



Olimpio Pereira de Sá Neto

# Osciladores nanoeletromecânicos no regime quântico

Campinas

2013





Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Física Gleb Wataghin

Olimpio Pereira de Sá Neto

Osciladores nanoeletromecânicos no regime quântico

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Marcos Cesar de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Olimpio Pereira de Sá Neto, e orientada pelo Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira



*Orientador: Dr. Marcos Cesar de Oliveira.*

Campinas

2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

Sa11o Sá Neto, Olimpio Pereira de, 1984-  
Osciladores nanoeletromecânicos no regime quântico / Olimpio Pereira de Sá Neto. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcos Cesar de Oliveira.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Sistemas nanoeletromecânicos. I. Oliveira, Marcos Cesar de, 1969-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Nanoelectromechanical oscillators in the quantum regime

**Palavras-chave em inglês:**

Nanoelectromechanical systems

**Área de concentração:** Física

**Titulação:** Doutor em Ciências

**Banca examinadora:**

Marcos Cesar de Oliveira [Orientador]

Thiago Pedro Mayer Alegre

José Antonio Roversi

Carlos Henrique Monken

Alexandre Dodonov

**Data de defesa:** 06-12-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **OLIMPIO PEREIRA DE SÁ NETO – RA: 077657** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 06 / 12 / 2013.

**COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Marcos César de Oliveira  
Orientador do Candidato - DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Henrique Monken - DF/UFMG

Prof. Dr. Alexandre Dodonov - IF/UNB

Prof. Dr. Thiago Pedro Mayer Alegre - DFA/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Antonio Roverá - DEQ/IFGW/UNICAMP

# Abstract

One of the central issues in quantum optics is the study of statistical properties of the electromagnetic radiation. This includes any medium in which there is a vector potential or an analog that is to be quantized. In the last three decades many experiments verified the quantum behavior in nanoelectromechanical systems and, once this behavior was verified, new challenges were born. Because nanoelectromechanical devices are transducers, in this thesis I place it in a circuit mediating a capacitive coupling between two resonant transmission lines with compatible dimensions. With a new proposal for a circuit scheme, initially I formulate the interaction Hamiltonian in the quantum regime, which will be used in two applications: being the first the generation of tripartite entangled states and the second, with a slight modification of this circuit, the creation of a method of nondemolition quantum detection of the number of phonons of the nanoelectromechanical system for thermal and Fock states. In the final stage of this thesis there is a supplementary part on the electromechanical interaction between a nanoelectromechanical system and a trapped ion.

# Resumo

Uma das principais investigações dentro da área de óptica quântica é o estudo das propriedades estatísticas da radiação eletromagnética. Isso inclui qualquer meio onde exista um potencial vetor ou algo análogo para ser quantizado. Nas últimas três décadas muitos experimentos comprovaram o comportamento quântico em sistemas nanoeletromecânicos, e uma vez comprovado esse novo comportamento, nasceram novos desafios. O fato de que ressonadores nanoeletromecânicos funcionem como transdutores é utilizado nessa tese para mediar o acoplamento capacitivo entre duas linhas de transmissão ressonantes com dimensões compatíveis. Isso permitiu propor esquemas de detecção, partindo da formulação do Hamiltoniano de interação no regime quântico. A primeira aplicação trata da geração de estados emaranhados tripartite e a segunda, modificando um pouco este circuito, a criação de um método de detecção quântica não demolidora do número de fônons do sistema nanoeletromecânico para estados de Fock e térmico. Na sua etapa final consta uma parte complementar sobre interação entre um sistema nanoeletromecânico e um íon aprisionado.

# Sumário

Abstract . . . . .	iii
Resumo . . . . .	vi
Agradecimentos . . . . .	xii
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Objetivo da Tese . . . . .	2
Estrutura da Tese . . . . .	3
<b>I Parte I: Aspectos Fundamentais</b>	<b>5</b>
<b>1 Óptica Quântica Linear em Sistemas Naoeletromecânicos</b>	<b>6</b>
1.1 Experimentos com NEMS . . . . .	6
1.2 Fabricação de um NEMS . . . . .	7
1.3 Teoria Clássica do NEMS . . . . .	7
1.3.1 Teoria do Contínuo . . . . .	9
1.3.2 Oscilador Harmônico Clássico . . . . .	10
1.3.3 Teoria de Euler-Bernoulli . . . . .	12
1.4 Teoria Quântica do NEMS . . . . .	13
1.4.1 Oscilador Harmônico Quântico . . . . .	14
1.4.2 Estados de um Oscilador Harmônico Quântico . . . . .	15
1.5 Efeitos de Dissipação em um NEMS . . . . .	16
1.6 Sumário do Capítulo 1 . . . . .	17

<b>2</b>	<b>Circuito Elétrico Quântico</b>	<b>18</b>
2.1	Oscilador LC Quântico . . . . .	18
2.1.1	Estado Coerente . . . . .	20
2.2	Modos de Linhas de Transmissão Ressonante . . . . .	22
2.3	Oscilador Paramétrico . . . . .	23
2.4	Acoplador Híbrido e Divisor de Feixe . . . . .	26
2.4.1	Acoplador Híbrido . . . . .	26
2.4.2	Divisor de Feixe . . . . .	27
2.5	Sumário do Capítulo 2 . . . . .	28
<b>II</b>	<b>Parte II: Aplicações</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>Acoplamento Capacitivo Entre Duas TLRs Mediado pela Vibração de um NEMS</b>	<b>30</b>
3.1	Modelo . . . . .	30
3.2	Emaranhamento Tripartite em um Circuito . . . . .	35
3.3	Equações Diferenciais Quânticas Estocásticas e Eliminação Adiabática . . . . .	37
3.4	Sumário do Capítulo 3 . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Estatística de Número de Fônons Através de QED em Circuitos</b>	<b>40</b>
4.1	Modelo . . . . .	40
4.2	Descrição da Medição e a Estatística de Número de Fônons . . . . .	42
4.3	Sumário do Capítulo 4 . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Espectro de Transmissão dos Modos Vibracionais da Interação entre NEMS e Íon</b>	<b>49</b>
5.1	Introdução . . . . .	49
5.2	Modelo . . . . .	50
5.3	Simulação do Espectro de Transmissão dos Modos Vibracionais . . . . .	52
5.4	Sumário do Capítulo 5 . . . . .	53

<b>III</b>	<b>Parte III: Considerações Finais</b>	<b>54</b>
	Conclusão	55
	Referências Bibliográficas	57
<b>IV</b>	<b>Apêndice</b>	<b>67</b>
	A - Emaranhamento de Estados Puros . . . . .	68
	B - Medição Quântica . . . . .	69

Dedicado aos meus pais **José Raimundo Lima Ferro** e **Sara Silva Sá Ferro**.

# Agradecimentos

No desenvolvimento de toda pesquisa do doutorado algumas pessoas influenciaram decisivamente o modo de eu pensar a óptica quântica em circuitos. Agradeço ao meu orientador e professor Marcos Cesar de Oliveira, além de toda dedicação de sua supervisão durante toda minha carreira científica, tive também um grande apoio acompanhado de sua amizade. Agradeço também toda sua família pela compreensão e acolhimento.

Agradeço aos amigos que além de me ajudarem na construção da tese, diretamente ou indiretamente, me deram um grande presente também, que foi a oportunidade de conhecê-los. Uma lista parcial inclui Leonardo Dantas Machado, Samir Silva Coutinho, Karl Marx Garcez, Domingos Lopes, Daniel Miranda, Zenner Silva, Lisan Durão e Renato Pessoa.

A meu grande amigo Pitágoras Pinheiro Carvalho agradeço por ser meu parceiro, pelas conversas, marmotas ou presepadas, e por tudo que vivemos dentro da física matemática.

Agradeço aos meus amigos da vida, Renan (professor de matemática da UFPI Parnaíba), Emilio Henrique, Vladimir Miranda, Juan Manuel Orozco, Miguel (os dois da Colômbia), Lucas Samuel (Lukete), Samuel de Sousa, Thiaguin, Clécio, João Paulo, Michel, Adriano Sol, Flamys, Lilian, Eva, Sergio (Sergião), Emanuel Borges, Paulo Renato Carvalho, Gladstone, Diego Sousa da Matemática, Emanuel, José Moreira, Felipe Pites, Gustavo da Cardiologia com sua família, Juliana Romano com sua família, Evelyn da anestesio, Bruno da ortopedia, Joyce da anestesio, Victor Leal, André Leal com sua família, tia Graça, Udson Cabral, Nego Chico, Hugo do Beijo, aos amigos da biologia 2004-2008 da ufpi, ao David que estudou com Venâncio, ao seu Julio Técnico, ao Jacaré Técnico e aos Colombianos da Física.

Agradeço aos meus alunos de PED.

Aos meus amigos de graduação, que nunca perdi o contato, agradeço ao Alfredo Ennes, Igo Torres, Marcus Damaceno, Lenilson Torres, Antônio Rodrigues e Paulo Afonso.

Aos meus amigos de mestrado, que me receberam em Campinas, Felipe (Saci), Paulo, Geovanna, Chaveirinho, Mariele, Lino Holanda, Guilherme Coco, Thiago Santareli.

Aos amigos do grupo de pesquisa, que muito me ensinaram, João Paulo, Frank, Alejandro, John, Reginaldo Jesus, Marcio, Fernando Nicacio e Thiago Rodrigues.

Agradeço sinceramente o apoio financeiro da CAPES, através do projeto “Controle de Interação de Dispositivos, Sistemas Nanoeletromecânicos com Radiação de Linha de Transmissão Ressonante”. À University of Calgary pela oportunidade, de pouco tempo, mas essencial para finalizar um artigo. Ao professor Gerard James Milburn, que apesar do tempo muito limitado, deu dicas chaves para realizarmos excelentes descobertas.

Um sincero e humilde agradecimento especial à professora Kyoko Furuya (*in memoriam*), apesar de não estar mais conosco neste momento, me ensinou muito da física durante meu mestrado e doutorado, e foi essencial no desenvolvimento da pesquisa relacionada a interação entre um íon e um sistema nanoeletromecânico.

Ao professor Fernando Semião, apesar de pouca conversa, sua atenção e dicas foram cruciais para obtenção de resultados.

Aos professores que me ensinaram e ajudaram a desenvolver minha formação científica e acadêmica. Agradeço aos professores: José Pimentel, Amir Caldeira, Cabrera, José Wellington, Gustavo Wiederhecker, Thiago Alegre e Bulamarque.

Milha família sempre me deu muito apoio e força durante toda minha vida acadêmica e científica, agradeço a todos meus tios e primos sem exceção, optei por não citar nomes para evitar esquecimento devido à quantidade.

Minha amada esposa Rita de Cássia agradeço ao seu apoio e companheirismo durante toda a etapa do doutorado. E, não só ela, como toda sua família que hoje também é minha. Sou grato especialmente a Dona Helena, seu Antônio. A Madrinha Helenilda foi essencial na correção gramatical da tese e é um amor de tia, Tio Zí pelas conversas agradáveis, Tio Arão, tia Dênia, tia Remédios, Tio Filho, Tia Mazé, Felipe, Hanna, Renata, ao Arthurzinho que me traz muita alegria, ao André que está sumido nos bregas da vida igual político depois que ganha eleição.

Meus irmãos Mahatma e Venâncio, tenho um enorme agradecimento, pelo companheirismo, apoio, conversas, e além de tudo, tenho muita admiração por eles.

E finalmente, aos meus pais José Raimundo Lima Ferro e Sara Silva Sá Ferro, que imensuravelmente tenho minha gratidão, nunca vou conseguir pagar o que eles fizeram por mim. Posso dizer que em todas as minhas conquistas eles estavam ao meu lado e sempre quando fracassei eles me apoiaram, portanto, o que sou hoje, é mérito totalmente deles. Muito obrigado. Amo vocês!

# Introdução

*“Tudo se move!”*

*Keith C. Schwab and Michael L. Roukes.[1]*

Em um mundo dominado por instrumentações de dispositivos eletrônicos, é fácil esquecer que todas as medições envolvem movimento, seja o movimento de elétrons em um transistor, os pares de Cooper em um dispositivo supercondutor de interferência quântica (SQUID), os fótons por meio de um interferômetro óptico, ou do simples deslocamento de um elemento mecânico. A nanociência contemporânea está direcionando um ressurgimento do interesse em dispositivos mecânicos, que têm sido usados como transdutores para detectores sensíveis à pequenas intensidades de força. Entre os exemplos históricos proeminentes há a balança de torção mecânica de Coulomb, que lhe permitiu, em 1785, estabelecer a lei da força do inverso do quadrado da distância entre as cargas elétricas, e Cavendish com o instrumento mecânico que lhe permitiu em 1798, medir a força gravitacional entre duas esferas de chumbo.

Hoje, os sistemas micro e nanoeletromecânicos (MEMS e NEMS)<sup>1</sup> são amplamente utilizados de forma semelhante, mas com muito mais sensibilidade de força e massa, na ordem de zeptonewtons ( $10^{-21}N$ ) e zeptogramas ( $10^{-21}g$ ) [1]. Estes sensores miniaturizados também podem fornecer resolução espacial em escala atômica e vibram em frequências na faixa de giga-hertz ( $GHz$ ). Esta padronização de estruturas mecânicas com características em escala nanométrica é agora comum.

Apesar de já existirem grandes avanços em arquiteturas de circuitos incluindo o NEMS, algumas das suas aplicações mais intrigantes permanecem diretamente dentro do campo da pesquisa fundamental. O progresso contínuo em certos dispositivos, agora, pode ser levado para o reino de sistemas quânticos, como

---

<sup>1</sup>A partir dos nomes dos dispositivos em inglês são dadas as siglas: Nanoelectromechanical systems → MEMS e Nanoelectromechanical systems → NEMS.

pode ser observado na figura (1), e o mais importante, é que eles convertem sinais mecânicos em elétricos ou ópticos (transdutor).

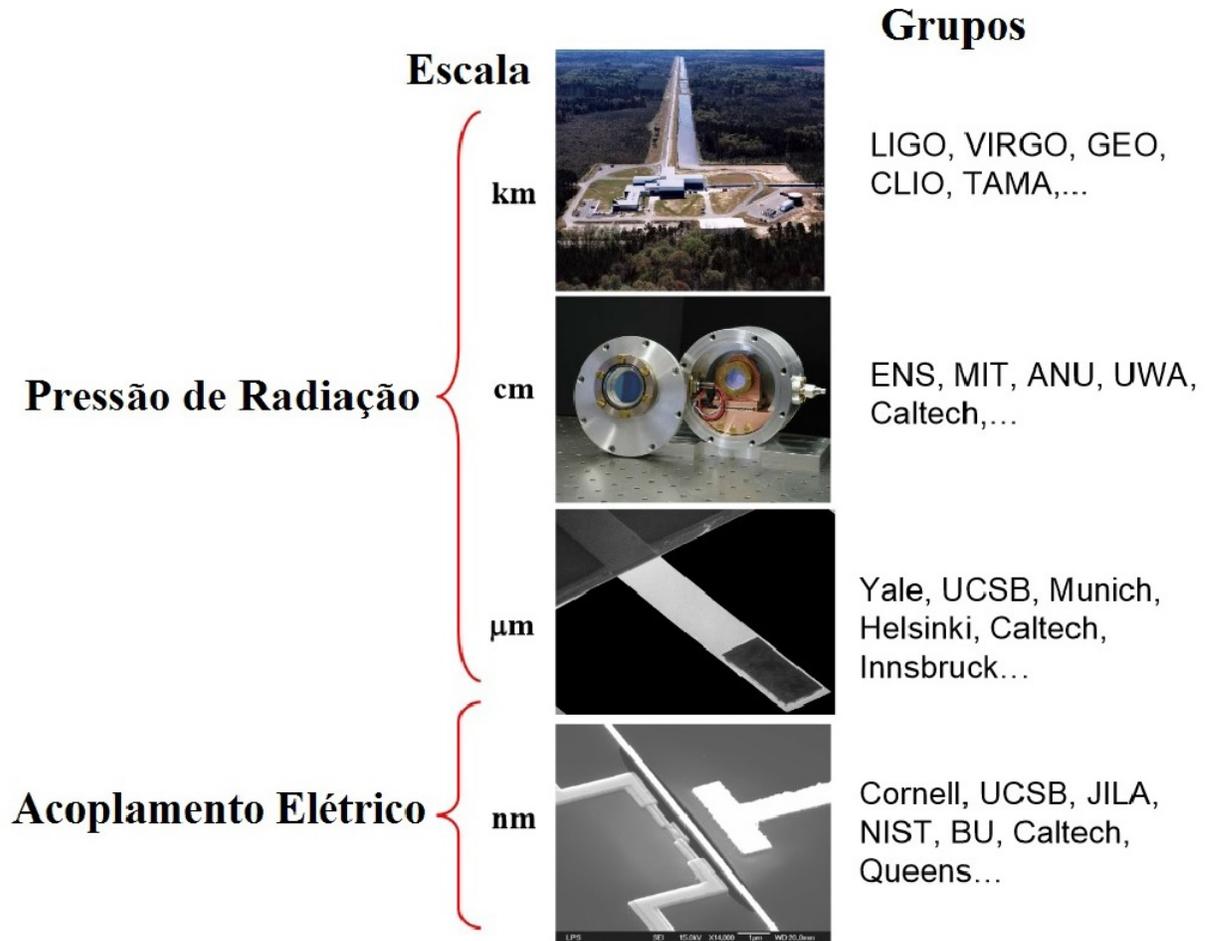


Figura 1: Escalas de acoplamentos opto e eletromecânicos, com domínio de efeitos clássicos e quânticos. O acoplamento optomecânico se dá via pressão de radiação, e o acoplamento eletromecânico se dá via força eletrostática.

## Objetivo da Tese

Os objetivos da tese são:

1. O primeiro, é propor um novo esquema de interação entre NEMS e ressonador eletromagnético<sup>2</sup>, e a partir disso, investiga-se efeitos de emaranhamento e medição;

*Descrição:* Essa transdução de movimento, serve para que o NEMS possa ser o dispositivo mediador do acoplamento capacitivo entre duas linhas de transmissões ressonantes (TLR). Realizado a formulação do Hamiltoniano de interação, resulta-se no operador<sup>3</sup>  $H_{int} \propto b^\dagger b (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$ , onde  $b^\dagger b$  é o operador número de fônons do NEMS e  $a_j (a_j^\dagger)$  é o operador aniquilação (criação) para a radiação eletromagnética em cada TLR<sup>4</sup>, para  $j = 1$  e  $2$ . A partir desta interação, pode-se desfrutar de duas aplicações:

- Devido à interação entre os dispositivos (NEMS com as TLRs), se inicialmente o sistema em um produto de estados coerentes, gerar-se emaranhamento periodicamente. O que não seria possível caso a interação capacitiva entre as TLRs não fosse mediado pela vibração mecânica do NEMS.
- Esta interação, permite a medição quântica não demolidora no número de fônons do NEMS ( $[b^\dagger b, H_{int}] = 0$ ), e, de acordo com o estado em que ele se encontra, permite um estudo da estatística de número.

2. O segundo objetivo, é investigar um esquema de interação entre um íon aprisionado com o NEMS, para ser calculado o espectro de transmissão dos modos vibracionais.

*Descrição:* Com a ideia do modelo proposto em outros trabalhos, nas referências [3]-[2], aqui, propõe-se um estudo onde é considerado os termos de Hamiltoniano de dois graus de liberdades eletrônicos do íon. Partindo disso, é calculado espectro de transmissão dos modos vibracionais, e observado a separação dos picos de ressonâncias.

## Estrutura da Tese

A estrutura básica da tese é descrita na figura (2). A tese é dividida em três partes após esta introdução. A estratégia geral é proceder do concreto para o abstrato, sempre que possível. Assim, primeiro estuda-se os circuitos esquemáticos e depois suas formas quantizadas.

---

<sup>2</sup>O ressonador eletromagnético será chamado na tese de linha de transmissão ressonante (TLR).

<sup>3</sup> $H_{int}$  é proporcional a  $b^\dagger b (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$ .

<sup>4</sup> $(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$  é o operador de troca de fótons entre as TLRs.

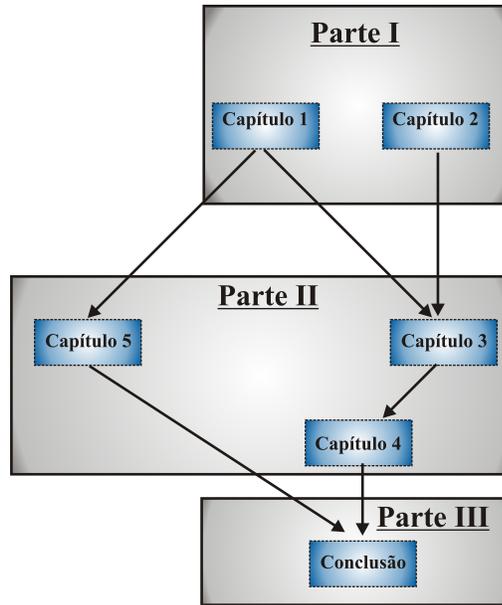


Figura 2: Estrutura da Tese

A Parte I descreve a fundamentação da óptica quântica em dispositivos mecânicos e eletromagnéticos. O Capítulo 1 relata sistemas nanoeletromecânicos segundo a interpretação da óptica quântica. O Capítulo 2 refere-se às linhas de transmissão ressonantes com o mesmo tratamento, lembrando que, todo o detalhamento é voltado para as aplicações envolvidas nessa tese.

A Parte II descreve as aplicações estudadas no decorrer do doutorado. O Capítulo 3 trata da formulação do Hamiltoniano do acoplamento capacitivo entre duas linhas de transmissão ressonantes mediado pela vibração de um sistema nanoeletromecânico. Em seguida, mostra-se um aproveitamento desse circuito para geração de emaranhamento tripartite de estados coerentes; bem como de um esquema de detecção quântica não demolidora do número de fônons do sistema nanoeletromecânico. O Capítulo 4 é um complemento da proposta de medida feita no Capítulo 3 envolvendo um estudo de estatística de número de fônons do sistema nanoeletromecânico. O capítulo 5 descreve uma análise de espectro de transmissão em uma interação entre um NEMS e um íon<sup>5</sup>.

A Parte III, relata as conclusões gerais da tese. Ao final, encontram-se dois apêndices, contendo detalhamento dos métodos teóricos usados nos Capítulos 3 e 4.

<sup>5</sup>O conhecimento básico de íons aprisionados está bem estabelecido na literatura e em livros tradicionais de óptica quântica, como o [D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum optics*, (Springer, 2008).], por isso não será descrito em aspectos fundamentais.

## Parte I

# Aspectos Fundamentais

# Capítulo 1

## Óptica Quântica Linear em Sistemas Nanoeletromecânicos

Neste Capítulo, será apresentado o NEMS<sup>1</sup> da seguinte maneira: primeiro serão indicados alguns experimentos realizados; em seguida, uma forma geral de fabricação de uma geometria de interesse para esta tese. Posteriormente será feita a sua descrição em etapas (mecânica do contínuo, oscilador harmônico clássico e quântico); e finalmente serão discutidas duas diferentes formas de tratar fenomenologicamente a dissipação de um NEMS (via amortecimento mecânico).

### 1.1 Experimentos com NEMS

Atualmente uma variedade de NEMS exóticos já foram criados [4], e os estudos subsequentes de ressonadores nanomecânicos, em forma de viga fixadas em ambas as extremidades, foram realizados em carbeto de silício [5]-[6], nitreto de alumínio [7], nitreto de silício [8], alumínio [9], diamante [10] e ouro [20]. No domínio dos materiais moleculares, ressonadores de nanotubos de carbono que têm altos fatores de qualidade mecânico [24]-[25]-[26]-[29] e ressonadores eletromecânicos de grafeno foram apresentados na referência [28].

O efeito piezoelétrico é a geração de tensão mecânica em resposta a um campo elétrico aplicado.

---

<sup>1</sup>Apesar da sigla vir de *Nanoelectromechanical systems* (em inglês), o dispositivo é um oscilador nanomecânico, e também chamado de ressonador mecânico.

A atuação de um ressonador mecânico piezoelétrico por uma voltagem aplicada através de uma viga semicondutora foi demonstrada recentemente na referência [33]. Diversos experimentos envolvendo acoplamento capacitivo entre NEMS e linhas de transmissão ressonantes (TLR) são apresentados na referência [13].

Nestes experimentos, envolvendo NEMS, poucos são capazes de alcançar o regime quântico. Trabalhos muito relevantes envolvendo a interação de um NEMS com um micro SQUID num regime não clássico são descritos nas referências [11]-[12].

## 1.2 Fabricação de um NEMS

Por volta dos últimos vinte anos, diversos grupos têm desenvolvido novas técnicas para modelar uma estrutura tridimensional semicondutora suspensa. As etapas estão descritas na figura(1.1).

Nos dispositivos típicos, todo este processo pode ser repetido várias vezes e combinado com vários processos de deposição para criar nanoestruturas mecânicas complicadas. A flexibilidade do processo permite que estruturas complexas suspensas com dimensões laterais de até algumas dezenas de nanômetros possam ser fabricadas. Além disso, transdutores complexos podem ser incorporados para fins de medição e controle. Em princípio, o dispositivo fabricado poderá ter apenas algumas camadas atômicas de espessura.

## 1.3 Teoria Clássica do NEMS

Enfatizando o modelo de NEMS específico estudado nesta tese: uma estrutura semicondutora tridimensional presa em ambas as extremidades e suspensa em cima de um vão. Sua geometria é tal que seu movimento é unidimensional no eixo de flexão. Seguindo a referência [15], os dados experimentais relacionados às constantes deste dispositivo são dados pela **Tabela 1.1**.

Baseado nas observações de dados experimentais pode-se enfatizar que:

1. A dinâmica de movimento deste sólido é bem descrita com a teoria de elasticidade clássica.
2. Para temperaturas baixas os comprimentos de onda dos fônons gerados com movimento vibratório, excedem centenas de ângstrons (o  $\langle x_c \rangle$  mostrado na **Tabela 1.1** é o do ponto zero, quando  $\hbar\nu = kx^2$ ), portanto é viável fazer a aproximação do contínuo. Ou seja, para ressonadores mecânicos com

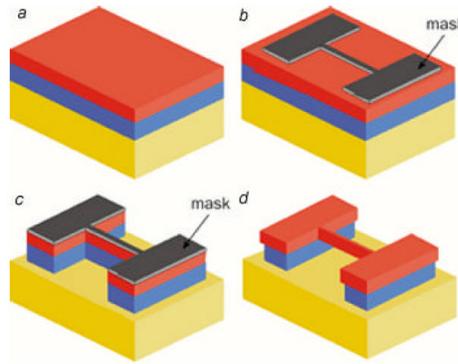


Figura 1.1: **a** Uma simples heteroestrutura, composta por três camadas, estrutura (vermelho), sacrifício (azul) e substrato (amarelo); **b** Descreve a segunda etapa do processo de fabricação de um NEMS, onde é colocada uma máscara em cima da estrutura via litografia de feixes de elétrons ou processos ópticos, para proteger a estrutura e o sacrifício no próximo processo; **c** O material da estrutura e do sacrifício desprotegido da máscara é retirado via processo de plasma (podendo ser de duas maneiras, mecânico ou químico: no mecânico, o plasma de fato arranca as moléculas da estrutura e sacrifício desprotegido da máscara por uma simples colisão; no químico, os íons de um dos compostos do plasma reage com seu substrato, de forma a produzir um subproduto volátil que, portanto, passa a ser “bombeado” para fora da amostra); **d** Finalmente, com um processo químico de corrosão específica, uma parte do sacrifício abaixo da estrutura é retirada (deixando claro que, é importante o sacrifício ser quimicamente compatível com a estrutura) de forma que a estrutura fique suspensa, e a máscara é retirada com acetona. Outro fator importante são as dimensões (comprimento, largura e altura) do NEMS fabricado. No caso desta tese, está-se interessados em estruturas em que sua dimensão de flexão seja bem menor que as dimensões de comprimento e altura, de modo que ela se movimente em uma única dimensão [34].

comprimento de onda em microondas, a teoria do contínuo prediz com precisão as ressonâncias e as formas dos modos espaciais.

3. Finalmente, no regime onde as energias dos modos normais do NEMS são maiores que a energia térmica,  $\hbar\nu > K_B T$ , uma nova teoria tem que ser considerada: a teoria quântica do NEMS (como será descrito na próxima seção).

Tabela 1.1: Frequência fundamental *vs* Geometria de ressonadores mecânicos de *Si* com as duas extremidades presas. Sendo  $w$  a espessura,  $h$  a altura,  $L$  o comprimento,  $\nu$  a frequência,  $k$  a constante de mola,  $\langle x_c \rangle$  a amplitude de oscilação e  $m_{eff}$  a massa efetiva [15].

$w \times h \times L$	$\nu/2\pi$	$k$	$\langle x_c \rangle$	$m_{eff}$
$(nm) \times (nm) \times (\mu m)$	(MHz)	(N/m)	(nm)	(g)
$150 \times 400 \times 17.5$	10	8	8	$1.8 \times 10^{-12}$
$100 \times 200 \times 1$	385	480	4	$9.3 \times 10^{-14}$
$50 \times 80 \times 0.78$	1000	290	1.6	$5.3 \times 10^{-15}$

### 1.3.1 Teoria do Contínuo

A matéria, na realidade, é formada de partículas subatômicas, átomos e moléculas, portanto não é contínua, ou seja, é discreta. Contudo existem muitas situações da experiência diária em que a teoria fenomenológica do comportamento dos materiais utilizada não considera a estrutura atômica ou molecular da matéria.

A teoria que descreve relações fenomenológicas, desprezando a estrutura da matéria em uma pequena escala, é conhecida como a teoria do contínuo, a qual considera a matéria como infinitesimalmente divisível. Nesta teoria, aceita-se a ideia de um volume infinitesimal de matéria referente a uma partícula no contínuo, e em toda vizinhança de uma partícula existem sempre partículas próximas.

Em deformações de estruturas tridimensionais no sentido do eixo de flexão, seu movimento se resume em ondas transversais com uma frequência natural. Uma função de onda de deformação do sólido  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  pode ser descrita através do tensor de tensão [35],

$$S_{\alpha,\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\alpha} \right). \quad (1.1)$$

Assumindo a teoria de resposta linear, o material pode ser descrito por um tensor elástico  $E_{\mu\alpha\beta\nu}$ , tendo 36 parâmetros independentes, que geralmente é muito simplificado. O tensor de estresse, em termos dos tensores elásticos  $c_{\mu\alpha\beta\nu}$ , é então

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta=1}^3 c_{\mu\alpha\beta\nu} S_{\alpha\beta}. \quad (1.2)$$

A descrição acima se refere a um cenário estático. A dinâmica é dada por,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

onde  $\mathbf{f}$  descreve a distribuição da força aplicada externamente. Em um sólido isotrópico, podem-se derivar as equações de onda, que descrevem as ondas longitudinal, transversal e torcional.

A função de deformação do sólido  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  é análoga a um potencial vetor de uma cavidade óptica [105]. No caso, o NEMS específico, descrito na figura (1.2), a sua equação de movimento é da forma Euler-Bernoulli, como será descrito posteriormente.

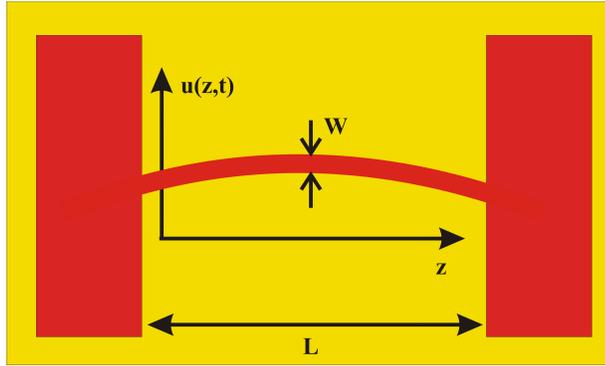


Figura 1.2: NEMS em forma de viga fixa em ambos os extremos. Visão transversal de um NEMS em seu ponto de equilíbrio com as duas extremidades presa, com a parte que prende, representando seu reservatório térmico e a viga representando a região de oscilação na direção do eixo  $x$  (de flexão), com a função de onda  $u(z, t)$ , sendo o próprio perfil da estrutura (viga).

### 1.3.2 Oscilador Harmônico Clássico

Se evoluirmos a equação da dinâmica (1.3), de um NEMS, um modo particular de vibração pode ser considerado como um único oscilador harmônico [35], podendo ser visto mais diretamente a partir de considerações energéticas. Demonstrar-se à isso para o caso de uma longa viga com suas duas extremidades fixas. Assuma que o eixo do sentido de uma extremidade presa à outra da viga está alinhado ao longo do eixo  $z$ , com as suas extremidades fixadas em  $z = 0$  e  $z = L$ , (observação:  $L$  é o comprimento da viga, de uma ponta presa até a outra. Veja a figura (1.2)) em que o deslocamento está na direção  $x$  (direção de flexão). O deslocamento do eixo de flexão é dado por  $u(z, t) \equiv \mathcal{A}(t)u(z)$ , onde  $\mathcal{A}(t)$  é uma amplitude dependente do tempo e  $u(z)$  é

um perfil de modo espacial adimensional definido tal que nos extremos do eixo  $z$ ,  $u$  seja nula. Podem ser calculadas a estrutura e as auto-freqüências do modo espacial de um ressonador mecânico, tal como descrito na próxima seção. A energia cinética associada ao movimento de flexão da viga é dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[ \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right]^2 dV = \frac{1}{2} \rho A \dot{\mathcal{A}}^2 \int_0^L [u(z)]^2 dz = \eta_1 \frac{1}{2} M \dot{\mathcal{A}}^2, \quad (1.4)$$

sendo  $V$  o volume da viga,  $\rho$  a sua densidade,  $A$  a área da sua seção transversal, e  $M = \rho AL$  a sua massa física. Para o modo fundamental da viga,  $\eta_1 \equiv \frac{1}{L} \int_0^L [u(z)]^2 dz = 0,38$  [36]. A tensão na viga é assumida como sendo ao longo do eixo  $z$  e tem uma amplitude  $\left| x \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \right|$ . A energia potencial associada a esta tensão é dada em termos de um campo de tensão  $\in (x, y, z, t)$ , conforme [36]<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V E [\in (x, y, z, t)]^2 dV \\ &= \frac{E}{2} \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_0^L dz x^2 \left[ \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \right]^2 \\ &= \eta_1 \frac{1}{2} M \nu \mathcal{A}^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade da viga,  $w$  representa a sua espessura e  $h$  é a altura. Considere-se agora a coordenada do eixo  $x$  para ser a posição representativa  $x \equiv \mathcal{A}(t)$ . A equação de Euler-Lagrange de movimento correspondente às equações (1.4) e (1.5) se torna

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0, \quad (1.6)$$

que é uma equação de um oscilador harmônico simples com frequência de ressonância  $\nu = \sqrt{k/M}$ , em que  $M$  é a massa efetiva do oscilador e  $k$  é a sua constante de ‘mola’ do material. Estes parâmetros efetivos dependem da distribuição de força assumida.

O Hamiltoniano clássico correspondente é

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2, \quad (1.7)$$

onde  $p$  é o momentum. Tal descrição é geralmente válida, embora os parâmetros efetivos dependam do sistema considerado.

---

<sup>2</sup>Para completar a compreensão desta derivação, pela segunda lei de Newton  $M\ddot{\mathcal{A}} = k\mathcal{A}$ , onde  $k$  é a constante de ‘mola’ do material.

### 1.3.3 Teoria de Euler-Bernoulli

Uma abordagem clássica do contínuo fornece uma descrição exata da dinâmica de vibração de um sólido no limite de grandes comprimentos de onda, isto é, onde o comprimento de onda é muito maior que a amplitude de vibração do NEMS.

Na figura (1.2), mostra-se a estrutura que constitui a base dos cálculos: uma viga duplamente presa de comprimento  $L$ , altura  $h$  e espessura  $w$ . O comportamento dinâmico de flexão de uma viga é mais facilmente tratado usando a teoria de Euler-Bernoulli, o que se aplica à viga com  $L/h \gg 1$ . Para um material isotrópico, o deslocamento transversal  $u(z, t)$ , obedece à equação diferencial [18]

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z, t) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z, t), \quad (1.8)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $A = wh$  é a área da seção transversal,  $E$  é o módulo de Young, e  $I = wh^3/12$  é o momentum de inércia de flexão. As extremidades fixadas em  $z = 0$  e  $z = L$ , impõem as condições de contorno  $u(0) = u(L) = 0$  e  $u'(0) = u'(L) = 0$  [18], resultando na solução

$$u_n(z, t) = (C_{1n} (\cos(k_n z) - \cosh(k_n z)) + C_{2n} (\sin(k_n z) - \sinh(k_n z))) e^{-i\Omega_n t}, \quad (1.9)$$

com autovetores  $k_n$  satisfazendo  $\cos(k_n L) \cosh(k_n L) = 1$  [18].<sup>3</sup> As frequências angulares  $\Omega_n$  são dadas por

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} k_n^2. \quad (1.10)$$

A frequência fundamental é dada por

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.027 \times \sqrt{\frac{E}{\rho}} \times \frac{h}{L^2}, \quad (1.11)$$

e os modos mais elevados são de  $\nu_n/\nu_1 = 2, 756$ ,  $5, 404$ , e  $8, 933$  para  $n = 2, 3$ , e  $4$  [18]. O comportamento de  $\nu_1$  em função de  $h/L^2$  pode ser observado na figura (1.3).

As autofunções  $u_n$  na equação (1.9) são ortogonais entre si, de modo que, os modos são normalizados como

$$\int_0^L u_n(z) u_m(z) dz = L^3 \delta_{nm}. \quad (1.12)$$

---

<sup>3</sup> $k_1 L = 4, 730004$ ,  $k_2 L = 7, 8532$ ,  $k_3 L = 10, 9956$  e  $k_4 L = 14, 1372$  [18]

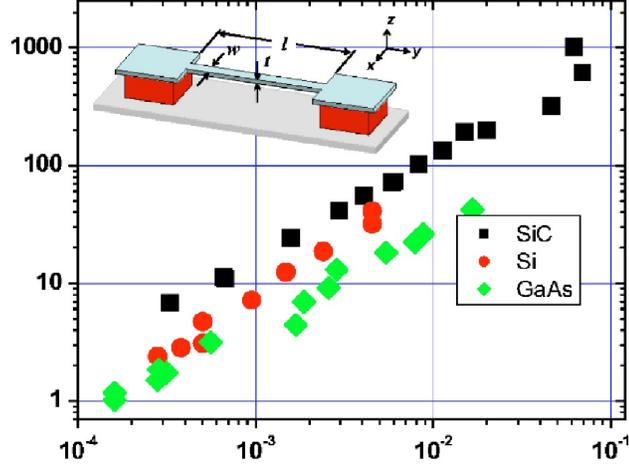


Figura 1.3: Frequência versus geometria efetiva para vigas duplamente fixadas feitas a partir de um único cristal de *SiC*, *Si* e *GaAs*. A relação linear da frequência de oscilação (em *MHz*) em função de  $h/L^2$  (em  $\mu\text{m}^{-1}$ ) é segundo a referência [15], e obedece a fórmula  $\nu = 2 \times \pi \times 1.05 \times \sqrt{E/\rho} \times (h/L^2)$ , onde  $E$  é o módulo de Young e  $\rho$  é a densidade do material. Neste estudo, valores foram normalizados para remover o efeito de rigidez adicional e variação de massa devido à metalização do eletrodo. (Observação: os eixos  $x, y, z$  desta figura são posicionados diferentes dos eixos adotado nesta tese, pela figura ter sido retirada diretamente da referência [15]).

Os coeficientes  $C_{1n}$  e  $C_{2n}$  estão bem listados em artigos experimentais da área como na referência [18]. Uma solução arbitrária  $u(z, t)$  pode ser escrita como

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x), \quad (1.13)$$

onde as amplitudes  $a_n$  são adimensionais.

## 1.4 Teoria Quântica do NEMS

Agora, quando se trata de NEMS, onde seus modos normais de vibração têm frequências da ordem do *GHz* e suas temperaturas são da ordem do *mK*, tem-se que  $\hbar\nu > K_B T$ , e portanto uma descrição quântica deve ser considerada, tratando a onda elástica como um campo escalar e impondo relações de comutação apropriadas. Alternativamente, pode-se considerar os modos conjuntos como um oscilador harmônico representado por um

único par de coordenadas e, em seguida, quantizar a coordenada representante. Com isto, tem-se a equação (1.9) embutida na equação (1.13) como equação da função de movimento de flexão do NEMS. Esta função de onda, ao longo de sua dimensão espacial (eixo-z) e temporal quando quantizada, tem a seguinte forma

$$u(z, t) = \sum_n [b_n u_n(z, t') + b_n^\dagger u_n^*(z, t')], \quad (1.14)$$

sendo  $b_n$  e  $b_n^\dagger$  os operadores aniquilação e criação de cada modo  $n$  do NEMS, com relação de comutação  $[b_n, b_m^\dagger] = \delta_{nm}$ . Portanto o movimento de um NEMS é caracterizado como um oscilador harmônico quântico em baixas temperaturas. Na subseção seguinte, serão analisadas algumas características básicas deste oscilador.

### 1.4.1 Oscilador Harmônico Quântico

Tomando-se a forma do Hamiltoniano da equação (1.7),  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ , agora, com a relação de comutação canônica  $[x, p] = i\hbar$  imposta. Consequentemente, o princípio de incerteza de Heisenberg se manifesta como  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .<sup>4</sup>

Quanticamente é convencional introduzir os operadores de aniquilação e criação do oscilador harmônico como

$$b = \sqrt{\frac{m\nu}{2\hbar}} x + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\nu}} p,$$

e

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{m\nu}{2\hbar}} x - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\nu}} p,$$

respectivamente, obedecendo a relação de comutação  $[b, b^\dagger] = 1$ , e o Hamiltoniano do oscilador harmônico quântico resultando como

$$H = \hbar\nu \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} \right). \quad (1.15)$$

A evolução temporal dos operadores ( $\mathcal{O}$  pode ser operador: posição, momentum, número de quanta, ...) deste oscilador harmônico na representação de Heisenberg é dado como

$$\mathcal{O}(t) = e^{-iHt/\hbar} \mathcal{O}(0) e^{iHt/\hbar}.$$

---

<sup>4</sup>A incerteza em que um operador  $\mathcal{O}$  é definido e dada em termos da sua variância como  $\Delta\mathcal{O} \equiv [V(\mathcal{O})]^{1/2}$ , onde a própria variância é definida por  $V(\mathcal{O}) = \langle \hat{\mathcal{O}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle^2$ .

### 1.4.2 Estados de um Oscilador Harmônico Quântico

Os autovalores do Hamiltoniano (1.15) são:

$$\mathcal{E}_n = \hbar\nu\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1.16)$$

com os autovetores associados ao estado de número  $|n\rangle$ , conhecido como estado de Fock. Eles contêm exatamente  $n$  quanta (no nosso caso, fônons). O operador  $\hat{n} = b^\dagger b$  é identificado como o operador de número, logo  $\langle \hat{n} \rangle$  é o número esperado de fônons de um modo particular.

Outra importante classe de estados do oscilador harmônico é chamada de estado coerente. Eles são quase clássicos no sentido de que exibem o produto de incerteza mínima permitida pelo princípio de Heisenberg. Em termos da base de estado de Fock, o estado coerente é dado como

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

com valor médio  $\langle b^\dagger b \rangle = |\beta|^2$  e uma variância do operador de número  $V(b^\dagger b) = |\beta|^2$ .

Um oscilador harmônico mantido a uma temperatura  $T$  é dito estar num estado térmico, com operador densidade dado por

$$\rho = (1 - e^{-\hbar\nu/K_B T}) \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| e^{-\hbar\nu/K_B T n}, \quad (1.17)$$

com o número de fônons térmicos dado pela distribuição de Bose-Einstein como

$$N = \frac{1}{e^{\hbar\nu/K_B T} - 1}, \quad (1.18)$$

a variância do operador de número é  $V(b^\dagger b) = N(N + 1)$ .

O estado fundamental quântico corresponde a  $N = 0$  tem uma função de onda Gaussiana, com uma meia-largura de

$$\Delta x_{pz} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}, \quad (1.19)$$

denominada incerteza de ponto zero para um oscilador harmônico.

Atualmente alguns grupos têm realizado a tarefa de gerar o estado fundamental, como as referências [12]-[14]-[16].

## 1.5 Efeitos de Dissipação em um NEMS

A teoria de dissipação de um NEMS ainda é um assunto não totalmente esclarecido quando tratamos da pergunta: como o NEMS dissipa sua energia? O que será feito aqui, é um tratamento fenomenológico, onde todos os termos de dissipação serão incluídos dentro de um banho de um reservatório composto por infinitos osciladores harmônicos em equilíbrio térmico que interagem com o NEMS [35]. Sendo o sistema descrito como um modo de oscilação do NEMS de frequência  $\nu$ , operador número de fônons  $b^\dagger b$ , e com o Hamiltoniano

$$H_{NEMS} = \hbar\nu(b^\dagger b + \frac{1}{2}) \quad (1.20)$$

que está acoplado a um reservatório de osciladores Harmônicos

$$H_R = \hbar \sum_j \omega_j c_j^\dagger c_j, \quad (1.21)$$

com interação

$$H_{S-R} = \hbar [b^\dagger \Gamma + b \Gamma^\dagger], \quad (1.22)$$

onde  $\Gamma = \sum_j g_j c_j$ . A equação mestra que descreve a evolução do estado  $\rho$  (operador densidade) do oscilador é dada por

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\gamma N}{2}(N+1)(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b) + \frac{\gamma N}{2}N(2b^\dagger \rho b - b b^\dagger \rho - \rho b b^\dagger), \quad (1.23)$$

com o banho em equilíbrio térmico, com  $N = (e^{\hbar\nu/k_B T} - 1)^{-1}$ . Usando a taxa de variação do número médio de fônons para calcular o valor médio destes

$$\langle \dot{n} \rangle = \frac{d}{dt} \langle b^\dagger b \rangle = Tr \{ b^\dagger b \dot{\rho} \}, \quad (1.24)$$

que leva à equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\langle \dot{n} \rangle = -\gamma_N \langle n \rangle + \gamma_N N, \quad (1.25)$$

cujo a solução é dado por

$$\langle n(t) \rangle = \langle n(0) \rangle e^{-\gamma_N t} + N(1 - e^{-\gamma_N t}). \quad (1.26)$$

Note-se que para um tempo  $t > 1/\gamma_N$  temos  $\langle n(t) \rangle \approx N$ .

## 1.6 Sumário do Capítulo 1

Neste capítulo foi mostrada a formulação de Eletrodinâmica Quântica (QED) em Sistemas Nanoeletromecânicos (NEMS), sendo apresentado seu Hamiltoniano como de um oscilador harmônico quântico, e por fim, sua dissipação está associada a acoplamento com um reservatório composto de infinitos osciladores em equilíbrio térmico.

## Capítulo 2

# Circuito Elétrico Quântico

Neste capítulo será apresentada uma introdução a circuitos quânticos, iniciando-se com a quantização de um circuito simples LC. Mostrar-se-á como um modo de oscilação pode ser quantizado. Posteriormente serão discutidos os modos de vibração de cargas em uma linha de transmissão ressonante (TLR)<sup>1</sup> e finalmente, será demonstrada uma metodologia de geração de oscilação paramétrica via bombeamento pulsado.

### 2.1 Oscilador LC Quântico

O circuito que será considerado para descrição do oscilador LC quântico é basicamente composto por apenas um indutor (com indutância  $L$ ) e um capacitor (com capacitância  $C$ ) como mostra a figura (2.1).

Em termos de cargas acumuladas no capacitor  $Q$  e corrente fluindo no indutor  $I$  temos o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \quad (2.1)$$

Usando conservação de carga,  $I = +\dot{Q}$ , este pode ser convertido para a forma mais familiar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 - \frac{1}{2C}Q^2 \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>TLR  $\rightarrow$  Transmission Line Resonator (em inglês), representa um dispositivo supercondutor, geralmente de nióbio, em forma de um fio finito (ressonador). Para comportar a radiação de microondas, seu comprimento tem que ser na faixa de poucos centímetros.

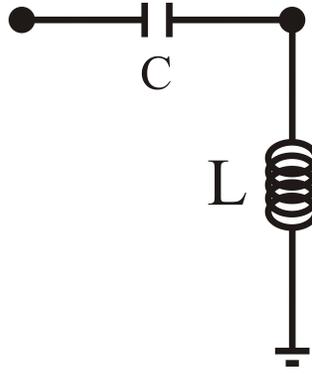


Figura 2.1: Esquema de um circuito LC.

que produz a equação de Euler-Lagrange do movimento

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q = 0, \quad (2.3)$$

onde a frequência de oscilação natural é

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.4)$$

O momento conjugado para carga é o fluxo através do indutor

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = L\dot{Q} = LI. \quad (2.5)$$

Assim, o Hamiltoniano pode ser escrito

$$H = P\dot{Q} - \mathcal{L} = \frac{P^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C}. \quad (2.6)$$

Então, as equações de Hamilton são

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{L} \quad \text{e} \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{Q}{C}. \quad (2.7)$$

Na forma usual, a coordenada e seu momento conjugado podem ser promovidos a operadores quânticos, obedecendo a relação de comutação canônica  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ . Podemos escrever o Hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = \hbar\Omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

em termos dos operadores aniquilação e criação

$$a = \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}} \hat{Q} + \frac{i}{\sqrt{2L\hbar\Omega}} \hat{P}, \quad (2.9)$$

e

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\Omega}}\hat{Q} - \frac{i}{\sqrt{2L\hbar\Omega}}\hat{P}, \quad (2.10)$$

respectivamente, que obedecem a relação de comutação  $[a, a^\dagger] = 1$ .

Os operadores de carga e de fluxo (momento) podem ser expressos em termos dos operadores de criação e aniquilação como [42]

$$\hat{Q} = Q_Z(a + a^\dagger) \quad \text{e} \quad \hat{P} = -iP_Z(a - a^\dagger), \quad (2.11)$$

onde se define

$$Q_Z = \sqrt{\frac{C\hbar\omega}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2Z}} \quad \text{e} \quad P_Z = \sqrt{\frac{L\hbar\omega}{2}} = \sqrt{\frac{Z\hbar}{2}}, \quad (2.12)$$

sendo  $Z$  a impedância característica do oscilador  $Z \equiv \sqrt{L/C}$ .

Veja-se que a notação foi escolhida de tal modo que a incerteza do estado fundamental na carga e no fluxo é dada respectivamente por

$$\langle 0 | \hat{Q}^2 | 0 \rangle = Q_Z^2 \quad \text{e} \quad \langle 0 | \hat{P}^2 | 0 \rangle = P_Z^2, \quad (2.13)$$

e observe que o produto de incerteza mínima é obedecido:  $Q_Z P_Z = \frac{\hbar}{2}$ .

### 2.1.1 Estado Coerente

Uma maneira simples de se conseguir uma superposição de infinitos estados de números de fótons, é aplicar um operador deslocamento no estado de vácuo, e isso é gerar o estado coerente [43]. Tal estado é gerado, usando o operador unitário de deslocamento

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \quad (2.14)$$

onde  $\alpha$  é um número complexo arbitrário.

Usando a relação

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}, \quad (2.15)$$

que vale quando  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ,  $D(\alpha)$  pode ser escrito como

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (2.16)$$

O operador deslocamento  $D(\alpha)$  tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
 D^\dagger(\alpha) &= D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha), \\
 D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) &= a + \alpha, \\
 D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) &= a^\dagger + \alpha^*.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

O estado coerente  $|\alpha\rangle$  é gerado por uma operação de  $D(\alpha)$  no estado de vácuo.

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{2.18}$$

O estado coerente é auto estado do operador aniquilação

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{2.19}$$

Tomando o produto escalar de ambos os lados da penúltima equação, com  $\langle n|$ , encontra-se a relação

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \tag{2.20}$$

Disso resulta que

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle. \tag{2.21}$$

Pode-se expandir  $|\alpha\rangle$  em termos de estado de número de fótons  $|n\rangle$  e os coeficientes de expansão  $\langle n|\alpha\rangle$  são dados por

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2.22}$$

onde se usa  $\langle 0|\alpha\rangle = \exp[-|\alpha|^2/2]$  na qual o estado coerente é normalizado; a expressão do estado coerente representado em estado de número que tem a seguinte forma

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{2.23}$$

Note-se que a distribuição de probabilidade dos fótons em um estado coerente é uma distribuição de Poisson

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \tag{2.24}$$

onde  $|\alpha|^2$  é o número médio de fótons ( $\bar{n} = \langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ ).

## 2.2 Modos de Linhas de Transmissão Ressonante

Quando se transmite um sinal de microondas, através de uma linha de transmissão ressonante de comprimento  $D$ , caso o comprimento de onda seja muito maior do que a dimensão da seção transversal da linha, as cargas sobre a linha de transmissão podem ser consideradas como se estivessem se movendo em uma única dimensão. Os  $n$  modos de radiação comportados nesta linha de transmissão podem ser modelados por um conjunto de elementos LC discretos e infinitesimais conhecidos como elementos de circuito concentrados (*lumped circuit*).

O Lagrangeano do sistema é:

$$\mathcal{L} = \sum_n \left[ \frac{li_n^2}{2} - \frac{q_n^2}{2c} \right], \quad (2.25)$$

onde  $c$  é a capacitância e  $l$  é a autoindutância da linha do  $n$ ésimo elemento da linha de transmissão. Neste caso, a variação temporal da carga no nó  $n$  do circuito é dada por  $\dot{q}_n = i_{n-1} - i_n$  e  $i_n = -\sum_{m=1}^n \dot{q}_m$  é a corrente no nó. Substituindo no Lagrangeano (2.25), temos

$$\mathcal{L} = \sum_n \left[ \frac{l(\sum_{m=1}^n \dot{q}_m)^2}{2} - \frac{q_n^2}{2c} \right]. \quad (2.26)$$

Como é usual, nesse tipo de sistema, faz-se uso da natureza infinitesimal destes elementos (os graus de liberdade do sistema) para levar a equação (2.26) para o contínuo. Define-se a variável

$$\Gamma(x, t) = \int_{-\frac{D}{2}}^x dx' q(x', t) \quad (2.27)$$

onde  $q(x)$  é a densidade linear de carga. Fazendo as substituições:  $\sum_{m=1}^n \dot{q}_m(t) \rightarrow \Gamma(x, t)$ ,  $q_n(t) \rightarrow q(x, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ , a densidade de Lagrangeano unidimensional se escreve

$$\partial_x \mathcal{L} = \frac{l\dot{\Gamma}^2}{2} - \frac{1}{2c} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right]^2. \quad (2.28)$$

Agora  $c$  e  $l$  transformam-se em densidade linear de capacitância e indutância da linha de transmissão, respectivamente. Aplicando Euler-Lagrange na (2.28), obtém-se

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = 0, \quad (2.29)$$

com condições de contorno  $\Gamma(-\frac{D}{2}, t) = \Gamma(\frac{D}{2}, t) = 0$  devido à neutralidade de carga (a linha de transmissão tem tamanho de comprimento finito). Esta equação pode facilmente ser resolvida pelo método de separação

de variáveis. A solução é dada por

$$\Gamma(x, t) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sum_{j=1}^{j_{\text{corte}}} \phi_j(t) \begin{cases} \cos\left(\frac{j\pi x}{D}\right), & \text{para } j \text{ ímpar,} \\ \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{D}\right), & \text{para } j \text{ par} \end{cases} \quad (2.30)$$

com velocidade  $v = 1/\sqrt{l c}$ , e autofrequências  $\omega_j = j\pi v/D$ . O  $j_{\text{corte}}$  é um corte no número de modos impostos pelo fato da existência de uma estrutura não exatamente unidimensional.

Substituindo  $\Gamma$  na equação de movimento (2.29), tem-se:

$$\ddot{\phi}_j + \omega_j^2 \phi_j = 0 \quad (2.31)$$

com densidade de Lagrangeano:

$$\partial_x \mathcal{L}_j(\phi_j, \dot{\phi}_j; t) = \frac{l}{2} \dot{\phi}_j^2 - \frac{1}{2c} \left(\frac{j\pi}{D}\right)^2 \phi_j^2. \quad (2.32)$$

Com isso, pode-se obter o Hamiltoniano em função de  $\phi_j$  e o momentum conjugado canônico de  $P_j \equiv \frac{\partial(\partial_x \mathcal{L}_j)}{\partial \dot{\phi}_j}$ :

$$\mathcal{H}_j(P_j, \phi_j; t) = \frac{P_j^2}{2l} + \frac{1}{2c} \left(\frac{j\pi}{D}\right)^2 \phi_j^2. \quad (2.33)$$

Agora para a quantização do Hamiltoniano, promove-se as variáveis para operadores, respeitando a relação de comutação quântica  $[\phi_j, P_{j'}] = i\hbar\delta_{jj'}$ . Após alguma álgebra obtém-se:

$$\phi_j(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_j c}{2}} \frac{D}{j\pi} \left[ a_j(t) + a_j^\dagger(t) \right], \quad (2.34)$$

$$P_j(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_j l}{2}} \left[ a_j(t) - a_j^\dagger(t) \right], \quad (2.35)$$

que, se substituídos no Hamiltoniano (2.33), dá o Hamiltoniano diagonalizado análogo ao do oscilador harmônico [44]

$$\mathcal{H}_j(t) = \hbar\omega_j \left[ a_j^\dagger(t) a_j(t) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.36)$$

## 2.3 Oscilador Paramétrico

Aqui, considera-se um processo de conversão paramétrica de frequência<sup>2</sup>, ilustrado na figura (2.2). Para isso, usa-se um único átomo artificial (uma junção Josephson [39]) de três níveis em uma configuração escada

<sup>2</sup>Outras metodologias foram usadas para gerar oscilação paramétrica neste ambiente de circuito, como a referência [47], porém, nenhuma com pulso muito rápido como está sendo apresentado agora.

( $\Xi$ ), como mostra a figura (2.2), onde o estado fundamental ( $|g\rangle$ ) e o excitado ( $|e\rangle$ ) estão acoplados a um nível intermediário ( $|i\rangle$ ). Os modos de microondas da linha de transmissão de frequência  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  interagem dispersivamente com as transições  $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  e  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  (transições de dipolo permitidas) com acoplamentos  $g_1$  e  $g_2$  respectivamente. A dessintonia entre as frequências dos modos quânticos e as transições atômicas são dadas por  $\Delta = -(\Omega_i - \Omega_g - \Omega_1) = \Omega_e - \Omega_i - \Omega_2$  (com  $\Omega_g = -\omega$  e  $\Omega_e = \omega$ ). A interação desejada entre os modos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  é então obtida com o auxílio de um campo pulsado de frequência  $\Omega_3 = \Omega_e - \Omega_g - \delta$  que acopla a transição atômica  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  com constante de acoplamento  $g_3$ . O Hamiltoniano total deste ambiente escrito na *representação de onda girante*, é dado por  $H = H_0 + V$ , com<sup>3</sup>

$$H_0 = \hbar\Omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\Omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\Omega_3 a_3^\dagger a_3 + \Omega_e \sigma_{ee} + \Omega_i \sigma_{ii}, \quad (2.37)$$

$$V = \hbar \left( g_1 a_1^\dagger \sigma_{ig} + g_2 a_2^\dagger \sigma_{ei} + g_3 a_3^\dagger \sigma_{eg} + h.c. \right). \quad (2.38)$$

Escrevendo o Hamiltoniano na representação de interação, através da transformada unitária  $U_0 = e^{-iH_0 t/\hbar}$ , e em seguida, aplicando uma nova rotação  $U_1 = e^{i\Delta t(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})}$ , obtém-se o Hamiltoniano

$$H = \hbar \left( g_1 a_1^\dagger \sigma_{ig} + g_2 a_2^\dagger \sigma_{ei} + g_3 a_3^\dagger \sigma_{eg} + h.c. \right) + \hbar\Delta (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}). \quad (2.39)$$

Para obter o Hamiltoniano efetivo, é preciso conhecer o ambiente, e entender a teoria de controle para obter a solução das equações de movimento. Sendo assim, as equações de movimento para os operadores transição de níveis do átomo artificial  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  para o nível  $|i\rangle$  e a que descreve a probabilidade do átomo permanecer no nível  $|i\rangle$  ( $\dot{\sigma}_j = -(i/\hbar)[\sigma_j, H]^4$ ) são:

$$\dot{\sigma}_{ig} = -i \left\{ g_1 a_1 \sigma_{ii} + g_3 a_3 \sigma_{ie} + \Delta \sigma_{ig} - g_1 a_1 \sigma_{gg} - g_2 a_2^\dagger \sigma_{eg} \right\}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\sigma}_{ie} = -i \left\{ g_2 a_2^\dagger \sigma_{ii} + g_3 a_3^\dagger \sigma_{ig} + \Delta \sigma_{ie} - g_2 a_2^\dagger \sigma_{ee} - g_1 a_1 \sigma_{ge} \right\}, \quad (2.41)$$

$$\dot{\sigma}_{ii} = -i \left\{ g_1 a_1^\dagger \sigma_{ig} + g_2 a_2 \sigma_{ie} - g_1 a_1 \sigma_{gi} - g_2 a_2^\dagger \sigma_{ei} \right\}. \quad (2.42)$$

Comparando as escalas de tempo das transições induzidas com os modos do ressonador, com a dessintonia  $\Delta$  suficientemente grande, ou seja,  $\Delta \gg g_1, g_2, g_3$ , pode-se obter as soluções adiabáticas [46] para os elementos de transição  $\sigma_{ig}$  e  $\sigma_{ie}$  ( $\dot{\sigma}_{ig} = 0$  e  $\dot{\sigma}_{ie} = 0$ ):

$$\sigma_{ig} \cong \frac{\Delta}{\Delta^2 - g_3^2 a_3^\dagger a_3} \times \left\{ \left[ -g_1 a_1 + \frac{g_2 g_3}{\Delta} a_2^\dagger a_3^\dagger \right] \sigma_{ii} - g_1 a_1 \sigma_{gg} - \frac{g_2 g_3}{\Delta} a_2^\dagger a_3 \sigma_{ee} + g_2 a_2^\dagger \sigma_{eg} - \frac{g_1 g_3}{\Delta} a_1 a_3 \sigma_{ge} \right\}$$

<sup>3</sup> $\sigma_{jk} = |j\rangle \langle k|$  é o operador de transição do estado  $|j\rangle$  para o estado  $|k\rangle$  do átomo artificial (Junção Josephson).

<sup>4</sup>A relação de comutações entre os operadores  $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}$  e  $[\sigma_{jk}, \sigma_{j'k'}] = \sigma_{jk} \sigma_{j'k'} - \sigma_{j'k'} \sigma_{jk}$ .

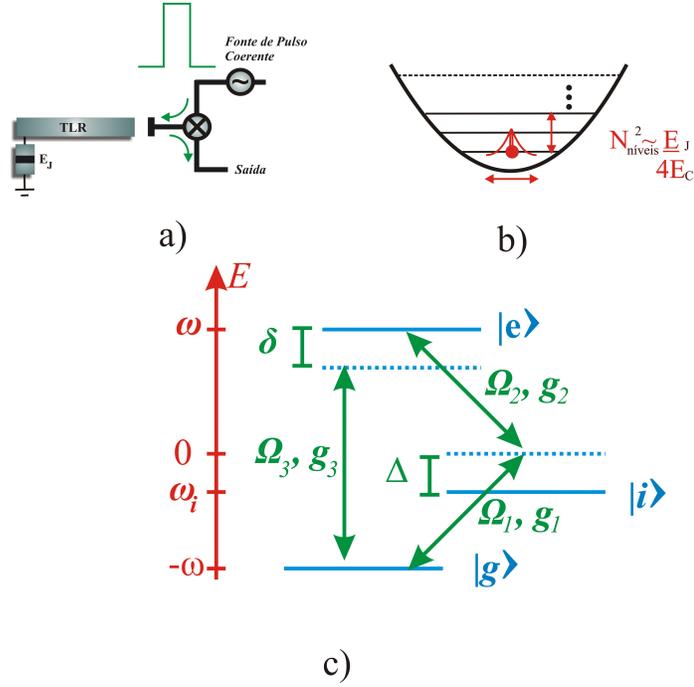


Figura 2.2: Esquema de um gerador de oscilador paramétrico com pulsos muito rápidos em uma a) TLR acoplada diretamente com uma Junção Josephson; b) acessibilidade de níveis de energia em um único pulso, ou seja, no caso desta seção, que é para o acesso do segundo harmônico,  $E_J = 16E_C$ , onde  $E_J$  é a energia da Junção e  $E_C$  é a energia de carregamento da TLR [39]; c) é a representação esquemática de níveis de energia envolvendo as transições de um átomo artificial, devido a presença da Junção e de três modos de radiação da TLR. Mais detalhes, veja no texto. O controle de entrada e saída do campo é dirigido pelo dispositivo acoplador híbrido, que será explicado na próxima seção.

e

$$\sigma_{ie} \cong \frac{\Delta}{\Delta^2 - g_3^2 a_3^\dagger a_3} \times \left\{ - \left[ g_2 a_2^\dagger + \frac{g_1 g_3}{\Delta} a_1 a_3^{dag} \right] \sigma_{ii} - g_2 a_2^\dagger \sigma_{ee} - \frac{g_1 g_3}{\Delta} a_1 a_3^\dagger \sigma_{gg} + g_1 a_1 \sigma_{ge} - \frac{g_2 g_3}{\Delta} a_2^\dagger a_3^\dagger \sigma_{eg} \right\}.$$

Considerando  $\Delta^2 - g_3^2 a_3^\dagger a_3 \cong \Delta^2$ , e  $\Delta \gg g_1, g_2, g_3$ , isto indica que analisando uma situação de regime fortemente dispersivo, implica que não há transição de níveis do estado  $|i\rangle$  para os níveis  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ . Então, quando substituimos a solução adiabática de  $\sigma_{ig}$  e  $\sigma_{ie}$  na equação de movimento (2.42), e em seguida, considerando os elementos de matrizes relacionados aos níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  nulos ( $\sigma_{jk} = 0$ , para  $j = g$  ou  $e$ ,

devido a aproximação adiabática), a equação (2.42) é reescrita como

$$\dot{\sigma}_{ii} = -\frac{i}{\Delta} \left\{ \left[ \sigma_{ii}, \left( g_1^2 a_1^\dagger a_1 + g_2^2 a_2^\dagger a_2 + \frac{g_1 g_2 g_3}{\Delta} a_1 a_2 a_3^\dagger + \frac{g_1 g_2 g_3}{\Delta} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 \right) \right] \right\}, \quad (2.43)$$

de onde se pode inferir o Hamiltoniano efetivo como

$$H_{eff} = \hbar \left( \frac{g_1^2}{\Delta} a_1^\dagger a_1 + \frac{g_2^2}{\Delta} a_2^\dagger a_2 + \frac{g_1 g_2 g_3}{\Delta^2} a_1 a_2 a_3^\dagger + \frac{g_1 g_2 g_3}{\Delta^2} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 \right) \sigma_{ii}.$$

Portanto, quando se prepara o átomo artificial, inicialmente, no estado  $|i\rangle$ , a dinâmica desse sistema pode ser descrita por deslocamentos nas frequências dos modos da cavidade e por um acoplamento entre esses modos similares àqueles encontrados em processos de conversão paramétrica descendente de frequências [48]. Aplicando mais uma rotação  $U_2 = e^{it(g_1^2 a_1^\dagger a_1 + g_2^2 a_2^\dagger a_2)\sigma_{ii}/\Delta}$ , e também  $a_3 = i\alpha_3$  sendo um campo clássico externo pulsado de amplitude  $\alpha_3$ , e  $g_3 \rightarrow g_3 e^{-i\delta t}$  de modo que sua frequência seja ajustada para  $\delta = (g_1^2 + g_2^2)/\Delta$ , obtém-se

$$H_i = -i\hbar \frac{\gamma}{2} (a^2 - a^{\dagger 2}), \quad (2.45)$$

com  $a_1 = a_2 = a$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega$ ,  $\sigma_{ii} = 1$ ,  $\gamma = 2g_1 g_2 g_3 \alpha_3 / \Delta^2$ , onde  $g_1 g_2 g_3 / \Delta^2$  é a susceptibilidade não linear do ressonador com valor real e positivo [48]. Note que neste caso, a frequência efetiva é satisfeita para  $\Omega_3 = 2\omega - (g_1^2 + g_2^2)/\Delta$ .

## 2.4 Acoplador Híbrido e Divisor de Feixe

A criação de acopladores híbridos e divisores de feixes surgiram na década de quarenta, desde então diversos grupos tem dominado o controle e a instrumentação destes dispositivos, ficando bem conhecido em livros textos de engenharia [45]. O conteúdo básico necessário esta tese será apresentado nas proximas subseções.

### 2.4.1 Acoplador Híbrido

Acopladores híbridos são casos especiais de acopladores direcionais. Este acoplador tem um anel circular com quatro portas. Cada porta é o extremo de uma linha de transmissão (finita ou infinita). A razão entre as impedâncias do anel e as portas é  $\sqrt{2}$ , desta razão e a combinação de geometria deste dispositivo (veja a figura (2.3)) propocionará um deslocamento de fase de  $\pi/2$  radianos entre as portas 2 e 3, quando é alimentado a

porta 1. Este é um exemplo de um acoplador simétrico. Sua matriz de transferência tem a seguinte forma:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

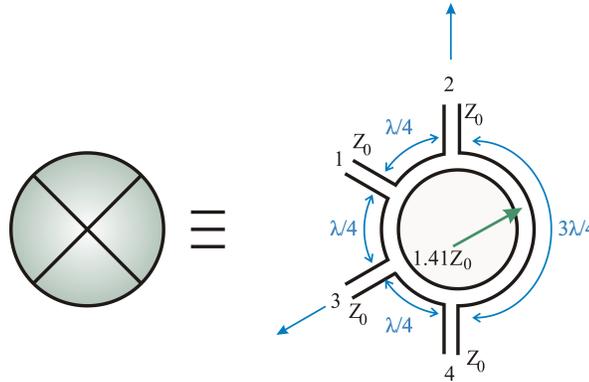


Figura 2.3: Acoplador híbrido de quatro portas. Sua principal utilidade é controlar a entrada e saída de radiação eletromagnética de um ressonador com comprimento na faixa do microondas sem misturar as quadraturas de entrada das portas 1 e 4.

Este acoplador serve para executar uma entrada e uma saída de um ressonador com comprimento de onda na faixa do microondas sem que as quadraturas se misturem.

### 2.4.2 Divisor de Feixe

O divisor de feixe tem um anel quadrado com uma porta em cada vértice, como mostra a figura (2.4), e obedece à mesma metodologia que um divisor de feixe óptico [43], sendo que aqui se trata de radiação eletromagnética de microondas.

Logo, com todas as portas correspondida, quando introduzido uma entrada na porta 1, a amplitude é dividida igualmente entre as portas 2 e 3, com um deslocamento de fase de  $\pi/2$  radianos entre essas saídas. Na porta 4 não é acionada entrada de energia (a porta é isolada, ou se aplica um estado de vácuo na ligação

da física quântica). Portanto, a matriz de transmissão tem-se a seguinte forma:

$$[S] = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

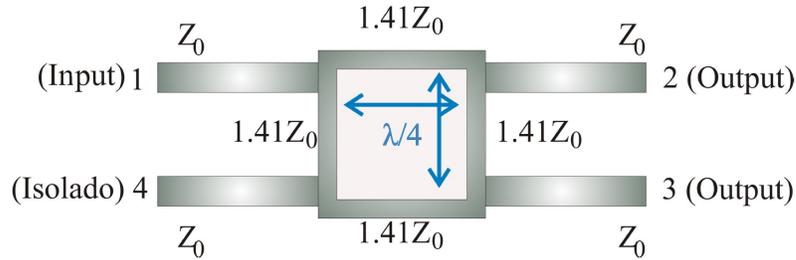


Figura 2.4: Divisor de Feixe.

## 2.5 Sumário do Capítulo 2

Neste capítulo mostrou-se a Eletrodinâmica Quântica (QED) de Cavidades em Circuitos, onde uma linha de transmissão ressonante (TLR) é um ressonador finito comportando um ou mais modos de radiação eletromagnética com frequências características em função de uma indutância e capacitância características. Em seguida, apresentou-se uma metodologia inédita para gerar um oscilador paramétrico, sendo uma boa iniciativa para proposta de estudos de Efeito Casimir Dinâmico para futuro. E finalmente, foi feita um revisão de acopladores híbridos, que tem grande importâncias para detecções de operadores quadraturas e momentos da radiação eletromagnética de um ressonador<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Os acopladores híbridos servem para controle de entrada e saída da radiação eletromagnética de um ressonador também.

## Parte II

# Aplicações

## Capítulo 3

# Acoplamento Capacitivo Entre Duas TLRs Mediado pela Vibração de um NEMS

Neste capítulo será formulado o Hamiltoniano do acoplamento capacitivo entre duas linhas de transmissão ressonantes (TLR) mediado pela vibração de um sistema nanoeletromecânico (NEMS), e a partir disso, serão realizadas duas aplicações: geração de emaranhamento tripartite de estados coerentes e medida quântica não-demolidora (QND) de número de fônons de um NEMS.

### 3.1 Modelo

O modelo de dispositivo que será estudado neste capítulo, está ilustrado na figura (3.1). Nesta seção, será formulado o dispositivo da figura (3.1.a), cujo respectivo circuito esquemático é representado na figura (3.1.b).

Considerando uma situação onde cada TLR seja um ressonador com uma única frequência bem definida, ou seja, eles podem ser considerados monomodais. Elas são capacitivamente acopladas ao NEMS. As oscilações mecânicas mudam as capacitâncias distribuídas  $C_L(t)$  e  $C_R(t)$  entre a TLR-1, NEMS e TLR-2, respectivamente. Estas são definidas como  $C_L(t) = \frac{\epsilon_0 A}{(d-x(t))}$ , e  $C_R(t) = \frac{\epsilon_0 A}{(d+x(t))}$ , onde  $\epsilon_0$  é a constante dielétrica do

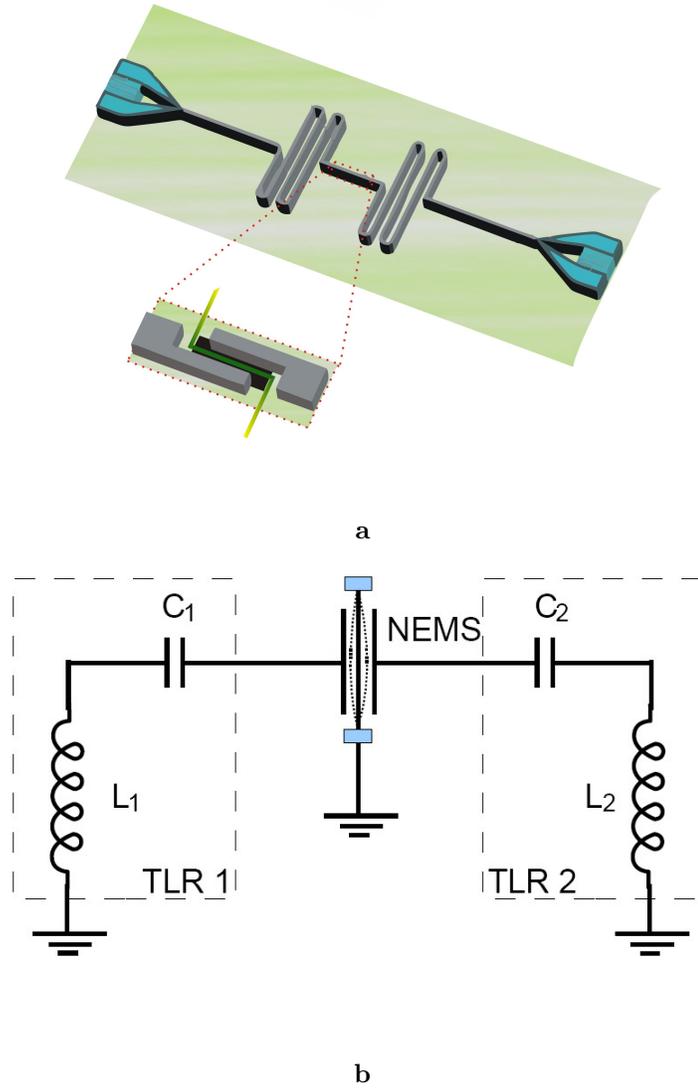


Figura 3.1: **a. Circuito:** acoplamento capacitivo entre duas TLRs mediado pela vibração de um NEMS; **b. Circuito Esquemático** ao da figura (4.2.a), consideradas as TLRs como monomodais, ilustrando o acoplamento de um modo de cada TLR intermediado pela vibração do NEMS, como será usado nesta tese.

vácuo,  $A$  é a área lateral do NEMS e  $d$  é a distância de equilíbrio de ambas as TLR-1 e TLR-2 do NEMS.  $C_{eq} = \epsilon_0 A/d$  define a capacitância de equilíbrio, e  $|\max x(t)| < d$  para evitar curto-circuito. Considerando a tensão distribuída  $V_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_L} = V_{L_2} + V_{C_2} + V_{C_R}$  chega-se à equação (fixa um ponto no NEMS na

figura (3.1.b) e utilizando *primeira lei de Kirchhoff* ou *lei das malhas*)

$$L_1 \frac{d^2}{dt^2} Q_1(t) + \frac{1}{C_1} Q_1(t) = -\frac{Q_L(t)}{C_L(t)} \quad (3.1)$$

$$L_2 \frac{d^2}{dt^2} Q_2(t) + \frac{1}{C_2} Q_2(t) = -\frac{Q_R(t)}{C_R(t)}. \quad (3.2)$$

Com a relação entre as correntes (fixa um ponto no NEMS na figura (3.1.b) e utilizando *segunda lei de Kirchhoff* ou *lei dos nós*)

$$I(t) = \frac{d}{dt} Q_1(t) + \frac{d}{dt} Q_2(t) = \frac{d}{dt} Q_L(t) + \frac{d}{dt} Q_R(t), \quad (3.3)$$

ou (integrando)

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_L(t) + Q_R(t) + K, \quad (3.4)$$

onde  $K$  é uma constante, que é assumida como  $K = 0$ . Além disso, a tensão sobre o capacitor é dada por

$$V_{C_T} = V_{C_L} - V_{C_R} = \frac{Q_L(t)}{C_L(t)} - \frac{Q_R(t)}{C_R(t)}. \quad (3.5)$$

Combinando as equações (3.4) com (3.5) obtém-se

$$Q_L(t) = \frac{C_T}{C_R(t)} (Q_1(t) + Q_2(t)) + C_T V_{C_T}(t) \quad (3.6)$$

$$Q_R(t) = \frac{C_T}{C_L(t)} (Q_1(t) + Q_2(t)) - C_T V_{C_T}(t), \quad (3.7)$$

onde  $C_T^{-1} = C_L^{-1}(t) + C_R^{-1}(t) = \frac{2d}{\epsilon_0 A} = 2C_{eq}^{-1}$ .

Inserindo as equações (3.6) e (3.7) nas equações (3.1) e (3.2) tem-se

$$L_1 \frac{d^2}{dt^2} Q_1(t) + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{C_T}{C_L(t)C_R(t)} \right) Q_1(t) + \frac{C_T}{C_L(t)C_R(t)} Q_2(t) = -\frac{C_T}{C_L(t)} V_{C_T}(t) \quad (3.8)$$

$$L_2 \frac{d^2}{dt^2} Q_2(t) + \left( \frac{1}{C_2} + \frac{C_T}{C_L(t)C_R(t)} \right) Q_2(t) + \frac{C_T}{C_L(t)C_R(t)} Q_1(t) = +\frac{C_T}{C_R(t)} V_{C_T}(t). \quad (3.9)$$

Agora,

$$\frac{C_T}{C_L(t)C_R(t)} = \frac{(d^2 - x^2(t))}{2d\epsilon_0 A}, \quad (3.10)$$

e

$$\frac{C_T}{C_L(t)} = \frac{(d - x(t))}{2d}, \quad \frac{C_T}{C_R(t)} = \frac{(d + x(t))}{2d}. \quad (3.11)$$

Por definição

$$\frac{1}{\tilde{C}_i} \equiv \frac{1}{C_i} + \frac{(d^2 - x^2(t))}{2d\epsilon_0 A}, \quad (3.12)$$

que resulta em um deslocamento das capacitâncias das TLRs em função de  $(d^2 - x^2(t)) / 2d\epsilon_0 A$ , com  $i = 1$  e 2.

Sendo as variáveis conjugadas das TLRs  $Q_i$  e  $P_i(t) = L_i \dot{Q}_i(t) = L_i I_i(t)$  para  $i = 1$  e 2. Logo, as equações (3.8) e (3.9) podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} Q_1(t) = \frac{1}{L_1} P_1(t) \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -\frac{1}{\tilde{C}_1} Q_1(t) - \frac{(d^2 - x^2(t))}{2d\epsilon_0 A} Q_2(t) - \frac{(d - x(t))}{2d} V_{C_T}(t) \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} Q_2(t) = \frac{1}{L_2} P_2(t) \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} P_2(t) = -\frac{1}{\tilde{C}_2} Q_2(t) - \frac{(d^2 - x^2(t))}{2d\epsilon_0 A} Q_1(t) + \frac{(d + x(t))}{2d} V_{C_T}(t). \quad (3.16)$$

Que permitem obter o Hamiltoniano do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2L_1} P_1^2 + \frac{1}{2\tilde{C}_1} Q_1^2 + \frac{1}{2L_2} P_2^2 + \frac{1}{2\tilde{C}_2} Q_2^2 + \frac{(d^2 - x^2(t))}{2d\epsilon_0 A} Q_1 Q_2 \\ & + \frac{(d - x(t))}{2d} V_{C_T}(t) Q_1 - \frac{(d + x(t))}{2d} V_{C_T}(t) Q_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para quantização do Hamiltoniano, basta relacionar suas variáveis canônicas ( $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  e  $x$ ) com elementos de operadores de criação e aniquilação. Escrevendo  $x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} (b e^{-i\nu t} + b^\dagger e^{i\nu t})$ , tem-se  $x^2(t) = \frac{\hbar}{2m\nu} (b^2 e^{-i2\nu t} + (b^\dagger)^2 e^{i2\nu t} + 2b^\dagger b + 1)$ . Para rápidas oscilações ( $\nu t \gg 1$ ), os valores esperados de  $\langle x(t) \rangle \approx 0$ , and  $\langle x^2(t) \rangle \approx \frac{\hbar}{m\nu} (\langle b^\dagger b \rangle + \frac{1}{2}) \equiv x_{rms}^2$ . Assim,

$$\frac{1}{\tilde{C}_i} = \frac{1}{C_i} + \frac{d^2 - \frac{\hbar}{m\nu} (\langle b^\dagger b \rangle + \frac{1}{2})}{2d\epsilon_0 A}. \quad (3.18)$$

Dividindo os dois lados da equação (3.18) por  $L_i$ , obtém-se a relação entre duas frequências  $\omega_i^2 \equiv (L_i C_i)^{-1}$ , e  $\tilde{\omega}_i^2 \equiv (L_i \tilde{C}_i)^{-1}$  como

$$\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 + \frac{d^2 - x_{rms}^2}{2d\epsilon_0 A L_i}, \quad (3.19)$$

ou

$$\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 + \frac{\omega_{i,eq}^2}{2} \left( 1 - \frac{x_{rms}^2}{d^2} \right), \quad (3.20)$$

com  $\omega_{i,eq}^2 \equiv \frac{1}{C_{eq}L_i}$ . Tipicamente por  $x_{rms}^2/d^2 = 10^{-6}$  ser bem menor que  $\omega_i^2$  e  $\omega_{i,eq}^2/2$ . A equação (3.20) pode ser considerada como  $\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 + \omega_{i,eq}^2/2$ , o que significa que

$$\frac{1}{\tilde{C}_i} = \frac{1}{C_i} + \frac{1}{2C_{eq}}. \quad (3.21)$$

Assim, o Hamiltoniano (3.17) se reduz para

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \approx & \frac{1}{2L_1}P_1^2 + \frac{1}{2\tilde{C}_1}Q_1^2 + \frac{1}{2L_2}P_2^2 + \frac{1}{2\tilde{C}_2}Q_2^2 \\ & + \frac{d^2 - \frac{\hbar}{m\nu}(b^\dagger b + 1/2)}{2d\epsilon_0 A}Q_1Q_2 \\ & + \frac{1}{2}V_{C_T}(t)Q_1 \\ & - \frac{1}{2}V_{C_T}(t)Q_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Finalmente, assumindo  $Q_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2L_j\tilde{\omega}_j}}(a_j^\dagger + a_j)$  e  $P_j = i\sqrt{\frac{\hbar L_j\tilde{\omega}_j}{2}}(a_j^\dagger - a_j)$ , que seguem a relação de comutação padrão, tem-se<sup>1</sup>

$$H = H_0 + H_{int} + H_d \quad (3.23)$$

onde

$$H_0 = \hbar\tilde{\omega}_1(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\tilde{\omega}_2(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} H_d = & \sqrt{\frac{\hbar}{2L_1\tilde{\omega}_1}} \left( \frac{V_{C_T}(t)}{2} \right) (a_1^\dagger + a_1) \\ & - \sqrt{\frac{\hbar}{2L_2\tilde{\omega}_2}} \left( \frac{V_{C_T}(t)}{2} \right) (a_2^\dagger + a_2), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} H_{int} = & \frac{\hbar}{4d^2C_{eq}\sqrt{L_1L_2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2}} \left[ d^2 - \frac{\hbar}{m\nu}(b^\dagger b + 1/2) \right] \\ & \times (a_1^\dagger + a_1)(a_2^\dagger + a_2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assumindo os dois campos TLRs em ressonância,  $\omega_1 = \omega_2$ , implicando  $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}$ , na representação de interação  $H_{int}$  pode ser escrito como

$$H_{int}^I = \hbar(\theta_0 + \theta b^\dagger b)(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger), \quad (3.27)$$

onde  $\theta \equiv -\hbar\tilde{\omega}\tilde{C}_1/(4d^2m\nu C_{eq})$  e  $\theta_0 = (4C_{eq}\sqrt{L_1L_2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2})^{-1}$ . Os termos de oscilação rápida ( $a_1 a_2 + h.c$ ) que são proporcionais a  $e^{\pm 2i\tilde{\omega}t}$ , são negligenciados.

<sup>1</sup>A diferença de potência  $V_{C_T}(t)$  é muito menor que as demais grandezas do circuito, devido à amplitude de oscilação do NEMS ser bilhões de vezes menor que os comprimentos das microondas das TLRs.

O Hamiltoniano (3.27) mostra o acoplamento entre os dois modos de TLRs ressonantes intermediado pelo número de fônons do oscilador nanoeletromecânico<sup>2</sup>. Duas aplicações possíveis são descritas: (i) Podendo gerar inicialmente, três estados coerentes para os dispositivos, e num intervalo temporal muito menor que o inverso de cada taxa de relaxação de número de quanta, pode-se gerar periodicamente emaranhamento após o instante inicial; (ii) Medida específica quântica não demolidora (QND) de número de fônons do NEMS.

## 3.2 Emaranhamento Tripartite em um Circuito

Considerando o circuito da figura (3.1), sem dissipação, e com estado inicialmente preparado num produto de triplo de estados coerentes, para o NEMS (índice  $N$ ) e para as TLRs (índices de 1 e 2), como segue

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_N |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2, \quad (3.28)$$

a evolução temporal irá gerar o estado emaranhado<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{\theta b^\dagger b (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)t} |\alpha\rangle_N |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2 \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_N e^{\theta n (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)t} |\beta\rangle_1 |\gamma\rangle_2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_N |\beta_n(t)\rangle_1 |\gamma_n(t)\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $|n\rangle$  são os estados de Fock, com  $C_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha^n / \sqrt{n!}$ , e

$$\begin{aligned} \beta_n(t) &= \beta \cos(n\theta t) - i\gamma \sin(n\theta t), \\ \gamma_n(t) &= \gamma \cos(n\theta t) - i\beta \sin(n\theta t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

De um modo geral, quando se traça sobre a partição  $N$  da equação (3.29), pode-se ver que o estado reduzido  $\rho_{\hat{1}2}$  é separável, ou seja, o NEMS não é capaz de gerar o emaranhamento bipartido entre os modos das TLRs [67]. Agora, para os estados globais puros (que é o caso deste estudo), a medida universal de emaranhamento é a entropia de von Neuman, ou a pureza como dado pela entropia linear (demonstrada no **apêndice A**)

$$E_{A|B} = 1 - \text{Tr}_A \hat{\rho}_B^2, \quad (3.31)$$

<sup>2</sup>O  $\theta_0$  é a constante de interação no Hamiltoniano de troca de fótons entre as TLRs, devido à *carga por indução*; o  $\theta$  é a constante de interação no Hamiltoniano de acoplamento entre as TLRs mediano pela vibração do NEMS.

<sup>3</sup>Nesta seção os termos com  $\theta_0$  são desprezados por produzir uma fase global.

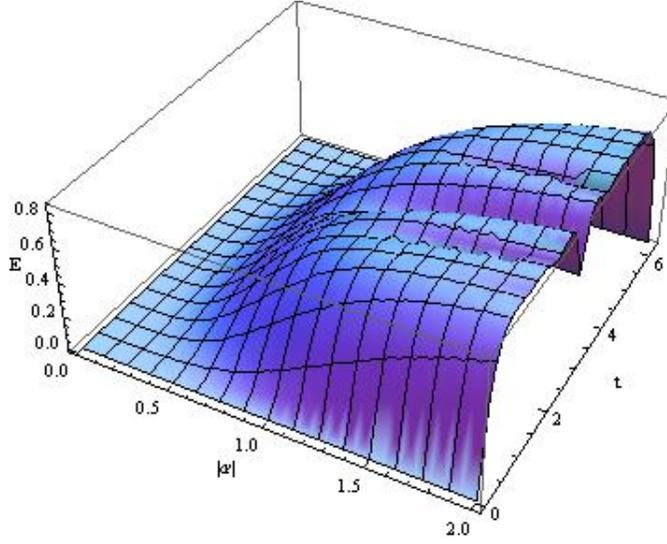


Figura 3.2: Entropia linear da partição  $N|12$  quantificando o emaranhamento entre NEMS e os dois modos de TLRs em função do tempo e de  $|\alpha|$ , para  $\theta = 1$ . Escolheu-se  $\alpha = \beta = \gamma \in R$ . Note que a dinâmica de geração do emaranhamento é periódica num período de  $2\pi$  devido ao comportamento das funções da equações (3.30).

onde  $\hat{\rho}_B$  representa o operador densidade reduzido depois de traçar sobre a parte  $A$  de todo o sistema com  $\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ .

O comportamento das bipartições a partir de (3.29) são codificados nas seguintes equações lineares para as entropias:

$$E_{N|12} = 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} |C_n|^2 |C_m|^2 e^{-|\beta_n - \beta_m|^2 - |\gamma_n - \gamma_m|^2}, \quad (3.32)$$

$$E_{1|N2} = 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} |C_n|^2 |C_m|^2 e^{-|\beta_n - \beta_m|^2}, \quad (3.33)$$

$$E_{2|N1} = 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} |C_n|^2 |C_m|^2 e^{-|\gamma_n - \gamma_m|^2}. \quad (3.34)$$

Pela natureza poassoniana de  $|C_n|^2$  e da limitação dos exponenciais, todos os montantes acima são convergentes. Nas figuras (3.2) e (3.3) são mostradas  $E_{N|12}$  para alguns estados coerentes iniciais, quando o somatório é realizado ao longo de 30 termos, o erro nesta truncagem é da ordem de  $10^{-17}$  para todas as curvas plotadas.

Como se pode ver, embora o sistema recorra a um estado não-emaranhado após um período,

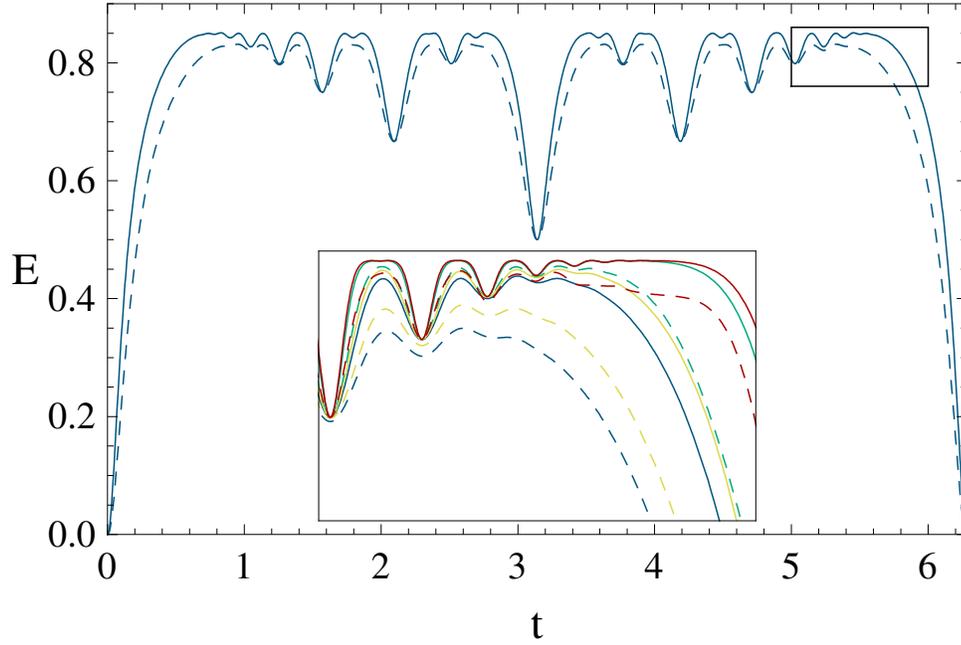


Figura 3.3: Entropia linear da partição  $E_{N|12}$  (contínuo) e  $1|N2$  (tracejada) para  $\alpha = \beta = \gamma = 2$  em função do tempo. Desde  $\beta = \gamma$ ,  $E_{1|N2} = E_{2|N1}$ . No gráfico inserido: Os mesmos, entropias lineares, para valores distintos do estado inicial para  $\alpha = 2$  e  $\beta = \gamma = 2$  (azul);  $\beta = 3, \gamma = 4$  (verde);  $\beta = \gamma = 1 + 2i$  (amarelo);  $\beta = 3 + 4i, \gamma = 1 + 2i$  (vermelho). Observação:  $\theta = 1$  em tdas as plotagens.

geralmente é altamente emaranhado. Este é um esquema simples para a geração de emaranhamento tripartite, envolvendo modos mecânicos e eletromagnéticos em regime de variáveis contínuas, que, como foi demonstrado, pode ser facilmente implementado em um circuito.

### 3.3 Equações Diferenciais Quânticas Estocásticas e Eliminação Adiabática

Assumindo um bombeamento de amplitude  $F$  e constante de interação  $g$  na TLR-2, o Hamiltoniano na representação de interação é reescrito como

$$H_I = \hbar g (F^* a_2 + F a_2^\dagger) + \hbar \theta_0 (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2) + \hbar \theta b^\dagger b (a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2).$$

As Equações Diferenciais Quânticas Estocásticas das TLRs são

$$\frac{da_1}{dt} = -i\theta_0 a_2 - i\theta b^\dagger b a_2 - \frac{\kappa_1}{2} a_1 + \sqrt{\kappa_1} a_{1in}, \quad (3.35)$$

$$\frac{da_2}{dt} = -i\theta_0 a_1 - i\theta b^\dagger b a_1 - \frac{\kappa_2}{2} a_2 - i\mathcal{F} + \sqrt{\kappa_2} a_{2in}, \quad (3.36)$$

em que  $\mathcal{F} \equiv gF$ ,  $\kappa_j$  é a taxa de relaxação de número de fótons de cada TLR e  $a_{jin}$  é o operador aniquilação do modo do reservatório de cada TLR<sup>4</sup> para  $j = 1$  e  $2$ .

Fazendo uma eliminação adiabática do modo da TLR-2 devido  $\theta_0 \gg \theta$ , negligencia-se o termo da equação diferencial (3.35) que depende de  $1 \gg b^\dagger b$ , pois  $\theta/\kappa_2$ . Quando negligenciado, o acoplamento ( $\theta_0/\kappa_2$ ) na equação (3.36) condicionará um estado de campo eletromagnético estacionário na TLR-2, resultando em um estado coerente com amplitude

$$\langle a_2 \rangle \approx \frac{-2i\mathcal{F}}{\kappa_2} \equiv \alpha_2.$$

Agora, leva-se em conta o efeito residual de  $\theta_0/\kappa_2$ , como um efeito de dissipação adicional para TLR-1. A Equação Diferencial Quântica Estocástica para  $a_1$  fica

$$\frac{da_1}{dt} = -i\theta\alpha_2 b^\dagger b - \frac{\kappa_1}{2} a_1 - \frac{\Gamma}{2} a_1 + \sqrt{\kappa_1} a_{1in} + \sqrt{\Gamma} \tilde{a}_{1in}, \quad (3.37)$$

onde  $\Gamma = 2\theta_0^2/\kappa_2$ ,  $\tilde{a}_{1in}$  é o termo de reservatório adicional. A equação (3.37) pode ser exatamente resolvida com solução

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_1(0) e^{-\frac{\Gamma+\kappa_1}{2}t} - \frac{2i\alpha_2\theta b^\dagger b}{\Gamma + \kappa_1} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma+\kappa_1}{2}t}\right) \\ &\quad + \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{\kappa_1+\Gamma}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\kappa_1+\Gamma}{2}t'} a_{1in}(t') dt' \\ &\quad + \sqrt{\Gamma} e^{-\frac{\kappa_1+\Gamma}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\kappa_1+\Gamma}{2}t'} \tilde{a}_{1in}(t') dt'. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Procedendo para encontrar o valor médio da amplitude da TLR-1, definido como (assumindo  $\langle a_1(0) \rangle = 0$ ):

$$\langle a_1(t) \rangle = -\frac{2i\alpha_2\theta \langle b^\dagger b \rangle}{\Gamma + \kappa_1} \left(1 - e^{-\frac{\Gamma+\kappa_1}{2}t}\right). \quad (3.39)$$

---

<sup>4</sup>Considerando um ruído branco tem-se  $\langle a_{jin} \rangle = 0$  e  $\langle a_{jin}^\dagger a_{j'in} \rangle = N_j \delta(0) \delta_{jj'}$  com  $N_j$  sendo o número térmico, para  $j = j' = 1$  e  $2$  [58].

A expressão da equação (3.39) dá a medida do número médio de fônons do NEMS, quando se tem um tempo maior que  $\Gamma + \kappa_1/2$  a medida é estabilizada para a expressão  $\langle a_1(t) \rangle = -4\mathcal{F}\theta \langle b^\dagger b \rangle / [(\Gamma + \kappa_1)\kappa_2]$ . Este processo é um esquema de medição quântica não-demolidora (QND)<sup>5</sup> do número de fônons do NEMS. A eliminação adiabática foi uma forma de ajustar as taxas de dissipação dos dispositivos para ter uma solução assintótica. A escolha da medida do operador amplitude da segunda TLR é favorável para anulação do valor médio do modo do ruído [55].

### 3.4 Sumário do Capítulo 3

Neste capítulo foi feita uma formulação inédita do Hamiltoniano de interação capacitiva entre duas TLRs mediada pela vibração de um NEMS, resultado em  $H_{int} \propto b^\dagger b (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$ , possibilitou-se duas aplicações: (i) no caso, o circuito estando inicialmente em um produto de estados coerentes, é gerado periodicamente emaranhamento, medido pela entropia linear resultado nas equações (3.32), (3.33) e (3.34) ilustradas nas figuras (3.2) e (3.3) (calculados para tempos bem menores que o de relaxação dos dispositivos, o que não será o caso da próxima aplicação); (ii) agora considerando elementos de dissipação de cada TLR serem bem distintos (a taxa de relaxação na TLR-2 ser bem maior que a TLR-1), uma aproximação adiabática pode ser tomada, de modo que solucionando as equações diferenciais estocásticas dos modos das TLRs, obtem-se a medida da amplitude da TLR-1, na forma

$$\langle a_1(t) \rangle = \frac{-4\mathcal{F}\theta \langle b^\dagger b \rangle}{(\Gamma + \kappa_1)\kappa_2}, \quad (3.40)$$

para  $t \gg \Gamma + \kappa_1/2$ , dando o valor do número médio de fônons do NEMS. Note que o NEMS em um estado de Fock, uma única medida deste tipo é suficiente para determinar seu número médio de fônons, ou seja, a variância do seu operador número de fônons é igual a zero. Agora, quando seu estado é térmico, uma análise estatística deve ser incrementada, o que será feito no próximo capítulo.

---

<sup>5</sup>Demonstrado no **apêndice B**.

## Capítulo 4

# Estatística de Número de Fônons Através de QED em Circuitos

Neste capítulo será mostrado um esquema de medições pulsadas para construir a estatística de número de fônons de um NEMS no estado térmico, e por final deduzir sua temperatura.

### 4.1 Modelo

Aqui é considerado o acoplamento de duas TLRs mediado pela vibração de um NEMS, tal como considerado na derivação do capítulo anterior e representados na figura (4.1). Ao assumir o regime de rápidas oscilações mecânicas, na escala de  $GHz$ , e onde a TLR-1 tem sua radiação eletromagnética clássica. O Hamiltoniano de interação entre a vibração do NEMS e o campo de radiação eletromagnética da TLR-2 é <sup>1</sup>

$$H_I = -\hbar\alpha(t)b^\dagger b(a + a^\dagger), \quad (4.1)$$

onde  $\alpha(t)$  é proporcional à amplitude do microondas na TLR-1 [75] e  $a$  ( $a^\dagger$ ) é o operador de aniquilação (criação) do modo normal da TLR-2. Além disso, o campo nesta segunda TLR é afetada pela presença de uma Junção Josephson (veja novamente na figura (4.1), cujo efeito é induzir compressão de quadraturas

---

<sup>1</sup>É fácil demonstrar partindo da derivação do capítulo anterior. O termo com  $\theta_0$  é desprezado por não ter nenhuma contribuição significativa na estatística de número de fônon deste circuito.

[76, 77, 78, 79, 80, 81, 82] (é derivada mais especificamente para esta tese no **Capítulo 2**) através de um termo paramétrico

$$H_p = -i\hbar\frac{\gamma}{2}(a^2 - a^{\dagger 2}), \quad (4.2)$$

sem perda de generalidade, pode-se tomar  $2\gamma = \beta\chi^{(2)}$  como sendo real e positivo, onde  $\chi^{(2)}$  é a susceptibilidade não-linear e  $\beta$  é a amplitude da fonte de pulsos coerentes na TLR-2. Considere-se um cenário de medição pulsada [83], na qual as interações em  $H_I$  e  $H_p$  são ligadas e desligadas rapidamente<sup>2</sup>. Note que o operador de número de fônons do NEMS é uma constante de movimento e, por consequência, sua estatística do número de fônons não é alterada após a cada sequências de pulsos. O processo detalhado desta medição pulsada é descrito no que se segue: a figura (4.1) mostra o circuito esquemático e a figura (4.2) descreve o método de medida.

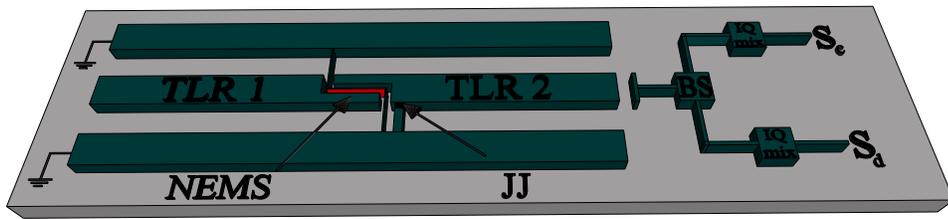


Figura 4.1: Na experiência projetada, o acoplamento capacitivo entre dois TLRs mediado pela vibração de um NEMS. A saída de radiação eletromagnética da TLR-2 é conectada com um divisor de feixes para separar a radiação que são incididas nos misturadores (IQ) para ser efetuada em cada medida [83]. A segunda TLR também está diretamente acoplada a uma junção Josephson, para reduzir a variância de cada medida. Maiores detalhes estão apresentados no texto e na figura (4.2).

<sup>2</sup>Sempre é ligada a interação  $H_p$  e sequencialmente a interação  $H_I$  e imediatamente é realizada a medida.

## 4.2 Descrição da Medição e a Estatística de Número de Fônons

Pouco antes da sequência de pulsos, a TLR-2 é preparada num estado de vácuo, enquanto que o NEMS está no estado térmico com número significativo de fônons  $N$ ,

$$\rho(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) |n\rangle \langle n|_b \otimes |0\rangle \langle 0|_a, \quad (4.3)$$

na qual  $P(n) = N^n / (N + 1)^{n+1}$  representa a distribuição do número fônon térmico do NEMS, sendo  $N = (\exp(\hbar\nu/k_B T) - 1)^{-1}$  o seu número térmico. Em seguida, é aplicado um pulso de duração  $\tau$  na segunda TLR através da *fonte de pulso coerente 2* gerando um estado de vácuo comprimido na radiação eletromagnética da TLR-2 (devido à junção Josephson, demonstrada no capítulo 2),

$$\rho_p(\tau) = e^{-iH_p\tau} \rho(0) e^{iH_p\tau}. \quad (4.4)$$

Sequencialmente, é ligada a *fonte de pulso coerente 1*, que alimenta a TLR-1 por uma duração temporal<sup>3</sup>  $\tau$ , gerando uma mistura de estados de vácuo comprimido e deslocados

$$\begin{aligned} \rho(2\tau) &= e^{-iH_I\tau} e^{-iH_p\tau} \rho(0) e^{iH_p\tau} e^{iH_I\tau} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n) |n\rangle \langle n|_b \otimes |\alpha_n, \gamma\rangle \langle \alpha_n, \gamma|_a, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com  $\alpha_n(\tau) = in \int_0^\tau \alpha(t) dt \equiv inA$ , onde  $A$  é a área de interação do pulso, e  $|\alpha_n, \gamma\rangle_a$  é um estado de vácuo comprimido e deslocado dado por  $|\alpha_n, \gamma\rangle_a = \mathcal{D}(\alpha_n) \mathcal{S}(\gamma) |0\rangle_a$ , onde  $\mathcal{D}(\alpha_n) = \exp[inA(a + a^\dagger)]$  é o operador deslocamento condicionado ao número de excitação de fônon do NEMS e  $\mathcal{S}(\gamma) = \exp[(\gamma\tau/2)(a^{\dagger 2} - a^2)]$  é o operador compressão com parâmetro de compressão  $\gamma\tau$ .

Como está descrito, no final da sequência destes pulsos, o campo de radiação eletromagnética da TLR-2 é dada por uma mistura de estados de vácuo deslocados, que são acessíveis de acordo com a distribuição  $P(n)$ . Neste esquema, a saída de radiação eletromagnética da TLR-2, após cada sequência de pulsos, é dirigida para um divisor de feixe de microondas (um acoplador híbrido). As duas saídas do divisor são executadas através de misturadores de *Intensidades de Quadraturas* (IQ) separados (envelopes complexos). As quatro correntes de saída dos misturadores IQ podem ser correlacionadas de várias maneiras, depois prosseguir para detectores lineares [83]. Ao final de cada sequência pulso, é realizada uma medição na saída da segunda TLR através dos envelopes complexos  $S_c = -a(2\tau)$  e  $S_d = ia(2\tau)$ .

---

<sup>3</sup>Os tempos de duração dos pulsos (das *fonte de pulso coerente 1* e *2*) podem ser diferentes.

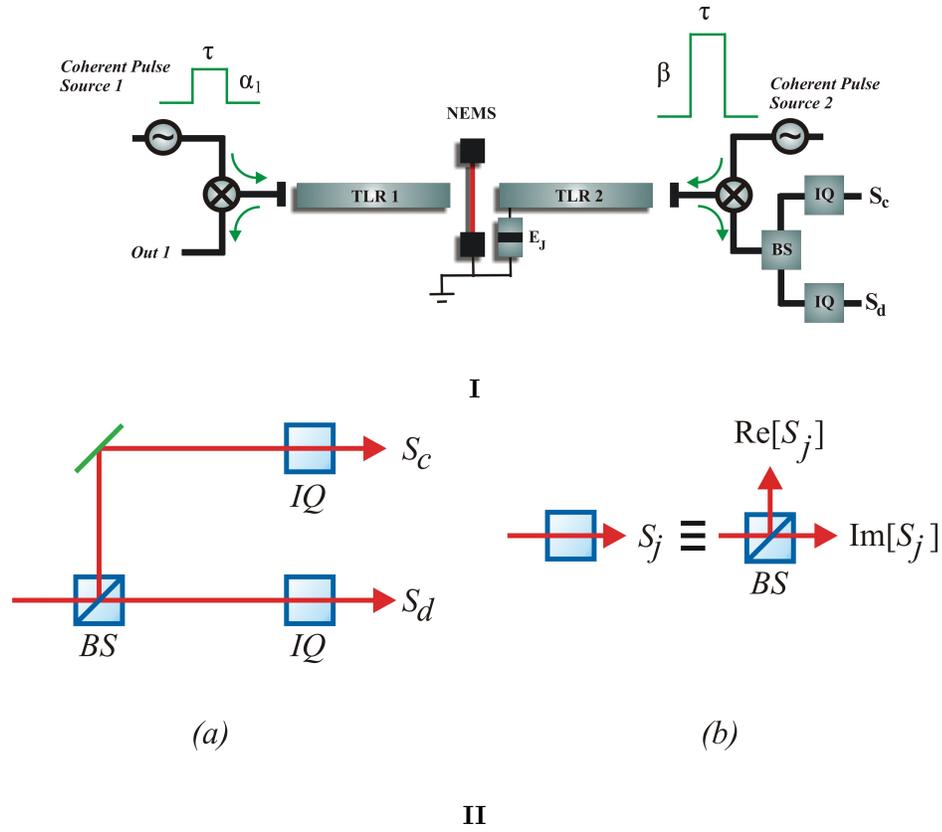


Figura 4.2: **I. Circuito para experimento** com esquema de seqüências de pulsos e medida (primeiro o pulso 2, seqüencialmente o pulso 1 e imediatamente o campo de radiação da TLR-2 é dirigido para uma medida) ; **II. misturador IQ:** (a) Analogia do envelope complexo com divisores de feixes e detectores lineares. O modo  $a(2\tau)$  que sai da TLR-2 passa por um divisor de feixe (BS), em seguida é medido nos detectores lineares, através dos envelopes complexos, apresentado na parte (b). Calculando os “outputs” dos envelopes complexos a partir  $S_j = Re[S_j] + iIm[S_j]$  para  $j = c, d$ , obtém-se  $S_c(2\tau) = -a(2\tau)$  e  $S_d(2\tau) = ia(2\tau)$ .

Estas medidas pulsadas permitem que os valores médios dos operadores quadraturas possam ser calculados depois que todo o campo tenha sido despejado, para que a TLR-2 volte ao estado de vácuo pronto para a próxima seqüência de pulsos. Para cada medição individual, através de cada pulso, no NEMS, é verificado um número específico de excitação de fônon  $m$  de acordo com a distribuição térmica  $P(m)$ . O estado pós-seleccionado do campo TLR-2 condicionado neste instante (no momento da medição  $2\tau$ ) com

excitação  $m$  do NEMS é dada pela

$$\rho_a^{(m)}(2\tau) = \frac{\text{Tr}_b \{ \Pi_m \rho(2\tau) \Pi_m \}}{\text{Tr}_{ab} \{ \Pi_m \rho(2\tau) \Pi_m \}}, \quad (4.6)$$

onde  $\Pi_m = |m\rangle \langle m|_b$ ,  $\rho(2\tau)$  é dado pela equação (4.5), e  $\text{Tr}_{ab} \{ \Pi_m \rho(2\tau) \Pi_m \} = P(m)$  é a probabilidade para obter  $m$  fônons. Por conseguinte, o valor esperado dos operadores quadratura de fase e amplitude<sup>4</sup> em cada uma medição são

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle_{(m)}(2\tau) &= \text{Tr} \left\{ Y \rho_a^{(m)}(2\tau) \right\} \\ &= \langle \alpha_m, \gamma | Y | \alpha_m, \gamma \rangle \\ &= \langle \alpha_m, \gamma | \left( \frac{a - a^\dagger}{i} \right) | \alpha_m, \gamma \rangle \\ &= 2mA \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_{(m)}(2\tau) &= \text{Tr} \left\{ X \rho_a^{(m)}(2\tau) \right\} \\ &= \langle \alpha_m, \gamma | X | \alpha_m, \gamma \rangle \\ &= \langle \alpha_m, \gamma | (a + a^\dagger) | \alpha_m, \gamma \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

sendo o estado pós-selecionado com variâncias<sup>5</sup>

$$\langle (\Delta Y)^2 \rangle_{(m)}(2\tau) = e^{-2\gamma\tau} \quad (4.9)$$

e

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle_{(m)}(2\tau) = e^{2\gamma\tau}. \quad (4.10)$$

Antes que a medição aconteça, o estado pré-selecionado do campo de radiação da TLR-2 é  $\rho_a(2\tau) = \sum_m P(m) \rho_a^{(m)}(2\tau)$ . Com isso, a resultante de várias medições dos operadores quadraturas da TLR-2 são

$$\langle Y \rangle(2\tau) = \sum_m P(m) \langle Y \rangle_{(m)}(2\tau)$$

e

$$\langle X \rangle(2\tau) = \sum_m P(m) \langle X \rangle_{(m)}(2\tau).$$

<sup>4</sup>Aqui, o operador quadratura de fase é denominada como  $Y = i(a^\dagger - a)$  e a quadratura de amplitude como  $X = a + a^\dagger$ .

<sup>5</sup>A variância de um operador  $B$  é determinado a partir de  $\langle (\Delta B)^2 \rangle = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$ .

A média resultante sobre muitas medições pulsadas dos operadores quadraturas são dadas por

$$\langle Y \rangle (2\tau) = Tr \{ i (a^\dagger - a) \rho(2\tau) \} = 2AN, \quad (4.11)$$

e

$$\langle X \rangle (2\tau) = Tr \{ (a + a^\dagger) \rho(2\tau) \} = 0. \quad (4.12)$$

A partir da média ao longo de muitas sequências de pulsos idênticos, pode-se construir o número médio de fônons do NEMS,  $N$ , e, portanto, deduzir sua temperatura,  $T = \hbar\nu/[k_B \ln(N^{-1} + 1)]^6$ . A variância total do operador  $Y$  é dado

$$\langle (\Delta Y)^2 \rangle (2\tau) = 4A^2N(N+1) + \langle (\Delta Y)^2 \rangle_{(m)} (2\tau), \quad (4.13)$$

sendo  $\langle (\Delta Y)^2 \rangle_{(m)} (2\tau)$ , a variação de cada medição individual dada pela equação. (4.9). E  $N(N+1)$ , aparecendo na equação (4.13) representa a variação da distribuição térmica do NEMS. A compressão induzida pela junção de Josephson permite uma redução do ruído em cada medição, em contraste com a situação sem a junção de Josephson, pelo qual  $\langle (\Delta Y)^2 \rangle_{(m)} (2\tau) = 1$ .

Outra medida que pode ser feita através dos misturadores IQ, é a correlação transversal particular dando acesso diretamente a todos os momentos normalmente ordenados de campo da TLR-2 no momento inicial da medição, com isso, pode ser calculado os momentos  $\langle (a^\dagger)^n a^m \rangle$  para construir a função de Wigner da TLR-2 [98]-[99]

$$W(\beta) = \sum_{n,m} \int d^2\eta \frac{\langle (a^\dagger)^n a^m \rangle (-\eta^*)^m \eta^n}{\pi^2 n! m!} e^{(1/2)|\eta|^2 + \beta\eta^* - \beta^*\eta} \quad (4.14)$$

neste caso, o calculo da função de Wigner da TLR-2 pode ser da forma<sup>7</sup> [100]

$$W(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta e^{\beta\eta^* - \beta^*\eta} Tr \left\{ \sum_n P(n) |\alpha_n, \gamma\rangle \langle \alpha_n, \gamma|_a e^{a\eta^* - a^\dagger\eta} \right\}, \quad (4.15)$$

resultando

$$W(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \sum_n P(n) e^{-\frac{1}{2}(X)^2 e^{-2\gamma\tau} + (Y - \alpha_n)^2 e^{-2\gamma\tau}}. \quad (4.16)$$

Com a função de Wigner (4.16) da TLR-2 pode ser realizada a visualização dos seus estados quânticos, figura (4.4), e constituída a estatística de número de fônons do NEMS como mostra na figura (4.5).

<sup>6</sup>De forma semelhante também se pode medir duas funções de correlação em tempos distintos para o NEMS também.

<sup>7</sup> $\beta \rightarrow X + iY$  por notação.

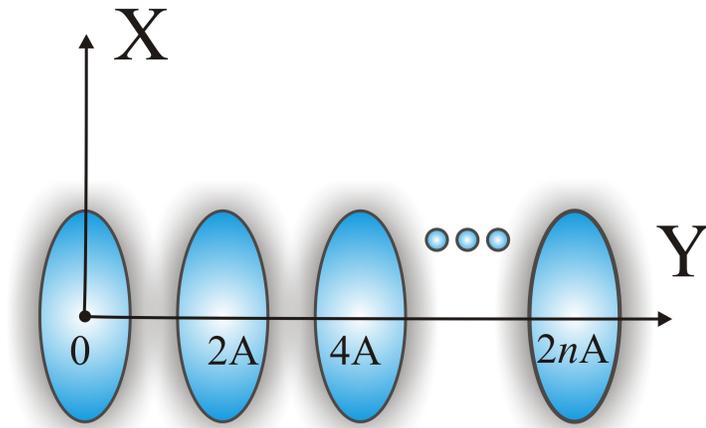


Figura 4.3: Espaço de fase da TLR-2 (contorno da função de Wigner) em  $t = 2\tau$  para a situação de  $2A \gg e^{-2\gamma\tau}$ . O raio, maior (menor) de cada elipse representa  $\langle(\Delta Y)^2\rangle^{(m)}(2\tau) = e^{-2\gamma\tau}$  ( $\langle(\Delta X)^2\rangle^{(m)}(2\tau) = e^{2\gamma\tau}$ ). A separação entre sua elipse e sua vizinha no “eixo”  $Y$  é igual  $2A$ .

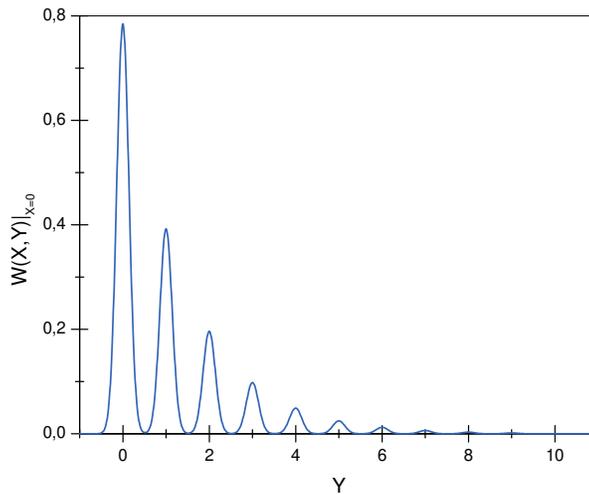


Figura 4.4: Função de Wigner (4.16) para  $X = 0$  e  $N = 1$  (para  $A = 1$  e  $e^{2\gamma\tau} = 50$ ). Dando uma visualização dos estados quânticos do NEMS e assim construindo seu histograma de distribuição probabilística na figura (4.5).

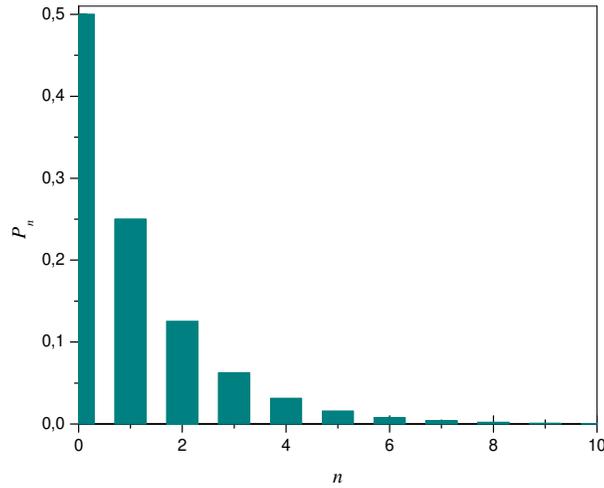


Figura 4.5: O histograma representa a distribuição probabilística  $P(n)$  para o caso  $N = 1$ .

### 4.3 Sumário do Capítulo 4

Neste capítulo mostrou que através do modelo de circuito da figura (4.1), é possível investigar um esquema para medição de temperatura do NEMS. Este esquema consiste nas seguintes etapas:

1. Antes de tudo, o NEMS e a segunda TLR tem seus modos normais obedecendo ao comportamento quântico, e a primeira TLR contendo radiação clássica;
2. No o instante inicial o NEMS está em um estado térmico e a TLR-2 é preparada no estado de vácuo;
3. Em seguida, é aplicado um pulso com duração  $\tau$  na TLR-2, gerando um estado de vácuo comprimido por está acoplada com uma Junção Josephson.
4. Na sequência, outro pulso é aplicado, só que agora é na TLR-1, gerando uma mistura de estados comprimido e deslocados condicionalmente às ocupações do NEMS.
5. Finalmente o campo de radiação eletromagnética é ‘expulso’ da segunda TLR (gerando novamente o estado de vácuo na TLR-1) para medida das intensidades dos operadores de quadraturas.

Cada medição, no fim destas etapas, é obtido um número de ocupação do NEMS obedecendo a distribuição térmica. Com isso, repetindo várias vezes esse esquema de medição, pode-se construir a distribuição estatística, calcular o valor médio de número de fônons e (no caso da distribuição térmica) deduzir a temperatura do NEMS.

## Capítulo 5

# Espectro de Transmissão dos Modos Vibracionais da Interação entre NEMS e Íon

Neste capítulo é investigado um sistema contendo um íon interagente com um sistema nanoeletromecânico. Essa interação, de origem eletrostática, permite que os graus de liberdade vibracionais do íon e do sistema nanoeletromecânico sejam interpretados como dois osciladores acoplados, devido às grandezas de carga e dadas as dimensões do sistema. Outra interação é entre os graus vibracionais do íon e seus dois níveis de energia, surgida do bombeamento de um laser externo no limite de Lamb-Dicke no regime de primeira *red sideband excitation*. Na aproximação de onda girante, essa interação pode ser descrita pela interação de Jaynes-Cummings. Com essas duas interações no sistema, faz-se uma análise do espectro de transmissão.

### 5.1 Introdução

A primeira proposta de acoplamento íon-NEMS foi feita por Tian e Zoller [2], em seguida, Hensinger e colaboradores [3] mostraram que um único íon armadilhado poderia ser usado para testar a natureza quântica de um oscilador mecânico mesoscópico.

Recentemente, numa proposta de um ponto quântico (QD) acoplado a uma molécula fotônica

(associada a duas cavidades) foi feito um estudo do espectro de transmissão em que se observa diferentes regimes de anti-cruzamento entre o QD e dois super-modos da molécula fotônica [101]. Aqui, será investigado o espectro de transmissão dos modos vibracionais dos NEMS e íon.

## 5.2 Modelo

A interação de um único íon e um NEMS, baseado no experimento proposto em [3], é dado na figura (5.1).

A energia de interação entre o íon e o NEMS é dada por:

$$V_c = k \frac{V_o C_o}{d + X(t) - x(t)}, \quad (5.1)$$

onde  $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ , com  $\epsilon_0$  sendo a permissividade do espaço livre,  $C_o$  é a capacitância da porta,  $V_o$  a voltagem bias,  $d$  a separação de equilíbrio do centro de massa do NEMS e o íon,  $x(X)$  a posição do íon (NEMS). Para pequenas oscilações, expandindo até segunda ordem, o termo de interação é dado por<sup>1</sup>:

$$V_c = -\chi X(t)x(t), \quad (5.2)$$

onde  $\chi = 2keV_oC_o/d^3$ .

Definindo  $X = (\hbar/2M\omega)^{1/2}(a + a^\dagger)$  (**NEMS**) e  $x = (\hbar/2m\nu)^{1/2}(b + b^\dagger)$  (**íon**), o Hamiltoniano do sistema pode ser expresso como:

$$H = \underbrace{\hbar\omega a^\dagger a}_{NEMS} + \underbrace{\hbar\nu b^\dagger b + \hbar\frac{\omega_a}{2}\sigma_z}_{Ion} - \hbar\kappa(a + a^\dagger)(b + b^\dagger) + H_e \quad (5.3)$$

onde  $\kappa = (mM\nu\omega)^{-1/2}keV_oC_o/d^3$ ,  $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ ,  $a$  e  $a^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação do NEMS,  $b, b^\dagger$  os dos GLV do íon,  $\kappa$  o acoplamento controlável entre os dois graus de liberdade vibracionais, e  $H_e$  descreve a interação de um laser externo com o íon. (i) *Com o campo elétrico do laser sendo propagante*, tem-se o campo elétrico:

$$E(x, t) = A(e^{i(k_l x - \omega_l t)} + e^{-i(k_l x - \omega_l t)}) = A(e^{i[\eta(b+b^\dagger) - \omega_l t]} + e^{-i[\eta(b+b^\dagger) - \omega_l t]}) \quad (5.4)$$

onde  $k_l$  e  $\omega_l$  são o vetor de onda e a frequência do laser, e  $\eta = k_l \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}$  o parâmetro de Lamb-Dicke. Considera-se a interação de dipolo elétrico, e passando para o quadro de interação, pode-se mostrar que para

<sup>1</sup>O termo de primeira ordem é negligenciado devido às rápidas oscilações.

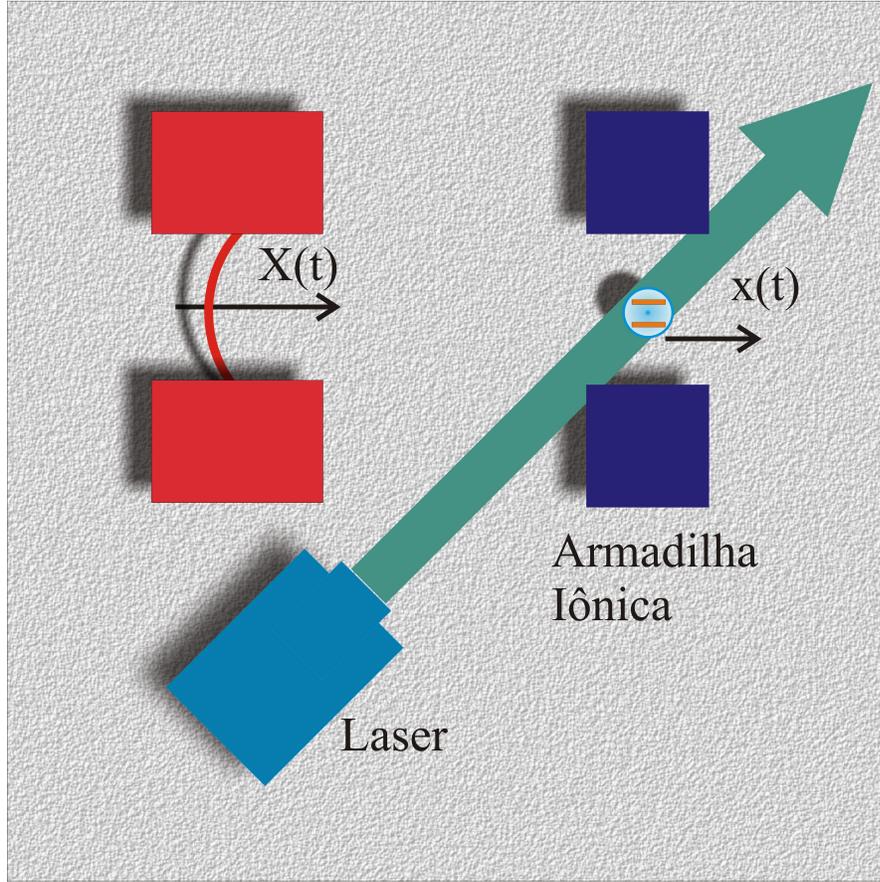


Figura 5.1: Modelo esquemático de experimento.

$\omega_l - \omega_a \ll \omega_l + \omega_a$  a aproximação de onda girante permite escrever:

$$H_e = \hbar\Omega[\sigma_+ e^{i(\eta(b+b^\dagger) - \omega_l t)} + \sigma_- e^{-i(\eta(b+b^\dagger) - \omega_l t)}].$$

No regime de *Lamb-Dicke* (LDL)<sup>2</sup>: supondo o íon localizado numa região bem menor que o comprimento de onda do laser:  $\eta = k_l \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} \ll 1$ , expressa-se a interação dipolar entre o íon e o campo como:

$$H_e = \hbar\Omega[\sigma_+ e^{-i\omega_l t} + i\eta\sigma_+(b + b^\dagger)e^{-i\omega_l t} + H.c.], \quad (5.5)$$

onde  $\Omega = ePA/\hbar$  é a frequência efetiva de transição de Rabi ( $P$  o elemento de matriz de dipolo).

Assim, o Hamiltoniano eq3 no regime Lamb-Dicke pode ser reescrito:

$$H = H_0 + H_{int} + H_e = H_0 + H_1, \quad (5.6)$$

<sup>2</sup>É possível, futuramente, estudar o regime fora do Lamb-Dicke.

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\frac{\omega_a}{2}\sigma_z, \quad (5.7)$$

$$H_{int} = -\hbar\kappa(a + a^\dagger)(b + b^\dagger), \quad (5.8)$$

$$H_e = \hbar\Omega[\sigma_+e^{-i\omega_1 t} + \sigma_-e^{i\omega_1 t}] + i\hbar g[\sigma_+(b + b^\dagger)e^{-i\omega_1 t} - \sigma_-(b + b^\dagger)e^{i\omega_1 t}]. \quad (5.9)$$

onde  $g = \eta\Omega$ .

Passando para a representação de interação, com  $U(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$ , tem-se o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) = U^\dagger(t)H_1U(t) = & -\hbar\kappa(abe^{-i(\omega+\nu)t} + ab^\dagger e^{-i(\omega-\nu)t} + a^\dagger be^{i(\omega-\nu)t} + a^\dagger b^\dagger e^{i(\omega+\nu)t}) + \\ & + \hbar\Omega[\sigma_+e^{-i(\omega_l-\omega_a)t} + \sigma_-e^{i(\omega_l-\omega_a)t}] + \\ & + i\hbar g[\sigma_+be^{i(\omega_a-\omega_l-\nu)t} + \sigma_+b^\dagger e^{i(\omega_a-\omega_l+\nu)t} - \sigma_-be^{-i(\omega_a-\omega_l+\nu)t} - \sigma_-b^\dagger e^{-i(\omega_a-\omega_l-\nu)t}]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Adotando a frequência do laser, de tal modo que  $\omega_l = \omega_a - \nu$ , de modo que na *aproximação de onda girante* (RWA) tem-se:

$$\mathcal{V}(t) = -\hbar\kappa(ab^\dagger + ba^\dagger) + \hbar\frac{g}{2}[\sigma_+b + \sigma_-b^\dagger]. \quad (5.11)$$

Voltando à representação de Shrödinger, temos<sup>3</sup>:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\frac{\omega_a}{2}\sigma_z - \hbar\kappa(ab^\dagger + ba^\dagger) + i\hbar g[\sigma_+be^{-i(\omega_a-\nu)t} - \sigma_-b^\dagger e^{i(\omega_a-\nu)t}], \quad (5.12)$$

constata-se que ainda há dependência temporal. E para desaparecer com essa dependência, passa-se para o referencial “rodado” com a frequência do laser via  $U_l(t) = e^{-i\omega_l \frac{\sigma_z}{2} t}$ . Assim, obtém-se:

$$H' = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\frac{\overbrace{(\omega_a - \omega_l)}^{\delta=\nu}}{2}\sigma_z - \hbar\kappa(ab^\dagger + ba^\dagger) + i\hbar g[\sigma_+b - \sigma_-b^\dagger]. \quad (5.13)$$

### 5.3 Simulação do Espectro de Transmissão dos Modos Vibracionais

Agora, para graficar o espectro de transmissão dos modos vibracionais do sistema, emprega-se o método de equação mestre [106]

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H', \rho] + \mu_{\sigma_-} \mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \frac{\mu_{\sigma_z}}{2} \mathcal{D}[\sigma_z]\rho + \sum_{j=a,b} \mu_j \mathcal{D}[j]\rho, \quad (5.14)$$

---

<sup>3</sup>Para o Hamiltoniano não depende do tempo.

onde  $\mathcal{D}[L] = (2L\rho L^\dagger - L^\dagger L\rho - \rho L^\dagger L)/2$ , descrevendo o efeito no banho no sistema, com  $\mu_{\sigma_-}$  ( $\mu_{\sigma_z}$ ) sendo a taxa de defasagem (relaxação) dos GLE no íon e o  $\mu_{\sigma_j}$  sendo as taxas de decaimento dos GLVs de ambos. O Hamiltoniano  $H'$  considerado é o da equação (5.13).

Fazendo a transformada de Fourier de  $\langle a^\dagger a \rangle(t) + \langle b^\dagger b \rangle(t)$ , tem-se o espectro de transmissão em função da frequência de bombeamento do sistema caracterizado na figura (5.2).

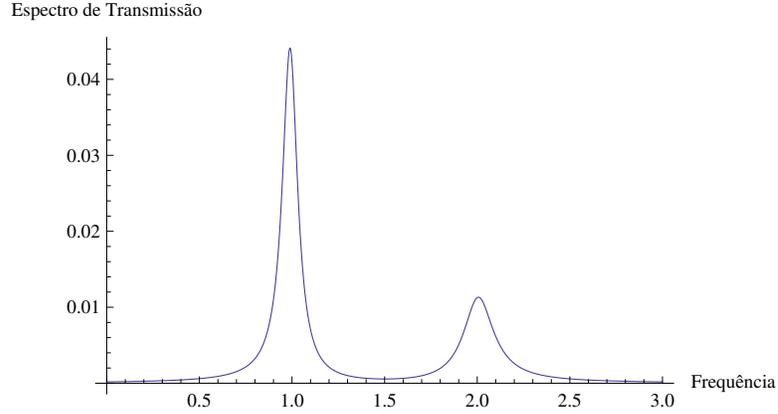


Figura 5.2: Gráfico da dinâmica de intensidade do espectro de transmissão dos modos vibracionais  $\langle a^\dagger a \rangle(\omega) + \langle b^\dagger b \rangle(\omega)$  em função da variação da frequência de bombeamento. Com parâmetros  $m = n = 3$ ,  $\kappa = g = 10^{-3}$ ,  $\omega = 2\nu = 2$ , todos os  $\mu_{\sigma_-} = \mu_{\sigma_z} = \mu_{\sigma_j} = 0.01$ .

Na figura (5.2), mostra o espectro do modo vibracional do sistema. O pico da esquerda é maior que o da direita devido ao estado inicial ser fundamental para o GLE do íon. Outro comportamento que era de se esperar, aconteceu: a separação de dois picos especulados nas referências [101] e [103], com os parâmetros utilizados neste trabalho, sendo proporcionais às grandezas do experimento similar citado na referência [3].

## 5.4 Sumário do Capítulo 5

Neste capítulo, foi formulado o Hamiltoniano de interação entre um NEMS e um íon e a partir disso foi simulado o espectro de transmissão dos modos vibracionais de ambos. Este trabalho está em fase de desenvolvimento, e o próximo passo, será de calcular os cruzamentos e anticruzamentos dos níveis de energia.

## Parte III

# Considerações Finais

# Conclusão

No **Capítulo 3** desta tese, investigou-se a possibilidade de acoplamento capacitivo diretamente entre duas TLRs e um NEMS. Aqui, a principal característica é que, ao tratar as três partes do sistema no regime quântico, é obtido na representação de interação um Hamiltoniano caracterizado como  $H_{int}^I = \hbar\theta b^\dagger b(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$ , na equação (3.27), ou seja, o operador número de fônon do NEMS está interagindo com os operadores de troca de fótons das TLRs, numa situação que temos ressonância entre as TLRs e rápida oscilação para o NEMS. A partir disto, duas simples aplicações são investigadas neste capítulo: (i) a primeira, não é considerado nenhum meio de dissipação nos dispositivos, e, com uma condição inicial de estado triplo coerentes diferentes de zero, pode gerar periodicamente emaranhamento em intervalos de tempo  $\theta t$  múltiplo de  $\pi$ . Esta aplicação fica aqui, concebida como um divisor de feixe condicionado ao número de fônons NEMS e este é utilizado para um sistema de geração de emaranhamento tripartite para um sistema de variáveis contínuas. Neste tipo de dispositivo, um divisor de feixe intensidade condicionado é inexistente para os campos ópticos que podem, em princípio, ser utilizados para fins de processamento de informação quântica; a outra aplicação (ii), o circuito pode ser considerado para a detecção QND do número médio de fônons da NEMS por correntes fotônicas para um das TLR. É mostrado que, dependendo das estatísticas de fônon do NEMS o estado atual em um dos TLRs irá fornecer um comportamento característico e identificável na corrente fotônica. Isto é muito importante para os regimes atuais de detecção, uma vez que ele é independente, em princípio, as frequências inerentes ao sistema.

O **Capítulo 4** surgiu de um interesse de investigação de medição relacionadas a um estado misto. Na situação real é um estado térmico, e a proposta de medição anterior citada não generalizava para satisfazer este caso, portanto surgiu este novo estudo. Particularmente, a detecção da temperatura correspondente a tal dispositivos minúsculos que é relevante para a caracterização física [111, 112] para utilização em outras

aplicações. No **Capítulo 4** foi proposto um mecanismo para medir o número médio de fônons de um NEMS através de um esquema de detecção pulsada não-demolidora. Uma vez que aqui os fônons do NEMS são distribuídos com as excitações térmicas, uma maneira direta para caracterizar a temperatura do dispositivo, bem como propriedades estatísticas é derivada. O esquema proposto para medir a temperatura do NEMS é experimentalmente possível com a tecnologia atual. A interação entre semicondutor NEMS [113, 114, 115, 116] e TLRs supercondutoras [117] já foi realizado [118]-[119][120]-[121] . Experiências com o método de medição via misturador de intensidade de quadratura também foram realizadas [122]. Portanto, esperamos que o esquema apresentado seja prontamente implementado.

Este trabalho representa o primeiro esforço em formulação e análise de óptica quântica em um circuito com acoplamento capacitivo entre duas TLRs mediadas pela vibração de um NEMS.

No **Capítulo 5** foi estudado uma interação entre um NEMS e um íon, podendo ser representado por uma interação qubit/supermodo, com isso é mostrado que é gerado uma separação de picos no espectro de transmissão. Este trabalho mostra a importância do modelo quando é considerado os graus de liberdades eletrônicos que até o momento apenas um trabalho na literatura tinha mencionado a importância para estudo de emaranhamento [123].

# Referências Bibliográficas

- [1] Schwab, K. C. and Roukes, M. L., Putting mechanics into quantum mechanics. *Physics Today* **58**, 36-42 (2005).
- [2] L. Tian and P. Zoller, *Phys Rev Lett* **93**, 266403 (2004).
- [3] W. K. Hensinger, D. W. Utami, H.-S. Goan, K. Schwab, C. Monroe, and G. J. Milburn, *Phys Rev A* **72**, 041405 (R) (2005).
- [4] D. W. Carr and H. G. Craighead. Fabrication of nanoelectromechanical systems in single crystal silicon using silicon on insulator substrates and electron beam lithography. *Journal of Vacuum Science and Technology B*, **15**, 2760 (1997).
- [5] Y. T. Yang, K. L. Ekinici, X. M. H. Huang, L. M. Schiavone, M. L. Roukes, C. A. Zorman, and M. Mehregany. Monocrystalline silicon carbide nanoelectromechanical systems. *Applied Physics Letters*, **78**, 162 (2001).
- [6] X. M. H. Huang, C. A. Zorman, M. Mehregany, and M. L. Roukes. Nanodevice motion at microwave frequencies. *Nature* **421**, 496 (2003).
- [7] A. N. Cleland, M. Pophristic, and I. Ferguson. Single-crystal aluminum nitride nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters* **79**, 2070 (2001).
- [8] L. Sekaric, D. W. Carr, S. Evoy, J. M. Parpia, and H. G. Craighead. Nanomechanical resonant structures in silicon nitride: fabrication, operation and dissipation issues. *Sensors and Actuators A Physical* **101**, 215 (2002).

- [9] T. F. Li, Y. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, J. S. Tsai, and H. Im. High-frequency metallic nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters* **92**, 043112 (2008).
- [10] A. B. Hutchinson, P. A. Truitt, K. C. Schwab, L. Sekaric, J. M. Parpia, H. G. Craighead, and J. E. Butler. Dissipation in nanocrystalline-diamond nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters* **84**, 972974 (2004).
- [11] M.D. LaHaye, J. Suh, P.M. Echternach, K.C. Schwab, M.L. Roukes, Nanomechanical measurements of a superconducting qubit, Roukes, *Nature* **459**, 960 (2009).
- [12] M. D. LaHaye, Olivier Buu and Benedetta Camarota and K. C. Schwab, Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator, *Science* **304**, 74 (2004).
- [13] X. Zhou, F. Hocke, A. Schliesser, A. Marx, H. Huebl, R. Gross and T. J. Kippenberg, Slowing, advancing and switching of microwave signals using circuit nanoelectromechanics, *Nature Physics* (2013).
- [14] Chan, J.; Alegre, T. P. Mayer; Safavi-Naeini, A. H.; Hill, J. T.; Krause, A.; Groblacher, S.; Aspelmeyer, M.; Painter, O.. Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature* **478**, 89 (2011).
- [15] Ekinici, K.L. and Roukes, M.L., Nanoelectromechanical systems. *Review of Scientific Instruments* **76**, 061101 (2005).
- [16] T. Rocheleau, T. Ndukum, C. Macklin, J.B. Hertzberg, A.A. Clerk, K.C. Schwab, Preparation and Detection of a Mechanical Resonator Near the Ground State of Motion, *Nature* **463**, 72 (2009).
- [17] K. E. Petersen. Silicon as a mechanical material. *Proceedings of the IEEE*, **70**, 420 (1982).
- [18] A. N. Cleland and R. M. Roukes, Noise processes in nanomechanical resonators, *Journal Applied Physics*, **92**, 2758 (2002).
- [19] A. N. Cleland and M. L. Roukes. Fabrication of high frequency nanometer scale mechanical resonators from bulk *Si* crystals. *Applied Physics Letters*, **69**, 2653 (1996).
- [20] N. E. Flowers-Jacobs, D. R. Schmidt, and K. W. Lehnert. Intrinsic noise properties of atomic point contact displacement detectors. *Physical Review Letters* **98**, 096804 (2007).

- [21] X. L. Feng, R. R. He, P. D. Yang, and M. L. Roukes. Very high frequency silicon nanowire electromechanical resonators. *Nano Letters* **7**, 1953 (2007).
- [22] I. Kozinsky, H. W. Ch. Postma, I. Bargatin, and M. L. Roukes. Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters* **88**, 253101 (2006).
- [23] S. S. Verbridge, D. Finkelstein Shapiro, H. G. Craighead, and J. M. Parpia. Macroscopic tuning of nanomechanics: Substrate bending for reversible control of frequency and quality factor of nanostring resonators. *Nano Letters* **7**, 1728 (2007).
- [24] B. Reulet, A. Yu. Kasumov, M. Kociak, R. Deblock, I. I. Khodos, Yu. B. Gorbatov, V. T. Volkov, C. Journet, and H. Bouchiat. Acoustoelectric effects in carbon nanotubes. *Physical Review Letters* **85**, 2829 (2000).
- [25] V. Sazonova, Y. Yaish, H. Ustnel, D. Roundy, T. A. Arias, and P. L. McEuen. A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature* **431**, 284 (2004).
- [26] B. Witkamp, M. Poot, and H. S. J. van der Zant. Bending-mode vibration of a suspended nanotube resonator. *Nano Letters*, **6**, 2904 (2006).
- [27] A. K. Huettel, G. A. Steele, B. Witkamp, M. Poot, L. P. Kouwenhoven, and H. S. J. van der Zant. Carbon nanotubes as ultra-high quality factor mechanical resonators. *Nano Letters* **9**, 2547 (2009).
- [28] J. S. Bunch, A. M. van der Zande, S. S. Verbridge, I. W. Frank, D. M. Tanenbaum, J. M. Parpia, H. G. Craighead, and P. L. McEuen. Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*, **315**, 490 (2007).
- [29] J. C. Meyer, M. Paillet, and S. Roth. Single-molecule torsional pendulum. *Science*, **309**, 1539 (2005).
- [30] D. S. Greywall, B. Yurke, P. A. Busch, A. N. Pargellis, and R. L. Willett. Evading amplifier noise in nonlinear oscillators. *Physical Review Letters* **72**, 2992 (1994).
- [31] D. W. Carr, S. Evoy, L. Sekaric, H. G. Craighead, and J. M. Parpia. Measurement of mechanical resonance and losses in nanometer scale silicon wires. *Applied Physics Letters* **75**, 920 (1999).
- [32] Q. P. Unterreithmeier, E. M. Weig, and J. P. Kotthaus. Universal transduction scheme for nanomechanical systems based on dielectric forces. *Nature*, **458**, 1001 (2009).

- [33] S. C. Masmanidis, R. B. Karabalin, I. De Vlaminck, G. Borghs, M. R. Freeman, and M. L. Roukes. Multifunctional nanomechanical systems via tunably coupled piezoelectric actuation. *Science* **317**, 780 (2007).
- [34] Roukes, M., Nanoelectromechanical systems face the future. *Physics World* **14**, 25 (2001).
- [35] G. J. Milburn and M. J. Woolley, An Introduction To Quantum Optomechanics, *Acta Physica Slovaca* **61**(5), 483 (2011).
- [36] J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates* (Taylor and Francis, Philadelphia, 1999).
- [37] Daniel F. Walls, and Gerard J. Milburn. *Quantum optics*, (Springer, 2008).
- [38] Gardiner, Crispin and Zoller, Peter. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, (Springer, 2004).
- [39] Steven M. Girvin, Superconducting Qubits and Circuits: Artificial Atoms Coupled to Microwave Photons, (*Lecture Notes*, 2011).
- [40] M. Devoret, *Quantum Fluctuations*, (Elsevier, Amsterdam, 1997).
- [41] LOUISELL, William Henry. *Quantum statistical properties of radiation*, (Wiley, 1973).
- [42] Olímpio Pereira de Sá Neto, Codificação de Bits Quânticos via Eletrodinâmica Quântica de Cavidades em Circuitos, (*Dissertação de Mestrado em Português, IFGW-UNICAMP*, 2009).
- [43] Walls, Daniel F., and G. Gerard J. Milburn. *Quantum optics*, (Springer, 2008).
- [44] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation. *Physical Review A* **69**, 062320 (2004).
- [45] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, (Wiley, New York, 2004).
- [46] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, R. M. Serra and M. H. Y. Moussa, Squeezing arbitrary cavity field states through their interaction with a single driven atom, *Physical Review A* **68**, 061801 (2003).
- [47] K. Moon and S. M. Girvin, Theory of Microwave Parametric Down-Conversion and Squeezing Using Circuit QED, *Physical Review Letters* **95**, 140504 (2005).

- [48] Marcos Cesar de Oliveira, Aspecto Dinâmico de Sistemas Quânticos Abertos (*Tese de Doutorado em Português, DF-UFSCAR*, 1999).
- [49] Xue Ming Henry Huang, Christian A. Zorman, Meharan Mehregany and Michael L. Roukes, Nanodevice Motion at Microwave Frequencies, *Nature* **421**, 496 (2003).
- [50] N.Bohr, *Discussions with Einstein on epistemological problems in atomic physics*, in *Albert Einstein Philosopher-Scientist* 1: 201 ed. P. Schilpp (New York: Harper & brothers, 1959).
- [51] Robert G. Knobel and Andrew N. Cleland, Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor, *Nature* **424**, 291 (2003).
- [52] L. F. Wei, Y. Liu, C. P. Sun, and F. Nori, Probing Tiny Motions of Nanomechanical Resonators: Classical or Quantum Mechanical?, *Physical Review Letters* **97**, 237201 (2006).
- [53] X. Zhou and A. Mizel, Nonlinear Coupling of Nanomechanical Resonators to Josephson Quantum Circuits, *Physical Review Letters* **97**, 267201 (2006).
- [54] G. J. Milburn, C.A. Holmes, L.M. Kettle and H.S. Goan, arXiv:cond-mat/0702512.
- [55] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).
- [56] M. C. de Oliveira, L. F. da Silva, and S. S. Mizrahi, Controlling quantum entanglement through photo-counts, *Physical Review A* **65** 062314 (2002).
- [57] M. P. da Silva, D. Bozyigit, A. Wallraff, and A. Blais, Schemes for the observation of photon correlation functions in circuit QED with linear detectors, *Physical Review A* **82**, 043804 (2010).
- [58] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, (Springer, Berlin, Heidelberg 1991).
- [59] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (Wiley, New York 1973).
- [60] A. A. Gangat, T. M. Stace and G. J. Milburn, Phonon number quantum jumps in an optomechanical system , *New Journal of Physics* **13**, 043024 (2011).
- [61] J. D. Thompson, B. M. Zwickl, A. M. Jayich, Florian Marquardt, S. M. Girvin and J. G. E. Harris, Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane, *Nature* **452**, 72 (2008).

- [62] Claude Cohen - Tannoudji, Bernard Diu and Franck Laloe, *Quantum Mechanics*, (Wiley - VCH, 1977).
- [63] D. F. Walls, M. J. Collet and G. J. Milburn, Analysis of a quantum measurement, *Physical Review D* **32**, 3208 (1985).
- [64] A. K. Ringsmuth and G. J. Milburn, arXiv:quant-ph/0703003.
- [65] Xiang-bin, Wang, Theorem for the beam-splitter entangle, *Physical Review A* **66**, 024303 (2002).
- [66] de Oliveira, M. C. and Munro, W. J., Nonclassicality and information exchange in deterministic entanglement formation, *Physics Letters A* **320**, 352 (2004).
- [67] F. Nicacio, K. Furuya and F. L. Semião, Motional Entanglement with Trapped Ions and a Nanomechanical Resonator, arXiv preprint arXiv:1212.0711 (2012).
- [68] Michael Roukes, Nanoelectromechanical systems face the future, *Physcs World* **14**, 148 (2001).
- [69] Niels Bohr, Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics, (University of Copenhagen, 1949).
- [70] Miles Blencowe, Quantum electromechanical systems, *Physics Report* **395**, 159 (2004).
- [71] Keith C. Schwab and Michael L. Roukes, Putting mechanics into quantum mechanics, *Physics Today* **58**, 36 (2005).
- [72] M. D. LaHaye, Olivier Buu and Benedetta Camarota and K. C. Schwab, Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator, *Science* **304**, 74 (2004).
- [73] D. Vitali, P. Tombesi, M. J. Woolley, A. C. Doherty and G. J. Milburn, Entangling a nanomechanical resonator and a superconducting microwave cavity, *Physical Review A* **76**, 042336 (2007).
- [74] K. C. Schwab, M. P. Blencowe, M. L. Roukes, A. N. Cleland, S. M. Girvin, G. J. Milburn, and K. L. Ekinci, Comment on Evidence for Quantized Displacement in Macroscopic Nanomechanical Oscillators, *Physical Review Letters* **95**, 248901 (2005).
- [75] O. P. de Sá Neto, M. C. de Oliveira, F. Nicácio and G. J. Milburn, (2013).
- [76] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe and F. Nori, Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits, *Review Modern Physics* **84**, 1 (2012).

- [77] B. Yurke, L. R. Corruccini, P. G. Kaminsky, L. W. Rupp, A. D. Smith, A. H. Silver, R. W. Simon, E. A. Whittaker, Observation of parametric amplification and deamplification in a Josephson parametric amplifier, *Physical Review A* **39**, 2519 (1989).
- [78] B. Yurke, P. G. Kaminsky, R. E. Miller, E. A. Whittaker, A. D. Smith, A. H. Silver, R. W. Simon, Observation of 4.2-K equilibrium-noise squeezing via a Josephson-parametric amplifier, *Physical Review Letters* **60**, 764 (1988).
- [79] C. M. Wilson, Tim Duty, Martin Sandberg, Frederik Persson, Vitaly Shumeiko and Per Delsing, Photon generation in an electromagnetic cavity with a time-dependent boundary, *Physical Review Letters* **105**, 233907 (2010).
- [80] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt and R. J. Schoelkopf, Introduction to quantum noise, measurement, and amplification, *Reviews of Modern Physics* **82**, 1155 (2010).
- [81] J. Q. You and Franco Nori, You, JQ and Nori, Franco, *Nature* **474**, 589 (2011).
- [82] A. M. Zagoskin, E. Ilichev, M. W. McCutcheon, Jeff F. Young, and Franco Nori, Controlled generation of squeezed states of microwave radiation in a superconducting resonant circuit, *Physical Review Letters* **101**, 253602 (2008).
- [83] Marcus P. da Silva, Deniz Bozyigit, Andreas Wallraff, and Alexandre Blais, Schemes for the observation of photon correlation functions in circuit QED with linear detector, *Physical review A* **82** 043804 (2010).
- [84] Luigi Frunzio, Andreas Wallraff, David Schuster, Johannes Majer and Robert Schoelkopf, Fabrication and characterization of superconducting circuit QED devices for quantum computation, *Applied Superconductivity*, *IEEE Transactions on* **15**, 860 (2005).
- [85] R. J. Schoelkopf and S. M. Girvin, Wiring up quantum systems, *Nature* **471**, 664 (2008).
- [86] M. H. Devoret, S. M. Girvin and R. Schoelkopf, Circuit-QED: How strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be?, *Annalen der Physik* **16**, 767 (2007).
- [87] C. A. Regal, J. D. Teufel and K. M. Lehnert, Measuring nanomechanical motion with a microwave cavity interferometer, *Nature Physics* **4**, 55 (2008).

- [88] X. Zhou, F. Hocke, A. Schliesser, A. Marx, H. Huebl, R. Gross and T. J. Kippenberg, Slowing, advancing and switching of microwave signals using circuit nanoelectromechanics, *Nature Physics* (2013).
- [89] K. L. Ekinc, Electromechanical transducers at the nanoscale: actuation and sensing of motion in nanoelectromechanical systems, *Small* **1**, 786 (2005).
- [90] Michael Roukes, Plenty of room, indeed, *Scientific American* **285**, 42 (2001).
- [91] M. J. Woolley, A. C. Doherty, G. J. Milburn and K. C. Schwab, Nanomechanical squeezing with detection via a microwave cavity, *Physical Review A* **78**, 062303 (2008).
- [92] J. D. Teufel, T. Donner, M. A. Castellanos-Beltran, J. W. Harlow and K. W. Lehnert, Nanomechanical motion measured with an imprecision below that at the standard quantum limit, *Nature nanotechnology* **4**, 820 (2009).
- [93] D. Bozyigit, C. Lang, L. Steffen, J. M. Fink, C. Eichler, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, S. Filipp, M. P. da Silva, et al., Antibunching of microwave-frequency photons observed in correlation measurements using linear detectors, *Nature Physics* **7**, 154 (2010).
- [94] D. F. Walls, M. J. Collet and G. J. Milburn, Analysis of a quantum measurement, *Physical Review D* **32**, 3208 (1985).
- [95] Glauber, Roy J, The quantum theory of optical coherence, *Physical Review* **130**, 2529 (1963).
- [96] Chang, Hasok, *Inventing Temperature: Measurement and Scientific Progress* (Oxford Studies in Philosophy of Science, 2007).
- [97] Thomas M. Stace, Quantum limits of thermometry, *Physical Review A* **82**, 011611 (2010).
- [98] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, (Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).
- [99] C. Eichler, D. Bozyigit, C. Lang, L. Steffen, J. Fink and A. Wallraff, Experimental State Tomography of Itinerant Single Microwave Photons, *Physical Review Letters* **106**, 220503 (2011).
- [100] S. Haroche and J. M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*, (Oxford University Press, Oxford, England, 2006).

- [101] A. Majumdar, A. Rundquist, M. Bajcsy, and Jelena Vukovi, Cavity Quantum Electrodynamics with a Single Quantum Dot Coupled to a Photonic Molecule, *Physical Review B* **86**, 045315 (2012).
- [102] Stig Stenholm, *Rev Mod Phys* **58**, 699 (1986).
- [103] D. Kielpinski, D. Kafri, M. J. Woolley, G. J. Milburn, and J. M. Taylor, Quantum Interface between an Electrical Circuit and a Single Atom, *Physical Review Letters* **108**, 130504 (2012).
- [104] K. R. Brown, C. Ospelkaus, Y. Colombe, A. C. Wilson, D. Leibfried and D. J. Wineland, *Nature* **471**, 196 (2011).
- [105] G J Milburn “*Quantum control of nanomechanical and optomechanical systems*”, lecture notes, Unicamp, Campinas, (2011).
- [106] C. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum Noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, Springer, Berlin, Heidelberg (2004).
- [107] M. O. Scully and M. S. Zubairy , *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [108] H. Baker, *Proc Lond Math Soc*, **1** 347360 (1902).
- [109] F. Hausdorff, Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, *Ber Verh Saechs Akad Wiss Leipzig* **58**, 19 (1906).
- [110] J. Campbell, *Proc Lond Math Soc* **28**, 381 (1897).
- [111] Chang, Hasok, *Inventing Temperature: Measurement and Scientific Progress* (Oxford Studies in Philosophy of Science, 2007).
- [112] Thomas M. Stace, Quantum limits of thermometry, *Physical Review A* **82**, 011611 (2010).
- [113] Michael Roukes, Nanoelectromechanical systems face the future, *Physcs World* **14**, 148 (2001).
- [114] Miles Blencowe, Quantum electromechanical systems, *Physics Report* **395**, 159 (2004).
- [115] Keith C. Schwab and Michael L. Roukes, Putting mechanics into quantum mechanics, *Physics Today* **58**, 36 (2005).

- [116] M. D. LaHaye, Olivier Buu and Benedetta Camarota and K. C. Schwab, Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator, *Science* **304**, 74 (2004).
- [117] Luigi Frunzio, Andreas Wallraff, David Schuster, Johannes Majer and Robert Schoelkopf, Fabrication and characterization of superconducting circuit QED devices for quantum computation, *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on* **15**, 860 (2005).
- [118] C. A. Regal, J. D. Teufel and K. M. Lehnert, Measuring nanomechanical motion with a microwave cavity interferometer, *Nature Physics* **4**, 55 (2008).
- [119] X. Zhou, F. Hocke, A. Schliesser, A. Marx, H. Huebl, R. Gross and T. J. Kippenberg, Slowing, advancing and switching of microwave signals using circuit nanoelectromechanics, *Nature Physics* (2013).
- [120] M. J. Woolley, A. C. Doherty, G. J. Milburn and K. C. Schwab, Nanomechanical squeezing with detection via a microwave cavity, *Physical Review A* **78**, 062303 (2008).
- [121] J. D. Teufel, T. Donner, M. A. Castellanos-Beltran, J. W. Harlow and K. W. Lehnert, Nanomechanical motion measured with an imprecision below that at the standard quantum limit, *Nature nanotechnology* **4**, 820 (2009).
- [122] D. Bozyigit, C. Lang, L. Steffen, J. M. Fink, C. Eichler, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, S. Filipp, M. P. da Silva, et al., Antibunching of microwave-frequency photons observed in correlation measurements using linear detectors, *Nature Physics* **7**, 154 (2010).
- [123] D. Kielpinski, D. Kafri, M. J. Woolley, G. J. Milburn, and J. M. Taylor, Quantum Interface between an Electrical Circuit and a Single Atom, *Physical Review Letters* **108**, 130504 (2012).

## Parte IV

# Apêndice

# A

## Emaranhamento de Estados Puros

Aqui, é considerado um sistema composto com três subsistema (1, 2 e  $b$ ), onde o estado global  $\rho$  é puro para qualquer instante de  $t$ , isto implica que

$$|E(\rho_{12}) - E(\rho_b)| \leq E(\rho) \leq E(\rho_{12}) + E(\rho_b), \quad (\text{A-1})$$

onde  $E$  é a entropia total, logo

$$E(\rho_{12}) = E(\rho_b), \quad (\text{A-2})$$

sendo  $E(\rho_i)$  a entropia que informa o emaranhamento entre o subsistema  $i$  com o resto do sistema, onde  $\rho_i = Tr \{\rho\}$ . Voltando para a informação que se tem do emaranhamento de um subsistema com os demais, é expressa como

$$\begin{aligned} E(\rho_i) &= -Tr \{\rho_i \ln [\rho_i]\} \\ &= -Tr \{\rho_i \ln [1 - (1 - \rho_i)]\}, \text{ tal que } (1 - \rho_i) < 1, \\ &= Tr \{\rho_i (1 - \rho_i) + \dots\}, \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

logo a entropia de informação pode ser aproximada para entropia linear (devido a conservação da norma  $Tr \{\rho_i\} = 1$

$$E(\rho_i) = 1 - Tr \{\rho_i^2\}. \quad (\text{A-4})$$

A entropia linear permite a verificação da pureza de um estado através da condição de idempotência do operador densidade, ou seja, para um subsistema não emaranhado com demais  $E(\rho_i) = 0$ , parcialmente emaranhado  $0 < E(\rho_i) < 1$  e totalmente emaranhado  $S(\rho_i) = 1$ .

# B

## Medição Quântica Não Demolidora

De forma geral, a medida de um dado observável em um sistema quântico perturba o estado de tal forma que a variância do observável é maior em uma medida futura. Isso é facilmente ilustrado pelo mais simples dos sistemas, a partícula livre unidimensional de massa  $m$  e operador de momento  $p$ .

Pode-se fazer inicialmente uma medida tão precisa na posição  $x$ , o operador posição canonicamente conjugado a  $p$ . Entretanto, devido ao princípio de incerteza,  $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x)$ , e isso perturba  $p$ . No entanto, em uma evolução seguinte a essa medida,  $p$  induz uma variação de  $x$ :  $\dot{x} = [x, p^2/2m]/i\hbar$ , resultando em  $x(t) = x(0) + p(0)t/m$ .

Assim sendo, usando a relação de incerteza que calcular a incerteza em  $x$  para medidas futuras  $(\Delta x(t))^2 \geq (\Delta x(0))^2 + (\hbar/2m(0))^2 t^2$ , para o estado inicial, a posição é descorrelacionada do momento. Ficando claro que a medida futura de  $x$  tem sua variância aumentada. Pode-se pensar que o aparato de medida atuou de forma a perturbar aleatoriamente o observável sendo medido.

Por outro lado, uma medida inicial precisa de  $p$ , apesar de perturbar  $x$ , não altera sua evolução seguinte, uma vez que  $[p, p^2/2m] = 0$ . Isto é, medidas futuras de  $p$  podem ter a mesma precisão da primeira.

A medida quântica não-demolidora se caracteriza como a medida de observáveis que, como  $p$ , podem ser medidos seguidamente com precisão arbitrária. Em uma medida QND, o observável  $\mathcal{O}_S$  do sistema  $S$  é inferido através da medida de um observável  $\mathcal{O}_A$  de um sistema auxiliar  $A$ , sem perturbar a evolução seguinte de  $\mathcal{O}_S$ ; após um número finito de medidas sucessivas o estado final de  $S$  que permanece é um auto-estado de  $\mathcal{O}_S$ .

Formalmente, se temos o hamiltoniano total:

$$H = H_S + H_A + H_I, \quad (\text{B-1})$$

onde  $H_S$ ,  $H_A$  e  $H_I$  são respectivamente os Hamiltonianos do sistema de interesse, do sistema auxiliar e o de interação, a medida QND de  $\mathcal{O}_S$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

1.  $\frac{\partial H_I}{\partial \mathcal{O}_S} \neq 0$  e  $[\mathcal{O}_A, H_I] \neq 0$ :

Essa condição se deve ao fato de querer medir  $\mathcal{O}_S$  através de  $\mathcal{O}_A$ . Isso implica que o Hamiltoniano de interação deva ser uma função de  $\mathcal{O}_S$  e que  $\mathcal{O}_A$  varie com a interação conforme o sistema. Essa condição, na verdade, deve ser observada por qualquer tipo de medida pois simplesmente exige que o sistema ponteiro varie em função dos autovetores do observável sendo medido.

2.  $[\mathcal{O}_S, H_I] = 0$ :

Mais ainda, o observável  $\mathcal{O}_S$  não deve ser alterado durante o processo de medida.

3.  $\frac{\partial H_S}{\partial \mathcal{O}_S^c} \neq 0$

Aqui tem a principal característica da medida QND: após a interação de  $S$  com  $A$  o observável conjugado  $\mathcal{O}_S^c$  é alterado de forma incontrolável. Para que esse aumento da variância não afete o observável sendo medido, tem que exigir que o Hamiltoniano do sistema não dependa do observável conjugado. Assim uma forma mais restritiva é exigir que  $[H_S, \mathcal{O}_S] = 0$ , pois assim o observável sendo medido é uma constante de movimento.

## Medição Pré e Pós Seleccionada

Nesta seção vou descrever um ambiente composto com dois subsistemas,  $a$  e  $b$ , com operador densidade

$$\rho_{ab} = \sum_n P(n) |n\rangle_b \langle n| \otimes |\psi_n\rangle_a \langle \psi_n|, \quad (\text{B-2})$$

feita uma medida, a probabilidade é

$$\rho_{ab}^{(m)} = \frac{\prod_m \rho_{ab} \prod_m}{Tr_{ab} \{ \prod_m \rho_{ab} \prod_m \}}, \quad (\text{B-3})$$

onde  $\prod_m = |m\rangle_b \langle m|$ . Logo, o estado conjunto é  $\rho_{ap}^{(m)} = |m\rangle_b \langle m| \otimes |\psi_m\rangle_a \langle \psi_m|$ , condicionado a medida

$$\rho_a^{(m)} = Tr_b \{ \rho_{ab}^{(m)} \} = |\psi_m\rangle_a \langle \psi_m|. \quad (\text{B-4})$$

Portanto, medindo a quadratura de fase uma vez, pode-se obter

$$\langle Y \rangle^m = \langle \psi_m | Y | \psi_m \rangle. \quad (\text{B-5})$$

O estado pré-selecionado é

$$\rho_a = \sum_m P_m \rho_a^{(m)} = \sum_m P_m |\psi_m\rangle_a \langle \psi_m|, \quad (\text{B-6})$$

e a média de todas as medidas da quadratura de fase resulta em

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \sum_m P_m \langle \psi_m | Y | \psi_m \rangle \\ &= \sum_m P_m \langle Y \rangle^m. \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$