

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Estudo da dinâmica e emaranhamento
no modelo Raman acoplado

Gustavo Lázero Deçordi

Orientador: Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da
Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Física.

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação de Mestrado defendida pelo aluno
Gustavo Lázero Deçordi e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de Abril de 2011



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
VALKÍRIA SUCCI VICENTE – CRB8/5398 - BIBLIOTECA DO IFGW
UNICAMP**

D358e Deçordi, Gustavo Lázero, 1986-
Estudo da dinâmica e emaranhamento no modelo
Raman acoplado / Gustavo Lázero Deçordi. -- Campinas,
SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Antonio Vidiella Barranco.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.

1. Ótica quântica. 2. Modelo Raman acoplado.
3. Emaranhamento quântico. I. Vidiella Barranco, Antonio,
1963- II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Física “Gleb Wataghin”. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Study of the dynamics and entanglement in the Raman coupled model

Palavras-chave em inglês:

Quantum optics

Raman coupled model

Quantum entanglement

Área de Concentração: Física Atômica e Molecular

Titulação: Mestre em Física

Banca Examinadora:

Antonio Vidiella Barranco [Orientador]

Celso Jorge Villas-Bôas

José Antonio Roversi

Data da Defesa: 29-04-2011

Programa de Pós-Graduação em: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **GUSTAVO LÁZERO DEÇORDI - RA 088967** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 29 / 04 / 2011.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco - Orientador do Candidato
DEQ/IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas – DF/UFSCar



Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, que com sua benevolência me ajudou em toda minha vida. Aos meus pais, Pedro Deçordi e Célia Nilva Lázero Deçordi que sempre estiveram presentes nos momentos decisivos da minha caminhada. À minha querida irmã, coluna de firmeza e caráter desde que cheguei em Campinas. Incluirei uma pequena lista de amigos, aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram não só para esse trabalho como também para meu amadurecimento pessoal e profissional: Vinicius Tadeu Santana, Douglas Delgado de Souza, José Carlos Donegá Filho, Luiz Fernando Souza Freitas, Julio César González Henao e Gustavo Marques Tavares. Ao Sr. Amaral Crepaldi Filho, eterno diretor da Escola Genaro Domarco. Aos meus avós Sebastiana de Oliveira Lázero e Hermando Lázero. Agradeço muito ao meu orientador, Antonio Vidiella Barranco, pela confiança em mim depositadas sobretudo nos momentos difíceis deste projeto. Aos colegas do Grupo de Óptica Quântica pelas inúmeras sugestões que contribuíram para o trabalho. Aos professores Celso Jorge Villas-Bôas e José Antonio Roversi por terem aceitado participar da banca e também pelas sugestões acrescentadas à versão final da dissertação. Ao pessoal da CPG pelos vários esclarecimentos a respeito do processo que conduziu à defesa. Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Ao meu vô Mando, que com seu silêncio ensinou-me o significado mais amplo de natureza: contemplação.

Resumo

Nesta dissertação estudamos um modelo da interação radiação-matéria, mais conhecido como modelo Raman acoplado, consistindo de um átomo de três níveis na configuração Λ (lambda) acoplado a dois modos do campo quantizado em regime de alta dessintonia átomo-campo. De início, apresentamos uma revisão dos assuntos que formam a base para o entendimento do trabalho.

A partir daí, deduzimos o Hamiltoniano efetivo do modelo através do método de transformação unitária mantendo os termos de segunda ordem nas constantes de acoplamento e eliminando o nível intermediário. Na sequência, comparamos a dinâmica atômica sob duas preparações distintas: na primeira delas consideramos os dois modos em estados puros (estados coerentes), enquanto que na segunda alteramos a preparação do modo 2, mudando o estado coerente para um estado de máxima entropia (estado térmico).

Finalizamos esta tese apresentando um estudo do emaranhamento na partição átomo-modo 1 sob influência do modo 2, considerado um subsistema externo. Adotando a Negatividade como principal medida de emaranhamento átomo-campo, verificamos em que circunstâncias do modelo (tempo, preparações iniciais) temos o máximo emaranhamento.

Abstract

In this work we study a model for the matter-radiation interaction, best known as Raman coupled model, which consists of an atom with three levels in the Λ (lambda) configuration, coupled to two modes of the quantized field in a high atom-field detuning regime. At the beginning, we present a review of the subjects that form the background for understanding the work.

After that, we deduce the Effective Hamiltonian of the model through the method of unitary transformation, keeping the terms of second order in the coupling constants and eliminating the intermediate level. In the sequence, we compare the atomic dynamics under two distinct preparations: in the first we consider the two modes as pure states (coherent states), while in the second we change the preparation in the mode 2, switching the coherent state to a state of maximum entropy (thermal state).

We finish this dissertation presenting a study of the entanglement in the partition atom-mode 1 under the influence of the mode 2, considered as an external subsystem. Adopting the Negativity as the main measure of the atom-field entanglement, we verify in wich circumstances of the model (time, initial preparations) we achieve the maximum entanglement.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais da Óptica Quântica	4
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético	4
2.2 Estados do Campo	9
2.3 Interação radiação-matéria	14
2.4 Emaranhamento	18
3 O Modelo Raman acoplado	21
3.1 O Hamiltoniano Efetivo	22
3.2 Autovalores e Autovetores	24
3.3 A dinâmica	26
3.4 Estudo numérico da inversão atômica	29
3.5 Inversão atômica na preparação Fock-Coerente	35
4 Emaranhamento átomo-campo	38
4.1 Estudo Gráfico das funções de Negatividade e Entropia linear	42
5 Conclusões	45

Lista de Figuras

2.1	A estatística de fótons do estado coerente para $\bar{n} = 25$	11
2.2	A distribuição de fótons típica do campo térmico quando temos um número médio de 5 excitações.	14
3.1	Esquema do modelo Raman acoplado. O parâmetro de dessintonia (<i>detuning</i>) é colocado em termos das diferenças de energia dos níveis atômicos fundamentais ($ 1\rangle, 2\rangle$, $E_2 > E_1$) e excitado $ 3\rangle$ na forma $\hbar\Delta = (E_3 - E_1) - \hbar\omega_1$ ou $\hbar\Delta = (E_3 - E_2) - \hbar\omega_2$. Aqui, ω_1 e ω_2 são as frequências dos modos 1 e 2, também conhecidos como <i>Pump</i> e <i>Stokes</i> , respectivamente.	21
3.2	Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 0.01$, $r = 1.023$ e $c = 100$ para os modos do campo nos estados coerente-coerente e coerente-térmico.	32
3.3	Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com (a) $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 1.5$, $r = 1.023$ e $c = 100$ na preparação coerente-coerente, (b) $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 1.5$, $r = 1.023$ e $c = 100$ na preparação coerente-térmico.	33
3.4	Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $\bar{n}_1 = 10.6$, $\bar{n}_2 = 10.1$, $r = 1.012$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados (a) coerente-coerente e (b) coerente-térmico.	33
3.5	Preparação coerente-coerente.	34
3.6	Preparação coerente-térmico.	35
3.7	Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $N = 5$, $\bar{n} = 5$, $r = 1.023$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados de Fock e coerente.	36
3.8	Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $N = 40$, $\bar{n} = 40$, $r = 1.023$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados de Fock e coerente.	37
4.1	Negatividade (a) e Entropia linear (b) pelo tempo escalonado $t' = g_1 t$ para $N = 5$ e $\bar{n} = 5$	42
4.2	Negatividade em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ para $N = 40$ e $\bar{n} = 40$	43

- 4.3 (a) Negatividade em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ e do número médio de fótons coerentes \bar{n} , quando fixamos o número de fótons no estado de Fock em $N = 40$; (b) uma seção transversal da superfície mostrando a Negatividade em função do número médio de fótons coerentes \bar{n} , quando fixamos o tempo escalonado em $t' = 3000$ e o número de fótons do modo 1 em $N = 40$ 43

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Quântica é notavelmente uma das teorias mais bem sucedidas da Física. Todas as suas predições teóricas foram confirmadas nos laboratórios, muitas delas gerando inúmeras aplicações que se tornaram a base para os avanços tecnológicos do século passado e hoje fazem parte da vida cotidiana, como o efeito transistor e a magnetoresistência gigante, entre outros. Suas implicações tiveram profundo impacto na Ciência, transformando radicalmente os princípios de uma Física até então baseada em leis estritamente determinísticas e causais.

Uma das conquistas mais notáveis da teoria quântica foi o desenvolvimento de modelos que explicavam a interação radiação-matéria, levando em conta a quantização do campo eletromagnético. Nesse contexto o primeiro modelo a tratar quanticamente átomo e campo foi proposto em 1963 por Jaynes e Cummings (JC)¹[14], o qual descreve a interação próxima da ressonância entre um átomo de dois níveis e um único modo do campo de radiação. O estudo do modelo sob a aproximação da onda girante, permitindo que o mesmo seja analiticamente solúvel, revelou uma série de importantes resultados como os fenômenos de colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi da inversão atômica [15, 16], a produção de estados não-clássicos do campo eletromagnético, antiagrupamento de fótons [17] e a compressão do ruído quântico [18, 19, 20].

O intenso desenvolvimento experimental alcançado nas últimas décadas no campo da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades bem como o domínio de técnicas de controle em escala atômica [21] cada vez mais precisas têm ampliado os horizontes dessa disciplina, estimulando pesquisas além do cenário proposto inicialmente por JC. Desde então surgiram extensões do modelo incluindo versões multi-fótons [22, 23, 24], acoplamentos dependentes das intensidades [25, 26, 27, 28], dissipação [29, 30], átomos de muitos níveis [31] e campos multi-modais [32, 33], etc.

¹sigla para Jaynes-Cummings.

Nesta dissertação iremos analisar um modelo do tipo JC governado por transições a dois fótons em um campo bi-modal. Originalmente proposto por Gerry e Eberly [6] no início dos anos 90, o modelo Raman acoplado descreve a interação entre um átomo de três níveis na configuração Λ e dois modos do campo eletromagnético em regime altamente dispersivo, isto é, quando a dessintonia entre o nível intermediário e os modos do campo é bastante alta, de tal forma que as probabilidades de ocupação desse nível se tornem muito baixas e ele passe a atuar como virtual nas transições atômicas. Nesse caso, podemos eliminá-lo adiabaticamente, obtendo um átomo a dois níveis efetivos. Quando da proposta original, é interessante observar que no procedimento de eliminação adiabática [6] os autores do trabalho desprezaram os termos responsáveis pelos “Stark shifts” dos níveis de energia, obtendo um Hamiltoniano de interação simplificado cuja dinâmica atômica, em certas condições, se assemelha ao modelo JC. Entretanto, estudos posteriores apontaram que os termos de “Stark shifts” tem importância crucial no modelo em questão e devem ser incluídos em qualquer análise que considere processos multi-fótons [9]. A não inclusão dos termos leva a comportamentos bastante distintos para as mesmas condições iniciais do sistema [11].

Anos depois, Alexanian e Bose [7], empregando uma transformação unitária para o Hamiltoniano, apresentaram um método equivalente à eliminação adiabática. A abordagem, que consistiu em truncar a expansão do Hamiltoniano em segunda ordem nas constantes de acoplamento, permitiu obter um Hamiltoniano efetivo descrevendo o mesmo sistema a dois níveis, porém com os termos de “Stark shifts” presentes na expressão. A solução exata utilizando o mesmo método da transformação unitária veio com Y. Wu [8], nesse trabalho a expansão dos operadores é calculada de forma exata e o Hamiltoniano daí obtido é bastante geral, válido para quaisquer dessintonias e sem restrições nas constantes de acoplamento.

Motivados pelos trabalhos [7, 9], nossa abordagem do Hamiltoniano efetivo segue de perto o método da transformação unitária no regime perturbativo, matematicamente mais simples que a expansão exata e suficiente para investigar o cenário em que o nível intermediário está dessintonizado dos modos. De posse do Hamiltoniano efetivo, conseguimos resultados analíticos envolvendo o operador densidade preparando o átomo no estado fundamental e os modos do campo em estados genéricos.

Os modos do campo foram inicialmente preparados considerando estados puros e de mistura estatística com distribuições muito distintas. Na primeira delas assumimos os dois modos em estados puros, ambos em estados coerentes enquanto que na outra preparação modificamos o estado do segundo modo, introduzindo um estado de máxima entropia, o estado térmico. A mudança de estado no segundo modo foi feita com o propósito de entender a influência do modo 2 na dinâmica. Nesse sentido, analisamos o efeito da troca de papéis dos modos do campo na dinâmica da inversão atômica. Ao final do capítulo 3 investigamos uma

outra preparação, envolvendo o modo 1 em estado de Fock e o modo 2 em estado coerente.

No capítulo 4 estudamos o sistema tripartite composto pelo átomo e os dois modos do campo, considerando o emaranhamento na partição átomo-modo 1 na perspectiva em que o modo 2 é descrito como um subsistema externo. O objetivo desta análise consistiu em determinar o quão relevante é a influência do subsistema externo (modo 2) no emaranhamento átomo-modo 1. Para esse estudo, o átomo foi preparado no estado fundamental e os dois modos em estado de Fock e estado coerente, respectivamente. Em certo sentido, existe uma correspondência entre o nosso estudo e o método empregado quando se estuda a teoria de reservatórios. Podemos fazer uma analogia, tratando o subsistema de interesse (átomo + modo 1) como análogos a um sistema acoplado ao reservatório (ambiente), nesse caso modelado em estado coerente.

A estrutura da dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos os conceitos fundamentais necessários ao entendimento do trabalho que se segue. A quantização do campo eletromagnético é vista com alguns detalhes juntamente com os estados do campo mais utilizados na dissertação. Deduzimos o Hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings na aproximação de onda girante e calculamos o vetor de estado quando o átomo interage de modo ressonante com o campo em uma superposição genérica na base de Fock. Terminamos o capítulo apresentando o critério de Peres-Horodecki [12, 13] de estados não separáveis e a definição da Negatividade, a principal medida de emaranhamento utilizada nesse trabalho.

No capítulo 3 introduzimos o modelo Raman acoplado e obtemos a sua dinâmica atômica nas preparações do campo nos estados coerente-coerente e coerente-térmico. O capítulo 4 trata do emaranhamento entre átomo e modo 1 sob a influência do segundo modo, descrito como um subsistema externo. No capítulo 5 apresentamos as principais conclusões do estudo e finalizamos o texto com um breve Apêndice, que contém o procedimento de eliminação adiabática levando em conta os termos de “Stark shifts”.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais da Óptica Quântica

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Apresentamos a quantização do campo eletromagnético de um ponto de vista bastante simples e auto-suficiente para os propósitos desta dissertação. Tomaremos como base as equações de Maxwell para os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ no vácuo e seguiremos de perto o tratamento empregado nas referências [1] e [2].

Em unidades SI, elas são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \qquad (2.2)$$

onde ρ e \vec{j} representam as densidades de carga e corrente, respectivamente. Os campos podem ser expressos em termos do potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ e do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ como

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad (2.3)$$

os quais satisfazem automaticamente as equações homogêneas (2.1).

As equações de Maxwell são invariantes se os potenciais forem transformados de acordo com as chamadas transformações de calibre:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \qquad (2.4)$$

onde $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ é qualquer função da posição \vec{r} e do tempo t . É sempre possível escolher

o potencial vetor \vec{A} de modo que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (calibre de Coulomb). Na ausência de cargas e correntes, é então possível fazer $\phi = 0$, e substituir as equações de Maxwell pelas equações (2.4) mais a equação de ondas para o potencial vetor:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

Agora, expandimos o potencial vetor em uma superposição de ondas planas na forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}, s} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \left[A_{\vec{k}s}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - A_{\vec{k}s}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right], \quad (2.6)$$

onde $A_{\vec{k}s}$ é a amplitude complexa do campo e $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}s}$ é um vetor real de polarização. A soma é realizada sobre todos os valores das componentes do vetor de onda, com $k_j = 2\pi n_j/L$, $n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = x, y, z$, e também sobre as duas polarizações independentes, representadas por $s = 1, 2$. A condição de calibre $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ juntamente com a relação de ortonormalidade dos versores de polarização $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s'} = \delta_{ss'}$ implica na chamada condição de transversalidade

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} = 0, \quad (2.7)$$

ou seja, o vetor de polarização deve ser ortogonal à direção de propagação. É conveniente então definir um conjunto de versores que, junto com \vec{k} , são escolhidos para formarem um sistema¹ orientado segundo a regra da mão direita de modo que

$$\vec{\varepsilon}_{\vec{k}1} \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}2} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \hat{k}. \quad (2.8)$$

Da equação (2.5) e da condição de calibre $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ é possível obter uma equação para as amplitudes complexas $\vec{A}_{\vec{k}s}$ dos modos análoga àquela de um oscilador harmônico unidimensional

$$\frac{d^2 \vec{A}_{\vec{k}s}}{dt^2} + \omega_{\vec{k}s}^2 \vec{A}_{\vec{k}s} = 0, \quad (2.9)$$

cuja solução mais simples $\vec{A}_{\vec{k}s}(t) = \vec{A}_{\vec{k}s} e^{-i\omega_k t}$ oscila harmonicamente com frequência dada por $\omega_k = ck$. Esse último resultado juntamente com as equações (2.3) e (2.6) nos permite expressar os campos elétrico e magnético em termos dessas amplitudes

¹também conhecido como dextrógiro.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{k}, s} \omega_k \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \left[A_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + A_{\vec{k}s}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right], \quad (2.10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}, s} \omega_k (\hat{k} \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s}) \left[A_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + A_{\vec{k}s}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (2.11)$$

Classicamente, a energia total armazenada no campo eletromagnético é dada por

$$H_{cl} = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}) dV, \quad (2.12)$$

onde a integração espacial se estende sobre o volume dentro do qual o campo está contido. Poderia ser todo o espaço, como no caso do campo livre, ou um volume finito dentro do qual o campo estaria confinado, em particular uma cavidade de alto fator de qualidade, representando a situação típica da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades.² No que segue imaginamos que o espaço livre possa ser modelado como uma cavidade cúbica de lado L com paredes perfeitamente refletoras e dimensões muito maiores que os comprimentos de onda do campo. Assumindo condições periódicas de contorno nas faces do cubo obtemos

$$\int_V e^{\pm i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} dV = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} V, \quad (2.13)$$

que combinado com as identidades vetoriais

$$(\vec{k} \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s}) \cdot (\vec{k}' \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}'s'}) = \delta_{ss'}, \quad (2.14)$$

$$(\vec{k} \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s}) \cdot (-\vec{k}' \times \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}'s'}) = -\vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \cdot \vec{\varepsilon}_{-\vec{k}'s'}, \quad (2.15)$$

resulta na expressão mais simples para a energia do campo

$$H_{cl} = 2\varepsilon_0 V \sum_{\vec{k}s} \omega_k^2 A_{\vec{k}s} A_{\vec{k}s}^* \quad (2.16)$$

em termos do módulo ao quadrado das amplitudes complexas.

Agora, com o propósito de quantizar o campo, introduzimos as variáveis canônicas $p_{\vec{k}s}$ e $q_{\vec{k}s}$ dadas pelas seguintes relações

$$A_{\vec{k}s} = \frac{1}{2\omega_k (\varepsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\vec{k}s} + i p_{\vec{k}s}], \quad (2.17)$$

$$A_{\vec{k}s}^* = \frac{1}{2\omega_k (\varepsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\vec{k}s} - i p_{\vec{k}s}], \quad (2.18)$$

²do inglês Cavity Quantum Electrodynamics, sigla CQED.

de modo que podemos reescrever (2.16) em termos dessas quantidades

$$H_{cl} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}s} (p_{\vec{k}s}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k}s}^2). \quad (2.19)$$

Vemos de (2.19) que a energia do campo eletromagnético pode ser colocada na forma da Hamiltoniana de um conjunto de osciladores harmônicos independentes com $p_{\vec{k}s}$ e $q_{\vec{k}s}$ desempenhando o papel de posição e momento conjugado, respectivamente. Cada um deles tem massa unitária e frequência ω_k .

A descrição quântica do campo eletromagnético exige que as variáveis canônicas de posição $q_{\vec{k}s}$ e momento $p_{\vec{k}s}$ expressas através das equações (2.17) e (2.18) sejam transformadas nos operadores hermiteanos $\hat{q}_{\vec{k}s}$ e $\hat{p}_{\vec{k}s}$ obedecendo as regras de comutação

$$[\hat{q}_{\vec{k}s}, \hat{p}_{\vec{k}'s'}] = i\hbar\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{ss'}, \quad [\hat{q}_{\vec{k}s}, \hat{q}_{\vec{k}'s'}] = [\hat{p}_{\vec{k}s}, \hat{p}_{\vec{k}'s'}] = 0. \quad (2.20)$$

Seguiremos agora o formalismo usualmente adotado para o oscilador harmônico, introduzindo para cada oscilador, os operadores de aniquilação e criação, definidos por

$$\hat{a}_{\vec{k}s} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\vec{k}s} + i\hat{p}_{\vec{k}s}], \quad (2.21)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\vec{k}s} - i\hat{p}_{\vec{k}s}], \quad (2.22)$$

os quais satisfazem as relações de comutação bosônicas

$$[\hat{a}_{\vec{k}s}, \hat{a}_{\vec{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{ss'}, \quad [\hat{a}_{\vec{k}s}, \hat{a}_{\vec{k}'s'}] = [\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'s'}^\dagger] = 0. \quad (2.23)$$

Além disso, H_{cl} dado por (2.19) se torna um operador hermiteano e pode ser colocado, após algumas manipulações algébricas, na forma padrão

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.24)$$

$$= \sum_{\vec{k}s} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.25)$$

onde $\hat{n}_{\vec{k}s} = \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s}$ é o operador número para o modo $\vec{k}s$. Uma vez que todos esses modos são independentes um do outro, podemos construir uma base combinando os autoestados de cada um deles na forma de produto

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_l\rangle \otimes \dots \equiv |\{n_j\}\rangle. \quad (2.26)$$

Essa base, que é naturalmente autoestado de \hat{H}

$$\hat{H} |\{n_j\}\rangle = E |\{n_j\}\rangle, \quad (2.27)$$

com autovalor

$$E = \sum_j \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right), \quad (2.28)$$

é conhecida na literatura como estados de Fock ou estados de número de fótons e constituem um análogo do oscilador harmônico.³

Os estados de número têm diversas propriedades que nada mais são do que extensões de propriedades do oscilador harmônico para o caso multidimensional. Aqui vale a relação de ortonormalidade

$$\langle n_1, n_2, \dots | n'_1, n'_2, \dots \rangle = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \quad (2.29)$$

e também as atuações dos operadores de aniquilação e criação

$$\begin{aligned} \hat{a}_j |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle, \\ \hat{a}_j^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

O estado estacionário de menor energia, conhecido como estado de vácuo, é especificado pelo ket

$$|\{0\}\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 0_j, \dots\rangle, \quad (2.31)$$

a partir do qual todos os estados de número podem ser gerados de acordo com a expressão

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle. \quad (2.32)$$

Na transição clássico-quântico, os c-numbers $A_{\vec{k}s}$ são trocados por operadores relacionados por equações do tipo (compare (2.17) e (2.21) por exemplo)

$$\hat{A}_{\vec{k}s} = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\vec{k}s} \quad (2.33)$$

e então o potencial vetor quantizado adquire a forma

³nessas equações fizemos $\hat{n}_{\vec{k}s} \equiv \hat{n}_j$ para simplificar a notação.

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \left[\hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (2.34)$$

O operador campo elétrico fica sendo

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = - \sum_{\vec{k}s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s} \left[\hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right], \quad (2.35)$$

enquanto que o campo magnético é representado pelo operador de campo

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}s} (\hat{k} \times \vec{\varepsilon}_{\vec{k}s}) \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (2.36)$$

2.2 Estados do Campo

Estados Coerentes

Agora introduzimos uma representação extremamente útil para lidar com os problemas do campo de radiação: os estados coerentes. Originalmente propostos por E. Schrödinger [3] na descrição do oscilador harmônico, foram redescobertos mais tarde por R. J. Glauber [4] em um contexto diferente e aplicados à Óptica Quântica.

Estes estados podem ser definidos como autoestados do operador de aniquilação \hat{a} , o que é expresso através da equação

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.37)$$

onde o autovalor α é em geral complexo. E mais, não há condições de contorno que forcem o espectro de \hat{a} a ser discreto, nesse caso α pode assumir qualquer valor complexo. Desde que os estados de número formam um conjunto completo podemos expandir $|\alpha\rangle$ de acordo com

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.38)$$

Atuando com \hat{a} em cada membro da expansão, a eq. (2.38) se torna

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.39)$$

Igualando os coeficientes de $|n\rangle$ temos

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1}, \quad (2.40)$$

ou

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 \quad (2.41)$$

e então

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.42)$$

O coeficiente C_0 é determinado pela condição de normalização $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ que, junto com (3.52) leva a

$$|C_0| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (2.43)$$

Isso ainda deixa a fase φ de $C_0 = |C_0|e^{i\varphi}$ indeterminada. Entretanto, na definição dos estados coerentes φ é escolhido como sendo zero por conveniência. Então, com essa escolha de fase o estado coerente normalizado fica

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.44)$$

Considerando o valor esperado do operador de campo elétrico para um modo polarizado na direção x

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = - \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{a} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right], \quad (2.45)$$

obtemos

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = - \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\alpha e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \alpha^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right]. \quad (2.46)$$

Escrevendo α na forma polar $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ resulta em

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = -2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta), \quad (2.47)$$

cuja estrutura é muito semelhante a de um campo clássico. Também é possível mostrar que a flutuação do campo é idêntica às flutuações do vácuo quântico, o que certamente é algo notável. De fato, os estados coerentes são os estados mais clássicos dentre os estados

quânticos da luz porque não somente dão a forma correta dos valores esperados, como também apresentam as mesmas flutuações que o vácuo.

Da eq. (2.47) é aparente que $|\alpha|$ está relacionado á amplitude do campo. O valor médio do operador de número de fótons $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.48)$$

assim $|\alpha|^2$ é identificado como o número médio de excitações do campo. Para o cálculo das flutuações do número de fótons temos de calcular

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\ &= \bar{n}^2 + \bar{n} \end{aligned} \quad (2.49)$$

e então $\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\bar{n}}$ que é característico de uma distribuição poissoniana. De fato, para uma medida do número de fótons do campo, a probabilidade de encontrar o oscilador com energia⁴ $n\hbar\omega$ ou de detectar n fótons é dada por

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle n | \alpha \rangle|^2 \\ &= e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

que é uma distribuição de Poisson centrada em \bar{n} .

Na Figura (2.1) representamos graficamente a distribuição para um caso típico de $\bar{n} = 25$ fótons.

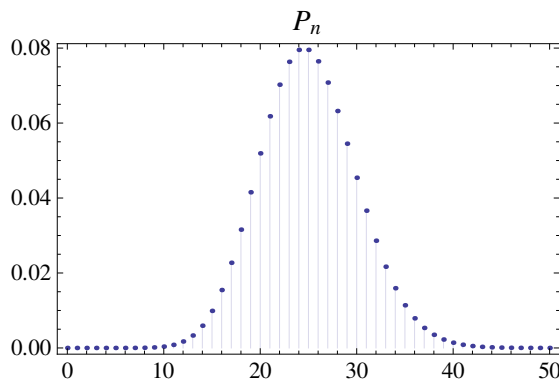


Figura 2.1: A estatística de fótons do estado coerente para $\bar{n} = 25$.

⁴a menos da energia de ponto zero.

Estado Térmico

Como é bem sabido, a origem da teoria quântica está relacionada à descoberta de Planck da lei de radiação que agora leva seu nome. Esta lei descreve o espectro de emissão de um objeto ideal chamado de corpo negro, modelado como uma cavidade acoplada a um campo de radiação multimodal em equilíbrio térmico no seu interior. No que segue trataremos apenas de um modo do campo, porque geralmente os modelos de interação radiação-matéria se baseiam no acoplamento entre um átomo de poucos níveis e alguns modos de uma cavidade. A descrição de um modo do campo em equilíbrio térmico à temperatura T é feita em termos de um ensemble canônico cujo operador densidade é dado por

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)]}, \quad (2.51)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, \hat{H} é o Hamiltoniano livre do campo $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ e

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{H}/k_B T) | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) \\ &\equiv Z \end{aligned}$$

é definido como a função de partição do sistema. Como $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, a função de partição adquire a forma de uma soma geométrica de razão $\exp(-\hbar\omega/k_B T) < 1$, o que leva a

$$Z = \frac{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)}. \quad (2.52)$$

Nesse caso, reescrevemos o operador densidade na representação dos estados de Fock

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |n'\rangle \langle n' | \hat{\rho} | n \rangle \langle n | \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|, \end{aligned} \quad (2.53)$$

identificando $P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{Z}$ como a probabilidade de ocupação dos n -ésimo autoestado de energia. O número médio de fótons do campo térmico é dado por

$$\begin{aligned}\bar{n} &= Tr(\hat{n}\hat{\rho}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\ &= \frac{\exp(-E_n/2k_B T)}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-n\hbar\omega/k_B T).\end{aligned}\tag{2.54}$$

Fazendo a substituição $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} &= -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}\end{aligned}\tag{2.55}$$

e então

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}.\tag{2.56}$$

Essa última equação nos possibilita expressar o operador densidade do campo em termos do número médio de excitações da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} |n\rangle \langle n|\tag{2.57}$$

e a probabilidade de encontrar n fótons no campo como sendo

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}.\tag{2.58}$$

Na figura (2.2) representamos o gráfico de P_n versus n para um valor de \bar{n} . Está claro que o número de fótons mais provável é o vácuo, P_n decrescendo monotonicamente com n .

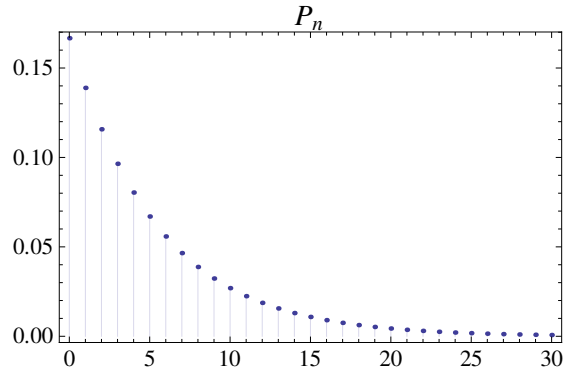


Figura 2.2: A distribuição de fótons típica do campo térmico quando temos um número médio de 5 excitações.

2.3 Interação radiação-matéria

O modelo de Jaynes-Cummings

Originalmente proposto por E. T. Jaynes e F. W. Cummings [14], o modelo emprega a quantização do campo eletromagnético para descrever a interação entre um átomo de dois níveis e um único modo do campo. Esse modelo, exatamente solúvel na aproximação de onda-girante, previu alguns fenômenos sem análogo na teoria semi-clássica correspondente, denominados de colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi, constituindo uma evidência direta para a discreteza das excitações do campo [5].

Consideramos um átomo, com níveis $|e\rangle$ (excitado) e $|g\rangle$ (fundamental) no centro da cavidade ($\vec{r} = 0$), interagindo com um modo do campo ⁵

$$\hat{\vec{E}} = -E_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \vec{\epsilon}, \quad (2.59)$$

onde $E_0 = (\hbar\omega/2\varepsilon_0V)^{1/2}$ é a amplitude do campo

No regime em que o comprimento de onda da radiação incidente é muito maior que as dimensões atômicas ($\vec{k}\cdot\vec{r} \ll 1$), podemos empregar a aproximação de dipolo e escrever o Hamiltoniano de interação na forma

$$H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (2.60)$$

⁵Esta é a equação do campo elétrico 2.35 na representação de Schrödinger, quando temos apenas um modo.

com o momento de dipolo $\vec{d} = -e\vec{r}$. Levando em conta o campo quantizado temos

$$\begin{aligned}\hat{H}_{int} &= -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}} \\ &= E_0 \hat{d} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{2.61}$$

onde $\hat{d} = \hat{\vec{d}} \cdot \vec{\epsilon}$. Podemos escrever o operador \hat{d} na representação de estados atômicos na forma

$$\begin{aligned}\hat{d} &= d |g\rangle \langle e| + d^* |e\rangle \langle g| \\ &= d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-),\end{aligned}\tag{2.62}$$

uma vez que apenas os elementos fora da diagonal contribuem, os demais são nulos por paridade. Aqui fizemos $\langle e|\hat{d}|g\rangle = d$, considerado um número real. Assim, o Hamiltoniano de interação fica

$$\hat{H}_{int} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger),\tag{2.63}$$

com os operadores de transição atômica $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|$ e a constante de acoplamento átomo-campo

$$g = \frac{E_0 d}{\hbar}.\tag{2.64}$$

O Hamiltoniano do átomo escrito em termos dos operadores de ocupação é dado por

$$\hat{H}_A = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g| = E_e \sigma_{ee} + E_g \sigma_{gg},\tag{2.65}$$

o qual pode ser reescrito na forma

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar \omega_a (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g),\tag{2.66}$$

através da identidade $\hat{1} = \sigma_{ee} + \sigma_{gg}$ e da diferença de energia $E_e - E_g = \hbar \omega_a$ que acopla os níveis, onde ω_a representa a frequência de transição correspondente. O Hamiltoniano do campo livre, a menos da energia do vácuo, fica

$$\hat{H}_F = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}\tag{2.67}$$

e o Hamiltoniano total,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{int} \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{2.68}$$

introduzindo o operador de inversão $\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}$. Agora, com o propósito de justificar o termo aproximação de onda girante passamos para a representação de interação, na qual \hat{H}_{int} é transformado em

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(I)} &= e^{+i\hat{H}_0t/\hbar} \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0t/\hbar} \\ &= \hbar g \left(e^{i(\omega-\omega_a)t} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + e^{-i(\omega-\omega_a)t} \hat{a} \hat{\sigma}_+ + e^{i(\omega+\omega_a)t} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+ + e^{-i(\omega+\omega_a)t} \hat{a} \hat{\sigma}_- \right),\end{aligned}\quad (2.69)$$

onde usamos o teorema de Baker–Campbell–Hausdorff na expansão.

No limite ressonante ($\omega \approx \omega_a$) os dois primeiros termos oscilam muito lentamente em comparação aos dois últimos de frequência mais alta ($\omega + \omega_a$), de modo que em média os últimos termos não contribuem para a dinâmica do sistema e possam ser desprezados. Assim, obtemos o Hamiltoniano total do modelo

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-). \quad (2.70)$$

A solução do Hamiltoniano de JC será obtida através do método de “Estados vestidos”, também utilizado no próximo capítulo.

Escolhemos uma base desacoplada envolvendo os estados que acoplam todas as transições possíveis $|e; n\rangle \rightarrow |g; n+1\rangle$. A partir de uma base ordenada $\{|e; n\rangle, |g; n+1\rangle\}$ podemos representar o Hamiltoniano na forma matricial como

$$\hat{H} \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hbar \omega_a + n \hbar \omega & \hbar g \sqrt{n+1} \\ \hbar g \sqrt{n+1} & -\frac{1}{2} \hbar \omega_a + (n+1) \hbar \omega \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

resultando nas auto-energias

$$E_{\pm}(\Delta) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \pm \hbar \frac{\Omega(\Delta)}{2}, \quad (2.72)$$

com

$$\Omega(\Delta) = [\Delta^2 + 4g^2(n+1)]^{1/2} \quad (\Delta = \omega_a - \omega) \quad (2.73)$$

sendo a frequência de Rabi e o parâmetro de dessintonia átomo-campo. Os autoestados associados são combinações lineares da forma

$$|+, n\rangle = -\sin \theta_n |g, n+1\rangle + \cos \theta_n |e; n\rangle, \quad (2.74)$$

$$|-, n\rangle = +\cos \theta_n |g, n+1\rangle + \sin \theta_n |e; n\rangle$$

e os coeficientes são encontrados pela normalização $\cos^2 \theta_n + \sin^2 \theta_n = 1$

$$\begin{aligned}\sin \theta_n &= \frac{2g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\Omega - \Delta)^2 + 4g^2(n+1)}}, \\ \cos \theta_n &= \frac{\Omega - \Delta}{\sqrt{(\Omega - \Delta)^2 + 4g^2(n+1)}}.\end{aligned}\tag{2.75}$$

Agora deduzimos o vetor de estado para o modelo na situação em que átomo e campo estão em ressonância ($\omega_a \approx \omega$), isto é quando $\Delta \approx 0$. Para isso, supomos o átomo preparado no estado excitado $|e\rangle$ e o campo em uma superposição genérica qualquer, caracterizada pelos coeficientes c_n na base de Fock. Assim, podemos escrever o estado inicial do sistema composto átomo-campo como

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |e; n\rangle.\tag{2.76}$$

Quando tomamos $\Delta \approx 0$, as equações (2.74) se reduzem a

$$\begin{aligned}|+, n\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|e; n\rangle - |g, n+1\rangle), \\ |-, n\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|e; n\rangle + |g, n+1\rangle),\end{aligned}\tag{2.77}$$

pois nesse caso os coeficientes associados às combinações lineares têm mesmo peso, então $\cos \theta_n = \sin \theta_n = \sqrt{2}/2$. O passo seguinte é expressar o vetor de estado inicial, dado por (2.76), em termos dos autoestados do Hamiltoniano. Utilizando as (2.77) juntamente com (2.76) temos

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (|+, n\rangle + |-, n\rangle).\tag{2.78}$$

A aplicação do operador de evolução temporal no estado dado por (2.78) leva ao vetor de estado evoluído no tempo

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(e^{-i\frac{E_+ t}{\hbar}} |+, n\rangle + e^{-i\frac{E_- t}{\hbar}} |-, n\rangle \right),\tag{2.79}$$

o qual adquire a seguinte expressão quando colocado em termos da base desacoplada $\{|e; n\rangle, |g; n+1\rangle\}$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\left(e^{-i\frac{E_+ t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_- t}{\hbar}} \right) |e; n\rangle + \left(e^{-i\frac{E_- t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_+ t}{\hbar}} \right) |g; n+1\rangle \right].\tag{2.80}$$

Após um pouco de álgebra pode-se mostrar que o estado composto do sistema átomo-campo evolui da maneira

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \left[\cos(\sqrt{n+1}gt) |e; n\rangle + i \sin(\sqrt{n+1}gt) |g; n+1\rangle \right], \quad (2.81)$$

onde usamos as expressões das autoenergias (2.72) com dessintonia nula ($\Delta = 0$) para chegar a esse resultado.

2.4 Emaranhamento

Nesta seção apresentamos uma breve introdução ao tema do emaranhamento e às medidas usadas posteriormente no trabalho. O emaranhamento é certamente uma das características mais intrigantes da Mecânica Quântica. Suas promissoras aplicações nos campos da informação e computação quânticas geraram uma variedade de trabalhos direcionados não apenas a entender a natureza das correlações como também de buscar meios simples de quantificar esse importante recurso.

Emaranhamento bipartite

Um sistema bipartite é composto por dois subsistemas físicos distintos. Quando tratamos de sistemas compostos, rotulados por A e B , o princípio de superposição permite descrever o estado global puro mais geral através de uma combinação linear de todos os pares distintos de vetores das bases de cada um dos espaços associados na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n\rangle_A \otimes |m\rangle_B. \quad (2.82)$$

Acontece que apenas uma classe restrita de estados do tipo 2.82 pode ser fatorada em partes exclusivas de um sistema e outro, ou seja, como

$$|\psi\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle, \quad (2.83)$$

nesse caso dizemos que o estado $|\psi\rangle$ é fatorável, caso contrário dizemos que está emaranhado.

Uma ferramenta mais útil que o vetor de estado para tratar o emaranhamento, e que possui a vantagem de também lidar com estados de mistura estatística, é o operador densidade do sistema. Estamos em condições de definir a separabilidade de um estado com base no operador densidade. Um estado, composto pelos sistemas A e B é dito separável quando não

puder ser escrito como uma soma de estados produtos

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)}, \quad p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (2.84)$$

cada um deles com probabilidade real p_i de ocorrência, caso contrário, dizemos que está emaranhado.

Medidas de emaranhamento

Entropia linear

Uma medida bastante empregada para quantificar o emaranhamento em sistemas globais puros devido à sua praticidade é a entropia linear. Quando levamos em conta que estados puros dos operadores reduzidos são idempotentes, isto é,

$$(\rho^{(A)})^2 = \rho^{(A)}, \quad (2.85)$$

então podemos associar o desvio da idempotência a uma medida de emaranhamento do vetor de estado. Assim, a entropia linear do subsistema A é dada por

$$\zeta_A = 1 - \text{Tr} (\rho^{(A)})^2. \quad (2.86)$$

Se $\rho^{(A)}$ é puro, então a idempotência é satisfeita e o traço correspondente é igual a 1, logo a entropia se anula. Na situação em que não vale a idempotência, $0 \leq \text{Tr} (\rho^{(A)})^2 < 1$ e assim $0 < \zeta_A \leq 1$.

Negatividade

A. Peres [12] introduziu um critério de detecção de emaranhamento baseado no cálculo de autovalores da transposta parcial. Esse algoritmo, conhecido na literatura como critério de Peres-Horodecki, é obtido pela transposição parcial dos caracteres de um dos subsistemas

$$\rho = \sum \rho_{ij,\mu\nu} |i\rangle \langle j| \otimes |\mu\rangle \langle \nu| \implies \rho^{TB} = \sum \rho_{ij,\mu\nu} |i\rangle \langle j| \otimes |\nu\rangle \langle \mu|, \quad (2.87)$$

e caso a matriz ρ^{TB} tenha ao menos um autovalor negativo, podemos afirmar que o estado ρ está emaranhado.

A definição da Negatividade, empregando o mesmo critério, mede o quanto um determi-

nado estado falha em ser separável ou está longe da separabilidade na forma

$$\mathcal{N} = \sum_i |\lambda_i^-|, \quad (2.88)$$

definida como a soma em módulo dos autovalores negativos.

Capítulo 3

O Modelo Raman acoplado

No início dos anos 90, Gerry e Eberly [6] introduziram um modelo composto por um átomo de três níveis na configuração Λ acoplado a dois modos do campo eletromagnético quantizado, como mostrado na figura (3.1). Assumindo que a interação entre o nível excitado e os modos do campo se dá em regime de alta dessintonia, o nível excitado está muito fora de ressonância com os outros dois níveis e pode ser eliminado adiabaticamente, resultando em um modelo de dois níveis efetivos, no qual o terceiro atua apenas como nível virtual nas transições. O modelo Raman acoplado a dois modos do campo, assim batizado por seus idealizadores, foi amplamente utilizado nos mais diversos contextos, como na geração de estados não-clássicos da luz [9], mostrando a existência dos fenômenos de colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi e até mesmo na implementação de operações lógicas em computação quântica [10].

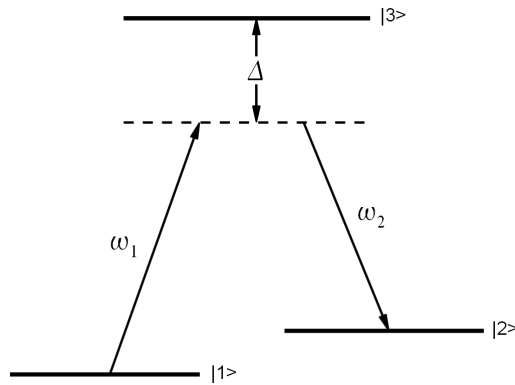


Figura 3.1: Esquema do modelo Raman acoplado. O parâmetro de dessintonia (*detuning*) é colocado em termos das diferenças de energia dos níveis atômicos fundamentais ($|1\rangle, |2\rangle$, $E_2 > E_1$) e excitado $|3\rangle$ na forma $\hbar\Delta = (E_3 - E_1) - \hbar\omega_1$ ou $\hbar\Delta = (E_3 - E_2) - \hbar\omega_2$. Aqui, ω_1 e ω_2 são as frequências dos modos 1 e 2, também conhecidos como *Pump* e *Stokes*, respectivamente.

Posteriormente, M. Alexanian e S. Bose [7] propuseram uma transformação unitária para a dinâmica, e através de um cálculo perturbativo em segunda ordem nas constantes de acoplamento encontraram um Hamiltoniano efetivo de dois níveis. Uma diferença fundamental entre as abordagens dos dois trabalhos é que o método adotado por Alexanian manteve os termos de Stark Shifts no Hamiltoniano do sistema, enquanto que durante a eliminação adiabática Gerry e Eberly desprezaram esses termos para simplificar as equações de movimento resultantes. Estudos posteriores [9, 11] mostraram que os termos de Stark Shifts não só desempenham um papel importante na dinâmica do sistema, levando a evoluções completamente diferentes, como também há evidências experimentais que corroboram esse fato.

Anos depois, partindo da mesma transformação, Y. Wu [8] deduziu o Hamiltoniano exato, válido para quaisquer dessintonias e sem restrições nas constantes de acoplamento ou nas intensidades dos modos do campo.

Neste trabalho estamos interessados em explorar o cenário no qual o nível excitado está bem fora de ressonância com os outros; de modo que a abordagem da transformação unitária seguida em [7] é suficiente para os nossos propósitos.

3.1 O Hamiltoniano Efetivo

Apresentamos o Hamiltoniano que governa a evolução do sistema considerando basicamente o procedimento de quantização utilizado no modelo de JC na aproximação de onda-girante. O Hamiltoniano total pode ser escrito como a soma de dois termos principais: H_0 ou energia livre, que contém operadores de número atômicos $\sigma_{ii} = |i\rangle\langle i|$ e dos modos do campo $N_j = a_j^\dagger a_j$, $j = 1, 2$; e o Hamiltoniano de interação H_I responsável pelas transições atômicas.

Assim temos

$$H = H_0 + H_I, \quad (3.1)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 E_i \sigma_{ii} + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2, \quad (3.2)$$

$$H_I = \hbar g_1 (a_1 \sigma_{31} + a_1^\dagger \sigma_{13}) + \hbar g_2 (a_2 \sigma_{32} + a_2^\dagger \sigma_{23}), \quad (3.3)$$

onde g_1 e g_2 são as constantes de acoplamento átomo-campo nas transições $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, respectivamente.

Agora deduzimos o Hamiltoniano efetivo através da transformação unitária proposta na referência [7]

$$U = \exp(S), \quad (3.4)$$

a forma explícita de S sendo dada por

$$S = \alpha \left(a_1 \sigma_{31} - a_1^\dagger \sigma_{13} \right) + \beta \left(a_2 \sigma_{32} - a_2^\dagger \sigma_{23} \right) \quad (3.5)$$

e os coeficientes α, β escolhidos de acordo com os termos que serão truncados na expansão.

Como estamos interessados em estudar a dinâmica no regime em que os modos do campo estão altamente dessintonizados do nível 3, mantemos apenas os termos em segunda ordem nos parâmetros $g_{1(2)}/\Delta$, considerados pequenos o suficiente para que a aproximação seja válida. Formalmente, um operador genérico pode ser transformado mediante o uso do teorema de Baker–Campbell–Hausdorff aplicado à expansão. Isso é feito da seguinte forma

$$X' = e^S X e^{-S} = X + [S, X] + \frac{1}{2!} [S, [S, X]] + \dots \quad (3.6)$$

Podemos reescrever o primeiro termo da eq. (3.2) como

$$\sum_{i=1}^3 E_i \sigma_{ii} = \frac{1}{2} (E_1 + E_2 + E_3) + \frac{1}{2} (2E_2 - E_1 - E_3) (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{1}{3} (E_2 + E_1 - 2E_3) (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \quad (3.7)$$

e então aplicar o cálculo perturbativo aos operadores $(\sigma_{22} - \sigma_{11})$ e $(\sigma_{33} - \sigma_{11})$ resultando em

$$\begin{aligned} (\sigma_{22} - \sigma_{11})' &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \beta \left(a_2 \sigma_{32} + a_2^\dagger \sigma_{23} \right) - \alpha \left(a_1 \sigma_{31} + a_1^\dagger \sigma_{13} \right) + \\ &+ (\beta^2 - \alpha^2) \sigma_{33} + \alpha^2 a_1^\dagger a_1 (\sigma_{11} - \sigma_{33}) + \beta^2 a_2^\dagger a_2 (\sigma_{33} - \sigma_{22}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{33} - \sigma_{11})' &= (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - \beta \left(a_2 \sigma_{32} + a_2^\dagger \sigma_{23} \right) - 2\alpha \left(a_1 \sigma_{31} + a_1^\dagger \sigma_{13} \right) + \\ &- (\beta^2 + 2\alpha^2) \sigma_{33} - 2\alpha^2 a_1^\dagger a_1 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - \beta^2 a_2^\dagger a_2 (\sigma_{33} - \sigma_{22}) + \\ &+ \frac{3}{2} \alpha \beta \left(a_1 a_2^\dagger \sigma_{21} + a_1^\dagger a_2 \sigma_{12} \right). \end{aligned}$$

Os operadores de aniquilação se transformam de acordo com

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 + \alpha \sigma_{13} + \frac{\alpha^2 a_1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - \frac{\alpha \beta}{2} a_2 \sigma_{12}, \\ a_2' &= a_2 + \beta \sigma_{23} + \frac{\beta^2 a_2}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \frac{\alpha \beta}{2} a_1 \sigma_{21}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

enquanto que os operadores de transição atômica são levados em

$$\begin{aligned}\sigma'_{13} &= \sigma_{13} + \alpha a_1 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - \beta a_2 \sigma_{12}, \\ \sigma'_{23} &= \sigma_{23} + \beta a_2 (\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \alpha a_1 \sigma_{21}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Substituindo as eq. (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.1) temos o Hamiltoniano Efetivo

$$\begin{aligned}H' &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 \\ &\quad - \hbar \frac{g_1^2}{\Delta} \sigma_{11} a_1^\dagger a_1 - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta} \sigma_{22} a_2^\dagger a_2 + \\ &\quad - \hbar \frac{g_1 g_2}{\Delta} \left(a_1^\dagger a_2 \sigma_{12} + a_2^\dagger a_1 \sigma_{21} \right),\end{aligned}\tag{3.11}$$

dada a escolha dos parâmetros $\alpha = g_1/\Delta$ e $\beta = g_2/\Delta$ para descartar os termos lineares nos operadores de campo. Apesar de não ser necessário, fizemos $\sigma_{33} = 0$ na dedução por conveniência, desde que σ_{33} é uma constante de movimento e não contribui nas transições dos níveis $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$.

Note que este procedimento mantém os “Stark shifts” (segunda linha) e também apresenta o termo da terceira linha idêntico ao Hamiltoniano efetivo deduzido na referência [6], exceto por um fator 2.

3.2 Autovalores e Autovetores

O conhecimento dos autovalores e os autoestados correspondentes nos permite calcular todas as quantidades dinâmicas de interesse no modelo. A diagonalização será feita introduzindo uma base desacoplada composta pelos vetores $|1; n_1, n_2\rangle$ e $|2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle$ nessa ordem. A notação $|1; n_1, n_2\rangle$ significa que o átomo se encontra no estado $|1\rangle$ enquanto que os modos possuem n_1 e n_2 fótons, respectivamente. O segundo vetor $|2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle$ indica que o átomo foi promovido a um estado de maior energia $|2\rangle$ absorvendo um fóton do primeiro modo e emitindo outro no segundo. Os autoestados podem ser expandidos a partir dos estados da base na forma de combinações lineares

$$\begin{aligned}|+, n_1, n_2\rangle &= -\sin \theta_{n_1, n_2} |1; n_1, n_2\rangle + \cos \theta_{n_1, n_2} |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle, \\ |-, n_1, n_2\rangle &= +\cos \theta_{n_1, n_2} |1; n_1, n_2\rangle + \sin \theta_{n_1, n_2} |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle,\end{aligned}\tag{3.12}$$

cujos coeficientes dependem dos índices n_1 e n_2 . A representação do Hamiltoniano Efetivo no espaço bidimensional gerado pelos vetores da base desacoplada é dada pela matriz 2x2

$$H' \doteq \begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

com as seguintes entradas

$$\begin{aligned} H'_{11} &= \langle 1; n_1, n_2 | H' | 1; n_1, n_2 \rangle = E_1 + n_1 \hbar \omega_1 + n_2 \hbar \omega_2 - \hbar \frac{g_1^2}{\Delta} n_1 \\ H'_{12} &= \langle 1; n_1, n_2 | H' | 2; n_1 - 1, n_2 + 1 \rangle = -\frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \sqrt{n_1 (n_2 + 1)} \\ H'_{21} &= \langle 2; n_1 - 1, n_2 + 1 | H' | 1; n_1, n_2 \rangle = -\frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta} \sqrt{n_1 (n_2 + 1)} \\ H'_{22} &= \langle 2; n_1 - 1, n_2 + 1 | H' | 2; n_1 - 1, n_2 + 1 \rangle = E_2 + (n_1 - 1) \hbar \omega_1 + (n_2 + 1) \hbar \omega_2 - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta} (n_2 + 1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os autovalores de energia são dados por

$$E_{n_1, n_2}^{\pm} = E_1 + n_1 \hbar \omega_1 + n_2 \hbar \omega_2 - \hbar \frac{g_1^2}{2\Delta} n_1 - \hbar \frac{g_2^2}{2\Delta} (n_2 + 1) \pm \hbar \Omega_{n_1, n_2}, \quad (3.15)$$

onde a grandeza com unidade de frequência é a chamada frequência de Rabi e dada por

$$\Omega_{n_1, n_2} = \frac{[g_1^2 n_1 + g_2^2 (n_2 + 1)]}{2\Delta}. \quad (3.16)$$

em contraste com a dependência $\sqrt{n_1 (n_2 + 1)}$ encontrada em [6].

Os coeficientes de 3.12 são obtidos pela equação a autovalores $H' |\pm, n_1, n_2\rangle = E_{n_1, n_2}^{\pm} |\pm, n_1, n_2\rangle$ junto com a normalização $\sin^2 \theta_{n_1, n_2} + \cos^2 \theta_{n_1, n_2} = 1$. Ao final do procedimento temos as expressões

$$\sin \theta_{n_1, n_2} = \frac{r \sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{n_1 + r^2 (n_2 + 1)}}, \quad (3.17)$$

$$\cos \theta_{n_1, n_2} = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1 + r^2 (n_2 + 1)}}, \quad (3.18)$$

com a introdução do parâmetro $r \equiv g_2/g_1$.

3.3 A dinâmica

Na subseção (3.4) abordaremos a evolução atômica do modelo preparando o segundo modo do campo ora em estado puro, ora em estado de mistura estatística, e nesse caso o operador densidade se torna imprescindível na descrição do sistema. A matriz densidade inicial é assumida na forma de produto envolvendo cada subsistema

$$\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) \otimes \rho_C(0), \quad (3.19)$$

A corresponde ao átomo, B representa o modo 1 (*Pump*) e C rotula o segundo modo (*Stokes*).

Uma configuração adequada e bastante geral para a nossa análise toma como ponto de partida o átomo no estado de menor energia

$$|A\rangle = |1\rangle \quad (3.20)$$

e os modos em superposição na base de Fock

$$|B\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1} |n_1\rangle, \quad |C\rangle = \sum_{n_2=0}^{\infty} c_{n_2} |n_2\rangle \quad (3.21)$$

As eq. (3.20), (3.21) quando substituídas em (3.19) levam a

$$\rho(0) = \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2} |1; n_1, n_2\rangle \langle 1; m_1, m_2|, \quad (3.22)$$

com $\rho_{n_1, n_2; m_1, m_2} = c_{n_1} c_{n_2} c_{m_1}^* c_{m_2}^*$. O estado (3.22) acima em um instante posterior t é obtido utilizando a solução

$$\rho(t) = e^{-i\frac{H't}{\hbar}} \rho(0) e^{i\frac{H't}{\hbar}}, \quad (3.23)$$

mas antes, temos de calcular o vetor $e^{-i\frac{H't}{\hbar}} |1; n_1, n_2\rangle$, isso é feito de maneira trivial uma vez que as relações (3.12) podem ser invertidas e dadas em termos dos autoestados de H'

$$|1; n_1, n_2\rangle = -\sin \theta_{n_1, n_2} |+, n_1, n_2\rangle + \cos \theta_{n_1, n_2} |-, n_1, n_2\rangle, \quad (3.24)$$

resultando em

$$e^{-i\frac{H't}{\hbar}} |1; n_1, n_2\rangle = -\sin \theta_{n_1, n_2} e^{-i\frac{E^+ t}{\hbar}} |+, n_1, n_2\rangle + \cos \theta_{n_1, n_2} e^{-i\frac{E^- t}{\hbar}} |-, n_1, n_2\rangle. \quad (3.25)$$

É conveniente relacionar as autoenergias (3.15) através da expressão $E_{n_1, n_2}^- = E_{n_1, n_2}^+ - 2\hbar\Omega_{n_1, n_2}$ com o propósito de simplificar (3.25), reescrita como

$$e^{-i\frac{H't}{\hbar}} |1; n_1, n_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{n_1, n_2}^+ - \hbar\Omega_{n_1, n_2})t} \left[-\sin\theta_{n_1, n_2} e^{-i\Omega_{n_1, n_2}t} |+, n_1, n_2\rangle + \right. \quad (3.26)$$

$$\left. + \cos\theta_{n_1, n_2} e^{+i\Omega_{n_1, n_2}t} |-, n_1, n_2\rangle \right].$$

Agora, basta substituir as (3.12) na expressão (3.26) para obter

$$e^{-i\frac{H't}{\hbar}} |1; n_1, n_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{n_1, n_2}^+ - \hbar\Omega_{n_1, n_2})t} \left[(\sin^2\theta_{n_1, n_2} e^{-i\Omega_{n_1, n_2}t} + \cos^2\theta_{n_1, n_2} e^{+i\Omega_{n_1, n_2}t}) |1; n_1, n_2\rangle + \right. \quad (3.27)$$

$$\left. + 2i \sin\theta_{n_1, n_2} \cos\theta_{n_1, n_2} \sin(\Omega_{n_1, n_2}t) |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \right],$$

ou

$$e^{-i\frac{H't}{\hbar}} |1; n_1, n_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_{n_1, n_2}^+ - \hbar\Omega_{n_1, n_2})t} [k_{1, n_1, n_2}(t) |1; n_1, n_2\rangle + k_{2, n_1, n_2}(t) |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle], \quad (3.28)$$

onde k_{1, n_1, n_2} e k_{2, n_1, n_2} são facilmente obtidos mediante as (3.17) e (3.18) resultando em

$$k_{1, n_1, n_2}(t) = \cos(\Omega_{n_1, n_2}t) + i \left[\frac{n_1 - r^2(n_2 + 1)}{n_1 + r^2(n_2 + 1)} \right] \sin(\Omega_{n_1, n_2}t), \quad (3.29)$$

$$k_{2, n_1, n_2}(t) = \frac{2i r \sqrt{n_1(n_2 + 1)}}{[n_1 + r^2(n_2 + 1)]} \sin(\Omega_{n_1, n_2}t).$$

De posse dos últimos resultados é possível escrever o operador densidade como

$$\rho(t) = \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; m_1, m_2} e^{i\nu_{n_1, n_2, m_1, m_2}t} [k_{1, n_1, n_2} k_{1, m_1, m_2}^* |1; n_1, n_2\rangle \langle 1; m_1, m_2| +$$

$$+ k_{2, n_1, n_2} k_{2, m_1, m_2}^* |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \langle 2; m_1 - 1, m_2 + 1| +$$

$$+ k_{1, n_1, n_2} k_{2, m_1, m_2}^* |1; n_1, n_2\rangle \langle 2; m_1 - 1, m_2 + 1| +$$

$$+ k_{2, n_1, n_2} k_{1, m_1, m_2}^* |2; n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \langle 1; m_1, m_2|], \quad (3.30)$$

onde o argumento da exponencial complexa é dado por

$$\nu_{n_1, n_2, m_1, m_2} = (m_1 - n_1) \left(\omega_1 - \frac{g_1^2}{2\Delta} \right) + (m_2 - n_2) \left(\omega_2 - \frac{g_2^2}{2\Delta} \right). \quad (3.31)$$

A operação de traço parcial nos modos do campo leva ao operador densidade reduzido do átomo

$$\begin{aligned} \rho_A(t) &= \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} |k_{1, n_1, n_2}|^2 |1\rangle \langle 1| + \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} |k_{2, n_1, n_2}|^2 |2\rangle \langle 2| + \\ &+ \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2+1; n_1+1, n_2} e^{i\nu_{n_1, n_2+1, m_1+1, m_2} t} k_{1, n_1, n_2+1} k_{2, n_1+1, n_2}^* |1\rangle \langle 2| + h.c., \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde *h.c.* é a sigla para hermiteano conjugado do último termo explícito em (3.32). A inversão atômica requer o conhecimento dos elementos diagonais da matriz de $\rho_A(t)$ ou, ao menos de um deles, pois o vínculo $(\rho_A)_{11} + (\rho_A)_{22} = 1$ nos permite escrever um elemento em termos do outro. Dessa forma, a inversão atômica

$$W(t) = [\rho_A(t)]_{22} - [\rho_A(t)]_{11} \quad (3.33)$$

se torna

$$W(t) = -1 + 2[\rho_A(t)]_{22}, \quad (3.34)$$

e das eq. (3.32) e (3.29) é imediato que

$$\begin{aligned} W(t) &= -1 + 2 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} |k_{2, n_1, n_2}|^2 \\ &= -1 + 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \frac{r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin^2(\Omega_{n_1, n_2} t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} = |c_{n_1}|^2 |c_{n_2}|^2 = p_{n_1} p_{n_2}$ dá a probabilidade conjunta de medir n_1 excitações do campo no modo 1 e n_2 excitações no modo 2. Note que a eq. (3.35) é bastante geral pois independe da preparação inicial dos modos do campo. Apesar de ter sido obtida considerando estados puros do campo, ela é igualmente válida também no caso de prepararmos os modos em estado de mistura estatística, desde que o cálculo envolve somente o produto das distribuições de cada modo.

3.4 Estudo numérico da inversão atômica

Nesta seção apresentamos um estudo comparativo da inversão atômica entre duas preparações distintas do campo com o objetivo de investigar a influência do segundo modo na dinâmica atômica: na primeira delas preparamos os modos 1 e 2 da cavidade em estados coerentes rotulados como $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$, respectivamente; enquanto que na segunda introduzimos o estado térmico no modo 2, deixando o modo 1 em estado coerente. Mas antes disso, procuramos estabelecer a partir de qual parâmetro a aproximação de alta dessintonia se torna razoável; isto é, buscamos um limite inferior para o *detuning* Δ através de uma comparação direta entre os gráficos obtidos pelas expressões exata e aproximada.

Originalmente [8], a expressão exata da inversão atômica era dada em termos da constante $r = g_2/g_1$ e do *detuning* Δ na forma

$$\widetilde{W}(t) = -1 + 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \frac{r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin^2 \left\{ \widetilde{\Omega}_{n_1, n_2} t \right\}, \quad (3.36)$$

com

$$\widetilde{\Omega}_{n_1, n_2} \equiv \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g_1^2 n_1 + g_2^2 (n_2 + 1)} - \left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (3.37)$$

sendo definida como a frequência de Rabi exata do modelo. Aqui $\widetilde{W}(t)$ e $\widetilde{\Omega}_{n_1, n_2}$ são usados para distinguir das funções aproximadas correspondentes (3.16) e (3.35). Uma parametrização adequada das funções (3.35) e (3.36) e que permite estudar o efeito da dessintonia na dinâmica é feita introduzindo o conjunto de parâmetros $c = \Delta/g_1$ e o tempo escalonado $t' = g_1 t$. Esse procedimento resulta nas seguintes expressões aproximada

$$W(t') = 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \frac{\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin^2 \left\{ \frac{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]}{2c} t' \right\} - 1, \quad (3.38)$$

e exata

$$\widetilde{W}(t') = 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \frac{\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin^2 \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + n_1 + r^2 (n_2 + 1)} - \left(\frac{c}{2}\right) \right] \frac{t'}{2} \right\} - 1. \quad (3.39)$$

Definindo a função $\delta(t') = \widetilde{W}(t') - W(t')$ podemos verificar graficamente a diferença entre as expressões caso a caso. Assim, utilizando as (3.38) e (3.39) juntamente com a identidade

$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a - b) \sin(a + b)$ temos

$$\delta(t') = 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \frac{r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin \left[\frac{(\tilde{\Omega}_{n_1, n_2} - \Omega_{n_1, n_2})}{g_1} t' \right] \sin \left[\frac{(\tilde{\Omega}_{n_1, n_2} + \Omega_{n_1, n_2})}{g_1} t' \right], \quad (3.40)$$

identificando o argumento dos senos como

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\Omega}_{n_1, n_2} \pm \Omega_{n_1, n_2})}{g_1} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + n_1 + r^2 (n_2 + 1)} - \left(\frac{c}{2}\right) \right] \pm \frac{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]}{2c} \\ &= \left(\frac{c}{4}\right) \left[\sqrt{1 + \frac{4(n_1 + r^2 (n_2 + 1))}{c^2}} - 1 \right] \pm \frac{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]}{2c}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Expandimos o termo na raiz em primeira ordem no parâmetro $\varepsilon = 4(n_1 + r^2 (n_2 + 1)) / c^2$ (ε muito pequeno), condensando os termos de ordem superior na notação $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Esse procedimento dá origem aos argumentos

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\Omega}_{n_1, n_2} + \Omega_{n_1, n_2})}{g_1} &= \frac{c}{4} (\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \\ \frac{(\tilde{\Omega}_{n_1, n_2} - \Omega_{n_1, n_2})}{g_1} &= \frac{c}{4} \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.42)$$

e quando levados em (3.40) resultam na seguinte equação

$$\delta(t') = 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \frac{r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \sin \left[\frac{c}{4} \mathcal{O}(\varepsilon^2) t' \right] \sin \left[\frac{c}{4} (\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) t' \right]. \quad (3.43)$$

Da expressão acima concluímos que quanto maior for a relação $\varepsilon = 4(n_1 + r^2 (n_2 + 1)) / c^2$, os termos de ordens mais altas se tornam relevantes nos argumentos dos senos, de modo que a função diferença não vai a zero. Isso acontece quando os parâmetros que dão a intensidade do campo (\bar{n}_1 e \bar{n}_2) são relativamente altos em comparação à constante c e o termo de primeira ordem não basta na aproximação. Entretanto, tomaremos aqui somente valores de c que estejam em bom acordo com a aproximação, o que foi feito caso a caso através dos gráficos de $\delta(t')$ para cada conjunto dos parâmetros \bar{n}_1 , \bar{n}_2 , r escolhidos.

Na configuração em que temos os dois modos em estado coerente, o produto das dis-

tribuições é dado por duas poissonianas

$$\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} = e^{-\bar{n}_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \times e^{-\bar{n}_2} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!}, \quad (3.44)$$

e no caso em que temos o segundo modo em estado térmico fica

$$\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} = e^{-\bar{n}_1} \frac{\bar{n}_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{(\bar{n}_2 + 1)^{n_2 + 1}}. \quad (3.45)$$

Para estimar os tempos de *revival* das oscilações de Rabi [9], nós reescrevemos (3.35) na forma

$$\begin{aligned} W(t) &= -1 + 8 \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \frac{r^2 n_1 (n_2 + 1)}{[n_1 + r^2 (n_2 + 1)]^2} \left(\frac{1 - \cos(2 \Omega_{n_1, n_2} t)}{2} \right) \\ &= - \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \left[\frac{(n_1 + r^2 (n_2 + 1))^2 - 4r^2 (n_2 + 1)}{(n_1 + r^2 (n_2 + 1))^2} + \frac{4r^2 (n_2 + 1) \cos(2 \Omega_{n_1, n_2} t)}{(n_1 + r^2 (n_2 + 1))^2} \right] \\ &= -Re \left\{ \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \left[\left(\frac{n_1 - r^2 (n_2 + 1)}{n_1 + r^2 (n_2 + 1)} \right)^2 + \frac{4r^2 (n_2 + 1)}{(n_1 + r^2 (n_2 + 1))^2} e^{i(2 \Omega_{n_1, n_2} t)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

e assumimos que a contribuição dominante na somatória dupla vem do termo para o qual $n_1 \approx \bar{n}_1$ e $n_2 \approx \bar{n}_2$, os números de fótons que maximizam a distribuição conjunta $\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2}$ dada pelas (3.44) e (3.45); assim, a frequência de Rabi pode ser escrita em primeira ordem como

$$\Omega_{n_1, n_2} = \frac{[g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 (\bar{n}_2 + 1)]}{2\Delta} + \frac{g_1^2}{2\Delta} (n_1 - \bar{n}_1) + \frac{g_2^2}{2\Delta} (n_2 - \bar{n}_2) \quad (3.46)$$

e então a inversão atômica fica

$$\begin{aligned} W(t) &= -Re \left\{ e^{i \left(\frac{[g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 (\bar{n}_2 + 1)]}{\Delta} t \right)} \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} \left[\left(\frac{n_1 - r^2 (n_2 + 1)}{n_1 + r^2 (n_2 + 1)} \right)^2 e^{-i \left(\frac{[g_1^2 \bar{n}_1 + g_2^2 (\bar{n}_2 + 1)]}{\Delta} t \right)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4r^2 (n_2 + 1)}{(n_1 + r^2 (n_2 + 1))^2} e^{i \left(\frac{g_1^2}{\Delta} (n_1 - \bar{n}_1) t \right)} e^{i \left(\frac{g_2^2}{\Delta} (n_2 - \bar{n}_2) t \right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

As exponenciais em (3.47) contribuem para os ressurgimentos das oscilações de Rabi

quando seus argumentos são múltiplos inteiros de 2π

$$\frac{g_1^2}{\Delta} t_R = 2\pi k \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.48)$$

$$\frac{g_2^2}{\Delta} t_R = 2\pi l \quad , \quad l = 1, 2, \dots ;$$

e, multiplicando as duas obtemos

$$t_R = \frac{2\pi\sqrt{q}\Delta}{g_1 g_2} \quad , \quad q = kl = 1, 2, \dots \quad (3.49)$$

com os inteiros k e l satisfazendo as seguintes restrições

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 = \frac{k}{l} \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{\frac{l}{k}}. \quad (3.50)$$

Observe que os tempos de ressurgimentos são proporcionais à dessintonia. Outro fato que deve ser mencionado a respeito de (3.49) é a independência da intensidade inicial dos modos.

Agora passamos à análise gráfica das duas situações tomando como base comparativa o estado de vácuo no segundo modo ($\bar{n}_2 \ll 1$). Quando o segundo modo está bem próximo do vácuo (Figura 3.2), as duas curvas são idênticas pois nesse limite as distribuições coerente e térmica apontam o estado de menor energia com probabilidade máxima igual a 1.

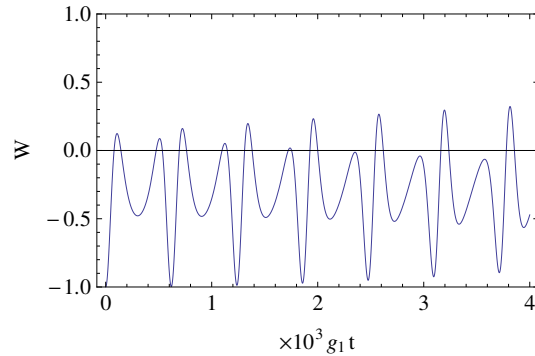


Figura 3.2: Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 0.01$, $r = 1.023$ e $c = 100$ para os modos do campo nos estados coerente-coerente e coerente-térmico.

Para uma variação do número de fótons no segundo modo (de 0.01 para 1.5), mantendo \bar{n}_1 fixo, as curvas apresentam diferenças sutis, indicando que a população do segundo modo tem efeito muito pequeno na dinâmica atômica, ao menos no regime de baixo número de fótons dos dois modos. Uma estrutura semelhante de ressurgimentos das oscilações de Rabi

ocorre nas Figuras (3.3a e 3.3b), com tempos essencialmente iguais e estimativas em bom acordo com a expressão (3.49).

A quase-periodicidade das curvas é devida à linearidade da frequência de Rabi (3.16) com os números de fótons n_1 e n_2 , levando a um período de ressurgimento que não depende do tipo de campo e da população inicial dos modos, em contraste com o que foi encontrado na referência [6].

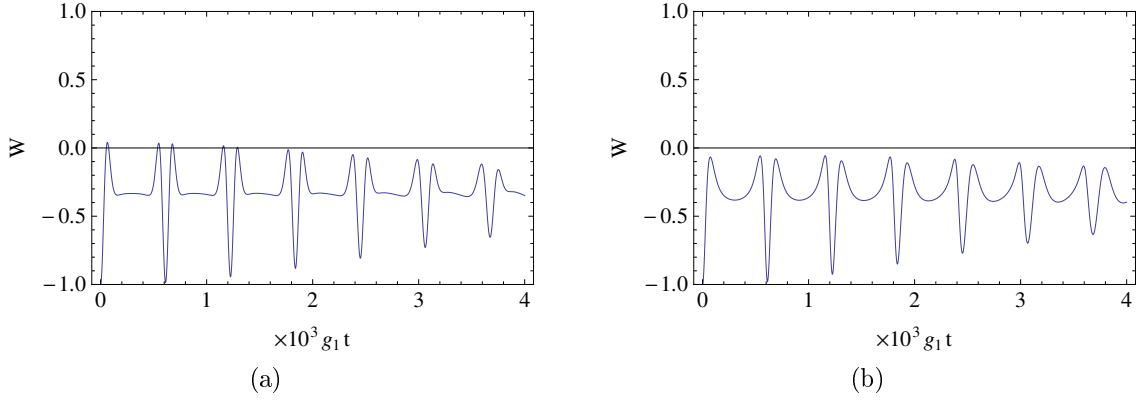


Figura 3.3: Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com (a) $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 1.5$, $r = 1.023$ e $c = 100$ na preparação coerente-coerente, (b) $\bar{n}_1 = 1.5$, $\bar{n}_2 = 1.5$, $r = 1.023$ e $c = 100$ na preparação coerente-térmico.

Uma característica notável observada (Figura 3.4) para um conjunto de parâmetros iguais foi que o valor máximo da inversão atômica ocorre quando populamos o modo 2 no estado coerente, assim as probabilidades de transição do estado fundamental $|1\rangle$ para o estado $|2\rangle$ são maiores considerando uma preparação inicial do tipo coerente-coerente.

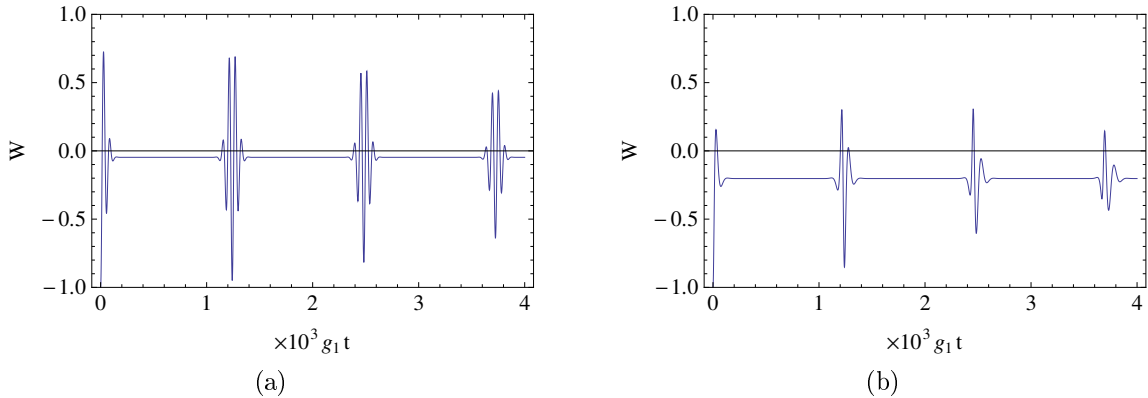


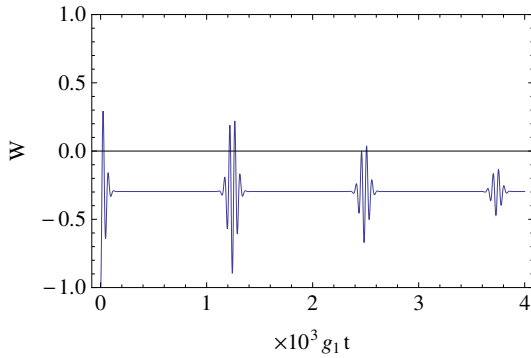
Figura 3.4: Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $\bar{n}_1 = 10.6$, $\bar{n}_2 = 10.1$, $r = 1.012$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados (a) coerente-coerente e (b) coerente-térmico.

Isso é explicado comparando a forma das distribuições poissoniana e térmica no entorno de seus valores máximos, a primeira contribui na somatória dupla com valores maiores distribuídos em torno da média enquanto que a luz caótica apresenta uma estatística de fótons “espalhada” e com valores menores quando comparados à poissoniana.

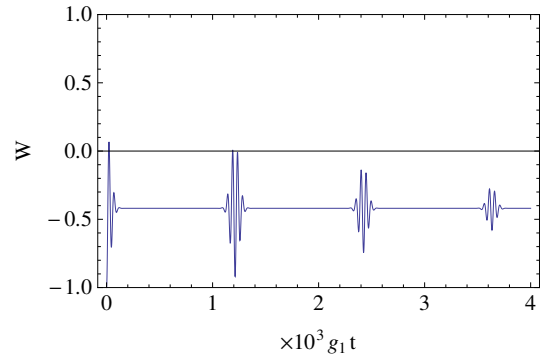
No presente estudo realizado com o modelo Raman, é intuitivo pensar que o primeiro modo seja o mais influente na dinâmica das inversões já que o átomo preparado no estado fundamental precisa absorver energia do modo de bombeio para ser excitado. Isso pode ser verificado considerando inicialmente os modos em estado coerente.

Na sequência de Figuras 3.5a e 3.5c o modo 1 apresenta um número médio de fótons maior que o número médio do modo 2 e nas Figuras (3.5b, 3.5d) mostramos a situação inversa, com número médio de fótons maior no segundo, trocando os papéis dos modos.

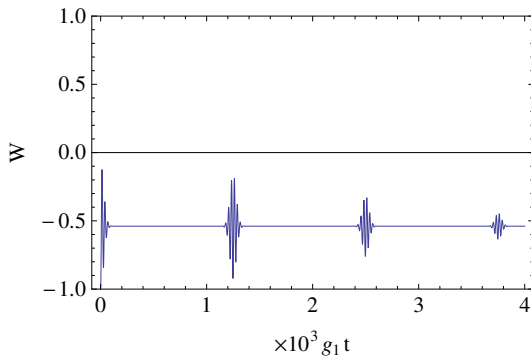
Da comparação entre os pares (3.5a-3.5b), (3.5c-3.5d) inferimos que o modo 1 se sobressai em relação ao segundo modo pois a amplitude das oscilações no caso do modo 1 ser mais populado é ligeiramente maior que a amplitude das oscilações quando a situação se inverte, acarretando valores de inversão maiores para as curvas em que $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$.



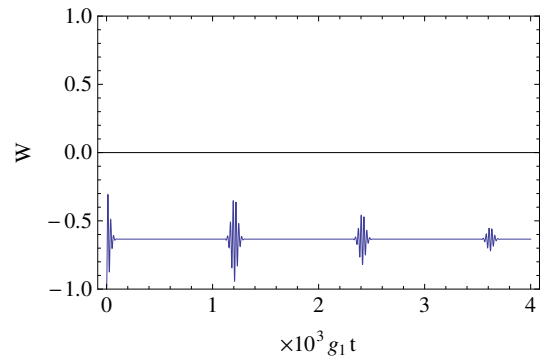
(a) $\bar{n}_1 = 20$, $\bar{n}_2 = 5$, $r = 1.023$ e $c = 200$



(b) $\bar{n}_1 = 5$, $\bar{n}_2 = 20$, $r = 1.023$ e $c = 200$



(c) $\bar{n}_1 = 40$, $\bar{n}_2 = 5$, $r = 1.023$ e $c = 200$



(d) $\bar{n}_1 = 5$, $\bar{n}_2 = 40$, $r = 1.023$ e $c = 200$

Figura 3.5: Preparação coerente-coerente.

Quando preparamos o modo 2 em estado térmico (Figura 3.6), este efeito não é tão claro como na preparação coerente-coerente, entretanto o estado térmico provoca uma atenuação nas amplitudes quando comparamos as preparações coerente-coerente e coerente-térmico nos casos em que $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$ e vice-versa. Nós podemos entender a atenuação como um efeito devido à natureza da distribuição térmica, sem picos.

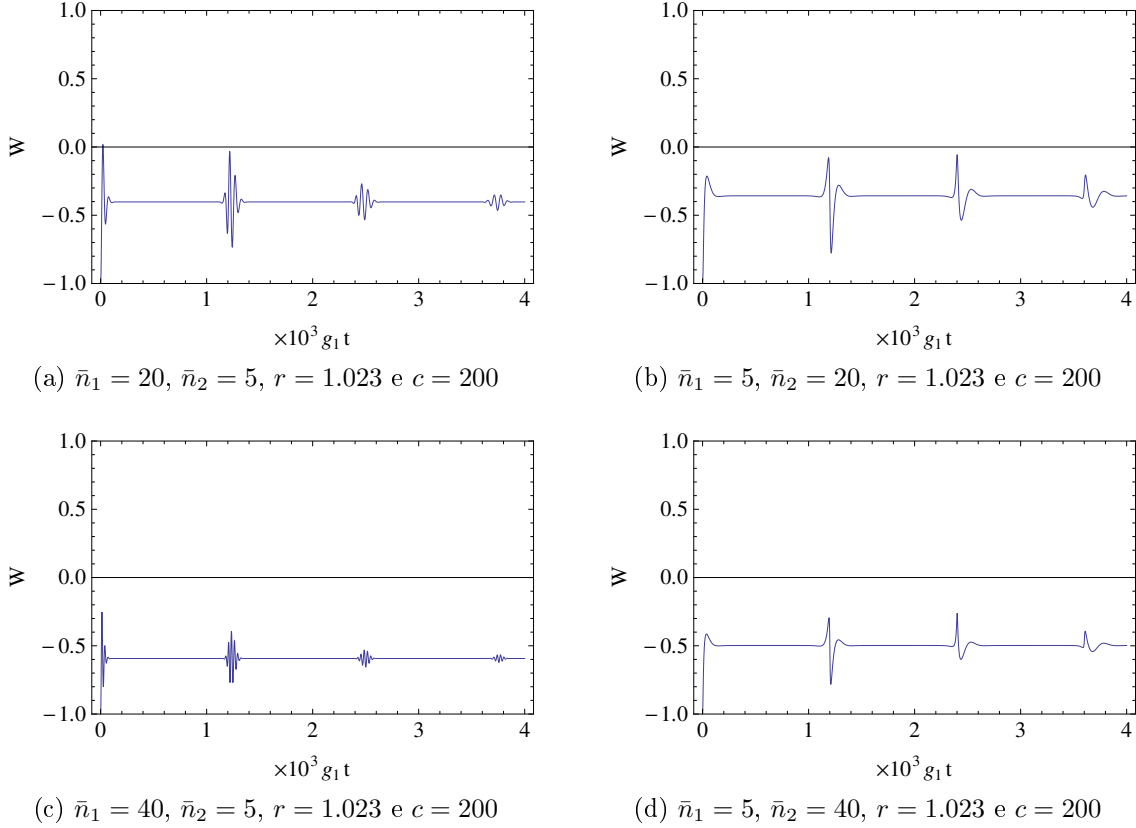


Figura 3.6: Preparação coerente-térmico.

3.5 Inversão atômica na preparação Fock-Coerente

Para finalizar este capítulo apresentamos um estudo da inversão atômica considerando uma preparação dos estados do campo que será também abordada no Capítulo 4, mas sob a perspectiva do emaranhamento. De agora em diante tratamos o modo 1 em estado de Fock de N fótons (N inteiro), rotulado como $|N\rangle$ e o segundo modo em estado coerente $|\alpha\rangle$ com uma população média de \bar{n} fótons. O átomo continua preparado no estado fundamental.

Assim, o vetor de estado global do sistema é dado por

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |N\rangle \otimes |\alpha\rangle, \quad (3.51)$$

é imediato ver que podemos aplicar os resultados obtidos na seção (3.3) para deduzir a inversão atômica, haja visto que a expressão (3.35) é válida sejam os estados puros ou mistos.

Nesse caso, o coeficiente $\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} = p_{n_1} p_{n_2}$ envolvendo o produto das distribuições probabilísticas dos campos se torna

$$\rho_{n_1, n_2; n_1, n_2} = \delta_{n_1, N}^2 \times e^{-\bar{n}_2} \frac{\bar{n}_2^{n_2}}{n_2!}, \quad (3.52)$$

onde a delta de Kronecker representa a certeza de encontrar N fótons ao realizar uma medida no primeiro modo e a distribuição Poissoniana dá a probabilidade de detectar n_2 fótons no segundo.

Substituindo (3.52) em (3.35), eliminamos a somatória em n_1 através da delta restando¹ uma expressão mais simples para a inversão atômica

$$W(t) = -1 + 8 \sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{r^2 N (n+1)}{[N + r^2 (n+1)]^2} \sin^2(\Omega_{N, n} t), \quad (3.53)$$

com uma nova frequência de Rabi dada por

$$\Omega_{N, n} = \frac{[g_1^2 N + g_2^2 (n+1)]}{2\Delta}. \quad (3.54)$$

Para ilustrar a inversão atômica utilizamos a mesma parametrização já vista anteriormente, ou seja, a dessintonia expressa como $\Delta = c g_1$ e o tempo escalonado na forma $t' = g_1 t$. O comportamento periódico da inversão atômica (Figura 3.7) observado ao preparar o campo nos estados coerente-coerente e coerente-térmico também é característico da atual preparação.

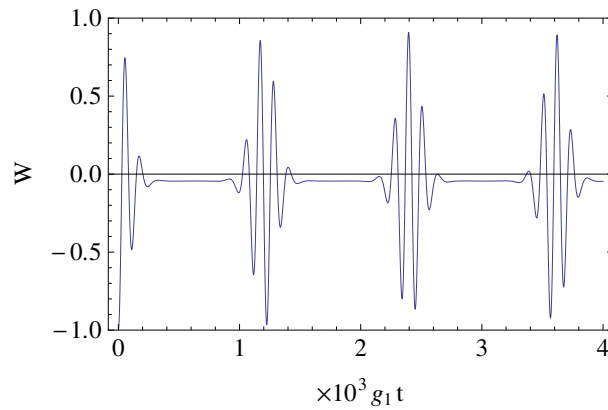


Figura 3.7: Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $N = 5$, $\bar{n} = 5$, $r = 1.023$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados de Fock e coerente.

¹Perceba que aqui não há necessidade de manter o rótulo n_2 pois N está fixo.

Novamente o comportamento pode ser atribuído à linearidade da frequência de Rabi na intensidade dos modos, porém nesse caso os ressurgimentos tem amplitudes significativamente maiores, aumentando as probabilidades do átomo ocupar o nível excitado.

A base física do processo é entendida da seguinte forma: o estado de Fock induz as oscilações de Rabi mas a estatística coerente tende a atrapalhar essa formação introduzindo diferenças de fase entre os termos da somatória, ora contribuindo de modo destrutivo, nas regiões de colapso, ora reforçando as oscilações durante os ressurgimentos.

Quando populamos os dois modos com número igual de fótons, há uma tendência do átomo em conseguir realizar a inversão completamente, transitando do estado fundamental até o estado excitado e repetindo o processo durante os ressurgimentos. Essa tendência se intensifica à medida que aumentamos as populações dos modos.

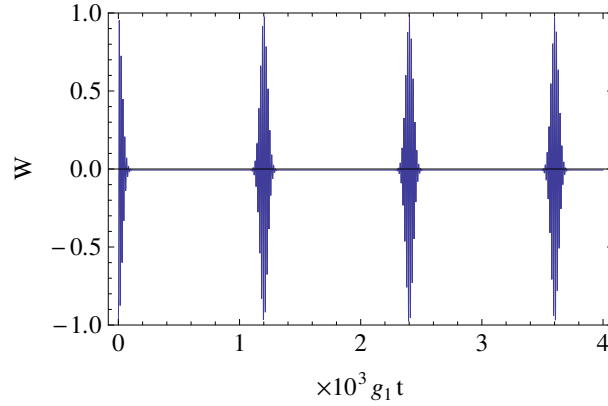


Figura 3.8: Inversão atômica em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ com $N = 40$, $\bar{n} = 40$, $r = 1.023$ e $c = 200$ para os modos do campo nos estados de Fock e coerente.

Capítulo 4

Emaranhamento átomo-campo

Nas últimas décadas estudos relacionados ao emaranhamento ganharam novo impulso graças às possíveis aplicações desse importante recurso nas áreas de Informação e Computação quânticas. Nesse contexto surgiram inúmeros trabalhos abordando questões fundamentais, envolvendo desde a natureza das correlações quânticas em si até critérios [12] e métodos [13] de como quantificar o emaranhamento em sistemas bipartites.

Nesta seção estudamos a influência do segundo modo do campo, preparado em estado coerente, no emaranhamento bipartite dos subsistemas átomo e modo 1, preparados no estado fundamental e no estado de Fock de N fótons, respectivamente. Com essa finalidade, definimos a partição composta pelos subsistemas de interesse, átomo e modo 1, obtida através de um traço parcial sobre o modo 2. Na sequência, iremos aplicar o critério da transposta parcial ao operador densidade reduzido átomo-modo 1 e analisar graficamente a Negatividade, utilizada neste trabalho como a principal medida de emaranhamento.

O vetor de estado do sistema composto pode ser colocado em forma fatorada

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |N\rangle \otimes |\alpha\rangle, \quad (4.1)$$

levando à seguinte expressão para o operador densidade associado

$$\rho(0) = |1; N, \alpha\rangle \langle 1; N, \alpha|. \quad (4.2)$$

Como vimos na seção (3.3), o operador densidade mostrado em (3.30) é bastante geral para que possamos aplicá-lo aqui. A maneira direta de aproveitar esse resultado é assumir

os coeficientes de (3.21) iguais a $c_{n_1} = \delta_{n_1, N}$ e $c_{n_2} = e^{-\frac{\bar{n}_2}{2}} \frac{\alpha^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}$, resultando no operador

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n c_m^* \exp \left\{ i \left[(m-n) \omega_2 - (m-n) \frac{g_2^2}{2\Delta} \right] \right\} [k_{1,N,n} k_{1,N,m}^* |1; N, n\rangle \langle 1; N, m| + \\ & + k_{1,N,n} k_{2,N,m}^* |1; N, n\rangle \langle 2; N-1, m+1| + k_{2,N,n} k_{1,N,m}^* |2; N-1, n+1\rangle \langle 1; N, m| + \\ & + k_{2,N,n} k_{2,N,m}^* |2; N-1, n+1\rangle \langle 2; N-1, m+1|], \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde os índices de soma n e m dizem respeito somente ao estado coerente e $k_{1,N,n}$, $k_{2,N,n}$ são casos particulares das expressões (3.29) com $n_1 = N$ e $\bar{n}_2 = n$.

O operador densidade reduzido dos subsistemas de interesse, rotulados como A - átomo e B - modo 1, é dado pelo traço nos índices do segundo modo

$$\begin{aligned} \rho_{A-B}(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 k_{1,N,n} k_{1,N,n}^* |1; N\rangle \langle 1; N| + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 k_{2,N,n} k_{2,N,n}^* |2; N-1\rangle \langle 2; N-1| + \\ & + e^{-i\left(\omega_2 - \frac{g_2^2}{2\Delta}\right)t} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} c_n^* k_{1,N,n+1} k_{2,N,n}^* |1; N\rangle \langle 2; N-1| + \\ & + e^{i\left(\omega_2 - \frac{g_2^2}{2\Delta}\right)t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1}^* k_{1,N,n+1}^* k_{2,N,n} |2; N-1\rangle \langle 1; N|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

É conveniente introduzir um pouco de notação que torne as expressões mais simples e facilite a interpretação dos resultados. Assim podemos definir os coeficientes da eq. (4.4) como

$$\begin{aligned} \rho_{11} & \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 k_{1,N,n} k_{1,N,n}^*, & \rho_{12} & \equiv e^{-i\left(\omega_2 - \frac{g_2^2}{2\Delta}\right)t} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} c_n^* k_{1,N,n+1} k_{2,N,n}^*, \\ \rho_{21} & \equiv e^{i\left(\omega_2 - \frac{g_2^2}{2\Delta}\right)t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1}^* k_{1,N,n+1}^* k_{2,N,n}, & \rho_{22} & \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 k_{2,N,n} k_{2,N,n}^*, \end{aligned} \quad (4.5)$$

e reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \rho_{A-B}(t) = & \rho_{11} |1; N\rangle \langle 1; N| + \rho_{22} |2; N-1\rangle \langle 2; N-1| + \\ & + \rho_{12} |1; N\rangle \langle 2; N-1| + \rho_{21} |2; N-1\rangle \langle 1; N|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A matriz densidade e sua transposta parcial na base $^1\{|1; N-1\rangle, |1; N\rangle, |2; N-1\rangle, |2; N\rangle\}$ são diretas

$$\rho_{A-B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{12}^* & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_{A-B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_{12} \\ 0 & \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{12}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

O único autovalor não trivial (isto é, negativo) da transposta parcial, uma vez que a violação do critério de Peres-Horodecki implica na existência de autovalores negativos, é dado por

$$\lambda^- = -\sqrt{\rho_{12} \times \rho_{12}^*}, \quad (4.8)$$

o qual, após observar que os fatores na raiz são o conjugado um do outro, pode ser colocada na forma

$$\lambda^- = -\sqrt{[Re(\rho_{12})]^2 + [Im(\rho_{12})]^2}, \quad (4.9)$$

onde Re e Im denotam respectivamente as partes real e imaginária de ρ_{12} .

Inserindo os coeficientes $k_{1,N,n+1}$ e $k_{2,N,n}^*$ juntamente com c_{n+1} e c_n^* na expressão (4.9) e utilizando a definição da Negatividade apresentada ao final do capítulo 2, temos finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t) = & 2r\sqrt{\bar{n}N} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{[N - r^2(n+2)]}{[N + r^2(n+2)]} \frac{\sin(\Omega_{N,n}t) \sin(\Omega_{N,n+1}t)}{[N + r^2(n+1)]} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{\sin(\Omega_{N,n}t) \cos(\Omega_{N,n+1}t)}{[N + r^2(n+1)]} \right]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

com

$$r = \frac{g_2}{g_1} \quad e \quad \Omega_{N,n} = \frac{[g_1^2 N + g_2^2(n+1)]}{2\Delta}. \quad (4.11)$$

De posse do operador densidade reduzido (eq. 3.32), podemos empregar em nossa análise outra quantidade muito usada na prática para medir o emaranhamento em sistemas globais puros: a *entropia linear*. Porém é importante ressaltar que o estado bipartite átomo-modo 1 dado pelo operador densidade ρ_{A-B} (eq. 4.4) não é mais um estado puro e nesse caso a

¹Convenção adotada: $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no subespaço atômico, e $|N-1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|N\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no subespaço do estado de Fock.

Entropia linear não pode ser considerada um bom quantificador de emaranhamento, de modo que a utilizaremos apenas como um indicativo das possíveis semelhanças e discrepâncias em relação a Negatividade, esta sim uma medida confiável.

Uma vez que temos o operador densidade reduzido ρ_{A-B} podemos obter o operador densidade do átomo através do traço parcial aplicado ao primeiro modo, descartando os termos não diagonais de (4.4) no subspaço do campo. O resultado dá uma mistura estatística dos estados atômicos

$$\rho_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |k_{1,N,n}|^2 |1\rangle \langle 1| + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |k_{2,N,n}|^2 |2\rangle \langle 2|. \quad (4.12)$$

O cálculo de $\rho_A^2(t)$ é imediato devido a estrutura diagonal do operador na representação dos estados atômicos desacoplados $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ e nos permite escrever a *entropia linear* do átomo como

$$\zeta_A(t) = 1 - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |k_{1,N,n}|^2 \right\}^2 - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |k_{2,N,n}|^2 \right\}^2, \quad (4.13)$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} \zeta_A(t) = & 1 - \left\{ 4r^2 N \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{(n+1)}{[N+r^2(n+1)]^2} \sin^2(\Omega_{N,n}t) \right\}^2 + \\ & - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[\cos^2(\Omega_{N,n}t) + \left[\frac{N-r^2(n+1)}{N+r^2(n+1)} \right]^2 \sin^2(\Omega_{N,n}t) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Podemos ainda rearranjar os termos de (4.14) e escrevê-la em uma forma mais simples

$$\begin{aligned} \zeta_A(t) = & 8r^2 N \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{(n+1)}{[N+r^2(n+1)]^2} \sin^2(\Omega_{N,n}t) \right\} + \\ & - 32r^4 N^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{(n+1)}{[N+r^2(n+1)]^2} \sin^2(\Omega_{N,n}t) \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.1 Estudo Gráfico das funções de Negatividade e Entropia linear

Agora iniciamos propriamente o estudo numérico das correlações expressas em (4.10) e (4.15), buscando sobretudo entender o papel do modo coerente no emaranhamento do sistema bipartite átomo-modo 1. Todos os gráficos que envolvem a Negatividade e a Entropia linear foram traçados escolhendo de maneira conveniente os valores $r = 1.023$ e $c = 200$, deixando os parâmetros do campo livres para o estudo. Como pode ser observado na Figura 4.1, existem concordâncias entre o grau de emaranhamento do subsistema átomo-modo 1, indicado pela Negatividade e a Entropia linear. Ambas são funções quase-periódicas e apresentam essencialmente mesmo período, além disso nas regiões em que átomo e modo 1 tendem a estar separados (trechos de rápida oscilação na Figura 4.1a) observamos, ainda que a grosso modo, a mesma tendência na evolução da Entropia linear (Figura 4.1b). Entretanto ressaltamos que há diferenças substanciais no comportamento de uma e outra. Nas regiões “suaves” a Negatividade cresce atingindo o pico (valor máximo de emaranhamento) e diminui logo em seguida, enquanto que a Entropia linear se mantém estacionária no valor máximo durante toda a variação. As diferenças apontadas são devidas, como mencionado à página 35, ao fato de não termos mais um estado puro após a aplicação do traço parcial sobre o modo coerente, de forma que a entropia linear não é mais um indicador confiável de emaranhamento, se mostrando inadequada neste caso.

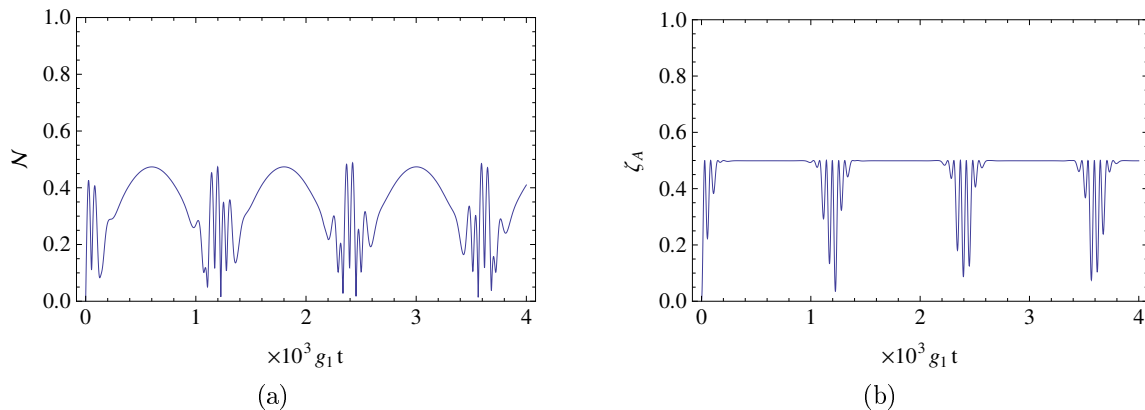


Figura 4.1: Negatividade (a) e Entropia linear (b) pelo tempo escalonado $t' = g_1 t$ para $N = 5$ e $\bar{n} = 5$.

Quando aumentamos as populações dos modos 1 e 2, notamos que os subsistemas de interesse (átomo + modo 1) passam um tempo maior emaranhados nas regiões estáveis (“morros”), onde a Negatividade tem uma evolução simples, e um tempo de interação muito

pequeno nas regiões instáveis (oscilatórias).

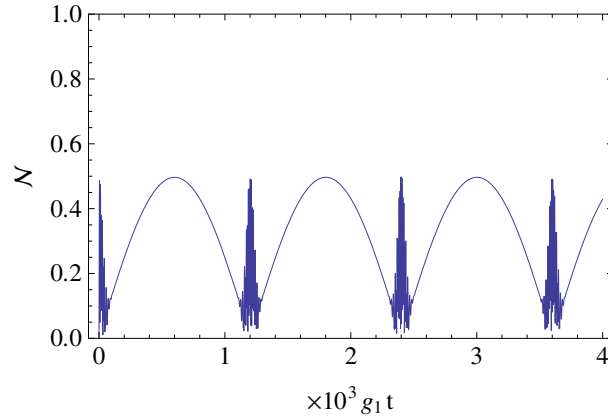


Figura 4.2: Negatividade em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ para $N = 40$ e $\bar{n} = 40$.

Uma característica peculiar do modelo Raman nessa preparação, e até então desconhecida na literatura, é a tendência que átomo e modo 1 possuem de estar maximamente emaranhados no meio da região de colapso da inversão atômica (compare as Figuras 3.8 e 4.2 por exemplo).

A tendência oposta, ou seja, de separação entre átomo e modo 1, ocorre durante os ressurgimentos das oscilações de Rabi da inversão atômica. Apesar de serem modelos de interação radiação-matéria bastante distintos, é interessante apontar o contraste entre o nosso modelo e o modelo de Jaynes-Cummings, no qual o emaranhamento é máximo justamente nos ressurgimentos [34].

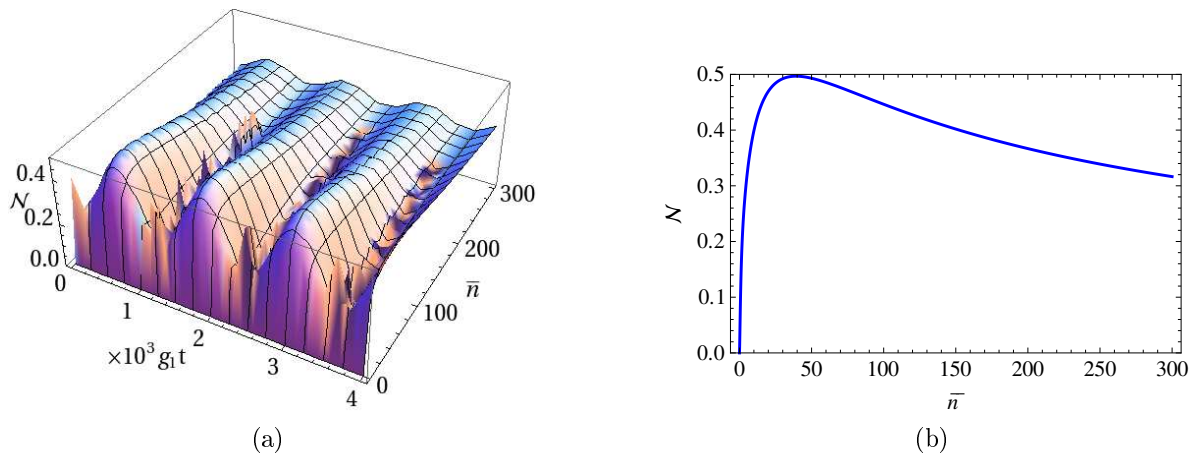


Figura 4.3: (a) Negatividade em função do tempo escalonado $t' = g_1 t$ e do número médio de fótons coerentes \bar{n} , quando fixamos o número de fótons no estado de Fock em $N = 40$; (b) uma seção transversal da superfície mostrando a Negatividade em função do número médio de fótons coerentes \bar{n} , quando fixamos o tempo escalonado em $t' = 3000$ e o número de fótons do modo 1 em $N = 40$.

Uma maneira de visualizar a Negatividade considerando o tempo e uma faixa ampla de valores de \bar{n} é através da Figura 4.3a, a qual mostra claramente a periodicidade do emaranhamento quando fixamos as populações dos modos. Além disso, notamos que a Negatividade é praticamente nula para valores de \bar{n} próximos do vácuo, crescendo rapidamente à medida que aumentamos a população do modo coerente até atingir valor máximo igual a 0,5 quando os modos apresentam o mesmo número de fótons ($\bar{n} = N = 40$), a partir do qual temos um decréscimo a uma taxa lenta, com supressão do emaranhamento quando o número de fótons coerentes se torna suficientemente grande.

Vale a pena ressaltar que este comportamento ocorre apenas nas regiões de picos da superfície, assim não temos a garantia de que o mesmo ocorra na região dos “vales”, que exibem um comportamento mais complicado, com oscilações rápidas. O mesmo pode ser visto na Figura 4.3b através de um “corte” da superfície que contem os picos ($t' = 3000$).

A situação de máximo emaranhamento átomo-modo 1 é claramente favorecida para uma preparação inicial simétrica, na qual os modos são igualmente populados em média.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação estudamos um sistema quântico tripartite, composto por um átomo na configuração Λ interagindo com dois modos do campo eletromagnético via transições a dois fótons. Deduzimos o Hamiltoniano efetivo utilizando uma transformação unitária no regime de alta dessintonia átomo-campo ($g_{1(2)}/\Delta \ll 1$), o que permitiu desacoplar o nível intermediário e obter um sistema a dois níveis efetivos. Apresentamos sua solução analítica e investigamos a influência do segundo modo na dinâmica do átomo, em especial a inversão atômica.

Em uma etapa inicial, preparamos os modos da cavidade em estados coerentes e em seguida trocamos o segundo modo, até então em estado coerente, por um estado térmico. No regime de alta dessintonia, mostramos que as oscilações de Rabi são periódicas e revivem independentemente da intensidade ou do tipo dos campos. Atribuímos essa característica do modelo à linearidade da frequência de Rabi com os números de fótons de cada modo. Ao trocar os papéis dos modos na preparação coerente-coerente (Figura 3.5), observamos que as amplitudes das inversões atômicas são ligeiramente maiores nos casos em que o modo 1 é mais populado, o que mostra sua influência direta nas inversões. Quando preparamos o segundo modo em estado térmico (Figura 3.6), a troca dos papéis não produz um efeito tão claro como na preparação coerente-coerente, entretanto há uma redução da amplitude quando comparamos as duas preparações nos casos em que $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$ e vice-versa. Isso pode ser entendido em termos das estatísticas poissoniana e térmica no entorno de seus valores máximos, a primeira contribui na somatória dupla com valores maiores distribuídos em torno da média enquanto que a luz caótica apresenta uma estatística de fótons “espalhada” e com valores menores quando comparados à poissoniana. Finalizamos o capítulo 3 analisando a preparação Fock-coerente, relacionada ao estudo posterior de emaranhamento. No caso de uma preparação inicial com o mesmo número médio de fótons em cada modo, o átomo apresenta ressurgimentos bem definidos, com probabilidade de ocupação do nível $|2\rangle$ ($|1\rangle$),

relativamente próxima da unidade.

Na segunda parte do trabalho, fizemos um estudo do emaranhamento entre o átomo e o “modo 1” do campo (emaranhamento bipartite), tendo sido feito um traço parcial sobre o “modo 2”, considerado um subsistema “externo”; foi utilizada a negatividade como medida de emaranhamento, e foi verificada explicitamente a inadequação da entropia linear como medida de emaranhamento neste caso. Isso já era esperado, visto que o estado global (átomo + modo 1) não é um estado puro.

Fixando o número de fótons do estado de Fock (Figura 4.3b) e avaliando a Negatividade nos instantes em que a função atinge valores máximos, por exemplo em $t' = 3000$, constatamos que os subsistemas átomo-modo 1 se emaranham maximamente quando os modos atingem um regime de igual número de fótons em média e à medida que a diferença entre as populações dos modos aumenta o emaranhamento tende a degradar, indo à zero nos limites em que \bar{n} é muito pequeno (vácuo) ou muito grande comparado ao outro modo.

Apêndice

Neste apêndice deduzimos o Hamiltoniano efetivo do modelo Raman acoplado empregando o método da eliminação adiabática, considerando os termos de “Stark shift”, ao contrário de que foi feito pelos autores na referência [6]. Passemos então para a representação de Heisenberg, na qual um operador genérico denotado por X_t tem a seguinte transformação dos operadores usuais¹

$$X_t(t) = e^{iHt} X e^{-iHt}, \quad (1)$$

sendo H o Hamiltoniano total dado pelas eqs. (3.2), (3.3) e com $\hbar = 1$ por conveniência. A equação de movimento dos operadores nessa descrição possui a forma

$$\dot{X}_t = i [H, X_t], \quad (2)$$

onde o segundo membro envolve o comutador entre o Hamiltoniano total e o operador e o ponto significa derivada temporal. Após obter as equações de movimento e substituir as definições

$$(\tilde{a}_j)_t = \exp(i\omega_j t) (a_j)_t,$$

$$(\tilde{\sigma}_{3j})_t = \exp[i(E_j - E_3)t] (\sigma_{3j})_t, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

$$(\tilde{\sigma}_{21})_t = \exp[i(E_1 - E_2)t] (\sigma_{21})_t,$$

resulta no conjunto de equações acopladas

$$i \left(\dot{\tilde{a}}_j \right)_t = g_j \exp(-i\Delta t) \left(\dot{\tilde{\sigma}}_{3j}^\dagger \right)_t, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

¹isto é, na representação de Schrödinger.

$$i (\dot{\sigma}_{11})_t = -g_1 \exp(i\Delta t) (\tilde{a}_1)_t (\tilde{\sigma}_{31})_t + g_1 \exp(-i\Delta t) (\tilde{\sigma}_{31}^\dagger)_t (\tilde{a}_1^\dagger)_t, \quad (5)$$

$$i (\dot{\sigma}_{22})_t = -g_2 \exp(i\Delta t) (\tilde{a}_2)_t (\tilde{\sigma}_{32})_t + g_2 \exp(-i\Delta t) (\tilde{\sigma}_{32}^\dagger)_t (\tilde{a}_2^\dagger)_t, \quad (6)$$

$$i (\dot{\sigma}_{33})_t = g_1 \exp(i\Delta t) (\tilde{a}_1)_t (\tilde{\sigma}_{31})_t + g_2 \exp(i\Delta t) (\tilde{a}_2)_t (\tilde{\sigma}_{32})_t - h.c., \quad (7)$$

$$i (\dot{\tilde{\sigma}}_{21})_t = g_1 \exp(-i\Delta t) (\tilde{\sigma}_{32}^\dagger)_t (\tilde{a}_1^\dagger)_t - g_2 \exp(i\Delta t) (\tilde{a}_2)_t (\tilde{\sigma}_{31})_t, \quad (8)$$

$$i (\dot{\tilde{\sigma}}_{31})_t = \exp(-i\Delta t) \left\{ g_1 [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{11})_t] (\tilde{a}_1^\dagger)_t - g_2 (\tilde{\sigma}_{21})_t (\tilde{a}_2^\dagger)_t \right\}, \quad (9)$$

$$i (\dot{\tilde{\sigma}}_{32})_t = \exp(-i\Delta t) \left\{ g_2 [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{22})_t] (\tilde{a}_2^\dagger)_t - g_1 (\tilde{\sigma}_{21})_t (\tilde{a}_1^\dagger)_t \right\}. \quad (10)$$

Agora, eliminamos adiabaticamente [35] o estado intermediário $|3\rangle$ integrando as equações (9) e (10). Supondo que os operadores variem lentamente em comparação às frequências ópticas, temos em primeira ordem

$$(\tilde{\sigma}_{31})_t \cong \frac{\exp(-i\Delta t)}{\Delta} \left\{ g_1 [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{11})_t] (\tilde{a}_1^\dagger)_t - g_2 (\tilde{\sigma}_{21})_t (\tilde{a}_2^\dagger)_t \right\}, \quad (11)$$

$$(\tilde{\sigma}_{32})_t \cong \frac{\exp(-i\Delta t)}{\Delta} \left\{ g_2 [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{22})_t] (\tilde{a}_2^\dagger)_t - g_1 (\tilde{\sigma}_{21})_t (\tilde{a}_1^\dagger)_t \right\}. \quad (12)$$

Quando levamos as eqs. (11) e (12) no conjunto (4)-(10) as eqs. se reduzem a

$$i (\dot{a}_1)_t \cong \omega_1 (a_1)_t + \frac{g_1^2}{\Delta} [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{11})_t] (a_1)_t - \frac{g_1 g_2}{\Delta} (a_2)_t (\sigma_{21}^\dagger)_t, \quad (13)$$

$$i (\dot{a}_2)_t \cong \omega_2 (a_2)_t + \frac{g_2^2}{\Delta} [(\sigma_{33})_t - (\sigma_{22})_t] (a_2)_t - \frac{g_1 g_2}{\Delta} (a_1)_t (\sigma_{12}^\dagger)_t, \quad (14)$$

$$i (\dot{\sigma}_{11})_t \cong \frac{g_1 g_2}{\Delta} \left[(a_1)_t (\tilde{a}_2^\dagger)_t (\sigma_{21})_t - (\tilde{a}_1^\dagger)_t (a_2)_t (\sigma_{12})_t \right], \quad (15)$$

$$i (\dot{\sigma}_{22})_t \cong \frac{g_1 g_2}{\Delta} \left[(\tilde{a}_1^\dagger)_t (a_2)_t (\sigma_{12})_t - (a_1)_t (\tilde{a}_2^\dagger)_t (\sigma_{21})_t \right], \quad (16)$$

$$(\dot{\sigma}_{33})_t \cong 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
i (\dot{\sigma}_{21})_t \cong & (E_1 - E_2) (\sigma_{21})_t + \frac{g_1 g_2}{\Delta} (a_1^\dagger)_t (a_2)_t [(\sigma_{11})_t - (\sigma_{22})_t] + \\
& - \frac{g_1^2}{\Delta} (a_1^\dagger)_t (a_1)_t (\sigma_{21})_t + \frac{g_2^2}{\Delta} (a_2^\dagger)_t (a_2)_t (\sigma_{21})_t, \tag{18}
\end{aligned}$$

as quais são de fato as equações de Heisenberg para os operadores a_1 , a_2 , σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{21} desde que o Hamiltoniano seja

$$\begin{aligned}
H' = & \sigma_{11} \left[E_1 - \frac{g_1^2}{\Delta} a_1^\dagger a_1 \right] + \sigma_{22} \left[E_2 - \frac{g_2^2}{\Delta} a_2^\dagger a_2 \right] + \\
& + \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 \tag{19} \\
& - \frac{g_1 g_2}{\Delta} (\sigma_{21} a_1 a_2^\dagger + \sigma_{12} a_1^\dagger a_2),
\end{aligned}$$

imediatamente reconhecido (a menos do \hbar) como o Hamiltoniano (3.11) encontrado via transformação unitária.

Referências Bibliográficas

- [1] C. C. GERRY e P. L. KNIGHT, *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, (2005).
- [2] *Escola de verão “Jorge André Swieca”: Óptica quântica e Óptica não-linear*, Campinas-SP, (1994).
- [3] E. SCHRÖDINGER, *Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik*, *Naturwissenschaften*, **14**, 664, (1926).
- [4] R. J. GLAUBER, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, *Phys. Rev.*, **131**, 2766, (1963).
- [5] B. W. SHORE e P. L. KNIGHT, *Topical Review: The Jaynes-Cummings model*, *J. Mod. Opt.*, **40**, 1195 (1993).
- [6] C. C. GERRY e J. H. EBERLY, *Dynamics of a Raman coupled model interacting with two quantized cavity fields*, *Phys. Rev. A*, **42**, 6805 (1990).
- [7] M. ALEXANIAN e S. K. BOSE, *Unitary tranformation and the dynamics of a three-level atom interacting with two quantized field modes*, *Phys. Rev. A*, **52**, 2218 (1995).
- [8] Y. WU, *Effective Raman theory for a three-level atom in the Λ configuration*, *Phys. Rev. A*, **54**, 1586 (1996).
- [9] W. K. LAI, V. BUZEK e P. L. KNIGHT, *Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum*, *Phys. Rev. A*, **44**, 6043 (1991).
- [10] ASOKA BISWAS e G. S. AGARWAL, *Quantum Logic gates using Stark-shifted Raman transitions in a cavity*, *Phys. Rev. A*, **69**, 062306 (2004).
- [11] M. ALEXANIAN e S. K. BOSE, *Optical Stark effects in the dynamics of a Raman coupled model*, *J. Luminescence*, **66**, 48-50 (1996).

- [12] A. PERES, *Separability criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett., **77**, 1413 (1996).
- [13] M. HORODECKI, P. HORODECKI e R. RORODECKI, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A, **223**, 1-8 (1996).
- [14] E. T. JAYNES e F. W. CUMMINGS, *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser*, IEEE, **51**, 89 (1963).
- [15] J. H. EBERLY, N. B. NAROZHNY e J. J. SÁNCHEZ-MONDRAGÓN, *Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model*, Phys. Rev. Lett., **44**, 1323 (1980).
- [16] N. B. NAROZHNY, J. J. SÁNCHEZ-MONDRAGÓN e J. H. EBERLY, *Coherence versus Incoherence: Collapse and Revival in a Simple Quantum Model*, Phys. Rev. A, **23**, 236 (1981).
- [17] H. J. KIMBLE, M. DAGENAIS e L. MANDEL, *Photon antibunching in resonance fluorescence*, Phys. Rev. Lett., **39**, 691 (1977).
- [18] P. MEYSTRE e M. S. ZUBAIRY, *Squeezed States in the Jaynes-Cummings Model*, Phys. Lett. A, **89**, 390 (1982).
- [19] J. R. KUKLINSKI e J. L. MADAJCZYK, *Strong Squeezing in the Jaynes-Cummings Model*, Phys. Rev. A, **37**, 3175 (1988).
- [20] H. MOYA-CESSA e A. VIDIELLA-BARRANCO, *Interaction of Squeezed Light with Two-Level Atoms*, J. Mod. Opt. **39**, 2481 (1992).
- [21] J. M. RAIMOND, M. BRUNE e S. HAROCHE, *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*, Rev. Mod. Phys., **73**, 565 (2001).
- [22] B. BUCK e V. SUKUMAR, *Exactly soluble model of atom-phonon coupling showing periodic decay and revival*, Phys. Lett. A, **81**, 132 (1981).
- [23] C. C. GERRY, *Two-photon Jaynes-Cummings model interacting with the squeezed vacuum*, Phys. Rev. A, **37**, 2683 (1988).
- [24] I. ASHRAF, J. GEA-BANACLOCHE e M. S. ZUBAIRY, *Theory of the two-photon micromaser: Photon statistics*, Phys. Rev. A, **42**, 6704 (1990).
- [25] P. L. KNIGHT, *Quantum Fluctuations and Squeezing in the Interaction of an Atom with a Single Field Mode*, Physica Scripta, **33**, 51 (1986).

- [26] S. J. D. PHOENIX, e P. L. KNIGHT, *Periodicity, phase, and entropy in models of two-photon resonance*, J. Opt. Soc. Am. B, **7**, 116 (1990).
- [27] V. BUZEK, e I. JEX, *Emission spectra for the Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling*, Quant. Optics, 2, **147** (1989).
- [28] G. B. BENIVEGNA, A. MESSINA e A. NAPOLI, *Canonical dressing in nonlinear Jaynes-Cummings models*, Phys. Lett. A, **194**, 353 (1994).
- [29] T. QUANG, P. L. KNIGHT e V. BUZEK, *Quantum collapses and revivals in an optical cavity*, Phys. Rev. A, **44**, 6092 (1991).
- [30] S. M. BARNETT e P. L. KNIGHT, *Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance*, Phys. Rev. A, **33**, 2444 (1986).
- [31] M. KOZIEROWSKI e A. S. SHUMOVSKY, *Photon statistics in an N -level ($N - 1$)-mode system*, Physica A, **145**, 290 (1987).
- [32] J. PARKER e C. R. STROUD, J. Opt. Soc. Am. B, **3**, 96 (1986).
- [33] G. B. BENIVEGNA e A. MESSINA, *Collective behavior of M bosonic modes interacting with a single two-level atom*, Phys. Rev. A, **37**, 4747 (1988).
- [34] S. J. D. PHOENIX, e P. L. KNIGHT, *Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model*, Phys. Rev. A, **44**, 6023 (1991).
- [35] R. R. PURI e R. K. BULLOUGH, *Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity*, J. Opt. Soc. Am. B, **5**, 2021 (1988).