

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE  
RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS SUBMETIDOS À  
INJEÇÃO DE ÁGUA

DEISE MASSULO FERREIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Este exemplar corresponde <sup>75</sup> a  
redação final da dissertação defendida  
por *Deise Massulo Ferreira*  
e aprovada pelo Colegiado Julgador  
em *21/12/94*

  
ORIENTADOR

CAMPINAS - SÃO PAULO

DEZEMBRO - 1994

---

**F413a**

**Ferreira, Deise Massulo**

**Análise do comportamento de reservatórios heterogêneos submetidos à injeção de água. Campinas: Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Instituto de Geociências. Área de Geologia do Petróleo, 1994.**

**117 p.**

**Orientador : Antônio Cláudio de França Corrêa**

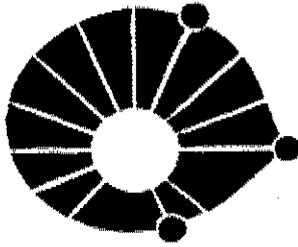
**Dissertação de Mestrado**

**Inclui bibliografia**

**1. Reservatórios. 2. Injeção de Água. 3. Reservatórios Heterogêneos  
4. Embebição Capilar.**

**CDD - 627.86**

---



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEOENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE  
RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS SUBMETIDOS  
À INJEÇÃO DE ÁGUA**

**DEISE MASSULO FERREIRA**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Geoengenharia de  
Reservatórios.

**Orientador:** Antônio Cláudio de França Corrêa -  
PETROBRAS - UNICAMP

**Co-Orientador:** Maria Cristina Cunha - UNICAMP

IG- /1994

CAMPINAS - SÃO PAULO

DEZEMBRO - 1994



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEO-ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

TÍTULO DA TESE: ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE RESERVATÓRIOS  
HETEROGÊNEOS SUBMETIDOS À INJEÇÃO DE ÁGUA

AUTOR: DEISE MASSULO FERREIRA *4/44*

ORIENTADOR: ANTÔNIO CLÁUDIO DE FRANÇA CORRÊA *†*

CO-ORIENTADOR: MARIA CRISTINA CUNHA *†*

COMISSÃO EXAMINADORA

PRESIDENTE: ANTÔNIO CLÁUDIO DE FRANÇA CORRÊA *Antonio Claudio de Franca Correa*

EXAMINADORES: EUCLIDES JOSÉ BONET *Euclides José Bonet*

CÉSAR PALAGI *Cesar Palagi*

CAMPINAS, 21 DE DEZEMBRO DE 1994

Ao meu filho, Tadeu

e à minha mãe, Rosali

## AGRADECIMENTOS

Ao CRIADOR, pela Vida e pelas Bênçãos que me têm sido concedidas.

À PETROBRAS, pela oportunidade e suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Ao Dr. Antônio Cláudio de França Corrêa, pela sugestão do tema de tese, por todo o apoio e incentivo dispensados, e pela firmeza com que conduziu a presente dissertação.

À Dra. Maria Cristina Cunha, pelo apoio e orientação prestados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do IG/AGP e FEM/DEP, pelo conhecimento transmitido.

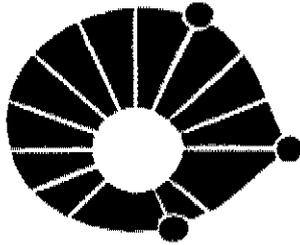
Aos funcionários da UNICAMP, engenheiro Moacir Cornetti e senhores Mara, Creuza e Ricardo, do IG/AGP, e Alice e Cristina, da FEM/DEP, pela boa vontade demonstrada sempre que solicitados.

Ao Dr. César Palagi, pela presteza no fornecimento dos dados solicitados.

Aos colegas de turma, cuja amizade e companheirismo tornaram mais leve esta jornada.

À minha mãe Rosali, pelo amor, apoio e incentivo que me tem dedicado ao longo da vida e pela generosidade com que alivia as tarefas diárias de sobre os meus ombros.

Ao meu filho Tadeu, fonte inesgotável de estímulo e alegria.



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEO-ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RESUMO

ANALISE DO COMPORTAMENTO DE RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS  
SUBMETIDOS À INJEÇÃO DE ÁGUA

Deise Massulo Ferreira

A presente dissertação estuda o deslocamento uni dimensional de dois fluidos incompressíveis, com o fluido molhante deslocando o não-molhante, em reservatórios heterogêneos compostos de uma fração contínua de maior transmissibilidade englobando uma fração descontínua de menor transmissibilidade.

A formulação matemática adotada para representar o escoamento incompressível no meio heterogêneo admite fluxo convectivo na fração mais permo-porosa e transferência de massa entre a fração mais permo-porosa e a fração menos permo-porosa, proporcional à diferença de saturação entre as duas frações.

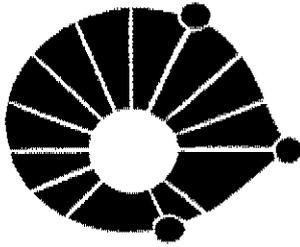
O sistema hiperbólico de equações é resolvido pelo método das características para uma curva de fluxo fracionário genérica. A solução obtida mostra a formação de uma frente de avanço na fração mais permo-porosa, cuja velocidade e saturação diminuem com o tempo, devido à troca de massa entre as duas frações do meio poroso. A redução da velocidade da frente de avanço da fração mais permo-porosa depende da intensidade da recuperação do óleo da fração menos permo-porosa.

Os modelos de transferência de massa reportados na literatura são usados para calcular o coeficiente de transferência de massa do modelo proposto.

A validação do modelo é feita através do ajuste a um experimento de laboratório reportado na literatura.

Uma outra formulação para a transferência de massa, baseada na equação da difusão, é apresentada. A solução numérica para esta formulação exigiu um excessivo tempo computacional, o que conduziu ao desenvolvimento de uma solução aproximada, baseada no teorema de valor médio para integrais.

É apresentado um exemplo prático com dados de campo.



UNICAMP

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

GEO-ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## ABSTRACT

### ANALYSIS OF WATERFLOOD PERFORMANCE IN HETEROGENEOUS RESERVOIRS

Deise Massulo Ferreira

The present work studies the incompressible flow of two immiscible fluids (a wetting fluid displacing a non-wetting one) in heterogeneous reservoirs composed of a continuous fraction of high transmissibility surrounding a discontinuous fraction of low transmissibility.

The mathematical formulation used to represent the incompressible flow in the heterogeneous medium admits flow due to convective forces in the more permeable fraction, and mass transfer between the more permeable fraction and the less permeable fraction, which is proportional to the difference in saturation between them.

The resultant hyperbolic system of equations is solved by the method of characteristics for a generic fractional flow curve. The solution leads to a shock front of saturation of the wetting fluid in the more permeable fraction, whose velocity and saturation decrease in time, due to the mass transfer between the two fractions. The rate of reduction in the velocity of the shock front depends on the intensity of oil recovery from the less permeable fraction of the reservoir.

The mass transfer models reported in the petroleum literature are used to calculate the mass transfer coefficient of the proposed model.

The model validation is obtained through a laboratory experiment reported in the literature.

Another mathematical formulation that considers a diffusion-type equation for the less permeable fraction is presented. The numerical solution for this formulation is time consuming. So, an approximate solution, based on the mean value theorem for integrals, was developed.

A practical example with field data is presented.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO PROPOSTO .....	12
4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	18
4.1. Solução Analítica para o Caso Linear .....	18
4.2. Solução pelo Método das Características .....	21
4.3. Solução pelo Método de Diferenças Finitas .....	40
5. A TRANSFERÊNCIA DE MASSA .....	42
5.1. Experimentos de Laboratório num Bloco de Matriz .....	43
5.2. Modelos de Transferência de Massa .....	44
5.1.1. O Modelo Empírico de Aronofsky .....	44
5.1.2. O Modelo Analítico de Reis e Cil .....	48
5.3. Aplicação do Modelo de Aronofsky na Modelagem Matemática de Reservatórios Fraturados. ....	51
6. VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO .....	53
7. FORMULAÇÃO CONSIDERANDO O MODELO DE DIFUSÃO PARA A TRANSFERÊNCIA DE MASSA .....	59
8. APLICAÇÃO A UM CASO REAL .....	74
8.1. Dados Gerais .....	74
8.2. Resultados .....	78
8.2.1. Variação do Coeficiente de Transferência de Massa .....	78
8.2.2. Variação da Vazão .....	80

9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	86
NOMENCLATURA .....	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	91
APÊNDICE 1 - Formulação Matemática do Modelo Proposto .....	96
APÊNDICE 2 - Solução Analítica da Equação Linearizada .....	102
APÊNDICE 3 - Transformação do Sistema de Equações Diferenciais Parciais num Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias .....	106
APÊNDICE 4 - Derivação das Equações para o Modelo de Difusão .....	110
APÊNDICE 5 - Solução da Equação da Difusão .....	115

# LISTA DE FIGURAS

3.1 - Representação esquemática do meio poroso. ....	13
4.1 - Comparação entre a solução analítica e a solução numérica por diferenças finitas para o Caso Linear. ....	20
4.2 - Perfis de saturação para diferentes valores de $\omega$ . ....	20
4.3 - Curva de fluxo fracionário para $c=1$ . ....	22
4.4 - Derivada da curva de fluxo fracionário para $c=1$ . ....	23
4.5 - Características $\alpha$ . ....	26
4.6 - Características $\beta$ . ....	26
4.7 - Integração numérica do sistema ao longo das características. ....	31
4.8 - Aproximação para a curva de fluxo fracionário. ....	33
4.9 - Perfis de $S_f$ para $\omega = 0,25$ . ....	36
4.10 - Perfis de $S_n$ para $\omega = 0,25$ . ....	36
4.11 - Perfis de $S$ para $\omega = 0,25$ . ....	37
4.12 - Características para $\omega = 0,25$ . ....	37
4.13 - Perfis de $S_f$ para $\omega = 0,75$ . ....	38
4.14 - Perfis de $S_n$ para $\omega = 0,75$ . ....	38
4.15 - Perfis de $S$ para $\omega = 0,75$ . ....	39
4.16 - Características para $\omega = 0,75$ . ....	39
5.1 - Correlação ajustada por Kazemi et al. aos dados de Mattax e Kyte (extraída de Kazemi et al. (1992)). ....	47
5.2 - Ajuste do modelo de Reis e Cil aos dados de Mattax e Kyte (extraída de Reis e Cil (1993)). ....	50
6.1 - Esquema do experimento de Kazemi e Merrill. ....	53

6.2 - Ajuste do modelo proposto aos dados de laboratório de Kazemi e Merrill.	
Curva de $N_p$ versus $Winj$ . . . . .	58
6.3 - Ajuste do modelo proposto aos dados de laboratório de Kazemi e Merrill.	
Curva de RAO versus $Winj$ . . . . .	58
7.1 - Perfis de $S_f$ para $\omega = 0,25$ e $\varphi = 100$ . . . . .	65
7.2 - Características para $\omega = 0,25$ e $\varphi = 100$ . . . . .	65
7.3 - Perfis de $S_f$ para $\omega = 0,25$ e $\varphi = 10$ . . . . .	66
7.4 - Perfis de $S_f$ para $\omega = 0,25$ e $\varphi = 5000$ . . . . .	66
7.5 - $\partial S_n / \partial z_D$ para $S_f = \text{constante} = 1$ , para $\varphi = 100$ e $\varphi = 5000$ . . . . .	68
7.6 - Derivada de $\partial S_n / \partial z_D(t_D)$ em relação a $t_D$ . . . . .	69
7.7 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com	
$t_{D\alpha} = t_{Dn}$ para $\varphi = 100$ . . . . .	70
7.8 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com	
$t_{D\alpha} = 0,7 t_{Dn}$ para $\varphi = 1$ . . . . .	71
7.9 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com	
$t_{D\alpha} = 0,83 t_{Dn}$ para $\varphi = 10$ . . . . .	72
7.10 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com	
$t_{D\alpha} = 0,88 t_{Dn}$ para $\varphi = 100$ . . . . .	72
7.11 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com	
$t_{D\alpha} = 0,88 t_{Dn}$ para $\varphi = 500$ . . . . .	73
8.1 - Unidade de fluxo representativa do meio poroso. . . . .	75
8.2 - Curvas de fluxo fracionário calculada e ajustada. . . . .	77
8.3 - FR versus tempo para diferentes valores do coeficiente de transferência	
de massa ( $q = 0,375 \text{ m}^3/\text{d}$ ). . . . .	79

8.4 - RAO versus tempo para diferentes valores do coeficiente de transferência de massa ( $q = 0,375 \text{ m}^3/\text{d}$ ). . . . .	80
8.5 - FR versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-3 d}^{-1}$ ). . . . .	81
8.6 - FR versus volume poroso injetado para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-3 d}^{-1}$ ). . . . .	82
8.7 - RAO versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-3 d}^{-1}$ ). . . . .	82
8.8 - FR versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-5 d}^{-1}$ ). . . . .	83
8.9 - FR versus volume poroso injetado para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-5 d}^{-1}$ ). . . . .	83
8.10 - RAO versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-5 d}^{-1}$ ). . . . .	84

## LISTA DE TABELAS

8.1 - Dados de rocha e fluidos. ....	75
8.2 - Quadro comparativo de resultados para diferentes valores do coeficiente de transferência de massa. ....	78
8.3 - Quadro comparativo de resultados para diferentes valores de vazão. ....	81
8.4 - Fatores de Recuperação para $RAO = 25$ . ....	84

# 1. INTRODUÇÃO

O comportamento de um reservatório de petróleo submetido à produção é influenciado por heterogeneidades em diferentes escalas, que impactam em maior ou menor grau a recuperação de hidrocarbonetos. Em reservatórios siliciclásticos que apresentam heterogeneidades primárias de caráter deposicional, tais como a ocorrência de lentes de arenitos em conglomerados, ou vice-versa, sabe-se que a fração mais permeável, quando contínua, é aquela que rege o comportamento hidráulico do sistema. Ocorre que, muitas vezes, grande volume de óleo encontra-se armazenado na fração menos permeável, instigando os engenheiros de reservatórios a investigar quais os mecanismos de recuperação do óleo desta fração.

Outro tipo de reservatório, aqueles naturalmente fraturados, também apresentam o comportamento hidráulico descrito acima, ou seja, a rede de fraturas de alta condutividade é responsável pelo fluxo de fluidos através do reservatório. Para estes reservatórios, diversos estudos teóricos e experimentais realizados nas últimas décadas vêm elucidando como se dá a recuperação de óleo dos blocos de matriz.

O presente trabalho estuda o deslocamento unidimensional de dois fluidos incompressíveis, com o fluido molhante deslocando o não-molhante, em reservatórios heterogêneos compostos de uma fração mais permeável englobando uma fração menos permeável.

A formulação matemática adotada para representar o fenômeno físico em estudo admite fluxo convectivo na fração mais permeável do reservatório e transferência de massa por embebição entre a fração mais permeável e a fração menos permeável, o que conduz a um sistema hiperbólico de equações. A solução

é obtida pelo método das características, que produz resultados mais acurados que o método de diferenças finitas.

Os modelos de transferência de massa para reservatórios fraturados existentes na literatura são comentados, e podem servir como uma primeira aproximação para o coeficiente de transferência de massa do modelo proposto, conforme evidencia o caso prático apresentado.

De forma a considerar o período transiente do processo de embebição, uma formulação para a transferência de massa através da equação da difusão é apresentada. A solução para esta formulação exigiu um excessivo tempo computacional, o que conduziu à adoção de uma solução aproximada, válida para um determinado range dos parâmetros envolvidos.

Finalmente, o modelo desenvolvido foi aplicado a um reservatório real, de forma a avaliar o impacto da variação do coeficiente de transferência de massa e da vazão de injeção na recuperação de óleo e na razão água-óleo.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O comportamento de reservatórios submetidos à injeção de água vem sendo objeto de interesse dos engenheiros de reservatórios há muito tempo. O deslocamento de dois fluidos imiscíveis num meio poroso resulta da interação entre as forças viscosas, capilares e gravitacionais, controladas pelas características permo-porosas do meio e pelo seu grau de heterogeneidade.

Os primeiros trabalhos nesta área admitiam o escoamento dos fluidos em reservatórios homogêneos. Buckley e Leverett (1942) derivaram a equação diferencial que descreve o deslocamento de óleo por água num meio poroso linear e homogêneo, negligenciando o efeito das forças capilares. Douglas, Blair e Wagner (1957) consideraram os efeitos capilares numa simulação numérica e mostraram que, para altas vazões, a solução se aproxima da de Buckley e Leverett, e a recuperação independe da vazão. Fayers e Sheldon (1959) estudaram os efeitos das forças capilares e gravitacionais no deslocamento bifásico e mostraram que estas provocam mudanças significativas no perfil de saturações obtido por Buckley e Leverett para pequenas vazões.

O impacto das heterogeneidades presentes em reservatórios estratificados e reservatórios fraturados no desempenho do processo de injeção de água vem merecendo a atenção da literatura técnica há longo tempo.

No que tange aos reservatórios estratificados, consideram-se duas categorias: aqueles nos quais não há comunicação vertical entre as camadas e aqueles em que ocorre fluxo cruzado entre as camadas.

Na primeira categoria enquadram-se os trabalhos de Stiles (1949), Dykstra-Parsons (1950). Em ambos os casos, representa-se o reservatório por camadas homogêneas que diferem nas propriedades petrofísicas. No método de Stiles a razão de mobilidade é assumida unitária, enquanto que no método de Dykstra-Parsons esta pode assumir qualquer valor. O desempenho de cada camada, em termos de recuperação de óleo, é calculado pela teoria do fluxo unidimensional negligenciando-se os efeitos capilares e gravitacionais, e o desempenho do reservatório como um todo é obtido somando-se o desempenho individual das camadas.

A previsão do comportamento de reservatórios estratificados com comunicação vertical é muito mais difícil, pois devem ser levados em conta os mecanismos que causam o fluxo cruzado entre as camadas.

Goddin et al. (1966) realizaram um estudo numérico do fluxo cruzado causado pelas forças capilares e viscosas. Concluíram que o fluxo cruzado é máximo na vizinhança da frente de avanço da camada mais permeável e que, para razões de mobilidade favoráveis (menores que 1), o fluxo cruzado é favorável à recuperação de óleo. À medida em que a razão de mobilidade diminui a partir da unidade, o fluxo cruzado viscoso aumenta de importância em relação ao fluxo cruzado capilar.

Zapata e Lake (1981) apresentaram uma análise teórica do fluxo cruzado viscoso usando o conceito de equilíbrio vertical, ou seja, a queda de pressão vertical é zero em qualquer tempo e posição do reservatório, o que implica no máximo grau de fluxo cruzado possível. Os autores mostraram

que o fluxo cruzado viscoso é desprezível em reservatórios com razão efetiva comprimento-espessura ( $R_L = L/h (k_z/k_x)^{1/2}$ ) menor que 0,1, e que o fluxo cruzado viscoso é máximo em reservatórios com  $R_L$  maior que 10. Concluíram também que o fluxo cruzado viscoso é independente da vazão, em contraste com os outros mecanismos de fluxo cruzado. Para um deslocamento água-óleo com razão de mobilidade menor que 1, a eficiência de varrido vertical é aumentada devido ao fluxo cruzado viscoso.

Yokoyama e Lake (1981) realizaram uma análise considerando somente o fluxo cruzado capilar. Assumiram desprezíveis os efeitos gravitacionais e consideraram a mobilidade total constante, de forma a eliminar o fluxo cruzado viscoso. A análise foi feita em termos dos números adimensionais NCT (número capilar transversal), NCL (número capilar longitudinal) e  $R_{\phi K}$  (função de heterogeneidade). Os autores concluíram que, num meio poroso homogêneo, os efeitos capilares longitudinais causam uma diminuição na recuperação de óleo quando  $NCL > 0,01$ , porém esta condição não se aplica à escala de campo devido ao comprimento  $L$  do meio poroso aparecer no denominador de NCL. Por outro lado, os efeitos capilares transversais causam um aumento na recuperação de óleo em meios estratificados, e estes efeitos começam a ser importantes para  $NCT > 0,1$ , um valor que é possível de ser obtido em escala de campo.

Tompang e Kelkar (1988) utilizaram um simulador numérico "Black-Oil" para analisar o efeito do fluxo cruzado causado pelas forças viscosas e gravitacionais no desempenho da injeção de água. Concluíram que, para razões de mobilidade favoráveis, a recuperação não é afetada pela vazão de

injeção e depende unicamente da razão efetiva comprimento-espessura ( $R_l$ ), confirmando os resultados de Zapata e Lake. Para razões de mobilidade desfavoráveis, a recuperação de óleo depende da vazão de injeção, de  $R_l$  e de  $R_D$ , que é a razão entre os gradientes de pressão vertical e horizontal.

Yortsos (1991) apresentou uma formulação geral para o deslocamento bifásico imiscível para sistemas longos e estreitos, onde a hipótese de equilíbrio vertical se aplica. Na ausência de gravidade e capilaridade, uma extensão da equação clássica de Buckley e Leverett, e que inclui termos cruzados, é obtida. Subsequentemente, esta equação é aplicada a um reservatório com um número arbitrário de camadas. O resultado é um sistema hiperbólico não-linear que descreve a interação entre as camadas. Este sistema contém a formulação de Zapata e Lake (1981). Em seguida, o sistema de equações é modificado para levar em conta efeitos fracos de capilaridade e gravidade, de tal forma que não haja fluxo segregado. Isto generaliza a formulação de Yokoyama e Lake (1981). Finalmente são considerados efeitos fortes de capilaridade e gravidade que conduzem ao fluxo segregado.

Haq e Reis (1993) apresentaram um modelo analítico para prever o fluxo cruzado capilar em camadas adjacentes a uma camada de alta permeabilidade, durante a injeção de água nesta última. Os autores assumem que o deslocamento é tipo-pistão na camada mais permeável e que a taxa de fluxo cruzado capilar segue o declínio exponencial verificado por Aronofsky et al. (1958). São obtidas expressões para a extensão areal da zona lavada e para a fração de óleo deslocado que provém das camadas adjacentes.

Em reservatórios fraturados, a embebição capilar há muito é reconhecida como o principal mecanismo de expulsão do óleo da matriz para as fraturas. Estudos teóricos e experimentais revelaram-se valiosos para a compreensão e a modelagem do processo de embebição.

Graham e Richardson (1959) mostraram que a recuperação de óleo de um modelo de laboratório representando um elemento de reservatório constituído de matriz e fratura é sensível à vazão. Para uma dada largura de fratura, quanto menor a vazão de injeção, isto é, quanto menor o gradiente de pressão, maior a recuperação de óleo para um dado volume injetado.

Mattax e Kyte (1962) aplicaram leis de escala ao estudo do fenômeno de embebição, de tal forma que testes em pequenas amostras do reservatório pudessem ser usadas para prever a embebição em grandes blocos de matriz do reservatório. Eles mostraram que o tempo requerido para se recuperar uma dada fração de óleo de um bloco de matriz é proporcional ao quadrado do tamanho do bloco.

Kleppe e Morse (1974) estudaram o comportamento do fluxo em reservatórios fraturados produzindo por injeção de água. Eles colocaram uma amostra saturada com óleo num cilindro deixando um espaço ao redor da amostra para simular um sistema de fraturas circundando um bloco de matriz. A água era injetada na base e os fluidos produzidos no topo. Os experimentos de Kleppe e Morse foram utilizados por diversos autores para validar formulações matemáticas que consideram o efeito da variação de saturação da fratura no processo de embebição.

Lefebvre du Prey (1978) estudou os efeitos da gravidade e da capilaridade na embebição da matriz em reservatórios fissurados e concluiu que, para grandes blocos de matriz, os efeitos da gravidade são importantes, e o tempo de recuperação é proporcional ao tamanho do bloco. Para blocos pequenos, os efeitos da capilaridade são importantes, e o tempo de recuperação é proporcional ao quadrado do tamanho do bloco

Kazemi e Merrill (1979) realizaram experimentos de laboratório em amostras cilíndricas e blocos retangulares cortados ao longo do comprimento de modo a representar uma fratura com dois blocos de matriz adjacentes. Os experimentos foram conduzidos com o plano da fratura e a amostra colocados na horizontal. Os lados da amostra foram selados e foram realizados ensaios de injeção de água com vazão constante. Estes experimentos são adequados para a validação de soluções para o escoamento bifásico unidimensional incompressível.

A transferência de massa entre a matriz e a fratura pode ser modelada através de uma função empírica ou através da equação da difusão.

Aronofsky et al. (1958) propuseram um modelo empírico no qual a embebição de água num bloco de matriz é modelada como uma função exponencial do tempo.

Beckner et al. (1987) propuseram um modelo usando a equação da difusão com um coeficiente de difusão dependente da saturação para representar a transferência de massa entre a matriz e a fratura, em combinação com uma condição de contorno variável para levar em conta a variação de

saturação na fratura. Eles simularam os experimentos de Kleppe e Morse com o modelo proposto, obtendo um bom ajuste para o caso de baixa vazão, porém previram menor recuperação para o caso de alta vazão, indicando que as forças viscosas e gravitacionais precisavam ser incluídas. Os autores mostraram também que um coeficiente de difusão constante ajustava bem os resultados experimentais para ambos os casos, porém com tempo computacional muito menor quando comparado ao uso de um coeficiente não-linear. Os autores mostraram que um modelo de embebição contra-corrente baseado na equação da difusão não ajustava os dados de Kleppe e Morse, concluindo que a embebição contra-corrente não foi o mecanismo de recuperação nos experimentos de Kleppe e Morse. As fronteiras abertas no topo e nas laterais do bloco de matriz provavelmente permitiam um fluxo de óleo menos resistente do que em contra-corrente.

Dutra Jr. (1991), à semelhança de Beckner et al. (1987), assumiu a pressão capilar como a força predominante e resolveu a equação da difusão com o coeficiente de difusão constante para derivar o termo de transferência de massa entre a matriz e a fratura. O autor mostrou que o coeficiente de difusão pode ser determinado a partir de experimentos de laboratório, a partir de simulações refinadas de um único bloco, a partir de soluções numéricas da equação da difusão, e a partir do ajuste aos dados de campo.

Reis e Cil (1993) propuseram um modelo analítico para a embebição capilar espontânea de água e expulsão de óleo em contra-corrente em reservatórios naturalmente fraturados ou em camadas. Os resultados do modelo, em termos de fração do óleo recuperável da matriz, são confirmados pelos

estudos experimentais de Mattax e Kyte (1962), Hamon e Vidal (1986) e Cuiec et al. (1990).

As equações diferenciais que descrevem o fluxo bifásico incompressível num reservatório heterogêneo são não-lineares e de difícil solução analítica. No caso de reservatórios fraturados, nos quais a embebição capilar é o principal mecanismo de expulsão do óleo da matriz para as fraturas, algumas soluções analíticas para o caso unidimensional são encontradas na literatura.

Braester (1972) apresentou uma solução semi-analítica para o fluxo simultâneo de dois líquidos imiscíveis através de um meio poroso fissurado. As equações obtidas, uma para as fissuras e outra para os blocos, são relacionadas por um termo fonte que representa a transferência de massa entre as fissuras e os blocos. O sistema de equações é resolvido pelo método das características, integrando-se numericamente as equações ao longo das características. A solução mostra que se forma uma frente de avanço nas fissuras, enquanto nos blocos a saturação varia gradualmente. A saturação do fluido molhante e a velocidade da frente de avanço nas fissuras diminuem com o tempo, devido à transferência do fluido molhante dos blocos para as fissuras.

deSwaan (1978) e Kazemi et al. (1992) propuseram uma formulação analítica na qual a transferência de massa entre a matriz e a fratura segue o modelo empírico de Aronofsky et al. (1958), ou seja, apresenta um declínio exponencial negativo. A variação gradual da saturação de água nas fraturas

ao redor dos blocos da matriz é levada em conta através de uma condição de fronteira variável. A solução analítica, em termos de saturação da fase molhante na fratura, é obtida para um deslocamento tipo-pistão.

### 3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO PROPOSTO

Este capítulo apresenta a formulação matemática adotada para representar o escoamento unidimensional de dois fluidos incompressíveis, com o fluido molhante deslocando o não-molhante (por exemplo, injeção de água num reservatório sub-saturado), em reservatórios heterogêneos.

Admite-se que o reservatório heterogêneo é composto por uma fração contínua de maior permo-porosidade, englobando uma fração descontínua de menor permo-porosidade (ver Figura 3.1). Nesta descrição encaixam-se os reservatórios fraturados e aqueles que apresentam lentes menos permeáveis dispersas em regiões de alta permeabilidade.

As seguintes premissas são adotadas na formulação matemática:

- O escoamento é considerado imiscível e incompressível.
- Para a fração contínua, a atuação das forças viscosas é levada em conta através do fluxo convectivo devido a um gradiente de pressão. Os efeitos capilares longitudinais são considerados desprezíveis, de acordo com Yokoyama e Lake (1981), que demonstraram que em escala de campo estes efeitos não têm relevância. Os efeitos capilares transversais oriundos das heterogeneidades são levados em conta através de uma modelagem para a transferência de massa entre a fração contínua e a fração descontínua.
- Para a fração descontínua, considera-se que sua permeabilidade é muito menor que a permeabilidade da fração contínua. Desta forma, o gradiente de pressão que se estabelece devido ao fluxo convectivo na fração contínua não é suficiente para

provocar um fluxo convectivo de grande importância na fração descontínua. Os efeitos capilares longitudinais não são levados em conta, mas podem ter importância quando a velocidade do fluido molhante na fração contínua é pequena, como em reservatórios fraturados nos quais o avanço vertical da água nas fraturas é lento. Nos casos em que o avanço do fluido molhante é relativamente rápido e as lentes descontínuas são pequenas, de forma que sejam inteiramente expostas ao fluido molhante num curto período de tempo, pode-se desprezar os efeitos capilares longitudinais. Assim sendo, vamos considerar para a fração descontínua apenas a influência das forças capilares transversais.

- Neste capítulo, a formulação apresentada para a transferência de massa desconsidera o transiente do processo de embebição na fração descontínua, que será considerado na formulação apresentada no capítulo 7. Admite-se que o fluxo mássico entre as duas frações se dá em contra-corrente e que sua magnitude é proporcional à massa de água total e à diferença de saturação entre as duas frações.

- Efeitos gravitacionais são considerados desprezíveis em ambas as frações do meio poroso.

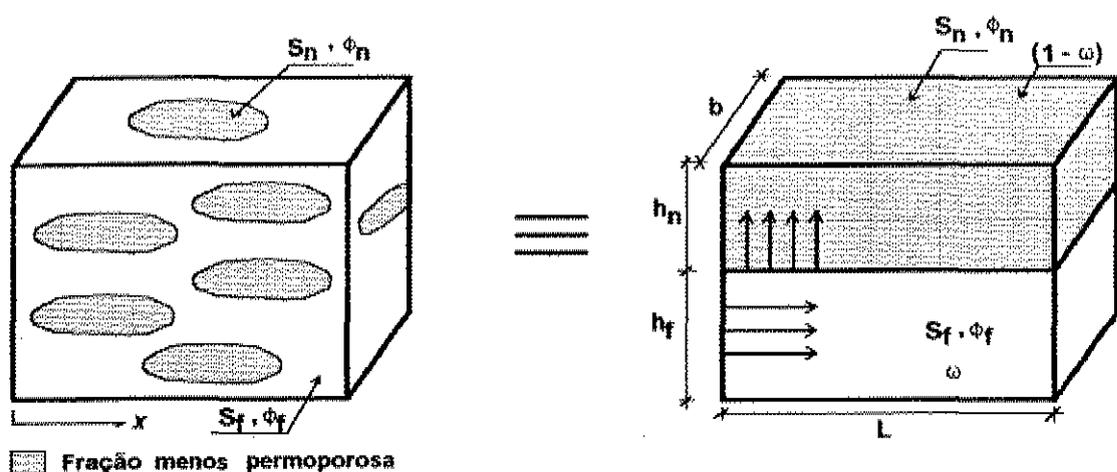


Figura 3.1 - Representação esquemática do meio poroso.

Pela equação da continuidade da fase molhante na fração contínua (Apêndice 1), temos que:

$$\omega v_f \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Na equação (3.1),  $f(S_f)$  é o fluxo fracionário da fase molhante no meio contínuo, tal que:

$$f = \frac{q_w}{q} \quad , \quad (3.2)$$

$v_f$  é a velocidade efetiva de injeção, ou seja:

$$v_f = \frac{q}{b h_f \phi_{fe}} \quad , \quad (3.3)$$

e  $S$  é a saturação total da fase molhante, calculada como uma média ponderada das saturações na fração contínua e na fração descontínua:

$$S = \omega S_f + (1 - \omega) S_n \quad . \quad (3.4)$$

Na equação (3.4),  $S_f$  é a saturação da fase molhante na fração contínua,  $S_n$  é a saturação da fase molhante na fração descontínua e  $\omega$  é a fração volumétrica do meio contínuo, definida por:

$$\omega = \frac{\phi_{fe} h_f}{\phi_{fe} h_f + \phi_{ne} h_n} \quad . \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.4) na equação (3.1), obtemos:

$$\omega v_f \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1-\omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.6)$$

A transferência de massa entre as duas porções do meio poroso pode ser modelada por:

$$(1-\omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = K (S_f - S_n) \quad , \quad (3.7)$$

onde K é um coeficiente de transferência de massa. No capítulo 5 veremos como calcular o valor de K através dos modelos de transferência de massa existentes na literatura.

A condição inicial é dada por:

$$S_f ( x , 0 ) = 0 \quad , \quad (3.8)$$

$$S_n ( x , 0 ) = 0 \quad , \quad (3.9)$$

e a condição de contorno interna é dada por:

$$S_f ( 0 , t ) = 1 \quad , \quad (3.10)$$

Logo, as equações (3.6) e (3.7), associadas às condições de contorno e inicial, formam o sistema hiperbólico de equações que representa o fenômeno físico em estudo.

Em primeiro lugar, vamos obter a solução analítica da equação (3.7) para o caso de  $S_f$  constante:

$$S_n(x,t) = S_f \left( 1 - e^{-\frac{K}{1-\omega} t} \right) \quad (3.11)$$

Ocorre, porém, que a fração descontínua é exposta à variação de saturação da fração contínua à medida em que a injeção nesta última prossegue. Para levar em conta este efeito, aplicou-se o princípio da superposição dos efeitos, obtendo-se:

$$S_n(x,t) = \int_0^t \left( 1 - e^{-\frac{K}{1-\omega} (t-\tau)} \right) \frac{\partial S_f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.12)$$

Derivando a equação (3.12) em relação ao tempo e substituindo na equação (3.6), obtemos:

$$\omega v_f \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + K \int_0^t e^{-\frac{K}{1-\omega} (t-\tau)} \frac{\partial S_f(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 0 \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é uma equação diferencial hiperbólica não-linear com um termo fonte; ela representa uma lei de conservação cuja solução mostra a formação de um choque de saturação. O choque se estabelece a partir da origem, devido à condição de contorno interna. A obtenção da solução analítica da equação (3.13) é inviável, devido à não-linearidade do termo de fluxo.

Por conveniência, vamos adimensionalizar o sistema composto pelas equações (3.6) a (3.10). Definindo as variáveis adimensionais:

$$x_D = \frac{K x}{\omega v_f} \quad (3.14)$$

$$t_D = \frac{K t}{\omega} \quad (3.15)$$

as equações (3.6) a (3.10), em termos das variáveis adimensionais, ficam:

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + \frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = S_f - S_n \quad (3.17)$$

$$S_f (x_D, 0) = 0 \quad (3.18)$$

$$S_n (x_D, 0) = 0 \quad (3.19)$$

$$S_f (0, t_D) = 1 \quad (3.20)$$

onde:

$$a = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad (3.21)$$

A equação (3.13), na forma adimensionalizada, fica:

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + \int_0^{t_D} e^{-a(t_D - \tau_D)} \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D = 0 \quad (3.22)$$

A equação (3.22) é equivalente à equação derivada por deSwaan (1978) para representar o escoamento bifásico imiscível em reservatórios fraturados. deSwaan usou o modelo empírico de Aronofsky et al. (1958) para derivar um termo de transferência de massa entre a matriz e a fratura. No capítulo 5 apresentaremos o modelo de Aronofsky e mostraremos que ele é equivalente à equação (3.11), que é solução da equação da conservação da massa para a fração descontínua, equação (3.17).

## 4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Este capítulo apresenta os métodos utilizados na solução do sistema composto pelas equações (3.16) a (3.20) que, como vimos, é não-linear. Em primeiro lugar, assumimos uma linearização da equação (3.16) para a obtenção de uma solução analítica. Em seguida, resolvemos o sistema de equações numericamente pelo Método das Características e pelo Método das Diferenças Finitas.

### 4.1. Solução Analítica para o Caso Linear

Se considerarmos que  $f(S_f)=S_f$ , estamos assumindo que a variação de saturação da fração contínua é causada apenas pela troca de massa com a fração descontínua. Para  $f(S_f)=S_f$ , a equação (3.22) torna-se linear e podemos obter uma solução analítica, usando o mesmo procedimento que Kazemi (1992) apresentou para obter a solução analítica para o modelo de deSwaan.

Vamos, então, resolver a equação (3.22),

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + \int_0^{t_D} e^{-a(t_D-\tau_D)} \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Usando a integração por partes na equação (4.1), e fazendo  $f(S_f)=S_f$ , obtemos:

$$\frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + S_f - a \int_0^{t_D} e^{-a(t_D-\tau_D)} S_f(\tau_D) d\tau_D = 0 \quad . \quad (4.2)$$

A solução analítica da equação (4.2) pode ser obtida no campo de Laplace

e invertida para o campo real (Apêndice 2):

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} \left[ e^{-a(t_D - x_D)} I_0 \left( 2 \sqrt{ax_D(t_D - x_D)} \right) + \right. \\ \left. + a \int_{x_D}^{t_D} e^{-a(\tau_D - x_D)} I_0 \left( 2 \sqrt{ax_D(\tau_D - x_D)} \right) d\tau_D \right] \quad \text{para } t_D \geq x_D \quad (4.3)$$

$$S_f(x_D, t_D) = 0 \quad \text{para } t_D < x_D \quad (4.4)$$

A condição  $x_D = t_D$  define a posição da frente de avanço que se forma na fase molhante na fração contínua. Ou seja, a velocidade da frente é constante e igual a  $dx_D/dt_D = 1$ . A Figura 4.1 mostra a comparação entre a solução analítica e a solução numérica por diferenças finitas para um esquema explícito no tempo, 1 ponto a montante (ver item 4.3). Observa-se que a saturação da frente de avanço diminui com o tempo, devido à transferência de massa da fase molhante da fração contínua para a fração descontínua.

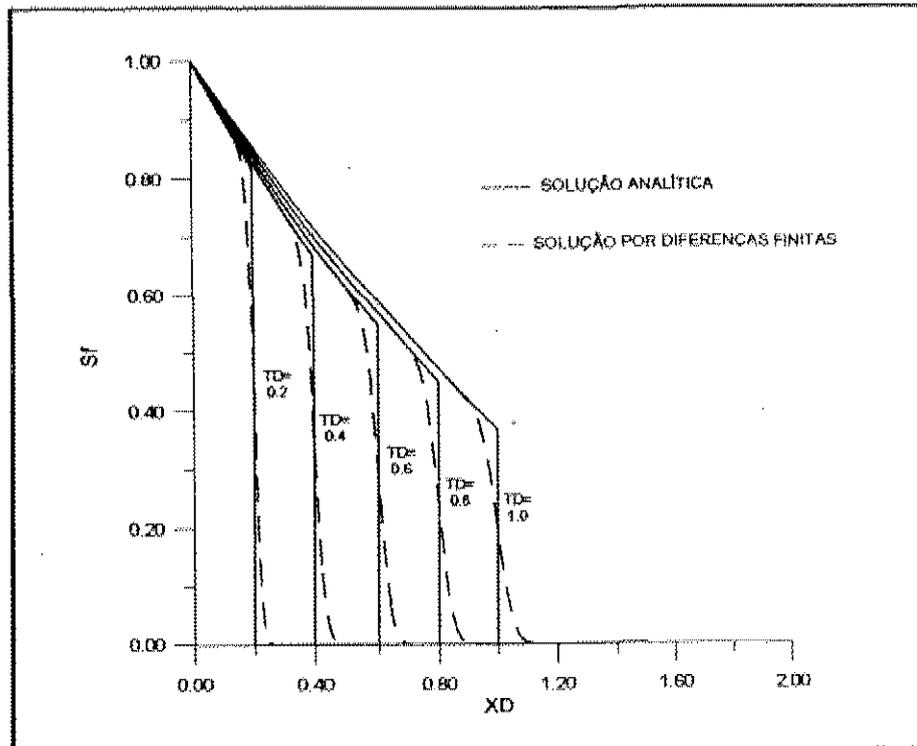


Figura 4.1 - Comparação entre a solução analítica e a solução numérica por diferenças finitas para o Caso Linear.

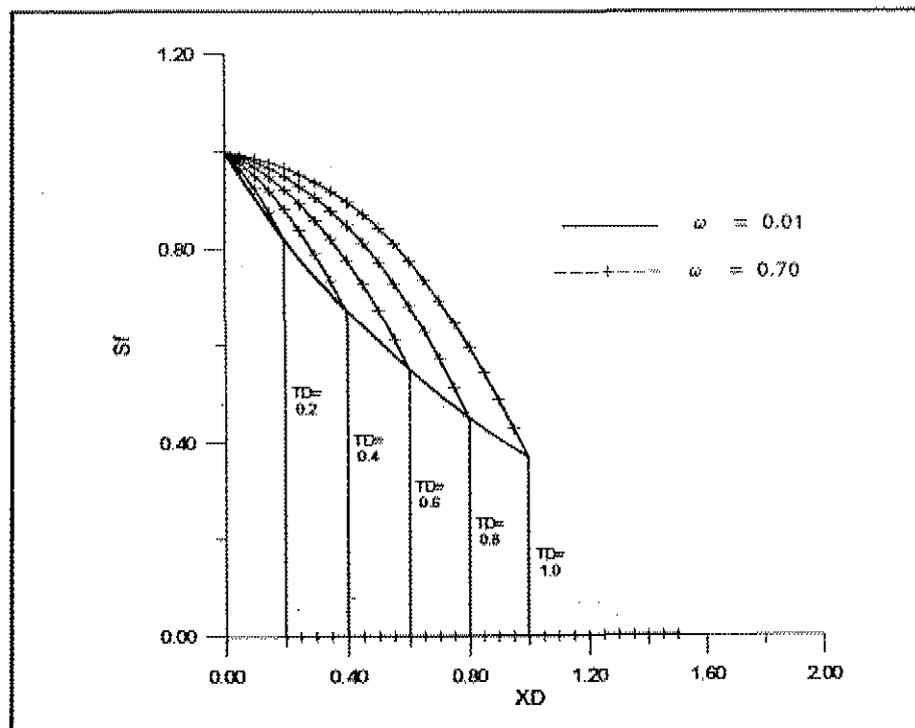


Figura 4.2 - Perfis de saturação para diferentes valores de  $\omega$ .

É interessante observar que, para este modelo, a saturação da frente de avanço na fração contínua não depende de  $\omega$ , conforme mostra a Figura 4.2 . Isto pode ser entendido se substituirmos a equação (3.17) na equação (3.16), obtendo-se a seguinte equação:

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + S_f - S_n = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Conforme expresso pela equação (3.17), a variação da saturação da fração descontínua com o tempo é proporcional à diferença de saturação entre as duas frações do meio poroso. Ou seja,  $S_n$  começa a variar na fração descontínua, numa dada posição do reservatório, a partir do momento em que a frente de avanço da fração contínua, com saturação  $S_f$ , atingir aquela posição. Logo, sobre a frente de avanço,  $S_n=0$ . Se usarmos esta condição na equação (4.5), aliada à condição  $f(S_f)=S_f$ , obtemos a seguinte solução para a saturação da frente de avanço:

$$S_f(x_D = t_D, t_D) \Big|_{frente} = e^{-t_D} \quad . \quad (4.6)$$

## 4.2 - Solução pelo Método das Características

Para que o modelo possa ser aplicado a condições mais realistas, é necessário obter a solução do sistema composto pelas equações (3.16) a (3.20) para uma curva de fluxo fracionário genérica. A título de ilustração, a curva de fluxo fracionário será modelada pela seguinte função:

$$f ( S_f ) = \frac{c S_f^2}{c S_f^2 + ( 1 - S_f )^2} , \quad (4.7)$$

onde  $c$  é uma constante positiva.

A derivada da curva de fluxo fracionário em relação à saturação é dada por:

$$f' ( S_f ) = \frac{2 c S_f ( 1 - S_f )}{[ c S_f^2 + ( 1 - S_f )^2 ]^2} . \quad (4.8)$$

As Figuras 4.3 e 4.4 mostram, respectivamente, a curva de fluxo fracionário e sua derivada para  $c=1$ .

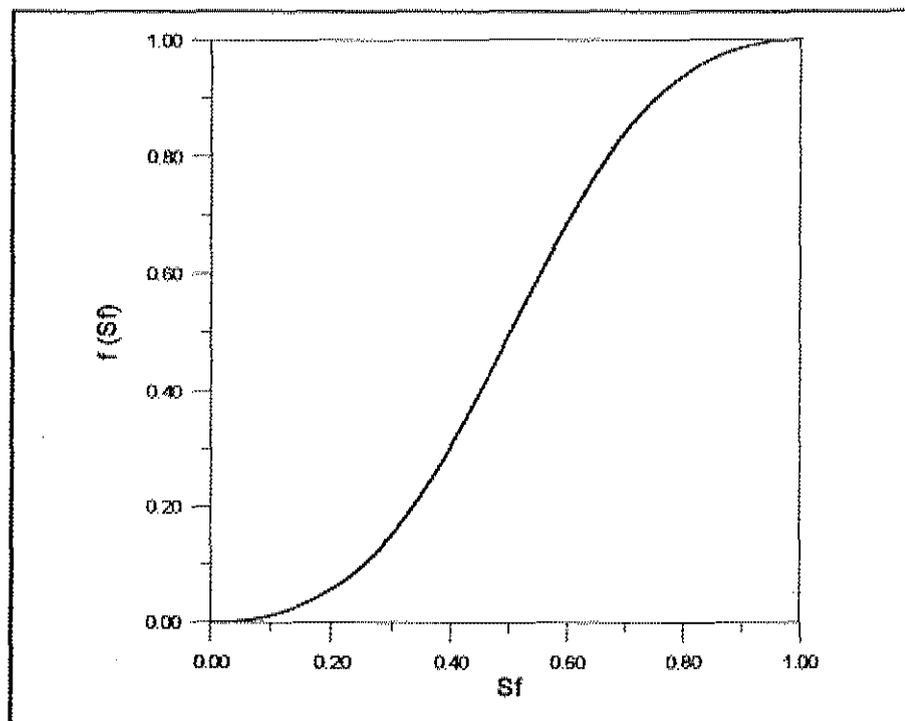


Figura 4.3 - Curva de fluxo fracionário para  $c=1$ .

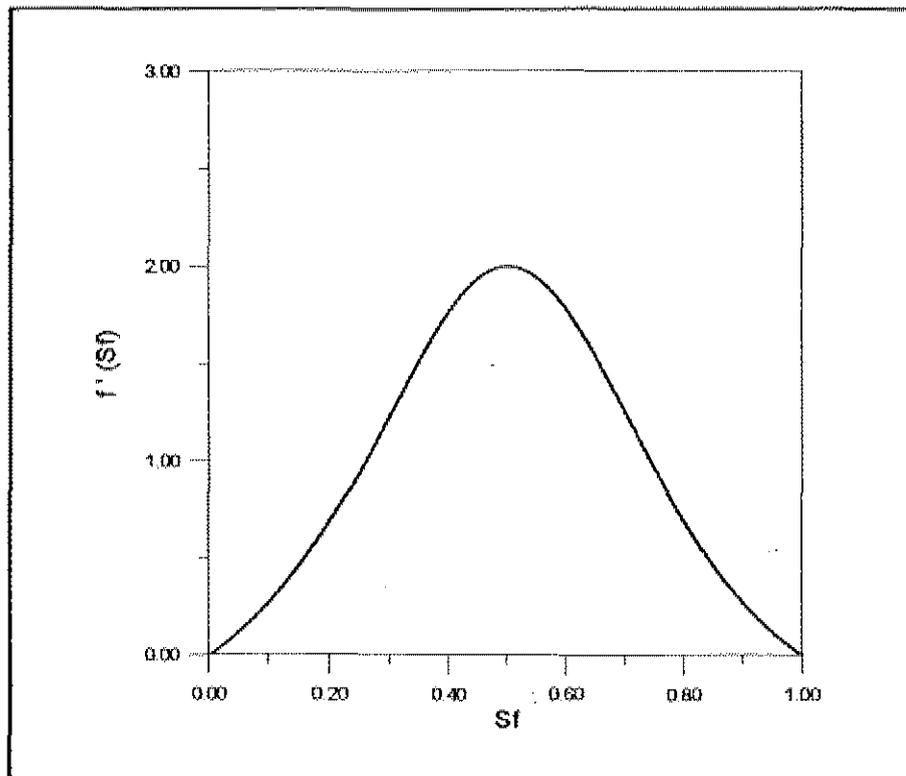


Figura 4.4 - Derivada da curva de fluxo fracionário para  $c=1$ .

O método das características foi utilizado na obtenção de uma solução semi-analítica do sistema composto pelas equações (3.16) a (3.20), da forma utilizada por Braester (1972).

O método das características permite transformar um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias, válidas ao longo de curvas no plano  $(x,t)$ , curvas estas ditas características. As equações são então integradas simultaneamente, ao longo das características correspondentes, a partir dos valores conhecidos de  $S_f$  e  $S_n$  no plano  $(x,t)$ , definidos pelas condições inicial e de contorno interna.

As equações diferenciais ordinárias resultantes da transformação das equações

(3.16) e (3.20) são dadas por (ver Apêndice 3):

$$\frac{dS_f}{dt_D} = (S_n - S_f) \quad , \quad (4.9)$$

válida sobre as características  $\alpha$  definidas por:

$$\frac{dx_D}{dt_D} = f(S_f) = \frac{2 c S_f (1 - S_f)}{[(1 - S_f)^2 + c S_f^2]^2} \quad (4.10)$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{dS_n}{dt_D} = (S_f - S_n) \quad , \quad (4.11)$$

válida sobre as características  $\beta$ , definidas por:

$$\frac{dx_D}{dt_D} = 0 \quad (4.12)$$

A solução do sistema é obtida em cada ponto de interseção de uma característica  $\alpha$  com uma característica  $\beta$ . A construção das características é realizada simultaneamente à solução das equações (4.9) e (4.11). A título de entendimento, vamos fazer alguns comentários sobre as características antes de passar à solução do sistema.

Para as características  $\alpha$ , definidas pela equação (4.10) (Figura 4.5), temos 3

famílias :

- aquelas correspondentes à condição inicial:  $S_f(x,0) = 0$ , que partem dos pontos  $(x_i,0)$  com valor inicial de  $S_f$  (denominado  $S_f^* = 0$ ) e inclinação  $dx_D/dt_D = f'(S_f^* = 0) = 0$ , ou seja, estas características partem perpendiculares ao eixo dos  $x$ . Estas características não contribuem para a solução, pois são paralelas às características  $\beta$  e, neste caso, o sistema só admite solução trivial ( $S_f = 0, S_n = 0$ ) em função das condições iniciais.

- aquelas correspondentes à condição de contorno interna:  $S_f(0,t) = 1$ , que partem dos pontos  $(0,t_i)$  com valor inicial de  $S_f^* = 1$  e inclinação  $dx_D/dt_D = f'(S_f^* = 1) = 0$ . Deste modo, estas características partem coincidentes com o eixo dos  $t$ , ou seja, estamos impondo a condição de contorno em cima das características. Isto implica numa contradição, pois  $S_f$  não pode satisfazer à condição de contorno e à equação (4.9) ao mesmo tempo. Isto é contornado conforme exposto mais adiante.

- aquelas que partem do ponto  $(0,0)$  (origem), com  $S_f^*$  assumindo um valor inicial  $0 < S_f^* < 1$  e inclinação  $dx_D/dt_D = f'(S_f^*)$ .

A Figura 4.5 dá um exemplo ilustrativo das características  $\alpha$ . Aquelas que partem da origem e do eixo dos  $t$  não são linhas retas, pois  $S_f$  sobre elas varia e, conseqüentemente, sua inclinação  $dx_D/dt_D = f'(S_f)$  em cada ponto também varia.

As características  $\beta$  (Figura 4.6), definidas pela equação (4.12), são retas perpendiculares ao eixo dos  $x$  que partem dos pontos  $(x_i,0)$  com valor inicial de  $S_n = 0$ .

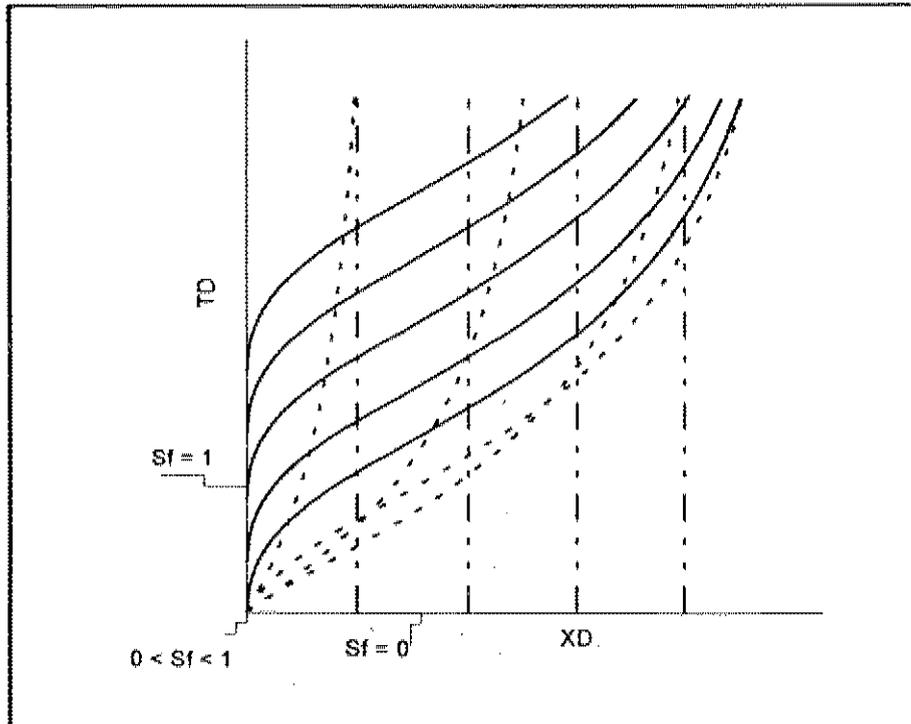


Figura 4.5 - Características  $\alpha$ .

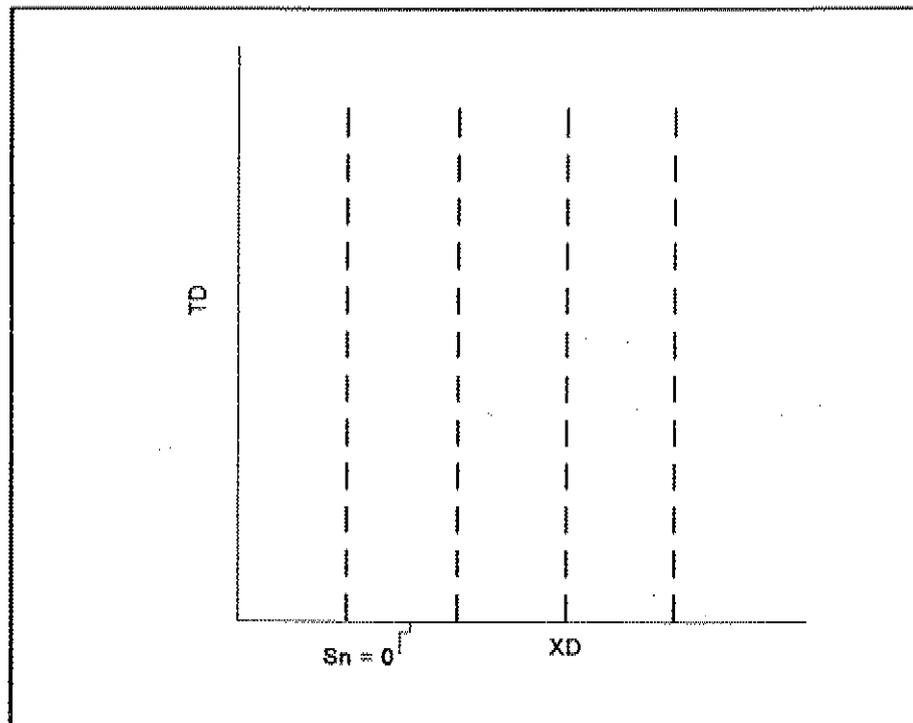


Figura 4.6 - Características  $\beta$ .

A integração das equações do sistema ao longo das características, a partir das condições iniciais, conduz a uma solução não-única, isto é, 3 diferentes valores de saturação são obtidos para o mesmo ponto num dado tempo. Pela análise da Figura 4.5, observa-se que, para um dado ponto  $(x_D, t_D)$ , três características  $\alpha$  se interceptam carregando diferentes valores de  $S_f$ . Este problema é resolvido quando se considera na solução a formação do choque de saturação, a partir da origem. A velocidade do choque é calculada através das condições de conservação da massa num elemento de volume contendo o choque, de acordo com Braester (1972).

Voltemos ao nosso sistema original, equações (3.16) e (3.17), que é repetido abaixo:

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + (S_f - S_n) = 0 \quad (4.13)$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} - (S_f - S_n) = 0 \quad (4.14)$$

Sejam  $v_{f1}$  e  $v_{f2}$  as velocidades das frentes de avanço na fração contínua e na fração descontínua, respectivamente, assumidas constantes por um curto período de tempo. Vamos considerar um sistema de coordenadas  $(\xi, \tau)$  movendo-se com a velocidade da frente; este sistema está relacionado com as coordenadas fixas  $(x_D, t_D)$  por:  $\xi_1 = x_D - v_{f1}t_D$  ;  $\xi_2 = x_D - v_{f2}t_D$ .

A integração das equações de conservação da massa (4.13) e (4.14) para um

elemento  $-\epsilon < \xi < +\epsilon$ , contendo a frente, num intervalo de tempo  $-\eta < t_D < +\eta$ , onde  $\epsilon$  e  $\eta$  tendem para zero, nos dá:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{t_D = -\eta}^{t_D = +\eta} \int_{\xi_1 = -\epsilon}^{\xi_1 = +\epsilon} \left[ \frac{\partial f(S_f)}{\partial \xi_1} - v_{f_1} \frac{\partial S_f}{\partial \xi_1} + (S_f - S_n) \right] d\xi_1 dt_D = 0 \quad (4.15)$$

e

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{t_D = -\eta}^{t_D = +\eta} \int_{\xi_2 = -\epsilon}^{\xi_2 = +\epsilon} \left[ -\frac{1}{a} v_{f_2} \frac{\partial S_n}{\partial \xi_2} - (S_f - S_n) \right] d\xi_2 dt_D = 0 \quad (4.16)$$

O termo  $(S_f - S_n)$  nas equações (4.13) e (4.14) pode ser considerado como um termo fonte que rege a transferência de massa entre as duas frações do meio poroso, e cuja integral nas equações (4.15) e (4.16) tende a zero quando  $\eta \rightarrow 0$ .

Então, as equações (4.15) e (4.16) nos levam a:

$$v_{f_1} = \frac{dx_D}{dt_D} \Big|_{f_1} = \frac{f(S_f^+) - f(S_f^-)}{S_f^+ - S_f^-} \quad (4.17)$$

$$v_{f_2} = 0 \quad \text{e} \quad S_n^+ = S_n^- \quad (4.18)$$

onde  $S_f^+ = S_f(x+\epsilon, t)$  e  $S_f^- = S_f(x-\epsilon, t)$ .

As equações (4.17) e (4.18) mostram que na fração contínua se forma uma frente (descontinuidade) de saturação e que na fração estagnante a saturação varia

gradualmente. A equação (4.17) é conhecida como condição de Rankine-Hugoniot para a velocidade da descontinuidade da solução.

Para o nosso problema,  $S_f^+ = 0$  e  $f(S_f)$  é dada pela equação (4.7). Então a equação (4.17) fica:

$$v_{fl} = \frac{dx_D}{dt_D} \Big|_{f_1} = \frac{f(S_f^-)}{S_f^-} = \frac{c S_f^-}{c (S_f^-)^2 + (1 - S_f^-)^2} \quad (4.19)$$

A descontinuidade se forma a partir da origem. Logo, a primeira característica  $\alpha$  a ser usada na integração numérica do sistema será aquela que sai da origem tangente à curva do choque, carregando uma saturação inicial  $S_f^*$  que satisfaça simultaneamente às equações (4.10) e (4.19), ou seja:

$$\frac{dx_D}{dt_D} \Big|_{car} = \frac{dx_D}{dt_D} \Big|_{f_1} \quad (4.20)$$

e, portanto,

$$f'(S_f^*) = \frac{f(S_f^*)}{S_f^*} \quad (4.21)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.8) na equação (4.21), obtemos:

$$\frac{2 c S_f^* (1 - S_f^*)}{[c (S_f^*)^2 + (1 - S_f^*)^2]^2} = \frac{c S_f^*}{c (S_f^*)^2 + (1 - S_f^*)^2} \quad (4.22)$$

cuja solução é:

$$S_f^* = \sqrt{\frac{1}{1+c}} \quad . \quad (4.23)$$

Substituindo este valor de  $S_f^*$  na equação (4.19) e integrando a partir de  $x_D=0$  e  $t_D=0$ , temos a equação que define a frente de avanço na origem :

$$x_D(t_D) = \frac{c \sqrt{1+c}}{2(c+1-\sqrt{1+c})} t_D \quad . \quad (4.24)$$

É interessante observar que o valor de saturação do choque na origem, dado pela equação (4.23), é o mesmo que o calculado pela teoria de Buckley-Leverett para meios homogêneos pois, em  $(x_D=0, t_D=0)$ ,  $S_f = S_n = 0$ , e a equação (4.13) se reduz à de Buckley-Leverett.

Neste ponto, temos todas as informações necessárias para resolver numericamente o sistema composto pelas equações (4.9) e (4.11) ao longo das características. A integração numérica é baseada em uma malha gerada pelas características  $\alpha$  e  $\beta$  no plano  $(x_D, t_D)$  (Figura 4.7).

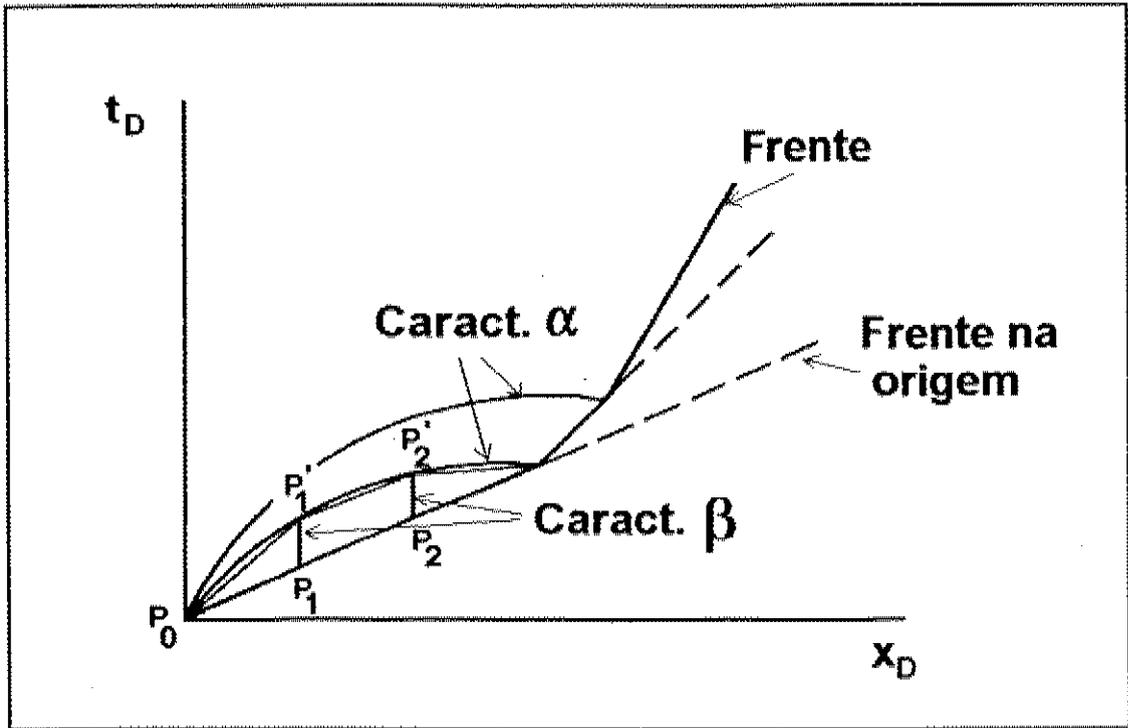


Figura 4.7 - Integração numérica do sistema ao longo das características.

O sistema, na forma discretizada, fica:

$$[ S_f(P_1') - S_f(P_0) ] = [ S_n(P_1') - S_f(P_1') ] [ t(P_1') - t(P_0) ] \quad , \quad (4.25)$$

sobre a característica:

$$x(P_1') - x(P_0) = f'(S_f)|_{P_0} [ t(P_1') - t(P_0) ] \quad (4.26)$$

e

$$\frac{1}{a} [ S_n(P_1') - S_n(P_1) ] = [ S_f(P_1') - S_n(P_1') ] [ t(P_1') - t(P_1) ] \quad , \quad (4.27)$$

sobre a característica:

$$x(P_1') - x(P_1) = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Para pequenos intervalos de tempo, as características  $\alpha$  são consideradas como retas. As características  $\beta$  são linhas retas paralelas ao eixo  $t$ . O procedimento é iniciado com uma característica  $\alpha$  partindo da origem com saturação ligeiramente superior a  $S_f^*$  dada pela equação (4.23). A interseção desta característica  $\alpha$  com a característica  $\beta$  que parte da linha da frente define novos valores de  $S_f$  e  $S_n$ , calculados pelas equações (4.25) e (4.27).

O valor de  $S_f$  diminui à medida em que avançamos ao longo da característica  $\alpha$  e, conseqüentemente, sua inclinação  $dx_D/dt_D$  aumenta monotonicamente. Após alguns passos de integração, a característica  $\alpha$  intercepta a linha da frente de avanço, resultando num salto na saturação, entre  $S_f^+ = 0$  e o  $S_f^-$  carregado pela característica. Este valor de  $S_f^-$  define então uma nova saturação da frente de avanço, cuja velocidade é calculada pela equação (4.19). Uma vez que este valor de  $S_f^-$  é menor que o  $S_f^-$  na origem, a nova velocidade da frente será menor que na origem.

Repete-se o procedimento acima descrito para outras características  $\alpha$  associadas a  $S_f^*$  tal que  $\sqrt{1/(1+c)} < S_f^* < 1$ . A partir de então, usam-se as características  $\alpha$  que partem do eixo dos  $t$  com  $S_f^*=1$ .

Neste ponto voltamos ao problema mencionado anteriormente, de que as características  $\alpha$  que partem do eixo dos  $t$  são inicialmente coincidentes com o mesmo devido à condição  $f'(S_f=1) = 0$ . Para contornar este problema vamos assumir uma aproximação para a curva de fluxo fracionário,

$$f_\varepsilon(S_f) = \begin{cases} f(S_f) & 0 \leq S_f \leq \bar{S}_f \\ \frac{1-f(\bar{S}_f)}{1-\bar{S}_f} S_f + \frac{f(\bar{S}_f) - \bar{S}_f}{1-\bar{S}_f} & \bar{S}_f < S_f \leq 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

Ou seja, estamos substituindo  $f(S_f)$  pela reta interpolada entre  $(\bar{S}_f, f(\bar{S}_f))$  e  $(1,1)$  no intervalo  $[\bar{S}_f, 1]$ . Desta forma, a derivada de  $f_\varepsilon(S_f)$  neste intervalo é constante e igual a um valor  $\varepsilon$  arbitrado, conforme mostra a Figura 4.8.

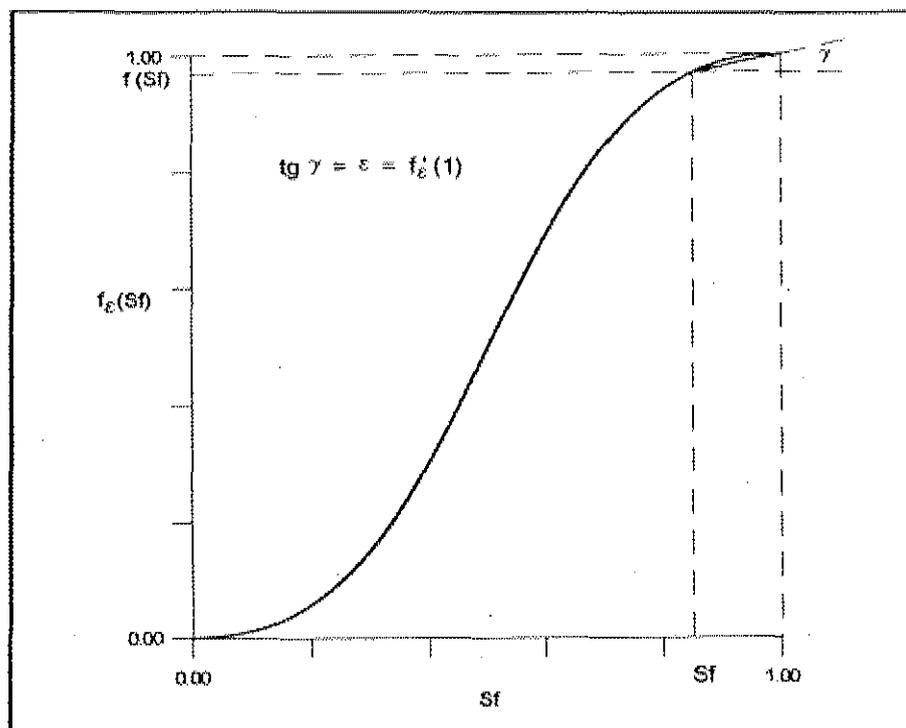


Figura 4.8 - Aproximação para a curva de fluxo fracionário.

Para a derivada de  $f_c(S_f)$ , temos :

$$f'_\epsilon(S_f) = \begin{cases} f'(S_f) & 0 \leq S_f \leq \bar{S}_f \\ \frac{1-f(\bar{S}_f)}{1-\bar{S}_f} = \epsilon & \bar{S}_f < S_f \leq 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

A construção da solução é feita conforme já mencionado. A única diferença é que, para as características que partem da origem, devemos adotar  $S_f^*$  tal que  $\sqrt{1/(1+c)} < S_f^* < \bar{S}_f$ , onde valor de  $\bar{S}_f$  pode ser obtido pela equação (4.30) para um dado valor de  $\epsilon$ :

$$\frac{1-f(\bar{S}_f)}{1-\bar{S}_f} = \epsilon \quad (4.31)$$

Substituindo a expressão para  $f(S_f)$ , equação (4.7), na equação (4.31), e explicitando  $\bar{S}_f$ , obtemos:

$$\bar{S}_f = \frac{(2\epsilon-1) + \sqrt{1 + 4 c \epsilon (1-\epsilon)}}{2 (1 + c) \epsilon} \quad (4.32)$$

Podemos usar a expansão em série  $\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} + \dots$  para obter:

$$\bar{S}_f \sim 1 - c \epsilon \quad (4.33)$$

Por exemplo, para  $c=1$  e  $\epsilon = 0.001$ , obtemos  $\bar{S}_f = 0.999$ .

Desta forma, na construção da solução, devemos considerar as características que partem da origem com  $S_f^*$  entre  $\sqrt{1/(1+c)} < S_f^* < S_f$  e inclinação

$dx_D/dt_D=f(S_i^*)$ , e as características que partem do eixo  $t$  com  $S_i^*=1$  e inclinação  $dx_D/dt_D=f_i'(1)=\epsilon$ .

As Figuras 4.9 a 4.11 apresentam os perfis de saturação e a Figura 4.12, as características obtidas para o caso de  $\omega = 0,25$ . As Figuras 4.13 a 4.15 apresentam os perfis de saturação e a Figura 4.16, as características obtidas para o caso de  $\omega = 0,75$ . Conforme já observado para o caso linear, a saturação da fase molhante na fração contínua,  $S_p$ , diminui com o tempo devido à troca de massa entre as duas frações do meio poroso. Para efeito de comparação, estão também plotadas as soluções obtidas por diferenças finitas. Foi usada a mesma discretização no espaço ( $\Delta x_D = 5,0 \text{ E-}3$  para  $\omega = 0,25$  e  $\Delta x_D = 1,0 \text{ E-}3$  para  $\omega = 0,75$ ). O método das características revelou-se adequado à solução do sistema hiperbólico de equações. Para uma mesma discretização, a determinação da frente de avanço é mais acurada que no método de diferenças finitas.

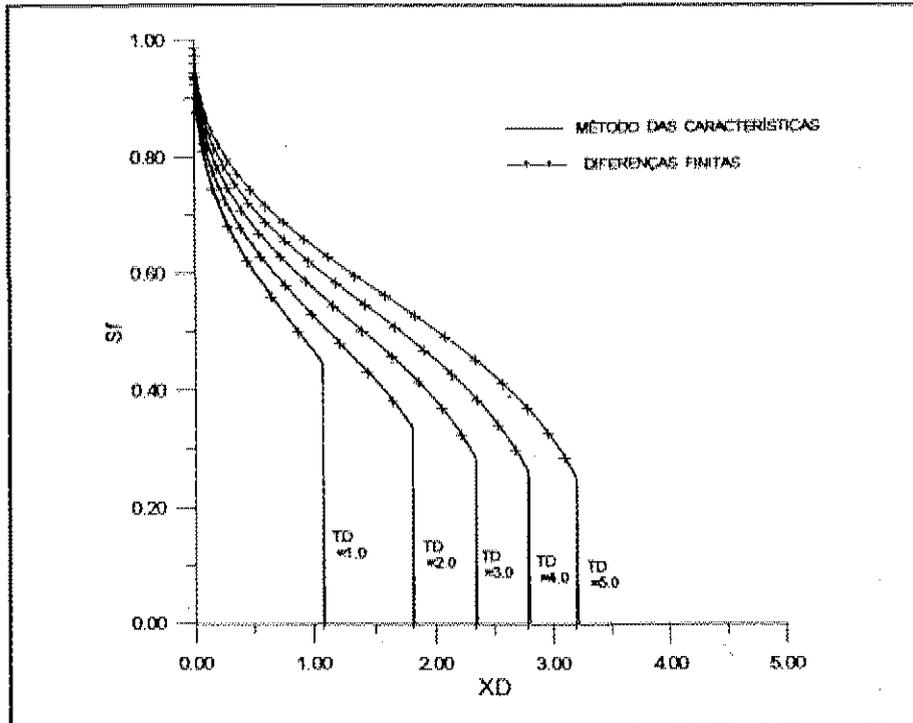


Figura 4.9 - Perfis de  $S_I$  para  $\omega = 0,25$ .

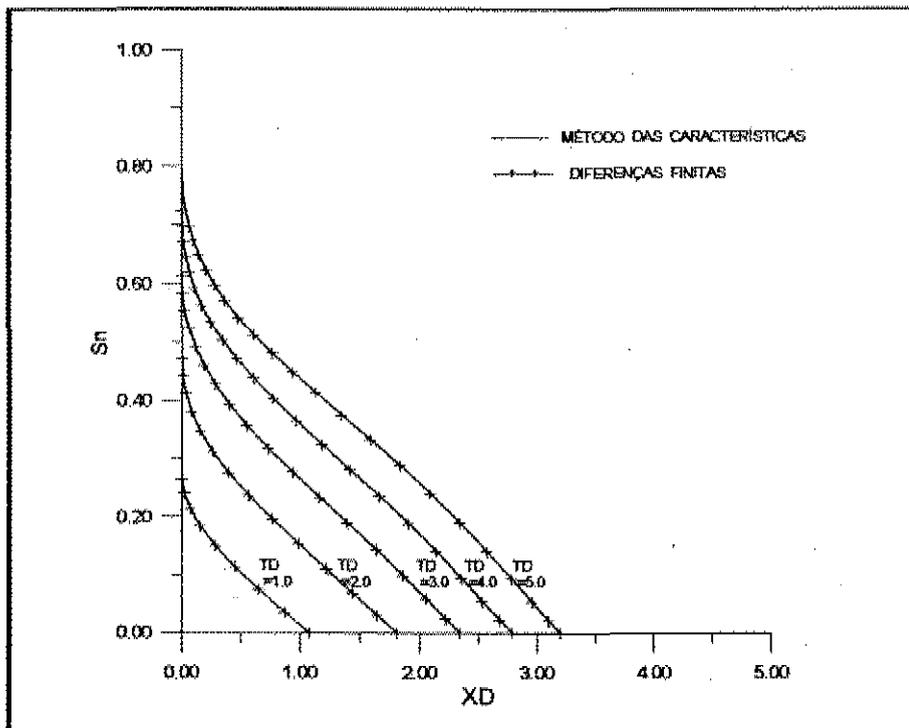


Figura 4.10 - Perfis de  $S_n$  para  $\omega = 0,25$ .

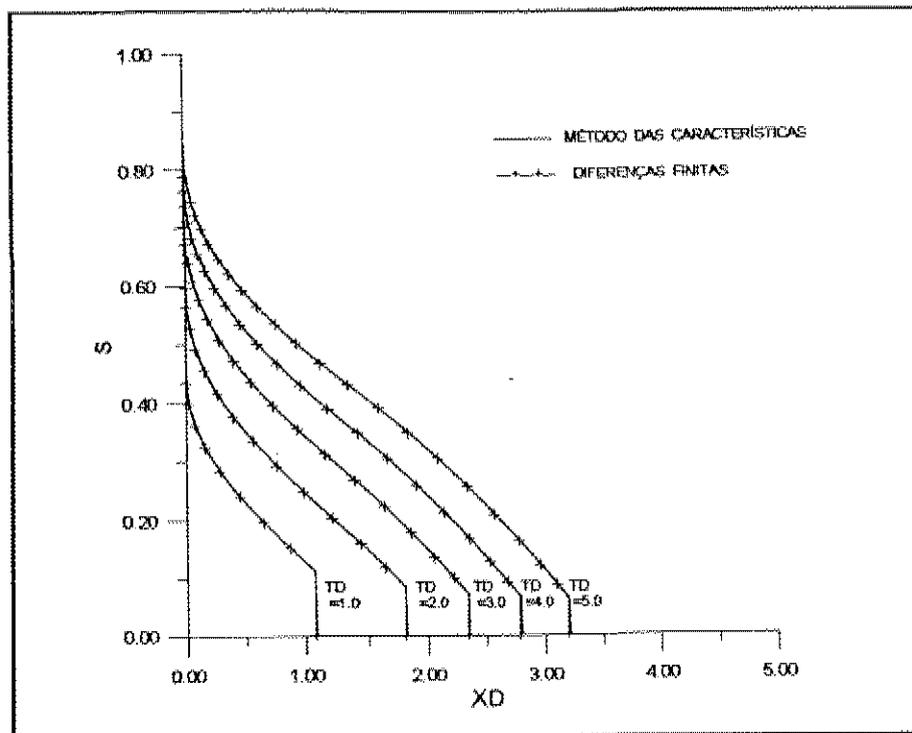


Figura 4.11 - Perfis de S para  $\omega = 0,25$ .

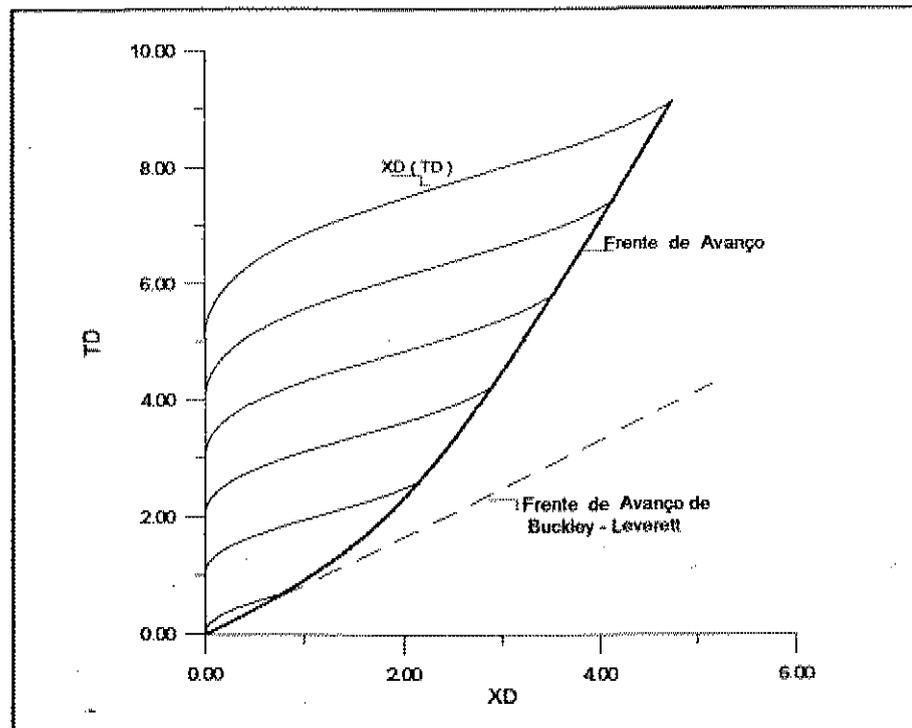


Figura 4.12 - Características para  $\omega = 0,25$ .

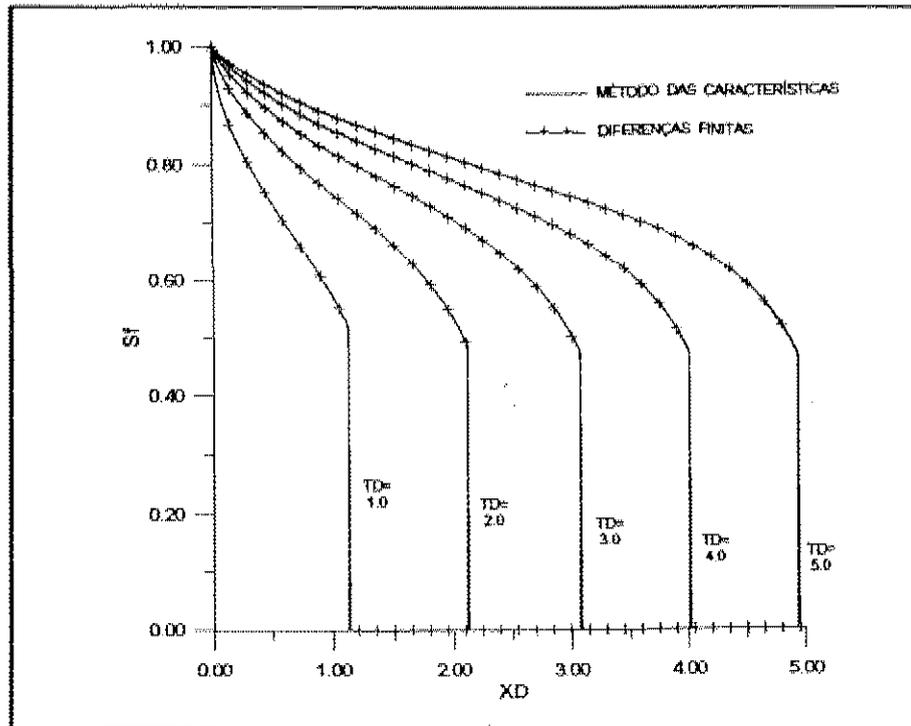


Figura 4.13 - Perfis de  $S_f$  para  $\omega = 0,75$ .

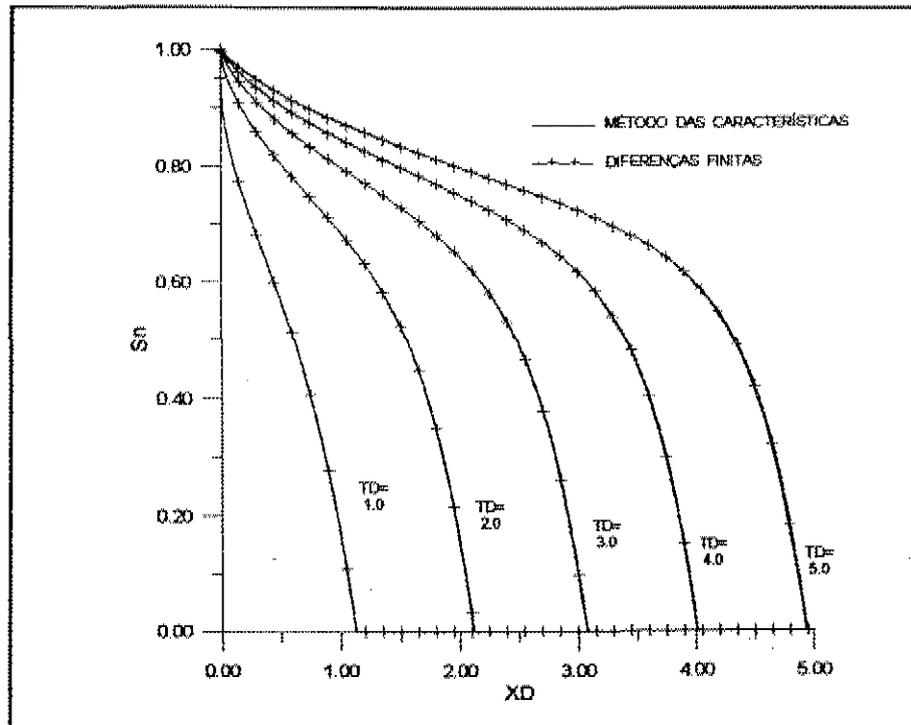


Figura 4.14 - Perfis de  $S_n$  para  $\omega = 0,75$ .

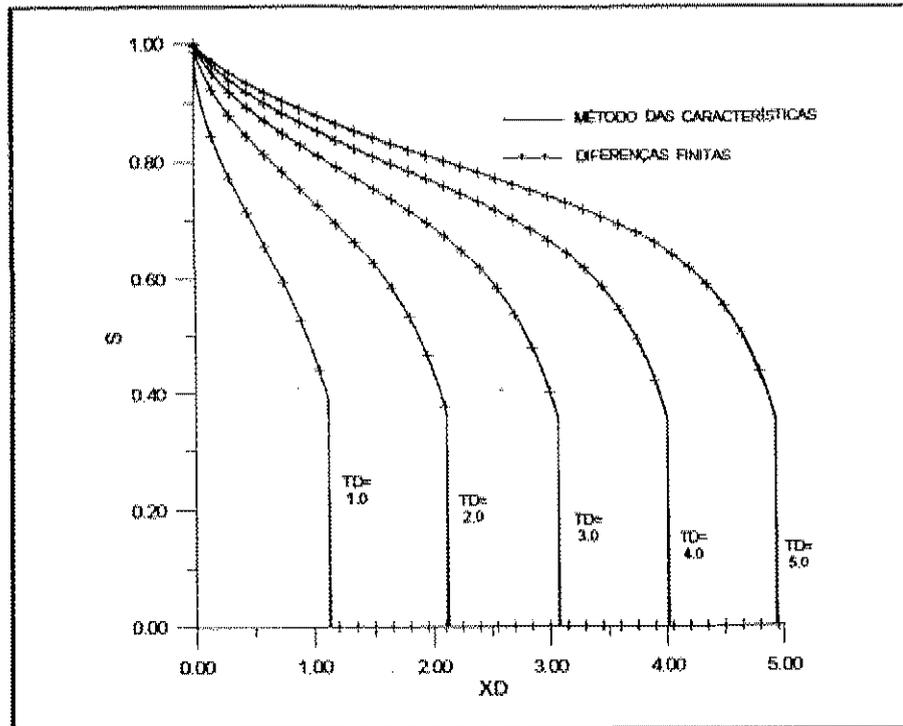


Figura 4.15 - Perfis de  $S$  para  $\omega = 0,75$ .

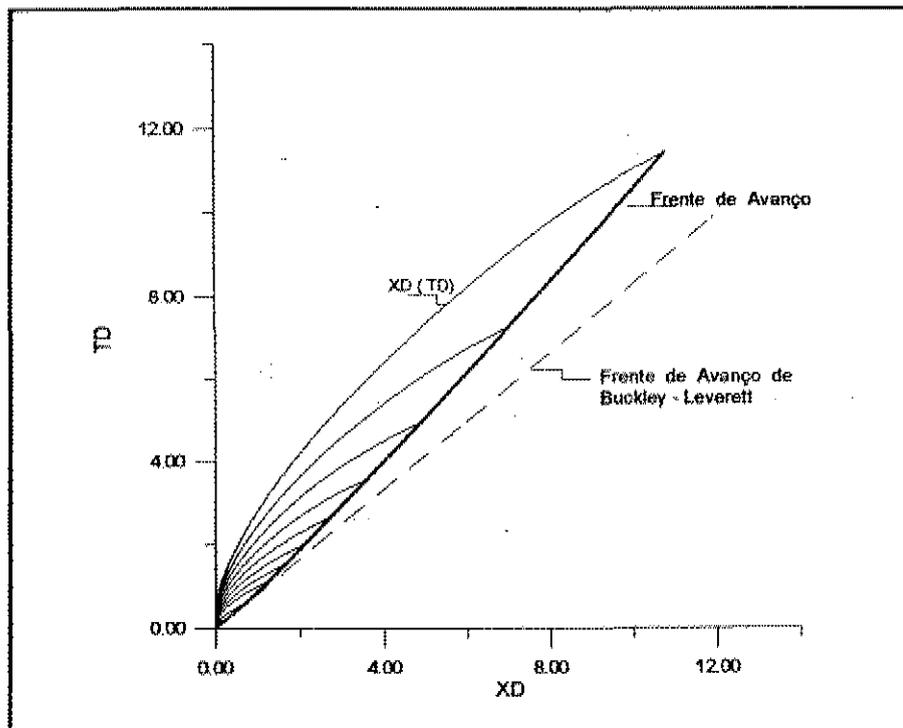


Figura 4.16 - Características para  $\omega = 0,75$ .

### 4.3. Solução pelo Método das Diferenças Finitas

A solução numérica por diferenças finitas utilizou um esquema explícito no tempo e um ponto a montante no espaço. Para a solução de  $S_f$ , partimos da equação (4.2):

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + S_f - a \int_0^{t_D} e^{-a(t_D-\tau_D)} S_f(\tau_D) d\tau_D = 0 \quad , \quad (4.34)$$

A equação (4.2), na forma discretizada, é expressa por (vamos suprimir os subscritos  $f$  e  $D$ , para fins de simplificação):

$$\frac{f(S_i^n) - f(S_{i-1}^n)}{\Delta x} + \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} + S_i^{n+1} - a F(t^{n+1}) = 0 \quad , \quad (4.35)$$

onde:

$$F(t^{n+1}) = \int_0^{t^{n+1}} e^{-a(t^{n+1}-\tau)} S_i(\tau) d\tau = 0 \quad . \quad (4.36)$$

A integral de convolução da equação (4.36) pode ser discretizada de forma a tomar o algoritmo eficiente em termos computacionais (a mesma idéia é explorada por Kazemi et al. (1992)):

$$F(t^{n+1}) = \sum_{j=0}^n \left( \prod_{k=j}^n e^{-a\Delta t_k} \right) S_i^{j+1} \Delta t_j = 0 \quad , \quad (4.37)$$

onde:

$$\Delta t_k = t^{k+1} - t^k \quad . \quad (4.38)$$

Na equação (4.37), podemos explicitar o termo correspondente ao tempo  $t^{n+1}$ :

$$F(t^{n+1}) = S_i^{n+1} e^{-a\Delta t_n} \Delta t_n + \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \left( \prod_{k=j}^{n-1} e^{-a\Delta t_k} \right) S_i^{j+1} \Delta t_j \right] e^{-a\Delta t_n} , \quad (4.39)$$

ou,

$$F(t^{n+1}) = e^{-a\Delta t_n} [ S_i^{n+1} \Delta t_n + SUM^{n-1} ] , \quad (4.40)$$

onde:

$$SUM^{n-1} = e^{-a\Delta t_{n-1}} [ S_i^n \Delta t_{n-1} + SUM^{n-2} ] . \quad (4.41)$$

Desta forma, a convolução no tempo  $t^{n+1}$  pode ser expressa em função da convolução no tempo  $t^n$ , o que resulta num grande ganho em termos de tempo computacional.

Para a determinação de  $S_{iv}$  discretizamos a equação (4.14):

$$\frac{S_{n_i}^{n+1} - S_{n_i}^n}{\Delta t} = a ( S_{f_i}^{n+1} - S_{n_i}^{n+1} ) . \quad (4.42)$$

A solução das equações (4.35) e (4.42) pode ser visualizada nas Figuras 4.9 a 4.11 e 4.13 a 4.15.

## 5. A TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Num reservatório heterogêneo submetido à injeção de água, a transferência de massa que ocorre entre porções adjacentes de diferentes características permo-porosas é governada pela ação das forças viscosas, gravitacionais e capilares.

As forças viscosas são aquelas resultantes dos gradientes de pressão que se estabelecem durante o fluxo. Em reservatórios estratificados, o fluxo cruzado viscoso resulta da diferença entre os gradientes horizontais de pressão de camadas adjacentes, diferença esta oriunda do fato de os fluidos deslocante e deslocado terem mobilidades diferentes em cada camada. Para razões de mobilidade menores que 1 o fluxo cruzado viscoso é favorável à recuperação de óleo das camadas menos permo-porosas (Zapata e Lake (1981)). Em reservatórios fraturados, os gradientes de pressão que se estabelecem no sistemas de fraturas são pequenos e portanto a contribuição das forças viscosas na recuperação do óleo da matriz é pequena (Aronofsky et al. (1958)).

As forças gravitacionais podem ter importância na presença de grandes diferenças de densidade, como é o caso dos sistemas gás-óleo. Em geral, para os sistemas óleo-água, as soluções analíticas obtidas para representar o fluxo no meio poroso desconsideram a influência das forças gravitacionais.

As forças capilares há muito são reconhecidas como tendo um papel relevante na troca de massa entre porções adjacentes de diferentes características permo-porosas. Em reservatórios fraturados, a expulsão do óleo da matriz devido à embebição capilar tem sido estudada há muito tempo, tanto em termos de modelagem matemática quanto em termos de verificação experimental.

Em geral, a transferência de massa é modelada através de uma função empírica (Aronofsky et al., 1958) ou através da equação de difusão com coeficiente de difusão dependente da saturação (Beckner et al., 1987) ou independente da saturação (Dutra Jr., 1991).

### 5.1. Experimentos de Laboratório num Bloco de Matriz

Mattax e Kyte (1962) realizaram experimentos de laboratório em amostras cilíndricas embebendo água numa única face ou em todas as faces e estabeleceram a lei de escala que permite corrigir os dados de laboratório para as condições de campo. No caso de os efeitos gravitacionais serem negligíveis, as seguintes condições devem ser verificadas:

- a amostra de laboratório e o bloco de matriz do reservatório devem ter a mesma forma.
- A razão  $\mu_w / \mu_o$  deve ser idêntica para o reservatório e o laboratório.
- A distribuição dos fluidos e o padrão de movimentação da água nas fraturas deve ser reproduzido no laboratório.

Eles estabeleceram que o tempo para a recuperação de óleo no laboratório poderia ser relacionado ao tempo para a mesma recuperação no campo usando a seguinte equação:

$$\left( t \sqrt{\frac{k_a}{\Phi} \frac{\sigma}{\mu_w L^2}} \right)_{\text{laboratório}} = \left( t \sqrt{\frac{k_a}{\Phi} \frac{\sigma}{\mu_w L^2}} \right)_{\text{campo}}, \quad (5.1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão interfacial óleo-água,  $L$  é o comprimento característico do bloco de matriz,  $k_a$  e  $\phi$  são a permeabilidade absoluta e a porosidade do bloco de matriz, respectivamente.

Ou seja, se a recuperação de óleo por embebição for plotada contra o parâmetro adimensional acima, a mesma curva será obtida para o modelo de laboratório e para todos os blocos de reservatório de mesma geometria e tipo de rocha.

## 5.2. Modelos de Transferência de Massa

### 5.2.1 - O Modelo Empírico de Aronofsky

Aronofsky et al. (1958) reportaram que a embebição de água num bloco de matriz pode ser modelada como uma função exponencial do tempo. Eles propuseram a seguinte expressão para a recuperação de óleo:

$$R = R_{\infty} ( 1 - e^{-\lambda t} ) \quad (5.2)$$

onde: -  $R$  é o volume acumulado de óleo produzido por embebição, por unidade de volume de reservatório, e é igual à variação do volume de água no bloco:

$$R = (S_{wn} - S_{wcn}) \phi_n$$

-  $R_{\infty}$  é o volume máximo de óleo, por unidade de volume de reservatório, produzido após um tempo infinito :

$$R_{\infty} = (1 - S_{orn} - S_{wcn}) \phi_n$$

-  $\lambda$  é o fator característico de embebição.

A razão  $R/R_{\infty}$  é a própria definição de  $S_r$ . Assim sendo, quando comparamos a equação (5.2) com a equação (3.11), observamos que a formulação proposta para a transferência de massa nesta dissertação é equivalente à de Aronofsky et al. para o caso de  $S_r = 1$ , isto é, considerando o bloco imerso na água. A equivalência entre as constantes de transferência de massa dos dois modelos se dá através da seguinte relação:

$$\frac{K}{1-\omega} = \lambda \quad (5.3)$$

Pela equação (5.2), observa-se que  $\lambda$  tem dimensão de  $[T]^{-1}$ . Se realizarmos um ensaio de embebição de um bloco de matriz, podemos calcular  $\lambda$  como o inverso do tempo para se recuperar  $(1-1/e) = 63\%$  do volume recuperável do bloco. Porém, o valor de  $\lambda$  depende da geometria e das características petrofísicas do sistema. Um valor de  $\lambda$  obtido em laboratório não necessariamente se aplica ao reservatório real, onde a dimensão dos blocos é muito maior. Uma maneira de corrigir os dados de laboratório para as condições de campo é através do uso da lei de escala de Mattax e Kyte. Kazemi et al. (1992) definiram os seguintes parâmetros adimensionais:

$$t_D = \left( \sqrt{\frac{k_a}{\phi}} \frac{\sigma}{\mu_w L^2} \right) t \quad (5.4)$$

e

$$\lambda_D = \left( \sqrt{\frac{\phi}{k_a}} \frac{\mu_w L^2}{\sigma} \right) \lambda \quad (5.5)$$

Utilizando as equações (5.4) e (5.5), podemos reescrever a equação (5.2) como:

$$R = R_{\infty} ( 1 - e^{-\lambda_D t_D} ) \quad . \quad (5.6)$$

De modo a ajustar todos os dados de Mattax e Kyte numa única correlação, Kazemi et al. (1992) redefiniram as equações (5.4) e (5.5) em termos do fator de forma do bloco da matriz,  $F_s$ , como:

$$t_D = \left( \sqrt{\frac{k_a}{\phi}} \frac{\sigma F_s}{\mu_w} \right) t \quad (5.7)$$

e

$$\lambda_D = \left( \sqrt{\frac{\phi}{k_a}} \frac{\mu_w}{\sigma F_s} \right) \lambda \quad . \quad (5.8)$$

onde o fator de forma  $F_s$  é definido como:

$$F_s = \frac{1}{V_{ma}} \sum_s \frac{A_{ma}}{d_{ma}} \quad , \quad (5.9)$$

sendo  $V_{ma}$  é o volume do bloco de matriz,  $A_{ma}$  a área superficial aberta ao fluxo numa dada direção,  $d_{ma}$  a distância da superfície aberta ao fluxo ao centro do bloco de matriz; o somatório é feito considerando todas as superfícies do bloco de matriz expostas ao fluxo. Por exemplo, para um bloco retangular com todas as faces embebendo,

$$F_s = 4 \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad . \quad (5.10)$$

Para um cilindro com todos os lados embebendo:

$$F_s = \left( \frac{4}{h^2} + \frac{2}{r^2} \right) \quad (5.11)$$

A Figura 5.1 mostra a correlação obtida para os dados de Mattax e Kyte. Uma única curva que ajusta todos os dados foi obtida para  $\lambda_D = 0,0111$ .

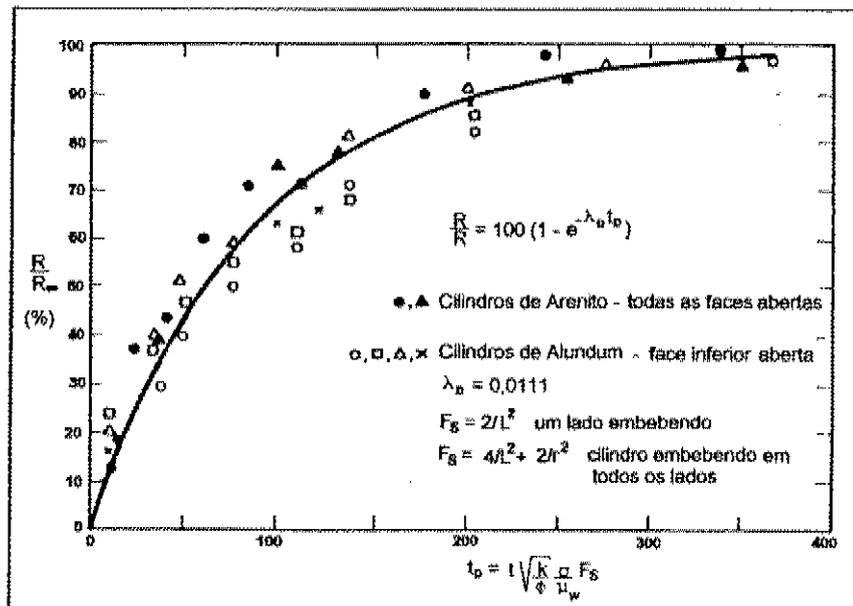


Figura 5.1 - Correlação ajustada por Kazemi et al. aos dados de Mattax e Kyte (extraída de Kazemi et al. (1992)).

## 5.2.2 - O Modelo Analítico de Reis e Cil

Reis e Cil (1992) derivaram um modelo analítico para a embebição de água e expulsão de óleo em contra-corrente que incorpora as propriedades petrofísicas do sistema sem parâmetros empíricos. São considerados 2 períodos de embebição: um período transiente, que ocorre até a frente de embebição atingir o fim do bloco, seguido de um período de atuação tardio. As premissas assumidas são: (1) os perfis de saturação de óleo e água atrás da frente de embebição são lineares; (2) a pressão capilar durante a embebição é uma função linear da saturação; (3) a relação entre a pressão capilar e a soma da mobilidade do óleo e da água atrás da frente de avanço é constante.

A produção acumulada de óleo durante o período transiente,  $t_D \leq 1$ , é dada por:

$$\frac{R}{R_{\infty}} = \frac{1}{2} \sqrt{t_D} \quad , \quad (5.12)$$

e, durante o período de atuação tardio, por:

$$\frac{R}{R_{\infty}} = 1 - \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{1}{2} (1 - t_D) \right] \quad , \quad (5.13)$$

onde:

$$t_D = \frac{t}{t^*} \quad . \quad (5.14)$$

Na equação (5.14),  $t^*$  é o tempo característico de embebição, isto é, o tempo necessário para a frente de embebição atingir o fim do bloco da matriz. Este tempo é dado por:

$$t^* = \frac{L^2 \Delta S_o \left[ \left( \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right) + \left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} \right) \right]}{\sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{\phi}{8k_a}} \quad , \quad (5.15)$$

onde L é o comprimento do bloco de matriz,  $\Delta S_o$  é a saturação recuperável de óleo ( $1-S_{wr}-S_{or}$ ),  $\sigma$  e  $\theta$  são a tensão interfacial e o ângulo de contato entre os fluidos, respectivamente, e  $K$  e  $\phi$  são a permeabilidade e a porosidade do bloco de matriz. As mobilidades são assumidas constantes.

Este modelo prevê que a recuperação é de 50% quando a frente de avanço atinge o fim do bloco de matriz. Ou seja,  $t^*$  é o tempo necessário para recuperar 50% do total. Reis obteve um modelo simplificado que representa os dois períodos de fluxo substituindo o tempo característico de embebição,  $t^*$ , na equação de Aronofsky e calculando o valor de  $\lambda$  tal que 50% do óleo fosse recuperado em  $t^*$ .

O modelo simplificado obtido foi:

$$\frac{R}{R_\infty} = 1 - \exp \left[ \left( \ln \frac{1}{2} \right) t_D \right] \quad . \quad (5.16)$$

Usando este modelo, a constante empírica  $\lambda$  do modelo de Aronofsky é calculada por:

$$\lambda = \frac{\sigma}{v \mu_w L^2} \sqrt{\frac{k_a}{\phi}} \quad , \quad (5.17)$$

onde  $v$  é dado por:

$$v = \frac{\Delta S_o}{\cos \theta \sqrt{8} \ln(2)} \frac{\left[ \left( \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right) + \left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} \right) \right]}{\mu_w} \quad . \quad (5.18)$$

Para os dados de Mattax e Kyte, Reis calculou os tempos característicos de embebição com a eq. (5.15), assumindo permeabilidades relativas de ambas as fases constantes e iguais a 0,1, e obteve valores próximos aos tempos medidos para se recuperar 50% do óleo. A Figura 5.2 mostra o ajuste do modelo de Reis aos dados de laboratório de Mattax e Kyte. Reis obteve também bons resultados quando testou seu modelo com os dados experimentais de Hamon e Vidal (1986) e Cuiec et al (1990), normalizando os dados experimentais pelo tempo para se recuperar 50% do óleo.

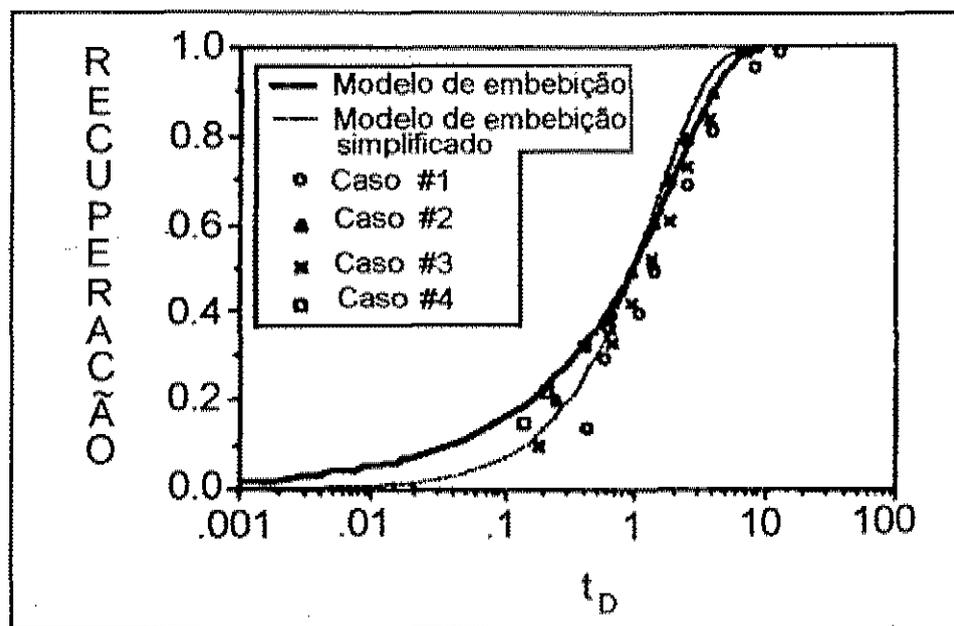


Figura 5.2 - Ajuste do modelo de Reis e Cil aos dados de Mattax e Kyte (extraída de Reis e Cil (1993)).

Tanto o modelo de Reis quanto o modelo de Kazemi admitem que o tempo para se obter um dado valor de recuperação é proporcional ao quadrado do

comprimento do bloco. O expoente  $\lambda$  calculado pelo modelo de Reis pode servir como uma primeira aproximação para ajuste do modelo proposto nesta dissertação aos dados reais, conforme apresentado no capítulo 6.

### 5.3 - Aplicação do Modelo de Aronofsky na Modelagem Matemática de Reservatórios Fraturados

deSwaan (1978) formulou matematicamente a equação para o deslocamento unidimensional bifásico num reservatório fraturado no qual os blocos de matriz são submetidos à uma variação gradual de saturação nas fraturas à medida em que a água avança nas fraturas. Para isso, usou o modelo de Aronofsky para derivar um termo de transferência de massa entre a matriz e a fratura. deSwaan sugeriu que a constante de transferência de massa  $\lambda$  para os blocos do reservatório fosse determinada a partir de ensaios de laboratório em uma amostra de rocha da matriz como o inverso do tempo necessário para se obter 63%, ou seja,  $(1-1/e)$  da recuperação final. A curva de recuperação obtida para o laboratório poderia ser usada para fazer previsões de comportamento para o campo utilizando-se a lei de escala derivada por Mattax e Kye.

Kazemi et al. (1992) utilizaram o modelo de Aronofsky para derivar pseudo-funções de transferência entre a matriz e a fratura, que foram então incorporadas a um simulador de dupla porosidade. Segundo Kazemi et al., a constante  $\lambda$  deve ser considerada puramente como um fator de ajuste de curva, ou seja, não se deve atribuir a  $\lambda$  um significado físico. O valor de  $\lambda$  foi determinado a partir de simulações

refinadas de um único bloco de matriz como o inverso do tempo necessário para se obter 63% da recuperação final.

## 6 - VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Este capítulo apresenta o ajuste do modelo proposto a um dos experimentos de laboratório conduzidos por Kazemi e Merrill (1979). Estes autores realizaram experimentos em amostras cilíndricas e blocos retangulares cortados ao longo do comprimento, de modo a representar uma fratura com dois blocos de matriz adjacentes. Os lados da amostra foram selados e foram realizados ensaios de injeção de água com vazão constante, com o plano da fratura e a amostra colocados na horizontal. Este experimento foi usado por Kazemi et al (1992) para validar o modelo de deSwaan (1978).

A Figura 6.1 representa esquematicamente o experimento realizado:

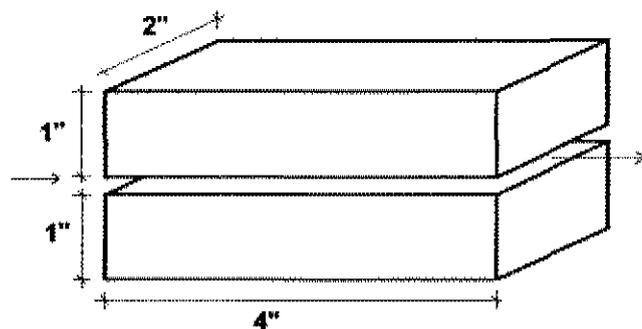


Figura 6.1 - Esquema do experimento de Kazemi e Merrill.

Os dados relativos ao experimento são os seguintes:

$q$ (cm <sup>3</sup> /s)	.....	1,447
$L$ (cm)	.....	10,2
$b$ (cm)	.....	5,08
$h_r$ (cm)	.....	0,03048
$h_n$ (cm)	.....	5,08
$A$ (cm <sup>2</sup> )	.....	25,2
$\phi_i$ (%)	.....	0,14 , definida em relação ao volume de rocha total.
$\phi_n$ (%)	.....	17,44 , idem.
$\mu_o$ (cP)	.....	4,6
$\mu_w$ (cP)	.....	1,0
$S_{wcn}$	.....	0,43
$S_{om}$	.....	0,34
$k_{rw}, k_{ro}$	.....	não fornecidas
$k_s$	.....	56 mD

O modelo proposto no capítulo 3 admite dois graus de liberdade para o ajuste: a curva de fluxo fracionário,  $f(S_p)$ , e o coeficiente de transferência de massa,  $K$ . Conforme demonstrado no capítulo 5, há uma equivalência entre a constante  $K$  do nosso modelo e a constante  $\lambda$  do modelo de Aronofsky, isto é:

$$\frac{K}{1 - \omega} = \lambda \quad . \quad (6.1)$$

Então, para a determinação de  $K$ , podemos utilizar o modelo de Reis e a correlação ajustada por Kazemi et al. (1992) aos dados experimentais de Mattax e

Kyte. Para isso, fazemos uso da simetria do experimento em relação ao eixo da fratura, de modo a obter uma configuração equivalente à que Reis usou para derivar seu modelo de embebição.

Pelo modelo de Reis:

$$\lambda = \frac{\sigma}{v \mu_w L^2} \sqrt{\frac{k_a}{\phi}} \quad , \quad (6.2)$$

onde  $v$  é dado por:

$$v = \frac{\Delta S_o}{\cos \theta \sqrt{8} \ln(2)} \frac{\left[ \left( \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right) + \left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} \right) \right]}{\mu_w} \quad . \quad (6.3)$$

Os parâmetros de rocha nas equações (6.2) e (6.3) dizem respeito à matriz.

Para o cálculo de  $\lambda$ , os dados utilizados foram:

$$\sigma - 35 \text{ dina/cm}$$

$$\theta - 30^\circ$$

$$\mu_w - 1,0 \text{ cP}$$

$$\mu_o - 4,6 \text{ cP}$$

$$\phi_r - 17,44 \%$$

$$\Delta S_o - 0,23$$

$$k_a - 56\text{mD} = 5,527 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$$

$$k_{rw} \text{ e } k_{ro} = 0,1 - \text{valores assumidos}$$

Substituindo-se os dados nas equações (6.2) e (6.3), o resultado obtido foi

$$\lambda = 348 \text{ dia}^{-1}.$$

Para efeito de comparação, utilizamos também a correlação ajustada por Kazemi et al. aos dados experimentais de Mattax e Kyste:

$$\lambda_D = \left( \sqrt{\frac{\phi}{k_a}} \frac{\mu_w}{\sigma F_r} \right) \lambda \quad \text{com } \lambda_D = 0,0111, \quad (6.4)$$

onde  $F_r = 2/L^2$ , para um bloco com um único lado embebendo.

Utilizando-se a equação (6.4), obtemos  $\lambda = 59 \text{ dia}^{-1}$ , valor bastante inferior ao fornecido pelo modelo de Reis. As permeabilidades relativas adotadas para o modelo de Reis podem não ser representativas.

Para a curva de fluxo fracionário, o ajuste foi feito considerando-se a função proposta no capítulo 3:

$$f(S_f) = \frac{c S_f^2}{(1 - S_f)^2 + c S_f^2}, \quad (6.5)$$

onde  $c$  é uma constante, assumida variar no intervalo  $0 < c < 1$ . Com isto, estamos indiretamente ajustando a permeabilidade relativa à água.

Para a aplicação do nosso modelo ao caso de um reservatório fraturado, a equação (3.6) do capítulo 3 é rigorosamente válida, porém devemos definir  $\omega$ , a fração volumétrica da fratura, como a relação entre a porosidade da fratura e a soma das porosidades da fratura e da matriz, pois estas foram calculadas em relação ao volume total de rocha.

$$\omega = \frac{\phi_{fe}}{\phi_{fe} + \phi_{ne}}, \quad (6.6)$$

onde  $\phi_{fe} = \phi_f = 0,14\%$  e  $\phi_{ne} = \phi_n (1 - S_{om} - S_{wcn}) = 4,0\%$ .

A velocidade efetiva de injeção deve ser calculada considerando-se a área total, isto é:

$$v_f = \frac{q}{b (h_f + h_n) \phi_{fe}} \quad (6.7)$$

Os valores calculados foram  $\omega = 0,0337$  e  $v_f = 0,0398$  cm/s. O ajuste do modelo aos resultados do experimento foi obtido para  $K = 90$  dia<sup>-1</sup> e  $c = 0,75$ . As Figuras 6.2 e 6.3 mostram, respectivamente, o ajuste das curvas de volume poroso de óleo produzido e RAO versus volume poroso de água injetada.

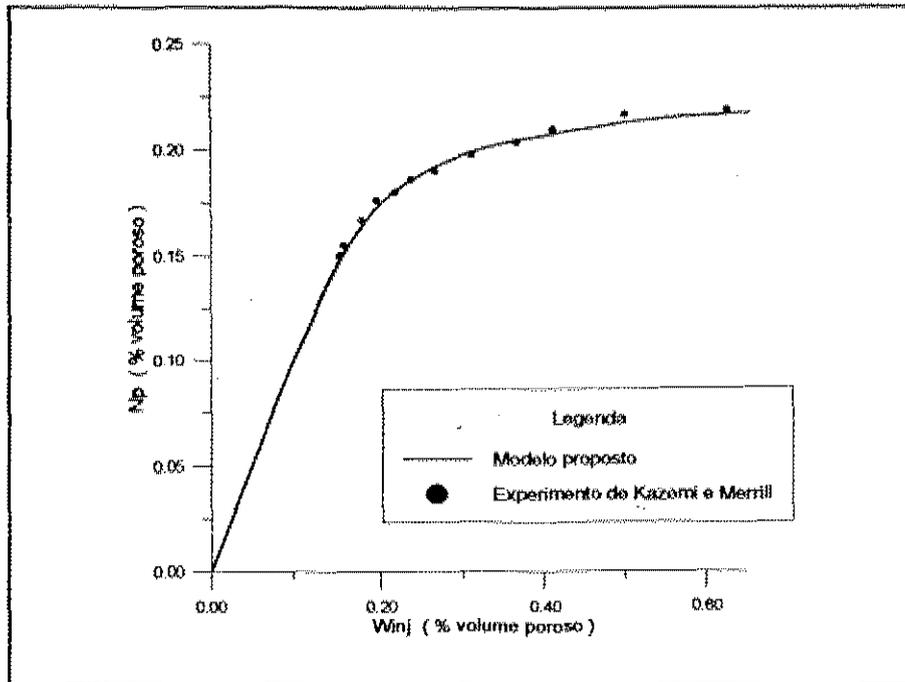


Figura 6.2 - Ajuste do modelo proposto aos dados de laboratório de Kazemi e Merrill. Curva de  $N_p$  versus  $W_{inj}$ .

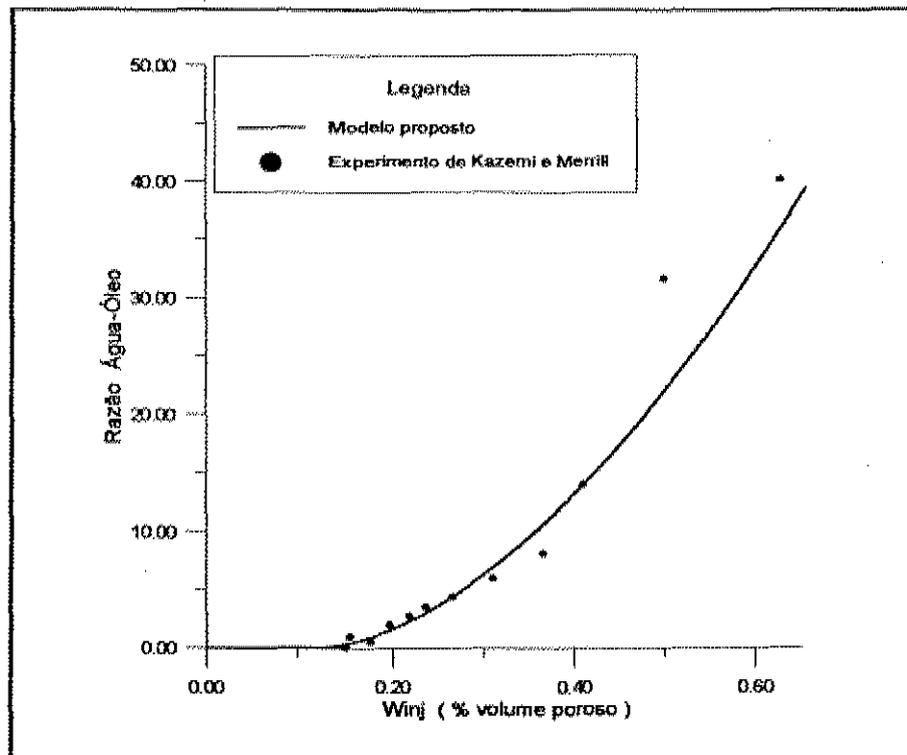


Figura 6.3 - Ajuste do modelo proposto aos dados de laboratório de Kazemi e Merrill. Curva de RAO versus  $W_{inj}$ .

## 7. FORMULAÇÃO CONSIDERANDO O MODELO DE DIFUSÃO PARA A TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Neste capítulo vamos considerar a pressão capilar como a força predominante no processo de embebição que ocorre na fração descontínua do meio poroso e derivar a equação diferencial que representa este processo. Desta forma, estaremos considerando o período transiente do processo de embebição, à semelhança de Beckner et al. (1987), que usaram a equação da difusão com um coeficiente de difusão dependente da saturação para representar a transferência de massa entre a matriz e a fratura. Dutra Jr. (1991), utilizou a equação da difusão com o coeficiente de difusão constante para derivar o termo de transferência de massa entre a matriz e a fratura.

A equação diferencial que representa o processo de embebição é derivada no Apêndice 4, combinando-se a Lei de Darcy com a equação de conservação da massa para um volume de controle. A velocidade de difusão da fase molhante na fração descontínua é dada por:

$$v_z = -D \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (7.1)$$

onde o coeficiente de difusão  $D$  é dado por:

$$D = - \frac{k_a \frac{dP_c}{dS_n}}{\left( \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right)} \quad (7.2)$$

Definindo:

$$D^* = \frac{D}{\phi_{ne}} \quad , \quad (7.3)$$

a equação da continuidade da fase molhante na fração descontínua é expressa por:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( D^* \frac{\partial S_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad , \quad (7.4)$$

com as seguintes condições inicial e de contorno:

$$S_n(x, z, 0) = 0 \quad (7.5)$$

$$S_n(x, 0, t) = S_f(x, t) \quad (7.6)$$

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{z=h_n} = 0 \quad . \quad (7.7)$$

Para a fração contínua, a equação da continuidade é expressa por:

$$v_f \phi_{fe} \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} - D^* \frac{\phi_{ne}}{h_f} \frac{\partial S_n}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad , \quad (7.8)$$

onde

$$v_f = \frac{q}{b h_f \phi_{fe}} \quad . \quad (7.9)$$

As condições inicial e de contorno interna para a equação (7.8) são:

$$S_f(x,0) = 0 \quad (7.10)$$

$$S_f(0,t) = 1 \quad (7.11)$$

A adimensionalização das equações (7.4) a (7.11) pode ser feita usando as seguintes variáveis adimensionais:

$$x_D = \frac{v_f}{D^*} x \quad (7.12)$$

$$z_D = \frac{z}{h_n} \quad (7.13)$$

$$t_D = \frac{v_f^2}{D^*} t \quad (7.14)$$

$$a = \frac{\omega}{1-\omega} \quad (7.15)$$

$$\varphi = \frac{v_f^2 h_n^2}{D^{*2}} \quad (7.16)$$

Então, as equações (7.4) a (7.11), escritas em termos das variáveis adimensionais, ficam:

$$-\frac{\partial^2 S_n}{\partial z_D^2} + \varphi \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = 0 \quad (7.17)$$

$$S_n(x_D, z_D, 0) = 0 \quad (7.18)$$

$$S_n(x_D, 0, t_D) = S_f(x_D, t_D) \quad (7.19)$$

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{z_D=1} = 0 \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial f(S_f)}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} - \frac{1}{\varphi a} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{z_D=0} = 0 \quad (7.21)$$

$$S_f(x_D, 0) = 0 \quad (7.22)$$

$$S_f(0, t_D) = 1 \quad (7.23)$$

Resolvendo a equação (7.17) no campo de Laplace, derivando e invertendo para o campo real, assumindo  $S_f$  constante na C.C.I. (Apêndice 5), obtemos:

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = cte}} = -2 S_f \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t_D}{4 \varphi}} \quad (7.24)$$

Se considerarmos  $S_f$  variável, o resultado é dado pela seguinte integral de convolução:

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = var}} = \int_0^{t_D} \left. \frac{\partial S_n(t_D - \tau_D)}{\partial z_D} \right|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = cte = 1}} \cdot \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D \quad (7.25)$$

ou, ainda, usando a equação (7.24) na equação (7.25),

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = var}} = -2 \int_0^{t_D} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 (t_D - \tau_D)}{4 \varphi}} \right] \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D \quad (7.26)$$

Substituindo a equação (7.26) na equação (7.21), obtemos:

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + \frac{2}{\varphi a} \int_0^{t_D} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 (t_D - \tau_D)}{4 \varphi}} \right] \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D = 0 \quad (7.27)$$

Na equação (7.27), o termo que contém a integral de convolução pode ser interpretado como um termo-fonte que governa a troca de massa. Vamos utilizar o método das características para obter uma solução semi-analítica para a equação (7.27). A equação da curva  $x(t)$  que define a característica é dada por:

$$\frac{dx_D}{dt_D} = f'(S_f) \quad (7.28)$$

ou seja, são as características denominadas  $\alpha$  já comentadas no capítulo 2.

Sobre as características, a equação diferencial parcial (7.26) se reduz à equação diferencial ordinária abaixo:

$$\frac{dS_f}{dt_D} = -\frac{2}{\varphi a} \int_0^{t_D} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 (t_D - \tau_D)}{4 \varphi}} \right] \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D \quad (7.29)$$

É conveniente observar que o termo correspondente à integral na equação (7.29) não pode ser calculado ao longo da característica, e sim para cada posição  $x_D$  no intervalo  $0 - t_D$ .

As Figuras 7.1 e 7.2 mostram, respectivamente, os perfis de  $S_f$  e as características para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 100$ . As Figuras 7.3 e 7.4 mostram, respectivamente, os perfis de  $S_f$  para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 10$  e para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 5000$ . Observa-se, pela equação (7.6), que quanto maior o coeficiente de difusão  $D^*$ , menor o coeficiente  $\varphi$ , e portanto maior a troca de massa entre as duas frações do meio poroso. Para  $\varphi = 5000$ , a saturação da frente de avanço pouco varia com o tempo, e a solução se aproxima da de Buckley e Leverett.

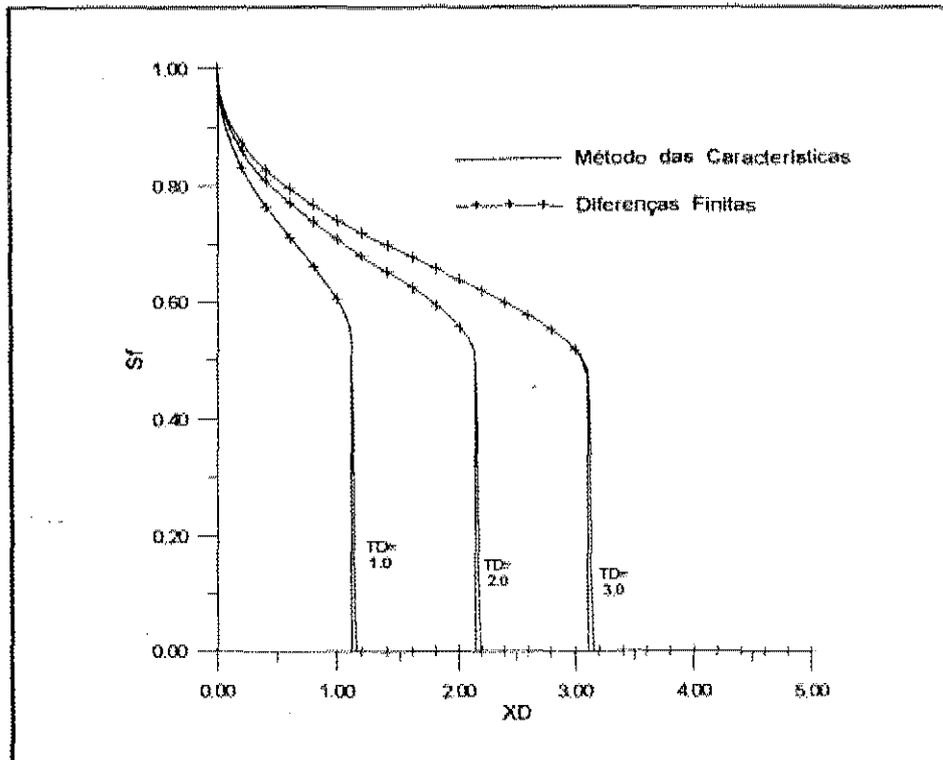


Figura 7.1 - Perfis de  $S_f$  para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 100$ .

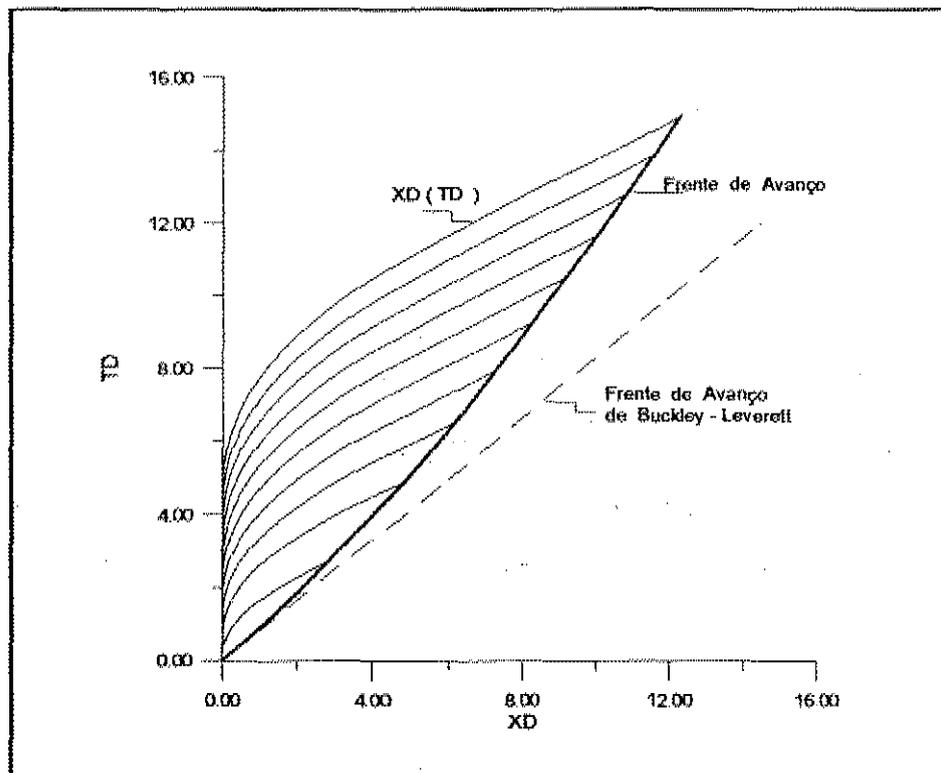


Figura 7.2 - Características para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 100$ .

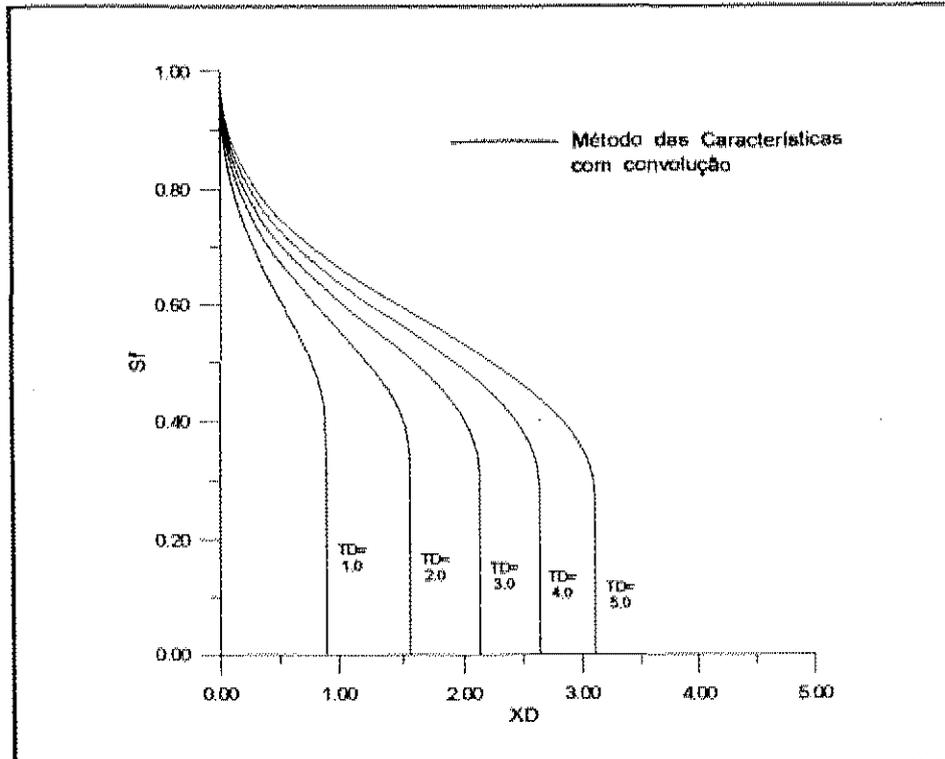


Figura 7.3 - Perfis de  $S_f$  para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 10$ .

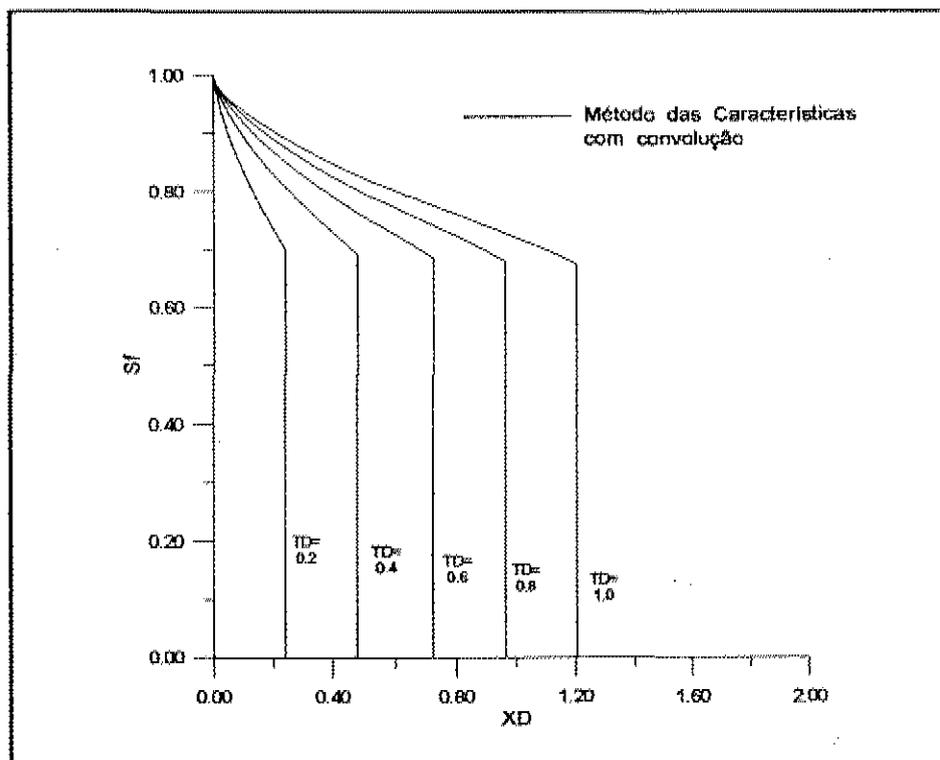


Figura 7.4 - Perfis de  $S_f$  para  $\omega = 0,25$  e  $\varphi = 5000$ .

Na construção das soluções apresentadas, a integral de convolução que aparece na equação (7.29) foi calculada numericamente para cada posição  $x_D$ . Isto tornou o algoritmo computacional demorado, uma vez que foi necessário armazenar todos os valores de  $S_f$  no tempo para todas as posições. Uma simplificação da equação (7.29) pode ser obtida utilizando-se o teorema de valor médio para integrais (Camargo (1993)). Para isso, vamos partir da equação (7.29) escrita na forma abaixo:

$$\frac{dS_f}{dt_D} = \frac{1}{\varphi a} \int_0^{t_D} \frac{\partial S_n(t_D - \tau_D)}{\partial z_D} \Big|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = \text{cte} = 1}} \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D \quad (7.30)$$

Queremos avaliar a integral da equação (7.30) num tempo  $t_D = t_{Dn}$ . Pelo teorema de valor médio para integrais, podemos aproximar a equação (7.30) por:

$$\frac{dS_f(t_{Dn})}{dt_D} = \frac{1}{\varphi a} \frac{\partial S_n(t_{Dn})}{\partial z_D} \Big|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = \text{cte} = 1}} \int_0^{t_{Dn}} \frac{\partial S_f(\tau_D)}{\partial \tau_D} d\tau_D \quad (7.31)$$

onde  $t_{Dn} = t_{Dn} - \tau_{Dn}$ , tal que  $0 \leq t_{Dn} \leq t_{Dn}$ . Resolvendo a integral da equação (7.31), obtemos:

$$\frac{dS_f(t_{Dn})}{dt_D} = \frac{1}{\varphi a} \frac{\partial S_n(t_{Dn})}{\partial z_D} \Big|_{\substack{z_D = 0 \\ S_f = \text{cte} = 1}} S_f(t_{Dn}) \quad (7.32)$$

Para que a aproximação expressa pela equação (7.32) seja válida, as funções  $S_f(t_D)$  e  $\partial S_n / \partial z_D(t_D)$  não podem trocar de sinal e devem ser contínuas no intervalo  $[0, t_{Dn}]$ . A função  $\partial S_n / \partial z_D(t_D)$  é contínua com  $t_D$ , apesar de divergente para  $t_D$  tendendo a zero, conforme mostra a Figura 7.5. Porém  $S_f(t_D)$  apresenta uma descontinuidade, correspondente à frente de avanço.

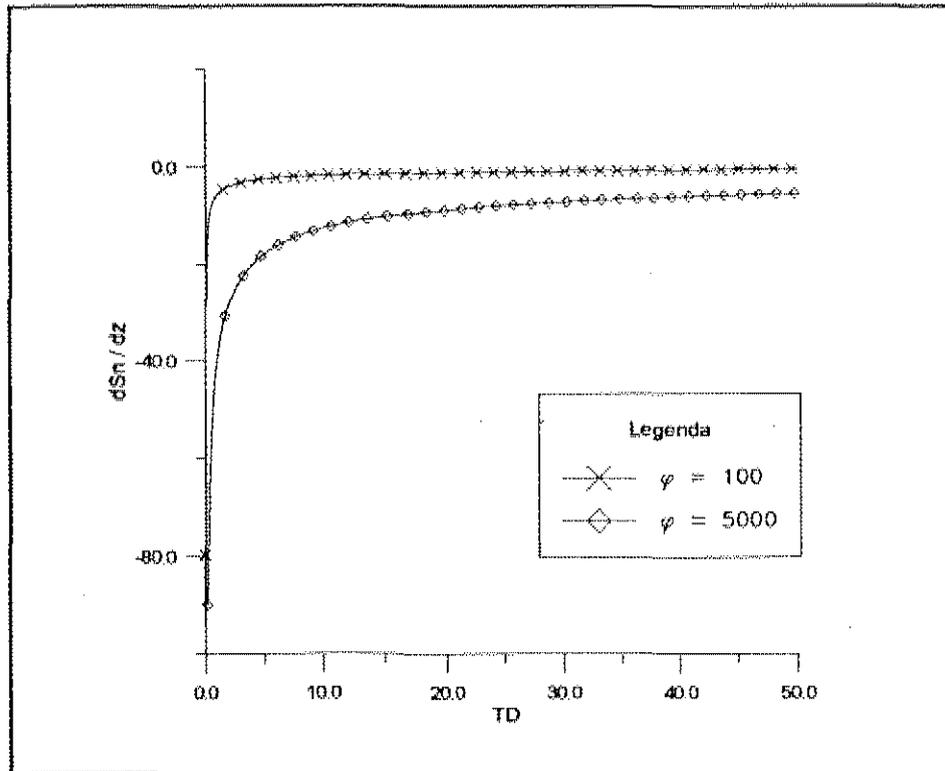


Figura 7.5 -  $\partial S_n / \partial z_D$  para  $S_f = \text{constante} = 1$ , para  $\varphi = 100$  e  $\varphi = 5000$ .

Além disso, o teorema de valor médio para integrais não define qual o valor de  $t_{D\alpha}$  a ser assumido. Podemos, numa primeira tentativa, assumir  $\partial S_n / \partial z_D(t_{D\alpha}) = \partial S_n / \partial z_D(t_{Dn})$ , onde  $t_{Dn}$  é o tempo em que se quer avaliar a equação (7.32). Isto equivale a expandirmos a função  $\partial S_n / \partial z_D(t_{D\alpha})$  em série de Taylor e desprezarmos os termos de primeira ordem e de ordem superior. A análise da série de Taylor truncada nos termos de ordem superior a um nos mostra quando esta aproximação produz bons resultados:

$$\frac{\partial S_n(t_{D\alpha})}{\partial z_D} = \frac{\partial S_n(t_{Dn})}{\partial z_D} + (t_{D\alpha} - t_{Dn}) \left. \frac{d}{dt_D} \left( \frac{\partial S_n(t_{Dn})}{\partial z_D} \right) \right|_{t_{Dn}} - \dots \quad (7.33)$$

Para que  $\partial S_n / \partial z_D(t_{D\alpha})$  seja igual a  $\partial S_n / \partial z_D(t_{Dn})$ , para cada tempo  $t_D$ , é necessário que os termos de ordem superior possam ser desprezados e que, para o termo de ordem um, o valor de  $(t_{Dn} - t_{D\alpha})$  ou o valor de  $d(\partial S_n / \partial z_D(t_D)) / dt_D$  sejam muito pequenos. A Figura 7.6 mostra o comportamento da derivada de  $\partial S_n / \partial z_D(t_D)$  em relação a  $t_D$ .

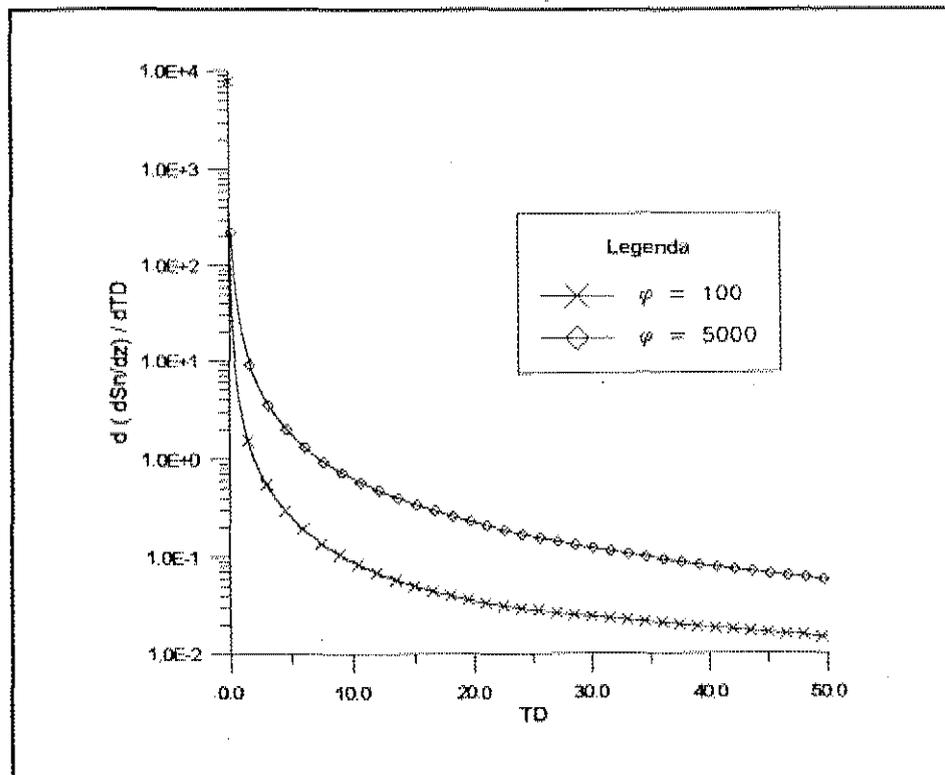


Figura 7.6 - Derivada de  $\partial S_n / \partial z_D(t_D)$  em relação a  $t_D$ .

Verifica-se que, para tempos pequenos, a derivada assume valores grandes, o que poderia ser compensado por um valor de  $(t_{Dn} - t_{D\alpha})$  pequeno. Para tempos grandes, a derivada assume valores pequenos. A Figura 7.7 mostra a solução obtida com a equação (7.32) em comparação com a solução exata para  $\varphi = 100$ . Observa-se que a aproximação subestima a troca de massa, calculando valores de  $S_i$  maiores que

os da solução exata. Ou seja, a aproximação de  $\partial S_n / \partial z_D(t_{D\alpha})$  por  $\partial S_n / \partial z_D(t_{Dn})$  não é válida.

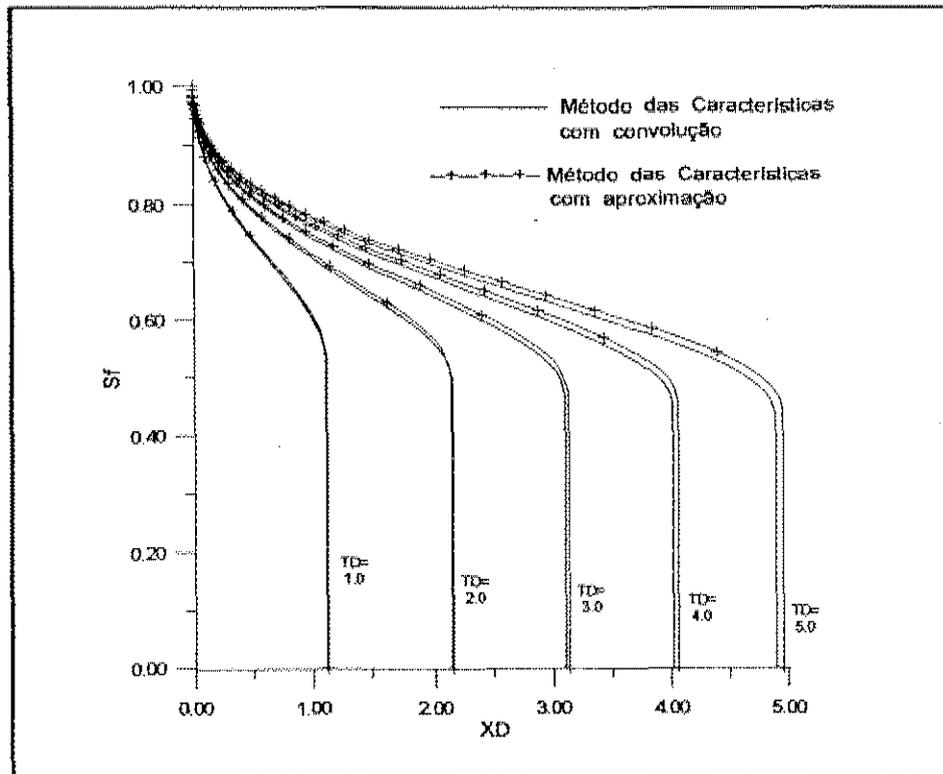


Figura 7.7 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com  $t_{D\alpha} = t_{Dn}$  para  $\varphi = 100$ .

A forma encontrada de se obter uma solução mais eficiente em termos computacionais foi determinar o valor de  $t_{D\alpha}$  por tentativa.

As Figuras 7.8 a 7.11 mostram os resultados obtidos para diferentes valores de  $\varphi$ . Para  $\varphi = 1$ , a aproximação não funcionou. Isto pode ser explicado pelo fato de que, para  $\varphi$  pequeno, a troca de massa é grande, sendo maior a contribuição da integral de convolução na solução. Para  $\varphi = 10$ , o valor de  $t_{D\alpha}$  que melhor ajustou a solução aproximada à solução correta foi  $t_{D\alpha} = 0,83 t_{Dn}$ . Para  $\varphi = 100$  e  $\varphi = 500$ ,  $t_{D\alpha} = 0,88 t_{Dn}$  foi o que melhor ajustou a solução aproximada à solução correta. É

conveniente observar que, para todos os valores de  $\varphi$  testados, o valor máximo de  $t_D$  considerado foi  $t_D = 5,0$ , o que pode significar tempo curto (da ordem de dias). Não foi possível obter soluções exatas para  $t_D$ 's maiores devido à limitação de memória computacional. Acreditamos, porém, que a aproximação deve funcionar para tempos longos, pois as variações de saturação são menores.

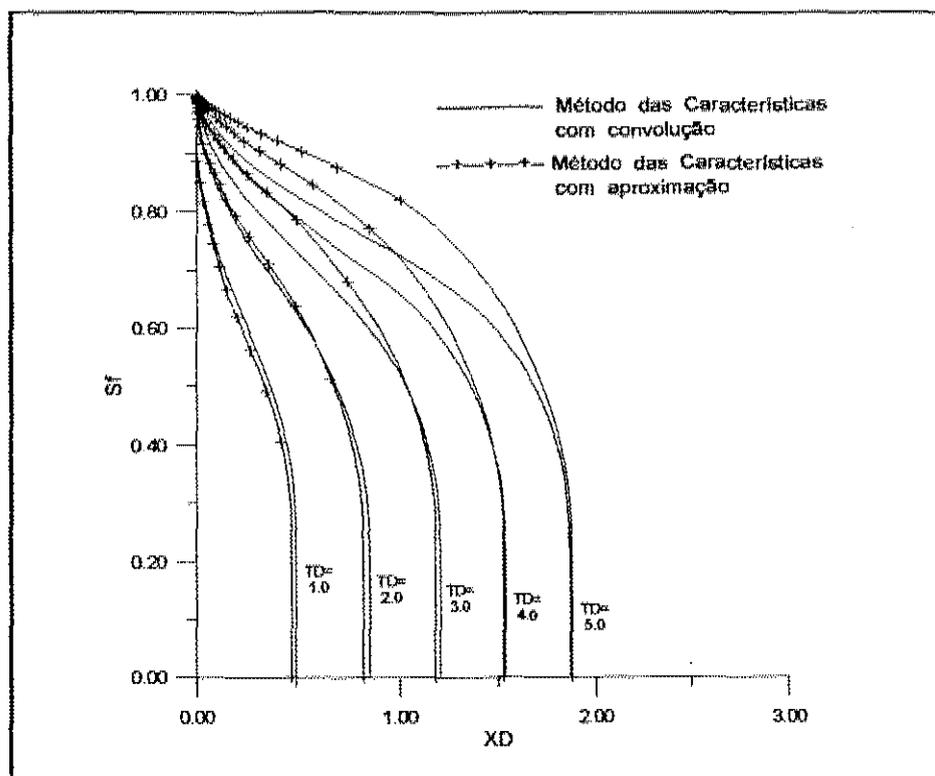


Figura 7.8 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com  $t_{Du} = 0,7 t_{Dn}$  para  $\varphi = 1$ .

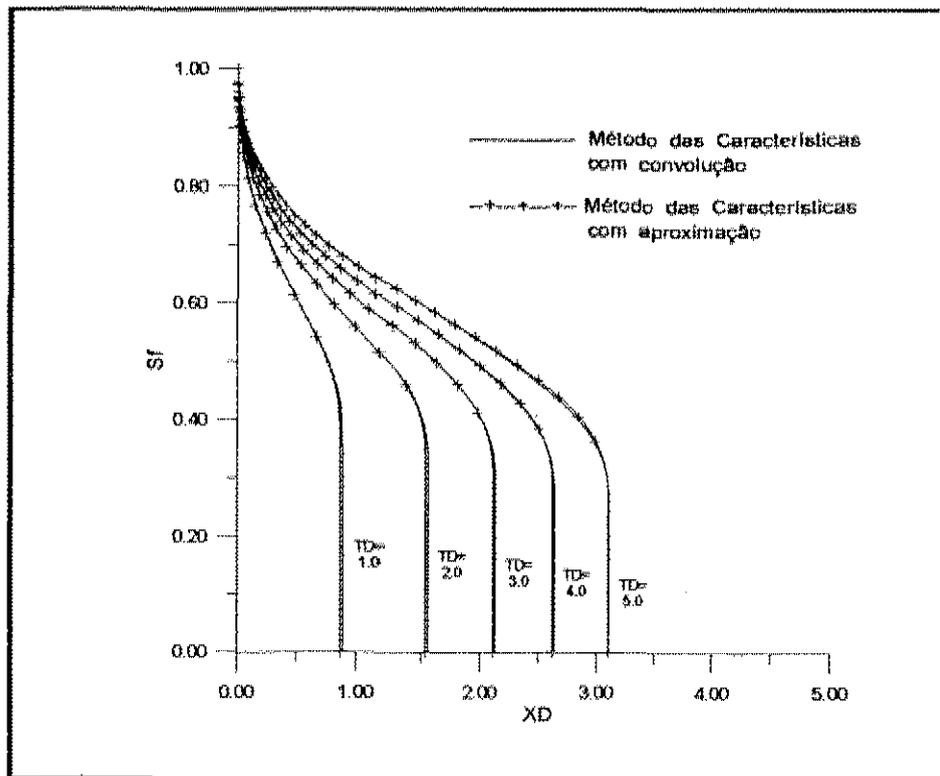


Figura 7.9 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com  $t_{Dw} = 0,83 t_{Dn}$  para  $\phi = 10$ .

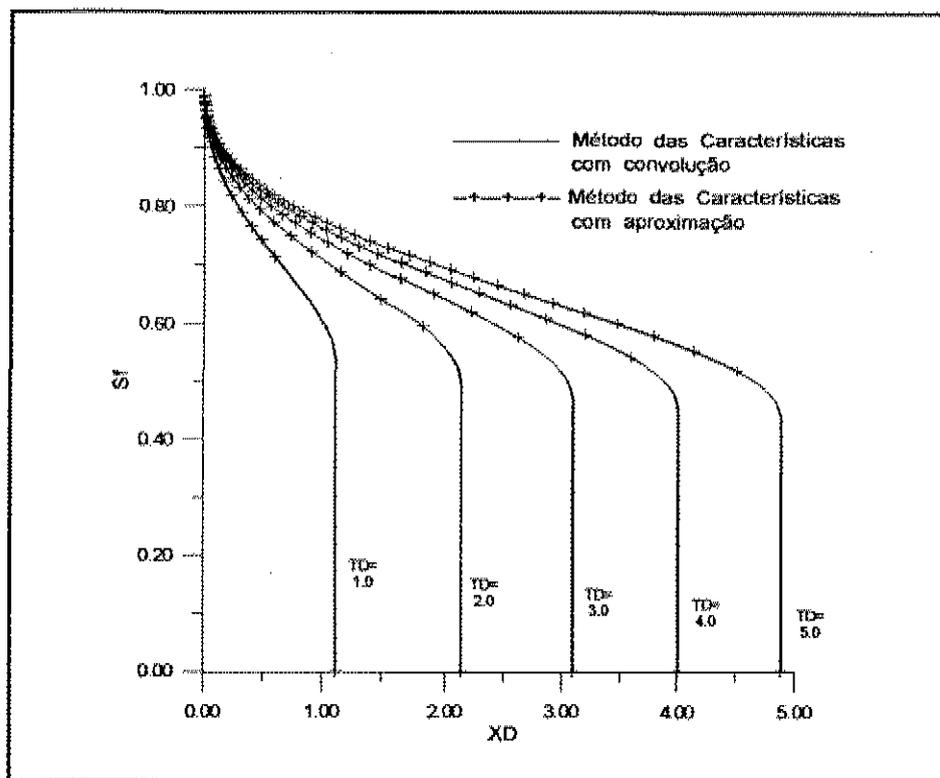


Figura 7.10 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com  $t_{Dw} = 0,88 t_{Dn}$  para  $\phi = 100$ .

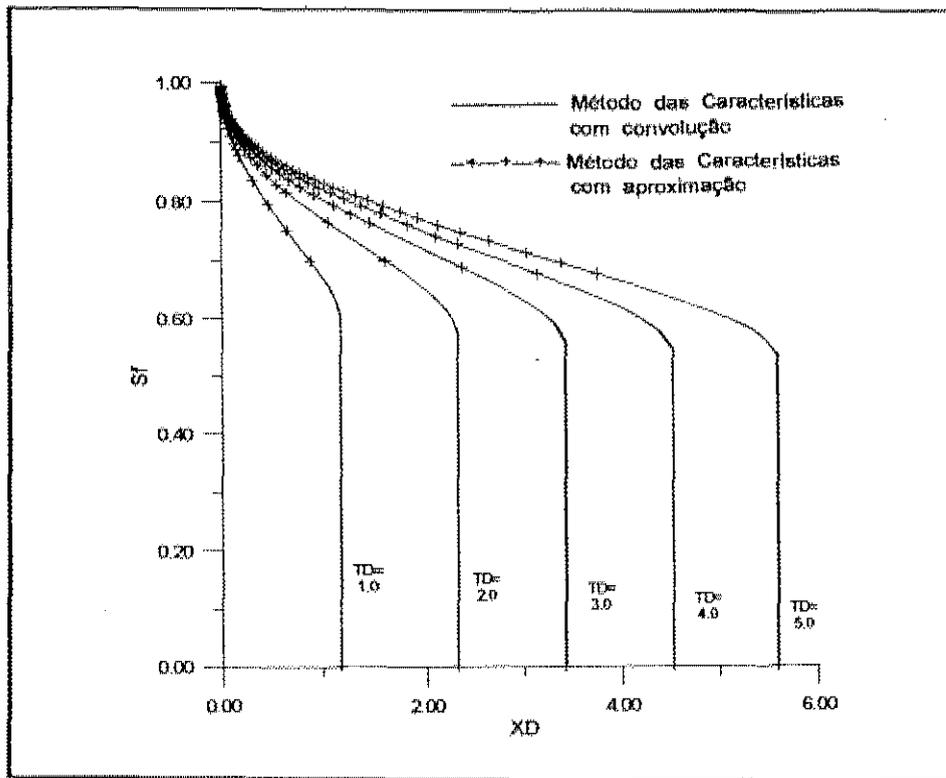


Figura 7.11 - Comparação entre a solução exata e a solução aproximada com  $t_{D\alpha} = 0,88 t_{Dn}$  para  $\psi = 500$ .

## 8. APLICAÇÃO A UM CASO REAL

Este capítulo apresenta a aplicação do modelo proposto utilizando dados de um reservatório real. O reservatório em questão encontra-se submetido à injeção de água num esquema "five-spot". Como, na presente dissertação, a geometria considerada foi a linear, trabalhou-se com um meio linear com área equivalente à de um quarto de "five-spot". O objetivo foi avaliar o impacto da variação do coeficiente de transferência de massa e da vazão de injeção sobre a recuperação de óleo e a razão água-óleo, tomando como base a resposta do modelo de Buckley-Leverett. Não se procurou ajustar o histórico de produção, uma vez que a geometria considerada não é representativa.

Considerou-se, para a análise, uma zona produtora onde ocorrem lentes de arenito, de menor permo-porosidade, dispersas no conglomerado, de maior permo-porosidade. A espessura porosa com óleo média é de 15 m, e a espessura das lentes de arenito é da ordem de 0,5 a 1 m.

### 8.1. Dados Gerais

As dimensões consideradas para o meio poroso foram: comprimento ( $L$ ) = 200 m, largura ( $b$ ) = 100 m e espessura total ( $h$ ) = 15 m. Como o meio poroso contém várias lentes dispersas de espessura da ordem de 1 m, definimos uma unidade de fluxo conforme representado pela Figura 8.1. Para esta unidade de fluxo representativa, a fração mais permo-porosa tem espessura de 1 m, e a fração menos permo-porosa, 0,5 m, ou seja, 1/3 do volume de rocha corresponde à esta última.

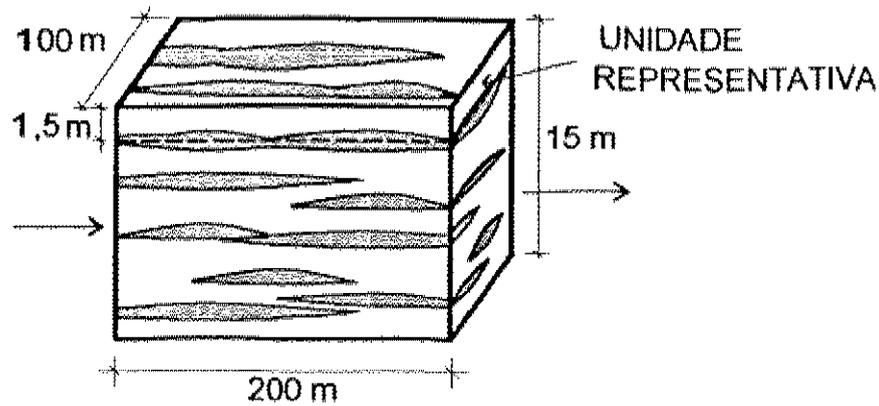


Figura 8.1 - Unidade de fluxo representativa do meio poroso.

Os dados petrofísicos e de fluido adotados foram:

	fração mais permo-porosa	fração menos permo-porosa
$\phi$	0,15	0,10
$S_{wc}$	0,20	0,25
$S_{or}$	0,328	0,35
$\phi_{efetiva} = \phi(1-S_{wc}-S_{or})$	0,0708	0,04
$\mu_o$ (cP)	30	30
$\mu_w$ (cP)	0,8	0,8
$k_{ro}$	$0,86 \left( \frac{1-S_w-S_{or}}{1-S_{wc}-S_{or}} \right)^{3,1}$	$0,86 \left( \frac{1-S_w-S_{or}}{1-S_{wc}-S_{or}} \right)^{3,1}$
$k_{rw}$	$0,574 \left( \frac{S_w-S_{wc}}{1-S_{wc}-S_{or}} \right)^{1,8}$	$0,574 \left( \frac{S_w-S_{wc}}{1-S_{wc}-S_{or}} \right)^{1,8}$
$k_a$ (mD)	50	5

Tabela 8.1 - Dados de rocha e fluidos

A vazão de injeção considerada para a unidade representativa foi de 0,375 m<sup>3</sup>/d (correspondente a 0,25 m<sup>3</sup>/d/m para 1/4 de "five-spot"). A velocidade efetiva de injeção, calculada pela equação (3.5) é de 0,0530 m/d.

A fração volumétrica do meio mais permo-poroso,  $\omega$ , foi calculada pela equação (3.3) em função das espessuras e das porosidades efetivas, obtendo-se  $\omega = 0,796$ .

A curva de fluxo fracionário para a fração mais permo-porosa foi calculada pela equação (8.2), em função das viscosidades e das permeabilidades relativas reportadas na Tabela 8.1:

$$f(S_p) = \frac{k_{rw} / \mu_w}{k_{rw} / \mu_w + k_{ro} / \mu_o} \quad (8.2)$$

Para fins de simplificação de cálculo, a equação (4.7) foi ajustada à curva calculada. As curvas calculada e ajustada encontram-se plotadas na Figura 8.2. A saturação  $S_i$  já é a normalizada.

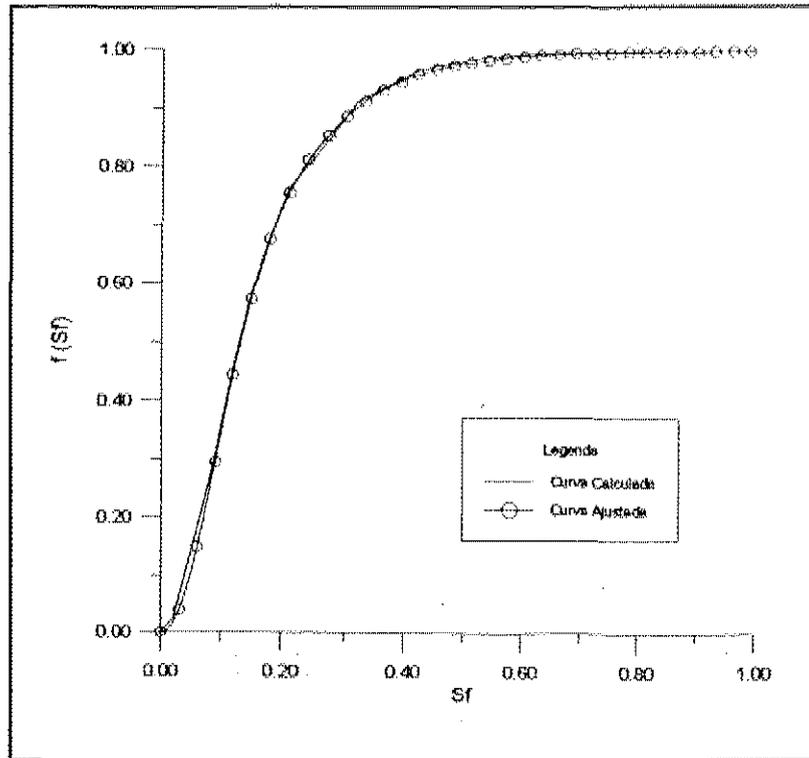


Figura 8.2 - Curvas de fluxo fracionário calculada e ajustada.

O ajuste da equação (4.7) à curva de fluxo fracionário calculada foi obtido para  $c = 43,1944$ , valor este que honra a saturação e a velocidade da frente de avanço do modelo de Buckley-Leverett para a curva calculada. Assim sendo, a equação para a curva de fluxo fracionário é dada por:

$$f ( S_f ) = \frac{c S_f^2}{c S_f^2 + ( 1 - S_f )^2} \quad , \quad c = 43,1944 \quad . \quad (8.3)$$

O coeficiente de transferência de massa,  $K$ , foi calculado pelo modelo de Reis, utilizando-se as equações (5.3), (5.17) e (5.18). As permeabilidades relativas foram avaliadas no ponto médio de saturação,  $S_n = 0,45$ , obtendo-se  $k_{ro} = 0,1648$  e  $k_{rw} = 0,1003$ . A tensão interfacial óleo-água e o ângulo de contato foram assumidos como

$\sigma = 35 \text{ dina/cm}$  e  $\theta = 30^\circ$ . O valor obtido para  $\lambda$  pela equação (5.17) foi de  $0,0375 \text{ d}^{-1}$ , o que equivale a dizer que seriam necessários  $1/\lambda = 26,65$  dias para se recuperar 63% do óleo de um bloco de 0,5 m de altura caso este tivesse a base imersa em água.

Para o valor de  $\lambda$  calculado, o valor de K correspondente, pela equação (5.3), é de  $7,655 \text{ E-3 d}^{-1}$ .

## 8.2. Resultados

### 8.2.1. Variação do Coeficiente de Transferência de Massa

Foram rodados 3 casos, variando-se o valor de K, além do caso correspondente ao modelo de Buckley-Leverett. A Tabela 8.2 mostra os valores de K adotados e os respectivos resultados obtidos:

K ( $\text{d}^{-1}$ )	FR para 50 anos (%)	Tempo de "Break-through" (anos)	Recuperação até o BT (%)	RAO inicial	RAO final
Buckley-Leverett	27,194	2,705	11,756	1,354	36,702
$7,655 \text{ E-7}$	27,422	2,705	11,756	1,354	35,342
$7,655 \text{ E-5}$	31,487	2,706	11,759	1,211	26,375
$7,655 \text{ E-3}$	32,672	3,239	14,073	0,312	28,971

Tabela 8.2 - Quadro comparativo de resultados para diferentes valores do coeficiente de transferência de massa.

Os resultados podem ser visualizados nas Figuras 8.3 e 8.4. Observa-se que,

para o valor de K calculado pelo modelo de Reis, a recuperação adicional em relação ao previsto pelo modelo de Buckley-Leverett é de 5,5 % para um tempo de vida útil de 50 anos. Isto corresponde a uma recuperação de 23,0 % do óleo da fração menos permeo-porosa. O tempo de irrupção da água no produtor é de 3,2 anos, contra 2,7 anos do modelo de Buckley-Leverett.

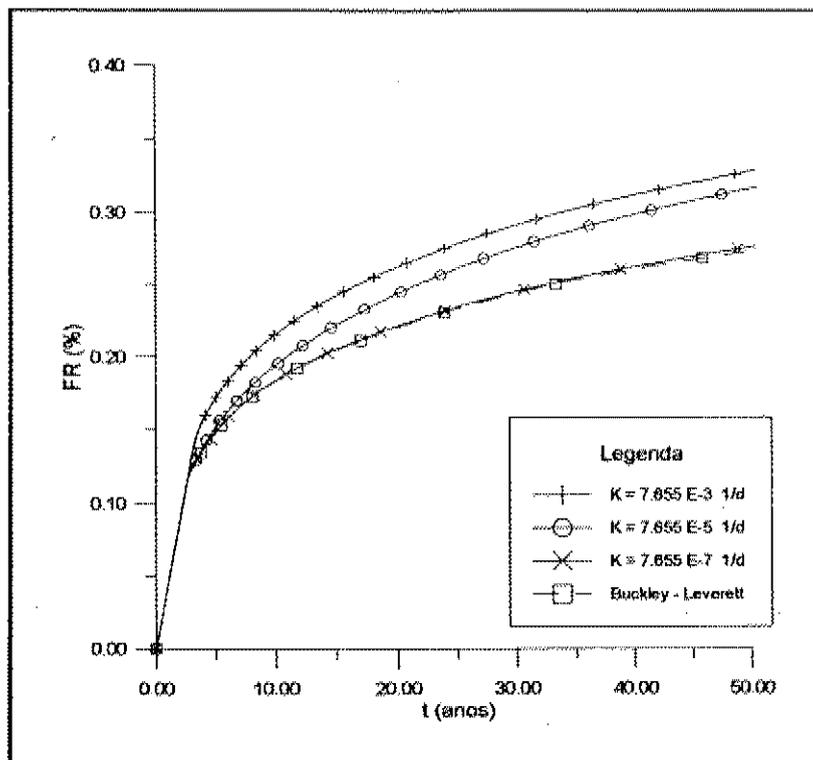


Figura 8.3 - FR versus tempo para diferentes valores do coeficiente de transferência de massa ( $q = 0,375 \text{ m}^3/\text{d}$ ).

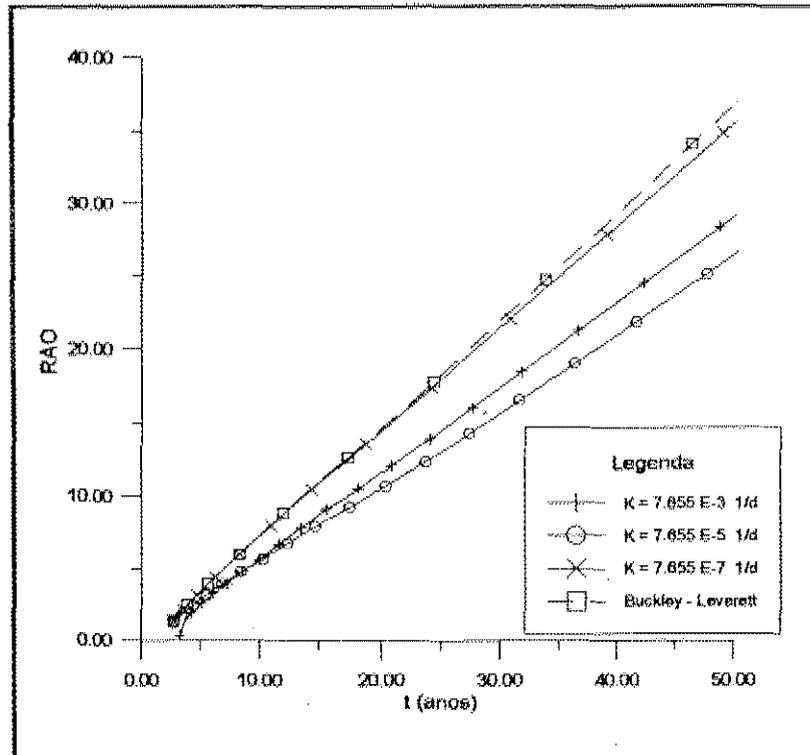


Figura 8.4 - RAO versus tempo para diferentes valores do coeficiente de transferência de massa ( $q = 0,375 \text{ m}^3/\text{d}$ ).

### 8.2.2. Variação de Vazão

De forma a avaliar a influência da variação da vazão de injeção na resposta do modelo, foram rodados dois casos com o dobro da vazão considerada no item 8.2.1., ou seja,  $q = 0,75 \text{ m}^3/\text{d}$ . A Tabela 8.3 apresenta os resultados obtidos para  $K = 7,655 \text{ E-3 d}^{-1}$  e para  $K = 7,655 \text{ E-5 d}^{-1}$ . Para efeito de comparação, estão listados os resultados obtidos para  $q = 0,375 \text{ m}^3/\text{d}$ .

K (d <sup>-1</sup> )	q (m <sup>3</sup> /d)	FR para 50 anos (%)	Tempo de BT (anos)	Recuperação até o BT (%)	RAO inicial	RAO final
7,655 E-3	0,750	37,617	1,557	13,530	0,343	59,77
7,655 E-3	0,375	32,672	3,239	14,073	0,312	28,97
7,655 E-5	0,750	36,332	1,353	11,756	1,280	53,33
7,655 E-5	0,375	31,487	2,706	11,759	1,211	26,38

Tabela 8.3 - Quadro comparativo de resultados para diferentes valores de vazão.

As Figuras 8.5 a 8.7 apresentam os resultados para  $K = 7,655 \text{ E-}3 \text{ d}^{-1}$ , e as Figuras 8.8 a 8.10 apresentam os resultados para  $K = 7,655 \text{ E-}5 \text{ d}^{-1}$ .

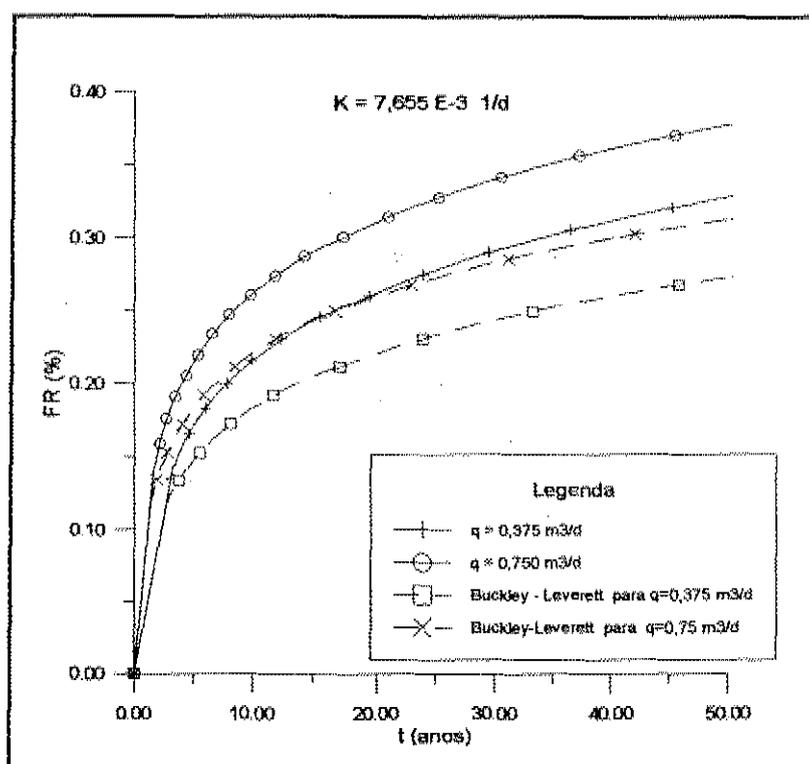


Figura 8.5 - FR versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-}3 \text{ d}^{-1}$ ).

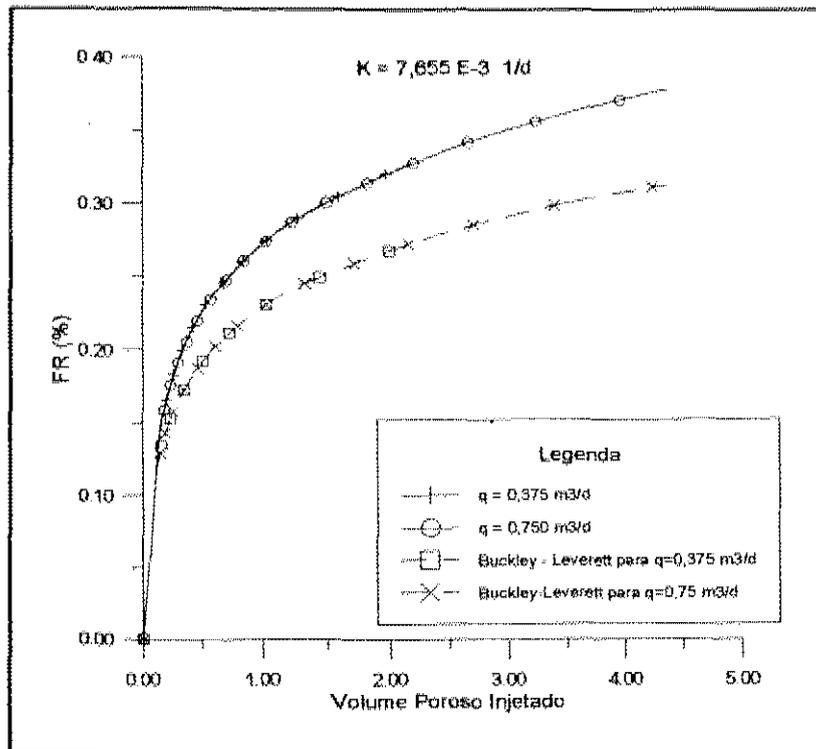


Figura 8.6 - FR versus volume poroso injetado para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-3 } d^{-1}$ ).

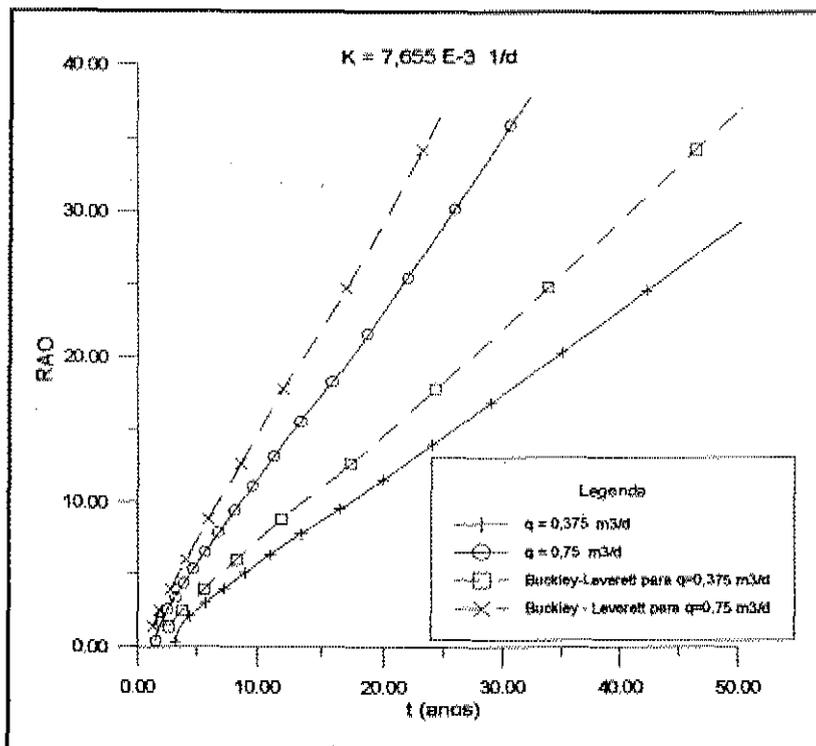


Figura 8.7 - RAO versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 \text{ E-3 } d^{-1}$ ).

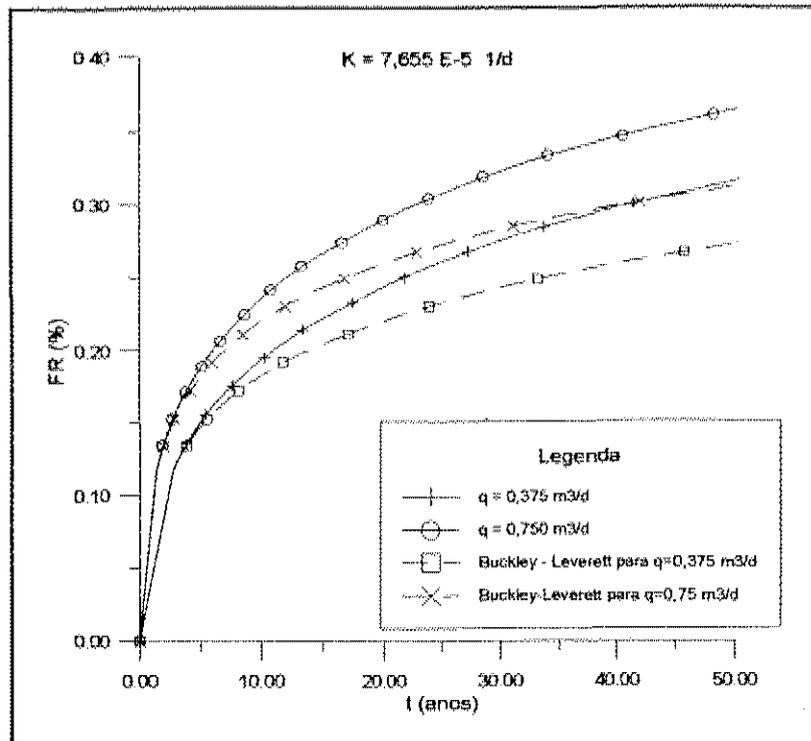


Figura 8.8 - FR versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 E-5 d^{-1}$ ).

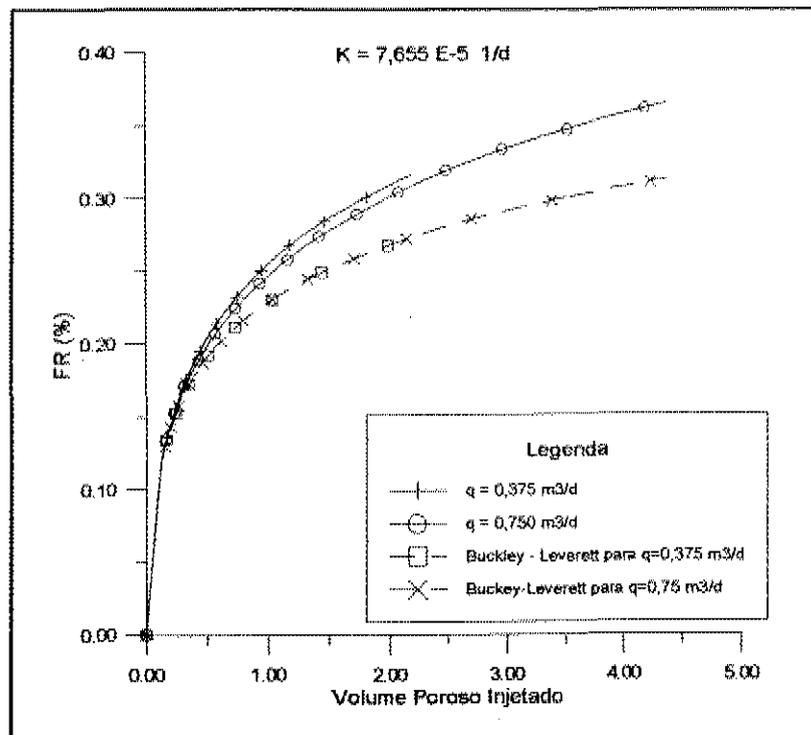


Figura 8.9 - FR versus volume poroso injetado para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 E-5 d^{-1}$ ).

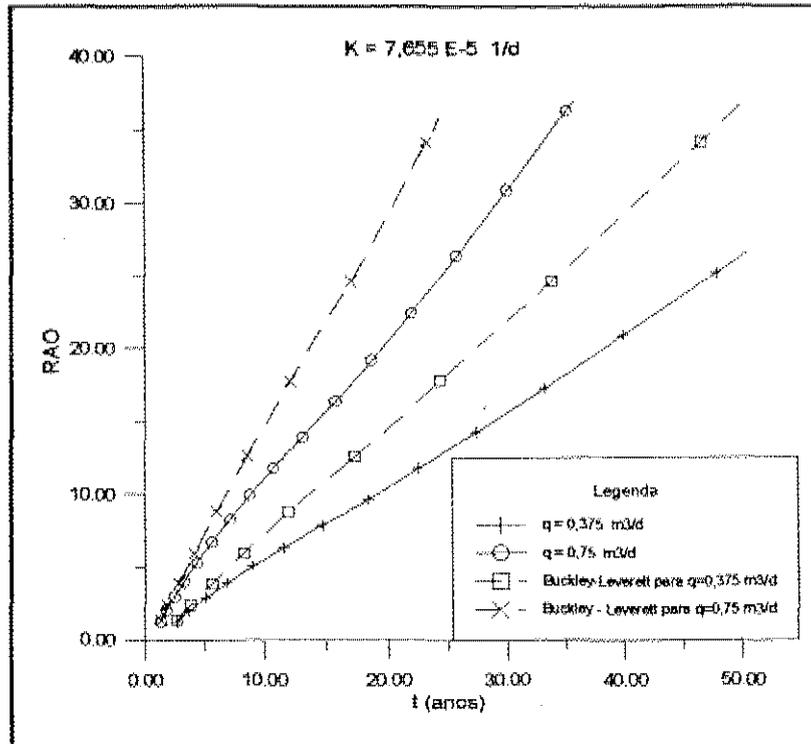


Figura 8.10 - RAO versus tempo para diferentes valores de vazão ( $K=7,655 E-5 d^{-1}$ ).

A análise da curva de FR versus volume poroso injetado para  $K=7,655 E-3 d^{-1}$ , apresentada na Figura 8.6, indica que este valor de K é muito alto, pois praticamente não se observou variação na recuperação para as duas vazões consideradas na análise. Ou seja, para um valor de K muito alto tudo se passa como se a troca de massa fosse instantânea. Para  $K=7,655 E-5 d^{-1}$ , a Figura 8.9 indica que quanto maior a vazão, menor a recuperação obtida para um dado volume poroso injetado.

Observa-se que, caso o fator determinante de abandono do reservatório seja a RAO, o fator de recuperação final será menor para uma vazão maior, conforme mostrado na Tabela 8.4:

K (d <sup>-1</sup> )	q (m <sup>3</sup> /d)	Tempo de abandono (anos)	FR para RAO=25 (%)
7,655 E-3	0,750	21,666	31,576
7,655 E-3	0,375	43,241	31,624
7,655 E-5	0,750	24,482	30,522
7,655 E-5	0,375	47,518	31,084

Tabela 8.4 - Fatores de Recuperação para RAO = 25.

Deve ser ressaltado que a análise aqui apresentada refere-se a uma geometria unidimensional. O modelo proposto pode ser estendido para uma geometria bidimensional através da teoria dos canais de fluxo, de forma a obter resultados mais representativos. Além disso, o valor de K deve ser determinado a partir do ajuste do modelo ao histórico de produção do reservatório, para que então se possa fazer a previsão do comportamento futuro com razoável segurança.

## 9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

1. O modelo proposto para representar o escoamento unidimensional bifásico imiscível em reservatórios heterogêneos considera a ocorrência de fluxo convectivo na fração mais permo-porosa e transferência de massa por embebição entre a fração mais permo-porosa e a fração menos permo-porosa.
2. O modelo empírico de transferência de massa proposto por Aronofsky et al. (1958) é demonstrado através da formulação matemática apresentada, que considera o fluxo mássico proporcional à massa de água total e à diferença de saturação entre as duas frações do meio poroso.
3. O método das características revelou-se adequado à solução do sistema hiperbólico de equações que representa o fenômeno em estudo, fornecendo resultados mais acurados que o método de diferenças finitas, para uma mesma discretização no espaço.
4. A solução obtida mostra que se forma uma frente de avanço na fração mais permo-porosa, cuja saturação e velocidade diminuem com o tempo, devido à troca de massa entre as duas frações do meio poroso. A redução da velocidade da frente de avanço da fração mais permo-porosa depende da intensidade da recuperação do óleo da fração menos permo-porosa.
5. O coeficiente de transferência de massa pode ser determinado a partir de ensaios

de laboratório e a partir do ajuste do modelo ao histórico de produção. Os modelos de transferência de massa existentes na literatura podem servir como uma primeira aproximação para o coeficiente de transferência de massa.

6. O modelo proposto foi validado através do ajuste a um experimento de laboratório reportado na literatura ( Kazemi e Merrill (1979)).

7. A transferência de massa também foi modelada através da equação da difusão, visando levar em conta o transiente do processo de embebição. A solução para esta formulação exigiu um excessivo tempo computacional, o que conduziu à adoção de uma solução aproximada, válida para valores do parâmetro adimensional  $\varphi$  maiores que 10. Verificou-se que a aproximação funciona para tempos curtos, devendo ser testada para tempos longos caso se deseje aplicar esta formulação a casos práticos.

8. O modelo proposto pode ser estendido para o caso bidimensional através da teoria de canais de fluxo, o que propiciaria uma mais ampla utilização do mesmo.

## NOMENCLATURA

A - área transversal ao fluxo. [L<sup>2</sup>]

a - relação entre a fração volumétrica do meio contínuo e a fração volumétrica do meio descontínuo.

b - largura do meio poroso. [L]

c - constante da equação do fluxo fracionário.

D - coeficiente de difusão. [L<sup>2</sup>/T]

D\* - coeficiente de difusão incluindo a porosidade efetiva. [L<sup>2</sup>/T]

f - fluxo fracionário da fase molhante (água).

f<sub>c</sub> - curva de fluxo fracionário aproximada.

h - espessura. [L]

K - coeficiente de transferência de massa. [1/T]

k<sub>a</sub> - permeabilidade absoluta. [L<sup>2</sup>]

k<sub>r</sub> - permeabilidade relativa.

$\dot{m}$  - fluxo mássico longitudinal. [M/T]

$\dot{m}^*$  - fluxo mássico transversal. [M/T]

q - vazão. [L<sup>3</sup>/T]

S - saturação da fase molhante.

t - tempo. [T]

v - velocidade. [L/T]

x - posição. [L]

z - posição. [L]

## Alfabeto grego

$\alpha$  - característica.

$\beta$  - característica.

$\lambda$  - constante de transferência de massa do modelo de Aronofsky. [1/T]

$\varphi$  - parâmetro adimensional do modelo de difusão.

$\mu$  - viscosidade. [M/LT]

$\rho$  - massa específica. [M/L<sup>3</sup>]

$\sigma$  - tensão interfacial. [ML/T<sup>2</sup>]/L

$\phi$  - porosidade.

$\omega$  - fração volumétrica do meio contínuo.

## Subscritos

c - conata.

D - adimensional.

car - característica.

e - efetiva.

f - fração contínua.

n - fração descontínua.

o - óleo.

r - residual.

w - água.

$f_1$  - frente de avanço na fração contínua.

$f_2$  - frente de avanço na fração descontínua.

x - direção x.

z - direção z.

### Sobreescritos

' - derivada

+ - a jusante da frente de avanço.

- - a montante da frente de avanço.

\* - inicial sobre a característica.

### Transformações de Unidades

1 D =  $9,87 \text{ E-}9 \text{ cm}^2$ .

1 cP =  $0,01 \text{ dina s/ cm}^2$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aronofsky, J. S., Massé, L. e Natanson, S.G.: "A Model for the Mechanism of Oil Recovery from the Porous Matrix due to Water Invasion in Fractured Reservoirs," *Trans., AIME* (1958) 213, 17-19.
  
- Beckner, B.L., Ishimoto, K., Yamaguchi, S., Firoozabadi, A. e Aziz, K. : "Imbibition-Dominated Matrix-Fracture Fluid Transfer in Dual Porosity Simulators," paper SPE 16981 apresentado no "62<sup>nd</sup> SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas, TX, 27-30 Set 1987.
  
- Braester, C.: "Simultaneous Flow of Immiscible Liquids Through Porous Media," *SPEJ* (Agosto 1972) 297-305.
  
- Buckley, S. E. e Leverett, M. C. : "Mechanism of Fluid Displacement in Sands," *Trans., AIME* (1942) 146, 107.
  
- Camargo, C. : "Comportamento Transiente de Pressão em Poços Horizontais," Tese de Mestrado, P. 106-111, UNICAMP, 1993.
  
- Cuiec, L. E., Borbiaux, B. e Kalaydjian, F. : "Imbibition in Low Permeability Porous Media: Understanding and Improvement of Oil Recovery," paper SPE/DOE 20259, apresentado no "7<sup>th</sup> Annual Symposium on Enhanced Oil Recovery", Tulsa, Okla., 22-25 Abr 1990.

- deSwaan, A. : "Theory of Waterflooding in Fractured Reservoirs," SPEJ (Abril 1978), 117-22; *Trans.*, AIME, 265.
  
- Douglas Jr., J., Blair, P. M. e Wagner, R. J. : "Calculation of Linear Waterflood Behavior Including the Effects of Capillary Pressure," apresentado no "32<sup>nd</sup> SPE Annual Fall Meeting", Dallas, TX, 6-9 Out 1957.
  
- Dutra Jr., T. V. : "A New Model for the Simulation of Naturally Fractured Reservoirs," Tese de Doutorado, Stanford, 1991.
  
- Dykstra, H. e Parsons, R. L. : "The Prediction of Oil Recovery by Waterflood," "*Secondary Recovery of Oil in U.S.*", API (1950) 160.
  
- Fayers, F. J. e Sheldon, J. W. : "The Effect of Capillary Pressure and Gravity on Two-Phase Fluid Flow in a Porous Medium," apresentado no "33<sup>rd</sup> SPE Annual Fall Meeting", Houston, TX, 5-8 Out 1958.
  
- Goddin Jr., C. S., Craig Jr., F. F., Wilkes, J. O. e Tek, M. R. : "A Numerical Study of Waterflood Performance in a Stratified System with Crossflow," paper SPE 1223 apresentado no "SPE Fall Meeting", Denver, Colo., 3-6 Out 1965.
  
- Graham, J. W. e Richardson, J. G. : "Theory and Application of Imbibition Phenomena in Recovery of Oil," apresentado no "33<sup>rd</sup> SPE Annual Fall Meeting", Houston, TX, 5-8 Out 1958.

- Hamon, G. e Vidal, J. : "Scaling-Up the Capillary Imbibition Process From Laboratory Experiments on Homogeneous and Heterogeneous Samples," paper SPE 15852 apresentado no "SPE European Petroleum Conference", Londres, 20-22 Out 1986.
  
- Haq, S. e Reis, J. C. : "Predicting Capillary Crossflow in Layered Reservoirs," paper SPE 26651 apresentado no "68<sup>th</sup> SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, TX, 3-6 Out 1993.
  
- Kazemi, H. e Gilman, J. R. : "Analytical and Numerical Solution of Oil Recovery From Fractured Reservoirs Using Empirical Transfer Functions," paper SPE 19849 apresentado no "64<sup>th</sup> SPE Annual Technical Conference and Exhibition", San Antonio, TX, 8-11 Out 1989.
  
- Kazemi, H. e Merrill, L. S. : "Numerical Simulation of Water Imbibition in Fractured Cores," paper SPE 6895 apresentado no "52<sup>nd</sup> SPE-AIME Annual Fall Technical Conference and Exhibition", Denver, 9-12 Out 1977.
  
- Kleppe, J. e Morse, R. A. : "Oil Production from Fractured Reservoirs by Water Displacement," paper SPE 5084 apresentado no "49<sup>th</sup> SPE-AIME Annual Fall Meeting", Houston, TX, 6-9 Out 1974.
  
- Lefebvre du Prey, E., : "Gravity and Capillary Effects on Imbibition in Porous Media," SPEJ 18 (Junho 1978) 195-206.

- Mattax, C.C. e Kyte, J.R. : "Imbibition Oil Recovery From Fractured Water Drive Reservoirs," SPEJ (Junho 1962) 177-84; *Trans.*, AIME, 225.

- Reis, J. C. e Cil, M. : "A Model for Expulsion by Counter-Current Water Imbibition in Rocks: One-Dimensional Geometry," *Journal of Petroleum and Engineering*, 10 (1993) 97-107.

- Stiles, W. E. : "Use of Permeability Distribution in Waterflood Calculations," *Trans.*, AIME (1949) 186, 9.

- Tompang, R., Kelkar, B. G. : "Prediction of Waterflood Performance in Stratified Reservoirs," paper SPE 17289 apresentado no "SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference", Midland, TX, 10-11 Mar 1988.

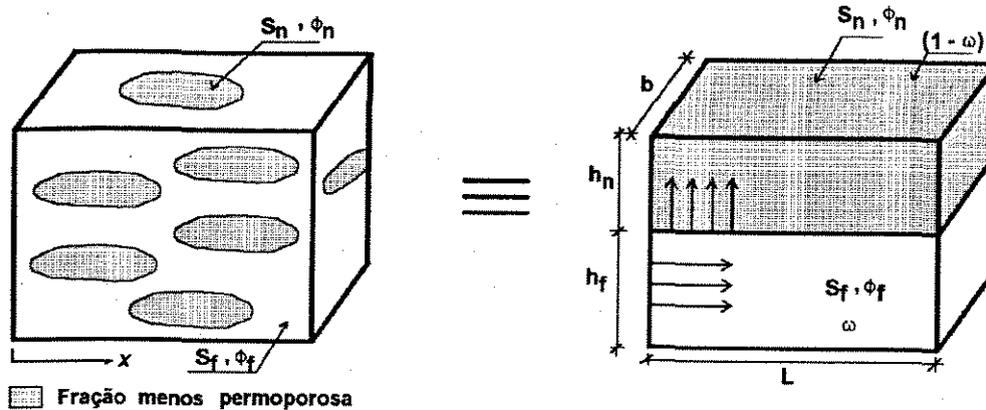
- Yokoyama, Y. e Lake, L. W. : "The Effects of Capillary Pressure on Immiscible Displacements in Stratified Porous Media, " paper SPE 10109 apresentado no "56<sup>th</sup> SPE-AIME Annual Fall Technical Conference and Exhibition", San Antonio, TX, 5-7 Out 1981.

- Yortsos, Y. C. : "A Theoretical Analysis of Vertical Flow Equilibrium," paper SPE 22612 apresentado no "66<sup>th</sup> SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas, TX, 6-9 Out 1991.

- Zapata, V. J. e Lake, L. W. : "A Theoretical Analysis of Viscous Crossflow," paper SPE 10111 apresentado no "56<sup>th</sup> SPE-AIME Annual Fall Technical Conference and Exhibition", San Antonio, TX, 5-7 Out 1981.

## APÊNDICE 1 - Formulação Matemática do Modelo Proposto

O modelo proposto procura representar um meio heterogêneo composto por uma fração contínua de maior permo-porosidade englobando uma fração descontínua de menor permo-porosidade. Para representar o escoamento unidimensional de dois fluidos incompressíveis neste reservatório, o fluido molhante deslocando o não-molhante (por exemplo, injeção de água num reservatório de óleo sub-saturado), vamos admitir a ocorrência de fluxo convectivo devido a um gradiente de pressão na fração contínua e embebição transversal à direção do fluxo convectivo entre a fração contínua e fração descontínua. Efeitos gravitacionais são considerados negligíveis.



Sejam  $S_f$  e  $S_n$  as saturações da fase molhante nas frações contínua e descontínua, respectivamente, já normalizadas em relação ao volume móvel de cada fração:

$$S_f = \frac{S_{wf} - S_{wcf}}{1 - S_{orf} - S_{wcf}} \quad , \quad (1)$$

$$S_n = \frac{S_{wn} - S_{wcn}}{1 - S_{orn} - S_{wcn}} \quad . \quad (2)$$

Arelação entre o volume de óleo móvel da fração contínua e o volume de óleo móvel total do meio poroso,  $\omega$ , doravante denominada de fração volumétrica do meio contínuo, é dada por:

$$\omega = \frac{\phi_{fe} h_f}{\phi_{fe} h_f + \phi_{ne} h_n} \quad , \quad (3)$$

Na equação (3),  $\phi_{fe}$  e  $\phi_{ne}$  são as porosidades efetivas da fração contínua e da fração descontínua, respectivamente, calculadas em relação ao volume de rocha de cada fração, e dadas por:

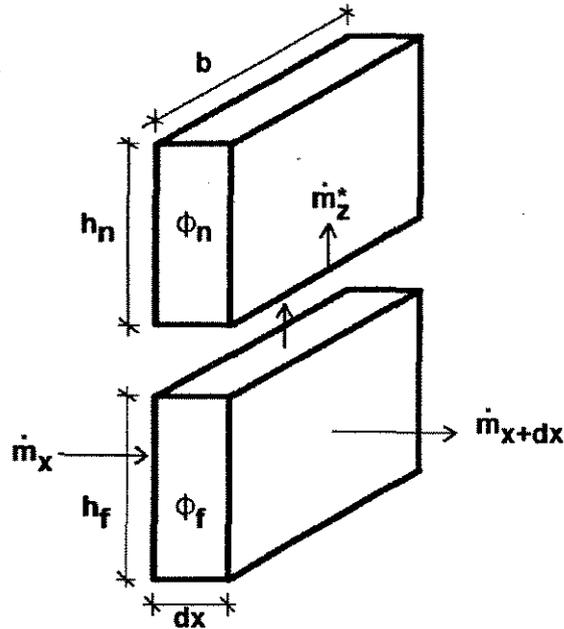
$$\phi_{fe} = \phi_f ( 1 - S_{orf} - S_{wcf} ) \quad , \quad (4)$$

$$\phi_{ne} = \phi_n ( 1 - S_{orn} - S_{wcn} ) \quad . \quad (5)$$

Podemos escrever que a saturação total da fase molhante como uma média ponderada das saturações na fração contínua e na fração descontínua:

$$S = \omega S_f + (1-\omega) S_n \quad . \quad (6)$$

Façamos um balanço de massa sobre um elemento  $dx$  do meio poroso, conforme ilustrado abaixo:



Pela equação da continuidade da fase molhante na fração contínua, podemos escrever:

$$(\dot{m}_x - \dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_z^*) dt = \rho_w b h_f dx \phi_{fe} [ S_f(t+dt) - S_f(t) ] \quad (7)$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} + \frac{\dot{m}_z^*}{dx} + \rho_w b h_f \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} = 0 \quad . \quad (8)$$

Para a fração descontínua, podemos escrever:

$$\dot{m}_z^* dt = \rho_w b h_n dx \phi_{ne} [ S_n(t+dt) - S_n(t) ] \quad (9)$$

ou, ainda,

$$\frac{\dot{m}_z^*}{dx} = \rho_w b h_n \phi_{n_e} \frac{\partial S_n}{\partial t} \quad . \quad (10)$$

Substituindo a equação (10) na equação (8), obtemos:

$$\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} + \rho_w b h_f \phi_{f_e} \frac{\partial S_f}{\partial t} + \rho_w b h_n \phi_{n_e} \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad , \quad (11)$$

ou, ainda,

$$\frac{1}{(h_f \phi_{f_e} + h_n \phi_{n_e})} \frac{1}{b \rho_w} \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1-\omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad . \quad (12)$$

O fluxo mássico da fase molhante na fração contínua é dado por:

$$\dot{m}_x = \rho_w q_w \quad , \quad (13)$$

e o fluxo fracionário por:

$$f(S_p) = \frac{q_w}{q} \quad . \quad (14)$$

Substituindo as equações (13) e (14) na equação (12), obtemos:

$$\frac{q}{b (h_f \phi_{f_e} + h_n \phi_{n_e})} \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \omega \frac{\partial S_f}{\partial t} + (1-\omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

Utilizando a velocidade efetiva de injeção, isto é,

$$v_f = \frac{q}{b h_f \phi_{f_e}} \quad (16)$$

podemos escrever a equação (15) como:

$$\omega v_f \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

Na modelagem da transferência de massa entre as duas frações do meio poroso, vamos assumir que o fluxo mássico entre as duas frações é proporcional à massa de água total e à diferença de saturação entre as duas frações, ou seja,

$$\dot{m}_z^* = K \rho_w [ b dx (h_n \phi_{n_e} + h_f \phi_{f_e}) ] ( S_f - S_n ) \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (10), obtemos:

$$\frac{\rho_w b dx h_n \phi_{n_e}}{\rho_w b dx (h_n \phi_{n_e} + h_f \phi_{f_e})} \frac{\partial S_n}{\partial t} = K ( S_f - S_n ) \quad (19)$$

ou, ainda,

$$(1 - \omega) \frac{\partial S_n}{\partial t} = K (S_f - S_n) \quad . \quad (20)$$

Então, o fenômeno físico em estudo é representado matematicamente pelas equações (17) e (20), associadas às condições inicial e de contorno:

$$S_f (x, 0) = 0 \quad , \quad (21)$$

$$S_n (x, 0) = 0 \quad , \quad (22)$$

$$S_f (0, t) = 0 \quad . \quad (23)$$

## APÊNDICE 2 - Solução Analítica da Equação Linearizada

Seja a equação (4.2), com as condições inicial e de contorno interna:

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} + S_f - a \int_0^{t_D} e^{-a(t_D - \tau_D)} S_f(\tau_D) d\tau_D = 0 \quad , \quad (1)$$

$$S_f(x_D, 0) = 0 \quad , \quad (2)$$

$$S_f(0, t_D) = 1 \quad . \quad (3)$$

Para o caso em que  $f(S_f) = S_f$  ou seja,  $f'(S_f) = 1$ , podemos aplicar a transformada de Laplace às equações (1) e (3):

$$\frac{d\bar{S}_f}{dx_D} + p \bar{S}_f - S_f(0) + \bar{S}_f - a \frac{1}{p+a} \bar{S}_f = 0 \quad , \quad (4)$$

$$\bar{S}_f(0, p) = \frac{1}{p} \quad . \quad (5)$$

Usando a condição inicial, equação (2), na equação (4), temos:

$$\frac{d\bar{S}_f}{dx_D} + \bar{S}_f \left( p + 1 - \frac{a}{p+a} \right) = 0 \quad , \quad (6)$$

ou, rearranjando,

$$\frac{d\bar{S}_f}{dx_D} + \bar{S}_f \left( p + \frac{p}{p+a} \right) = 0 \quad . \quad (7)$$

A solução da equação (7) é:

$$\bar{S}_f(x_D, p) = c e^{-\left(p + \frac{p}{p+a}\right)x_D} \quad . \quad (8)$$

Utilizando a C.C.I., equação (5), na equação (8), obtemos:

$$\bar{S}_f(x_D, p) = \frac{1}{p} e^{-\left(p + \frac{p}{p+a}\right)x_D} \quad . \quad (9)$$

Vamos agora inverter a equação (9) para o campo real:

$$S_f(x_D, t_D) = \mathcal{G}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-px_D} e^{-\left(\frac{p}{p+a}\right)x_D} \right\} \quad , \quad (10)$$

$$S_f(x_D, t_D) = \mathcal{G}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \left[ \frac{1}{p} e^{-x_D} e^{\left(\frac{a}{p+a}\right)x_D} \right] \right\} \quad , \quad (11)$$

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} \mathcal{G}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \left[ \frac{1}{p} e^{\left(\frac{a}{p+a}\right)x_D} \right] \right\} \quad , \quad (12)$$

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} \mathcal{G}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \left[ \frac{p+a}{p} \frac{1}{p+a} e^{\left(\frac{a}{p+a}\right)x_D} \right] \right\} \quad . \quad (13)$$

Definindo:

$$\overline{G}(p+a) = \frac{1}{p+a} e^{\left(\frac{a}{p+a}\right) x_D} , \quad (14)$$

podemos escrever a equação (13) como:

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \left( 1 + \frac{a}{p} \right) \overline{G}(p+a) \right\} , \quad (15)$$

ou, ainda,

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \overline{G}(p+a) \right\} + e^{-x_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \frac{a}{p} \overline{G}(p+a) \right\}. \quad (16)$$

Mas,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \overline{G}(p) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{\frac{a}{p} x_D} \right\} = I_0(2\sqrt{a x_D t_D}) . \quad (17)$$

Então,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \overline{G}(p+a) \right\} = e^{-at_D} I_0(2\sqrt{a x_D t_D}) , \quad (18)$$

e assim sendo,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-px_D} \overline{G}(p+a) \right\} = u_{x_D}(t_D) e^{-a(t_D-x_D)} I_0(2\sqrt{a x_D (t_D-x_D)}) , \quad (19)$$

onde,

$$u_{x_D}(t_D) = \begin{cases} 0 & t_D < x_D \\ 1 & t_D \geq x_D \end{cases} . \quad (20)$$

Então,

$$\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-px_D} \overline{G(p+a)} \} = e^{-a(t_D-x_D)} I_0(2\sqrt{a x_D (t_D-x_D)}) , \quad t_D \geq x_D \quad (21)$$

e, desta forma,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-px_D} \overline{G(p+a)} \right\} = \int_{x_D}^{t_D} e^{-a(\tau_D-x_D)} I_0(2\sqrt{a x_D (\tau_D-x_D)}) d\tau_D , \quad t_D \geq x_D . \quad (22)$$

A solução final fica:

$$S_f(x_D, t_D) = e^{-x_D} e^{-a(t_D-x_D)} I_0(2\sqrt{a x_D (t_D-x_D)}) + \\ + a e^{-x_D} \int_{x_D}^{t_D} e^{-a(\tau_D-x_D)} I_0(2\sqrt{a x_D (\tau_D-x_D)}) d\tau_D , \quad t_D \geq x_D \quad (23)$$

e

$$S_f(x_D, t_D) = 0 , \quad t_D < x_D . \quad (24)$$

### APÊNDICE 3 - Transformação do Sistema de Equações Diferenciais Parciais num Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Seja o sistema de equações diferenciais parciais, com as condições inicial e de contorno interna :

$$f'(S_f) \frac{\partial S_f}{\partial x_D} + \frac{\partial S_f}{\partial t_D} = S_n - S_f \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial S_n}{\partial t_D} = S_f - S_n \quad (2)$$

$$S_f(x_D, 0) = 0 \quad (3)$$

$$S_n(x_D, 0) = 0 \quad (4)$$

$$S_f(0, t_D) = 1 \quad (5)$$

O sistema acima pode ser expresso na forma matricial:

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial t} = C, \quad (6)$$

com  $U(x,t) = (S_f, S_n)^T$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} f'(S_f) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f \\ S_n \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f \\ S_n \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} S_n - S_f \\ S_f - S_n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

O método das características permite transformar um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias, válidas ao longo de curvas no plano  $(x,t)$ , curvas estas ditas características. As equações são então integradas simultaneamente, ao longo das características correspondentes, a partir de condições pré-estabelecidas de  $U(x,t)$  sobre curvas conhecidas no plano  $(x,t)$ .

Considere o diferencial da função vetorial  $U(x,t)$  ao longo de uma característica:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad . \quad (8)$$

As equações (6) e (8) formam um sistema de 2 equações nas 2 derivadas parciais  $\partial U/\partial x$  e  $\partial U/\partial t$  :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ Idx & Idt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ dU \end{bmatrix} \quad . \quad (9)$$

As características são as curvas  $x(t)$  para as quais o determinante do sistema (9) é zero:

$$\det |Adt - Bdx| = 0 \quad . \quad (10)$$

Isto implica que a inclinação das características é igual aos autovalores do par de matrizes A e B:

$$\det \left| A - \frac{dx}{dt} B \right| = 0 \quad = \quad \det |A - \lambda B| = 0 \quad . \quad (11)$$

Para o sistema hiperbólico em questão, temos dois autovalores reais:

$\lambda_1 = f'(S_1)$  e  $\lambda_2 = 0$ . As características são definidas por:

$$\frac{dx}{dt} = f'(S_1) \quad (12)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (13)$$

Na  $i$ -ésima característica, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (14)$$

Considere os autovetores à esquerda,  $I_i$  e à direita,  $r_i$ , correspondentes ao autovalor  $\lambda_i$ :

$$I_i (A - \lambda_i B) = (A - \lambda_i B) r_i = 0 \quad (15)$$

Multiplicando a equação (6) à esquerda por  $I_i$  e usando a equação (15), temos:

$$I_i \left( A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial t} \right) = I_i B \left( \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) = I_i C \quad (16)$$

As relações requeridas sobre as características podem então ser obtidas usando-se a equação (14) na equação (16):

$$I_i B \frac{dU}{dt} = I_i C \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

Para o nosso problema, os autovetores à esquerda, determinados pela equação (15), são:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (18)$$

Então, usando a equação (17), chegamos ao sistema transformado:

$$\frac{dS_f}{dt} = ( S_n - S_f ) , \quad (19)$$

sobre as características definidas por:

$$\frac{dx}{dt} = f'(S_f) \quad (20)$$

e

$$\frac{1}{a} \frac{dS_n}{dt} = ( S_f - S_n ) , \quad (21)$$

sobre as características definidas por:

$$\frac{dx}{dt} = 0 . \quad (22)$$

## APÊNDICE 4 - Derivação das Equações para o Modelo de Difusão

Vamos derivar as equações que representam o fluxo unidimensional bifásico incompressível num reservatório heterogêneo considerando um modelo de difusão para representar a transferência de massa. Efeitos gravitacionais são considerados negligíveis. A representação esquemática do meio poroso pode ser visualizada na Figura 1 do capítulo 3.

Vamos considerar a embebição da fase molhante na fração descontínua e o fluxo da fase não-molhante em contra-corrente. Podemos derivar a velocidade de difusão da fase molhante na fração descontínua, transversal à direção do fluxo na fração contínua. Pela Lei de Darcy, temos:

- fase óleo:

$$v_{o_s} = - \frac{k_n k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p_o}{\partial z} = - \frac{v_{o_s}}{k_n} \frac{\mu_o}{k_{ro}}, \quad (1)$$

- fase água:

$$v_{w_s} = - \frac{k_n k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p_w}{\partial z} = - \frac{v_{w_s}}{k_n} \frac{\mu_w}{k_{rw}}. \quad (2)$$

As pressões nas duas fase são relacionadas pela pressão capilar:

$$P_c = P_o - P_w \quad (3)$$

Como a embebição se dá contra-corrente, temos que a velocidade total no meio poroso é nula:

$$v_{o_z} = - v_{w_z} \quad (4)$$

Pela equação (3), podemos escrever:

$$\frac{dP_c}{dS_n} \frac{\partial S_n}{\partial z} = \frac{\partial p_o}{\partial z} - \frac{\partial p_w}{\partial z} \quad (5)$$

Usando as equações (1), (2) e (4) na equação (5), temos:

$$\frac{v_{w_z}}{k_n} \left[ \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right] = \frac{dP_c}{dS_n} \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (6)$$

Então, a velocidade de difusão da fase água na fração descontínua é dada por:

$$v_{w_z} = \frac{k_n}{\left[ \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right]} \frac{dP_c}{dS_n} \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (7)$$

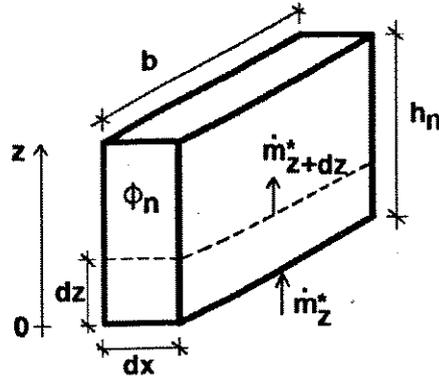
Definindo o coeficiente de difusão como:

$$D = - \frac{k_n}{\left[ \frac{\mu_o}{k_{ro}} + \frac{\mu_w}{k_{rw}} \right]} \frac{dP_c}{dS_n} \quad (8)$$

a equação (7) pode ser escrita como:

$$v_{w_z} = - D \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (9)$$

Um balanço de massa num elemento de volume  $dx, dz$  nos dá:



$$(\dot{m}_z^* - \dot{m}_{z+dz}^*) dt = \rho_w b dx dz \phi_{n_e} [ S_n(t+ dt) - S_n(t) ] \quad (10)$$

ou,

$$\frac{\partial \dot{m}_z^*}{\partial z} + \rho_w b dx \phi_{n_e} \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

O fluxo mássico da fase molhante na fração descontínua é expresso por:

$$\dot{m}_z^* = \rho_w v_{w_z} b dx \quad (12)$$

Usando a equação (9) na equação (12), temos que:

$$\dot{m}_z^* = - \rho_w b dx D \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (13)$$

Utilizando a equação (13) na equação (11) e simplificando, obtemos:

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial S_n}{\partial z} \right) + \phi_{n_e} \frac{\partial S_n}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

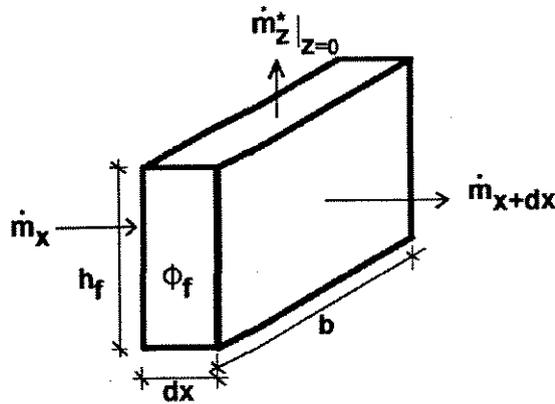
com as seguintes condições inicial e de contorno:

$$S_n(x, z, 0) = 0 \quad , \quad (15)$$

$$S_n(x, 0, t) = S_f(x, t) \quad , \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{z=h_n} = 0 \quad . \quad (17)$$

Para a fração contínua, um balanço de massa sobre um elemento de volume  $dx$  nos dá:



$$(\dot{m}_x - \dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_z^*|_{z=0}) dt = \rho_w b h_f dx \phi_{fe} [S_f(t+dt) - S_f(t)] \quad , \quad (18)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} + \frac{\dot{m}_z^*|_{z=0}}{dx} = \rho_w b h_f \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} \quad . \quad (19)$$

O fluxo mássico da fase molhante na fração contínua é expresso por:

$$\dot{m}_x = \rho_w q_w \quad , \quad (20)$$

ou, expresso em termos do fluxo fracionário,

$$\dot{m}_x = \rho_w q f(S_f) \quad . \quad (21)$$

Substituindo as equações (13) e (21) na equação (19), temos que:

$$\frac{q}{b h_f} \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} - \frac{D}{h_f} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{z=0} + \phi_{fe} \frac{\partial S_f}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Utilizando a velocidade efetiva de injeção, definida por:

$$v_f = \frac{q}{b h_f \phi_{fe}} \quad , \quad (23)$$

a equação (22) pode ser expressa por:

$$v_f \frac{\partial f(S_f)}{\partial x} - \frac{D}{\phi_{fe} h_f} \left. \frac{\partial S_n}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{\partial S_f}{\partial t} = 0 \quad , \quad (24)$$

com as seguintes condições inicial e de contorno interna:

$$S_f(x, 0) = 0 \quad , \quad (26)$$

$$S_f(0, t) = 1 \quad . \quad (27)$$

Então, as equações (14) e (24), junto com as respectivas condições inicial e de contorno, formam o sistema de equações que descrevem o fenômeno físico em estudo.

## APÊNDICE 5 - Solução da Equação da Difusão

Seja a equação (7.17), com as condições inicial e de contorno:

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial z_D^2} = \varphi \frac{\partial S_n}{\partial t_D} \quad (1)$$

$$S_n(x_D, z_D, 0) = 0 \quad (2)$$

$$S_n(x_D, 0, t_D) = S_f(x_D, t_D) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D} \right|_{z_D=1} = 0 \quad (4)$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace às equações (1), (3) e (4):

$$\frac{d^2 \bar{S}_n}{dz_D^2} = \varphi [ p \bar{S}_n - S_n(0) ] \quad (5)$$

$$\bar{S}_n(x_D, 0, p) = \bar{S}_f(x_D, p) \quad (6)$$

$$\left. \frac{d\bar{S}_n}{dz_D} \right|_{z_D=1} = 0 \quad (7)$$

Usando a condição inicial, equação (2), na equação (5), temos:

$$\frac{d^2 \bar{S}_n}{dz_D^2} = \varphi p \bar{S}_n, \quad (8)$$

cuja solução é dada por:

$$\bar{S}_n(x_D, z_D, p) = c_1 e^{-\sqrt{\varphi p} z_D} + c_2 e^{\sqrt{\varphi p} z_D}. \quad (9)$$

Utilizando as equações (6) e (7) na equação (9), obtemos:

$$\bar{S}_n(x_D, z_D, p) = \bar{S}_f(x_D, p) \left[ \cosh(\sqrt{\varphi p} z_D) - \tanh(\sqrt{\varphi p}) \sinh(\sqrt{\varphi p} z_D) \right]. \quad (10)$$

Estamos interessados na derivada de  $S_n$  em relação a  $z_D$ , avaliada em  $z_D=0$ ,

ou seja,

$$\left. \frac{d\bar{S}_n}{dz_D}(x_D, z_D, p) \right|_{z_D=0} = -\bar{S}_f(x_D, p) \left[ \sqrt{\varphi p} \tanh(\sqrt{\varphi p}) \right], \quad (11)$$

ou,

$$\left. \frac{d\bar{S}_n}{dz_D}(x_D, z_D, p) \right|_{z_D=0} = -\bar{S}_f(x_D, p) \sqrt{\varphi p} \left[ \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sinh(\sqrt{\varphi p})}{\cosh(\sqrt{\varphi p})} \right]. \quad (12)$$

Mas, temos que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sinh x \sqrt{p}}{\cosh a \sqrt{p}} \right\} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4 a^2}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1) \pi x}{2a}. \quad (13)$$

Se assumirmos  $S_f$  constante, temos que:

$$\overline{S_f}(x_D, p) = \frac{S_f(x_D, t_D)}{p} \quad (14)$$

Então, usando as equações (13) e (14), a solução da equação (11), no campo real, é dada por:

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial z_D}(x_D, z_D, t_D) \right|_{z_D=0} = -2 S_f(x_D, t_D) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t_D}{4 \tau}} \quad (15)$$