UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)

Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

MARIELI VANESSA REDISKE DE ALMEIDA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO SOBRE DIVISIBILIDADE DO FORMADOR DE PROFESSORES QUE ENSINA TEORIA DOS NÚMEROS PARA ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEMATICS TEACHER'S EDUCATORS SPECIALIZED KNOWLEDGE ON DIVISIBILITY IN A NUMBER THEORY COURSE FOR PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS

CAMPINAS

2020

MARIELI VANESSA REDISKE DE ALMEIDA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO SOBRE DIVISIBILIDADE DO FORMADOR DE PROFESSORES QUE ENSINA TEORIA DOS NÚMEROS PARA ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, na área de concentração Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: MIGUEL RIBEIRO.

Coorientador: DARIO FIORENTINI.

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA MARIELI VANESSA REDISKE DE ALMEIDA E ORIENTADA PELO PROF. DR. CARLOS MIGUEL DA SILVA RIBEIRO

CAMPINAS

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

AL64c	Almeida, Marieli Vanessa Rediske de, 1991- Conhecimento especializado sobre divisibilidade do formador de professores que ensina teoria dos números para estudantes de licenciatura em matemática / Marieli Vanessa Rediske de Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2020. Orientador: Carlos Miguel da Silva Ribeiro. Coorientador: Dario Fiorentini. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin. 1. Educadores de professores. 2. Matemáticos. 3. Professores de matemática - Educação. 4. Números - Divisibilidade. 5. Modelo do conhecimento especializado do professor de matemática. I. Ribeiro, Carlos Miguel da Silva, 1978-. II. Fiorentini, Dario, 1950-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Mathematics teacher's educators specialized knowledge on divisibility in a number theory course for prospective mathematics teachers
Palavras-chave em inglês:
Teacher educators
Mathematicians
Mathematics teachers - Education
Numbers, Divisibility of
Mathematics teacher's specialised knowledge model
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Carlos Miguel da Silva Ribeiro [Orientador]
Alessandro Jacques Ribeiro
Luis Carlos Contreras González
Miriam Cardoso Utsumi
Samuel Rocha de Oliveira
Data de defesa: 14-12-2020
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-7491-8936
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5119544071417852

COMISSÃO EXAMINADORA

DATA: 14/12/2020

Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro (Presidente - Orientador)

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro – Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Luis Carlos Contreras González – Universidade de Huelva

Profa. Dra. Miriam Cardoso Utsumi – Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros da banca examinadora encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática.

Dedicatória

Aos meus pais, Daisi e Luiz, por sempre acreditarem no poder transformador da Educação.

Ao meu esposo, Rian, por ser minha fonte infinita de apoio.

Agradecimentos

Aos meus pais, Daisi e Luiz, por todo apoio e compreensão ao longo de minha jornada na pós-graduação. Cheguei até aqui graças a vocês.

Ao meu esposo, Rian, pelo incentivo e paciência incondicionais ao longo do doutorado. Por ler, criticar e contribuir com meus artigos, por ser meu revisor e consultor matemático, pelas inúmeras discussões sobre a formação de professores e sobre o ensino de Teoria dos Números. Obrigada por ser meu companheiro de estudos e de vida.

Ao Professor Doutor Miguel Ribeiro, meu orientador, pela orientação ao longo dessa jornada e pelas inúmeras contribuições a minha formação como pesquisadora.

Ao Professor Doutor Dario Fiorentini, meu coorientador, pelas orientações, disponibilidade e inúmeras contribuições a esta tese.

Ao Professor Doutor José Carrillo, o Pepe, por me receber e orientar na Universidade de Huelva durante o período do doutorado sanduíche. Por sempre acreditar no meu trabalho. Pela gentileza, incentivo constante, apoio e conselhos, sobre a tese e sobre a vida.

Aos Professores participantes da banca examinadora, Professor Doutor Alessandro Jacques Ribeiro, Professor Doutor Luis Carlos Contreras, Professora Doutora Miriam Cardoso Utsumi e Professor Doutor Samuel Rocha, agradeço imensamente pela leitura cuidadosa e pelas sugestões e críticas construtivas que enriqueceram esse trabalho.

Aos colegas do grupo CIEspMat, pelas valiosas discussões sobre o conhecimento interpretativo e especializado do professor no âmbito de diferentes conteúdos matemáticos.

Aos colegas do Grupo SIDM da Universidade de Huelva e da Rede Iberoamericana MTSK, pelas importantes discussões sobre o conhecimento especializado do professor que ensina Matemática.

Aos colegas do Prapem, pelas oportunidades de discussão sobre nossas pesquisas e pelas diversas leituras críticas que ajudaram a enriquecer a pesquisa realizada.

Aos colegas do GdS, pela acolhida e o compartilhamento de experiências sobre o ser/tornar-se professor de Matemática.

Aos Professores que me receberam na Universidade de Huelva durante o doutorado sanduíche, Luis Carlos Contreras, Nuria Climent e Miguel Ángel Montes. Em especial à Myriam Codes, pelos conselhos, pelas conversas sobre o modelo MTSK e sobre a vida, e por nossos "almuerzos de viernes".

À Rosana, Silvania e Beatriz, pelo compartilhamento de nossos anseios, pelas leituras realizadas, pelas valiosas críticas construtivas e conselhos em diferentes fases dessa caminhada.

Aos amigos Vanessa, Ronaldo e Rodrigo, por se fazerem presentes, apoiando e incentivando a conclusão da escrita desta tese.

À Andre e Benny, os formadores participantes da pesquisa, que gentilmente me abriram as portas de suas salas de aula e compartilharam suas experiências de vida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pela bolsa concedida no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Doutorado Sanduíche no Exterior.

RESUMO

Diante da importância do papel do formador de professores de Matemática e da escassez de estudos sobre seu conhecimento, esta pesquisa se propõe a investigar o conhecimento do formador. Esse conhecimento é encarado na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK), que tem como foco de estudo a especialização do conhecimento do professor que ensina Matemática – aqui se pretende contribuir para expandir essa conceitualização ao conhecimento do formador. Neste sentido, a principal questão norteadora da investigação se refere a: *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?* Com vistas a responder a esta pergunta, elencamos como objetivo geral da pesquisa *compreender e caracterizar, no âmbito da Teoria dos Números, o conhecimento especializado sobre divisibilidade de formadores atuantes na formação inicial de professores de Matemática.* Para a realização da pesquisa, foi adotada uma metodologia qualitativa, do tipo estudo de caso (multicasos instrumentais). A coleta das informações foi realizada por meio do acompanhamento de dois matemáticos que atuam como formadores no contexto de disciplinas de Teoria dos Números, oferecidas para estudantes de cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, no primeiro e no segundo semestres de 2018. As informações foram coletadas em uma universidade pública do interior do Estado de São Paulo através de entrevistas semiestruturadas, acesso ao planejamento de aulas dos formadores, e às avaliações elaboradas no contexto das disciplinas, gravações de aulas em áudio e vídeo, bem como caderno de campo da pesquisadora. A análise foi realizada a partir da transcrição das gravações das aulas e entrevistas realizadas com os formadores, considerando a divisão das aulas em episódios significativos, os quais foram analisados na perspectiva do MTSK e do conhecimento especializado do formador. Os resultados obtidos, aqui apresentados em formato *multipaper*, incluem um compilado de indicadores do conhecimento especializado dos formadores participantes. Foram obtidos indicadores de conhecimento dos formadores de professores, considerando-se seu *Mathematical Knowledge*, relacionado ao conhecimento de tópicos, ao conhecimento de conexões e ao conhecimento da prática matemática, e seu *Pedagogical Content Knowledge*, relacionado ao conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Também foram obtidos indicadores do *Pedagogical Content Knowledge* na perspectiva do conhecimento especializado do formador, relacionados com características do desenvolvimento profissional dos futuros professores, com o ensino na formação inicial e com padrões dos cursos de formação.

Palavras-chave: Formador de professores. Matemático. Licenciatura em matemática. Divisibilidade. Conhecimento especializado. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*.

ABSTRACT

Considering the centrality of the role of the Mathematics Teacher Educator (MTE), and the scarcity of studies this knowledge, this research aims to investigate the MTE knowledge. This knowledge is faced in the perspective of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK), which considers the specialization of mathematical knowledge of the Mathematics teacher as the focus - here we intend to contribute to expand this conceptualization to the knowledge of the teacher educator. In this sense, the main guiding question of the investigation refers to: *What knowledge about divisibility is mobilized and revealed by two mathematics teacher educators who teach Number Theory?* In order to answer this question, we indicate as a general objective of the research *to understand and characterize, within the scope of Number Theory, the specialized knowledge about divisibility of mathematics teacher educators working in the initial teacher education of Mathematics teachers*. To conduct the research, we adopted a qualitative approach, with adoption of an instrumental case study. The collection of information was carried out through the observation of two mathematicians, who act as MTEs, in the context of Number Theory courses offered for prospective teachers and undergraduate Mathematics students, in the first and second semesters of 2018. The information was collected at a public university in the State of São Paulo, through semi-structured interviews, access to the MTEs' lesson planning, to the tests used by them, audio and video class recordings, and field notes of the researcher. The analysis was performed from the transcription of the class recordings and interviews with the MTEs, considering the division of the classes into significant episodes for further analysis of each episode from the perspective of MTSK and of the mathematics teacher educator specialized knowledge. The obtained results, presented in a multipaper format, include a compilation of indicators of the specialized knowledge of the participating MTEs. A set of knowledge indicators of MTEs has been elaborated, considering their Mathematical Knowledge, related to the knowledge of topics, the knowledge of connections and the knowledge of mathematical practice. Also indicators on their Pedagogical Content Knowledge, related to the knowledge about the teaching and learning of Mathematics have been obtained. We also obtained Pedagogical Content Knowledge indicators from the perspective of the MTE's specialized knowledge, related to characteristics of the professional development of prospective teachers, related to teaching in the initial teacher education and related to standards of the teacher education courses.

Keywords: Mathematics Teacher Educator. Mathematician. Initial Teacher Education. Divisibility. Specialized Knowledge. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

RESUMEN

Considerando la centralidad del rol del formador de profesores de matemáticas, y la escasez de estudios sobre su conocimiento, este estudio tiene como objetivo investigar el conocimiento del formador. Este conocimiento es considerado en la perspectiva del *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), que considera como foco la especialización del conocimiento matemático del profesor de Matemática - aquí pretendemos contribuir a ampliar esta conceptualización al conocimiento del formador. En este sentido, la principal pregunta orientadora de la investigación se refiere a: *¿Qué conocimiento sobre divisibilidad es movilizado y revelado por dos formadores que enseñan Teoría de Números?* Para dar respuesta a esta pregunta, nos proponemos como objetivo general de la investigación *comprender y caracterizar, en el ámbito de la Teoría de Números, el conocimiento especializado sobre divisibilidad de los formadores que trabajan en la formación inicial de los profesores de Matemáticas*. Para la realización de la investigación se adoptó una metodología cualitativa, del tipo estudio de caso (multicasos instrumentales). La recolección de información se llevó a cabo mediante la observación de clases de dos matemáticos, quienes actúan como formadores, en el contexto de cursos de Teoría de Números que se ofrecen a futuros profesores y estudiantes de licenciatura en Matemáticas, en el primer y segundo semestre de 2018. La información fue recolectada en una universidad pública del interior del Estado de São Paulo, a través de entrevistas semiestructuradas, acceso a los planes de lecciones de los formadores, acceso a evaluaciones elaboradas en el contexto del curso, grabaciones de clases (audio y video) y cuaderno de campo de la investigadora. El análisis se realizó a partir de la transcripción de las grabaciones de las clases y entrevistas con los formadores, considerando la división de las clases en episodios significativos para un análisis posterior de cada episodio desde la perspectiva del MTSK y del conocimiento especializado del formador. Los resultados obtenidos, presentados aquí en formato *multipaper*, incluyen una compilación de indicadores del conocimiento especializado de los formadores participantes. Los indicadores de conocimiento de los formadores de profesores se obtuvieron considerando su *Mathematical Knowledge*, relacionado con el conocimiento de los temas, el conocimiento de las conexiones y el conocimiento de la práctica matemática, y su *Pedagogical Content Knowledge*, relacionado con el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. También se obtuvieron indicadores de *Pedagogical Content Knowledge* desde la perspectiva del conocimiento especializado del formador, relacionado con las características del desarrollo profesional de los futuros

profesores, con la docencia en la formación inicial y con los estándares de los cursos de formación.

Palabras clave: Formador de profesores. Matemático. Formación de profesores de matemáticas. Divisibilidad. Conocimiento especializado. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*.

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

KoT – Knowledge of Topics

KSM – Knowledge of the Structure of Mathematics

KPM – Knowledge of Practices in Mathematics

KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics

KMT – Knowledge of Mathematics Teaching

KMLS – Knowledge of Mathematics Learning Standards

MK – Mathematical Knowledge

MKT – Mathematical Knowledge for Teaching

MTSK – Mathematics Teachers' Specialized Knowledge

PCK – Pedagogical Content Knowledge

TADE – Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

USP – Universidade de São Paulo

Sumário

INTRODUÇÃO

O conhecimento do professor passou a ser amplamente discutido a partir dos trabalhos de autores como Shulman (1986, 1987), por exemplo, que apontavam a necessidade de compreender, por meio de investigações, de onde vinham os exemplos, explicações e conhecimentos mobilizados pelo professor em sala de aula. De caráter geral, com o tempo, os trabalhos de Shulman foram transpostos da Educação para áreas específicas, como o ensino de Matemática, e constructos teóricos foram desenvolvidos para analisar o conhecimento do professor que ensina Matemática[1], a exemplo do *Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

O que os alunos[2] aprendem e como o aprendem está diretamente relacionado com o conhecimento e com as crenças do professor. Os resultados de pesquisas indicam que, por um lado, o conhecimento do professor é, dentre os fatores controláveis, aquele que possui maior impacto nos resultados (e nas aprendizagens) dos alunos (BAUMERT et al., 2010; CARNOY; ARENDS, 2012; NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004). Por outro lado, mostram que as crenças do professor influenciam na forma como este percebe o seu próprio conhecimento, o seu papel e, consequentemente, o papel dos alunos, impactando, portanto, na sua prática (RIBEIRO; CARRILLO, 2011). Esse conhecimento do professor de Matemática é considerado especializado, contemplando tanto aspectos do conteúdo quanto aspectos didático-pedagógicos do conteúdo (CARRILLO et al., 2018), expandindo e refinando, para a área de conhecimento da Matemática, as ideias originais de Shulman (1986).

Considerando que o professor é, ele mesmo, também um aprendiz – no que se refere tanto à formação inicial quanto à formação contínua –, podemos atribuir ao formador de professores o papel de contribuir para a melhoria da aprendizagem dos professores. Essa aprendizagem docente precisa considerar, necessariamente, as particularidades e as especificidades do conhecimento do professor, associando-se às mais diversas dimensões do seu conhecimento profissional e, em particular, ao seu conhecimento do conteúdo e ao conhecimento didático-pedagógico do conteúdo.

---

[1] Distinguimos professor de Matemática de professor que ensina Matemática. A primeira nomenclatura é empregada para referência aos professores que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, ensinando especificamente a disciplina de Matemática, bem como no Ensino Superior. A segunda nomenclatura é mais ampla, pois abarca também os professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, ditos polivalentes, isto é, aqueles que ensinam todas as disciplinas.

[2] Neste texto, distinguimos alunos de estudantes, empregando estudantes para aqueles que estudam no Ensino Superior, e alunos para aqueles que estudam na Educação Básica.

Segundo Jaworski (2008, p. 1), os formadores de professores de Matemática "são profissionais que trabalham com professores e/ou futuros professores para desenvolver e melhorar o ensino de matemática". Considerando que o conhecimento do professor de Matemática é especializado, em relação à perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* - MTSK (CARRILLO et al., 2018), o trabalho do formador é ainda mais importante. Neste sentido, esta investigação pretende contribuir com as pesquisas sobre o conhecimento do formador de professores de Matemática e seu papel na formação de professores.

Ainda que tenham passado a maior parte do tempo tendo aulas de Matemática na universidade, boa parte dos professores de Matemática julga que as disciplinas de Matemática que cursaram na formação inicial têm pouca relevância e relação com sua prática pedagógica (ZAZKIS; LEIKIN, 2010). Considerando que tais disciplinas geralmente são ministradas por matemáticos, e que estes sujeitos são formadores de professores de Matemática, mesmo que não se percebam nesse papel (LEIKIN; ZAZKIS; MELLER, 2018), compreender o conhecimento desses educadores é importante para facilitar mudanças na forma como se ensina nos cursos de licenciatura em Matemática. Do mesmo modo, compreender a especificidade do conhecimento do formador pode auxiliar a repensar o planejamento dos cursos de pós-graduação que fazem parte da formação desses sujeitos. No caso dos matemáticos, os cursos de pós-graduação que fazem parte de sua formação são, geralmente, o mestrado e o doutorado em Matemática.

O interesse pelo conhecimento do formador de professores de Matemática vem crescendo nas pesquisas recentes (BESWICK; GOOS, 2018). Assim como se espera que o professor de Matemática deve possuir um conhecimento mais amplo do que aquele que vai ensinar, se considera que o formador de professores deve saber mais, em termos de profundidade e amplitude, do que precisa ensinar ao futuro professor (ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo). Nas pesquisas em Educação Matemática, quase sempre se entende que o conhecimento do formador é composto por, pelo menos, parte do conhecimento do professor que ensina Matemática (BESWICK; CHAPMAN, 2015).

Seguindo esse raciocínio, não é surpreendente que muitos modelos de conhecimento do formador sejam influenciados, ou mesmo construídos, a partir de modelos para o conhecimento do professor de Matemática (BESWICK; GOOS, 2018). Este é o caso do *Mathematics' Teacher Trainer Specialised Knowledge* (CONTRERAS et al., 2017), modelo de análise para o conhecimento especializado do formador que vem sendo desenvolvido e conceitualizado a partir do constructo teórico MTSK.

Considerando a problemática da formação inicial do professor de Matemática, decidimos nesta pesquisa, inicialmente, empreender esforços para compreender aspectos da formação, em específico o conhecimento do formador que ensina Álgebra na licenciatura. Com a vastidão dessa grande área da Matemática e com a necessidade de efetuar um recorte para a realização da investigação, optamos pelo desenvolvimento da pesquisa no contexto da Teoria dos Números.

Oliveira e Fonseca (2017) apontam que os conteúdos das disciplinas de Teoria dos Números nem sempre são considerados importantes pelos envolvidos na formação. Segundo os autores, entendendo que o futuro professor já teve contato com muitos desses conteúdos ao longo da escolaridade, para muitos, pode não ser primordial a realização de estudos sobre estes tópicos. Por outro lado, a presença constante dos números naturais e inteiros no currículo de Matemática da Educação Básica (BRASIL, 2018) torna expectável uma ampla discussão do tema nos cursos de licenciatura.

Assim, haja vista que os matemáticos que atuam em cursos de licenciatura desempenham um importante papel na formação inicial do professor (LEIKIN; ZAZKIS; MELLER, 2018), optamos por tentar compreender nesta pesquisa

Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?

Para responder a esta questão de pesquisa, são apontadas as seguintes subquestões da investigação:

- Que conhecimento especializado é mobilizado por um formador de professores de matemática ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros?
- Quais elementos caracterizam o conhecimento matemático de um formador de professores de Matemática com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?
- Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?

Com vistas a responder a nossa questão de pesquisa, consideramos necessário caracterizar os conhecimentos dos formadores de professores de Matemática participantes da pesquisa, contemplando também informações relativas à experiência profissional, à formação acadêmica e às concepções sobre a Matemática e o seu ensino.

Um dos objetivos desta pesquisa de doutorado é auxiliar na conceitualização do conhecimento especializado do formador de professores sob a perspectiva dos estudos sobre o

Mathematics Teachers' Specialised Knowledge – MTSK (CARRILLO et al., 2018), e sob a perspectiva do *Mathematics' Teacher Trainer Specialised Knowledge* (CONTRERAS et al., 2017), em particular, estamos interessados no conhecimento especializado do formador de professores que ensina Teoria dos Números na licenciatura em Matemática.

Para investigar esse conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, optamos pela realização de uma pesquisa com abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso, na qual foram coletadas informações no contexto de duas disciplinas de Teoria dos Números, em uma mesma universidade pública brasileira. Os participantes da pesquisa são dois matemáticos que ensinam Teoria dos Números para alunos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Decidimos pelo estudo de caso instrumental com objetivo de melhor compreender as evidências de cada caso e como ambos os casos se relacionam entre si.

As informações coletadas são provenientes da gravação em áudio e vídeo de aulas dos formadores; da gravação de entrevistas semiestruturadas; de entrevistas breves realizadas antes e depois das aulas observadas dos formadores; do acesso às notas de aula de um dos formadores; e às avaliações propostas no contexto das duas disciplinas de Teoria dos Números ministradas pelos formadores, e do caderno de campo da pesquisadora.

A tese é apresentada em formato *multipaper*, envolvendo a escrita de quatro artigos. Os três primeiros independentes, mas articulados entre si de forma a possibilitar responder à questão de pesquisa, e o quarto artigo busca discutir e sintetizar os resultados apresentados nos três primeiros. A escolha desse formato objetiva, além da delimitação e da clareza na análise dos dados, a revisão sistemática por pares, bem como uma divulgação mais abrangente dos resultados da pesquisa. Dessa forma, após a introdução, são apresentados o capítulo de revisão de literatura e referencial teórico, o capítulo de metodologia, o capítulo de análise de dados, constituído pelos três artigos de análise, e o capítulo final, composto pelo artigo de meta-análise e pelas conclusões da pesquisa.

No capítulo intitulado *Revisão de literatura e referencial teórico*, são discutidos três aspectos fundamentais de nossa problemática: o ensino da Teoria dos Números, a formação e o conhecimento especializado do professor de Matemática, e o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática.

O capítulo intitulado *Contexto e Método* apresenta a discussão da metodologia de investigação adotada e dos métodos empregados, trata dos casos selecionados e dos instrumentos utilizados para coleta de informações, e discorre sobre os procedimentos de análise, apontando um exemplo para cada etapa dessa análise.

O capítulo de *Análise dos dados* inclui os três artigos de análise de dados da pesquisa de campo. No primeiro artigo, intitulado "Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros", buscamos responder à subquestão *Qual é o conhecimento especializado mobilizado por um formador de professores de Matemática ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros?*

No segundo artigo, "Knowledge of a Mathematics Teacher Educator to teach divisibility to prospective secondary school teachers", pretendemos responder à subquestão *Quais elementos caracterizam o conhecimento matemático de um formador de professores de Matemática com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?*

Por sua vez, no terceiro artigo, que se intitula "Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações", procuramos responder à subquestão *Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?*

Finalmente, no capítulo de *Conclusões e considerações finais*, apresentamos o artigo de meta-análise, retomamos os resultados obtidos, refletindo sobre as análises efetuadas e sobre o que elas apontam como resposta para nossa questão de pesquisa, a saber, *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?* Discorremos ainda sobre os resultados obtidos e como eles nos permitem uma melhor compreensão do conhecimento especializado do formador, que também é matemático. Discutimos perspectivas futuras de pesquisa no âmbito desse tema e apontamos alguns problemas em aberto.

REVISÃO DE LITERATURA E REFERENCIAL TEÓRICO

Os estudos com foco no formador de professores têm aumentado nas últimas décadas, havendo diversas possibilidades de pesquisa, incluindo investigações sobre identidade, desenvolvimento profissional, crenças, conhecimentos e formação do formador. No que se refere ao conhecimento, algumas investigações tentam caracterizar o conhecimento do formador, e originam diferentes modelos (ver, por exemplo, JAWORSKI, 2008; ZOPF, 2010; CONTRERAS et al., 2017).

Para a elaboração de um modelo de conhecimento do formador, um dos principais elementos a considerar é a diversidade de perfis desses sujeitos (BESWICK; CHAPMAN, 2012; ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS et al., no prelo). Além disso, o que já se sabe sobre o conhecimento do professor de Matemática pode ser entendido como um ponto de partida para estudar o conhecimento do formador. Os trabalhos que discutem o conhecimento do formador geralmente adotam uma perspectiva de investigação sobre a própria prática (ALMEIDA; RIBEIRO; FIORETINI, 2018), ou focam no conhecimento pedagógico do formador (APPOVA; TAYLOR, 2017). Levando em conta estas dimensões e o contexto brasileiro, torna-se necessário um foco no conhecimento do formador de professores que seja um matemático que atua em um curso de licenciatura em Matemática.

Assim, nossa pesquisa foca-se na problemática do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática e, nesse sentido, a principal questão norteadora de seu desenvolvimento se refere à *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?*

Com este intuito, apresentamos nossa revisão da literatura acerca da Teoria dos Números na formação de professores de Matemática, um panorama de abordagens à pesquisa com foco específico no conhecimento do professor de Matemática, percorrendo dimensões da formação de professores no contexto brasileiro e da formação e do desenvolvimento profissional de formadores de professores. Concluímos este capítulo com uma discussão sobre o conhecimento do formador de professores, discutindo as especificidades desse conhecimento em relação ao conhecimento especializado do professor de Matemática.

A TEORIA DOS NÚMEROS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A Teoria dos Números se constitui em um ambiente favorável para o desenvolvimento de ideias matemáticas importantes relacionadas aos números naturais e aos números inteiros (RESENDE, 2007). No entanto, ainda que os conhecimentos envolvidos nessa disciplina sejam muito relevantes para uma ampla compreensão da Matemática e de muitos de seus processos, as pesquisas focadas no ensino de Teoria dos Números, especialmente no contexto da formação de professores, são escassas (BAIR; RICH, 2011; OLIVEIRA; FONSECA, 2017). Apresentam-se a seguir alguns elementos históricos importantes dessa disciplina.

A Álgebra, e em particular a Teoria dos Números, segundo Milies e Coelho (2006), diferentemente do que ocorre com a Geometria, não costuma ser apresentada de forma que suas proposições sejam logicamente demonstradas a partir de afirmações iniciais, denominadas axiomas ou postulados (forma de apresentação existente desde o século IV a. C., escrita por Euclides em *Os Elementos*).

Ainda que a noção de número natural tenha sido desenvolvida gradualmente a partir das práticas cotidianas, e o mesmo tenha ocorrido com os números racionais não-negativos, da forma $^{a}/_{b}$, sendo a e b números naturais, relacionados aos problemas de grandezas geométricas, isso não ocorreu com os números inteiros negativos, que apareceram pela primeira vez por volta de 628 d. C. em uma obra indiana, na qual foram interpretados como dívidas (MILIES; COELHO, 2006).

Para estes autores, foram as diversas possibilidades de interpretação dos números negativos, os quais tiveram sua legitimidade questionada desde seu aparecimento e chegaram a ser chamados números absurdos por Cardano[3], que dificultaram sua ampla aceitação na comunidade matemática. Tão grande foi a dificuldade de aceitação dos números negativos que na Europa ocidental do século XVII ainda havia importantes matemáticos que não aceitavam sua existência (DOMINGUES; IEZZI, 2013).

Foi apenas com o surgimento dos números complexos, relacionados aos problemas envolvendo a resolução de equações, que se passou a refletir sobre a natureza dos números e, com isso, começaram as tentativas de se desenvolver um pensamento axiomático em Álgebra, semelhante ao existente na Geometria (MILIES; COELHO, 2006). Dessa forma, o conjunto dos números inteiros habitualmente se constrói a partir dos números naturais (JACOBSON, 2009).

A Teoria dos Números, compreendida como a parte da Matemática dedicada ao estudo dos números inteiros (MARTINEZ et al., 2010), costuma ser apresentada aos estudantes de forma ordenada, podendo dar a eles uma impressão equivocada da evolução histórica da Matemática. Como apresentar o conteúdo da disciplina de Teoria dos Números é uma decisão

---

[3] Girolamo Cardano foi um proeminente matemático italiano, com trabalhos publicados em diversas áreas, tais como Matemática, Física, Medicina e Filosofia.

dos matemáticos que a ministram, seja em cursos de licenciatura, bacharelado, ou em cursos oferecidos para licenciatura e bacharelado concomitantemente. Ao ensinar para alunos de licenciatura, seja em cursos específicos para os futuros professores ou em conjunto com o bacharelado, esses matemáticos são colocados no papel de formadores, ainda que não se percebam neste papel (LEIKIN; ZAZKIS; MELLER, 2018).

Na formação de professores de Matemática, já faz parte do senso comum a afirmação de que futuros professores necessitam ter um amplo conhecimento de Matemática. A nível nacional e internacional, muitos programas de formação de professores exigiram, ao longo do tempo, que os estudantes cursassem disciplinas de cunho matemático e de cunho pedagógico, resultando em dicotomias entre a Matemática e a Pedagogia, e entre teoria e prática (POTARI, 2001).

Por outro lado, muitas investigações vêm defendendo que, durante a licenciatura, o futuro professor deve desenvolver um conhecimento matemático voltado ao ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CARRILLO et al., 2018). No entanto, como desenvolver esse conhecimento para ensinar ainda é algo que necessita ser discutido e compreendido. As relações entre os conteúdos aprendidos pelo professor de Matemática na universidade e os conteúdos que deverá ensinar na escola não são facilmente estabelecidas e, ao contrário da expectativa de alguns formadores que esperam que seus estudantes percebam e conectem esses conhecimentos por si mesmos, impera a quase total falta de conexões entre a Matemática acadêmica e a Matemática escolar. Esta ausência de conexões foi denominada por Cuoco (2001) como "desconexão vertical" e vale, segundo o autor, principalmente no caso da Álgebra abstrata, que é vista pelos estudantes como algo completamente diferente da Álgebra escolar.

As disciplinas do campo da Álgebra, habitualmente ensinadas na formação inicial de professores, costumam ser divididas em uma disciplina de Álgebra abstrata e uma disciplina de Teoria dos Números (BAIR; RICH, 2011; SMITH, 2002;). A Teoria dos Números, além de ser um dos ramos mais importantes da Matemática (DOUMBIA; CARVALHO; ALMOLOUD, 2020), inclui tópicos como divisibilidade, números primos, ou congruências lineares, propícios aos estudantes para revisitar os processos matemáticos básicos, fazendo com que reflitam sobre o próprio conhecimento matemático (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996a).

Ainda que os tópicos estudados nesses cursos possuam conexão direta, por exemplo, com a Matemática do Ensino Médio, a maioria dos licenciandos não consegue estabelecer tais relações e geralmente compreendem essas disciplinas como completamente desvinculadas de sua posterior prática pedagógica (SMITH, 2002). A divisibilidade, por exemplo, é frequentemente tratada pelos futuros professores como sendo um truque ou procedimento a ser memorizado, em vez de uma relação entre números inteiros (ZAZKIS; SINCLAIR; LILJEDAHL, 2003).

Alguns exemplos de conexões que podem ser estabelecidas entre a Teoria dos Números que os futuros professores aprendem na graduação e aquela ensinada na escola são: divisibilidade e divisão, a formalização de resultados apresentados intuitivamente na escola (estrutura dos números e suas propriedades aritméticas, o estudo da teoria dos números primos com rigor matemático, a formalização de critérios de divisibilidade apresentados na escola), o estudo das estruturas de conjuntos que são apresentados na escola, aritmética modular e representação de conjuntos finitos (criptografia).

Dentre as possíveis dificuldades encontradas pelos futuros professores ao cursar Teoria dos Números, pesquisas apontam dificuldades relacionadas à compreensão da primalidade e do Teorema Fundamental da Aritmética (OLIVEIRA; FONSECA, 2017; ZAZKIS; CAMPBELL, 1996b), ao entendimento sobre divisibilidade (BROWN; THOMAS; TOLIAS, 2002; ZAZKIS; SINCLAIR; LILJEDAHL, 2013), com números primos e suas propriedades (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2004), assim como dificuldades para estabelecer conexões entre as relações de ordem, que são usadas no dia a dia, por meio de comparações, com o conceito formal de relação de ordem (AKDEMIR; NARH; KAŞIKÇI, 2015).

Assim, é possível concluir que apesar de ocupar uma parte considerável do currículo escolar, o estudo dos números naturais e inteiros não parece receber um tratamento correspondente na formação (OLIVEIRA; FONSECA, 2017; RESENDE; MACHADO, 2012).

Apesar da possível grande relevância da Teoria dos Números na formação de professores, esta possui uma abordagem prioritariamente formal e axiomática, com ênfase no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, não direcionada para a formação do futuro professor (RESENDE, 2007). Tal abordagem formal e axiomática empregada no ensino de Teoria dos Números (o mesmo pode ser considerado para outras disciplinas da formação de professores) está associada ao fato de os formadores tipicamente responsáveis por essas disciplinas no contexto brasileiro serem matemáticos e, além disso, à legislação brasileira não exigir e nem prever nenhuma preparação específica desses profissionais para atuação nos cursos de licenciatura (ALMEIDA; RIBEIRO; FIORENTINI, 2018).

Para investigar o conhecimento desse formador, elegemos o tópico divisibilidade, abordado em uma disciplina de Teoria dos Números. Em particular, nos concentraremos em três temas centrais no tópico divisibilidade: a relação de ordem, o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE) e a demonstração desse teorema. Esta opção centra-se também no fato de as pesquisas apontarem dificuldades dos alunos concluintes do Ensino Fundamental até mesmo na compreensão dos procedimentos algorítmicos relativos à operação de divisão e à decomposição de números (CHAPARIN, 2010; PIZYSIEZNIG, 2011; SOARES; MACHADO, 2017;) e por que a melhoria da aprendizagem matemática dos alunos se sustenta na melhoria do conhecimento e da prática de seus professores (CHICOTE; DEIXA, 2020; NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004), e o mesmo vale, presumidamente, para os formadores. A seguir, discutiremos aspectos relativos à relação de ordem, ao TADE e às demonstrações.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular[4] – BNCC (BRASIL, 2018), documento que oferece orientações curriculares para a Educação Básica (Educação Infantil, Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – toda a escolaridade até a Universidade), a noção de ordem, juntamente com as noções de equivalência, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, constitui as ideias fundamentais relacionadas aos distintos campos que compõem a Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Na BNCC, a ideia de ordem aparece nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (6-10 anos), na unidade temática Números, na qual se espera dos alunos o desenvolvimento de habilidades correspondentes à leitura, à escrita e à ordenação de números naturais e racionais. Por exemplo, no 2.º ano, consta a habilidade EF02MA01 – "Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero)." (BRASIL, 2018, p. 239).

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental (11-14 anos), também na unidade temática Números, se espera que os alunos desenvolvam habilidades para reconhecer, comparar e ordenar números reais. Por exemplo, no 7º ano, consta a habilidade EF07MA07 - "Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica." (BRASIL, 2018, p. 261). Para o Ensino Médio (15-17 anos), a BNCC não explicita habilidades relacionadas com ordem, ordenação ou relação de ordem.

Nos cursos universitários de Matemática, as noções de ordenação adquiridas na Educação Básica são formalizadas no conceito de relação de ordem, o qual pode ser estudado em disciplinas como Lógica Matemática, Fundamentos de Matemática, Teoria de Conjuntos, Teoria dos Números, entre outras possibilidades. Uma relação de ordem é definida matematicamente da seguinte forma:

---

[4] Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica brasileira (Brasil, 2018).

Considere um conjunto A não vazio e $R \subseteq A \times A$ uma relação de A em A. A relação R é uma *relação de ordem parcial* se satisfizer as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva. Ademais, se R satisfizer também a propriedade da dicotomia, então se diz que R é uma *relação de ordem total*.

No contexto da Teoria dos Números, a relação $R \coloneqq \{(a,b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, sendo uma relação de ordem parcial de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Além disso, quaisquer dois números inteiros são comparáveis segundo R, sendo válida a propriedade da dicotomia. Assim, R é uma relação de ordem total de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

A compreensão da relação de ordem nos números inteiros é fundamental no contexto da disciplina de Teoria dos Números e será necessária no entendimento de uma série de resultados subsequentes, tais como a existência de elemento mínimo e o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Conhecer a relação de ordem nos números inteiros e, de forma mais ampla, no conjunto dos números reais, é imprescindível no trabalho dos futuros professores de Matemática e, portanto, também é um conhecimento essencial ao formador.

A divisibilidade também está presente desde os primeiros anos da escolarização, incluindo, por exemplo, a divisão de números naturais. Na BNCC, a divisão aparece, a título de exemplificação, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (6-10 anos), na unidade temática Números, no 3.º ano, para o qual consta a habilidade EF03MA08 – "Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais." (BRASIL, 2018, p. 243). Também no 3.º ano se espera que sejam trabalhados os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, esperando-se que os alunos desenvolvam a habilidade EF03MA09 – "Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes." (BRASIL, 2018, p. 243).

Já nos Anos Finais do Ensino Fundamental, conforme a BNCC, no 7.º ano são apresentados os números inteiros, discutindo-se seus usos, sua história, sua ordenação, sua associação com pontos da reta numérica e suas operações, entre as quais, a divisão de números inteiros. Os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 são apresentados ainda no 6.º ano.

Nos cursos universitários de Matemática, a divisibilidade é formalizada geralmente no escopo da Teoria dos Números, conforme constata Resende (2007). Diz-se que um número inteiro b é divisível por outro número inteiro a se existe um número inteiro c tal que $b = a.c$.

Neste contexto, o algoritmo da divisão de Euclides é apresentado formalmente como um teorema, o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana.

Na disciplina de Teoria dos Números, assim como em outras disciplinas de Matemática, as demonstrações estão presentes não como tópico, mas como forma de validação ou de justificação de resultados matemáticos. A demonstração é considerada um tipo de discurso matemático, um tipo de narrativa que precisa satisfazer as convenções estabelecidas, e que usualmente inclui texto e diferentes recursos visuais, com objetivo de mediar as ideias matemáticas envolvidas (COOPER; ZASLAVSKY, 2017).

O Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana afirma que: Dados dois números $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$. Sendo um teorema de existência e unicidade, a demonstração do TADE é feita em duas partes. Na primeira parte, é demonstrada a existência do quociente e do resto, considerando-se três casos: $0 \leq b < a$, $b \geq a$ e $b < 0$. Nesses três casos, se usa o Princípio da Boa Ordem[5] para provar que o resto procurado é o elemento minimal do conjunto $X := \{b - |a|x, x \in \mathcal{P}\} \cap \mathcal{P}_0$, o qual é um conjunto auxiliar formado por todos os "possíveis restos". A seguir, o quociente q é obtido como consequência direta da existência de r. Na segunda parte da demonstração, a unicidade, supõe-se que existam dois pares de resto e quociente distintos que satisfazem as hipóteses do teorema, chegando-se a um absurdo, demonstrando-se assim que o quociente e o resto são únicos.

A Formação e o Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática

Buscando tratar de aspectos importantes da formação de professores que pautam nossa pesquisa, discutimos, a seguir, resultados que aparecem fortemente na revisão da literatura. Para tanto, iniciaremos a discussão com a problematização histórica da formação de professores, envolvendo a dicotomização entre os conteúdos pedagógicos e específicos e a procura por soluções para essa dicotomia. Em seguida, abordaremos o conhecimento profissional docente do professor que ensina matemática, discutindo duas das conceitualizações – MKT e MTSK – que vêm assumindo lugares de destaque na comunidade internacional e que buscam contribuir para melhor compreender o conhecimento do professor.

[5] O Princípio da Boa Ordem diz que todo subconjunto não-vazio de números inteiros não-negativos possui um menor elemento.

Problematização histórica da formação de professores

A institucionalização da formação de professores começou no século XIX, após a Revolução Francesa, com o problema da instrução popular, quando surgiram as Escolas Normais para preparação de professores (SAVIANI, 2009). No Brasil, a Lei n. 5.692/71 (BRASIL, 1971) previu a formação de professores em nível superior para as quatro séries finais do 1.º grau[6] e para o 2.º grau[7], por meio dos cursos de licenciatura curta e licenciatura plena, com três e quatro anos de duração, respectivamente.

Com a necessidade de formação de professores em larga escala, conforme relata Saviani (2009), surgiram dois modelos de formação distintos: o modelo cultural-cognitivo dos conteúdos e o modelo pedagógico-didático. O primeiro modelo tinha como foco os conhecimentos sobre cultura geral e domínio específico do conteúdo que o professor iria lecionar (modelo cultural-cognitivo), e o segundo modelo considerava que a formação do professor deveria se centrar na dimensão pedagógico-didática (modelo pedagógico-didático). Segundo o autor, nas universidades e nas demais instituições de ensino superior que visavam à formação de professores para o Ensino Secundário[8], o modelo cultural-cognitivo foi predominante, enquanto o modelo pedagógico-didático prevaleceu nas Escolas Normais, responsáveis pela formação de professores para o Ensino Primário[9].

Assim, surgiu nos cursos de licenciatura uma dualidade entre as disciplinas específicas e pedagógicas, originando o chamado modelo 3+1 (MOREIRA, 2012; SAVIANI, 2009), segundo o qual os licenciandos deveriam cursar inicialmente três anos de bacharelado (formação profissionalizante específica) e um ano de licenciatura (formação pedagógica). Tais distinções ainda estão presentes na maioria dos cursos de formação de professores que ensinam Matemática.

Estas divergências entre a formação pedagógica e a específica, e a desarticulação com vários aspectos da prática surgiram também em outros países, como Estados Unidos e Canadá. Shulman (1986) chama a atenção para o fato de que, por volta dos anos 1980, as pesquisas em ensino passaram a valorizar comportamentos docentes que levassem os alunos a obter melhor desempenho acadêmico, em detrimento de conhecimentos relacionados aos

[6] Atualmente compreendidas entre o 6.º e 9.º anos do Ensino Fundamental (11-14 anos de idade).
[7] Atualmente denominado Ensino Médio (15-17 anos de idade).
[8] No Brasil, historicamente foi chamado Ensino Secundário o que hoje corresponde à segunda metade do Ensino Fundamental (a partir do sexto ano) e ao Ensino Médio.
[9] No Brasil, o Ensino Primário constituiu até 1971 o primeiro estágio da educação escolar, composto por quatro séries. A partir desse ano, o Ensino Primário foi fundido com os quatro anos do Ginasial, originando o denominado Ensino de 1.º grau, com duração de oito anos. Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996, o Ensino de 1.º grau foi substituído pelo Ensino Fundamental.

conteúdos, o que conduziu à desconsideração do conhecimento sobre o conteúdo. A ausência de pesquisas sobre o conteúdo a ser ensinado – a forma como os professores aprendem, de onde vem seu conhecimento, os exemplos e as explicações utilizadas – foi denominada pelo autor de "problema do paradigma perdido". A partir de suas constatações e chamando a atenção para diferentes aspectos envolvidos na atuação do professor, Shulman (1987) propõe sete[10] domínios do conhecimento do professor, dos quais três se referem à especificidade do conteúdo: (a) conhecimento do conteúdo, (b) conhecimento pedagógico do conteúdo e (c) conhecimento curricular.

A formação inicial de professores de Matemática

Atualmente, o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores de Matemática é um objeto de pesquisa intensiva (GUALA; BOERO, 2017). Considerando que uma parte considerável desse conhecimento é adquirida na formação inicial, fica evidenciada a importância de pesquisas que busquem compreender como se desenvolve o conhecimento do futuro professor nessa etapa de sua formação.

No contexto brasileiro, começa a discutir-se recentemente qual é o papel da Matemática nos cursos de licenciatura (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013; MOREIRA, 2012). Conforme Moreira (2012), ao analisar os planos curriculares de algumas das maiores universidades brasileiras (USP, UNICAMP, UFRJ, UFMG, UFPE), foi possível constatar que os conteúdos científicos, tais como Matemática, Física e Estatística, ocupam entre 45 e 55 por cento do tempo de formação. As disciplinas de conteúdo específico (e.g., Cálculo, Álgebra, Análise) costumam ser ministradas de forma independente das demais disciplinas relacionadas ao ensino (e.g., Didática da Matemática, Tendências em Educação Matemática, Estágio Supervisionado), que costumam ser ministradas nas Faculdades de Educação das universidades (MOREIRA, 2012).

No Brasil, o curso de Matemática tem duas vertentes (curso de licenciatura e curso de bacharelado) e nestas encontramos dois cenários: exatamente as mesmas disciplinas de Matemática para ambos os cursos, ou cada curso com uma grade curricular específica, mas onde as ementas dessas disciplinas são muito semelhantes (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

[10] Conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral, com referência aos princípios e às estratégias de gerenciamento e de organização de sala de aula; conhecimento curricular, referente aos materiais e programas curriculares; conhecimento pedagógico do conteúdo, considerado como um amálgama entre conteúdo e pedagogia, exclusivo aos professores; conhecimento sobre os alunos e suas características; conhecimento de contextos educacionais, incluindo a sala de aula, os sistemas educacionais, as características das comunidades e suas culturas; e conhecimento de objetivos educacionais, os fins, propósitos e valores da educação.

Influenciada pelos trabalhos de Shulman (1986, 1987), a investigação focando o conhecimento profissional docente vem se consolidando no campo da Educação e, em particular, da Educação Matemática. A partir dessa conceitualização original feita por Shulman sobre o conhecimento do professor – porém, sem especificar nenhuma área de conhecimento –, outras têm surgido recentemente, procurando destacar as particularidades e as dimensões de cada campo de conhecimento. Levando em conta o campo específico da Matemática e do seu ensino e aprendizagem, surgiram, por exemplo, o *Mathematical Knowledge for Teaching* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), o *Mathematics for Teaching* (DAVIS; RENERT, 2009) e o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (CARRILLO et al., 2018).

Assumindo que o professor – e seu conhecimento – tem grande impacto nos resultados e na aprendizagem dos alunos (CARNOY; ARENDS, 2012), torna-se essencial a pesquisa voltada para o conhecimento do professor, de modo a permitir entender melhor o conteúdo e as implicações desse seu conhecimento na prática e para a prática.

Por outro lado, transpondo para a formação de professores essa ideia da centralidade do professor (formador), o conhecimento que ele possui assume um papel preponderante. A natureza e o conteúdo desse conhecimento podem ser considerados diferentes ou complementares do conhecimento do professor (RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016; RIBEIRO, 2020), porém ainda pouco se sabe sobre essa natureza e sobre o seu conteúdo.

Conforme Fiorentini (2004), o formador de professores desempenha um papel fundamental e estratégico na construção da profissionalidade docente dos professores que forma, o que exige dele a busca por formação especial e o reconhecimento da docência como principal foco de atuação e de investigação. No mesmo sentido, Superfine e Li (2014) apontam que, ainda que o trabalho do formador de professores influencie diretamente na formação inicial e continuada do professor de Matemática, esse não tem recebido a atenção que merece, destacando a ausência de trabalhos que sistematizem e problematizem o conhecimento do formador.

O Conhecimento do professor que ensina Matemática: dois modelos em desenvolvimento

A partir dos trabalhos de Shulman (1986, 1987), vários grupos de pesquisa têm se dedicado a estudar e aprofundar diferentes aspectos dos três domínios que levam em consideração as especificidades do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; DAVIS; RENERT, 2009; CARRILLO et al., 2018; TURNER; ROWLAND, 2011). Duas dessas conceitualizações correspondem ao *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e ao *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK

(CARRILLO et al., 2018). O MTSK foi desenvolvido tendo por base, além dos trabalhos de Shulman, o MKT e os trabalhos anteriores do grupo com foco no desenvolvimento profissional do professor e na reflexão e crenças como elementos desse desenvolvimento profissional. Optamos, por esse motivo, por discutir nessa seção inicialmente o trabalho de Ball e de seus colaboradores e, após, o trabalho de Carrillo e de seus colaboradores.

Uma importante contribuição dos trabalhos desenvolvidos pelo grupo liderado por Deborah Ball no âmbito do MKT corresponde ao foco na prática de professores que ensinam Matemática (em particular nos Anos Iniciais), algo que não era, especificamente, a preocupação de Shulman, cujo trabalho não se preocupava com as particularidades de cada uma das áreas, mas referia-se aos aspectos gerais dos processos de ensino e de aprendizagem.

O MKT tem como um dos seus elementos geradores a análise e a discussão da prática letiva de professores dos Anos Iniciais durante o ensino de temas de Matemática, o que permitiu identificar um conjunto de especificidades do conhecimento do professor (matemático e pedagógico), quando comparado com o conhecimento de outros profissionais em contextos distintos do contexto de ensino – chamando a atenção para um conhecimento especializado do conteúdo e, indiretamente, para a necessidade de que também os formadores de professores tenham um conhecimento que vá além do saber fazer (SUPERFINE; LI, 2014). Além disso, ao professor cabe saber descrever e justificar porque os procedimentos funcionam; apontar quais exemplos são mais ou menos apropriados em cada situação (e por que); e possuir um conhecimento que lhe permita justificar afirmações matematicamente. Ball, Thames e Phelps (2008) assinalam que esse tipo de demandas matemáticas raramente é contemplado nos cursos de formação de professores de Matemática das universidades e institutos, o que torna essencial também uma mudança no foco e nos objetivos desses cursos.

A atenção às especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática apenas recentemente começou a se refletir nas pesquisas realizadas no Brasil, expandindo assim a abordagem considerada por Shulman (1986) e por Tardif, Lessard e Lahaye (1991) sobre os saberes docentes[11]. Alguns exemplos dessa mudança de foco de atenção são os trabalhos de Moreira e Ferreira (2013), Fiorentini e Oliveira (2013) e Ribeiro e Oliveira (2015).

Segundo Moreira e Ferreira (2013) o desenvolvimento de uma literatura especializada na formação do professor de Matemática contribui para ampliar a compreensão

[11] Os autores destacam a pluralidade dos saberes docentes, que são provenientes de fontes diversas, tais como as instituições de formação, a formação profissional, os currículos e a prática cotidiana (TARDIF, 2002). Entre os diferentes tipos de saberes destacados nos trabalhos de Tardif e de seus colaboradores, encontram-se os Saberes da Formação Profissional, Saberes Disciplinares, Saberes Curriculares e Saberes Experienciais.

dos conhecimentos relevantes para a formação na licenciatura. Fiorentini e Oliveira (2013), por sua vez, fundamentados em Shulman, afirmam que o conhecimento necessário ao licenciando em Matemática é diferente do conhecimento matemático que torna um bacharel bem-sucedido e defendem que o professor de Matemática precisa conhecer a Matemática como prática social com profundidade e diversidade, no que diz respeito ao campo científico, à matemática escolar e às diferentes matemáticas mobilizadas no cotidiano. Ribeiro e Oliveira (2015), tendo por base a conceitualização do MKT, buscam investigar os conhecimentos matemáticos mobilizados por professores durante o planejamento de aulas sobre equações, identificando diferentes subdomínios[12] propostos por Ball e colaboradores.

Embora o MKT seja uma das conceitualizações mais impactantes na pesquisa em nível internacional sobre o conhecimento do professor que ensina Matemática, os próprios autores reconhecem que este modelo ainda está em discussão e contém subdomínios com posição em aberto (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Alguns destes aspectos indicados por Ball, Thames e Phelps (2008) e os resultados de pesquisas levadas a cabo, tendo o MKT como suporte teórico, levaram à emergência de outras conceitualizações que buscam refinar as ideias de Shulman e especificar, cada vez mais, as particularidades do conhecimento do professor que ensina Matemática, em conexão com os aspectos da atuação docente.

Tendo também como ponto de partida a análise da prática de professores que ensinam Matemática (desde a Educação Infantil até o Ensino Superior), o grupo de pesquisa da Universidade de Huelva (Espanha), liderado por José Carrillo, relata várias dificuldades encontradas ao desenvolver pesquisas recorrendo ao MKT. Os pesquisadores indicam, entre outros motivos, a dificuldade em identificar claramente o conteúdo de cada um dos subdomínios. Buscando suprir tais dificuldades, os autores vêm desenvolvendo uma conceitualização do conhecimento do professor, a qual denominaram *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

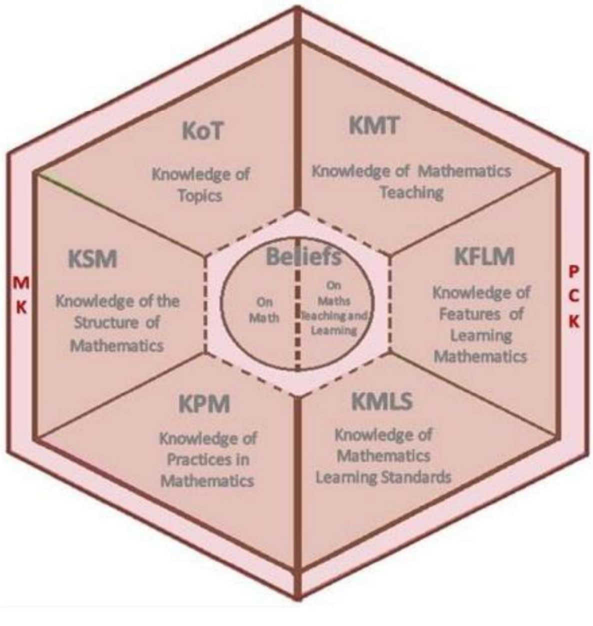
Como premissa para o desenvolvimento desse modelo, os pesquisadores destacam seu objetivo de desenvolver um modelo teórico contendo os conhecimentos dos professores de Matemática que possa, posteriormente, ser utilizado em investigações da prática desses docentes (CARRILLO et al., 2018) e na conceitualização de tarefas para a formação docente que promovam um efetivo desenvolvimento de um conhecimento especializado do professor (RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013a; 2013b). Além disso, os autores se mantiveram

[12] Os subdomínios propostos por Ball e por seus colaboradores são *Common Content Knowledge*, *Horizon Content Knowledge*, *Specialized Content Knowledge*, *Knowledge of Content and Students*, *Knowledge of Content and Teaching* e *Knowledge of Content and Curriculum.*

abertos à possibilidade de reestruturação dos subdomínios do MKT, incorporando no novo modelo também as crenças dos professores – pelo papel central que elas desempenham no modo de ver e conceber a Matemática e o seu ensino (AGUILAR-GONZÁLEZ et al., 2018; CARRILLO et al., 2018; FLORES; CARRILLO, 2014).

O modelo MTSK (Figura 1) tem como foco a especialização do conhecimento matemático do professor de Matemática e que ensina Matemática, porém adota uma perspectiva diferente da considerada no MKT: pensa somente no conhecimento matemático que faz sentido para os professores[13]. Uma das contribuições do MTSK está em conceber como conhecimento especializado todo o conhecimento do professor, e não apenas uma parte dele, como era o caso do MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), ao diferenciar o conhecimento matemático correspondente aos profissionais que utilizam a Matemática como instrumento – os engenheiros, com o saber fazer; e os professores que, além do saber fazer, também possuem um conhecimento associado, por exemplo, a entender os porquês dos procedimentos matemáticos.

Figura 1: Domínios e subdomínios do MTSK



Fonte: Carrillo et al., (2018, p. 241).

O MTSK é composto por dois domínios distintos – o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Em ambos são considerados três subdomínios. Compõem o MK: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of*

[13] Aqui apenas se considera o conhecimento do professor que ensina Matemática e, portanto, assume-se por base um conhecimento comum (conforme era denominado no MKT), mas em que todos os aspectos do conhecimento do professor são especializados.

Mathematics (KSM) e *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM); e o PCK é constituído pelos subdomínios *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). No centro do modelo, encontram-se alocadas as crenças do professor em relação à matemática, ao seu ensino e à aprendizagem.

O KoT inclui o conhecimento do professor relativo ao quê e de que maneira o professor de matemática conhece os tópicos que ensina. Este subdomínio inclui os tipos de problemas aos quais os conteúdos podem ser aplicados, com seus contextos e significados, propriedades e princípios, procedimentos e definições, conexões entre itens pertencentes ao mesmo tema e formas de representar esses conteúdos. Esse subdomínio é composto por quatro categorias: *procedimentos*; *definições, propriedades e fundamentos*; *registros de representação*; e *fenomenologia e aplicações*.

A categoria *procedimentos* abrange o conhecimento de como fazer, quando fazer, por que algo é feito, e as características do objeto resultante. Um exemplo de conhecimento do professor nessa categoria é conhecer que o valor do resto ser limitado é uma condição necessária e suficiente para a validade do algoritmo da divisão euclidiana (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

A categoria *definições, propriedades e fundamentos* compreende o conhecimento de propriedades matemáticas e seus princípios subjacentes, além do conhecimento de definições matemáticas, incluindo como escolher conjuntos de propriedades apropriadas para caracterizar um objeto matemático. Além disso, o conhecimento do professor sobre imagens e exemplos de objetos matemáticos também se enquadra nesta categoria. Como exemplo de conhecimento do professor, podemos citar conhecer a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, entender que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019).

A categoria *registros de representação* diz respeito ao conhecimento das diferentes maneiras em que um tópico pode ser representado, por exemplo, registros aritméticos e algébricos, linguagem natural, gráficos, pictogramas e assim por diante. Esta categoria abarca, por exemplo, conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE utilizando a reta numérica (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

Por sua vez, a categoria *fenomenologia e aplicações* se relaciona com o conhecimento do professor sobre os tipos de problemas aos quais um conteúdo pode ser aplicado, com seus significados e contextos associados. No tópico da divisibilidade, por exemplo, está incluso nesta categoria conhecer o fato de que o TADE possui aplicações em

Teoria dos Números, como na demonstração da existência de infinitos números primos da forma $4k + 3$.

No subdomínio KSM, está incluso o conhecimento do professor sobre conexões entre itens matemáticos (CARRILLO et al., 2018), as quais podem ser interconceituais (conexão auxiliar, por exemplo) ou temporais (associadas à complexificação ou à simplificação de um determinado conceito). O KSM é composto por quatro categorias: *conexões de complexificação*; *conexões de simplificação*; *conexões auxiliares*; e *conexões transversais*.

Na categoria *conexões de complexificação*, um item está relacionado ao conteúdo posterior, e a Matemática elementar é vista de uma perspectiva mais avançada (KLEIN, 1908). Nessa categoria, por exemplo, está conhecer conexões entre o TADE e aritmética modular, considerando o teorema como consequência da aritmética modular.

Por outro lado, *conexões de simplificação* se referem aos *links* entre o conteúdo do presente com um conteúdo passado, de forma que a Matemática mais avançada é contextualizada em um conteúdo mais elementar. Por exemplo, conhecer conexões de simplificação entre o TADE e a divisão de números naturais e inteiros.

A categoria *conexões auxiliares* diz respeito à participação necessária de um item em processos maiores. Faz parte do conhecimento do professor, nessa categoria, por exemplo, conhecer que os conceitos de relação de ordem e princípio da boa ordem são conceitos auxiliares na demonstração do TADE, caracterizando a necessária participação desses itens em um processo maior (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019).

Finalmente, à categoria *conexões transversais* pertencem os conteúdos com características comuns relacionadas por um conceito subjacente. Um exemplo desse tipo de conexão que podemos citar é conhecer que existe uma conexão transversal entre o TADE e congruências lineares, que estão conectados pela divisibilidade como noção subjacente.

No que se refere ao KPM, o foco está mais no funcionamento da matemática do que no processo de ensiná-la (CARRILLO et al., 2018), incluindo conhecimentos relacionados com a criação e a produção matemáticas, a linguagem e as demonstrações matemáticas. É definido como qualquer atividade matemática realizada de forma sistemática, representando um pilar da criação matemática e conformando-se a uma base lógica para a criação de regras (CARRILLO et al., 2018, p. 243).

De acordo com Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), para o KPM, são consideradas as seguintes categorias: *formas de proceder*; *formas de validar*; *formas de explorar*; *formas de gerar conhecimento em matemática*; e *formas de comunicar matemática*.

A categoria *formas de proceder* está relacionada com o conhecimento de estratégias heurísticas para resolução de problemas, o papel da abstração e da generalização na Matemática, o conhecimento sobre a seleção e a construção de elementos, a consideração de casos, além do conhecimento sobre como definir algo em Matemática e as características de uma definição. Um exemplo de conhecimento do professor nesta categoria é conhecer como demonstrar a existência do quociente e o do resto, considerando os casos em que o dividendo é maior ou igual a zero e menor que o divisor, o dividendo é maior ou igual que o divisor, e o dividendo é menor do que zero (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

Na categoria *formas de validar*, incluem-se os conhecimentos do professor sobre o papel dos contra exemplos na validação, sobre o que constitui uma demonstração, sobre os principais métodos de demonstração em Matemática (demonstração direta, demonstração por contradição, demonstração por indução, etc.), bem como sobre os diferentes papéis da demonstração. Nesta categoria, um exemplo de conhecimento do professor consiste em conhecer os passos de uma demonstração por contradição: negar a tese, encontrar uma contradição e então chegar à negação da hipótese.

Por sua vez, as *formas de comunicar matemática* são apontadas como essenciais ao ensino de Matemática, permitindo a aquisição de uma linguagem de caráter formal, com simbologia apropriada. A linguagem matemática é formada por símbolos, termos e expressões específicas, as quais recebem significados precisos e peculiares (ALCALÁ, 2002). Saber empregar essa linguagem apropriadamente em sala de aula caracteriza a mobilização da referida categoria.

Os subdomínios do PCK, bem como suas respectivas categorias, serão descritos nos parágrafos a seguir, começando pelo KFLM. Esse subdomínio engloba o conhecimento relacionado às características inerentes à aprendizagem da matemática, colocando o foco no conteúdo matemático - como o objeto de aprendizagem - e não no aluno. O conhecimento do professor nesse subdomínio muitas vezes é proveniente de sua própria experiência acumulada ao longo do tempo.

O KFLM possui quatro categorias: *teorias de aprendizagem matemática*; *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática*; *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático*; e *aspectos emocionais da aprendizagem da matemática*.

Na categoria *teorias de aprendizagem matemática*, se encontra o conhecimento do professor de teorias sobre o desenvolvimento cognitivo do aluno. Tais teorias podem ser construídas a partir das experiências pessoais do professor ou provenientes da pesquisa em

Educação Matemática. Esta categoria inclui, por exemplo, teorias do professor sobre como os estudantes aprendem Teoria dos Números na graduação.

A categoria *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática* está relacionada com o conhecimento da capacidade dos alunos, os erros frequentes, os obstáculos e as dificuldades que eles encontram ao aprender conceitos matemáticos, como por exemplo conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

Relacionado à categoria *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático* está o conhecimento do professor sobre os processos e estratégias, habituais ou incomuns, que os alunos costumam utilizar em Matemática, bem como sobre a linguagem ou vocabulário que possam empregar para falar sobre um conteúdo específico. Um exemplo de conhecimento do professor nessa categoria inclui conhecer os processos utilizados pelos alunos para representar funções algébrica e graficamente (ESCUDERO-ÁVILA; CARRILLO, 2020).

Outra categoria do KFLM, *aspectos emocionais da aprendizagem da matemática*, envolve o conhecimento acerca do que motiva os alunos, seus interesses e suas expectativas em Matemática. Por exemplo, o professor deve estar ciente de que os alunos consideram a análise mais difícil do que o cálculo (DELGADO-REBOLLEDO; ZAKARYAN, 2019).

O subdomínio KMT está relacionado ao conhecimento dos fenômenos que surgem quando um professor está ensinando conteúdos matemáticos, e possui três categorias: *teorias sobre o ensino de matemática*; *recursos para o ensino*; e *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*.

Na categoria *teorias sobre o ensino de matemática*, se reconhece que o professor deve conhecer teorias formais de ensino provenientes da pesquisa em Educação Matemática ou pode construir teorias pessoais de ensino com base nas próprias reflexões sobre atividades matemáticas realizadas em sala de aula.

A categoria *recursos para o ensino* está associada ao conhecimento do professor sobre características, potencialidades, benefícios ou limitações matemáticas que um determinado recurso, material ou tecnológico, possa ter enquanto instrumento de ensino. Nessa categoria, está, por exemplo, o conhecimento do professor sobre os detalhes específicos de um livro de Teoria dos Números que o torna mais conveniente do que outros para o uso na disciplina.

Na categoria *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*, estão elementos relativos à intencionalidade do ensino, incluindo o conhecimento de analogias, metáforas e exemplos considerados úteis para explicar um conteúdo matemático. No tópico Divisibilidade se insere, por exemplo, o conhecimento de exemplos numéricos para os três casos envolvidos na demonstração da existência do quociente e do resto no TADE (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

O subdomínio KMLS, por sua vez, abrange o conhecimento do professor sobre tudo o que o aluno deve atingir em um determinado nível, em combinação com o que ele estudou anteriormente e com as especificações para os níveis subsequentes. O KMLS possui três categorias: *resultados de aprendizagem esperados*; *nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental*; e *sequenciamento de tópicos*.

Na categoria *resultados de aprendizagem esperados*, o foco está no conhecimento do professor sobre os conteúdos matemáticos que devem ser ensinado no nível em que o ensino está ocorrendo. Por exemplo, o professor deve estar ciente de que, no curso de Teoria dos Números, é esperado o desenvolvimento teórico do tópico congruências lineares.

A categoria *nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental* refere-se ao conhecimento da profundidade com que um tema matemático deve ser abordado em determinado ano/série. Um exemplo é o conhecimento do professor de que, para apreender o conteúdo de Teoria dos Números, os estudantes devem atingir um determinado nível de competência em matemática.

Finalmente, na categoria *sequenciamento de tópicos*, o cerne está no conhecimento do professor sobre os padrões de aprendizagem que indicam como os tópicos do curso devem ser organizados em relação aos cursos anteriores ou posteriores. Por exemplo, o professor deve saber que, no curso de Teoria dos Números, primeiro se estuda o que significa ser divisível e depois se estuda o TADE.

O foco do MTSK é o conhecimento específico do professor de Matemática. Os subdomínios do conhecimento do conteúdo (KoT, KPM e KSM) sustentam-se nas premissas do fazer matemática (algo que qualquer matemático faz e conhece), mas contemplam, além disso, um conhecimento que permite associar essas premissas ao contexto e à perspectiva da Matemática mais elementar (quando comparada com a Matemática envolvida nos trabalhos recentes da área).

Note-se que, pelas especificidades dos contextos e do trabalho que desenvolvem, não se espera que os professores tenham necessariamente o mesmo tipo de conhecimento requerido dos matemáticos. Os professores deverão, por exemplo, conhecer as estruturas matemáticas no que concerne à demonstração, isto é, as diferentes formas de abordagens, os diferentes tipos de demonstração (direta, por absurdo, por indução, entre outras), as limitações e as potencialidades de cada uma das abordagens no contexto escolar. Isso não significa que o professor de Matemática tenha que deter um conhecimento que lhe permita demonstrar os últimos resultados, como se espera que faça o matemático na sua área específica. Obviamente, os subdomínios do conhecimento didático-pedagógico do conteúdo (KMT, KFLM e KMLS) se referem aos conhecimentos que interessam à docência dos professores, com base no conteúdo matemático como objeto de aprendizagem, e que moldam o conhecimento especializado do professor de Matemática.

No que diz respeito ao professor que ensina Matemática no Ensino Superior, pesquisas apontam a necessidade de compreender o conhecimento desse professor, seu desenvolvimento e como o conhecimento se reflete em sua prática de ensino (DELGADO-REBOLLEDO; LAI; WEBER, 2014; NARAIN; STYLIANIDES, 2020; VASCO; CLIMENT, 2020; WEBER, 2012; ZAKARYAN, 2019), principalmente considerando que o mesmo não recebeu formação específica para o ensino e aprendizagem das disciplinas que leciona na universidade (VASCO; CLIMENT, 2018).

É importante reiterar que o MTSK vem sendo conceitualizado com foco no conhecimento matemático especializado do professor de Matemática. Assim, no trabalho que estamos desenvolvendo, pretendemos contribuir para a conceitualização do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, tentando contemplar aqui o formador de professores que atua na formação inicial. Salientamos que, no contexto brasileiro, a grande maioria dos matemáticos atua como professores universitários, seja em cursos de licenciatura, bacharelado ou de engenharia.

Nesta pesquisa, assim como adotado na conceitualização do modelo MTSK, o conhecimento de um indivíduo é assumido como "a informação que este tem disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas, ou desenvolver qualquer tarefa. Note-se que, de acordo com esta definição, o conhecimento não tem de ser necessariamente correto!" (SCHOENFELD, 2010, p.25). Logo, não pretendemos avaliar a correção ou não dos conhecimentos dos sujeitos, mas sim compreender o conteúdo desse conhecimento.

A Formação e o Conhecimento do Formador de Professores de Matemática

Nesta seção, discutiremos a formação e o conhecimento dos formadores de professores, bem como o caminho percorrido por eles para se tornarem formadores. Então, apresentaremos alguns resultados de estudos que se debruçaram sobre o conhecimento profissional de formadores de professores em geral e, especificamente, de formadores de professores de Matemática.

Batista (2011) ressalta que, embora sejam realizadas muitas pesquisas sobre a formação de professores, a maior parte delas tem enfoque no professor atuante na Educação Básica, sendo escassas as investigações que tratam da formação de professores do Ensino Superior. Pimenta, Anastasiou e Cavalett (2003) assinalam que a formação de professores que irão exercer a docência no Ensino Superior, ao contrário dos demais níveis de ensino, não está bem definida na legislação. De acordo com os autores, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (BRASIL, 1996) trata da formação de professores do Ensino Superior de forma pontual e superficial, pois se refere a ela apenas no artigo 66, segundo o qual "a preparação para o exercício do magistério superior far-se-á em nível de pós-graduação, prioritariamente em programas de mestrado e doutorado". Em seguida, em parágrafo único, oferece a possibilidade de atuação de professores formados em cursos de doutorado provenientes de áreas afins. Veiga (2006, p. 90) assim comenta sobre o assunto:

> Com relação ao amparo legal para o processo de formação dos professores universitários, a LDB de nº. 9.394/96, em seu artigo 66, é bastante tímida. O docente universitário será preparado (e não formado), prioritariamente, nos programas de mestrado e doutorado. O parágrafo único do mesmo artigo reconhece o notório saber, título concedido por universidade com curso de doutorado em área afim.

Note-se que, pelas especificidades do contexto brasileiro, os principais responsáveis pela formação matemática dos futuros professores de matemática são os matemáticos, logo estes podem ser considerados também formadores (KELCHTERMANS; SMITH; VANDERLINDE, 2017), haja vista que qualquer profissional envolvido e responsável pela formação de professores o poderá ser, seja atuando nas disciplinas pedagógicas, ou nas disciplinas específicas (COURA; PASSOS, 2017).

Conforme Goodwin et al. (2014), a noção de que a formação de professores de qualidade depende da qualidade dos formadores de professores faz parte do senso comum. Os pesquisadores destacam, no entanto, a necessidade de estudos e de pesquisas sobre o conhecimento do formador de professores. Entre os resultados de sua pesquisa (realizada com 293 formadores de professores), apontam que a maior parte dos formadores se considerava despreparada ao ingressar no magistério superior como formadores atuantes na formação inicial de professores. Ainda que o despreparo tenha sido evidenciado por muitos formadores com formações em áreas afins – contratados pelas universidades para trabalhar na formação de professores –, os docentes com formação específica também declararam se sentir isolados, sem orientação e apoio. O estudo destacou ainda as poucas experiências docentes desenvolvidas na pós-graduação e a ênfase dos formadores na pesquisa, em detrimento do ensino. O enfoque na pesquisa, pontuado também por Fiorentini (2004), indica a desarticulação entre a pesquisa e o ensino e provem, muito provavelmente, do foco mantido durante toda a pós-graduação na pesquisa e na produção de seus resultados. Um dos problemas gerados pelo foco de trabalho dos formadores na pesquisa é a menor atenção que direcionam a sua prática em sala de aula, o que acaba impactando também a formação dos professores que eles formam.

Loughran (2014), em seu trabalho, busca descrever aspectos que moldam o desenvolvimento do formador: a transição entre ser professor e se tornar formador de professores, a natureza da formação e a importância das pesquisas sobre a própria prática. Para o autor, o desenvolvimento profissional de professores é diferente do desenvolvimento de formadores de professores, uma vez que esses profissionais possuem distintos níveis de autonomia profissional e responsabilidades, conforme as funções exercidas. Além de precisar lidar com essa mudança na natureza da função docente, também é esperado que o formador desenvolva pesquisa, se engaje em projetos e busque financiamentos externos à universidade em que atua. Em todos os âmbitos de seu desenvolvimento profissional, é importante que o formador construa a própria identidade, avalie suas experiências, seus aprendizados e o papel de suas crenças. A pesquisa sobre a própria prática do formador assume, portanto, um papel importante (LOUGHRAN, 2014), reafirmando o que já havia destacado Fiorentini (2004). Os distintos níveis de autonomia do formador em relação ao professor que trabalha na escola também impactam no conhecimento que o formador escolhe promover no contexto da formação inicial. Além de ser moldado pela grade curricular de cada curso, o conhecimento a ser desenvolvido no futuro professor também depende das experiências vivenciadas pelo formador em seu desenvolvimento profissional, como as experiências anteriores com a docência na Educação Básica e no Ensino Superior (GONÇALVES; FIORENTINI, 2005).

Em estudos que tiveram como foco de investigação o formador de professores, tais como as pesquisas de Batista (2011), Fiorentini (2004), Goodwin et al. (2014) e Loughran (2014), emerge o consenso em relação à necessidade de mais pesquisas e estudos centrados no formador de professores, que envolvam, especialmente, a formação dos formadores, suas crenças sobre o papel que desempenham, suas experiências, sua relação com a pesquisa e sua identidade profissional.

Ainda que a maior parte das investigações que aparecem na literatura tenha como sujeitos de pesquisa os professores que ensinam Matemática na escola básica, é possível encontrar estudos realizados com seus formadores. Estes trabalhos, em geral, investigam a visão dos formadores sobre determinado tema ou área (por exemplo, Mondini e Bicudo (2010), Ribeiro (2016) e Souza (2004)), o desenvolvimento profissional dos formadores, no sentido de compreender como se deu sua formação e construção dos saberes da prática (GONÇALVES; FIORENTINI, 2005) e de compreender suas experiências e conhecimentos profissionais mobilizados (SUPERFINE; LI, 2014). Os poucos estudos que tratam dos conhecimentos do formador são relativamente recentes e geralmente são investigações sobre a própria prática, nas quais o formador investiga e reflete sobre o próprio conhecimento profissional (por exemplo, Mellone, Jakobsen e Ribeiro (2015) e Ribeiro, Mellone e Jakobsen (2016)).

Partindo de suas experiências profissionais com o ensino de Álgebra, Souza (2004), enquanto formadora de professores de Matemática, enfatiza a importância do estudo das estruturas algébricas. Segundo a autora é necessário que os professores, nos cursos de licenciatura e nos cursos de bacharelado, ampliem a visão de seus alunos sobre estruturas algébricas, explicitando que estas surgiram, em muitos casos, com a necessidade de buscar soluções para determinados problemas. Um exemplo na Álgebra é a teoria de corpos e extensões de corpos, que foi desenvolvida por Galois a partir do problema de se procurar raízes de equações polinomiais que fossem solúveis por radicais.

Ribeiro (2016), em um estudo com foco na Álgebra, destaca a importância dada, tanto por professores quanto por formadores, ao conhecimento do conteúdo – *Content Knowledge*, na perspectiva de Shulman (1986) –, associando a aprendizagem da Álgebra sustentada no conhecimento da Aritmética. Mesmo assumindo que a Matemática ensinada nos cursos de licenciatura é diferente daquela trabalhada em outros cursos, os formadores aparentemente não problematizam seu próprio conhecimento matemático necessário para formar professores de Matemática (RIBEIRO, 2016).

Também Mondini e Bicudo (2010) indicam que os formadores argumentam, por um lado, a importância da Álgebra apenas como generalizadora dos conceitos da Aritmética, área que estaria mais ligada ao ensino na Educação Básica. Por outro lado, afirmam que a Álgebra é o estudo das estruturas, apesar de reconhecerem que tais estruturas não teriam uma ligação direta com os conteúdos escolares, e defendem a importância desse estudo algébrico como forma de garantir ao professor um “aprofundamento teórico” sobre esta área da Matemática.

Ao apresentarem os resultados de sua investigação, Gonçalves e Fiorentini (2005) destacam a formação predominantemente técnico-formal dos formadores, com grande ênfase na formação matemática do matemático, que contribui, segundo os sujeitos, muito pouco para o trabalho que exercem na formação de professores de Matemática para a Educação Básica. Além disso, explicitaram que seus saberes da prática docente foram construídos quase exclusivamente a partir da própria experiência. Ainda que este tipo de reconhecimento seja importante para a melhoria da prática e da formação, a pesquisa mostra que há dimensões do conhecimento do professor (e, necessariamente, do formador de professores) que não se aprendem na prática, pois requerem a discussão e a reflexão sustentada em situações matematicamente críticas (RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013a; 2013b).

O conhecimento profissional do formador de professores parece ser, portanto, diferenciado e complementar ao conhecimento especializado do professor (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015). Os autores apontam a necessidade de pesquisas sobre o conhecimento de que os professores e seus formadores precisam para interpretar as resoluções de alunos e sobre maneiras de promover esses conhecimentos – no sentido de desenvolver o que denominam de Conhecimento Interpretativo[14].

Em um trabalho posterior, Ribeiro, Mellone e Jakobsen (2016) discutem aspectos da sua própria prática e de seu conhecimento profissional enquanto formadores de professores que ensinarão Matemática nos Anos Iniciais. Além de discutirem a especialidade e a especificidade do conhecimento matemático do professor, discutem também algumas das particularidades do conhecimento do formador de professores, salientando aspectos da natureza desse conhecimento com relação ao conhecimento do professor, considerando que os conhecimentos nesses dois níveis não são distintos, mas complementares, já que a natureza e o tipo de conhecimento do formador de professores deverão ser complementares ao conhecimento do professor, no sentido de que o trabalho a desenvolver se centrará na discussão e no desenvolvimento do conhecimento especializado do professor (matemático e didático-pedagógico), e não no conhecimento matemático dos alunos (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016).

Superfine e Li (2014) também assinalam que o conhecimento envolvido no trabalho de formação de professores é diferente daquele implicado no trabalho do professor que ensina Matemática aos alunos. Em suas pesquisas, os autores ilustram diferentes formas de conhecimento, observadas na prática de professores formadores, e discutem como elas são diferentes das utilizadas por professores de Matemática escolar. Ainda destacam que o campo da formação de professores carece de evidências a respeito do conhecimento matemático necessário aos professores formadores e apontam que atualmente não existe uma síntese coerente dos conhecimentos necessários aos formadores para apoiar o desenvolvimento de futuros professores.

[14] Conhecimento envolvido no atribuir significado às produções dos alunos, tomando-as como ponto de partida para desenvolver o conhecimento, as competências e as habilidades matemáticas (COUTO; RIBEIRO, 2018).

Nós, entretanto, entendemos que tal síntese só é possível se existirem mais pesquisas sobre o formador, no que diz respeito à sua prática e aos conhecimentos que mobiliza para poder dar conta de formar o professor de Matemática sob a perspectiva de um conhecimento especializado. Neste sentido, primeiro é necessária a identificação e caracterização do conhecimento dos formadores atuantes na formação inicial e continuada, para posteriormente se pensar em formas de enriquecer/contribuir com esse conhecimento.

Investigações como as apresentadas no início desta seção contribuem para a formação de professores e constituem um passo inicial para compreender os conhecimentos profissionais do formador de professores de Matemática. No entanto, a investigação sobre quais são, como se manifestam, qual o seu papel na formação e para a formação e de que forma se relacionam os conhecimentos dos formadores, em especial dos formadores de professores de Matemática, precisa ainda avançar muito para que estejamos, pelo menos, no mesmo nível do que já se sabe com relação aos professores e ao seu conhecimento. No que se refere ao professor de Matemática, identificam-se algumas tentativas de compreender o conhecimento e as crenças desses sujeitos, no entanto, a especialização do conhecimento matemático do professor de Matemática é ainda um aspecto pouco explorado no contexto brasileiro das pesquisas acadêmicas, como constatam Fiorentini e Crecci (2017).

Por meio das informações de um metaestudo realizado a partir de teses de doutorado com foco no professor que ensina Matemática (PEM) em contextos de formação continuada, produzidas entre 2001 e 2012, os autores supracitados apontam três tendências de estudo do conhecimento do professor que ensina Matemática. Uma mais geral e distanciada da Educação Matemática, apoiando-se geralmente em Shulman e Tardif. Esses trabalhos situam-se no nível da generalidade do conhecimento do professor (geralmente no âmbito da Educação) e não discutem as especificidades desse conhecimento relacionado aos conteúdos específicos.

Há uma segunda tendência que procura fazer uma aproximação à especificidade do campo da Educação Matemática. Embora utilizem referenciais gerais com base em Tardif, Shulman, Zeichner e Leontiev, lançam mão também de referenciais construídos por autores do campo da Educação Matemática, tais como Ponte, Serrazina, Llinares, D’Ambrosio, Fiorentini, Nacarato, Passos, Moura etc. Esses trabalhos, mesmo que avancem em relação aos da primeira tendência no sentido de tentar estabelecer uma maior aproximação e uma compreensão da complexidade das práticas de ensinar e aprender Matemática, deixam às vezes de lado uma análise mais detalhada e circunstanciada do saber específico e situado do professor que ensina Matemática.

A terceira tendência busca aportes mais específicos aos campos de conhecimento do ensino e aprendizagem da Matemática, apoiando-se em autores tais como: Vergnaud (para os Campos Conceituais Aditivos e Multiplicativos); Moreira (Números Reais); Brousseau, Chevallard, Ballacheff entre outros (relacionados à didática matemática francesa), Ball e seus colaboradores (2008) acerca dos "domínios de conhecimento matemático do professor para o ensino". Esta última referência tendo sido utilizada por apenas um dos trabalhos analisados (FIORENTINI; CRECCI, 2017).

Com relação ao conhecimento do formador de professores de Matemática, tendo por objetivo a descrição e a sistematização do conhecimento produzido nas teses e dissertações brasileiras defendidas de 2001 a 2012, o estudo realizado por Coura e Passos (2017) conclui que as pesquisas analisadas não discriminam os saberes ou os conhecimentos específicos ao formador, os quais são necessários para sua atividade profissional, nem indicam se e como os saberes do formador são diferentes dos saberes dos professores que ele forma.

Esta lacuna de investigações que descrevam as especificidades do conhecimento do professor e do formador de professores de Matemática[15], evidenciada inclusive nas pesquisas internacionais, reforça a necessidade de incrementar tais investigações, no Brasil e no mundo.

A revisão da literatura revela indícios de que o conhecimento do formador de professores de Matemática parece ser diferente ou complementar ao conhecimento do professor que ensina Matemática (MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015; SUPERFINE; LI, 2014). Além disso, é também evidente o pequeno número de pesquisas, no contexto brasileiro, que têm por preocupação um entendimento das especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática (FIORENTINI; CRECCI, 2017), especificidades essas que a literatura nos indica ir além da inclusão de aspectos do conhecimento pedagógico (CARRILLO et al., 2018; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013). Uma vez que o conhecimento matemático de alunos, professores e formadores de professores possui conteúdos e, portanto, naturezas próprias, torna-se essencial levar em conta as especificidades dos conhecimentos desses sujeitos para promover intencionalmente o seu desenvolvimento (RIBEIRO, 2016).

Almejando contribuir para a melhoria da prática docente, torna-se importante um entendimento mais amplo do conteúdo do conhecimento do professor (BALL; THAMES;

[15] Partindo do metaestudo realizado a partir de pesquisas acadêmicas produzidas entre 2001 e 2012, Coura e Passos (2017) identificaram trinta estudos envolvendo o formador de professores de Matemática, e destacam o reduzido número de trabalhos com foco nesses sujeitos. Além disso, identifica-se nos estudos analisados uma forte tendência à adoção da perspectiva de Tardif para a investigação dos conhecimentos do formador, em detrimento da perspectiva dos conhecimentos profissionais docentes presente nos trabalhos de Shulman.

PHELPS, 2008; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016) e assim se faz necessário e urgente o desenvolvimento de estudos que tenham como foco o conhecimento do formador de professores de Matemática. Entender melhor como se configura, constrói e reelabora o conhecimento do formador é assumido por nós como um dos elementos da gênese para compreender tanto o conhecimento matemático e didático-pedagógico de professores formadores atuantes em cursos de licenciatura quanto os impactos desse conhecimento e das crenças do formador na formação de professores do Ensino Médio e dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

O estudo e a compreensão do papel do formador de professores de Matemática, com informações sobre suas experiências profissionais como professor e formador de professores de Matemática, sua formação acadêmica, suas concepções sobre a Matemática e seu ensino, suas crenças sobre o papel da formação e sobre o papel que desempenham, em consonância com a compreensão do conhecimento especializado do formador, poderão auxiliar a identificar necessidades de mudança na organização dos programas e dos processos de desenvolvimento profissional dos cursos de formação acadêmica dos formadores de professores de Matemática. Além disso, poderá também contribuir para a reestruturação e a melhoria dos cursos de licenciatura e das práticas docentes dos formadores e, por decorrência, da formação dos professores de Matemática que atuam na Educação Básica.

O conhecimento do formador é diferente tanto do conhecimento do futuro professor de Matemática quanto do conhecimento do professor de Matemática (JAWORSKI, 2008; ZOPF, 2010; CONTRERAS et al. 2017; ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo). Jaworski (2008) chamou esse conhecimento de *Mathematics Teacher Educator Knowledge*, o qual possui aspectos particulares, bem como pontos comuns, tanto com o conhecimento do futuro professor como com o conhecimento do professor de Matemática. Em comum, eles precisam conhecer a Matemática, conhecer a pedagogia relacionada à Matemática e o currículo em que o professor de Matemática baseia seu trabalho. Além disso, o formador também precisa conhecer a literatura profissional e de pesquisa ligada ao ensino e à aprendizagem da Matemática, conhecer as teorias de ensino e de aprendizagem, e conhecer as metodologias de pesquisa que investigam o ensino e a aprendizagem nas escolas e nos sistemas educacionais (JAWORSKI, 2008).

Zopf (2010) observa que a diferença entre o conhecimento do formador e o conhecimento do professor está no conteúdo matemático. Enquanto o professor ensina Matemática, o formador ensina o conhecimento para ensinar Matemática. Os propósitos de ensino também são diferentes, uma vez que as crianças aprendem Matemática para si mesmas, enquanto os professores aprendem Matemática para ensinar os seus alunos. Assim, Zopf propõe o *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers*, a fim de descrever o conhecimento do formador, que inclui o conhecimento necessário para ensinar.

Contreras et al. (2017), por sua vez, afirmam que o conhecimento mobilizado pelos formadores e pelos professores apresenta diferenças quando o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) são considerados. As diferenças no MK estão relacionadas ao fato de que o conhecimento do formador é maior em termos de alcance e de profundidade, ou seja, o conhecimento matemático do formador possui uma estrutura teórica mais coerente e sólida, além de possuir maior experiência com a validação e a construção do conhecimento matemático. Por outro lado, o PCK do formador contém o conhecimento sobre as características de aprendizagem dos futuros professores, o conhecimento sobre como ensinar o conteúdo da formação de professores, e o conhecimento de diferentes formas de organizar o conteúdo da formação de professores.

Conforme discutem Contreras et. al (2017), é necessária a realização de investigações para compreender se e como o MTSK constitui uma parte do conhecimento do formador, partindo do pressuposto de que o conhecimento especializado do formador e do professor são diferentes, já que o conhecimento do formador precisa ir além do que o professor precisa saber, tanto em termos de alcance como em termos de profundidade (ZOPF, 2010; ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo).

O conhecimento especializado do formador

Ressaltamos que desde a primeira publicação (CARRILLO et al., 2013), o modelo MTSK vem sendo rediscutido e aprimorado, por meio de novas investigações que se aprofundam no modelo em si e também em seus domínios e subdomínios, buscando sempre uma melhor compreensão do conhecimento do professor de e que ensina Matemática.

Uma vertente complementar dessas pesquisas tem por foco o conhecimento do formador, o qual pode ser pensado a partir do conhecimento especializado que se pretende promover nos (futuros) professores (CARRILLO et al., 2019). Com relação ao conhecimento matemático, o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento a ser desenvolvido nos (futuros) professores que forma, sem estar limitado a ele, tendo uma visão geral e inter-relacionada do conhecimento matemático, que o leve a enfatizar conexões e profundidade de conhecimentos na formação (ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo).

Focando no conhecimento matemático do formador, podem ser diferenciados três pontos com relação ao conhecimento do professor (ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo):

(i) o conhecimento do formador se torna mais amplo e profundo porque é o resultado de um processo de crescimento no qual a Matemática adquire maior complexidade e vai sendo vista de forma cada vez mais holística, visão na qual os *links* entre os conceitos de tornam mais variados;

(ii) a importância que o formador atribui aos aspectos sintáticos do conhecimento matemático, reconhecendo que este, por si mesmo, é necessário, mas não suficiente, e compreendendo, por exemplo, a essência das demonstrações, o significado de teoremas e definições e o rigor da linguagem matemática;

(iii) o conhecimento do formador é organizado de forma diferenciada, possuindo uma compreensão mais clara das ideias estruturantes da Matemática e das conexões que permitem simplificar ou aumentar a complexidade de um tópico (MONTES; RIBEIRO; CARRILLO; KILPATRICK, 2016), tornando-o capaz de promover a construção do conhecimento dos professores em formação.

No que se refere ao PCK do formador, Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo) vão um pouco mais longe e apresentam três subdomínios. Este avanço é efetuado considerando as especificidades do conhecimento pedagógico do formador a luz do trabalho profissional que se assume terá de efetuar – promover o desenvolvimento do MTSK do (futuro) professor.

Dessa forma, são considerados três subdomínios no PCK do formador: *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*; *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*; e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*.

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera o conhecimento do formador no que se refere a caracterização do desenvolvimento profissional dos (futuros) professores; as dificuldades mais prováveis na sua especialização enquanto professores de Matemática; a sequências ou focos mais apropriados para a construção e para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; o ponto de partida em que os (futuros) professores se encontram – em termos de conhecimento – ao iniciarem a formação. Como exemplo, inclui-se conhecer que os estudantes devem ser capazes de abstrair conceitos já conhecidos e buscar representações não convencionais, por exemplo, para o conjunto dos números naturais, decidindo sobre o foco mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores.

Fazem parte do subdomínio *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; conhecer as limitações e potencialidades de cada tarefa a explorar; conhecer o *design* e a utilização de várias metodologias de avaliação; e conhecer as características mais importantes de cada tópico potenciando o desenvolvimento desse conhecimento e das conexões entre elas. Como exemplo, inclui-se conhecer quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE) e encontrar conexões entre essas características, a saber, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação.

O *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* abarca o conhecimento dos padrões curriculares, tanto do curso em que atua como formador, quanto dos níveis de ensino em que os (futuros) professores irão atuar. Há que considerar que a demanda de conhecimento matemático pode variar de acordo com o perfil do formador (matemático, educador matemático, licenciado, bacharel, formado em áreas afins), e que esse conhecimento depende do contexto (e.g., departamento, universidade, país) em que o formador atua, e pode incluir conhecer como a formação é conduzida em outros países, bem como estar apto a estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos (futuros) professores.

É importante notar que, nos subdomínios propostos por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo), o conhecimento pretendido/ideal do formador está associado ao que se pretende para a formação, nesse caso, para o desenvolvimento do conhecimento especializado dos (futuros) professores.

Neste sentido, podemos observar que as propostas de Zopf (2010), Contreras et al. (2017) e Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo) possuem características comuns além de suas raízes nos trabalhos de Shulman e de considerar o que já se sabe sobre o conhecimento do professor para criar modelos de conhecimento do formador. Uma dessas características se refere aos objetivos da formação: na proposta de Zopf, o objetivo da formação de professores de Matemática é desenvolver o *Mathematical Knowledge for Teaching* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) dos futuros professores, enquanto na proposta de Contreras et al., o objetivo é desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores (CARRILLO et al., 2018)[16].

Além disso, os modelos desenvolvidos por esses dois grupos de pesquisa estão situados em contextos bastante específicos, envolvendo a observação da prática de formadores e de pesquisadores experientes que já trabalham para desenvolver o MKT ou o MTSK na formação de professores. No entanto, levando em conta as peculiaridades dos formadores participantes de nossa investigação, que são matemáticos sem contato prévio com o modelo

[16] Para mais informações sobre o desenvolvimento do conhecimento especializado na formação de professores, ver Carrillo et al. (2019).

MTSK, e que não se percebem no papel de formadores, em vez de nos basearmos na mesma perspectiva de Contreras et al. (2017), usamos esse modelo, junto com o MTSK, para procurar por indicadores de conhecimento do formador, revelados enquanto os participantes atuam em um contexto de formação inicial.

Considerando que o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento do professor e que, além disso, o MTSK se aplica à análise do conhecimento de nossos sujeitos, por serem eles professores que ensinam Matemática em nível de graduação, nossa proposta para análise do conhecimento matemático dos formadores, que também são matemáticos, consiste em investigar esse conhecimento a partir dos subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (CARRILLO et al., 2018).

Para discutir o conhecimento pedagógico dos sujeitos, por outro lado, propomos olhar para o PCK do formador em dois níveis: como professor que ensina Matemática na universidade, a partir dos subdomínios e categorias do PCK propostas em Carrillo et al. (2018) – como apresentado anteriormente (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM, páginas 30-31; *Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT, páginas 31-32 e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS, página 32) – e como formador de professores de Matemática, a partir dos três subdomínios propostos por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo).

No que se refere ao conhecimento do formador no tópico divisibilidade, para a promoção do conhecimento do professor que lhe permita, por exemplo, definir e dar exemplos de um objeto matemático ou explicar os procedimentos envolvidos em um algoritmo (como fazer, quando pode ser feito, por que é feito dessa forma), é necessário ao formador conhecimentos mais aprofundados sobre a elaboração de definições matemáticas e o emprego de algoritmos, convencionais ou alternativos, bem como sobre diferentes formas de explicar um algoritmo.

O conhecimento que cumpre ao formador de professores, por ser também professor, abarca conhecer exemplos numéricos de cada um dos três casos em que se divide a demonstração do TADE, elegendo os exemplos mais apropriados para ressaltar cada caso, os quais deverão ser conhecidos pelos futuros professores de Matemática. No que se refere às explicações

> Se os formadores de professores acreditam que os futuros professores devem ser capazes de explicar por que diferentes algoritmos funcionam [...], têm de ser capazes de dedicar tempo suficiente de seus cursos para esses temas. Também devem decidir a melhor forma de explicar as justificativas para esses algoritmos, e as possibilidades e limitações deles em exemplos concretos (CONTRERAS et al., 2017, p. 17, tradução nossa).

No que concerne à demonstração, no contexto da Teoria dos Números, ela não é tipicamente um tópico, mas empregada como uma forma de validar resultados, o que pode ser configurado como uma opção pedagógica dos formadores associada à própria disciplina. Gabel e Dreyfus (2017) apontam algumas lacunas no conhecimento pedagógico do formador de professores de Matemática sobre estratégias para o ensino de demonstrações, inclusive em matemáticos experientes. Os autores ressaltam assim a necessidade de diálogo com matemáticos acerca das considerações pedagógicas que possam potencializar o ensino de Teoria dos Números para futuros professores de Matemática.

É responsabilidade do formador desenvolver esse tipo de conhecimento nos futuros professores de Matemática e, entre os diversos profissionais atuantes na licenciatura, podemos distinguir, por sua formação relacionada à Matemática, os matemáticos, os educadores matemáticos e os professores de Matemática que recebem e orientam os alunos da licenciatura nas escolas (CONTRERAS et al., 2017). Para que essa responsabilidade seja assumida e seja também desenvolvida uma prática formativa com ela alinhada, é essencial que o formador de professores detenha um conhecimento especializado que contribua para desenvolver nos futuros professores de Matemática um conhecimento especializado (CARRILLO et al., 2018) que lhe permita relacionar as aprendizagens provenientes de um curso de Teoria dos Números com sua futura prática matemática.

CONTEXTO E MÉTODO

Neste capítulo, são apresentados e discutidos aspectos relativos ao contexto e à metodologia da pesquisa, sobretudo, os procedimentos de coleta e de análise dos dados obtidos na pesquisa de campo.

Retomando nossa questão de pesquisa: *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?*, voltamos a apresentar as três subquestões consideradas na investigação: Que conhecimento especializado é mobilizado por um formador de professores de Matemática ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros? Quais elementos caracterizam o conhecimento matemático de um formador de professores de Matemática com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana? Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?

O MÉTODO DE PESQUISA

Tendo como foco o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, esta pesquisa tem uma abordagem qualitativa. A pesquisa qualitativa, para Creswell (2012), é a forma mais adequada para abordar um problema de pesquisa em que as variáveis não são totalmente conhecidas e que requer certo nível de exploração. Nesse tipo de pesquisa, a revisão de literatura pode apresentar poucas informações sobre o fenômeno estudado – fator que se verifica em nossa revisão – e o pesquisador precisa aprender mais com os participantes no decorrer da investigação.

Essa pesquisa, além disso, se configura como um estudo de caso ou, mais precisamente, um estudo de casos múltiplos, sob uma perspectiva instrumental (STAKE, 2006). O estudo de caso é definido por Stake (1995) como o estudo da particularidade e da complexidade de um caso pelo qual se chega a compreender sua atividade em circunstâncias consideradas importantes e fundamentais.

O estudo de caso é um método apropriado para essa investigação, pois permite, conforme André (2013), o estudo de fenômenos educacionais no contexto em que acontecem (o conhecimento revelado pelo formador no contexto da prática de formação inicial de professores de Matemática), por meio do contato direto e prolongado do pesquisador com as situações investigadas e que se dá mediante acompanhamento dos docentes durante um semestre ou uma sequência de aulas. Este procedimento, junto às práticas e circunstâncias dos formadores, possibilita, de um lado, a descrição de comportamentos e de ações baseados nos conhecimentos e nas crenças dos participantes da pesquisa e, de outro, a análise de interações com os futuros professores e com a pesquisadora e a descrição da linguagem utilizada no contexto da formação, em situação de entrevistas, sempre atrelada ao conhecimento especializado dos formadores. Para Stake (1995), o estudo de caso pode ser intrínseco, quando o pesquisador possui um interesse inerente a um caso particular; instrumental, quando o interesse do pesquisador incide em uma questão maior que o caso ajuda a resolver; e coletivo, quando o interesse do pesquisador vincula-se a vários casos.

Dessa forma, no estudo de caso instrumental, o interesse do pesquisador é a compreensão do objeto de estudo, e não do caso em si, isto é, o caso não é importante por si mesmo, mas sim pelas informações que permite agregar à teoria, por sua possibilidade de generalização (STAKE, 2006). O caso é abordado em profundidade, mas é escolhido para auxiliar o investigador na compreensão de outro tema, interesse ou fenômeno (ANDRÉ, 2013). Uma vez que nossa investigação não pretende obter resultados específicos sobre o conhecimento dos participantes como indivíduos, mas sim compreender o conhecimento revelado por eles enquanto formadores de professores de Matemática, a partir das informações obtidas, julgamos que o estudo de caso instrumental foi a modalidade ideal para a pesquisa.

O estudo de casos múltiplos, por sua vez, permite melhor entender como um processo ou fenômeno acontece em diferentes ambientes (STAKE, 2005). Para tanto, os casos selecionados devem se configurar de formas distintas, incorporando diferentes contextos. Note-se que não se pretende efetuar uma análise comparativa dos participantes ou do seu conhecimento, mas sim enriquecer a informação obtida em relação a esse conhecimento do formador.

OS CASOS SELECIONADOS E OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE INFORMAÇÕES

Os sujeitos da pesquisa foram selecionados por conveniência, sendo dois formadores atuantes na formação inicial de professores de Matemática. Ambos atuam em um curso de Licenciatura em Matemática, oferecido por uma universidade pública do interior do Estado de São Paulo. Os formadores participantes da investigação, além disso, foram escolhidos por possuirem diferentes tempos de experiência docente (cinco e vinte anos), por manifestarem visões distintas sobre a formação do professor de Matemática, por mostrarem disponibilidade para colaborar com esta pesquisa e também pela facilidade de acesso da pesquisadora para o acompanhamento de suas aulas.

Assim, as informações foram coletadas no contexto de uma disciplina de Teoria dos Números, a qual foi ministrada em dois semestres subsequentes, por dois formadores distintos, na primeira ocasião, no turno da noite e, na segunda ocasião, no turno da manhã. Em ambas as ocasiões, a disciplina foi ofertada para alunos de licenciatura e de bacharelado em Matemática. No período compreendido entre março e setembro de 2018, as informações foram coletadas por meio de (i) entrevistas; (ii) gravações de aulas; (iii) planejamento de aulas dos formadores; (iv) elementos da avaliação da disciplina; e (v) caderno de campo da pesquisadora.

(i) As entrevistas foram realizadas no início de cada semestre, a fim de esclarecer pontos referentes aos temas que seriam trabalhados pelos formadores; e no final do semestre, com objetivo de compreender melhor aspectos da prática e do conhecimento dos formadores que ficaram por ser melhor esclarecidos, bem como oferecer aos docentes um *feedback* sobre os resultados da pesquisa.

(ii) A observação e a gravação de aulas foram realizadas durante as aulas ministradas pelos docentes, nas respectivas disciplinas de Teoria dos Números. Os formadores também foram entrevistados brevemente antes e depois de cada aula: antes, com objetivo de obter sua imagem prévia da lição (SCHOENFELD, 2000; RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2012), na qual poderiam surgir aspectos que não estavam no planejamento do professor, mas que ajudaram a estruturar as aulas; e depois, visando discutir alguns aspectos associados como, por exemplo, os porquês de determinado foco, os motivos que levaram o formador a seguir determinado rumo e as suas respostas para determinadas perguntas dos alunos. Tanto as entrevistas quanto as aulas foram gravadas em áudio e em vídeo, sempre que possível.

Esta multiplicidade de fontes de dados é decorrente da metodologia do estudo de caso, que pressupõe a recolha e a organização de dados de diversas fontes, de forma sistemática (DOOLEY, 2002), bem como da necessidade de múltiplas fontes de dados que possibilitem a compreensão do conhecimento do formador. A vantagem mais significativa da obtenção de dados a partir de múltiplas fontes é a possibilidade de triangulação, considerando que "[...] qualquer descoberta ou conclusão de um estudo de caso provavelmente será muito mais convincente e acurada se baseada em várias fontes distintas de informação, obedecendo a um estilo corroborativo de pesquisa" (YIN, 2005, pg. 126). Logo, a triangulação dos dados referentes ao mesmo acontecimento aumenta a confiabilidade dos resultados obtidos.

Enquanto as entrevistas individuais eram utilizadas para captar indícios de conhecimento especializado e de crenças, a observação e o registro em áudio e/ou vídeo das aulas dos formadores objetivavam a identificação do conhecimento especializado mobilizado na prática.

(iii) e (iv) Os planejamentos e as avaliações fornecidos pelos formadores, além de permitir a identificação do conhecimento dos sujeitos, também permitiram entender melhor seus objetivos e o conhecimento que pretendiam proporcionar aos futuros professores de Matemática.
(v) Já o caderno de campo da pesquisadora teve por finalidade transcrever integralmente o conteúdo escrito pelo professor na lousa[17], e proporcionar a escrita de anotações, comentários e questionamentos sobre os eventos de cada aula.

Em ambos os casos, os formadores foram contatados no semestre anterior àquele em que ministrariam a disciplina de Teoria dos Números para verificação da possibilidade de acompanhamento de suas aulas pela pesquisadora. Nas seções a seguir, apresentamos os dois formadores de professores participantes de nossa investigação.

O caso do Professor Andre

O professor Andre é bacharel, mestre e doutor em Matemática, tendo realizado sua formação em universidades europeias. Desde o mestrado, suas pesquisas centram-se nas áreas de Álgebra e Geometria. Após se doutorar, continuou se aperfeiçoando, tendo realizado dois pós-doutorados, um deles no Brasil, na universidade em que trabalha atualmente e onde os dados para essa pesquisa foram coletados. Andre atua como docente na referida universidade há quatro anos, tendo ministrado disciplinas para estudantes de diferentes cursos de graduação, como Matemática, Física, Química e Engenharia, e em nível de pós-graduação em Matemática. O professor orienta alunos de graduação, mestrado e doutorado, nas áreas de Álgebra e Geometria.

Andre não aparenta se considerar como formador de professores, levando em conta, por exemplo, que prefere não diferenciar o conteúdo da disciplina para alunos de licenciatura e bacharelado, não havendo também um planejamento diferenciado. Esta visão do participante fica explícita no trecho a seguir, uma transcrição direta de parte da entrevista inicial realizada com ele, em que é questionado sobre como lidar com uma disciplina ministrada para ambos os cursos concomitantemente:

> Pesquisadora: **A disciplina que você está dando agora é para a licenciatura e também é para o bacharelado. Como você lida com isso? Faz alguma diferença?**
>
> Andre: Pouca. Pouca diferença, mas repito, essa é a minha escolha. Não é por preguiça. É a minha escolha. Por quê? Por que eu... Não pode ser mal visto dizer que eu quero fazer um curso *light* para a licenciatura?

[17] No caso do Professor Andre, não houve a possibilidade de gravação das aulas em vídeo, de forma que a escrita do professor na lousa, em todas as aulas, foi reproduzida no caderno de campo da pesquisadora da forma mais fiel possível.

Não estamos assumindo que os alunos da licenciatura são piores do que os do bacharelado? Por que estamos assumindo que são piores? Por que têm notas melhores? Mas isso significa necessariamente que eles não estão interessados em ter o curso completo? Então eu posso fazer mais exemplos, então a única diferença com a licenciatura é que quando eu estou pensando num tópico, posso depois dar uma aplicação que pode ser utilizada no Ensino Médio ou Fundamental. Mas isso vai ter, por exemplo, a parte de criptografia no final. A parte de criptografia que vamos fazer pode ser tranquilamente aplicada...

Pesquisadora: **A minha próxima pergunta ia por aí. O que na disciplina você acha que é mais importante para os alunos da licenciatura. Você tem alguma coisa que, que poderia servir mais para eles?**

Andre: Na verdade, o que dizer? Tudo, porque eu posso contar para você agora a divisibilidade, o teorema de primos, o pequeno teorema de Fermat. Eu posso contar a versão completa, porque você está na universidade, mas você, depois como professora do Ensino Fundamental, pode pegar o que eu falei para você, simplificar e explicar para um aluno do Ensino Fundamental. Critérios de divisibilidade, saber quando um número é divisível por 3, por 5, por 11, você pode explicar também. Qual é a diferença? Eu vou, mas isso vai ser também parte do seu trabalho como professor. Eu vou dar para você todo o conhecimento. Por quê? Porque eu estou ensinando universitários. Quando você sabe todo o conhecimento, parte do seu trabalho como professor... É... É, como, como posso dizer... Remanejar o seu conhecimento para ser explicado no nível do que o seu público está. Eu obviamente não daria a mesma aula no Ensino Médio.

Pesquisadora: Ok.

Andre: Tá? Então dar uma versão *light* da ementa é no caso que eu estou ensinando para o Ensino Médio. Se eu estou ensinando para universitários, eles merecem saber tudo. No meu ponto de vista.

Pesquisadora: Uhum.

Andre: E depois eles vão fazer uma escolha. Eu não estou dando a aula que eles deverão dar, no Ensino Médio. Se não, qual é o trabalho deles como professores?

(Trecho da entrevista inicial com Andre)

No semestre em que acompanhamos suas aulas, Andre estava ministrando a disciplina de Teoria dos Números para alunos da licenciatura e do bacharelado em Matemática, pela segunda vez.

O caso do Professor Benny

O professor Benny é bacharel, mestre e doutor em Matemática, tendo realizado sua formação prioritariamente em uma universidade peruana. Suas pesquisas centram-se na área de Álgebra. Realizou quatro pós-doutorados, dois deles no Brasil, e um na universidade em que trabalha atualmente, onde os dados da pesquisa foram coletados. Benny atua como docente nessa universidade há 20 anos, já tendo ministrado disciplinas em diversos cursos de graduação, como Matemática e Engenharia, e na pós-graduação em Matemática. O professor orienta alunos de doutorado e já orientou também alunos de mestrado e pós-doutorado, nas áreas de Álgebra e Geometria.

Em relação às semelhanças e às diferenças entre ensinar nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, ou em cursos de Engenharia, o formador Benny apresenta uma visão semelhante àquela apresentada por Andre, conforme o trecho a seguir, proveniente de transcrição direta de parte da entrevista inicial:

> Pesquisadora: **E, para você, você acha que tem alguma diferença ensinar, por exemplo, para alunos de Geometria Analítica, quando você ensina no curso de Matemática, para alunos de Matemática e de Engenharia, por exemplo, tem diferença?**
> Benny: Já faz tantos anos que não me lembro mais. Mas eu penso que deveria ter, por que as perspectivas são diferentes, não? Se é uma turma que eu saiba que tem mais engenheiros, por exemplo, ou se é uma turma que não são matemáticos, deveria tentar, procuro tentar, digamos, exemplos que estão mais ligados a eles. E quando faço com matemáticos, não me preocupo com os exemplos, podem ser mais abstratos. Essa é a diferença.
> Pesquisadora: **Se você fosse ministrar essa disciplina apenas para alunos da licenciatura, faria alguma coisa diferente?**
> Benny: Não! Faria igual, por que nessa matéria estou colocando coisas aplicadas, não?
> (Trecho da entrevista inicial com Benny)

No semestre em que acompanhamos suas aulas, o professor estava ministrando a disciplina de Teoria dos Números para alunos da licenciatura e do bacharelado em Matemática, tendo ministrado essa disciplina em, pelo menos, cinco ocasiões.

A disciplina de Teoria dos Números

A disciplina de Teoria dos Números, que foi o principal contexto de recolha de informações desta pesquisa, tem duração de um semestre, sendo oferecida duas vezes ao ano. No primeiro semestre, a disciplina é oferecida no turno da noite, prioritariamente para os alunos da licenciatura. No segundo semestre, é oferecida no período diurno, para alunos da licenciatura e do bacharelado. Como se verifica no quadro a seguir, a ementa apresenta tópicos tradicionalmente abordados em disciplinas de Teoria dos Números, com a particularidade de conter, na parte inicial, tópicos referentes às estruturas algébricas, como grupos, anéis e corpos. Este acréscimo na ementa da disciplina foi uma novidade para o Professor Andre, considerando que, quatro anos antes, na primeira vez que ministrou a disciplina, esse tema não fazia parte da ementa. Como nosso foco de pesquisa era a Teoria dos Números, aproveitamos as primeiras aulas para que o formador e a turma se habituassem a nossa presença, sem a realização de gravações.

Figura 2. Ementa da disciplina de Teoria dos Números.

Ementa:

Estruturas algébricas (operações binárias, grupos, anéis e corpos). Axiomas de Peano e construção do anel dos números inteiros e racionais. Outros exemplos de anéis e corpos (polinômios, corpos quadráticos, inteiros de Gauss, Zm). Domínios euclideanos. Representação de números inteiros em bases diversas. Máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e o Algoritmo de Euclides. Elementos irredutíveis e primos e critérios de divisibilidade. Domínios principais, fatoriais e o teorema fundamental da aritmética. Equações diofantinas de grau um. Sistemas residuais, congruências lineares e o teorema chinês do resto. Os teoremas de Euler e Wilson. Congruências de grau dois, símbolos de Legendre e Jacobi e Lei da Reciprocidade Quadrática. Ternas pitagóricas e números que podem ser escritos como soma de dois quadrados. Equações diofantinas notáveis. Ordem multiplicativa e raízes primitivas. Noções de criptografia.

Fonte: Site da universidade.

Na universidade em que as informações foram obtidas, a ementa da disciplina, com carga horária de 60 horas, é a mesma para os cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Matemática, sendo que, na grade curricular do curso de licenciatura, a disciplina é sugerida aos estudantes no 6° semestre, considerando um total de 9 semestres; enquanto no bacharelado, a disciplina é sugerida aos estudantes no 4º semestre, haja vista um total de 8 semestres de curso.

O processo de coleta das informações

Entrevista

A entrevista é um procedimento de produção de dados bastante utilizado nas pesquisas em Ciências Sociais e na Educação, sendo uma das mais importantes fontes de informação em um estudo de caso (YIN, 2003). A entrevista individual é utilizada quando se deseja conhecer profundamente os significados e a visão do entrevistado, favorecendo a proximidade e por isso um maior controle da situação de entrevista por parte do pesquisador. Optamos, nesta investigação, pela utilização de entrevista do tipo semiestruturada, na qual

> [...] o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem dos mesmos

> e, inclusive, formular questões não previstas inicialmente. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.121)

Nesse estudo, optamos por entrevistar os formadores participantes antes do início do período letivo, com objetivo de compreender sua formação, experiências, conhecimentos e crenças que pudessem influenciar sua prática na disciplina de Teoria dos Números. Além das informações prévias, as entrevistas também permitiram a seleção e a delimitação inicial dos temas nos quais a investigação viria a se focar para o estudo do conhecimento dos formadores, a saber, a divisibilidade. A divisibilidade é um dos temas basilares em Teoria dos Números e assim costuma ser abordada no início da disciplina.

A seguir, são apresentadas as questões que compuseram o roteiro da entrevista inicial com os formadores, juntamente com a justificativa para inclusão de cada questão.

Quadro 1. Questões da entrevista inicial realizada com os formadores

Perguntas da entrevista	**Objetivos**
Qual foi a sua primeira formação universitária (graduação)? Onde foi realizada?	Entender a formação do entrevistado (educação, matemática, institucional, o que estudou, à quais áreas se dedicou). A questão poderia suscitar aspectos importantes relacionados às crenças do formador.
Fale um pouco sobre a sua formação (mestrado, doutorado, foco das pesquisas que realizou).	
Você considera que a sua formação (graduação, mestrado, doutorado) te ajuda ao lecionar para a graduação? Como? Por quê?	Entender se e como o formador acredita que a formação recebida impacta a prática em sala de aula da graduação.
Há quanto tempo você trabalha como professor? Já ensinou em outros cursos de graduação? Quais? Quais disciplinas? Você considera que existem diferenças entre lecionar nos cursos de matemática e nesses outros cursos?	Compreender as experiências anteriores do formador.
Já ministrou a disciplina de Teoria dos Números antes? Quantas vezes?	Conhecer as experiências anteriores do formador com o ensino de Teoria de Números.
Da última vez que você ministrou essa disciplina, a ementa era diferente da atual (não incluía uma parte sobre grupos e anéis). Quem é responsável pela ementa? Em sua opinião, por que essa modificação foi feita? Se fosse você a elaborar a ementa da disciplina, como seria?	Discutir suas opiniões sobre a ementa da disciplina (Questão proposta apenas para o Professor Andre).
De que forma você prepara suas aulas para essa disciplina? (*Utiliza notas de aula? Algum livro, sua memória? Quais livros consulta? Por que esses em específico?*)	Compreender como o professor planeja suas aulas e quais referências utiliza para isso.
Quais são seus objetivos nessa disciplina? O que os alunos devem saber ao final do semestre?	Compreender as expectativas de aprendizagem do formador.
A disciplina de Teoria dos Números que você está ministrando agora é para a licenciatura e também para o bacharelado. Como você lida com isso?	Compreender como o formador entende o ensino de Teoria dos Números para a licenciatura e para o bacharelado.
Em relação aos alunos da licenciatura, quais tópicos dessa disciplina você considera mais importantes que	Compreender as conexões estabelecidas pelo formador entre os tópicos que considera

eles aprendam? Por quê? De que forma considera que os tópicos se relacionam com a Matemática que os futuros professores têm de ensinar na escola?	importantes para os alunos da licenciatura e os conteúdos escolares.
Se você fosse ministrar essa disciplina apenas para a licenciatura, faria alguma coisa diferente? O quê? Por quê?	Entender a imagem que o entrevistado possui de si mesmo como formador de professores e sobre o trabalho que realiza neste contexto.
Quais as principais dificuldades dos alunos da licenciatura ao cursarem a disciplina? E as principais dificuldades dos alunos do bacharelado?	Conhecer as potencialidades e dificuldades que o formador atribui aos estudantes da licenciatura e do bacharelado.
Dos temas de Teoria dos Números, qual (ou quais) é mais complexo de abordar com os alunos? Por quê?	Compreender possíveis dificuldades do formador ao ensinar tópicos de Teoria dos Números.
Se uma criança te perguntasse o que é número, o que você responderia? E se um aluno do Ensino Médio fizesse a mesma pergunta? E na graduação?	Compreender como o entrevistado define número e como adéqua esta definição para diferentes pessoas.
Qual a importância da demonstração nas suas aulas?	Compreender o papel que o formador atribui à demonstração, o que demonstra, quando demonstra, e por que demonstra resultados em aula.
O que é uma demonstração para você?	Compreender como o entrevistado define demonstração (práticas de um matemático, tipos e formas de demonstração).
Que importância atribui aos critérios de divisibilidade na disciplina? Por quê?	Compreender a importância atribuída pelo formador aos critérios de divisibilidade.
O que é divisibilidade para você? E o algoritmo de Euclides?	Explicitar as definições do entrevistado sobre divisibilidade e algoritmo de Euclides.
Quando introduz o tema divisibilidade, o que você faz? Com quais objetivos? *Se tivesse de dizer 3 coisas essenciais que os futuros professores devem aprender sobre o tema, que coisas seriam essas?* Considera importante relacionar com algum outro tema?	Compreender como o formador introduz divisibilidade no contexto da Teoria dos Números e o que considera importante que os licenciandos aprendam. Compreender se o formador relaciona divisibilidade com outros temas matemáticos, no contexto da graduação ou no contexto escolar.
Ao trabalhar divisibilidade, como você está estruturando suas aulas? Quais são seus objetivos?	Entender como o formador acredita que deve ser uma aula sobre divisibilidade (estratégias, técnicas, tarefas e exemplos, conteúdos a ser trabalhados e objetivos a perseguir).
O que é fundamental que os futuros professores saibam sobre esse tema? E os alunos do bacharelado? Por que é diferente? Ou por que é o mesmo?	Expectativas de aprendizagem do tema divisibilidade para a licenciatura e para o bacharelado, sequenciação com temas anteriores e posteriores.
Se um aluno lhe perguntasse se o conceito de divisibilidade pode ser estendido para outras estruturas além dos números inteiros, o que responderia? Esta resposta é a mesma para um aluno da licenciatura ou do bacharelado?	Possibilitar a manifestação de conexões entre o conceito de divisibilidade e outros conceitos matemáticos, e verificar se o professor acredita que estas conexões são importantes para os estudantes da licenciatura e do bacharelado na mesma medida.
No contexto das disciplinas de Cálculo, $0/0$ é uma indeterminação. No contexto da Teoria dos Números, zero pode dividir zero. Como você explicaria isso para um aluno da disciplina de Teoria dos Números? Seria a	Verificar se o formador estabelece conexões entre o conceito de indeterminação do cálculo e o conceito de divisibilidade apresentado em Teoria de Números e como

mesma explicação para um aluno da licenciatura e um aluno do bacharelado?	ele explicitaria esta conexão para os estudantes da licenciatura e do bacharelado.
Vamos falar sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Você pretende demonstrar esse resultado em sala de aula? Por quê? É importante que os alunos consigam reproduzir esta demonstração? Por quê?	Entender como o formador pretende abordar a demonstração desse teorema em específico (formas de validação e demonstração, uso da linguagem formal) e como espera que os alunos lidem com o resultado, se pretende que compreendam o teorema, que sejam capazes de explicá-lo em poucas palavras ou que sejam capazes de reproduzir formalmente a demonstração.
Imagine que um aluno da disciplina pergunta se o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana pode ser usado em outras estruturas algébricas, o que responderia? (Quais, por exemplo?)	Obter informações sobre o conhecimento do formador acerca de conexões envolvendo o TADE.
Situação hipotética. Ao resolverem um determinado problema, os alunos da disciplina sentiram dificuldades em justificar a existência de mdc para quaisquer números inteiros. Se eles pedissem ajuda, como você poderia responder? (É possível garantir? Por quê? Por que não?)	Obter informações sobre o conhecimento do formador a respeito da existência de mdc para quaisquer números inteiros e sobre a justificativa de resultados.
Na escola, aprendemos que um número é primo se é divisível por um e por ele mesmo. Esta é uma boa definição de número primo? Por quê?	Discutir a definição de número primo apresentada no contexto escolar e sua adequação matemática (condições necessárias e suficientes para gerar definições).
Qual é o papel dos números primos na Teoria dos Números?	Obter informações sobre o conhecimento do formador acerca dos números primos e das conexões que explicita entre este tema e outros no âmbito da Teoria dos Números.

Ao final do semestre, foi realizada nova entrevista com os formadores, com o objetivo de obter informações adicionais em relação àquelas obtidas na entrevista inicial e nas aulas observadas, aprofundar a compreensão e a caracterização do conhecimento do formador, bem como validar algumas interpretações feitas pela pesquisadora durante a análise dos demais dados obtidos. A seguir, são apresentadas as questões que compuseram o roteiro da entrevista final com o formador Andre, juntamente com a justificativa para inclusão de cada questão.

Quadro 2. Questões da entrevista final realizada com o formador Andre.

Perguntas da entrevista final	**Objetivos**
Que dificuldades você sentiu durante o desenvolvimento da disciplina?	Entender quais dificuldades o formador sentiu no desenvolvimento de tópicos, relacionadas aos alunos e à disciplina em geral.
Você considera que seus objetivos para a turma foram alcançados?	Compreender se e como o formador considera que alcançou os objetivos que estabeleceu previamente para a disciplina.
Acredita que os alunos em geral compreenderam bem a parte de divisibilidade? Por quê?	Entender como o formador avalia o aprendizado dos estudantes nos temas da divisibilidade e da disciplina em geral.
Como você sabe que um estudante aprendeu os temas abordados na disciplina?	

Os resultados das avaliações dos estudantes na parte de divisibilidade são satisfatórios? Por quê?	
Você melhoraria algo em suas aulas para contribuir com a aprendizagem dos estudantes? O quê? Por quê?	Entender se e como o formador reflete sobre o andamento da disciplina e sobre aspectos que podem ser melhorados.
Como você organizou o ensino do conteúdo de divisibilidade? Poderia organizar de outra forma?	Compreender como o formador sequenciou os tópicos dentro do tema divisibilidade e se enxerga outras formas de organização.
Quais são as dificuldades mais recorrentes na aprendizagem do conteúdo de divisibilidade?	Compreender como o formador avalia as dificuldades dos estudantes no tema divisibilidade.
Na parte de divisibilidade, você optou por não definir explicitamente o mínimo múltiplo comum. Por quê?	Entender a opção do formador na definição do mínimo múltiplo comum.
Você acredita que a primeira parte da ementa da disciplina (grupos e anéis) contribui para a aprendizagem dos demais conteúdos? Como?	Compreender se e como o formador estabelece conexões entre diferentes tópicos da ementa.
É importante para você que os alunos tomem nota em suas aulas?	Entender o que o professor pensa a respeito da participação dos alunos.
É importante que os alunos façam perguntas durante as aulas?	
Quando você demonstra resultados em sala de aula, costuma se preocupar com a elegância dos mesmos. Você acredita que as demonstrações mais elegantes podem ser mais bem compreendidas pelos alunos?	Explicitar as crenças do formador sobre a forma de demonstrar resultados e a estrutura das demonstrações que faz em sala de aula.
Quais são seus critérios para deixar a prova de um resultado como exercício?	Compreender as escolhas do formador com relação aos exercícios, aos exemplos e às questões de prova.
E para eleger exemplos?	
Como você decide quais exercícios coloca na prova?	

O roteiro da entrevista final realizada com Benny e Andre possui questões em comum, sendo marcado também por questões diferentes, as quais consideraram as especificidades das aulas de Benny (Quadro 3).

Quadro 3. Questões da entrevista final realizada com o formador Benny.

Perguntas da entrevista final	**Objetivos**
Como foi a disciplina em geral?	Compreender como o formador avalia o andamento da disciplina.
Você considera que seus objetivos para a turma foram alcançados?	Compreender se e como o formador considera que alcançou os objetivos que estabeleceu previamente para a disciplina.
Acredita que os alunos em geral compreenderam bem os conceitos trabalhados? E os conceitos relacionados com a divisibilidade? Por quê?	Entender como o formador avalia o aprendizado dos estudantes nos temas da divisibilidade e da disciplina em geral.
Como você sabe que um estudante aprendeu os temas abordados na disciplina?	

Os resultados das avaliações dos estudantes na parte de divisibilidade são satisfatórios? Por quê?	
Que dificuldades você sentiu durante o desenvolvimento da disciplina?	Entender quais dificuldades o formador sentiu no desenvolvimento de tópicos, relacionadas aos estudantes e à disciplina em geral.
Você melhoraria algo em suas aulas para contribuir com a aprendizagem dos estudantes? O que? Por quê?	Entender se e como o formador reflete sobre o andamento da disciplina e aspectos que podem ser melhorados.
Como você decide quais exercícios coloca na prova?	Compreender as escolhas do formador com relação a questões de prova.
Quais foram as maiores dificuldades dos alunos na disciplina?	Compreender como o formador avalia as dificuldades dos estudantes na disciplina de Teoria dos Números.
Você acredita que a primeira parte da ementa da disciplina (grupos e anéis) contribui para a aprendizagem dos demais conteúdos? Como?	Compreender se e como o formador estabelece conexões entre diferentes tópicos da ementa.
É importante que os alunos façam perguntas durante as aulas?	Entender o que o professor pensa a respeito da participação dos alunos.
Nas primeiras aulas, você trabalhou na demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Este resultado é importante para você no contexto da disciplina? Por quê?	Compreender a importância que o formador atribui ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana.
Sempre que você fala de alguma propriedade relacionada à Matemática escolar (do colégio), você faz questão de pontuar isso. Por quê?	Compreender quais os objetivos de Benny ao relacionar os conteúdos de Teoria dos Números com conceitos abordados na Matemática escolar.
Nas primeiras aulas, você fez um esforço para utilizar a menor quantidade de letras possível. Por quais motivos?	Compreender melhor as opções de Benny no que concerne à notação matemática.
Eu gostaria de entender melhor a sua opção por denotar o conjunto dos números naturais por $\mathcal{P}$. Você poderia me explicar?	

Observação e gravação de aulas

A observação não participante nas aulas dos dois formadores foi iniciada já nas primeiras aulas da disciplina. As aulas de Andre foram gravadas em áudio, entre os meses de março e junho de 2018. Ao todo, a pesquisadora observou 18 aulas (Quadro 4) desse formador, tendo realizado entrevistas curtas antes e depois de cada aula – imagem da lição. Em outras três ocasiões, nas quais ocorreram avaliações, o formador foi entrevistado antes da avaliação, com objetivo de obter informações sobre o conteúdo da prova e sobre os motivos que o levaram a incluir cada uma das questões propostas. No caso de Andre, a quantidade de aulas observadas foi maior por que o foco de análise ainda não estava decidido.

O quadro a seguir tem por finalidade fornecer um panorama das aulas observadas do formador Andre, incluindo as datas e o tema de cada aula. Assim como o quadro 5, referente às aulas do formador Benny, auxiliou o processo de divisão das aulas em episódios para posterior análise.

Quadro 4. Data de observação e tema das aulas de Andre.

Número da aula	Data da observação	Tema
Aula 1	06/03/2018	Propriedades de grupos e anéis, relações de equivalência, Princípio da Boa Ordem, Princípio de Indução, definição de divisibilidade
Aula 2	08/03/2018	Definição de número primo e número composto, Teorema Fundamental da Aritmética (existência), Teorema de Euclides, definição de máximo divisor comum, propriedades do MDC, Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides
Aula 3	13/03/2018	Teorema de Bezout, Lema de Euclides, Teorema Fundamental da Aritmética (Unicidade), decomposição de números inteiros positivos
Aula 4	20/03/2018	Teoria das congruências lineares, Sistema Completo de Restos, critérios de divisibilidade
Aula 5	22/03/2018	Congruências lineares, teorema Chinês do Resto, Pequeno Teorema de Fermat, Números de Carmichel
Aula 6	27/03/2018	Critério de Korsect, teorema de Wilson, funções aritméticas, teorema de Euler
Aula 7	03/04/2018	Teorema de Euler, função aritmética multiplicativa, função de Möbius, fórmula da inversão de Möbius
Aula 8	05/04/2018	Aula de exercícios
Aula 9	12/04/2018	Potências de números primos
Aula 10	17/04/2018	Definição de números perfeitos, definição de números primos de Mersenne, definição de raiz primitiva
Aula 11	19/04/2018	Teorema de Lagrange, raízes primitivas
Aula 12	24/04/2018	Raízes primitivas, índice
Aula 13	26/04/2018	Raízes primitivas, congruências quadráticas, critério de Euler, símbolo de Legendre
Aula 14	03/05/2018	Propriedades do símbolo de Legendre, lema de Gauss
Aula 15	08/05/2018	Lei da reciprocidade quadrática
Aula 16	10/05/2018	Congruências quadráticas, equações diofantinas, ternos pitagóricos, definição de terno pitagórico primitivo
Aula 17	24/05/2018	Congruências quadráticas
Aula 18	05/06/2018	Lema de Thue, congruências quadráticas

As aulas do Professor Benny foram observadas no mês de agosto de 2018, sendo registradas em áudio e vídeo, uma vez que o formador autorizou os dois tipos de registro. Foram acompanhadas oito aulas desse formador (Quadro 5), que foi brevemente entrevistado após cada aula. Além de provas escritas, as avaliações propostas por Benny na disciplina compreendem duas monografias, que poderiam versar sobre alguns temas previamente eleitos pelo formador.

A seguir, podem ser visualizadas as aulas de Benny que foram observadas, as datas das aulas e os temas de cada aula.

Quadro 5. Data de observação e tema das aulas de Benny.

Número da aula	Data da observação	Tema
Aula 1	07/08/2018	Conjunto dos números inteiros e operações, grupo abeliano, operação binária interna, números naturais
Aula 2	09/08/2018	Números negativos, relações entre conjunto, relação de ordem, Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana
Aula 3	14/08/2018	Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana
Aula 4	16/08/2018	Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana
Aula 5	21/08/2018	Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana
Aula 6	23/08/2018	Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, definição de divisibilidade, congruências lineares
Aula 7	28/08/2018	Congruências lineares, Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana
Aula 8	30/08/2018	Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, tábuas de operações

Caderno de campo

O caderno de campo da pesquisadora se constituiu em um importante instrumento para recolha de informações, tendo permitido tomar notas sobre os objetivos do formador em cada aula, mudanças de foco, discussões que surgiram a partir de questionamentos dos estudantes, divisão da aula em episódios e, no caso do Professor Andre, possibilitou a transcrição direta da escrita do professor na lousa.

Planos de aula

Além das observações de aulas e dos registros no caderno de campo, também foram solicitados aos formadores seus planos de aula para a disciplina, visando uma melhor compreensão dos objetivos do formador em cada aula. O professor Andre disponibilizou suas notas de aula para consulta, enquanto o professor Benny não utiliza notas escritas na disciplina observada. O acesso ao planejamento de Andre permitiu identificar modificações, como acréscimos e supressões de resultados, além de alterações em exemplos que o formador considerou mais ou menos adequados no momento da aula. Os motivos para essas modificações, sempre que pertinente, foram questionados ao formador no momento da entrevista final.

Avaliações

Para cada avaliação proposta aos estudantes, foi solicitada aos formadores uma cópia da referida avaliação, que foi analisada em conjunto com os dados obtidos das entrevistas e das observações de aula, buscando identificar quais pontos foram considerados prioritários em cada tema a ponto de serem contemplados na avaliação e, com isso, compreender quais conhecimentos o formador considera prioritário desenvolver nos estudantes.

A ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES OBTIDAS

O MTSK é uma das conceitualizações do conhecimento do professor de Matemática, enquanto o conhecimento do formador de professores de Matemática, por outro lado, não é tão amplamente discutido na literatura, pelo menos na perspectiva da Educação Matemática (CONTRERAS et al., 2017). Conforme os autores, os tipos de conhecimentos que caracterizam o conhecimento especializado do formador podem ser diferentes, dependendo da formação do sujeito investigado, isto é, são esperadas respostas de natureza distintas de matemáticos, professores de Matemática ou de educadores matemáticos.

Nesta pesquisa, buscamos indicadores de conhecimento do formador, a partir do que já se sabe sobre o conhecimento especializado do professor que ensina Matemática e considerando o ponto de vista de dois matemáticos atuantes na formação inicial do professor de Matemática. Assumindo que o MTSK faz parte do conhecimento do formador, é necessário investigar como o MTSK está vinculado ao conhecimento do formador e quais conhecimentos além desses são necessários aos responsáveis pela formação do professor de Matemática.

Com base nas especificidades dos sujeitos da pesquisa, que além de exercerem o papel de formadores, também são matemáticos e professores que ensinam Matemática na universidade, consideramos que o conhecimento matemático de Benny e Andre poderia ser analisado na perspectiva do *Mathematical Knowledge* (CARRILLO et al., 2018). Dessa forma, buscamos por indicadores de *Knowledge of Topics* (KoT), *Kowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) dos sujeitos. Para a busca de indicadores de cada subdomínio, foram inicialmente consideradas as categorias do *Mathematical Knowledge* apresentadas em Carrillo et al. (2018). Ao longo do processo de análise, no entanto, consideramos o trabalho de Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), que se aprofundaram no estudo do KPM, e adotamos as categorias propostas por essas pesquisadoras para a análise desse subdomínio em nossa pesquisa.

Para a análise do *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) dos sujeitos, inicialmente consideramos apenas os subdomínios de conhecimento do formador, conforme propostos por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo). Ao longo do processo de análise, entretanto, incluímos as categorias do PCK propostas em Carrillo et al. (2018), analisando o conhecimento dos sujeitos em dois níveis: do professor que de Matemática e do formador de professores de Matemática.

O Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana foi escolhido como contexto matemático da pesquisa ao longo da observação das aulas de Benny.

O primeiro passo no processo de análise das informações coletadas foi a transcrição das entrevistas e das gravações das aulas dos formadores. Para as entrevistas, as transcrições completas, com linhas numeradas, foram realizadas reproduzindo todas as falas dos formadores e da pesquisadora, conforme ilustramos na Figura 3 a seguir.

Figura 3: Trecho de transcrição da entrevista inicial de Andre.

Transcrição da entrevista inicial com o Professor Andre

P = pesquisadora
A = Andre

1.	P	**Então, primeiro, eu queria saber um pouco da sua graduação, primeira formação**
2.		**universitária que você teve.**
3.	A	Ok.
4.	P	**Que curso você fez?**
5.	A	Eu fiz um curso de matemática... Na (Universidade em que o professor realizou a graduação),
6.		na (país). É um curso de três anos, por que na (país) tem 3+2, é, que é graduação mais
7.		mestrado, antes de entrar no... doutorado.
8.	P	Ah, sim.
9.	A	Então é um pouco diferente do que aqui. É... quer que eu descreva um pouco o curso?
10.	P	Se você puder...

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Para as aulas dos formadores, as transcrições completas, com linhas numeradas, apresentam todas as falas do formador e dos estudantes, sendo posteriormente complementadas com informações do vídeo, no caso das aulas de Benny, e com as notas de campo, de forma a incorporar as ações do formador e as observações da pesquisadora feitas no momento da coleta. A Figura 4 ilustra a transcrição de uma das aulas de Benny.

Figura 4: Trecho de transcrição da aula 5 de Benny.

Transcrição da aula 5 do Professor Benny

B = Benny
P = Pesquisadora
E = Estudantes
A = Ação

1.	B	Ah, sim, sim, sim. Para evitar o... olá!
2.	P	Oi
3.	B	Bom dia, como está?
4.	P	Bom dia!
5.	B	Bom, para evitar, digamos, vergonhas pessoais, vamos desligar o telefone. Está bem? Assim
6.		ele não toca ou... vamos colocar em silêncio, como queiram. Seria bom, não? Bom, então,
7.		vamos continuar, eu vou insistir nesse teorema por que, de fato, esse é primeiro teorema que...
8.		nós... que em geral nesses cursos vocês vão... vão, digamos, que vocês vão encontrar,
9.		digamos. Então assim se falaria. Então o teorema que estamos discutindo, é o teorema da
10.		divisão de Euclides, não? Então, todos já sabemos o que significa,
11.	A	Escreve o teorema na lousa

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Tendo em vista o conjunto de aulas observadas de ambos os formadores (constituído pelas 18 aulas da disciplina inteira ministrada por Andre e pelas oito aulas de Benny), foi necessário decidir qual seria o foco ou o contexto matemático considerado na pesquisa. Neste ponto, observamos duas opções distintas dos sujeitos: em todas as suas aulas, Andre se empenhou em apresentar o máximo de conteúdo possível, sempre se preocupando não apenas em cumprir a ementa, mas também em aprofundar o nível da disciplina, apresentando curiosidades, resultados interessantes e um pouco mais avançados; Benny, por sua vez, se empenhou no estabelecimento dos resultados iniciais da disciplina, focando na divisibilidade, e discutindo um mesmo teorema em várias aulas.

Embora já tivéssemos a intenção de explorar mais profundamente a divisibilidade, geralmente trabalhada nas primeiras aulas de Teoria dos Números, foi o foco de Benny no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana que marcou a escolha pelo contexto matemático da pesquisa. Assim, este resultado passou a ser o fio condutor de análise do conhecimento especializado de Benny e Andre.

Logo, a partir das transcrições já realizadas, buscamos definir episódios significativos em cada aula. Apoiamo-nos para isso no modelo de análise proposto por Ribeiro, Carrillo e Monteiro (2012), os quais consideram cada aula como um todo composto por partes disjuntas, ou episódios, sendo cada episódio associado aos objetivos do formador. A divisão da aula em episódios foi feita levando em consideração uma re-leitura das transcrições, bem como uma divisão prévia elaborada no caderno de campo durante a observação das aulas.

O processo de divisão de uma aula de Andre em episódios é ilustrado na Figura 5, a seguir. No primeiro episódio, em amarelo, Andre retoma brevemente os conceitos apresentados na aula anterior; no segundo episódio, em azul, ele define número primo; o terceiro episódio, marcado em verde, se inicia ao final da linha 17, quando o formador começa a discutir o Teorema Fundamental da Aritmética, e é interrompido na linha 21, para ser retomado na linha 24; no quarto episódio, em rosa, Andre faz referência aos livros-textos que vinha utilizando no curso.

Figura 5: Divisão da segunda aula de Andre em episódios significativos.

1.	A	Ok. Seguimos. O que fazemos toda vez? Vamos para a frente. Então... Repasso em duas
2.		linhas. O que a gente sabe até agora? Sabe os números, sabe que existem os números, e a
3.		última coisa que apresentamos foi... divisibilidade. Por que divisibilidade? Por que agora
4.		graças à divisibilidade e às primeiras propriedades, eu posso introduzir um outro caro amigo
5.		que vai ser uma estrela daqui para muitas aulas. Definir divisibilidade me permite definir o
6.		que é um número primo. A definição mesma, tem a divisibilidade dentro. Então, nossa
7.		primeira definição de hoje vai ser a seguinte: Um número primo inteiro p estritamente maior
8.		do que 1 é um número, é um inteiro, isso parece óbvio, mas... tal que 1 e o mesmo p são os
9.		únicos divisores positivos. Só cuidado, que eu botei o p, um primo, como inteiro positivo, só
10.		para não ter problema se multiplico por menos vai dar outro... Quer dizer, só para ter um
11.		pouco, uma unicidade, mas vamos supor que a gente chama de primo só os inteiros... só os
12.		positivos. Ok? Pelo contrário, quer dizer, se não é primo, como vou chamar ele? De
13.		composto. Podia escrever simplesmente composto quando não é primo, mas escrito de outra
14.		maneira, posso pegar, pensar como inteiro n maior do que 1, tal que existe outro inteiro
15.		estritamente contido, outro inteiro n1, estritamente contido entre 1 e n, tal que n1 divide n,
16.		então isso é equivalente a pedir que n seja o produto de dois inteiros n1 e n2, com os dois
17.		estritamente maiores do que 1. É a mesma coisa que estou pedindo. Ok? Já podemos
18.		demonstrar coisas. Primeira coisa que já sabemos, é o Teorema Fundamental da Aritmética.
19.		Capítulo 1. Capítulo 1 significa existência. Por que do que vou falar agora, é um teorema de
20.		existência e unicidade, mas a gente ainda não tem as ferramentas para demonstrar a
21.		unicidade, só demonstramos a existência. Antes de esquecer novamente, a partir da segunda
22.		metade da aula passada, eu comecei a utilizar outro livro. O do Barton. Está? Que vai ser
23.		nossa referência principal daqui até o final. Então a gente fez a parte de estruturas no
24.		Monteiro, Barton daqui até o final. Ok. O que diz o Teorema Fundamental da Aritmética?
25.		O enunciado é que todo inteiro n maior igual do que 2 pode-se escrever como um produto
26.		finito de números primos. Ok. Vamos demonstrar. Como vou demonstrar? Com indução.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Em cada um desses episódios, foi identificado o conhecimento revelado pelo formador e posteriormente organizadas as evidências e o conteúdo desse conhecimento, estruturado pelo subdomínio ao qual se refere. No caso de Benny, em conjunto com a transcrição da fala, imagens da lousa também foram consideradas como evidências de seu conhecimento.

A análise das entrevistas foi feita considerando as especificidades de cada tipo de entrevista realizada, bem como seus objetivos, de forma concomitante com a análise da prática dos formadores.

Para a análise do *Mathematical Knowledge* revelado pelos formadores, utilizamos as categorias propostas por Carrillo et al. (2018), onde os indicadores receberam um acrônimo (por exemplo, KoTd1) constituído pelas iniciais do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial de acordo com a ordem em que aparece no texto (Quadro 6). Um exemplo de indicador obtido na investigação é o *KoTd1 - saber que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis,* *ou seja, que um número é menor do que outro* (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019). Note-se que a numeração dos indicadores em cada categoria não indica uma priorização de um em relação a outros, mas segue a ordem pela qual estes são identificados na correspondente evidencia apresentada no texto.

Quadro 6. Subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (CARRILLO et al., 2018, pp. 242-245).

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1
	Fenomenologia e aplicações	KoTph1
	Procedimentos	KoTp1
	Registros de representação	KoTr1
KSM	Conexões baseadas em simplificação	KSMs1
	Conexões baseadas em aumento da complexidade	KSMc1
	Conexões auxiliares	KSMa1
	Conexões transversais	KSMt1
KPM	Formas de proceder	KPMwp1
	Formas de validar	KPMwv1
	Formas de explorar	KPMwe1
	Formas de gerar conhecimento em matemática	KPMwg1
	Formas de comunicar matemática	KPMwc1

Para analisar o *Pedagogical Content Knowledge* revelado pelos sujeitos como professores de Matemática, recorremos as categorias propostas por Carrillo et al., (2018) – Quadro 7. Os códigos atribuídos aos indicadores seguem a mesma estrutura apresentada anteriormente, e um exemplo de indicador obtido nesse domínio é o *KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição* $0 \leq r < |a|$ *do TADE* (ALMEIDA; RIBEIRO, 2020).

Quadro 7. Subdomínios e categorias do *Pedagogical Content Knowledge* (CARRILLO et al., 2018, pp. 247-248).

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KMT	Teorias sobre o ensino de matemática	KMTmt1
	Recursos para o ensino (físicos e digitais)	KMTr1
	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1
KFLM	Teorias sobre a aprendizagem de matemática	KFLMtl1

	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1
	Formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático	KFLMi1
	Aspectos emocionais da aprendizagem matemática	KFLMea1
KMLS	Resultados de aprendizagem esperados	KMLSlo1
	Nível de desenvolvimento procedimental ou conceitual esperado	KMLSld1
	Sequenciamento de tópicos	KMLSst1

Nem todos os indicadores do Quadro 6 e do Quadro 7 aparecem na análise de dados. Optamos por apresentá-los na íntegra por se tratar de indicadores prévios (não emergentes).

Quanto ao PCK do formador, recorremos aos conhecimentos elencados por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo). Por se tratar de um modelo ainda em desenvolvimento, para cada subdomínio, consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias) do formador e os indicadores são formados pela sigla do subdomínio, seguida de um número sequencial (Quadro 8). Um exemplo de indicador desse domínio obtido na investigação é o *KFPDMT4 - saber que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e que, portanto, já possuem uma imagem mental desse conceito* (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019).

Quadro 8. Subdomínios e conhecimentos do PCK do formador (ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo).

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer aspectos do desenvolvimento profissional dos futuros professores	KFPDMT1
	Conhecer as dificuldades mais prováveis em termos da especialização do conhecimento enquanto professores de matemática	KFPDMT2
	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento, identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT3
	Saber o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4
Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes	Conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento do conhecimento, identidade e prática profissional do futuro professor	KTCIMTEP1
	Saber das limitações e potencialidades de cada atividade	KTCIMTEP2
	Conhecer formas de desenvolver a identidade e habilidades profissionais	KTCIMTEP3
	Conhecer o *design* e utilização de métodos de avaliação dos programas de formação inicial e contínua	KTCIMTEP4
	Saber dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	KTCIMTEP5
Knowledge of the standards of	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1

mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares dos níveis de ensino em que os futuros professores irão atuar	KSMTEP2
	Conhecer, estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos futuros professores	KSMTEP3

Para apresentar nossa análise de dados, escolhemos o formato *multipaper*, o qual pressupõe a apresentação da pesquisa realizada por meio de um conjunto de artigos. Os artigos apresentados no capítulo a seguir são independentes, porém integram esta tese como um todo e, articulados, auxiliam na resposta para nossa questão de pesquisa.

A escolha desse formato objetiva, além da delimitação e da clareza na análise dos dados, a revisão sistemática por pares, bem como uma divulgação mais abrangente dos resultados da pesquisa. A relação entre os artigos, as subquestões de pesquisa de cada artigo e os indicadores obtidos é apresentada no quadro a seguir:

Quadro 9. Relação entre os artigos, objetivos específicos, subquestões de pesquisa e indicadores obtidos.

Artigo	**Subquestão de pesquisa**	**Indicadores obtidos**
Artigo 1	Qual é o conhecimento especializado mobilizado por um formador de professores de Matemática ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros?	Indicadores do *Mathematical Knowledge* e do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny como formador
Artigo 2	Quais elementos caracterizam o conhecimento matemático de um formador de professores de Matemática com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?	Indicadores do *Mathematical Knowledge* de Andre
Artigo 3	Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?	Indicadores do *Mathematical Knowledge*, do Pedagogical Content Knowledge como professor e do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny como formador

Após a escrita dos três artigos de análise dos dados, e buscando a interpretação e reinterpretação dos resultados obtidos nos referidos artigos, no capítulo final procuramos uma visão geral a partir das análises já realizadas. Essa visão geral também é conhecida como meta-análise, ou metassíntese, e se caracteriza "[...] como uma retomada da pesquisa realizada, mediante um pensar sistemático e comprometido de buscar dar-se conta da investigação efetuada" (BICUDO, 2014, p. 13), e permitirá o aprofundamento da investigação realizada.

No artigo de meta-análise discutem-se, em profundidade, os indicadores de conhecimento do formador obtidos na pesquisa, de acordo com os domínios e os subdomínios aos quais pertencem. Para tanto, organizamos os indicadores de conhecimento especializado de Benny e Andre conforme os três domínios abordados na investigação: *Mathematical*

Knowledge e *Pedagogical Content Knowledge*, na perspectiva do MTSK (CARRILLO et al., 2018); e *Pedagogical Content Knowledge*, na perspectiva do conhecimento especializado do formador proposta por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo).

A meta-análise, cuja finalidade é integrar resultados de pesquisas sobre um dado tema e produzir sínteses mediante o confronto desses resultados (BICUDO, 2014), propiciou a retomada dos dados e das análises produzidas nos três artigos, resultando na modificação e no reagrupamento de alguns indicadores obtidos.

Inicialmente todos os indicadores obtidos nos três artigos foram compilados em um único documento, para que fosse obtida uma visão geral dos indicadores. Foram agrupados todos os indicadores de Benny, e depois os de Andre. A seguir, os indicadores de cada subdomínio foram destacados com cores diferentes, realizando-se uma leitura comparativa dos mesmos. Aqueles que destoavam dos demais, como é o caso dos indicadores de KPM de Benny (categoria previamente denominada como demonstrar) do artigo 1, foram acrescentados nos indicadores da categoria formas de validar, para estar de acordo com os indicadores obtidos nos artigos 1 e 3. Os diferentes indicadores foram então numerados sequencialmente. Indicadores que porventura aparecessem repetidos, pois foram mobilizados tanto por Benny quanto por Andre, ou por Benny nos artigos 1 e 3, foram suprimidos na listagem final dos indicadores, mantendo-se apenas um deles.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS INFORMAÇÕES

Considerando que a tese foi escrita por meio de artigos, neste capítulo apresentamos os três textos provenientes da análise das informações coletadas. O quarto artigo, que faz a meta-análise dos resultados obtidos, considerando nossa investigação sobre o conhecimento dos formadores sobre divisibilidade, é apresentado no capítulo seguinte, de conclusões e considerações finais. Os episódios de aulas dos formadores foram escolhidos para discussão e análise nos referidos artigos a partir da identificação do conteúdo matemático que seria o pano de fundo da investigação, a saber, o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Dessa forma, cada um dos três artigos de análise busca compreender um aspecto diferente do conhecimento especializado do formador ao discutir o TADE.

O primeiro artigo, publicado na revista Quadrante (Portugal), intitulado *Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros*[18], foi escrito tendo por base episódios da segunda aula do Professor Benny, na qual o formador introduz a relação de ordem para os números inteiros. A análise das informações nos permitiu obter indicadores do conhecimento matemático desse formador, na perspectiva do modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowlege* (CARRILLO et al., 2018), e do conhecimento pedagógico do formador, na perspectiva do modelo proposto por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo). A relação de ordem está conectada com o Princípio da Boa Ordenação, resultado central para a demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, que será o tema do segundo e terceiro artigos da tese.

O segundo artigo, intitulado *Knowledge of a Mathematics Teacher Educator to teach divisibility to prospective secondary school teachers*, encontra-se em avaliação pela Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática[19] (PNA/Espanha) e foi escrito tendo por base um episódio da segunda aula do Professor Andre, no tópico divisibilidade, na qual o formador enunciou e provou o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Entre os resultados, obtiveram-se os indicadores do *Mathematical Knowledge* de Andre evidenciado ao demonstrar o TADE, nos subdomínios *Knowledge of Topics*, *Knowledge of the Structure of Mathematics* e *Knowledge of Practices in Mathematics*.

No terceiro artigo, focamos no conhecimento de Benny revelado ao apresentar exemplos e explicações para o TADE. Considerando as informações das aulas 3 e 5 desse

[18] https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/490.
[19] https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna.

formador, discutimos algumas das dimensões do conhecimento matemático e pedagógico revelado nesse contexto. O artigo se intitula *Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações*[20] e foi publicado na revista Tangram – Revista de Educação Matemática.

[20] https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12716.

Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros[21]

Specialized Knowledge of Mathematics Teacher Educator to discuss order relation in the set of Integer Numbers

Marieli Vanessa Rediske de Almeida
marieli.almeida@outlook.com
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Brasil

Miguel Ribeiro
cmribas78@gmail.com
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Brasil

Resumo

As pesquisas com foco no formador de professores de Matemática, com abordagens diversas, vêm ganhando destaque na área de Educação Matemática nos últimos anos. Em particular, pesquisas sobre o conhecimento do formador têm dado origem a diferentes modelos de conhecimento. Nesse trabalho, buscamos compreender o conhecimento de um matemático, a partir da observação de sua prática em sala de aula como formador de professores de Matemática no Brasil, no contexto de uma disciplina de Teoria dos Números. A investigação se configura como um estudo de caso instrumental, no qual se pretende compreender o conhecimento revelado e mobilizado pelo sujeito. As informações foram coletadas por meio da gravação em áudio e vídeo de uma aula e foram analisadas buscando identificar o conhecimento especializado desse matemático enquanto formador de professores. Entre os resultados, são apresentados indicadores do Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge*) do formador, bem como elementos do seu Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*). Os indicadores obtidos constituem mais um passo na elaboração de um modelo de conhecimento especializado do formador de professores de Matemática.

Palavras-chave: Relação de ordem. Conhecimento do formador. *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Teoria dos Números.

---

[21] ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. QUADRANTE (LISBOA), v. 28, p. 125-148, 2019. Este artigo foi publicado na Revista Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática. ISSN: 2183-2838 (Online). A formatação e as normas técnicas aqui apresentadas seguem as indicações desta revista.

Abstract

The researches regarding the Mathematics Teacher Educator have been receiving spotlights in the last years. In particular, the research on mathematics teacher educator's knowledge has led to the construction of different models of knowledge. In this work, we attempt to understand the knowledge of a mathematician considering the observation of his classroom practice as mathematics teacher educator in a Brazilian Number Theory undergraduate course. The chosen research method was the instrumental case study, which goal is to understand the revealed and mobilized subject's knowledge. The data was collected by audio and video recording of a chosen class, which was analyzed in the perspective of identifying the specialized knowledge of this mathematician as a teacher educator. Among the results are indicators of the teacher educator's Mathematical Knowledge as well as elements of his Pedagogical Content Knowledge. The obtained indicators constitute a new step in the elaboration of a specialized knowledge model for the Mathematics Teacher Educator.

Key words: Order relation. Teacher Educator's Knowledge. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Number Theory.

Introdução

Atualmente o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores de Matemática é um objeto de pesquisa intensiva (Guala & Boero, 2017). Considerando que uma parte considerável desse conhecimento é adquirida na formação inicial, fica evidenciada a importância de pesquisas que buscam compreender como se desenvolve o conhecimento do futuro professor nessa etapa de sua formação.

No contexto brasileiro começa a discutir-se recentemente qual é o papel da Matemática nos cursos de licenciatura (e.g., Moreira, 2012; Fiorentini & Oliveira, 2013). Conforme Moreira (2012), ao analisar os planos curriculares de algumas das maiores universidades brasileiras (e.g., USP, UNICAMP, UFRJ, UFMG, UFPE) foi possível constatar que os conteúdos científicos, tais como Matemática, Física e Estatística ocupam entre 45 e 55 por cento do tempo de formação. As disciplinas de conteúdo específico (e.g., Cálculo, Álgebra, Análise) costumam ser ministradas de forma independente das demais disciplinas relacionadas ao ensino (e.g., Didática da Matemática, Tendências em Educação Matemática, Estágio Supervisionado), que costumam ser ministradas nas Faculdades de Educação das universidades (Moreira, 2012). No Brasil, o curso de Matemática tem duas vertentes (curso de licenciatura[1] e curso de bacharelado[2]) e nestas encontramos dois cenários: exatamente as mesmas disciplinas de matemática para ambos os cursos, ou cada curso com uma grade curricular específica, mas onde as ementas dessas disciplinas são muito semelhantes (Fiorentini & Oliveira, 2013).

Uma dessas disciplinas, comum a ambos os cursos, é a disciplina de Teoria dos Números. Usualmente esta é a primeira de duas disciplinas do campo da Álgebra, incluindo tópicos como divisibilidade, números primos, ou congruências lineares, ela propicia aos estudantes revisitar processos matemáticos básicos, fazendo com que reflitam sobre o próprio conhecimento matemático (Zazkis & Campbell, 1996).

Ainda que os conhecimentos envolvidos nessa disciplina sejam muito relevantes para uma ampla compreensão da Matemática e muitos de seus processos, as pesquisas focadas no ensino de Teoria dos Números, especialmente no contexto da formação de professores, são escassas (Bair & Rich, 2011; Oliveira & Fonseca, 2017).

Dentre as possíveis dificuldades encontradas pelos futuros professores ao cursar Teoria dos Números, pesquisas apontam dificuldades relacionadas com a compreensão da primalidade e do Teorema Fundamental da Aritmética (Zazkis & Campbell, 1996; Oliveira & Fonseca, 2017), relacionadas com a compreensão sobre divisibilidade (Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2013), com números primos e suas propriedades (Zazkis & Liljedahl, 2004), assim como dificuldades para estabelecer conexões entre as relações de ordem, que são usadas no dia-a-dia, por meio de comparações, com o conceito formal de relação de ordem (Akdemir, Narh, & Kaşıkçı, 2015).

Assumindo que o conhecimento do professor que ensina Matemática é especializado (Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro, & Muñoz-Catalán, 2018), e que os principais agentes de promoção desse conhecimento são os docentes encarregados dessa formação, optamos por investigar o conhecimento especializado do formador que ensina Teoria dos Números na formação inicial. Como formador de professores de Matemática, no contexto brasileiro, entendemos aqueles docentes da universidade que atuam na licenciatura, seja nas disciplinas didático-pedagógicas, ou nas disciplinas específicas (Coura & Passos, 2017).

Neste artigo, a partir da análise da prática de sala de aula de um formador que ensina Teoria dos Números para estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática, buscamos compreender o conhecimento especializado mobilizado ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Referencial Teórico

Iniciamos esta seção discutindo a noção de ordem ao longo do currículo escolar brasileiro, e a posterior formalização do conceito de relação de ordem no Ensino Superior. Discutimos posteriormente as principais dificuldades apresentadas por futuros professores no âmbito da Teoria dos Números e o papel do formador frente a estas dificuldades e terminamos discutindo o conhecimento do formador no âmbito da relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Das noções de ordem na Educação Básica até a formalização do conceito de relação de ordem no Ensino Superior

Conforme a Base Nacional Comum Curricular[3] – BNCC (Brasil, 2018), documento que oferece orientações curriculares para a Educação Básica (Educação Infantil, Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – toda a escolaridade até a Universidade), a noção de ordem, juntamente com as noções de equivalência, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, constituem as ideias fundamentais relacionadas com os distintos campos que compõe a Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Na BNCC, a ideia de ordem aparece nos Anos Inicias do Ensino Fundamental (6-10 anos), na unidade temática Números, na qual se espera dos alunos o desenvolvimento de habilidades relacionadas com a leitura, escrita e ordenação de números naturais e racionais. Por exemplo, no 2.º ano consta a habilidade EF02MA01 – "Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero)." (Brasil, 2018, p. 239).

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental (11-14 anos), também na unidade temática Números, se espera que os alunos desenvolvam habilidades para reconhecer, comparar e ordenar números reais. Por exemplo, no 7º ano consta a habilidade EF07MA07 - "Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica." (Brasil, 2018, p. 261). Para o Ensino Médio (15-17 anos), a BNCC não explicita habilidades relacionadas com ordem, ordenação ou relação de ordem.

Nos cursos universitários de Matemática, as noções de ordenação adquiridas na Educação Básica são formalizadas no conceito de relação de ordem, o qual pode ser estudado em disciplinas como Lógica Matemática, Fundamentos de Matemática, Teoria de Conjuntos, Teoria dos Números, entre outras possibilidades. Uma relação de ordem é definida matematicamente da seguinte forma:

Considere um conjunto A não vazio e $R \subseteq A \times A$ uma relação de A em A. A relação R é uma *relação de ordem parcial* se satisfizer as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva. Ademais, se R satisfizer também a propriedade dicotomia, então se diz que R é uma *relação de ordem total*.

No contexto da Teoria dos Números, a relação $R \coloneqq \{(a,b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, sendo uma relação de ordem parcial de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Além disso, quaisquer dois números inteiros são comparáveis segundo R, sendo válida a propriedade da dicotomia. Assim, R é uma relação de ordem total de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

A compreensão da relação de ordem nos números inteiros é fundamental no contexto da disciplina de Teoria dos Números e será necessária na compreensão de uma série de resultados subsequentes, tais como a existência de elemento mínimo e o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Conhecer a relação de ordem nos números inteiros e, de forma mais ampla, no conjunto dos números reais, é imprescindível no trabalho dos futuros professores de Matemática e, portanto, também é um conhecimento essencial ao formador.

A Teoria dos Números e o papel do formador na formação inicial de professores de Matemática

A disciplina de Teoria dos Números, tanto em cursos de licenciatura quanto em cursos de bacharelado, geralmente aborda tópicos relacionados com a divisibilidade, primalidade, congruências lineares, equações diofantinas, entre outros. Relacionados a cada um desses tópicos estão resultados matemáticos que precisam ser validados, o que acontece principalmente por meio de demonstrações. Dessa forma, na disciplina de Teoria dos Números, assim como em outras disciplinas de Matemática, as demonstrações estão presentes, não como tópico, mas como forma de validação ou justificação de resultados matemáticos.

Apesar da possível grande relevância da Teoria dos Números na formação de professores, esta possui uma abordagem prioritariamente formal e axiomática, com ênfase no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, não direcionada para a formação do futuro professor (Resende, 2007). Tal abordagem formal e axiomática empregada no ensino de Teoria dos Números (o mesmo pode ser considerado para outras disciplinas da formação de professores) está relacionada com o fato de os formadores tipicamente responsáveis por essas disciplinas no contexto brasileiro serem matemáticos e, além disso, a legislação brasileira não exigir e nem prever nenhuma preparação específica desses profissionais para atuação nos cursos de licenciatura (Almeida, Ribeiro, & Fiorentini, 2018).

Já há mais de duas décadas Zazkis e Campbell (1996) apontavam a fragilidade da formação de professores de Matemática em relação a conceitos como o de primalidade e a resultados como o Teorema Fundamental da Aritmética, destacando, por exemplo, a imensa dificuldade de futuros professores em compreender a unicidade da decomposição de números inteiros em fatores primos. Em pesquisas mais recentes foram identificadas dificuldades similares de futuros professores (Zazkis & Liljedahl, 2004) sobre os números primos e suas propriedades, incluindo dificuldades na aplicação do conceito de primalidade. Nesse sentido, apesar de ocupar uma parte considerável do currículo escolar, o estudo dos números naturais e inteiros não parece receber um tratamento correspondente na formação do professor de Matemática (Resende & Machado, 2012; Oliveira & Fonseca, 2017).

Para que esse tratamento dos tópicos matemáticos seja direcionado a formação de professores – de modo a que estes possam atribuir sentido e significado ao que fazem nas disciplinas da licenciatura com relação a matemática que vão ensinar, objetivando que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem – torna-se essencial colocar o foco no formador de professores, buscando compreender seu conhecimento matemático, conhecimento pedagógico e suas crenças relativamente a Teoria dos Números, ao seu ensino e sua aprendizagem. Em particular, aqui estamos interessados no conhecimento matemático e no conhecimento pedagógico do formador.

No contexto da Teoria dos Números a demonstração não é tipicamente um tópico, mas empregue como uma forma de validar resultados, o que pode ser configurado como uma opção pedagógica dos formadores associada a própria disciplina. Gabel e Dreyfus (2017) apontam algumas lacunas no conhecimento pedagógico do formador de professores de Matemática sobre estratégias para o ensino de demonstrações, inclusive em matemáticos experientes. Os autores ressaltam, dessa forma, a necessidade de diálogo com matemáticos acerca de considerações pedagógicas que possam potencializar o ensino de Teoria dos Números para futuros professores de Matemática. É responsabilidade do formador desenvolver esse tipo de conhecimento nos futuros professores de Matemática e, entre os diversos profissionais atuantes na licenciatura, podemos distinguir, por sua formação relacionada com a Matemática, os matemáticos, os educadores matemáticos e os professores de Matemática que recebem e orientam os alunos da licenciatura nas escolas (Contreras, Montes, Muñoz-Catalán, & Joglar, 2017). Para que essa responsabilidade seja assumida e desenvolvida uma prática formativa com ela alinhada, é essencial que o formador de professores detenha um conhecimento especializado que contribua para desenvolver nos futuros professores de Matemática um conhecimento especializado (Carrillo et al., 2018) que lhes permita relacionar as aprendizagens provenientes de um curso de Teoria dos Números com sua futura prática matemática.

O conhecimento do formador de professores de Matemática

A caracterização do conhecimento do formador de professores de Matemática vem ganhando destaque na última década (e.g., Contreras et al., 2017; Zopf, 2010), e diversos modelos para caracterizar esse conhecimento vêm sendo propostos. Para discutir o conhecimento do formador tomamos por base o *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK[4] (Carrillo et al., 2018) focando, em particular, o *Mathematical Knowledge*[5] – pois o formador de professores é também um professor de matemática – e o entendimento na conceitualização do *Pedagogical Content Knowledge*[6] do formador de professores de Matemática considerado por Escudero-Ávila, Montes, e Contreras (no prelo).

É importante salientar que se assume como conhecimento de um indivíduo "a informação que este tem disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas, ou desenvolver qualquer tarefa. Note-se que, de acordo com esta definição, o conhecimento não tem de ser necessariamente correto!" (Schoenfeld, 2010, p.25). Assim, não pretendemos avaliar a correção ou não do conhecimento do sujeito, mas sim compreender o conteúdo desse conhecimento.

O Conhecimento Matemático e o conhecimento especializado do formador de professores de matemática

Tendo por base os trabalhos de Shulman (1986, 1987) e algumas pesquisas posteriores focando no conhecimento do professor de matemática, Carrillo et al. (2018) apresentam uma conceitualização do conhecimento do professor como especializado – *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK, tanto no domínio matemático quanto pedagógico. Este modelo considera três domínios: o *Mathematical Knowledge*, o *Pedagogical Content Knowledge* e as crenças. Aqui focamo-nos no *Mathematical Knowledge* para discutir o conhecimento matemático revelado por um formador.

O MK é subdividido em três subdomínios: *Knowledge of Topics*[7] (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics*[8] (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics*[9] (KPM).

O KoT integra um conhecimento aprofundado de tópicos matemáticos, relativo a procedimentos, definições, propriedades, modelos e representações, significados, problemas e contextos, levando em conta a complexidade dos objetos matemáticos que podem estar presentes em sala de aula. No âmbito do tópico aqui abordado, considera-se parte deste subdomínio de conhecimento do professor e do formador saber que a relação $R \coloneqq \{(a, b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz a propriedade reflexiva.

O KSM compreende o conhecimento de conexões entre elementos matemáticos. Essas conexões podem ser relacionadas com o sequenciamento de conteúdos matemáticos; com o aumento ou diminuição da complexidade; e ser inter-conceituais, relacionadas com a demarcação de objetos matemáticos. Um exemplo de um conhecimento de conexões tanto do professor como do formador é conhecer que uma relação de ordem no conjunto das funções $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser construída a partir da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$: $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X \subseteq \mathbb{R}$.

O KPM sustenta-se na ideia de prática matemática como a atividade matemática realizada sistematicamente apoiada em uma base lógica a partir da qual regras podem ser extraídas. Contém o conhecimento do professor relativo a, por exemplo, saber definir, demonstrar, justificar, fazer deduções e induções, dar exemplos e compreender o papel de contraexemplos. Forma parte deste subdomínio conhecimento dos diferentes tipos de demonstração das propriedades de uma relação de ordem (e.g., por absurdo, direta, por contraexemplo) tanto do professor como do formador.

O Pedagogical Content Knowledge (PCK) do formador de professores de Matemática

Tendo por base as especificidades do conhecimento pedagógico do professor consideradas na conceitualização do MTSK, Escudero-Ávila *et al.* (no prelo) buscam avançar nas discussões sobre o PCK do formador de professores de Matemática. Esse avanço é efetuado considerando as especificidades do conhecimento pedagógico do formador a luz do trabalho profissional que se assume terá de efetuar – promover o desenvolvimento do MTSK do (futuro) professor.

Dessa forma são considerados três subdomínios no PCK do formador: *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*[10], *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*[11] e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*[12].

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera o conhecimento do formador relativamente a caracterização do desenvolvimento profissional dos (futuros) professores; as mais prováveis dificuldades na sua especialização enquanto professores de matemática; sequência ou foco mais apropriado para a construção e desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; o ponto de partida em que os (futuros) professores se encontram – em termos de conhecimento – ao iniciarem a formação. Como exemplo inclui-se conhecer que os estudantes devem ser capazes de abstrair conceitos já conhecidos e buscar representações não convencionais, por exemplo, para os números naturais, decidindo sobre o foco mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores.

Fazem parte do subdomínio *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; conhecer as limitações e potencialidades de cada tarefa a explorar; conhecer o *design* e utilização de várias metodologias de avaliação; conhecer as características mais importantes de cada tópico potenciando o desenvolvimento desse conhecimento e das conexões entre elas.

No *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* inclui-se o conhecer os padrões curriculares tanto do curso em que atua como formador, quanto dos níveis de ensino em que os (futuros) professores irão atuar. Há que considerar que a demanda de conhecimento matemático pode variar de acordo com o perfil do formador e que esse conhecimento depende do contexto (e.g., departamento, universidade, país) em que o formador desenvolve seu trabalho, e pode incluir conhecer como a formação é conduzida em outros países, bem como estar apto a estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos (futuros) professores.

Contexto e método

Essa pesquisa se insere em um contexto mais amplo, que busca compreender o conhecimento especializado de formadores de professores de Matemática que ministram Teoria dos Números na formação inicial. Em particular aqui focamos o conhecimento de um formador no tópico de Divisibilidade e com esse intuito foi realizada uma investigação do tipo estudo de caso, numa perspectiva instrumental, buscando assim compreender um fenômeno mais amplo a partir do caso considerado, que pode oferecer *insights* sobre o assunto (Alves-Mazzotti, 2006) e permitir agregar informações à teoria (Stake, 1995).

Os sujeitos da investigação são dois formadores que ministram Teoria dos Números na graduação em Matemática (licenciatura e bacharelado) em uma universidade no Brasil. Aqui focamos a prática de um desses sujeitos, Benny (pseudônimo), investigando seu conhecimento especializado revelado no âmbito do ensino da relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Benny é matemático há mais de 20 anos, possuindo vasta experiência em disciplinas de graduação e pós-graduação e suas pesquisas estão centradas na área de Álgebra. As informações foram coletadas em uma disciplina de Teoria dos Números (de 60 horas), que era já a sexta vez que Benny lecionava, e que forma parte da grade curricular da licenciatura e bacharelado em Matemática. Foram coletadas informações durante oito aulas, gravadas em áudio e vídeo, centrado na prática do formador no início do segundo semestre de 2018; efetuadas duas entrevistas semiestruturadas (no início e no final do semestre); entrevistas breves depois de cada aula e notas de campo durante a observação não participante.

Nesse artigo analisamos e discutimos o conhecimento revelado por Benny em uma aula de introdução da relação de ordem no conjunto dos números inteiros, tendo a gravação do áudio da aula transcrita e posteriormente complementada com a visualização do vídeo e dividida em episódios fenomenologicamente coerentes (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2012). Em cada um desses episódios foi identificado o conhecimento revelado pelo formador e posteriormente organizadas as evidências e conteúdo desse conhecimento estruturado pelo subdomínio a que se refere e aqui efetuamos inicialmente discussão dos subdomínios do MK e posteriormente do PCK.

Para as transcrições, foram empregados os seguintes padrões: i) “Benny” indica uma fala do formador; ii) “estudantes” indica uma fala dos estudantes; iii) “...” indica uma breve pausa na fala do sujeito; iv) “[...]” indica supressão de um trecho; v) “[]” indica uma ação do formador; e vi) “()” indica um comentário da pesquisadora. Um exemplo de transcrição considerando os padrões descritos é apresentado a seguir.

> Benny: Qual seria a prova disso?
>
> Estudante: (Inaudível).
>
> Benny: Não, não. Mas, ainda não sei o que é tricotomia. Tudo bem... Vamos ver, já está pouquinho, mas vocês estão andando demais. [...] estou pedindo a vocês que

provem isto [Aponta para a propriedade escrita na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$], a partir destas coisas, que nós já sabemos.

Para a análise do conteúdo do MK revelado recorremos as categorias propostas por Carrillo et al., (2018) onde os indicadores receberam um acrônimo composto pela sigla do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial (Quadro 1).

Quadro 1. Subdomínios e categorias do *MK* (adaptado de Carrillo et al., 2018, pp. 242-245)

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	*Definitions, properties and foundations*[13]	KoTd1
	Phenomenology and applications[14]	KoTph1
	Procedures[15]	KoTp1
	Registers of representation[16]	KoTr1
KSM	*Connections based on simplification*[17]	KSMs1
	Connections based on increased complexity[18]	KSMc1
	Auxiliary connections[19]	KSMa1
	Transverse connections[20]	KSMt1
KPM	*How to define*[21]	KPMd1
	How to prove[22]	KPMp1
	How to justify[23]	KPMj1
	How to make deductions and inductions[24]	KPMdi1
	How to give examples[25]	KPMe1
	Role of counterexamples[26]	KPMrc1

Quanto ao PCK do formador recorremos aos conhecimentos elencados por Escudero-Ávila *et al*. (no prelo). Por se tratar de um modelo ainda em desenvolvimento, para cada subdomínio consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias) do formador e os indicadores são formados pela sigla do subdomínio seguida de um número sequencial (Quadro 2).

Quadro 2. Subdomínios e categorias do *PCK* (adaptado de Escudero-Ávila et al. no prelo)

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional	Conhecer aspectos do desenvolvimento profissional dos futuros professores	KFPDMT1

development of mathematics teachers	Conhecer as dificuldades mais prováveis em termos da especialização do conhecimento enquanto professores de matemática	KFPDMT2
	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento, identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT3
	Saber o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4
Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes	Conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento do conhecimento, identidade e prática profissional do futuro professor	KTCIMTEP1
	Saber das limitações e potencialidades de cada atividade	KTCIMTEP2
	Conhecer formas de desenvolver a identidade e habilidades profissionais	KTCIMTEP3
	Conhecer o *design* e utilização de métodos de avaliação dos programas de formação inicial e contínua	KTCIMTEP4
	Saber dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	KTCIMTEP5
Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1
	Conhecer os padrões curriculares dos níveis de ensino em que os futuros professores irão atuar	KSMTEP2
	Conhecer, estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos futuros professores	KSMTEP3

Por forma a entender melhor o contexto da aula apresentamos uma descrição sintética do que ocorreu na aula anterior e na aula que será analisada. Na aula anterior Benny efetuou uma discussão focada em propriedades dos números inteiros; introduziu um subconjunto dos números inteiros para se referir ao conjunto dos números naturais ($\mathcal{P}$) e discutiu a ideia intuitiva do algoritmo da divisão euclidiana. Nesta segunda aula, que iremos analisar, Benny começa por relembrar que o conjunto dos números inteiros munido com as operações de adição e multiplicação usuais é um anel e retoma a definição do subconjunto $\mathcal{P}$ introduzindo algumas das suas propriedades. Continua introduzindo a relação de ordem, relembrando a notação ($<$ e $\leq$), seu significado e propriedades, pontuando as diferenças entre elas; discute as semelhanças e diferenças entre as relações $\leq$ e $\subseteq$ (entre elementos de conjuntos – em particular $\mathcal{P}$ – e entre conjuntos). Benny então nomeia a relação $\leq$ como relação de ordem sobre os números inteiros e explica aos estudantes que dizer que uma relação é de ordem implica dizer que ela apresenta as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica.

Optámos por apresentar a análise e discussão de forma a trazer evidências do conhecimento revelado por Benny nos diferentes subdomínios e, portanto, essa apresentação não segue uma ordem cronológica mas com um foco no conteúdo de cada um desses subdomínios do MK e do PCK – considerando os indicadores no MK (Quadro 1) e os conhecimentos do PCK (Quadro 2).

Análise e discussão

De um modo geral a análise da prática de Benny mostra uma predominância de evidências no âmbito do MK o que era já, de certa forma, esperado tanto pelo contexto da disciplina específica (estudantes de matemática da licenciatura e do bacharelado) quanto pela própria formação e foco do formador.

O *Mathematical Knowledge* de Benny

O formador relembra a notação < introduzida na aula anterior [KoTr1 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros] e o significado da expressão $a < b$ [KoTd1 – sabe que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis, ou seja, que um número é menor do que outro].

> Benny: Se temos dois elementos, em $\mathbb{Z}$, eu tinha dito, que eu vou denotar assim [escreve na lousa $a < b$], este símbolo [escreve na lousa $<$], o que vai significar para nós... que significa isso para nós?
>
> Estudantes: Que a é menor que b.
>
> Benny: Quê? Não. Que $b - a$ vai estar onde? Nesse $\mathcal{P}$ da vida. Nesse aí vai estar, por definição, está bem?

Ao questionar os estudantes sobre o significado do símbolo <, Benny não aceita a resposta dos estudantes (que a é menor que b), evidenciando esperar que utilizassem uma expressão equivalente.

Na sequência, Benny introduz a notação ≤ [KoTr2 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros], com objetivo de reforçar a definição que está sendo adotada para o símbolo $<$, e retoma o significado do operador 'ou' [KoTd2 – conhece a definição do operador lógico $\vee$], que supõe ser de conhecimento dos estudantes.

> Benny: Se eu falo a menor ou igual que b [Escreve na lousa $a \leq b$], que significa isso? O que significaria isso, de forma natural? Que a é igual a b ou, este ou vou escrever assim também [Escreve na lousa $a < b$]. [Indica na lousa]. Ou isso, ou

isso, certo? Isso é lógica, não? Verdadeiro, verdadeiro, que me dá? Se lembram de lógica, não? Verdadeiro, verdadeiro. Verdadeiro, falso.

Benny introduz a propriedade antissimétrica [KoTd3 – sabe que os números inteiros satisfazem a propriedade antissimétrica, ou seja, se um número inteiro é menor ou igual a outro e esse outro é menor ou igual que o primeiro, então eles são iguais]. No entanto, ao enunciar essa propriedade, faz uso de uma linguagem que não é a mais adequada em termos de correspondência entre a validade matemática e a correspondente na linguagem natural [KoTr3 – saber que para além de diferentes representações entre $\wedge$ e "e" estes têm também diferentes significados na linguagem correspondente].

Benny: Então, se eu tiver dois elementos, digamos a e b, com essas condições, onde a menor igual que b [Escreve na lousa $a \leq b$] e, o e da vida, o 'e' lógico, digamos [Escreve na lousa $a \leq b \wedge$], b menor igual que a [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow$], então, qual seria minha conclusão?

Estudante: $a = b$.

Benny: $a = b$. Então era isso que se esperaria. [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$].

Quando Benny pergunta aos estudantes como seria a prova desse fato e um deles sugere que a demonstração envolva tricotomia, Benny pontua que isso ainda não foi definido e pede que os estudantes utilizem os resultados que estão disponíveis até o momento (e.g., propriedades do anel dos números inteiros) [KoTp1 – sabe que a demonstração da propriedade antissimétrica pode ser efetuada recorrendo a propriedades do anel dos números inteiros].

Benny: Qual seria a prova disso?

Estudante: (Inaudível).

Benny: Não, não. Mas, ainda não sei o que é tricotomia. Tudo bem... Vamos ver, já está pouquinho, mas vocês estão andando demais. [...] estou pedindo a vocês que provem isto [Aponta para a propriedade escrita na lousa $a \leq b \wedge\ b \leq a \Rightarrow a = b$], a partir destas coisas, que nós já sabemos.

Benny não demonstra a propriedade transitiva da relação $\leq$, mas afirma sua validade [KoTd4 – conhece a propriedade transitiva da relação $\leq$ a qual se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro], considerando a semelhança com a demonstração da transitividade da relação $<$, demonstrada em momento anterior da aula.

Em momento posterior, o formador estabelece conexões entre a relação $\leq$ e a relação $\subseteq$ de inclusão de conjuntos [KoTd5 – conhece a definição da relação $\subseteq$], afirmando que a comparação de conjuntos é feita a partir da relação $\subseteq$, enquanto a relação $\leq$ permite comparar elementos do conjunto $\mathcal{P}$. Ao estabelecer características comuns entre estas duas relações (entre conjuntos e elementos de conjuntos), Benny estabelece uma conexão transversal entre as relações, ao apontar as características comuns entre elas [KSMt1 – sabe que existe um conjunto de características transversais a relação de ordem entre elementos de um conjunto e a inclusão de conjuntos], estabelecendo assim uma conexão transversal entre $\subseteq$ e $\leq$.

Esta conexão transversal encontra-se sustentada no seu conhecimento das propriedades das relações $\subseteq$ e $\leq$, em particular de que a relação $\subseteq$ entre conjuntos possui a propriedade reflexiva, [KoTd6 – conhece a propriedade reflexiva da relação de inclusão entre conjuntos que se refere a relação de um conjunto com ele mesmo], e que a relação $\leq$ entre elementos de um conjunto também possui essa mesma propriedade [KoTd7 – conhece a propriedade reflexiva da relação $\leq$ que se refere a relação de um elemento do conjunto dos números inteiros com ele mesmo]. Ao efetuar esta discussão parece assumir que relembrando uma vai contribuir para que os estudantes atribuam sentido a outra.

> Benny: O assunto é que esta [escreve na lousa $A \subseteq A$] é verdade, não é? Claro que A está contido em A. Isto estaria... É verdade ou não? Sim! Como eu faria para obter uma coisa similar visando este [se refere a $\leq$]? Ou seja, utilizando minha notação, [...] eu pergunto, este aqui [aponta para $A \subseteq A$] qual seria a simbologia aqui? Eu poderia dizer a menor igual que a. Sim? Isso sim teria sentido, ou não? Por que, o que estou dizendo ali? [se refere a $a \leq a$ escrito na lousa].
>
> Estudante: Que a menor que a.
>
> Benny: Que a menor que a, ou a igual a a. Mas a menor que a é falso, [...] então em outras palavras, está nos trinques, por que a é igual a a.

No seguimento, apesar de não demonstrar a transitividade da relação $\leq$, Benny afirma que a relação apresenta essa propriedade e pontua que ambas as relações, $\subseteq$ e $\leq$, apresentam a propriedade transitiva [KoTd8 – conhece a propriedade transitiva da relação $\subseteq$ a qual se estabelece entre três conjuntos de tal forma que se o primeiro está contido no segundo e este está contido em um terceiro, então o primeiro conjunto está contido no terceiro].

> Benny: Depois essa... esse que está aqui [aponta para ⊆], o que satisfaz? Se A está contido em B, e B está contido em C, então... A está contido em C, não é? [...] Bom, você vai ter nesse a menor igual que b [escreve $a \leq b$] e b menor igual que c implica que a menor igual que c. Está bem? Já tenho isso [aponta para a propriedade reflexiva escrita na lousa], e tenho isso [aponta para a propriedade transitiva escrita na lousa].

Continuando a buscar relações entre as propriedades de ⊆ e ≤, Benny enuncia a propriedade antissimétrica da relação de inclusão entre conjuntos [KoTd9 – sabe que se um conjunto está contido em outro conjunto e este outro conjunto está contido no primeiro, então esses conjuntos só podem ser iguais, que é denominada de propriedade antissimétrica da relação ⊆] e refere que para demonstrar essa propriedade é necessário mostrar que os conjuntos estão contidos um no outro [KoTp2 – sabe que para demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão é necessário mostrar que os conjuntos devem estar contidos um no outro]. Como, em um momento anterior da aula, a propriedade antissimétrica já havia sido demonstrada para a relação ≤ [KoTd10 – conhece a propriedade antissimétrica da relação ≤, segundo a qual se um número inteiro é menor ou igual que outro número inteiro, que por sua vez é menor ou igual que o primeiro número inteiro, então eles são iguais], Benny refere que esta relação imita a relação de inclusão, reforçando a conexão transversal já estabelecida entre as duas relações [KSMt1].

> Benny: Do que vocês sentiriam falta, nos conjuntos, para poder botar tudo nos trinques, que nós já botamos aqui? Se A está contido em B, e B está contido em A, então...
>
> Estudantes: A igual a B.
>
> Benny: A igual a B. Perfeito. Para eu poder provar que dois conjuntos, se lembram,...? Se você quer provar que dois conjuntos são iguais, você tem que provar que esse [indica A] está contido nesse [indica B], e que esse [indica B] está contido... se lembram? Então como escrevemos isso aqui? [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$] a, menor igual que b, e b menor igual que a, implica a igual

> a b. Ou seja, [...] isso que temos visto aqui [indica o símbolo $\leq$] ele imita o dos conjuntos.

Benny discute a relação $\leq$ como relação de ordem sobre os números inteiros [KoTd11 – conhece a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, sabe que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica] e as suas três propriedades. Ademais revela um conhecimento associado a diferenciação da relação de ordem entre conjuntos e entre elementos de um conjunto ao referir que a inclusão de conjuntos define uma relação de ordem nos conjuntos [KoTd12 – conhece que a relação de ordem existente entre conjuntos é distinta da relação de ordem entre elementos de conjuntos].

> Benny: Isso seria uma... estivemos dizendo uma relação de ordem, certo? Ou seja, este [aponta para o símbolo $\leq$ escrito na lousa] define uma relação de ordem. Vamos ver que isso vai ser uma relação de ordem sobre $\mathbb{Z}$. Então, por exemplo, você falaria assim... A inclusão de conjuntos define uma relação de ordem nos conjuntos, estamos de acordo? Aqui [aponta para o símbolo $\leq$ escrito na lousa] você diria que esta relação, menor igual, o que significa? a igual a b, ou a diferença em $\mathcal{P}$, não é? Define uma..., se eu falo só isto [escreve na lousa: $\leq$ define uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$], significa tudo isso, entende? [indica as propriedades escritas na lousa $a \leq a$, $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ e $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$].

Relativamente ao KPM do formador aspetos do seu conteúdo foram identificados apenas em dois momentos desta aula: ao demonstrar que o inverso aditivo de um elemento de $\mathcal{P}$ não está em $\mathcal{P}$ e a propriedade antissimétrica da relação $\leq$; ao fornecer um exemplo de dois subconjuntos não comparáveis. Para demonstrar que o inverso aditivo de um elemento em $\mathcal{P}$ não está em $\mathcal{P}$, Benny escolhe a técnica de demonstração por contradição [KPMp1 – conhece a demonstração por contradição de que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais], utilizando-se da propriedade do fechamento de $\mathcal{P}$ em relação à adição e do fato de que zero não pertence a $\mathcal{P}$.

> Benny: Nessas condições uma observação é que se eu tiver a em $\mathcal{P}$, digamos, se eu tiver um cara que está nesse conjunto, então automaticamente seu... o inverso aditivo, ele não pode estar, ou seja, ao ter essas características, essas condições, isso seria uma consequência, entendem? Se eu falo em uma prova, para provar isso, bom, no momento é... não faz mal, como eu faria a prova?

Estudantes: [inaudível].

Benny: Isso. Então, suponhamos que ele vai estar, então que faço?

Estudante: Somo.

Benny: Somo, estão se este está [aponta para a] e esse está [aponta para $-a$] (em $\mathcal{P}$), então eu teria $a + (-a)$, ele quanto daria?

Estudante: Zero.

Benny: Zero. Então isso significaria, olhem, por esta propriedade [aponta para a propriedade escrita na lousa: $a, b \in \mathcal{P} \Rightarrow a + b \in \mathcal{P}$], ele vai estar, mas por essa propriedade [aponta para $0 \notin \mathcal{P}$ escrita na lousa], ele não deveria estar, entendem?

Ao discutir como demonstrar a propriedade antissimétrica da relação $\leq$ ($a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$), Benny sugere negar a tese revelando conhecer a demonstração e que ela é feita por contradição, ou redução ao absurdo [KPMp2 – conhece a demonstração (por contradição) da propriedade antissimétrica da relação $\leq$ que envolve considerar $a \neq b$ em $a \leq b \wedge b \leq a$].

Benny: Então, se eu tiver dois elementos, digamos a e b, com essas condições, [aponta para $a \leq b \wedge b \leq a$ escrito na lousa], qual seria minha conclusão?

Estudante: $a = b$.

Benny: $a = b$. Então é isso o que se esperaria. Então agora qual seria a prova desse fato? [...] queremos provar isso, não? Então..., suponhamos que não seja verdade. Se eu tenho $a = b$, qual é a negação disso? Que este seja diferente [escreve $a \neq b$], está bem?

O *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny

Benny revela conhecimento incluído no *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* ao utilizar, por exemplo, o subconjunto denotado por $\mathcal{P}$ para se referir ao conjunto dos números naturais [KFPDMT4 - sabe que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e que portanto já possuem uma imagem mental desse conceito]. Com esta opção pretende utilizar esse conhecimento como um trampolim para o entendimento das propriedades dos números naturais apresentadas na sequência. A opção por nomear o conjunto por $\mathcal{P}$ (representação diferente da usual) traz para o foco o objetivo de contribuir para que os estudantes não se apeguem a uma 'nomenclatura' única que já conhecem, mas sejam capazes de abstrair esses conceitos [KFPDMT3 – conhece as dificuldades de abstração dos estudantes de conceitos já trabalhados] e nesse sentido faz uso de uma representação não convencional [KFPDMT4 – conhece a necessidade de se usar uma representação não convencional para os números naturais por forma a desenvolver a abstração dos estudantes].

> Benny: [...] estou colocando o $\mathcal{P}$ assim..., abstrato, para que vocês pensem que esse $\mathcal{P}$ pode ser qualquer coisa que vocês pensem..., que ocorra a vocês.

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* também é evidenciado por Benny quando, embora já esteja nomeando os símbolos $<$ e $\leq$ como menor e menor ou igual mostra uma preocupação constante com a importância da abstração no conceito de relação de ordem entre elementos de $\mathbb{Z}$ [KFPDMT4 – sabe que os estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas].

> Benny: O que eu quero observar é que essa relação, menor ou igual, podemos chamar, isto [aponta para o símbolo $\leq$ escrito na lousa], o que acontece é que eu não queria dar nome. Como chamam essa relação? [aponta para a relação $a < b$] a, menor que b, não seria? Esse seria o nome que vocês dão no colégio, não? Esta coisa, eu estou simplesmente esquecendo de nomes, este a relacionado com b, qual é a definição? O b menos a está em $\mathcal{P}$. Estou fazendo algo assim como uma axiomatização. Eu separo um $\mathcal{P}$, e esse $\mathcal{P}$ satisfaz isso. Uma vez que tenho esse $\mathcal{P}$ separado ali, estou definindo uma certa coisa, que chamo a simbolinho b. a simbolinho... esse simbolinho [aponta para $<$ escrito na lousa] estou chamando assim (menor que).

Ao considerar a relação de inclusão da teoria de conjuntos, Benny mostra a expectativa de que os estudantes estejam familiarizados com essa relação, que é comumente estudada no Ensino Médio [KFPDMT4 – sabe que os estudantes estão, ou deveriam estar, familiarizados com a relação de inclusão entre conjuntos].

Benny também mobiliza seu *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes,* ao retomar a definição do operador lógico "ou", que o formador supõe ser conhecido dos estudantes (inclusive por que lógica matemática é um tópico discutido em disciplinas anteriores do curso de Matemática) [KSMTEP1 - sabe que os alunos devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou" que é um operador binário utilizado na lógica proposicional].

Discussão geral do conhecimento revelado por Benny

Em nenhum momento nesta aula ou nas aulas seguintes o formador definiu relação de ordem parcial ou total, ainda que seu conhecimento sobre ambas as definições possa ser depreendido, por exemplo, sobre ordem parcial, considerando que as três propriedades da relação $\leq$ escolhidas para serem demonstradas (propriedade reflexiva, propriedade antissimétrica e propriedade transitiva) são exatamente as que fazem com que uma relação seja denominada relação de ordem parcial [KoTd13 – conhece a definição de relação de ordem parcial nos números inteiros].

Já os indicativos do conhecimento de Benny sobre relação de ordem total surgem quando o formador declara que um conjunto pode não estar contido em outro, isto é, nem sempre dois conjuntos são comparáveis. Considerando que uma relação de ordem é total quando quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis por essa relação, Benny revela conhecer que a relação $\subseteq$ não é de ordem total [KoTd14 – sabe que a propriedade dicotomia não é válida para a relação de inclusão entre conjuntos],enquanto a relação $\leq$ nos números inteiros é de ordem total [KoTd15 – sabe que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem total, que é equivalente a dizer que no conjunto dos números inteiros, além das propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, vale também a dicotomia].

> Benny: Vamos olhar para conjuntos, e vamos olhar para essa relação. Vejam, peguem todos os conjuntos, todos os conjuntos imagináveis..., e se dois conjuntos se comparam, assim como estou falando aqui, dois conjuntos se comparam, aqui seria dois elementos se comparam se a menor ou igual que b, está bem? Se a menor ou igual que b.

Saber que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem parcial e total, discutindo as propriedades associadas, em consonância com a capacidade de estabelecer conexões entre a relação de ordem nos elementos de um conjunto ($\mathbb{Z}$) e a relação de ordem entre conjuntos são exemplos do que Zopf (2010) identifica como um conhecimento mais desenvolvido e aprofundado do formador, em relação ao conhecimento esperado do professor. No caso de Benny essa maior profundidade também decorre de sua experiência como matemático, e aqui contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes.

Benny define relação de ordem com o objetivo de garantir a existência de um elemento mínimo em todo conjunto de números inteiros não negativos, ou seja, estabelecer o Princípio da Boa Ordem [KoTd16 – sabe que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe um menor elemento]. A existência deste elemento mínimo será fundamental para caracterizar um conjunto auxiliar que será utilizado na demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Dessa forma, Benny evidencia ainda elementos do *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes,* no qual são considerados conhecimentos referentes a identificação das características mais importantes dentro de um determinado tópico e encontrar conexões entre essas características [KTCIMTEP5 - Sabe quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE) e encontra conexões entre essas características, quais sejam, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação]. Tomando como tópico o Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE), o conhecimento de Benny lhe permite saber que na demonstração do TADE os conceitos de ordem e Princípio da Boa Ordenação (PBO) estão conectados [KSMa1 – sabe que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordem são conceitos auxiliares na demonstração do TADE].

No quadro a seguir sintetiza-se o conhecimento matemático revelado por Benny ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Quadro 3. Subdomínios, categorias e indicadores do *Mathematical Knowledge* de Benny

Subdomínio	Categorias	Indicadores de conhecimento
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1 – sabe que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis, ou seja, que um número é menor do que outro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd2 – conhece a definição do operador lógico $\vee$
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd3 – sabe que os números inteiros satisfazem a propriedade antissimétrica, ou seja, se um número inteiro é menor ou igual a outro e esse outro é menor ou igual que o primeiro, então eles são iguais
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd4 – conhece a propriedade transitiva da relação $\leq$ a qual se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd5 – conhece a definição da relação $\subseteq$

	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd6 – conhece a propriedade reflexiva da relação de inclusão entre conjuntos que se refere a relação de um conjunto com ele mesmo
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd7 – conhece a propriedade reflexiva da relação $\leq$ que se refere a relação de um elemento do conjunto dos números inteiros com ele mesmo
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd8 – conhece a propriedade transitiva da relação $\subseteq$ a qual se estabelece entre três conjuntos de tal forma que se o primeiro está contido no segundo e este está contido em um terceiro, então o primeiro conjunto está contido no terceiro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd9 – sabe que se um conjunto está contido em outro conjunto e este outro conjunto está contido no primeiro, então esses conjuntos só podem ser iguais, que é denominada de propriedade antissimétrica da relação $\subseteq$
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd10 – conhece a propriedade antissimétrica da relação $\leq$, segundo a qual se um número inteiro é menor ou igual que outro número inteiro, que por sua vez é menor ou igual que o primeiro número inteiro, então eles são iguais
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd11 – conhece a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, sabe que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd12 – conhece que a relação de ordem existente entre conjuntos é distinta da relação de ordem entre elementos de conjuntos
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd13 – conhece a definição de relação de ordem parcial nos números inteiros
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd14 – sabe que a propriedade dicotomia não é válida para a relação de inclusão entre conjuntos
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd15 – sabe que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem total, que é equivalente a dizer que no conjunto dos números inteiros, além das propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, vale também a dicotomia
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd16 - sabe que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe um menor elemento
	Registros de representação	KoTr1 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros ($<$)
		KoTr2 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros ($\leq$)
		KoTr3 – saber que para além de diferentes representações entre $\wedge$ e "e" estes têm também diferentes significados na linguagem correspondente
	Procedimentos	KoTp1 – sabe que a demonstração da propriedade antissimétrica pode ser efetuada recorrendo a propriedades do anel dos números inteiros

		KoTp2 – sabe que para demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão é necessário mostrar que os conjuntos devem estar contidos um no outro
KSM	Conexão transversal	KSMt1 – sabe que existe um conjunto de características transversais a relação de ordem entre elementos de um conjunto e a inclusão de conjuntos
	Conexão auxiliar	KSMa1 - sabe que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordem são conceitos auxiliares na demonstração do TADE
KPM	Como demonstrar	KPMp1 – conhece a demonstração por contradição de que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais
		KPMp2 – conhece a demonstração (por contradição) da propriedade antissimétrica da relação $\leq$ que envolve considerar $a \neq b$ em $a \leq b \wedge b \leq a$

O conteúdo do *Pedagogical Content Knowledge* evidenciado na aula analisada é sintetizado no Quadro abaixo.

Quadro 4. Subdomínios e conhecimentos do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny

Subdomínio	Conhecimento	Indicador
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecimento de sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores de matemática	KFPDMT3 - conhece as dificuldades de abstração dos estudantes de conceitos já trabalhados.
	Conhecimento sobre o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4 - sabe que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e que portanto já possuem uma imagem mental desse conceito
		KFPDMT4 - conhece a necessidade de se usar uma representação não convencional para os números naturais por forma a desenvolver a abstração dos estudantes
		KFPDMT4 - sabe que os estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas
		KFPDMT4 - sabe que os estudantes estão, ou deveriam estar, familiarizados com a relação de inclusão entre conjuntos
Knowledge of teaching the content of initial mathematics	Conhecimento sobre como dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando	KTCIMTEP5 - sabe quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE) e encontra conexões entre

teacher education programmes	conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	essas características, quais sejam, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação
Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1 - sabe que os alunos devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou" que é um operador binário utilizado na lógica proposicional

Comentários finais

Considerando as dificuldades evidenciadas por alunos do Ensino Fundamental em compreender a relação de ordem entre os números inteiros no momento em que os números negativos são introduzidos (Schindler & Hußmann, 2013), é essencial desenvolver no futuro professor de Matemática um conhecimento especializado, tornando-o capaz de compreender, por exemplo, as dificuldades de ensino e aprendizagem subjacentes ao ensino dos números negativos, os exemplos mais e menos adequados a serem utilizados em uma discussão sobre a ordem nos números inteiros, diferentes representações potentes para ilustrar a relação de ordem, como a reta numérica e representação simbólica, perceber conexões entre a relação de ordem e a subtração, entre diversos outros conhecimentos necessários para a abordagem do tema. Esse conhecimento especializado do futuro professor de Matemática precisa ser promovido pelo formador, que por sua vez, necessita de um conhecimento especializado próprio.

Dessa forma, buscamos compreender o conhecimento de um formador de professores de Matemática, considerando o tema relação de ordem nos números inteiros, para identificar seu *Mathematical Knowledge* (Carrillo et al., 2018) e seu *Pedagogical Content Knowledge* (Escudero-Ávila et al., no prelo) evidenciados em uma aula de Teoria dos Números. Com relação ao MK, o formador mobiliza prioritariamente o KoT, evidenciando conhecimentos sobre propriedades, definições, procedimentos e registros de representação. Também são evidenciados conhecimentos relacionados com o KSM, por meio da manifestação de uma conexão transversal, e com o KPM, referentes a como demonstrar resultados matemáticos.

Com relação ao PCK do formador, foi mobilizado prioritariamente o *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, quando ele demonstra estar atento às dificuldades de abstração dos estudantes e aos conhecimentos prévios que trazem da matemática escolar, tais como o conhecimento a respeito dos números naturais, dos símbolos $<$, $\leq$ e da relação $\subseteq$ entre conjuntos. Também foi evidenciado o *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*, quando o formador identifica características importantes dentro do tópico divisibilidade, em particular com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides, estabelecendo conexões entre a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação. O *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes,* por sua vez, é evidenciado pelo formador ao mostrar que conhece a grade curricular do curso de Matemática, destacando que a relação $\subseteq$ entre conjuntos já deveria ter sido estudada em outras disciplinas do curso.

Uma característica fundamental de Benny manifestada nessa aula é a busca pela promoção da abstração. Mesmo considerando o conjunto dos números naturais e as relações $<, \leq$ como algo que os estudantes já conhecem, Benny se esforça para evitar uma compreensão e utilização procedimental desses conceitos. Essa característica é particularmente contributiva para a formação dos licenciandos, já que se não for trabalhada na formação inicial, a ênfase procedimental adquirida na escola tende a se perpetuar na prática futura (Almeida, Ribeiro, & Albrecht, 2018).

Um fator que chama atenção em nossa análise da prática de Benny nesta aula, são as poucas evidências de KPM e KSM do formador. Considerando que o sujeito é um matemático, se poderia esperar uma presença mais marcante desses dois subdomínios, e uma questão importante que fica em aberto é se a mobilização desses conhecimentos depende do contexto, do tema que está sendo ensinado, dos objetivos do formador em cada aula, entre diversas outras possibilidades. Da mesma forma, enquanto formador, se poderia esperar maiores evidências dos subdomínios do PCK, ficando em aberto se e como o PCK de um formador que é matemático se diferencia do PCK de um formador com outro perfil.

Com relação à compreensão do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, um longo caminho ainda deve ser percorrido, por meio de outras análises, para que se possa abarcar a complexidade de seu PCK relacionado com o ensino de Teoria dos Números e também para melhor entender como se diferencia o MK do formador e do professor que ensina Matemática. No entanto, os indicadores de conhecimento especializado de Benny obtidos a partir dessa investigação constituem mais um passo na elaboração de um modelo de conhecimento especializado do formador de professores de Matemática (Escudero-Ávila *et al.*, no prelo).

Considerando que diversos atores participam da formação do professor de Matemática, tais como matemáticos, educadores matemáticos e professores de Matemática que os recebem nas escolas (Escudero-Ávila *et al.*, no prelo; Beswick & Chapman, 2012) nossa contribuição nesse artigo é aportar resultados sobre o conhecimento especializado de um matemático que atua como formador.

A análise da prática de Benny traz evidências de seu *Mathematical Knowledge* e *Pedagogical Content Knowledge* relacionados ao tema específico da relação de ordem no conjunto dos números inteiros. Porém análises e investigações posteriores são necessárias para compreender como esses conhecimentos se relacionam entre si, como se relacionam com as crenças do formador, e como o *Mathematical Knowledge* do matemático pode ser articulado com o do formador de professores de Matemática para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura.

Notas

Curso voltado para a formação de professores de Matemática que irão atuar no Ensino Fundamental (11-14 anos) e no Ensino Médio (15-17 anos).
[2] Curso voltado para a formação de futuros pesquisadores e docentes do ensino superior na área de Matemática.
[3] Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica brasileira (Brasil, 2018).
[4] Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida a nível internacional. Uma vez que os subdomínios do modelo foram denotados em inglês desde a primeira publicação (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013), manter essa escrita ajuda a identificar melhor os subdomínios.
[5] Conhecimento Matemático.
[6] Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.
[7] Conhecimento dos Tópicos.
[8] Conhecimento da Estrutura da Matemática.
[9] Conhecimento da Prática Matemática.
[10] Conhecimento das características do desenvolvimento profissional de professores de Matemática.
[11] Conhecimento do ensino do conteúdo dos programas de formação inicial de professores de Matemática.
[12] Conhecimento dos padrões dos programas de formação de professores de Matemática.
[13] Definições, propriedades e fundamentos.
[14] Fenomenologia e aplicações.
[15] Procedimentos.
[16] Registros de representação.
[17] Conexões de simplificação.
[18] Conexões de complexificação.
[19] Conexões auxiliares.
[20] Conexões transversais.
[21] Como definir.
[22] Como demonstrar.
[23] Como justificar.
[24] Como fazer deduções e induções.
[25] Como dar exemplos.
[26] Papel do contraexemplo.

Referências

Akdemir, M., Narlı, S., & Kaşıkçı, M. (2015). The transition from informal to formal understanding of the concept of order in abstract mathematics. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp. 2271-2272. ⟨hal-01288633⟩

Almeida, M. V. R., Ribeiro, A. J., & Albrecht, E. (2018). Perfil conceitual de equação e o conhecimento matemático para o ensino: estabelecendo relações num estudo com professores em formação inicial. *Quadrante*, *XXVII*(1), 47–67.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M, & Fiorentini, F. (2018). Conhecimento especializado do formador de professores de matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas* (pp. 194-214). Brasília: SBEM.

Alves-Mazzotti, A. J. (2006). Usos e abusos dos estudos de caso. *Cadernos de Pesquisa*, *36*(129), 637–651.

Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292–321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Beswick, K. & Chapman, O. (2015). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *Paper presented at the12th International Congress on Mathematics Education*, Coex, Seoul, Korea.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A.

Mariotti (Series Ed.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquia.: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., & Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Coura, F. C. F., & Passos, C. L. B. (2017). Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. *Zetetiké*, *25*(1), 7-26.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L.C. (No prelo). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer.

Fiorentini, D., & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, *27*(47), 917–938.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence—a case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 187–205. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9746-z

Guala, E., & Boero, P. (2017). Cultural analysis of mathematical content in teacher education: the case of Elementary Arithmetic Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 207–227. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9767-2

Lima, E. L. (2011). Conceitos e Controvérsias. *Revista Do Professor de Matemática*, *1*(76), 8–11.

Moreira, P. C. (2012). 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(44), 1137–1150. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003

Oliveira, G. P., & Fonseca, R. V. (2017). A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. *Ciência & Educação (Bauru)*, *23*(4), 881–898. https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015Resende, M. R. (2007). *Re-Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura*. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Resende, M. R., & Machado, S. D. A. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática Em Pesquisa*, *14*(2), 257–278.

Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. C. C. R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *15*(1), 93–121.

Schindler, M., Hußmann, S. (2013). About student's individual concepts of negative integers – in terms of the order relation. *CERME 8 - Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME, pp. 373-382.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207–218.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164–186.

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3549-5

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Retrieved from http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf. September 5, 2018.

Mathematical Specialized Knowledge of a Mathematics Teacher Educator for teaching divisibility to prospective secondary teachers[22]

Marieli Vanessa Rediske de Almeida, Miguel Ribeiro and Dario Fiorentini

The knowledge of Mathematics teachers has been a very prominent focus of attention in the last decades. However, it leaves aside one of the dimensions involved in the development of this type of knowledge, specifically the knowledge of Mathematics teacher educators (MTE). In this paper, we discuss an MTE's knowledge in the context of classes on Euclid's division algorithm theorem in a Number Theory course for prospective secondary teachers. Some indicators of the specialized knowledge of MTEs are presented and discussed.

Keywords: Mathematics teacher educator; Mathematician; Mathematics Teachers' Specialized Knowledge; Number theory; Euclid's division algorithm theorem.

Conocimiento especializado de un formador de profesores de Matemáticas para enseñar divisibilidad para futuros profesores secundarios: un foco en el conocimiento matemático

El conocimiento de los profesores de matemáticas ha sido un foco de atención muy activo en las últimas décadas. Sin embargo, tales focos dejan de lado una de las dimensiones involucradas en el desarrollo de dicho conocimiento, específicamente el conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En este artículo, discutimos el conocimiento de un formador en el contexto de un curso de Teoría de números, para futuros profesores de secundaria, al probar el teorema del algoritmo de división de Euclides. Se presentan y se discuten algunos indicadores de conocimiento del formador.

Términos clave: Formador de profesores de matemática; Matemático; Mathematics Teachers' Specialized Knowledge; Teoría de números; Teorema del algoritmo de división de Euclides.

Mathematics Teachers Educators (MTEs) can be considered as "professionals who work with practicing teachers and/or prospective teachers to develop and improve the teaching of Mathematics" (Jaworski, 2008, p. 1). One of the main roles of MTEs is promoting the development of the knowledge of Prospective Teachers (PTs), in addition to showing them how to establish connections between their training and future practices. Considering that the knowledge of Mathematics Teachers (MT) is specialized, as suggested by the perspective of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo et al., 2018), MTEs also

[22] Este artigo foi submetido à Revista PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. ISSN: 1887-3987. A formatação e as normas técnicas aqui apresentadas seguem as indicações desta revista.

need to have a special kind of knowledge, which should be related to the specificities of their job of teaching teachers. In this sense, this study intends to contribute to research about the knowledge of MTEs and its role in teacher education, particularly in the context of a Number Theory course for PTs.

Even if Number Theory has many connections with school algebra, many MTs understand this topic as being unrelated to their pedagogical practice (Smith, 2002). Divisibility, for example, is frequently treated by PTs as being a trick or a procedure to be memorized, rather than a relation between integer numbers (Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2003).

The topic of divisibility is present since the earliest years of schooling, including the division of natural numbers, for example. Integer numbers are gradually introduced in the Mathematics curriculum, along with some divisibility criteria. In this context, there is a natural underlying question: Why is Euclid's division algorithm valid? This question is answered in a Number Theory course for PTs, where Euclid's Division Algorithm Theorem (EDAT) is presented and proved.

As many other mathematical results, EDAT is usually taught and proven by MTEs. The proof is considered a type of mathematical discourse, a kind of narrative that must satisfy the established conventions, and which usually includes text and different visual resources, with the aim of mediating the mathematical ideas involved (Cooper & Zaslavsky, 2017). EDAT is a theorem of existence and uniqueness, which asserts the existence, and the uniqueness, of the quotient and the remainder.

In Brazilian universities, as well as many other countries and regions of the world, mathematicians are mostly responsible for the mathematical training of secondary PTs. These professionals "act as teacher educators de facto, without explicitly identifying themselves in this role", as claimed by Leikin, Zazkis and Meller (2017, p. 2). In this scenario, our focus of research is the knowledge these professionals reveal while teaching. Occasionally being in the role of training PTs, they have solid knowledge about the scientific field of Mathematics, in which they aim to develop studies, acquiring their pedagogical content knowledge with practice (Fiorentini, 2004; Vasco & Climent, 2018) and, similarly to what occur with teachers, based on their previous experiences as students.

This paper is part of a broader research project which aims to understand and characterize, in the scope of Number Theory, the specialized knowledge of mathematicians who act as Mathematics Teacher Educators, addressing the research question: *What elements characterize the mathematical knowledge of a Mathematics teacher educator in relation to Euclid's division algorithm theorem?*

Literature review

Although the knowledge of MTEs, referred to as Mathematics Teacher Educators' Knowledge by Jaworski (2008), is different than both the knowledge of PTs and the knowledge of MTs (Jaworski, 2008; Zopf, 2010; Contreras et al. 2017), it shares common points with them, including knowledge about Mathematics, the pedagogy related to Mathematics, and the curriculum on which Mathematics teachers base their work, whereas the knowledge that is unique to it relates to the literature on the teaching and learning of Mathematics, teaching and learning theories, and research methodologies that investigate teaching and learning in schools/educational systems.

Based on the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model (Ball, Thames & Phelps, 2008), Zopf (2010) observes that the difference between the knowledge of MTEs and the knowledge of MTs lies in the mathematical content. While the latter teach Mathematics, the former teach the knowledge needed to teach Mathematics. The learning goals are also different, since children learn Mathematics for themselves, while teachers learn Mathematics for teaching their students. Therefore, Zopf (2010) proposes the Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MKTT) in order to describe the knowledge of MTEs, which includes the knowledge that is necessary for teaching.

Similarly, Contreras et al. (2017) bases himself on the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) model (Carrillo, et al. 2018) to state that the knowledge mobilized by MTEs and teachers have differences when considering Mathematical Knowledge (MK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK), as the knowledge of MTEs is broader in terms of reach and depth, i.e., it has a more coherent and solid theoretical structure; moreover, MTEs have more experience with the validation/construction of mathematical knowledge. On the other hand, PCK relates to the characteristics of learning of PTs, to how the contents should be taught in teacher education, and to the different ways to organize the content of teacher education.

The proposals of Zopf (2010) and Contreras et al. (2017) have common features beyond being grounded in Shulman's model and considering what is already known about the teacher's knowledge to create models pertaining to the knowledge of MTEs. One of these features concerns the teacher education goals: in Zopf's proposal, the teacher education goal is developing the Mathematical Knowledge for Teaching (Ball et al. 2008) of PTs, while in Contreras et al.'s proposal, it is developing their specialized knowledge (Carrillo, et al. 2018). For more information on the development of specialized knowledge in teacher education, see Escudero et al. (in press) and Carrillo et al. (2019).

Furthermore, the models developed by these two research groups are situated in very specific contexts, involving the observation of the practices of experienced MTEs and researchers who already work to develop MKT or MTSK in teacher education. However, when taking into account the peculiarities of MTEs such as the one who participated in our investigation, who are also mathematicians with no prior contact with the MTSK model, instead of trying to base ourselves on the perspective of Contreras et al. (2017), we used said model to search for indicators of a MTE's knowledge, revealed while the participant acted in a teacher education context, focusing on his MK.

Mathematics Teachers' Specialized Knowledge: theoretical perspective

In Carrillo et al. (2018), the authors discuss their Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) model. In this model, it is considered that the teacher's knowledge to teach is specialized, and that MK is subdivided into three subdomains: the Knowledge of Topics (KoT), the Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) and the Knowledge of Practices in Mathematics (KPM), similarly to PCK, which is also subdivided into three subdomains: the Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), the Knowledge of Features of Learning

Mathematics (KFLM), and the Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS). At the center of the model stands the domain of the teacher's beliefs, which are related to all subdomains. In this paper, because we are interested in the knowledge of a mathematician who works in teacher education, we will focus on his Mathematical Knowledge.

Knowledge of Topics

KoT describes what and in what way Mathematics teachers know the topics they teach. It involves thoroughgoing knowledge of mathematical content, such as concepts, facts, rules and theorems (Carrillo et al., 2018). This subdomain includes the types of problems to which contents can be applied, with their contexts and meanings, properties and principles, procedures and definitions, connections between items pertaining to the same topic, and ways of representing these contents.

It includes four categories related to contents within the definable areas of knowledge making up the Mathematics syllabus, as follows:

The *procedures* category includes knowledge of how to do something, when to do something, why something is done, and the characteristics of the resulting object.

The *definitions, properties and foundations* category comprises knowledge of mathematical properties and their underlying principles, in addition to knowledge of mathematical definitions, including how to choose the appropriate sets of properties to characterize mathematical objects. Moreover, the teacher's knowledge of images and examples of mathematical objects also falls within this category.

The *registers of representation* category concerns the knowledge of different ways in which a topic can be represented, e.g., arithmetic and algebraic registers, natural language, graphs, pictographs, and so on.

Finally, the *phenomenology and applications* category is related to the teacher's knowledge of phenomena or situations, organized by topics (Gómez & Cañadas, 2016), also including the teachers' awareness of their uses and applications.

Regarding KoT, in the context of the Number Theory, particularly Euclid's division algorithm theorem, the knowledge of MTEs includes, for example, definitions and results used for proving it, such as the definition of absolute value and the well-ordering principle.

Knowledge of the Structure of Mathematics

KSM describes the teacher's knowledge of connections between mathematical items. There are two types of connections: temporal connections, related to sequencing, associated with the increase in complexity or with simplification; and inter-conceptual connections, related to the demarcation of mathematical objects (Carrillo et al., 2018). It is divided into four categories, as follows:

In the *connections based on increased complexity* category, an item is related to posterior content, and elementary Mathematics is viewed from a more advanced perspective (Klein, 1908). On the other hand, the *connections based on simplification* category acknowledges the links of present with past content; thus, more advanced Mathematics is contextualized in a more elementary content.

The *auxiliary connections* category concerns the necessary participation of an item in major processes. Finally, the *transverse connections* category pertains to contents with common features related by an underlying concept.

In the scope of Euclid's division algorithm theorem, the MTE's KSM includes, for example, connections between it and posterior topics in the Number Theory course, such as linear congruence.

Knowledge of Practices in Mathematics

Practice in Mathematics means that the object of said practice is Mathematics itself. The focus is on the work of doing mathematics, rather than teaching them. It is defined as any mathematical activity carried out systematically, representing a pillar of mathematical creation and conforming to a logical basis for the creation of rules (Carrillo et al., 2018, pp.243). The knowledge of Mathematics teachers about these practices involves proving, justifying and defining, making deductions and inductions, and giving examples and understanding the role of counterexamples.

KPM can be general or specific to a topic. The former includes knowledge about how Mathematics is developed beyond considering any particular concept (e.g., knowing the meaning of necessary and sufficient conditions). It relates to the knowledge involved in performing general mathematical tasks, along with knowledge of how a demonstration can be applied, of the different characteristics of definitions (Mamona-Downs & Downs, 2016), of the argumentation practices available (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016), of heuristic approaches to problem solving, and of theory-building practices. On the other hand, the latter relates to a specific instance of general KPM associated with the peculiarities of the topic in question (Carrillo et al., 2018), and concerns, for example, the use of heuristic strategies to address specific topics.

In summary, KPM pertains to the teacher's knowledge about ways of applying, validating, exploring, generating and communicating mathematical knowledge (Delgado-Rebolledo, & Zakaryan, 2019) The KPM of MTEs includes, for example, to know the different types of proof, such as proof by contradiction, used to justify the fact that the remainder is less than the divisor in Euclid's division algorithm theorem, for instance.

Context and methods

Our investigation had a qualitative approach, with adoption of an instrumental case study (Stake, 2006) as research method to obtain information about the subject's knowledge that could be included in the theory about the knowledge of MTEs. In order to answer the research question, we discuss the moment in which a MTE presents and proves Euclid's division algorithm theorem in a Number Theory course for secondary PTs. The participant Andre (a pseudonym) has a Bachelor's degree, a Master's degree, and a PhD in Mathematics. Since completing the Master's degree, his research interests lie in Algebra and Geometry. Andre has been working at the mentioned university for five years, where he teaches students of different undergraduate courses, such as Mathematics, Physics and Chemistry. In the period during which his classes were observed, Andre had been teaching the Number Theory course to undergraduate Mathematics students for the second time in his academic career.

This case study is part of a larger research which aims to understand the knowledge of MTEs, in particular those who teach Number Theory to prospective Mathematics teachers. The results reported in this paper are exclusively based on this participant.

The Number Theory course in this study is a 15-week course, offered once in each semester as a common discipline for prospective teachers and undergraduate Mathematics students. Furthermore, the PTs are supposed to take these classes in the 6th semester of their undergraduate course. The course includes standard contents of a first course in Number Theory, such as divisibility, prime numbers, linear congruence, Diophantine equations and primitive roots.

Data collection occurred between March and July 2018, in a Brazilian university, comprising interviews, audio recordings and field notes. The first interview was conducted at the beginning of the semester, in order to clarify points regarding topics that would be taught by the MTE; and a second interview was carried out at the end of the semester, looking for to better understand aspects of the MTE's practice and knowledge that remained unclear, as well as offering feedback on the results of the research.

Class observations and recordings aimed at identifying the evident specialized knowledge in the MTE's practice. There were two types of short interviews: before each class, with the objective of obtaining his previous image of the lesson (Schoenfeld, 2000; Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2012), and after each class to discuss aspects associated with the reasons that led Andre to follow a certain way.

In its turn, the researcher's field notes aimed to fully transcribe the content written by the MTE on the blackboard, as well as providing the writing of comments and questions about the events of each class. Starting from the transcript, each class was divided in episodes (Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2012), and in this paper we discuss one of such episodes, where Andre proves Euclid's division algorithm theorem, to present and discuss his knowledge. For clarity purposes, only the transcript of this episode had its lines numbered.

For the analysis of the Mathematical Knowledge revealed by Andre, we used the categories proposed by Carrillo et al., (2018) assigning an acronym to the indicators (e.g. KSMt1) consisting of the initials of the subdomain in question, plus the representative letter(s) of the associated category, followed by a sequential number according to the order they appear in the text (Table 1). For clarity purposes, this table only includes the categories present in the analysis. In order to highlight the knowledge revealed by Andre, we inserted a parenthesis with these acronyms accompanied by a brief description of the MTE's knowledge.

Table 1 presents a synthesis of the subdomains of MK and the categories in which they are divided.

Subdomains	Categories	
KoT	Definitions, properties and foundations	KoTd1
	Phenomenology and applications	KoTph1
	Procedures	KoTp1
	Registers of representation	KoTr1
KSM	Connections based on simplification	KSMs1
	Connections based on increased complexity	KSMc1
	Transverse connections	KSMt1
KPM	Ways of proceeding	KPMwp1
	Ways of validating	KPMwv1

Table 1: Subdomains and categories of Mathematical Knowledge

Analysis and discussion

This section will present an overview of the episode selected for analysis in this paper. First, we present a brief interview, conducted before class, in which Andre presents his goals for the day. Then, we present and discuss the episode in which Andre proves EDAT, analyzing his mathematical knowledge. Subsequently, we include the after-class interview, in which the MTE comments on the proof of EDAT.

The interview before class

Researcher: What are your goals for today's class?

Andre: Today's class? Well, I'm going to introduce prime numbers, right? I'm already introducing them with divisibility properties. I can show [the students] that every positive integer is a finite product of primes. Only existence and uniqueness require a little more time, but with existence alone I can already prove that there are an infinite number of primes, and that there are infinitely many primes of the form $4k + 3$. If there's time left I intend to introduce the greatest common factor and some properties of the greatest common factor, such as Bezout's theorem... Oh! And Euclid's division algorithm theorem, I'm introducing it today! With proof.

Based on the interview before class, we can note that the MTE intends to present several results in this class, as he does in all classes. This gives a general idea of how his classes are organized, always focusing on presenting as much content as possible. Andre's remark that he plans to present the proof of EDAT refers to the interview held at the beginning of the semester, in which he was asked about the importance of proofs.

EDAT's introduction and its discussion

Andre had introduced the topic of divisibility at the end of the previous class, by presenting its definition and some basic properties. The analyzed episode is part of a class, which the teacher educator started by defining prime numbers. Thereafter he proved the existence part of the Fundamental Theorem of Arithmetic[23], that there are infinite prime numbers, and he defined Greatest Common Factor[24] as well as he proved some properties[25]. In the episode described below, the MTE introduces and proves Euclid's Division Algorithm Theorem (EDAT):

[23] Any integer greater than 1 can be written as a finite product of prime numbers.

[24] The Greatest Common Factor of two integer numbers is the largest positive integer number that divides each one of these integers.

[25] Such as "If $d = gcd(a, b) \Rightarrow gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$".

considering $a \in \mathbb{Z}$ and $b \in \mathbb{Z}_{+}^{*}$, there are unique integers r and q, such that $a = bq + r$, where $0 \leq r < b$.

Andre introduces EDAT (Figure 1) by drawing the students' attention to the connections between it and linear congruence, which will be presented later in the course. Andre also notes that EDAT must be proved in two parts: existence and uniqueness. He starts by considering the set S of all possible non-negative remainders of the division of a by b (Figure 2). Naturally, the first step is to prove that S is not empty, so Andre tells the students to find an integer x such that the expression $a - bx$ is non-negative, which they are unable to do. One of the students apologizes for his incorrect answer, and Andre discusses the importance of the students asking questions as well as the need for observing the details of the theorem's wording, after which he provides the correct answer (Figure 3). Since S is a non-empty set of non-negative integers, it has a minimal element, referred to by Andre as r. Subsequently, the MTE proves that this element satisfies the theorem's conditions (Figure 4), as the existence of r implies the existence of q.

280 (Writing on the blackboard)
281 Andre: Now it's time for tonight's main event! Euclid's Division Algorithm Theorem. Let's start by considering two
282 integers, a and b. Actually, I'm leaving b as positive so there are no problems. So
283 there exist, and are unique, integers q and r, such that a is equal b times q, plus r, with r being positive,
284 but strictly smaller than b. Ok?

EUCLID'S DIVISION ALGORITHM
Let $a, b \in \mathbb{Z}$, with $b > 0$, so EXIST and are UNIQUE $q, r \in \mathbb{Z}$ such that $a = b.q + r$ with $0 \leq r < b$.

Figure 2: Euclid's division algorithm theorem written on the blackboard

Andre's choice of making $b > 0$ [282] means that he is introducing a particular version of EDAT. In the general version, the only condition is that b needs to be a non-zero integer. The MTE probably did this to save time, since considering $b \neq 0$ would divide the proof into more cases. Another possibility is that Andre believes that proving the theorem while keeping b positive would imply the validity of this proof also in case it was negative, although he does not mention this to the students. Regardless of the proof, it would be important to present the full version of EDAT, since this is the one that should be remembered by the students, especially those hoping to become teachers.

285 Andre: So, in a few classes taking place
286 sometime in the future, the division algorithm will be a direct consequence
287 of the congruencies we'll find when studying the arithmetic modulo n. But for now, we're
288 proving it with the tools that we have.

In the above transcript, Andre establishes a connection between EDAT and linear congruence [286-287], two different content items with features in common, connected by the underlying notion of divisibility (KSMt1 – Knowledge of transverse connections between Euclid's

Division Algorithm Theorem and linear congruence). Andre also explicitly makes connections between EDAT and other concepts during an interview at the beginning of the semester:

Andre: [...] for example, I could consider... the division algorithm simply as modular arithmetic. Once we know $\mathbb{Z}_n$, we know that... every number z is congruous with some alpha module n. Right? But what does that mean? That it always exists and is unique. This is Euclid's division algorithm theorem. That's pretty much the same thing, isn't it? So, I can prove Euclid's division algorithm theorem, but when I prove that the $\mathbb{Z}_n$ ring is well defined, that everything works correctly, Euclid's algorithm can be seen as a… consequence. Right? (Transcript of the initial interview).

Andre expressed these connections in the initial interview when he was asked about the topics he considers fundamental in the Number Theory course. When stating that EDAT can be seen as a consequence of modular arithmetic, he establishes a connection based on increased complexity, viewing EDAT from a more advanced point of view (KSMc1 – Knowledge of connections between EDAT and modular arithmetic based on increased complexity). On the other hand, in the same interview, Andre establishes another type of connection:

Andre: If I'm talking to an elementary school student, I could say: imagine that we have a set of caramels. I want to know if I can make small bags with three caramels each, and then check if every small bag I have has three caramels. This is divisibility. [...] Euclid's algorithm [...] would be understood by the child as the fact that I can take the small bags with three caramels each, and... know exactly how many caramels the spare bag has. (Transcript of the initial interview).

In the above transcript, when asked about an elementary school student's understanding of divisibility and Euclid's division algorithm, Andre contextualizes advanced Mathematics (EDAT) in elementary Mathematics (divisibility) (KSMs1 – Knowledge of connections between EDAT and divisibility based on simplification).

289 Andre: Here [pointing to the blackboard in Figure 1] it says that my proof must
290 be written in two parts. First I need to prove they [q and r] exist, and then I need
291 to prove they are unique. By now, we know that the most
292 difficult part is the existence. Regarding the uniqueness, let us suppose that there exist two, and
293 then see that they are the same.

When he states that the theorem should be proven in two parts (existence and uniqueness) [289-291], Andre demonstrates that he knows how to prove existence and uniqueness (KPMwp1 – Knowledge of how to prove existence and uniqueness by splitting the proof into two parts). In addition, Andre knows how to perform the general mathematical task of proving uniqueness [292-293]: assuming there exists two, and then verifying that they are the same (KPMwp2 – Knowledge of how to prove uniqueness).

295 (Writing on the blackboard)
296 Andre: First, let's consider this set [Figure 2]. So, let's take all the sets (integers) of the form $a - xb$,
297 where a and b are the numbers I assigned at the beginning, x is an integer and $a - xb$ is
298 non-negative. Ok? Let's take this subset of integers.

Existence Proof
To consider $S = \{a - xb | x \in \mathbb{Z}\ e\ a - xb \geq 0\}$

Figure 3: Set S written on the blackboard

Here, it is possible to identify a heuristic approach to this particular topic: the choice of an appropriate set S of natural numbers [296-298] to analyze a property of that set, namely, the existence of a minimal element.

299 Andre: I would like to prove that it [S] is not
300 empty. Because it is not just a subset of integers. It is a subset of
301 non-negative integers. This is one of my hypothesis, that these integers are non-negative.
302 We know that a non-empty subset of $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ always admits a minimal element. Let's
303 explore this. First, I have to prove that it is not empty. To this
304 end, it is enough to show there is an element in there. Am I right? What is that element?

When he starts working with set S, Andre notes that because it is non-empty, since it is a subset of non-negative integers [300-301], it admits a minimal element (KoTd1 – Knowledge of the non-empty property of any set of non-negative integers). Then, he reminds the students of the fact that all sets composed of non-negative integers have a minimal element [302], i.e., he refers to the well-ordering principle (KoTd2 – Knowledge of the well-ordering principle according to which all sets of non-negative integers have a minimal element). When he refers to the non-negative integers as $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ [302], Andre shows that he knows how to represent this subset of integers (KoTr1 – Knowledge of how to represent $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ for non-negative integers). Additionally, he observes that to prove that S is non-empty, it is necessary to exhibit one of its elements [303-304] (KPMwv1 – Knowledge of how to justify that a set is non-empty).

319 Andre: No, that is okay. Do not apologize. Do not apologize, this question allows us to see
320 the details, that every detail that is written is important. It's not a and it's not $x = 0$. What is
321 the number that we know is positive? It's b. So to get around this, I would put the
322 minus in a to obtain a positive sum. The only problem is that I do not know if a is
323 positive or negative. […]
324 (Writing on the blackboard)
325 So, I obtain minus the absolute value of a. Now there's no problem. Since I have the
326 absolute value of a, I can calculate a plus the absolute value of a multiplied by b. b is strictly
327 positive, based on the theorem's initial condition. So, this means that there is at least one.
328 Thus, this value is greater than or equal to zero.

$x = -\lvert a \rvert$	$\Rightarrow$	$S \neq \emptyset$	admits minimum
$a + \lvert a \rvert b \geq 0$			I call it $r \geq 0$

Figure 3: Proof that S is non-empty, written on the blackboard

Subsequently, Andre tries to exhibit one of the elements of S, based on this set's characteristics. When discussing the importance of the students' questions [319-320], he expresses his belief of the need to perceive and consider all the theorem's conditions, as well as his understanding that this is an aspect to be developed together with his students. By choosing an appropriate x, such that $a - xb \geq 0$, Andre manages to exhibit one of the elements of S [325], showing that this set is not empty [327] (KoTp1 – Knowledge of how to justify that S is non-empty).

330 Andre: So, S is not empty. If non-empty S is a subset of it ($\mathbb{Z}_{\geq 0}$), S admits a minimal element. If there is a

331 minimal element, I must call it something. The magic is that I call it r.

Here, Andre uses the well-ordering principle (KPMwp3 – Knowledge of how to use the well-ordering principle to prove EDAT) to draw attention to the fact that S has a minimal element [330], and names this element r [Figure 3].

332 Andre: Then let us see if this r is

333 exactly what I want. Ok! First property: r, which I already know is

334 greater than or equal to zero. Since r is an element of this form, the minimal element of this set [set S],

335 is an element of it. All elements in this set are non-negative, including r.

After naming r, the minimal element of set S [332], Andre tries to justify that it satisfies the conditions of EDAT, i.e., he will verify if $r \geq 0$ and $r < b$ (KPMwv2 – Knowledge of how to justify that the minimal element of S meets EDAT's conditions). Thus, Andre notes that if r is an element of S, then $r \geq 0$ [333-334].

337 Andre: What is the set that I considered? I chose exactly all integers

338 of the form $a - xb$. This means that I'm considering all relations

339 in which a is equal to x times b plus one integer. Thus, set S is chosen

340 precisely to satisfy this relationship. Am I right? So, I need to define […]

341 the smallest of the remainders, and then check if it satisfies

342 this condition [$a = bq + r$, in the theorem].

In the excerpt above, Andre reveals that he knows how to construct set S (KPMwp4 – Knowledge of how to construct the necessary set S of non-negative integers that is in the core of the proof of EDAT, satisfying the theorem's conditions) such that its minimal element (r) satisfies the conditions of EDAT ($a = bq + r$) [337-340].

I want to prove $r < b$.

By contradiction, I will assume that $r \geq b$. Then, $0 \leq r - b = a - bq - b = a - (q+1)b$.

I name $q = x$ such that $a - bq = r$

$\Rightarrow \quad r - b \in S$

$\quad\quad r - b < r$.

Figure 4: Proof that r is strictly less than b, written on the blackboard

379 (Writing on the blackboard)

380 Andre: I need to prove that r is strictly less than b. Let's

381 prove it by contradiction. So, […] I will assume that r is greater than or equal to b. It's the

382 opposite. Thus, this will result in a contradiction.

Continuing the proof, Andre intends to prove, by contradiction [380-382], that the remainder is less than b [Figure 4]. He explains that to do this, it is necessary to deny the thesis [400-401]

(KPMwv3 – Knowledge of the steps of a proof by contradiction). Then, after assuming that $r \geq b$, Andre does some algebraic manipulations and considers $q = x$, leading to the conclusion that $r - b$ belongs to S, which contradicts the fact that r is the minimal element in this set. This kind of proof by contradiction is frequently used in Algebra. When the thesis is contested, a conflict in relation to the minimality of an element arises (KPMwv4 – Knowledge of how to prove that the remainder is less than the divisor based on a conflict in relation to the minimality of an element of set S).

400 Andre:	Finding a contradiction means that the
401	hypothesis I'm basing myself on is absurd. So, it is impossible for r to be greater than or equal
402	to b, which implies that r must be strictly smaller than b. In this way, we
403	(…) prove that there are those integers
404	q and r satisfy the initial condition.

Once the existence of the quotient and the remainder has been proven, Andre begins proving the uniqueness of these elements by assuming that there are a pair of quotients and a pair of non-negative remainders that are smaller than the divisor, both satisfying the theorem's decomposition (Figure 5). Thus, he concludes that each of these pairs are equal, i.e., based on the supposition that there are two Euclidean decompositions, he was able to prove that these decompositions coincide. Both decompositions must result in the same dividend, so by conveniently rearranging this equation, Andre concludes that the divisor must divide the difference of the remainders (Figure 6). Then, since the difference of the remainders is smaller than the divisor, the conclusion is that the only possibility for this difference is zero, which implies that the remainders are equal. This equality and the fact that the divisor is positive allows inferring that the quotients' difference is also zero; thus, the quotients are equal (Figure 7).

405	(Writing on the blackboard)
406 Andre:	I've found these two numbers, now I have to prove that both
407	are unique. And to prove that, like I said earlier, let's assume
408	there are two. What does that mean? That there are q, q' and r, r' integers such that a can be expressed
409	as $q'b + r'$ or as $qb + r$. So we have two representations of a in the form we want.

Uniqueness Proof

Suppose that we have q, q', r, r' such that

$a = q'b + r'$

$a = qb + r$

Figure 5: Two decompositions written on the blackboard

By assuming that there are a pair of quotients (q, q') and a pair of non-negative remainders (r, r') that are smaller than the divisor, both satisfying the theorem's decomposition (Figure 5), Andre evidences that he knows how to prove the uniqueness of these elements [406-409]

(KPMwp5 – Knowledge of how to prove the uniqueness of the remainder and the quotient in the proof of EDAT).

412 (Writing on the blackboard)
413 Andre: So, let's consider that I can write zero as $a - a$. There's
414 nothing complicated about that, right? But now the same thing
415 has two different descriptions. So, this equality is $q - q'b$ plus $r - r'$. First
416 I know that b divides $r' - r$. It's because if it is equal to zero, I can put $r' - r$ on the other
417 side, so if $r' - r$ is equal $q'b$, that means b is a divisor of both of them.

$$0 = a - a = (q - q')b + r - r'$$
$$b | r' - r$$

Figure 6: Conclusion that the divisor must divide the difference of the remainders, written on the blackboard

After some algebraic manipulations and using the concept of divisibility [413-415] (KoTd3 – Knowledge of the fact that, according to the definition of divisible, an integer a divides an integer b if b is a multiple of a), Andre states that the divisor must divide the difference of the remainders [415-417] (Figure 6). Subsequently, he claims that the absolute value of this difference is less than b [418].

418 Andre: Next, I know that $r - r'$ is smaller than b. That's explained by the hypotheses. (…)
419 This proof will differ a bit from the proof
420 in the textbook, because I condensed it a little. In the textbook, there's another one that is
421 equivalent to it.

Here, Andre mentions that he opted for a different proof than the one described in textbook [418-421], showing his preference for a shorter, or, as the MTE himself observes, more condensed version of the proof of uniqueness, which students may find a little harder to understand.

425 (Writing on the blackboard)
426 Andre: So, for the same reason I told you
427 that $r - r'$ is smaller than b, $r' - r$ is also smaller than b. […]
429 But when we have these two differences, the absolute value of $r - r'$ is
430 less than the absolute value of b, which in this case is b because I'm assuming it's
431 positive. Right? Ok. But since it's the absolute value, it implies that $r = r'$.

Considering the first and second remarks, Andre concludes that b divides the difference of the remainders and, at the same time, the difference of the remainders is less than b. Thus, this difference has to be zero, so $r = r'$.

$$0 = a - a = (q - q')b + r - r'$$
$$b | r' - r \qquad \begin{cases} r - r' < b \\ r' - r < b \end{cases} \Rightarrow |r - r'| < |b| = b$$
$$\Downarrow$$
$$r = r'$$
$$\Rightarrow q = q'.$$

Figure 7: Conclusion that the remainders and the quotients are equal, written on the blackboard

(Writing on the blackboard)

Andre: And if $r = r'$, then $(q - q')b = 0$, but if b is strictly positive, then q must be equal to q'.

Based on the fact that $r = r'$ and that b is positive, Andre concludes that $q = q'$ [441-442], thus successfully proving EDAT (Figure 7). We can note that this way of proving the theorem is very succinct (especially in relation to uniqueness), demonstrating the MTE's beliefs about elegant proofs. Andre was asked about proofs in the after-class interview and clarified his views on this matter, as can be seen in the next section.

After proving EDAT, Andre observes that this result may be applied, for example, to the proof of infinitude of prime numbers of the form $4k + 3$, which reveals his awareness of the uses and applications of EDAT (KoTph1 – Knowledge of the fact that Euclid's division algorithm theorem has applications in Number Theory, such as in the proof of infinitude of prime numbers of the form $4k + 3$). The table below summarizes the mathematical knowledge revealed by Andre during the class while presenting and proving Euclid's division algorithm theorem.

Subdomains	**Categories**	**Knowledge indicators**
KoT	Definitions, properties and foundations	KoTd1 – Knowledge of the non-empty property of any set of non-negative integers
		KoTd2 – Knowledge of the well-ordering principle, according to which all sets of non-negative integers have a minimal element
		KoTd3 – Knowledge of the fact that, according to the definition of divisible, an integer a divides an integer b if b is a multiple of a
	Phenomenology and applications	KoTph1 – Knowledge of the fact that Euclid's division algorithm theorem has applications in Number Theory, such as in the proof of infinitude of prime numbers of the form $4k + 3$
	Procedures	KoTp1 – Knowledge of how to justify that S is non-empty by indicating one of its elements
	Registers of representation	KoTr1 – Knowledge of how to represent non-negative integers for $\mathbb{Z}_{\geq 0}$
KSM	Connections based on simplification	KSMs1 – Knowledge of connections between EDAT and divisibility based on simplification
	Connections based on increased complexity	KSMc1 – Knowledge of connections between EDAT and modular arithmetic based on increased complexity, considering EDAT as a consequence of the modular arithmetic
	Transverse connections	KSMt1 – Knowledge of transverse connections between Euclid's Division Algorithm Theorem and linear congruence, connected by the underlying notion of divisibility
KPM	Ways of proceeding	KPMwp1 – Knowledge of how to prove existence and uniqueness by splitting the proof into two parts

		KPMwp2 – Knowledge of how to prove uniqueness by assuming that there are two elements and then verifying if they are the same
		KPMwp3 – Knowledge of how to use the well-ordering principle to prove EDAT
		KPMwp4 – Knowledge of how to construct the necessary set S of non-negative integers that is in the core of the proof of EDAT, satisfying the theorem's conditions
		KPMwp5 – Knowledge of how to prove the uniqueness of the remainder and the quotient in the proof of EDAT
	Ways of validating	KPMwv1 – Knowledge of how to justify that an arbitrary set is non-empty by presenting one of its elements
		KPMwv2 – Knowledge of how to justify that the minimal element of S meets EDAT's conditions, i.e., $r \geq 0$ and $r < b$
		KPMwv3 – Knowledge of the steps of a proof by contradiction: denying the thesis and then confirming it by finding a contradiction
		KPMwv4 – Knowledge of how to prove that the remainder is less than the divisor based on a conflict in relation to the minimality of an element of set S.

Table 2: Subdomains, categories and indicators of Andre's Mathematical Knowledge

The after-class interview

Researcher: About Euclid's division algorithm theorem...

Andre: Yes.

Researcher: You commented that you simplified the proof of the textbook.

Andre: Yes!

Researcher: Do you remember what else was there?

Andre: It's this part of $qr' - r < b$, the $r - r' < b$, noting that the rest has to be between 0 and b.

Researcher: Did you think it was not necessary?

Andre: No, it's another proof, equivalent, mine is shorter. So it's more elegant.

Researcher: I understand.

Andre: There is not a single proof. But usually the shortest proofs are the most elegant. And with these two observations, without having to write an extra part, I already got the result I wanted.

According to Lai and Weber (2014), notwithstanding mathematicians are in general responsible for the teaching of advanced university mathematics courses, their training focuses on writing proofs for disciplinary, rather than pedagogical, purposes. In this case, the disciplinary purposes are more related to proofs produced to advance the discipline, rather than to proofs produced to facilitate understanding of the concepts involved. In fact, Andre seems more interested in conclude the uniqueness of the proof to move on to the next concepts in the course. On the other hand, even when aiming to present pedagogical proofs, Weber (2012) and Harel and Sowder

(2009) found that mathematicians reported have a limited pedagogical arsenal with which to achieve their pedagogical goals with respect to proof. These limitations are naturals and understandable, since many mathematicians do not receive any pedagogical preparation (Fiorentini, 2004), which is not an obstacle to teaching their courses.

The appreciation for elegant proofs (Alsina & Nelsen, 2010) is common among mathematicians, although such proofs can represent obstacles for students, in particular for prospective mathematics teachers, who need to develop specialized knowledge, concatenating mathematical and pedagogical knowledge, to perform their profession. Considering that "[…] a proof is an argument to convince the reader that a mathematical statement must be true" (ibid, p. xix), one can consider that the reader cannot be convinced of this truth if it does not fully understand the proof.

Some conclusions and final comments

According to Lesseig (2016), studies documenting the lack of understanding of teachers about proofs suggest that the prominence of their role should be emphasized in teacher education. One way of understanding what is the mathematical knowledge required to support the use of proofs to teach Mathematics in schools is to investigate the mathematical knowledge of MTEs.

In this paper, we analyzed the mathematical knowledge of a mathematician teaching a course for prospective teachers, based on the perspective of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. To this end, we searched for evidence of the MTE's knowledge of topics (definitions, properties, procedures and registers of representation in the topic divisibility), knowledge of the structure of mathematics (connections based on increased complexity and transverse connections involving EDAT), and knowledge of practices in mathematics (ways of proceeding and ways of validation).

Considering that mathematical argumentation, reasoning, justification and proof indisputably constitute an important field of mathematical competencies (Bersch, 2019; Alfaro, Flores & Valverde, 2020), we obtained indicators of Andre's KPM related to ways of proceeding and ways of validation. These indicators also contribute to the investigation of the KPM of the mathematics teachers at the university level (e.g., Vasco & Climent, 2018; Delgado-Rebolledo, & Zakaryan, 2019).

The focus is not to evaluate or to prescribe which should be the knowledge of MTEs. Our interest was investigating the knowledge of the MTE who participated in our case study, considering the Brazilian teacher education context, where mathematicians are responsible for teaching future teachers. In this sense, our findings may support the development of a model for the specialized knowledge of MTEs, as suggested by Contreras et al. (2017).

Analyzing Andre's teaching practices and looking for indicators allowed us to identify categories of this MTE's mathematical knowledge. Since Number Theory, which naturally includes the topic of divisibility, is still a course where both prospective and experienced teachers reveal difficulties (e.g. Smith, 2002; Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2003), it requires further research, focusing on the articulated discussions between the mathematical and pedagogical knowledge revealed by MTEs when teaching divisibility.

Another pertinent question is whether there are differences in the mathematical and pedagogical knowledge revealed by MTEs with dissimilar profiles and experiences. Furthermore, we suggest that future studies further investigate the specialized knowledge of mathematicians working in teacher education in a context of partnership with mathematical educators.

Acknowledgment

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

References

Alfaro, C., Flores, P., & Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117. doi: 10.30827/pna.v14i2.9363

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2019). Knowledge of a mathematician to teach divisibility to prospective secondary school teachers. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3831-3838). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). *Charming proofs: a journey into elegant mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi: 10.1177/0022487108324

Bersch, S. (2019). Teachers' perspectives on mathematical argumentation, reasoning and justifying in calculus classrooms. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 128-135). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. Retrieved from: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02398015

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, R. C. & Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. In F. Imbernón, A. Shigunov Neto, & I. Fortunato (Eds.), *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas* (pp. 324-341). São Paulo: Edições Hipótese.

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., & Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: J. Carrillo, & L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Cooper, J., & Zaslavsky, O. (2017). A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – affordances for teacher education. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2025-2032). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L. C. (In press). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer.

Fiorentini, D. (2004). A investigação em Educação Matemática sob a perspectiva dos formadores de professores. In C. Alves, C. Morais, C. Martins, M. Pires, y P. Barros (Orgs.), *Actas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13–35). Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.

Gómez, C., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 311–334. https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Harel, G., & Sowder, L. (2009). College instructors' views of students vis-à-vis proof. In M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.), *Teaching proof across the grades: A K–12 perspective* (pp. 275–289). New York, NY: Routledge.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Stadpunkte aus*. [Elementary mathematics from a superior perspective] Leipzig: B. G. Teubner.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski, & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (v. 4, pp. 335–361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 93-108. doi: 10.1007/s10649-013-9497-z

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2017). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 451–473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Lesseig, K. (2016). Investigating Mathematical Knowledge for Teaching Proof in Professional Development. *International Journal of Research in Education and Science*, *2*(2), 253-270.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. L. N. (2016). Mathematical structure, proof, and definition in advanced mathematical thinking. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 239–256). New York, NY: Routledge.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 277-310. Retrieved from https://www.redalyc.org/jatsRepo/335/33523151005/html/index.html

Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243–261. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0

Smith, J. C. (2002). Connecting undergraduate Number Theory to High School Algebra: A study of a course for prospective teachers. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 1–8). Crete, Greece: John Wiley & Sons Inc.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315–351). Rotterdam: Sense Publishers.

Vasco, D., & Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *43*(4), 463–475.

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education*. New York, NY: Springer New York.

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Retrieved from http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf. September 5, 2018.

Conhecimento especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações[26]

A Mathematics teacher educator's specialized knowledge when teaching the Euclid's Division Algorithm Theorem: a focus on examples and explanations

Conocimiento especializado de un formador de profesores de matemáticas al enseñar el Teorema del Algoritmo de División Euclidiana: un enfoque en ejemplos y explicaciones

Marieli Vanessa Rediske de Almeida
Universidade Estadual de Campinas, PECIM
Campinas, Brasil,
marieli.almeida@outlook.com
Orcid: 0000-0002-7491-8936

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação
Campinas, Brasil,
cmribas78@gmail.com
Orcid: 0000-0003-3505-4431

Enviado:10/09/2020

Aceito:05/12/2020

DOI: 10.30612/tangram.v3i4.12716

Resumo: De acordo com algumas perspectivas, qualquer profissional envolvido e responsável pela formação de professores pode ser considerado um formador. Nesse sentido, um matemático que trabalha em cursos de formação inicial é considerado também como formador de professores, e seu conhecimento influencia diretamente o foco e qualidade dessa formação. Buscando compreender quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador de professores, ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, neste artigo analisamos a prática de um matemático em contexto de formação inicial de professores e discutimos o seu conhecimento especializado, considerando a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.* Os resultados obtidos permitem destacar a natureza especializada do conhecimento do formador, salientando algumas dessas dimensões matemáticas especializadas que são cruciais na prática.

[26] ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações. TANGRAM - Revista de Educação Matemática, v. 3, n. 4, p. 24-56, 2020. Este artigo foi publicado na Revista Tangram: Revista de Educação Matemática, ISSN: 2595-0967. A formatação e as normas técnicas aqui apresentadas seguem as indicações desta revista.

Palavras-chave: Conhecimento especializado do formador. Licenciatura em Matemática. Teoria dos Números.

Abstract: Under some perspectives, all professional involved and responsible for teacher education can be considered a teacher educator. In this sense, also mathematicians who teach in teacher education are considered mathematics teacher educators and his/her knowledge directly influence the foci and quality of teacher education. Aiming to understand which elements compose and characterize a teacher educator specialized knowledge when discussing the Euclidean Division Algorithm Theorem. In this paper we analyze the practice of a mathematician acting as mathematics teacher educator and discuss her revealed specialized knowledge considering the scope of the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. Results allow to highlight the specialized nature of the mathematics teacher educator knowledge bringing to front some of those mathematical dimensions which are crucial in practice.

Keywords: Mathematics teacher educator specialized knowledge. Initial teacher education. Number Theory.

Resumen: Según algunas perspectivas, cualquier profesional involucrado y responsable de la formación del profesorado puede considerarse un formador. En este sentido, un matemático que trabaja en cursos de formación inicial también es considerado como formador de docentes, y sus conocimientos influyen directamente el foco y calidad de la formación de profesores. Buscando comprender qué elementos componen y caracterizan el conocimiento especializado de un formador, al discutir el Teorema del Algoritmo de División Euclidiana. En este artículo analizamos la práctica de un matemático que trabaja en la formación de profesores y discutimos los conocimientos especializados de este formador, considerando la perspectiva del *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Los resultados obtenidos permiten destacar la especialización del conocimiento del formador, y ponen de relieve algunas de esas dimensiones matemáticas que son cruciales en y para la práctica.

Palabras clave: Conocimiento especializado del formador. Formación inicial del profesorado. Teoría de los Números.

Introdução

Os estudos com foco no formador de professores têm aumentado nas últimas décadas, havendo diversas possibilidades de pesquisa, incluindo investigações sobre identidade, desenvolvimento profissional, crenças, conhecimentos e sobre a formação do formador. No que se refere ao conhecimento, algumas investigações tentam caracterizar o conhecimento do formador, as quais originaram diferentes modelos (ver, por exemplo, Contreras et al., 2017; Jaworski, 2008; Zopf, 2010). Pelas especificidades do contexto brasileiro, no qual os principais responsáveis pela formação matemática dos futuros professores de Matemática são os matemáticos, estes podem ser considerados também formadores (Kelchtermans, Smith, & Vanderlinde, 2017) – na linha de que qualquer profissional envolvido e responsável pela formação de professores o poderá ser.

Para a elaboração de um modelo de conhecimento do formador, um dos principais elementos a considerar é a diversidade de perfis desses sujeitos (Beswick & Chapman, 2012; Escudero-Ávila et al. [no prelo]). Além disso, o que já se sabe sobre o conhecimento do professor de Matemática pode ser considerado como um ponto de partida para estudar o conhecimento do formador. Os trabalhos que discutem o conhecimento do formador geralmente adotam uma perspectiva de investigação sobre a própria prática (Almeida, Ribeiro, & Fiorentini, 2018), ou focam no *Pedagogical Content Knowkedge* (PCK) do formador (e.g. Appova & Taylor, 2017). Levando em conta estas dimensões e o contexto brasileiro, torna-se necessário um foco no conhecimento do formador de professores que seja um matemático e atue em um curso de licenciatura em Matemática.

Para prover ao professor um conhecimento que lhe permita, por exemplo, definir e dar exemplos de um objeto matemático ou explicar os procedimentos envolvidos em um algoritmo – como fazer, quando pode ser feito, por que é feito dessa forma –, é necessário ao formador possuir conhecimentos mais aprofundados sobre a elaboração de definições matemáticas e o emprego de algoritmos, convencionais ou alternativos, bem como sobre diferentes formas de explicar um algoritmo.

Este conhecimento do professor e do formador pode ser visto sob uma diversidade de perspectivas, e entre elas encontra-se a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[27] (Carrillo et al., 2018). Nesse conhecimento que cumpre ao formador de professores, por ser ele também professor, inclui-se conhecer os exemplos numéricos mais apropriados para ressaltar cada um dos três casos em que se divide a demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE), que deverão ser conhecidos pelos futuros professores de Matemática. No que se refere às explicações,

> se os formadores de professores acreditam que os futuros professores devem ser capazes de explicar por que diferentes algoritmos funcionam [...], têm de ser capazes de dedicar tempo suficiente de seus cursos para esses temas. Também devem decidir a melhor forma de explicar as justificativas para esses algoritmos, e as possibilidades e limitações deles em exemplos concretos (Contreras et al., 2017, p. 17, tradução nossa).

Para investigar o conhecimento desse formador, elegemos o tópico divisibilidade, abordado em uma disciplina de Teoria dos Números. A Teoria dos Números é um dos ramos mais importantes da Matemática (Doumbia, Carvalho, & Almouloud, 2020) e, em particular, aqui nos concentraremos no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Esta opção centra-se também no fato de as pesquisas apontarem dificuldades dos alunos concluintes do Ensino Fundamental, até mesmo na compreensão dos procedimentos algorítmicos relativos à operação de divisão e à decomposição de números (Chaparin, 2010; Pizysieznig, 2011; Soares &

[27] Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida internacionalmente, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

Machado, 2017), e na convicção de que a melhoria da aprendizagem matemática dos alunos se sustenta na melhoria do conhecimento e da prática de seus professores (Chicote & Deixa, 2020; Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004).

Nesse sentido, diversas investigações apontam dificuldades de futuros professores de Matemática para compreender a divisibilidade (Brown, Thomas, & Tolias, 2002; Zazkis & Campbell, 1996; Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2013), e o trabalho do formador é imprescindível para que elas possam ser sanadas, ou, pelo menos, diminuídas durante a formação inicial, o que demanda desenvolver as dimensões especializadas do conhecimento do (futuro) professor (Carrillo et al., 2018), em particular no que se refere à divisibilidade. Considerando esta perspectiva, torna-se importante entender mais amplamente o conteúdo do conhecimento do formador de professores no âmbito da divisibilidade – em particular em contexto de discussão do TADE, principalmente nos exemplos e nas explicações fornecidas sobre esse teorema.

Neste texto, focamos o conhecimento especializado de um formador de professores e discutimos algumas das dimensões do conhecimento matemático e pedagógico revelado nesse contexto. Buscamos resposta para a seguinte questão de pesquisa: Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador, ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?

Referencial teórico

O conhecimento do professor pode ser entendido por uma multiplicidade de perspectivas, e cada uma delas assume dimensões centrais que podem ser substancialmente distintas. Refinando os trabalhos de Shulman (1986, 1987) e trazendo para a discussão as dimensões específicas da área de conhecimento, várias dessas perspectivas consideram que o conhecimento do professor de ou que ensina Matemática integra o conhecimento matemático, o conhecimento pedagógico da matemática e o conhecimento curricular. Uma dessas múltiplas perspectivas refere-se ao *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (Carrillo et al., 2018), que assevera que todo o conhecimento do professor é especializado. Tomando esse conhecimento especializado como associado às especificidades da prática profissional do professor, quando pensamos no conhecimento do formador de professores e o comparamos com outros profissionais que usam a matemática como um recurso ou instrumento, ou mesmo em relação aos alunos, ele deverá, necessariamente, seguindo a mesma estrutura de ampliação e refinamento, ser considerado dotado de algumas especificidades para essa prática profissional.

Também em relação ao professor de e que ensina Matemática no Ensino Superior, pesquisas apontam a necessidade de compreender seu conhecimento e seu desenvolvimento e a forma como o conhecimento se reflete em sua prática de ensino (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2019), tendo em conta, principalmente, que em boa parte dos casos ele não recebeu formação específica relacionada com o ensino e a aprendizagem dos tópicos das disciplinas que leciona na universidade (Vasco & Climent, 2018).

Na perspectiva do MTSK consideram-se três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK), *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e as crenças sobre a Matemática e sobre o ensino da Matemática (Figura 1).

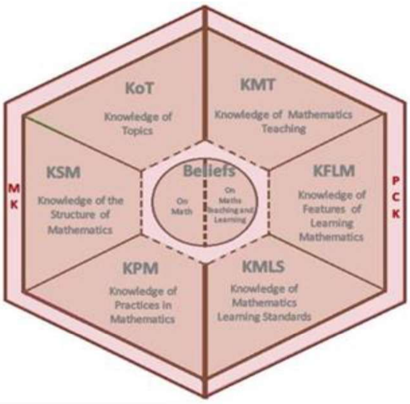


Figura 1 – Domínios e subdomínios do MTSK
Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

Para o MK, são considerados três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

No KoT inclui-se o conhecimento do professor relativamente ao que o professor de Matemática conhece dos tópicos que ensina e de que maneira o faz. Esse subdomínio é composto por quatro categorias: *procedimentos; definições, propriedades e fundamentos*; *registros de representação;* e *fenomenologia e aplicações*. No tópico de Divisibilidade inclui-se, por exemplo, conhecer o algoritmo da divisão euclidiana e seu significado, conhecer o teorema do algoritmo da divisão euclidiana (TADE) e seu significado, saber que o TADE é válido dentro de determinadas condições, considerando-se o conjunto dos números inteiros, bem como conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso está associado a ver quantas vezes é necessário considerar a unidade, ou partes dela, para efetuar a medição.

No subdomínio KSM está incluso o conhecimento do professor sobre conexões entre itens matemáticos (Carrillo et al., 2018), as quais podem ser interconceituais (conexão auxiliar, por exemplo) ou temporais (associadas a complexificação ou simplificação de um determinado conceito). Assim, o KSM possui quatro categorias: *conexões de simplificação*, *conexões de* *complexificação*, *conexões auxiliares* e *conexões transversais*. Conhecer o Princípio da Boa Ordem, uma propriedade utilizada na prova do TADE, é um exemplo de conexão auxiliar, caracterizando a necessária participação desse item em um processo maior.

No que se refere ao KPM, o foco está mais no funcionamento da matemática do que no processo de ensiná-la (Carrillo et al., 2018), incluindo conhecimentos relacionados a criação e produção matemáticas, a linguagem e demonstrações matemáticas. De acordo com Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), para o KPM são consideradas as seguintes categorias: *formas de proceder*, *formas de validar*, *formas de explorar*, *formas de gerar conhecimento em matemática* e *formas de comunicar matemática*. No tópico Divisibilidade inclui-se, por exemplo, saber como justificar o algoritmo da divisão euclidiana e saber quais são as condições necessárias e suficientes para que o teorema seja válido.

Por sua vez, o PCK inclui os subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

O KMT refere-se ao conhecimento do professor relativo a *teorias sobre o ensino de matemática*, *recursos para o ensino,* e *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*. No tópico Divisibilidade inclui-se, por exemplo, o conhecimento de exemplos representantes dos três casos envolvidos na demonstração da existência do quociente e do resto no TADE.

Ainda, o subdomínio KFLM compreende o conhecimento nas categorias *teorias de aprendizagem matemática*, *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática*, *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático* e *aspectos emocionais da aprendizagem da matemática*. No tópico Divisibilidade insere-se, por exemplo, conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto dos possíveis restos, gerado na demonstração do TADE, que é outro conhecimento do professor que ensina Teoria dos Números.

Por sua vez, o subdomínio relativo ao KMLS está relacionado com as categorias *resultados de aprendizagem esperados*, *nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental* e com o *sequenciamento de tópicos*. No tópico Divisibilidade figura, por exemplo, conhecer as habilidades que precisam ser trabalhadas em determinado momento, de acordo com a *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC (Brasil, 2018); por exemplo, entre o 6.º e 7.º anos do Ensino Fundamental, conforme a BNCC, os alunos deverão aprender a elaborar e resolver problemas envolvendo os conceitos de múltiplo, divisor e divisibilidade.

Desde a primeira publicação (Carrillo et al., 2013), o modelo MTSK vem sendo rediscutido e aprimorado, por meio de novas investigações que se aprofundam no modelo em si e também em seus domínios e subdomínios, buscando sempre melhor compreender o conhecimento do professor de e que ensina Matemática.

Uma vertente complementar dessas pesquisas tem por foco o conhecimento do formador, que pode ser pensado a partir do conhecimento especializado que se pretende promover nos (futuros) professores (Carrillo et al., 2019). Com relação ao conhecimento matemático, o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento a ser desenvolvido nos (futuros) professores que forma, sem estar limitado a ele, tendo uma visão geral e inter-relacionada do conhecimento matemático, que o leve a enfatizar conexões e profundidade de conhecimentos na formação (Escudero-Ávila et al., [no prelo]).

Focando no conhecimento matemático do formador, podem ser diferenciados três pontos com relação ao conhecimento do professor (Escudero-Ávila et al., [no prelo]): (i) o conhecimento do formador se torna mais amplo e profundo porque é o resultado de um processo de crescimento no qual a matemática adquire maior complexidade e vai sendo vista de forma cada vez mais holística, visão na qual os *links* entre os conceitos se tornam mais variados; (ii) o formador atribui importância a aspectos sintáticos do conhecimento matemático, reconhecendo que o conhecimento, por si mesmo, é necessário, mas não suficiente, e compreendendo, por exemplo, a essência das demonstrações, o significado de teoremas e definições e o rigor da linguagem matemática; (iii) o conhecimento do formador é organizado de forma diferenciada, com uma compreensão mais clara das ideias estruturantes da Matemática e das conexões que permitem simplificar ou aumentar a complexidade de um tópico (Montes, Ribeiro, Carrillo, & Kilpatrick, 2016), tornando-o capaz de promover a construção do conhecimento dos professores em formação.

No que se refere ao PCK do formador, Escudero-Ávila et al. (no prelo) vão um pouco mais longe e apresentam três subdomínios, intitulados *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*.

No *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera-se o conhecimento do formador sobre o desenvolvimento profissional dos professores em formação; as dificuldades mais prováveis na sua especialização como professores de Matemática; as sequências ou focos mais apropriados para a construção e o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor; o conhecimento dos futuros professores, ao iniciarem a formação. Um exemplo de conhecimento do formador incluso nesse subdomínio é conhecer que o foco na divisão como medida, ao abordar o TADE, pode ser mais apropriado para construir o conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade.

O *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* envolve conhecimentos sobre repertórios de atividades para desenvolver o conhecimento profissional dos professores de Matemática em formação; conhecimentos sobre as limitações e as potencialidades de diferentes tarefas que podem ser exploradas; conhecimento sobre a utilização de metodologias diversas de avaliação; conhecimento sobre as características mais importantes de cada tópico, sendo capaz de potencializar e desenvolver esse conhecimento.

Por sua vez, o *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* abarca o conhecimento de padrões curriculares do curso em que o formador atua e também dos diferentes níveis de ensino nos quais os futuros professores atuarão. Tais padrões curriculares, bem como a demanda de conhecimentos matemáticos, podem variar em diferentes universidades, ou conforme o país, de forma que o conhecimento do formador nesse subdomínio também pode implicar conhecer como a formação ocorre em outros contextos.

Uma vez que o conhecimento do formador deve abranger o conhecimento do professor e que, além disso, ainda não há um modelo de conhecimento especializado do formador, nossa proposta para análise do conhecimento matemático de um formador que também é matemático consiste em considerar esse conhecimento a partir dos subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (Carrillo et al., 2018).

Para discutir o conhecimento pedagógico do sujeito, por outro lado, propomos olhar para o PCK do formador em dois níveis: como professor que ensina Matemática na universidade, a partir dos subdomínios e categorias propostas em Carrillo et al. (2018); e como formador de professores de Matemática, a partir dos três subdomínios propostos por Escudero-Ávila et al. (no prelo).

Contexto e método

Com o objetivo de responder à nossa questão de pesquisa, aqui focamos no conhecimento de um formador de professores que é matemático – desenvolve pesquisas em Matemática, em particular nas áreas de Álgebra e Geometria. Os resultados apresentados fazem parte de uma pesquisa qualitativa mais ampla: um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), que busca caracterizar o conhecimento especializado de dois formadores de professores de Matemática que ensinam Teoria dos Números em uma universidade pública.

O participante cujo conhecimento discutimos neste texto, Benny, é bacharel, mestre e doutor em Matemática, desenvolve suas pesquisas na área de Álgebra e possui mais de 20 anos de experiência atuando em cursos de graduação e pós-graduação.

As informações foram coletadas durante um semestre em uma disciplina de Teoria dos Números, oferecida como disciplina comum para estudantes de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática em uma universidade pública no estado de São Paulo. A disciplina inclui tópicos como divisibilidade, números primos, congruências lineares e equações diofantinas – tópicos habituais em uma disciplina inicial de Teoria dos Números –, e os estudantes de licenciatura são orientados a cursá-la no 6.º semestre.

A coleta de informações envolveu a observação e a gravação em áudio e vídeo das aulas do formador, bem como a realização de entrevistas semiestruturadas, com o objetivo de entender melhor aspectos da prática de Benny. Aqui nos centramos em duas aulas, nas quais Benny abordou o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Cada aula teve cerca de noventa minutos de duração, e tanto as entrevistas quanto as aulas foram transcritas para posterior análise.

O TADE é um teorema de existência e unicidade do quociente e do resto na divisão euclidiana; dessa forma, sua demonstração deve ser feita em duas partes. Ele foi abordado por Benny em um conjunto de cinco aulas (aulas 2, 3, 4, 5 e 6), e o formador introduziu o TADE ao final da aula 2, e discutiu a demonstração da existência nas três aulas seguintes (3, 4 e 5). Ao final da aula 5 e no princípio da aula 6, Benny demonstrou a unicidade.

Benny inicia a aula 3 relembrando propriedades da relação de ordem nos números inteiros (mais informações sobre essa discussão podem ser encontradas em Almeida e Ribeiro [2019]). Posteriormente retoma o TADE, que foi introduzido no final da aula anterior, e enuncia a versão completa do teorema, discutindo o enunciado e fornecendo exemplos do uso do algoritmo. Ele então busca dar uma ideia da demonstração e discute o Princípio da Boa Ordenação (PBO), dividindo a demonstração da existência em três casos e, na sequência, prova o caso trivial.

A quarta aula é dedicada a uma revisão de todas as propriedades dos números inteiros que já foram abordadas na disciplina. Na quinta aula Benny retoma o TADE: inicia sua demonstração com o caso trivial e considera a seguir os demais casos e seus respectivos subcasos. Assim conclui a demonstração da existência do teorema. Como nosso interesse recaiu mais nos exemplos e nas explicações do que na demonstração em si, o nosso foco de análise e discussão aqui evidencia as discussões ocorridas na aula 3 e na aula 5. Todas as aulas foram gravadas em vídeo (imagens da lousa) e transcritas.

A transcrição de cada aula foi feita a partir do áudio e posteriormente complementada com a visualização do vídeo e dividida em episódios fenomenologicamente coerentes (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2012). Para a aula 3, em que a análise é mais focada nas explicações do formador, apresenta-se a transcrição com linhas numeradas. Cada linha representa a fala do formador (Benny), uma fala dos estudantes (Est) ou uma ação do formador (e.g. "escreve na lousa"). O emprego de "()" indica a descrição de uma ação de Benny, enquanto "[...]" indica a supressão de um trecho. Para a aula 5 focamos especificamente no recorte dos exemplos que Benny escreveu na lousa.

Para a análise do *Mathematical Knowledge* revelado por Benny, utilizamos as categorias propostas por Carrillo et al. (2018), e os indicadores receberam um acrônimo (por exemplo KoTd1) constituído pelas iniciais do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial, de acordo com a ordem em que aparece no texto (Tabela 1). Aqui, para simplificar a leitura, apenas referimos as categorias que aparecem na análise.

Tabela 1 – Subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge*

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1
	Procedimentos	KoTp1
	Registros de representação	KoTr1
KPM	Formas de proceder	KPMwp1
	Formas de validar	KPMwv1

Fonte: Carrillo et al. (2018, pp. 243-245)

Para analisar o *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny, consideramos duas perspectivas: por um lado, olhamos para o seu PCK como professor de Matemática, recorrendo às categorias propostas por Carrillo et al. (2018) – Tabela 2. Os códigos atribuídos aos indicadores seguem a mesma estrutura apresentada anteriormente.

Tabela 2 – Subdomínios e categorias do *Pedagogical Content Knowledge*

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KMT	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1
KFLM	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1

Fonte: Adaptado de Carrillo et al. (2018, pp. 247-248)

Por outro lado, buscamos também evidências de PCK como formador e para isso recorremos às dimensões elencadas por Escudero-Ávila et al. (no prelo) – Tabela 3. Para cada subdomínio do conhecimento do PCK do formador, consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias), pois essas dimensões estão ainda em sua fase de refinamento, com o qual pretendemos contribuir com este trabalho.

Tabela 3 – Subdomínios e conhecimentos do PCK do formador

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para construir o conhecimento e a identidade, e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT1

Fonte: Adaptado de Escudero-Ávila et al. (no prelo)

Para que o leitor possa acompanhar, do melhor modo, as discussões matemáticas efetuadas por Benny ao explorar a demonstração do TADE, optamos por incluir, na parte inicial da próxima epígrafe, uma breve descrição dos passos envolvidos na demonstração, a qual busca facilitar a compreensão da análise.

Análise e discussão

Por ser um teorema de existência e unicidade, a demonstração do TADE é feita em duas partes. Na primeira, é demonstrada a existência do quociente e do resto, considerando-se três casos: $0 \leq b < a$, $b \geq a$ e $b < 0$. Nesses três casos, usa-se o Princípio da Boa Ordem para provar que o resto procurado é o elemento minimal do conjunto $X := \{b - |a|x, x \in \mathcal{P}\} \cap \mathcal{P}_0$, o qual é um conjunto auxiliar formado por todos os "possíveis restos". A seguir, o quociente q é obtido como consequência direta da existência de r. Na segunda parte, a unicidade, supõe-se que existam dois pares de resto e quociente distintos que satisfazem as hipóteses do teorema, chegando-se a um absurdo, e demonstrando-se, assim, que o quociente e o resto são únicos.

Benny inicia a aula falando sobre a divisão de números inteiros: menciona que dois números são dados, o dividendo e o divisor, estabelece uma convenção [110-112] na representação deles [$b \div a$] e aponta os demais elementos que fazem parte da decomposição de um número inteiro – o quociente e o resto [117-119].

110 Benny: Então o que eu gostaria é dividir, eu gostaria de fazer b entre a
111 (Escreve na lousa "$b \div a$".)
112 Eu vou eleger fazer assim, b entre a.
113 Mas, o que isso vai significar?
117 [...] Dados dois números a, b inteiros, não é? [...]
118 Vai significar que eu vou ter dois números aqui tal que este
119 b vai ser possível escrever como qa mais r.

Benny opta por ilustrar os elementos da divisão por meio de um exemplo [121-124] e decompõe cinco de duas formas diferentes (KoTp1 – conhecer que, para decompor um número de diferentes formas, pode-se fixar o divisor e variar o quociente e o resto) e explica que é possível escrever cinco de diferentes maneiras, ao variar o quociente e o resto [127-130], fixando dois como o divisor (Figura 2). Tal discussão é importante para os futuros professores, principalmente considerando que muitos alunos apresentam dificuldades com a decomposição de números inteiros (Soares & Machado, 2017).

121 (Escreve na lousa)
122 Benny: Cinco entre dois, usando o conhecimento do
123 colégio, como poderia escrever cinco entre dois, por exemplo? [...]
124 Usando este b e este a. [...]
127 Cinco seria o quê? Seria dois, por dois, mais quanto? Mais um, não? Mas eu poderia
128 também escrever ele, vejam que a é este, não? Então aqui seria dois. Se aqui eu ponho
129 três, o que vai ocorrer aqui? Mais menos um. E assim eu posso testar um monte de
130 coisas, não é verdade?

$$5 \div 2$$
$$5 = 2(2) + 1$$
$$5 = 3(2) + (-1)$$

Figura 2 – Diferentes formas de escrever 5, considerando 2 como divisor escritas na lousa

O formador pontua que será necessário fazer com que o quociente e o resto sejam únicos, respeitando as condições do TADE. Para isso, Benny ressalta que não é possível controlar q, mas é possível controlar r, estabelecendo a condição $0 \leq r < |a|$ [132-136] (KoTd1 – conhecer que o valor do resto é limitado na divisão euclidiana). Ao estabelecer essa condição, o formador retoma o significado do símbolo $\leq$ e a definição de valor absoluto [137-141] (KoTd2 – conhecer a definição de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o seu simétrico), tendo por base uma construção dos números inteiros que considera $\mathbb{Z} = \mathcal{P} \cup -\mathcal{P} \cup \{0\}$[28]. Ao referir que não há outra possibilidade senão a estar em $\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}$ ou $\{0\}$, Benny retoma o princípio da tricotomia [145-147] (KoTd3 – conhecer que vale a propriedade da tricotomia para os números inteiros, isto é, cada número inteiro é positivo, negativo ou zero).

132 Benny: Mas eu quero forçar [...] esta expressão [...] para esses terem que ser únicos
133 (Aponta para q e r.)
134 Eu vou querer que sejam únicos. Este q não vou ter forma de controlar, mas
135 [...] este r eu vou querer que seja assim
136 (Escreve a expressão $0 \leq r$.)
137 que seja, o que significa isso? Zero menor ou igual que r, o que significa? r é zero ou...
138 o zero é menor que r. Se lembram disso? Ou que este seja menor... lembrem que aqui
139 estou assumindo esse valor absoluto de a. Esse é o que eu quero, não?
140 (Escreve a expressão $0 \leq r < |a|$.)
141 Isso a gente já conhece o que significa, não? [...]
145 Est: Igual a a...
146 Benny: Igual a a se a estava em $\mathcal{P}$, era zero, se a era zero, e a era $-a$, se a estava em $-\mathcal{P}$. Se
147 lembram que não tinha outra possibilidade?

[28] Para maiores detalhes, ver Almeida e Ribeiro (2019).

Benny então justifica por que o divisor não pode ser zero [150-154] (KoTd4 – conhecer que o divisor deve ser diferente de zero), retomando uma propriedade da relação $<$ entre números positivos [154] (KoTd5 – conhecer que um número não se relaciona com ele mesmo através da relação $<$) e como demonstrá-la , chegando a uma contradição com a definição de $\mathcal{P}$[29] [154-160] (KPMwv1 – conhecer como demonstrar por contradição que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo).

150 Benny: [...] se este for zero
151 (Aponta o módulo de a.)
154 nós já vimos que um cara não pode ser menor que ele mesmo. Se lembram? a não pode
155 ser menor que a. Por quê? Porque se for assim, $a - a$, que é zero, estaria em $\mathcal{P}$. Mas
156 nós já havíamos visto que o zero não pode estar em $\mathcal{P}$. Por decreto. Entendem? E,
157 portanto, aqui o zero automaticamente não vai satisfazer, não vai poder fazer isso com
158 zero, não é? Então, se eu quero fazer isso, automaticamente tenho que tirar o zero, não?
159 Diria, dados a, b em $\mathbb{Z}$, com a diferente, o professor dizia, vamos dividir com a
160 diferente de zero, não?

O formador então enuncia o TADE, pontuando que o divisor precisa ser diferente de zero e que existem q e r, tal que $b = qa + r$, com $0 \leq r < |a|$ [168-172]. A seguir Benny evidencia saber que a demonstração do teorema deve ser feita em duas partes, existência e unicidade [173-176] (KPMwp1 – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes).

168 Benny: [...] essa vai ser minha divisão de Euclides. Dados dois números, onde
169 esse é diferente de zero,
170 (Aponta o a no enunciado do teorema.)
171 então eu quero achar q e r tal que se cumpra tudo isso, e
172 com esta condição, está bem? [...] Isso significaria dividir.
173 Então vejam que aqui temos duas coisas, não? Temos existência,
174 existência e o que mais?
175 Est: Únicos.
176 Benny: Isso. Unicidade. Ou seja, temos que provar que existem, e que de fato, são únicos. Está bem?

Benny então retoma o exemplo $5 \div 2$ (Figura 2), assinalando que na primeira decomposição $(5 = 2(2) + 1)$ o quociente e o resto cumprem as condições do teorema, enquanto na segunda decomposição $(5 = 3(2) + (-1))$ isso não acontece. Dessa forma, Benny está chamando a atenção dos estudantes para a existência de diversas possibilidades de decomposição para um mesmo número, sem que essas decomposições atendam a condição $0 \leq r < |a|$, por meio de um exemplo [178-188] (KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r < |a|$ do TADE).

178 Benny: Aqui o que está furando?
179 (Aponta para $3(2) + (-1)$ escrito na lousa.)
180 Por exemplo, aqui, este está bonitinho.

[29] Para o conjunto $\mathcal{P}$ são consideradas três propriedades: zero não pertence a $\mathcal{P}$, 1 pertence a $\mathcal{P}$ e, se existem dois elementos em $\mathcal{P}$, a soma dos dois estará em $\mathcal{P}$.

181 (Aponta para $2(2) + 1$ escrito na lousa.)
182 Um maior ou igual que zero, menor que quanto? Que dois, não é verdade? Aqui está
183 bem, não é? Se cumpre. Aqui que está furando.
184 (Aponta a expressão $3(2) + (-1)$.)
185 Est A divisão não é euclidiana por causa do...
186 Benny Aqui o que está furando, a respeito disso, o que está furando?
187 Est Que o resto é -1.
188 Benny Claro, que o resto é -1.

Aqui, o formador pode estar retomando o exemplo e frisando a necessidade de que o quociente e o resto precisam estar nas condições do teorema, por saber que isso nem sempre é evidente para os estudantes (KFLMs1 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única). Benny estimula os estudantes a pensarem em outras decomposições possíveis [191-193], escolhendo um novo valor para o quociente na decomposição de cinco, considerando dois como divisor [194-195], e novamente ressalta que tal decomposição não está de acordo com as condições do TADE [205-210].

191 Benny: Bom, e aqui você pode gerar
192 outro exemplo, não? Se eu quero... tenta outro exemplo aqui, vejam, tenta, imagina
193 qualquer coisa, aqui, o dois está fixo, não? Aqui bota, este q, não falo nada de q.
194 Então, se por exemplo, aqui boto -1 (na posição de q), quanto tenho que botar
195 aqui (na posição de r)? Se aqui boto -1, quanto tenho que botar aqui?
200 Est: Sete. Sete.
205 Benny: O que está furando aqui? Que sete não é menor que dois. Entendem?
206 Ou seja, eu posso escrever essa expressão de muitas maneiras seguramente.
207 De muitas maneiras. As que eu quiser. Isso vai ficar evidente na prova. Mas vai se
208 única, se eu coloco essa expressão, entende?
209 (Aponta para $0 \leq r < |a|$.)
210 Essa é a ideia do teorema.

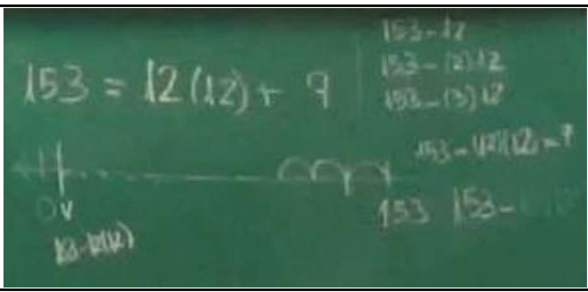
A seguir Benny afirma que o TADE não apenas garante a existência e a unicidade do quociente e do resto, mas também indica uma forma de encontrá-los [219-221] (KPMwp2 - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto).

219 Benny: O teorema diz que existem, não é? O teorema é (sobre) existência e unicidade.
220 Mas o objetivo é achar eles, não? Qual é o q e qual é o r. Eu já sei que existem,
221 não é? E o teorema diz mais: vão ser únicos.

Benny então fornece um novo exemplo de divisão, evidenciando o quociente e o resto [224-229]. Ele faz os cálculos com os estudantes e busca ilustrar a decomposição de 153 geometricamente.

224 Benny: Então, por exemplo, dados estes números
225 (Escreve $b = 153$ e $a = 12$ na lousa.) [...]
227 Quanto seria o q e quanto seria r? Como eu faço?
228 Est: q é 12.
229 Benny: 12, multiplicado por a, que seria... 12 neste caso, igual, mais quanto? r, que seria quanto? 9, não?

Benny busca representar o algoritmo da divisão geometricamente (Figura 3), mostrando conhecer diferentes representações para o algoritmo [244-252] (KoTr1 – conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9).



Benny representa o algoritmo da divisão euclidiana geometricamente, tomando 153 em uma reta numérica, considerando 12 saltos de mesmo tamanho e destacando o resto 9.

Figura 3 – Decomposição de 153, considerando 12 como divisor, escrita na lousa

244 Benny: Agora seria bom dar uma ilustração da forma ou do método da prova.
245 Aqui, por exemplo
246 (Desenha uma reta.)
247 Aqui está meu zero.
248 (Marca o zero na reta.)
249 O que está dizendo isso daqui?
250 (Aponta para $153 = 12(12) + 9$ escrito na lousa.)
251 Eu tenho o 153 por aqui.
252 (Marca 153 na reta.)

Ao representar geometricamente, além de estabelecer conexão entre a divisão e a subtração [253-255] (KoTd6 – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, resolvendo a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas), Benny também está trabalhando com o sentido de medida na divisão [255-266] (KoTd7 – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso se encontra associado a ver quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição), considerando quantas vezes 12 cabe em 153 e destacando o significado geométrico do resto.

253 Benny: O que estou dizendo é que você tem que fazer $153 - 12$. Seria uma
254 primeira operação, não é? Depois, $153 - 2(12)$, está bem? Aqui seria 1, aqui seria 2.
255 Então tiro, digamos assim, um pedacinho, do ponto de vista geométrico. 153, vou para
256 cá, não é? Um
257 (Mostra um salto na reta.)
258 não é verdade? Este cont... a pergunta vai ser, continua positivo ou não? Sim. Já
259 sabemos que é positivo, não? [...] 153 menos este número, vejam, 12 multiplicado por
260 12. Quanto me dá isso?
261 Est: 9.
262 Benny: Ou seja, quer dizer que... uma, duas vezes, três vezes... até por aqui, não é? Aqui seria
263 $153 - 12(12)$, entendem? Sim? Que vai me dar 9. E o seguinte, o que acontece com o
264 seguinte? O que acontece com $153 - 13(12)$?
265 Ele... ele cruza o zero, não? Esse é o momento em que paro, não?
266 E esse é o r que escolho, entendem? Este é o r.

Ao ilustrar o algoritmo geometricamente, Benny evidencia conhecer o aspecto exaustivo da decomposição do TADE, no sentido de que o processo de ir medindo 12 dentro de 153, em algum momento, termina [253-266] (KoTp2 – conhecer como decompor o dividendo encarando a divisão como medida), obtendo uma expressão cujos quociente e resto se encaixam nas condições do teorema. Isso pode ser ainda entendido como uma espécie de tentativa e erro, até obter a decomposição desejada de 153.

O exemplo utilizado por Benny permite aos estudantes visualizarem o processo de divisão como medida, evidenciando a tentativa de promover esse conhecimento nos futuros professores (*Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* - Conhecer o foco da divisão como medida, que pode ser mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores, ao abordar o TADE).

Ao iniciar a demonstração da existência do TADE, Benny divide a demonstração em três casos (KPMwp3 – conhecer formas de proceder em matemática, empregando a estratégia heurística da demonstração de casos), incluindo um caso trivial. O formador menciona a necessidade de considerar um conjunto X que admita menor elemento [299-300] (KPMwp4 – conhecer uma forma de construir um conjunto X que satisfaça a relação $a = bq + r$), tentando mostrar aos estudantes que esse menor elemento será o resto na divisão.

Aqui, o formador pode estar ciente de que o conjunto gerado na demonstração do TADE geralmente é apresentado, pelos livros e por parte dos professores das disciplinas de Teoria dos Números, como algo abstrato e, por isso, Benny se utiliza novamente do exemplo da decomposição de 153, considerando o divisor 12, com objetivo de facilitar o entendimento dos estudantes [299-312] (KFLMs2 – conhece a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE).

299 Benny: Lembrem-se que a regra de ouro significa definir um X grandão
300 que seja não-vazio e aí pegar seu elemento mínimo. Segundo o que nós fizemos aqui
301 (Aponta o exemplo $153 \div 12$ escrito na lousa.)
302 e dava, qual era o último? Era o r, não? Esse é o mínimo.
303 O b é esse (153) e o a é esse (12).
304 Pergunto, para seguir trabalhando, que X vocês consideram?
305 Vejam, $153 - 12$, $153 - 2(12)$, quem está variando aqui? O b está fixo e o a está fixo.
306 Quem está variando?
307 Est: $q.\,q.$
308 Benny: Este está variando. Este coeficiente. Este é um, este é dois, este é três, não é?
309 E então onde está variando? Um está em $\mathcal{P}$, o dois está em $\mathcal{P}$, etc., etc. Então, que tal
310 se eu considero o X, mais ou menos seria b [...] menos o a, sempre posto à direita, eu
311 diria x por a,assim, onde estou definindo o conjunto, entendem? Onde X vai estar? Está
312 onde? Em $\mathcal{P}$. Entendem?

Podemos observar que Benny tem o cuidado de explicitar o conjunto X para o exemplo dado anteriormente (Figura 4); o conjunto, nesse caso, é $X = \{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$. Assim, o formador não constrói apenas um conjunto abstrato, ele exemplifica como seria esse conjunto, utilizando um dividendo e um divisor específicos, o que torna o conjunto mais fácil de visualizar (KMTe2 – conhecer o exemplo concreto $(153 \div 12)$ para a visualização do conjunto X= $\{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$).

$$X = \{153 - x12\}$$
$$\min X = 153 - q12 = 9$$

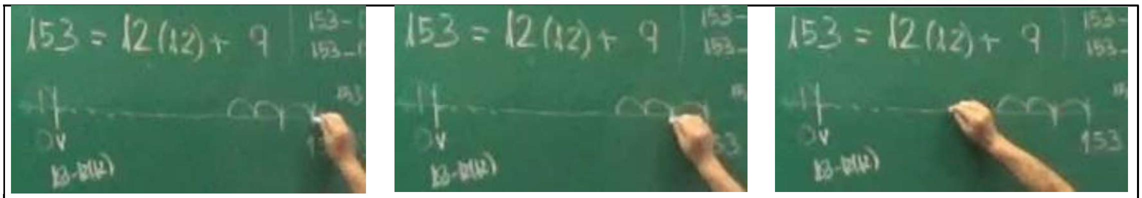
Figura 4 – O conjunto X para a divisão de 153 por 12

Ainda mais, o formador desenvolve, no canto direito da lousa, uma série de cálculos auxiliares (Figura 5), variando os valores de x em $\mathcal{P}_0$. Dessa forma, é possível observar que, após algumas linhas, se chega a um valor que satisfaz a condição do resto r do TADE: esse valor é o mínimo do conjunto $X = \{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$. Ademais, Benny ainda calcula a próxima linha para deixar claro aos estudantes que mais um passo gera um valor que não se encaixa no TADE. É possível perceber também a escrita $\min X = 153 - q12 = 9$, a qual evidencia que esse q é aquele do TADE, o que sugere antecipadamente que é necessário primeiro encontrar o valor de r para, *a posteriori*, obter o valor de q.

$$153 - 12$$
$$153 - (2)12$$
$$153 - (3)12$$
$$153 - (12)12 = 9$$
$$153 - (13)12 = -3$$

Figura 5 – Cálculos auxiliares na obtenção do resto

A figura 6 ilustra o processo descrito nos dois parágrafos anteriores, no qual Benny posiciona todos os elementos de X na reta, da direita para a esquerda, até exibir o elemento minimal. Em conjunto com os cálculos na figura 5, isso deixa claro que o conjunto X em questão é finito (KoTp3 - conhecer as características do conjunto $X = \{153 - x12\}$, criado para a divisão de 153 por 12).



Benny utiliza a reta para exibir os elementos do conjunto X para a divisão de 153 por 12, posicionando seus elementos na reta, da direita para a esquerda.

Figura 6 – O conjunto X para a divisão de 153 por 12

No início da aula 5, Benny retoma o TADE, escrevendo-o na lousa, e relembra os estudantes sobre a necessidade de separar a demonstração da existência do quociente e do resto em três casos. Os três casos considerados são $0 \leq b < |a|$, $b < 0$ e $b \geq |a|$. Como exemplo para o caso trivial, Benny toma a decomposição de 3, considerando -7 como divisor (Figura 7), o que resulta em um quociente igual a zero e resto igual ao dividendo (KMTe3 – conhecer um exemplo de divisão ($3 \div -7$) que se encaixa no caso trivial ($0 \leq b < |a|$) da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE).

Ex: $b = 3 \quad a = -7 \quad 0 \leq b < |a|$

$$3 < |-7| = 7$$
$$3 = (-7)0 + 3$$

Figura 7 - Benny exemplifica na lousa o caso trivial $0 \leq b < |a|$

Para exemplificar o caso em que $b \geq |a|$, Benny toma o dividendo 19 e o divisor -3 (KMTe4 – conhecer um exemplo de divisão ($19 \div -3$) que se encaixa no caso $b \geq |a|$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE), e escreve o conjunto associado $X = \{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ (KMTe5 - conhecer um exemplo concreto para a visualização do conjunto X= $\{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$). Ele questiona os estudantes sobre o quociente e o resto, e solicita que verifiquem que a divisão está nas condições do caso. Na sequência, Benny pede que os estudantes escrevam os elementos do conjunto X (Figura 8) a partir do exemplo particular (KFLMs2 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE).

Ex: $b = 19 \quad a = -3 \quad b \geq |a|$
$19 = |-3|6 + 1$

$$X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$$

Figura 8 - Exemplo ($19 \div -3$) escrito na lousa

O formador ilustra geometricamente (figura 9) tal conjunto (KoTr2 – conhece uma forma de representar o conjunto $X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$ geometricamente, destacando os elementos desse conjunto), de maneira a obter $X = \{16, 13, 10, 7, 4, 1\}$, o que resulta em $r = 1$ e $q = 6$. É importante observar que, nesse caso, se obtêm um quociente positivo e a decomposição $b = |a|q + r$. Isso é feito para que se possa adaptar a ideia de medir quantas vezes o (módulo do) divisor cabe dentro do dividendo.

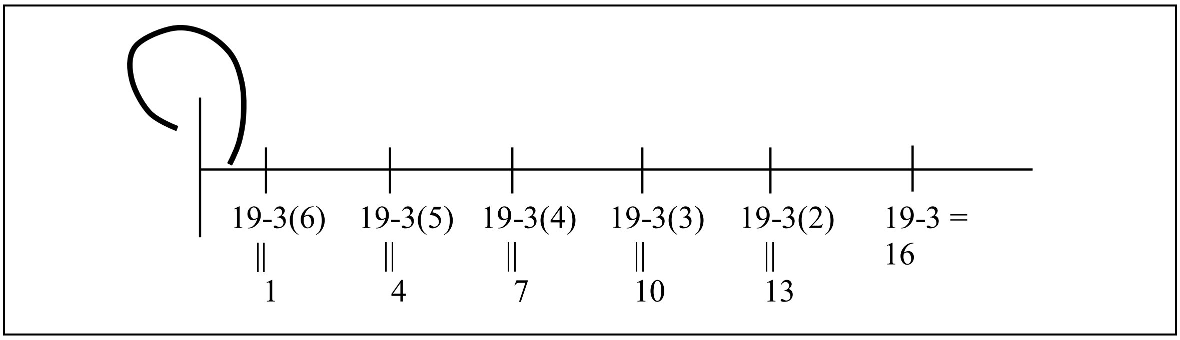


Figura 9 - Representação geométrica do conjunto X para ($19 \div -3$), escrita na lousa

Na sequência, Benny apresenta um corolário a partir do caso em que $b \geq |a|$, observando que a decomposição $b = |a|q + r$ não é exatamente a mesma do TADE; porém, se o divisor for positivo, tem-se que as decomposições coincidem; se o divisor for negativo, então basta trocar o sinal do quociente obtido anteriormente. Como exemplo, o formador toma o dividendo 23 e o divisor -5 (figura 10) e escreve as respectivas decomposições no que diz respeito ao corolário supracitado: a decomposição do TADE $23 = (-5)(-4) + 3$ e a decomposição considerando o módulo do divisor $23 = |-5|4 + 3 = 5(4) + 3$ (KoTp4 – conhecer as duas formas de decompor 23, considerando o divisor positivo ou negativo).

Ex: $23 \div -5$

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < |a|$$
$$|a| = 5$$
$$\begin{aligned} 23 &= 5(4) + 3 \\ &= (-5)(-4) + 3 \end{aligned}$$

Figura 10 - Decomposições de 23, considerando o divisor para -5, escritas na lousa

Ao iniciar o caso b negativo, Benny exemplifica o subcaso do divisor positivo (figura 11), considerando o dividendo -47 e o divisor 13 (KMTe5 – conhece um exemplo de divisão $(-47 \div 13)$ que se encaixa no caso $b < 0$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE). Primeiro, ele considera a decomposição do oposto de -47, que é $47 = 3(13) + 8$, e multiplica por -1, obtendo $-47 = -3(13) - 8$; e então soma e diminui nessa expressão o divisor 13, resultando na decomposição $-47 = -3(13) - 13 + 13 - 8 = (-3 - 1)(13) - 8 + 13 = (-4)13 + 5$. Isto implica que o resto e o quociente procurados são, respectivamente, -4 e 5.

Ex: $b = -47 \quad a = 13$ $\qquad\qquad b = qa + r$

$$0 \leq r < |a|$$

$$\begin{aligned} -47 &= (-3)13 - 8 \\ &= (-3)13 - 13 + 13 - 8 \\ &= (-4)13 + 5 \end{aligned}$$

Figura 11 - Decomposições de -47, considerando o divisor positivo 13, escritas na lousa

A Tabela 4 a seguir apresenta o *Mathematical Knowledge* de Benny, revelado durante a apresentação e a prova do TADE.

Tabela 4 – O *Mathematical Knowledge* revelado por Benny

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1 – conhecer que o valor do resto é limitado na divisão euclidiana KoTd2 – conhecer a definição de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o seu simétrico KoTd3 – conhecer que vale a propriedade da tricotomia para os números inteiros, isto é, cada número inteiro é positivo, negativo ou zero KoTd4 – conhecer que o divisor deve ser diferente de zero KoTd5 – conhecer que um número não se relaciona com ele mesmo através da relação $<$

		KoTd6 – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, resolvendo a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas
		KoTd7 – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso se encontra associado a ver quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição
	Procedimentos	KoTp1 – conhecer que, para decompor um número de diferentes formas, pode-se fixar o divisor e variar o quociente e o resto
		KoTp2 – conhecer como decompor o dividendo, encarando a divisão como medida
		KoTp3 - conhecer as características do conjunto $X = \{153 - x12\}$, criado para a divisão de 153 por 12
		KoTp4 – conhecer as duas formas de decompor 23, considerando o divisor positivo ou negativo
	Registros de representação	KoTr1 – conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9
		KoTr2 – conhecer uma forma de representar o conjunto $X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$ geometricamente, destacando os elementos desse conjunto
KPM	Formas de proceder	KPMwp1 – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes
		KPMwp2 - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto
		KPMwp3 – conhecer formas de proceder em matemática, empregando a estratégia heurística da demonstração de casos
		KPMwp4 – conhecer uma forma de construir um conjunto X que satisfaça a relação $a = bq + r$
	Formas de validar	KPMwv1 – conhecer como demonstrar, por contradição, que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo

Observamos a predominância de conhecimentos relacionados ao KoT, nas categorias *definições, propriedades e fundamentos*, *procedimentos* e *registros de representação* e, com menos frequência, relacionados ao KPM, nas categorias *formas de proceder* e *formas de validar* em matemática. O conhecimento matemático de Benny, em especial no âmbito do KoT, molda as explicações fornecidas sobre o TADE, à medida que o formador inclui na discussão conceitos como tricotomia, conexões intraconceituais entre a divisão e a subtração, explora o sentido de divisão como medida, elabora uma discussão aprofundada dos elementos e das características do conjunto X gerado para a demonstração, e busca representações geométricas para explicar o algoritmo. Tais discussões não são inerentes à demonstração do TADE, mas certamente enriquecem a compreensão dos estudantes sobre o tópico divisibilidade.

Na Tabela 5 podemos observar o *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny como professor de Matemática em nível universitário (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2019; Vasco & Climent, 2018).

Tabela 5 – O *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny na perspectiva do professor universitário

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KMT	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r < \lvert a \rvert$ do TADE KMTe2 – conhecer o exemplo concreto $(153 \div 12)$ para a visualização do conjunto X= $\{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ KMTe3 – conhecer um exemplo de divisão $(3 \div -7)$ que se encaixa no caso trivial $(0 \leq b < \lvert a \rvert)$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE KMTe4 – conhecer um exemplo de divisão $(19 \div -3)$ que se encaixa no caso $b \geq \lvert a \rvert$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE KMTe5 - conhecer um exemplo concreto para a visualização do conjunto X= $\{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$ KMTe5 – conhecer um exemplo de divisão $(-47 \div 13)$ que se encaixa no caso $b < 0$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE
KFLM	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única KFLMs2 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE

Fica evidenciado o foco de Benny na apresentação de exemplos que permitam compreender melhor a demonstração do TADE, incluindo aqueles que ilustram os casos em que a demonstração é dividida e aqueles ilustrativos do conjunto gerado para a demonstração, predominando a categoria *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos* do KMT. Também observamos o conhecimento de Benny sobre as dificuldades dos estudantes, incluso no KFLM, e provavelmente oriundo de seus muitos anos de experiência docente – essas explicações, e a forma como ocorrem, influenciam os conhecimentos matemáticos dos alunos (Charalambous, 2009). O fato de Benny estar ciente das dificuldades frequentes dos estudantes na compreensão do TADE pode explicar a ênfase e a importância que o formador dá aos exemplos, de forma que seu KFLM e KMT estão profundamente relacionados.

Tabela 6 – O *Pedagogical Content Knowledge* do formador revelado por Benny

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para construir o conhecimento e a identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT1 - Conhecer sequências ou focos (a divisão como medida) que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade, ao abordar o TADE

O conteúdo identificado como parte do *Pedagogical Content Knowledge* do formador (Tabela 6) faz parte do subdomínio *Knowledge of the features of the professional development* *of mathematics teachers* e está relacionado com o conhecimento de focos mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores sobre divisibilidade. Ao focar na divisão como medida, Benny está dedicando tempo e decidindo que essa é uma boa forma de explicar as justificativas para o algoritmo da divisão euclidiana (Contreras et al., 2017).

Considerações finais

As explicações do professor esclarecem o conteúdo e influenciam os conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelos estudantes (Charalambous, 2009). Buscando responder nossa questão de pesquisa “Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?”, foi possível obter indicadores do conhecimento especializado de Benny, ao discutir o TADE, com destaque para seu KMT e KFLM.

Porque os domínios e subdomínios do MTSK estão diretamente relacionados, também é importante analisar o *Mathematical Knowledge* do formador. Dessa forma, encontramos evidências de KoT e KPM, conhecimentos que moldam e enriquecem a discussão e a demonstração do TADE.

Sendo esse um teorema que recebeu bastante destaque nas aulas de Benny, não podemos deixar de notar o cuidado do formador e o modo como ele buscou preparar os estudantes para discutir o TADE, desde a aula 2, debatendo relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação (Almeida & Ribeiro, 2019), conceitos necessários para a demonstração pretendida.

Quanto ao PCK de Benny como formador, seu *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* possibilitou a escolha de um foco talvez menos usual (divisão como medida) nas demonstrações apresentadas por matemáticos para estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática (Lai & Weber, 2014), mas certamente mais contributivo para a construção do conhecimento especializado dos futuros professores (Policastro, Ribeiro, & Fiorentini, 2019).

Os indicadores de conhecimento do formador aqui obtidos permitirão, em investigações posteriores, comparar o conhecimento mobilizado por Benny com aquele mobilizado por outros formadores com diferentes perfis, ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, bem como elaborar um compilado de indicadores do conhecimento especializado desses formadores no tópico da Divisibilidade. Além disso, uma importante questão que permanece em aberto se refere a como o MK e o PCK do formador nesse tópico afetam o conhecimento dos futuros professores e como podem ser articulados para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, *28*(2), 125-148.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2018). Conhecimento especializado do formador de professores de matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas* (pp. 194-214). Brasília, DF: SBEM.

Appova, A., & Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 179-204. DOI 10.1007/s10857-017-9385-z

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Beswick, K., & Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *Paper presented at the12th International Congress on Mathematics Education*, Coex, Seoul, Korea.

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.) *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 41–82). Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Series Ed.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquia.: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, R. C., & Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. In F. Imbernón, A. Shigunov Neto, I. Fortunato (Eds.), *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas* (pp. 324-341). São Paulo: Edições Hipótese.

Chaparin, R. O. (2010). *Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS.* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Charalambous, C. Y. (2009). Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: An exploratory study. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece: PME.

Chicote, R. S., Deixa, G. V. (2020). Geometric Thinking of Future Mathematics Teachers in Mozambique: a case study from Rovuma University. *Tangram*, *3*(1), 62-73. DOI: https://doi.org/10.30612/tangram.v3i1.11195

Contreras, L.C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M.C. y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Doumbia, C. O., Carvalho, G. S., & Almouloud, S. A. (2020). Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z. *Tangram*, *3*(2), 102-126. DOI: 10.30612/tangram.v3i2.11882

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L.C. (In press). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 335–361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kelchtermans, G., Smith, K., & Vanderlinde, R. (2017). Towards an 'international forum for teacher educator development': an agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education*, *41*(1), 120-134.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 93-108. doi: 10.1007/s10649-013-9497-z

Montes, M., Ribeiro, C., Carrillo, C., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: an unpacked example. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 315-322). Szeged, Hungary.

Nye, B., Konstantopoulos, S., Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pizysieznig, A. H. (2011). *Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Policastro, M. S., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2019). Mathematics Teachers' Specialized Knowledge on division: a focus on knowledge of topics and structures of mathematics. Graven, M., Venkat, H., Essien, A. & Vale, P. (Eds). (2019). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216). Pretoria, South Africa: PME.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 277-310.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Soares, N. C.; Machado, S. D. A. (2017). Resignificando as operações com números naturais com alunos "em dificuldade" do ensino fundamental. *Ensino da Matemática em Debate*, *3*(2), 24-36.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540–563.

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson Play in Mathematics Education*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3549-5

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Retrieved from http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf. September 5, 2018.

Contribuições dos Autores

1.ª autora: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

2.º autor: conceitualização; análise formal; investigação; metodologia; supervisão; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria dos Números é uma das disciplinas que tem grande potencial para o desenvolvimento de importantes ideias matemáticas dos futuros professores, relacionadas com os números naturais e com os números inteiros (RESENDE, 2007). Em particular, nesta tese, nos concentramos na divisibilidade e no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE).

Dadas as várias dificuldades dos alunos com a divisão, inclusive na compreensão de procedimentos algorítmicos relativos à operação de divisão e à decomposição de números (CHAPARIN, 2010; PIZYSIEZNIG, 2011; SOARES; MACHADO, 2017), e dos futuros professores de Matemática para compreender a divisibilidade (BROWN; THOMAS; TOLIAS, 2002; ZAZKIS; CAMPBELL, 1996a; ZAZKIS; SINCLAIR; LILJEDAHL, 2013), consideramos que o trabalho do formador é imprescindível para que elas possam ser sanadas, ou pelo menos diminuídas durante a formação inicial, o que demanda desenvolver as dimensões especializadas do conhecimento do (futuro) professor (CARRILLO et al., 2018).

Para promover o conhecimento especializado nos futuros professores, cabe ao formador um conhecimento especializado próprio. Neste sentido, com a questão de pesquisa desta investigação, buscamos compreender melhor o conhecimento do formador neste tópico.

Um dos diferenciais de nossa investigação é que, diferente de outras pesquisas que buscam o desenvolvimento de modelos de conhecimento do formador, a exemplo do *Mathematics' Teacher Trainer Specialised Knowledge* (CONTRERAS et al., 2017) e do *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers* (ZOPF, 2010), trabalhamos com formadores que também são matemáticos, e que não possuíam contato com o referencial teórico da pesquisa. Este, aliás, é o perfil representativo de formador observado nas universidades públicas brasileiras, assim como em outros países, com sua formação acadêmica voltada aos conteúdos da área de conhecimento da Matemática, e tendo pouco ou nenhum contato com aspectos inerentes à formação de professores (COURA; PASSOS, 2017). Neste contexto, compreender as práticas e os conhecimentos desses sujeitos se torna fundamental.

Dessa forma, realizamos um estudo de casos múltiplos envolvendo dois formadores, Andre e Benny, o primeiro com quatro anos de experiência, e o segundo com mais de 20 anos de experiência no Ensino Superior. O estudo de caso foi realizado em uma perspectiva instrumental, porque o interesse principal da investigação foi agregar informações à teoria existente sobre o conhecimento do formador, em particular sobre seu conhecimento especializado.

Para a apresentação e análise das informações, elegemos a modalidade de tese *multipaper*, a fim de possibilitar a discussão com os pares e maior divulgação e alcance dos resultados da pesquisa durante sua realização. Assim, foram escritos três artigos de análise dos dados, cujo pano de fundo foi o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE), e um artigo de meta-análise, no qual buscamos a discussão e o aprofundamento dos resultados obtidos.

Neste quarto artigo, que apresentamos nas próximas páginas, intitulado *Meta-análise sobre o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana*, buscamos responder a questão de pesquisa da tese, tendo por base os resultados obtidos e expressos nos artigos anteriores.

Meta-análise sobre o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao abordar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana[30]

Meta-analysis of the Mathematics Teacher Educator specialized knowledge when approach the Euclid's division algorithm theorem

Marieli Vanessa Rediske de, Almeida [1]

Miguel, Ribeiro [2]

Dario, Fiorentini[3]

[1]Doutoranda no Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática: PECIM, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, Brasil. marieli.almeida@outlook.com

[2]Professor associado: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, Brasil. cmribas78@gmail.com

[3]Professor associado: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, Brasil. dariofiore@terra.com.br

Resumo:

Diante da importância do papel do formador de professores de Matemática e da escassez de estudos sobre seu conhecimento, esta pesquisa se propõe investigar o conhecimento do formador na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK), tendo a seguinte questão norteadora: *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?* Nesse sentido, realizamos a meta-análise de três artigos que versaram sobre o conhecimento especializado de dois formadores ao ensinar divisibilidade. Os resultados da meta-análise realizada incluem indicadores do conhecimento especializado do formador que é matemático, e não possui preparação prévia para este papel.

Palavras-chave: Formador de professores, Matemático, Licenciatura em Matemática, Conhecimento especializado, *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, Meta-análise.

Recibido en día/mes/año (lo asigna la revista)
Aceptado en día/mes/año (lo asigna la revista)

1. Problemática da pesquisa

A pesquisa sobre a docência no Ensino Superior, nos cursos de licenciatura, ainda apresenta iniciativas tímidas, no Brasil e em outros lugares, especialmente quando comparada com a

[30] Este artigo deverá ser submetido à RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, ISSN: 1665-2436. A formatação e as normas técnicas aqui apresentadas seguem as indicações desta revista.

produção sobre a docência na educação básica (Gatti et al., 2019; Loughran, 2014; Superfine & Li, 2014). Dentre os diversos fatores que impactam a formação do futuro professor, o formador ainda é um dos mais obscurecidos nas investigações e nas discussões sobre o tema.

Uma das questões que ainda surge nas discussões sobre os formadores de professores consiste em debater quem pode e quem não pode ser considerado formador. Alguns autores se referem ao formador como qualquer profissional envolvido e responsável pela formação docente (e.g. Kelchtermans, Smith, & Vanderlinde, 2017), enquanto outros argumentam que os formadores, além de serem professores de professores, são aqueles que ensinam a ensinar (Loughran, 2013).

A principal função dos cursos de formação de professores, não apenas no Brasil, mas em diversos países, tem sido a preparação da dimensão matemática, enquanto a formação docente fica em segundo plano (Dias, Lando, & Freire, 2012). Em particular no contexto brasileiro, historicamente, os cursos de formação de professores de matemática priorizam o conteúdo matemático em detrimento da preparação dos professores para a educação básica (Gomes, 2016). Para se tornar professor de Matemática, o estudante obtinha o grau de bacharel nos três primeiros anos de curso, e depois cursava um ano de disciplinas didático-pedagógicas, um modelo de formação que ficou conhecido como 3+1 (Moreira, 2012).

Ainda hoje, nas universidades brasileiras, o departamento responsável pela formação matemática, tanto para os cursos de bacharelado[31] quanto para os de licenciatura[32], habitualmente é o departamento de Matemática, no qual geralmente trabalham os matemáticos e outros profissionais formados em áreas afins.

Considerando que os cursos de formação de professores de Matemática devem incluir disciplinas de Cálculo diferencial e integral, Álgebra Linear, fundamentos de Análise, fundamentos de Álgebra, fundamentos de Geometria e Geometria Analítica (Parecer CNE/CES 1.302/2001), é inevitável considerar o papel fundamental dos matemáticos na formação inicial dos professores, de forma que estamos de acordo com Kelchtermans, Smith, e Vanderlinde (2017), considerando o matemático como formador, devido também a sua responsabilidade e envolvimento na formação (Leikin, Zazkis & Meller, 2017; Yan, Marmur & Zazkis, 2020).

Assumindo que o conhecimento do professor é especializado, na perspectiva do modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018), e assumindo que este conhecimento especializado começa a ser desenvolvido na formação inicial, cabe ao formador um conhecimento especializado próprio. O MTSK é um modelo de análise do conhecimento do professor de Matemática, que concebe este conhecimento como especializado e composto por três domínios: conhecimento matemático (*Mathematical Knowledge* - MK), conhecimento pedagógico do conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* - PCK), e crenças (*beliefs*).

Desde a sua gênese, o modelo MTSK vem sendo expandido e aprofundado, de modo a caracterizar o conhecimento especializado do professor de e que ensina Matemática em diferentes tópicos, na Educação Básica[33] (Policastro et al., 2020; Rojas, Flores, & Carrillo, 2015; Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2015) e no Ensino Superior (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2019; Vasco e Climent, 2020). Uma vertente complementar é a investigação do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática (e.g. Escudero-Ávila

---

[31] Curso voltado para a formação de futuros pesquisadores e docentes do ensino superior na área de Matemática.
[32] Curso voltado para a formação de professores de Matemática que irão atuar nos Anos Finais do Ensino Fundamental (11-14 anos) e no Ensino Médio (15-17 anos).
[33] No Brasil, a Educação Básica compreende a Educação Infantil (0-5 anos), o Ensino Fundamental (6-14 anos) e o Ensino Médio (15-17 anos).

et al. [no prelo]), com a qual pretendemos contribuir, tendo em vista particularidades do formador que é matemático.

Por outro lado, levando em conta que a Teoria dos Números propicia aos futuros professores revisitar processos matemáticos básicos, estimulando a reflexão sobre o próprio conhecimento matemático (Zazkis & Campbell, 1996; Almeida & Ribeiro, 2019), realizamos uma investigação sobre o conhecimento de dois formadores de professores, matemáticos, que ensinam Teoria dos Números para alunos de licenciatura em Matemática.

Neste texto, a partir da análise de um conjunto de informações anteriormente sintetizadas, buscamos resposta para a questão de pesquisa: *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?*

2. Discussão teórica

Nesta seção discutimos, de forma sucinta, as dimensões teóricas que permitem a discussão dos resultados da investigação realizada. Para tanto, buscamos inicialmente apresentar os subdomínios e as categorias que compõe o modelo teórico e analítico MTSK (Carrillo et al., 2018), bem como os subdomínios do *Pedagogical Content Knowledge* do formador, propostos por Escudero-Ávila et al. (no prelo).

Começando pelo MTSK, no *Mathematical Knowledge* são considerados três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Além disso, em cada subdomínio, são consideradas diferentes categorias.

No KoT, inclui-se o conhecimento do professor relativamente ao quê e de que maneira o professor de Matemática conhece os tópicos que ensina. Este subdomínio é composto por quatro categorias: *procedimentos*; *definições, propriedades e fundamentos*; *registros de representação*; e *fenomenologia e aplicações*.

No subdomínio KSM, está inserido o conhecimento do professor sobre conexões entre itens matemáticos (Carrillo *et al.*, 2018), sendo composto por quatro categorias: *conexões de complexificação*; *conexões de simplificação*; *conexões auxiliares*; e *conexões transversais*.

Já no KPM, o foco está mais no funcionamento da Matemática do que no processo de ensiná-la (Carrillo *et al.*, 2018), incluindo conhecimentos relacionados à criação e à produção matemáticas, à linguagem e às demonstrações matemáticas. De acordo com Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), para este subdomínio, são consideradas as seguintes categorias: *formas de proceder*; *formas de validar*; *formas de explorar*; *formas de gerar conhecimento em matemática*; e *formas de comunicar matemática*.

O *Pedagogical Content Knowledge*, por sua vez, é constituído pelos subdomínios *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

O KFLM engloba o conhecimento relacionado às características inerentes à aprendizagem da Matemática, colocando o foco no conteúdo matemático - como o objeto de aprendizagem - e não no aluno. Este subdomínio possui quatro categorias: *teorias de aprendizagem matemática*; *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática*; *formas de interação dos alunos com o conteúdo matemático*; e *aspectos emocionais da aprendizagem da matemática*.

O subdomínio KMT está relacionado ao conhecimento dos fenômenos que surgem quando um professor está ensinando conteúdos matemáticos, e possui três categorias: *teorias sobre o ensino de matemática*; *recursos para o ensino*; e *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*.

O subdomínio KMLS, por sua vez, inclui o conhecimento do professor sobre tudo o que o aluno deve atingir em um determinado nível, em combinação com o que ele estudou anteriormente e com as especificações para os níveis subsequentes. O KMLS possui três categorias: *resultados de aprendizagem esperados*; *nível esperado de desenvolvimento conceitual e procedimental*; e *sequenciamento de tópicos*.

Quanto ao *Pedagogical Content Knowledge* do formador, Escudero-Ávila et al., (no prelo) propõem três subdomínios, intitulados *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*.

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera o conhecimento do formador no que se refere a caracterização do desenvolvimento profissional dos (futuros) professores; as dificuldades mais prováveis na sua especialização enquanto professores de Matemática; a sequências ou focos mais apropriados para a construção e para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; o ponto de partida em que os (futuros) professores se encontram – em termos de conhecimento – ao iniciarem a formação. Como exemplo, inclui-se conhecer que os estudantes devem ser capazes de abstrair conceitos já conhecidos e buscar representações não convencionais, por exemplo, para o conjunto dos números naturais, decidindo sobre o foco mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores.

Fazem parte do subdomínio *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; conhecer as limitações e potencialidades de cada tarefa a explorar; conhecer o *design* e a utilização de várias metodologias de avaliação; e conhecer as características mais importantes de cada tópico potenciando o desenvolvimento desse conhecimento e das conexões entre elas. Como exemplo, inclui-se conhecer quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE) e encontrar conexões entre essas características, a saber, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação.

O *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* abarca o conhecimento dos padrões curriculares, tanto do curso em que atua como formador, quanto dos níveis de ensino em que os (futuros) professores irão atuar. Há que considerar que a demanda de conhecimento matemático pode variar de acordo com o perfil do formador (matemático, educador matemático, licenciado, bacharel, formado em áreas afins), e que esse conhecimento depende do contexto (e.g., departamento, universidade, país) em que o formador atua, e pode incluir conhecer como a formação é conduzida em outros países, bem como estar apto a estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos (futuros) professores.

3. Encaminhamento metodológico

Para compreender o conhecimento dos dois sujeitos participantes de uma pesquisa com foco no conhecimento do formador de professores (Andre e Benny) no tópico de divisibilidade, consideramos uma abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso, considerando-se casos múltiplos em uma perspectiva instrumental (Stake, 2006). Optou-se pelo estudo de caso instrumental com objetivo de melhor compreender as evidências de cada caso e como ambos se relacionam entre si.

A coleta de informações envolveu a observação de aulas de Teoria dos Números, e em particular sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE)[34], além de entrevistas com os dois formadores. Optamos por focar a nossa atenção na prática dos formadores associada ao TADE, por se tratar de um resultado geralmente abordado no contexto da divisibilidade, nas primeiras aulas da disciplina de Teoria dos Números, e que foi discutido com riqueza de detalhes.

Benny tem toda a sua formação em Matemática e suas pesquisas centram-se na área de Álgebra. Atua como docente universitário há 20 anos e no semestre da coleta de informações ministrou a disciplina de Teoria dos Números para alunos da licenciatura e do bacharelado em Matemática, pela sexta vez. Benny apresenta um estilo interativo ao demonstrar o TADE, buscando maior participação dos estudantes, bem como uma quantidade significativa de tempo investido em explicações, usando linguagem informal, recursos visuais e analogias com a vida real, de forma semelhante ao observado por Narain e Stylianides (2020).

Andre também possui toda sua formação em Matemática, sendo que suas pesquisas centram-se nas áreas de Álgebra e Geometria. Atua há quatro anos como docente universitário, e no semestre em que acompanhamos suas aulas, estava ministrando a disciplina de Teoria dos Números para alunos da licenciatura e do bacharelado em Matemática pela segunda vez. Andre possui um estilo mais objetivo em suas aulas, focando a demonstração de resultados e o aprofundamento da ementa.

Para esse formador, nos detivemos exatamente no conhecimento evidenciado ao realizar a demonstração do TADE. Levando em conta que a demonstração continua sendo um conceito difícil para os estudantes de graduação em Matemática compreenderem e para os professores universitários ensinarem (Narain, & Stylianides, 2020), consideramos o potencial contributivo de compreender o conhecimento especializado do formador ao demonstrar, especialmente ao demonstrar o TADE.

As informações aqui analisadas são provenientes de três artigos que discutem algumas dimensões do conhecimento destes formadores durante a discussão do TADE com futuros professores. Em Almeida e Ribeiro (2019) discutimos conhecimentos de Benny ao introduzir conceitos necessários à demonstração do TADE. Já em Almeida, Ribeiro e Fiorentini (no prelo) discute-se o conhecimento matemático de Andre, enquanto formador, ao demonstrar o TADE, focando nas dimensões do seu KoT, KSM e KPM. Focando no conhecimento do formador no âmbito dos exemplos e explicações sobre o TADE, em Almeida e Ribeiro (2020) identificamos o conhecimento especializado de Benny com foco em seu PCK.

A análise foi realizada a partir da transcrição das gravações das aulas e de entrevistas realizadas com os formadores, levando em conta a divisão das aulas em episódios significativos (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2012), para posterior análise de cada episódio, na perspectiva do modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* - MTSK (Carrillo et al., 2018) e do modelo de conhecimento especializado do formador (Escudero-Ávila et al., no prelo).Para a análise consideramos as categorias do MTSK, e os indicadores associados receberam um acrônimo (por exemplo, KoTd1) constituído pelas iniciais do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial, de acordo

[34] O Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana afirma que: Dados dois números $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$.

com a ordem em que aparece no texto. A título de exemplificação considere-se a Tabela I contendo subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (Almeida & Ribeiro, 2020). Para simplificar a leitura, em cada artigo, apenas referimos as categorias que aparecem na análise.

Tabela I: Subdomínios e categorias do *Mathematical Knowledge* (Almeida & Ribeiro, 2020).

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1
	Procedimentos	KoTp1
	Registros de representação	KoTr1
KPM	Formas de proceder	KPMwp1
	Formas de validar	KPMwv1

Para a análise dos subdomínios do *Pedagogical Content Knowledge* do formador recorremos às dimensões elencadas por Escudero-Ávila et al. (no prelo). Para cada subdomínio do conhecimento do PCK do formador, consideramos inicialmente uma lista de conhecimentos (e não de categorias), pois essas dimensões estão ainda em sua fase de refinamento, e os resultados deste trabalho permitem elencar um conjunto de indicadores.

Assim, em cada um dos artigos que sustentam esta análise foi obtido um conjunto de indicadores do conhecimento especializado do formador ao abordar divisibilidade. A relação entre os artigos, as subquestões de pesquisa de cada artigo e os indicadores obtidos é apresentada no Quadro I a seguir:

Quadro I: Relação entre os artigos, subquestões de pesquisa e indicadores obtidos

Artigo	**Sub-questão de pesquisa**	**Indicadores obtidos**
Almeida & Ribeiro (2019)	Qual é o conhecimento especializado mobilizado por um formador de professores de Matemática ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros?	Indicadores do *Mathematical Knowledge* e do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny como formador.
Almeida, Ribeiro & Fiorentini (no prelo)	Quais elementos caracterizam o conhecimento matemático de um formador de professores de Matemática com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?	Indicadores do *Mathematical Knowledge* de Andre.
Almeida & Ribeiro (2020)	Quais elementos compõem e caracterizam o conhecimento especializado de um formador ao fornecer exemplos e explicações sobre o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana?	Indicadores do *Mathematical Knowledge*, do *Pedagogical Content Knowledge* como professor e do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny como formador.

Aqui nos propomos a discutir os indicadores de conhecimento do formador obtidos anteriormente e para isso organizamos os indicadores do conhecimento de Benny e Andre de acordo com os três domínios abordados na investigação: *Mathematical Knowledge*; *Pedagogical Content Knowledge*, enquanto professores e *Pedagogical Content Knowledge* como formadores. É de notar que, em Almeida e Ribeiro (2019) ao discutir o KPM consideraram-se as categorias apresentadas em Carrillo et al., (2018), mas ao longo do processo levamos em conta as categorias propostas por Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019) para a análise do conhecimento associado a esse subdomínio nos dois artigos seguintes.

Para obter uma visão global do conhecimento dos formadores foi efetuada uma meta-análise, cuja finalidade é integrar resultados de pesquisas sobre um dado tema e produzir sínteses mediante confronto desses resultados (Bicudo, 2014), o que propiciou a retomada e síntese das informações e análises efetuadas sobre o conhecimento dos dois formadores.

Inicialmente todos os indicadores obtidos para cada informante foram compilados em um único documento para obter-se uma visão geral. A seguir, os indicadores de cada subdomínio foram destacados com cores diferentes, realizando-se uma leitura comparativa do conteúdo dos mesmos. Aqueles que destoavam dos demais, como é o caso dos indicadores de KPM de Benny (categoria previamente denominada como demonstrar) em Almeida e Ribeiro (2019), foram acrescentados nos indicadores da categoria formas de validar, para estar de acordo com os indicadores obtidos em Almeida, Ribeiro e Fiorentini (no prelo) e em Almeida e Ribeiro (2020). Os diferentes indicadores foram então numerados sequencialmente e indicadores que porventura aparecessem repetidos – mobilizados tanto por Benny quanto por Andre – foram suprimidos aqui, mantendo-se apenas um deles. Os três indicadores mobilizados em comum por Andre e Benny ao longo da investigação aparecem destacados com "*" na próxima seção.

4. Resultados da investigação

Nesta seção, retomamos a questão de pesquisa que orienta a meta-análise efetuada: *Que conhecimento sobre divisibilidade é mobilizado e revelado por dois formadores de professores que ensinam Teoria dos Números?*

4.1. Discutindo o *Mathematical Knowledge* evidenciado de forma conjunta

O *Mathematical Knowledge* – MK é composto por três subdomínios e há evidências de conhecimento de todos eles na prática formativa de ambos os formadores.

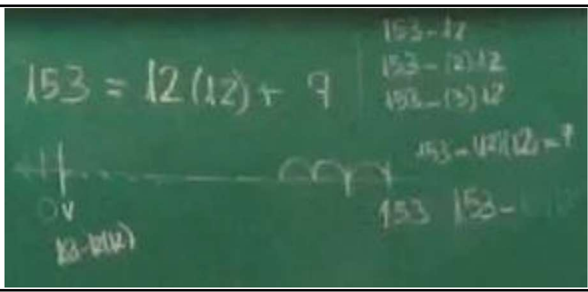
No caso de Benny, foram mobilizados conhecimentos no âmbito do *Knowledge of Topics* (KoT) como sejam, por exemplo:

(i) *definições propriedades e fundamentos*: conhecer propriedades diversas dos números inteiros, como o Princípio da Boa Ordenação (KoTd16); a tricotomia (KoTd18); as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica dos inteiros (KoTd11); a definição de relação de ordem parcial (KoTd13) e total nos números inteiros (KoTd15); a definição de módulo (KoTd17); que os conceitos de divisão e subtração estão conectados (KoTd20); a divisão no sentido de medida (KoTd21);

(ii) *procedimentos*: conhecer como decompor um número de diferentes formas, fixando o divisor e variando o quociente e o resto (KoTp3); conhecer as características do conjunto auxiliar utilizado na demonstração do TADE, apontando elementos desse conjunto para uma divisão particular (KoTp6); conhecer que o valor do resto ser limitado é uma condição necessária e suficiente para a validade do algoritmo da divisão euclidiana (KoTp8);

(iii) *registros de representação*: conhecer formas de representar a comparação entre dois números inteiros, por meio dos símbolos $<$ e $\leq$ (KoTr1, KoTr2); conhecer formas de representar a decomposição do TADE geometricamente (KoTr4); conhecer formas de representar o conjunto auxiliar gerado para a demonstração geometricamente, ilustrando seus elementos na reta (KoTr5).

Uma evidência do KoT de Benny na categoria *registros de representação* é apresentada a seguir (Figura I). Na figura, o formador busca representar o algoritmo da divisão euclidiana geometricamente, mostrando conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9.



Benny representa o algoritmo da divisão euclidiana geometricamente, tomando 153 em uma reta numérica, considerando 12 saltos de mesmo tamanho e destacando o resto 9.

Figura I: Imagem da lousa de Benny, com a decomposição de 153, considerando 12 como divisor (KoTr4 – registro de representação)
Almeida & Ribeiro (2020)

No que diz respeito ao KoT de Andre, no âmbito do *Knowledge of Topics* foram mobilizados, por exemplo:

(i) *definições, propriedades e fundamentos*: conhecer o Princípio da Boa Ordenação (KoTd16); a propriedade de todo conjunto de números inteiros não negativos de ser não-vazio (KoTd22); e a definição de divisível (KoTd23);

(ii) *fenomenologia e aplicações*: conhecer que o TADE possui aplicações em Teoria dos Números, como na demonstração de que existem infinitos números primos da forma $4k + 3$ (KoTph1);

(iii) *procedimentos*: conhecer como justificar que o conjunto auxiliar usado na demonstração do TADE é não-vazio, exibindo um dos elementos desse conjunto (KoTp9);

(iv) *registros de representação*: conhecer uma forma de representar inteiros não-negativos por meio do símbolo $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (KoTr6).

Uma evidência do KoT de Andre é apresentada a seguir (Figura II) na categoria fenomenologia e aplicações, ao observar, logo após a demonstração do TADE, que este resultado pode ser aplicado, por exemplo, na demonstração de que existem infinitos números primos da forma $4k + 3$, revelando estar ciente dos usos e aplicações do TADE.

Andre: Vamos ver a importância desse resultado. Este resultado fica de uma importância extrema por que, primeiro, está me dizendo, que podemos classificar todo número em função de um múltiplo de um número fixado. O que eu quero dizer? Fixo o 4. Então todo inteiro pode ser descrito como 4 vezes k ou 4k+1 ou 4k+2 ou 4k+3. Qualquer inteiro encaixa dentro de uma dessas quatro possibilidades.

Figura II: Transcrição de aula de Andre, evidenciando conhecimento sobre aplicações do TADE (KoTph1 – fenomenologia e aplicações)
Almeida, Ribeiro & Fiorentini (no prelo)

No âmbito do *Knowledge of the Structure of Mathematics*, foram obtidos indicadores de conhecimento de Benny, por exemplo:

(i) *conexão transversal*: conhecer que existe um conjunto de características transversais à relação de ordem entre elementos de um conjunto e a inclusão de conjuntos (KSMt1);

(ii) *conexão auxiliar*: conhecer que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordenação são conceitos auxiliares na demonstração do TADE (KSMa1). Na Figura III, apresentamos um trecho da segunda aula de Benny, na qual essa conexão auxiliar é evidenciada.

Benny: E eu falo que esse vai ser o teorema principal (TADE). Já para pensar, qual seria a prova disso? Temos que fabricar uma certa situação. Temos que admitir agora mais uma coisa aqui. A ideia vai ser esta, vejam. Vamos fabricar um subconjunto de tal maneira que esse conjunto vai descendo, descendo, descendo, descendo... e sempre vai cair para lá (à direita do zero). Então, intuitivamente, este conjunto, que vai descendo, descendo, descendo, ele vai ter menor elemento. Uma cota inferior. Mas, como eu poderia saber isso já? Isso é... teria que ser um axioma também. Como vamos chamar esse axioma? Vamos dizer assim, todo subconjunto não vazio dos $\mathcal{P}$ s tem cota inferior.

Estudante: Princípio da Boa Ordenação?

Benny: Isso! Como? Perfeito! Esse $\mathcal{P}$ (conjunto dos números naturais) tem essa propriedade. Todo subconjunto não vazio tem que ter cota inferior. Tá? Então, justamente, com essa cota inferior que vai me permitir provar [...] o teorema da divisão de Euclides.

Figura III: Transcrição de aula de Benny evidenciando conhecimento de conexões auxiliares (KSMa1 – conexões auxiliares)
Almeida & Ribeiro (2019)

No KSM de Andre, ao tratar da demonstração, foram identificados indicadores de conhecimento relacionados com:

(i) conexões baseadas em simplificação: conhecer conexões entre o TADE e a divisibilidade (KSMs1);

(ii) *conexões baseadas no aumento da complexidade*: conhecer conexões entre o TADE e a aritmética modular, considerando o teorema como consequência desta (KSMc1);

(iii) conexões transversais: conhecer conexões entre o TADE e as congruências lineares, conectados pela divisibilidade como noção subjacente (KSMt2).

Na Figura IV, apresentamos um fragmento de transcrição da entrevista inicial de Andre, na qual ele foi questionado sobre o que é divisibilidade e o que significa o TADE para um aluno do Ensino Fundamental.

Andre:	Viu? Essa é uma pergunta que eu poderia responder diferente conforme quem está na minha frente. Se está na minha frente um aluno de Ensino Fundamental, eu podia dizer 'imagina que temos um conjunto, de caramelos. Eu quero saber se posso fazer saquinhos de três caramelos, e chegar no final, para ver se todo saquinho que eu tenho tem três caramelos.' Isso é divisibilidade. […] O algoritmo de Euclides [...] para a criança significaria que eu posso pegar saquinhos de três, e eu... sei exatamente quantos caramelos vai ter o saquinho que sobra.

Figura IV: Trecho da entrevista inicial de Andre (KSMs1 – conexões de simplificação) Almeida, Ribeiro & Fiorentini (no prelo)

Com relação ao *Knowledge of Practices in Mathematics* de Benny, foram obtidos indicadores relacionados com:

(i) formas de proceder: conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes (KPMwp1); conhecer como demonstrar empregando a estratégia heurística de demonstração de casos (KPMwp3);

(ii) *formas de validar*: conhecer como demonstrar por contradição que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo (KPMwv4); ou conhecer como demonstrar por contradição que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais (KPMwv2).

Com a adoção das categorias de KPM propostas por Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), os conhecimentos identificados como pertencentes ao KPM de Benny em Almeida e Ribeiro (2019), que haviam sido considerados na categoria intitulada como demonstrar, com o processo de meta-análise, foram inseridos na categoria *formas de validar*. Além disso, o conhecimento evidenciado por Benny ao explicar como demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão, mostrando que dois conjuntos devem estar contidos um no outro (Figura V), também passou a estar nesta categoria, e não no KoT – procedimentos.

Benny: Do que vocês sentiriam falta, nos conjuntos, para poder botar tudo nos trinques, que nós já botamos aqui? Se A está contido em B, e B está contido em A, então...

Estudantes: A igual a B.

Benny: A igual a B. Perfeito. Para eu poder provar que dois conjuntos, se lembram...? Se você quer provar que dois conjuntos são iguais, você tem que provar que esse [indica A] está contido nesse [indica B], e que esse [indica B] está contido... se lembram?

Figura V: Transcrição de aula de Benny evidenciando conhecimento sobre formas de validar em matemática (KPMwv1 – formas de validar)
Almeida & Ribeiro (2019)

Para o *Knowledge of Practices in Mathematics* de Andre, foram obtidos indicadores relacionados, por exemplo, com:

(i) *formas de proceder*: conhecer como demonstrar unicidade, assumindo que existem dois elementos e então verificando que são o mesmo (KPMwp5); conhecer como construir o conjunto de números inteiros não negativos necessário para a demonstração do TADE, satisfazendo as condições do teorema (KPMwp4);

(ii) *formas de validar*: conhecer como justificar que o menor elemento do conjunto auxiliar na demonstração está nas condições do TADE (KPMwv6); conhecer os passos de uma demonstração por contradição: negar a tese e confirmá-la chegando a uma contradição (KPMwv7).

Na Figura VI a seguir, apresentamos uma evidência do KPM de Andre na categoria *formas de proceder*, na qual ele aponta a necessidade de separar a demonstração do TADE em duas partes: existência e unicidade.

289 Andre:	Aí está dizendo que a minha demonstração tem
290	que ser dividida em duas partes. Primeiro, tenho que demonstrar que existem e depois tenho
291	que demonstrar que são únicos.

Figura VI: Transcrição de aula de Andre evidenciando conhecimento sobre formas de proceder em matemática (KPMwp1 – formas de proceder)
Almeida, Ribeiro & Fiorentini (no prelo)

Na Tabela II a seguir, são elencados todos os indicadores de *Mathematical Knowledge* dos sujeitos obtidos ao longo da investigação. Indicadores comuns aos dois formadores, foram distinguidos com o símbolo *. A numeração dos indicadores não está relacionada com aquela dos *papers* que serviram como fonte para a meta-análise; trata-se de numeração própria do artigo aqui apresentado.

Tabela II: Indicadores de *Mathematical Knowledge* revelado pelos sujeitos

Subdomínios	Categorias	Indicadores
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1 - conhecer que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis, ou seja, que um número é menor do que outro
		KoTd2 - conhecer a definição do operador lógico $\vee$
		KoTd3 - conhecer que os números inteiros satisfazem a propriedade antissimétrica, ou seja, se um número inteiro é menor ou igual a outro e esse outro é menor ou igual que o primeiro, então eles são iguais
		KoTd4 - conhecer a propriedade transitiva da relação $\leq$ a qual se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro
		KoTd5 - conhecer a definição da relação $\subseteq$
		KoTd6 - conhecer a propriedade reflexiva da relação de inclusão entre conjuntos que se refere a relação de um conjunto com ele mesmo
		KoTd7 - conhecer a propriedade reflexiva da relação $\leq$ que se refere a relação de um elemento do conjunto dos números inteiros com ele mesmo
		KoTd8 - conhecer a propriedade transitiva da relação $\subseteq$ a qual se estabelece entre três conjuntos de tal forma que se o primeiro está contido

	no segundo e este está contido em um terceiro, então o primeiro conjunto está contido no terceiro
	KoTd9 - conhecer que se um conjunto está contido em outro conjunto e este outro conjunto está contido no primeiro, então esses conjuntos só podem ser iguais, que é denominada de propriedade antissimétrica da relação $\subseteq$
	KoTd10 - conhecer a propriedade antissimétrica da relação $\leq$, segundo a qual se um número inteiro é menor ou igual que outro número inteiro, que por sua vez é menor ou igual que o primeiro número inteiro, então eles são iguais
	KoTd11 - conhecer a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, saber que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica
	KoTd12 - conhecer que a relação de ordem existente entre conjuntos é distinta da relação de ordem entre elementos de conjuntos
	KoTd13 - conhecer a definição de relação de ordem parcial nos números inteiros
	KoTd14 - conhecer que a propriedade dicotomia não é válida para a relação de inclusão entre conjuntos
	KoTd15 - conhecer que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem total, que é equivalente a dizer que no conjunto dos números inteiros, além das propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, vale também a dicotomia
	KoTd16* – conhecer o Princípio da Boa Ordenação, isto é, saber que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe um menor elemento
	KoTd17 – conhecer a definição de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o seu simétrico
	KoTd18 – conhecer que vale a propriedade da tricotomia para os números inteiros, isto é, cada número inteiro é positivo, negativo ou zero
	KoTd19 – conhecer que um número não se relaciona com ele mesmo através da relação $<$
	KoTd20 – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, sabendo que a divisão pode ser resolvida por meio de um processo de subtrações sucessivas
	KoTd21 – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso está associado a quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição
	KoTd22 – conhecer que qualquer conjunto de números inteiros não negativos é não-vazio
	KoTd23 – conhecer o fato de que, de acordo com a definição de divisível, um número inteiro a divide um número inteiro b se b é um múltiplo de a
Procedimentos	KoTp1 – conhecer que a propriedade antissimétrica dos números inteiros pode ser demonstrada recorrendo às propriedades do anel dos números inteiros

		KoTp2 – conhecer que para realizar a divisão o divisor deve ser diferente de zero
		KoTp3 - conhecer que para decompor um número de diferentes formas pode-se fixar o divisor e variar o quociente e o resto
		KoTp4 – conhecer como resolver a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas
		KoTp5 – conhecer como decompor o dividendo encarando a divisão como medida
		KoTp6 – conhecer as características do conjunto $X = \{153 - x12\}$ criado para a divisão de 153 por 12
		KoTp7 - conhecer as duas formas de decompor 23, considerando o divisor positivo ou negativo
		KoTp8 – conhecer que o valor do resto ser limitado é uma condição necessária e suficiente para a validade do algoritmo da divisão euclidiana
		KoTp9 – conhecer como justificar que o conjunto gerado para a demonstração do TADE é não-vazio exibindo um de seus elementos
	Registros de representação	KoTr1 - conhecer uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros ($<$)
		KoTr2 - conhecer uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros ($\leq$)
		KoTr3 - conhecer que, para além de diferentes representações entre $\wedge$ e “e”, estes têm também diferentes significados na linguagem correspondente
		KoTr4 – conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente para o exemplo $153 \div 12$, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9
		KoTr5 – conhecer uma forma de representar o conjunto $X = \{19 - 3x : x \in \mathcal{P}\}$ geometricamente, destacando os elementos desse conjunto
		KoTr6 – conhecer uma forma de representar os números inteiros não negativos por meio do símbolo $\mathbb{Z}_{\geq 0}$
	Fenomenologia e aplicações	KoTph1 – conhecer o fato de que o TADE possui aplicações em Teoria dos Números, como na demonstração da existência de infinitos números primos da forma $4k + 3$
KSM	Conexões transversais	KSMt1 - conhecer que existe um conjunto de características transversais a relação de ordem entre elementos de um conjunto e a inclusão de conjuntos
		KSMt2 – conhecer que existe uma conexão transversal entre o TADE e congruências lineares, conectados pela divisibilidade como noção subjacente
	Conexões auxiliares	KSMa1 - conhecer que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordem são conceitos auxiliares na demonstração do TADE
	Conexões de simplificação	KSMs1 – conhecer conexões de simplificação entre o TADE e a divisibilidade

	Conexões baseadas em aumento da complexidade	KSMc1 – conhecer conexões entre o TADE e aritmética modular, considerando o teorema como consequência da aritmética modular
KPM	Formas de proceder	KPMwp1* – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes KPMwp2 - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto. KPMwp3 – conhecer formas de proceder em Matemática empregando a estratégia heurística da demonstração de casos KPMwp4* – conhecer como construir um conjunto auxiliar usado na demonstração do TADE que satisfaça a relação $a = bq + r$ KPMwp5 – conhecer como demonstrar unicidade assumindo que existem dois elementos e verificando que são o mesmo KPMwp6 – conhecer como usar o Princípio da Boa Ordenação na demonstração do TADE. KPMwp7 – conhecer como demonstrar a unicidade do quociente e do resto na demonstração do TADE.
	Formas de validar	KPMwv1 - conhecer como demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão, mostrando que os conjuntos devem estar contidos um no outro KPMwv2 – conhecer como demonstrar por contradição que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais KPMwv3 – conhecer como demonstrar por contradição a propriedade antissimétrica da relação ≤ que envolve considerar $a \neq b$ em $a \leq b \wedge b \leq a$ KPMwv4 – conhecer como demonstrar por contradição que um número inteiro não pode ser menor do que ele mesmo KPMwv5 – conhecer como justificar que um conjunto arbitrário é não-vazio apresentando um de seus elementos KPMwv6 – conhecer como justificar que o conjunto gerado para a demonstração do TADE está nas condições do teorema, isto é, que seu menor elemento é maior ou igual a zero e estritamente menor do que o divisor. KPMwv7 – conhecer os passos de uma demonstração por contradição: negar a tese, encontrar uma contradição e então chegar na negação da hipótese. KPMwv8 – conhecer como justificar que o resto é menor do que o divisor baseado em um conflito em relação com a minimalidade de um elemento do conjunto gerado para a demonstração.

Podemos observar que apenas três indicadores de *Mathematical Knowledge* foram evidenciados pelos dois formadores concomitantemente: KoTd16* – conhecer o Princípio da Boa Ordenação, isto é, saber que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe um menor elemento; e os outros dois no âmbito do KPM: KPMwp1* – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes e KPMwp4* – conhecer como construir um conjunto auxiliar usado na demonstração do TADE que satisfaça a relação $a = bq + r$.

A coincidência desses indicadores pode ser explicada pelo fato de que os três conhecimentos são essenciais na demonstração do TADE. A demonstração deste teorema se inicia com a separação em duas partes, existência e unicidade (KPMwp1). Em momento posterior é construído o conjunto dos possíveis restos da divisão (KPMwp4), o qual possui um menor elemento, pelo Princípio da Boa Ordenação (KoTd16).

Em contrapartida, a ausência de outros indicadores em comum pode ser explicada tanto pelo foco que Andre e Benny possuem em suas aulas, quanto pelo nosso foco de análise dessas aulas. Andre objetiva especificamente demonstrar o teorema, enquanto Benny busca, inicialmente, trabalhar para estabelecer os conceitos que serão utilizados na demonstração, e posteriormente, opta por explicar e exemplificar cada aspecto do teorema e de sua demonstração. A diferença no foco de cada formador ao trabalhar o TADE nos fez explorar aspectos diferentes para cada um. Enquanto buscamos compreender a fundo o conhecimento de Andre ao realizar a demonstração, para a compreensão do conhecimento de Benny se mostrou mais frutífero o foco nas discussões realizadas sobre o TADE.

Note-se que esta amplitude de resultados é entendida como uma vantagem já que não se pretende comparar os formadores, mas sim obter um amplo espectro de informações relativas ao conhecimento mobilizado que nos permita considerar o estudo de caso instrumental.

4.4. O *Pedagogical Content Knowledge* evidenciado

Evidências do *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), composto pelos subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), foram discutidas em Almeida e Ribeiro (2020) tendo-se obtido KMT de Benny relacionados com:

(i) *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos*: conhecer exemplos de decomposições que não cumprem as condições do TADE (KMTe1); conhecer exemplos concretos para a visualização do conjunto gerado para a demonstração (KMTe2, KMTe5); conhecer exemplos de divisão para ilustrar cada caso da demonstração (KMTe3, KMTe4, KMTe6);

O KMT de Benny está fortemente relacionado ao seu conhecimento sobre as principais dificuldades dos estudantes, presentes no KFLM, tais como:

(i) *potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática:* conhecer a dificuldade comum dos estudantes para perceber que a decomposição nas condições do TADE é única; conhecer a dificuldade comum dos estudantes para explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração. Na Figura VII a seguir, apresentamos um dos exemplos fornecidos por Benny para ressaltar que nem toda decomposição cumpre a condição $0 \leq r < |a|$ do TADE.

$$5 \div 2$$
$$5 = 2(2) + 1$$
$$5 = 3(2) + (-1)$$

Figura VII: Imagem da lousa de Benny, com o exemplo $5 \div 2$ (KMTe1 – estratégias, técnicas, tarefas e exemplos)
Almeida & Ribeiro (2020)

Em momento posterior da aula (Figura VIII), Benny retoma este exemplo, evidenciando seu KFLM, na categoria *potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática*, ao frisar a necessidade de que o quociente e o resto precisam estar nas condições do teorema, por saber que essa é uma dificuldade comum dos estudantes (KFLMs1).

178 Benny:	Aqui o que está furando?
179	(Aponta para $3(2) + (-1)$ escrito na lousa.)
180	Por exemplo, aqui, este está bonitinho.
181	(Aponta para $2(2) + 1$ escrito na lousa.)
182	Um maior ou igual que zero, menor que quanto? Que dois, não é verdade? Aqui está bem,
183	não é? Se cumpre. Aqui que está furando.
184	(Aponta a expressão $3(2) + (-1)$.)
185 Est	A divisão não é euclidiana por causa do...
186 Benny	Aqui o que está furando, a respeito disso, o que está furando?
187 Est	Que o resto é -1.
188 Benny	Claro, que o resto é -1.

Figura VIII: Transcrição de aula de Benny, evidenciando conhecimento sobre dificuldades comuns dos estudantes (KFLMs1 – *potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática*)
Almeida & Ribeiro (2020)

Considerando o *Pedagogical Content Knowledge* revelado durante a investigação, apresentamos a Tabela III com a lista de indicadores do PCK de Benny como professor que ensina Matemática para estudantes de licenciatura e bacharelado.

Tabela III: Indicadores do *Pedagogical Content Knowledge*

Subdomínios	Categorías	Indicadores
KMT	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	KMTe1 – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r < \lvert a \rvert$ do TADE
		KMTe2 – conhecer o exemplo concreto ($153 \div 12$) para a visualização do conjunto X= $\{153 - x12,\ x \in \mathcal{P}_0\}$
		KMTe3 – conhecer um exemplo de divisão ($3 \div -7$) que se encaixa no caso trivial ($0 \leq b < \lvert a \rvert$) da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE
		KMTe4 – conhecer um exemplo de divisão ($19 \div -3$) que se encaixa no caso $b \geq \lvert a \rvert$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE

		KMTe5 - conhecer um exemplo concreto para a visualização do conjunto X= $\{19 - 3x,\ x \in \mathcal{P}_0\}$
		KMTe6 – conhecer um exemplo de divisão $(-47 \div 13)$ que se encaixa no caso $b < 0$ da demonstração da existência do quociente e do resto no TADE
KFLM	Potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática	KFLMs1 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única
		KFLMs2 – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em explicitar os elementos do conjunto gerado na demonstração do TADE

4.5. O *Pedagogical Content Knowledge* do formador evidenciado

Os três subdomínios do *Pedagogical Content Knowledge* do formador, propostos por Escudero-Ávila et al., (no prelo), foram mobilizados por Benny no decorrer da pesquisa. No subdomínio *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, foram evidenciados dois tipos de conhecimento: no primeiro tipo (KFPDMT1), *conhecimento de sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores de Matemática*, Benny tem como foco promover a abstração dos estudantes de conceitos já trabalhados, apresentando, por exemplo, o símbolo $\mathcal{P}$ para denotar o conjunto dos números naturais, além de evidenciar conhecer que o foco na divisão como medida (Figura I) pode ser mais apropriado para a construção do conhecimento sobre divisibilidade dos futuros professores; no segundo tipo de conhecimento desse subdomínio (KFPDMT4), o *conhecimento sobre o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial*, Benny sabe, por exemplo, que o estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas.

No subdomínio *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*, Benny evidencia *conhecimento sobre como dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes* (KTCIMTEP5) ao evidenciar conhecer quais são as características ou os pontos mais importantes no TADE e encontrar conexões entre essas características, a saber, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação (Figura III).

O formador também evidencia saber que os estudantes devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou", operador binário utilizado na lógica proposicional (Figura IX), apresentando assim um *conhecimento dos padrões curriculares do curso em que atua* (KSMTEP1), presente no *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*.

> Benny: [...] Se eu falo a menor igual que b [$a \leq b$], que significa isso? O que significaria isso, de forma natural? Que a é igual a b ou, este ou vou escrever assim também [$a < b$]. Ou isso, ou isso, certo? Isso é lógica, não? Verdadeiro, verdadeiro, que me dá? Se lembram de lógica, não?

Figura IX: Transcrição de aula de Benny evidenciando conhecer que os estudantes devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou" (KSMTEP1 – conhecimento dos padrões curriculares do curso em que atua)
Almeida e Ribeiro (2019)

Na tabela a seguir, apresentamos o *Pedagogical Content Knowledge* de Benny como formador, relacionado com a divisibilidade, revelado no decorrer na pesquisa, elencando seus indicadores. Por se tratar de um modelo ainda em desenvolvimento, para cada subdomínio, consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias) do formador.

Tabela IV: Subdomínios e conhecimentos do *Pedagogical Content Knowledge* do formador

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento, identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT1 - conhecer sequências ou focos (a divisão como medida) que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento sobre divisibilidade dos futuros professores ao abordar o TADE
		KFPDMT1 – conhecer a importância de focar na promoção da abstração de conceitos já conhecidos pelos estudantes
	Conhecimento sobre o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4 - conhecer que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e, portanto, já possuem uma imagem mental desse conceito
		KFPDMT4 - conhecer a necessidade de se usar uma representação não convencional para os números naturais de forma a desenvolver a abstração dos estudantes
		KFPDMT4 - conhecer que os estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas
		KFPDMT4 - conhecer que os estudantes estão, ou deveriam estar, familiarizados com a relação de inclusão entre conjuntos
Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes	Conhecimento sobre como dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	KTCIMTEP5 - conhecer quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE) e encontrar conexões entre essas características, a saber, a relação de ordem e o Princípio da Boa ordenação.

Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1 - conhecer que os alunos devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou" que é um operador binário utilizado na lógica proposicional

5. Considerações finais

Na licenciatura em Matemática, não é apenas o professor que ministra disciplinas pedagógicas que forma o futuro professor, mas toda a equipe de docentes que atua no curso (Nacarato, 2006). O formador, muitas vezes, ensina mais do que pensa estar ensinando, já que "[...] O futuro professor não aprende dele apenas uma Matemática, internaliza também um modo de concebê-la e de tratá-la e de avaliar sua aprendizagem" (Fiorentini, 2005, p. 111).

Para além da identificação de indicadores de conhecimento do formador, também é importante compreender as práticas de ensino de Matemática em nível de graduação, especialmente as que seguem o formato definição-teorema-demonstração, amplamente empregado pelos matemáticos em suas aulas (Narain & Stylianides, 2020).

Os indicadores de conhecimento aqui discutidos, permitem-nos ter uma ideia do conhecimento mobilizado pelos dois formadores ao ensinar divisibilidade em um contexto de formação inicial de professores de Matemática. As diferentes abordagens dadas a um mesmo resultado, o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana, por dois sujeitos que possuem formação semelhante e atuam na mesma instituição de Ensino Superior, também permitem a reflexão sobre as inúmeras possibilidades de focos de discussão matemática, as quais os futuros professores estão sujeitos, que podem ser discussões com intencionalidade para a formação de professores ou não, discussões com graus variados de complexidade, discussões mais ou menos ricas para a promoção de um conhecimento especializado.

Enquanto Benny foca na discussão matemática de diversos aspectos relacionados ao TADE, Andre foca especificamente na demonstração e posterior utilização desse resultado na disciplina de Teoria dos Números. Ambos os focos são importantes e contributivos para a formação do professor de Matemática, que precisa aprender sobre as definições, as propriedades, os fundamentos, os procedimentos, os registros de representação e as aplicações envolvendo o algoritmo da divisão euclidiana para lidar com seus alunos que chegam dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ainda com dificuldades a respeito da divisão; que precisa aprender que a divisibilidade possui conexões com outros temas, dentro e fora da disciplina de Teoria dos Números e os aspectos subjacentes à demonstração do TADE e de outros resultados matemáticos; para que, inclusive, saibam trabalhar aspectos das demonstrações com seus futuros alunos, para que estejam aptos a fornecer exemplos e explicações sobre o algoritmo da divisão euclidiana e sanar as dificuldades de seus alunos.

Ainda que cada sujeito seja único e tenha liberdade para ensinar da forma que julgar mais adequada, é interessante notar que a maioria dos indicadores obtidos nesta pesquisa são específicos à prática de cada um dos formadores, embora o tópico ensinado seja o mesmo. Essa especificidade pode estar relacionada com o tempo de experiência em sala de aula, já que Benny, atuante há mais de vinte anos no Ensino Superior, além dos conhecimentos matemáticos mobiliza também conhecimentos relacionados ao *Pedagogical Content Knowledge*, seja como professor que ensina Matemática no Ensino Superior, ou como formador de professores de Matemática.

Os indicadores de PCK obtidos na perspectiva dos sujeitos enquanto professores que ensinam Matemática no Ensino Superior nos permitiram observar uma relação direta entre o conhecimento das principais dificuldades dos estudantes no tópico da divisibilidade e o conhecimento de exemplos empregados com objetivo de sanar tais dificuldades, entre o KFLM e o KMT dos sujeitos. Essa relação é explicitada na Figura X, sendo que cada seta representa a relação entre um indicador de KMT e um indicador de KFLM.

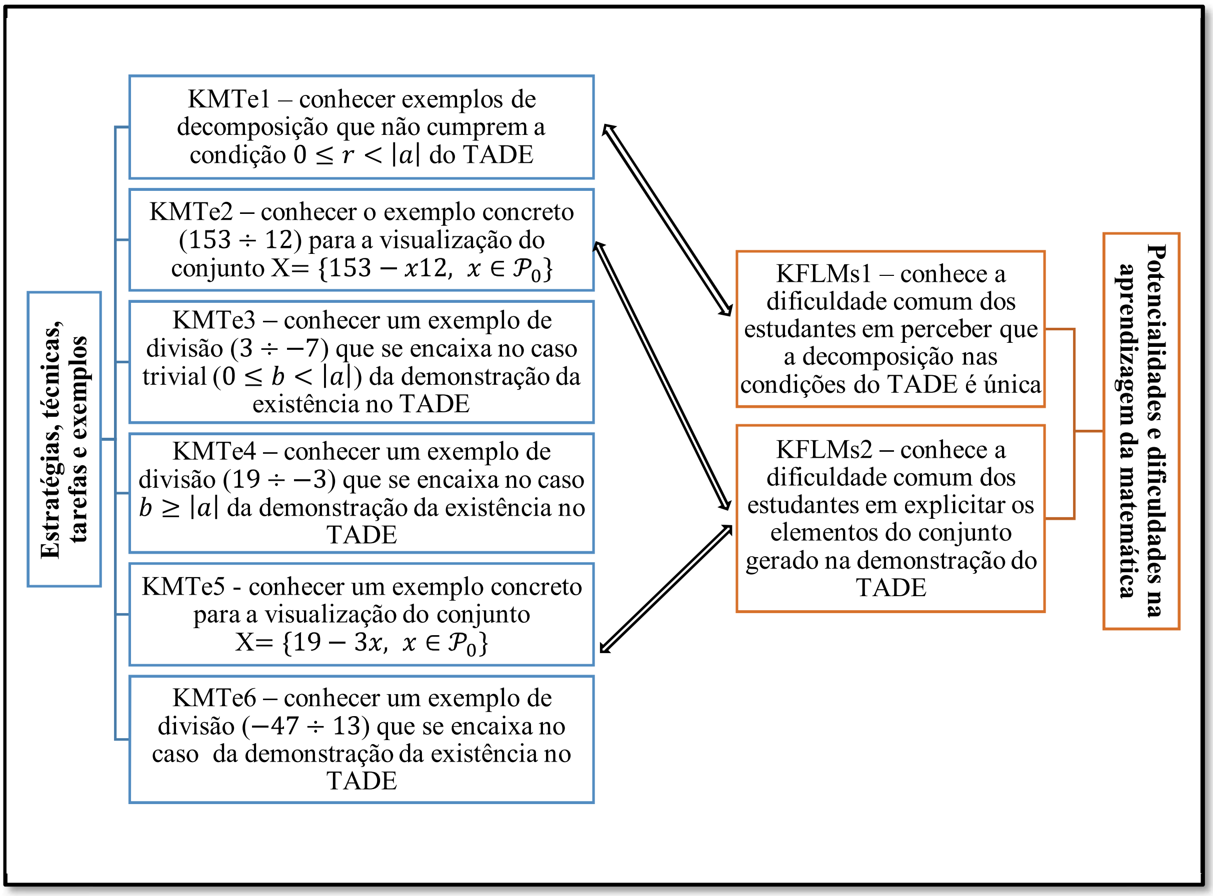


Figura X: Relação entre conhecimentos na categoria *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos* do KMT e a categoria *potencialidades e dificuldades na aprendizagem da matemática* do KFLM

A realização de novas investigações que busquem compreender as relações entre os subdomínios do PCK, e entre o PCK e o MK, nos parece também de grande relevância, já que a especialização do conhecimento não reside na soma das partes do conhecimento do professor, mas em um todo orgânico, com várias facetas desse conhecimento dialogando entre si, informando-se mutuamente e interagindo de forma dinâmica para formar estruturas emergentes (Scheiner et al., 2019), e o mesmo vale para o conhecimento especializado do formador, com seus domínios e subdomínios interagindo entre si, que impacta diretamente a formação e o conhecimento especializado dos futuros professores de Matemática.

Já os indicadores obtidos de PCK dos participantes da pesquisa como formadores oferecem uma noção do conteúdo do conhecimento de formadores que também são matemáticos e, portanto, são importantes para ampliar o entendimento do conhecimento especializado de formadores com esse perfil. Conforme destacam Escudero-Ávila et al., (no prelo), devido a diversidade de perspectivas e potencialidades que cada formador agrega à formação, formadores com diferentes perfis desempenham papéis complementares e igualmente contributivos. Desse modo, há necessidade de condução de investigações posteriores para compreender o PCK de formadores com diferentes perfis, como matemáticos e educadores matemáticos, procurando, inclusive, convergências e divergências como possíveis pautas para trabalho colaborativo na formação de professores.

Ainda há necessidade de continuar as pesquisas para diferenciar o *Mathematical Knowledge* do professor daquele do formador, buscando pelas especificidades do conhecimento deste último, especialmente se tratando de formadores que são matemáticos. Podemos nos perguntar também se o conteúdo do MK de um matemático que atua como formador e tem intenção de preparar os futuros professores para a sala de aula da Educação Básica seria diferente daquele evidenciado em nossa investigação, quais seriam essas diferenças, e como esse conhecimento especializado impactaria a formação. Há de se considerar também o conhecimento matemático de formadores com outros perfis (educadores matemáticos, formadores advindos de outras áreas de formação, etc.), e buscar indicadores desse conhecimento em diversos temas.

Referências

Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, *28*(2), 125–148.

Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2020). Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: Um foco nos exemplos e explicações. *Tangram*, *3*(4) 24-56.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. Knowledge of a Mathematics Teacher Educator to teach divisibility to prospective secondary school teachers (Artigo em avaliação). [s.l.]: [s.n.].

Bicudo, M. A. V. (2014). Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. *Revemat: Revista eletrônica de educação matemática*, *9*[s.n.], 7-20.

Brasil. (2001). Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. 6 nov. 2001.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Dias, A. L. M., Lando, J. C., & Freire, I. A. (2012). Formação de professores na Bahia: Os cursos de Matemática e de Didática da Faculdade de Filosofia (1943-1968). In A. C. Ferreira, A. J. Brito, & M. A. Miorim (Eds.), *Histórias de formação de professores que ensinaram Matemática no Brasil* (pp. 115–135). Ílion.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L.C. (In press). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer.

Fiorentini, D. (2005). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação Da PUC Campinas*, *18*, 107–115.

Gatti, B. A., Barreto, E. S. S., André, M. E. D. A., & Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: Novos cenários de formação*. UNESCO.

Gomes, M. L. M. (2016). Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: Sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. *Bolema*, *30*(55), 424–438.

Kelchtermans, G., Smith, K., & Vanderlinde, R. (2017). Towards an 'international forum for teacher educator development': an agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education*, *41*(1), 120-134.

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2017). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 451–473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Loughran, J. (2013). *Developing a Pedagogy of Teacher Education: Understanding Teaching and Learning about Teaching*. (1 ed.) Abingdon UK: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203019672

Loughram, J. (2014). Professionally Developing as a Teacher Educator. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 271–283.

Moreira, P. C. (2012). 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(44), 1137–1150. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003

Nacarato, A. M. (2006). Formação do Professor de Matemática: Pesquisa x políticas públicas. *Revista Contexto e Educação*, *21*(75), 131–156.

Policastro, M. S., de Almeida, A. R., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years* (pp. 263-279). Cham, Switzerland: Springer.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 277-310.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143-166.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. New York: The Guilford Press.

Superfine, A., & Li, W. (2014). Exploring the Mathematical Knowledge Needed for Teaching Teachers. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 303–314.

Vasco Mora, D., & Climent, N. (2020). Conocimiento de un profesor de Álgebra Lineal sobre los errores de los estudiantes y su uso en la enseñanza. *Quadrante, 29*(1), 97-114.

Yan, X., Marmur, O., & Zazkis, R. (2020). Calculus for Teachers: Perspectives and Considerations of Mathematicians. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*, 355–374. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00090-x

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 540–563.

CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

A análise das informações obtidas e a escrita dos artigos possibilitaram a obtenção de uma listagem de indicadores de conhecimento dos formadores participantes da investigação, a qual ajuda a compreender o conhecimento especializado deles neste tema: ao introduzir o TADE, ao fornecer exemplos e explicações, e ao demonstrar este resultado.

Chama a atenção o fato de que a maioria dos indicadores obtidos nesta pesquisa são específicos à prática de cada um dos formadores, embora o tópico ensinado seja o mesmo. Essa especificidade pode estar relacionada com o tempo de experiência em sala de aula, já que Benny, além dos conhecimentos matemáticos mobiliza também conhecimentos relacionados ao *Pedagogical Content Knowledge*, seja como professor que ensina Matemática no Ensino Superior, ou como formador de professores de Matemática.

Considerando que diversos atores participam da formação do professor de Matemática, como matemáticos, educadores matemáticos e professores de Matemática que os recebem nas escolas (BESWICK; CHAPMAN, 2012; ESCUDERO-ÁVILA; MONTES; CONTRERAS, no prelo), nossa contribuição nesta pesquisa é aportar resultados sobre o conhecimento especializado de dois matemáticos que atuam como formadores. Uma vez que os sujeitos, além de formadores, são matemáticos ensinando na graduação, os indicadores obtidos estão relacionados com todos os subdomínios do *Mathematical Knowledge* e com o *Pedagogical Content Knowledge* (CARRILLO et al., 2018), bem como com as categorias do *Pedagogical Content Knowledge* do formador apontadas por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo). Investigações adicionais serão importantes para compreender como esses conhecimentos se relacionam entre si, como se relacionam com as crenças do formador, e como o *Mathematical Knowledge* do matemático pode ser articulado com o do formador de professores de Matemática para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura.

Visto que a Teoria dos Números ainda é uma disciplina em que tanto futuros professores quanto aqueles experientes revelam dificuldades (SMITH, 2002; ZAZKIS; SINCLAIR; LILJEDAHL, 2003), são necessárias maiores investigações com foco nas discussões articuladas entre o conhecimento matemático e pedagógico revelado pelos formadores ao ministrar essa disciplina.

Outra questão pertinente é se existem diferenças no conhecimento matemático e pedagógico revelado pelos formadores com perfis e experiências diferentes. Além disso, sugerimos que estudos futuros investiguem também o conhecimento especializado de matemáticos que atuam na formação de professores em contextos de parceria com educadores matemáticos.

Dessa forma, entendemos que nossa investigação sobre os conhecimentos de formadores de professores, em especial aqueles atuantes em cursos de licenciatura em Matemática, tem o potencial de enriquecer o corpo de pesquisas sobre esses sujeitos e também sobre a formação inicial nos cursos de licenciatura em Matemática. Pode também, mesmo que de forma indireta, contribuir para a melhoria da formação oferecida – pela tomada de consciência não apenas do papel do formador de professores, mas também do tipo e da natureza do seu conhecimento na/para a formação.

Entre as limitações da pesquisa conduzida, consideramos a ausência de um participante, matemático, que se identificasse com o papel de formador de professores de Matemática. Acompanhar um sujeito nessas condições poderia fazer emergir conhecimentos diferentes, enriquecendo os resultados da investigação e agregando maiores informações às pesquisas em Educação Matemática que têm por foco o conhecimento do formador. Com essa limitação da pesquisa aqui relatada, uma possibilidade de investigação que fica em aberto se refere à caracterização do conhecimento especializado do formador que é matemático e tem por objetivo formar os futuros professores para atuação na Educação Básica.

Além disso, a realização de investigações envolvendo outros formadores, em contextos diferentes, como o ensino de Geometria ou Análise, também têm potencial para enriquecer o corpo de pesquisas sobre o conhecimento do formador que é matemático.

Com relação ao conhecimento especializado do formador de professores de Matemática que ensina Teoria dos Números na licenciatura em Matemática, várias questões ainda ficam em aberto, tais como:

- Que conhecimentos observaríamos se os formadores participantes da investigação tivessem a intenção de preparar os futuros professores de Matemática para sua futura prática pedagógica na Educação Básica? E se pretendessem promover um conhecimento especializado?
- Há diferenças específicas no *Mathematical Knowledge* de um matemático que se percebe no papel de formador?
- Como o *Mathematical Knowledge* e o *Pedagogical Content Knowledge* do formador nesse tópico afetam o conhecimento dos futuros professores e como podem ser articulados para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura?
- A partir das relações aqui observadas entre a categoria *potencialidades e dificuldades dos alunos ao aprender matemática* (KFLM) e a categoria *estratégias,*

técnicas, tarefas e exemplos (KMT), quais outras relações poderiam ser exploradas em pesquisas futuras considerando o conhecimento do formador?

REFERÊNCIAS

AGUILAR-GONZÁLEZ, Á.; MUÑOZ-CATALÁN, C.; CARRILLO-YÁÑEZ, J.; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L. J. ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, Granada, v. 13, n. 1, p. 41–61, 29 nov. 2018. DOI: 10.30827/pna.v13i1.7944

AKDEMIR, M.; NARLI, S.; KAŞIKÇI, M. The transition from informal to formal understanding of the concept of order in abstract mathematics. In: NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2015, Charles University in Prague, Faculty of Education. *Anais*... Charles University in Prague, Faculty of Education: ERME, 2015. p. 2271–2272.

ALCALÁ, M. *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Graó, 2002. (Biblioteca de Uno, 174).

ALFARO, C.; FLORES, P.; VALVERDE, G. Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA*, Granada, v. 14, n. 2, p. 85–117, 2020. DOI: 10.30827/pna.v14i2.9363

ALMEIDA, M. V. R.; CONCEICAO, S. C.; RIBEIRO, M.; CARRILLO, J. Um olhar para o conhecimento matemático e as crenças sobre demonstração de um formador de professores de matemática. In: IV CONGRESO IBEROAMERICANO SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, 2019, Huelva. *Anais*... Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2020. p. 175-181.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, A. J.; ALBRECHT, E. Perfil conceitual de equação e o conhecimento matemático para o ensino: estabelecendo relações num estudo com professores em formação inicial. *Quadrante*, Lisboa, v. 27, n. 1, p. 47–67, 2018.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, Lisboa, v. 28, n. 2, p. 125–148, 2019.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: Um foco nos exemplos e explicações. *Tangram*, v. 3, n. 4, p. 24-56, 2020. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i4.12716

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento profissional do formador de professores da licenciatura em matemática: um estudo de caso. In: 6º SEMINÁRIO INTERNO DO PROGRAMA DE PÓSGRADUAÇÃO MULTIUNIDADES EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA PECIM - UNICAMP, 2016, Campinas. *Anais*... Campinas: FE/UNICAMP, 2016. p. 259-273.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento profissional do formador de professores de matemática: um foco no conhecimento especializado. In: VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 2017, Campinas. *Anais*... Campinas, 2017. p. 1-11.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Conhecimento especializado do formador de professores de matemática. In: CYRINO, M. C. C. (Org.). *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas.* 1º ed. Brasília: SBEM, 2018. v. 10. p. 195–215.

ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Knowledge of a mathematician to teach divisibility to prospective secondary school teachers. In: ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2019, Utrecht, the Netherlands. *Anais*... Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, 2019. p. 3831–3838.

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. *Charming proofs a journey into elegant mathematics*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2010.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. Usos e abusos dos estudos de caso. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, v. 36, n. 129, p. 637–651, 2006.

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? *Educação e Contemporaneidade*, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95–103, 2013.

APPOVA, A.; TAYLOR, C. E. Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education*, New York, v. 22, n. 2, p. 179–204, abr. 2019. DOI 10.1007/s10857-017-9385-z

BAIR, S. L.; RICH, B. S. Characterizing the Development of Specialized Mathematical Content Knowledge for Teaching in Algebraic Reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, [s.l.], v. 13, n. 4, p. 292–321, out. 2011. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, p. 389-407, 2008. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

BATISTA, E. R. M. Políticas de formação para o professor do ensino superior. In: XXV SIMPÓSIO BRASILEIRO II CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE POLÍTICA E ADMINISTRAÇÃO DA EDUCAÇÃO, n.11, 2011, São Paulo. Anais... São Paulo, Brasil: [s.n.], 2011. Disponível em: <http://www.anpae.org.br/simposio2011/cdrom2011/PDFs/trabalhosCompletos/comunicacoesRelatos/0160.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2017

BAUMERT, J. *et al.* Teachers´ Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom and Student Progress. *American Educational Research Journal*, Washington, v. 47, n. 1, p. 133–180, 2010. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

BERSCH, S. Teachers' perspectives on mathematical argumentation, reasoning and justifying in calculus classrooms. In: ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2019, Utrecht, the Netherlands. *Anais*... Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, 2019. p. 128–135.

BESWICK, K.; CHAPMAN, O. Mathematics Teacher Educators' Knowledge for Teaching. In: CHO, S. J. (Org.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 629–632. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-12688-3_74>. Acesso em: 20 set. 2018.

BESWICK, K.; GOOS, M. Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, New York, v. 21, n. 5, p. 417–427, out. 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, Florianópolis, v. 9, p. 7–20, 29 jul. 2014.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Lei 5.692/71, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, 12 ago. 1971.

BRASIL. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 20 dez. 1996.

BRASIL. Parecer n.º: CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. 6 nov. 2001.

BROWN, A.; THOMAS, K.; TOLIAS, G. Conceptions of divisibility: Success and understanding. In: CAMPBELL, S. R.; ZAZKIS, R. (Org.). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. Westport, CT: Ablex Publishing, 2002. p. 41–82.

CARNOY, M.; ARENDS, F. Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. *Prospects*, [s.l.]: Springer Netherlands, v. 42, n. 4, p. 453–468, 2012.

CARRILLO, J. *et al.* Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: EIGHTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2013, Ankara. *Anais*... Ankara: Middle East Technical University and ERME, 2013. p. 2985–2994.

CARRILLO, J. *et al.* El conocimiento didáctico del contenido del formador de profesores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretendido en el futuro profesor. In: IMBERNÓN, F.; SHIGUNOV NETO, A.; FORTUNATO, I. (Org.). *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas*. São Paulo: Edições Hipótese, 2019. p. 324–341.

CARRILLO-YAÑEZ, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, London, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2 set. 2018. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

CHAPARIN, R. O. *Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS*. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

CHARALAMBOUS, C. Y. Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: An exploratory study. In: 33RD CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2009, Thessaloniki. *Anais*... Thessaloniki: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2009. p. 305–312.

CHICOTE, R. S.; DEIXA, G. V. Pensamento Geométrico dos Futuros Professores de Matemática em Moçambique: um estudo de caso da Universidade Rovuma. *Tangram - Revista de Educação Matemática*, Dourados, v. 3, n. 1, p. 62–73, 30 mar. 2020. DOI: https://doi.org/10.30612/tangram.v3i1.11195

CONTRERAS, L. C. *et al.* Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C. (Org.). *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva: CGSE, 2017. p. 11–25.

COOPER, J.; ZASLAVSKY, O. A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – affordances for teacher education. In: TENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2017, Dublin. *Anais…* Dublin: DCU Institute of Education and ERME, 2017. p. 2025-2032.

COURA, F. C. F.; PASSOS, C. L. B. Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. *Zetetike*, Campinas, v. 25, n. 1, p. 7-26, 30 abr. 2017.

COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Interpretativo do Professor que ensina matemática: o caso do cubo. *Espaço Plural*, Marechal Cândido Rondon, v. 18, n. 36, p. 174–195, 2018.

CRESWELL, J. W. *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. 4th ed. Boston: Pearson, 2012.

CUOCO, A. Mathematics for teaching. *Notices of the American Mathematical Society*, [s.l.], v. 48, n. 2, p. 168–174, 2001.

DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, v. 29, n. 3, p. 37-43, nov. 2009.

DELGADO-REBOLLEDO, R.; ZAKARYAN, D. Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, v. 18, p. 567-587, 27 abr. 2019. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10763-019-09977-0>. Acesso em: 10 mai. 2019.

DIAS, A. L. M.; LANDO, J. C.; FREIRE, I. A. Formação de professores na Bahia: os cursos de Matemática e de Didática da Faculdade de Filosofia (1943-1968). In: FERREIRA, A. C.; BRITO, A. J.; MIORIM, M. A. (Org.). *Histórias de formação de professores que ensinaram Matemática no Brasil*. Campinas: Ílion, 2012. p. 115–135.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual, 2013.

DOOLEY, L. M. Case Study Research and Theory Building. *Advances in Developing Human Resources*, [s.l.], v. 4, n. 3, p. 335–354, ago. 2002. DOI: 10.1177/1523422302043007

DOUMBIA, C. O.; CARVALHO, G. D. S.; ALMOULOUD, S. A. Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z. *Tangram - Revista de Educação Matemática*, Dourados, v. 3, n. 2, p. 102–126, 30 jun. 2020. DOI: 10.30612/tangram.v3i2.11882

ESCUDERO-ÁVILA, D. I.; CARRILLO, J. El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, México, v. 32, n. 2, p. 8–38, 1 ago. 2020. DOI: 10.24844/EM3202.01

ESCUDERO-ÁVILA, D. I.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C. What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer. No prelo.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação da PUC-Campinas*, Campinas, n. 18, p. 107–115, 2005.

FIORENTINI, D. A investigação em educação matemática sob a perspectiva dos formadores de professores. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, Lisboa. *Actas...* Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 2004. p. 13-35.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. M. Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Zetetike*, Campinas, v. 25, n. 1, p. 164-185, 30 abr. 2017. DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647773

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917–938, dez. 2013. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400011

FLORES, E.; CARRILLO, J. Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practices. In: 38TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION AND THE 36TH CONFERENCE OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2014, Vancouver. *Anais*... Vancouver, 2014. 3 v. p. 81–88.

GABEL, M.; DREYFUS, T. Affecting the flow of a proof by creating presence – a case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v. 96, n. 2, p. 187–205, out. 2017. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9746-z

GATTI, B. A. *et al. Professores do Brasil: novos cenários de formação*. Brasília: UNESCO, 2019.

GOMES, M. L. M. Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. *Bolema*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 424–438, 2016. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a06

GÓMEZ, P.; CAÑADAS, M. C. Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Ciudad de México, v. 19, n. 3, p. 311–334, 2016. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1933

GONÇALVES, T. O.; FIORENTINI, D. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática*. São Paulo: Musa Editora, 2005. p. 68–88.

GOODWIN, A. L. et al. What Should teacher educators know and be able to do? Perspectives From practicing teacher educators. *Journal of Teacher Education*, New York, v. 65, n. 4, p. 284-302, 1 set. 2014. https://doi.org/10.1177/0022487114535266

GUALA, E.; BOERO, P. Cultural analysis of mathematical content in teacher education: the case of Elementary Arithmetic Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v. 96, n. 2, p. 207–227, out. 2017. DOI 10.1007/s10649-017-9767-2

HAREL, G.; SOWDER, L. College instructors' views of students vis-à-vis proof. In: BLANTON, M.; STYLIANOU, D.; KNUTH, E. (Org.). *Teaching proof across the grades: A K–12 perspective*. New York, NY: Routledge, 2009. p. 275–289.

JACOBSON, N. *Basic algebra*. 2nd ed., Dover ed. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2009. (Dover books on mathematics).

JAWORSKI, B. Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In: JAWORSKI, B.; WOOD, T. (Org.). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008. v. 4. p. 335–361.

KELCHTERMANS, G.; SMITH, K.; VANDERLINDE, R. Towards an 'international forum for teacher educator development': an agenda for research and action. *European Journal of Teacher Education*, Bruxelles, v. 41, n. 1, p. 120–134, jan. 2018. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1372743

KLEIN, F. *Elementarmathematik vom höheren Stadpunkte aus. [Elementary mathematics from a superior perspective]*. Leipzig: B. G. Teubner, 1908.

LAI, Y.; WEBER, K. Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v. 85, n. 1, p. 93–108, jan. 2014. DOI 10.1007/s10649-013-9497-z

LEIKIN, R.; ZAZKIS, R.; MELLER, M. Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Netherlands, v. 21, n. 5, p. 451–473, out. 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

LESSEIG, K. Investigating Mathematical Knowledge for Teaching Proof in Professional Development. *International Journal of Research in Education and Science*, Konya, v. 2, n. 2, p. 253-270, 2016.

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 1, n. 76, p. 8–11, 2011.

LOUGHRAN, J. *Developing a Pedagogy of Teacher Education: Understanding Teaching & Learning about Teaching*. [E-book]. London: Routledge, 2013. https://doi.org/10.4324/9780203019672 Disponível em: <https://www.taylorfrancis.com/books/9780203019672>. Acesso em: 29 jun. 2019.

LOUGHRAN, J. Professionally developing as a teacher educator. *Journal of Teacher Education*, New York, v. 65, n. 4, p. 271-283, 1 set. 2014. DOI: 10.1177/0022487114533386

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. L. N. Mathematical structure, proof, and definition in advanced mathematical thinking. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Org.). *Handbook of international research in mathematics education*. New York, NY: Routledge, 2016. p. 239–256.

MARTINEZ, F. B. *et al. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro (RJ): IMPA, 2010.

MELLONE, M.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M. Mathematics educator transformation(s) by reflecting on student's non-standard reasoning. In: NINTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2015, Prague. *Anais*... Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, 2015. p. 2874-2880.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução à matemática*. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2006.

MONDINI, F.; BICUDO, M. A. V. A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 12, n. 2, p. 43–54, dez. 2010.

MONTES, M. *et al.* Understanding Mathematics from a Higher Standpoint as a Teacher: an unpacked example. In: 40RD CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2016, Szeged. *Anais*... Szeged: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2016. 1 v. p. 315–322.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema*, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137–1150, dez. 2012. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez. 2013. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400014

NACARATO, A. M. Formação do Professor de Matemática: pesquisa x políticas públicas. *Contexto e Educação*, Belo Horizonte, v. 21, n. 75, p. 131–156, 2006.

NARAIN, P.; STYLIANIDES, A. J. Demystifying Proofs Through Structured Interaction: A Case Study of One Instructor's Teaching in an Undergraduate Analysis Course. *Journal of Educational Research in Mathematics*, Seoul, v. 30, p. 69–90, 31 ago. 2020. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.69

NYE, B; KONSTANTOPOULOS, S; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, Washington, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004. https://doi.org/10.3102/01623737026003237

OLIVEIRA, G. P.; FONSECA, R. V. A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 23, n. 4, p. 881–898, dez. 2017. https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. G.; CAVALLET, V. J. Docência no ensino superior: construindo caminhos. In: BARBOSA, R. L. L. (Org.). *Formação de educadores*. São Paulo: Unesp, 2003. p. 267–278.

PIZYSIEZNIG, A. H. *Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?* 2011. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

POLICASTRO, M. S. *et al.* Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In: CARLSEN, M.; ERFJORD, I.; HUNDELAND, P. S. (Org.). *Mathematics Education in Early Years*. NA. Switzerland: Springer, 2020. p. 263–279.

POLICASTRO, M.; RIBEIRO, M.; FIORENTINI, D. Mathematics teacher's specialized knowledge on division: a focus on knowledge of topics and structures of mathematics. In: 43RD CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2019, Pretoria. *Anais*... Pretoria: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2019. p. 209–216.

POTARI, D. Primary mathematics teacher education in Greece: Reality and vision. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Netherlands, v. 4, n. 1, p. 81–89, 2001. https://doi.org/10.1023/A:1009983015697

RESENDE, M. R. *Re-Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura*. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

RESENDE, M. R.; MACHADO, S. D. A. O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática em Pesquisa*, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 257–278, 2012.

RIBEIRO, A. J. A álgebra que se aprende e a álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, [s.l.], n. 15, p. 127-136, 2016.

RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A. P. V. S. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem suas aulas sobre equações. *Zetetiké*, Campinas, v. 23, n. 44, p. 311-327, jul. 2015. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646541

RIBEIRO, M. Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática – um exemplo focando tarefas para a formação. In: TRALDI, A.; TINTI,

D. S.; RIBEIRO, R. M. (Orgs.). *Formação de professores que ensinam matemática: processos, desafios e articulações com a Educação Básica.* 1º ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo, 2020. p. 241–263.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J. C. The role of beliefs and knowledge in practice. In: ROESKEN, B.; CASPER, M. (Org.). *Current state of research on mathematical beliefs XVII – MAVI 17*. Bochum: Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum, 2011. p. 192-201.

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. C. C. R. Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Cidade do México, v. 15, n. 1, p. 93–121, 2012.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In: 37RD CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 2013a, Kiel. *Anais*... Kiel: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2013. p. 89–96.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ELEMENTARY MATHS TEACHING, 2013b, Prague. *Anais*... Prague: Charles University, Faculty of Education, 2013. p. 273–281.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non-standard reasoning: insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, v. 36, n. 2, p. 8–13, jul. 2016.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 143–166, abr. 2015. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 40, p. 143-155, jan. 2009. https://doi.org/10.1590/S1413-24782009000100012

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINO-FAN, L. R. What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, v. 17, n. 1, p. 153–172, 2019. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6.

SCHINDLER, M.; HUßMANN, S. About student's individual concepts of negative integers – in terms of the order relation. In: EIGHTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2013, Ankara. *Anais*... Ankara: Middle East Technical University and ERME, 2013. p. 373-382.

SCHOENFELD, A. H. *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. 1. ed. [S.l.]: Routledge, 2010. Disponível em: <https://www.taylorfrancis.com/books/9780203843000>. Acesso em: 5 out. 2020.

SCHOENFELD, A. H. Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, New York, v. 18, n. 3, p. 243–261, 2000. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Thousand Oaks, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

SMITH, J. C. Connecting undergraduate Number Theory to High School Algebra: A study of a course for prospective teachers. In: 2ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2002, Crete. *Anais*... Crete: John Wiley & Sons Inc, 2002. p. 1–8.

SOARES, N. C.; MACHADO, S. D. A. Resignificando as operações com números naturais com alunos "em dificuldade" do ensino fundamental. *Ensino da Matemática em Debate*, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 24–36, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/31637/22030. Acesso em: 19 nov. 2020.

SOSA, L.; FLORES-MEDRANO, E.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de* *investigación y experiencias didácticas*, Barcelona, v. 33, n. 2, p. 173–189, 2015. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

SOUZA, S. A. O. O Ensino de Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática. *Videtur (USP)*, São Paulo, v. 7, p. 23–26, 2004.

STAKE, R. E. Qualitative Case Studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *The Sage Handbook of Qualitative Research*. 2ª ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2005. p. 443–466.

STAKE, R. E. *The art of case study research*. Thousand Oaks: Sage Publications, 1995.

STAKE, R. E. *Multiple case study analysis*. New York: The Guilford Press, 2006.

STYLIANIDES, A. J.; BIEDA, K. N.; MORSELLI, F. Proof and argumentation in mathematics education. In: GUTIÉRREZ, A.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (Org.). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2016. p. 315–351.

SUPERFINE, A.; LI, W. Exploring the mathematical knowledge needed for teaching teachers. *Journal of Teacher Education*, New York, v. 65, n. 4, p. 303-314, 1 set. 2014. DOI: 10.1177/0022487114534265

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. 15. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria & Educação*, Porto Alegre, v. 4, p. 215-233, 1991.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organizing framework for developing and deepening teacher´s knowledge. In: ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Org.). *Mathematical knowledge in teaching.* Dordrecht: Springer, 2011. v. 50. p. 195 – 212.

VASCO, D.; CLIMENT, N. Conocimiento de un profesor de Álgebra Lineal sobre los errores de los estudiantes y su uso en la enseñanza. *Quadrante*, Lisboa, v. 29, n. 1, p. 97–114, 2020.

VASCO, D.; CLIMEN, N. El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, Granada, v. 12, n. 3, 31 mar. 2018. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

VEIGA, I. P. A. A docência universitária na educação superior. In: RISTOFF, D.; SEVEGNANI, P. (Org.). *Docência na educação superior*. Brasília-DF: INEP, 2006, p. 85-96.

WEBER, K. Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 43, n. 4, p. 463–482, 15 jun. 2012. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2011.622803

YAN, X.; MARMUR, O.; ZAZKIS, R. Calculus for Teachers: Perspectives and Considerations of Mathematicians. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Ontario, v. 20, p. 355–374, 2020. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00090-x

YIN, R. *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos.* 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

YIN, R. K. *Case study research: design and methods*. 3rd ed. Thousand Oaks, Calif: Sage Publications, 2003. (Applied social research methods series, v. 5).

ZASLAVSKY, O.; COOPER, J. What Constitutes a Proof? Complementary Voices of a Mathematician and a Mathematics Educator in a Co-Taught Undergraduate Course on Mathematical Proof and Proving. In: 20TH CONFERENCE ON RESEARCH IN UNDERGRADUATE MATHEMATICS EDUCATION, 2017, San Diego. *Anais*... San Diego: Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, 2017. p. 1523–1529.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v. 27, n. 5, p. 540, nov. 1996a. https://doi.org/10.2307/749847

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. R. Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, New York, v. 15, n. 2, 207–218, 1996b.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 12, n. 4, p. 263–281, 4 out. 2010. https://doi.org/10.1080/10986061003786349

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v. 35, n. 3, p. 164–186, 2004. https://doi.org/10.2307/30034911

ZOPF, D. *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. 2010. Unpulished doctoral dissertation – University of Michigan, Ann Arbor, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Carta de autorização da Revista Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática

Quadrante
Revista de Investigação em Educação Matemática

CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Hélia Margarida Pintão de Oliveira, Diretora da Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática (ISSN 2183- 2838 (Online), tenho ciência e autorizo a inclusão do artigo intitulado *Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros* (https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/490), na tese de doutorado de Marieli Vanessa Rediske de Almeida, apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Lisboa, 12 de setembro de 2020.

Assinado por : **HÉLIA MARGARIDA APARÍCIO PINTÃO DE OLIVEIRA**
Num. de Identificação: BI073205605
Data: 2020.09.12 23:22:02+01'00'

CARTÃO DE CIDADÃO

Hélia Oliveira

Diretora da Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática

APÊNDICE 2 – Carta de autorização da Revista Tangram – Revista de Educação Matemática

<u>CARTA DE AUTORIZAÇÃO</u>

Eu, Edvonete Souza de Alencar, Editora da Tangram – Revista de Educação Matemática (ISSN: 2595-0967), tenho ciência e autorizo a inclusão do artigo intitulado *Conhecimento especializado de um formador de professores de matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações* (https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12716), na tese de doutorado de Marieli Vanessa Rediske de Almeida, apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Campinas.

Dourados, 13 de dezembro de 2020.

Edvonete Souza de Alencar

____

Edvonete Souza de Alencar

Editora da Tangram – Revista de Educação Matemática

ANEXOS

ANEXO 1 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da pesquisa: Conhecimento especializado do formador de professores que ensina álgebra na licenciatura em matemática: um estudo de caso

Pesquisadores responsáveis: Marieli Vanessa Rediske de Almeida e Carlos Miguel da Silva Ribeiro

Número do CAAE: 84252718.0.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.
Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:
O que os alunos aprendem, e como o aprendem, está diretamente relacionado com o conhecimento e as crenças do professor. Os resultados de pesquisas indicam que, por um lado, o conhecimento do professor é o fator que possui maior impacto nos resultados (e nas aprendizagens) dos alunos (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004). Por outro lado, mostram que as crenças do professor influenciam na forma como este percebe o seu próprio conhecimento, o seu papel e, consequentemente, o papel dos alunos, impactando, portanto, na sua prática (RIBEIRO; CARRILLO, 2011). Esse conhecimento do professor que ensina (ou ensinará) matemática é considerado especializado, e essa especialização contempla tanto aspectos do conteúdo quanto aspectos didático-pedagógicos do conteúdo (CARRILLO et al., 2013), expandindo e refinando, para a área de conhecimento da matemática, as ideias originais de Shulman (1986).
Considerando que o professor é, ele mesmo, também um aprendiz – no que se refere tanto à formação inicial quanto à formação contínua –, podemos acrescentar ao papel do formador de professores (em particular do seu conhecimento e de suas crenças) a tarefa de contribuir para a melhoria da aprendizagem dos professores. Acreditamos que essa aprendizagem docente precisa considerar, necessariamente, as particularidades e as especificidades do conhecimento do professor, associando-se às mais diversas dimensões do seu conhecimento profissional e, em particular, ao seu conhecimento do conteúdo e ao conhecimento didático-pedagógico do conteúdo.
Nossa pesquisa foca-se especificamente nesta problemática do conhecimento profissional do formador de professores de matemática e, nesse sentido, o principal objetivo de seu desenvolvimento se refere a compreender o conhecimento especializado do formador de professores que atua na formação inicial do professor de matemática no âmbito da Álgebra.

Procedimentos:
Participando do estudo você está sendo convidado a: participar de algumas entrevistas que serão registradas em áudio e a permitir que a pesquisadora possa registrar em áudio algumas de suas aulas, a definir em comum acordo entre você e a pesquisadora, no contexto de uma das disciplinas que leciona, bem como participar de entrevistas que antecederão e precederão as aulas registradas.
Como docente da disciplina solicita-se a autorização para que a pesquisadora possa gravar seus áudios, descrever seus relatos orais e escritos nas intervenções à aula, bem como, nas entrevistas individuais que ocorrerão no decurso da pesquisa.

Rubrica do pesquisador:______________ Rubrica do participante:______________

Salienta-se que após a realização da pesquisa os dados coletados serão destruídos/excluídos. Enquanto isso, eles serão armazenados sob os cuidados da pesquisadora e seu orientador.

Observações:

- ✓ O acesso as gravações e escritos das intervenções e entrevistas, ocorrerão mantendo-se absoluta confidencialidade sobre os dados ali registrados.
- ✓ A pesquisadora assistirá, sem se manifestar, a algumas aulas da disciplina em foco.
- ✓ As entrevistas realizadas poderão ter até 1h30min de duração.

Desconfortos e riscos:
A participação nesta pesquisa não traz associados riscos **previsíveis** diretos ou indiretos em nenhuma das dimensões física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual do ser humano, entretanto a pesquisadora se manterá atenta para esta questão comprometendo-se a envidar esforços para aplacar situações que possam conduzir a riscos, ou prestar a assistência devida, caso não consiga evita-los. Estando tal pesquisa segundo normatizado nas Resoluções CNS/MS nº 466 de 2012 e 510 de 2016.

Benefícios:
Ao participar dessa pesquisa terá a possibilidade de discutir e refletir sobre suas práticas, experiências e conhecimentos mobilizados em sala de aula. Essas reflexões podem contribuir para uma discussão mais ampla relativamente ao que focar na formação de professores de matemática no âmbito particular dos temas trabalhados na disciplina em questão.

Acompanhamento e assistência:
O acompanhamento será como pesquisadora-observadora durante as aulas da referida disciplina, por e-mail e via Skype. Após o encerramento da pesquisa, pode-se visualizar os resultados da análise de identificação e compreensão do conhecimento especializado do formador de professores de matemática na perspectiva do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.

Sigilo e privacidade:
Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado e a disciplina que leciona não será identificada por código e pela nomenclatura recebida na instituição. Além disso, em momento algum será referida a instituição em que as informações foram coletadas.

Ressarcimento e Indenização:
Você não terá nenhum tipo de despesa por participar deste estudo, bem como não receberá nenhum tipo de pagamento por sua participação, considerando que esta pesquisa será feita durante sua rotina de trabalho na formação inicial de professores. Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Contato:
Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Marieli Vanessa Rediske de Almeida, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, R. Sérgio Buarque de Holanda, 777 - Cidade Universitária, Campinas - SP, CEP: 13083-859, e-mail: marieli.almeida@outlook.com ou Miguel Ribeiro, Faculdade de Educação da Unicamp, Rua Bertrand Russel, CEP 13057-194 Campinas-SP, e-mail: cmribas78@gmail.com.
Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das

Rubrica do pesquisador:_______________ Rubrica do participante:_______________

08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep@fcm.unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).
O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas.

Consentimento livre e esclarecido:
Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do (a) participante: ____

Contato telefônico: ____

e-mail (opcional): ____

____ Data: ____/_____/______.
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:
Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/______.
(Assinatura do pesquisador)

Rubrica do pesquisador:_______________ Rubrica do participante:_______________