UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MARTHA AURORA PARRA PULIDO

Derivada fracionária Ψ-Hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers

Campinas

2020

Martha Aurora Parra Pulido

Derivada fracionária Ψ-Hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa

Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Martha Aurora Parra Pulido e orientada pelo Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P247d

Parra Pulido, Martha Aurora, 1992-
Derivada fracionária psi-Hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers / Martha Aurora Parra Pulido. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa.
Coorientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Derivada fracionária psi-Hilfer. 3. Estabilidade de Ulam-Hyers. 4. Estabilidade de Ulam-Hyers-Rassias. 5. Equações diferenciais fracionárias. I. Sousa, José Vanterler da Costa, 1985-. II. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: psi-Hilfer fractional derivative and Ulam-Hyers' stabilities
Palavras-chave em inglês:
Fractional calculus
psi-Hilfer fractional derivative
Ulam-Hyers stability
Ulam-Hyers-Rassias stability
Fractional differential equations
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
José Vanterler da Costa Sousa [Orientador]
Marcio José Menon
Daniela dos Santos de Oliveira
Data de defesa: 28-02-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-3823-1440
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8244174532090292

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2020 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

Prof(a). Dr(a). MARCIO JOSÉ MENON

Prof(a). Dr(a). DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedicado a

Meus irmãozinhos Claudia Lucia Parra e Oscar Parra, por ser a motivação da minha vida, meu motor para ir cada vez mais longe.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador José Vanterler da Costa Sousa por todos os conhecimentos transmitidos, pela confiança, dedicação, atenção e apoio; que fez este trabalho se tornar possível.
Ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira pela disposição e confiança.

Agradeço de maneira muito especial a minha família pelo apoio incondicional, por acreditar e confiar sempre em mim, por me ensinar que não há obstaculos ao perseguir um sonho.

Agradeço à UPTC (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia) e UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), por me aceitar e me mostrar que não importa o lugar de onde você vem, o importante é tentar, as portas sempre estão abertas, é apenas entrar e ver as imensas oportunidades presentes. A mudança esta em você, se quer algo, luta e corre atrás.

Agradeço a cada um dos professores que fizeram parte da minha formação de uma forma ou outra, por suas aulas, conhecimentos e conselhos. Especialmente, ao Pr. Dr. Pedro Nel Maluendas Pardo e Pr. Dr. Álvaro Calvache.

Agradeço aos meus colegas e amigos, por me acompanhar em este processo, por compartilhar comigo alegrias e tristezas, pelos seus conselhos e por me dar a mão quando que precisei. Especialmente, a Jean François, por acreditar, sofrir e se alegrar junto comigo em este processo, pelos conselhos e palavras de encorajamento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário, tem ganhado destaque nos últimos anos, tanto por sua teoria bem consolidada, como por suas aplicações por fornecer resultados mais condizentes à realidade. Disso, surge o problema: pelo número expressivo de definições de integrais e derivadas fracionárias, saber qual melhor integral e derivada fracionária utilizar para modelar determinado problema físico. Então, uma maneira de ultrapassar tal problema, é propor derivadas fracionárias mais gerais. Neste trabalho, vamos investigar detalhadamente a derivada fracionária ψ-Hilfer que contém como casos particulares muitas das derivadas fracionárias usuais, a partir de escolhas adequadas das funções $\psi(\cdot)$, $f(\cdot)$, dos limites a, b e dos parâmetros α e β. Apresentamos e demonstramos algumas propriedades e relações fundamentais para a derivada fracionária ψ-Hilfer, por meio das derivadas fracionárias: ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville. Resultados de sequências uniformemente convergentes e funções uniformemente contínuas, usando o operador fracionário ψ-Hilfer e o operador integral fracionário ψ-Riemann-Liouville, são investigados. Também, destacamos um exemplo por meio de um lema, que envolve a função de Mittag-Leffler. Nesse sentido, investigamos a regra tipo Leibniz I e a regra tipo Leibniz II, condição para uma determinada derivada ser considerada fracionária, conforme critério estabelecido por Ortigueira e Machado. Destacamos seus respectivos casos particulares. A fim de ressaltar a aplicabilidade e importância da derivada fracionária ψ-Hilfer, investigamos as estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias da equação integrodiferencial não linear fracionária de Volterra com condição inicial dada e discutimos alguns casos particulares.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Derivada Fracionária ψ-Hilfer. Regra tipo Leibniz. Estabilidade de Ulam-Hyers. Estabilidade de Ulam-Hyers-Rassias.

Abstract

The calculus of non-integer order, also known as fractional calculus, has gained prominence in recent years, both for its well-established theory and its applications for providing results more consistent with reality. From this, the problem arises: by the expressive number of definitions of integrals and fractional derivatives, knowing which best integral and fractional derivative to use to model a particular physical problem. So one way to overcome such a problem is to propose more general fractional derivatives. In this paper, we will investigate in detail the fractional derivative ψ-Hilfer which contains as particular cases many of the usual fractional derivatives, from appropriate choices of the functions $\psi(\cdot)$, $f(\cdot)$, the limits a, b and the parameters α and β. We present and demonstrate some fundamental properties and relations for the ψ-Hilfer fractional derivative through the fractional derivatives: ψ-Caputo and ψ-Riemann-Liouville. Results of uniformly convergent sequences and uniformly continuous functions, using the fractional operator ψ-Hilfer and the fractional integral operator ψ-Riemann-Liouville, are investigated. Also, we emphasize an example through a lemma, which involves the Mittag-Leffler function. In this sense, we investigate the Leibniz I type rule and the type Leibniz II, a condition for a given derivative to be considered fractional, according to the criteria established by Ortigueira and Machado. We highlight their respective particular cases. In order to emphasize the applicability and importance of the ψ-Hilfer fractional derivative, we investigated the Ulam-Hyers and Ulam-Hyers-Rassias stabilities of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation with a given initial condition and we discussed some particular cases.

Keywords: Fractional Calculus. ψ-Hilfer Fractional Derivative. Leibniz Type Rule. Ulam-Hyers' Stability. Ulam-Hyers-Rassias' Stability.

Sumário

Introdução

O cálculo diferencial e integral de ordem inteira desenvolvido por Leibniz e Newton é uma das grandes obras da matemática, com inúmeras aplicações em diversas áreas, a saber: física, biologia, engenharia, medicina, dentre outras. Algo intrigante e interessante para os matemáticos da época estava ainda por vir, o chamado cálculo de ordem não inteira, popularizado como cálculo fracionário. De acordo com registros históricos, o cálculo fracionário nasce da notação introduzida por Leibniz para o cálculo diferencial, em particular, da expressão $\dfrac{d^n}{dt^n} f(t)$, que faz referência à derivada de ordem n da função f, onde $n \in \mathbb{N}$. A pergunta natural que surgiu, a princípio foi, faz sentido estender os valores de n ao conjunto dos números racionais, irracionais ou complexos nessa expressão? Então, em 30 de Setembro de 1695 Guilleume François, marquês de l'Hôpital escreveu uma carta para Leibniz,

> «*"O que aconteceria se n for $\dfrac{1}{2}$?"*. A que Leibniz respondeu: *"... isso levaria a um paradoxo, do qual um dia terão consequências úteis ..."*» [27].

Ainda que o cálculo fracionário remonte à aquela época, somente no ano de 1974, na primeira conferência sobre o cálculo fracionário, na Universidade de New Haven, o cálculo de ordem não inteira torna-se visível e objeto de investigação tanto no sentido teórico como no sentido de aplicações em diversas áreas, como matemática, física, biologia, engenharia, etc [51].

Hoje, o cálculo fracionário está bem consolidado e, inúmeras definições de integrais e derivadas fracionárias foram introduzidas, das quais destacamos algumas: Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Hadamard, Katugampola, Riesz, dentre outras [19, 24, 71]. Isto não seria possível sem o interesse de grandes matemáticos como: Euler, Lagrange, Fourier, Abel, entre outros, que foram fundamentais no desenvolvimento deste novo ramo da análise matemática e sem o interesse de pesquisadores atuais como: Delfim, Almeida, Trujillo, Baleanu, Ortigueira, Caputo, Mainardi, Tenreiro Machado, dentre outros, que têm garantido a continuidade e expansão do cálculo fracionário e suas aplicações. De fato, isso é enriquecedor e frutífero para a área, mas então como saber qual melhor derivada ajusta os dados de um determinado fenômeno físico? Uma vez que existe uma ampla classe de derivadas fracionárias. Então, com objetivo de unificar em uma única derivada várias outras derivadas fracionárias e ao mesmo tempo sanar esse tipo de problema, Sousa e Oliveira [58], motivados pela integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função e por meio das derivadas fracionárias de ψ-Caputo, ψ-Riemann-Liouville e Hilfer [3, 24], introduziram a chamada derivada fracionária ψ-Hilfer de ordem não variável. A primeira parte do problema foi solucionada, mas ainda teriam outras etapas que seriam necessárias abordar, a fim de tornar a derivada fracionária ψ-Hilfer bem definida e ao longo do tempo, bem consolidada tanto no sentido teórico, quanto no sentido prático. Então, em 2019 Sousa e Oliveira [63], propuseram a regra tipo Leibniz I e II, para a derivada fracionária ψ-Hilfer, a fim de satisfazer o critério proposto por Ortigueira e Machado [41]. Uma das propriedades fundamentais e importantes que a derivada fracionária ψ-Hilfer detém, é a vasta classe de derivadas fracionárias e de regra de Leibniz ou regra tipo Leibniz que ela contempla. Além disso, as propriedades de cada derivada fracionária, obtida como caso particular, são preservadas. Então, é muito vantajoso trabalhar com a derivada fracionária ψ-Hilfer, ao invés de trabalhar com um dos seus casos particulares.

As primeiras ideias sobre estabilidade de Ulam-Hyers, começaram em 1941 com Ulam e Hyers [4, 17, 48], a partir de uma resposta a um problema levantado por Ulam e respondido por Hyers. Hoje o resultado é conhecido como o teorema da estabilidade de Ulam-Hyers. A ideia de estudar os problemas de estabilidade está associada com o seguinte questionamento: quando podemos dizer que uma função que satisfaz determinada desigualdade está próxima de uma das soluções da equação diferencial correspondente? Este tipo de questão, até então, tinha apenas interesse envolvendo equações diferenciais e integrodiferenciais de ordem inteira [17, 48].

Em 1978 Rassias [48] forneceu uma generalização notável das ideias de estabilidade de Ulam-Hyers. As propriedades de estabilidade de todo tipo de equações geram bastante interesse, em particular as estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias, sendo essas investigadas inicialmente para equações diferenciais clássicas [18, 53]. A consolidação do cálculo fracionário e seus resultados teóricos e aplicáveis cada vez mais bem posto na comunidade acadêmica, permitiu que a partir de derivadas e integrais fracionárias, pudessem formular problemas fracionários e investigar as estabilidades de Ulam-Hyers de soluções dessas equações fracionárias (diferenciais e integrodiferenciais) [36, 59, 73, 74, 75, 76].

Em 2018 como destacado, Sousa e Oliveira, introduziram a derivada fracionária ψ-Hilfer, e durante esse período inúmeros pesquisadores publicaram resultados de existência, unicidade e estabilidades de Ulam-Hyers de soluções de equações diferenciais e integrodiferenciais, destacando a ampla classe de casos particulares que o resultado permite obter [2, 13, 14, 22, 26, 31]. Em 2019, Liu et al. [29], apresentaram resultados sobre a existência, unicidade e estabilidade de soluções de Ulam-Hyers-Mittag-Leffler para uma classe de equações diferenciais com atraso de ordem fracionária por meio da derivada fracionária ψ-Hilfer utilizando o método do operador de Picard e uma desigualdade generalizada de Gronwall introduzida via integral fracionária ψ-Riemann–Liouville. Além disso, discutiram dois exemplos, a fim de ilustrar os principais teoremas. No mesmo ano, Abdo et al. [2], consideraram uma equação integrodiferencial fracionária com condição não local envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer e discutiram a existência e unicidade de soluções por meio dos teoremas do ponto fixo de Banach e do ponto fixo de Krasnoselskii. Além disso, investigaram como os resultados de estabilidades de Ulam-Hyers-Rassias. Existem inúmeros trabalhos publicados sobre existência, unicidade e estabilidades de Ulam-Hyers, que podem ser encontrados na literatura. Nesse sentido, motivado pelos inúmeros resultados investigados e publicados, dentre outros problemas ainda em aberto, apresentaremos como aplicação dessa dissertação, uma breve discussão sobre as estabilidades de Ulam-Hyers destacando a importância da derivada fracionária ψ-Hilfer [59, 60, 61].

A fim, de tornar claro e eficiente os pontos investigados neste trabalho, a seguir realizamos uma análise rigorosa dos principais resultados que podem ser resumidos da seguinte forma:

1. Investigamos detalhamente a derivada fracionária ψ-Hilfer, dada por
$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x). $$
Além disso, investigamos propriedades fundamentais da derivada fracionária ψ-Hilfer, em particular, relações entre as derivadas fracionárias ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville e uma breve classe de casos particulares de derivadas fracionárias são discutidas;

2. Discutimos a regra tipo Leibniz I, dada por
$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) = & \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l} f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x) \\ & - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k} \mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi} g(a) f^{(k)}(a) \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\varepsilon+\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}, \end{aligned} $$
onde $\varepsilon = (1-\beta)(1-\alpha)$. Além disso, também investigamos a regra tipo Leibniz II e alguns casos particulares são apresentados;

3. Investigamos as estabilidades de Ulam-Hyers para uma classe de soluções da equação integrodiferencial fracionária não linear de Volterra dada por
$$ \left\{ \begin{array}{rcl} {}^{H}D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) & = & f(t,u(t)) - \displaystyle\int_0^t k(t,s,u(s))ds \\ \mathrm{I}_{0+}^{1-\gamma} u(0) & = & \sigma. \end{array} \right. $$
Além disso, também discutimos dois casos particulares de estabilidades de Ulam-Hyers, de modo especial, o caso inteiro.

Para a realização deste trabalho, tomamos como base as seguintes publicações [58, 60, 63].

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1, introduzimos alguns espaços com suas respectivas normas, bem como apresentamos conceitos fundamentais de integrais e derivadas fracionárias. Além disso, investigamos alguns resultados para a integral fracionária ψ-Riemann-Liouville e para as derivadas fracionárias ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, fundamentais dentro do cálculo fracionário.

No Capítulo 2 apresentamos a definição do principal objetivo deste trabalho, a derivada fracionária ψ-Hilfer. Nesse sentido, investigamos propriedades, lemas e teoremas que possibilitam tornar a derivada fracionária bem definida. Além do mais, realizamos alguns exemplos através de lemas, em particular, envolvendo a função de Mittag-Leffler de um parâmetro. A partir da construção da derivada fracionária e da investigação dos resultados, explicitamos uma ampla classe de derivadas fracionárias, como casos particulares. Para finalizar o capítulo, investigamos a regra tipo Leibniz I e regra tipo Leibniz II para a derivada fracionária ψ-Hilfer, destacamos também alguns casos particulares a partir das regras tipo Leibniz aqui investigadas. Claro que, tanto no sentido da derivada fracionária, quanto no sentido das regra tipo Leibniz I e regra tipo Leibniz II, é possível obter outras versões além das apresentadas aqui, a partir da escolha de $\psi(\cdot)$ e dos limites $\beta \to 1$ ou $\beta \to 0$. Concluímos essa primeira etapa do projeto, até aqui com os resultados alcançados, isto é, apresentar um estudo detalhado da derivada fracionária ψ-Hilfer. Como segunda etapa do projeto de mestrado, por meio do teorema do ponto fixo de Banach, vamos investigar a estabilidade de Ulam-Hyers para a equação integro diferencial fracionária não linear de Volterra no sentido de ψ-Hilfer.

No Capítulo 3 apresentamos a definição adaptada para as estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias por meio da derivada ψ-Hilfer e alguns resultados importantes sobre as estabilidades a serem investigadas, a saber: espaços completos, contração e ponto fixo. Nesse sentido, investigamos detalhadamente as estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias de uma classe de soluções de equações integrodiferenciais fracionárias não linear de Volterra introduzidas via derivada fracionária ψ-Hilfer. Por outro lado, discutimos alguns casos particulares do principal teorema do Capítulo 3 e uma importante observação sobre os demais possíveis casos particulares.

Finalizamos com as conclusões e objetivos alcançados neste projeto de mestrado e perspectivas para trabalhos futuros no doutorado. Um apêndice é apresentado, a fim de recuperar conceitos e propriedades utilizadas durante o texto, sobre as funções especiais: gama, beta e Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

1 Preliminares

Neste capítulo, iniciamos com a estrutura dos espaços e com suas respectivas normas, que iremos trabalhar no decorrer do mesmo. Introduzimos a integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função e investigamos algumas propriedades. Nesse sentido, apresentamos algumas definições de derivadas fracionárias, como: Riemann-Liouville, Hilfer, ψ-Riemann-Liouville, ψ-Caputo, dentre outras.

1.1 Espaços de funções

Seja Ω um conjunto mensurável com $1 \leqslant p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções p-integráveis no sentido de Lebesgue, dado por [24],

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Por outro lado, o espaço $L^\infty(\Omega)$ das funções reais mensuráveis limitadas, é dado por

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \sup_{t\in\Omega} |f(t)|^p \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|^p.$$

Sejam $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ um intervalo finito sobre o semi-eixo $\mathbb{R}$ e $C([a,b],\mathbb{R})$, $AC^n([a,b],\mathbb{R})$, $C^n([a,b],\mathbb{R})$, o espaço das funções contínuas, absolutamente contínuas n-vezes, diferenciavelmente contínuas n-vezes sobre $[a,b]$, respectivamente.

O espaço das funções contínuas f sobre $[a,b]$ tem a norma definida por [24]

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in\Omega} |f(t)|.$$

Por outro lado, o espaço das funções absolutamente contínuas n-vezes é dado por:

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

O espaço ponderado $C_\gamma([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas f sobre $(a,b]$ é definido por:

$$C_\gamma[a,b] = \{f : (a,b] \to \mathbb{R}; (t-a)^\gamma f(t) \in C([a,b])\}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C_\gamma[a,b]} = \|(t-a)^\gamma f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(t-a)^\gamma f(t)|.$$

O espaço ponderado $C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas f sobre $(a,b]$ é definido por:

$$C_{\gamma,\psi}[a,b] = \{f : (a,b] \to \mathbb{R}; (\psi(t)-\psi(a))^\gamma f(t) \in C([a,b])\}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C_{\gamma,\psi}[a,b]} = \|(\psi(t)-\psi(a))^\gamma f(t)\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(\psi(t)-\psi(a))^\gamma f(t)|.$$

O espaço ponderado $C^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas f sobre $(a,b]$ é definido por:

$$C^n_{\gamma,\psi}[a,b] = \left\{f : (a,b] \to \mathbb{R}; f(t) \in C^{n-1}[a,b]; f^{(n)}(t) \in C_{\gamma,\psi}[a,b]\right\}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C^n_{\gamma,\psi}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_{C[a,b]} + \left\|f^{(n)}\right\|_{C_{\gamma,\psi}[a,b]}.$$

Para $n=0$, temos $C^0_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R}) = C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

Sejam $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. O espaço ponderado $C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ é definido por [58],

$$C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}[a,b] = \left\{f \in C_{\gamma;\psi}[a,b] : {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f \in C_{\gamma;\psi}[a,b]\right\},$$

com $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$.

1.2 Derivadas e Integrais Fracionárias

Antes de apresentar os conceitos de integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função e da derivada fracionária ψ-Hilfer, apresentaremos algumas definições de integrais e derivadas fracionárias, a fim de podermos nos familiarizar com a classe de integrais e derivadas fracionárias existentes; é de observar que, a função gama $\Gamma(\alpha)$ apresentada na seção A.1 estará presente em tais definições. Então, iniciamos com a integral de Riemann-Liouville.

Definição 1.1. [24] *Seja* $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *um intervalo finito sobre o eixo real* $\mathbb{R}$. *As integrais fracionárias de Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) da função* f *de ordem* α, *com* $\alpha > 0$, *são definidas por:*

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x > a \tag{1.1}$$

e

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x < b, \tag{1.2}$$

respectivamente.

Definição 1.2. [24] *Sejam* $I = (a,b)$ *e* $f(x) \in AC^n(a,b)$ *e* $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}_0$. *As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) da função* f *de ordem* α, *são definidas por:*

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt, \tag{1.3}$$

e

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{b-}f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt, \tag{1.4}$$

repectivamente.

Definição 1.3. [24] *As derivadas fracionárias de Caputo (à esquerda e à direita) da função* $f \in AC^n[a,b]$ *de ordem* $\alpha > 0$, *são definidas por:*

$${}^C\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt, \tag{1.5}$$

e

$${}^C\mathrm{D}^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt, \tag{1.6}$$

onde $n = [\alpha]+1$, *para* $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, *e* $n = \alpha$, *para* $\alpha \in \mathbb{N}_0$. *Observemos que* $[\alpha]$, *representa a parte inteira de* α.

Definição 1.4. [16] *As derivadas fracionárias de Hilfer (à esquerda e à direita) da função* $f \in C^n(a,b)$ *de ordem* $n-1 < \alpha < n$ *e tipo* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, *são definidas por:*

$$\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{a+}f(x) = \mathrm{I}^{\gamma-\alpha}_{a+}\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a+}f(x), \tag{1.7}$$

e

$$\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{b-}f(x) = \mathrm{I}^{\gamma-\alpha}_{b-}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{b-}f(x), \tag{1.8}$$

repectivamente, com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.

Note que, a partir da escolha do limite $\beta \to 0$ nas Eq.(1.7) e Eq.(1.8), obtemos as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville dadas pelas Eq.(1.5) e Eq.(1.6), respectivamente. Por outro lado, tomando o limite $\beta \to 1$ nas Eq.(1.7) e Eq.(1.8), obtemos as derivadas fracionárias de Caputo, dadas pelas Eq.(1.3) e Eq.(1.4), respectivamente.

A seguir, apresentamos apenas as expressões de algumas definições de integrais e derivadas fracionárias (à esquerda) que ao longo do tempo, desde os primeiros conceitos sobre integral e derivada fracionárias, foram introduzidas. Não nos preocupamos em apresentar uma definição formal para cada integral e derivada fracionárias, apenas para termos uma noção delas. Para uma leitura mais aprofundada de suas respectivas definições, sugerimos alguns livros e artigos, que auxiliaram na investigação das mesmas [1, 10, 15, 19, 21, 23, 24, 25, 28, 38, 39, 40, 44, 45, 47, 46, 72]. Ressaltamos que, existem outras definições de derivadas e integrais fracionárias, que não serão abordadas aqui.

1. Integral de Liouville
$$ {}^{L}\mathrm{I}^{\alpha}_{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.9}$$
2. Derivada de Liouville
$$ {}_{L}\mathrm{D}^{\alpha}_{+}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.10}$$
3. Integral de Riemann
$$ {}^{R}\mathrm{I}^{\alpha}_{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.11}$$
4. Derivada de Riemann
$$ {}_{R}\mathrm{D}^{\alpha}_{+}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.12}$$
5. Integral de Hadamard
$$ {}^{H}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{1.13}$$
6. Derivada de Hadamard
$$ {}^{H}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}. \tag{1.14}$$
7. Integral de Erdélyi-Kober
$$ {}^{EK}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}t^{\sigma\eta+\sigma-1}(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.15}$$

8. Derivada de Erdélyi-Kober

$$ {}^{EK}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta} f(x) = x^{-\sigma\eta}\,{}^{c}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}(x^{\sigma(\eta+\alpha)} f(x)), \tag{1.16} $$

onde ${}^{c}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}(\cdot)$ está definido na Definição 1.7.

9. Integral de Erdélyi

$$ {}^{E}\mathrm{I}^{\alpha}_{0+,\sigma,\eta} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\sigma\eta+\sigma-1}(x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.17} $$

10. Integral de Kober

$$ {}^{K}\mathrm{I}^{\alpha}_{0+,\eta} f(x) = \frac{x^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\eta}(x - t)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.18} $$

11. Integral de Katugampola

$$ {}^{\rho}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.19} $$

12. Derivada de Katugampola

$$ {}^{\rho}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \left(\frac{1}{x^{p-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{\rho}\mathrm{I}^{n-\alpha}_{a+} f(x). \tag{1.20} $$

13. Integral de Prabhakar

$$ \varepsilon^{\omega,\gamma}_{a+,\alpha,\beta} f(x) = \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} \mathbb{E}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\omega(x - t)^{\alpha}) f(t)dt, \tag{1.21} $$

onde $\mathbb{E}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\cdot)$ corresponde a função Mittag-Leffer de dois parâmetros (Definição A.4).

14. Derivada de Prabhakar

$$ \mathrm{D}^{\omega,\rho}_{a+,\gamma,\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} \mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}(\omega(x - t)^{\rho}) f(t)dt. \tag{1.22} $$

15. Integral de Chen

$$ \mathrm{I}^{\alpha}_{c} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x - t)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.23} $$

16. Derivada de Chen

$$ \mathrm{D}^{\alpha}_{c} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}^{n-\alpha}_{c} f(x). \tag{1.24} $$

17. Integral de Riesz

$$ {}_{RZ}\mathrm{I}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} |x - t|^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.25} $$

18. Derivada de Riesz

$$ {}_{RZ}\mathrm{D}^{\alpha} f(x) = \frac{-\left({}_{L}\mathrm{D}^{\alpha}_{+} f(x) +_{L} \mathrm{D}^{\alpha}_{-} f(x)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \tag{1.26} $$

19. Integral de Feller

$$ {}_{F}\mathrm{I}^{\alpha}_{\theta} f(x) = u^{L}\mathrm{I}^{\alpha}_{+} f(x) + v^{L}\mathrm{I}^{\alpha}_{-} f(x). \tag{1.27} $$

20. Derivada de Feller

$$ {}_{F}\mathrm{D}^{\alpha}_{\theta} f(x) = -\left[u\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{L}\mathrm{I}^{n-\alpha}_{+} f(x) + v\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{L}\mathrm{I}^{n-\alpha}_{-} f(x)\right]. \tag{1.28} $$

Note que, na derivada e integral fracionárias de Feller u e v são definidas por:

$$ u = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha-\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}, \quad v = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha+\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}. $$

21. Integral de Weyl

$$ {}_{x}W^{\alpha}_{\infty} f(x) =^{L} \mathrm{I}^{\alpha}_{-} f(x). \tag{1.29} $$

22. Derivada de Weyl

$$ {}_{x}\mathrm{D}^{\alpha}_{\infty} f(x) =_{L} \mathrm{D}^{\alpha}_{-} f(x). \tag{1.30} $$

23. Integral fracionária generalizada

$$ {}^{\rho}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+,\eta,k} f(x) = \frac{x^{k}\rho^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\eta}(x^{\rho}-t^{\rho})^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.31} $$

24. Derivada Caputo-Hadamard

$$ {}^{CH}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t)\frac{dt}{t}. \tag{1.32} $$

25. Derivada Caputo-Katugampola

$$ {}^{Ck}\mathrm{D}^{\alpha,\rho}_{a+} f(x) = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t)dt. \tag{1.33} $$

26. Derivada Hilfer-Hadamard

$$ {}^{H}\mathrm{D}^{\alpha,\beta}_{a+} f(x) = \mathrm{I}^{\gamma-\alpha;\ln x}_{a+} {}^{H}\mathrm{D}^{\gamma}_{a+} f(x). \tag{1.34} $$

27. Derivada Hilfer-Katugampola

$$ {}^{\rho}\mathrm{D}^{\alpha,\beta}_{a+} f(x) =^{\rho} \mathrm{I}^{\gamma-\alpha}_{a+} {}^{\rho}\mathrm{D}^{\gamma}_{a+} f(x). \tag{1.35} $$

28. Derivada de Jumarie

$$\mathrm{D}_x^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}(f(t)-f(0))dt. \tag{1.36}$$

29. Derivada de Liouville-Caputo

$$_{RL}\mathrm{D}_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt. \tag{1.37}$$

30. Derivada de Cassar

$$\mathrm{D}_-^\alpha f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left\{ \int_x^N (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt \right\}. \tag{1.38}$$

31. Derivada fracionária de Caputo-Riesz

$$_{RC}\mathrm{D}^\alpha f(x) = \frac{{}^c\mathrm{D}_{a+}^\alpha f(x) + (-1)^n {}^c\mathrm{D}_{b-}^\alpha f(x)}{2}. \tag{1.39}$$

Assim, devido a vasta classe de definições de integrais fracionárias, foi necessário propor uma integral que unificasse um maior número delas e que preservasse suas propriedades. Então, a seguir teremos o primeiro contato com a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função $\psi(\cdot)$, neste caso, o núcleo aqui é desconhecido, o que possibilita a livre escolha e assim, obter seus respectivos casos particulares.

Definição 1.5. [24] *Sejam (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ um intervalo finito ou infinito da linha real $\mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Também, seja $\psi(x)$ uma função crescente e monótona positiva sobre $(a,b]$, com derivada contínua $\psi'(x)$ sobre (a,b). Então, as integrais fracionárias da função f com respeito a outra função ψ sobre $[a,b]$ (à esquerda e à direita) são definidas por:*

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1.40}$$

e,

$$\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1.41}$$

respectivamente.

O lema a seguir garante a comutatividade dos operadores $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ e $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}(\cdot)$.

Lema 1.1. [24] *Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Então, vale a propriedade de semigrupo dada por:*

1. $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\psi} f(x)$.
2. $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\mathrm{I}_{b-}^{\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{b-}^{\alpha+\beta;\psi} f(x)$.

Dado que ao logo do texto falaremos de derivadas é integrais fracionárias à esquerda e à direita; em diante, nas provas dos resultados aqui registrados somente será provado o caso à esquerda, dado que a prova do caso à direita é análoga.

Demonstração. De fato, por meio da Eq.(1.40) e do teorema de Fubini [5], temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\mathrm{I}_{a+}^{\beta;\psi}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\mathrm{I}_{a+}^{\beta;\psi}f(t))dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\left(\int_a^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1}f(\xi)d\xi\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \psi'(\xi)f(\xi)\left(\underbrace{\int_\xi^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1}dt}_{I}\right)d\xi.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes I, com $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}$ e $dv=\psi'(t)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta-1}dt$, temos

$$
\begin{aligned}
I &= \left.\frac{(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta}}{\beta}\right|_\xi^x + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_\xi^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta}dt\\
&=\frac{\alpha-1}{\beta}\int_\xi^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta}dt.
\end{aligned}
$$

Novamente, integrando por partes, com $u=(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-2}$ e $dv=\psi'(t)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta}dt$, obtemos

$$
I =\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta(\beta+1)}\int_\xi^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-3}(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta+1}dt.
$$

Realizando este processo $(\alpha-1)$-vezes, temos

$$
\begin{aligned}
I &=\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+(\alpha-2))}\int_\xi^x \psi'(t)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta+(\alpha-2)}dt\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha-1)}\left.\frac{(\psi(t)-\psi(\xi))^{\beta+\alpha-1}}{(\beta+\alpha-1)}\right|_\xi^x\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\mathrm{I}_{a+}^{\beta;\psi}f(x)) &=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \psi'(\xi)(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}f(\xi)d\xi\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \psi'(\xi)(\psi(x)-\psi(\xi))^{\alpha+\beta-1}f(\xi)d\xi\\
&= \mathrm{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\psi}f(x).
\end{aligned}
$$

Mostrando assim, a comutatividade do operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$.

□

Lema 1.2. [24] *Seja $\alpha > 0$ e $\delta > 0$.*

1. *Se $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, então*
$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+\delta-1}.$$

2. *Se $f(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, então*
$$\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)}(\psi(b) - \psi(x))^{\alpha+\delta-1}.$$

Demonstração. Substituindo $f(x)$ na Eq.(1.40), temos
$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}((\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta-1}dt.$$

Integrando por partes, com $u = (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}$ e $dv = \psi'(t)(\psi(t) - \psi(a))^{\delta-1}dt$, obtemos
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta}}{\delta}\bigg|_a^x\right)\\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)\delta}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta}dt\\ =&\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)\delta}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-2}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta}dt.\end{aligned}$$

Realizando novamente a integração por partes, com $u = (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-2}$ e $dv = \psi'(t)(\psi(t) - \psi(a))^{\delta}dt$, temos
$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\delta(\delta+1)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-3}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta+1}dt.$$

Realizando esse procedimento, $(\alpha-1)$-vezes, concluímos que
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) =& \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\delta(\delta+1)\ldots(\delta+\alpha-2)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(t) - \psi(a))^{\delta+\alpha-2}dt\\ =&\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta)\delta(\delta+1)\ldots(\delta+\alpha-2)}\,\frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\delta+\alpha-1}}{(\delta+\alpha-1)}\bigg|_a^x\\ =&\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta+\alpha)}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta+\alpha-1}.\end{aligned}$$

Obtendo, assim, formas fechadas para as integrais fracionárias à esqueda e à direita de $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$ e $g(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, respectivamente, com respeito a outra função ψ.

□

A seguir, apresentamos dois lemas que envolvem o operador integral de uma função com respeito a outra, os quais são de grande importância no momento de abordar teoremas e/ou resultados que precisam da integral fracionária de um produto de funções, como é o caso da Seção 2.3.

Lema 1.3. [63] *Sejam* $(a, b]$ *com* $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *um intervalo na reta real,* $\alpha > 0$ *e* $\psi(x)$ *uma função crescente e monótona positiva em* $[a, b]$*, cuja derivada é contínua em* (a, b)*, então*

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{(n)}(x) \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)},$$

onde $f^{(n)}(\cdot)$ *é a n-ésima derivada de ordem inteira e* $x > a$.

Demonstração. Usando a série de Taylor [5], podemos escrever f da seguinte maneira:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\psi(t) - \psi(x))^n.$$

Aplicando o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ sobre f, pela Definição 1.5 temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} f(t) dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\psi(t) - \psi(x))^n \right] dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} (\psi(t) - \psi(x))^n dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha+n-1} dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} \left(- \left. \frac{(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha+n}}{\alpha + n} \right|_a^x \right) \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+n}}{(\alpha + n)} \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + n)} \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+n}}{(\alpha + n)} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{(n)}(x) \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)}.
\end{aligned}$$

Note que, pela identidade

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1} \alpha \Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(n + 1)}, \tag{1.42}$$

temos

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}(-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n \alpha\Gamma(n+\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}.$$

Concluindo assim a prova. □

Lema 1.4. [63] *Sejam $(a,b]$ com $-\infty < a < b \leqslant \infty$ um intervalo na reta real, $\alpha > 0$ e $\psi(x)$ uma função crescente e monótona positiva em $[a,b]$, cuja derivada é contínua em (a,b). A integral fracionária de um produto de duas funções é dada por:*

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\alpha+k;\psi}g(x),$$

onde $f^{(k)}(\cdot)$ é a k-ésima derivada de ordem inteira e $x > a$.

Demonstração. Sejam f e g duas funções que satisfazem as condições conforme o Lema 1.3, então

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{m}(fg)^{(m)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)},$$

usando a fórmula de Leibniz [9],

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} f^{(k)}g^{(m-k)},$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $f,g \in C^m[a,b]$, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\sum_{m=k}^{\infty}\binom{-\alpha}{m}\binom{m}{k} g^{(m-k)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)}.\end{aligned}$$

Considerando $n = m-k$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k} g^{((n+k)-k)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}\binom{-(\alpha+k)}{n} g^{(n)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\binom{-\alpha}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-(\alpha+k)}{n} g^{(n)}(x)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\alpha+k;\psi}g(x).\end{aligned}$$

Note que pela Eq.(1.42),

$$\begin{aligned}\binom{-\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k} &= \frac{(-1)^{n+k-1}(-\alpha)\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(n+k+1)}\frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(-1)^{n+k}\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+k)!}\frac{(n+k)!}{k!n!}\\ &= \frac{(-1)^{n+k}\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!n!}\end{aligned} \tag{1.43}$$

e,

$$\begin{aligned}\binom{-\alpha}{k}\binom{-(\alpha+k)}{n} =& \frac{(-1)^{k-1}(-\alpha)\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k+1)}\frac{(-1)^{n-1}(-(\alpha+k))\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)\Gamma(n+1)}\\ =& \frac{(-1)^{k}\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!}\frac{(-1)^{n}\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)n!}\\ =& \frac{(-1)^{n+k}\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!n!},\end{aligned} \tag{1.44}$$

de modo que, a Eq.(1.43) e a Eq.(1.44) são iguais.
Concluindo assim a demonstração. □

Para a continuação desta seção, vamos apresentar as definições da derivada fracionária com respeito a outra função, isto é, ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo, sendo ambas motivadas pela derivada fracionária de Riemann-Liouville e pela derivada fracionária de Caputo, escolhendo uma função ψ específica.

Definição 1.6. [24] *Sejam $\psi'(x) \neq 0$ $(-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty)$ e $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. As derivadas de Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) de uma função f com respeito a ψ de ordem α, são definidas por:*

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}f(x) =& \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}^{n-\alpha;\psi}_{a+}f(x)\\ =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}f(t)dt,\end{aligned} \tag{1.45}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{b-}f(x) =& \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}^{n-\alpha;\psi}_{b-}f(x)\\ =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^b \psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{n-\alpha-1}f(t)dt,\end{aligned} \tag{1.46}$$

respectivamente, onde $n = [\alpha] + 1$.

Definição 1.7. [3] *Sejam $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ o intervalo $(-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty)$, $f, \psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ duas funções tal que ψ é crescente e $\psi'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. As derivadas fracionárias ψ-Caputo (à esquerda e à direita) de f de ordem α, são dadas por:*

$$^{c}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}f(x) = \mathrm{I}^{n-\alpha;\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \tag{1.47}$$

e

$$^{c}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{b-}f(x) = \mathrm{I}^{n-\alpha;\psi}_{b-}\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \tag{1.48}$$

respectivamente, onde $n = [\alpha] + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$.

Lema 1.5. [24] *Sejam $\alpha > 0$ e $\delta > 0$.*

1. *Se $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, então*
$$\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1}.$$

2. *Se $f(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, então*
$$\mathrm{D}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(b) - \psi(x))^{\delta-\alpha-1}.$$

Demonstração. Substituindo $f(x)$ na Eq.(1.45), aplicando o Lema 1.2 parte 1. e derivando n-vezes, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) =& \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1} \\
=& \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1} \\
=& \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(n-\alpha+\delta)}(\psi(x) - \psi(a))^{n-\alpha+\delta-1} \\
=& \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(n-\alpha+\delta)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)(\psi(x) - \psi(a))^{n-\alpha+\delta-1} \\
=& \frac{\Gamma(\delta)(n-\alpha+\delta-1)}{\Gamma(n-\alpha+\delta)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\psi(x) - \psi(a))^{n-\alpha+\delta-2} \\
=& \frac{\Gamma(\delta)(n-\alpha+\delta-2)}{\Gamma(n-\alpha+\delta-1)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(\psi(x) - \psi(a))^{n-\alpha+\delta-3} \\
&\vdots \\
=& \frac{\Gamma(\delta)(n-\alpha+\delta-(n-1))}{\Gamma(n-\alpha+\delta-(n-2))}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha} \\
=& \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

De modo que, são obtidas formas fechadas para as derivadas de Riemann-Liouville à esquerda e à direita das funções $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$ e $g(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, respectivamente. $\square$

Com o objetivo de simplificar a notação e alguns resultados, introduzimos a seguinte notação:

$$f_{\psi+}^{[n]}(x) := \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \quad f_{\psi-}^{[n]}(x) := \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

onde $\dfrac{d}{dx}$ corresponde a derivada de primeira ordem e $\psi'(x)$ é a derivada de primeira ordem de uma função $\psi(\cdot)$ crescente, $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, com $(-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty)$. Note que, estes termos iram aparecer em todas as derivadas e integrais fracionárias definidas com respeito a outra função.

Teorema 1.1. [3] *Se* $f \in C^n[a,b]$ *e* $\alpha > 0$, *então*

$$
{}^c\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(x)-\psi(a))^k f_{\psi+}^{[k]}(a)\right] \tag{1.49}
$$

e

$$
{}^c\mathrm{D}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \mathrm{D}_{b-}^{\alpha;\psi}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(b)-\psi(x))^k f_{\psi-}^{[k]}(b)\right]. \tag{1.50}
$$

Demonstração. Da Definição 1.7 e aplicando integração por partes com $u = (\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}$ e $dv = \psi'(t) f_{\psi+}^{[n]}(t)dt$, temos

$$
\begin{aligned}
{}^c\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) &= \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}\, f_{\psi+}^{[n]}(t)dt\\
&= \frac{(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f_{\psi+}^{[n-1]}(t)\Bigg|_a^x + \frac{(n-\alpha-1)}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-2}\, f_{\psi+}^{[n-1]}(t)dt\\
&= -\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f_{\psi+}^{[n-1]}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-2}\, f_{\psi+}^{[n-1]}(t)dt,
\end{aligned}
$$

continuando com a aplicação de integração por partes n-vezes, obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^c\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = &-\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f_{\psi+}^{[n-1]}(a) - \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{n-\alpha-2}}{\Gamma(n-\alpha-1)} f_{\psi+}^{[n-2]}(a)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-2)}\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-3}\, f_{\psi+}^{[n-2]}(t)dt\\
&\vdots\\
= &-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f_{\psi+}^{[k]}(a) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{-\alpha-1}\, f(t)dt\\
= &-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!\,(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha}}{k!\Gamma(k-\alpha+1)} f_{\psi+}^{[k]}(a)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x \psi'(t)\,(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}\, f(t)dt\\
= &-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\,(\psi(x)-\psi(a))^k}{k!} f_{\psi+}^{[k]}(a) + \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)\\
= &\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^k}{k!} f_{\psi+}^{[k]}(a)\right],
\end{aligned}
$$

observe que foi usado o resultado do Lema 1.5 quando $\delta - 1 = k$ e a igualdade que mostraremos a seguir, verifiquemos que,

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{-\alpha-1} f(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{n-\alpha-1} f(t)dt,$$

para isto, mostremos que

$$\mathrm{I}_{a+}^{n;\psi}\left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{-\alpha-1} f(t)dt\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{n-\alpha-1} f(t)dt,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{n-1}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t \psi'(\xi)\left(\psi(t)-\psi(\xi)\right)^{-\alpha-1} f(\xi)d\xi dt\\
&=\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(\xi)f(\xi)\int_\xi^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{n-1}\left(\psi(t)-\psi(\xi)\right)^{-\alpha-1} dtd\xi\\
&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(\xi)f(\xi)\mathrm{I}_{a+}^{n;\psi}\left(\psi(x)-\psi(\xi)\right)^{-\alpha-1} d\xi\\
&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x \psi'(\xi)f(\xi)\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\psi(x)-\psi(\xi)\right)^{n-\alpha-1} d\xi\\
&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \psi'(\xi)\left(\psi(x)-\psi(\xi)\right)^{n-\alpha-1} f(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Note que

$$\mathrm{I}_{a+}^{n;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{n-\alpha-1} f(t)dt.$$

Finalizando assim a prova, e mostrando uma relação direta entre duas derivadas fracionárias importantes a derivada ψ-Riemann-Liouville e a derivada ψ-Caputo. Além disso, observemos que no caso em que $f_{\psi+}^{[k]}(a) = 0$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ temos a igualdade entre estas duas derivadas fracionárias, isto é, ${}^c\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x)$.

□

2 Sobre a derivada fracionária Ψ-Hilfer

Nos últimos anos, o cálculo fracionário tem chamado a atenção de inúmeros pesquisadores, por se mostrar sólido e contribuir de forma eficiente, na resolução de problemas envolvendo modelagem matemática por meio de equações diferenciais, além de estar em crescimento contínuo tanto na parte teórica como nas aplicações, o qual tem sido muito bem recebido na comunidade científica por diversos pesquisadores de inúmeras áreas, a saber: física, química, engenharia, medicina, dentre outras [6, 7, 15, 16, 23, 24, 33, 34].

Desde o início do cálculo fracionário datado em 30 de setembro de 1695, especificamente depois da primeira conferência internacional dedicada exclusivamente a este, em 1974 [51], tem surgido uma ampla classe de definições de derivadas e integrais fracionárias, cada uma com sua respectiva importância e relevância, o que tem-se tornado um aparente problema. Uma maneira de ultrapassar tal situação, é propor integrais e derivadas fracionárias mais gerais, em que as usuais sejam casos particulares. Nesse sentido, a fim de contornar o problema, em 2018, Sousa e Oliveira [58], introduziram a chamada derivada fracionária ψ-Hilfer, a princípio motivados pela derivada fracionária de Hilfer que unifica duas das derivadas fracionárias mais importantes e utilizadas do cálculo fracionário, isto é, as derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville e de Caputo. Também, foram motivados pela ideia utilizada por Almeida [3], ao definir a derivada de Caputo com respeito a outra função ψ de uma função f de ordem α, que generaliza uma ampla classe de derivadas fracionárias; sendo ainda essa derivada fracionária uma generalização de algumas derivadas fracionárias propostas anteriormente. No entanto, o diferencial é que além da escolha da função $\psi(\cdot)$, a derivada fracionária ψ-Hilfer, possibilita a escolha dos limites de $\beta \to 1$ ou $\beta \to 0$, o que torna mais geral. Além disso, vale destacar que, os casos particulares obtidos da derivada fracionária ψ-Hilfer, suas propriedades são mantidas, como veremos no decorrer deste capítulo, e isso, é muito bom e importante.

Neste capítulo, vamos introduzir a derivada fracionária ψ-Hilfer [58]. Vamos apresentar e demonstrar algumas propriedades e relações fundamentais para a derivada fracionária ψ-Hilfer, por meio das derivadas fracionárias, ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, essenciais para a investigação dessas propriedades. Logo, apresentamos uma vasta classe de integrais e derivadas fracionárias, como casos particulares da integral fracionária ψ-Riemann-Liouville e da derivada fracionária ψ-Hilfer e, para finalizar, discutimos a derivada fracionária ψ-Hilfer por meio do critério justificando ser uma derivada considerada derivada fracionária, pois nem todas as derivadas fracionárias definidas até agora satisfazem tal critério, este consiste na regra de Leibniz conhecida no cálculo de ordem inteiro, também como "regra do produto".

2.1 Derivada fracionária ψ-Hilfer

Como destacado na introdução desta seção, a vasta classe de derivadas fracionárias que até então tinham sido introduzidas, foram apresentadas na Seção 1.2. Vimos que pesquisadores propuseram duas versões de derivadas fracionárias, as chamadas ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville a fim de sanar o problema. Embora, as versões propostas em anos diferentes, o objetivo era propor um único operador que unificasse uma maior quantidade de operadores de diferenciação fracionários. Sabemos que a definição da derivada de Hilfer, é motivada pelas derivadas fracionárias de Caputo e de Riemann-Liouville. Nesse sentido, Sousa e Oliveira, foram motivados pelas derivadas fracionárias ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, a propor a versão da derivada fracionária de Hilfer com respeito a outra função, chamada ψ-Hilfer que, além da escolha da função $\psi(\cdot)$, tem a escolha dos limites de $\beta \to 1$ ou $\beta \to 0$. Assim, a partir da definição, apresentamos algumas propriedades e relações entre as derivadas ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, que são fundamentais para justificar que de fato, o operador de diferenciação ψ-Hilfer, é fracionário.

Definição 2.1. [58] *Sejam $n-1<\alpha<n$ com $n \in \mathbb{N}$, $I=[a,b]$ um intervalo tal que $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e $f,\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ duas funções tal que ψ é crescente e $\psi'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. As derivadas fracionárias ψ-Hilfer (à esqueda e à dereita) da função f de ordem α e tipo $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, são definidas por:*

$$ {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x), \tag{2.1}$$

e,

$$ {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{b-}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x), \tag{2.2}$$

respectivamente.

As derivadas fracionárias ψ-Hilfer também podem ser escritas em termos das integrais fracionárias ψ-Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) e das derivadas fracionárias ψ-Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) da seguinte forma:

$$ {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) \quad \text{e} \quad {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{b-}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{b-}^{\gamma;\psi} f(x), \tag{2.3}$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.
Com efeito, note que

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) \\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha-\beta(n-\alpha);\psi} f(x) \\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi} f(x) \\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) \end{aligned}$$

da forma analoga para o caso a direita.

Do anterior, é claro que

$$\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)=\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x),\quad \mathrm{D}_{b-}^{\gamma;\psi}f(x)=\left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x),$$

com $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

Observe também que, para $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$, temos

$$f_{\psi+}^{[n]}(x)=\lim_{\alpha\to n^-}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x),\quad f_{\psi-}^{[n]}(x)=\lim_{\alpha\to n^-}\mathrm{D}_{b-}^{\gamma;\psi}f(x). \tag{2.4}$$

Segue, então, a expressão

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n^-}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)&=\lim_{\alpha\to n^-}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\mathrm{I}_{a+}^{n-\gamma;\psi}f(x)\\&=\lim_{\alpha\to n^-}\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}f(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes, com $u=f(t)$ e $dv=\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}dt$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n^-}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)&=\lim_{\alpha\to n^-}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\left[-f(x)\frac{(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma}}{n-\gamma}\bigg|_a^x\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{1}{n-\gamma}\int_a^x f'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma}dt\right]\right)\\&=\lim_{\alpha\to n^-}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-\beta(n-\alpha)+1)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\left[f(a)(\psi(x)-\psi(a))^{n-\alpha-\beta(n-\alpha)}\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\int_a^x f'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-\beta(n-\alpha)}dt\right]\right)\\&=\frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n\left[f(a)+\int_a^x f'(t)dt\right]\\&=\frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n[f(a)+f(x)-f(a)]\\&=\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=f_{\psi+}^{[n]}(x).\end{aligned}$$

De maneira análoga para o caso a direita.

No caso particular em que $0<\alpha<1$ e $0\leqslant\beta\leqslant1$, temos

$${}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\frac{d}{dt}(\mathrm{I}_{a+}^{1-\gamma;\psi}f(t))dt.$$

Note que, por meio da Eq.(2.3), temos

$$\begin{aligned}{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)&=\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(x)\\&=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t)dt\\&=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{I}_{a+}^{1-\gamma;\psi}f(t)\right)dt.\end{aligned}$$

Passemos a apresentar propriedades desta derivada.

Propriedade 2.1.1 (Linearidade). *Sejam $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Sejam $f,g\in C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ tais que existam ${}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(\cdot)$ e ${}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(\cdot)$. A derivada fracionária ψ-Hilfer é um operador linear, isto é,*

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)+\mu{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(t). $$

Demonstração. Fazendo uso da Definição 2.1 e sabendo que o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}f(\cdot)$ e o operador derivada de ordem inteira satisfazem a linearidade, temos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}[\lambda f(t)+\mu g(t)] &= \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}[\lambda f(t)+\mu g(t)]\\
&=\mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}[\lambda\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)+\mu\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}g(t)]\\
&=\mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}[\lambda\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)+\mu\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}g(t)]\\
&=\lambda\mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t)+\mu\mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}g(t)\\
&=\lambda{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)+\mu{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}g(t).
\end{aligned}
$$

□

É importante mencionar que esta propiedade é válida também para a derivada ψ-Hilfer à direita, a prova é analoga.

Teorema 2.1. [58] *Suponha que $f,\psi\in C^{n+1}[a,b]$. Então, para todo $n-1<\alpha<n$ e $0\leqslant\beta\leqslant 1$, temos*

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t)dt, $$

e,

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)=\frac{(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathrm{D}_{b-}^{\gamma;\psi}f(b)-\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\int_x^b(\psi(t)-\psi(x))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{b-}^{\gamma;\psi}f(t)dt. $$

Demonstração. De fato, aplicando a Definição 2.3 e integrando por partes com $u=\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t)$ e $dv=\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}dt$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x)\\
=&\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\\
=&\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\left[-\frac{(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\Big|_a^x+\frac{1}{\gamma-\alpha}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\right]\\
=&\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left[(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)+\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\right]\\
=&\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)+\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt.
\end{aligned}
$$

Mostrando assim uma relação entre a derivada ψ-Hilfer e a derivada ψ-Riemann-Liouville. □

Observe que, se $f,\psi \in C^{n+1}[a,b]$, é válido:

1. $\lim\limits_{\alpha\to n^-} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f_{\psi+}^{[n]}(x)$, e
2. $\lim\limits_{\alpha\to n^-} {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f_{\psi-}^{[n]}(x)$.

Com efeito, aplicando o Teorema 2.1, utilizando a Eq.(2.4) e sabendo que $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n^-} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= \lim_{\alpha\to n^-}\left[\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\right]\\
&= \lim_{\alpha\to n^-}\left[\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\beta(n-\alpha)}}{\Gamma(\beta(n-\alpha)+1)}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\beta(n-\alpha)+1)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\beta(n-\alpha)}\frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\right]\\
&= \lim_{\alpha\to n^-}\left[\frac{1}{\Gamma(1)}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)+\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x \frac{d}{dt}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)dt\right]\\
&= \lim_{\alpha\to n^-}\left[\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)+\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x)-\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(a)\right]\\
&= \lim_{\alpha\to n^-} \mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) = f_{\psi+}^{[n]}(x).
\end{aligned}
$$

Teorema 2.2. [58] *As derivadas fracionárias ψ-Hilfer são operadores limitados, para todo $n-1<\alpha<n$ e $0\leqslant\beta\leqslant 1$, dados por*

$$
\left\|{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x)\right\|_{C_{\gamma,\psi}} \leqslant K\left\|f\right\|_{C^n_{\gamma,\psi}},\quad \left\|{}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x)\right\|_{C_{\gamma,\psi}} \leqslant K\left\|f\right\|_{C^n_{\gamma,\psi}},
$$

onde $K=\dfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}$ *e* $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$.

Demonstração. De fato, fazendo uso da Eq.(1.45) e sendo $|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma} f^{n}_{\psi+}(t)| \leqslant \|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}$ [3], temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f\right\|_{C_{\gamma;\psi}} &= \left\|\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}^{n-\gamma;\psi}_{a+}\right\|_{C_{\gamma;\psi}}\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}^{n-\gamma;\psi}_{a+} f(x)\right|\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1} f(t)dt\right|\\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma} f^{[n]}_{\psi+}(t)dt\right|\\
&\leqslant \frac{\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma-1}dt\right|\\
&= \frac{\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma)}\max_{x\in[a,b]}\left|-\left.\frac{(\psi(x)-\psi(t))^{n-\gamma}}{n-\gamma}\right|_a^x\right|\\
&= \frac{\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)}\max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{n-\gamma}\right|\\
&\leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)}.
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a Eq.(2.3) e a desigualdade $|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x)| \leqslant \left\|\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x)\right\|_{C_{\gamma;\psi}}$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left\|{}^{H}\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\right\|_{C_{\gamma,\psi}} &= \left\|\mathrm{I}^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}\right\|_{C_{\gamma;\psi}}\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\mathrm{I}^{\gamma-\alpha;\psi}_{a+}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(x)\right|\\
&= \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f(t)dt\right|\\
&\leqslant \frac{\left\|\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f\right\|_{C_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha-1}dt\right|\\
&= \frac{\left\|\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f\right\|_{C_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\max_{x\in[a,b]}\left|-\left.\frac{(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\right|_a^x\right|\\
&= \frac{\left\|\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+} f\right\|_{C_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\max_{x\in[a,b]}\left|(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}\right|\\
&\leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\gamma}\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}}{\Gamma(n-\gamma+1)}\\
&= \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(n-\gamma+1)}\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}\\
&= K\|f\|_{C^{n}_{\gamma;\psi}}.
\end{aligned}
$$

Mostrando assim que o operador ψ-Hilfer é um operador limitado.

□

Considere a derivada fracionária ψ-Hilfer e as seguintes funções: $g(x) = I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x)$ e $h(x) = I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x)$. A partir da Definição 2.1, temos

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{n-\mu;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n g(x) \quad \text{e} \quad {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{b-}^{n-\mu;\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n h(x), $$

com $\mu = n(1-\beta) + \beta\alpha$.
Logo, as seguintes relações entre as derivadas fracionárias ψ-Hilfer e ψ-Caputo são válidas,

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} g(x) = {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) \right] \tag{2.5} $$

e

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{C}\mathrm{D}_{b-}^{\mu;\psi} h(x) = {}^{C}\mathrm{D}_{b-}^{\mu;\psi} \left[I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x) \right]. \tag{2.6} $$

Note que, $n - \mu = n - n(1-\beta) - \beta\alpha = n - n + n\beta - \beta\alpha = \beta(n-\alpha)$.

Teorema 2.3. [58] *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Se $f \in C^n[a,b]$, então*

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha-\beta(n-\alpha);\psi} \left[\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^k \mathrm{D}_{a+,k}^{\gamma;\psi} f(a)}{k!} \right] $$

e

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \mathrm{D}_{b-}^{\alpha-\beta(n-\alpha);\psi} \left[\mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(\psi(b)-\psi(x))^k \mathrm{D}_{b-,k}^{\gamma;\psi} f(b)}{k!} \right], $$

onde $\gamma = \alpha + \beta(k-\alpha)$.

Demonstração. Considere a função $g(x) = I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x)$ e $\mu = n - \beta(n-\alpha)$. Aplicando a Eq.(2.5) e o Teorema 1.1 (Eq.(1.49)), obtemos

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} g(x) \\ &= \mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\psi(x)-\psi(a))^k g_{\psi+}^{[k]}(a) \right] \\ &= \mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\psi(x)-\psi(a))^k \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^k I_{a+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(a) \right] \\ &= \mathrm{D}_{a+}^{\mu;\psi} \left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\psi(x)-\psi(a))^k \mathrm{D}_{a+,k}^{\alpha,\beta;\psi} f(a) \right]. \end{aligned} $$

Note que, $\mathrm{D}_{a+,k}^{\alpha,\beta;\psi} f(a) = \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^k I_{a+}^{(1-\beta)(k-\alpha);\psi} f(a)$.
Mostrando assim uma relação entre a derivada ψ-Hilfer com a derivada ψ-Riemann-Liouville e a integral fracionária ψ-Riemann-Liouville. □

Teorema 2.4. [58] *Se $f \in C^n[a,b]$, $n-1<\alpha<n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, então*

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi+}^{[n-k]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a), \tag{2.7}$$

e,

$$\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi-}^{[n-k]} \mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(b). \tag{2.8}$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.

Demonstração. Por meio da Eq.(2.3) e o Lema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\left(\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x)\right) = \mathrm{I}_{a+}^{\gamma;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) \\
=& \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\left(\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t)\right) dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}\frac{d}{dt} f_{\psi+}^{[n-1]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes com $u = (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1}$ e $dv = \dfrac{d}{dt} f_{\psi+}^{[n-1]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\Bigg[(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-1} f_{\psi+}^{[n-1]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)\Big|_a^x \\
&+ (\gamma-1)\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2} f_{\psi+}^{[n-1]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt\Bigg] \\
=& -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1} f_{\psi+}^{[n-1]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}\frac{d}{dt} f_{\psi+}^{[n-2]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Realizando novamente a integração por partes, com $u = (\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2}$ e

$dv = \dfrac{d}{dt} f_{\psi+}^{[n-2]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1} f_{\psi+}^{[n-1]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)} \Bigg[(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-2} f_{\psi+}^{[n-2]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)\Big|_a^x \\
&+ (\gamma-2)\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-3} f_{\psi+}^{[n-2]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt \Bigg] \\
=& -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1} f_{\psi+}^{[n-1]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
&- \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-2} f_{\psi+}^{[n-2]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\gamma-2)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\gamma-3} \frac{d}{dt} f_{\psi+}^{[n-3]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Realizando este processo n-vezes, temos

$$\begin{aligned}
& \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) \\
=\; & -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-(k+1)}}{\Gamma(\gamma-k)} f_{\psi+}^{[n-(k+1)]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\gamma-n)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-n-1} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t)dt \\
=\; & -\sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi+}^{[n-k]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) + \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-n;\psi}(\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x)).
\end{aligned}$$

Note que, $\gamma - n = \alpha + \beta(n-\alpha) - n = \alpha + \beta n - \beta\alpha - n$ e $(1-\beta)(n-\alpha) = n - \alpha - \beta n + \beta\alpha$. Assim $\gamma - n + (1-\beta)(n-\alpha) = 0$. Portanto, concluímos que

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi+}^{[n-k]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a).$$

Mostrando assim os resultados obtidos ao aplicar os operadores $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ e $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ à esquerda sobre a derivada ψ-Hilfer à esquerda e à direita, respectivamente. □

Teorema 2.5. [58] *Se* $f, g \in C^n[a,b]$, $\alpha > 0$ *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. *Então*

$${}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) \leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}$$

e

$${}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) \leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} d_k(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-k},$$

onde $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$,

$$c_k = \frac{(f-g)_{\psi+}^{[n-k]} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(a)}{\Gamma(\gamma+1-k)} \quad e \quad d_k = \frac{(f-g)_{\psi-}^{[n-k]} \mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(f-g)(a)}{\Gamma(\gamma+1-k)}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) = {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(x) \\ \Rightarrow &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) - {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(x) = 0 \\ \Rightarrow &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(f(x) - g(x)) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aplicando $\mathrm{I}^{\alpha;\psi}_{a+}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(2.9) e usando a Eq.(2.7), obtemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}^{\alpha;\psi}_{a+}{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(f(x) - g(x)) = 0 \\ \Rightarrow &f(x) - g(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}(f-g)^{[n-k]}_{\psi+}\mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}(f-g)(a) = 0. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) =& g(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}(f-g)^{[n-k]}_{\psi+}\mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}(f-g)(a) \\ =& g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}. \end{aligned}$$

Agora, suponha $f(x) = g(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}$, aplicando ${}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\cdot)$ e usando a Eq.(2.18), temos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) =& {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}\left[g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}\right] \\ =& {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que ${}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x) = {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}g(x)$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}f(x) = {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}g(x) \\ \Rightarrow &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}f(x) - {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}g(x) = 0 \\ \Rightarrow &{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}(f(x) - g(x)) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aplicando $\mathrm{I}^{\alpha;\psi}_{b-}{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}$ em ambos os lados da Eq.(2.10) e usando a Eq.(2.8), obtemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}^{\alpha;\psi}_{b-}{}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{b-}(f(x) - g(x)) = 0 \\ \Rightarrow &f(x) - g(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}(f-g)^{[n-k]}_{\psi-}\mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{b-}(f-g)(b) = 0. \end{aligned}$$

Logo, segue

$$\begin{aligned} f(x) =& g(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}(f-g)^{[n-k]}_{\psi-}\mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{b-}(f-g)(b) \\ =& g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(b)-\psi(x))^{\gamma-k}. \end{aligned}$$

Agora, suponha $f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(b) - \psi(x))^{\gamma-k}$ e aplicando ${}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ e usando Eq.(2.18), temos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\left[g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(b) - \psi(x))^{\gamma-k}\right] \\ =& {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(b) - \psi(x))^{\gamma-k}. \end{aligned}$$

Assim, ${}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x)$.
Concluindo assim a demonstração. Note que, este teorema mostra a forma de duas funções com a mesma derivada ψ-Hilfer. □

Lema 2.1. [58] *Sejam $n-1 \leqslant \gamma < n$ e $f \in C_\gamma[a,b]$. Então*

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(a) = \lim_{x\to a+} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0 \quad e \quad \mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi} f(b) = \lim_{x\to b-} \mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = 0, \quad n-1 \leqslant \gamma < \alpha.$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)$ é limitado pois $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) \in C_\gamma[a,b]$. Dado $f \in C_\gamma[a,b]$, temos que $(\psi(x)-\psi(a))^\gamma f(x)$ é contínua sobre $[a,b]$, e assim

$$|(\psi(x)-\psi(a))^\gamma f(x)| < M \Rightarrow |f(x)| < |(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}|M, \tag{2.11}$$

para $x \in [a,b]$ e $M > 0$ uma constante. Agora, aplicando o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(2.11) e usando o Lema 1.2, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)| <& M|\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{-\gamma}| \\ =& M\left|\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha+1-\gamma-1}\right| \\ =& M\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha-\gamma}. \end{aligned}$$

Dado que $\gamma < \alpha$, $M\dfrac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha-\gamma} \to 0$ quando $x \to a+$, concluímos que

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(a) = \lim_{x\to a+} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0.$$

Mostrando assim, que no caso em que o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ é avaliado numa função no limite inferior a, este vai ser anulado, analogamente para o operador $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ ao ser avaliado numa função no limite superior b. □

Teorema 2.6. [58] *Sejam $f \in C^1[a,b]$, $\alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, temos*

$${}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = f(x) \quad e \quad {}^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = f(x).$$

Demonstração. Usando a Definição 2.1, o Lema 1.1, a Eq.(2.3), o Teorema 2.4 e o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}f(x)\\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-\beta(\alpha-n);\psi}f(x)\\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-(\gamma-\alpha);\psi}f(x)\\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}f(x)\\
=& f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi+}^{[n-k]}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a)\\
=& f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi+}^{[n-k]}\left(\lim_{x\to a+}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(x)\right)\\
=& f(x).
\end{aligned}$$

Note que, ao aplicar a derivada ψ-Hilfer à esquerda sobre o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ se tem como resultado a função avaliada, analogamente ao aplicar a derivada ψ-Hilfer á direita sobre o operador $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}(\cdot)$, isto é, o operador $\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ é um inverso à direita do operador ψ-Hilfer à esquerda e o operador $\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ é um inverso à direita do operador ψ-Hilfer à direita. □

Teorema 2.7. [58] *Sejam $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ e $0\leqslant\beta\leqslant 1$. Se $f\in C^{m+n}[a,b]$, $m,n\in\mathbb{N}$, então para todo $k\in\mathbb{N}$ temos*

$$\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\right)^{k}\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m}f(x)=\frac{\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m}f(c)(\psi(x)-\psi(a))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

e,

$$\left(\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;\psi}\right)^{k}\left({}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m}f(x)=\frac{\left({}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m}f(d)(\psi(b)-\psi(x))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

para algum $c\in(a,x)$ e $d\in(x,b)$.

Demonstração. Pelo Lema 1.1, temos

$$\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\right)^{k}=\underbrace{\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\ldots\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}}_{k-vezes}=\mathrm{I}_{a+}^{k\alpha;\psi}.$$

Aplicando a Eq.(1.40), a Eq.(1.41) e o teorema do valor médio [7], obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi}\right)^{k}\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{k\alpha;\psi}\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(x)\\
=& \frac{1}{\Gamma(k\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{k\alpha-1}\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(t)dt\\
=& \frac{\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(c)}{\Gamma(k\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{k\alpha-1}dt\\
=& \frac{\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(c)(\psi(x)-\psi(a))^{k\alpha}}{k\alpha\Gamma(k\alpha)}\\
=& \frac{\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^{m} f(c)(\psi(x)-\psi(a))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},
\end{aligned}$$

com $c \in (a,x)$.

Finalizando assim a demonstração.

□

A convergência a e continuidade de funções têm grande importância na matemática, especialmente em análise, análise funcional, teoria de distribuições, dentre outras. Vamos apresentar alguns resultados de sequências uniformemente convergentes e funções uniformemente contínuas, usando o operador fracionário ψ-Hilfer e o operador integral fracionário ψ-Riemann-Liouville. Além disso, alguns exemplos envolvendo a função de Mittag-Leffler e a função $(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}$, são discutidos.

Teorema 2.8. [58] *Sejam $0<\alpha<1$, $I=[a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi \in [a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x)\neq 0$ para todo $x \in I$ e $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Então para todo $x_1, x_2 \in [a,b]$, temos*

$$\left\|\mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_1) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_2)\right\| \leqslant \frac{2\left\|f\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}|(\psi(x_1)-\psi(x_2))|^{\alpha}.$$

Demonstração. Aplicando a Eq.(1.40), supondo que $x_1 < x_2$, sabendo que $|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$ e usando a hipótese de ψ crescente, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_1) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_2)\right\| =& \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1}\psi'(t)(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)dt\right.\\
&\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_2}\psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)dt\right\|\\
=& \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1}\psi'(t)\left[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1}-(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}\right]f(t)dt\right.\\
&\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x_2}\psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)dt\right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_1) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha\psi} f(x_2) \right\| \leqslant & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \psi'(t) \left[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} - (\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} \right] f(t) dt \right\| \\
& + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} \psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t) dt \right\| \\
\leqslant & \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} |\psi'(t) \left[(\psi(x_1)-\psi(t))^{\alpha-1} - (\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1} \right] | dt \\
& + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} |\psi'(t)(\psi(x_2)-\psi(t))^{\alpha-1}| dt \\
= & \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(- \left. \frac{(\psi(x_1)-\psi(t))^\alpha}{\alpha} \right|_a^{x_1} + \left. \frac{(\psi(x_2)-\psi(t))^\alpha}{\alpha} \right|_a^{x_1} \right) \\
& + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(- \left. \frac{(\psi(x_2)-\psi(t))^\alpha}{\alpha} \right|_{x_1}^{x_2} \right) \\
= & \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left((\psi(x_1)-\psi(a))^\alpha + (\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha - (\psi(x_2)-\psi(a))^\alpha \right) \\
& + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left((\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha \right) \\
= & \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left((\psi(x_1)-\psi(a))^\alpha + 2(\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha - (\psi(x_2)-\psi(a))^\alpha \right) \\
\leqslant & \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(x_2)-\psi(x_1))^\alpha .
\end{aligned}
$$

Obtendo assim, o resultado desejado. □

Teorema 2.9. [58] *Sejam $n-1<\alpha<n$, $I=[a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi \in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponha que $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas sobre $[a,b]$. Então é possível trocar o operador integral fracionário com o limite, isto é,*

$$
\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x).
$$

Em particular, a sequência de funções $\left(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f\right)_{n=1}^\infty$ é uniformemente convergente.

Demonstração. Seja f o limite da sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$, f é contínua e sabendo que $|f_n(t)-f(t)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)| \leqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} |f_n(t)-f(t)| dt \\
\leqslant & \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} dt \\
= & - \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(\left. \frac{(\psi(x)-\psi(t))^\alpha}{\alpha} \right|_a^x \right) \\
= & \frac{\|f_n - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (\psi(x)-\psi(a))^\alpha \\
\leqslant & \frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_n - f\|_\infty . \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Dado que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente, aplicando o limite em ambos os lados da desigualdade (2.12), temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} |\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x)| \leqslant \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} \\
&\to \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) - \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = 0 \\
&\to \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_n(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{n\to\infty} f_n(x).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. [58] *Sejam $I = [0, b]$ um intervalo finito e $\psi \in I$ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Seja $f(x)$ uma função uniformemente contínua $f : I \to \mathbb{R}$. Se existe algum $0 < \alpha \leqslant 1$ tal que $\lim_{x\to\infty} \mathrm{I}_{x_0}^{\alpha;\psi} |f(x)| = 0$, então*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Demonstração. A prova será feita por contradição. Considere $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ logo existe uma sequência infinita limitada $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x_i)| \geqslant \varepsilon, \quad \forall x_i \in [0, b]. \tag{2.13}$$

Dado que $f(x)$ é uma função uniformemente contínua, então para todo x_i é associado um intervalo $[x_i - \delta, x_i + \delta]$, $\delta > 0$, tal que

$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [x_i - \delta, x_i + \delta]. \tag{2.14}$$

Por outro lado, usando a Eq.(2.13) e a Eq.(2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
|f(x)| \geqslant& |f(x_i)| - |f(x_i) - f(x)|, \quad \forall x \in [x_i - \delta, x_i + \delta] \\
\geqslant& \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [x_i - \delta, x_i + \delta].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A integral fracionária para o valor absoluto de $f(x)$ sobre o intervalo $[x_0, x_i]$, pode ser decomposta como

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{x_0}^{\alpha;\psi} |f(x_i)| =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_i - 1} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{\alpha-} |f(t)| dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_i-1}^{x_i-\delta} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{\alpha-} |f(t)| dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_i-\delta}^{x_i} \psi'(t)(\psi(x_i) - \psi(t))^{1-\alpha} |f(t)| dt.
\end{aligned}$$

Dado que $|f(x)| \leqslant \dfrac{\psi'(t)|f(t)|}{(\psi(x_i)-\psi(t))^{1-\alpha}}$, para todo $t \in [x_i - 1, x_i]$, pois $\psi'(t) \geqslant 0$, ψ é crescente e $\psi(x_i)-\psi(t))^{1-\alpha} \geqslant 0$. Então, aplicando a Eq.(2.15), temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{x_0}^{\alpha;\psi}|f(x_i)| \geqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x_i-1}\psi'(t)(\psi(x_i)-\psi(t))^{\alpha-}|f(t)|dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_i-1}^{x_i-\delta}|f(t)|dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_i-\delta}^{x_i}|f(t)|dt \\
\geqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x_i-1}\psi'(t)(\psi(x_i)-\psi(t))^{\alpha-}|f(t)|dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_i-1}^{x_i-\delta}|f(t)|dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\varepsilon}{2}(t)\Big|_{x_i-\delta}^{x_i} \\
\geqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\varepsilon}{2}(x_i - x_i + \delta) = \frac{\varepsilon\delta}{2\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Observe que o termo $\dfrac{\varepsilon\delta}{2\Gamma(\alpha)} \neq 0$ logo, dada uma sequência x_n satisfazendo isto, não é possível obter

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{I}_{x_0}^{\alpha;\psi}|f(x)| = 0.$$

Assim, concluímos a prova. □

Teorema 2.11. [58] *Seja* ${}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x)$ *uma função uniformemente contínua em* $C_{1-\gamma;\psi}^{1}([0,b],\mathbb{R})$ *com* $x \geqslant 0$. *Se* $f(x) \to f(0)$ *quando* $x \to \infty$, *então* ${}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) \to 0$ *quando* $x \to \infty$.

Demonstração. De fato, por meio da Eq.(2.7) e do Lema 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\,{}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) =& f(x) - \sum_{k=1}^{1}\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}f_{\psi}^{[1-k]}\mathrm{I}_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f(0) \\
=& f(x) - \frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\mathrm{I}_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}(1) \\
=& f(x) - \frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\mathrm{I}_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}(\psi(x)-\psi(0))^{1-1} \\
=& f(x) - \frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\frac{\Gamma(1)(\psi(x)-\psi(0))^{(1-\beta)(1-\alpha)}}{\Gamma(1+(1-\beta)(1-\alpha))}.
\end{aligned}$$

Note que $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, logo

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\,{}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) =& f(x) - \frac{(\psi(x)-\psi(0))^{\alpha+\beta(1-\alpha)-1}}{\Gamma(\gamma)}f(0)\frac{(\psi(x)-\psi(0))^{1-\alpha-\beta+\beta\alpha}}{\Gamma(2-\gamma)} \\
=& f(x) - \frac{f(0)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-\gamma)} \leqslant f(x) - f(0).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Aplicando o limite nos dois lados da desigualdade (Eq.(2.16)), temos

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\,{}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) \leqslant \lim_{x\to\infty}(f(x)-f(0)) = 0.$$

Finalmente, pelo Teorema 2.10, concluímos que, ${}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. □

Teorema 2.12. [58] *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ e $I = [a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi \in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponha que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas sobre $[a,b]$ e $\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k$ existe para todo k. Além disso, suponha que $\left(\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre $[a+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$. Então, para todo $x \in (a,b]$, temos*

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.9, dado que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas sobre $[a,b]$, $\left(\mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi} f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente e

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k(x). \tag{2.17}$$

Por outro lado, usando a Definição 1.6, a hipótese sobre $\left(\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ e a Eq.(2.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f_k(x) &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi} f_k(x)\\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \lim_{k\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi} f_k(x)\\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{n-\alpha;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\\
&= \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x).
\end{aligned}$$

Note que, sob as condições deste teorema é possível trocar a derivada ψ-Riemann-Liouville com o limite. □

Teorema 2.13. [58] *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $I = [a,b]$ um intervalo finito ou infinito e $\psi \in C[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponha que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente uniformemente de funções contínuas sobre $[a,b]$ e ${}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f_k$ existe para todo k. Além disso, suponha que $\left({}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre $[a+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$. Então, para todo $x \in (a,b]$, temos*

$$\lim_{k\to\infty} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f_k(x) = {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Demonstração. Usando a Eq.(2.3), o Teorema 2.9 e o Teorema 2.12, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f_k(x) &= \lim_{k\to\infty} \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f_k(x)\\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \lim_{k\to\infty} \mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f_k(x)\\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\\ &= {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} \lim_{k\to\infty} f_k(x).\end{aligned}$$

Mostrando assim que é possível trocar a derivada ψ-Hilfer com o limite. □

Lema 2.2. *Dado $\delta \in \mathbb{R}$, considere as funções $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$ e $g(x) = (\psi(b) - \psi(x))^{\delta-1}$, onde $\delta > n$. Então para $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$,*

1. $$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1}.$$

2. $$ {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(b) - \psi(x))^{\delta-\alpha-1}.$$

Demonstração. Aplicando a Eq.(2.3), o Lema 1.5 e o Lema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-1}\\ &= \mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\gamma-1}\right)\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\gamma-1}\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\gamma)}\frac{\Gamma(\delta-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+\delta-\gamma)}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\delta-\alpha-1}.\end{aligned}$$

□

Em particular, dado $n \leqslant k \in \mathbb{N}$ e $\delta > n$, temos

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{k} = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha},$$

e,

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(b)-\psi(x))^{k} = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}(\psi(b)-\psi(x))^{k-\alpha}.$$

Por outro lado, para $n > k \in \mathbb{N}_0$, temos

$$ {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{k} = 0, \quad e \quad {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(b)-\psi(x))^{k} = 0. \tag{2.18}$$

Lema 2.3. *Sejam* $\lambda > 0$, $n-1 < \alpha < n$ *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. *Considere* $f(x) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha)$ *e* $g(x) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(b)-\psi(x))^\alpha)$, *onde* $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ *é a função Mittag-Leffler com um parâmetro* (Definição A.3). *Então, segue*

$$^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = \lambda f(x) \quad e \quad ^H\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(x) = \lambda g(x).$$

Demonstração. Aplicando a definição da função de Mittag-Leffler com um parâmetro (Definição A.3) e o Lema 2.2 (parte 1), obtemos

$$\begin{aligned}
^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) &= {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha) \\
&= {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)}{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-\alpha)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha k-\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha(k-1)} \\
&= \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)}\left((\psi(x)-\psi(a))^\alpha\right)^{k-1} \\
&= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\left((\psi(x)-\psi(a))^\alpha\right)^k \\
&= \lambda\mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(x)-\psi(a))^\alpha) = \lambda f(x).
\end{aligned}$$

□

2.2 Uma ampla classe de derivadas e integrais fracionárias

O objetivo agora, é apresentar algumas derivadas e integrais fracionárias a partir de escolhas pertinentes de $\psi(x)$, $f(x)$ e os limites a e b nas integrais fracionárias da função f com respeito a outra função ψ (à esquerda e à direita) Definição 1.5 e nas derivadas ψ-Hilfer (à esquerda e à direita) Definição 2.1, as quais atuam como generalizações de algumas integrais e derivadas fracionárias, respectivamente.

Então, primeiramente, apresentaremos uma ampla classe de casos particulares para a integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função $(\psi(t))$, conforme a Definição 1.5. Então, temos

1. Considere $\psi(x) = x$ na Eq.(1.40),

$$\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \mathrm{I}_{a+}^{\alpha} f(x).$$

Assim, obtemos a derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda (Eq.(1.1)).

2. Considere $\psi(x) = x$ e $a = -\infty$ na Eq.(1.40),

$$\mathrm{I}_{-\infty}^{\alpha;x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = {}^{L}\mathrm{I}_{+}^{\alpha} f(x). \tag{2.19}$$

Logo, obtemos a integral fracionária de Liouville (Eq.(1.9)).

3. Considere $\psi(x) = x$ e $b = \infty$ na Eq.(1.41),

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{\infty}^{\alpha;x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt &= {}^{L}\mathrm{I}_{-}^{\alpha} f(x) \\ &= {}_{x}W_{\infty}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Logo, obtemos a integral fracionária de Weyl (Eq.(1.29)).

4. Considere $\psi(x) = x$ e $a = 0$ na Eq.(1.40),

$$\mathrm{I}_{0}^{\alpha;x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = {}^{R}\mathrm{I}_{+}^{\alpha} f(x). \tag{2.21}$$

Assim, temos a integral fracionária de Riemann (Eq.(1.11)).

5. Escolhendo $\psi(x) = \ln x$ na Eq.(1.40), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;\ln x} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (\ln x - \ln t)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt = {}^{H}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Observe que, neste caso obtemos a integral fracionária de Hadamard (Eq.(1.13)).

6. Escolhendo $\psi(x) = x^{\sigma}$, $g(x) = x^{\sigma\eta} f(x)$ na Eq.(1.40), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^{\sigma}} g(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^{\sigma}} (x^{\sigma\eta} f(x)) \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \sigma t^{\sigma-1} (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta} f(t) dt. \end{aligned}$$

Multiplicando o termo $x^{-\sigma(\alpha+\eta)}$ a ambos lados da equação, obtemos

$$\begin{aligned} x^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^{\sigma}} g(x) =& \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\sigma\eta+\sigma-1} (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} f(t) dt \\ =& {}^{EK}\mathrm{I}_{a+,\sigma,\eta}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Observe que, desta forma obtemos a integral fracionária de Erdélyi-Kober (Eq.(1.15)).

7. Considere $\psi(x) = x^\sigma$, $g(x) = x^{\sigma\eta} f(x)$ e $a = 0$ na Eq.(1.40), logo

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x^\sigma} g(x) =& \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x^\sigma} (x^{\sigma\eta} f(x))\\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \sigma t^{\sigma-1} (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma\eta} f(t) dt.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo $x^{-\sigma(\alpha+\eta)}$, obtemos

$$\begin{aligned}x^{-\sigma(\alpha+\eta)} \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x^\sigma} g(x) =& \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\sigma\eta+\sigma-1} (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} f(t) dt\\ =& {}^E\mathrm{I}_{0+,\sigma,\eta}^{\alpha} f(x).\end{aligned}$$

Observe que, desta forma a integral fracionária ψ-Riemman-Liouville à esquerda (Eq.(1.40)) e a integral fracionária de Erdélyi (Eq.(1.17)) estão relacionadas.

8. Considere $\psi(x) = x$, $g(x) = x^\eta f(x)$ e $a = 0$ na Eq.(1.40), de modo que

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x} g(x) =& \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x} (x^\eta f(x))\\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\eta f(t) dt.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo $x^{-(\alpha+\eta)}$, temos

$$\begin{aligned}x^{-(\alpha+\eta)} \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;x} g(x) =& \frac{x^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^\eta (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\\ =& {}^K\mathrm{I}_{0+,\eta}^{\alpha} f(x).\end{aligned}$$

Observe que, desta forma obtemos a integral fracionária de Kober (Eq.(1.18)).

9. Considere $\psi(x) = x^\rho$ e $g(x) = x^{\rho\eta} f(x)$ na Eq.(1.40), assim temos

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^\rho} g(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^\rho} (x^{\rho\eta} f(x))\\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \rho t^{\rho-1} (x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} t^{\rho\eta} f(t) dt\\ =& \frac{\rho}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho\eta+\rho-1} (x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t) dt.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo $\dfrac{x^k}{\rho^\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x^k}{\rho^\beta} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} g(x) =& \frac{x^k \rho^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\eta (x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t) dt\\ =& {}^\rho\mathrm{I}_{a+,\eta,k}^{\alpha} f(x).\end{aligned}$$

Logo, obtemos a integral fracionária generalizada (Eq.(1.31)).

10. Considere $\psi(x) = x^\rho$ na Eq.(1.40),

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^\rho} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \rho t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t)dt \\ =& \frac{\rho}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo $\dfrac{1}{\rho^\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x^\rho} f(x) =& \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t)dt \\ =& {}^\rho\mathrm{I}_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Assim, obtemos a integral fracionária de Katugampola (Eq.(1.19)).

11. Considere $\psi(x) = x$ e $g(x) = \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega(x-t)^\alpha)$ na Eq.(1.40,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} g(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x}\left(\mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega(x-t)^\alpha) f(t)\right) \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega(x-t)^\alpha) f(t)dt. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo $\Gamma(\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} g(x) =& \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega(x-t)^\alpha) f(t)dt \\ =& {}^\rho\varepsilon_{a+,\alpha,\beta}^{\omega,\gamma} f(x). \end{aligned}$$

Observe que, desta forma, temos a integral de Prabhakar (Eq.(1.21)).

12. Considere $\psi(x) = x$ e $a = c$ na Eq.(1.40),

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{c+}^{\alpha;x} f(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ =& \mathrm{I}_{c}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Observe que, desta forma, temos a integral fracionária de Chen (Eq.(1.23)).

13. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$ e $b = \infty$ na Eq.(1.40) e na Eq.(1.41) e fazendo uso da Eq.(2.19) e a Eq.(2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} f(x) + \mathrm{I}_{b-}^{\alpha;x} f(x)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} =& \frac{{}^L\mathrm{I}_{+}^{\alpha} f(x) + {}^L\mathrm{I}_{-}^{\alpha} f(x)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ =& \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \left(\int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \int_x^\infty (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right) \\ =& \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^\infty |x-t|^{\alpha-1} f(t)dt \\ =& {}_{RZ}\mathrm{I}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Assim, obtemos a integral fracionária de Riesz (Eq.(1.25)).

14. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$, $b = \infty$ e $0 < \theta < 1$ na Eq.(1.40) e na Eq.(1.41) e fazendo uso da Eq.(2.19) e a Eq.(2.20), obtemos

$$\begin{aligned} u\mathrm{I}_{a+}^{\alpha;x} f(x) + v\mathrm{I}_{b-}^{\alpha;x} f(x) =& u^L\mathrm{I}_{+}^{\alpha} f(x) + v^L\mathrm{I}_{-}^{\alpha} f(x) \\ =& {}_F\mathrm{D}_{\theta}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

onde,

$$u = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha-\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}, \quad v = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha+\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}.$$

Assim, obtemos a integral fracionária de Feller (Eq.(1.27)).

Por outro lado, por meio da derivada fracionária ψ-Hilfer, Eq.(2.1), vamos apresentar uma ampla classe de derivadas fracionárias obtidas a partir de escolhas convenientes de ψ, os limites a, b e os parâmetros α, β.

1. Aplicando o limite $\beta \to 1$ a ambos lados da Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;\psi} f(x) = \lim_{\beta\to 1} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) \\ =& \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \\ =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x), \end{aligned} \tag{2.24}$$

que é exatamente a derivada fracionária ψ-Caputo à esquerda (Eq.(1.47)).

2. Aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi} f(x) = \lim_{\beta\to 0} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) =& \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) \\ =& \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);\psi} f(x) \\ =& \mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x), \end{aligned} \tag{2.25}$$

que é exatamente a derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville à esquerda (Eq.(1.45)).

3. Considere $\psi(x) = x$ e tomando $\lim\limits_{\beta\to 1}$ na Eq.(2.1), temos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;x} f(x) = \lim_{\beta\to 1} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x} f(x) =& \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x) \\ =& \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \\ =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(t)dt \\ =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, obtemos a derivada fracionária de Caputo à esquerda (Eq.(1.5)).

4. Considere $\psi(x) = x$ e tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,1;x} f(x) = \lim_{\beta\to 1} {}^{H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,\beta;x} f(x) = \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{b-}^{\beta(n-\alpha);x} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x) \\
= \mathrm{I}_{b-}^{(n-\alpha);x} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x) \\
= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x}^{b} (t-x)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} f(t)dt \\
= {}^{C}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha} f(x),
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

que é exatamente a derivada fracionária de Caputo à direita (Eq.(1.6)).

5. Considere $\psi(x) = x^{\rho}$ e tomando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.1), temos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;x^{\rho}} f(x) &= \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x^{\rho}} f(x) \\
&= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);x^{\rho}} \left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x^{\rho}} f(x) \\
&= \left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);x^{\rho}} f(x) \\
&= \left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \rho t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{\rho^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{n-\alpha-1} f(t)dt.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo ρ^{α},

$$
\begin{aligned}
\rho^{\alpha H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;x^{\rho}} f(x) &= \rho^{\alpha} \left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{\rho^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{\rho}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha} f(x) \\
&= {}^{\rho}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x).
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos a derivada fracionária de Katugampola (Eq.(1.20)).

6. Considere $\psi(x) = x$ e tomando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;x} f(x) = \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x} f(x) = \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x) \\
= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);x} f(x) \\
= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
= \mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x).
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Logo, obtemos a derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda (Eq.(1.3)).

7. Considere $\psi(x) = \ln x$ e tomando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;\ln x} f(x) &= \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\ln x} f(x) \\
&= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\ln x} \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\ln x} f(x) \\
&= \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);\ln x} f(x) \\
&= \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (\ln x - \ln t)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \\
&= \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \\
&= {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos a derivada fracionária de Hadamard (Eq.(1.14)).

8. Considere $\psi(x) = \ln x$ e tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;\ln x} f(x) &= \lim_{\beta\to 1} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\ln x} f(x) \\
&= \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\ln x} \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\ln x} f(x) \\
&= \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);\ln x} \left(x\frac{d}{dx} \right)^n f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (\ln x - \ln t)^{n-\alpha-1} \left(t\frac{d}{dt} \right)^n \frac{f(t)}{t} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} \left(t\frac{d}{dx} \right)^n f(t) \frac{dt}{t} \\
&= {}^{CH}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

que é exatamente a derivada fracionária de Caputo-Hadamard (Eq.(1.32)).

9. Considere $\psi(x) = x^\rho$ e tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.1), temos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;x^\rho} f(x) &= \lim_{\beta\to 1} {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x^\rho} f(x) \\
&= \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);x^\rho} \left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}} \frac{d}{dx} \right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x^\rho} f(x) \\
&= \mathrm{I}_{a+}^{(n-\alpha);x^\rho} \left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \rho t^{\rho-1} (x^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{\rho t^{\rho-1}} \frac{d}{dt} \right)^n f(t) dt \\
&= \frac{\rho^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1} (x^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{t^{\rho-1}} \frac{d}{dt} \right)^n f(t) dt.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da equação pelo termo ρ^α,

$$\begin{aligned}\rho^{\alpha H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;x^\rho}f(x) =&\rho^\alpha \frac{\rho^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{n-\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt\\ =&\frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{n-\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n f(t)dt\\ =&{}^{CK}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}f(x).\end{aligned}$$

Assim, a derivada fracionária ψ-Hilfer à esquerda (Eq.(2.1)) e a derivada fracionária Caputo-Katugampola (Eq.(1.33)) estão relacionadas.

10. Considere $\psi(x)=\ln x$ na Eq.(2.3), usando o resultado da Eq.(1.14) e $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$, temos

$$\begin{aligned}{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\ln x}f(x) =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\ln x}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;\ln x}f(x)\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\ln x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(n-\gamma);\ln x}f(x)\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\ln x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^x(\ln x-\ln t)^{n-\gamma-1}\frac{f(t)}{t}dt\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\ln x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\gamma-1}f(t)\frac{dt}{t}\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\ln x\,H}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma}f(x)\\ =&{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta}f(x).\end{aligned}$$

Assim, obtemos a derivada fracionária Hilfer-Hadamard (Eq.(1.34)).

11. Considere $\psi(x)=x^\rho$ na Eq.(2.3), aplicando os resultados da Eq.(1.20) e a Eq.(2.22), e $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$, temos

$$\begin{aligned}{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;x^\rho}f(x) =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma;x^\rho}f(x)\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho}\left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{a+}^{(n-\gamma);x^\rho}f(x)\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho}\left(\frac{1}{\rho x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^x \rho t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{n-\gamma-1}f(t)dt\\ =&\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho}\left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\rho^{1-n}}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{n-\gamma-1}f(t)dt\\ =&\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho}\left(\frac{1}{x^{\rho-1}}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{n-\gamma-1}f(t)dt\\ =&\frac{1}{\rho^\alpha}\mathrm{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;x^\rho\,\rho}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}f(x)\\ =&{}^\rho\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}f(x)^\rho\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}f(x)\\ =&{}^\rho\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta}f(x).\end{aligned}$$

Logo, obtemos a derivada fracionária Hilfer-Katugampola (Eq.(1.35)).

12. Considere $\psi(x) = x$, $a = 0$, a Eq.(2.21) e aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,0;x} f(x) = \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;x} f(x) &= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{0+}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{0+}^{(n-\alpha);x} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}^{R}\mathrm{I}_{+}^{\alpha} f(x) \\ &= {}_{R}\mathrm{D}_{+}^{\alpha} f(x) \end{aligned}$$

que é exatamente a derivada fracionária de Riemann (Eq.(1.12)).

13. Considere $\psi(x) = x$, $a = c$, a Eq.(2.23) e aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), temos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathrm{D}_{c+}^{\alpha,0;x} f(x) = \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{c+}^{\alpha,\beta;x} f(x) &= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{c+}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{c+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{c+}^{(n-\alpha);x} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{c}^{n-\alpha} f(x) \\ &= \mathrm{D}_{c}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Logo, obtemos a derivada fracionária de Chen (Eq.(1.24)).

14. Considere $\psi(x) = x$, $a = 0$, $g(x) = f(x) - f(0)$, e aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,0;x} g(x) = {}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,0;x} (f(x) - f(0)) &= \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha,\beta;x} (f(x) - f(0)) \\ &= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{0+}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} (f(x) - f(0)) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}_{0+}^{(n-\alpha);x} (f(x) - f(0)) \\ &= \mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x), \end{aligned}$$

que é exatamente a derivada fracionária de Jumarie (Eq.(1.36)).

15. Considere $\psi(x) = x$, $g(x) = \mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(x)$, e aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), temos

$$\begin{aligned}
{}^H\mathrm{D}^{\alpha,0;x}_{a+}g(x) =& {}^H\mathrm{D}^{\alpha,0;x}_{a+}(\mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(x))\\
=& \lim_{\beta\to 0} {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;x}_{a+}\left(\mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(x)\right)\\
=& \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}^{\beta(n-\alpha);x}_{a+}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);x}_{a+}(\mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(x))\\
=& \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}^{(n-\alpha);x}_{a+}(\mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(x))\\
=& \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\mathbb{E}^{-\gamma}_{\rho,n-\alpha}[\omega(x-t)^\rho]f(t)dt\\
=& \mathrm{D}^{\omega,\rho}_{a+,\gamma,\alpha}f(x).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos a derivada fracionária de Prabhakar (Eq.(1.22)).

16. Aplicando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^H\mathrm{D}^{\alpha,1;\psi}_{a+}f(x) =& \lim_{\beta\to 1} {}^H\mathrm{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}f(x)\\
=& \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}^{\beta(n-\alpha);\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{I}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}_{a+}f(x)\\
=& \mathrm{I}^{(n-\alpha);\psi}_{a+}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\\
=& {}^C\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}f(x).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Assim, obtemos a derivada fracionária ψ-Caputo à esquerda (Eq.(1.47)).

Por outro lado, considerando $\psi(x) = x^\sigma$ e $g(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)}f(x)$ na Eq.(2.30), assim

$$\begin{aligned}
{}^H\mathrm{D}^{\alpha,1;\psi}_{a+}g(x) =& {}^H\mathrm{D}^{\alpha,1;\psi}_{a+}(x^{\sigma(\eta+\alpha)}f(x))\\
=& {}^C\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}(x^{\sigma(\eta+\alpha)}f(x)).
\end{aligned}$$

Multiplicando por $x^{-\sigma\eta}$ a expresão anterior, temos

$$\begin{aligned}
x^{-\sigma\eta\,H}\mathrm{D}^{\alpha,1;\psi}_{a+}g(x) =& x^{-\sigma\eta\,C}\mathrm{D}^{\alpha;\psi}_{a+}(x^{\sigma(\eta+\alpha)}f(x))\\
=& {}^{EK}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta}f(x).
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a derivada fracionária de Erdélyi-Kober (Eq.(1.16)).

17. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$ e aplicando o limite $\beta \to 0$ a ambos lados da Eq.(2.1), temos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,0;x} f(x) = \lim_{\beta\to 0} {}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,\beta;x} f(x) &= \lim_{\beta\to 0} \mathrm{I}_{-\infty}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{-\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x)\\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{-\infty}^{(n-\alpha);x} f(x)\\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\\ &= {}_{L}\mathrm{D}_{+}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Desta forma, obtemos a derivada fracionária de Liouville à direita (Eq.(1.10)).

18. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$ e aplicando o limite $\beta \to 1$ a ambos lados da Eq.(2.2), obtemos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,1;x} f(x) = \lim_{\beta\to 1} {}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,\beta;x} f(x) &= \lim_{\beta\to 1} \mathrm{I}_{-\infty}^{\beta(n-\alpha);x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{-\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha);x} f(x)\\ &= \mathrm{I}_{-\infty}^{n-\alpha;x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} f(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t)dt\\ &= {}_{RL}\mathrm{D}_{+}^{\alpha} f(x), \end{aligned}$$

que é exatamente a derivada fracionária de Liouville-Caputo (Eq.(1.37)).

19. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$, $b = \infty$, aplicando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.1) e na Eq.(2.2), além, fazendo uso da Eq.(2.31), temos

$$\frac{-\left({}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,0;x} f(x) + {}^{H}\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha,0;x} f(x)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = \frac{-\left({}_{L}\mathrm{D}_{+}^{\alpha} f(x) + {}_{L}\mathrm{D}_{-}^{\alpha} f(x)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} = {}_{RZ}\mathrm{D}^{\alpha} f(x).$$

Assim, obtemos a derivada fracionária de Riesz (Eq.(1.26)).

20. Considere $\psi(x) = x$, $a = -\infty$, $b = \infty$, $0 < \theta < 1$ aplicando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.1) e na Eq.(2.2), ainda mais fazendo uso da Eq.(2.31), obtemos

$$\begin{aligned} -\left(u\,{}^{H}\mathrm{D}_{-\infty}^{\alpha,0;x} f(x) + v\,{}^{H}\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha,0;x} f(x)\right) &= -\left(u\,{}_{L}\mathrm{D}_{+}^{\alpha} f(x) + v\,{}_{L}\mathrm{D}_{-}^{\alpha} f(x)\right)\\ &= -\left(u\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{L}\mathrm{I}_{+}^{n-\alpha} f(x) + v\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{L}\mathrm{I}_{-}^{n-\alpha} f(x)\right)\\ &= {}_{F}\mathrm{D}_{\theta}^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Note que, u e v estão dadas por:

$$u = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha-\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}, \quad v = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\alpha+\theta)\pi}{\alpha}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\theta)}.$$

Assim, temos a derivada fracionária de Feller (Eq.(1.28)).

21. Considere $\psi(x) = x$, $b = \infty$ e aplicando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.2), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha,0;x} f(x) &= \lim_{N\to\infty} \{{}^{H}\mathrm{D}_{N}^{\alpha,0;x} f(x)\} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\{ \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \mathrm{I}_{N}^{(n-\alpha);x} f(x) \right\} \\
&= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left\{ \int_{x}^{N} (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt \right\} \\
&= \mathrm{D}_{-}^{\alpha} f(x),
\end{aligned}
$$

que é exatamente a derivada fracionária de Cassar (Eq.(1.38)).

22. Considere $\psi(x) = x$, aplicando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.1) e na Eq.(2.2), e fazendo uso dos resultados da Eq.(2.26) e a Eq.(2.27), obtemos

$$
\frac{{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;x} f(x) + (-1)^{n\,H}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha,1;x} f(x)}{2} = \frac{{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x) + (-1)^{n\,C}\mathrm{D}_{b-}^{\alpha} f(x)}{2} = {}_{RC}\mathrm{D}^{\alpha} f(x).
$$

Desta forma, temos a derivada fracionária de Caputo-Riesz (Eq.(1.39)).

2.3 Regra tipo Leibniz

Como mencionamos, ao longo do texto, existem muitas definições para as derivadas fracionárias e o objetivo agora é conseguir uma definição que seja a mais geral possível para que as definições já existentes, sejam casos particulares. Neste trabalho, temos como tema central, a derivada fracionária ψ-Hilfer, introduzida por Sousa e Oliveira em 2018. Uma das questões mais importantes quando se estuda uma derivada fracionária é: qual critério uma derivada deve satisfazer para se considerar fracionária? A fim de responder esta questão, Ross [50], em 1975, estabeleceu um critério com cinco condições que deve satisfazer uma derivada para ser considerada fracionária, estas são: a derivada fracionária de uma função analítica deve ser analítica; a derivação fracionária, quando a ordem for um inteiro positivo n deve fornecer a derivada ordinária de ordem n e, quando a ordem for um inteiro negativo $-n$, $n > 0$ deve fornecer o mesmo resultado da integral ordinária n-ésima; a derivada fracionária de ordem 0 de uma função deve fornecer a própria função; a derivada fracionária deve ser um operador linear; e, deve ser satisfeita a propriedade de semigrupo. Em 2015, Ortigueira e Machado [20, 41], justificam por que a primeira das condições do critério estabelecido por Ross, não deve ser considerada e propõem uma nova condição e assim um novo critério é formulado, isto é, essa nova condição é conhecida como “regra de Leibniz”. No entanto, torna-se mais restritivo na hora de propor uma nova derivada fracionária ou até mesmo investigar se as derivadas fracionárias até então introduzidas, são de fato, consideradas fracionárias.

Como era de se esperar, o novo critério introduzido por Ortigueira e Machado, destacou que algumas derivadas fracionárias que até então eram consideradas fracionárias não satisfaziam a regra de Leibniz para o produto de duas funções [71], de modo especial, a derivada fracionária de Caputo, um das mais importantes. Osler escreveu sobre uma possível regra de Leibniz [42, 43]. Tarasov também investigou e apresentou trabalhos interessantes [67, 68, 69] e, recentemente Sayevandet et al. apresentaram uma revisão sobre a regra de Leibniz para derivadas fracionárias [54].

Nesse sentido, a fim de sanar esse problema, em 2019, Sousa e Oliveira, realizaram um estudo sobre a regra tipo Leibniz para a derivada fracionária ψ-Hilfer e conseguiram estabelecer uma forma fechada para a derivada fracionária ψ-Hilfer de um produto de duas funções envolvendo a derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville e uma outra envolvendo a derivada fracionária ψ-Hilfer [63], denominadas “regra tipo Leibniz I” e “regra tipo Leibniz II”. Apresentaremos e investigaremos detalhadamente as duas versões mencionadas fazendo uso da generalização da regra de Leibniz para a derivada fracionária ψ-Caputo em termos dela mesma e, em termos da derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville [9, 67, 68, 71].

Teorema 2.14 (Regra tipo Leibniz I)**.** [63] *Sejam* $0<\alpha<1$, $I=[a,b]$, $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ *um intervalo,* $\psi\in C(I,\mathbb{R})$ *uma função crescente tal que* $\psi(x)\neq 0$ *para todo* $x\in I$ *e* $f,g\in C(I,\mathbb{R})$. *Então, temos*

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x)\\ &-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)f^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))},\end{aligned}$$

onde $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$.

Demonstração. Aplicando a Eq. (2.5), o Lema 1.4 e fazendo $n=1$, temos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{n+\beta(\alpha-n);\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(fg)(x)\right]\\ =& {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}(fg)(x)\right]\\ =& {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[I_{a+}^{\varepsilon;\psi}(fg)(x)\right]\\ =& {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right]\\ =& \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right].\end{aligned} \tag{2.32}$$

Observe que, a regra tipo Leibniz para a derivada ψ-Caputo em termos da derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville, é dada por [70]

$${}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-k;\psi}g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}(f(x)g(x))(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{k-\alpha}.$$

Assim, da Eq.(2.32), temos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1+\beta(\alpha-1)}{l}(f^{(k)})^{(l)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1)-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right.\\
&\quad\left. -\frac{f^{(k)}(a)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)}{\Gamma(-(1+\beta(\alpha-1))+1)}(\psi(x)-\psi(a))^{-(1+\beta(\alpha-1))}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(k+l)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\frac{f^{(k)}(a)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)}{\Gamma(-\beta(\alpha-1))}(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(k+l)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\frac{f^{(k)}(a)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Introduzindo a seguinte mudança, $m = k + l$, obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l;\psi}g(x)\\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\frac{f^{(k)}(a)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l;\psi}g(x)\\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\frac{f^{(k)}(a)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{a+}^{\gamma-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l}h(x) &= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-\gamma+l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x)\\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-\gamma+l+\mu-l;\psi}h(x)\\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-\gamma+\mu;\psi}h(x)\\
&= \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\mathrm{I}_{a+}^{n-(\gamma-\mu);\psi}h(x)\\
&= \mathrm{D}_{a+}^{\gamma-\mu;\psi}h(x).
\end{aligned}
$$

Assim, se $\gamma = \alpha + \varepsilon$ e $\mu = \varepsilon + m$, temos

$$
\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l}h(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-(\varepsilon+m);\psi}h(x) = \mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}h(x). \tag{2.34}
$$

Substituindo a Eq.(2.34) na Eq.(2.33), obtemos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x) \\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)f^{(k)}(a)\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}, \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Teorema 2.15. *(Regra tipo Leibniz II)*[63] *Sejam* $0<\alpha<1$, $I=[a,b]$, $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ *um intervalo,* $\psi\in C(I,\mathbb{R})$ *uma função crescente tal que* $\psi(x)\neq 0$ *para todo* $x\in I$ *e* $f,g\in C(I,\mathbb{R})$. *Então, temos*

$$ {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(x)\,{}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}g(x)+\Omega_{f,g}(\alpha,\beta,a), \tag{2.35}$$

com

$$\Omega_{f,g}(\alpha,\beta,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))},$$

onde $\varepsilon=(1-\beta)(1-\alpha)$.

Demonstração. Aplicando a Eq. (2.5), o Lema 1.4 e fazendo $n=1$, temos

$$\begin{aligned} {}^H\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{n+\beta(\alpha-n);\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}(fg)(x)\right] \\ =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}(fg)(x)\right] \\ =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[I_{a+}^{\varepsilon;\psi}(fg)(x)\right] \\ =& {}^C\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right] \\ =& \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\,{}^C\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1);\psi}\left[f^{(k)}(x)\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right]. \end{aligned}\tag{2.36}$$

Observe que a regra tipo Leibniz para a derivada ψ-Caputo em termos da derivada fracionária ψ-Caputo, é dada por [70]

$${}^C\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(x)\,{}^C\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-k;\psi}g(x)+g(a)(f(x)-f(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Assim da Eq.(2.36), temos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1+\beta(\alpha-1)}{l}(f^{(k)})^{(l)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{1+\beta(\alpha-1)-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\right.\\
&\left.+\,\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(1+\beta(\alpha-1))}}{\Gamma(1-(1+\beta(\alpha-1)))}\right)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(k+l)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(k+l)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}.
\end{aligned}$$

Tomando $m=k+l$, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l;\psi}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l;\psi}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}.
\end{aligned}\tag{2.37}$$

Note que, para $0<\gamma<1$, $0<\mu<1$ e $l\in\mathbb{N}$, temos a identidade

$${}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x)=\mathrm{I}_{a+}^{1-\gamma;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu;\psi}.\tag{2.38}$$

Com efeito, observe que $\gamma-l<1-l$, logo temos

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\gamma-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x) =&I_{a+}^{1-l-(\gamma-l);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{1-l}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x)\\
=&I_{a+}^{1-\gamma;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{1}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{-l}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x)\\
=&I_{a+}^{1-\gamma;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu-l;\psi}h(x)\\
=&I_{a+}^{1-\gamma;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{l+\mu-l;\psi}h(x)\\
=&I_{a+}^{1-\gamma;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\mu;\psi}h(x).
\end{aligned}$$

Se $\gamma = \alpha + \varepsilon$ e $\mu = \varepsilon + m$, da Eq.(2.38), temos

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha+\varepsilon-l;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m-l;\psi}h(x) =& \mathrm{I}_{a+}^{1-(\alpha+\varepsilon);\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m;\psi}h(x) \\
=& \mathrm{I}_{a+}^{1-\alpha-\varepsilon;\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+m;\psi}h(x) \\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\beta(1-\alpha);\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}\mathrm{I}_{a+}^{m;\psi}h(x) \\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\beta(1-m-\alpha+m);\psi}\mathrm{D}_{a+}^{1;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{m;\psi}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(1-m-\alpha+m);\psi}h(x) \\
=& \mathrm{I}_{a+}^{\beta(1-m-(\alpha+m));\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{1-m}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(1-m-(\alpha-m));\psi}h(x) \\
=& {}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}h(x).
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Substituindo a Eq.(2.39) na Eq.(2.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) =& \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{m-l}\binom{\alpha+\varepsilon}{l}f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}g(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\
=& \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}g(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\varepsilon}{k}\mathrm{I}_{a+}^{\varepsilon+k;\psi}g(a)(f^{(k)}(x)-f^{(k)}(a))\frac{(\psi(x)-\psi(a))^{-(\alpha+\varepsilon)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))} \\
=& \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,\beta;\psi}g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,\beta,a).
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} = \binom{\alpha+\beta}{m}, \tag{2.40}
$$

isto é, pela identidade (1.42), temos

$$
\binom{\alpha}{m-n} = \frac{(-1)^{m-n-1}\alpha\Gamma(m-n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(m-n+1)} = \frac{(-1)^{m-n}\Gamma(m-n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)(m-n)!}. \tag{2.41}
$$

e

$$
\binom{\beta}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\beta\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^{n}\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)n!}. \tag{2.42}
$$

Substituindo as Eq.(2.41), Eq.(2.42) na Eq.(2.40), obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}\Gamma(m-n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)(m-n)!}\frac{(-1)^{n}\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)n!} \\
=& \frac{(-1)^{m}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-n-\alpha)\Gamma(n-\beta)}{(m-n)!n!}.
\end{aligned}
$$

Note que pela propriedade A.2.1, segue que

$$B(n-\beta, m-n-\alpha) = \frac{\Gamma(n-\beta)\Gamma(m-n-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha-\beta)}.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-\alpha-\beta)B(n-\beta,m-n-\alpha)}{(m-n)!n!}\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n-\beta,m-n-\alpha)}{(m-n)!n!}.\end{aligned}$$

Assim, a partir da Definição A.2, concluímos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(m-n)!n!}\int_0^1 t^{n-\beta-1}(1-t)^{m-n-\alpha-1}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{n-\beta-1}(1-t)^{m-n-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(m-n)!n!}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{m-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(1-t)^{-n}}{(m-n)!n!}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{m-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!t^n(1-t)^{-n}}{m!(m-n)!n!}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{m-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\left(\frac{t}{1-t}\right)^n dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{m-\alpha-1}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^m dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{m-\alpha-1}\frac{1}{(1-t)^m}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 t^{-\beta-1}(1-t)^{-\alpha-1}dt\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha-\beta)}\\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha-\beta)}\\ &= \frac{(-1)^m(-\alpha-\beta)\Gamma(m-\alpha-\beta)}{(-\alpha-\beta)m!\Gamma(-\alpha-\beta)}\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(1-\alpha-\beta)}\\ &= \binom{\alpha+\beta}{m}.\end{aligned}$$

Observe que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\left(\frac{t}{1-t}\right)^n$ é uma série binomial [66]. Finalizando assim a demonstração. □

Uma das condições para que um operador diferencial seja considerado fracionário, como indicado em [20, 41], é satisfazer a regra de Leibniz. No entanto, alguns operadores não a satisfazem. Muitas derivadas fracionárias, em particular a derivada fracionária de Caputo [23, 58], uma das mais utilizadas e essencial no estudo de efeitos de memória e equações diferenciais com condições iniciais, não satisfaz tal regra. Por tal razão, dado que são poucos os operadores que a satisfazem, foi introduzido a regra tipo Leibniz para o operador fracionário ψ-Hilfer Teorema 2.15. A partir desta é possível obter como casos particulares, uma ampla classe de regras de Leibniz e regras tipo Leibniz de algumas derivadas fracionárias.

Vamos então, apresentar alguns casos particulares oriundos da regra tipo Leibniz da derivada fracionária ψ-Hilfer, obtidos a partir de escolhas pertinentes da função $\psi(x)$ e dos limites $\beta \to 0$ e $\beta \to 1$. Outros casos podem ser obtidos escolhendo diferentes combinações. Para os casos particulares apresentados, sugerimos [9, 67, 68].

1. Aplicando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.35) e, utilizando a Eq.(2.25), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,0;\psi}g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,0,a)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,0,a)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x)\\
&=\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x),
\end{aligned}$$

   a qual é a regra de Leibniz para a derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville. Observe que $\Omega_{f,g}(\alpha,0,a)=0$, pois, $\dfrac{1}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}=0$, quando $\beta\to 0$.

2. Considere $\psi(x)=x$, tomando o limite $\beta \to 0$ na Eq.(2.35) e usando a Eq.(2.28), obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,0;x}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,0;\psi}g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,0,a)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m}g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,0,a)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m}g(x)\\
&=\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}(fg)(x),
\end{aligned}$$

   a qual é a regra de Leibniz para a derivada fracionária Riemann-Liouville. Observe que $\Omega_{f,g}(\alpha,0,a)=0$, pois, $\dfrac{1}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}=0$, quando $\beta\to 0$.

3. Aplicando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.35) e usando a Eq.(2.24), obtemos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;\psi}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,1;x} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &={}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x),\end{aligned}$$

a qual é a regra tipo Leibniz para a derivada fracionária ψ-Caputo. Observe que $\Omega_{f,g}(\alpha,1,a) = g(a)(f(x)-f(a))\dfrac{(\psi(x)-\psi(a))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, pois, lembrando que $\varepsilon = (1-\alpha)(1-\beta)$,

- $\binom{-\varepsilon}{k} = 1$, quando $k = 0$ e $\beta \to 0$.
- $\binom{-\varepsilon}{k} = 0$, quando $k = 1,2,3,\ldots$ e $\beta \to 0$.

4. Considere $\psi(x) = x$, tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.35) e fazendo uso da Eq.(2.26), obtemos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;x}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,1;x} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &={}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}(fg)(x),\end{aligned}$$

a qual é a regra tipo Leibniz para a derivada fracionária de Caputo. Observe que $\Omega_{f,g}(\alpha,1,a) = g(a)(f(x)-f(a))\dfrac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, pois, usando o fato $\varepsilon = (1-\alpha)(1-\beta)$,

- $\binom{-\varepsilon}{k} = 1$, quando $k = 0$ e $\beta \to 0$.
- $\binom{-\varepsilon}{k} = 0$, quando $k = 1,2,3,\ldots$ e $\beta \to 0$.

5. Considere $\psi(x) = \ln(x)$, tomando o limite $\beta \to 1$ na Eq.(2.35) e fazendo uso da Eq.(2.29), obtemos

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,1;\ln(x)}(fg)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m,1;\ln(x)} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)\,{}^{CH}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha-m} g(x) + \Omega_{f,g}(\alpha,1,a)\\ &={}^{CH}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha}(fg)(x),\end{aligned}$$

a qual é a regra tipo Leibniz para a derivada fracionária Hadamard. Observe que $\Omega_{f,g}(\alpha, 1, a) = g(a)(f(x) - f(a))\dfrac{(\ln(x) - \ln(a))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, pois usando o fato $\varepsilon = (1-\alpha)(1-\beta)$,

- $\dbinom{-\varepsilon}{k} = 1$, quando $k = 0$ e $\beta \to 0$.
- $\dbinom{-\varepsilon}{k} = 0$, quando $k = 1, 2, 3, \ldots$ e $\beta \to 0$.

Assim, concluímos essa seção, apresentando as regra tipo Leibniz I e regra tipo Leibniz II, bem como alguns casos particulares importantes.

3 Estabilidades de Ulam-Hyers de uma equação integrodiferencial não-linear fracionária de Volterra

Ao longo das décadas, inúmeros pesquisadores vem dedicando suas pesquisas na investigação de propriedades de existência, unicidade, controlabilidade, estabilidades de Ulam-Hyers de equações diferenciais e integrodiferenciais fracionárias, sejam elas, do tipo funcional, neutral, com impulsos instântaneos e não-instântaneos, por meio de teoremas de ponto fixo e desigualdade de Gronwall, dentre outras [29, 30, 55, 56, 57, 62, 64, 65]. Uma das consequências direta ao atacar problemas de equações diferenciais e integro-diferenciais no contexto fracionário, é a ampla classe de possibilidades que podem ser discutidas quanto aos casos particulares oriundos da versão investigada. Além disso, permite discutir e analisar quanto a liberdade da ordem da derivada fracionária que esta diretamente ligada ao problema investigado, isto é, a ordem $0 < \alpha < 1$. Nesse sentido, devido a estes fatos e outros que podem ser obtidos na literatura, neste capítulo, investigaremos as estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias da equação integro-diferencial não-linear fracionária de Volterra Eq.(3.1)

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^{H}D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}u(t) & = & f(t,u(t)) - \displaystyle\int_0^t k(t,s,u(s))ds \\ \mathrm{I}_{0+}^{1-\gamma}u(0) & = & \sigma, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde ${}^{H}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ é a derivada fracionária ψ-Hilfer, $t \in I = [0,\mathcal{T}]$, $f(t,u(t))$ é uma função contínua com respeito as variáveis t e u sobre $I \times \mathbb{R}$, $k(t,s,u(s))$ é uma função contínua respeito de t, s e u sobre $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e σ é uma constante dada.

Inicialmente apresentaremos as definições das estabilidades de Ulam-Hyers-Rassias e de Ulam-Hyers por meio da derivada ψ-Hilfer, bem como outras definições importantes para o desenvolvimento do capítulo.

A definição a seguir, é uma adaptação da definição dada por Şevgin em [8].

Definição 3.1. [60] *Se para cada função continuamente diferenciável $u(t)$, satisfazendo*

$$\left|{}^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}u(t) - f(t,u(t)) - \int_0^t k(t,s,u(s))ds\right| \leqslant \Phi(t),$$

onde $\Phi(t) \geqslant 0$ para todo t, existe uma solução $u_0(t)$ da equação integro-diferencial não linear de Volterra (Eq.(3.1)), e uma constante $C > 0$ com $|u(t) - u_0(t)| \leqslant C\Phi(t)$ para todo t, onde C é independente de $u(t)$ e $u_0(t)$, então dizemos que:

i. A Eq.(3.1) *tem estabilidade de Ulam-Hyers-Rassias.*

ii. Se $\Phi(t)$ é uma função constante então a Eq.(3.1) *tem estabilidade de Ulam-Hyers.*

A seguir, vamos apresentar alguns resultados de análise como: espaço métrico completo, contração e ponto fixo, visto que são de grande utilidade a fim de atingir o objetivo principal deste capítulo.

Definição 3.2. [32] *O par (X, d) é chamado um espaço métrico completo generalizado, se X é um conjunto não vazio e d uma função de $X \times X$ aos reais estendidos que satisfaz as seguintes condições:*

1. $d(x, y) \geqslant 0$, $\forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$, $\forall x, y \in X$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.
5. *Toda sequência d-Cauchy sobre X é d-convergente. Isto é, se (X_n) é uma sequência em X tal que* $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$, *então existe $x \in X$ com* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Note que, a Definição 3.2 difere do conceito usual de espaço métrico completo, pelo fato de que nem todos os pontos em X tem necessariamente uma distância finita. Se as condições *1, 2, 3* e *4* da Definição 3.2 são satisfeitas, dizemos que (X, d) é um espaço métrico.

Definição 3.3. [8] *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada contração sobre X se existe uma constante L, com $0 < L < 1$, de modo que, se $d(x, y) < \infty$ então $d(Tx, Ty) \leqslant Ld(x, y) < \infty$.*

Teorema 3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo generalizado. Admitamos que $T : X \to X$ é uma contração. Se existe um inteiro não-negativo k tal que $d(T^{k+1}x, T^k x) < \infty$ para algum $x \in X$, então segue que:*

1. *A sequência $(T^n x)$ converge para um ponto fixo x^* de T.*
2. *x^* é o único ponto fixo de T em $X^* = \{y \in X : d(T^n x, y) < \infty\}$.*
3. *Se $y \in X^*$, então* $d(y, x^*) \leqslant \dfrac{1}{1-L} d(Ty, y)$.

Demonstração. *1.* Seja N um particular (o menor) de todos os números $k = 0, 1, 2, \ldots$ tal que $d(T^{k+1}x, T^k x) < \infty$. Usando a Definição 3.3, temos

$$\begin{aligned} d(T^{N+2}x, T^{N+1}x) &= d(T(T^{N+1}x), T(T^N x)) \leqslant Ld(T^{N+1}x, T^N x) < \infty \\ d(T^{N+3}x, T^{N+2}x) &= d(T(T^{N+2}x), T(T^{N+1}x)) \leqslant L^2 d(T^{N+1}x, T^N x) < \infty \\ &\vdots \\ d(T^{N+k+1}x, T^{N+k}x) &= d(T(T^{N+k}x), T(T^{N+k-1}x)) \leqslant L^k(T^{N+1}x, T^N x) < \infty \end{aligned}$$

para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Em outras palavras, provamos que se n é um número inteiro tal que $n > N$, então

$$d(T^{n+1}x, T^n x)) \leqslant L^{n-N}(T^{N+1}x, T^N x) < \infty.$$

Agora da condição *4* da Definição 3.2, sempre que $n \geqslant N$ temos para qualquer $k = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} d(T^{n+k}x, T^n x) &\leqslant d(T^{n+k}x, T^{n+k-1}x) + d(T^{n+k-1}x, T^n x) \\ &\leqslant d(T^{n+k}x, T^{n+k-1}x) + d(T^{n+k-1}x, T^{n+k-2}x) + d(T^{n+k-2}x, T^n x) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} d(T^{n+i}x, T^{n+i-1}x) \leqslant \sum_{i=1}^{k} L^{n+i-1-N} d(T^{N+1}x, T^N x) \\ &= L^{n-N} \sum_{i=1}^{k} L^{i-1} d(T^{N+1}x, T^N x) = L^{n-N} \frac{1-L^k}{1-L} d(T^{N+1}x, T^N x) \\ &\leqslant \frac{L^{n-N}}{1-L} d(T^{N+1}x, T^N x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observe que quando $n \to \infty$, $d(T^{n+k}x, T^n x) \to 0$, assim a sequência $x, Tx, T^2x, \ldots, T^n x, \ldots$ é uma sequência d-Cauchy. Pela Definição 3.2 é d-convergente, isto é, existe um elemento $x^* \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(T^n x, x^*) = 0$.

Verifiquemos agora que x^* é um ponto fixo de T.

Sempre que $n \geqslant N$, temos

$$0 \leqslant d(x^*, Tx^*) \leqslant d(x^*, T^n x) + d(T^n x, Tx^*) \leqslant d(x^*, T^n x) + Ld(T^{n-1}x, x^*).$$

Tomando o limite com $n \to \infty$, temos que $d(x^*, Tx^*) = 0$ o que implica que $Tx^* = x^*$, de modo que x^* é um ponto fixo de T.

2. Suponha que existem dois pontos fixos x^* e y logo $Tx^* = x^*$ e $Ty = y$, de modo que,

$$d(x^*, y) = d(Tx^*, Ty) \leqslant Ld(x^*, y).$$

Assim, $d(x^*, y) = 0$ então $x^* = y$. Portanto, x^* é o único ponto fixo de T.

3. Da Eq.(3.2), temos

$$d(T^n y, T^{n+k} y) \leqslant \frac{L^{n-N}}{1-L} d(T^N y, T^{N+1} y).$$

Se $y \in X^*$ e fazendo $n = 0$ na desigualdade anterior, obtemos

$$d(y, T^k y) \leqslant \frac{1}{1-L} d(y, Ty).$$

Note que

$$d(y, x^*) \leqslant d(y, T^k y) + d(T^k y, x^*) \leqslant \frac{1}{1-L} d(y, Ty).$$

□

No seguinte teorema, se estuda a estabilidade de Ulam-Hyers-Rassias para a equação diferencial fracionária não-linear de Volterra (Eq.(3.1)).

Teorema 3.2. *Seja $I = [0, \mathcal{T}]$ um intervalo fechado e limitado dado, com $\mathcal{T} > 0$ e M, L_f e L_k constantes positivas com $0 < ML_f + M^2 L_k < 1$. Suponha que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua a qual satisfaz a condição Lipschitz*

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leqslant L_f |u_1 - u_2|, \quad \forall t \in I, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

$k : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua a qual satisfaz a condição de Lipschitz

$$|k(t, s, u_1) - k(t, s, u_2)| \leqslant L_k |u_1 - u_2|, \quad \forall t, s \in I, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

e $\psi \in C[0, \mathcal{T}]$ uma função crescente tal que $\psi'(t) \neq 0$ sobre I. Se uma função continuamente diferenciável $u : I \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\left| {}^H D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) - f(t, u(t)) - \int_0^t k(t, s, u(s)) ds \right| \leqslant \phi(t), \quad \forall t \in I, \tag{3.3}$$

onde $\phi : I \to (0, \infty)$ é uma função contínua com $\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} \phi(t) \leqslant M\phi(t)$ para cada $t \in I$, então existe uma única função $u_0 : I \to \mathbb{R}$, tal que

$$u_0(t) = \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} \left[\int_0^\xi k(t, s, u_0(s)) ds \right]$$

com $\mathrm{I}_{0+}^{1-\gamma;\psi} u(0) = \sigma$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ e

$$|u(t) - u_0(t)| \leqslant \frac{M}{1 - (ML_f + M^2 L_k)} \phi(t), \quad \forall t \in I.$$

Demonstração. Seja X o conjunto de todas as funções contínuas de valor real sobre I. Para $v, w \in X$, se define o conjunto

$$d(v, w) = \inf_{C \in [0,\infty]} \{ |v(t) - w(t)| \leqslant C\phi(t), \quad \forall t \in I \}. \tag{3.4}$$

Note que (X, d) é um espaço métrico completo generalizado.
Considere o operador $T : X \to X$ definido por:

$$T(v(t)) = \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, v(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t,s,v(s))ds\right], \quad \forall t \in I, \quad \forall v \in X. \tag{3.5}$$

Verifiquemos que T é uma contração sobre X.
Consideremos $C_{vw} \in [0, \infty]$ uma constante com $d(v, w) \leqslant C_{vw}$ para qualquer v, w em X.
Assim, pela Eq.(3.4) temos,

$$|v(t) - w(t)| \leqslant C_{vw}\phi(t), \quad \forall t \in I.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&|T(v(t)) - T(w(t))| = \left| \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, v(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t,s,v(s))ds\right]\right.\\
&\left. - \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, w(t)) - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t,s,w(s))ds\right]\right|\\
&= \left|\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t,v(t)) - f(t,w(t))\right] + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi}\left[k(t,s,v(s)) - k(t,s,w(s))\right]ds\right]\right|\\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left|f(\xi,v(\xi)) - f(\xi,w(\xi))\right| d\xi\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left[\int_0^{\xi}\left|k(t,s,v(s)) - k(t,s,w(s))\right| ds\right] d\xi\\
&\leqslant \frac{L_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left|v(\xi) - w(\xi)\right| d\xi\\
&+ \frac{L_k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left[\int_0^{\xi}\left|v(s) - w(s)\right| ds\right] d\xi\\
&\leqslant L_f C_{vw}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t) + L_k C_{vw}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t \phi(s)ds\right]\\
&\leqslant ML_f C_{vw}\phi(t) + ML_k C_{vw}\left[\int_0^t \phi(s)ds\right]\\
&= ML_f C_{vw}\phi(t) + ML_k C_{vw}\mathrm{I}_{0+}^{1;x}\left[\phi(t)\right]\\
&\leqslant ML_f C_{vw}\phi(t) + M^2 L_k C_{vw}\phi(t) = C_{vw}\phi(t)\left(ML_f + M^2 L_k\right),
\end{aligned}$$

isto é, $d(Tv, Tw) \leqslant C_{vw}\phi(t)\left(ML_f + M^2L_k\right)$.
Logo, podemos concluir que $d(Tv, Tw) \leqslant \left(ML_f + M^2L_k\right) d(v, w)$ para todo $v, w \in X$, onde $0 < ML_f + M^2L_k < 1$.

Da Eq.(3.5) para $w_0 \in X$ arbitrário, existe uma constante $0 < C < \infty$, com

$$\begin{aligned}
|T(w_0(t)) - w_0(t)| =& \left|\frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, w_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t,s,w_0(s))ds\right] - w_0(t)\right|\\
\leqslant& C\phi(t),
\end{aligned}$$

dado que $f(t, w_0(t))$, $k(t, s, w_0(s))$ e $w_0(t)$ são limitadas nos seus domínios e $\min_{t\in I} \phi(t) > 0$.
Assim da Eq.(3.4) temos que $d(Tw_0, w_0) < \infty$.
Pelo Teorema 3.1 (parte *1.*) existe $u_0 : I \to \mathbb{R}$ tal que $T^n w_0 \to u_0$ em (X, d) e $Tu_0 = u_0$, isto é

$$u_0 = \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t, s, u_0(s))ds\right]$$

Dado que w e u_0 são limitadas sobre I para qualquer $w \in X$ e $\min_{t\in I} \phi(t) > 0$, existe uma constante C_w tal que

$$|w_0(t) - w(t)| \leqslant C_w\phi(t), \quad \forall w \in X.$$

Além disso, temos que $\{w \in X : d(w_0, w) < \infty\}$ é igual a X, assim podemos concluir que u_0 é a única função contínua.
Aplicando o operador $\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}$ na Eq.(3.3), fazendo uso da Eq.(2.7) e rearranjando, temos

$$\begin{aligned}
&\left|{}^H D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) - f(t, u(t)) - \int_0^t k(t, s, u(s))ds\right| \leqslant \phi(t)\\
\Rightarrow &\left|\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[{}^H D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t)\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t, u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t, s, u(s))ds\right]\right| \leqslant \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\\
\Rightarrow &\left|u(t) - \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{I}_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi} u(0) - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t, u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t, s, u(s))ds\right]\right|\\
&\leqslant \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\\
\Rightarrow &\left|u(t) - \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{I}_{a+}^{1-\gamma;\psi} u(0) - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t, u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t, s, u(s))ds\right]\right|\\
&\leqslant \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t)\\
\Rightarrow &\left|u(t) - \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t, u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t, s, u(s))ds\right]\right| \leqslant \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
|u(t) - T(u(t))| = &\left|u(t) - \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t, u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t, s, u(s))ds\right]\right|\\
\leqslant &\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\phi(t) \leqslant M\phi(t), \quad \forall t \in I,
\end{aligned}$$

isto implica que, $d(u, Tu) \leqslant M\phi(t)$.
Pelo Teorema 3.1 (parte *3.*) e o resultado anterior, obtemos

$$d(u, u_0) \leqslant \frac{1}{1 - (ML_f + M^2L_k)} d(Tu, u) \leqslant \frac{M\phi(t)}{1 - (ML_f + M^2L_k)},$$

concluindo a prova. □

No teorema a seguir, se estuda a estabilidade de Ulam-Hyers para a equação diferencial fracionária não-linear de Volterra (Eq.(3.1)).

Teorema 3.3. *Seja $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $I = [0, \mathcal{T}]$ um intervalo fechado e limitado dado, tal que $\mathcal{T} > 0$ e $\psi \in C[0, \mathcal{T}]$ uma função crescente tal que $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Também sejam L_f e L_k constantes positivas com $0 < \dfrac{(\psi(\mathcal{T}) - \psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + \mathcal{T}L_k) < 1$. Suponha que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua a qual satisfaz a condição Lipschitz*

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leqslant L_f |u_1 - u_2|, \quad \forall t \in I, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

e $k : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|k(t, s, u_1) - k(t, s, u_2)| \leqslant L_k |u_1 - u_2|, \quad \forall t, s \in I, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Se para $\varepsilon \geqslant 0$ uma função continuamente diferenciável $u : I \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\left| {}^{H}D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi} u(t) - f(t, u(t)) - \int_0^t k(t, s, u(s))ds \right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in I, \tag{3.6}$$

então existe uma única função $u_0 : I \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u_0(t) = \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t, s, u_0(s))ds\right]$$

com $\mathrm{I}_{0+}^{1-\gamma;\psi}u(0) = \sigma$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ e

$$|u(t) - u_0(t)| \leqslant \frac{(\psi(\mathcal{T}) - \psi(0))^{\alpha}\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1) - (\psi(\mathcal{T}) - \psi(0))^{\alpha}(L_f + \mathcal{T}L_k)}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração. Seja X o conjunto de todas as funções contínuas de valor real sobre I. Para $v, w \in X$, se define o conjunto

$$d(v, w) = \inf_{C \in [0,\infty]} \{|v(t) - w(t)| \leqslant C, \quad \forall t \in I\}. \tag{3.7}$$

Note que (X, d) é um espaço métrico completo generalizado.
Considere o operador $T : X \to X$ definido por:

$$T(v(t)) = \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, v(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^{\xi} k(t, s, v(s))ds\right], \quad \forall t \in I, \quad \forall v \in X. \tag{3.8}$$

Verifiquemos que T é uma contração sobre X.
Consideremos $C_{vw} \in [0, \infty]$ uma constante com $d(v, w) \leqslant C_{vw}$ para qualquer v, w em X. Assim, pela Eq.(3.7) temos,

$$|v(t) - w(t)| \leqslant C_{vw}, \quad \forall t \in I. \tag{3.9}$$

Observemos que, ao fazer uso das condições de Lipschitz, da Eq.(3.8), o Lema 1.2 e a Eq.(3.9), temos

$$\begin{aligned}
|T(v(t)) - T(w(t))| =& \left| \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} \left[f(t,v(t)) - f(t,w(t))\right] + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^\xi \left[k(t,s,v(s)) - k(t,s,w(s))\right] ds\right]\right| \\
\leqslant& \frac{L_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left|v(\xi)-w(\xi)\right| d\xi \\
&+ \frac{L_k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\left[\int_0^\xi |v(s)-w(s)|\, ds\right] d\xi \\
\leqslant& L_f C_{vw} \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[(\psi(t)-\psi(0))^{1-1}\right] + \frac{L_k C_{vw}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\xi d\xi \\
\leqslant& L_f C_{vw}\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_k C_{vw}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(\xi)(\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha-1}\xi d\xi,
\end{aligned}$$

agora, aplicando integração por partes no segundo termo e usando a hipótese da função $\psi(t)$ ser crescente, obtemos

$$\begin{aligned}
|T(v(t)) - T(w(t))| \leqslant& L_f C_{vw}\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_k C_{vw}}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_0^t (\psi(t)-\psi(\xi))^{\alpha} d\xi \\
\leqslant& L_f C_{vw}\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_k C_{vw}}{\Gamma(\alpha)\alpha}(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}\int_0^t d\xi \\
\leqslant& L_f C_{vw}\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_k C_{vw}\mathcal{T}}{\Gamma(\alpha)\alpha}(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha} \\
\leqslant& L_f C_{vw}\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L_k C_{vw}\mathcal{T}}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha} \\
\leqslant& C_{vw}\left[\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)\right],
\end{aligned}$$

isto é, $d\left(Tv, Tw\right) \leqslant C_{vw}\left[\dfrac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)\right]$.

Logo, podemos concluir que $d\left(Tv, Tw\right) \leqslant \left[\dfrac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)\right] d\left(v,w\right)$ para todo $v, w \in X$, onde $0 < \left[\dfrac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)\right] < 1$.

Da Eq.(3.8) para $w_0 \in X$ arbitrário, existe uma constante $0 < C < \infty$, com

$$\begin{aligned}
|T(w_0(t)) - w_0(t)| =& \left|\frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, w_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^\xi k(t,s,w_0(s))ds\right] - w_0(t)\right| \\
\leqslant& C,
\end{aligned}$$

dado que $f(t, w_0(t))$, $k(t,s,w_0(s))$ e $w_0(t)$ são limitadas nos seus domínios.
Assim da Eq.(3.7) temos que $d(Tw_0, w_0) < \infty$.
Pelo Teorema 3.1 (parte *1.*) existe $u_0 : I \to \mathbb{R}$ tal que $T^n w_0 \to u_0$ em (X, d) e $Tu_0 = u_0$, isto é

$$u_0 = \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi} f(t, u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^\xi k(t,s,u_0(s))ds\right].$$

Dado que w e u_0 são limitadas sobre I para qualquer $w \in X$, existe uma constante C_w tal que

$$|w_0(t) - w(t)| \leqslant C_w, \quad \forall w \in X.$$

Igual que na prova do Teorema 3.2, temos que $\{w \in X : d(w_0, w) < \infty\}$ é igual a X, assim podemos concluir que u_0 é a única função contínua.
Aplicando o operador $\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}$ na Eq.(3.6), fazendo uso da Eq.(2.7) e rearranjando, temos

$$\left|\mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[{}^{H}D_{0+}^{\alpha,\beta;\psi}u(t)\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t,u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\left[\int_0^t k(t,s,u(s))ds\right]\right]\right| \leqslant \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}(\varepsilon)$$
$$\left|u(t) - \frac{(\psi(x)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t,u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\int_0^t k(t,s,u(s))ds\right]\right| \leqslant \varepsilon\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}|u(t) - T(u(t))| = &\left|u(t) - \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\sigma - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[f(t,u(t))\right] - \mathrm{I}_{0+}^{\alpha;\psi}\left[\left[\int_0^t k(t,s,u(s))ds\right]\right]\right| \\ \leqslant &\varepsilon\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall t \in I,\end{aligned}$$

isto implica que, $d(u, Tu) \leqslant \varepsilon\dfrac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.
Pelo Teorema 3.1 (parte *3.*) e o resultado anterior, obtemos

$$\begin{aligned}d(u,u_0) &\leqslant \frac{1}{1 - \left[\frac{(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)\right]}d(Tu,u) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon(\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1) - (\psi(\mathcal{T})-\psi(0))^{\alpha}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right)},\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Uma vez que estamos trabalhando com a derivada fracionária ψ-Hilfer e como vimos no Capítulo 2, contém de uma ampla classe de derivadas fracionárias como casos particulares, que preservam suas propriedades. Nesse sentido, a seguir apresentamos dois teoremas como casos particulares do Teorema 3.3, isto é, escolhendo $\alpha = 1$ e as funções $\psi(t) = t$ e $\psi(t) = (t+a)^{\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}^{+}$, $a > 0$.

O Teorema 3.4, é o caso clássico (inteiro), a partir da escolha de $\alpha = 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $\psi(t) = t$.

Teorema 3.4. *Seja $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $I = [0, \mathcal{T}]$ um intervalo fechado e limitado dado, tal que $\mathcal{T} > 0$ e também sejam L_f e L_k constantes positivas com $0 < \mathcal{T}\left(L_f + \mathcal{T}L_k\right) < 1$. Suponha que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua a qual satisfaz a condição Lipschitz*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leqslant L_f\,|u_1 - u_2|\,, \quad \forall t \in I, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

e $k : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|k(t,s,u_1) - k(t,s,u_2)| \leqslant L_k |u_1 - u_2|, \quad \forall t,s \in I, \quad \forall u_1,u_2 \in \mathbb{R}.$$

Se para $\varepsilon \geqslant 0$ uma função continuamente diferenciável $u : I \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\left| {}^H D_{0+}^{1,\beta;t} u(t) - f(t,u(t)) - \int_0^t k(t,s,u(s))ds \right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in I,$$

então existe uma única função $u_0 : I \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u_0(t) = \sigma + \mathrm{I}_{0+}^{1;t} f(t,u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{1;t} \left[\int_0^\xi k(t,s,u_0(s))ds \right]$$

e

$$|u(t) - u_0(t)| \leqslant \frac{\varepsilon \mathcal{T}}{1 - \mathcal{T}(L_f + \mathcal{T} L_k)}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração. A demonstração segue direto do Teorema 3.3. □

O próximo teorema, escolhemos $\alpha = 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $\psi(t) = (t+a)^\rho$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$.

Teorema 3.5. *Seja $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $I = [0, \mathcal{T}]$ um intervalo fechado e limitado dado, tal que $\mathcal{T} > 0$ e também sejam L_f e L_k constantes positivas com $0 < (\mathcal{T}+a)^\rho (L_f + \mathcal{T} L_k) < 1$. Suponha que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua a qual satisfaz a condição Lipschitz*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leqslant L_f |u_1 - u_2|, \quad \forall t \in I, \quad \forall u_1,u_2 \in \mathbb{R},$$

e $k : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|k(t,s,u_1) - k(t,s,u_2)| \leqslant L_k |u_1 - u_2|, \quad \forall t,s \in I, \quad \forall u_1,u_2 \in \mathbb{R}.$$

Se para $\varepsilon \geqslant 0$ uma função continuamente diferenciável $u : I \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\left| {}^H D_{0+}^{1,\beta;t^\rho} u(t) - f(t,u(t)) - \int_0^t k(t,s,u(s))ds \right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in I,$$

então existe uma única função $u_0 : I \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u_0(t) = \sigma + \mathrm{I}_{0+}^{1;t^\rho} f(t,u_0(t)) + \mathrm{I}_{0+}^{1;t^\rho} \left[\int_0^\xi k(t,s,u_0(s))ds \right]$$

e

$$|u(t) - u_0(t)| \leqslant \frac{\varepsilon (\mathcal{T}+a)^\rho}{\Gamma(\alpha+1) - (\mathcal{T}+a)^\rho (L_f + \mathcal{T} L_k)}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração. A demonstração segue direto do Teorema 3.3. □

Aqui apresentamos apenas esses dois casos, mas é possível obter outros casos particulares a partir da escolha de α, β e da função $\psi(\cdot)$. Observe que, os Teorema 3.4 e Teorema 3.5, são resultados de estabilidades de Ulam-Hyers e Ulam-Hyers-Rassias.

4 Conclusões e Perspectivas

Introduzimos alguns espaços com suas respectivas normas, a fim de desenvolver o estudo sobre a derivada fracionária ψ-Hilfer, o objetivo principal deste trabalho. Nesse sentido, introduzimos a integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a outra função e investigamos alguns resultados fundamentais para a elaboração deste trabalho. Mediante isso, apresentamos os conceitos fundamentais de derivada fracionária ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo e alguns teoremas.

Em vista das inúmeras definições existentes de derivadas fracionárias, e com o objetivo de unificar em um único operador uma ampla classe a qual contém como casos particulares as existentes, fez-se necessário definir um novo operador de diferenciação fracionário, chamado ψ-Hilfer. Investigamos detalhadamente a derivada fracionária ψ-Hilfer apresentando alguns resultados essenciais de suma importância no cálculo fracionário. Alguns destes resultados foram utilizados para as derivadas fracionárias ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville. Por fim, apresentamos uma vasta classe de casos particulares de derivadas fracionárias a partir da escolha adequada das funções $\psi(\cdot)$ e $f(\cdot)$ bem como os limites a, b e os paramêtros α, β.

Um dos pontos críticos ao investigar se, de fato, uma determinada derivada é considerada fracionária, é a regra de Leibniz. A chamada regra de Leibniz conhecida no cálculo de ordem inteira como regra do produto, foi estabelecida como uma das condições do critério proposto por Ortigueira e Machado em 2015, para considerar se uma derivada é dita fracionária. A questão é que, algumas derivadas fracionárias não satisfazem tal condição, em especial, a derivada fracionária de Caputo. Então, visto que umas derivadas fracionárias satisfazem e outras não, a regra de Leibniz, investigamos aqui a regra tipo Leibniz para a derivada fracionária ψ-Hilfer, em duas versões, Tipo I e Tipo II. Uma vez que a derivada fracionária ψ-Hilfer contém uma ampla classe de derivadas fracionárias como casos particulares, consequentemente, as regras tipo Leibniz I e II, também contêm casos particulares, destacamos essa propriedade detalhadamente no texto.

Para finalizar, investigamos as estabilidades de Ulam-Hyers de soluções de equações integrodiferenciais não-lineares fracionárias de Volterra via teorema do ponto fixo, propondo e realizando realizando algumas mudanças nas hipóteses dos resultados originais discutidos por Jung [18].

Nesse sentido, concluímos o projeto de mestrado, cujo objetivo é investigar detalhadamente a derivada fracionária ψ-Hilfer, destacando sua importância e relevância para o cálculo fracionário. Além disso, discutimos as regras tipo Leibniz I e II, as quais satisfazem certas condições (critério) para uma determinada derivada ser considerada fracionária, condições essas, apresentadas no critério de Ortigueira e Machado. Por fim, realizamos uma aplicação envolvendo equações integrodiferenciais fracionárias no sentido da derivada fracionária ψ-Hilfer e discutimos suas estabilidades de Ulam-Hyers.

Uma continuação natural deste trabalho para um futuro projeto de pesquisa no doutorado, é investigar a existência, unicidade e estabilidades de Ulam-Hyers de soluções suaves de equações diferenciais fracionárias introduzidas por meio da derivada fracionária ψ-Hilfer e de operadores quase setoriais. Vale destacar que a solução suave é dada por meio de funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros. Por outro lado, temos como perspectivas depois de obter um resultado sobre solução fraca de uma equação diferencial fracionária com condições de contorno de Dirichlet no espaço de derivada ψ-fracionário $\mathbb{H}_p^{\alpha,\beta;\psi}([0,T],\mathbb{R})$, discutir alguns problemas variacionais que estão diretamente relacionados com o cálculo fracionário e resultados investigados neste trabalho. Uma vez que o operador derivada fracionário ψ-Hilfer está bem definido e bem consolidado com uma estrutura variacional definida sobre o espaço $\mathbb{H}_p^{\alpha,\beta;\psi}([0,T],\mathbb{R})$, motiva a investigar detalhadamente alguns problemas que estão sendo discutidos na comunidade acadêmica.

Referências

[1] S. Abbas, R. P. Agarwal, M. Benchohra, and N. Benkhettou, *Hilfer-Hadamard fractional differential equations and inclusions under weak topologies*, Progr. Fract. Differ. Appl. **4** (2018), no. 4, 247–261.

[2] M. S. Abdo, S. K. Panchal, and H. S. Hussien, *Fractional integro-differential equations with nonlocal conditions and ψ-Hilfer fractional derivative*, Math. Model. Anal. **24** (2019), no. 4, 564–584.

[3] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **44** (2017), 460–481.

[4] T. Aoki, *On the stability of the linear transformation in Banach spaces*, J. Math. Soc. Jpn **2** (1950), no. 1-2, 64–66.

[5] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Reading, United States of America, 1974.

[6] T. M. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, and D. Zorica, *Fractional Calculus with Applications in Mechanics*, Wiley Online Library, London, Great Britain, 2014.

[7] R. Courant and E. J. McShane, *Differential and Integral Calculus*, vol. 1, Wiley Online Library, London, Great Britain, 2011.

[8] S. Şevgin and H. Şevli, *Stability of a nonlinear Volterra integro-differential equation via a fixed point approach*, J. Nonlinear Sci. Appl **9** (2016), no. 1, 200–207.

[9] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany, 2010.

[10] G. S. F. Frederico and D. F. M. Torres, *Fractional Noether's theorem in the Riesz–Caputo sense*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), no. 3, 1023–1033.

[11] M. Godefroy, *La fonction gamma: théorie, histoire, bibliographie*, Gauthier-Villars, Paris, France, 1901.

[12] E. A. Grove and G. E. Ladas, *Introduction to Complex Variables*, Houghton Mifflin Harcourt (HMH), United States of America, 1974.

[13] S. Harikrishnan, E. M. Elsayed, and K. Kanagarajan, *Existence and uniqueness results for fractional pantograph equations involving ψ-Hilfer fractional derivative*, Dyn. Continuous, Discrete and Impulsive Systems **25** (2018), 319–328.

[14] S. Harikrishnan, K. Shah, D. Baleanu, and K. Kanagarajan, *Note on the solution of random differential equations via ψ-Hilfer fractional derivative*, Adv. Difference Equ. **2018** (2018), no. 1, 224.

[15] R. Herrmann, *Fractional Calculus: an Introduction for Physicists*, World Scientific, Singapore, 2014.

[16] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[17] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. National Academy of Sciences of the United States of America **27** (1941), no. 4, 222.

[18] S. M. Jung, *Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order*, Appl. Math. Lett. **17** (2004), no. 10, 1135–1140.

[19] U. N. Katugampola, *A new approach to generalized fractional derivatives*, Bull. Math. Anal. Appl **6** (2014), no. 4, 1–15.

[20] ______, *Correction to "what is a fractional derivative?" by ortigueira and machado [journal of computational physics, volume 293, 15 july 2015, pages 4–13. special issue on fractional pdes]*, Journal of Computational Physics **321** (2016), 1255–1257.

[21] ______, *New fractional integral unifying six existing fractional integrals*, arXiv preprint arXiv:1612.08596 (2016).

[22] J. P. Kharade and K. D. Kucche, *On the impulsive implicit ψ-Hilfer fractional differential equations with delay*, Math. Meth. Appl. Sci. (2019).

[23] A. A. Kilbas, O. I. Marichev, and S. G. Samko, *Fractional Integral and Derivatives (theory and applications)*, Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[24] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204, Elsevier Science Limited, 2006.

[25] V. S. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, CRC press, New York, United States of America, 1993.

[26] K. D. Kucche, A. D. Mali, and J. Vanterler da C. Sousa, *On the nonlinear ψ-Hilfer fractional differential equations*, Comput. Appl. Math. **38** (2019), no. 2, 73.

[27] G. W. Leibniz, *Letter from Hanover, Germany, september 30, 1695, to GA l'Hospital*, Leibnizen Math. Schriften **2** (1849), no. 301-302, 1849.

[28] Z. B. Li and J. H. He, *Application of the fractional complex transform to fractional differential equations*, Nonlinear Sci. Lett. A **2** (2011), no. 3, 121–126.

[29] K. Liu, J. Wang, and D. O'Regan, *Ulam–Hyers–Mittag-leffler stability for ψ-Hilfer fractional-order delay differential equations*, Adv Difference Equ **2019** (2019), no. 1, 50.

[30] K. Liu, J. Wang, Y. Zhou, and D. O'Regan, *Hyers–Ulam stability and existence of solutions for fractional differential equations with Mittag–Leffler kernel*, Chaos, Solitons & Fractals **132** (2020), 109534.

[31] D. Luo, K. Shah, and Z. Luo, *On the novel Ulam–Hyers stability for a class of nonlinear ψ-Hilfer fractional differential equation with time-varying delays*, Mediterr. J. Math. **16** (2019), no. 5, 112.

[32] W. A. J. Luxemburg, *On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations, ii*, Indag. Math **20** (1958), no. 1958, 540–546.

[33] R. L. Magin, *Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues*, Comput. Math. Appl. **59** (2010), no. 5, 1586–1593.

[34] R. L. Magin, C. Ingo, L. Colon-Perez, W. Triplett, and T. H. Mareci, *Characterization of anomalous diffusion in porous biological tissues using fractional order derivatives and entropy*, Microporous and Mesoporous Materials **178** (2013), 39–43.

[35] G. M. Mittag-Leffler, *Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$*, CR Acad. Sci. Paris **137** (1903), no. 2, 554–558.

[36] P. Muniyappan and S. Rajan, *Stability of a class of fractional integro-differential equation with nonlocal initial condition*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae **87** (2018), no. 1, 85–95.

[37] R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider, and B. West, *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Addison-Wesley Reading, United States of America, 1996.

[38] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, vol. 111, Elsevier, San Diego, United States of America, 1974.

[39] D. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira, *Hilfer-Katugampola fractional derivatives*, Comput. Appl. Math. **37** (2018), no. 3, 3672–3690.

[40] E. Capelas de Oliveira and J. A. T. Machado, *A review of definitions for fractional derivatives and integral*, Math. Probl. Engin. **2014** (2014), 6 pages.

[41] M. D. Ortigueira and J. A. T. Machado, *What is a fractional derivative?*, J. Comput. Phys. **293** (2015), 4–13.

[42] T. J. Osler, *Fractional derivatives and Leibniz rule*, The Amer. Math. Monthly **78** (1971), no. 6, 645–649.

[43] ______, *A correction to Leibniz rule for fractional derivatives*, SIAM J. Math. Anal. **4** (1973), no. 3, 456–459.

[44] G. Pagnini, *Erdélyi-Kober fractional diffusion*, Frac. Calc. Appl. Anal. **15** (2012), no. 1, 117–127.

[45] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198, Elsevier, San Diego, United States of America, 1998.

[46] H. Rafeiro and M. Yakhshiboev, *The Chen-Marchaud fractional integro-differentiation in the variable exponent Lebesgue spaces*, Frac. Calc. Appl. Anal. **14** (2011), no. 3, 343–360.

[47] ______, *Some properties of Prabhakar-type fractional calculus operators*, Frac. Calc. Appl. Anal. **6** (2016), no. 1, 73–94.

[48] T. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), no. 2, 297–300.

[49] D. Riddhi, *Beta function and its applications*, The University of Tennesse, Knoxville, USA.[online] Available from: http://sces. phys. utk. edu/moreo/mm08/Riddi. pdf (2008).

[50] B. Ross, *A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus*, Springer, 1975.

[51] ______, *Fractional calculus and its applications: Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, june 1974*, vol. 457, Springer, Berlin, Germany, 2006.

[52] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, vol. 3, McGraw-Hill, New York, 1964.

[53] I. A. Rus, *Ulam stability of ordinary differential equations.*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica (2009), no. 4.

[54] K. Sayevand, J. T. Machado, and D. Baleanu, *A new glance on the Leibniz rule for fractional derivatives*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **62** (2018), 244–249.

[55] J. Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche, and E. Capelas de Oliveira, *Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **88** (2019), 73–80.

[56] J. Vanterler da C. Sousa, Kishor D. Kucche, and E. Capelas de Oliveira, *On the Ulam-Hyers stabilities of the solutions of ψ-Hilfer fractional differential equation with abstract volterra operator*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (2019), no. 9, 3021–3032.

[57] J. Vanterler da C. Sousa, D. S. Oliveira, and E. Capelas de Oliveira, *On the existence and stability for noninstantaneous impulsive fractional integrodifferential equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (2019), no. 4, 1249–1261.

[58] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, *On the ψ-Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **60** (2018), 72–91.

[59] ———, *On the Ulam–Hyers–Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the ψ-Hilfer operator*, J. Fixed Point Theory Appl. **20** (2018), no. 3, 96.

[60] ———, *Ulam–Hyers stability of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation*, Appl. Math. Lett. **81** (2018), 50–56.

[61] ———, *Ulam–Hyers–Rassias stability for a class of fractional integro-differential equations*, Results in Math. **73** (2018), no. 3, 111.

[62] ———, *A Gronwall inequality and the cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator*, Diff. Equ. Appl. **11** (2019), no. 1, 87–106.

[63] ———, *Leibniz type rule: ψ-Hilfer fractional operator*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **77** (2019), 305–311.

[64] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira, and K. D. Kucche, *On the fractional functional differential equation with abstract Volterra operator*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **50** (2019), no. 4, 803–822.

[65] J. Vanterler da C. Sousa, F. G. Rodrigues, and E. Capelas de Oliveira, *Stability of the fractional Volterra integro-differential equation by means of ψ-Hilfer operator*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (2019), no. 9, 3033–3043.

[66] J. Stewart, *Calculus: early transcendentals*, Thomson Brooks/Cole **6** (2003).

[67] V. E. Tarasov, *No violation of the Leibniz rule. no fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **18** (2013), no. 11, 2945–2948.

[68] ———, *Leibniz rule and fractional derivatives of power functions*, J. Comput. Nonlinear Dyn. **11** (2016), no. 3, 031014.

[69] ———, *On chain rule for fractional derivatives*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **30** (2016), no. 1-3, 1–4.

[70] G. S. Teodoro, *Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade*, (2019).

[71] G. S. Teodoro, J. A. T. Machado, and E. Capelas de Oliveira, *A review of definitions of fractional derivatives and other operators*, J. Comput. Phy. **388** (2019), 195–208.

[72] C. Thaiprayoon, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, *On the nonlocal Katugampola fractional integral conditions for fractional Langevin equation*, Adv. Differ Equat. **2015** (2015), no. 1, 374.

[73] J. Wang, L. Lv, and Y. Zhou, *New concepts and results in stability of fractional differential equations*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **17** (2012), no. 6, 2530–2538.

[74] J. Wang and Y. Zhou, *Mittag-leffler–ulam stabilities of fractional evolution equations*, Appl. Math. Lett. **25** (2012), no. 4, 723–728.

[75] R. N. Wang, J. Liu, and D. H. Chen, *Abstract fractional integro-differential equations involving nonlocal initial conditions in α-norm*, Adv. Difference Equ. **2011** (2011), no. 1, 25.

[76] W. Wei, X. Li, and X. Li, *New stability results for fractional integral equation*, Comput. Math. Appl. **64** (2012), no. 10, 3468–3476.

[77] A. Wiman, *Uber den fundamental satz in der theorie der funktionen $E_\alpha(z)$*, Acta Math **29** (1905), no. 1, 191–201.

APÊNDICE A – Funções Especiais

Este apêndice tem como objetivo apresentar o básico sobre as funções gama, beta e de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, que foram utilizadas no decorrer do texto, visto que exemplos e definições por meio dessas funções especiais foram apresentadas na Seção 2.1 e na Seção 2.3.

A.1 Função gama

A função gama foi introduzida por Leonhard Euler, como a generalização da função fatorial a valores não inteiros, e faz parte das funções trascendentais especiais. Foi estudada por matemáticos como: A. M. Legendre, C. F. Gauss, C. Gudermann, J. Liouville, K. Weiestrass, C. Hermite, dentre outros, [11].

Definição A.1. [45] *A função gama $\Gamma(z)$ é definida pela integral,*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{A.1}$$

A função definida pela Eq.(A.1) converge na metade direita do plano complexo, isto é, para $\mathcal{R}e(z) > 0$. Com efeito, seja $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) = \Gamma(x+iy) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x+iy-1}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}t^{iy}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}e^{iy\log(t)}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}[\cos(y\log(t)) + i\text{sen }(y\log(t))]dt,
\end{aligned}$$

portanto,

$$|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x), \quad \text{dado que,} \quad |\cos(y\log(t)) + i\text{sen }(y\log(t))| = 1.$$

A fim de discutir a última integral, é necessário separá-la em duas partes para usar em cada região um limite conveniente, com o objetivo de obter integrandos convergentes. Com esta ideia, temos que:

$$\Gamma(x) = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt}_{J_1},$$

sendo I_1 limitada por $\frac{1}{x}$, para $x > 0$, pois $0 < t < 1$ e $0 < e^{-t} < 1$. No caso de J_1 o processo é um pouco mais elaborado, como se mostra a seguir:

Caso I: Se $0 < x \leqslant 1$, então:

$$J_1 = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt \leqslant \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e}.$$

Para este resultado temos que $f(t) = t^{1-x}$ é crescente, dado que sua derivada é positiva. Além disso $t^{1-x} \geqslant 1$; do qual se conclui que J_1 está limitada para $0 < x \leqslant 1$.

Caso II: Se $x > 1$, então: seja $\kappa = [x]$ (parte inteira de x), integrando por partes J_1 com $u = t^{x-1}$ e $dv = e^{-t}dt$; obtemos

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-t} t^{x-1} \Big|_1^b + (x-1) \int_1^b e^{-t} t^{x-2} dt \right) \\
&= \frac{1}{e} - \lim_{b\to\infty} \frac{b^{x-1}}{e^b} + (x-1) \int_1^\infty e^{-t} t^{x-2} dt \\
&\leqslant \frac{1}{e} - \lim_{b\to\infty} \frac{b^{\kappa}}{e^b} + (x-1) \int_1^\infty e^{-t} t^{x-2} dt \\
&= \frac{1}{e} + (x-1) \underbrace{\int_1^\infty e^{-t} t^{x-2} dt}_{J_2},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $b^{x-1} \leqslant b^\kappa$ e o limite a partir da regra de l'Hôpital κ-vezes.

Para J_2, o mesmo procedimento feito para J_1; primeiro o caso $x \leqslant 2$ e depois $x > 2$. Continuando este processo, temos $J_{\kappa+1} = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-\kappa-1} dt$, onde $x - \kappa < 1$ sendo suficiente só aplicar o caso I. Portanto, a funcão $\Gamma(z)$ converge para $x = \mathcal{R}e(z) > 0$.

Teorema A.1. *(Representação da função gama pelo limite)*[45]

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{A.2}$$

Demonstração. Para mostrar a equivalência entre (A.1) e (A.2) as duas representações da função gama apresentadas, é necessário definir a família de funções

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Introduzindo a substituição $u = \frac{t}{n}$, temos

$$f_n(z) = \int_0^1 (1-u)^n (un)^{z-1} n du.$$

Aplicando integração por partes com $w = (1-u)^n$ e $dv = u^{z-1}du$, obtemos

$$\begin{aligned} f_n(z) =& n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \\ =& n^z \left(\frac{(1-u)^n u^z}{z}\Big|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right) \\ =& \frac{n^z n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du. \end{aligned}$$

Novamente aplicando integração por partes com $w = (1-u)^{n-1}$ e $dv = u^z du$ e repetindo o processo n-vezes, temos

$$\begin{aligned} f_n(z) =& \frac{n^z n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} (u)^{z+1} du \\ &\vdots \\ =& \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 (u)^{z+n-1} du \\ =& \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned}$$

Usando o limite fundamental [52]

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t},$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \Gamma(z).$$

Agora, consideremos

$$\begin{aligned} \triangle :=& \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \\ =& \int_0^n \left[e^{-t} t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right] dt - \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \end{aligned}$$

Observemos que, tomando $\epsilon > 0$ arbitrário. Dada a convergência da integral (A.1), existe um N tal que para $n \geqslant N$, temos

$$|\triangle_1| =: \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leqslant \int_n^\infty |e^{-t} t^{x-1}||t^{iy}| dt = \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3},$$

Fixando agora N e considerando $n > N$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \triangle =& \int_0^N \left[e^{-t} t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right] dt + \int_N^n \left[e^{-t} t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right] dt \\ & - \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ =& : \triangle_3 + \triangle_2 - \triangle_1. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|\triangle| \leqslant |\triangle_3| + |\triangle_2| + |\triangle_1| < \epsilon,$$

pois

$$\begin{aligned}|\triangle_2| =& \left|\int_N^n \left[e^{-t}t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\right] dt\right| \leqslant \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt \\ <& \int_N^\infty \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1} dt < \int_N^\infty e^{-t}t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3},\end{aligned}$$

e, dada a relação a seguir,

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad 0 < t < n.$$

Temos para n grande e N fixo,

$$\begin{aligned}|\triangle_3| =& \left|\int_0^N \left[e^{-t}t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\right] dt\right| \\ <& \frac{1}{2n}\int_0^N |t^2||t^{x-1}| dt \\ =& \frac{1}{2n}\int_0^N t^{x+1} dt < \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(t),$$

isto é, $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}$.
Obtendo assim, o resultado esperado. $\square$

Algumas das propriedades mais importantes da função gama são:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
2. $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$,
3. $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)...(z+1)z\Gamma(z), \quad n \in \mathbb{N}$,
4. $\Gamma(z-1) = \dfrac{\Gamma(z)}{z-1}$, se $z \neq 1$,
5. $\Gamma(z-n) = \dfrac{(-1)^n\Gamma(z)}{(n-z)(n-1-z)...(1-z)}, \quad n \in \mathbb{N}$, se z não é um inteiro positivo,
6. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}$, se z não é inteiro,
7. $\Gamma(z)\Gamma(z+\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z)$, (Fórmula de Legendre).

A prova das propriedades 1-5 pode ser feita fazendo uso da Definição (A.1) e o princípio de indução matemática. As propriedades 6 e 7 podem ser encontradas em [45]. A função gama tem polos simples para os pontos $z = -n$, $n = 1, 2, \ldots$

Demonstração. A função $\Gamma(z)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt}_{I_2}.$$

Para I_1, expressando e^{-t} em séries de potência, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1}dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+z-1}}{k!}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\left. \frac{t^{z+k}}{k+z} \right|_0^1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}. \end{aligned}$$

De modo que, $\Gamma(z)$ tem polos simples para $z = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant t < 1$. Agora para I_2, a função $f(t) = e^{-t}t^{z-1}$ é contínua para z arbitrário e $t \geqslant 1$. Além disso, se $t \geqslant 1$, $\log(t) \geqslant 0$, temos que $e^{-t}t^{z-1}$ é uma função inteira na variável z. Seja D um conjunto fechado, limitado e arbitrário no plano complexo e $x_0 = \max_{z \in D} \mathcal{R}e(z)$, então

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{z-1}| &= |e^{(z-1)\log(t)-t}| = |e^{(x-1)\log(t)-t}||e^{iy\log(t)}| \\ &= |e^{(x-1)\log(t)-t}| \leqslant e^{(x_0-1)\log(t)-t}| = e^{-t}t^{x_0-1}, \end{aligned}$$

o qual indica que, a integral indefinida I_2 converge para todo z em D, e esta convergência é uniforme na variável z. Também, pode ser derivada com respeito ao parâmetro z, para qualquer z no interior de D, de modo que I_2, é uma função analítica no interior de D. Como D é arbitrário, está garantido que I_2 é inteira [12]. Logo, concluímos que $\Gamma(z)$ tem polos simples em $z = -k$, com $k = 0, 1, \ldots$ □

A.2 Função beta

Vamos abordar um pouco sobre a função beta, a qual foi estudada no século XVIII, dentre outros, por L. Euler e A. M. Legendre, mas a origem é atribuída a J. Binet, [49]; em alguns textos é também chamada "integral de Euler de primeira espécie".

Definição A.2. [45] *Sejam $z, w \in \mathbf{C}$. A função beta $B(z,w)$ é definida pela integral*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad \mathcal{R}e(z) > 0, \mathcal{R}e(w) > 0. \tag{A.3}$$

Propriedade A.2.1 (Relação entre a função gama e a função beta)**.**

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \mathcal{R}e(z) > 0, \mathcal{R}e(w) > 0.$$

Demonstração. Para abordar esta prova se faz necessário, por exemplo, o uso da transformada de Laplace. Considere a integral

$$h_{z,w}(t) := (t^{z-1} * t^{w-1}) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau,$$

onde $h_{z,w}(1) = B(z,w)$. Usando o fato que $\mathfrak{L}\{t^z\}(s) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{s^{z+1}}$ (este resultado pode ser obtido diretamente da definição de transformada de Laplace ver [37]), então

$$\mathfrak{L}\{h_{z,w}(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{t^{z-1} * t^{w-1}\} = \mathfrak{L}\{t^{z-1}\}\mathfrak{L}\{t^{w-1}\} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}. \tag{A.4}$$

Agora, aplicando a transformada de Laplace inversa em ambos os lados da Eq.(A.4), temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\mathfrak{L}\{h_{z,w}(t)\}(s)\right\} =& \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}\right\} = \Gamma(z)\Gamma(w)\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{z+w}}\right\} \\ =& \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1} = h_{z,w}(t).\end{aligned}$$

Tomando $t = 1$ temos, $h_{z,w}(1) = B(z,w)$, de onde segue

$$B(z,w) = h_{z,w}(1) == \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

que é o resultado desejado. □

A.3 Funções de Mittag-Leffler

A função Mittag-Leffler de um parâmetro foi introduzida no ano 1903 por G. Mittag-Leffler e estudada por A. Wiman em 1905. A função Mittag-Leffler de dois parâmetros foi introduzida por C. J. Agarwal (1953) e cumpre um papel muito importante no cálculo fracionário, fundamental no estudo de equações diferenciais fracionárias [24].

Definição A.3. [35] (Função de Mittag-Leffler de um parâmetro) *Seja α um parâmetro complexo com $Re(\alpha) > 0$. A função de Mittag-Leffler um parâmetro é definida por*

$$\mathbb{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad Re(\alpha) > 0.$$

Definição A.4. [77] (Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros) *Sejam α e β parâmetros complexos com $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$. A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é definida por*

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0.$$

Note que se $\beta = 1$ na Definição A.4, obtemos a Definição A.3, o que justifica dizer que $\mathbb{E}_{\alpha,1}(z) = \mathbb{E}_{\alpha}(z)$.