UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

IMECC

Tese de Mestrado

Cálculo de Malliavin e Análise no Espaço de Wiener

Autor: **Alexandre de Andrade**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo R. C. Ruffino**

Julho de 1999

Cálculo de Malliavin e Análise no Espaço de Wiener

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Alexandre de Andrade e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de julho de 1999

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui
Prof. Dr. Mauro Sérgio de Freitas Marques

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Andrade, Alexandre de

An24c Cálculo de Malliavin e análise no espaço de Wiener / Alexandre de Andrade -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Paulo R. C. Ruffino

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1 Cálculo de Malliavin. 2. Análise estocástica. I. Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de julho de 1999 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

Prof (a). Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MAURO SERGIO DE FREITAS MARQUES

Resumo:

A presente monografia contém um estudo de aspectos fundamentais da análise no espaço de Wiener. Os tópicos abordados são: a decomposição em Caos de Wiener, Integrais Múltiplas de Wiener, Derivada de Malliavin e Integral de Skorohod. Também são apresentadas as principais relações destes com a Integral de Itô e algumas aplicações ao cálculo antecipativo.

Abstract:

This monograph contains a study on the fundamentals aspects of analysis in the Wiener space. Subjects are: Wiener chaos decomposition, Multiple Wiener integrals, Malliavin derivative and Skorohod integral. We also present the relations between this elements and Ito integral. Some aplications of this tools to antecipative stochastic calculus are showed.

Agradecimentos:

À FAPESP pelo apoio financeiro, ao orientador Paulo R. C. Ruffino pela colaboração no desenvolvimento do trabalho, aos meus pais e à minha namorada Adriana.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

O Cálculo de Malliavin é um cálculo diferencial em dimensão infinita sobre um espaço de Banach com uma medida de probabilidade que modela probabilisticamente o usualmente denominado movimento Browniano. Essa teoria começou a se desenvolver com P. Malliavin, seguido posteriormente por Stroock, Bismut, Watanabe, Nualart e outros. Uma das motivações principais para o desenvolvimento desse Cálculo é sua aplicação em equações diferenciais estocásticas: estudo de regularidade da distribuição da solução dessas equações, e extensão do conceito de integral estocástica de Itô para a integral de Skorohod, onde o integrando não é necessariamente adaptado à σ-álgebra do movimento Browniano (ou do semi-martingale com relação ao qual se faz a integração).

A bibliografia existente hoje já é bastante rica, com vários livros que condensaram (e aprimoraram) os resultados obtidos nos últimos 20 anos. Nossa intenção nessa monografia é estudar esta teoria nos baseando fundamentalmente nos textos de Nualart [1], Ocone [8] e Watanabe [5].

Durante o desenvolvimento do texto, usaremos algumas convenções. Símbolos de somatório denotam somas infinitas enumeráveis com índice a partir de 0, quando não mencionado contrário. Eventualmente omitiremos a especificação do índice quando for evidente de qual se trata. Todos os espaços vetoriais aqui são sobre $\mathbb{R}$. Admitiremos também várias propriedades de Espaços de Hilbert sem demonstração, assim como teoria elementar de operadores lineares não limitados. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar o livro de Conway [2].

Alguns resultados básicos de teoria da medida e probabilidade serão admitidos, como por exemplo a independência de variáveis gaussianas zero-correlatas, teorema de extensão de Kolmogorov e o teorema de convergência de Martingales limitados em $L^2(\Omega)$ (veja em Revuz e Yor [3]).

A seguir, alguns resultados úteis que merecem destaque.

Lema 1.1 *Dadas X, Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta gaussiana, com $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, então*

$$E\left[\exp\left(sX - s^2/2\right)\exp\left(tY - t^2/2\right)\right] = \exp\left(stE\left[XY\right]\right)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Defina $Z_{s,t} \equiv sX + tY$. Para qualquer $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $Z_{s,t}$ é gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ com

$$\sigma^2 = E\left[(Z_{s,t})^2\right] = s^2 + t^2 + 2st\, E\left[XY\right].$$

A transformada de Laplace de $Z_{s,t}$ é

$$\widehat{Z_{s,t}}(\xi) = E\left[\exp\left(\xi Z_{s,t}\right)\right] = \exp\left(\xi^2\sigma^2/2\right).$$

Em $\xi = 1$,

$$E\left[\exp\left(Z_{s,t}\right)\right] = \exp\left(\sigma^2/2\right)$$

ou ainda

$$E\left[\exp\left(sX+tY\right)\right]=\exp\left(s^2/2+t^2/2+st\,E\left[XY\right]\right).$$

Daqui segue o resultado, usando a linearidade da esperança. □

O m-ésimo polinômio de Hermite pode ser definido como

$$p_m\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^m}{m!}\exp\left\{x^2/2\right\}\frac{d^m}{dx^m}\exp\left\{-x^2/2\right\},\ m\geq 0. \tag{1.1}$$

Serão úteis aqui as propriedades $p'_m=p_{m-1}$ e $\left(m+1\right)p_{m+1}=p_1p_m-p_{m-1}$, válidas para qualquer $m\geq 1$.

Corolário 1.2 *Dadas X,Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta gaussiana, com $X,Y\sim\mathcal{N}\left(0,1\right)$, então*

$$E\left[p_n\left(X\right)p_m\left(Y\right)\right]=\frac{1}{n!}\left(E\left[XY\right]\right)^n\delta_{nm}. \tag{1.2}$$

Demonstração: Seja $f\left(s,t\right)\equiv\exp\left(\alpha st\right)$. Então $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ e

$$\frac{\partial^{m+n}f}{\partial s^n\partial t^m}\left(0,0\right)=\begin{cases} n!\alpha^n, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

De fato,

$$\frac{\partial^m f}{\partial t^m}=\left(\alpha s\right)^m\exp\left(\alpha st\right)$$

e pela regra do produto

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial t^m}\right) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^i}{\partial s^i}\left[\left(\alpha s\right)^m\right]\frac{\partial^{n-i}}{\partial s^{n-i}}\left[\exp\left(\alpha st\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^i}{\partial s^i} \left[(\alpha s)^m\right] \left[(\alpha t)^{n-i} \exp(\alpha s t)\right]$$

Em $t = 0$, apenas o último termo da soma não se anula ($i = n$). Portanto

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial s^n \partial t^m}(s, 0) = \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[(\alpha s)^m\right] = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\alpha^m s^{m-n}, & n < m \\ n!\alpha^n, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases},$$

e para $s = 0$, apenas o caso $n = m$ resulta num termo não nulo.

Portanto, fazendo $\alpha = E[XY]$,

$$\left.\frac{\partial^{m+n}}{\partial s^n \partial t^m}\right|_{(0,0)} \exp(stE[XY]) = \begin{cases} n!\,(E[XY])^n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \tag{1.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^n}{\partial s^n}\right|_{s=0} \exp\left(sx - s^2/2\right) &= \left.\frac{\partial^n}{\partial s^n}\right|_{s=0} \exp\left(x^2/2 - (x-s)^2/2\right) \\ &= \exp\left(x^2/2\right) \left.\frac{\partial^n}{\partial s^n}\right|_{s=0} \exp\left(-(x-s)^2/2\right) \\ &= (-1)^n \exp\left(x^2/2\right) \left.\frac{\partial^n}{\partial s^n}\right|_{s=x} \exp\left(-s^2/2\right) \\ &= n!p_n(x) \end{aligned}$$

Portanto

$$\left.\frac{\partial^{m+n} f}{\partial s^n \partial t^m}\right|_{(0,0)} E\left[\exp\left(sX - s^2/2\right)\exp\left(tY - t^2/2\right)\right] = E\left[n!p_n(X)\, m!p_m(Y)\right], \tag{1.4}$$

e a prova fica completa igualando as expressões (1.3) e (1.4). $\square$

Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, v)$ σ-finitos e sem átomos. Serão úteis as identificações:

$$L^2(X \times Y) \approx L^2(X; L^2(Y)) \approx L^2(Y; L^2(X)).$$

O espaço linear gerado por funções do tipo

$$f \otimes g(x, y) = f(x)\, g(y)\,;\ f \in L^2(X),\ g \in L^2(Y)$$

é denso em $L^2(X \times Y)$.

No decorrer de todo o texto, os objetos fundamentais de nosso estudo serão dois espaços de medida satisfazendo certas propriedades: $(T, \mathcal{B}, \mu)$ σ-finito sem átomos e $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espaço de probabilidade. A partir destes dois, usaremos vários espaços do tipo L^2 derivados. Assim, teremos $L^2(\Omega)$ na decomposição em Caos de Wiener, $L^2(T^m)$ em integrais múltiplas de Wiener, processo a um parâmetro em $L^2(T \times \Omega)$ e processo de vários parâmetros em $L^2(T^m \times \Omega)$. Na teoria de operadores de Ornstein-Uhlenbeck, aparecem ainda os espaços $L^2(\Omega^2)$ e $L^2(T \times \Omega^2)$.

Algumas identificações entre subespaços e equivalências mais usados serão: $L^2(T)^{\otimes m} \subset L^2(T^m)$, $L^2(T) \subset L^2(T \times \Omega)$, $L^2(T \times \Omega) \simeq L^2(\Omega; L^2(T))$, $L^2(T^m \times \Omega) \simeq L^2(\Omega; L^2(T^m))$, $L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega^2)$ e $L^2(T \times \Omega) \subset L^2(T \times \Omega^2)$.

Por brevidade, denotaremos $L^2(T^m) \equiv L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ e $L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (e assim por diante) quando for claro no contexto a σ-álgebra e a medida que estamos usando.

Vejamos ainda um resultado simples de teoria de conjuntos que será útil:

Proposição 1.3 *Dada $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família finita de conjuntos, existe $\{B_j\}_{j \in J}$ finita com elementos disjuntos aos pares tal que cada A_i pode ser escrito como uma união (disjunta) de alguns dos B_j, isto é, $A_i = \biguplus_{j \in \Pi_i} B_j$ para algum $\Pi_j \subset J$.*

Demonstração: Por indução na cardinalidade de I, ou seja, por indução em n, sendo $I = \{1, 2, ..., n\}$.

A proposição vale trivialmente para $n = 1$. Para $n = 2$, dada $\{A_1, A_2\}$, então

$$\{A_1 - A_2, A_2 - A_1, A_1 \cap A_2\}$$

é uma família disjunta associada.

Suponha a proposição válida para n e seja dada $\{A_1, ..., A_{n+1}\}$ arbitrária. Para $\{A_1, ..., A_n\}$ seja $\{B_j\}_{j\in J}$ uma família disjunta associada. Então

$$\{B_j \cap A_{n+1}\}_{j\in J} \cup \{B_j - A_{n+1}\}_{j\in J} \cup \left\{ A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\}$$

é uma família disjunta associada a $\{A_1, ..., A_{n+1}\}$. □

Corolário 1.4 *Qualquer função característica da forma $1_{A_1\times\cdots\times A_m}$ pode ser escrita como combinação linear de funções características da forma $1_{B_1\times\cdots\times B_m}$, onde $\{B_i\}$ são disjuntos aos pares. Além disso, os coeficientes da combinação podem ser tomados positivos.*

Demonstração: Seja $\{B_j\}_{j\in J}$ a família disjunta associada a $\{A_i\}_{i=1}^m$, cuja existência é garantida pela proposição anterior. Então $A_1 \times \cdots \times A_m = \biguplus_{j_1\in\Pi_1} B_{j_1} \times \cdots \times \biguplus_{j_m\in\Pi_m} B_{j_m}$ e

$$1_{A_1\times\cdots\times A_m} = \sum_{j_1\in\Pi_1} \cdots \sum_{j_m\in\Pi_m} 1_{B_{j_1}\times\cdots\times B_{j_m}}.$$

□

Capítulo 2

O Espaço de Wiener e a Integral de Itô.

Uma maneira usual de construir o espaço de Wiener é através da caracterização de sua medida sobre cilindros de dimensão finita no espaço mensurável $\mathbb{R}^T$, com $T = [0, 1]$ ou $T = [0, \infty)$. Aqui, podemos entender $\mathbb{R}^T$ de duas formas: o espaço das funções $\omega : T \to \mathbb{R}$, ou o produto cartesiano infinito de T cópias de $\mathbb{R}$. A segunda interpretação é mais apropriada para definir uma medida sobre este espaço.

Na verdade, nosso espaço de Wiener é o sub-espaço de $\mathbb{R}^T$ definido por

$$\Omega = C_0^0(T) \equiv \{\omega \mid \omega : T \to \mathbb{R} \text{ contínua e } \omega(0) = 0\}.$$

Porém, a medida em Ω é induzida por uma medida definida em todo o $\mathbb{R}^T$.

Seja $u \in T - \{0\}$ e $I = (a, b] \subset \mathbb{R}$, e considere subconjuntos de $\mathbb{R}^T$ da forma

$$C(u,I) \equiv \left\{\xi \in \mathbb{R}^T : \xi(u) \in I\right\}.$$

Subconjuntos desta forma são base para uma σ-álgebra em $\mathbb{R}^T$ (cilindros básicos).

Denotemos

$$g_v(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}\right),$$

a função densidade de uma distribuição gaussiana em $\mathbb{R}$ com média zero e variância v.

Definimos então a medida em intersecções finitas de cilindros básicos por

$$P\left(C(u_1,I_1) \cap \cdots \cap C(u_m,I_m)\right) =$$
$$\int \cdots \int_{I_1 \times \ldots \times I_m} g_{v_1}(x_1)\, g_{u_2-u_1}(x_2-x_1) \cdots g_{u_m-u_{m-1}}(x_m-x_{m-1})\, dx_1 \cdots dx_m,$$

onde $u_1 < \cdots < u_m$.

Desta forma, a extensão de P à σ-álgebra gerada por estes conjuntos é uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}^T$. Por simplicidade, continuaremos denotando como P esta medida.

Considere em Ω a topologia induzida pelo sistema de normas

$$\|\omega\|_n = \max_{[0,n]} |\omega(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

O fato é que a σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$ associada à topologia definida acima e a σ-álgebra induzida pelos cilindros de $\mathbb{R}^T$ em Ω coincidem. Logo, P é uma medida sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. O *Espaço de Wiener* é a tripla $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$.

Dada $g \in L^2(T)$, seja $\gamma_g(t) = \int_0^t g(s)\, ds$. Obviamente $\gamma_g \in \Omega$, pois é absolutamente contínua. A imagem do espaço de Hilbert $L^2(T)$ pela aplicação $g \to \gamma_g$, juntamente com o produto interno induzido é um subespaço Hilbertiano de Ω, que denominamos de *Espaço de Cameron-Martin* e denotaremos por H. O produto interno induzido em H é

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \int_T \frac{d\gamma_1}{dt}(t) \frac{d\gamma_1}{dt}(t)\, dt.$$

A cada $\gamma \in H$ podemos associar uma variável aleatória $W_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ dada pela integral estocástica

$$W_\gamma(\omega) = \int_T \frac{d\gamma}{dt}(t)\, d\omega_t.$$

Verifica-se que a aplicação $W : H \to L^2(\Omega)$ dada por $\gamma \to W_\gamma$ é uma isometria entre o subespaço Hilbertiano $H \subset \Omega$ e a sua imagem $\mathcal{H}_1 \equiv W(H) \subset L^2(\Omega)$, com $\mathcal{H}_1$ gaussiano.

Sendo $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_1$, definimos $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com $(\eta(\omega))_i = \eta_i(\omega)$, $i \in \mathbb{N}$. Então η induz uma medida gaussiana padrão em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou seja,

$$\mu \circ \eta^{-1}(B_1 \times ... \times B_k \times \mathbb{R} \times ...) = \int_{B_1} \cdots \int_{B_k} (2\pi)^{-k/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + ... + x_k^2\right)\right\} dx_1 \cdots dx_k$$

de tal forma que a cada trajetória $\omega \in \Omega$ associamos uma sequência de números reais $\vec{\eta}(\omega) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Note que $\eta(H) = l^2$ (sequências cuja soma dos quadrados converge).

Faremos agora uma breve exposição dos conceitos que levam à construção da integral de Itô.

Consideremos que $W : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ é um movimento Browniano padrão no espaço de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $\mathcal{F}$ é o complemento de $\mathcal{B}(\Omega)$ em relação a P.

Seja $L^2(T \times \Omega) \equiv L^2(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times P)$ a classe de processos estocáticos quadrado integráveis, e o subespaço fechado de processos adaptados quadrado integráveis

$L_a^2(T\times\Omega)\subset L^2(T\times\Omega)$, dado pelos processos $u\in L^2(T\times\Omega)$ tais que

$$u_t\in\mathcal{F}_t$$

com $\mathcal{F}_t$ sendo o completamento com relação a P da σ-álgebra $\bigvee\limits_{s\leq t}\sigma(W_s)$.

Seja $\mathfrak{E}(T\times\Omega)\subset L_a^2(T\times\Omega)$ o subespaço de processos simples adaptados de quadrado integrável, isto é, que podem ser escritos da forma

$$u=\sum_{i=1}^{n}F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}$$

onde $F_i\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t_i},P)$.

Lema 2.1 *$\mathfrak{E}(T\times\Omega)$ é denso em $L_a^2(T\times\Omega)$ na topologia de $L^2(T\times\Omega)$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1].

Considere uma aplicação $I:\mathfrak{E}(T\times\Omega)\to L^2(\Omega)$ isométrica dada por

$$I(u)=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right).$$

Usando o fato de F_i e $\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)$ serem independentes, é fácil verificar a isometria

$$\int_\Omega\int_T|u|^2=\int_\Omega|I(u)|^2$$

e também que

$$\int_\Omega I(u)=0.$$

A extensão de I ao subespaço fechado $L_a^2(T\times\Omega)$ é natural. É usual denotar $I(u)=\int_T u_t dW_t$, denominada a *integral de Itô* do processo u.

Capítulo 3

A decomposição em Caos de Wiener

A seguinte proposição é uma consequência do Teorema de Extensão de Kolmogorov e tem caráter fundamental na teoria aqui desenvolvida.

Proposição 3.1 *Dado um espaço de Hilbert separável H, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e uma isometria entre espaços de Hilbert $W : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $W(H)$ é uma família de variáveis gaussianas centradas de $L^2(\Omega)$.*

A construção de uma isometria deste tipo pode ser feita usando a existência de uma medida gaussiana em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ou ainda, como todos os espaços de Hilbert separáveis são isomorfos, basta obter uma aplicação W para um dado H como na proposição. Logo, podemos tomar a isometria dada no capítulo anterior e a proposição é facilmente provada.

Sendo isometria, W é linear e $W(H)$ é sub-espaço fechado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denotaremos $W(H) \equiv \mathcal{H}_1$. A aplicação W fornece um isomorfismo $H \sim \mathcal{H}_1$.

Para H do tipo $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, onde μ é uma medida sem átomos, a isometria W pode ser interpretada como sendo a integral estocástica de Wiener sobre funções h quadrado-integráveis em T com respeito a uma medida de ruído branco neste espaço.

De fato, neste caso W é caracterizado completamente pela família de variáveis aleatórias $\{W(1_A) : A \in \mathcal{B}, \mu(A) < \infty\}$. Sendo $\mathcal{E}$ o subespaço gerado por este conjunto, então $\mathcal{E} \subset H$ densamente. Considere o anel de conjuntos $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) < \infty\}$. Obviamente $1_A \in H$ para $A \in \mathcal{B}_0$. É usual escrever $W(A)$ para a $W(1_A)$. A aplicação $A \to W(A)$ tem as seguintes propriedades:

i) leva $\emptyset$ na variável nula;

ii) é σ-aditiva sobre $\mathcal{B}_0$;

iii) conjuntos disjuntos são levados em variáveis independentes, isto é, se $A, B \in \mathcal{B}_0$ e $A \cap B = \emptyset$, então $W(A)$ e $W(B)$ são independentes, pois são variáveis gaussianas de correlação zero;

iv) $W(A) \sim N(0, \mu(A))$ para $A \in \mathcal{B}_0$.

A aplicação $A \to W(A)$ é propriamente denominada "medida de ruído branco baseada em μ".

Neste sentido, é usual denotar

$$W(h) = \int_T h_t W(dt)$$

e W representa aqui a medida de ruído branco baseada em μ.

Observação 3.2 *A proposição 3.1 admite uma espécie de recíproca (veja* [5]*). Sendo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, há um resultado que assegura a existência de um espaço H e uma isometria como o do tipo acima quando assumimos algumas hipóteses sobre o espaço de probabilidade. Mais do que isso, teremos $H \subset \Omega$ e a inclusão como isometria.*

Uma medida sobre os borelianos de um espaço de Banach separável V é dita gaussiana centrada se todo espaço quociente de dimensão finita $V/W \sim \mathbb{R}^n$ tem medida *induzida gaussiana centrada. Isso equivale a dizer que todo funcional linear contínuo tem distribuição gaussiana centrada.Esta medida é dita estritamente positiva se o único subespaço de medida nula é o trivial.*

Eis o resultado, por Gross-Segal-Kallianpur: dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *tal que* Ω *é Banach separável e* μ *é uma medida gaussiana centrada estritamente positiva sobre os borelianos* $\mathcal{B}(\Omega)$*, então existe um subespaço de Hilbert* $H \subset \Omega$ *denso de tal forma que* $E[h_1^* h_2^*] = \langle h_1, h_2 \rangle$.

Observe que neste caso ocorre que $\Omega^* \subset H^* \sim H \subset \Omega$*, com* $H \sim \mathcal{H}_1$*, e* $\mathcal{H}_1$ *gera a* σ*-álgebra* $\mathcal{B}(\Omega)$.

A estrutura (Ω, H, P) *como descrito aqui é nomeada Espaço Abstrato de Wiener.*

O resultado acima se aplica quando consideramos o Banach $\Omega = C_0^0[0,\tau]$ *com a norma da convergência uniforme.*

No caso geral, fixemos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, um Hilbert separável H e uma isometria $W : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cuja imagem é um sub-espaço gaussiano (elementos ortogonais de H são levados em variáveis independentes).

Denotaremos $\mathcal{G}$ a σ-álgebra gerada pelos elementos de $\mathcal{H}_1$. Obviamente $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, e será considerado $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pela inclusão canônica. Posteriormente assumiremos $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Definição 3.3 *Para* $m \geq 0$*, a* m*- ésima componente do Caos de Wiener* $\mathcal{H}_m$ *é o subespaço fechado de* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *gerado pela família* $\{p_m(W(h)) : h \in H, \|h\| = 1\}$.

Desta forma, temos $F \in \mathcal{H}_m$ se e somente se $F_n \to F$, com F_n do tipo $\sum_{i=1}^k p_m(W(h_i))$.

Observe que esta definição está de acordo com a já estabelecida para $\mathcal{H}_1$. Cada $\mathcal{H}_m$ é espaço de Hilbert com o produto induzido de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Em particular, dados

$p_m(W(h_1))$ e $p_m(W(h_2)) \in \mathcal{H}_m$, usando (1.2),

$$\begin{aligned}
\langle p_m(W(h_1)), p_m(W(h_2))\rangle_{\mathcal{H}_m} &= E\left[p_m(W(h_1))\, p_m(W(h_2))\right] \\
&= \frac{1}{m!}\left(E\left[W(h_1)\, W(h_2)\right]\right)^m \\
&= \frac{1}{m!}\left(\langle W(h_1), W(h_2)\rangle_{\mathcal{H}_1}\right)^m \\
&= \frac{1}{m!}\left(\langle h_1, h_2\rangle_H\right)^m.
\end{aligned}$$

Lema 3.4 *A família de variáveis aleatórias* $\exp \mathcal{H}_1 = \{\exp W(h) : h \in H\}$ *é um subconjunto denso de* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

Demonstração: Seja $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tal que $\langle X, e^Y\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} = 0$ para qualquer $Y \in \mathcal{H}_1$. Queremos provar que $X = 0$ P-quase sempre. Usando a linearidade de $h \to W(h)$,

$$\left\langle X, \exp \sum_{i=1}^m t_i W(h_i)\right\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} = 0$$

para todos $t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}$ e $h_1, ..., h_m \in H$, $m \geq 1$. Considere em $\mathbb{R}^m$ a seguinte medida com sinal

$$\begin{aligned}
\nu(B) &= E\left[X 1_B (W(h_1), ..., W(h_m))\right] \\
&= \int_{(W(h_1),...,W(h_m))\in B} X(\omega)\, P(d\omega)
\end{aligned}$$

A transformada de Laplace de ν é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}(t_1, ..., t_m) &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(\sum_{i=1}^m t_i x_i\right) \nu(dx_1 \cdots dx_m) \\
&= \int_\Omega \exp\left(\sum_{i=1}^m t_i W(h_i)(\omega)\right) X(\omega)\, P(d\omega).
\end{aligned}$$

Comparando as equações conclui-se que a transformada de Laplace de ν é identicamente nula. Logo ν é nula, ou seja, $E\left[X1_B\left(W\left(h_1\right),...,W\left(h_m\right)\right)\right] = 0$ para todo $B \in \mathbb{R}^m$. Isto implica $E\left[X1_G\right] = 0$ para todo $G \in \mathcal{G}$, o que prova $X = 0$ P-quase sempre. □

Teorema 3.5 *Vale a decomposição*

$$L^2\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \tag{3.1}$$

Demonstração: A ortogonalidade entre espaços $\mathcal{H}_i$ e $\mathcal{H}_j$ com $i \neq j$ segue do fato que se X e Y são variáveis aleatórias independentes $\sim N\left(0,1\right)$, então (por (1.2))

$$E\left[p_i\left(X\right)p_j\left(Y\right)\right] = \frac{1}{i!}\left(E\left[XY\right]\right)^i \delta_{ij}.$$

Mostremos que a soma dos espaços $\mathcal{H}_m$ gera $L^2\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right)$. Para isto, seja $F \in L^2\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right)$ tal que F é ortogonal a $\mathcal{H}_m$ para todo $m \geq 0$. Devemos ter $F = 0$. De fato, $F \perp \mathcal{H}_m$ significa $E\left[Fp_m\left(W\left(h\right)\right)\right] = 0$ para todo $h \in H$ com $\|h\| = 1$. Como cada polinômio x^m pode ser escrito como combinação linear de polinômios de Hermite, segue que $E\left[F\left(W\left(h\right)\right)^m\right] = 0$ para todo $m \geq 0$. Isto implica $E\left[F \exp\left(tW\left(h\right)\right)\right] = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $h \in H$ com $\|h\| = 1$, e logo $F \perp \exp \mathcal{H}_1$. Pelo lema anterior, $F = 0$. □

Observação 3.6 *Daqui em diante, suporemos $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, ou seja, que a σ-álgebra P-completa $\mathcal{F}$ é gerada pelas variáveis de $\mathcal{H}_1$.*

Seja $\mathcal{P}$ a sub-álgebra gerada pelos elementos de $\mathcal{H}_1$, isto é, combinações lineares de produtos finitos quaisquer de elementos de $\mathcal{H}_1$. Considerando uma base $\left\{h_i\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ de H, os elementos de $\mathcal{P}$ podem ser escritos na forma $p\left(W\left(h_{i_1}\right),...,W\left(h_{i_m}\right)\right)$, onde p é um polinômio. Também é útil definir $\mathcal{P}_n$ o subespaço gerado pelos polinômios da forma $p\left(W\left(h_{i_1}\right), ..., W\left(h_{i_m}\right)\right)$ onde o grau de p é menor ou igual a n.

É possível demonstrar que para $1 \leq p < \infty$, com a topologia da norma usual, $\mathcal{P} \subset L^p\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right)$ densamente. O caso particular $p = 2$ segue dos resultados anteriores. Como consequência temos $L^p\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right) \subset L^q\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right)$ densamente para $p \geq q$, na topologia da norma de L^q.

No caso $p = 2$ a estrutura de espaço de Hilbert fornece a decomposição em Caos de Wiener. Observe que alternativamente poderíamos definir os espaços $\mathcal{H}_i$ da seguinte forma: seja $\mathcal{H}_0$ o espaço das classes de equivalência das funções constantes (que são constantes P-quase sempre). Temos

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \left(\underset{L^2}{\text{fecho}}\, \mathcal{H}_0\right)^{\perp}.$$

e

$$\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1} \cap \left(\underset{L^2}{\text{fecho}}\, \mathcal{H}_0 + ... + \mathcal{H}_n\right)^{\perp}.$$

Os subespaços $\mathcal{H}_n$ são de fato gerados a partir de produtos e somas de elementos de $\mathcal{H}_1$. É possível obter uma base ortonormal para cada um dos $\mathcal{H}_n$ a partir de uma base ortonormal de $\mathcal{H}_1$ usando o sistema ortonormal de polinômios de Hermite.

Seja Λ o conjunto de multi-índices $a \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{N}}$ das sequências de números inteiros não negativos com finitos termos não nulos, com $|a| = \sum a_i$ e $a! = \prod a_i!$. Seja $\Lambda_n = \{a \in \Lambda : |a| = n\}$. Dada uma base ortonormal $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de H, define-se para cada $a \in \Lambda$

$$\Phi_a = \sqrt{a!} \prod_{i=1}^{\infty} p_{a_i}\left(W\left(h_i\right)\right)$$

onde no produto temos um número finito de fatores (os quais $a_i \neq 0$). Então $\{\Phi_a : a \in \Lambda_n\}$ é base ortonormal para $\mathcal{H}_n$ e $\{\Phi_a : a \in \Lambda\}$ é base ortonormal para $L^2\left(\Omega, \mathcal{G}, P\right)$.

Capítulo 4

Integrais Múltiplas de Wiener

Estendendo o conceito da Integral de Wiener, dado $m \in \mathbb{N}$, é definida nesta seção uma aplicação linear e contínua $W^m : L^2(T^m) \to L^2(\Omega)$ denominada m-ésima integral múltipla de Wiener, a qual é usual denotar

$$W^m(f) = \int_{T^m} f(t_1, ..., t_m) W(dt_1) \cdots W(dt_m).$$

As seguintes notações serão usadas no desenvolvimento que se segue.

Definição 4.1 *Seja* $f : T^m \to \mathbb{R}$.

(*i*) *Escreveremos* S_m *o grupo das permutações de* $\{1, ..., m\}$*, isto é,*

$$S_m = \{\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., m\} : \sigma \text{ bijetiva}\}.$$

(*ii*) *Para* $\sigma \in S_m$*, seja* $f_\sigma : T^m \to \mathbb{R}$ *dada por* $f_\sigma(t_1, ..., t_m) = f\left(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)}\right)$.

(iii) Denotaremos $\tilde{f}$ a simetrização de f, isto é,

$$\tilde{f} = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} f_\sigma$$

Uma função é dita simétrica se $\tilde{f} = f$.

Observação 4.2 *É fácil ver que $\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(T^m)} \leq \|f\|_{L^2(T^m)}$ para $f \in L^2(T^m)$.*

Proposição 4.3 *O sub-espaço das funções simétricas de $L^2(T^m)$ é fechado. Usaremos denotar este sub-espaço por $L^2_S(T^m)$.*

Demonstração: Seja S_m o operador simetrização, isto é, $S_m : L^2(T^m) \to L^2(T^m)$ dado por $S_m(f) = \tilde{f}$. Pela observação anterior, S_m é uma contração, portanto contínuo. O operador dado por $U_m(f) = \tilde{f} - f$ é portanto contínuo em $L^2(T^m)$ e nulo sobre $L^2_S(T^m)$. Sendo f_n uma sequência em $L^2_S(T^m)$ e $f_n \to f$, temos também $U_m(f_n) \to U_m(f)$ pela continuidade. Como $U_m(f_n) = 0$ para todo n, resulta $U_m(f) = 0$ e portanto f é simétrica.
□

Considere as funções características do tipo

$$f = 1_{A_1 \times \ldots \times A_m};\ A_i \in \mathcal{B}_0,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, \tag{4.1}$$

e seja $\mathcal{E}_m \subset L^2(T^m)$ o espaço linear de funções simples gerado por elementos deste tipo.

Para f do tipo (4.1) define-se

$$W^m(f) = W(A_1) \cdots W(A_m)$$

e estende-se linearmente para funções em $\mathcal{E}_m$. Observe que temos aqui um produto de variáveis aleatórias independentes devido à disjunção dos conjuntos $\{A_i\}$. Na expressão acima, $W^m(f) \in L^2(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned} E\left[(W(A_1))^2 \cdots (W(A_m))^2\right] &= E(W(A_1))^2 \cdots E(W(A_m))^2 \\ &= \mu(A_1) \cdots \mu(A_m). \end{aligned}$$

Proposição 4.4 *Para $f \in \mathcal{E}_m$ vale $W^m\left(\tilde{f}\right) = W^m(f)$.*

Demonstração: Basta provar para $f = 1_{A_1 \times \ldots \times A_m}$ da forma (4.1). Neste caso temos $f_\sigma = 1_{A_{\sigma(1)} \times \ldots \times A_{\sigma(m)}}$, e $W^m(f_\sigma) = W\left(A_{\sigma(1)}\right) \cdots W\left(A_{\sigma(m)}\right) = W(A_1) \cdots W(A_m) = W^m(f)$. Logo,

$$\begin{aligned} W^m\left(\tilde{f}\right) &= W^m\left(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} f_\sigma\right) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} W^m(f_\sigma) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} W^m(f) = W^m(f). \end{aligned}$$

□

Proposição 4.5 *Dadas $f \in \mathcal{E}_m$ e $g \in \mathcal{E}_q$, então*

$$E\left[W^m(f)\, W^q(g)\right] = \begin{cases} 0, & se\ m \neq q\,; \\ m!\left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle, & se\ m = q\,. \end{cases}$$

Demonstração: Pela bilinearidade da relação, basta demonstrar para $f = 1_{A_1 \times \ldots \times A_m}$ e $g = 1_{B_1 \times \ldots \times B_q}$ da forma (4.1).

Dadas f e g deste tipo, seja $\{C_j\}_{j\in J}$ uma família de conjuntos disjuntos aos pares tal que cada conjunto de $\{A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_q\}$ pode ser escrito como união disjunta de alguns destes, isto é,

$$\begin{aligned} A_i &= \biguplus_{k\in J_{A_i}} C_k \; ; \; 1 \leq i \leq m, \\ B_i &= \biguplus_{l\in J_{B_i}} C_l \; ; \; 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Como $\{A_i\}$ são disjuntos aos pares, ocorre que $\{J_{A_i}\}$ também são disjuntos aos pares. Analogamente conclui-se que $\{J_{B_i}\}$ são disjuntos dois a dois. Obtemos então

$$\begin{aligned} 1_{A_1\times\ldots\times A_m} &= \sum_{k_1\in J_{A_1}} \cdots \sum_{k_m\in J_{A_m}} 1_{C_{k_1}\times\ldots\times C_{k_m}}, \\ 1_{B_1\times\ldots\times B_q} &= \sum_{l_1\in J_{B_1}} \cdots \sum_{l_q\in J_{B_q}} 1_{C_{l_1}\times\ldots\times C_{l_q}}. \end{aligned}$$

Usando novamente a linearidade, o problema se reduz agora a provar a relação tomando $f = 1_{C_{k_1}\times\ldots\times C_{k_m}}$ e $g = 1_{C_{l_1}\times\ldots\times C_{l_q}}$, termos genéricos de cada uma das somas acima. A restrição aqui torna-se $(k_i)_{i=1}^m$ com elementos distintos dois a dois, bem como $(l_i)_{i=1}^q$ distintos dois a dois. Denotemos $J_f \equiv \{k_i\}_{i=1}^m$ e $J_g \equiv \{l_i\}_{i=1}^q$.

Se $m \neq q$, existe um índice que está em apenas um dos dois J_f e J_g. Este índice é distinto de todos os outros que ocorrem em J_f e J_g. Digamos que $m > q$ e que k_m seja o índice distinto. Então, como esperado,

$$\begin{aligned} E\left[W^m(f)\,W^q(g)\right] &= E\left[W(C_{k_1})\cdots W(C_{k_m})\,W(C_{l_1})\cdots W(C_{l_q})\right] \\ &= E\left[W(C_{k_m})\right] E\left[W(C_{k_1})\cdots W(C_{k_{m-1}})\,W(C_{l_1})\cdots W(C_{l_q})\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $m = q$, J_f e J_g têm mesmo cardinal. Considere duas situações: $J_f \neq J_g$ e $J_f = J_g$.

Na primeira, novamente existe um índice que é distinto de todos os outros que ocorrem em J_f e J_g. Digamos que seja k_1 este índice. Então um cálculo igual ao anterior mostra que $E\left[W^m(f)\, W^m(g)\right] = 0$. Mas também é facil ver que $\left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle = 0$, já que $f_\sigma = 1_{C_{k_{\sigma(1)}} \times \cdots \times C_{k_{\sigma(m)}}}$, onde um dos $C_{k_{\sigma(i)}}$ é o próprio C_{k_1}, que é disjunto de todos os $\{C_l\}_{l \in J_g}$, resultando $\langle f_\sigma, g_\tau \rangle = 0$ para todas $\sigma, \tau \in S_m$.

Na segunda situação, onde $J_f = J_g$, claramente temos $\tilde{f} = \tilde{g}$, já que $(k_i)_{i=1}^m$ e $(l_i)_{i=1}^q$ são iguais a menos de uma permutação.

Neste caso,

$$\begin{aligned}
E\left[W^m(f)\, W^m(g)\right] &= E\left[W^m\left(\tilde{f}\right) W^m(\tilde{g})\right] \\
&= E\left[\left(W^m\left(\tilde{f}\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(W^m(f)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(W(C_{k_1})\right)^2 \cdots \left(W(C_{k_m})\right)^2\right] \\
&= \mu(C_{k_1}) \cdots \mu(C_{k_m}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que $\langle f_\sigma, f_\tau \rangle = 0$ para $\sigma \neq \tau \in S_m$,

$$\begin{aligned}
m! \left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle &= m! \left\| \tilde{f} \right\|^2 \\
&= m! \left\| \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} f_\sigma \right\|^2 \\
&= \frac{1}{m!} \left\| \sum_{\sigma \in S_m} f_\sigma \right\|^2 \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \|f_\sigma\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\|f\|^2 \\
&= \|f\|^2 = \mu(C_{k_1})\cdots\mu(C_{k_m})\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, vale a relação em todos os casos. □

A seguir, considere $\mathcal{E}_m$ dotado da topologia induzida por $L^2(T^m)$.

Proposição 4.6 *A aplicação* $W^m : \mathcal{E}_m \to L^2(\Omega)$ *é contínua.*

Demonstração: Usando a proposição anterior e a observação 4.2, para $f \in \mathcal{E}_m$,

$$\|W^m(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = m!\left\|\tilde{f}\right\|^2_{L^2(T^m)} \leq m!\,\|f\|^2_{L^2(T^m)}\,. \tag{4.2}$$

Sendo W^m linear e limitada, o resultado está provado. □

Proposição 4.7 *O espaço linear* $\mathcal{E}_m$ *é denso em* $L^2(T^m)$.

Demonstração: Basta mostrar que uma função característica genérica em $L^2(T^m)$ pode ser aproximada por elementos de $\mathcal{E}_m$. Seja então $A = A_1 \times \cdots \times A_m \in \mathcal{B}_0^m$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos exibir uma $\mathbf{1}_B \in \mathcal{E}_m$ tal que $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\| \leq \varepsilon\lambda_A$, onde λ_A só depende de A.

Sendo μ não-atômica, existe $\{B_j\}_{j\in J}$ finita de conjuntos disjuntos entre si, com cada $\mu(B_j) < \varepsilon$, tal que A_i é união de alguns dos $\{B_j\}$. Digamos $A_i = \biguplus_{j\in J_i} B_j$ para cada i. Observe que

$$\sum_{j\in J}\mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Seja $\alpha = \mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)$.

Desta forma,

$$1_A = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} \epsilon_{i_1,...,i_m} 1_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}$$

onde $\epsilon_{i_1,...,i_m} = 0$ ou 1. A saber, $\epsilon_{i_1,...,i_m} = 1 \Leftrightarrow (i_1,...,i_m) \in J_{A_1} \times \cdots \times J_{A_m}$.

Seja I o conjunto dos multi-índices $(i_1,...,i_m) \in \{1,...,n\}^m$ tais as coordenadas diferem aos pares, isto é, $i_k \neq i_l$ para $k \neq l$. Defina

$$1_B = \sum_{(i_1,...,i_m)\in I} \epsilon_{i_1,...,i_m} 1_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}},$$

ou seja, $B = \bigcup \{B_{i_1} \times \cdots B_{i_m} : (i_1,...,i_m) \in I \cap (J_{A_1} \times \cdots \times J_{A_m})\}$. Então $B \subset A$, $1_B \in \mathcal{E}_m$ e

$$\begin{aligned}
\|1_A - 1_B\|^2 &= \sum_{(i_1,...,i_m)\in I^C} \epsilon_{i_1,...,i_m} \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m}) \\
&\leq \sum_{(i_1,...,i_m)\in I^C} \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_m}) \\
&= \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{n} (\mu(B_i))^2 \mu(B_{i_1}) \cdots \mu(B_{i_{m-2}}) \\
&= \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \alpha^{m-2} \sum_{i=1}^{n} (\mu(B_i))^2 \\
&\leq \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \alpha^{m-2} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\, \varepsilon \\
&= \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \alpha^{m-1} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daqui segue o resultado. □

Definição 4.8 *Define-se a m-ésima integral de Wiener como sendo a extensão da apli-*

cação $W^m : \mathcal{E}_m \to L^2(\Omega)$ *ao domínio* $L^2(T^m)$.

As propriedades já estabelecidas continuam válidas na extensão:

Proposição 4.9 *A m-ésima integral de Wiener* $W^m : L^2(T^m) \to L^2(\Omega)$ *é linear e satisfaz as seguintes propriedades:*

1ª) *Para* $f \in L^2(T^m)$,

$$W^m\left(\tilde{f}\right) = W^m(f)\,; \tag{4.3}$$

2ª) *Para* $f \in L^2(T^m)$ *e* $g \in L^2(T^q)$,

$$E\left[W^m(f)\,W^q(g)\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq q\,; \\ m!\left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle, & \text{se } m = q\,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Demonstração: Para provar a primeira, novamente defina $U_m(f) = \tilde{f} - f$. Então $W^m \circ U_m$ é contínua e nula no denso $\mathcal{E}_m$, como já demonstrado na proposição 4.4. Portanto a sua extensão é também nula, donde $W^m\left(\tilde{f} - f\right) = 0$ em todo $L^2(T^m)$.

A prova da segunda propriedade é análoga. Fixado um par (m, q), basta definir

$$Z_{mq}(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq q\,; \\ E\left[W^m(f)\,W^q(g)\right] - m!\left\langle \tilde{f}, \tilde{g} \right\rangle, & \text{se } m = q\,. \end{cases}$$

em $\mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_q$. Pela proposição 4.5, Z_{mq} é nula. Como $\mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_q$ é denso em $L^2(T^m) \times L^2(T^q)$, a extensão de Z_{mq} é também nula, o que prova o requerido. □

Segue da proposição acima que para $m \neq q$ as imagens $W^m\left(L^2(T^m)\right)$ e $W^q\left(L^2(T^q)\right)$ são ortogonais.

Observação 4.10 *Note que para $f \in L_S^2(T^m)$, vale*

$$\|W^m(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = m! \, \|f\|_{L^2(T^m)}^2 .$$

Em particular, W^m restrita a $L_S^2(T^m)$ é injetiva e a sua imagem é um conjunto fechado de $L^2(\Omega)$. De fato, sendo (F_n) uma sequência em $W^m(L_S^2(T^m))$ e sendo $(f_n) \in L^2(T^m)$ tal que $W^m(f_m) = F_n$, se (F_n) é convergente então é de Cauchy, donde (f_n) também é Cauchy. Como $L_S^2(T^m)$ é fechado, $(f_n) \to f$ para alguma $f \in L_S^2(T^m)$. Além disso, $\lim(F_n) = \lim W^m(f_m) = W^m(f)$, donde $\lim(F_n) \in W^m(L_S^2(T^m))$.

Definição 4.11 *Dadas $f \in L_S^2(T^p)$ e $g \in L^2(T)$, a contração de f por g é uma função em $L^2(T^{p-1})$ denotada por $f \otimes_1 g$ e definida por*

$$(f \otimes_1 g)(t_1, ..., t_{p-1}) = \int_T f(t_1, ..., t_{p-1}, s) \, g(s) \, \mu(ds).$$

Note que a contração de f por g é bilinear quando considerada como uma aplicação do tipo $\otimes_1 : L_S^2(T^p) \times L^2(T) \to L^2(T^{p-1})$.

Proposição 4.12 *Seja $f \in L^2(T^p)$ e $g \in L^2(T)$. Então*

$$W^p(f) \, W^1(g) = W^{p+1}\left(\tilde{f} \otimes g\right) + pW^{p-1}\left(\tilde{f} \otimes_1 g\right).$$

Demonstração: Basta mostrar a validade da equação para $f \in \mathcal{E}_p$ e $g \in \mathcal{E}_1$, pois a densidade de $\mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_1$ em $L^2(T^p) \times L^2(T)$ garante a extensão. Pela linearidade, é suficiente assumir $f = 1_{A_1 \times \cdots \times A_p}$ e $g = 1_{B_0}$, com $A_i \in \mathcal{B}_0$ disjuntos aos pares e $B_0 \in \mathcal{B}_0$. Seja $\{C_j\}_{j \in J}$ uma família de conjuntos disjuntos aos pares tal que cada conjunto de

$\{A_1, ..., A_p, B_0\}$ pode ser escrito como união disjunta de alguns destes, isto é,

$$\begin{aligned} A_i &= \biguplus_{k\in J_{A_i}} C_k \ ; \ 1 \le i \le p, \\ B_0 &= \biguplus_{l\in J_{B_0}} C_l \ . \end{aligned}$$

Como $\{A_i\}$ são disjuntos aos pares, ocorre que $\{J_{A_i}\}$ também são disjuntos aos pares. Desta forma,

$$\begin{aligned} 1_{A_1\times...\times A_m} &= \sum_{k_1\in J_{A_1}} \cdots \sum_{k_m\in J_{A_p}} 1_{C_{k_1}\times...\times C_{k_p}} \ , \\ 1_{B_0} &= \sum_{l\in J_{B_0}} 1_{C_l} \ . \end{aligned}$$

Usando novamente a linearidade, o problema se reduz agora a provar a relação tomando $f = 1_{C_{k_1}\times...\times C_{k_p}}$ e $g = 1_{C_l}$, termos genéricos de cada uma das somas acima. Aqui, C_l é igual a algum C_{k_i} ou é disjunto de todos eles. Vamos demonstrar a validade da relação para dois casos: $C_l = C_{k_p}$, e C_l disjunto de todos os $\{C_{k_i}\}_{i=1}^{p}$. Os outros casos possíveis são análogos ao primeiro destes.

Por brevidade, voltemos a escrever $f = 1_{A_1\times\cdots\times A_p}$, e os dois casos podem ser caracterizados por $g = 1_{A_p}$ e $g = 1_{A_0}$, onde $\{A_0, ..., A_p\}$ são disjuntos aos pares.

Se $g = 1_{A_0}$, então é facil ver que $\tilde{f}\otimes_1 g = 0$. Também $f_\sigma \otimes g$ é uma função característica da forma (4.1), e a definição fornece $W^{p+1}(f_\sigma \otimes g) = W(A_0)\cdots W(A_p) = W^p(f)\, W^1(g)$, donde $W^{p+1}\left(\tilde{f}\otimes g\right) = W^p(f)\, W^1(g)$. Portanto, neste caso vale a relação.

No caso $g = 1_{A_p}$, seja $\beta = \mu(A_1)\cdots\mu(A_p)$.

Temos

$$W^p(f)\, W^1(g) = W(A_1)\, W(A_2)\cdots W(A_p)^2 \, .$$

Também

$$\begin{aligned}
\tilde{f} \otimes_1 g &= \int_T \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} 1_{A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(p)}} (\cdot, s) \, 1_{A_p}(s) \, \mu(ds) \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\sigma \in S_p \\ \sigma(p)=p}} \int_T 1_{A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(p)}} (\cdot, s) \, 1_{A_p}(s) \, \mu(ds) \\
&= \frac{1}{p!} \mu(A_p) \sum_{\sigma \in S_{p-1}} 1_{A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(p-1)}} \\
&= \frac{1}{p} \mu(A_p) \, \tilde{1}_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1}} \, ,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
pW^{p-1}\left(\tilde{f} \otimes_1 g\right) &= W^{p-1}\left(\tilde{1}_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1}}\right) \mu(A_p) \\
&= W^{p-1}\left(1_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1}}\right) \mu(A_p) \\
&= W(A_1) \cdots W(A_{p-1}) \, \mu(A_p) \, .
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, vamos mostrar que a norma de $W^p(f)\, W^1(g) - pW^{p-1}\left(\tilde{f} \otimes_1 g\right) - W^{p+1}\left(\tilde{f} \otimes g\right)$ é menor que $C\varepsilon$, onde C depende de f e g, ou melhor, dos $\{A_0, ..., A_p\}$ no caso.

Considere uma partição $A_p = E_1 \biguplus \cdots \biguplus E_n$ tal que $\mu(E_i) < \varepsilon$. Defina

$$h_\varepsilon \equiv \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 1_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1} \times E_i \times E_j} \, .$$

Então

$$f \otimes g - h_\varepsilon = \sum_i^n 1_{A_1 \times \cdots \times A_{p-1} \times E_i \times E_i}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{\tilde{f} \otimes g} - \widetilde{h_\varepsilon} \right\| &= \left\| \widetilde{f \otimes g} - \widetilde{h_\varepsilon} \right\| \\
&\leq \| f \otimes g - h_\varepsilon \| \\
&\leq \sum_i^n \mu(A_1) \cdots \mu(A_{p-1}) \mu(E_i)^2 \\
&\leq \beta\varepsilon.
\end{aligned}$$

donde

$$\left\| W^m \left(\tilde{f} \otimes g - h_\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq m!\beta\varepsilon.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
W^p(f) W^1(g) - pW^{p-1} \left(\tilde{f} \otimes_1 g \right) &= \sum_{i,j} W(A_1) W(A_2) \cdots W(A_{p-1}) W(E_i) W(E_j) \\
&\quad - \sum_i W(A_1) W(A_2) \cdots W(A_{p-1}) \mu(E_i) \\
&= \sum_{i \neq j} W(A_1) W(A_2) \cdots W(A_{p-1}) W(E_i) W(E_j) \\
&\quad + \sum_i W(A_1) W(A_2) \cdots W(A_{p-1}) \left(W(E_i)^2 - \mu(E_i) \right) \\
&= W^{p+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon,
\end{aligned}$$

com

$$R_\varepsilon \equiv \sum_i W(A_1) W(A_2) \cdots W(A_{p-1}) \left(W(E_i)^2 - \mu(E_i) \right).$$

Como

$$\begin{aligned}
\|R_\varepsilon\|^2 &= \mu(A_1) \mu(A_2) \cdots \mu(A_{p-1}) \sum_i E \left(W(E_i)^2 - \mu(E_i) \right)^2 \\
&= \mu(A_1) \mu(A_2) \cdots \mu(A_{p-1}) \left(2 \sum_i \mu(E_i)^2 \right) \leq 2\beta\varepsilon,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
& \left\| W^p(f) W^1(g) - pW^{p-1}\left(\tilde{f} \otimes_1 g\right) - W^{p+1}\left(\tilde{f} \otimes g\right) \right\| \\
\leq & \left\| W^p(f) W^1(g) - pW^{p-1}\left(\tilde{f} \otimes_1 g\right) - W^{p+1}(h_\varepsilon) \right\| \\
& + \left\| W^{p+1}(h_\varepsilon) - W^{p+1}\left(\tilde{f} \otimes g\right) \right\| \\
\leq & (m! + 2)\beta\varepsilon,
\end{aligned}$$

fornecendo o resultado esperado. □

Corolário 4.13 *Seja* $f \in L^2(T^p)$ *simétrica e* $g \in L^2(T)$*. Então*

$$W^{p+1}(f \otimes g) = W^p(f) W^1(g) - pW^{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Demonstração: Trivial, usando a proposição anterior. □

Observe que o resultado acima poderia ser admitido a princípio para fornecer uma definição alternativa para W^m por recursão. Definidas W^0 e W^1 como sendo respectivamente a identidade e a isometria dada, obtém-se o valor de W^{m+1} no elemento do tipo $f \otimes g \in L^2(T^{m+1})$ a partir de $W^m(f)$, $W^{m-1}(f \otimes_1 g)$ e $W(g)$.

Para $h \in L^2(T)$ defina $h^{\otimes m}(t_1, ..., t_m) = h(t_1) \cdots h(t_m)$. Assim, $h^{\otimes m} \in L^2(T^m)$ é uma função simétrica e

$$\left\| h^{\otimes m} \right\|_{L^2(T^m)} = \|h\|_{L^2(T)}^m.$$

Teorema 4.14 *Seja* p_m *o* m*-ésimo polinômio de Hermite e* $h \in L^2(T)$ *com* $\|h\| = 1$*. Então*

$$m! p_m(W(h)) = W^m\left(h^{\otimes m}\right). \tag{4.5}$$

Demonstração: Por indução em m. É imediato que a relação vale para $m = 1$. Usando o lema anterior e a propriedade

$$(m+1)\, p_{m+1}(x) = p_1(x)\, p_m(x) - p_{m-1}(x),$$

obtem-se

$$\begin{aligned} W^{m+1}\left(h^{\otimes m+1}\right) &= W^m\left(h^{\otimes m}\right) W(h) - mW^{m-1}\left(h^{\otimes m-1}\int_T h^2\right) \\ &= m!p_m(W(h))\, W(h) - m(m-1)!p_{m-1}(W(h)) \\ &= m!\,(m+1)\, p_m(W(h)). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.15 *A imagem* $W^m\left(L_S^2(T^m)\right)$ *é o espaço* $\mathcal{H}_m$. *Além disso,* $W^m : L_S^2(T^m) \to \mathcal{H}_m$ *é bijetiva.*

Demonstração: De imediato, pelo teorema anterior e pela linearidade de W^m, resulta que o espaço linear gerado pela família $\{p_m(W(h)) : h \in H, \|h\| = 1\}$ faz parte da imagem $W^m\left(L_S^2(T^m)\right)$. Mas como $\mathcal{H}_m$ é o fecho em $L^2(\Omega)$ deste espaço linear e $W^m\left(L_S^2(T^m)\right)$ é fechado, temos $\mathcal{H}_m \subset W^m\left(L_S^2(T^m)\right)$ para cada m. Mas para $n \neq m$, $W^m\left(L_S^2(T^m)\right) \perp W^n\left(L_S^2(T^n)\right)$. Como $L^2(\Omega) = \bigoplus \mathcal{H}_m$, segue que $\mathcal{H}_m = W^m\left(L_S^2(T^m)\right)$.

A bijetividade de $W^m : L_S^2(T^m) \to \mathcal{H}_m$ segue da observação 4.10, onde foi concluído que $W^m : L_S^2(T^m) \to L^2(\Omega)$ é injetiva. Logo, a aplicação é bijetiva sobre a sua imagem.

□

Corolário 4.16 *Cada $F \in L^2(\Omega)$ pode ser unicamente escrita da forma*

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} W^m(f_m) \ ; \ f_m \in L^2(T^m), \ \tilde{f}_m = f_m. \tag{4.6}$$

Ou seja, existe uma única representação de F como uma soma de integrais múltiplas de funções simétricas quadrado integráveis.

Observação 4.17 *Convenciona-se W^0 sendo a identidade em $\mathbb{R}$. Note que $f_0 = E[F]$.*

Demonstração: Segue do teorema 3.5 e do corolário 4.15 anterior. □

Note que para a representação (4.6) acima vale

$$\|F\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum m! \, \|f_m\|^2_{L^2(T^m)}$$

como consequência da relação (4.3).

O próximo lema fornece uma representação para processos estocásticos em $L^2(T \times \Omega)$ análoga à (4.6) de variáveis em $L^2(\Omega)$.

Lema 4.18 *Seja $u \in L^2(T \times \Omega)$. Então u pode ser escrito da forma*

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} W^m(f_m(\cdot, t)) \ ; \ f_m \in L^2(T^{m+1}), \ \tilde{f}_m(\cdot, t) = f_m(\cdot, t) \tag{4.7}$$

onde a série converge em $L^2(T \times \Omega)$, e

$$\|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)} = \sum m! \, \|f_m\|^2_{L^2(T^{m+1})} . \tag{4.8}$$

Demonstração: Considere um processo do tipo

$$u(t) = \sum_{i \leq k} F_i h_i(t)\,;\ F_i \in L^2(\Omega)\,,\ h_i \in L^2(T)\,. \tag{4.9}$$

Para este temos uma expansão do tipo (4.7). De fato, sendo $F_i = \sum W^m(f_m^i)$ e usando a linearidade de W^m,

$$u(t) = \sum_m W^m\left(\sum_{i \leq k} f_m^i(\cdot)\, h_i(t)\right).$$

Esta expansão é ortogonal em $L^2(T \times \Omega)$, pois para $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
\left\langle W^m\left(\sum_{i \leq k} f_m^i h_i(t)\right), W^n\left(\sum_{j \leq k} f_n^j h_j(t)\right)\right\rangle_{L^2(T\times\Omega)} &= \\
\left\langle \sum_{i \leq k} W^m\left(f_m^i\right) h_i(t), \sum_{j \leq k} W^n\left(f_n^j\right) h_j(t)\right\rangle_{L^2(T\times\Omega)} &= \\
\sum_{i \leq k} \sum_{j \leq k} \langle h_i, h_j\rangle_H \left\langle W^m\left(f_m^i\right), W^n\left(f_n^j\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= 0
\end{aligned}$$

visto que

$$\left\langle W^m\left(f_m^i\right), W^n\left(f_n^j\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0,\ \forall i, j \leq k.$$

Para u como (4.9) vale (4.8) pois, usando a ortogonalidade acima estabelecida, a linearidade de W^m e a relação (4.3),

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)} &= \left\| \sum_m W^m\left(\sum_{i \leq k} f_m^i h_i(t)\right)\right\|^2_{L^2(T\times\Omega)} \\
&= \sum_m \left\| W^m\left(\sum_{i \leq k} f_m^i h_i(t)\right)\right\|^2_{L^2(T\times\Omega)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m \left\| \sum_{i\le k} W^m\left(f_m^i\right) h_i\left(t\right) \right\|^2_{L^2(T\times\Omega)} \\
&= \sum_m \sum_{i\le k} \sum_{j\le k} \left\langle W^m\left(f_m^i\right), W^m\left(f_m^j\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} \left\langle h_i, h_j\right\rangle_H \\
&= \sum_m \sum_{i\le k} \sum_{j\le k} m! \left\langle f_m^i, f_m^j\right\rangle_{L^2(T^m)} \left\langle h_i, h_j\right\rangle_H \\
&= \sum_m m! \left\| \sum_{i\le k} f_m^i \otimes h_i \right\|^2_{L^2(T^{m+1})} .
\end{aligned}
$$

Seja uma sequência de processos u^k do tipo (4.9) convergindo para u em $L^2\left(T\times\Omega\right)$. Sejam dadas as expansões

$$u^k\left(t\right) = \sum W^m\left(f_m^k\left(\cdot,t\right)\right)$$

Sendo u^k convergente, é Cauchy em $L^2\left(T\times\Omega\right)$. Como temos uma expansão ortogonal acima, cada componente é também Cauchy. Mas isto implica que para cada m a sequência $\left(f_m^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^2\left(T^{m+1}\right)$. Sendo f_m o limite para cada m, a família $\{f_m\}$ satisfaz o requerido. $\square$

Observação 4.19 *Diferentemente da representação* (4.6) *para variáveis, não podemos estabelecer unicidade na representação* (4.7) *de processos.*

Observação 4.20 *Segue do corolário 4.16 que variáveis do tipo $W^m\left(f_m\right)$ geram um sub-espaço linear denso de $L^2\left(\Omega\right)$. Analogamente, segue da proposição 4.18 que processos do tipo $W^m\left(f_m\left(\cdot,t\right)\right)$ geram um sub-espaço linear denso de $L^2\left(T\times\Omega\right)$.*

Capítulo 5

A derivada de Malliavin

Continuamos com um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, um Hilbert do tipo $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu) \equiv L^2(T)$, e uma isometria W de H num subespaço gaussiano $\mathcal{H}_1$ de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \simeq L^2(\Omega)$. Eventualmente escreveremos W_h a imagem de h por W. Continuamos supondo que a σ-álgebra $\mathcal{F}$ é gerada pela família de variáveis $\mathcal{H}_1$.

Lembremos que $L^p(\Omega; L^2(T))$ é a classe dos processos $u : \Omega \to L^2(T)$ limitados na norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega;L^2(T))} = \left\| \|u\|_{L^2(T)} \right\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(\int_T u^2 \mu(dt) \right)^{\frac{p}{2}} P(d\omega) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Faremos a identificação $L^2(T \times \Omega) \approx L^2(\Omega; L^2(T))$ pelo isomorfismo canônico.

Denotaremos $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que as derivadas de todas as ordens tem crescimento polinomial. A derivada parcial de k-ésima ordem nos índices $(i_1, ... i_k)$ será escrita $\partial^k_{i_1,...i_k} f = \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f$.

Definição 5.1 *A classe de variáveis aleatórias suaves $\mathcal{S}$ é dada pelas variáveis da forma*

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)), \ f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{5.1}$$

onde h_i são elementos de H.

Analogamente podemos definir $\mathcal{S}_b$ a classe associada às funções com derivadas limitadas $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $\mathcal{S}_c$ a classe associada a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, as funções com derivadas de suporte compacto. As relações entre estas álgebras de funções são $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$, todas contidas em $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Do teorema 3.5 conclui-se que $\mathcal{P}$ (e portanto $\mathcal{S}$) é densa em $L^2(\Omega)$.

Definição 5.2 *A derivada de uma variável $F \in \mathcal{S}$ do tipo* (5.1) *é um elemento de $L^2(\Omega; H)$ dado por*

$$DF = \sum_i \partial_i f\left(W(h_1), ..., W(h_n)\right) h_i. \tag{5.2}$$

É usual também considerar a derivada como um elemento de $L^2(T \times \Omega)$, dado por

$$D_t F = \sum_i \partial_i f\left(W(h_1), ..., W(h_n)\right) h_i(t).$$

Consideremos o operador $D : \mathcal{S} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega; H)$ que faz a associação $F \longrightarrow DF$. Podemos considerar $H \subset L^2(\Omega; H)$ pela inclusão canônica. Assim, $W : H \subset L^2(\Omega; H) \rightarrow L^2(\Omega)$. Neste contexto, temos o seguinte resultado:

Lema 5.3 *Para $F \in \mathcal{S}$ e $h \in H$ vale*

$$\langle DF, h\rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle F, W_h\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Demonstração: Podemos supor sem perda que $\|h\|_H = 1$ e que

$$F = f\left(W(e_1), ..., W(e_n)\right)$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ são ortonormais em H, com $e_1 = h$.

Seja $\phi(x)$ a densidade da distribuição normal padrão em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Vale

$$\partial_1 \phi(x) = x_1 \phi(x).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle DF, h \rangle_{L^2(\Omega;H)} &= \int_\Omega \partial_1 f(W(e_1), ..., W(e_n)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 f(x) \phi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_1 \phi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_1 \phi(x) \\
&= \int_\Omega f(W(e_1), ..., W(e_n)) W(e_1) \\
&= \langle F, W_h \rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Observação 5.4 *Para $F, G \in S$ e $h \in H$, aplicando o lema anterior ao produto FG, obtemos*

$$\langle GDF, h \rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle -FDG, h \rangle_{L^2(\Omega;H)} + \langle FG, W_h \rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{5.4}$$

Esta fórmula será útil no resultado seguinte.

Da forma como foi definido, D é ilimitado e densamente definido.

Lema 5.5 *O operador* $D : \mathcal{S} \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega; H)$ *é fechável,* $p \geq 1$.

Demonstração: Considere os processos em $L^q(\Omega; H)$ da forma

$$Gh;\ h \in H,\ G \in \mathcal{S}_b,\ GW_h \text{ limitada.} \tag{5.5}$$

O espaço linear gerado por processos deste tipo é denso em $L^q(\Omega; H)$.

Para o lema, basta provar que para toda sequência $F_n \in \mathcal{S}$

$$(F_n, DF_n) \to (0, \eta) \text{ em } L^p(\Omega) \times L^p(\Omega; H) \Rightarrow \eta = 0. \tag{5.6}$$

Assumindo o lado esquerdo da implicação (5.6), é suficiente provar que

$$E\langle Gh, \eta\rangle_H = 0$$

para qualquer processo da forma (5.5) em $L^q(\Omega; H)$, onde q é o conjugado de p.

De fato, usando (5.4)

$$\begin{aligned}
E\langle Gh, \eta\rangle_H &= \lim_n E\langle Gh, DF_n\rangle_H \\
&= \lim_n E\left(\langle GDF_n, h\rangle_H\right) \\
&= \lim_n E\left(\langle -F_n DG, h\rangle_H + F_n GW_h\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

já que $F_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, com $\langle DG, h\rangle_H$ e GW_h limitadas. □

Denotaremos $\mathcal{D}^{1,p}$ o domínio do operador fecho de $D : \mathcal{S} \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega; H)$, isto é, $\mathcal{D}^{1,p}$ é o completamento de $\mathcal{S}$ relativo à norma

$$\|F\|_{1,p} = \left(\|F\|^p_{L^p(\Omega)} + \|DF\|^p_{L^p(\Omega;H)}\right)^{1/p}.$$

O produto interno

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \langle F, G\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle DF, DG\rangle_{L^2(\Omega;H)}$$

faz o espaço $\mathcal{D}^{1,2}$ Hilbertiano.

Poderíamos considerar mais geralmente operadores derivadas de ordens superiores $D^k : \mathcal{S} \subset L^p(\Omega) \to L^p\left(\Omega; H^{\otimes k}\right)$, definindo

$$DF = \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \partial^k_{i_1,\ldots i_k} f\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}$$

e $\mathcal{D}^{k,p}$ seria o completamento de $\mathcal{S}$ relativo à norma

$$\|F\|_{1,p} = \left(\|F\|^p_p + \|DF\|^p_{L^p(\Omega;H)} + \cdots + \left\|D^k F\right\|^p_{L^p\left(\Omega;H^{\otimes k}\right)}\right)^{1/p}.$$

A demonstração de que D^k é de fato fechável é análoga à anterior.

Proposição 5.6 *Seja $h \in H$, com $\|h\|_H = 1$. Então*

$$D\left[W^m\left(h^{\otimes m}\right)\right] = mW^{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)}\right)h. \tag{5.7}$$

Demonstração: Usando a propriedade de polinômios de Hermite

$$p'_m = p_{m-1},$$

a definição 5.2 da derivada e a equação (4.5), deduz-se que

$$\begin{aligned} D\left[W^m\left(h^{\otimes m}\right)\right] &= D\left[m!p_m\left(W\left(h\right)\right)\right] \\ &= m!p'_m\left(W\left(h\right)\right)h \\ &= m!p_{m-1}\left(W\left(h\right)\right)h \\ &= m\left[(m-1)!p_{m-1}\left(W\left(h\right)\right)\right]h \\ &= mW^{m-1}\left(h^{\otimes m-1}\right)h. \end{aligned}$$

□

Observação 5.7 *Poderíamos definir de forma natural as aplicações*

$$W^k : \mathcal{H}_n \otimes H^{\otimes m} \to \mathcal{H}_{n+k} \otimes H^{\otimes m-k},$$

para $k \leq m$, *e*

$$D^k : \mathcal{H}_n \otimes H^{\otimes m} \to \mathcal{H}_{n-k} \otimes H^{\otimes m+k},$$

para $k \leq n$. *Estas seriam contínuas e sobrejetoras.*

Poderíamos reescrever a equação (5.7) na forma $D_t\left[W^m\left(h^{\otimes m}\right)\right] = mW^{m-1}\left(h^{\otimes m}\left(\cdot, t\right)\right)$. A proposição seguinte generaliza o resultado acima.

Proposição 5.8 *Seja* $F \in L^2(\Omega)$ *com uma representação do tipo* (4.6). *Então* $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ *se e somente se*

$$\sum mm! \left\|f_m\right\|^2_{L^2(T^m)} < \infty. \tag{5.8}$$

Neste caso, $\left\|DF\right\|^2_{L^2(\Omega;H)}$ *coincide com esta soma e*

$$D_tF = \sum_{m=1}^{\infty} mW^{m-1}\left(f_m\left(\cdot, t\right)\right). \tag{5.9}$$

Demonstração: Por partes:

(i) A proposição vale para $F \in \mathcal{H}_m$:

Seja $\mathcal{C}_m$ o espaço linear gerado por $\{p_n(W(h)) : h \in H, \|h\| = 1\}$.

A proposição vale para $\mathcal{C}_m$, pois de (5.7) resulta

$$\begin{aligned} \left\|DW^m\left(h^{\otimes m}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega;H)} &= \left\|mW^{m-1}\left(h^{\otimes m-1}\right)h\right\|^2_{L^2(\Omega;H)} \\ &= m^2(m-1)!\left\|h^{\otimes m}\right\|^2_{L^2(T^m)} \\ &= m\,m!\left\|h^{\otimes m}\right\|^2_{L^2(T^m)}. \end{aligned}$$

Também de (5.7) vem

$$\|DF\|^2_{L^2(\Omega;H)} = m^2\|F\|^2_{L^2(\Omega)}$$

em $\mathcal{C}_m$, já que vale em qualquer subconjunto ortonormal. Logo, em $\mathcal{C}_m$ as normas $\|\cdot\|_{1,2}$ e $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes, donde

$$\mathcal{H}_m = \overline{\mathcal{C}_m}^{L^2(\Omega)} = \overline{\mathcal{C}_m}^{1,2} \subset \overline{\mathcal{S}}^{1,2} = \mathcal{D}^{1,2}.$$

(ii) A condição é suficiente:

Seja $F \in L^2(\Omega)$ com uma representação do tipo (4.6) e suponha que (5.8) vale.

Como D é fechado em $\mathcal{D}^{1,2}$ (por definição), basta exibir uma sequência F_N em $\mathcal{D}^{1,2}$ tal que $F_N \to F$ na norma $\|\cdot\|_{1,2}$.

Para isto, seja F_N a truncada de F dada por

$$F_N = \sum_{m=0}^{N} W^m(f_m).$$

Pela última conclusão do ítem (i), $F_N \in \mathcal{D}^{1,2}$.

Para esta sequência

$$\|F - F_N\|_{1,2} = \sum_{m=N+1}^{\infty} m! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)} + \sum_{m=N+1}^{\infty} mm! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)} \to 0.$$

(iii) A condição é necessária:

Suponha $F = \sum W^m(f_m) \in \mathcal{D}^{1,2}$. Sendo F_N como antes, $G \in \mathcal{S}$ e $h \in H$, vale

$$\lim_{N\to\infty} \langle DF_N, Gh \rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle DF, Gh \rangle_{L^2(\Omega;H)} .$$

Para $G = W^n(g) \in \mathcal{H}_n$ e $N > n$:

$$\langle \langle DF_N, h \rangle, G \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle (n+1) W^n \left(\langle f_{n+1}(\cdot, t), h(t) \rangle_{L^2(T)} \right), G \right\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Portanto, sendo J_n a projeção em $\mathcal{H}_n$,

$$J_n(\langle DF, h \rangle_H) = (n+1) W^n \left(\langle f_{n+1}(\cdot, t), h(t) \rangle_{L^2(T)} \right),$$

e sendo $\{e_i\}$ uma base ortonormal de H,

$$\begin{aligned} \sum_n mm! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)} &= \sum_i \sum_m \|J_m(\langle DF, e_i \rangle_H)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_i \langle DF, e_i \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \|DF\|^2_{L^2(\Omega;H)} < \infty. \end{aligned}$$

□

Notemos que se $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ e $DF = 0$, então segue da proposição anterior que $F = E[F]$.

A próxima proposição fornece uma caracterização dos processos que são gradientes.

Proposição 5.9 *Dado* $u \in L^2(T \times \Omega)$, *existe uma variável* $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ *tal que* $DF = u$ *se e somente se alguma expansão para* u *do tipo* (4.7) *tem seus núcleos* f_m *simétricos.*

Demonstração: Da proposição 5.8, segue que a condição é necessária, já que (5.9) é uma expansão do tipo (4.7) para $u = DF$ e os núcleos são simétricos nesta representação.

Para mostrar a suficiência, dada uma expansão com núcleos simétricos para u, defina

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-1} W^{m+1}(f_m). \tag{5.10}$$

Segue também da proposição 5.8 que $F \in \mathcal{D}^{1,2}$, pois a série (5.8) para esta F fica

$$\begin{aligned} \|DF\|^2_{L^2(\Omega;H)} &= \sum (m+1)(m+1)! \left\|(m+1)^{-1} f_m\right\|^2_{L^2(T^{m+1})} \\ &= \sum m! \|f_m\|^2_{L^2(T^{m+1})} \\ &= \|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

A hipótese de simetria das f_m foi usada na última igualdade.

Derivando a expansão (5.10) obtêm-se a expansão de F, donde $DF = u$. □

É relevante destacar a regra da cadeia para o operador derivada, cuja demonstração omitiremos aqui.

Proposição 5.10 *Seja* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciável e com derivadas parciais limitadas. Se* $F_i \in \mathcal{D}^{1,p}$, *então* $\varphi(F_1, ..., F_m) \in \mathcal{D}^{1,p}$ *e*

$$D(\varphi(F_1,...,F_m)) = \sum_i \partial_i \varphi(F_1,...,F_m) DF_i$$

Os dois resultados a seguir serão úteis adiante. Envolvem esperanças condicionais com respeito a σ-álgebras geradas por integrais estocásticas de funções características.

Para $A \in \mathcal{B}$, seja $\mathcal{F}_A$ a σ-álgebra P-completa gerada por $\{W(1_B), B \subset A, B \in \mathcal{B}_0\}$.

Lema 5.11 *Seja* $F \in L^2(\Omega)$ *com a representação* (4.6) *e seja* $A \in \mathcal{B}$. *Então*

$$E[F|\mathcal{F}_A] = \sum_{m=0}^{\infty} W^m \left(f_m 1_A^{\otimes m}\right) \tag{5.11}$$

Demonstração: Basta mostrar para $F = W^m(f_m)$, onde f_m é uma função indicadora do tipo (4.1), isto é,

$$f_m = 1_{A_1 \times \ldots \times A_m}; \; A_i \in \mathcal{B}_0, \; A_i \cap A_j = \emptyset \; para \; i \neq j.$$

Neste caso

$$\begin{aligned} E[F|\mathcal{F}_A] &= E[W(A_1) \cdots W(A_m) |\mathcal{F}_A] \\ &= E\left[\prod (W(A_i \cap A) + W(A_i \cap A^c)) |\mathcal{F}_A\right] \\ &= E[W(A_1 \cap A) \cdots W(A_m \cap A) |\mathcal{F}_A] \\ &= W^m \left(1_{A_1 \times \ldots \times A_m} 1_A^{\otimes m}\right) \end{aligned}$$

□

Proposição 5.12 *Seja* $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ *e* $A \in \mathcal{B}$. *Então também* $E[F|\mathcal{F}_A] \in \mathcal{D}^{1,2}$ *e*

$$D_t (E[F|\mathcal{F}_A]) = E[D_t F|\mathcal{F}_A] 1_A(t) . \tag{5.12}$$

Demonstração: Considerando uma expansão (4.6) para F, usando (5.11) e (5.9) vem

$$D_t\left(E\left[F|\mathcal{F}_A\right]\right) = \sum mW^{m-1}\left(f_m\left(\cdot,t\right)1_A^{\otimes m-1}\left(t\right)\right)1_A\left(t\right) = E\left[D_tF|\mathcal{F}_A\right]1_A\left(t\right).$$

$\square$

Capítulo 6

A Integral de Skorohod

Da forma como foi definido, $D : \mathcal{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega; H)$ é ilimitado, fechado e densamente definido.

Definição 6.1 *Seja* $\delta : \operatorname{Dom} \delta \subset L^2(\Omega; H) \to L^2(\Omega)$ *o operador adjunto de* D*, onde*

$$\operatorname{Dom} \delta = \left\{ u \in L^2(\Omega; H) : \exists c_u \geq 0; \left| \langle u, DF \rangle_{L^2(\Omega;H)} \right| \leq c_u \|F\|_{L^2(\Omega)}, \forall F \in \mathcal{D}^{1,2} \right\}$$

e para $u \in \operatorname{Dom} \delta$*,* $\delta(u)$ *é caracterizado por*

$$\langle F, \delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle DF, u \rangle_{L^2(\Omega;H)}, \ \forall F \in \mathcal{D}^{1,2}. \tag{6.1}$$

Como D é densamente definido, seu adjunto δ é fechado. Sendo D densamente definido e fechado, resulta que δ é também densamente definido e fechado, e $\delta^* = D$.

Observação 6.2 *Da equação* (5.3) *vemos que, restrito a* $H \subset L^2(\Omega; H)$*, o operador* δ *coincide com a isometria* $W : H \to L^2(\Omega)$*, isto é,* $\delta|_H = W$.

Proposição 6.3 *Dado* $u \in L^2(T \times \Omega)$ *com uma expansão do tipo* (4.7), *então* $u \in \operatorname{Dom}\delta$ *se e somente se*

$$\sum_{m=0}^{\infty} W^{m+1}(f_m) \tag{6.2}$$

converge em $L^2(\Omega)$. *Neste caso,* $\delta(u)$ *coincide com esta série.*

Demonstração: Seja $G = W^n(g)$, $n \geq 1$, com $g \in L^2(T^n)$ simétrica. Temos

$$\begin{aligned}
\langle DG, u\rangle_{L^2(T\times\Omega)} &= \int_\Omega \int_T nW^{n-1}(g(\cdot,t)) \sum_m W^m(f_m(\cdot,t)) \\
&= n\int_T \int_\Omega W^{n-1}(g(\cdot,t)) \sum_m W^m(f_m(\cdot,t)) \\
&= n\int_T \int_\Omega W^{n-1}(g(\cdot,t))\, W^{n-1}(f_{n-1}(\cdot,t)) \\
&= n\int_T (n-1)!\, \langle g(\cdot,t), f_{n-1}(\cdot,t)\rangle_{L^2(T^{n-1})} \\
&= n(n-1)!\, \langle g, f_{n-1}\rangle_{L^2(T^n)} \\
&= n!\left\langle g, \widetilde{f_{n-1}}\right\rangle_{L^2(T^n)} \\
&= \left\langle G, W^n\left(\widetilde{f_{n-1}}\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Primeiramente, suponha $u \in \operatorname{Dom}\delta$. Então do cálculo acima,

$$\langle G, \delta(u)\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle G, W^n\left(\widetilde{f_{n-1}}\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

para qualquer G da forma $W^n(g)$. Segue que $J_n\delta(u) = W^n\left(\widetilde{f_{n-1}}\right)$ e que a série converge em $L^2(\Omega)$ para o elemento $\delta(u)$.

Reciprocamente, suponha que a série converge, $\sum_{m=0}^{M} W^{m+1}(f_m) \to V$, e seja G do tipo $\sum_{n=0}^{N} W^n(g_n)$. Do cálculo acima vem

$$\langle DG, u\rangle_{L^2(\Omega;H)} = \left\langle G, \sum_{m=0}^{N} W^{m+1}(f_m)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle G, V\rangle.$$

Portanto, para qualquer G da forma $\sum_{n=0}^{N} W^n(g_n)$ vale

$$\left|\langle DG, u\rangle_{L^2(\Omega;H)}\right| \leq \|V\|_{L^2(\Omega)} \|G\|_{L^2(\Omega)} \leq \|V\|_{L^2(\Omega)} \|G\|_{1,2}.$$

Logo, o funcional $G \to \langle DG, u\rangle_{L^2(\Omega;H)}$ é $\mathcal{D}^{1,2}$-contínuo num conjunto denso de $\mathcal{D}^{1,2}$. Segue que a desigualdade vale para $\mathcal{D}^{1,2}$, donde $u \in \operatorname{Dom}\delta$. □

Observe que (6.2) é ainda uma expansão ortogonal em $L^2(\Omega)$.

Corolário 6.4 *Dada $u \in L^2(T \times \Omega)$ com uma expansão do tipo (4.7), então $u \in \operatorname{Dom}\delta$ se e somente se*

$$\sum (m+1)! \left\|\tilde{f}_m\right\|^2_{L^2(T^{m+1})} < \infty \tag{6.3}$$

e neste caso $\|\delta(u)\|^2_{L^2(\Omega)}$ coincide com esta série.

Demonstração: Trivial, usando a proposição anterior e que

$$\left\|W^{m+1}(f_m)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = (m+1)! \left\|\tilde{f}_m\right\|^2_{L^2(T^{m+1})}.$$

□

Vejamos a seguir algumas propriedades do operador δ:

(i) A integral tem média zero:

Notemos que $E\delta = 0$ em $\operatorname{Dom}\delta$. De fato, para $u \in \operatorname{Dom}\delta$,

$$E[\delta(u)] = \langle 1_\Omega, \delta(u)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle D1_\Omega, u\rangle_{L^2(\Omega;H)} = 0.$$

(ii) Integração de processos elementares suaves:

Seja $\mathcal{S}_H \subset L^2(\Omega; H)$ a classe de processos da forma

$$u = Gh; \ G \in \mathcal{S}, \ h \in H \tag{6.4}$$

ou combinações lineares destes.

Lema 6.5 *Vale a inclusão* $\mathcal{S}_H \subset \operatorname{Dom} \delta$ *e para um processo escrito como em* (6.4) *tem-se*

$$\delta(u) = GW_h - \langle DG, h \rangle_H . \tag{6.5}$$

Demonstração: Da equação (5.4), para $F \in \mathcal{S}$,

$$\langle GDF, h \rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle -FDG, h \rangle_{L^2(\Omega;H)} + \langle FG, W_h \rangle_{L^2(\Omega)}$$

é equivalente a

$$\langle DF, Gh \rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle -F, \langle DG, h \rangle_H \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle F, GW_h \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Portanto

$$\langle DF, Gh \rangle_{L^2(\Omega;H)} = \langle F, GW_h - \langle DG, h \rangle_H \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

□

(iii) Integral de produtos de processos com variáveis:

Lema 6.6 *Sejam* $u \in \operatorname{Dom}\delta$ *e* $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ *tais que* $uF \in L^2(\Omega; H)$. *Então* $uF \in \operatorname{Dom}\delta$ *se e só se* $\delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H \in L^2(\Omega)$. *Neste caso, vale*

$$\delta(uF) = \delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H \tag{6.6}$$

Demonstração: Mostremos a suficiência da condição $\delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H \in L^2(\Omega)$.

Seja $G \in \mathcal{S}_c$. É possível mostrar que $FG \in \mathcal{D}^{1,2}$ estendendo a validade da equação (5.4) para $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ e $G \in \mathcal{S}$. Usando esta mesma:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_T uFDG &= \int_\Omega \int_T u\left(D(FG) - GDF\right) \\
&= \int_\Omega \int_T uD(FG) - \int_\Omega \int_T uGDF \\
&= \int_\Omega \delta(u)FG - \int_\Omega \int_T uGDF \\
&= \int_\Omega \left(\delta(u)F - \int_T uDF\right) G.
\end{aligned}$$

Se $\delta(u)F - \langle u, DF\rangle_H \in L^2(\Omega)$, a equação acima pode ser escrita

$$\langle uF, DG\rangle_{L^2(\Omega;H)} = \left\langle \left(\delta(u)F - \int_T uDF\right), G\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

onde G é qualquer em $\mathcal{S}_c$. Sendo $\mathcal{S}_c$ denso em $L^2(\Omega)$, resulta que $uF \in \operatorname{Dom}\delta$ e a igualdade (6.6) é válida.

Quanto à necessidade da condição, se $uF \in \operatorname{Dom}\delta$, então comparando o cálculo acima com a definição de adjunto vem

$$\langle \delta(uF), G\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \left(\delta(u)F - \int_T uDF\right), G\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

para qualquer $G \in \mathcal{S}_c$, donde segue o desejado. □

(iv) Decomposição de Processos:

Proposição 6.7 *Todo processo* $u \in L^2(\Omega; H)$ *tem uma única decomposição ortogonal* $u = DF + u^0$, *onde* $F \in \mathcal{D}^{1,2}$, $u^0 \in \operatorname{Dom}\delta$ *e* $\delta(u^0) = 0$.

Demonstração: Pela proposição 5.9, $\{DF : F \in \mathcal{D}^{1,2}\}$ é um sub-espaço fechado de $L^2(\Omega; H)$. Portanto, cada processo $u \in L^2(\Omega; H)$ tem uma única decomposição ortogonal

$$u = DF + u^0,$$

com $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ e

$$\langle u^0, DG \rangle_{L^2(\Omega;H)} = 0, \forall G \in \mathcal{D}^{1,2}.$$

Desta última equação segue que $u^0 \in \operatorname{Dom}\delta$ e $\delta(u^0) = 0$. □

Olhemos agora para a classe de processos em $L^2(T \times \Omega)$ que admitem derivada de Malliavin num certo sentido.

Definição 6.8 *Denota-se* $\mathcal{L}^{1,2}$ *a classe de processos* $u \in L^2(T \times \Omega)$ *tais que, para uma representação* $u_t = \sum_{m=0}^{\infty} W^m(f_m(\cdot, t))$ *do tipo (4.7), vale*

$$\sum mm! \|f_m\|^2_{L^2(T^{m+1})} < \infty. \tag{6.7}$$

Isto é equivalente a dizer que $u(t) \in \mathcal{D}^{1,2}$ para quase todo t e que existe uma versão mensurável do processo $\{D_s u_t, (s,t) \in T^2\}$ satisfazendo

$$E \int_T \int_T (D_s u_t)^2 \, \mu(ds) \, \mu(dt) < \infty.$$

Comparando (6.3) e (6.7), vemos que $\mathcal{L}^{1,2} \subset \operatorname{Dom} \delta$. Também $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{L}^{1,2}$ densamente.

Observe que com o produto

$$\langle u, v \rangle_{1,2} = \langle u, v \rangle_{L^2(T \times \Omega)} + \langle D_s u_t, D_t v_s \rangle_{L^2(T^2 \times \Omega)} \tag{6.8}$$

o espaço $\mathcal{L}^{1,2}$ é Hilbertiano. De fato, $\mathcal{L}^{1,2}$ é isomorfo a $L^2(T; \mathcal{D}^{1,2})$.

Para uma representação $u_t = \sum_{m=0}^{\infty} W^m(f_m(\cdot, t))$ do tipo (4.7), a $\|\cdot\|_{1,2}$ norma de u é dada por

$$\|u\|_{1,2} = \sum (m+1)! \, \|f_m\|^2_{L^2(T^{m+1})}$$

Consideremos a seguir processos que possuem uma expansão do tipo (4.7) com apenas um termo não nulo no somatório, isto é, processos da forma

$$u_t = W^m(g(t, s_1, ..., s_m)), \; g \in L^2(T^{m+1}), \; g_t = S^m g_t; \tag{6.9}$$

onde a integração e a simetrização diz respeito às m últimas variáveis.

Observe que neste caso para cada $t \in T$ temos $u_t \in \mathcal{D}^{1,2}$ e tomando a derivada de Malliavin obtemos um processo a dois parâmetros $\{D_s u_t, (s,t) \in T^2\}$. Também $u \in \mathcal{L}^{1,2}$ (pela definição 6.8) e $u \in \operatorname{dom} \delta$.

A seguir atribuiremos um sub-índice à integral de Skorohod para explicitar a variável referente à qual se está integrando num processo de mais de um parâmetro.

Proposição 6.9 *Para um processo do tipo* (6.9) *vale*

$$\left(D_s\delta_t - \delta_t D_s\right)u_t = u_s. \tag{6.10}$$

Demonstração: Temos $\delta(u) = W^{m+1}(g) = W^{m+1}(\tilde{g})$ devido à fórmula (4.3). Logo $\delta(u) \in \mathcal{D}^{1,2}$.

A respeito de $D_s u_t$, fixado t, $g(t, s_1, ..., s_m)$ é simétrica e $W^m(g(t, s_1, ..., s_m))$ é uma expansão em integrais de Wiener do tipo (4.7). Logo segue de (5.9):

$$D_s u_t = mW^{m-1}\left(g\left(t, s_1, ..., s_{m-1}, s\right)\right)$$

onde W^{m-1} opera sobre todas as variáveis exceto t e s.

Para o cálculo de $\delta_t(D_s u_t)$, observe que $\{D_s u_t\}_{t\in T} \in \operatorname{dom}\delta$ para todo s. Fixado s:

$$\begin{aligned} \delta_t\left(D_s u_t\right) &= \delta_t\left(mW^{m-1}\left(g\left(t, s_1, ..., s_{m-1}, s\right)\right)\right) \\ &= mW^m\left(g\left(s_0, s_1, ..., s_{m-1}, s\right)\right) \end{aligned} \tag{6.11}$$

onde a integração atua sobre todas as variáveis exceto s.

Por outro lado, sobre $D_s\delta_t u_t$ temos

$$\begin{aligned} D_s\delta_t u_t &= D_s\left(W^{m+1}(g)\right) \\ &= (m+1)\,W^m\left(\left(S^{m+1}g\right)(s, s_1, ..., s_m)\right) \\ &= (m+1)\,W^m\left(\frac{1}{m+1}\left(g(s, s_1, ..., s_m) + \sum_{i=1}^{m} g\left(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m\right)\right)\right) \\ &= W^m\left(g(s, s_1, ..., s_m) + \sum_{i=1}^{m} g\left(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m\right)\right) \\ &= W^m\left(g(s, s_1, ..., s_m)\right) + \sum_{i=1}^{m} W^m\left(g\left(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m\right)\right). \end{aligned}$$

Mas $g(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m) = g(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_m, s)$ para todo i (pela simetria de g), donde

$$W^m\left(g\left(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m\right)\right) = W^m\left(g\left(s_0, s_1, ..., s_m, s\right)\right)$$

para todo i. Logo

$$\begin{aligned} D_s\delta_t u_t &= W^m\left(g\left(s, s_1, ..., s_m\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} W^m\left(g\left(s_i, s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_m\right)\right) \quad (6.12) \\ &= u_s + mW^m\left(g\left(s_0, s_1, ..., s_{m-1}, s\right)\right) \end{aligned}$$

Comparando 6.11 e 6.12 conclui-se o desejado. □

Proposição 6.10 *Sejam u e v processos do tipo* (6.9). *Então*

$$\langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(T\times\Omega)} + \langle D_s(u_t), D_t(v_s) \rangle_{L^2(T^2\times\Omega)}. \quad (6.13)$$

Demonstração: Por (6.10),

$$D_s\delta_t(u_t) = u_s + \delta_t D_s(u_t).$$

Usando a relação de dualidade,

$$\begin{aligned} \langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle D_s\delta_t(u_t), v_s \rangle_{L^2(T\times\Omega)} \\ &= \langle u_s + \delta_t D_s(u_t), v_s \rangle_{L^2(T\times\Omega)} \\ &= \langle u_s, v_s \rangle_{L^2(T\times\Omega)} + \langle \delta_t D_s(u_t), v_s \rangle_{L^2(T\times\Omega)} \end{aligned}$$

$$= \langle u_s, v_s \rangle_{L^2(T\times\Omega)} + \langle D_s(u_t), D_t(v_s) \rangle_{L^2(T\times\Omega)}.$$

□

Os resultados acima para processos do tipo 6.9 continuam válidos no espaço linear gerado por estes, que é denso em $L^2(T \times \Omega)$. Mais ainda, é possível demonstrar as equações (6.10) e (6.13) acima para a maior classe de processos em $L^2(T \times \Omega)$ que admite derivada de Malliavin, como enunciado a seguir.

Proposição 6.11 *Sejam $u, v \in \mathcal{L}^{1,2}$. Então valem as equações*

$$(D_s\delta_t - \delta_t D_s) u_t = u_s$$

e

$$\langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(T\times\Omega)} + \langle D_s(u_t), D_t(v_s) \rangle_{L^2(T^2\times\Omega)}.$$

Demonstração: Usando as proposições anteriores e argumentos de densidade. □

A covariância entre integrais para $u, v \in \mathcal{L}^{1,2}$ é portanto dada por $\langle \delta(u), \delta(v) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{1,2}$ e a aplicação $\delta : \mathcal{L}^{1,2} \to L^2(\Omega)$ é isometria quando consideramos em $\mathcal{L}^{1,2}$ o produto interno dado por (6.8).

Capítulo 7

A integral de Skorohod como extensão da integral de Itô.

Primeiramente, vamos demonstrar um lema geral.

Lema 7.1 *Seja $F \in L^2(\Omega)$ e $A \in \mathcal{B}_0$, com F sendo $\mathcal{F}_{A^C}$-mensurável. Então o processo $F1_A \in \operatorname{Dom}\delta$ e*

$$\delta(F1_A) = FW_A.$$

Demonstração: Suponha $F \in \mathcal{S}$. Então $F1_A \in \mathcal{S}_H$. Pelo lema 6.5

$$\delta(F1_A) = FW_A - \langle DF, 1_A \rangle_H .$$

Por (5.12), $DF = DF1_{A^c}$, donde

$$\delta(F1_A) = FW_A.$$

Para um processo geral dentro das hipóteses, seja $F_n \to F$ em $L^2(\Omega)$, com $F_n \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{F}_{A^c}$-mensurável.

Então

$$\begin{aligned}(F_n 1_A, F_n W_A) &\in \operatorname{graf}\delta, \\ (F_n 1_A, F_n W_A) &\to (F 1_A, F W_A) \text{ em } L^2(\Omega; H) \times L^2(\Omega).\end{aligned}$$

De fato, a convergência da primeira componente é trivial. Para a segunda, usando a independência,

$$E\left((F_n - F)^2 W_A^2\right) = E(F_n - F)^2 E W_A^2 \to 0.$$

Como δ é fechado, $(F 1_A, F W_A) \in \operatorname{graf}\delta$. □

Consideremos o caso do movimento Browniano unidimensional num tempo finito, $\Omega = C_0^0[0,1]$ e $T = [0,1]$. Denotando por L_a^2 o subespaço fechado de $L^2(T \times \Omega)$ dos processos adaptados, temos o seguinte.

Proposição 7.2 *Em $\Omega = C_0^0[0,1]$, vale a inclusão $L_a^2 \subset \operatorname{Dom}\delta$, e δ restrito à L_a^2 coincide com a integral de Itô.*

Demonstração: Seja u um processo simples adaptado da forma

$$u = \sum F_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]};\ F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i})$$

onde $t_i \le t_{i+1}$, todos em $[0,1]$, e $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$.

Segue do lema 7.1 que $u \in \operatorname{Dom}\delta$ e

$$\delta(u) = \sum F_i W_{(t_i, t_{i+1}]} = \sum F_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right).$$

Portanto, para processos simples adaptados vale

$$\delta(u) = I(u)$$

onde $I : L_a^2 \to L^2(\Omega)$ representa a integral de Itô.

Para um processo $u \in L_a^2$ qualquer, seja (u_n) uma sequência de processos simples adaptados tal que $u_n \to u$ em L_a^2, e consequentemente em $L^2(\Omega; H)$. Como I é contínua, $I(u_n) \to I(u)$ em $L^2(\Omega)$. Logo

$$(u_n, I(u_n)) \to (u, I(u)) \text{ em } L^2(\Omega; H) \times L^2(\Omega),$$
$$(u_n, I(u_n)) \in \operatorname{graf} \delta,$$

e usando que δ é fechado, resulta $(u, I(u)) \in \operatorname{graf} \delta$. □

Ainda no contexto do espaço de Wiener, vale destacar a fórmula de representação de *Clark-Ocone.*

Proposição 7.3 *Seja $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ no espaço de Wiener $\Omega = C_0^0[0,1]$. Então*

$$F = E[F] + \int_0^1 E[D_t F | \mathcal{F}_t] \, dW_t$$

onde a integração é no sentido de Itô.

Demonstração: Sendo $\phi_t = E[D_t F | \mathcal{F}_t]$, basta provar que $\delta(\phi) = F - E[F]$.

Para $F = \sum W^m(f_m) \in \mathcal{D}^{1,2}$, usando (5.9) e (5.11):

$$\begin{aligned} E[D_t F | \mathcal{F}_t] &= E\left[\sum m W^{m-1}(f_m(\cdot, t)) | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \sum m E\left[W^{m-1}(f_m(\cdot, t)) | \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

$$= \sum mW^{m-1}\left(f_m(\cdot,t)\,1_{[0,t]}^{\otimes m-1}(\cdot)\right).$$

O cálculo acima fornece uma representação do tipo (4.7) para o processo ϕ, isto é,

$$\phi_t = \sum W^m\left(g_m(\cdot,t)\right)$$

onde

$$g_m(\cdot,t) = (m+1)\,f_{m+1}(\cdot,t)\,1_{[0,t]}^{\otimes m}(\cdot)\;.$$

Mas é fácil ver que

$$\widetilde{g_m} = f_{m+1}.$$

De fato,

$$g_m = (m+1)\,f_{m+1}\left(1_{[0,t]}^{\otimes m}\otimes 1_T\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\widetilde{g_m} &= \widetilde{f_{m+1}}\left[(m+1)\,\widetilde{1_{[0,t]}^{\otimes m}\otimes 1_T}\right]\\
&= f_{m+1}\left[(m+1)\frac{1}{(m+1)}\sum_{i=0}^{m}1_{[0,t]}^{\otimes i}\otimes 1_T\otimes 1_{[0,t]}^{\otimes m-i}\right]\\
&= f_{m+1}1_T^{\otimes m+1}.
\end{aligned}$$

Como $\sum W^{m+1}(\widetilde{g_m}) = \sum W^{m+1}(f_{m+1})$ que converge em $L^2(\Omega)$, a expansão para ϕ satisfaz a condição da proposição 6.3. Portanto $\phi \in \operatorname{Dom}\delta$ e

$$\delta(\phi) = \sum W^{m+1}(f_{m+1}).$$

O processo ϕ é adaptado. Logo, as integrais de Itô e Skorohod coincidem. □

Capítulo 8

Cálculo Antecipativo.

Dados $(T, \mathcal{B}, \mu)$ σ-finito sem átomos e $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de probabilidade, consideremos processos estocásticos da forma

$$u : T \times \Omega \to \mathbb{R};\ u_t \in \mathcal{F}$$

ou ainda

$$u : T \times \Omega \to \mathbb{R};\ u \in \mathcal{B} \times \mathcal{F}.$$

Aqui, $T = [0,1]$, e μ é a medida de Lebesgue sobre os borelianos do intervalo. Também $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é o espaço canônico de um movimento Browniano em T e continuaremos com processos em $L^2(T \times \Omega)$.

Indicaremos como π uma partição arbitrária do intervalo $[0,1]$ da forma

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}.$$

A família destas partições é dirigido pela norma

$$|\pi| = \sup_{1\leq i\leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

A cada partição π deste tipo é associada a família de funções ortonormais

$$\left\{1_{(t_{i-1},t_i]} / \left\|1_{[t_{i-1},t_i]}\right\|_{L^2(T)} : 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Desta forma, escreveremos $e \in \pi$ significando que e é uma função nesta família.

Dado $u \in L^2(T \times \Omega) \simeq L^2(\Omega; L^2(T))$ e $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ uma partição, definimos os processos

$$\begin{aligned} u^\pi &= \sum_{e\in\pi} \langle u, e\rangle_{L^2(T)} e = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} u_s ds\right) 1_{(t_{i-1},t_i]} \\ \hat{u}^\pi &= \sum_{e\in\pi} E\left[\langle u, e\rangle_{L^2(T)} |\mathcal{F}_{e^\perp}\right] e = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} E\left[u_s|\mathcal{F}_{(t_{i-1},t_i]^C}\right] ds\right) 1_{(t_{i-1},t_i]} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}_{e^\perp} \equiv \mathcal{F}_{(t_{i-1},t_i]^C}$ é a σ-álgebra gerada pela família $\left\{W((r,s]),\ (r,s] \subset (t_{i-1},t_i]^C\right\}$.

Como $\langle u, e\rangle_{L^2(T)}$ e $E\left[\langle u, e\rangle_{L^2(T)} |\mathcal{F}_{e^\perp}\right]$ são elementos de $L^2(\Omega)$, temos u^π e $\hat{u}^\pi \in L^2(T) \otimes L^2(\Omega) \subset L^2(T \times \Omega)$. Além disso, se $u \in \mathcal{L}^{1,2}$, então $u^\pi, \hat{u}^\pi \in \mathcal{L}^{1,2}$.

A aplicação $u \to \langle u, e\rangle_{L^2(T)}$ é contínua de $L^2(T \times \Omega)$ para $L^2(\Omega)$ e de $\mathcal{L}^{1,2}$ para $\mathcal{D}^{1,2}$, pois como $e \in L^2(T \times \Omega)$ e $e \in \mathcal{L}^{1,2}$,

$$\left\|\langle u, e\rangle_{L^2(T)}\right\|_{L^2(\Omega)} = \langle u, e\rangle_{L^2(\Omega;T)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega;T)} \|e\|_{L^2(\Omega;T)}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\langle u,e\rangle\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}} &= \left\|\sum W^m\left(g_m\otimes_1 e\right)\right\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}}\\
&= \sum (m+1)!\,\|g_m\otimes_1 e\|^2\\
&\leq \sum (m+1)!\,\|g_m\|^2_{L^2(T^{m+1})}\|e\|^2\\
&\leq \|u\|^2_{\mathcal{L}^{1,2}}\|e\|^2_{\mathcal{L}^{1,2}}.
\end{aligned}$$

Lema 8.1 *Se $u\in L^2(T\times\Omega)$, então $u^\pi\to u$ e $\hat{u}^\pi\to u$ em $L^2(T\times\Omega)$. Se $u\in\mathcal{L}^{1,2}$, então $u^\pi\to u$ e $\hat{u}^\pi\to u$ em $\mathcal{L}^{1,2}$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que podemos escrever $u^\pi = E\left[u|\mathcal{G}_\pi\right]$ e $\hat{u}^\pi = E\left[u|\mathcal{H}_\pi\right]$, com $\mathcal{G}_\pi$,$\mathcal{H}_\pi\subset\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}$. Para isto, tome $\mathcal{G}_\pi$ a σ-álgebra produto $\sigma\left(\{e:e\in\Pi\}\right)\otimes\mathcal{F}$, e $\mathcal{H}_\pi=\sigma\left(\left\{(t_{i-1},t_i]\times F:1\leq i\leq n,\ F\in\mathcal{F}_{(t_{i-1},t_i]^C}\right\}\right)$.

Desta forma, $\mathcal{G}_{\pi_1}\subset\mathcal{G}_{\pi_2}$ para $\pi_1\subset\pi_2$, e $E\left[u|\mathcal{G}_\pi\right]\to u$ para qualquer sequência crescente $\{\pi_n\}$ (convergência de martingales). Sendo $L^2(T\times\Omega)$ um espaço métrico, segue daqui a convergência da rede.

Também $E\left[u|\mathcal{H}_{\pi_n}\right]$ converge para algum elemento $\bar{u}$ em $L^2(T\times\Omega)$ para uma sequência crescente. Pode-se mostrar que $u=\bar{u}$. A prova da segunda parte do resultado é análogo, usando o fato de que para $u\in\mathcal{L}^{1,2}$

$$D\left\langle u,e\right\rangle_{L^2(T)} = \left\langle Du,e\right\rangle_{L^2(T)}$$

e

$$D\left(E\left[\langle u,e\rangle_{L^2(T)}|\mathcal{F}_{e^\perp}\right]\right) = E\left[\langle Du,e\rangle_{L^2(T)}|\mathcal{F}_{e^\perp}\right].$$

□

Para uma demonstração completa do lema anterior, veja [1].

São associadas aos processos u^π e $\hat{u}^\pi$ as somas de Riemann:

$$\begin{aligned} R_u^\pi &= \sum_{e\in\pi} \langle u, e\rangle W(e) \\ \hat{R}_u^\pi &= \sum_{e\in\pi} E\left[\langle u, e\rangle \left|\mathcal{F}_{e^\perp}\right.\right] W(e). \end{aligned}$$

Dado $E = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal de $L^2(T)$, definimos ainda

$$A_u^{E,N} = \sum_{i=1}^{N} \langle u, e_i\rangle W(e_i).$$

Desta forma, temos associado a cada processo $u \in L^2(T\times\Omega)$ três tipos de soma em $L^2(\Omega)$: R_u^π, $\hat{R}_u^\pi$, e $A_u^{E,N}$. A convergência de cada uma destas resultará em conceitos diferentes de integral.

Definição 8.2 *Dado $u \in L^2(T\times\Omega)$, se a rede R_u^π converge em $L^2(\Omega)$ então define-se a integral de Stratonovich $S(u)$ de u como sendo este limite.*

Pode-se generalizar a definição acima para processos mensuráveis tais que $\int_{t\in T}|u_t| < \infty$ P-quase sempre e exigir somente convergência em probabilidade de R_u^π.

Proposição 8.3 *Dado $u \in L^2(T\times\Omega)$, se a rede $\hat{R}_u^\pi$ converge em $L^2(\Omega)$ então u é Skorohod integrável e $\delta(u) = \lim \hat{R}_u^\pi$ em $L^2(\Omega)$.*

Demonstração: Uma aplicação direta do lema 6.3 fornece

$$\hat{R}_u = \delta(\hat{u}^\pi).$$

A convergência de $\delta(\hat{u}^\pi)$ em $L^2(\Omega)$ realiza a convergência de $(\hat{u}^\pi, \delta(\hat{u}^\pi))$ em $L^2(\Omega) \otimes L^2(T \times \Omega)$. Como δ é operador fechado, segue que $(\lim \hat{u}^\pi, \lim \delta(\hat{u}^\pi)) \in \operatorname{graf} \delta$. Logo, $u = \lim \hat{u}^\pi \in \operatorname{Dom} \delta$, e $\delta(u) = \lim \hat{R}_u^\pi$. □

Definição 8.4 *Dado $u \in L^2(T \times \Omega)$, se para cada sistema ortonormal E a sequência $A_u^{E,N}$ converge em $L^2(\Omega)$ para o mesmo limite, então define-se a L^2-integral $A(u)$ de u como sendo este limite.*

O próximo resultado relaciona os dois tipos de integral definidos acima.

Teorema 8.5 *Dado $u \in L^2(T \times \Omega)$, se u tem L^2-integral então u também tem integral de Stratonovich e ambas coincidem.*

Mais geralmente, o teorema acima também é válido para processos mensuráveis tais que $\int_{t \in T} u_t^2 < \infty$ P-quase sempre.

A seguir definimos a maior classe de processos em $L^2(T \times \Omega)$ que admitem integral de Skorohod definida.

Definição 8.6 *A classe $\mathcal{L}^s$ é dada por processos $u \in L^2(T \times \Omega)$ tais que $u\mathbf{1}_{[0,t]} \in \operatorname{Dom} \delta$, $\forall t \in T$.*

Observe que $L_a^2 \subset \mathcal{L}^s$, pois $L_a^2 \subset \operatorname{dom} \delta$ e, se $u \in L_a^2$ então $u\mathbf{1}_{[0,t]} \in L_a^2$ para todo $t \in T$. Também vale a inclusão $\mathcal{L}^{1,2} \subset \mathcal{L}^s$, pois $\left\|u\mathbf{1}_{[0,t]}\right\|_{1,2} \leq \|u\|_{1,2}$ para $u \in \mathcal{L}^{1,2}$. De fato, sendo $u_s = \sum W^m(f(\cdot, s))$ uma representação, então $u\mathbf{1}_{[0,t]} = \sum W^m\left(f(\cdot, s)\,\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\right)$, donde

$$\begin{aligned}
\left\|u\mathbf{1}_{[0,t]}\right\|_{1,2} &= \sum (m+1)\, m! \left\|f_m(s_1, \ldots, s_m, s)\, \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\right\|_{L^2(T^{m+1})}^2 \\
&\leq \sum (m+1)\, m! \left\|f_m(s_1, \ldots, s_m, s)\right\|_{L^2(T^{m+1})}^2 \\
&= \|u\|_{1,2}.
\end{aligned}$$

Destacamos na sequência algumas propriedades da integral indefinida de processos em $\mathcal{L}^s$, ou restritamente em $\mathcal{L}^{1,2}$.

Proposição 8.7 *Dado* $u \in \mathcal{L}^s$, *seja* $X_t = \delta\left(u1_{[0,t]}\right)$. *Então* $E\left[X_t - X_s|\mathcal{F}_{[s,t]^C}\right] = 0$.

Demonstração: Para $F \in \mathcal{D}^{1,2}$, pela relação de dualidade,

$$\left\langle F, \delta\left(u1_{[s,t]}\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle DF, u1_{[s,t]}\right\rangle_{L^2(T\times\Omega)}.$$

Mas se $F \in \mathcal{F}_{[s,t]^C}$,

$$DF = DF1_{[s,t]^C}\ P - quase\ sempre$$

devido à proposição 5.12. Logo

$$\left\langle F, \delta\left(u1_{[s,t]}\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

para toda $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ $\mathcal{F}_{[s,t]^C}$-adaptada, e portanto vale a proposição. □

Observação 8.8 *Há uma recíproca para a proposição anterior: se um processo satisfaz* $X_0 = 0$, $E\left[X_t^2\right] < \infty$ *e* $\sup_\pi \sum E\left[\left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right)^2\right] < \infty$, *então existe* $u \in \mathcal{L}^s$ *tal que* $X_t = \delta\left(u1_{[0,t]}\right)$.

Teorema 8.9 *Seja* $u \in \mathcal{L}^{1,2}$ *e* $X_t = \delta\left(u1_{[0,t]}\right)$. *Então*

$$E\sum_\pi \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right)^2 \to \|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)}$$

Demonstração: Defina

$$V^\pi(u) \equiv \sum_\pi \left(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\right)^2 = \sum_{e\in\pi} (\delta(ue))^2$$

onde e é do tipo $1_{(t_i,t_{i+1}]}$ (não normalizada).

Para $u, v \in \mathcal{L}^{1,2}$,

$$\begin{aligned}
E\left|V^{\pi}(u)-V^{\pi}(v)\right| &= E\left|\sum_{e\in\pi}(\delta(ue))^2-(\delta(ve))^2\right| \\
&= E\left|\sum_{e\in\pi}(\delta(ue)-\delta(ve))(\delta(ue)+\delta(ve))\right| \\
&\leq E\left(\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)-\delta(ve)|\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)+\delta(ve)|\right) \\
&\leq \left(E\left(\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)-\delta(ve)|\right)^2\right)^{1/2}\left(E\left(\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)+\delta(ve)|\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(E\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)-\delta(ve)|^2\right)^{1/2}\left(E\sum_{e\in\pi}|\delta(ue)+\delta(ve)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|u-v\|_{1,2}\|u+v\|_{1,2} \ ,
\end{aligned}$$

onde usamos a isometria estabelecida na proposição 6.11.

Mostremos que $E\left[V^{\pi}(u)\right] \to \|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)}$ para processos em $\mathcal{S}_H$ da forma

$$u = F1_{(s,t]} \ ,$$

onde $F \in \mathcal{S}$.

Podemos supor que $s, t \in \pi$. Então $\pi \cap (s,t]$ é uma partição de $(s,t]$ e

$$\begin{aligned}
V^{\pi}(u) &= \sum_{e\in\pi\cap(s,t]}(FW(e)-\langle e, DF\rangle)^2 \\
&= \sum_{e\in\pi\cap(s,t]}\left[F^2(W(e))^2-2FW(e)\langle e,DF\rangle+\langle e,DF\rangle^2\right] .
\end{aligned}$$

Como $E\left[\sum_{e\in\pi\cap(s,t]}FW(e)\langle e,DF\rangle\right]$ e $E\left[\sum_{e\in\pi\cap(s,t]}\langle e,DF\rangle^2\right]$ tendem a zero, resulta que

$$\lim E\left[V^{\pi}(u)\right] = \lim E\left[\sum_{e\in\pi\cap(s,t]} F^2\left(W(e)\right)^2\right] = (t-s)\, E\left[F^2\right] = \|u\|^2_{L^2(T\times\Omega)}\ .$$

Processos simples do tipo acima e combinações lineares compõe um conjunto denso em $\mathcal{L}^{1,2}$. Logo, para $u \in \mathcal{L}^{1,2}$, existe $u_n \to u$ onde o resultado vale para cada u_n. Mas pelo cálculo acima

$$E\left|V^{\pi}(u_n) - V^{\pi}(v)\right| \leq C \left\|u_n - v\right\|_{1,2}$$

e a validade é estendida para todo $u \in \mathcal{L}^{1,2}$. □

Capítulo 9

Operadores Sobre Variáveis Aleatórias

Voltemos ao caso geral de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e um subespaço gaussiano $\mathcal{H}_1$ de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que é imagem de uma isometria $W : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Seja $J_n : L^2(\Omega) \to \mathcal{H}_n$ a projeção na n-ésima componente da decomposição em Caos de Wiener. Pode-se escrever $F \in L^2(\Omega)$ na forma $F = \sum F_n$, onde $F_n = J_n F \in \mathcal{H}_n$. Ou ainda $F = \sum_{m=0}^{\infty} W^m(f_m)$. Se $F \in \mathcal{P}$, a soma é finita.

Para cada sequência $\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ temos o operador multiplicativo (diagonal) $T_\phi : \mathcal{P} \to L^2(\Omega)$ dado por

$$T_\phi F = \sum \phi_n J_n(F), \quad F \in \mathcal{P}$$

e o domínio de T_ϕ pode ser estendido ao domínio $\mathcal{D}_\phi \subset L^2(\Omega)$, onde

$$\mathcal{D}_\phi = \left\{ F \in L^2 : \sum \phi_n^2 \|J_n F\|_2^2 < \infty \right\}$$

sobre o qual o operador se mantém auto-adjunto.

Se $\phi_n = -n$, T_ϕ é denotado por L e é denominado *operador de Ornstein-Uhlenbeck.* Se $\phi_n = e^{-nt}$ para $t \geq 0$ fixo, denotaremos T_ϕ por T_t. Neste caso, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ define um semigrupo de operadores simétricos de contração sobre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}_\phi = L^2(\Omega)$. Logo, temos

$$\|T_t F\|_2 \leq \|F\|_2$$

e

$$\langle T_t F, G \rangle = \langle F, T_t G \rangle$$

para $F, G \in L^2(\Omega)$, e $\{T_t\}_{t\geq 0}$ é denominado *semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.*

Por T_t ser auto-adjunto em $L^2(\Omega)$ segue que T_t é isometria em $L^1(\Omega)$. De fato,

$$E[T_t F] = \langle T_t F, 1 \rangle = \langle F, T_t 1 \rangle = \langle F, 1 \rangle = E[F]$$

ou seja,

$$\|T_t F\|_1 = \|F\|_1 \,.$$

para $F \in L^2(\Omega)$.

O operador $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ já anteriormente definido por

$$L = \sum -nJ_n$$

é o gerador infinitesimal do semi-grupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, isto é,

$$\frac{d}{dt} T_t(F) = T_t(LF) = L(T_t F)\,, \quad F \in \mathcal{P}$$

e em particular

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_{t=0} T_t(F) = LF, \quad F \in \mathcal{P}.$$

O domínio do operador de Ornstein-Uhlenbech é caracterizado por

$$\operatorname{Dom} L = \left\{ F \in L^2(\Omega),\ F = \sum_{n=0}^{\infty} W^n(f_n) : \sum n^2 n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} < \infty \right\}.$$

Segue da definição que L é ilimitado e simétrico em $L^2(\Omega)$. Veremos que é também auto-adjunto, e portanto fechado.

Observe que o completamento de $\mathcal{S}$ relativo à norma

$$\|F\|_L = \left(\|F\|^2_{L^2(\Omega)} + \|LF\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/p}$$

é $\operatorname{Dom} L$.

Lema 9.1 *As normas* $\|\cdot\|_L$ *e* $\|\cdot\|_{2,2}$ *coincidem em* $\mathcal{S}$, *e portanto* $\operatorname{Dom} L = \mathcal{D}^{2,2}$.

Demonstração: Para F escrita na expansão (4.6)

$$\begin{aligned}
\|F\|^2_L &= \sum \left(n^2+1\right) n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} \\
&= \sum n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} + \sum n n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} + \sum n(n-1) n! \, \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} \\
&= \left(\|F\|^2_{L^2(\Omega)} + \|DF\|^2_{L^2(\Omega;H)} + \left\|D^2 F\right\|^2_{L^2(\Omega;H^{\otimes 2})} \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 9.2 *Vale a relação entre operadores*

$$\delta D = -L. \tag{9.1}$$

Demonstração: Primeiro suponhamos que $F \in \operatorname{Dom} \delta D$ e provemos que $F \in \operatorname{Dom} L$.

Seja $F=\sum W^n(f_n)\in\mathcal{D}^{1,2}$, com $DF\in\operatorname{Dom}\delta$. Para $G\in\mathcal{H}_n$ da forma $G=W^n(g)$:

$$\begin{aligned}
\langle G,\delta DF\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle DG,DF\rangle_{L^2(\Omega;H)}\\
&= \left\langle nW^{n-1}(g(\cdot,t)),nW^{n-1}(f_n(\cdot,t))\right\rangle_{L^2(T\times\Omega)}\\
&= n^2(n-1)!\,\langle g,f_n\rangle_{L^2(T^n)}\\
&= nn!\left\langle \widetilde{g},\widetilde{f}_n\right\rangle_{L^2(T^n)}\\
&= n\,\langle G,J_nF\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Desse cálculo resulta que

$$J_n\delta DF=nJ_nF$$

e que portanto $F\in\operatorname{Dom}L$ e $\delta DF=-LF$.

Reciprocamente, seja $F=\sum W^m(f_m)\in\operatorname{Dom}L$. Provemos que $F\in\operatorname{Dom}\delta D$.

Temos $\operatorname{Dom}L=\mathcal{D}^{2,2}\subset\mathcal{D}^{1,2}$, donde $F\in\operatorname{Dom}D$. Falta mostrar que $DF\in\operatorname{Dom}\delta$. Tome $G=\sum W^n(g_n)\in\mathcal{D}^{1,2}$. Então

$$\begin{aligned}
\langle DG,DF\rangle_{L^2(\Omega;H)} &= \sum n^2(n-1)!\,\langle f_n,g_n\rangle_{L^2(T^n)}\\
&= \sum nn!\left\langle \widetilde{g},\widetilde{f}_n\right\rangle_{L^2(T^n)}\\
&= \langle G,-LF\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue da definição 6.1 que $DF\in\operatorname{Dom}\delta$ e que $\delta DF=-LF$. □

Proposição 9.3 *Vale $\mathcal{S}\subset\operatorname{Dom}L$, e para $F\in\mathcal{S}$ da forma* (5.1) *temos*

$$LF=\sum_{i,j}\partial_{i,j}^2 f(W(h_1),...,W(h_n))\,\langle h_i,h_j\rangle_H-\sum_i\partial_i f(W(h_1),...,W(h_n))\,W(h_i)\quad(9.2)$$

Demonstração: Seja $F = f(W_{h_1}, ..., W_{h_n}) \in \mathcal{S}$. Então $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ e $DF \in \mathcal{S}_H$. Pelo lema 6.5, $DF \in \mathrm{Dom}\,\delta$ e

$$\delta DF = \sum_i \partial_i f(W_{h_1}, ..., W_{h_n})\, h_i - \sum_{i,j} \partial^2_{i,j} f(W_{h_1}, ..., W_{h_n}) \langle h_i, h_j \rangle$$

donde segue o resultado observando (9.1). □

Outra construção equivalente do semi-grupo de Ornstein-Uhlenbeck pode ser feita considerando cópias independentes de processos do tipo $\{W_h\}$.

Dado $W : H \to L^2(\Omega)$, sejam $U : H \to L^2(\Omega^2)$ e $V : H \to L^2(\Omega^2)$ processos obtidos a partir de W da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_h(\omega_1, \omega_2) &= W_h(\omega_1); \\ V_h(\omega_1, \omega_2) &= W_h(\omega_2). \end{aligned}$$

Assim, U e V são cópias independentes de W em $L^2(\Omega^2)$. $\{U_h\}_{h \in H}$ e $\{V_h\}_{h \in H}$ são famílias gaussianas independentes e U e V são isometrias. Sejam $\mathcal{G}_U$ e $\mathcal{G}_V$ as σ-álgebras geradas por U e V respectivamente.

Um processo do tipo $Z \equiv aU + bV$ com $a^2 + b^2 = 1$ é também gaussiano e isométrico.

Sejam $\Phi_W : \Omega \to \mathbb{R}^H$, $\Phi_U : \Omega^2 \to \mathbb{R}^H$ e $\Phi_V : \Omega^2 \to \mathbb{R}^H$ os mapas canônicos associados aos processos W, U e V, isto é,

$$\begin{aligned} (\Phi_W(\omega))(h) &= W_h(\omega) \\ (\Phi_U(\omega_1, \omega_2))(h) &= W_h(\omega_1) \\ (\Phi_V(\omega_1, \omega_2))(h) &= W_h(\omega_2) \end{aligned}$$

Considere as probabilidades induzidas $P \circ (\Phi_W)^{-1}$, $P^2 \circ (\Phi_U)^{-1}$ e $P^2 \circ (\Phi_V)^{-1}$ em $\left(\mathbb{R}^H, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^H\right)\right)$. Dado $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^H\right)$, se $P \circ (\Phi_W)^{-1}(B) = 0$, então $P^2 \circ (\Phi_U)^{-1}(B) = 0$ e $P^2 \circ (\Phi_V)^{-1}(B) = 0$.

Dada $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_W, P)$, considere uma representação $F = \psi_F \circ \Phi_W$, com $\psi_F : \mathbb{R}^H \to \mathbb{R}$ determinada $P \circ (\Phi_W)^{-1}$ quase sempre. Pela conclusão do parágrafo anterior, a variável $\psi_F\left(e^{-t}\Phi_U + \sqrt{1-e^{-2t}}\Phi_V\right)$ está bem definida.

Proposição 9.4 *Para* $t \geq 0$,

$$T_t(F)(\omega_1) = \int_\Omega \psi_F\left(e^{-t}\Phi_U + \sqrt{1-e^{-2t}}\Phi_V\right)(\omega_1, \omega_2)\, P(d\omega_2) \tag{9.3}$$

Demonstração: Por definição, o operador $\sum e^{-nt} J_n$ é uma contração. A fórmula acima também define uma contração em $L^2(\Omega)$ (veja próxima proposição). Portanto, basta mostrar a equivalência dos operadores em um subconjunto denso.

Para $F = \exp\left(W_h - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \in \exp \mathcal{H}_1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_2 \in \Omega} \psi_F\left(e^{-t}\Phi_U + \sqrt{1-e^{-2t}}\Phi_V\right) &= \int_{\omega_2 \in \Omega} \exp\left(e^{-t}U_h + \sqrt{1-e^{-2t}}V_h - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \exp\left(e^{-t}U_h + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-e^{-2t}}\,\|h\|\right)^2 - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \exp\left(U_{e^{-t}h} - \frac{1}{2}\left\|e^{-t}h\right\|^2\right) \\
&= \sum \left\|e^{-t}h\right\|^n p_n\left(W\left(\frac{e^{-t}h}{\|e^{-t}h\|}\right)\right) \\
&= \sum e^{-nt}\|h\|^n p_n\left(W\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right) \\
&= \sum e^{-nt}\frac{W^n\left(h^{\otimes n}\right)}{n!}.
\end{aligned}$$

Pela definição,

$$\begin{aligned} T_t(F) &= T_t\left(\sum \frac{1}{n!} W^n\left(h^{\otimes n}\right)\right) \\ &= \sum \frac{e^{-nt}}{n!} W^n\left(h^{\otimes n}\right). \end{aligned}$$

Logo, temos a equivalência dos dois operadores contínuos no subespaço denso $\exp \mathcal{H}_1$.

□

Não é necessário de fato introduzir variáveis no espaço produto $L^2\left(\Omega^2\right)$. Descrevemos brevemente a seguir uma alternativa à construção acima.

Dado $W : H \to L^2(\Omega)$, seja $U : H \to L^2(\Omega)$ outro processo gaussiano isométrico e independente de W, isto é, $\{W_h\}_{h\in H}$ e $\{U_h\}_{h\in H}$ são famílias gaussianas independentes e W e U são isometrias. Sejam $\mathcal{G}_W$ e $\mathcal{G}_U$ as σ-álgebras geradas por W e U respectivamente. Façamos agora $\mathcal{F} = \mathcal{G}_W \vee \mathcal{G}_U$.

Um processo do tipo $Z \equiv aW + bU$ com $a^2 + b^2 = 1$ é também gaussiano e isométrico.

Sejam $\Phi_W : \Omega \to \mathbb{R}^H$ e $\Phi_U : \Omega \to \mathbb{R}^H$ os mapas canônicos associados aos processos W e U.

Dada $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_W, P)$, considere uma representação $F = \psi_F \circ \Phi_W$, com $\psi_F : \mathbb{R}^H \to \mathbb{R}$ definida $P \circ (\Phi_W)^{-1}$ quase sempre.

Fixado $t \geq 0$, a variável aleatória $Z_t = \psi_F\left(e^{-t}\Phi_W + \sqrt{1-e^{-2t}}\Phi_U\right)$ está bem definida.

Então, para $t \geq 0$,

$$T_t(F) = E\left[\psi_F\left(e^{-t}\Phi_W + \sqrt{1-e^{-2t}}\Phi_U\right) | \mathcal{G}_W\right].$$

A validade desta fórmula pode ser provada de forma análoga à (9.3).

Usando a caracterização dada na proposição 9.4, obtemos novos resultados a respeito dos operadores T_t.

Proposição 9.5 *Vale a inclusão* $T_t\left(L^p(\Omega)\right) \subset L^p(\Omega)$, *e a aplicação* $T_t : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ *é contração.*

Demonstração: Usando a fórmula (9.3) e a desigualdade de Jensen, resulta $|T_t(F)|^p \leq T_t(|F|^p)$ para toda $F \in L^p(\Omega)$.

De $\mathcal{P} \subset L^{2p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ resulta que $L^{2p}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Seja $F \in L^{2p}(\Omega)$. Usando primeiro que $F \in L^p(\Omega)$ e depois que $|F|^p \in L^2(\Omega)$,

$$E\left[|T_t(F)|^p\right] \leq E\left[T_t(|F|^p)\right] = E\left[|F|^p\right]$$

Argumentos de densidade completam a prova. $\square$

Bibliografia

[1] D. Nualart: The Malliavin Calculus and Related Topics. *Springer-Verlag, 1995.*

[2] Jonh B. Conway: A course in Functional Analysis. *Springer-Verlag, 1995.*

[3] D. Revuz e M. Yor: Continuous Martingale and Brownian Motion. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,1991.*

[4] L. S. Martin e M. S. de F. Marques: Cálculo Estocástico. *18º Colóquio Brasileiro de Matemática.*

[5] S. Watanabe: Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus. *Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag,1984.*

[6] N. Ikeda e S. Watanabe: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. *North-Holland/Kodansha, segunda edição, 1985.*

[7] P. Malliavin: Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Inter. Symp. on Stoch. Diff. Equations*, Kyoto 1976, Wiley 1978, 195-263.

[8] D.Ocone: A guide to the stochastic calculus of variations. *Stochastics Analysis and Related Topics, eds.: H.Korezlioglu and A.S. Ustunel, Lecture Notes on Math. 1316 (1987) 1-79.*

[9] H. Brézis: Analyse Functionnelle: Théorie et applications. *Masson, Paris, 1983.*