre  $X$  e  $\omega_X$  o fibrado de linha canônico sobre  $X$ . Uma mônada  $M : \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}$  é Horrocks quando*

- $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^r \omega_X(k_i)$  onde  $k_i \in \mathbb{Z}$ ;
- $\mathcal{C} = \sum_{j=1}^s \mathcal{O}_X(l_j)$  onde  $l_j \in \mathbb{Z}$
- $H_*^1(\mathcal{B}) = H_*^{n-1}(\mathcal{B}) = 0$

Os seguintes resultados são motivação para estudar fibrados vetoriais que são cohomologia de mônadas.

**Teorema 1.5 ([9], Teorema 2.3)** *Sejam  $X$  uma variedade ACM de dimensão  $n \geq 3$  e  $E$  um fibrado vetorial sobre  $X$ . Então, existe uma correspondência bijetiva entre coleções  $\{h_1, \dots, h_r, g_1, \dots, g_s\}$ , onde  $h_i \in H^1(E^* \otimes \omega_X(k_i))$  e  $g_j \in H^1(E(-l_j))$ , para inteiros  $k_i$  e  $l_j$  e classes de isomorfismo de monadas na forma*

$$M : \bigoplus_{i=1}^r \omega_X(k_i) \rightarrow F \rightarrow \bigoplus_{j=1}^s \mathcal{O}_X(l_j)$$

*cuja cohomologia é isomorfa a  $E$ . Esta correspondência satisfaz a seguinte propriedade: a mônada  $M$  é Horrocks se e somente se  $\{g_j\}_{j=1}^s$  gera  $H^1(E)$ , e  $\{h_i\}_{i=1}^r$  gera  $H^1(E^* \otimes \omega_X)$  como  $S(X)$ -módulos, onde  $S(X)$  é o anel local de coordenadas homogêneas de  $X$ .*

Ou seja, fibrados vetoriais sobre variedades ACM de dimensão  $n \geq 3$  são cohomologia de mônadas Horrocks.

**Teorema 1.6 ([9], Corolário 2.4)** *Todo fibrado vetorial  $E$  sobre uma variedade ACM de dimensão  $n \geq 3$  é cohomologia de uma mônada Horrocks.*

Assim, se  $X$  é variedade projetiva ACM com dimensão maior ou igual a 3 podemos estudar fibrados vetoriais sobre  $X$  olhando mônadas Horrocks.

**Teorema 1.7 ([9], Teorema 2.5)** *Seja  $X$  uma variedade projetiva ACM e sejam*

$$\begin{aligned} M_1 : \mathcal{A}_1 &\xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{C}_1 \\ M_2 : \mathcal{A}_2 &\xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{B}_2 \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{C}_2 \end{aligned}$$

*mônadas Horrocks. Seja  $\rho$  o morfismo*

$$\begin{aligned} \rho : \text{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2) \oplus \text{Hom}(\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_2) &\rightarrow \text{Hom}(M_1, M_2) \\ (\psi_1, \psi_2) &\mapsto (\psi_1\alpha_1, \alpha_2\psi_1 + \psi_2\beta_1, \beta_2\psi_2) \end{aligned}$$

*Então, a sequência*

$$0 \rightarrow \text{Im } \rho \xrightarrow{\iota} \text{Hom}(M_1, M_2) \xrightarrow{\pi} \text{Hom}(\mathbf{H}(M_1), \mathbf{H}(M_2)) \rightarrow 0$$

*é exata, onde  $\iota$  é a inclusão e  $\pi$  é o morfismo natural.*

Ou seja, nas hipóteses do Teorema, o funtor  $G$  induz isomorfismo entre  $\text{Hom}(M_1, M_2)$  e  $\text{Hom}(\mathbf{H}(M_1), \mathbf{H}(M_2))$  se, e somente se,  $\text{Im } \rho$  é trivial.

A seguinte definição pode ser encontrada em [8].



**Definição 1.8** *Seja  $X = \mathbb{P}^n$ . Definimos uma mônada linear sobre  $\mathbb{P}^n$  como a seguinte mônada*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}.$$

*Quando  $a = c$ , dizemos que a mônada é um instanton,  $c$  é a carga e  $r = b - 2c$  é o posto do instanton.*

Imediatamente se verifica que quando  $n \geq 3$ , mônadas lineares são Horrocks.

Como  $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ , temos pelos Teoremas 1.6 e 1.7 que a categoria das mônadas lineares é equivalente à uma subcategoria da categoria dos fibrados vetoriais sobre  $\mathbb{P}^n$ . Chamaremos de *fibrados lineares* os fibrados que são cohomologia de mônadas lineares.

**Definição 1.9** *Em  $\mathbb{P}^4$ , a mônada de Horrocks-Mumford é dada pelo complexo*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}$$

*que descreveremos no terceiro Capítulo.*

## 1.2 Quiver e Representações de Quivers

Nesta seção definimos quiver, representações de quivers, relações e representações de quivers com relações. Estas definições podem ser vistas em [1], [12], [13], [14], [15], [20], [21] ou [23].

**Definição 1.10** *Um Quiver é um objeto  $Q = (Q_0; Q_1)$ , onde  $Q_0$  é um conjunto chamado conjunto de vértices de  $Q$ ,  $Q_1$  é um conjunto chamado conjunto de flechas do quiver  $Q$  (ambos finitos) tal que existam mapas  $h, t : Q_1 \rightarrow$*

$Q_0$  chamados *ponta e cauda*, respectivamente, onde dizemos que  $\alpha \in Q_1$  começa em  $q_0$  e termina em  $q_1$ , com  $q_0, q_1 \in Q_0$ , quando  $t(\alpha) = q_0$  e  $h(\alpha) = q_1$ .

É muito útil representar um quiver como um grafo orientado.

**Exemplo 1.11** 1. O quiver pode ter laços, isto é, flechas que começam e terminam no mesmo vértice, como o quiver de Jordan, que tem apenas um vértice e uma flecha

$$J : \alpha \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \bullet \end{array}^1$$

2. O quiver de Kronecker, que tem dois vértices e  $n$  flechas ligando-os (todas na mesma direção)

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\alpha_n} \end{array} \bullet 2$$

**Definição 1.12** Dado um corpo  $k$ , uma representação  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  de um quiver  $Q$  sobre  $k$  é uma coleção de  $k$ -espaços vetoriais  $\{V_i \mid i \in Q_0\}$  com uma coleção  $\{\phi_\alpha : V_{t(\alpha)} \rightarrow V_{h(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1\}$  de transformações lineares.

O conjunto de todas as representações sobre um corpo  $k$  de um quiver  $Q$  será denotado por  $\text{Rep}(Q, k)$ .

**Definição 1.13** Dado um quiver  $Q$ , um morfismo  $f : V \rightarrow W$  entre as representações  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  e  $W = (W_i, \psi_\alpha)$  de  $Q$  é um conjunto de mapas lineares  $(f_i)_{i \in Q_0}$  tal que o seguinte diagrama comuta para toda flecha  $\alpha \in Q_1$ .

$$\begin{array}{ccc}
V_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & V_{h(\alpha)} \\
f_{t(\alpha)} \downarrow & & \downarrow f_{h(\alpha)} \\
W_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & W_{h(\alpha)}
\end{array}$$

Com os morfismos como definidos acima,  $\text{Rep}(Q, k)$  é uma categoria.

**Definição 1.14** Dada uma representação  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  de um quiver  $Q$ , dizemos que a representação  $W = (W_i, \psi_\alpha)$  de  $Q$  é uma subrepresentação de  $V$  quando  $W_i \subset V_i$  é subespaço vetorial para todo  $i \in Q_0$  e  $j : W \rightarrow V$  dada pela inclusão de espaços vetoriais é um morfismo entre representações, isto é,

$$\begin{array}{ccc}
V_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & V_{h(\alpha)} \\
j_{t(\alpha)} \uparrow & & \uparrow j_{h(\alpha)} \\
W_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & W_{h(\alpha)}
\end{array}$$

para cada  $\alpha \in Q_1$ .

**Definição 1.15** Dados um quiver  $Q$ , representações  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  e  $W = (W_i, \psi_\alpha)$  de  $Q$  e um morfismo  $f : V \rightarrow W$  temos:

- $\ker f$  é a representação de  $Q$  dada por  $(\ker f)_i = \ker f_i$  para todo vértice  $i$  e  $(\ker f)_\alpha = \phi_\alpha|_{\ker f_{t(\alpha)}}$  para toda flecha  $\alpha$ .
- $\text{coker } f$  é a representação de  $Q$  dada por  $(\text{coker } f)_i = \text{coker } f_i$  para todo vértice  $i$  e  $(\text{coker } f)_\alpha$  é o morfismo induzido por  $\psi_\alpha$  de  $\text{coker } f_{t(\alpha)}$  em  $\text{coker } f_{h(\alpha)}$ , para toda flecha  $\alpha$ .

Seja  $\alpha \in Q_1$ . Da definição de morfismo, temos para todo  $v \in \ker f_{t(\alpha)}$  que  $f_{h(\alpha)}(\phi_\alpha(v)) = \psi_\alpha(f_{t(\alpha)}(v)) = 0$ . Assim,  $\phi_\alpha(v) \in \ker f_{h\alpha}$  e a representação  $\ker f$  está bem definida.

Agora, sejam  $w_1, w_2 \in W_{t(\alpha)}$  tais que  $w_1 - w_2 = f_{t(\alpha)}(v)$  para algum  $v \in V_{t(\alpha)}$ , isto é,  $w_1$  e  $w_2$  estão na mesma classe de equivalência em  $\text{coker } f_{t(\alpha)}$ . Então,  $\psi_\alpha(w_1) - \psi_\alpha(w_2) = \psi_\alpha(w_1 - w_2) = \psi_\alpha(f_{t(\alpha)}(v)) = f_{h(\alpha)}(\phi_\alpha(v))$ . Assim,  $\psi_\alpha(w_1)$  e  $\psi_\alpha(w_2)$  estão na mesma classe de equivalência e concluímos que  $\text{coker } f$  está bem definida.

**Definição 1.16** *Sejam  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  e  $W = (W_i, \psi_\alpha)$  duas representações do quiver  $Q$ . A representação soma direta de  $V$  e  $W$ , denotada por  $X = (X_i, \gamma_\alpha) = V \oplus W$  é dada por:*

- $X_i = V_i \oplus W_i$ , para todo  $i \in Q_0$
- $\gamma_\alpha(v, w) = (\phi_\alpha(v), \psi_\alpha(w))$ , para todo  $\alpha \in Q_1$ ,  $v \in V_{t(\alpha)}$  e  $w \in W_{t(\alpha)}$

**Definição 1.17** *Dizemos que uma representação é decomponível quando for isomorfa à soma direta de duas subrepresentações não triviais. Senão, dizemos que a representação é indecomponível.*

**Definição 1.18** *Dizemos que uma representação  $V$  é Schur quando  $\text{Hom}(V, V) = k$ .*

**Lema 1.19** *Sejam  $Q$  um quiver e  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  uma representação. Se  $V$  é Schur, então  $V$  é indecomponível*

**Prova:** *Note que para todo  $x \in k$  temos  $f^x \in \text{Hom}(V, V)$  dada por*

$$\begin{aligned} f_i^x &: V_i \longrightarrow V_i \\ v &\longmapsto xv \end{aligned}$$

Temos assim,  $k \subset \text{Hom}(V, V)$ .

Se  $V$  é uma representação decomponível, digamos  $V = W_1 \oplus W_2$ , temos  $k^2 \subset \text{Hom}(V, V)$ , via as inclusões  $W_1 \hookrightarrow V$  e  $W_2 \hookrightarrow V$ , o que demonstra o lema.  $\square$

A recíproca em geral é falsa.

**Exemplo 1.20** Tomamos agora o quiver de Jordan do Exemplo 1.11 e  $V$  o objeto de  $\text{Rep}(J, \mathbb{R})$  dado por

$$\mathbb{R}^2 \curvearrowright_B$$

Onde  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Esta representação é indecomponível. Um morfismo  $f : V \rightarrow V$  nada mais é que uma matriz dois por dois  $A$  tal que  $A.B = B.A$ , ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . E temos  $\text{Hom}(V, V) \neq \mathbb{R}$ .

Dado um quiver  $Q$ , um *caminho de comprimento  $n$*  é uma sequência de flechas  $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \alpha_1$  tal que  $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$ . O conjunto  $Q_0$  dos vértices de  $Q$  é o conjunto dos caminhos de comprimento 0. Define-se a *álgebra de caminhos de  $Q$*  pelo espaço vetorial sobre o corpo  $k$  que tem como base o conjunto de todos os caminhos de comprimento maior ou igual a 0, onde a multiplicação é dada pela concatenação de caminhos. Podemos definir uma representação de um quiver como um módulo sobre a álgebra de caminhos.

Para mais resultados sobre [1], por exemplo, para mais resultados.

**Definição 1.21** Dado um quiver  $Q$ , uma relação  $R$  é uma combinação linear de caminhos  $R = \sum a_l \lambda_l$  onde  $a_l \in k$  e  $\lambda_l = \alpha_{n_l, l} \dots \alpha_{1, l}$  são caminhos tais que  $h(\alpha_{n_s, s}) = h(\alpha_{n_j, j})$  e  $t(\alpha_{1, s}) = t(\alpha_{1, j})$  para todo  $s$  e  $j$ . Em outras palavras, os caminhos  $\lambda_l$  começam e terminam em mesmos vértices  $t(R)$  e  $h(R)$ , respectivamente.

Dizemos que uma representação  $V = (V_i, \phi_\alpha)$  de  $Q$  satisfaz a relação  $R$  quando

$$\sum a_l \phi_l = 0$$

onde  $\phi_l = \phi_{\alpha_{n_l, l}} \dots \phi_{\alpha_{1, l}} : V_{t(R)} \rightarrow V_{h(R)}$ .

**Definição 1.22** Sejam  $K_{n+1}$  o quiver de Kronecker com  $n+1$  flechas

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha_0} & \\ & \xrightarrow{\alpha_1} & \\ \bullet & \vdots & \bullet \\ & \xrightarrow{\alpha_n} & \end{array}$$

e  $V$  uma representação de  $K_{n+1}$ . Dizemos que  $V$  é uma representação globalmente injetiva quando para qualquer  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}(k^{n+1})$  temos que  $\sum z_i \phi_{\alpha_i}$  é injetiva.

Analogamente, dizemos que  $V$  é uma representação globalmente sobrejetiva quando  $\sum z_i \phi_{\alpha_i}$  é sobrejetiva.

Note que na definição anterior poderíamos ter escrito “ $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in k^{n+1}$  não nulo”. No entanto, a definição como foi apresentada se mostrará mais interessante.

**Definição 1.23** Sejam  $K_{(n+1) \times (n+1)}$  o quiver

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\alpha_0} & & \xrightarrow{\beta_0} & \\ & \xrightarrow{\alpha_1} & & \xrightarrow{\beta_1} & \\ \bullet & \vdots & \bullet & \vdots & \bullet \\ & \xrightarrow{\alpha_n} & & \xrightarrow{\beta_n} & \end{array}$$

e  $V$  uma representação de  $K_{(n+1) \times (n+1)}$ . Sejam ainda as relações  $R_{ij} = \beta_i \alpha_j + \beta_j \alpha_i$  para  $0 \leq i \leq j \leq n$ . Dizemos que  $V$  é uma representação globalmente injetiva e sobrejetiva quando:

- $\{\phi_{\alpha_i}\}_{i=0}^n$  determinam uma representação globalmente injetiva de  $K_{n+1}$ ;
- $\{\phi_{\beta_i}\}_{i=0}^n$  determinam uma representação globalmente sobrejetiva de  $K_{n+1}$ ;
- $V$  satisfaz as relações  $R_{ij}$ .

Denotaremos  $\Gamma_n^{\text{gis}}$  a subcategoria plena de  $\text{Rep}(K_{(n+1) \times (n+1)}, k)$  cujos objetos são as representações de  $K_{(n+1) \times (n+1)}$  que satisfazem esta definição.

**Definição 1.24** Sejam  $V$  uma representação do quiver  $Q$  e  $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ . O vetor  $\dim V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  onde  $v_i = \dim V_i$  é chamado vetor dimensão da representação  $V$ .

No Appendice B temos a construção do sistema de raízes de um quiver. O Teorema B.8, conhecido como Teorema de Kac, estabelece uma relação biunívoca entre vetores dimensão de representações indecomponíveis de um quiver sem relações  $Q$  e vetores positivos do sistema de raízes de  $Q$ .

Da definição do sistema de raízes, temos que se  $x \in \mathbb{Z}^n$  é um vetor do sistema de raízes, então  $q(x) \leq 1$ . Temos assim como consequência do Teorema B.8

**Corolário 1.25** Sejam  $Q$  um quiver e  $q$  a forma de Tits associada a  $Q$ . Se  $x \in \mathbb{Z}^n$  é um vetor cujas entradas são todas não negativas e  $q(x) > 1$ , então qualquer representação  $V$  do quiver  $Q$  com  $\dim V = x$  é decomponível.

Estes resultados e definições podem ser encontrados em [12], [13] e [14].

Explicitamente a forma de Tits para o quiver  $K_{(n+1) \times (n+1)}$  é

$$q(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - b(n+1)(a+c) \quad (1.1)$$

onde  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ .

### 1.3 Funtor entre mônadas e representações de quivers.

Seja  $X$  uma variedade projetiva complexa.

**Definição 1.26** *Um fibrado vetorial  $\mathcal{A}$  sobre  $X$  é simples quando*

$$\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathbb{C} .$$

Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  fibrados simples sobre  $X$ . Denotaremos por  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}}(X)$  a categoria das mônadas:

$$\mathcal{A}^{\oplus a} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}^{\oplus b} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}^{\oplus c}$$

quando existe mônada com esta configuração.

Temos que  $\text{Hom}(\mathcal{A}^a, \mathcal{B}^b) \cong \mathbf{Mat}_{b \times a} \otimes \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , onde  $\mathbf{Mat}_{b \times a}$  é o conjunto das matrizes de entradas complexas com  $b$  linhas e  $a$  colunas. Fixando a base  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , podemos associar  $\phi \in \text{Hom}(\mathcal{A}^a, \mathcal{B}^b)$  a uma representação do quiver de Kronecker com  $n$  flechas, escrevendo  $\phi = \phi_1 \otimes x_1 + \dots + \phi_n \otimes x_n$ , onde  $\phi_i$  são matrizes  $b$  por  $a$ , e fazendo

$$\mathbb{C}^a \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\phi_n} \end{array} \mathbb{C}^b$$



Similarmente, a partir de uma base fixada de  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  podemos associar a cada  $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{B}^b, \mathcal{C}^c)$  uma representação do quiver de Kronecker com  $m = \dim \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  flechas.

Dada  $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}}(X)$ , denotaremos por  $F(M)$  a representação do quiver

$$K_{n \times m} = \begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\alpha_1} & & \xrightarrow{\beta_1} & & \\ & \bullet & \vdots & \bullet & \vdots & \bullet & \\ & 1 & \xrightarrow{\alpha_n} & 2 & \xrightarrow{\beta_m} & 3 & \end{array}$$

obtida via bases fixas de  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ , onde  $n = \dim \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $m = \dim \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .

Sejam  $M_i = (\mathcal{A}^{\oplus a_i} \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{B}^{\oplus b_i} \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{C}^{\oplus c_i}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}}(X)$ , para  $i = 1, 2$  e  $f \in \text{Hom}(M_1, M_2)$ , isto é,  $f = (f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{B}}, f_{\mathcal{C}})$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^{a_1} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{B}^{b_1} & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{C}^{c_1} \\ f_{\mathcal{A}} \downarrow & & f_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow f_{\mathcal{C}} \\ \mathcal{A}^{a_2} & \xrightarrow{\phi_2} & \mathcal{B}^{b_2} & \xrightarrow{\psi_2} & \mathcal{C}^{c_2} \end{array}$$

comuta.

Como  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  são fibrados simples, temos que

- $\text{Hom}(\mathcal{A}^{a_1}, \mathcal{A}^{a_2}) \cong \mathbf{Mat}_{a_2 \times a_1}$ ;
- $\text{Hom}(\mathcal{B}^{b_1}, \mathcal{B}^{b_2}) \cong \mathbf{Mat}_{b_2 \times b_1}$ ;
- $\text{Hom}(\mathcal{C}^{c_1}, \mathcal{C}^{c_2}) \cong \mathbf{Mat}_{c_2 \times c_1}$ .

Assim, podemos construir um morfismo  $F(f) : F(M_1) \rightarrow F(M_2)$  de representações de quiver.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}^{a_1} & \xrightarrow{\phi_1^1} & \mathbb{C}^{b_1} & \xrightarrow{\psi_1^1} & \mathbb{C}^{c_1} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbb{C}^{a_1} & \xrightarrow{\phi_n^1} & \mathbb{C}^{b_1} & \xrightarrow{\psi_m^1} & \mathbb{C}^{c_1} \\
 \downarrow f_{\mathcal{A}} & & \downarrow f_{\mathcal{B}} & & \downarrow f_{\mathcal{C}} \\
 \mathbb{C}^{a_2} & \xrightarrow{\phi_1^2} & \mathbb{C}^{b_2} & \xrightarrow{\psi_1^2} & \mathbb{C}^{c_2} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbb{C}^{a_2} & \xrightarrow{\phi_n^2} & \mathbb{C}^{b_2} & \xrightarrow{\psi_m^2} & \mathbb{C}^{c_2}
 \end{array}$$

Em outras palavras, temos um funtor  $F : \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X) \rightarrow \text{Rep}(K_{n \times m}, \mathbb{C})$ . Note que o funtor depende da escolha de bases para  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .

Seja  $g : F(M_1) \rightarrow F(M_2)$  um morfismo entre representações de quivers. Via os isomorfismos fixados na definição de  $F$  podemos determinar  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $F(f) = g$ . Portanto, o funtor  $F$  é *pleno*, isto é, dados  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$ , temos  $F : \text{Hom}(M_1, M_2) \rightarrow \text{Hom}(F(M_1), F(M_2))$  é sobrejetivo. Em outras palavras, o funtor  $F$  é pleno.

Por outro lado, seja  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $F(f) = 0$ . Da definição do funtor  $F$  temos que  $f = 0$ , de onde segue que  $F$  é *fiel*, isto é,  $F : \text{Hom}(M_1, M_2) \rightarrow \text{Hom}(F(M_1), F(M_2))$  é injetivo, ou seja, o funtor  $F$  é fiel.

Portanto, uma vez que  $F$  é pleno e fiel, ou seja, a categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  é equivalente a uma subcategoria plena de  $\text{Rep}(K_{n \times m}, \mathbb{C})$ .

**Teorema 1.27** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  fibrados simples sobre uma variedade  $X$ . Então, a categoria de mônadas  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  é equivalente a uma subcategoria plena da categoria das representações do quiver  $K_{n \times m}$  onde  $n = \dim \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $m = \dim \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .*

Assim, se queremos estudar a categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$ , podemos olhar para uma subcategoria das representações do quiver  $K_{n \times m}$ .

O seguinte lema é de verificação imediata.

**Lema 1.28** *Seja  $M$  um objeto da categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  decomponível, isto é, existem mônadas  $M_1$  e  $M_2$  em  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  tais que  $M \cong M_1 \oplus M_2$ . Então, a representação  $F(M)$  do quiver  $K_{n \times m}$  é decomponível.*

**Prova:** Se o objeto  $M$  da categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  é decomponível, temos que existem mônadas  $M_1$  e  $M_2$  objetos da categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$  não nulos tais que  $M = M_1 \oplus M_2$ .

$$M_i : \mathcal{A}^{a_i} \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{B}^{b_i} \xrightarrow{\beta_i} \mathcal{C}^{c_i}.$$

Como os morfismos que definem a mônada  $M$  se quebram em blocos como os morfismos que definem as mônadas  $M_1$  e  $M_2$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

a representação  $F(M)$  do quiver  $K_{n \times m}$  obtida como no Teorema 1.27 é soma direta das representações  $F(M_1)$  e  $F(M_2)$ , o que mostra o resultado.

□

Assim, se a representação de quiver  $F(M)$  é indecomponível, então a mônada  $M$  é indecomponível como objeto da categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(X)$ .

## Capítulo 2

# Um critério de Decomponibilidade para fibrados instanton.

O principal resultado deste capítulo é a Proposição 2.7, que foi apresentada no artigo [11] e diz que: dado uma mônada instanton  $M$  sobre  $\mathbb{P}^n$ , como na Definição 1.8, com carga  $c$  e posto  $r$ , se  $r$  é suficientemente maior que  $c$ , então  $M$  é decomponível. Apresentamos aqui a demonstração deste resultado.

Seja  $\mathcal{M}$  a categoria das mônadas lineares sobre  $\mathbb{P}^n$ , como no Exemplo 1.8

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}.$$

A partir de escolha de coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^n$ , temos uma base para  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong \mathbb{C}^{n+1}$  e usando o Teorema 1.27 temos uma equivalência entre a categoria de mônadas lineares e uma subcategoria plena da categoria das representações do quiver

$K_{(n+1) \times (n+1)}$ .

Seguindo a notação do Capítulo anterior, seja

$$F : \mathcal{M} \rightarrow \text{Rep}(K_{(n+1) \times (n+1)}, \mathbb{C})$$

o funtor obtido de uma escolha de coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^n$ .

**Lema 2.1** *Se  $M \in \mathcal{M}$ , então  $F(M)$  é um objeto de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$ .*

**Prova:** Sejam  $M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}$  uma mônada linear e  $F(M)$  a representação

$$\mathbb{C}^a \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\alpha_n} \end{array} \mathbb{C}^b \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\beta_n} \end{array} \mathbb{C}^c,$$

onde  $\alpha_i \in \mathbf{Mat}_{b \times a}$  e  $\beta_j \in \mathbf{Mat}_{c \times b}$ . Temos que:

- como  $\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b}$  é um morfismo injetivo, para todo  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$  temos  $\sum_{i=0}^n x_i \alpha_i$  é uma transformação linear injetiva;
- similarmente, como  $\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}$  é um morfismo sobrejetivo, temos que  $\sum_{j=0}^n x_j \beta_j$  é transformação linear sobrejetiva para todo  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ ;
- uma vez que  $\beta \circ \alpha = 0$ , para todo  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$  temos que  $\sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j (\beta_i \alpha_j + \beta_j \alpha_i) = 0$ .

Portanto,  $F(M)$  é um objeto de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$ . □

**Lema 2.2** ([11] **Proposição 2.5**) *O funtor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma_n^{\text{gis}}$  é uma equivalência de categorias.*

**Prova:** Dado um objeto  $V$  de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$  e uma escolha de coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^n$ , como visto na Seção 1.3 podemos construir uma mônada  $M$  tal que  $F(M) = V$  e pelo Lema 2.1 é objeto de  $\mathcal{M}$ .

Como  $\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{F} \text{Hom}(F(M), F(N))$  é isomorfismo para quaisquer mônadas lineares  $M$  e  $N$ , pelo Teorema 1.7, o funtor  $F$  é equivalência de categorias.  $\square$

**Lema 2.3** ([11] **Lema 2.4**) *Seja  $V$  um objeto de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$  decomponível, digamos  $V = V_1 \oplus V_2$ . Então,  $V_i \in \Gamma_n^{\text{gis}}$  para  $i = 1, 2$ .*

**Prova:** Basta mostrar que  $V_1 \in \Gamma_n^{\text{gis}}$ .

Como  $V_1 = (\mathbb{C}^{a_1}, \mathbb{C}^{b_1}, \mathbb{C}^{c_1}; \{f_i^1\}, \{g_i^1\})$  é subrepresentação de  $V = (\mathbb{C}^a, \mathbb{C}^b, \mathbb{C}^c; \{f_i\}, \{g_i\})$ , temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C}^a & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{C}^b & \xrightarrow{g_0} & \mathbb{C}^c \\
 \uparrow & \vdots & \uparrow & \vdots & \uparrow \\
 \mathbb{C}^a & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{C}^b & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^c \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{C}^{a_1} & \xrightarrow{f_0^1} & \mathbb{C}^{b_1} & \xrightarrow{g_0^1} & \mathbb{C}^{c_1} \\
 \uparrow & \vdots & \uparrow & \vdots & \uparrow \\
 \mathbb{C}^{a_1} & \xrightarrow{f_n^1} & \mathbb{C}^{b_1} & \xrightarrow{g_n^1} & \mathbb{C}^{c_1}
 \end{array}$$

onde as setas verticais indicam inclusões.

Uma vez que o diagrama é comutativo, temos que a representação  $V_1$  também satisfaz as relações  $R_{ij}$  da Definição 1.23, para  $0 \leq i, j \leq n$ .

Podemos ver  $W_1 = (\mathbb{C}^{a_1}, \mathbb{C}^{b_1}; \{f_i^1\})$  como uma subrepresentação da representação  $W = (\mathbb{C}^a, \mathbb{C}^b; \{f_i\})$  do quiver de Kronecker. Como  $W$  é globalmente injetiva, temos que  $W_1$  também o é.

Além disso, a representação  $U_1 = (\mathbb{C}^{b_1}, \mathbb{C}^{c_1}; \{g_i^1\})$  é isomorfa ao quociente  $U/U_2$ , onde  $U = (\mathbb{C}^b, \mathbb{C}^c; \{g_i\})$  e  $U_2 = (\mathbb{C}^{b_2}, \mathbb{C}^{c_2}; \{g_i^2\})$  são representações do quiver de Kronecker. Como  $U$  é globalmente sobre e  $U_1$  é um quociente de  $U$ , temos que  $U^1$  é globalmente sobre.

Portanto, temos que  $V_1 \in \Gamma_n^{\text{gis}}$ . □

**Lema 2.4** *Seja  $M \in \mathcal{M}$ . Se  $F(M)$  é uma representação decomponível, então existem mônadas não triviais  $M^1, M^2 \in \mathcal{M}$  tais que  $M \cong M^1 \oplus M^2$ .*

**Prova:** Se  $F(M) = V_1 \oplus V_2$  é uma representação decomponível, temos do Lema 2.3 que  $V_1, V_2 \in \Gamma_n^{\text{gis}}$ .

Como  $F$  é equivalência de categorias, temos mônadas  $M^1$  e  $M^2$  tais que  $F(M^i) = V_i$  e  $M \cong M^1 \oplus M^2$ . □

**Lema 2.5** *Seja  $V \in \Gamma_n^{\text{gis}}$  com  $\dim V = (a, b, c)$ . Se  $q(a, b, c) > 1$ , então  $V$  é decomponível.*

**Prova:** *Este resultado é a aplicação imediata do Teorema de Kac ([12], pg 85) para o quiver  $K_{(n+1) \times (n+1)}$ .* □

**Teorema 2.6 ([11] Teorema 1.1)** *Se  $a^2 + b^2 + c^2 - b(n+1)(a+c) > 1$ , então a mônada*

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}$$

se decompõe como soma de duas mônadas lineares.

**Prova:** Basta aplicar o funtor descrito no Lema 2.2 e o Lema 2.3.

□

**Proposição 2.7 ([11] Corolário 1.2)** *Seja  $M$  o instanton*

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus c} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r+2c} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus c}.$$

Se

$r > (n-1)c + \sqrt{c^2((n+1)^2 - 2) + 1}$ , então  $M$  é decomponível.

**Prova:** Nas hipóteses acima, seja  $F(M)$  o elemento de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$  associado pelo funtor determinado por uma escolha de coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^n$ . A forma de Tits aplicada ao vetor dimensão de  $F(M)$  é

$$\begin{aligned} q(c, r+2c, c) &= 2c^2 + (r+2c)^2 - (r+2c)(n+1)(2c) \\ &= ((r+2c) - c(n+1))^2 - c^2((n+1)^2 - 2) \\ &= (r - c(n-1))^2 - c^2((n+1)^2 - 2) \end{aligned}$$

e como  $r > (n-1)c + \sqrt{c^2((n+1)^2 - 2) + 1}$  temos de (1.1) que  $q(c, r+2c, c) > 1$  e pelo Teorema B.8 a representação  $F(M)$  é decomponível.

□

**Corolário 2.8** *Todo fibrado instanton sobre  $\mathbb{P}^n$  de posto  $2n$  e carga 1 é decomponível.*



**Prova:** Se  $E$  é cohomologia da mônada

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus 2n+2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

temos aplicando a fórmula que

$$(n-1) + \sqrt{((n+1)^2 - 2) + 1} < (n-1) + \sqrt{n+1} = 2n$$

e a representação  $F(M)$  é decomponível.  $\square$

O seguinte exemplo mostra que a cota estabelecida pela Proposição 2.7 é ótima.

**Exemplo 2.9** *Seja  $\{e_i\}_{i=0}^{2n}$  base canônica de  $\mathbb{C}^{2n+1}$ . Considere a seguinte representação de  $K_{(n+1) \times (n+1)}$*

$$V : \mathbb{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\alpha_n} \end{array} \mathbb{C}^{2n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\beta_n} \end{array} \mathbb{C}$$

onde

- $\alpha_i(z) = z \cdot e_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ;
- $\beta_j(v) = e_{j+n}^*(v)$ ,  $0 \leq j \leq n-1$  e  $\beta_n(v) = (e_{2n} - e_0)^*(v)$ .

A representação  $V$  é um elemento de  $\Gamma_n^{\text{gis}}$  indecomponível. Assim, a mônada linear  $M$  tal que  $F(M) = V$  é indecomponível. A cohomologia de  $M$  é um fibrado instanton com posto  $2n-1$  de carga 1 em  $\mathbb{P}^n$ .

Além disso, é possível estabelecer uma caracterização dos fibrados instanton de posto  $2n$  e carga 1 em  $\mathbb{P}^n$ .  $T_{\mathbb{P}^n}$  denota o fibrado tangente e  $\Omega_{\mathbb{P}^n}$  o fibrado cotangente de  $\mathbb{P}^n$

**Proposição 2.10** *Seja  $E$  um fibrado instanton de posto  $2n$  e carga 1 em  $\mathbb{P}^n$ . Então, ou  $E = T_{\mathbb{P}^n}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$  ou  $E = E' \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^k$  onde  $E'$  é fibrado instanton de carga 1 e posto  $r$ , com  $n \leq r \leq 2n - 1$  se  $n$  é par e  $n - 1 \leq r \leq 2n - 1$  se  $n$  é ímpar.*

**Prova:** Se  $E$  é cohomologia da mônada

$$M : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus 2n+2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

temos que  $E$  é decomponível pelo Corolário 2.8. Se  $V \in \Gamma_n^{\text{gis}}$  é a representação de  $K_{(n+1) \times (n+1)}$  que é associada a  $E$  pelo funtor estabelecido no Teorema 1.27, temos que as únicas possíveis subrepresentações de  $V$  com a primeira entrada do vetor dimensão não nula tem vetor dimensão  $(1, n + 1, 0)$  ou  $(1, k, 1)$  onde  $n + 2 \leq k \leq 2n + 1$  se  $n$  é par e  $n + 1 \leq k \leq 2n + 1$  se  $k$  é ímpar. Assim, se as mônadas  $M_1, M_2$  são tais que  $M_1 \oplus M_2 = M$ , supondo que o vetor dimensão da representação associada a  $M_1$  tenha primeira entrada não nula, temos que ou a cohomologia de  $M_1$  é o fibrado  $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ , o que implica que o fibrado cohomologia de  $M_2$  é  $\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$ , ou o fibrado cohomologia de  $M_1$  é um fibrado instanton, de onde segue o resultado.

□

# Capítulo 3

## Mônadas Horrocks-Mumford.

Na literatura, fibrados vetoriais indecomponíveis sobre  $\mathbb{P}^n$  de posto baixo são pouco conhecidos, isto é, fibrados vetoriais de posto entre 2 e  $n - 1$ . Destes raros exemplos, destacamos:

- os fibrados instanton, que são fibrados de posto  $2n$  em  $\mathbb{P}^{2n+1}$  e são escritos como cohomologia de mônadas da forma

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)^{\oplus a} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1)^{\oplus c}$$

ou ainda como em [17] cohomologia de mônadas com a configuração:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}^{\oplus k}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^{2n+1}}^1(1)^{\oplus k} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}^{\oplus m}$$

- o fibrado de Horrocks-Mumford em  $\mathbb{P}^4$ , que tem posto 2 e é cohomologia da mônada

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}(-1) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}$$

Com o objetivo de generalizar a mônada cuja cohomologia é o fibrado de Horrocks-Mumford em  $\mathbb{P}^4$ , estudamos mônadas em  $\mathbb{P}^n$  que tenham a seguinte

configuração:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(-k) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(l), \quad (3.1)$$

onde  $2 \leq p \leq n - 2$ . Chamaremos uma mônada com esta configuração de *mônada HM generalizadas*. Tais mônadas são claramente Horrocks. Como os fibrados  $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)$  e  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)$ , onde  $l \in \mathbb{Z}$  são simples, os resultados do Seção 1.3 se aplicam à esta classe de mônadas.

Demonstraremos na Seção 3.1 a existência de mônadas HM generalizadas e na Seção 3.2 determinamos algumas propriedades cohomológicas de um fibrado cohomologia de uma mônada HM generalizada.

### 3.1 Existência de mônadas HM generalizadas.

Para mostrar a existência de mônadas HM generalizadas, usaremos a seguinte definição.

**Definição 3.1** ([19] pg 13) *Sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais sobre uma variedade  $X$  e  $\phi : E \rightarrow F$  um morfismo de fibrados. Definimos*

$$X_k(\phi) = \{x \in X : \text{rk } \phi_x \leq k\}$$

e  $\text{Sing } X_k(\phi)$  o conjunto das singularidades da subvariedade  $X_k(\phi)$ .

Queremos que  $\mathbb{P}_k^n(\beta) = \emptyset$ , onde  $\beta$  é o mapa na mônada (3.1), com  $k = b \binom{n}{p} - c$ .

**Teorema 3.2** ([19] Teorema 2.8) (*Bertini*) *Sejam  $E, F$  fibrados vetoriais sobre uma variedade  $X$ , com  $\text{rk}(E) = m$  e  $\text{rk}(F) = l$ . Se  $E^* \otimes F$  é globalmente gerado, então para um morfismo genérico  $\phi : E \rightarrow F$  temos:*

- $X_k(\phi)$  é vazio, ou
- $X_k(\phi)$  tem a codimensão esperada  $(m - k)(l - k)$  e  $\text{Sing } X_k(\phi) \subset X_{k-1}(\phi)$ .

Em particular, se  $\dim X < (m - k + 1)(l - k + 1)$ , então  $X_k(\phi)$  é vazio ou suave para  $\phi$  genérico.

Por consequência, temos:

**Proposição 3.3** *Seja  $l$  tal que  $\Omega_{\mathbb{P}^n}^{n-p}(n - p + 1 + l)$  é globalmente gerado. Se  $b\binom{n}{p} - c + 1 > n$ , então para mapa genérico  $\phi : \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^c(l)$  temos que  $\ker \phi$  é um fibrado vetorial de posto  $b\binom{n}{p} - c$  sobre  $\mathbb{P}^n$ .*

A seguinte proposição pode ser encontrada em [18].

**Proposição 3.4 (Fórmula de Bott)** *Em  $\mathbb{P}^n$  temos:*

$$h^q(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k)) = \begin{cases} \binom{k+n-p}{k} \binom{k-1}{p}, & \text{se } q = 0, 0 \leq p \leq n, k > p \\ 1, & \text{se } k = 0, 0 \leq p = q \leq n \\ \binom{-k+p}{-k} \binom{-k-1}{n-p}, & \text{se } q = n, 0 \leq p \leq n, k < p - n \\ 0, & \text{se senão.} \end{cases}$$

Em particular,

$$h^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{k+n}{k}, & \text{se } q = 0, k \geq 0 \\ \binom{-k-1}{-k-1-n}, & \text{se } q = n, k \leq -n - 1 \\ 0, & \text{se senão.} \end{cases}$$

**Definição 3.5** Um fibrado vetorial  $E$  é dito  $n$ -regular quando

$$h^i(E(n-i)) = 0, \text{ para todo } i > 0$$

e regular quando é 0-regular.

Observando a Fórmula de Bott, podemos imediatamente verificar o seguinte Lema.

**Lema 3.6**  $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+1+l)$  é regular para todo  $l \geq 0$ .

Com o seguinte Lema e a Proposição 3.3, temos imediatamente o Corolário 3.8.

**Lema 3.7** ([7], Lemma 1.7.2) *Seja  $E$  um fibrado vetorial sobre uma variedade  $X$ . Se  $E$   $m$ -regular, então  $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_X(m)$  é globalmente gerado.*

**Corolário 3.8** *Se  $l \geq 0$  e  $b\binom{n}{p} - c \geq n$ , então para mapa genérico  $\phi : \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^c(l)$  temos que  $\ker \phi$  é um fibrado vetorial sobre  $\mathbb{P}^n$  de posto  $b\binom{n}{p} - c$ .*

Analogamente à Proposição 3.3, podemos escrever o seguinte resultado.

**Proposição 3.9** *Seja  $K$  um fibrado vetorial sobre  $\mathbb{P}^n$  tal que  $K(m)$  seja globalmente gerado. Se  $\text{rk } K - a + 1 > n$ , então para mapa genérico  $\psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^a(-m) \rightarrow K$  temos que  $\text{coker } \psi$  é um fibrado vetorial de posto  $\text{rk } K - a$ .*

Assim, tomando  $K = \ker \phi$ , teremos:

**Proposição 3.10** *Sejam  $l \geq 0$ ,  $b \binom{n}{p} - a - c \geq n$  e  $\phi : \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}^c(l)$  um mapa genérico. Se  $\ker(\phi) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$  é globalmente gerado, então para mapa genérico  $\psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^a(-m) \rightarrow \ker(\phi)$  podemos construir uma mônada*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^a(-m) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^c(l)$$

onde o morfismo  $\alpha$  é a composição do morfismo  $\psi$  com a inclusão de  $\ker(\phi)$  em  $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b}$  e a cohomologia  $E = \frac{\ker \phi}{\text{Im } \alpha}$  é fibrado vetorial de posto  $b \binom{n}{p} - a - c$ .

## 3.2 Cálculo de $H^i(E(j))$ .

Para fibrados instanton temos a seguinte Definição-Teorema

**Teorema 3.11** ([8], **Theorem 3**) *Um fibrado vetorial  $E$  sobre  $\mathbb{P}^n$  é instanton se, e somente se, a primeira classe de Chern  $c_1(E) = 0$  e*

- se  $n \geq 2$ , então  $H^0(E(-1)) = H^n(E(-n)) = 0$ ;
- se  $n \geq 3$ , então  $H^1(E(-2)) = H^{n-1}(E(1-n)) = 0$ ;
- se  $n \geq 4$ , então  $H^p(E(k)) = 0$ , onde  $2 \leq p \leq n-2$ ,  $\forall k$ .

Ou seja, fibrados que são cohomologia de mônadas instanton são completamente determinados por suas propriedades cohomológicas.

Admitindo que um fibrado é cohomologia de uma mônada HM generalizada, nesta seção calcularemos algumas propriedades cohomológicas.

Seja  $E$  um fibrado vetorial que é cohomologia da mônada

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(-l) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m),$$

onde  $l, m \geq 0$  e  $2 \leq p \leq n - 2$ .

Usando as seqüências exatas curtas:

$$0 \rightarrow K \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

e

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(-l) \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

podemos calcular  $H^i(E(j))$  em alguns casos.

A partir da Fórmula de Bott (Proposição 3.4) e da seqüência exata longa de cohomologia obtida da seqüência exata curta 3.2 podemos provar os seguintes Lemas:

**Lema 3.12** *Se  $j \leq 0$ , então  $h^0(K(j)) = 0$ .*

**Prova:** *Observando o seguinte pedaço da seqüência exata longa de cohomologia associada à (3.2)*

$$0 \rightarrow H^0(K(j)) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow \dots$$

*temos o resultado, uma vez que pela Fórmula de Bott  $h^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)) = 0$ , se  $j \leq 0$ .*

□

**Lema 3.13** *Se  $j > 0$ , então  $h^0(K(j)) - h^1(K(j)) = \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p} b - \binom{n+m+j}{m+j} c$ .*

**Prova:** *Temos da seqüência exata longa de cohomologia obtida da seqüência (3.2)*

$$0 \rightarrow H^0(K(j)) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m+j)) \rightarrow$$



$$\rightarrow H^1(K(j)) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow \dots$$

que  $h^0(K(j)) - h^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j))b + h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j))c - h^1(K(j)) = 0$ , pois como  $2 \leq p \leq n-2$ , temos  $h^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(j)) = 0$  para todo  $j$ .

Agora, pela Fórmula de Bott temos

- $h^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)) = \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p}$ , se  $j > 0$
- $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)) = \binom{n+m+j}{m+j}$  se  $m+j \geq 0$

donde segue o resultado. □

**Lema 3.14** Se  $b \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p} > c \binom{n+m+j}{m+j}$ , então  $h^0(K(j)) \neq 0$ .

**Prova:** Novamente, olhando para a sequência exata longa

$$0 \rightarrow H^0(K(j)) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m+j)) \rightarrow \dots$$

temos que se  $b \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p} > c \binom{n+m+j}{m+j}$ , então o mapa

$$H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m+j))$$

tem núcleo não trivial igual a  $H^0(K(j))$ , provando assim o Lema. □

**Lema 3.15** Se  $j < -m$ , então  $h^1(K(j)) = 0$ .

**Prova:** Observando a sequência exata longa de cohomologia induzida pela sequência (3.2)

$$\dots \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m+j)) \rightarrow H^1(K(j)) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow \dots$$

temos que se  $j < -m$  então  $h^1(K(j)) = 0$ , uma vez que pela fórmula de Bott teremos  $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)) = 0$  e  $h^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)) = 0$ .  $\square$

**Lema 3.16**  $h^1(K(-m)) = c$ .

**Prova:** Do seguinte pedaço da sequência exata longa de cohomologia induzida de (3.2)

$$H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p-m)^{\oplus b}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}) \rightarrow H^1(K(-m)) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p-m)^{\oplus b})$$

temos que  $h^1(K(-m)) = c$ , uma vez que pela Fórmula de Bott  $h^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p-m)) = 0$ ,  $h^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p-m)) = 0$  e  $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1$ .  $\square$

**Lema 3.17** Se  $j \neq -p$ ,  $h^p(K(-p)) = b$  e  $h^p(K(j)) = 0$ .

**Prova:** Da sequência exata longa

$$H^{p-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)^{\oplus c}) \rightarrow H^p(K(j)) \rightarrow H^p(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow H^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)^{\oplus c})$$

segue o resultado, uma vez que pela Fórmula de Bott  $h^p(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p) = 1$ ,  $h^p(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(j)) = 0$  se  $j \neq 0$ ,  $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)) = 0$  se  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\forall j$ .  $\square$

**Lema 3.18** Se  $j \geq -n$ ,  $h^n(K(j)) = 0$ .

**Prova:** Da sequência exata longa de cohomologia

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)^{\oplus c}) \rightarrow H^n(K(j)) \rightarrow H^n(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b})$$

temos que: se  $j \geq -n$ , então  $h^n(K(j)) = 0$ , pois pela Fórmula de Bott  $h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)) = 0$  para todo  $j$  e  $h^n(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)) = 0$ , para  $j \geq -n$ .

□

**Lema 3.19** Se  $j < -n - m$ ,  $h^n(K(j)) = \binom{-j}{-p-j} \binom{-p-j-1}{n-p} b - \binom{-m-j-1}{-m-j-n-1} c$  e se  $-n - m \leq j < -n$ ,  $h^n(K(j)) = \binom{-j}{-p-j} \binom{-p-j-1}{n-p} b$ .

**Prova:** Uma vez que  $H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)) = 0$  para todo  $j$ , da sequência exata longa de cohomologia temos a sequência exata curta

$$0 \rightarrow H^n(K(j)) \rightarrow H^n(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)^{\oplus c}) \rightarrow 0$$

de onde segue o resultado, uma vez que  $H^n(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)) = \binom{-j}{-p-j} \binom{-p-j-1}{n-p}$ , se  $j < -n$  e  $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)) = \binom{-m-j-1}{-m-j-n-1}$ , se  $j < -n - m$ .

□

**Lema 3.20**  $H^i(K(j)) = 0$ , se  $2 \leq i \leq n - 1$ ,  $i \neq p$  e  $\forall j$ .

**Prova:** Basta observar a sequência exata longa de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+j)^{\oplus c}) \rightarrow H^i(K(j)) \rightarrow H^i(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p+j)^{\oplus b}) \rightarrow \dots$$

e notar que da Fórmula de Bott  $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)) = 0$  quando  $1 \leq i \leq n - 1$  e  $h^i(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(j)) = 0$  se  $1 \leq i \leq n - 1$  e  $i \neq p$ .

□

Resumindo, temos o seguinte Teorema

**Teorema 3.21** Sejam  $\phi : \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m)$  um morfismo sobrejetivo de fibrados, com  $2 \leq p \leq n - 2$ , e  $K = \ker \phi$ . Então:

- $h^0(K(j)) = 0$ , se  $j \leq 0$ ;
- $h^0(K(j)) - h^1(K(j)) = \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p} b - \binom{n+m+j}{m+j} c$  se  $j > 0$ ;
- Se  $b \binom{j+n}{p+j} \binom{p+j-1}{p} > c \binom{n+m+j}{m+j}$ , então  $h^0(K(j)) \neq 0$ ;
- $h^1(K(j)) = 0$ , se  $j < -m$ ;
- $h^1(K(-m)) = c$ ;
- $h^p(K(-p)) = b$  e  $h^p(K(j)) = 0$  se  $j \neq -p$ ;
- $h^n(K(j)) = 0$ , se  $j \geq -n$ ;
- $h^n(K(j)) = \binom{-j}{-p-j} \binom{-p-j-1}{n-p} b - \binom{-m-j-1}{-m-j-n-1} c$ , se  $j < -n - m$  e  
 $h^n(K(j)) = \binom{-j}{-p-j} \binom{-p-j-1}{n-p} b$  se  $-n - m \leq j < -n$ .
- $H^i(K(j)) = 0$ , se  $2 \leq i \leq n - 1$ ,  $i \neq p$  e  $\forall j$

Usando novamente a Fórmula de Bott, a sequência exata longa de cohomologia obtida da sequência exata curta 3.3 e os resultados obtidos para  $h^i(K(j))$ , temos:

**Lema 3.22** *Se  $j < l$ ,  $h^0(E(j)) = h^0(K(j))$ .*

**Prova:** *Observando a sequência exata longa de cohomologia obtida da sequência exata curta 3.3,*

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) \rightarrow H^0(K(j)) \rightarrow H^0(E(j)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) \rightarrow \dots$$

*temos o resultado, uma vez que  $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) = 0$ , se  $j < l$ , e  $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)) = 0$ , para todo  $j$ .*

□

**Lema 3.23** *Se  $1 \leq i \leq n - 2$ ,  $h^i(E(j)) = h^i(K(j))$ .*

**Prova:** *Da seqüência exata longa de cohomologia obtida a partir da seqüência exata curta 3.3*

$$\dots \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) \rightarrow H^i(K(j)) \rightarrow H^i(E(j)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) \rightarrow \dots$$

*temos o resultado, uma vez que  $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)) = 0$ , para  $1 \leq i \leq n - 1$  e todo  $j$ .*

□

**Lema 3.24** *Se  $j - l > -n - 1$ ,  $h^n(E(j)) = h^n(K(j))$  e  $h^{n-1}(E(j)) = 0$ .*

**Prova:** *Observando a seqüência exata longa de cohomologia obtida a partir da seqüência exata curta 3.3*

$$H^{n-1}(K(j)) \rightarrow H^{n-1}(E(j)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(j-l)) \rightarrow H^n(K(j)) \rightarrow H^n(E(j)) \rightarrow 0$$

*temos que o resultado segue do Lema 3.18 e de que  $h^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j-l)) = 0$  sempre que  $j - l > -n - 1$ .*

□

**Lema 3.25**  *$h^{n-1}(E(l - n - 1)) = a$ .*

**Prova:** *Basta observar a seqüência exata longa de cohomologia*

$$H^{n-1}(K(l+i)) \rightarrow H^{n-1}(E(l+i)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(i)) \rightarrow H^n(K(l+i))$$

*com  $i = -n - 1$  e o resultado segue do lema 3.20*

□

Resumindo os Lemas 3.22, 3.23, 3.24 e 3.25 temos o seguinte Teorema

**Teorema 3.26** *Seja  $E$  o fibrado cohomologia da mônada*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus a}(-l) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p)^{\oplus b} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus c}(m)$$

e  $K = \ker \beta$ . Então:

- $h^0(E(j)) = h^0(K(j))$ , se  $j < l$ ;
- $h^i(E(j)) = h^i(K(j))$ , se  $1 \leq i \leq n - 2$ ;
- $h^n(E(j)) = h^n(K(j))$  e  $h^{n-1}(E(j)) = 0$ , se  $j - l > -n - 1$ ;
- $h^{n-1}(E(l - n - 1)) = a$ .

Note em particular que:

- $h^1(E(-m)) = c$ ;
- $h^{n-1}(E(l - n - 1)) = a$ ;
- $h^0(E(j)) = 0$ , quando  $j \leq 0$ ;
- $h^1(E(j)) = 0$ , quando  $j < -m$ ;
- $h^i(E(j)) = 0$ , para  $2 \leq i \leq n - 2$  com  $i \neq p$  e  $\forall j$ ;
- $h^{n-1}(E(j)) = 0$ , quando  $j - l > -n - 1$ ;
- $h^n(E(j)) = 0$ , quando  $j \geq -n$ .

Enunciamos o Horrocks' splitting criterion

**Teorema 3.27** ([18] **Teorema 2.3.1**) *Um fibrado holomorfo  $E$  sobre  $\mathbb{P}^n$  se quebra como soma de fibrados de linha se, e somente se,*

$$H^i(\mathbb{P}^n, E(j)) = 0$$

para todo  $i = 1, \dots, n - 1$  e  $j \in \mathbb{Z}$ .

Assim, fibrados que são cohomologia de mônadas HM generalizadas não se quebram como soma de fibrados de linha. Nada impede, porém, que tais fibrados sejam decomponíveis.

### 3.3 Mônadas $HM^{2p}$ .

A cohomologia da mônada de Horrocks-Mumford

$$HM^4 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^{\oplus 5} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5} \quad (3.4)$$

é um dos principais exemplos de fibrado vetorial indecomponível de posto baixo.

A partir deste exemplo, Rosa Maria Miró-Roig sugeriu uma generalização da mônada (3.4) para mônadas em espaços projetivos de dimensão par, gerando uma nova classe de exemplos de mônadas em espaços projetivos. Em geral, o posto do fibrado cohomologia destas mônadas é alto, entretanto, as representações de quiver associadas são indecomponíveis.

Descreveremos assim, para cada inteiro  $p$  maior que 1, os mapas  $\alpha$  e  $\beta$  da mônada:

$$HM^{2p} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}(-1)^{\oplus 2p+1} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^{2p}}^2(p)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}^{\oplus 2p+1}$$

Começaremos a construção das mônadas  $HM^{2p}$  descrevendo os morfismos  $\alpha$  e  $\beta$  da mônada de Horrocks-Mumford. Podemos escrever:

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^{\oplus 5} = \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ ;
- $\Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2} = \mathbb{C}^2 \otimes \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)$ ;
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^{\oplus 5} = \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ .

Fixemos  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$  coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^4$ . Temos que

- $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)^{\oplus 5}, \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2}) \cong \mathbf{Mat}_{2 \times 5} \otimes \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1), \Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2))$ ;
- $\beta \in \text{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2)^{\oplus 2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}^{\oplus 5}) \cong \mathbf{Mat}_{5 \times 2} \otimes \text{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}^4}^2(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4})$ .

**Lema 3.28** [2] *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $\mathbb{P}(V)$ . Então, são canonicamente isomorfos*

$$\text{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}^i(i), \Omega_{\mathbb{P}(V)}^j(j)) \cong \Lambda^{i-j}V.$$

Uma vez que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} = \Omega_{\mathbb{P}^n}^0$  e  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}^n(n)$ , podemos considerar  $\alpha \in \mathbf{Mat}_{2 \times 5} \otimes \Lambda^2 \mathbb{C}^5$  e  $\beta \in \mathbf{Mat}_{5 \times 2} \otimes \Lambda^2 \mathbb{C}^5$ .

Seguindo a notação como em [4], os morfismos  $\alpha$  e  $\beta$  da mônada de Horrocks-Mumford são:

$$\beta = \begin{pmatrix} x_2 \wedge x_3 & x_1 \wedge x_4 \\ x_3 \wedge x_4 & x_2 \wedge x_0 \\ x_4 \wedge x_0 & x_3 \wedge x_1 \\ x_0 \wedge x_1 & x_4 \wedge x_2 \\ x_1 \wedge x_2 & x_0 \wedge x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\beta Q)^t$$

$$\text{onde } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Escolhendo  $\{x_1 \wedge x_4, x_2 \wedge x_0, x_3 \wedge x_1, x_4 \wedge x_2, x_0 \wedge x_3, x_2 \wedge x_3, x_3 \wedge x_4, x_4 \wedge x_0, x_0 \wedge x_1, x_1 \wedge x_2\}$  como base de  $\Lambda^2 \mathbb{C}^5$ , podemos escrever um funtor  $R$  como no Teorema 1.27, teremos a representação:

$$R(HM^4) : \mathbb{C}^5 \begin{array}{c} \xrightarrow{-e_{11}} \\ \xrightarrow{-e_{12}} \\ \xrightarrow{-e_{13}} \\ \xrightarrow{-e_{14}} \\ \xrightarrow{-e_{15}} \\ \xrightarrow{e_{21}} \\ \xrightarrow{e_{22}} \\ \xrightarrow{e_{23}} \\ \xrightarrow{e_{24}} \\ \xrightarrow{e_{25}} \end{array} \mathbb{C}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_{12}} \\ \xrightarrow{f_{22}} \\ \xrightarrow{f_{32}} \\ \xrightarrow{f_{42}} \\ \xrightarrow{f_{52}} \\ \xrightarrow{f_{11}} \\ \xrightarrow{f_{21}} \\ \xrightarrow{f_{31}} \\ \xrightarrow{f_{41}} \\ \xrightarrow{f_{51}} \end{array} \mathbb{C}^5 ,$$

onde  $e_{ij} \in \mathbf{Mat}_{2 \times 5}$  e  $f_{ij} \in \mathbf{Mat}_{5 \times 2}$  são matrizes elementares.

**Lema 3.29** *Seja  $V : V_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\phi_{10}} \end{array} V_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\psi_{10}} \end{array} V_3$  subrepresentação de  $R_{HM}$ . Se  $V_1 \neq 0$ , então  $V_2 = \mathbb{C}^2$  e  $V_3 = \mathbb{C}^5$ .*

**Prova:** *Seja  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in V_1 \subset \mathbb{C}^5$  um vetor não nulo. Sem perda de generalidade, podemos supor  $v_1 \neq 0$ . Como  $V$  é subrepresentação de  $R(HM^4)$ , temos os diagramas comutativos de transformações lineares:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^5 & \xrightarrow{-e_{11}} & \mathbb{C}^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ V_1 & \xrightarrow{\phi_1} & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^5 & \xrightarrow{e_{21}} & \mathbb{C}^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ V_1 & \xrightarrow{\phi_6} & V_2 \end{array}$$

*Assim,  $(-v_1, 0)$  e  $(0, v_1)$  são elementos de  $V_2$ . Logo,  $V_2 = \mathbb{C}^2$ .*

*De forma análoga, mostra-se que  $V_3 = \mathbb{C}^5$ .*

□

Imediatamente, temos:

**Corolário 3.30** *A representação  $R(HM^4)$  é indecomponível.*

Seja agora  $HM^6$  a mônada:

$$HM^6 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(-1)^{\oplus 7} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^6}^3(3)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}^{\oplus 7}$$

tal que:

$$\beta = \begin{pmatrix} x_{234} & x_{156} \\ x_{345} & x_{260} \\ x_{456} & x_{301} \\ x_{560} & x_{412} \\ x_{601} & x_{523} \\ x_{012} & x_{634} \\ x_{123} & x_{745} \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\beta P)^t$$

onde  $x_{ijk} = x_i \wedge x_j \wedge x_k$  e  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Teremos novamente que  $\Sigma_\alpha = \emptyset$ ,  $\beta$  é sobrejetivo e  $\beta \circ \alpha = 0$ .

Uma vez que por [2]  $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(-1), \Omega_{\mathbb{P}^6}^3(3)) \cong \text{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}^6}^3(3), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}) \cong \Lambda^3 \mathbb{C}^7$ , e  $\dim \Lambda^k \mathbb{C}^n = \binom{n}{k}$ , associamos via o Teorema 1.27 a representação de  $K_{35 \times 35}$

dada por:

$$\begin{array}{ccccc}
& \xrightarrow{e_{21}} & & \xrightarrow{f_{11}} & \\
& \xrightarrow{e_{22}} & & \xrightarrow{f_{21}} & \\
& \xrightarrow{e_{23}} & & \xrightarrow{f_{31}} & \\
& \xrightarrow{e_{24}} & & \xrightarrow{e_{41}} & \\
& \xrightarrow{e_{25}} & & \xrightarrow{e_{51}} & \\
& \xrightarrow{e_{26}} & & \xrightarrow{e_{61}} & \\
& \xrightarrow{e_{27}} & & \xrightarrow{e_{71}} & \\
& \xrightarrow{e_{11}} & & \xrightarrow{e_{12}} & \\
\mathbb{C}^7 & \xrightarrow{e_{12}} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{e_{22}} & \mathbb{C}^7, \\
& \xrightarrow{e_{13}} & & \xrightarrow{e_{32}} & \\
& \xrightarrow{e_{14}} & & \xrightarrow{e_{42}} & \\
& \xrightarrow{e_{15}} & & \xrightarrow{e_{52}} & \\
& \xrightarrow{e_{16}} & & \xrightarrow{e_{62}} & \\
& \xrightarrow{e_{17}} & & \xrightarrow{e_{72}} & \\
& \xrightarrow{0} & & \xrightarrow{0} & \\
& \xrightarrow{\vdots} & & \xrightarrow{\vdots} & \\
& \xrightarrow{0} & & \xrightarrow{0} &
\end{array}$$

ao escolher  $\{x_{234}, x_{345}, x_{456}, x_{560}, x_{601}, x_{012}, x_{123}, x_{156}, x_{260}, x_{301}, x_{412}, x_{523}, x_{634}, x_{745}\}$  os primeiros 14 elementos da base de  $\Lambda^3 \mathbb{C}^7$ .

**Lema 3.31** *Seja  $HM^6$  a mônada*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(-1)^{\oplus 7} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^6}^3(3)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}^{\oplus 7}$$

e  $F(M)$  a representação de  $K_{35 \times 35}$  associada pela escolha de base como no Teorema 1.27. Então,  $F(M)$  é representação indecomponível.

**Prova:** *Segue como no Lema 3.29 e Corolário 3.30.* □

**Definição 3.32** *Seja  $p \geq 2$  um inteiro. A  $HM^{2p}$  sobre  $\mathbb{P}^{2p}$  é dada por*

$$HM^{2p} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}(-1)^{\oplus 2p+1} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{\mathbb{P}^{2p}}^p(p)^{\oplus 2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}^{\oplus 2p+1}$$

onde  $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \Lambda^p \mathbb{C}^{2p+1} \otimes \mathbf{Mat}_{2 \times 2p+1}$  e  $\beta = (\beta_{ij}) \in \Lambda^p \mathbb{C}^{2p+1} \otimes \mathbf{Mat}_{2p+1 \times 2}$ , com  $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \Lambda^p \mathbb{C}^{2p+1}$  dados por

- $\beta_{i1} = x_{1+i} \wedge x_{2+i} \wedge \dots \wedge x_{p+i}$
- $\beta_{i2} = x_i \wedge x_{p+1+i} \wedge x_{p+2+i} \wedge \dots \wedge x_{2p-1+i}$
- $\alpha = \left( \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{p-1} & 0 \end{pmatrix} \right)^t$

onde os subíndices nas formas são tomados em  $\mathbb{Z}_{2p+1}$ .

**Teorema 3.33** *Sejam  $HM^{2p}$  mônada sobre  $\mathbb{P}^{2p}$  e  $F(HM^{2p})$  a representação de  $K_{\binom{2p+1}{p} \times \binom{2p+1}{p}}$  obtida segundo o Teorema 1.27 pelas escolhas de bases de  $\Lambda^p \mathbb{C}^{2p+1}$ . Então,  $F(HM^{2p})$  é representação indecomponível.*

**Prova:** Segue como no Lema 3.29 e Corolário 3.30. □

Conectando com a teoria geral desenvolvida no Capítulo 1, temos o seguinte resultado de indecomponibilidade para mônadas  $HM^{2p}$

**Teorema 3.34** *A mônada  $HM^{2p}$  sobre  $\mathbb{P}^{2p}$  é indecomponível como objeto da categoria  $\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathbb{P}^{2p})$ , onde  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}(-1)$ ,  $\mathcal{B} = \Omega_{\mathbb{P}^{2p}}^p(p)$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2p}}$ .*

**Prova:** Segue como consequência do Lema 1.28 e do Teorema 3.33. □

# Apêndice A

## Variedade aritmeticamente Cohen-Macaulay

As definições deste apêndice podem ser encontradas em [16].

Seja  $A$  um anel,  $A \neq 0$ . Uma sequência finita de  $n + 1$  ideais primos

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n$$

é chamada *cadeia de ideais primos de comprimento  $n$* .

Se  $p$  é um ideal primo de  $A$ , o supremo dos comprimentos de cadeias com  $p_0 = p$  é chamado *altura* de  $p$  e denotado  $\text{ht}(p)$ .

**Definição A.1** *A dimensão do anel  $A$  é o supremo das alturas dos ideais primos de  $A$ .*

$$\dim A = \sup \{ \text{ht}(p) : p \text{ é ideal primo de } A \}.$$

*Se  $M$  é um  $A$ -módulo, definimos a dimensão de  $M$  por*

$$\dim M = \dim(A/\text{Ann}(M)).$$

Sejam  $A$  um anel,  $M$  um  $A$ -módulo e  $a_1, \dots, a_r$  uma sequência de elementos em  $A$ . Dizemos que  $a_1, \dots, a_r$  é uma *sequência  $M$ -regular* quando:

1.  $a_i$  não é divisor de zero sobre  $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ , para todo  $1 \leq i \leq r$
2.  $M \neq (a_1, \dots, a_r)M$

Quando os elementos  $a_1, \dots, a_r$  pertencem a um ideal  $I$ , dizemos que é uma *sequência  $M$ -regular em  $I$* . Se não existe  $b$  em  $I$  tal que a sequência  $a_1, \dots, a_r, b$  seja regular, dizemos que  $a_1, \dots, a_r$  é sequência  $M$ -regular *maximal* em  $I$ .

**Definição A.2** *Sejam  $A$  um anel noetheriano,  $I$  um ideal de  $A$  e  $M$  um  $A$ -módulo. Definimos a  $I$ -profundidade de  $M$  como o comprimento das sequências  $M$ -regulares em  $I$  e denotamos  $\text{depth}_I M$ . Quando  $(A, \mathfrak{m})$  é um anel local, escreve-se  $\text{depth } M$  ou  $\text{depth}_A M$ .*

Se  $A$  é um anel local noetheriano e  $M$  um  $A$ -módulo finitamente gerado não nulo, temos que  $\text{depth } M \leq \dim M$

**Definição A.3** *Um anel  $A$  é Cohen-Macaulay quando sua dimensão de  $A$  é igual a profundidade de  $A$ .*

**Definição A.4** *Diremos que uma variedade projetiva  $X$  é aritmeticamente Cohen-Macaulay (ACM) quando o anel de coordenadas homogêneas  $S(X)$  é Cohen-Macaulay.*

Segundo a definição, o espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$  é ACM.

# Apêndice B

## Sistema de Raízes

As Definições e resultados deste apêndice podem ser encontradas em [24]. Dado um quiver  $Q$  escolheremos uma enumeração para os vértices de  $Q$ , fazendo  $\{1, \dots, n\} = Q_0$  sempre que  $Q$  tiver  $n$  vértices.

**Definição B.1** *Seja  $Q$  um quiver e  $n = \#Q_0$ . A forma de Euler é a forma bilinear  $\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por:*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} y_{h(\alpha)}$$

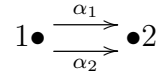
*A partir desta forma, obtemos uma forma bilinear simétrica em  $\mathbb{Z}^n$  dada por:*

$$(x, y) = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle)$$

*Esta última é a forma de Cartan associada ao quiver  $Q$  e a matriz desta a matriz de Cartan do quiver  $Q$ .*

*A forma quadrática  $q(x) = (x, x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$  associada a forma de Cartan é a forma de Tits do quiver  $Q$ .*

**Exemplo B.2** Seja  $Q$  o quiver



Se  $x, y \in \mathbb{Z}^2$ , então

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2,$$

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1,$$

a matriz de Cartan deste quiver é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e a forma de Tits de  $Q$  é  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ .

Note que a forma de Cartan não depende das orientações das flechas do quiver  $Q$ , e sim de quantas flechas existem entre dois vértices dados.

Dado um quiver  $Q$ , associamos a este um grafo  $\Gamma$  que tem o mesmo número de vértices que  $Q$  e as arestas são as flechas de  $Q$  sem as orientações. Por semelhança com a definição de quiver, dizemos que  $\Gamma_0$  é o conjunto de vértices e  $\Gamma_1$  o conjunto de arestas de  $\Gamma$ .

Assim, a forma de Cartan só depende do grafo  $\Gamma$  associado a  $Q$ .

O elemento  $e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}) \in \mathbb{Z}^n$ , onde  $\delta_{ij} = 1$  quando  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ , é dito uma *raiz fundamental* quando não existem laços em  $i$ , isto é, não temos flechas em  $Q_1$  que começam e terminam no vértice  $i$ . Denotaremos  $\Pi$  o conjunto das raízes fundamentais.



Para uma raiz fundamental  $i$  definimos a *reflexão fundamental*  $\sigma_i \in \text{Aut } \mathbb{Z}^n$  dada por:

$$\sigma_i(\lambda) = \lambda - 2(\lambda, e_i) e_i$$

Se  $i$  é uma raiz fundamental, então  $(e_i, e_i) = 1$ .

Vemos que a reflexão  $\sigma_i$  também depende apenas do grafo  $\Gamma$ .

Se  $(\lambda, e_i) = 0$ , então  $\sigma_i(\lambda) = \lambda$ . A forma de Cartan é invariante por reflexões fundamentais pois

$$\begin{aligned} (\sigma_i(\lambda), \sigma_i(\lambda')) &= (\lambda - 2(\lambda, e_i) e_i, \lambda' - 2(\lambda', e_i) e_i) \\ &= (\lambda, \lambda') - 2(\lambda', e_i)(\lambda, e_i) - 2(\lambda, e_i)(e_i, \lambda') + 4(\lambda, e_i)(\lambda', e_i)(e_i, e_i) \\ &= (\lambda, \lambda'). \end{aligned}$$

Temos também que  $\sigma_i(e_i) = -e_i$ .

O conjunto de todas reflexões fundamentais geram o *grupo de Weyl do grafo*  $\Gamma$  que denotaremos por  $W(\Gamma) \subset \text{Aut } \mathbb{Z}^n$ .

Note que a forma de Cartan é  $W(\Gamma)$  invariante, isto é,  $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$  para todo  $\sigma \in W(\Gamma)$ .

**Definição B.3** O conjunto das raízes reais  $\Delta^{re}(\Gamma)$  é dado por:

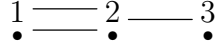
$$\Delta^{re}(\Gamma) = \bigcup_{w \in W(\Gamma)} w(\Pi).$$

**Definição B.4** Seja um grafo  $\Gamma$ . O grafo  $\Gamma'$  é um subgrafo de  $\Gamma$  quando  $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$  e  $\Gamma'_1$  é o conjunto de todas as arestas de  $\Gamma$  que não são ligadas a vértices de  $\Gamma_0 \setminus \Gamma'_0$ .

**Exemplo B.5** O grafo

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 2 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \end{array}$$

é subgrafo de



Para um elemento  $\alpha = \sum_{i \in \Gamma_0} k_i e_i$ , onde  $k_i \in \mathbb{Z}$ , chamamos de *altura* (height) de  $\alpha$  (denotada  $ht \alpha$ ) o número  $\sum_i k_i$ . Chamamos de *suporte* de  $\alpha$  (denotado  $\text{supp } \alpha$ ) o subgrafo de  $\Gamma$  com os vértices  $i$  tais que  $k_i \neq 0$  e todas as arestas ligando estes vértices.

Dados  $x, y \in \mathbb{Z}^n$ , dizemos que  $x > y$  quando  $x_i \geq y_i$  e  $x \neq y$ .

**Definição B.6** O conjunto fundamental  $M \subset \mathbb{Z}^n$  é:

$$M = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n, \alpha > 0 \mid (\alpha, e_i) \leq 0, \forall e_i \in \Pi; \text{supp } \alpha \text{ é conexo}\}$$

Definimos o conjunto de raízes imaginárias  $\Delta^{im}(\Gamma)$  por

$$\Delta^{im}(\Gamma) = \bigcup_{w \in W(\Gamma)} w(M \cup -M).$$

**Definição B.7** Definimos então o sistema de raízes  $\Delta(\Gamma)$  do grafo  $\Gamma$  como

$$\Delta(\Gamma) = \Delta^{re}(\Gamma) \cup \Delta^{im}(\Gamma).$$

Um elemento  $\alpha \in \Delta(\Gamma)$ ,  $\alpha > 0$  é dito uma *raiz positiva*. Denotaremos  $\Delta_+(\Gamma)$  o conjunto de todas as raízes positivas. Similarmente, definem-se o conjunto das *raízes reais positivas* e o das *raízes imaginárias positivas*.

Onde não causar confusão usaremos a notação abreviada  $\Delta$ ,  $W$ , etc, em vez de  $\Delta(\Gamma)$ ,  $W(\Gamma)$ , etc.

Temos que  $(\alpha, \alpha) = 1$  se  $\alpha \in \Delta^{re}$ , e  $(\alpha, \alpha) \leq 0$  se  $\alpha \in \Delta^{im}$ .

De fato, se  $\alpha \in \Delta^{re}$ , temos  $\alpha = w(e_i)$ , onde  $w \in W$  e  $e_i \in \Pi$ . Como a forma  $(-, -)$  é invariante pelo grupo  $W$ , temos diretamente que

$(\alpha, \alpha) = (e_i, e_i) = 1$ . Agora, caso  $\alpha \in \Delta^{im}$  temos  $\alpha = w(\beta)$  para algum  $w \in W$  e algum  $\beta = \sum k_i e_i \in M \cup -M$ .

Assim,  $(\alpha, \alpha) = (w(\beta), w(\beta)) = (\beta, \beta) = \sum_i k_i (\beta, e_i) \leq 0$ , pois caso  $\beta \in M$  então  $k_i \geq 0$ , e  $(\beta, e_i) \leq 0$  e se  $\beta \in -M$  mostra-se o mesmo semelhantemente.

Daqui temos que  $\Delta^{re} \cap \Delta^{im} = \emptyset$ .

**Teorema B.8 ( Kac [12], pg 85)** *Seja  $Q$  um quiver. Se  $V$  é uma representação indecomponível de  $Q$  sobre um corpo algebricamente fechado  $k$ , então  $\dim V$  é um vetor com entradas positivas do sistema de raízes de  $Q$ . Por outro lado, se  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor com entrada positivas do sistema de raízes de  $Q$ , então existe representação indecomponível  $V$  com  $\dim V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, vol. 1: Techniques of Representation Theory*. Torun (2003).
- [2] A. Beilinson, Coherent sheaves on  $\mathbb{P}^n$  and problems of linear algebra. *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 214-216.
- [3] L. Costa, R. M. Miro-Roig, Monads and regularity of vector bundles on projective varieties. *Michigan Math. J.* **55** (2007), 417-436.
- [4] W. Decker, F. O. Schreyer, On the Uniqueness of Horrocks-Mumford-Bundle. *Math. Ann.* **273** (1986), 415-443.
- [5] G. Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring. *Proc. London Math. Soc.* **14** (1964), 689-713.
- [6] G. Horrocks, D. Mumford, A rank 2 vector bundle on  $\mathbb{P}^4$  with 15000 symmetries. *Topology* **12** (1973), 63-81.
- [7] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Cambridge Mathematical Library, (1996).

- [8] M. Jardim, Instanton sheaves on complex projective spaces. *Collect. Math.* **57** (2006), 69-91.
- [9] M. Jardim, R. V. Martins, Linear and Steiner Bundles on Projective varieties. *Collect. Math.* **38** (2010), 2249-2270.
- [10] M. Jardim, D. M. Prata, Pure resolutions of vector bundles on complex projective spaces. arXiv:1210.7835
- [11] M. Jardim, V. M. F. Silva, Decomposability criterion for linear sheaves. *Cent. Eur. J. Math.* **10** (2012), 1292-1297.
- [12] V. G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Invent. Math.* **56** (1980), 57-92.
- [13] V. G. Kac, Root systems, representations of quivers and invariant theory. *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, 74-108, *Lecture Notes in Math.*, **996** Springer, Berlin, (1983).
- [14] V. G. Kac, Some remarks on representations of quivers and infinite root systems. *Lecture Notes in Math.* **832** (1980), 311-327.
- [15] H. Krause, Representation of quivers via reflection functors. arXiv:0804.1428v2.
- [16] H. Matsumura, *Commutative algebra*, second ed., *Mathematics Lecture Note Series*, **56** Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
- [17] C. Okonek, H. Spindler, Mathematical instanton bundles on  $\mathbb{P}^{2n+1}$ . *J. Reine Angew. Math.* **364** (1986), 35-50.

- [18] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Birkhauser, (1980).
- [19] G. Ottaviani, *Varietà proiettive di codimensione piccola*, INsAM Courses, Aracne, Roma (1995).
- [20] S. A. Ovsienko, Representations of quiver with relations. Matrix problems, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Kiev, (1977), 88-103.
- [21] D. M. Prata, *Representações Torcidas de Quivers*. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP (2008).
- [22] D. M. Prata, *Representações de Quivers e fibrados vetoriais sobre espaços projetivos* Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP (2012).
- [23] A. Savage, Finite-dimensional algebras and quivers. Encyclopedia of Mathematical Physics. **2** Oxford: Elsevier, (2006), 313-320
- [24] V. M. F. Silva, *Sistema de raízes e representações de quivers* Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP (2009).