

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Supersimetria em Física de Partículas

André Paniago Lessa

Orientador: Orlando L. G. Peres

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Orlando L. G. Peres

Prof. Dr. Marcelo M. Guzzo

Prof. Dr. Oscar Éboli

Este exemplar corresponde à versão final da Tese de Mestrado defendida pelo aluno André Paniago Lessa e aprovada pela comissão julgadora.

Março 2007

Physics is like sex: sure, it may give some practical results,

but that's not why we do it.

Richard P. Feynman

Resumo

O modelo padrão das partículas elementares, baseado na invariância de Lorentz e na simetria de gauge $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, foi confirmado por todos os testes experimentais até o momento. No entanto, nada nos garante que é este o modelo final das interações fundamentais. Problemas teóricos como a hierarquia, o número de gerações de partículas e a assimetria bariônica e alguns dados experimentais (neutrinos massivos, matéria e energia escura) sugerem a necessidade de física além do Modelo Padrão (SM). Alguns destes problemas são resolvidos em uma importante classe de modelos, que assumem a existência de simetrias espaciais adicionais, chamada de supersimetria. A proposta deste projeto é estudar a idéia de supersimetria e sua possível relevância para a física além do Modelo Padrão. Para entendermos o princípio da supersimetria, iremos construir o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) e apresentar algumas de suas conseqüências fenomenológicas. Também serão apresentados os modelos mSUGRA e mGMSB, assim como algumas de suas principais características. Em Anexo apresentaremos algumas informações complementares, além de um trabalho desenvolvido em paralelo com o projeto de Mestrado.

Abstract

The standard model of elementary particles, based in Lorentz invariance and in the gauge symmetries $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, was confirmed by all experimental data so far. However there is no evidence that it is the final theory of fundamental interactions. In fact, several theoretical evidences, such as the hierarchy problem, baryogenesis and the number of families and a few experimental data (neutrino masses, dark matter and dark energy) suggest that we should look for physics beyond the Standard Model (SM). Some of these problems are solved in an important class of models, which assume the existence of additional spatial symmetries, called supersymmetry. The objective of this thesis is to study the concept of supersymmetry and its potential relevance to the physics beyond the Standard Model. To understand the principle of supersymmetry we will construct the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) and present some of its phenomenological consequences. We will also present the mSUGRA and mGMSB models, as well as some of its properties. In the Appendix we show some complementary information and a parallel work developed during this project.

Agradecimentos

Esta dissertação é resultado de pelo menos quatro anos de estudos, discussões, trabalho e sobretudo muita diversão. Agradeço primeiramente ao meu orientador, Prof. Orlando Luis Goulart Peres, já que sem ele esta tese não teria sequer sonhado em existir. Agradeço também a todos os professores que foram fundamentais para minha formação, principalmente os professores Marcelo Moraes Guzzo, Guillermo Cabrera, Marcus Aguiar e Eduardo Miranda. Aos meus amigos durante estes últimos seis anos, que possibilitaram boas discussões, Éric e Fernando. Agradeço ainda aos meus pais Sergio e Cristina, os verdadeiros responsáveis por me mostrarem o prazer que é fazer ciência. Acima de tudo agradeço a minha namorada Christini, por todo o apoio dado durante todo este trabalho e tantos outros.

Finalmente agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução	1
1 Revisão do Modelo Padrão	5
1.1 Aspectos Gerais	5
1.2 Termos de Massa	6
1.3 Grupo de Gauge	7
1.4 Algumas Restrições Fenomenológicas	8
1.4.1 Setor Eletrofraco	8
1.5 Interações Fracas	8
1.5.1 Setor Leptônico	9
1.5.2 Setor Hadrônico	15
1.6 Cromodinâmica Quântica	17
2 Supersimetria	19
2.1 Álgebras Físicas	19
2.1.1 Representações do Grupo de Lorentz	20
2.1.2 Teorema de Coleman-Mandula	23
2.1.3 Pseudo-Álgebras	24
2.1.4 Teorema Haag-Lopuszanski-Sohnius	25
2.2 Álgebra Supersimétrica	28
2.2.1 Simetria R	29
2.3 Representações	29
2.3.1 Estados Sem Massa	31
2.3.2 Estados Massivos	32
2.3.3 Graus de Liberdade Bosônicos e Fermiônicos	33
2.4 Superespaço	34
2.4.1 Operadores no Superespaço	34
2.5 Supercampos	36
2.5.1 Supercampos Quirais	38
2.5.2 Ações Supersimétricas	41

2.5.3	Renormalizabilidade	42
2.5.4	Supercampos Vetoriais	45
2.6	Invariância de Gauge	47
2.6.1	Tensor de Força	50
2.6.2	Teoria de Gauge Supersimétrica	55
2.7	Quebra Espontânea de Supersimetria	57
2.7.1	Modelo de O’Raifeartaigh	60
2.7.2	Termo de Fayet-Iliopoulos	61
2.7.3	Supertraço das Massas	63
3	MSSM	67
3.1	Problema de Hierarquia	67
3.2	Lagrangeana	71
3.2.1	Paridade R	72
3.2.2	Quebra Espontânea de Simetria no MSSM	74
3.2.3	Quebra <i>Soft</i> de Simetria	75
3.2.4	Parâmetros do MSSM	76
3.3	Massas	78
3.3.1	Férmions de Majorana e de Dirac	78
3.3.2	Potencial Escalar Neutro	79
3.3.3	Quarks e Léptons	85
3.3.4	Bósons de Gauge	85
3.3.5	Higgsinos e Gauginos	86
3.3.6	Squarks	88
3.3.7	Sléptons	89
3.3.8	Limite Supersimétrico	89
3.4	Interações do MSSM	90
3.4.1	Potencial de Kähler	90
3.4.2	Tensor de Força	95
3.4.3	Superpotencial	96
3.4.4	Potencial Escalar	97
3.4.5	Violação de Sabor	99
3.4.6	Unificação das Constantes de Acoplamento	102
4	Quebra de Supersimetria	105
4.1	Quebra via SUGRA	106
4.1.1	mSUGRA	109
4.2	Quebra Mediada por Interações de Gauge	118
4.2.1	mGMSB	125
4.3	Vínculos Experimentais	129

Conclusão	137
A Notação e Convenções	139
A.1 Espinores	139
A.2 Identidades	141
B Supermultipletos Massivos	142
C Quebra Espontânea de Paridade R	145
C.1 Novos Limites para Acoplamentos Neutrino-Majoron	149
C.1.1 Resultados	151
C.1.2 Conclusões	158
Referências Bibliográficas	159

Lista de Figuras

3.1	Massa do Higgs em nível de árvore	84
3.2	Violação de sabor (oscilação $K^0 - \bar{K}^0$)	99
3.3	Momento de dipolo elétrico	101
3.4	Unificação de gauge	103
4.1	Evolução das massas <i>soft</i> no mSUGRA 1	113
4.2	Evolução das massas <i>soft</i> no mSUGRA 2	113
4.3	Espectro mSUGRA	115
4.4	Massas do Higgs e do Neutralino no mSUGRA 1	116
4.5	Massas do Higgs e do Neutralino no mSUGRA 2	116
4.6	Problema μ no mSUGRA 1	117
4.7	Problema μ no mSUGRA 2	117
4.8	Geração de massas <i>soft</i> no GMSB	120
4.9	Funções - GMSB	121
4.10	Massa do Higgs no mGMSB	124
4.11	Evolução de massas <i>soft</i> no mGMSB 1	126
4.12	Evolução de massas <i>soft</i> no mGMSB 2	126
4.13	Espectro de massas no mGMSB	127
4.14	Problema μ no mGMSB	128
4.15	Limites para as massas de algumas superpartículas	131
4.16	Curvas de exclusão no plano $m_0 - M_{1/2}$	132
4.17	Mapas de <i>likelihood</i> para o mSUGRA	134
4.18	mSUGRA no LHC	135
4.19	Análise de ajuste fino para o LHC	136
C.1	Decaimento do próton	145
C.2	Decaimento do múon (espectro do elétron)	154
C.3	Limites para o espectro do elétron	155
C.4	Decaimento do múon (espectro dos neutrinos)	156
C.5	Curvas de exclusão (base de massa)	157

Lista de Tabelas

1.1	Partículas do Modelo Padrão	8
1.2	Léptons no Modelo Padrão.	12
1.3	Quarks e suas representações sob os grupos de gauge.	15
3.1	Supercampos do MSSM e suas representações	71
4.1	Alguns parâmetros do Modelo Padrão	130
4.2	Limites para as massas das superpartículas	131
C.1	Limites para os acoplamentos neutrino - Majoron	152

Introdução

A idéia de utilizar simetrias para orientar a construção de teorias sempre esteve presente no desenvolvimento da física fundamental, mesmo que de maneira indireta. Com o desenvolvimento da teoria de grupos e do formalismo de teoria de campos, o uso de simetrias se tornou uma ferramenta extremamente poderosa para a investigação da natureza.

A importância de simetrias para o desenvolvimento da física dificilmente pode ser superestimada. A existência de simetrias espaciais (locais) nos permite estender todo o conhecimento obtido em nossos laboratórios para o restante do Universo. A invariância por translações e rotações, por exemplo, permite que descrevamos a evolução de estrelas com as mesmas leis fundamentais válidas na Terra. Boa parte das grandes descobertas experimentais está relacionada à descoberta de novas simetrias. O teorema de Noether, que relaciona diretamente grandezas conservadas com simetrias nos fornece as ferramentas necessárias para buscar e testar experimentalmente novas simetrias. A construção da Relatividade Especial é um exemplo claro de como a descoberta de grandezas conservadas (neste caso a velocidade da luz) nos permite formular simetrias (a invariância de Lorentz).

Com o desenvolvimento da física de partículas, uma nova classe de simetrias se mostrou relevante para a descrição da natureza, as simetrias de gauge. Ao contrário das simetrias espaciais, simetrias de gauge transformam graus de liberdades internos das partículas e portanto nos permitem relacionar partículas com diferentes números quânticos. Logo, o conteúdo de partículas fundamentais e suas interações deixam de ser totalmente arbitrários, já que as partículas devem se acomodar em multipletos do grupo de gauge e interagem através da troca de bósons de gauge.

A união de simetrias espaciais (invariância de Lorentz) e de simetrias de gauge permitiu a construção do Modelo Padrão (SM), que prediz corretamente um número excepcional de resultados experimentais e observações cosmológicas. O momento magnético do elétron, por exemplo, foi medido com uma precisão de 12 dígitos:

$$g_e^{exp} = 1.001159652186 \pm 0.000000000004 \mu_B$$

Enquanto a previsão teórica do Modelo Padrão (incluindo diagramas até ordem α^4) é [1]:

$$g_e^{SM} = 1.001159652176 \pm 0.000000000009 \mu_B$$

Como o cálculo teórico envolve diagramas de até 4-loops e estes são sensíveis a todas as partículas existentes (incluindo possíveis novas partículas), a concordância com o resultado experimental pode ser considerado como um enorme sucesso do Modelo Padrão.

Apesar de ter passado por uma enorme quantidade de testes experimentais, o SM é uma teoria efetiva, válida até uma determinada escala de energia. A hipótese mais conservadora é assumir que esta escala seja a escala de Planck ($\sim 10^{19}$ GeV), onde a gravitação quântica se torna relevante. No entanto, alguns dados experimentais sugerem que o Modelo Padrão deve falhar em energias muito inferiores. Como alguns exemplos, podemos citar a existência de neutrinos massivos, as recentes descobertas de energia e matéria escura e a assimetria bariônica. Porém, nenhum destes sugere a escala na qual o SM deve ser substituído por uma teoria mais fundamental.

Felizmente, assim como no eletromagnetismo clássico (ver Seção 3.1), o Modelo Padrão contém uma escala natural de energia, a escala eletrofraca ($\sim 10^2$ GeV). Desta forma, argumentos teóricos de naturalidade nos permitem esitmar o *cut-off* do SM ($\sim 10^3$ GeV). Mas qual teoria deve substituir o Modelo Padrão nesta nova escala? Até agora, os poucos indícios experimentais não apontam para nenhuma teoria em particular. Porém, devido ao enorme êxito do uso de simetrias para a construção do Modelo Padrão, é natural buscar novos tipos de simetrias que possam orientar a construção de extensões do SM.

Na década de 60, a tentativa de estender as simetrias espaciais e de uni-las com simetrias de gauge resultaram em uma série de teorias inconsistentes ou sem relevância física. Em 1967, Coleman e Mandula provaram sob hipóteses bem gerais que o único tipo de simetria relevante para a construção de modelos realistas deve ser um produto direto entre um grupo de gauge e o grupo de Poincaré. Ou seja, toda tentativa de ampliar as simetrias do Modelo Padrão deveria se restringir à modificações do grupo de gauge. As Teorias de Grande Unificação ou GUTs e os modelos Little Higgs são exemplos de tais tentativas.

Em 1975, Haag, Lopuszanski e Sohnius estenderam o Teorema de Coleman-Mandula de tal forma a permitir uma generalização das simetrias espaciais do grupo de Poincaré, através da introdução de simetrias espaciais fermiônicas e, conseqüentemente, de dimensões espaciais não comutativas. A extensão do grupo de Poincaré ficou conhecida como supergrupo de Poincaré e as novas simetrias espaciais como supersimetria. Por envolver operadores fermiônicos, a supersimetria permite transformar campos bosônicos em fermiônicos e fermiônicos em bosônicos.

Apesar de inicialmente terem sido introduzidas em outro contexto, teorias supersimétricas tornaram-se relevantes por permitirem estender o Modelo Padrão, tornando a escala eletrofraca uma escala natural, mesmo que o *cut-off* da teoria seja a escala de Planck. Além disso, a extensão supersimétrica do SM permite uma grande quantidade de nova física, que pode explicar alguns dos problemas citados acima, como a assimetria bariônica e a matéria escura. Por estes motivos teorias supersimétricas se tornaram uma das principais candidatas para a física além do Modelo Padrão.

Este trabalho tem como objetivo um estudo das principais características de teorias

supersimétricas e sua relevância para a física além do Modelo Padrão. Apesar de o problema de hierarquia (Seção 3.1) usualmente ser considerado como a principal motivação para supersimetria, adotaremos aqui uma abordagem um pouco diferente, introduzindo a idéia de supersimetria como o maior grupo de simetrias espaciais compatível com o grupo de Poincaré. Portanto, na primeira parte deste trabalho discutiremos os teoremas de Coleman-Mandula e Haag-Lopuszanski-Sohnius e como estes nos levam à definição da álgebra supersimétrica. Usando argumentos fenomenológicos nos restringiremos ao estudo de teorias supersimétricas em quatro dimensões e com $N = 1$ (ver Seção 2.3). Após o estudo da álgebra supersimétrica e de suas representações apresentaremos os principais conceitos (superespaço e supercampos) utilizados na construção de uma lagrangeana supersimétrica. Em seguida discutiremos o conceito de invariância de gauge em supersimetria e como estas são generalizadas para o superespaço. Finalmente, apresentaremos a lagrangeana supersimétrica, invariante de gauge e renormalizável mais geral possível. A partir desta discutiremos a quebra espontânea de supersimetria e suas dificuldades teóricas.

Com os conceitos discutidos na primeira parte, construiremos a extensão supersimétrica mínima do Modelo Padrão (MSSM), onde introduziremos seus supercampos fundamentais, suas simetrias de gauge e o conceito de Paridade R. Em seguida discutiremos a quebra de supersimetria no MSSM, onde apresentaremos os termos de quebra *soft*. Com base na lagrangeana do MSSM e nos termos *soft* construiremos as matrizes de massa da teoria e algumas de suas principais interações. A partir destas discutiremos algumas propriedades do MSSM, como a unificação das constantes de acoplamento e o problema de violação de sabor.

Na terceira parte discutiremos dois dos principais modelos para estudos fenomenológicos do MSSM, o mSUGRA e o mGMSB. Apresentaremos algumas de suas propriedades e calcularemos o espectro de massa destes dois modelos. Em seguida mostraremos alguns dos vínculos experimentais para o mSUGRA e uma breve análise da região do espaço de parâmetros favorecida por alguns dados experimentais. Devido à extensão e complexidade do assunto, alguns importantes tópicos foram omitidos, sobretudo com relação aos processos utilizados para buscas diretas e indiretas de superpartículas.

Finalmente, no Apêndice estão algumas informações complementares, assim como uma breve discussão de modelos com quebra de Paridade R. Neste contexto apresentamos um trabalho desenvolvido em paralelo com o projeto de Mestrado relativo a acoplamentos neutrino-Majoron. Exceto quando citado explicitamente, todos os gráficos apresentados neste trabalho foram realizados por nós.

Antes de discutirmos o conceito de supersimetria, apresentaremos brevemente o Modelo Padrão, onde introduziremos alguns conceitos que serão utilizados posteriormente, sobretudo na definição do MSSM.

Capítulo 1

Revisão do Modelo Padrão

Todo modelo aceitável em física de partículas deve reproduzir com precisão os dados experimentais acumulados nas últimas décadas. Como citado anteriormente, estes dados são extremamente bem descritos pelo Modelo Padrão. Logo, qualquer modelo de física além do Modelo Padrão deve, no limite de baixas energias, se reduzir ao SM. Desta forma, o modelo supersimétrico mais simples nada mais é do que a generalização mínima do Modelo Padrão, de tal forma que este se torne invariante por transformações supersimétricas (ver Capítulo 3). Portanto, apresentaremos aqui algumas características básicas do Modelo Padrão, que posteriormente serão generalizadas no MSSM. Serão discutidos apenas algumas das hipóteses do modelo e como estas nos fornecem as interações de gauge do SM. Consequentemente diversos tópicos importantes não serão discutidos.

1.1 Aspectos Gerais

O Modelo Padrão é construído sobre três pilares fundamentais: invariância pelo Grupo de Poincaré (discutido na Seção 2.1.1), invariância de gauge e renormalizabilidade. Além disso, devemos determinar qual o conteúdo de campos da teoria.

As invariâncias de Lorentz e gauge limitam os tipos de acoplamento possíveis entre os campos. A derivada covariante define o acoplamento entre os campos de gauge e os demais campos, enquanto a invariância de Lorentz exige que ψ e ϕ tenham acoplamentos do tipo $a\bar{\psi}\psi\phi$. Em geral, temos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi + V(\phi, \psi)$$

onde¹:

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}^a \gamma^\mu D_\mu^{ab} \psi^b + \bar{\psi}^a M^{ab} \psi^b$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$$

¹ Sendo $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu^{ac} \phi_c)^\dagger D_\mu^{ab} \phi_b + P(\phi)$$

e

$$V(\phi, \psi) = \bar{\psi}^a \Gamma_{ab}^i \psi^b \phi_i$$

sendo D_μ^{ab} a derivada covariante, ψ^a e ϕ_a os diferentes campos fermiônicos e escalares da teoria, $P(\phi)$ um polinômio quártico nos campos ϕ , M e Γ^i matrizes de acoplamento entre os campos ψ e entre os campos ψ e ϕ e $F^{a\mu\nu}$ o tensor de força para os bósons de gauge.

Para que \mathcal{L} seja invariante de gauge, os campos ψ e ϕ devem se transformar como multipletos (de gauge), de tal forma que os acoplamentos respeitem a invariância de gauge. Além disso, nenhum multipletto pode misturar campos fermiônicos e escalares, já que isto resultaria em relações de comutação não triviais entre o grupo de gauge e o grupo de Lorentz (ver Seção 2.1.2). Como exigido pela invariância de gauge, os campos de gauge se transformam de acordo com a representação adjunta.

1.2 Termos de Massa

Os campos fermiônicos² (diferentemente dos escalares e vetórias) ψ^a não se transformam por representações irredutíveis do grupo de Lorentz (novamente, ver Seção 2.1.1). Usando a representação de Weyl-Quiral, pode-se mostrar que as componentes de mão esquerda e direita de ψ^a pertencem à representações distintas. Logo, tais componentes podem pertencer a diferentes multipletos de gauge. As componentes de mão esquerda (*left-handed*) e de mão direita (*right-handed*) são definidas como³:

$$\psi_L^a = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi^a \text{ (mão esquerda)}$$

$$\psi_R^a = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi^a \text{ (mão direita)}$$

Logo, pode-se definir:

$$T_L^A = \frac{1 - \gamma^5}{2} T^A$$

$$T_R^A = \frac{1 + \gamma^5}{2} T^A$$

onde T^A são os geradores das transformações de gauge (não necessariamente irredutíveis) no espaço dos campos ψ . Desta forma, para uma transformação de gauge infinitesimal (parametrizada por $\epsilon^A(x)$):

$$\delta\psi^a = i\epsilon^A(x)(T^A)_{ab}\psi^b$$

$$\Rightarrow \delta\psi_{L,R}^a = i\epsilon^A(x)(T_{L,R}^A)_{ab}\psi_{L,R}^b$$

²Em todo o Capítulo 1 utilizaremos a notação usual de espinores de quatro componentes (4-espinores).

³A matriz γ^5 , assim como as demais matrizes γ estão definidas no Apêndice A.1.

Note que o projetor $\frac{1\pm\gamma^5}{2}$ opera nas componentes de um campo ψ^a , enquanto as matrizes T^A operam no espaço de multipletos $\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \dots \end{pmatrix}$ e portanto comutam.

No entanto o termo de massa acopla as componentes de mão esquerda e direita de ψ [2]. De fato, temos:

$$M^{ab}\bar{\psi}^a\psi^b = M^{ab}(\psi_L^{a\dagger}\psi_R^b + \psi_R^{a\dagger}\psi_L^b) \quad (1.1)$$

Aplicando uma transformação de gauge infinitesimal para este termo, obtém-se:

$$\delta(\bar{\psi}M\psi) = i\epsilon^A(x)\psi_L^\dagger(MT_R^A - T_L^A M)\psi_R + i\epsilon^A(x)\psi_R^\dagger(MT_L^A - T_R^A M)\psi_L$$

Portanto este termo só será invariante de gauge se:

$$MT_R^A = T_L^A M, \quad \forall A \quad (1.2)$$

Se as representações $t_{\alpha R}$ e $t_{\alpha L}$ forem diferentes e irredutíveis, pelo segundo lema de Schur [3], M deve ser nulo para que a Eq.(1.2) seja satisfeita. Ou seja, termos de massa são proibidos se as componentes *left* e *right* se transformarem por representações diferentes.

1.3 Grupo de Gauge

O Modelo Padrão assume o grupo de gauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, onde o subíndice C é utilizado para explicitar que $SU(3)$ é o grupo de cor, enquanto o subíndice L explicita a natureza quiral do grupo $SU(2)$ (apenas férmions *left-handed* se transformam de maneira não trivial por este grupo). Já o subíndice Y representa hipercarga. Daqui para frente estes índices serão omitidos.

A escolha do grupo de gauge determina quais são os campos vetoriais da teoria (bósons de gauge), quais são seus termos cinéticos e de auto-interação (através do tensor de força) e como estes se acoplam com os demais campos do Modelo Padrão (através das derivadas covariantes). Como o grupo de gauge do SM é composto pelo produto direto de três grupos, as derivadas covariantes são dadas por:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s T^a g_\mu^a + ig T^i W_\mu^i + ig' Y B_\mu$$

onde T^a , T^i e Y são os geradores dos grupos $SU(3)$, $SU(2)$ e $U(1)$, respectivamente. Enquanto g_s , g e g' são as constantes de acoplamento forte, fraca e de hipercarga.

Os tensores de força, que fornecem os termos cinéticos para os bósons de gauge são:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \quad F^{i\mu\nu} = \partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu} - g\epsilon_{ijk}W^{j\mu}W^{k\nu}$$

e

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu g^{a\nu} - \partial^\nu g^{a\mu} - g_s f_{abc} g^{b\mu} g^{c\nu}$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor antisimétrico de rank 3 e f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$. Termos do tipo $B^\mu B_\mu$ não são invariantes de gauge, o que impede termos de massa para os campos vetoriais se a simetria de gauge for exata.

1.4 Algumas Restrições Fenomenológicas

Apesar das severas restrições impostas à lagrangeana pela invariância de gauge e de Lorentz, ainda existe a liberdade de escolha dos multipletos para os campos ψ e ϕ e, conseqüentemente, de suas representações sob o grupo de gauge. Também resta a determinação do termo $P(\phi)$ e das matrizes M e Γ^i .

Dados experimentais sugerem o seguinte conteúdo de partículas elementares [4]:

Léptons	Quarks	Bósons Vetoriais
e^-, ν_e	u, d	$W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0$
μ^-, ν_μ	c, s	A_μ
τ^-, ν_τ	b, t	$g_\mu^a, a = 1, ..8$

Tabela 1.1: Conteúdo de partículas elementares do Modelo Padrão.

Como observa-se que os bósons g_μ e A_μ não são massivos, estes devem corresponder à simetrias de gauge exatas. Já os bósons W e Z possuem massas da ordem de 100 GeV e, portanto, devem corresponder à simetrias de gauge quebradas nesta escala. Além disso, verifica-se experimentalmente que os léptons não interagem com os glúons (g_μ), o que sugere que estes sejam singletos sobre o respectivo grupo de gauge [4].

1.4.1 Setor Eletrofraco

Medidas experimentais determinaram que processos eletrofracos envolvem violação de paridade (ou inversão espacial), ou seja, as componentes de mão esquerda e direita dos férmions se acoplam com os campos de gauge com constantes de acoplamento distintas. Portanto as componentes de mão esquerda e direita devem pertencer à multipletos distintos. De fato, dados experimentais mostram que para correntes carregadas (que envolvem W^+ ou W^-) o acoplamento é do tipo V-A [4] (violam maximalmente a paridade).

1.5 Interações Fracas

No modelo de Glashow-Weinberg-Salam para as interações eletrofracas, assume-se a quebra espontânea de simetria de tal forma que apenas um dos geradores seja conservado, correspondendo ao campo eletromagnético A_μ [4].

1.5.1 Setor Leptônico

Como veremos adiante, basta contruir $\mathcal{L}_{leptons}$ para uma geração, pois as demais serão idênticas. Para a primeira geração temos⁴:

Lépton	Carga (e)	Massa
e^-	-1	$\neq 0$
ν_e	0	= 0

Como as componentes de mão esquerda e direita devem pertencer a multipletos diferentes, assume-se (com relação ao grupo $SU(2)$) [4]:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \rightarrow \text{dubleto}, \quad \psi_R^e = e_R^- \rightarrow \text{singleto}$$

Desta forma as componentes de mão esquerda possuem os números quânticos de isospin (com relação à $SU(2)$) $t = \frac{1}{2}$ e $t_3 = \pm \frac{1}{2}$, respectivamente. Já as componentes de mão direita possuem $t = t_3 = 0$. Assim, com relação ao grupo $SU(2)$, temos a seguintes derivadas covariantes:

$$D_\mu \psi_L = (\partial_\mu + ig \frac{\sigma}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu) \psi_L$$

$$D_\mu \psi_R^e = \partial_\mu \psi_R^e$$

onde σ são as matrizes de Pauli e \mathbf{W}_μ os campos de gauge do $SU(2)$.

Como as representações de mão direita e esquerda são distintas (singleto e dubleto) e irreduzíveis, o termo de massa não pode existir (ver Seção 1.2). Logo:

$$M^{ab} = 0$$

Com relação ao grupo $U(1)$, como suas representações são unidimensionais, resta apenas determinar qual o número quântico de hipercarga (Y) atribuído para cada férmion. Por enquanto assumiremos apenas que as componentes de mão esquerda possuem um mesmo Y , enquanto as de mão direita possuem hipercargas distintas. Desta forma, sendo B_μ o campo de gauge do grupo $U(1)$, temos⁵:

$$\mathcal{L}_{lepton} = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R^e \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' \frac{Y_R^e}{2} B_\mu) \psi_R^e \quad (1.3)$$

onde $Y_R^{\nu,e}$ e Y_L são as hipercargas do neutrino e elétron de mão direita e do dubleto de mão esquerda e onde

$$i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu (\partial_\mu + ig \frac{\sigma}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu + ig' \frac{Y_L}{2} B_\mu) \psi_L \quad (1.4)$$

⁴No Modelo Padrão o neutrino não possui massa.

⁵Por convenção insere-se um fator $\frac{1}{2}$ em Y .

Usando explicitamente as matrizes de Pauli (definidas no Apêndice A) podemos reescrever a Eq.(1.4) como:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - \frac{g}{2}\bar{\psi}_L^\nu\gamma^\mu(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\psi_L^e \\ &- \frac{g}{2}\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\psi_L^\nu + -\frac{g}{2}\bar{\psi}_L\gamma^\mu\left(\frac{g'}{g}Y_L B_\mu + \sigma^3 W_\mu^3\right)\psi_L \end{aligned}$$

Devido à quebra espontânea de simetria, os campos W^1 e W^2 se tornarão massivos, enquanto os campos B e W^3 se combinarão em um campo massivo (Z^0) e outro não massivo (A_μ) de tal forma que podemos definir [4]:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

$$A_\mu = \cos\theta_w B_\mu + \sin\theta_w W_\mu^3 \quad (1.5)$$

$$Z_\mu = \cos\theta_w W_\mu^3 - \sin\theta_w B_\mu \quad (1.6)$$

onde $tg\theta_w = \frac{g'}{g}$. Portanto:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L &= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_L^\nu\gamma^\mu W_\mu^+\psi_L^e - \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu W_\mu^-\psi_L^\nu \\ &- g\sin\theta_w\bar{\psi}_L\gamma^\mu A_\mu\left(\frac{Y_L}{2} + \frac{\sigma^3}{2}\right)\psi_L - \frac{g}{2\cos\theta_w}\bar{\psi}_L\gamma^\mu Z_\mu(\sigma^3\cos^2\theta_w - Y_L\sin^2\theta_w)\psi_L \end{aligned} \quad (1.7)$$

Corrente Eletromagnética

Considerando apenas o termo proporcional ao campo eletromagnético A_μ na Eq.(1.7), temos o seguinte acoplamento:

$$-g\sin\theta_w\bar{\psi}_L\gamma^\mu A_\mu\left(\frac{Y_L}{2} + \frac{\sigma^3}{2}\right)\psi_L \quad (1.8)$$

Se interpretarmos este termo como um acoplamento proveniente de uma derivada covariante, podemos associar o operador $Q = \frac{Y_L}{2} + \frac{\sigma^3}{2}$ ao operador que gera as transformações de gauge do eletromagnetismo, ou seja, ao operador carga elétrica. Explicitando as componentes do elétron e do neutrino na Eq.(1.8):

$$-g\sin\theta_w\bar{\psi}_L^\nu\gamma^\mu A_\mu\left(\frac{Y_L}{2} + \frac{1}{2}\right)\psi_L^\nu - g\sin\theta_w\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu A_\mu\left(\frac{Y_L}{2} - \frac{1}{2}\right)\psi_L^e$$

Como os neutrinos não possuem carga elétrica, devemos ter $Y_L = -1$. Desta forma recuperamos o acoplamento de mão esquerda da QED, sendo a carga do elétron (em módulo) dada por $g\sin\theta_w$:

$$e\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu\psi_L^e A_\mu$$

Devido à sua estrutura de singlete, o acoplamento das componentes de mão direita são triviais (ver Eq.(1.3)):

$$-g' \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu \left(\frac{Y_R^e}{2} B_\mu \right) \psi_R^e = -\frac{g}{2} \sin\theta_w \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu (Y_R^e A_\mu) \psi_R^e + \text{termos de } Z_\mu$$

Como paridade não é violada em QED, as componentes de mão esquerda e direita do e^- devem possuir a mesma constante de acoplamento. Assim devemos atribuir $Y_R^e = -2$. Desta forma teremos:

$$\mathcal{L}_{lepton}^{EM} = e \bar{\psi}_L^e \gamma^\mu \psi_L^e A_\mu + e \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu \psi_R^e A_\mu = e \bar{\psi}^e \gamma^\mu \psi^e A_\mu$$

com $J_{EM}^\mu = e \bar{\psi}^e \gamma^\mu \psi^e$ e $e = g \sin\theta_w$.

Corrente Neutra

Considerando apenas o termo proporcional ao campo neutro Z_μ na Eq.(1.7), teremos:

$$-\frac{g}{2\cos\theta_w} \bar{\psi}_L \gamma^\mu Z_\mu (\sigma^3 \cos^2\theta_w - Y_L \sin^2\theta_w) \psi_L$$

como $Y_L = -1$:

$$\begin{aligned} & -\frac{g}{2\cos\theta_w} \bar{\psi}_L \gamma^\mu Z_\mu (\sigma^3 \cos^2\theta_w + \sin^2\theta_w) \psi_L \\ &= -\frac{e}{2\sin\theta_w \cos\theta_w} (\bar{\psi}_L^\nu \gamma^\mu \psi_L^\nu - \cos 2\theta_w \bar{\psi}_L^e \gamma^\mu \psi_L^e) Z_\mu \end{aligned}$$

Para as componentes de mão direita, usando as Eq.(1.3), Eq.(1.5) e Eq.(1.6):

$$-g' \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu \left(\frac{Y_R^e}{2} B_\mu \right) \psi_R^e = -\frac{e \sin^2\theta_w}{\sin\theta_w \cos\theta_w} \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu \psi_R^e Z_\mu$$

Então:

$$\mathcal{L}_{lepton}^{NC} = -\frac{e}{\sin\theta_w \cos\theta_w} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_L^\nu \gamma^\mu \psi_L^\nu - \frac{\cos 2\theta_w}{2} \bar{\psi}_L^e \gamma^\mu \psi_L^e + \sin^2\theta_w \bar{\psi}_R^e \gamma^\mu \psi_R^e \right) Z_\mu$$

Correntes Carregadas

Da Eq.(1.7) temos os seguintes termos de interação:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_L^\nu \gamma^\mu \psi_L^e W_\mu^+ + \bar{\psi}_L^e \gamma^\mu \psi_L^\nu W_\mu^-)$$

não havendo acoplamento das componentes de mão direita.

Resultados Gerais

Utilizando os resultados acima, podemos escrever os termos de interação do setor leptônico com os campos W^\pm , Z e A na forma:

$$\mathcal{L}_{leptons}^{int} = J_{EM}^\mu A_\mu + J_{NC}^\mu Z_\mu + J_-^\mu W_\mu^+ + J_+^\mu W_\mu^-$$

onde

$$J_{EM}^\mu = e\bar{\psi}^e\gamma^\mu\psi^e \quad (1.9)$$

$$J_{NC}^\mu = -\frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\left(\frac{1}{2}\bar{\psi}_L^\nu\gamma^\mu\psi_L^\nu - \frac{\cos 2\theta_w}{2}\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu\psi_L^e + \sin^2\theta_w\bar{\psi}_R^e\gamma^\mu\psi_R^e\right) \quad (1.10)$$

$$J_+^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_L^e\gamma^\mu\psi_L^\nu \quad (1.11)$$

$$J_-^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_L^\nu\gamma^\mu\psi_L^e \quad (1.12)$$

Além disso, temos os seguintes números quânticos relativos aos geradores do grupo $SU(2) \times U(1)$:

Léptons	Y	t_3	$Q = \frac{1}{2}Y + t_3$	Acoplamentos ($A_\mu, Z_\mu, W_\mu^+, W_\mu^-$)
e_L^-	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$e = g\sin\theta_w, \frac{g\cos 2\theta_w}{2\cos\theta_w}, -\frac{g}{\sqrt{2}}, -\frac{g}{\sqrt{2}}$
ν_{eL}	-1	$+\frac{1}{2}$	0	$0, \frac{-g}{2\cos\theta_w}, -\frac{g}{\sqrt{2}}, -\frac{g}{\sqrt{2}}$
e_R^-	-2	0	-1	$e, \frac{-g\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w}, 0, 0$

Tabela 1.2: Representações e acoplamentos de gauge para os léptons do Modelo Padrão.

As correntes carregadas J_μ^\pm acoplam apenas as componentes de mão esquerda, podendo ser reescritas como:

$$\begin{aligned} J_+^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\psi^{e\dagger}\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\dagger\gamma^0\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi^\nu \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\psi^{e\dagger}\gamma^0\gamma^\mu\frac{1}{4}(1-\gamma^5)^2\psi^\nu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}^e\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi^\nu \\ &\Rightarrow J_+^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}^e\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi^\nu \end{aligned}$$

e

$$J_-^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}^\nu\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi^e$$

que são do tipo puramente V-A. Já a corrente neutra pode ser reescrita como:

$$J_{NC}^\mu = -\frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\left[\frac{1}{2}\bar{\psi}^\nu\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi^\nu + \bar{\psi}^e\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_V - g_A\gamma^5)\psi^e\right]$$

onde $g_V = 2\sin^2\theta_w - \frac{1}{2}$ e $g_A = -\frac{1}{2}$. De tal forma que J_{NC}^μ representa uma corrente mista (com as componentes de mão direita e esquerda).

Finalmente, para a corrente J_{EM}^μ , temos:

$$J_{EM}^\mu = e\bar{\psi}^e\gamma^\mu\psi^e$$

que possui uma estrutura puramente vetorial, ou seja, que acopla igualmente as componentes de mão esquerda e direita.

Os resultados acima podem ser compreendidos diretamente da estrutura do grupo de gauge $SU(2)\times U(1)$. Como a invariância $SU(2)$ só se refere às componentes de mão esquerda (já que as componentes de mão direita são singletos com isospin zero), espera-se que os acoplamentos originados de suas derivadas covariantes sejam puramente axiais. De fato é o que ocorre com as correntes J_\pm^μ . Com relação ao grupo $U(1)$, os acoplamentos de mão esquerda e direita seriam iguais caso $Y_L = Y_R^c$, o que resultaria em uma corrente vetorial. No entanto os dois números quânticos são distintos, o que implica que a corrente correspondente à B_μ não é vetorial.

A quebra espontânea de simetria gera uma mistura entre os campos B_μ e W_μ^3 de tal forma que toda a estrutura puramente V-A das correntes associadas à estes campos é absorvida pela corrente J_{NC}^μ . Já a componente vetorial está parcialmente dividida em J_{EM}^μ e J_{NC}^μ .

Acoplamento $\phi - \psi$ e Termos de Massa

Como discutido anteriormente, o termo de massa para os léptons não pode existir, devido à natureza axial dos acoplamentos de gauge. No entanto, o mecanismo de quebra espontânea de simetria permite a geração de massa para os léptons, através de um acoplamento do tipo Yukawa: $\bar{\psi}^a\Gamma_{ab}^i\psi^b\phi_i$. Estes termos podem dar origem a termos de massa caso o escalar ϕ adquira um valor esperado no vácuo (vev) não nulo. Mas como o produto $\psi_L^\dagger\psi_R$ se transforma sob $SU(2)$ por [3]:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

, para que $\psi_L^\dagger M\psi_R\phi$ seja invariante, ϕ deve se transformar como um dubleto. Além disso, para que a quebra espontânea de simetria gere três campos de gauge massivos, devemos ter pelo menos quatro campos escalares (reais). Logo, assume-se que ϕ_i seja complexo e da forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Assim, sob transformações de gauge teremos:

$$\bar{\psi}_L\psi_R\phi \rightarrow \bar{\psi}_Le^{-i\epsilon(x)\cdot\frac{\sigma}{2}}\psi_Re^{i\epsilon(x)\cdot\frac{\sigma}{2}}\phi = \bar{\psi}_L\psi_R\phi$$

Impondo invariância por $U(1)$:

$$\bar{\psi}_L^a \psi_R \phi_a \rightarrow e^{-i\theta(x) \frac{Y_L}{2}} e^{i\theta(x) \frac{Y_R}{2}} e^{i\theta(x) \frac{Y_\phi}{2}} \bar{\psi}_L^a \psi_R \phi_a = \bar{\psi}_L^a \psi_R \phi_a$$

Para o e^- , $Y_L = -1$ e $Y_R = -2$, então devemos ter $Y_\phi = +1$. Incluindo-se as outras gerações (muônica e tauônica) com os mesmos números quânticos, obtemos as seguintes possibilidades:

$$\bar{\psi}_{L,e} \psi_R^{\mu,\tau,e} \phi, \bar{\psi}_{L,\mu} \psi_R^{\mu,\tau,e} \phi \text{ e } \bar{\psi}_{L,\tau} \psi_R^{\mu,\tau,e} \phi$$

onde $\bar{\psi}_{L,geracao}$ representa o dubleto de mão esquerda de cada geração e ψ_R^{lepton} representa o singleto de mão direita do lépton carregado. Estes termos podem ser reescritos na forma:

$$(\bar{\psi}_{L,e} \bar{\psi}_{L,\mu} \bar{\psi}_{L,\tau}) \lambda_l \begin{pmatrix} \psi_R^e \\ \psi_R^\mu \\ \psi_R^\tau \end{pmatrix} \phi \quad (1.13)$$

onde λ_l é uma matriz 3×3 cujos elementos são as constantes de acoplamento de Yukawa.

Após a quebra espontânea de simetria:

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \eta(x)$$

e os termos de massa se tornam:

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{L}_L \lambda_l L_R$$

onde $L_{L,R} = \begin{pmatrix} e_{L,R} \\ \mu_{L,R} \\ \tau_{L,R} \end{pmatrix}$ representa a componente de mão esquerda (direita) dos léptons carregados. Note que não existem restrições sobre a matriz λ_l , mas esta sempre podem ser diagonalizada por uma transformação biunitária:

$$\lambda_l^{diag} = S^\dagger \lambda_l T$$

onde $S^\dagger S = T^\dagger T = 1$ e λ_l^{diag} é diagonal. Assim podemos diagonalizar a matriz de massa escrevendo os autoestados de sabor em termos dos autoestados de massa:

$$L_R = T \tilde{L}_R, \quad L_L = S \tilde{L}_L$$

então:

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{L}_L \lambda_l L_R = \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\tilde{L}}_L \lambda_l^{diag} \tilde{L}_R$$

sendo que as massas dos léptons carregados serão $\frac{v}{\sqrt{2}} (\lambda_l^{diag})_i$.

Resta ainda determinar quais as alterações nas interações devido às redefinições acima. Note que só serão alteradas as correntes que misturarem neutrinos e léptons ou componentes de mão direita e esquerda. Incluindo os demais sabores nas correntes das Eq.(1.9)-Eq.(1.12), temos:

$$\begin{aligned}
J_{EM}^\mu &= e\bar{L}_L\gamma^\mu L_L + e\bar{L}_R\gamma^\mu L_R \\
J_{NC}^\mu &= \frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\left(\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \frac{\cos 2\theta_w}{2}\bar{L}_L\gamma^\mu L_L + \sin^2\theta_w\bar{L}_R\gamma^\mu L_R\right) \\
J_+^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{L}_L\gamma^\mu\nu_L \\
J_-^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L\gamma^\mu L_L
\end{aligned}$$

Das expressões acima vemos que apenas as correntes carregadas sofrerão modificações:

$$\begin{aligned}
J_+^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{L}_L\gamma^\mu\nu_L = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{L}_L\gamma^\mu S^\dagger\nu_L \\
J_-^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L\gamma^\mu L_L = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L S\gamma^\mu\tilde{L}_L
\end{aligned}$$

No entanto, como os neutrinos não são massivos, podemos simplesmente redefini-los como:

$$\nu'_L = S^\dagger\nu_L$$

Assim:

$$J_+^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{L}_L\gamma^\mu\nu'_L, \quad J_-^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}'_L\gamma^\mu\tilde{L}_L$$

1.5.2 Setor Hadrônico

A inserção dos quarks na teoria eletrofraca é análoga ao setor leptônico, com pequenas modificações. Assume-se que os quarks de mão esquerda formem dubletos e os de mão direita tripletos, de tal forma que⁶ [4]:

Quarks	Y	t_3	$Q = \frac{1}{2}Y + t_3$
u_L, c_L, t_L	$\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$
d'_L, s'_L, b'_L	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R	$\frac{4}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$
d'_R, s'_R, b'_R	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

Tabela 1.3: Quarks e suas representações sob os grupos de gauge.

Os acoplamentos são idênticos ao caso leptônico, exceto pelo fato de que as componentes de mão direita dos quarks u , c e t possuem $Y \neq 0$ e, portanto, participarão das correntes

⁶ Como as interações eletrofracas são invariantes por transformações de cor, este índice será omitido.

neutra e eletromagnética. Para uma geração (u, d') teremos [4]:

$$J_{EM}^\mu = \frac{2}{3}e\bar{\psi}^u\gamma^\mu\psi^u - \frac{1}{3}e\bar{\psi}^{d'}\gamma^\mu\psi^{d'}$$

$$J_{NC}^\mu = -\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\bar{\psi}^u\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_V^u - \gamma^5)\psi^u + \frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\bar{\psi}^{d'}\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_V^{d'} - \gamma^5)\psi^{d'}$$

$$J_+^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}^{d'}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi^u$$

$$J_-^\mu = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}^u\gamma^\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi^{d'}$$

onde todos os estados acima são autoestados de sabor, $g_V^u = \frac{4}{3}\cos 2\theta_w - \frac{1}{3}$ e $g_V^{d'} = \frac{2}{3}\cos 2\theta_w + \frac{1}{3}$.

Termos de Massa

Como $Y(u_R) = \frac{4}{3}$ e $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$, pode-se mostrar que os singletos sob $SU(2) \times U(1)$ serão dados por:

$$\bar{\psi}_L\psi_R^{d'}\phi \text{ e } \bar{\psi}_L\psi_R^u\hat{\phi}$$

sendo $\hat{\phi} = i\sigma^2\phi^*$. O segundo termo na expressão acima foi incluído devido à existência de quarks up de mão direita. Considerando todos os sabores, de maneira análoga à Eq.(1.13):

$$(\bar{\psi}_{L,u}\bar{\psi}_{L,c}\bar{\psi}_{L,t})\lambda_d\begin{pmatrix}\psi_R^{d'} \\ \psi_R^{s'} \\ \psi_R^{b'}\end{pmatrix}\phi + (\bar{\psi}_{L,u}\bar{\psi}_{L,c}\bar{\psi}_{L,t})\lambda_u\begin{pmatrix}\psi_R^u \\ \psi_R^c \\ \psi_R^t\end{pmatrix}\hat{\phi}$$

Porém agora, diferentemente do setor leptônico, as componentes de mão direita dos quarks d', s' e b' participam das interações neutras.

Após a quebra espontânea de simetria obtemos os seguintes termos de massa:

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\bar{D}'_L\lambda_d D'_R + \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{U}_L\lambda_u U_R$$

onde $D'_{L,R} = \begin{pmatrix}\psi_{L,R}^{d'} \\ \psi_{L,R}^{s'} \\ \psi_{L,R}^{b'}\end{pmatrix}$ e $U_{L,R} = \begin{pmatrix}\psi_{L,R}^u \\ \psi_{L,R}^c \\ \psi_{L,R}^t\end{pmatrix}$.

Novamente, para diagonalizar as matrizes λ_d e λ_u , são necessárias duas transformações biunitárias:

$$\lambda_d^{diag} = U_{dL}^\dagger\lambda_d U_{dR} \quad \lambda_u^{diag} = U_{uL}^\dagger\lambda_u U_{uR}$$

onde $U_{dL,R}$ e $U_{uL,R}$ são as matrizes unitárias 3×3 que diagonalizam as matrizes de Yukawa λ_d e λ_u , respectivamente. Reescrevendo em termos dos autoestados de massa:

$$D'_R = U_{dR}D_R, \quad D'_L = U_{dL}D_L$$

$$U_R = U_{uR}\tilde{U}_R, \quad U_L = U_{uL}\tilde{U}_L$$

então:

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\bar{D}'_L\lambda_d D'_R + \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{U}_L\lambda_u U_R = \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{D}_L\lambda_d^{diag} D_R + \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{\tilde{U}}_L\lambda_u^{diag}\tilde{U}_R$$

Incluindo as três gerações e escrevendo as correntes em termos dos autoestados de massa:

$$\begin{aligned} J_{EM}^\mu &= \frac{2}{3}e\bar{\tilde{U}}\gamma^\mu\tilde{U} - \frac{1}{3}e\bar{D}\gamma^\mu D \\ J_{NC}^\mu &= -\frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\bar{\tilde{U}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_V^u - \gamma^5)\tilde{U} + \frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}\bar{D}\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_V^d - \gamma^5)D \\ J_+^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{D}U_{dL}^\dagger U_{uL}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\tilde{U} \\ J_-^\mu &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\tilde{U}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)U_{uL}^\dagger U_{dL}D \end{aligned}$$

Como nas correntes acima só aparece a combinação de matrizes $U_{dL}^\dagger U_{uL}$ (e sua conjugada), podemos considerar que há mistura de sabor apenas nos autoestados de massa D . Desta forma a rotação U_{uL} do vetor U_L pode ser absorvida em D :

$$D' = U_{uL}^\dagger U_{dL}D \quad \text{e} \quad \tilde{U}_{L,R} = U_{L,R}$$

Ou seja, podemos considerar os autoestados de sabor dos quarks u , c e t como autoestados de massa, enquanto os autoestados de sabor e de massa para os quarks d , s e b se relacionam por uma matriz de mistura (matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) [4]:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM}^\dagger \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

De maneira semelhante ao setor leptônico, todas as massas dos quarks são parâmetros livres e, portanto, devem ser determinados experimentalmente. No entanto, devido à não diagonalidade de V_{CKM} , pode-se mostrar que temos mais 4 parâmetros livres (três ângulos de mistura e uma fase). Esta última é responsável pela violação de CP nas correntes carregadas.

1.6 Cromodinâmica Quântica

Como a QCD é uma teoria que possui uma simetria exata ($SU(3)_C$), seus acoplamentos são dados diretamente pelas derivadas covariantes. Logo, sua lagrangeana será

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^f(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi^f - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.14)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\lambda^a}{2}g_\mu^a$ e os quarks pertencem à um tripleto de cor:

$$\psi^f = \begin{pmatrix} \psi_R^f \\ \psi_B^f \\ \psi_G^f \end{pmatrix}$$

sendo f o índice de sabor. Como \mathcal{L} é idêntica para os 6 sabores, este índice pode ser omitido (QCD não diferencia sabor).

As matrizes λ^a são chamadas de matrizes de Gell-Mann e os campos de gauge g_μ^a de glúons. Estes se transformam de acordo com a representação adjunta (8-dimensional), dada por:

$$(T^a)_{bc} = -if_{abc}$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$.

Após esta brevíssima revisão do Modelo Padrão, retomaremos o tema principal deste trabalho: supersimetria. Para isso será necessário investigar mais a fundo um dos pilares do SM: a invariância de Lorentz.

Capítulo 2

Supersimetria

Aqui introduziremos todos os conceitos necessários para a construção de uma teoria supersimétrica. A partir do grupo de Poincaré, que compreende as transformações de Lorentz e translações no espaço-tempo, discutiremos como é possível estender este grupo de simetria em quatro dimensões. Para tal apresentaremos o Teorema de Coleman-Mandula e a partir deste deduziremos o Teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius. Após a construção da álgebra supersimétrica serão obtidas suas representações fundamentais e algumas de suas propriedades. Finalmente discutiremos o formalismo de superespaço e supercampos e a generalização da simetria de gauge para teorias supersimétricas.

2.1 Álgebras Físicas

Após o sucesso do uso de simetrias na construção do Modelo Padrão, especulou-se quais os tipos de geradores de simetrias um sistema físico poderia possuir. Os geradores conhecidos até então eram quadrivetores (P^μ , o quadrimomento), tensores antisimétricos ($J^{\mu\nu}$, o tensor momento angular), operadores discretos (paridade, inversão temporal e conjugação de carga) e escalares (geradores de simetrias internas) [2]. As translações (geradas por P^μ), rotações e *boosts* (gerados por $J^{\mu\nu}$) no espaço-tempo quadridimensional constituem o Grupo de Poincaré, que também inclui as simetrias discretas de inversão temporal e espacial. Assumindo que o grupo de Poincaré seja um subgrupo da simetria (total) da matriz S , qualquer operador T que comute com S (ou seja, que também seja um operador de simetria) deve pertencer a uma representação do grupo de Poincaré:

$$[U(\Lambda), S] = [T, S] = 0$$

$$\Rightarrow [S, U(\Lambda)T_a U^{-1}(\Lambda)] = 0 \Rightarrow U(\Lambda)T_a U^{-1}(\Lambda) = \sum_b D(\Lambda)_{ab} T_b$$

onde $\{T_a\}$ é o conjunto de todos os operadores de simetria da matriz S , $U(\Lambda)$ são as transformações do grupo de Poincaré e $D(\Lambda)$ é uma representação do grupo de Poincaré. Logo qualquer operador de simetria deve se transformar como um escalar, um espinor, um 4-vetor, etc, já que estas são as representações irredutíveis do grupo de Poincaré.

2.1.1 Representações do Grupo de Lorentz

O subgrupo formado apenas pelas rotações e *boosts* é chamado de Grupo de Lorentz (ou Grupo Próprio de Lorentz). A maneira mais conveniente de classificar suas representações é através da redefinição dos operadores de rotação (\vec{J}) e de boosts (\vec{K}) [2]:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) \text{ e } \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K})$$

Usando as conhecidas relações de comutação entre \vec{J} e \vec{K} [2], obtém-se:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \text{ e } [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k$$

$$[A_i, B_j] = 0$$

Das relações acima pode-se supor que o grupo de Lorentz seja localmente isomórfico ao produto direto $SU(2) \times SU(2)$, no entanto, os operadores A e B não são hermitianos, de tal forma que o isomorfismo não é válido. Pode-se mostrar que o grupo de Lorentz é na verdade isomórfico ao grupo $SL(2, C)$ [2]. Porém todas as suas representações podem ser classificadas por (j_A, j_B) (de dimensões $(2j_A + 1)(2j_B + 1)$), onde $j_{A,B}$ são os valores dos operadores de Casimir nas representações de A e B . Isto só é possível pois os operadores de Casimir do grupo de Lorentz são:

$$P^2 = M^2 \text{ e } W^2$$

onde $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}P^\nu J^{\sigma\rho}$ é o operador de Pauli-Lubanski, sendo $W^2 = J^2$ para estados massivos e $W^2 = 0$ para estados sem massa [5]. Para estes últimos o operador de Casimir será J_3 ou mais especificamente $\frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}$, ou seja, o operador helicidade.

A identificação das representações usuais com as representações (j_A, j_B) é facilmente obtida usando as relações de comutação entre os operadores \vec{J} e \vec{K} para determinar as relações entre A e B . A seguir demonstraremos alguns exemplos.

Sabe-se que um operador espinorial ψ (na representação de Weyl) se transforma de acordo com a seguinte representação [6]:

$$[\vec{J}, \psi] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi \text{ e } [\vec{K}, \psi] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi$$

onde $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ e $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Em termos de \vec{A} e \vec{B} :

$$[\vec{A}, \psi_L] = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\psi_L, \quad [\vec{B}, \psi_L] = 0$$

$$[\vec{B}, \psi_R] = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\psi_R, \quad [\vec{A}, \psi_R] = 0$$

Portanto ψ_L e ψ_R se transformam de acordo com as representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$, respectivamente. Logo ψ se transforma pela representação $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Note que em outras representações as transformações de Lorentz de ψ não seriam diagonais e, portanto, seria necessário diagonalizá-las para obter as bases das representações (j_A, j_B) .

Para o quadrivetor P_μ temos as seguintes relações de comutação [2]:

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad [K_i, P_j] = iP_0\delta_{ij}$$

$$[J_i, P_0] = 0, \quad [K_i, P_0] = iP_i$$

$$\Rightarrow [A_k, P_\mu] = \frac{1}{2}(i\delta_{\mu i}\epsilon_{kij}P_j - P_0\delta_{\mu k} - P_k\delta_{\mu 0})$$

$$\Rightarrow [B_k, P_\mu] = \frac{1}{2}(i\delta_{\mu i}\epsilon_{kij}P_j + P_0\delta_{\mu k} + P_k\delta_{\mu 0})$$

Como visto acima, as relações de comutação entre P_μ e \vec{A} , \vec{B} não exibem claramente uma representação de $SU(2) \times SU(2)$. Como P_μ se transforma de acordo com uma representação 4-dimensional, espera-se que possua $j_A = j_B = \frac{1}{2}$, pois assim $\dim[(j_A, j_B)] = 4$. Com base nisso define-se¹:

$$P_{aa'} = \sigma_{aa'}^\mu P_\mu, \quad \text{com } a, a' = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} P_0 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & P_0 - P_3 \end{pmatrix}$$

Em termos destas componentes, temos:

$$[\vec{A}, P_{ab}] = -\frac{1}{2}\vec{\sigma}_{aa'}P_{a'b} \quad \text{e} \quad [\vec{B}, P_{ab}] = -\frac{1}{2}\vec{\sigma}_{bb'}P_{ab'}$$

Ou seja, P_{ab} se transforma pela representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, como esperado.

Finalmente, para o tensor antisimétrico $J_{\mu\nu}$ temos as seguintes relações de comutação triviais [2]:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \quad \text{e} \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

¹A definição de σ^μ , assim como explicações sobre a notação utilizada pode ser encontrada nos Apêndices A.1 e A.2.

onde $K_i = J_{i0}$ e $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}$. Em termos de \vec{A} e \vec{B} :

$$[A_k, J_i] = \frac{i}{2}\epsilon_{kij}(J_j + iK_j), \quad [B_k, J_i] = \frac{i}{2}\epsilon_{kij}(J_j - iK_j)$$

$$[A_k, K_i] = \frac{i}{2}\epsilon_{kij}(K_j - iJ_j), \quad [B_k, K_i] = \frac{i}{2}\epsilon_{kij}(K_j + iJ_j)$$

Logo, se definirmos $J_j^+ = (J_j + iK_j)$ e $J_j^- = (J_j - iK_j)$, teremos:

$$[A_k, J_i^+] = i\epsilon_{kij}J_j^+, \quad [B_k, J_i^+] = 0$$

$$[B_k, J_i^-] = i\epsilon_{kij}J_j^-, \quad [A_k, J_i^-] = 0$$

Portanto as componentes \vec{J}^+ e \vec{J}^- do tensor $J_{\mu\nu}$ se transformam de acordo com a representação $(1, 0) \oplus (0, 1)$.

Considere agora o produto de dois operadores quaisquer Q_{ab} e P_{cd} , que se transformam de acordo com as representações $(j_A^{(1)}, j_B^{(1)})$ e $(j_A^{(2)}, j_B^{(2)})$, respectivamente. Os índices a e c se referem à representação $j_A^{(1,2)}$ e os índices b e d à $j_B^{(1,2)}$. Então, considerando transformações infinitesimais:

$$Q_{ab} \rightarrow (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{A}_{aa'}^{(1)} \delta_{bb'} + \vec{\beta} \cdot \vec{B}_{bb'}^{(1)} \delta_{aa'}) Q_{a'b'}$$

e

$$P_{cd} \rightarrow (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{A}_{cc'}^{(2)} \delta_{dd'} + \vec{\beta} \cdot \vec{B}_{dd'}^{(2)} \delta_{cc'}) P_{c'd'}$$

onde $\vec{A}^{(i)}$, $\vec{B}^{(i)}$ são as representações dos geradores \vec{A} e \vec{B} para os operadores Q_{ab} e P_{cd} . Seja $R_{abcd} = Q_{ab}P_{cd}$. Usando as expressões acima, podemos escrever a transformação de R como:

$$R_{abcd} \rightarrow [1 + \vec{\theta} \cdot (\vec{A}_{aa'}^{(1)} \delta_{bb'} + \vec{A}_{cc'}^{(2)} \delta_{dd'}) + \vec{\beta} \cdot (\vec{B}_{bb'}^{(1)} \delta_{aa'} + \vec{B}_{dd'}^{(2)} \delta_{cc'})] R_{a'b'c'd'}$$

Ou seja, R se transforma como o produto tensorial dos espaços (1) e (2). Esta representação pode ser reduzida em termos dos coeficientes de Clebsch-Gordan, de tal forma que R pode ser escrito em termos de uma combinação linear de operadores que se transformam pelas representações (j_C, j_D) , onde $j_C = |j_A^{(1)} - j_A^{(2)}|, \dots, j_A^{(1)} + j_A^{(2)}$ e $j_D = |j_B^{(1)} - j_B^{(2)}|, \dots, j_B^{(1)} + j_B^{(2)}$. Logo, qualquer operador ou produto de operadores de simetria da matriz S pode ser classificado em termos das representações do tipo (j_A, j_B) .

A classificação em termos de representações de momento angular obtida acima nem sempre é válida. Como citado anteriormente, o operador de Casimir W^2 do grupo de Poincaré só é igual à J^2 para $P^2 = M^2 \neq 0$. Ou seja, para estados massivos podemos definir um referencial de repouso com quadrimomento $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, onde m é a massa da partícula. Este referencial é claramente invariante por rotações nas coordenadas espaciais. Logo, partículas de spin s possuirão $2s + 1$ graus de polarização possíveis [2], o que torna apropriada a classificação das representações em termos de $\vec{J}^{A,B}$. Já para estados sem massa, o operador de Casimir será J_3 e teremos quadrimomentos do tipo $p^\mu = (p, 0, 0, p)$. Ou

seja, estados sem massa não são mais invariantes por rotações arbitrárias nas coordenadas espaciais, mas apenas por rotações em torno do eixo z (para nossa escolha particular de p^μ). Logo, pode-se mostrar [2] que neste caso uma partícula de spin s possuirá apenas um grau de polarização (chamado de helicidade)². Portanto, sob transformações do Grupo de Poincaré, estados com e sem massa são intrinsecamente distintos.

2.1.2 Teorema de Coleman-Mandula

O Teorema de Coleman-Mandula [7] prova que para uma matriz S não trivial (ou seja, $S_{\alpha\beta} \neq \delta_{\alpha\beta}$) existir, o grupo de simetria da matriz S deve ser o produto direto do grupo de Poincaré e de um grupo de simetrias internas:

$$G = \mathcal{P} \times I$$

onde G é o grupo de simetria total de S , \mathcal{P} é o grupo de Poincaré e I é o grupo de simetrias internas (escalares). Ou seja, exceto pelo quadrivetor P_μ e pelo tensor $J_{\mu\nu}$, todos os demais operadores de simetria devem ser escalares.

O teorema acima pode ser parcialmente compreendido utilizando-se o seguinte exemplo [8]. Suponha que além do quadrivetor P_μ e do tensor $J_{\mu\nu}$ também exista uma carga tensorial conservada ($Q^{\mu\nu}$) e que esta seja aditiva. Então, por covariância:

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu}|p_1\rangle &= ap_1^\mu p_1^\nu + \frac{b}{2}g^{\mu\nu} \\ \Rightarrow Q^{\mu\nu}|p_1, p_2\rangle &= [a(p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu) + bg^{\mu\nu}]|p_1, p_2\rangle \end{aligned}$$

onde $|p_1, p_2\rangle$ é um estado de duas partículas escalares com momentos p_1 e p_2 e $g^{\mu\nu}$ é a métrica. Então, em um espalhamento elástico, teremos:

$$|p_1, p_2\rangle \rightarrow |p_3, p_4\rangle$$

usando a conservação de $Q^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu) + bg^{\mu\nu} &= a(p_3^\mu p_3^\nu + p_4^\mu p_4^\nu) + bg^{\mu\nu} \\ \Rightarrow p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu &= p_3^\mu p_3^\nu + p_4^\mu p_4^\nu \end{aligned}$$

Mas, por conservação do quadrimomento P_μ :

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$$

A única forma das duas condições sobre os quadrimomentos serem simultaneamente sa-

²Se impusermos invariância por transformações de Paridade, teremos dois graus de polarização possíveis para estados sem massa (helicidade negativa ou positiva).

tisfeitas é a solução trivial:

$$p_1^\mu = p_3^\mu \text{ e } p_2^\mu = p_4^\mu$$

ou

$$p_1^\mu = p_4^\mu \text{ e } p_2^\mu = p_3^\mu$$

Logo, só é possível o espalhamento frontal. Ou seja, o Teorema de Coleman-Mandula demonstra que a existência de novos operadores vetoriais ou tensoriais implica em vínculos muito severos ao espaço de fase.

2.1.3 Pseudo-Álgebras

O Teorema de Coleman-Mandula (C-M) limita todas as extensões do Modelo Padrão à modificações no grupo de gauge e à introdução de novas partículas e representações. Porém algumas das hipóteses do Teorema podem ser violadas se introduzirmos operadores fermiônicos, por exemplo.

No entanto, todas as simetrias físicas fundamentais encontradas até hoje possuem geradores que satisfazem álgebras de Lie do tipo:

$$[T_a, T_b] = iC_{ab}^c T_c$$

onde T são os geradores e C_{ab}^c as constantes de estrutura, que definem localmente o grupo de simetria. A introdução de geradores fermiônicos é possível se estendermos as álgebras de Lie para pseudo-álgebras (ou *graded algebras*), onde os geradores satisfazem relações do tipo [9]:

$$[T_a, T_b] \equiv T_a T_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} T_b T_a = iC_{ab}^c T_c$$

onde $\eta_a = 0$ ou 1 é o grau do gerador T_a . Para $\eta_a = 1$ chama-se T_a de fermiônico e para $\eta_a = 0$ chama-se de bosônico. Esta definição deve-se ao fato de que dois operadores fermiônicos satisfarão relações de anticomutação e dois operadores bosônicos (ou um fermiônico e um bosônico) satisfarão relações de comutação.

As pseudo-álgebras de Lie possuem algumas propriedades análogas às álgebras de Lie, mas com modificações que levam em consideração a existência de operadores fermiônicos [9]:

$$C_{ab}^c = -(-1)^{\eta_a \eta_b} C_{ba}^c \text{ (antisimetria)}$$

$$(-1)^{\eta_a \eta_c} [[T_a, T_b], T_c] + (-1)^{\eta_a \eta_b} [[T_b, T_c], T_a] + (-1)^{\eta_b \eta_c} [[T_c, T_a], T_b] = 0 \text{ (Identidade de Jacobi)}$$

Como o produto de dois operadores fermiônicos (ou bosônicos) é um operador bosônico e como o produto de um bosônico com um fermiônico é um fermiônico, define-se [9]:

$$T_c = T_a T_b \Rightarrow \eta_c = (\eta_a + \eta_b) \pmod{2}$$

sendo a generalização óbvia para um produto de n operadores. Desta forma, das relações de comutação, temos:

$$C_{ab}^c = 0, \text{ se } \eta_c \neq (\eta_a + \eta_b)(\text{mod}2)$$

As transformações representadas pela pseudo-álgebra possuirão parâmetros (β^a) que comutam (c-números) ou anticomutam (números de Grassmann) entre si, portanto:

$$\beta^a \beta^b = (-1)^{\eta_a \eta_b} \beta^b \beta^a \quad (2.1)$$

sendo η o grau do parâmetro. Assim pode-se definir consistentemente uma transformação do tipo:

$$U(\theta) = 1 + \theta^a T_a$$

Para que $U(\theta)$ seja um operador bosônico, impõe-se:

$$\theta^b T_a = (-1)^{\eta_a \eta_b} T_a \theta^b$$

ou seja, operadores comutam ou anticomutam com os parâmetros da mesma forma que com os demais operadores. Além disso, também define-se [9]:

$$(\alpha T)^\dagger = T^\dagger \alpha^* = (-1)^{\eta_\alpha \eta_T} T^\dagger \alpha^*$$

$$(\alpha \beta)^* = \beta^* \alpha^* = (-1)^{\eta_\alpha \eta_\beta} \alpha^* \beta^*$$

onde T é um operador qualquer e α e β são números (que comutam ou anticomutam).

2.1.4 Teorema Haag-Lopuszanski-Sohnius

Em 1975 o teorema de Coleman-Mandula foi estendido para o caso de uma pseudo-álgebra de Lie [10]. Esta extensão ficou conhecida como o Teorema de Haag, Lopuszanski e Sohnius. A seguir, partindo do Teorema C-M, demonstraremos o Teorema de Haag, Lopuszanski e Sohnius.

Devido à limitação imposta pelo Teorema de Coleman-Mandula aos operadores bosônicos, o estudo destes está limitado às simetrias internas e aos operadores do grupo de Poincaré. No entanto, o Teorema C-M também nos permite impor restrições aos operadores fermiônicos. Suponha uma pseudo-álgebra não trivial para os operadores fermiônicos [9]:

$$\{Q_{ab}, Q_{a'b'}^\dagger\} = f^r T_r \quad (2.2)$$

onde Q_{ab} se transforma por (j_A, j_B) , f^r são constantes de estrutura e T_r são operadores que se transformam por (j_{C_r}, j_{D_r}) . Como $(\vec{A})^\dagger = \vec{B}$, pois \vec{J} e \vec{K} são hermitianos, Q_{ab}^\dagger se

transforma por $(j_B, j_A)^3$:

$$Q_{ab}^\dagger \rightarrow (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{J}_{bb'}^A \delta_{aa'} + \vec{\beta} \cdot \vec{J}_{aa'}^B \delta_{bb'}) Q_{a'b'}^\dagger$$

Usando os resultados da Seção 2.1.1, podemos aplicar a decomposição de Clebsch-Gordan para o anticomutador da Eq.(2.2):

$$j_{C_r} = |j_A - j_B|, \dots, j_A + j_B \text{ e } j_{D_r} = |j_A - j_B|, \dots, j_A + j_B$$

considerando apenas a representação máxima $(j_A + j_B, j_A + j_B)$, temos:

$$j_A + j_B \leq \frac{1}{2}$$

Pois, pelo Teorema C-M, os únicos operadores bosônicos permitidos são $J_{\mu\nu}$, P_μ ou escalares (o anticomutador, por ser um produto de operadores fermiônicos é, necessariamente, bosônico). Logo as únicas possibilidades são:

$$(j_A, j_B) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ou } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Ou seja, os únicos tipos de operadores fermiônicos que podem existir são operadores espinoriais. Além disso temos que os operadores T_r se transformam por $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Novamente, pelo Teorema C-M, temos que o único operador de simetria possível é o quadrimomento P_μ , mais especificamente⁴ $P_{ab} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu$, que pertence à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Portanto, para um conjunto Q^r de operadores fermiônicos (todos se transformando por $(\frac{1}{2}, 0)$ ou $(0, \frac{1}{2})$), onde $r = 1, \dots, N$ para N operadores Q :

$$\{Q_a^r, Q_b^{s\dagger}\} = f_{rs} \sigma_{ab}^\mu P_\mu$$

onde $a, b = \pm \frac{1}{2}$. Pode-se mostrar que a matriz f_{rs} sempre pode ser diagonalizada redefinindo-se os operadores fermiônicos, de tal forma que [9]

$$\{Q_a^r, Q_b^{s\dagger}\} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu \delta_{rs}$$

é a álgebra física mais geral para o setor fermiônico. Resta ainda calcular os comutadores e anticomutadores com os elementos do grupo de Lorentz e entre Q^r e Q^s .

Pode-se mostrar que o comutador de P_{ab} com Q deve ser nulo:

$$[P_{ab}, Q_c^r] = [P_{ab}, Q_c^{r\dagger}] = 0$$

³Pode-se mostrar [11] que o operador que se transforma por (j_B, j_A) é $-i\sigma^2 Q_{ab}^\dagger$ e não Q_{ab}^\dagger . No entanto esta diferença não altera os resultados obtidos nesta Seção e, por simplicidade, será ignorada aqui.

⁴ A redefinição de P_{ab} , onde incluiu-se o fator 2 visa simplificações futuras.

Como Q pertence à representação $(\frac{1}{2}, 0)$, temos:

$$[\vec{J}, Q_a^r] = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{ab} Q_b^r, \quad [\vec{K}, Q_a^r] = -\frac{i}{2} \vec{\sigma}_{ab} Q_b^r$$

$$\Rightarrow [\vec{J}, Q_a^{r\dagger}] = -\frac{1}{2} \vec{\sigma}_{ba} Q_b^{r\dagger}, \quad [\vec{K}, Q_a^{r\dagger}] = -\frac{i}{2} \vec{\sigma}_{ba} Q_b^{r\dagger}$$

Portanto todos os comutadores com o grupo próprio de Lorentz estão unicamente determinados [9].

Os anticomutadores de Q^r com Q^s resultarão em operadores que se transformam por $(1, 0)$ e $(0, 0)$. Logo

$$\{Q_a^r, Q_b^s\} = C_{ab} Z_{rs} + \alpha_{ab}^i J_i^+ \quad (2.3)$$

onde Z é um conjunto de operadores escalares. A expressão acima não admite outros operadores devido às restrições do teorema C-M. Porém:

$$[J_i^+, P_{ab}] = [J_i + iK_i, P_{ab}] = 2[A_i, P_{ab}] = -\sigma_{aa'}^i P_{a'b} \quad (2.4)$$

Para um P_μ arbitrário a expressão acima é diferente de zero. Mas, como P_{ab} comuta com Q , usando a Eq.(2.3) e (2.4):

$$0 = [P_{cd}, \{Q_a^r, Q_b^s\}] = C_{ab} [P_{cd}, Z_{rs}] + \alpha_{ab}^i \sigma_{cc'}^i P_{c'd}$$

Como Z_{rs} deve ser global (assim como os operadores Q_a^r):

$$[P_{cd}, Z_{rs}] = 0 \Rightarrow \alpha_{ab}^i = 0$$

Portanto:

$$\{Q_a^r, Q_b^s\} = C_{ab} Z_{rs}$$

Como os operadores Z são escalares e são formados pelo produto de dois espinores, eles correspondem à representação de singleto $(0, 0)$ (antisimétrica), ou seja:

$$\{Q_{\frac{1}{2}}^r, Q_{\frac{1}{2}}^s\} = C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} Z_{rs} = 0, \quad \{Q_{\frac{1}{2}}^r, Q_{-\frac{1}{2}}^s\} = C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} Z_{rs} = Z_{rs}$$

$$\{Q_{-\frac{1}{2}}^r, Q_{-\frac{1}{2}}^s\} = C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} Z_{rs} = 0, \quad \{Q_{-\frac{1}{2}}^r, Q_{\frac{1}{2}}^s\} = C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} Z_{rs} = -Z_{rs}$$

Além disso:

$$\{Q_{\frac{1}{2}}^r, Q_{-\frac{1}{2}}^s\} = Z_{rs} = \{Q_{-\frac{1}{2}}^s, Q_{\frac{1}{2}}^r\} = -Z_{sr}$$

Logo $Z_{rs} = -Z_{sr}$, ou seja, os escalares Z devem ser antisimétricos. Para Q^\dagger :

$$\{Q_a^{r\dagger}, Q_b^{s\dagger}\} = C_{ab} Z_{rs}^\dagger$$

Pode-se mostrar que os Z_{rs} comutam entre si e com todos os demais geradores do grupo de Lorentz, ou seja, que Z_{rs} representam simetrias internas abelianas. De fato, cada gerador Z_{rs} pertence à um grupo $U(1)$ [9].

2.2 Álgebra Supersimétrica

Os resultados obtidos na última Seção são um resumo do Teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius e estabelecem que a álgebra supersimétrica mais geral é da forma⁵:

$$\{Q_a^r, Q_b^{s\dagger}\} = \delta_{rs} P_{ab} \quad (2.5)$$

$$\{Q_a^r, Q_b^s\} = C_{ab} Z_{rs}, \quad \{Q_a^{r\dagger}, Q_b^{s\dagger}\} = C_{ab} Z_{rs}^\dagger \quad (2.6)$$

$$[Q_a^r, P_{ab}] = [Q_a^{r\dagger}, P_{ab}] = 0 \quad (2.7)$$

$$[\vec{J}, Q_a^r] = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{ab} Q_b^r, \quad [\vec{K}, Q_a^r] = -\frac{i}{2} \vec{\sigma}_{ab} Q_b^r \quad (2.8)$$

$$[\vec{J}, Q_a^{r\dagger}] = -\frac{1}{2} \vec{\sigma}_{ba} Q_b^{r\dagger}, \quad [\vec{K}, Q_a^{r\dagger}] = -\frac{i}{2} \vec{\sigma}_{ba} Q_b^{r\dagger} \quad (2.9)$$

$$[Z_{rs}, X] = [Z_{rs}^\dagger, X] = 0 \quad (2.10)$$

onde X representa qualquer operador. Por completeza deve-se acrescentar a álgebra do grupo de Lorentz:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k, \quad [K_i, P_j] = iP_0 \delta_{ij}$$

$$[J_i, P_0] = 0, \quad [K_i, P_0] = iP_i$$

Obviamente o grupo de simetria de S também deve possuir um grupo de simetrias internas que obedecem à uma álgebra de Lie:

$$[T^n, T^m] = C_l^{mn} T^l$$

Como os geradores T são escalares, estes devem comutar com o grupo de Poincaré:

$$[T^m, P_\mu] = [T^m, J_{\mu\nu}] = 0$$

No entanto, o comutador de T^n $((0,0))$ com Q^r $((\frac{1}{2},0))$ deve resultar em um operador $(\frac{1}{2},0)$, ou seja:

$$[T^n, Q_b^r] = D_{rs} Q_b^s \quad (2.11)$$

⁵ Algumas modificações são possíveis para teorias sem partículas massivas.

de tal forma que D_{rs} fornece uma representação dos geradores de simetrias internas. Usando a Eq.(2.11), obtém-se:

$$[T^n, Z_{rs}] = D_{rr'} Z_{r's} + D_{ss'} Z_{rs'}$$

de tal forma que as cargas centrais (que comutam com todos os operadores) Z formam uma álgebra abeliana e invariante sob o grupo de simetrias internas.

2.2.1 Simetria R

Para teorias com $N = 1$, ou seja, com apenas um tipo de operador Q ($Q_a^r = Q_a$) (ver comentário na próxima seção). Temos (ver Eq.(2.11)):

$$D_{rs} = \delta_{rs} \Rightarrow [T, Q_a] = Q_a$$

Ou seja, a única representação não trivial para transformações sob T é uma fase:

$$Q_a \rightarrow e^{i\phi} Q_a \quad (2.12)$$

Logo, T deve gerar uma simetria abeliana. Usualmente este gerador é chamado de R e a simetria abeliana de simetria R.

Note que das Eq.(2.5)-(2.10), as únicas que serão modificadas pela Eq.(2.12) são:

$$\{Q_a'^r, Q_b'^s\} = U_{rp} U_{sq} \{Q_a^p, Q_b^q\}$$

$$\{Q_a'^{r\dagger}, Q_b'^{s\dagger}\} = U_{rp}^\dagger U_{sq}^\dagger \{Q_a^{p\dagger}, Q_b^{q\dagger}\}$$

mas pode-se mostrar (ver próxima seção) que para $N = 1$ não existem cargas centrais: $\{Q_a^p, Q_b^q\} = \{Q_a^{p\dagger}, Q_b^{q\dagger}\} = 0$. Logo a álgebra supersimétrica é invariante por transformações sob a simetria R.

2.3 Representações

Diferentemente do grupo de Lorentz, o grupo estendido (ou supersimétrico) não possui o operador de Pauli-Lubanski como um operador de Casimir. Para o supergrupo, os operadores de Casimir serão [5]:

$$P^2 = M^2 + Y^2 P^2 - (Y.P)^2 \quad (2.13)$$

sendo

$$Y_\mu = W_\mu - \frac{1}{8} \bar{\sigma}_\mu^{ab} [Q_b^r, Q_a^{r\dagger}] \quad (2.14)$$

que generaliza o operador de Pauli-Lubanski.

Se assumirmos que os operadores fermiônicos Q se transformam trivialmente sob o grupo de gauge, ou seja, se

$$[T^n, Q_b^r] = 0 \quad (2.15)$$

então todas as partículas em um mesmo supermultiplete deverão se transformar pela mesma representação do grupo de gauge. A seguir veremos que os supermultipletos fundamentais contém partículas de spin inteiro e semi-inteiro.

Para supersimetrias estendidas⁶ ($N \geq 2$), os supermultipletos contém, em geral, mais de duas partículas, com spins (ou helicidades) diferentes. Para $N = 2$, por exemplo, os supermultipletos mais simples conterão partículas com spin (ou helicidade) 1 e $\frac{1}{2}$ ou partículas de helicidade $\pm\frac{1}{2}$ e 0. Como todos os bósons vetoriais devem se transformar pela representação adjunta do Grupo de Gauge, temos:

$$|1, \frac{1}{2}, 0\rangle \rightarrow \text{Representação Adjunta}$$

Logo, para que existam férmions que pertençam a dubletos:

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\rangle \rightarrow \text{Dubletos}$$

O resultado acima demonstra claramente que para $N = 2$ não pode existir quebra de paridade, já que (no limite $m = 0$) os estados de helicidade $\pm\frac{1}{2}$ (de mão esquerda e direita) devem pertencer à mesma representação do grupo de gauge. Este resultado também é válido para $N \geq 2$, o que dificulta a extensão do Modelo Padrão utilizando-se supersimetrias estendidas [9].

Como a álgebra supersimétrica (não estendida) só possui dois operadores fermiônicos (Q e Q^\dagger), a relação da Eq.(2.6) se torna:

$$\{Q_a, Q_b\} = \{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} = 0 \quad (2.16)$$

já que da antisimetria de Z :

$$Z = -Z \Rightarrow Z = 0$$

Portanto modelos supersimétricos com $N = 1$ sempre permitem uma simetria R , que se torna simplesmente:

$$Q'_a = e^{i\phi} Q_a$$

A não ser que seja afirmado explicitamente, todas as considerações posteriores se referem à modelos supersimétricos com $N = 1$ (não estendidos).

A seguir construiremos as representações fundamentais do supergrupo de Poincaré. Para tal aplicaremos os operadores Q e Q^\dagger em um estado inicial arbitrário e então calcularemos qual o número mínimo de estados necessários para a construção de um supermul-

⁶ Onde N é o número de operadores Q^r .

tripleto.

2.3.1 Estados Sem Massa

Para supermultipletos não massivos pode-se escolher $P^\mu = (E, 0, 0, E)$, de tal forma que a Eq.(2.5) se torna:

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = P_{ab} = 4E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ab}$$

$$\Rightarrow \{Q_a, Q_b^\dagger\} = 0, \text{ se } a \text{ ou } b \neq -\frac{1}{2}$$

Mas como o espaço de Hilbert é não negativo:

$$\langle \psi | \{Q_a^\dagger, Q_a\} | \psi \rangle = \|Q_a | \psi \rangle\|^2 + \|Q_a^\dagger | \psi \rangle\|^2 \geq 0$$

sendo a igualdade válida somente para $Q_a = Q_a^\dagger = 0$, (no espaço de estados sem massa), já que o estado ψ é arbitrário. Logo, para $a = \frac{1}{2}$:

$$\{Q_{\frac{1}{2}}^\dagger, Q_{\frac{1}{2}}\} = 0 \Rightarrow Q_{\frac{1}{2}} = Q_{\frac{1}{2}}^\dagger = 0$$

ou seja, dos quatro operadores fermiônicos originais (Q_a, Q_b^\dagger) só restam dois, que satisfazem:

$$\{Q_{-\frac{1}{2}}, Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger\} = 4E \quad (2.17)$$

Da Eq.(2.8) e (2.9):

$$[J^i, Q_{-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \sigma_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^i Q_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \delta_{i3} Q_{-\frac{1}{2}}$$

$$[J^i, Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger] = \frac{1}{2} \delta_{i3} Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger$$

Logo, $Q_{-\frac{1}{2}}$ diminui a helicidade em $\frac{1}{2}$ e $Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger$ aumenta em $\frac{1}{2}$.

Seja um estado não massivo $|j\rangle$ com helicidade j . A partir dele formam-se (a menos de normalizações):

$$Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger |j\rangle = |j + \frac{1}{2}\rangle$$

$$Q_{-\frac{1}{2}} |j + \frac{1}{2}\rangle = |j\rangle$$

Mas, usando a Eq.(2.16), temos:

$$|j - \frac{1}{2}\rangle = Q_{-\frac{1}{2}} |j\rangle = Q_{-\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j + \frac{1}{2}\rangle = 0$$

$$|j + 1\rangle = Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger |j\rangle = 0$$

Portanto, partindo de um estado $|j\rangle$ e aplicando os operadores Q e Q^\dagger só é possível criar

um novo estado (não nulo) $|j + \frac{1}{2}\rangle$, já que o produto de dois Q 's ou Q^\dagger 's é nulo. Logo os supermultipletos só possuirão dois estados:

$$\{|j\rangle, |j + \frac{1}{2}\rangle\}$$

Para o caso de supersimetria estendida, haveriam outros operadores Q , que permitiriam aumentar o número de estados (com helicidades mais altas) em um supermultipeto.

Resta determinar a normalização dos estados. Como $Q_{-\frac{1}{2}}$ e $Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger$ diminuem e aumentam a helicidade em $\frac{1}{2}$, temos:

$$Q_{-\frac{1}{2}}Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger|j\rangle = \alpha^2|j\rangle$$

Mas, como $\{Q_{-\frac{1}{2}}, Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger\} = 4E$:

$$Q_{-\frac{1}{2}}Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger|j\rangle = 4E|j\rangle - Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger Q_{-\frac{1}{2}}|j\rangle = 4E|j\rangle$$

já que $Q_{\frac{1}{2}}|j\rangle = 0$. Portanto $\alpha^2 = 4E$:

$$|j + \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}}Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger|j\rangle \text{ e } |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}}Q_{-\frac{1}{2}}|j + \frac{1}{2}\rangle$$

2.3.2 Estados Massivos

Para estados massivos podemos sempre ir para o referencial de repouso, onde $P_\mu = (M, 0, 0, 0)$. Desta forma:

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = P_{ab} = 2M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ab} = 2M\delta_{ab} \quad (2.18)$$

Mas, da Eq.(2.8) e (2.9):

$$\begin{aligned} [\vec{J}, Q_a] &= \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{ab}Q_b, \quad [\vec{J}, Q_a^\dagger] = -\frac{1}{2}\vec{\sigma}_{ba}Q_b^\dagger \\ \Rightarrow [J_3, Q_{\frac{1}{2}}] &= \frac{1}{2}Q_{\frac{1}{2}}, \quad [J_3, Q_{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow [J_3, Q_{\frac{1}{2}}^\dagger] &= -\frac{1}{2}Q_{\frac{1}{2}}^\dagger, \quad [J_3, Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger] = \frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger \end{aligned}$$

ou seja, $Q_{\frac{1}{2}}$ e $Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger$ aumentam de $\frac{1}{2}$ a componente z do spin, enquanto $Q_{-\frac{1}{2}}$ e $Q_{\frac{1}{2}}^\dagger$ diminuem de $\frac{1}{2}$. Para construir os supermultipletos devemos obter estados de spin total mínimo e máximo, aplicando-se sucessivamente os operadores acima à um dado estado. Pode-se mostrar (ver Apêndice B) que a partir de um estado $|j\rangle$ com autovalores $q_a^\dagger = 0$, obtemos os seguintes estados:

$$|j\rangle \rightarrow Q \rightarrow |j \pm \frac{1}{2}\rangle \begin{array}{l} \rightarrow Q \rightarrow |j\rangle' \\ \rightarrow Q^\dagger \rightarrow |j\rangle \end{array}$$

$$\begin{aligned}
|j\rangle \rightarrow Q^2 \rightarrow |j\rangle' &\xrightarrow{Q} 0 \\
&\xrightarrow{Q^\dagger} |j \pm \frac{1}{2}\rangle \\
|j\rangle \rightarrow Q^\dagger &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

onde $|j\rangle'$ é um estado com autovalores $q_a = 0$. Das expressões acima nota-se claramente que os supermultipletos massivos serão dados por:

$$\{|j\rangle, |j\rangle', |j + \frac{1}{2}\rangle, |j - \frac{1}{2}\rangle\}$$

Para $j = 0$, $j = \frac{1}{2}$ e $j = 1$ temos os menores supermultipletos:

$$\{|0\rangle, |0\rangle', |\frac{1}{2}\rangle\}, \{|\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle', |1\rangle, |0\rangle\} \text{ e } \{|1\rangle, |1\rangle', |\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\rangle\}$$

2.3.3 Graus de Liberdade Bosônicos e Fermiônicos

Os resultados obtidos nas duas últimas seções confirmam um teorema mais geral, válido para qualquer tipo de supermultiplete: o número de graus de liberdade (de spin) bosônicos e fermiônicos são sempre iguais dentro de um supermultiplete.

Seja $\{|j, \sigma\rangle\}$ o conjunto de estados de um supermultiplete e seja $(-1)^{2J}$ um operador que tem autovalores $+1$ para bósons e -1 para férmions. Considere o traço:

$$\begin{aligned}
\sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} P_{ab} | j, \sigma \rangle &= \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} \{Q_a, Q_b^\dagger\} | j, \sigma \rangle \\
&= \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} (\langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_a Q_b^\dagger | j, \sigma \rangle + \langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_b^\dagger Q_a | j, \sigma \rangle)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

O segundo termo pode ser reescrito usando o fato de que $\{|j, \sigma\rangle\}$ forma um base completa para os operadores Q_a e Q_a^\dagger :

$$\begin{aligned}
\sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_b^\dagger Q_a | j, \sigma \rangle &= \sum_{\{|j', \sigma'\rangle\}} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_b^\dagger | j', \sigma' \rangle \langle j', \sigma' | Q_a | j, \sigma \rangle \\
&= \sum_{\{|j', \sigma'\rangle\}} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j', \sigma' | Q_a | j, \sigma \rangle \langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_b^\dagger | j', \sigma' \rangle \\
&= \sum_{\{|j', \sigma'\rangle\}} \langle j', \sigma' | Q_a (-1)^{2J} Q_b^\dagger | j', \sigma' \rangle
\end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
Q_a | j, \sigma \rangle &\propto | j \pm \frac{1}{2}, \sigma' \rangle \\
\Rightarrow (-1)^{2J} Q_a | j, \sigma \rangle &\propto (-1)^{2J \pm 1} | j \pm \frac{1}{2}, \sigma' \rangle \text{ e } Q_a (-1)^{2J} | j, \sigma \rangle \propto (-1)^{2J} | j \pm \frac{1}{2}, \sigma' \rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{Q_a, (-1)^{2J}\} = 0$$

Portanto:

$$\sum_{\{|j', \sigma'\rangle\}} \langle j', \sigma' | Q_a (-1)^{2J} Q_b^\dagger | j', \sigma' \rangle = - \sum_{\{|j', \sigma'\rangle\}} \langle j', \sigma' | (-1)^{2J} Q_a Q_b^\dagger | j', \sigma' \rangle$$

Inserindo este resultado na Eq.(2.19):

$$\begin{aligned} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} P_{ab} | j, \sigma \rangle = \\ \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} (\langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_a Q_b^\dagger | j, \sigma \rangle - \langle j, \sigma | (-1)^{2J} Q_a Q_b^\dagger | j, \sigma \rangle) = 0 \end{aligned}$$

Mas como para todos os estados $P_{ab} | j, \sigma \rangle = p_{ab} | j, \sigma \rangle \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} P_{ab} | j, \sigma \rangle = p_{ab} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle j, \sigma | (-1)^{2J} | j, \sigma \rangle = p_{ab} \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle (-1)^{2J} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \sum_{\{|j, \sigma\rangle\}} \langle (-1)^{2J} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, o número de estados $|j, \sigma\rangle$ com autovalor $+1$ e com autovalor -1 são iguais. Logo o número de graus de liberdade bosônico e fermiônico são idênticos.

2.4 Superespaço

Devido à existência dos operadores fermiônicos Q_a^\dagger e Q_a , as transformações do grupo supersimétrico exigem novos parâmetros (fermiônicos):

$$e^{iP^\mu x_\mu} \rightarrow e^{i(P^\mu x_\mu + \theta^a Q_a + \theta_a^* Q_a^\dagger)}, \text{ com } a, b = \pm \frac{1}{2} \quad (2.20)$$

Tais transformações implicam que os campos devem ser definidos em um espaço de $(3+1)+4$ dimensões, sendo estas parametrizadas pelas quatro coordenadas usuais (x^μ) mais quatro coordenadas de Grassmann (θ_a, θ_a^*) (conforme definido na Eq.(2.1)).

2.4.1 Operadores no Superespaço⁷

De maneira análoga à representação do operador P_μ como uma derivada espacial, podemos obter representações dos operadores Q, Q^\dagger em termos de derivadas das coordenadas do superespaço ($x^\mu, \theta_a, \bar{\theta}_a$).

⁷ A partir desta seção uma notação mais concisa será adotada (ver A.1 e A.2).

As transformações finitas com os operadores supersimétricos serão definidas como [12]:

$$U(\theta, \bar{\theta}) = e^{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \quad (2.21)$$

enquanto outras opções também são possíveis [8]:

$$e^{i\bar{\theta} \bar{Q}} e^{i\theta Q} \text{ ou } e^{i\theta Q} e^{i\bar{\theta} \bar{Q}}$$

As diferentes definições de $U(\theta, \bar{\theta})$ resultam em diferentes representações dos operadores Q e Q^\dagger . No entanto todas as representações podem ser facilmente relacionadas.

Considere duas transformações consecutivas:

$$U(\xi, \bar{\xi})U(\theta, \bar{\theta}) = e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} e^{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})}$$

usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [8], temos:

$$\begin{aligned} e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} e^{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} &= \exp\{i(\xi + \theta)Q + i(\bar{\xi} + \bar{\theta})\bar{Q} - \frac{1}{2}[(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}), (\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})] \\ &\quad - \frac{i}{6}[[(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}), (\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})], (\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})] + \dots\} \end{aligned}$$

Mas:

$$[\xi Q, \bar{\theta} \bar{Q}] = \xi^a Q_a \bar{\theta}_b \bar{Q}^b - \bar{\theta}_b \bar{Q}^b \xi^a Q_a = -\xi^a \bar{\theta}_b (Q_a \bar{Q}^b + \bar{Q}^b Q_a) = -\xi^a \bar{\theta}_b \{Q_a, \bar{Q}^b\}$$

onde:

$$\begin{aligned} \{Q_a, \bar{Q}^b\} &= \{Q_a, e^{bc} \bar{Q}_c\} = e^{bc} P_{ac} \\ \Rightarrow [\xi Q, \bar{\theta} \bar{Q}] &= \xi^a (-\bar{\theta}_b e^{bc}) P_{ac} = \xi^a P_{ac} \bar{\theta}^c = 2\xi \sigma^\mu \bar{\theta} P_\mu \end{aligned}$$

Como $[P_{ab}, Q] = [P_{ab}, \bar{Q}] = \{Q_a, Q_b\} = \{\bar{Q}_a, \bar{Q}_b\} = 0$, todos os outros termos da expansão são nulos, restando:

$$e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} e^{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} = \exp\{i[(\xi + \theta)Q + (\bar{\xi} + \bar{\theta})\bar{Q} + (i\xi \sigma^\mu \bar{\theta} - i\theta \sigma^\mu \bar{\xi})P_\mu]\} \quad (2.22)$$

Comparando a expressão acima com a Eq.(2.20) temos que a transformação $U(\xi, \bar{\xi})$ resulta nas seguintes transformações de coordenadas:

$$\theta \rightarrow \theta + \xi, \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\xi}, x^\mu \rightarrow x^\mu - i\theta \sigma^\mu \bar{\xi} + i\xi \sigma^\mu \bar{\theta}$$

Dado um supercampo definido em termos das variáveis do superespaço, teremos:

$$\Phi' = U(\xi, \bar{\xi})\Phi(x, \theta, \theta^*)U^{-1}(\xi, \bar{\xi}) = \Phi(x^\mu - i\theta \sigma^\mu \bar{\xi} + i\xi \sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})$$

$$\Rightarrow \delta\Phi = \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi + \delta\theta^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} \Phi + \delta\bar{\theta}_a \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_a} \Phi$$

$$= \xi^a \left[\frac{\partial}{\partial \theta^a} \Phi + i \sigma_{ab}^\mu \bar{\theta}^b \partial_\mu \Phi \right] + \bar{\xi}_{\dot{a}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{a}}} \Phi + i \theta^a \sigma_{ab}^\mu e^{\dot{b}a} \partial_\mu \Phi \right] \quad (2.23)$$

Desta forma podemos definir os operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} \delta \Phi &\equiv i(\xi \hat{Q} + \bar{\xi} \hat{\bar{Q}}) \Phi \\ \Rightarrow \hat{Q}_a &= -i \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \sigma_{ab}^\mu \bar{\theta}^b \partial_\mu \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\Rightarrow \hat{\bar{Q}}_{\dot{a}} = -i \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{a}}} + \theta^a \sigma_{ab}^\mu e^{\dot{b}a} \partial_\mu \quad (2.25)$$

Usando as expressões acima pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}_a, \hat{\bar{Q}}_{\dot{b}}\} &= 2i(\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu = \hat{P}_{ab} \\ \{\hat{Q}_a^\dagger, \hat{Q}_b^\dagger\} &= \{\hat{Q}_a, \hat{Q}_b\} = 0 \end{aligned}$$

Logo as definições dos operadores diferenciais acima são consistentes com as relações de (anti)comutação definidas anteriormente.

2.5 Supercampos

Na Teoria Quântica de Campos usual (não supersimétrica) buscamos operadores que se transformem de maneira bem definida pelo grupo de Poincaré, tais como campos espinoriais e vetoriais. Desta forma se torna trivial construir uma ação escalar (\mathcal{S}). Como as transformações do grupo de Poincaré se referem ao espaço-tempo (x^μ), os campos escalares, espinoriais e vetoriais são funções de x^μ . De maneira análoga, para a construção de lagrangeanas supersimétricas é conveniente encontrar campos que se transformem de maneira bem definida sob transformações supersimétricas. Como estas transformações se referem ao superespaço $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, os campos de interesse também devem depender das novas coordenadas (fermiônicas). Estes campos são chamados de supercampos.

Por serem variáveis que anticomutam, θ e $\bar{\theta}$ só podem aparecer até a quarta potência, já que:

$$\theta_a \theta_b \theta_c = -\theta_a \theta_c \theta_b = 0$$

Portanto podemos expandir qualquer supercampo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) &= a_1(x) + \theta a_2(x) + \bar{\theta} a_3(x) + \theta \theta a_4(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} a_5(x) \\ &+ \theta \bar{\theta} a_6(x) + \theta \theta \bar{\theta} a_7(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta a_8(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} a_9(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde a_i são campos arbitrários. Usando a Eq.(2.26) pode-se mostrar que o produto de dois supercampos satisfaz a forma acima e, portanto, também é um supercampo [9]. Como a la-

grangeana (\mathcal{L}) deve ser um escalar, ela deverá ser construída com produtos de supercampos escalares⁸. Impondo esta condição à F , a natureza dos campos a_i está automaticamente determinada:

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) \quad (2.27)$$

$$+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)$$

onde f , m , n e D são escalares, ψ e ρ são espiniores de mão esquerda, $\bar{\chi}$ e $\bar{\rho}$ são espiniores de mão direita e V_μ é um campo vetorial.

A transformação de F será dada por:

$$\delta F = [i\alpha Q + i\bar{\alpha}\bar{Q}, F] = i(\alpha^a\hat{Q}_a + \bar{\alpha}_{\hat{a}}\hat{Q}^{\hat{a}})F$$

Aplicando-se as expressões das Eq.(2.24) e (2.25) para \hat{Q} e $\hat{\bar{Q}}$ obtemos as transformações para os campos:

$$\begin{aligned} \delta F(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta f(x) + \theta\delta\psi(x) + \bar{\theta}\delta\bar{\chi}(x) + \theta\theta\delta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta n(x) \\ &+ \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\delta\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta\rho(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta d(x) \\ &= \alpha\psi + \bar{\alpha}\bar{\chi} + (2\alpha\theta m + \theta\sigma^\mu\bar{\alpha}V_\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\partial_\mu f) + (2\bar{\alpha}\bar{\theta}n + \alpha\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu f) \\ &+ \theta\theta\bar{\lambda}\bar{\alpha} - i\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\theta\partial_\mu\psi + i\theta\theta\alpha\sigma^\mu\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\theta\partial_\mu\rho\dots \end{aligned}$$

De tal forma que⁹:

$$\begin{aligned} \delta f &= \alpha\psi + \bar{\alpha}\bar{\chi} \\ \delta\psi_a &= 2\alpha_a m + \sigma_{ab}^\mu\bar{\alpha}^b V_\mu - i\sigma_{ab}^\mu\bar{\alpha}^b\partial_\mu f \\ \delta\bar{\chi}_{\hat{a}} &= 2\bar{\alpha}_{\hat{a}} n + \alpha^b\sigma_{b\hat{a}}^\mu V_\mu + i\alpha^b\sigma_{b\hat{a}}^\mu\partial_\mu f \\ \delta m &= \bar{\alpha}\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\alpha} \\ \delta D &= -\frac{i}{2}\alpha\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_{\mu\rho}\rho\sigma^\mu\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde foram omitidas as transformações de n , V_μ , $\bar{\lambda}$ e ρ .

Logo F fornece uma representação do grupo supersimétrico. No entanto, como produtos de supercampos continuam sendo supercampos, a lagrangeana formada por produtos do tipo $F^n G^m$ será um supercampo escalar, que claramente não é invariante por transforma-

⁸ \mathcal{L} também poderia ser formada por termos do tipo $\bar{\Psi}\Psi$, onde Ψ é um supercampo que possui índices espinoriais. No entanto o produto $\bar{\Psi}\Psi$ é um supercampo escalar. Logo basta que este caso seja examinado. Posteriormente pode-se construir as componentes a_i a partir do produto de outros supercampos (escalares ou não).

⁹ Para obter os resultados abaixo foram utilizadas as identidades do Apêndice A.2.

ções supersimétricas. A invariância pelo grupo supersimétrico exige que:

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

Portanto basta que:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu$$

onde M^μ é um campo qualquer.

Das transformações da Eq.(2.28), temos que a componente D de um supercampo só se transforma por uma derivada parcial:

$$\delta D = -\frac{i}{2}\partial_\mu(\alpha^a\sigma_{ab}^\mu\bar{\lambda}^b + \rho^a\sigma_{ab}^\mu\bar{\alpha}^b)$$

Logo uma ação supersimétrica será da forma:

$$S = \int d^4x [F]_D$$

onde $[F]_D$ é a componente D de um supercampo escalar.

Como dito anteriormente, o supercampo F possui 4 escalares, 4 espinores e 1 campo vetorial. No entanto os supermultipletos fundamentais possuem apenas duas partículas (caso não massivo) ou três partículas (caso massivo). Portanto as componentes da Eq.(2.27) fornecem uma representação redutível do grupo supersimétrico. Logo devemos impor vínculos sobre as componentes de F para obtermos representações irredutíveis que gerem os supermultipletos fundamentais [9].

2.5.1 Supercampos Quirais

As restrições sobre F devem ser invariantes sob transformações supersimétricas e, portanto, é necessário encontrar operadores que anticomutem com os operadores da Eq.(2.24) e (2.25). Para tal são definidas as seguintes derivadas covariantes [11]:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\sigma_{ab}^\mu\bar{\theta}^b\partial_\mu \quad (2.29)$$

$$D_a^\dagger = \bar{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} + i\theta^b\sigma_{ba}^\mu\partial_\mu \quad (2.30)$$

Logo, usando a Eq.(2.24) e a Eq.(2.29):

$$\{i\hat{Q}_a, D_b\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^a}, \frac{\partial}{\partial\theta^b} \right\} - i\sigma_{bc}^\nu\partial_\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^a}, \bar{\theta}^c \right\} + i\sigma_{ad}^\mu\partial_\mu \left\{ \bar{\theta}^d, \frac{\partial}{\partial\theta^b} \right\} + \sigma_{ad}^\mu\sigma_{bc}^\nu\partial_\mu\partial_\nu \left\{ \bar{\theta}^d, \bar{\theta}^c \right\}$$

Mas:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^a}, \bar{\theta}^c \right\} F = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(\bar{\theta}^c F) + \bar{\theta}^c \frac{\partial}{\partial\theta^a} F = -\bar{\theta}^c \frac{\partial}{\partial\theta^a} F + \bar{\theta}^c \frac{\partial}{\partial\theta^a} F = 0$$

Como os demais comutadores também são nulos:

$$\{\hat{Q}_a, D_b\} = 0$$

$$\Rightarrow [i\alpha^a \hat{Q}_a, D_b] = i\alpha^a \hat{Q}_a D_b - iD_b \alpha^a \hat{Q}_a = i\alpha^a (\hat{Q}_a D_b + D_b \hat{Q}_a) = i\alpha^a \{\hat{Q}_a, D_b\} = 0$$

De maneira análoga mostra-se:

$$[i\alpha \hat{Q} + i\bar{\alpha} \hat{\bar{Q}}, D_b] = [i\alpha \hat{Q} + i\bar{\alpha} \hat{\bar{Q}}, \bar{D}_b] = 0$$

$$\{D_a, D_a\} = \{\bar{D}_{\dot{a}}, \bar{D}_{\dot{a}}\} = 0$$

$$\{D_a, \bar{D}_{\dot{b}}\} = 2i(\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \partial_\mu = \hat{P}_{a\dot{b}}$$

Assim podemos definir vínculos que são invariantes supersimétricos:

$$\bar{D}_{\dot{a}} \Phi = 0 \tag{2.31}$$

$$D_a \Phi^\dagger = 0 \tag{2.32}$$

Onde Φ é chamado de supercampo quiral de mão esquerda (ou *left-handed*) e Φ^\dagger de supercampo quiral de mão direita (*right-handed*). A condição da Eq.(2.31) pode ser reescrita através de uma mudança de variáveis:

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$$

Desta forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} = \frac{\partial y^\nu}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} \frac{\partial \Phi}{\partial y^\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} = i\theta^b \sigma_{b\dot{a}}^\nu \frac{\partial \Phi}{\partial y^\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}}$$

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial y^\mu}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_{\dot{a}} \Phi(y, \theta, \bar{\theta}) = -i\theta^b \sigma_{b\dot{a}}^\nu \frac{\partial \Phi}{\partial y^\nu} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} + i\theta^b \sigma_{b\dot{a}}^\mu \frac{\partial \Phi}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}}$$

Então:

$$\bar{D}_{\dot{a}} \Phi(y, \theta, \bar{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} = 0$$

Portanto podemos expandir $\Phi = \Phi(y, \theta)$ da seguinte forma:

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \theta\chi(y) + \theta\theta f(y) \tag{2.33}$$

onde ϕ e f são escalares e χ_a é um espinor de mão esquerda. Expandindo ϕ em torno de $y_0 = x$:

$$\phi(y) = \phi(y_0) + \partial_\mu \phi(y_0)(y^\mu - y_0^\mu) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu \phi(y_0)(y^\mu - y_0^\mu)(y^\nu - y_0^\nu) + \dots$$

$$= \phi(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu\partial_\mu\phi(x)$$

já que os próximos termos envolvem $(\theta)^3$. Fazendo o mesmo para χ e f , substituindo na Eq.(2.33) e mantendo apenas os termos até ordem $(\theta)^2$, $(\bar{\theta})^2$:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \theta\chi(x) + \theta\theta f(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\chi(x) - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu\partial_\mu\phi(x) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Mas [12]:

$$\begin{aligned} \theta^a\theta^c &= -\frac{1}{2}e^{ac}\theta\theta \\ \Rightarrow \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\chi &= -\frac{1}{2}\theta\theta\sigma^\mu_{ab}\bar{\theta}^b e^{ac}\partial_\mu\chi_c = -\frac{1}{2}\theta\theta\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\theta} \end{aligned}$$

Analogamente, usando $Tr(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = 2g^{\mu\nu}$ [12]:

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta} = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}g^{\mu\nu}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \theta\chi(x) + \theta\theta f(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) \\ &\quad + \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi^\dagger(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}f^\dagger(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi^\dagger(x) \\ &\quad - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi^\dagger(x) \end{aligned}$$

onde Φ satisfaz a Eq.(2.31) e Φ^\dagger satisfaz a Eq.(2.32).

Usando as transformações obtidas na Eq.(2.28) para o supercampo F e fazendo

$$f = \phi, \psi = \chi, m = f, V_\mu = -i\partial_\mu\phi, \bar{\lambda}_a = \frac{i}{2}\partial_\mu\chi^b\sigma_{ba}^\mu, D = -\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\phi$$

e $\bar{\chi} = n = \rho = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \alpha\chi \\ \delta\chi_a &= 2\alpha_a f - 2i\partial_\mu\phi\sigma_{ab}^\mu\bar{\alpha}^b \\ \delta f &= i\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\alpha} \end{aligned}$$

Os demais termos resultam apenas em relações de consistência entre as derivadas dos campos:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \alpha\partial_\mu\chi \dots$$

Considere agora um supercampo Φ_k formado pelo produto de dois supercampos quirais

de mão esquerda. Então, usando a Eq.(2.31) e a Eq.(2.34):

$$\bar{D}_{\dot{a}}\Phi_k = \bar{D}_{\dot{a}}(\Phi_i\Phi_j) = (\bar{D}_{\dot{a}}\Phi_i)\Phi_j + \Phi_i(\bar{D}_{\dot{a}}\Phi_j) = 0$$

sendo:

$$\begin{aligned}\Phi_k \equiv \Phi_i\Phi_j &= \phi_i\phi_j + \theta(\chi_i\phi_j + \chi_j\phi_i) + \theta\theta(f_i\phi_j + f_j\phi_i - \frac{1}{2}\chi_i\chi_j) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\phi_i\phi_j) \\ &+ \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu(\chi_i\phi_j + \chi_j\phi_i)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu[\partial_\mu(\phi_i\phi_j)]\end{aligned}$$

onde

$$\phi_k \equiv \phi_i\phi_j, \chi_k \equiv \chi_i\phi_j + \chi_j\phi_i \text{ e } f_k \equiv f_i\phi_j + f_j\phi_i - \frac{1}{2}\chi_i\chi_j$$

Portanto o produto de dois supercampos quirais de mão esquerda também é um supercampo quiral de mão esquerda. De maneira geral qualquer potência de supercampos quirais de mão esquerda (direita) é um supercampo quiral de mão esquerda (direita). No entanto, derivadas de supercampos quirais não são necessariamente quirais, assim como produtos de supercampos quirais e seus complexos conjugados.

2.5.2 Ações Supersimétricas

Como visto anteriormente, a invariância por transformações supersimétricas exige que a lagrangeana seja a componente D de um supercampo geral. No entanto, se impusermos que \mathcal{L} seja composta por produtos de supercampos quirais, teremos:

$$[\delta\mathcal{L}]_f = i\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\alpha} = i\partial_\mu(\chi\sigma^\mu\bar{\alpha})$$

ou seja, \mathcal{L} muda apenas por uma derivada total, assim como o termo D para um supercampo geral. Portanto a ação mais geral possível é da forma:

$$S = \int d^4x[F]_f + \int d^4x[K]_D$$

onde F é um supercampo quiral, K um supercampo geral e $[A]_{f,D}$ representa a componente f (D) do supercampo A .

Sabemos que se F for um produto de supercampos quirais, F será quiral. Porém também é possível construir supercampos quirais utilizando-se as derivadas covariantes. Por exemplo, dado um supercampo (escalar) G qualquer, temos:

$$\bar{D}_{\dot{a}}\bar{D}_{\dot{b}}\bar{D}_{\dot{c}}G = 0$$

já que $\{\bar{D}_{\dot{a}}, \bar{D}_{\dot{b}}\} = 0$. Logo o campo $\bar{D}_{\dot{b}}\bar{D}_{\dot{c}}G = -\frac{1}{2}e_{\dot{b}\dot{c}}\bar{D}\bar{D}G$ é um supercampo quiral de mão

esquerda. Usando a Eq.(2.27) e as definições das derivadas covariantes:

$$\bar{D}\bar{D}G = -\bar{D}^{\dot{a}}\bar{D}_{\dot{a}}G = -(2n + 2\theta\rho + 2\theta\theta D) + i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu}\frac{\partial G}{\partial\theta^{\dot{a}}} - ie^{\dot{a}\dot{b}}\theta^b\sigma_{\dot{b}\dot{b}}^{\mu}\partial_{\mu}(\bar{D}_{\dot{a}}G)$$

Portanto:

$$\int d^4x[\bar{D}\bar{D}G]_f = -2 \int d^4xD = -2 \int d^4x[G]_D$$

já que as derivadas totais ∂_{μ} não contribuem para a ação. Da expressão acima temos que termos do tipo $[\bar{D}\bar{D}G]_f$ em $[F]_f$ podem ser desprezados, já que eles podem ser incluídos em $[K]_D$. Portanto, em geral, F será um polinômio nos supercampos quirais.

Com relação ao supercampo K podemos desprezar qualquer termo que seja um campo quiral, já que sua componente D é da forma:

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\phi \text{ ou } \partial^{\mu}\partial_{\mu}\phi^{\dagger}$$

que são derivadas totais e portanto não contribuem para a ação. O mesmo é válido para termos do tipo

$$[\bar{D}_{\dot{a}}G]_D \text{ ou } [D_{\dot{a}}G]_D$$

já que seus únicos termos não nulos são derivadas totais. Logo K só deve conter termos não-quirais e nenhum termo derivativo. Restrições extras sobre K e F são obtidas impondo-se que a teoria seja renormalizável.

Dá-se o nome de superpotencial ao termo F quando este é construído apenas com supercampos quirais. Já para K dá-se o nome de potencial de Kähler.

2.5.3 Renormalizabilidade

Como discutido na última seção, para que a ação seja invariante por transformações supersimétricas, devemos ter:

$$S = \int d^4x[F]_f + \int d^4x[K]_D$$

Em princípio S pode conter qualquer potência de supercampos ou derivadas covariantes. No entanto, se considerarmos apenas os termos renormalizáveis:

$$[\mathcal{L}] \equiv \dim(\mathcal{L}) = 4 \tag{2.35}$$

As dimensões dos campos escalares, fermiônicos e vetoriais são usualmente definidas pelos seus termos cinéticos:

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots$$

$$\Rightarrow \dim(\phi) = 1, \dim(\psi) = \frac{3}{2} \text{ e } \dim(V_{\mu}) = 1$$

A condição da Eq.(2.35) impõe restrições para o superpotencial e o potencial de Kähler. Usando a Eq.(2.34) e as dimensões dos campos quirais ($\frac{3}{2}$) e escalares (1), temos¹⁰:

$$[\Phi] = 1 \Rightarrow [\theta] = [\bar{\theta}] = -\frac{1}{2}$$

Assumindo uma lagrangeana renormalizável:

$$\mathcal{L} = [F]_f + [K]_D \text{ e } [\mathcal{L}] = 4$$

então:

$$[D] = 4 \text{ e } [f] = 4$$

onde $[K]_D = D$ e $[F]_f = f$. Porém

$$[K] = [\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D] \Rightarrow [K] = [D] - 2 \Rightarrow [K] = 2$$

e

$$[F] = [\theta\theta f] \Rightarrow [F] = [f] - 1 \Rightarrow [F] = 3$$

Logo F só pode ser um polinômio de ordem 3 nos supercampos quirais:

$$F(\Phi) = c_i\Phi_i + m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + hc$$

onde m_{ij} e λ_{ijk} devem ser totalmente simétricos. Como discutido na seção anterior, K não pode depender de derivadas dos supercampos. Restringindo-se apenas a supercampos quirais, como K em si não pode ser quiral, a única possibilidade é¹¹:

$$K(\Phi) = g_{ij}\Phi_i^\dagger\Phi_j$$

onde g_{ij} deve ser hermitiana. Os termos acima fornecerão os termos cinéticos da teoria, mas para tal g deve ser positiva definida. Logo podemos redefinir os supercampos por uma transformação unitária de tal forma a diagonalizar g :

$$\Phi' = U\Phi$$

$$\Rightarrow K(\Phi) = \Phi'^\dagger U^\dagger g U \Phi' = \Phi'^\dagger \Phi'$$

ou seja, sempre pode-se considerar os termos cinéticos como sendo diagonais.

As expressões para $[\Phi_i\Phi_j]_f$, $[\Phi_i\Phi_j\Phi_k]_f$ e $[\Phi_i^\dagger\Phi_j]_D$ são [11]:

$$[\Phi_i\Phi_j]_f = f_i\phi_j + f_j\phi_i - \frac{1}{2}\chi_i\chi_j$$

¹⁰Onde $[A]$ representa a dimensão do termo A em unidades naturais ($c = \hbar = 1$).

¹¹ Apesar de Φ^\dagger e Φ serem quirais, seu produto não o é.

$$\begin{aligned}
[\Phi_i \Phi_j \Phi_k]_f &= f_i \phi_j \phi_k + f_j \phi_i \phi_k + f_k \phi_i \phi_j - \frac{1}{2} \chi_i \chi_k \phi_j - \frac{1}{2} \chi_j \chi_k \phi_i - \frac{1}{2} \chi_i \chi_j \phi_k \\
[\Phi_i^\dagger \Phi_j]_D &= f_i f_j^\dagger - \frac{1}{4} \phi_i^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi_j - \frac{1}{4} \phi_j \partial_\mu \partial^\mu \phi_i^\dagger + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_j \\
&\quad - \frac{i}{4} \partial_\mu \chi_j \sigma^\mu \bar{\chi}_i + \frac{i}{4} \chi_j \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_i
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Desprezando derivadas totais e termos lineares obtemos [13]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (f_i f_i^\dagger + \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \frac{i}{2} \chi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_i) \\
&+ (2m_{ij} f_i \phi_j - \frac{1}{2} m_{ij} \chi_i \chi_j + 3\lambda_{ijk} f_i \phi_j \phi_k - \frac{3}{2} \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Redefinindo χ , λ e m :

$$\chi \rightarrow \sqrt{2} \chi \quad \lambda_{ijk} \rightarrow \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \quad m_{ij} \rightarrow \frac{1}{2} m_{ij}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (f_i f_i^\dagger + \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + i \chi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_i) \\
&+ (m_{ij} f_i \phi_j - \frac{1}{2} m_{ij} \chi_i \chi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} f_i \phi_j \phi_k - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Da expressão acima nota-se que \mathcal{L} não possui nenhum termo derivativo em f , ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0$$

Logo f pode ser considerado como um campo auxiliar e pode ser eliminado de \mathcal{L} através das equações do movimento:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} &= f_i^\dagger + m_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k = 0 \\
\Rightarrow f_i^\dagger &= -m_{ij} \phi_j - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k
\end{aligned} \tag{2.39}$$

o lado direito da expressão acima é idêntico à

$$-\frac{\partial}{\partial \phi_i} F(\phi) = -\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right)$$

onde $F(\phi)$ é o superpotencial avaliado no campo escalar. Note que

$$m_{ij} f_i \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} f_i \phi_j \phi_k = f_i (m_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k) = -f_i f_i^\dagger$$

Como em \mathcal{L} aparece o termo acima e seu hermitiano conjugado, temos:

$$\mathcal{L} = (f_i f_i^\dagger - 2f_i f_i^\dagger + \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + i \chi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_i) - \left(\frac{1}{2} m_{ij} \chi_i \chi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc \right)$$

$$= (\partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + i\chi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi}_i) - \left(\frac{1}{2} m_{ij} \chi_i \chi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc \right) - V(\phi)$$

onde $V = f_i f_i^\dagger = \left| \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \right|^2$ é o potencial escalar. Da lagrangeana acima obtemos as seguintes equações do movimento:

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu \chi_i \sigma^\mu &= m_{ij} \bar{\chi}_j + \lambda_{ijk} \bar{\chi}_j \phi_k^\dagger \\ \partial^\mu \partial_\mu \phi_i^\dagger &= -\frac{1}{2} \lambda_{ijk} \chi_j \chi_k - (m_{ij} m_{jl} \phi_l^\dagger + \frac{1}{2} m_{ij} \lambda_{jlm} \phi_l^\dagger \phi_m^\dagger + \phi_k \lambda_{ikj} m_{jl} \phi_l^\dagger + \frac{1}{2} \phi_k \lambda_{ikj} \lambda_{jlm} \phi_l^\dagger \phi_m^\dagger) \end{aligned}$$

Em termos de espinores de Majorana, temos [12]:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \bar{\Psi} = (\chi^a \quad \bar{\chi}_{\dot{a}})$$

Assim

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_i \Psi_j &= \chi_i \chi_j + \bar{\chi}_i \bar{\chi}_j, \quad \bar{\Psi}_i \gamma^5 \Psi_j = \bar{\Psi}_i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_j = -\chi_i \chi_j + \bar{\chi}_i \bar{\chi}_j \\ \gamma^\mu \Psi &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} \sigma_{\dot{a}a}^\mu \bar{\chi}^{\dot{a}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \chi_a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Reescrevendo \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \frac{i}{2} \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - \frac{1}{2} m_{ij} \bar{\Psi}_i \Psi_j \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \bar{\Psi}_i \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \Psi_j \phi_k - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \bar{\Psi}_i \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \Psi_j \phi_k^\dagger - V(\phi) \end{aligned}$$

onde

$$V(\phi) = |m_{ij} \phi_i + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k|^2$$

2.5.4 Supercampos Vetoriais

Até agora usando apenas supercampos escalares quirais foi possível construir uma "superlagrangeana" de Yukawa, composta apenas por espinores e escalares. No entanto os supercampos quirais não contém campos vetoriais e portanto não permitem a construção de teorias de gauge. Para tal é necessário introduzir uma nova classe de supercampos, chamados de supercampos vetoriais (ou reais), definidos por [9]:

$$V^\dagger = V$$

Usando a Eq.(2.27), temos:

$$f = f^\dagger, \quad \psi = \chi, \quad m = n^\dagger, \quad V_\mu = V_\mu^\dagger, \quad \lambda = \rho \quad \mathbf{e} \quad D^\dagger = D$$

Portanto:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = f + \theta\chi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\theta n^\dagger + \bar{\theta}\bar{\theta}n + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D$$

O supercampo acima pode ser convenientemente reescrito apenas em termos de campos reais [12]:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta(m + in) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(m - in) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C) \end{aligned}$$

Para obter a transformação de V podemos usar as seguintes identidades [12]:

$$\begin{aligned} V(x, \theta = \bar{\theta} = 0) &= V(0) = C \\ (D_a V)(0) &= i\chi_a, \quad (\bar{D}_{\dot{a}} V)(0) = -i\bar{\chi}_{\dot{a}} \\ (D^2 \bar{D}_{\dot{a}} V)(0) &= -4i\bar{\lambda}_{\dot{a}}, \quad (\bar{D}^2 D_a V)(0) = 4i\lambda_a \\ ([D_a, \bar{D}_{\dot{a}}] V)(0) &= 2\sigma_{a\dot{a}}^\mu V_\mu \\ (D^b \bar{D}^{\dot{c}} D_a V)(0) &= 4\delta_a^b D - 2i(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a^{\dot{b}} V_{\mu\nu} \end{aligned}$$

onde $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Usando as identidades acima:

$$\delta C = [i(\alpha Q + \bar{\alpha}\bar{Q})V](0) = [(\alpha D + \bar{\alpha}\bar{D})V](0) = i\alpha\chi - i\bar{\alpha}\bar{\chi}$$

já que

$$[(\alpha Q + \bar{\alpha}\bar{Q})V](0) = [(\alpha \frac{\partial}{\partial\theta} - \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}})V](0) = [(\alpha D + \bar{\alpha}\bar{D})V](0)$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} \delta\chi_a &= -\alpha_a(m + in) + \sigma_{a\dot{b}}^\mu \bar{\alpha}^{\dot{b}} (V_\mu + \partial_\mu C) \\ \delta\lambda_a &= -iD\alpha_a + \frac{1}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a^{\dot{b}} \alpha_{\dot{b}} V_{\mu\nu} \\ \delta V^{\nu\mu} &= -i\alpha\sigma^\mu\partial^\nu\bar{\lambda} + i\partial^\nu\lambda\sigma^\mu\bar{\alpha} - i\alpha\sigma^\nu\partial^\mu\bar{\lambda} + i\partial^\mu\lambda\sigma^\nu\bar{\alpha} \\ \delta D &= -\partial_\mu(\lambda\sigma^\mu\bar{\alpha} - \alpha\sigma^\mu\bar{\lambda}) \\ \delta m &= \bar{\alpha}\bar{\lambda} + \alpha\lambda - i\alpha\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} + i\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\alpha} \\ \delta n &= i\alpha\lambda - i\bar{\alpha}\bar{\lambda} + \alpha\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi} + \partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\alpha} \end{aligned}$$

Das transformações acima vemos que $V_{\mu\nu}$, D e λ formam uma representação irredutível.

2.6 Invariância de Gauge

Por serem operadores escalares (em geral não abelianos), os geradores do grupo de gauge devem comutar com os geradores do grupo supersimétrico. Desta forma todas as partículas em um supermultipeto se transformarão pela mesma representação do grupo de gauge. Para supercampos quirais (da Eq.(2.34)):

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi + \theta\chi + \theta\theta f - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi + \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi \\ \Rightarrow \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)T}\phi(x), \chi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)T}\chi(x) \text{ e } f(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)T}f(x)\end{aligned}$$

onde $\alpha(x)$ é o parâmetro da transformação e T é seu gerador. Como Φ envolve derivadas dos campos, o supercampo quiral não se transforma de forma linear. No entanto podemos generalizar as transformações de gauge para o superespaço, fazendo com que $\alpha = \alpha(y, \theta)$, onde $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Desta forma α e Φ são supercampos quirais e podem ser escritos como (ver Eq.(2.33)):

$$\begin{aligned}\alpha(y, \theta) &= \Lambda(y) + \theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ \Phi(y, \theta) &= \phi(y) + \theta\chi(y) + \theta\theta f(y)\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}\phi(y) &\rightarrow e^{i\alpha(y, \theta)T}\phi(y), \chi(y) \rightarrow e^{i\alpha(y, \theta)T}\chi(y) \text{ e } f(y) \rightarrow e^{i\alpha(y, \theta)T}f(y) \\ \Rightarrow \Phi(y, \theta) &\rightarrow e^{i\alpha(y, \theta)T}\Phi(y, \theta)\end{aligned}$$

sendo $\alpha T = \alpha^A T_A$ para grupos não abelianos.

Para que os termos cinéticos sejam invariantes, devemos ter:

$$\Phi^\dagger\Phi \rightarrow \Phi^\dagger\Phi$$

Porém:

$$\Phi^\dagger\Phi \rightarrow \Phi^\dagger e^{-i\alpha^\dagger T} e^{i\alpha T} \Phi \neq \Phi^\dagger\Phi$$

Portanto, para construir termos cinéticos invariantes, define-se um novo supercampo $G(x, \theta, \bar{\theta})$ de tal forma que:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-2VT} \text{ e } G(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{i\alpha^\dagger T} G e^{-i\alpha T} \quad (2.40)$$

assim:

$$\Phi^\dagger G \Phi \rightarrow \Phi^\dagger G \Phi$$

Como $G = G^\dagger$, V é um supercampo vetorial:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta(m + in) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(m - in) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi)$$

$$-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C)$$

Usando a Eq.(2.40) em primeira ordem em α , temos:

$$(1 - VT) \rightarrow (1 + i\alpha^\dagger T)(1 - VT)(1 - i\alpha T)$$

$$\Rightarrow VT \rightarrow VT + i(\alpha - \alpha^\dagger)T + \dots$$

Ou seja:

$$V^A \rightarrow V^A + i(\alpha^A - \alpha^{A\dagger}) + \dots$$

Como V^A e $i(\alpha^A - \alpha^{A\dagger})$ são reais, a transformação definida acima para G é consistente, já que campos vetoriais continuam sendo vetoriais após transformações de gauge generalizadas. Como α é um supercampo quiral:

$$\alpha - \alpha^\dagger = (\Lambda - \Lambda^\dagger) + (\theta\psi - \bar{\theta}\bar{\psi}) + (\theta\theta F - \bar{\theta}\bar{\theta}F^\dagger) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\Lambda + \Lambda^\dagger)$$

$$+ \frac{i}{2}(\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu(\Lambda - \Lambda^\dagger)$$

Assim podemos determinar como se transformam as componentes de V ¹²:

$$C \rightarrow C + i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$$

$$\chi \rightarrow \chi + \psi$$

$$m \rightarrow m + 2Re(F) \quad n \rightarrow n + 2Im(F)$$

$$V_\mu \rightarrow V_\mu + 2\partial_\mu Re(\Lambda)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \text{ e } D \rightarrow D$$

Das transformações acima vemos que os campos C , χ , m e n podem ser eliminados através de transformações de gauge generalizadas. Neste gauge (chamado de gauge de Wess-Zumino) [12]:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D$$

Porém das transformações supersimétricas para V nota-se que o gauge de Wess-Zumino (WZ) não é um invariante supersimétrico. No entanto sempre é possível combinar transformações supersimétricas e transformações de gauge generalizadas de tal forma que V sempre esteja no gauge WZ [9].

Apesar de o gauge WZ não ser um invariante supersimétrico, nem um invariante por transformações de gauge generalizadas, ele ainda é invariante por transformações de gauge

¹²Como citado acima, estas transformações incluem apenas termos em primeira ordem em α . Os demais termos podem ser obtidos através da Eq.(2.40), usando a fórmula de Baker-Hausdorff [8, 9].

ordinárias:

$$\begin{aligned}\psi(y) &= 0 \text{ e } F(y) = 0 \\ \Rightarrow \alpha(y, \theta) &= \alpha(x, \theta, \bar{\theta}) = \Lambda - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\Lambda - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\Lambda\end{aligned}$$

sendo Λ real. Sob estas transformações, temos:

$$e^{-2VT} \rightarrow e^{i\alpha^\dagger T} e^{-2VT} e^{-i\alpha T}$$

usando a fórmula de Baker-Hausdorff :

$$e^{i\alpha^\dagger T} e^{-2VT} e^{-i\alpha T} = \exp(-2VT + i[VT, \alpha T + \alpha^\dagger T] - i(\alpha T - \alpha^\dagger T))$$

Logo:

$$V'^A T_A = V^A T_A - iV^B \Lambda^C [T_B, T_C] + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\Lambda^A T_A$$

mas $[T_B, T_C] = if_{ABC}T_A$, então:

$$V^A \rightarrow V^A + f_{ABC}V^B\Lambda^C + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\Lambda^A$$

De tal forma que (sempre assumindo o gauge WZ):

$$\begin{aligned}V^A(x, \theta, \bar{\theta}) &= \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^A + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}^A - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda^A + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^A \\ \Rightarrow \delta V_\mu^A &= f_{ABC}V^B\Lambda^C + \partial_\mu\Lambda^A \\ \delta\lambda^A &= f_{ABC}\lambda^B\Lambda^C \\ \delta D^A &= f_{ABC}D^B\Lambda^C\end{aligned}$$

ou seja, V_μ^A se transforma como um campo de gauge não-abeliano e λ^A e D^A como campos espinoriais e escalares que pertencem à mesma representação adjunta de V_μ^A .

As expressões acima permitem calcular o termo invariante $\Phi^\dagger e^{-2VT}\Phi$. Se V estiver no gauge WZ, $\Phi^\dagger e^{-2VT}\Phi$ será invariante apenas por transformações de gauge ordinárias. Como neste gauge V não possui termos independentes de θ e $\bar{\theta}$:

$$\Phi^\dagger e^{-2VT}\Phi = \Phi^\dagger(1 - 2V^A T_A + 2V^A V^B T_A T_B)\Phi$$

onde T_A são os geradores da representação de Φ . Para

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi + \sqrt{2}\theta\chi + \theta\theta f - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu\phi$$

e

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \quad (2.41)$$

temos:

$$\begin{aligned}
-2\Phi^\dagger T_A V^A \Phi|_D &= (-i\partial^\mu \phi^\dagger T_A V_\mu^A \phi + hc) + (i\sqrt{2}\bar{\chi}\lambda^A T_A \phi + hc) - \phi^\dagger T_A D^A \phi + \bar{\chi} T_A V_\mu^A \bar{\sigma}^\mu \chi \\
2\Phi^\dagger T_A V^A T_B V^B \Phi|_D &= \phi^\dagger T_A V_\mu^A T_B V^{B\mu} \phi
\end{aligned}$$

onde $A|_{D(f)}$ indica a componente $D(f)$ do supercampo A . Então, usando a Eq.(2.38) e desprezando derivadas totais :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \Phi^\dagger e^{2gV^T} \Phi|_D &= ff^\dagger + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi + g\phi^\dagger T_A D^A \phi \\
&\quad -i\sqrt{2}g\bar{\chi}\lambda^A T_A \phi + i\sqrt{2}g\phi^\dagger T_A \lambda^A \chi
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde D_μ é a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_A V_\mu^A$$

Os termos acima incluem as interações entre os supercampos quirais e os campos de gauge. Além dos termos habituais para as interações de gauges com escalares e férmions, obtemos uma interação adicional entre os gauginos λ^A e os férmions e escalares da teoria.

2.6.1 Tensor de Força

Na Eq.(2.42) não estão incluídos os termos cinéticos para os bósons de gauge e seus gauginos. Estes termos devem vir de um tensor de força supersimétrico, que generalize o tensor $F_{\mu\nu}$ usual para teorias de gauge.

Caso Abeliano

O supercampo vetorial não inclui termos derivativos em V_μ . Logo, para construirmos o tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ precisamos aplicar derivadas aos supercampo V . Porém, como queremos um tensor de força supersimétrico é conveniente aplicarmos derivadas covariantes à V . Usando o sistema de coordenadas $(y^\mu, \theta, \bar{\theta})$, onde $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ e o gauge de Wess-Zumino:

$$V(y, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) + i\partial^\mu V_\mu(y)] \tag{2.43}$$

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - 2i\sigma_{ab}^\mu\bar{\theta}^b\partial_\mu \tag{2.44}$$

$$\bar{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} \tag{2.45}$$

Aplicando D_a à V :

$$D_a V(y) = \sigma_{ab}^\mu \bar{\theta}^b V_\mu + 2i\theta_a \bar{\theta} \bar{\lambda} - i\bar{\theta} \bar{\theta} \lambda_a + \theta_a \bar{\theta} \bar{\theta} (D + i\partial^\mu V_\mu) - i\bar{\theta} \bar{\theta} e^{\dot{a}b} \theta^c \sigma_{cd}^\mu \sigma_{ab}^\nu \partial_\nu V_\mu - \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \sigma_{ab}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^b \quad (2.46)$$

Como desejado, obtivemos um termo do tipo $\partial_\nu V_\mu$. Mas como este termo está multiplicado por $\bar{\theta} \bar{\theta}$, não podemos definir o tensor de força como $D_a V$, pois neste caso não seria possível construir um termo $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ (já que este viria multiplicado por $(\bar{\theta} \bar{\theta})^2 = 0$). Para nos livrarmos do fator multiplicativo $\bar{\theta} \bar{\theta}$, basta aplicar $\bar{D}_a \bar{D}^a = \bar{D}^2$, pois:

$$\bar{D}^2(\bar{\theta} \bar{\theta}) = -4$$

Logo, define-se [12]:

$$W_a = -\bar{D}_i \bar{D}^b D_a V = -\bar{D}^2 D_a V \quad (2.47)$$

Obviamente:

$$\bar{D}_b W_a = 0$$

ou seja, W_a é um supercampo quiral¹³. Das expressões acima, obtemos:

$$\bar{D}^2 D_a V(y) = 4i\lambda_a - 4\theta_a (D + i\partial^\mu V_\mu) + 4i\theta^c \sigma_{cd}^\mu e^{\dot{d}a} \sigma_{aa}^\nu \partial_\nu V_\mu + 4\theta \bar{\theta} \sigma_{aa}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^a$$

usando as identidades do Apêndice A.2, obtemos:

$$W_a(y, \theta) = -4i\lambda_a(y) + 4\theta_a D(y) - 2i(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a^b \theta_b V_{\mu\nu}(y) - 4\theta \bar{\theta} \sigma_{aa}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}^a(y) \quad (2.48)$$

Como W é um supercampo quiral, o produto $W^a W_a$ será um supercampo quiral e escalar. Portanto o termo f do produto $W^a W_a$ será um invariante supersimétrico. Resta verificar se este termo também será invariante por transformações de gauge generalizadas. Mas para o caso abeliano:

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V + i(\alpha - \alpha^\dagger) \\ \Rightarrow W_a &\rightarrow W_a - i\bar{D}^2 D_a(\alpha - \alpha^\dagger) \end{aligned}$$

Como α é um supercampo quiral:

$$\begin{aligned} D_a \alpha^\dagger &= 0 \text{ e } \bar{D}_a \alpha = 0 \\ \Rightarrow \bar{D}^2 D_a(\alpha - \alpha^\dagger) &= -2i\sigma_{ab}^\mu \partial_\mu \bar{D}^b \alpha = 0 \end{aligned}$$

¹³Note que o subíndice a o distingue dos supercampos escalares quirais (Φ) definidos anteriormente.

onde foi usada a relação de anticomutação $\{D_a, \bar{D}_b\} = 2i\sigma_{ab}^\mu \partial_\mu$. Portanto:

$$\Rightarrow W^a \rightarrow W^a \Rightarrow W^a W_a \rightarrow W^a W_a$$

Usando a expressão acima pode-se mostrar que:

$$W^a(y)W_a(y)|_f = W^a(x)W_a(x)|_f$$

Portanto, da Eq.(2.48):

$$W^a W_a|_f = 16D^2 + 32i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - 8V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - 4i\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}V^{\mu\nu}V^{\sigma\rho} + 16iDTr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)V_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

Os últimos dois termos podem ser desprezados usando as identidades do Apêndice A.2:

$$Tr(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)V_{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu}V_{\mu\nu} = 0$$

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}V^{\mu\nu}V^{\sigma\rho} = 4\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^\mu V^\nu \partial^\sigma V^\rho = 4\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^\mu(V^\nu \partial^\sigma V^\rho)$$

já que $V^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$ e $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}V^\nu \partial^\mu \partial^\sigma V^\rho = 0$. Desprezando a divergência total e normalizando o termo $V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}$, obtemos:

$$\frac{1}{32}W^a W_a|_f = \frac{1}{2}D^2 + i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}$$

Como a lagrangeana deve ser real faz-se:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{64}(W^a W_a + W^{a\dagger} W_a^\dagger)|_f = \frac{1}{2}D^2 + \frac{i}{2}\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu \lambda \sigma^\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}$$

mas

$$-i\partial_\mu \lambda \sigma^\mu \bar{\lambda} = -i\partial_\mu (\lambda \sigma^\mu \bar{\lambda}) + i\lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}$$

Então, desprezando a divergência total:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D^2 + i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} \quad (2.50)$$

Da expressão acima vemos que, além de fornecer os termos cinético para V_μ , o super-campo W também gera os termos cinéticos invariantes de gauge para o gaugino λ . O campo D não possui termos cinéticos e, assim como o campo f , é um campo auxiliar que pode ser eliminado utilizando-se as equações do movimento. Da Eq.(2.50) também pode-se notar que no caso abeliano os gauginos λ não se acoplam com os campos de gauge (λ se transforma pela representação adjunta do grupo de gauge).

Caso Não-Abeliano

Da Eq.(2.50) podemos assumir a seguinte generalização para o caso não-abeliano:

$$\frac{1}{32}Tr(W^a W_a) = \frac{1}{32}W^{aA}W_a^A|_f = \frac{1}{2}D^A D^A + i\lambda^A \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^A - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}^A V^{A\mu\nu}$$

onde:

$$V^{A\mu\nu} = \partial^\mu V^{A\nu} - \partial^\nu V^{A\mu} - gf_{ABC}V^{B\mu}V^{C\nu}$$

$$D_\mu \bar{\lambda}^A = \partial_\mu \bar{\lambda}^A - gf_{ABC}V_\mu^B \bar{\lambda}^A$$

sendo f_{ABC} as constantes de estrutura (antisimétricas) do grupo de gauge.

Para que os termos cinéticos acima sejam invariantes de gauge, devemos ter:

$$W_a \rightarrow e^{-ig\alpha T} W_a e^{ig\alpha T} \quad (2.51)$$

de tal forma que $Tr(W^a W_a)$ seja invariante:

$$Tr(W^a W_a) \rightarrow Tr(e^{-ig\alpha T} W^a e^{ig\alpha T} e^{-ig\alpha T} W_a e^{ig\alpha T}) = Tr(W^a W_a)$$

Para tal generaliza-se a definição da Eq.(2.47) [12]:

$$W_a = -\bar{D}^2(e^{-2gVT} D_a e^{2gVT})$$

Da Eq.(2.40)¹⁴:

$$e^{2gV'T} = e^{-ig\alpha^\dagger T} e^{2gVT} e^{ig\alpha T}$$

$$\Rightarrow e^{-ig\alpha T} e^{-2gVT} e^{ig\alpha^\dagger T} = e^{-2gV'T}$$

então:

$$W_a \rightarrow -\bar{D}^2[e^{-ig\alpha T} e^{-2gVT} e^{ig\alpha^\dagger T} D_a (e^{-ig\alpha^\dagger T} e^{2gVT} e^{ig\alpha T})]$$

$$= -\bar{D}^2[e^{-ig\alpha T} e^{-2gVT} e^{ig\alpha^\dagger T} e^{-ig\alpha^\dagger T} D_a (e^{2gVT} e^{ig\alpha T})]$$

já que $D_a \alpha^\dagger = 0$. Logo:

$$W_a \rightarrow -\bar{D}^2[e^{-ig\alpha T} D_a e^{ig\alpha T} + e^{-ig\alpha T} e^{-2gVT} (D_a e^{2gVT}) e^{ig\alpha T}]$$

Novamente, usando que $\bar{D}_a \alpha = 0$, pode-se mostrar que:

$$\bar{D}^2(e^{-ig\alpha T} D_a e^{ig\alpha T}) = 0$$

$$\Rightarrow W_a \rightarrow -e^{-ig\alpha T} \bar{D}^2[e^{-2gVT} (D_a e^{2gVT})] e^{ig\alpha T} = e^{-ig\alpha T} W_a e^{ig\alpha T}$$

¹⁴Aqui está sendo usada a seguinte notação: $VT = V^A T_A$ e $\alpha T = \alpha^A T_A$.

como exigido pela Eq.(2.51).

Para obter as componentes de W_a , podemos utilizar o gauge de Wess-Zumino, já que a lagrangeana é invariante de gauge. Neste gauge:

$$\begin{aligned} V^A(x, \theta, \bar{\theta}) &= \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^A(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}^A(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda^A(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^A(x) \\ \Rightarrow e^{-2gVT} &= 1 - 2gV^AT_A + 2g^2V^AV^BT_AT_B \end{aligned}$$

Então:

$$e^{VT}D_a e^{-VT} = [1 + VT + \frac{1}{2}(VT)^2]D_a[1 - VT + \frac{1}{2}(VT)^2]$$

Usando a Eq.(2.43), (2.44) e (2.45) para V , D e \bar{D} nas coordenadas $(y, \theta, \bar{\theta})$, temos:

$$V^A(y, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^A(y) + O(\theta^3)$$

$$D_a VT = (\sigma^\mu\bar{\theta})_a V_\mu T + O(\theta^2) \text{ e } D_a(VT)^2 = \theta_a\bar{\theta}\bar{\theta}(V_\mu T)^2$$

onde $O(\theta^n)$ são os termos com mais de n variáveis θ ou $\bar{\theta}$. Considerando apenas os termos não nulos (até $O(\theta^4)$):

$$\begin{aligned} e^{VT}D_a e^{-VT} &= -D_a VT - VTD_a VT + \frac{1}{2}D_a(VT)^2 \\ &= -D_a VT + \frac{1}{2}(D_a VT)VT - \frac{1}{2}VT(D_a VT) \\ \Rightarrow e^{-2gVT}D_a e^{2gVT} &= 2gD_a VT + 2g^2[(D_a VT), VT] = 2gD_a VT + 2ig^2V^B D_a V^A f_{ABC}T_C \end{aligned}$$

onde

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}T_C$$

Usando a Eq.(2.46) e a Eq.(2.43) e as identidades do Apêndice A.2:

$$\begin{aligned} V^B D_a V^A &= \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^c \theta_c V_\mu^B V_\nu^A + \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{a\dot{a}}^\mu(\bar{\lambda}^A)^{\dot{a}}V_\mu^B - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{a\dot{a}}^\mu(\bar{\lambda}^B)^{\dot{a}}V_\mu^A \\ \Rightarrow f_{ABC}T_C V^B D_a V^A &= [\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^c \theta_c V_\mu^B V_\nu^A - i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{a\dot{a}}^\mu(\bar{\lambda}^B)^{\dot{a}}V_\mu^A]f_{ABC}T_C \end{aligned}$$

Mas

$$W_a = -\bar{D}^2(e^{-2gVT}D_a e^{2gVT}) = -2g\bar{D}^2 D_a VT - 2ig^2 f_{ABC}T_C \bar{D}^2(V^B D_a V^A)$$

então:

$$W_a = -2g\bar{D}^2 D_a VT + 4g^2 f_{ABC}T_C [i(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_a{}^b \theta_b V_\nu^B V_\mu^A + 2\theta\theta\sigma_{a\dot{a}}^\mu(\bar{\lambda}^B)^{\dot{a}}V_\mu^A]$$

Usando a expressão acima define-se W_a^A :

$$W_a \equiv 2gW_a^A T_A$$

$$\Rightarrow W_a^A = -\bar{D}^2 D_a V^A + 2gf_{BCA}[i(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_b{}^b \theta_b V_\nu^C V_\mu^B + 2\theta\theta\sigma_{a\dot{a}}^\mu (\bar{\lambda}^C)^{\dot{a}} V_\mu^B]$$

Note que no caso abeliano ($f_{ABC} = 0$) recupera-se a definição anterior para o tensor de força (Eq.(2.47)). Portanto podemos utilizar o resultado da Eq.(2.48) para o cálculo do primeiro termo de W_a^A :

$$\begin{aligned} W_a^A &= -4i\lambda_a^A + 4\theta_a D^A - 2i(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a{}^b \theta_b (V_{\mu\nu}^A - gf_{ABC} V_\mu^B V_\nu^C) \\ &\quad - 4\theta\theta\sigma_{a\dot{a}}^\mu [\partial_\mu (\bar{\lambda}^A)^{\dot{a}} - gf_{ABC} V_\mu^B (\bar{\lambda}^C)^{\dot{a}}] \\ \Rightarrow W_a^A(y) &= -4i\lambda_a^A + 4\theta_a D^A - 2i(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a{}^b \theta_b F_{\mu\nu}^A - 4\theta\theta\sigma_{a\dot{a}}^\mu D_\mu (\bar{\lambda}^A)^{\dot{a}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde D_μ é a derivada covariante para o gaugino λ e $F_{\mu\nu}^A = V_{\mu\nu}^A - gf_{ABC} V_\mu^B V_\nu^C$ é o tensor de força usual. Como a única diferença entre a Eq.(2.52) e a Eq.(2.48) é a substituição da derivada comum pela derivada covariante e de $V_{\mu\nu}$ por $F_{\mu\nu}$, podemos determinar os termos cinéticos diretamente da Eq.(2.50) ¹⁵:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}D^2 + i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} \text{ (Caso Abeliano)} \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(D^A)^2 + i\lambda^A\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}^A - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \text{ (Caso Não-Abeliano)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

A lagrangeana obtida acima possui apenas o termo quadrático $(W^A)^a W_a^A$, enquanto qualquer polinômio em $(W^A)^a W_a^A$ é invariante de gauge e supersimétrico. Porém, por análise dimensional temos que $[W_a^A] = [\lambda_a^A] = \frac{3}{2}$. Como mostrado na Seção 2.5.3, a lagrangeana só pode possuir supercampos quirais com dimensão ≤ 3 , então, para que a lagrangeana resultante seja renormalizável, só são permitidos termos lineares e quadráticos em W_a^A . Mas como termos lineares não são invariantes de Lorentz (pois o supercampo possui um índice fermiônico), o único termo cinético possível é o utilizado anteriormente ($W^A W^A + hc$).

2.6.2 Teoria de Gauge Supersimétrica

Com os resultados acima para os termos cinéticos dos campos de gauge supersimétricos, pode-se construir a lagrangeana (renormalizável) mais geral possível que seja tanto invariante de gauge como supersimétrica:

$$\mathcal{L} = [\Phi_i^\dagger e^{2gVT} \Phi_i]_D + [F(\Phi) + hc]_f + [W^A W^A + hc]_f \quad (2.54)$$

onde

$$F(\Phi) = c_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$$

¹⁵As simplificações realizadas no caso abeliano, onde foi possível descartar os dois últimos termos da Eq.(2.49), também são válidas para o caso não-abeliano.

é o superpotencial. Para que este preserve a invariância de gauge todos os seus termos devem ser invariantes. Em particular os termos lineares só serão permitidos para supercampos singletos sobre todo o grupo de gauge.

Além dos termos presentes na Eq.(2.54), existe ainda um tipo de termo que só é permitido caso a simetria de gauge possua algum grupo abeliano:

$$[\xi_A V^A]|_D$$

onde V^A são apenas os supercampos de gauge referentes ao grupo abeliano. Note que, neste caso, o termo acima é invariante de gauge e supersimétrico. Este tipo de termo é chamado de termo de *Fayet-Iliopoulos* [9] e é importante para a quebra espontânea de supersimetria (discutida na próxima seção).

Usando os resultados anteriores e desprezando possíveis termos do tipo $c_i \Phi_i$ e $\xi_A V^A$ ¹⁶, podemos escrever \mathcal{L} em termos das componentes dos supercampos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \phi_i)^\dagger D^\mu \phi_i + i \bar{\chi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi_i + i \lambda^A \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \\ & + (m_{ij} f_i \phi_j - \frac{1}{2} m_{ij} \chi_i \chi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} f_i \phi_j \phi_k - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc) \\ & + g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} D^A \phi_j + (i \sqrt{2} g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \lambda^A \chi_j + hc) \\ & + f_i f_i^\dagger + \frac{1}{2} (D^A)^2 \end{aligned}$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, podemos utilizar as equações de movimento para os campos auxiliares D e f e eliminá-los da lagrangeana:

$$f_i^\dagger = -m_{ij} \phi_j - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k \quad (2.55)$$

$$D^A = -g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j \quad (2.56)$$

substituindo as expressões acima em \mathcal{L} , obtemos¹⁷:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \phi_i)^\dagger D^\mu \phi_i + i \bar{\chi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi_i + i \lambda^A \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} (m_{ij} \chi_i \chi_j + \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc) - (\sqrt{2} g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \lambda^A \chi_j + hc) - V(\phi) \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde

$$V(\phi) = f_i f_i^\dagger + \frac{1}{2} (D^A)^2 = |m_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k|^2 + \frac{1}{2} [g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j]^2 \quad (2.58)$$

¹⁶Tais termos lineares serão discutidos em detalhe na próxima seção.

¹⁷Por conveniência foi feita a redefinição $\lambda^A \rightarrow i \lambda^A$.

2.7 Quebra Espontânea de Supersimetria

Como em todo caso de quebra espontânea de simetria, as condições para que ocorra a quebra de supersimetria são:

1.

$$Q_a|0\rangle \neq 0 \text{ ou } \bar{Q}_{\dot{a}}|0\rangle \neq 0 \quad (2.59)$$

2.

$$\langle 0|[\alpha Q + \bar{\alpha}\bar{Q}, \Phi]|0\rangle \neq 0 \quad (2.60)$$

onde Φ é um supercampo qualquer.

A primeira condição pode ser reescrita como uma condição sobre a hamiltoniana (H), se usarmos a seguinte relação de comutação e a identidade:

$$\begin{aligned} \{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} &= 2\sigma_{ab}^{\mu} P_{\mu} \text{ e } Tr(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}) = 2g^{\mu\nu} \\ \Rightarrow P^{\mu} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{b}a}\{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} \\ \Rightarrow P^0 = H &= \frac{1}{4}(Q_1 Q_1^{\dagger} + Q_2 Q_2^{\dagger} + Q_1^{\dagger} Q_1 + Q_2^{\dagger} Q_2) \end{aligned}$$

onde foi usado que $\bar{Q}_{\dot{a}} = Q_a^{\dagger}$. Então:

$$\langle \Psi|H|\Psi\rangle = \frac{1}{4}(\|Q_1^{\dagger}|\Psi\rangle\|^2 + \|Q_2^{\dagger}|\Psi\rangle\|^2 + \|Q_1|\Psi\rangle\|^2 + \|Q_2|\Psi\rangle\|^2) \geq 0$$

Portanto¹⁸:

$$Q_a|0\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \langle 0|H|0\rangle > 0$$

Ou seja, para que haja quebra espontânea de supersimetria a energia do vácuo deve ser positiva definida. Além disso, não pode existir nenhum estado supersimétrico que minimize H , já que este será, necessariamente, um mínimo global. Portanto, uma das condições para a quebra de supersimetria é que não exista nenhum vácuo supersimétrico. Ou seja, para que a supersimetria seja quebrada espontaneamente **não** podem existir soluções para

$$\langle 0|H|0\rangle = 0$$

¹⁸Rigorosamente, temos:

$$\begin{aligned} \|Q_a|0\rangle\|^2 &= \langle 0|Q_a^{\dagger}Q_a|0\rangle = \int d^3x \langle 0|Q_a^{\dagger}j^0(x)|0\rangle = \int d^3x \langle 0|Q_a^{\dagger}j^0(0)|0\rangle \\ &= \langle 0|Q_a^{\dagger}j^0(0)|0\rangle \int d^3x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

onde foi usado $\int d^3x j^0(x) = Q_a$, $P^{\mu}|0\rangle = 0$ e $[Q, P^{\mu}] = 0$. Ou seja, $\langle 0|H|0\rangle$ não está bem definido se $Q|0\rangle \neq 0$, apenas $\langle 0|\mathcal{H}|0\rangle$, onde \mathcal{H} é a densidade de hamiltoniana.

A segunda condição para a quebra espontânea resulta em:

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle \neq 0$$

No entanto, como a transformação supersimétrica de um campo fermiônico é um campo bosônico, o campo Φ deve ser um campo fermiônico, para que $\delta\Phi$ seja escalar¹⁹. Para supercampos quirais, temos:

$$\Phi = \chi \Rightarrow \langle 0|\delta\chi_a|0\rangle = 2\alpha_a \langle 0|f|0\rangle \neq 0$$

já que

$$\delta\chi_a = 2\alpha_a f + 2i\partial_\mu\phi\sigma_{ab}^\mu\bar{\alpha}^b$$

e $\langle 0|\partial_\mu\phi|0\rangle = 0$. Já para supercampos vetoriais:

$$\Phi = \lambda_a^A \Rightarrow \langle 0|\delta\lambda_a^A|0\rangle = -i\langle 0|D^A|0\rangle\alpha_a \neq 0$$

pois

$$\delta\lambda_a^A = -iD^A\alpha_a - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_a^b\alpha_b V_{\mu\nu}^A$$

Logo as condições para que haja quebra espontânea de supersimetria são:

$$\langle 0|H|0\rangle > 0, \langle 0|f|0\rangle \neq 0 \text{ ou } \langle 0|D^A|0\rangle \neq 0 \quad (2.61)$$

Das Eq.(2.57) e (2.58) podemos reescrever os termos de Yukawa e de massa para os férmions como:

$$\frac{1}{2}(m_{ij}\chi_i\chi_j + \lambda_{ijk}\chi_i\chi_j\phi_k) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\chi_i\chi_j$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SUSY} &= (D_\mu\phi_i)^\dagger D^\mu\phi_i + i\bar{\chi}_i\bar{\sigma}^\mu D_\mu\chi_i + i\lambda^A\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}^A - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \\ &- \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\chi_i\chi_j + \sqrt{2}g\phi_i^\dagger(T_A)_{ij}\lambda^A\chi_j + hc\right) - V(\phi) \end{aligned} \quad (2.62)$$

e

$$V(\phi) = |m_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}\lambda_{ijk}\phi_j\phi_k|^2 + \frac{1}{2}(\phi_i^\dagger(T_A)_{ij}\phi_j)^2$$

Da Eq.(2.55) e da Eq.(2.56) vemos que as condições para a quebra espontânea da supersimetria (Eq.(2.63)) não são satisfeitas, já que existe uma solução supersimétrica trivial que minimiza H :

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = \phi_{i0} = 0$$

¹⁹Já que a existência de campos fermiônicos com valores esperados no vácuo (*vevs*) não nulos quebra a invariância de Lorentz.

Portanto, para que haja quebra espontânea de supersimetria devemos acrescentar novos termos à \mathcal{L} . Os únicos termos possíveis são um termo linear em F (que exige um supercampo invariante de gauge) e um termo linear em D^A . Como discutido anteriormente, o termo linear em D^A (termo de *Fayet-Iliopoulos*) só é possível se o grupo de gauge possui um fator $U(1)$. Com essas modificações temos a seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY} + \xi_A D^A + c_i (f_i + f_i^\dagger)$$

que resultam nas novas equações para os campos auxiliares:

$$f_i^\dagger = -\frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi_i} = -c_i - m_{ij} \phi_j - \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k$$

$$D^A = -\xi_A - g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j$$

Neste caso o potencial escalar se torna:

$$V(\phi) = \left| \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \right|^2 + \frac{1}{2} (\xi_A + \phi_i^\dagger T_A \phi_i)^2$$

onde

$$F(\phi) = c_i \phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k$$

Então, para que haja quebra de supersimetria, **não** podem existir soluções para as equações:

$$\frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi_i} = 0$$

$$\xi_A + g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j = 0$$

pois caso contrário temos $\langle 0|H|0\rangle = 0$.

A existência de solução dependerá das relações entre os parâmetros do superpotencial e de ξ_A . Uma maneira de impedir tais soluções é impor mais condições do que variáveis livres. Um exemplo são superpotenciais do tipo O’Raifeartaigh [9, 14]:

$$F(\Phi) = \Phi_i G_i(\Psi)$$

onde Φ_i e Ψ_n são dois conjuntos de supercampos quirais. Desta forma:

$$\frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow G_i(\psi) = 0 \tag{2.63}$$

e

$$\frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \psi_n} = 0 \Rightarrow \phi_i \frac{\partial G_i(\psi)}{\partial \psi_n} = 0$$

onde ϕ e ψ são as componentes escalares de Φ e Ψ , respectivamente. Se o número de campos ϕ for superior ao de campos ψ , então a Eq.(2.63) representa um número maior de condições do que de variáveis e, em geral, não possuirá solução, resultando na quebra de supersimetria.

2.7.1 Modelo de O’Raifeartaigh

O exemplo mais simples do tipo de superpotencial descrito acima admite três supercampos quirais, onde [14]:

$$F(\Phi) = \Phi_1(\lambda\Phi_3^2 - \lambda M^2) + \Phi_2(\mu\Phi_3)$$

e por simplicidade, assumiremos λ , μ e M como reais e $\mu^2 > 2\lambda^2 M^2$. Desta forma a Eq.(2.63) se torna²⁰:

$$\lambda\phi_3^2 - \lambda M^2 = 0 \text{ e } \mu\phi_3 = 0$$

Obviamente não há solução possível para o sistema de equações acima. Logo espera-se que ocorra quebra de supersimetria. Neste modelo temos as seguintes identidades para os campos f :

$$f_1^\dagger = -(\lambda\phi_3^2 - \lambda M^2), f_2^\dagger = -\mu\phi_3 \text{ e } f_3^\dagger = -(\mu\phi_2 + 2\lambda\phi_1\phi_3)$$

Portanto o potencial escalar será:

$$V(\phi) = f_i f_i^\dagger = \lambda^2 |\phi_3^2 - M^2|^2 + \mu^2 |\phi_3|^2 + |\mu\phi_2 + 2\lambda\phi_1\phi_3|^2$$

Devido à forma do potencial escalar, sempre é possível escolher $\langle\phi_2\rangle$ de tal forma que o último termo seja nulo no mínimo de $V(\phi)$. Então basta minimizar os dois primeiros termos que só dependem de ϕ_3 . Desta forma pode-se mostrar [15] que, para $\mu^2 > 2\lambda^2 M^2$, V possuirá um mínimo em:

$$\langle\phi_3\rangle = 0, \langle\phi_2\rangle = 0$$

independente do valor de $\langle\phi_1\rangle$, onde $\langle\phi\rangle = \langle 0|\phi|0\rangle$. Ou seja, o plano $Re(\phi_1) - Im(\phi_1)$ contém todos os vácuos deste modelo.

Assumindo $\langle\phi_1\rangle = 0$, pode-se calcular facilmente os termos de massa para os escalares:

$$V(\phi) = -\lambda^2 M^2 (\phi_3^2 + \phi_3^{\dagger 2}) + \mu^2 |\phi_3|^2 + \mu |\phi_2|^2 + \dots$$

resultando nas seguintes massas:

$$\begin{aligned} m_{\eta_1}^2 &= m_{\rho_1}^2 = 0 \\ m_{\eta_2}^2 &= m_{\rho_2}^2 = \mu^2 \\ m_{\eta_3}^2 &= \mu^2 - 2\lambda^2 M^2, m_{\rho_3}^2 = \mu^2 + 2\lambda^2 M^2 \end{aligned} \tag{2.64}$$

²⁰Aqui Φ_i representa o supercampo quiral e ϕ_i sua componente escalar.

onde η_i e ρ_i são as componentes real e complexa do escalar i .

Da Eq.(2.62) vemos que a matriz de massa dos férmions será dada por:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\phi=0}$$

Portanto (novamente, fazendo $\langle \phi_1 \rangle = 0$):

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

o que sugere a definição do seguinte espinor de Dirac:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \bar{\chi}_3 \end{pmatrix}$$

Desta forma obtemos o termo de massa:

$$-\frac{1}{2}m_{ij}\chi_i\chi_j + hc = -\mu(\chi_2\chi_3 + \bar{\chi}_2\bar{\chi}_3) = -\mu\bar{\Psi}_D\Psi_D \quad (2.65)$$

Ou seja, os campos fermiônicos χ_i resultam em um espinor de Dirac massivo e um espinor de Majorana sem massa. Este último nada mais é do que o férmion de Goldstone (goldstino) associado à quebra da supersimetria (global).

Portanto, neste modelo temos um escalar complexo ($\eta_1 + i\rho_1$) sem massa, assim como o seu superparceiro fermiônico (χ_1), como esperado de modelos supersimétricos. No entanto, os férmions χ_2 e χ_3 se combinam em um único campo de Dirac, enquanto seus superparceiros escalares apresentam massas distintas entre si. A escala da quebra de supersimetria é da ordem de $\lambda^2 M^2$ e o mínimo do potencial será

$$\langle V \rangle = \lambda^2 M^4$$

que, como esperado, é estritamente positivo .

2.7.2 Termo de Fayet-Iliopoulos

Como discutido anteriormente, a quebra de supersimetria através da componente D do supercampo vetorial necessita, em geral, do termo $(\xi D)^{21}$. Um exemplo simples deste mecanismo será discutido a seguir.

Para que o termo de *Fayet-Iliopoulos* possa existir, o grupo de gauge deve possuir um fator $U(1)$. Por simplicidade assumiremos a existência de dois supercampos quirais com

²¹Podem existir casos em que a quebra espontânea através do campo f também resulte em um *vev* não nulo para o campo D , mesmo que $\xi = 0$.

cargas opostas (Φ^+ e Φ^-) e o grupo de gauge $U(1)$, com o seguinte superpotencial [9]:

$$F(\Phi) = m\Phi^+\Phi^-$$

já que os demais termos não são invariantes de gauge. Neste caso:

$$f_{\pm}^{\dagger} = -m\phi^{\mp}$$

$$D = \xi + e|\phi^+|^2 - e|\phi^-|^2$$

onde e é a carga do campo ϕ^+ . Então:

$$V(\phi) = m^2(|\phi^+|^2 + |\phi^-|^2) + \frac{1}{2}(\xi + e|\phi^+|^2 - e|\phi^-|^2)^2 \quad (2.66)$$

Da expressão acima temos que $V = 0$ não possui solução, ou seja, a supersimetria é espontaneamente quebrada. Caso os *vevs* dos campos escalares não sejam nulos, ocorrerá uma quebra de supersimetria juntamente com a quebra do grupo de gauge. Caso contrário, apenas a supersimetria será quebrada. Os *vevs* dos campos escalares dependerão dos parâmetros m , ξ e e .

O potencial escalar fornece a seguinte matriz de massa:

$$M^2 = \begin{pmatrix} m^2 + e\xi + e^2(3|\phi^+|^2 - |\phi^-|^2) & -2e^2|\phi^-||\phi^+| \\ -2e^2|\phi^-||\phi^+| & m^2 - e\xi + e^2(3|\phi^-|^2 - |\phi^+|^2) \end{pmatrix}$$

Assumindo $m^2 > |e\xi|$, temos que V possuirá um mínimo em $\langle\phi^+\rangle = \langle\phi^-\rangle = 0$. Logo os campos escalares possuirão massas $m_{\pm}^2 = m^2 + e\xi$ e $m_{\pm}^2 = m^2 - e\xi$. Neste caso, para o setor fermiônico temos:

$$m_{ij}^f = \frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\Big|_{\phi=0} = m\delta^{i+}\delta^{j-} \quad (2.67)$$

onde $\delta^{i\pm}$ é o delta de Kronecker para os supercampos Φ^{\pm} . Portanto a degenerescência de massa entre os escalares e férmions da teoria foi quebrada por um termo da ordem de $e\xi$. Além disso, da Eq.(2.66), vemos que o mínimo do potencial será:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2}\xi^2 > 0$$

Note que todos os campos escalares possuem *vevs* nulos e, portanto, a simetria de gauge original não é quebrada. Portanto, o bóson de gauge e o gaugino continuam sem massa, sendo este último o goldstino resultante da quebra de supersimetria.

2.7.3 Supertraço das Massas

Os resultados obtidos na Eq.(2.64) e na Eq.(2.65), demonstram uma importante relação entre as massas fermiônicas e bosônicas, após a quebra de supersimetria:

$$\sum_{i=1}^3 (m_{\eta_i}^2 + m_{\rho_i}^2) = 4\mu^2$$

e

$$m_{\chi_1}^2 + m_{\chi_2}^2 + m_{\chi_3}^2 = 2\mu^2$$

onde χ_i são os auto-estados de massa para os férmions quirais. Então:

$$\sum_{\text{escalares}} m_{j=0}^2 = 2 \sum_{\text{fermions}} m_{j=\frac{1}{2}}^2$$

Relações deste tipo são frequentemente obtidas no caso de quebra espontânea de supersimetria. Usando a lagrangeana da Eq.(2.62) podemos obter uma expressão mais geral, válida para qualquer caso de quebra espontânea.

Assumindo quebra espontânea de supersimetria, ou seja $V(\phi_0) > 0$, a matriz de massa para os bósons de gauge será:

$$g^2 \phi_{io}^* (T_A)_{ij} (T_B)_{jl} \phi_{lo} V_\mu^A V^{\mu B} = \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} \frac{\partial D^B}{\partial \phi_j^\dagger} V_\mu^A V^{\mu B} |_{\phi_0}$$

$$\Rightarrow (m_V^2)_{AB} = \left[\frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} \frac{\partial D^B}{\partial \phi_j^\dagger} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j^\dagger} \frac{\partial D^B}{\partial \phi_j} \right] |_{\phi_0}$$

já que a matriz de massa deve ser simétrica. Já para os férmions, temos:

$$-\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i \chi_j + \sqrt{2} g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \lambda^A \chi_j + hc \right) = -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i \chi_j - \sqrt{2} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} \lambda^A \chi_j + hc \right)$$

Portanto podemos escrever [11]:

$$(m_F)_{ij}^A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} & -\sqrt{2} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \\ -\sqrt{2} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} & 0 \end{pmatrix} |_{\phi_0} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_j^\dagger}{\partial \phi_i} & -\sqrt{2} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \\ -\sqrt{2} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} & 0 \end{pmatrix} |_{\phi_0}$$

onde os termos não diagonais se referem à mistura entre os gauginos (λ^A) e os férmions quirais (χ). Finalmente, para os escalares:

$$(m_S^2)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} & \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j^\dagger} \\ \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i^\dagger \partial \phi_j} & \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_j \partial \phi_i^\dagger} \end{pmatrix} |_{\phi_0}$$

Usando a Eq.(2.58):

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j^\dagger} = \frac{\partial f_l^\dagger}{\partial \phi_i} \frac{\partial f_l}{\partial \phi_j^\dagger} + D^A \frac{\partial^2 D^A}{\partial \phi_i \partial \phi_j^\dagger} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j^\dagger}$$

e

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = f_l \frac{\partial^2 f_l^\dagger}{\partial \phi_i \partial \phi_j} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j}$$

Portanto:

$$(m_S^2)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_l^\dagger}{\partial \phi_i} \frac{\partial f_l}{\partial \phi_j^\dagger} + D^A \frac{\partial^2 D^A}{\partial \phi_i \partial \phi_j^\dagger} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j^\dagger} & f_l \frac{\partial^2 f_l^\dagger}{\partial \phi_i \partial \phi_j} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} \\ f_l^\dagger \frac{\partial^2 f_l}{\partial \phi_i^\dagger \partial \phi_j} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i^\dagger} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} & \frac{\partial f_l^\dagger}{\partial \phi_j} \frac{\partial f_l}{\partial \phi_i^\dagger} + D^A \frac{\partial^2 D^A}{\partial \phi_j \partial \phi_i^\dagger} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_j} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i^\dagger} \end{pmatrix} \Big|_{\phi_0}$$

Das matrizes m_S^2 , m_F e m_V^2 podemos calcular o seguintes traços:

$$Tr(m_S^2)_{ii} = 2 \left(\frac{\partial f_l^\dagger}{\partial \phi_i} \frac{\partial f_l}{\partial \phi_i^\dagger} + D^A \frac{\partial^2 D^A}{\partial \phi_i \partial \phi_i^\dagger} + \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i^\dagger} \right) \Big|_{\phi_0}$$

$$Tr(m_F^\dagger m_F)_{ii} = \left(\frac{\partial f_l^\dagger}{\partial \phi_i} \frac{\partial f_l}{\partial \phi_i^\dagger} + 4 \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i^\dagger} \right) \Big|_{\phi_0}$$

$$Tr(m_V^2)_{AA} = 2 \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i} \frac{\partial D^A}{\partial \phi_i^\dagger} \Big|_{\phi_0}$$

Acima todos os índices repetidos implicam em soma sobre os índices. Logo:

$$STr(m^2) \equiv Tr(m_S^2)_{ii} - 2Tr(m_F^\dagger m_F)_{ii} + 3Tr(m_V^2)_{AA} = 2 \left(D^A \frac{\partial^2 D^A}{\partial \phi_i \partial \phi_i^\dagger} \right) \Big|_{\phi_0} = -2g Tr(T_A) \langle D^A \rangle \quad (2.68)$$

A definição de $STr(m^2)$ acima é conhecida como supertraço das massas e pode ser reescrita em termos dos spins dos campos:

$$STr(m^2) = \sum_J (-1)^{2J} (2J+1) m_J^2$$

A Eq.(2.68) impõe um vínculo entre as massas dos férmions e bósons da teoria de tal forma que a diferença de massas entre estes não pode ser arbitrariamente grande (deve ser da ordem de $g\langle D \rangle$). Para o caso de quebra espontânea através do termo de *Fayet-Iliopoulos*, no lado direito da Eq.(2.68) só aparecerá o campo D referente ao grupo abeliano. No entanto para que a teoria seja livre de anomalias é comum impor $Tr(T_A) = 0$, onde T_A é a matriz de carga dos campos. Neste caso:

$$STr(m^2) = 0 \quad (2.69)$$

Note que no modelo apresentado na Seção 2.7.2, temos $\langle D \rangle = \xi \neq 0$. No entanto:

$$Tr(T_A) = e - e = 0$$

Calculando o supertraço das massas neste modelo²²

$$2(m_+^2 + m_-^2) - 2(m_{\chi^+}^2 + m_{\chi^-}^2) = 2(m^2 + e\xi + m^2 - e\xi) - 2(m^2 + m^2) = 0$$

de acordo com a Eq.(2.68).

²²O fator 2 presente no primeiro termo é devido aos dois graus de liberdade (componente real e complexa) dos campos ϕ , enquanto no segundo termo é devido à definição do supertraço.

Capítulo 3

MSSM

3.1 Problema de Hierarquia

Como discutido no fim da Seção 2.1.1, as representações do Grupo de Poincaré são diferentes para partículas com e sem massa. Em geral, o número de polarizações possíveis para uma partícula de spin s é $2s + 1$ se esta tem massa, s ($2s$, se impusermos a simetria de Paridade) para partículas sem massa de spin inteiro e $s + \frac{1}{2}$ ($2s + 1$, impondo Paridade) para partículas sem massa de spin semi-inteiro. Ou seja, termos de massa acoplam todos os possíveis estados de polarização de uma partícula. Obviamente esta diferenciação não é válida para escalares, já que estes possuem spin nulo.

Conseqüentemente, se a imposição de simetrias extras impede acoplamentos entre os estados de polarização de uma mesma partícula, a invariância de Lorentz exige que esta permaneça sem massa em todas as ordens de teoria de perturbação. Para os bósons vetoriais, a invariância por transformações de gauge implica que a polarização longitudinal não é física [16]. Já para os férmions, a simetria quiral distingue as componentes *left-handed* e *right-handed*:

$$\psi \rightarrow e^{i\phi\gamma^5} \psi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \psi_L \rightarrow e^{-i\phi} \psi_L \\ \psi_R \rightarrow e^{i\phi} \psi_R \end{matrix}$$

Portanto, se impusermos a invariância de gauge e a simetria quiral, termos de massa para os férmions e bósons de gauge não são permitidos:

$$m_A A^\mu A_\mu \rightarrow m_A A^\mu A_\mu + 2m_A A^\mu \partial_\mu \alpha + m_A \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha$$

$$m_f \bar{\psi} \psi \rightarrow m_f \bar{\psi} e^{2i\phi\gamma^5} \psi$$

Conseqüentemente, se a invariância de gauge e a simetria quiral são quebradas por um parâmetro v , as massas dos bósons de gauge e dos férmions deverão necessariamente ser

proporcionais à v (em todas as ordens de teoria de perturbação). Pois desta forma:

$$v \rightarrow 0 \Rightarrow m_A = m_f = 0$$

Como o Modelo Padrão é uma teoria de gauge e quirial (no limite em que os acoplamentos de Yukawa e que o vev do Higgs são nulos), as massas dos férmions e dos bósons de gauge são protegidas pela combinação da invariância de Lorentz com as simetrias de gauge e as transformações quirais. No entanto, o mesmo não é válido para o setor escalar, pois este não possui nenhuma simetria que proteja sua massa.

No SM, a quebra da invariância de gauge ($SU(2) \times U(1)/U(1)$) e das simetrias quirais são proporcionais ao vev do dubleto escalar ($\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$) e aos acoplamentos de Yukawa (λ_i). Logo as correções quânticas para as massas dos férmions e bósons vetoriais do Modelo Padrão devem ser proporcionais à v . Em geral estas correções podem depender quadraticamente, linearmente ou logaritmicamente do *cut-off* Λ :

$$\delta m^2 = a\Lambda^2 + b\Lambda + c\ln\Lambda + d$$

No entanto, como $m_{A,f} \propto v$ em todas as ordens, por análise dimensional:

$$\delta m_{A,f}^2 = v^2(c\ln\Lambda + d) \tag{3.1}$$

Ou seja, as correções dependem apenas logaritmicamente do *cut-off*. Como o escalar de Higgs não possui nenhuma simetria que proteja sua massa, teremos:

$$\begin{aligned} \delta m_\phi^2 &= a\Lambda^2 + b\Lambda + c\ln\Lambda + d \\ \Rightarrow m_\phi^2 &= m_\phi^{2(0)} + a\Lambda^2 + \dots \end{aligned}$$

onde $m_\phi^{(0)}$ é a massa do Higgs em nível de árvore. A dependência quadrática no *cut-off* (ao invés de logarítmica) faz com que uma massa da ordem de Λ seja o valor natural para a massa do Higgs. No entanto argumentos teóricos (como unitariedade) e uma enorme quantidade de dados experimentais indicam um Higgs com massa inferior a 1 TeV. Se assumirmos que o Modelo Padrão é válido para energias muito acima da escala eletrofraca (ou seja $\Lambda \gg v$), será necessário um grande ajuste fino para que a massa do Higgs seja da ordem de v . Este problema teórico do Modelo Padrão é conhecido como Problema da Hierarquia.

Teorias supersimétricas resolvem de maneira natural o Problema de Hierarquia, já que a supersimetria relaciona escalares e férmions. Desta forma, a simetria quirial e a invariância de gauge que protegem as massas dos férmions e dos bósons vetoriais é automaticamente estendida para os sférmions e gauginos, resultando em um cancelamento das divergências quadráticas presentes no Modelo Padrão. O método do potencial efetivo [17] é extrema-

mente útil para a análise das divergências do potencial escalar. Em 1-loop temos [11, 17]:

$$V_{ef}^{(1)} = V_0 + \frac{1}{32\pi^2} [\Lambda^2 \text{Str} \tilde{M}^2 + \text{Str}(\tilde{M}^4 \ln \frac{\tilde{M}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2})] \quad (3.2)$$

onde V_0 é o potencial escalar em nível de árvore, Λ é o *cut-off* e \tilde{M} são as matrizes de massa para todas as partículas da teoria considerando a possibilidade de *vevs* não nulos para os escalares. Como visto na Seção 2.7.3, em teorias supersimétricas ou com quebra espontânea de supersimetria do tipo F (com $\langle F \rangle \neq 0$), o supertraço de \tilde{M}^2 será nulo, resultando em uma teoria livre de divergências quadráticas.

Mas o mesmo não ocorre caso a supersimetria seja quebrada explicitamente. Porém, se esta quebra for *soft*, ou seja, só contiver parâmetros de dimensão positiva (m_{soft}), as únicas contribuições quadraticamente divergentes para $V_{ef}^{(1)}$ devem ser proporcionais à m_{soft} . Então, por análise dimensional:

$$V_{ef}^{(1)} = V_0 + \Lambda^2 m_{soft} \phi + \dots$$

Como veremos a seguir, o MSSM não possui campos estéreis (singleto sob todas as simetrias), conseqüentemente tais operadores lineares em ϕ não são permitidos.

No entanto, assumindo a quebra *soft* e utilizando o método do potencial efetivo, pode-se mostrar que $V_{ef}^{(1)}$ possuirá termos do tipo [18]:

$$V_{ef}^{(1)} = V_0 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (m_{soft}^2 - m^2) \phi^2 + \dots$$

Ou seja, teremos correções para a massa do Higgs proporcionais à diferença de massa entre as partículas e superpartículas da teoria. Portanto, para que o problema de hierarquia seja resolvido, as superpartículas não podem ter massas arbitrariamente grandes. Análises de ajuste fino sugerem que as diferenças de massa devam ser inferiores à 1 TeV [19]. Logo, para estabilizar o potencial escalar frente às correções radiativas, o conteúdo de partículas do SM deve ser duplicado, de tal forma a incluir os superparceiros dos quarks, léptons, bósons de gauge e escalares de Higgs. Além disso, a escala de massa das superpartículas deve ser $\lesssim 1$ TeV.

Apesar desta duplicação dos graus de liberdade muitas vezes ser encarada como uma desvantagem das teorias supersimétricas, um mecanismo semelhante é responsável pela proteção das massas dos elétrons na eletrodinâmica quântica [20]. Como vimos, a simetria quiral é a responsável pelo cancelamento das divergências quadráticas nas massas dos férmions. Mas esta simetria só pode ser definida se o elétron for um férmion de Dirac, ou seja, se assumirmos a existência do pósitron. Isto não ocorre no eletromagnetismo clássico, onde o elétron possui uma auto-energia dada por (utilizando o sistema de unidades

internacionais):

$$E_{self} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$$

sendo r_e o raio clássico do elétron. Por ser uma energia intrínseca do elétron, podemos associá-la com sua massa:

$$m_e^{exp} = m_e^{nua} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$$

No entanto, o limite experimental para o raio clássico do elétron é $r_e < 10^{-17}$ cm [20], o que implica $E_{self} \approx 10$ GeV. Portanto, para que a massa do elétron seja ~ 0.5 MeV precisamos de um enorme ajuste fino entre a massa nua e a auto-energia:

$$m_e^{nua} = -9999.5 \text{ MeV}$$

Este argumento pode ser usado no sentido oposto para impor um limite de validade para a teoria clássica. Se assumirmos um ajuste fino da ordem de 10 %:

$$E_{self} \approx 1 \text{ MeV} \Rightarrow r_e \approx 10^{-13} \text{ cm}$$

Ou seja, espera-se que o eletromagnetismo clássico só seja válido até a escala de 10^{-13} cm. De fato, efeitos quânticos se tornam relevantes na escala $\frac{\hbar}{2m_e c^2} \approx 200 \times 10^{-13}$ cm. Ao incluirmos efeitos quânticos, a simetria CPT da eletrodinâmica quântica exige a inclusão do pósitron, o que resulta em novas contribuições para a auto-energia do elétron [20]:

$$\bar{E}_{self} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$$

Desta forma, em primeira ordem, a auto-energia do elétron é exatamente nula. Este resultado é esperado, já que toda a argumentação acima é válida para elétrons sem massa e, como vimos anteriormente, eles devem permanecer sem massa no limite $m_e \rightarrow 0$. Da Eq.(3.1) temos que as primeiras correções não nulas para m_e serão:

$$\delta m_e = \frac{3e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 \hbar c} m_e^{nua} \ln \frac{\hbar}{m_e c r_e}$$

Assim, mesmo que r_e seja da ordem do comprimento de Planck ($\sim 10^{-33}$ cm), teremos correções de apenas 10 % de m_e .

O problema de hierarquia no eletromagnetismo clássico é muito semelhante ao problema de hierarquia do Modelo Padrão e em ambos os casos podemos interpretá-lo como um indicio do limite de validade da teoria. Além disso, a solução nos dois casos também é idêntica: devemos duplicar o conteúdo de partículas da teoria para cancelar as divergências quadráticas. Note que para que este cancelamento ocorra a carga do pósitron deve ser idêntica à do elétron (em módulo), o que, neste caso, é uma consequência da invariância por CPT. Analogamente, para resolver o problema de hierarquia do SM, os acoplamentos de

gauge e de Yukawa das superpartículas têm que estar relacionados aos das partículas do Modelo Padrão. Neste caso estas relações são resultado da invariância por transformações supersimétricas.

3.2 Lagrangeana

O Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (ou MSSM) é definido como a extensão supersimétrica mínima do Modelo Padrão, ou seja, a extensão com o menor número de novos campos e novas interações¹.

Como discutido anteriormente, uma lagrangeana supersimétrica e invariante de gauge assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = F|_f + K|_D + W|_f$$

onde

$$F = c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{\lambda_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + hc$$

$$K = \Phi_i^\dagger e^{2gV_A T^A} \Phi_i + \xi_A V^A \quad \text{e} \quad W = W^{Aa} W_a^A$$

sendo F o superpotencial, K o potencial de Kähler (incluindo o termo de *Fayet-Iliopoulos*) e hc denota hermitiano conjugado.

Assim como no Modelo Padrão, o MSSM possui o grupo de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ e o conteúdo (mínimo) de supercampos²[15] mostrados na Tabela 3.1:

Supercampos	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	
$L = L(\tilde{l}, l, f_L)$	1	2	-1	Dubleto Leptônico
$E^C = E^C(\tilde{e}^C, e_L^C, f_E)$	1	1	2	Anti-singlete Leptônico
$Q = Q(\tilde{q}, q, f_Q)$	3	2	1/3	Dubleto de Quarks
$U^C = U^C(\tilde{u}^C, u_L^C, f_U)$	3*	1	-4/3	Anti-singlete Quark Up
$D^C = D^C(\tilde{d}^C, d_L^C, f_D)$	3*	1	2/3	Anti-singlete Quark Down
$H_u = H_u(\tilde{h}_u, h_u, f_{H_u})$	1	2	1	Dubleto Escalar Up
$H_d = H_d(\tilde{h}_d, h_d, f_{H_d})$	1	2	-1	Dubleto Escalar Down
$G = G(\tilde{g}, g, D_G)$	8	1	0	Bósons de Gauge do $SU(3)$
$V^a = V^a(\tilde{W}^a, W^a, D_W)$	1	3	0	Bósons de Gauge do $SU(2)$
$V' = V'(\tilde{B}, B, D_{V'})$	1	1	0	Bóson de Gauge do $U(1)$

Tabela 3.1: Supercampos do MSSM, suas componentes escalares, fermiônicas e vetoriais e suas representações.

A notação usada na Tabela 3.1 define todos os supercampos como supercampos quirais de mão esquerda. Desta forma o supercampo L contém um dubleto de 2-espinores *left* (l),

¹Em muitos casos outras simplificações também são assumidas, como a universalidade dos termos *soft* e parâmetros *soft* reais (ver Seção 3.2.3)

²Na Tabela 3.1 está sendo considerada apenas a primeira geração e os índices de gauge estão sendo omitidos.

um dubleto de escalares ou sléptons (\tilde{l}) e um dubleto de campos auxiliares (f_L). As componentes escalares dos supercampos de quarks e léptons são chamadas de squarks e sléptons, enquanto as componentes fermiônicas dos supercampos de Higgs e dos supercampos vetoriais G , V^a e V' são chamadas de higgsinos, gluinos, winos e binos, respectivamente.

A principal diferença entre o conteúdo de campos do SM e o do MSSM (além da duplicação de graus de liberdade) é a existência de dois dubletos escalares de Higgs. Como discutido anteriormente, o superpotencial F não pode possuir termos do tipo $\Phi_i^\dagger \Phi_j \Phi_k = H_d^\dagger U U^C$, que geram massa para o quark u , assim como é feito no SM. Portanto, adiciona-se um novo dubleto de Higgs com hipercarga oposta. Além disso, pode-se mostrar que o modelo só está livre de anomalias para um número par de dubletos escalares [9].

Como nenhum supercampo é um singleto sob todos os grupos de gauge, nenhum termo linear é permitido no superpotencial F . Impondo-se apenas invariância de gauge e renormalizabilidade, temos o seguinte superpotencial:

$$F = \mu \epsilon_{\alpha\beta} H_u^\alpha H_d^\beta + \epsilon_{\alpha\beta} [H_d^\alpha L_i^\beta (\lambda_l)_{ij} E_j^C - H_u^\alpha Q_i^\beta (\lambda_u)_{ij} U_j^C + H_d^\alpha Q_i^\beta (\lambda_d)_{ij} D_j^C] \\ + \epsilon_{\alpha\beta} [(c_l)_{ijk} L_i^\alpha L_j^\beta E_k^C + (c_d)_{ijk} L_i^\alpha Q_j^\beta D_k^C + c_i H_u^\alpha L_i^\beta] + (c_u)_{ijk} U_i^C D_j^C D_k^C \quad (3.3)$$

onde α, β são índices do $SU(2)$, i, j e k são os índices de geração, $e_{\alpha\beta} = -e_{\beta\alpha}$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. Os índices referentes ao grupo $SU(3)$ não estão mostrados, mas são contraídos de maneira trivial.

3.2.1 Paridade R

Como discutido na Seção 2.2.1, para $N = 1$, a superálgebra admite uma simetria abeliana (simetria R) que transforma os geradores Q_a da seguinte forma:

$$Q_a \rightarrow e^{i\phi} Q_a \text{ e } \bar{Q}_{\dot{a}} \rightarrow e^{-i\phi} \bar{Q}_{\dot{a}}$$

Por não comutar com os operadores supersimétricos, esta simetria permite que as componentes de um mesmo supercampo se transformem de maneira diferente sob R . Podemos utilizar as representações dos operadores Q e \bar{Q} no superespaço para determinar como se transformam as coordenadas θ sob o operador R . Da Eq.(2.24) e da Eq.(2.25):

$$Q_a \rightarrow e^{i\phi} Q_a \Rightarrow \bar{\theta}^{\dot{a}} \rightarrow e^{i\phi} \bar{\theta}^{\dot{a}} \text{ e } \theta^a \rightarrow e^{-i\phi} \theta^a$$

Logo, se um supercampo quiral possui carga R_Φ :

$$\Phi \rightarrow e^{-i\phi R_\Phi} \Phi$$

suas componentes deverão se transformar como (ver Eq.(2.34))

$$\phi \rightarrow e^{-i\phi R_\phi} \phi, \chi \rightarrow e^{-i\phi(R_\phi-1)} \chi \text{ e } f \rightarrow e^{-i\phi(R_\phi-2)} f$$

Ou seja, as componentes escalar, fermiônica e auxiliar deverão ter cargas R_ϕ , $R_\phi-1$ e $R_\phi-2$, respectivamente. Já para um supercampo vetorial (usando a Eq.(2.41)):

$$\begin{aligned} V = V^\dagger &\Rightarrow R_V = 0 \\ \Rightarrow V_\mu &\rightarrow V_\mu, \lambda \rightarrow e^{-i\phi} \lambda \text{ e } D \rightarrow D \end{aligned}$$

Logo, a invariância por uma simetria R impede termos de massa de Majorana para os gauginos, pois

$$M(\lambda\lambda + \bar{\lambda}\bar{\lambda}) \rightarrow M(e^{-2i\phi}\lambda\lambda + e^{2i\phi}\bar{\lambda}\bar{\lambda})$$

No MSSM a possibilidade de gauginos sem massa já foi completamente descartada. Portanto a simetria R não pode ser uma simetria a baixas energias. Por outro lado, a imposição de uma simetria R impede os termos da segunda linha da Eq.(3.3). Isto é desejável, já que tais termos resultam em um rápido decaimento do próton e em outros processos com violação de número leptônico e bariônico muito superiores aos limites experimentais [9, 21] (ver Apêndice C).

No entanto, existe uma outra maneira de impedir os termos indesejáveis do superpotencial e ao mesmo tempo permitir termos de massa para os gauginos: basta restringir a simetria R para uma simetria discreta com $\phi = \pi$, chamada de Paridade R [15]. Assim:

$$\begin{aligned} M(\lambda\lambda + \bar{\lambda}\bar{\lambda}) &\rightarrow M(e^{-2i\pi}\lambda\lambda + e^{2i\pi}\bar{\lambda}\bar{\lambda}) = M(\lambda\lambda + \bar{\lambda}\bar{\lambda}), \\ e^{i\phi R_\phi} &\rightarrow (-1)^{R_\phi}, \\ (Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}}) &\rightarrow -(Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}}) \text{ e } (\theta, \bar{\theta}) \rightarrow -(\theta, \bar{\theta}) \end{aligned}$$

Para os supercampos do MSSM defini-se:

$$Q, U^C, D^C, L, E^C \rightarrow R_\Phi = -1 \tag{3.4}$$

$$H_u, H_d \rightarrow R_\Phi = +1$$

Se usarmos as definições acima para calcular a paridade das componentes dos supercampos, veremos que podemos definir a Paridade R para estas componentes como:

$$R = (-1)^{3(B-L)+2s}$$

onde B e L são os números bariônico e leptônico (definidos de maneira análoga ao SM) e s é o spin do campo. Note que a paridade R diferencia campos escalares e fermiônicos pertencen-

centes à um mesmo supercampo: as componentes escalares possuem a mesma paridade do supercampo e as componentes fermiônicas possuem paridade oposta. Com esta definição todas as partículas do SM possuem paridade $+1$ e todas as superpartículas paridade -1 .

Impondo-se paridade R quaisquer termos cúbicos nos supercampos da Eq.(3.4) são proibidos no superpotencial, assim como o termo $H_u L$. Portanto:

$$F = \mu \epsilon_{\alpha\beta} H_u^\alpha H_d^\beta + \epsilon_{\alpha\beta} [H_d^\alpha L_i^\beta (\lambda_l)_{ij} E_j^C - H_u^\alpha Q_i^\beta (\lambda_u)_{ij} U_j^C + H_d^\alpha Q_i^\beta (\lambda_d)_{ij} D_j^C] \quad (3.5)$$

Note que o único parâmetro de massa em \mathcal{L} é o termo μ , que gera uma massa em nível de árvore para os Higgs e os higgsinos. Outra importante consequência da imposição de Paridade R é a produção de superpartículas em pares, já que qualquer processo que contenha apenas partículas no estado inicial terá paridade $+1$. Além disso, a superpartícula mais leve não poderá decair na partículas do Modelo Padrão, o que a torna estável.

Por completeza, listamos aqui o potencial de Kähler (ver Seção 2.5.2) e o tensor de força para o MSSM (omitindo os índices de geração) [11]:

$$\begin{aligned} K = & L^\dagger e^{2(gV^a \frac{\sigma^a}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} L + E^{C\dagger} e^{2g'V' \frac{Y}{2}} E^C \\ & + Q^\dagger e^{2(g_s G^a \frac{\lambda^a}{2} + gV^a \frac{\sigma^a}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} Q + U^{C\dagger} e^{2(-g_s G^a \frac{\lambda^{a*}}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} U^C + D^{C\dagger} e^{2(-g_s G^a \frac{\lambda^{a*}}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} D^C \\ & + H_u^\dagger e^{2(gV^a \frac{\sigma^a}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} H_u + H_d^\dagger e^{2(gV^a \frac{\sigma^a}{2} + g'V' \frac{Y}{2})} H_d \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} W|_f = & \frac{1}{2} [(D_W^a)^2 + (D_G^c)^2 + D_{V'}^2] + i\tilde{g}^c \sigma^\mu D_\mu \tilde{g}^c + i\tilde{W}^a \sigma^\mu D_\mu \tilde{W}^a + i\tilde{B} \sigma^\mu D_\mu \tilde{B} \\ & - \frac{1}{4} F_{g\mu\nu}^c F_g^{c\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{W\mu\nu}^a F_W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.2 Quebra Espontânea de Simetria no MSSM

Como nenhum termo linear é permitido no superpotencial, o único mecanismo possível para a quebra espontânea de supersimetria é um termo $\xi D'$ com $\xi \neq 0$, onde D' é o campo auxiliar D associado ao grupo de gauge $U(1)$. Como discutido anteriormente, este termo permite que os campos D adquiram *vevs* não nulos, resultando na seguinte relação entre as massas dos férmions e bósons:

$$STr(m^2) \equiv Tr(m_S^2)_{ii} - 2Tr(m_F^\dagger m_F)_{ii} + 3Tr(m_V^2)_{AA} = -2g \sum_A Tr(T_A) \langle D^A \rangle$$

Para que carga elétrica e cor sejam conservados, os únicos campos D que podem ter $\langle D \rangle \neq 0$ são campos neutros (sem carga elétrica ou de cor). Portanto apenas os geradores $\frac{1}{2}\sigma^3$ e $\frac{1}{2}Y$ podem contribuir para o lado direito da Eq.(2.68). Pode-se mostrar que a Eq.(2.68) é válida

separadamente para todas as partículas de mesma carga, cor e geração [15]. Portanto:

$$STr(m_e^2) = -2g\langle D^3 \rangle \left[-\frac{1}{2} \right] - 2g'\langle D' \rangle \left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{2} \right] = g\langle D^3 \rangle - g'\langle D' \rangle$$

onde m_e é a matriz de massa para os supercampos E e E^C . Analogamente para os quarks do tipo u , d e para os léptons neutros:

$$STr(m_\nu^2) = -g\langle D^3 \rangle + g'\langle D' \rangle$$

$$STr(m_u^2) = -g\langle D^3 \rangle + g'\langle D' \rangle$$

$$STr(m_d^2) = g\langle D^3 \rangle - g'\langle D' \rangle$$

Logo

$$\begin{aligned} STr(m_u^2) + STr(m_d^2) &= 0 \\ \Rightarrow Tr(m_u^2)_{ii} + Tr(m_d^2)_{ii} - 2Tr(m_u^\dagger m_u)_{ii} - 2Tr(m_d^\dagger m_d)_{ii} &= 0 \\ \Rightarrow Tr(m_u^2)_{ii} + Tr(m_d^2)_{ii} &\simeq 120 \text{ MeV}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

já que os glúons não são massivos. Obviamente a equação acima resulta em massas muito pequenas para os squarks, que, neste caso, já teriam sido detectados experimentalmente. Portanto a quebra espontânea de supersimetria não é fenomenologicamente viável no MSSM.

3.2.3 Quebra *Soft* de Simetria

Os argumentos acima mostram que para que ocorra a quebra espontânea precisamos incluir novos supercampos de tal forma a evitar o vínculo da Eq.(3.8). Assim a quebra de supersimetria pode ser realizada com o auxílio dos novos campos, sendo transmitida para os campos do MSSM através de novas interações. Uma grande variedade de modelos possibilitam este tipo de quebra indireta de simetria, dentre os quais podemos destacar modelos com Supergravidade (SUGRA) e os de quebra mediada por interações de gauge (GMSB). No entanto, independentemente do modelo adotado, sua lagrangeana efetiva (a baixas energias) pode ser parametrizada pelos termos supersimétricos da lagrangeana do MSSM e por termos que quebram explicitamente o grupo supersimétrico. Como estes últimos surgem de uma quebra espontânea em outro setor da teoria (ver Seção 4), eles devem ser proporcionais à *vevs* não nulos de supercampos. Portanto os termos de quebra explícita serão *soft* (de dimensão positiva).

Apesar de os termos *soft* serem gerados em teorias além do MSSM, o principal motivo para se utilizar tais termos na lagrangeana efetiva é evitar divergências quadráticas, como discutido na Seção 3.1. Pode-se mostrar [22] que os únicos termos de quebra explícita que

não introduzem divergências quadráticas são³:

$$m^2|\phi_i|^2, b(\phi_i\phi_j + hc), M_A\lambda^A\lambda^A \text{ e } A_{ijk}(\phi_i\phi_j\phi_k + hc)$$

onde ϕ_i é a componente escalar de um supercampo quirral e λ é a componente espinorial de um supercampo vetorial. Já termos do tipo

$$m\chi\chi \text{ e } B(\phi + \phi^\dagger)^3$$

onde χ é a componente espinorial de um supercampo quirral, reintroduzem divergências quadráticas. Portanto, para o MSSM, os únicos termos de massa que podem ser introduzidos na lagrangeana efetiva são para os bósons de Higgs, os sférmions e para os gauginos. Desta forma a quebra *soft* permite gerar massas para sférmions e gauginos muito acima das massas de seus parceiros. Caso os termos *soft* também permitissem termos de massas para os férmions e bósons de gauge do SM, seria muito pouco natural que o setor escalar e os gauginos fossem as partículas mais pesadas do modelo.

Como acima da escala eletrofraca a lagrangeana deve ser invariante por $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, os únicos termos possíveis serão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & -\frac{1}{2}(M_3\tilde{g}\tilde{g} + M_2\tilde{W}\cdot\tilde{W} + M_1\tilde{B}\tilde{B} + hc) - m_{H_d}^2|h_d|^2 - m_{H_u}^2|h_u|^2 - m_L^2|\tilde{l}|^2 - m_Q^2|\tilde{q}|^2 \\ & - m_E^2|\tilde{e}^C|^2 - m_D^2|\tilde{d}^C|^2 - m_U^2|\tilde{u}^C|^2 - b\epsilon_{\alpha\beta}(h_u^\alpha h_d^\beta + hc) \\ & - \epsilon_{\alpha\beta}(\tilde{q}^\alpha \tilde{A}_u \tilde{u}^C h_u^\beta - \tilde{q}^\alpha \tilde{A}_d \tilde{d}^C h_d^\beta - \tilde{l}^\alpha \tilde{A}_l \tilde{e}^C h_d^\alpha + hc) \\ & - (\tilde{q}^\dagger \tilde{C}_u \tilde{u}^C h_d - \tilde{q}^\dagger \tilde{C}_d \tilde{d}^C h_u - \tilde{l}^\dagger \tilde{C}_l \tilde{e}^C h_u + hc) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $m_L^2, m_Q^2, m_E^2, m_D^2, m_U^2, \tilde{A}_u, \tilde{A}_d, \tilde{A}_l, \tilde{C}_u, \tilde{C}_d$ e \tilde{C}_l são matrizes 3×3 nas gerações. Na maioria dos modelos que possibilitam a quebra espontânea de supersimetria (como mSUGRA), os termos \tilde{C} são extremamente suprimidos e, portanto, são descartados na grande maioria das análises do MSSM. Aqui também assumiremos $\tilde{C}_u = \tilde{C}_d = \tilde{C}_l = 0$.

3.2.4 Parâmetros do MSSM

Como visto acima, os termos *soft* introduzem uma grande quantidade de novos parâmetros, sobretudo as matrizes \tilde{A} . Porém, uma parte destes parâmetros não são físicos e podem ser eliminados através de redefinições dos campos.

O superpotencial e as interações de gauge introduzem os seguintes parâmetros:

$$g, g', g_s \rightarrow 3$$

³Na verdade estes termos contribuem apenas com uma constante quadraticamente divergente para o potencial efetivo.

$$\mu, \lambda_l, \lambda_u, \lambda_d \rightarrow 2 + 3 \times 18 = 56$$

já que o parâmetro μ e as matrizes de Yukawa podem ser complexas. Como as massas *soft* para os escalares de Higgs devem ser reais e as matrizes de massa *soft* para os demais escalares devem ser hermitianas, temos:

$$m_{H_d}^2, m_{H_u}^2, b \rightarrow 2 + 2 = 4$$

$$m_Q^2, m_U^2, m_D^2, m_E^2, m_L^2 \rightarrow 5 \times 9 = 45$$

$$\tilde{A}_u, \tilde{A}_d, \tilde{A}_l \rightarrow 3 \times 18 = 54$$

$$M_1, M_2, M_3 \rightarrow 6$$

pois podemos ter massas complexas para os gauginos. Logo, temos um total de 168 parâmetros, sendo 59 supersimétricos e 109 *soft*.

No limite em que as matrizes *soft* (\tilde{A} e m_i^2) e as matrizes de Yukawa (λ_i) são nulas, a lagrangeana do MSSM é diagonal nas gerações e portanto possui uma simetria global $U(3)$ para cada supercampo de matéria:

$$G = U(3)_Q \times U(3)_U \times U(3)_D \times U(3)_L \times U(3)_E$$

Logo, redefinições dos campos que sejam equivalentes às transformações do grupo G não afetam os termos cinéticos ou os acoplamentos de gauge e podem ser utilizados para absorver parâmetros não físicos das matrizes de mistura.

Cada fator do grupo G possui 3 parâmetros reais e 6 fases. No entanto, apesar desta simetria global ser quebrada pelas matrizes de mistura, a imposição de paridade R conservada resulta em uma simetria residual:

$$G \rightarrow G' = U(1)_B \times U(1)_L$$

onde B e L são os números bariônico e leptônico, respectivamente. Ou seja, quaisquer transformações de G pertencentes ao subgrupo G' não alteram a lagrangeana e **não** podem ser utilizadas para eliminar parâmetros. Desta forma temos um total de $9 \times 5 - 2 = 43$ parâmetros que podem ser absorvidos utilizando-se transformações do grupo G .

Além disso, uma das fases das massas dos gluinos e uma das fases de b (ou μ) podem ser eliminadas redefinindo-se os campos de Higgs e dos gluinos. Portanto, após a exclusão de todas as fases não físicas, o MSSM possuirá $168 - 45 + 1 = 124$ parâmetros (onde acrescentou-se o parâmetro θ_{QCD}). Enquanto o Modelo Padrão possui 19 parâmetros livres.

Por convenção os parâmetros não físicos eliminados da lagrangeana são:

$$9 \text{ componentes reais e } 17 \text{ fases de } \lambda_u, \lambda_d$$

6 componentes reais e 9 fases de λ_l

1 fase de b e 1 fase de M_3

2 fases de m_L^2

Assim, as matrizes de Yukawa podem ser parametrizadas pelas massas dos férmions do Modelo Padrão e por uma fase (da matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) [4].

3.3 Massas

Nesta seção obteremos as matrizes de massa do MSSM a partir da lagrangeana supersimétrica e dos termos *soft*. Como aparecerão tanto termos de massa de Dirac como de Majorana, é conveniente utilizar a notação de 4-espinores. No entanto a notação usada até aqui utiliza campos quirais (de 2 componentes). A seguir mostraremos como se relacionam os termos de massa de 4-espinores com os de 2-espinores.

3.3.1 Férmions de Majorana e de Dirac

Usando a notação adotada, um 4-espinor pode ser escrito em termos de campos quirais da seguinte forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

onde Ψ será um espinor de Majorana se $\bar{\psi}^{\dot{a}} = (\chi^a)^\dagger$, caso contrário será um espinor de Dirac. As componentes χ_a e $\bar{\psi}^{\dot{a}}$ são identificadas como as componentes de mão esquerda e de mão direita, respectivamente.

Os termos de massa para os 4-espinores podem ser reescritos como:

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\chi\psi + m\bar{\chi}\bar{\psi}$$

Note que o termo de massa para os espinores χ e $\bar{\psi}$ são iguais. Porém, quando m não é diagonal, podemos ter:

$$m_{ij}\chi_i\psi_j + M_{ij}\bar{\psi}_i\bar{\chi}_j$$

onde $m = M^\dagger$ para que a lagrangeana seja real. Mas m e M sempre podem ser diagonalizadas por transformações biunitárias [15]:

$$m_d = U^\dagger m V \Rightarrow M_d = V^\dagger M U$$

Logo devemos redefinir χ e ψ :

$$\Rightarrow (\chi'^a)^T = (\chi^a)^T U \text{ e } \psi'_a = V^\dagger \psi_a \quad (3.10)$$

Note que:

$$\bar{\chi}'^{\dot{a}} = U^\dagger \bar{\chi}^{\dot{a}} \text{ e } (\bar{\psi}'_{\dot{a}})^T = (\bar{\psi}_{\dot{a}})^T V \Rightarrow \bar{\psi} M \bar{\chi} = \bar{\psi}' V^\dagger M U \bar{\chi}' = \bar{\psi}' M_d \bar{\chi}'$$

Caso o 4-espinor seja de Majorana, teremos $\chi_a = \psi_a$ e as transformações da Eq.(3.10) são inconsistentes (já que em geral $V \neq U$). Porém, neste caso m e M devem ser simétricas, então $U = V^*$. Assim:

$$(\chi'^a)^T = (\chi^a)^T V^* \Rightarrow \chi'_a = V^\dagger \chi_a$$

de tal forma que:

$$\bar{\chi}'^{\dot{a}} = V^T \bar{\chi}^{\dot{a}} \text{ e } (\bar{\chi}'_{\dot{a}})^T = (\bar{\chi}_{\dot{a}})^T V$$

Após a diagonalização das matrizes de massa, obtemos:

$$(m_d)_i \chi_i \psi_i + (M_d)_i \bar{\psi}'_i \bar{\chi}'_i$$

que ainda não pode ser comparado com o termo de massa usual $m_i \bar{\Psi}_i \Psi_i$. No entanto, como $m = M^\dagger$, temos $m_d = M_d^\dagger$. Assim, definindo $(m_d)_l = m_l e^{i\phi_l}$ (m_l real):

$$(m_d)_i \chi_i \psi_i + (M_d)_i \bar{\psi}'_i \bar{\chi}'_i = m_l \chi_l \psi_l e^{i\phi_l} + m_l \bar{\psi}'_l \bar{\chi}'_l e^{-i\phi_l}$$

Finalmente, as fases ϕ_l podem ser absorvidas fazendo-se uma última redefinição dos campos, resultando em um termo de massa real, que pode ser reescrito em termos de um 4-espinor:

$$m_l \chi_l \psi_l e^{i\phi_l} + m_l \bar{\psi}'_l \bar{\chi}'_l e^{-i\phi_l} \rightarrow m_l \bar{\Psi}_l \Psi_l$$

Note que a possibilidade de matrizes de massas arbitrárias para os férmions foi levada em conta na Seção 3.2.4, quando consideramos matrizes arbitrárias para os acoplamentos de Yukawa e massas *soft* complexas para os gauginos. A existência de fases físicas (que não foram eliminadas através do procedimento da Seção 3.2.4) nas matrizes de massa resulta na maioria das vezes em termos com violação CP, já que a redefinição dos campos introduz fases nos termos de interação.

Em alguns casos é comum encontrar termos de massa negativos para os férmions. No entanto este é um caso particular do discutido acima (com $\phi_l = \pi$) e, conseqüentemente, pode ser tratado da mesma forma. Pelos argumentos acima temos que os valores físicos das massas dos férmions serão dados pelos autovalores da matriz de massa $M^\dagger M$ (ou $m^\dagger m$) e não pelos autovalores de M (ou m).

3.3.2 Potencial Escalar Neutro

Como discutido anteriormente, os termos *soft* não geram massa para os quarks e léptons, apenas para seus superparceiros. Portanto, de maneira análoga ao Modelo Padrão, o potencial escalar deve permitir a quebra espontânea de simetria do grupo $SU(2) \times U(1)$. Para que isto ocorra as componentes neutras dos dubletos escalares devem possuir *vevs* não

nulos:

$$h_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \\ h_u^- \end{pmatrix}, h_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix} \Rightarrow \langle h_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \text{ e } \langle h_d \rangle = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a quebra eletrofraca precisamos minimizar o potencial escalar. Porém, devido à existência de diversos novos termos no potencial escalar (provenientes dos termos F e D), faz-se necessária uma análise cuidadosa das condições para que se ocorra a quebra eletrofraca. A necessidade de um potencial que gere a quebra espontânea $SU(2) \times U(1)/U(1)$ impõe fortes vínculos à região de parâmetros do MSSM.

O potencial para os escalares h_u e h_d é dado por [21]:

$$V(h) = |\mu|^2(|h_u|^2 + |h_d|^2) + \frac{g^2}{8}(h_u^\dagger \sigma^i h_u + h_d^\dagger \sigma^i h_d)^2 + \frac{g'^2}{8}(|h_u|^2 - |h_d|^2)^2 \\ + m_{H_u}^2 |h_u|^2 + m_{H_d}^2 |h_d|^2 + \epsilon_{\alpha\beta} b (h_u^\alpha h_d^\beta + hc)$$

Usando as identidades do Apêndice A.2, temos:

$$V(h) = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)|h_u|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)|h_d|^2 + \left(\frac{g^2 + g'^2}{8}\right)(|h_u|^2 - |h_d|^2)^2 \quad (3.11) \\ + \frac{g^2}{2}|h_u^\dagger h_d|^2 + b(h_u^+ h_d^- - h_u^0 h_d^0 + hc)$$

Para que ocorra a quebra $SU(2) \times U(1)/U(1)$, devemos ter:

$$\langle h_u^+ \rangle = \langle h_d^- \rangle = 0 \text{ e } \langle h_d^0 \rangle = v_d, \langle h_u^0 \rangle = v_u$$

Portanto, no mínimo:

$$V_{min} = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)v_u^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)v_d^2 + \left(\frac{g^2 + g'^2}{8}\right)(v_u^2 - v_d^2)^2 - 2bv_u v_d$$

já que v_u e v_d sempre podem ser considerados reais.

O potencial V_{min} deve satisfazer algumas condições básicas para que ocorra a quebra eletrofraca. Porém em geral também assume-se que V seja limitado inferiormente⁴. Para $v_u = v_d \rightarrow \infty$ temos:

$$V_{min} \rightarrow (2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 - 2b)v_d^2$$

Assumindo b positivo e real (ver Seção 3.2.4), para que V seja limitado inferiormente, o seguinte vínculo deve ser satisfeito:

$$2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 \geq 2b$$

⁴Esta condição pode ser relaxada no caso de um mínimo local separado do mínimo global (em $\pm\infty$) por uma barreira de potencial, de tal forma que o tempo de decaimento para o mínimo global seja \gg a idade do universo [21].

Os mínimos de V serão soluções das seguintes equações:

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)v_u + \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}\right)(v_u^2 - v_d^2)v_u - bv_d = 0 \quad (3.12)$$

$$(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)v_d - \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}\right)(v_u^2 - v_d^2)v_d - bv_u = 0 \quad (3.13)$$

Para que a solução $v_u = v_d = 0$ seja uma solução instável, a Hessiana de V neste ponto deve ser negativa, ou seja:

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) < b^2$$

As condições de mínimo (Eq.(3.12) e Eq.(3.13)) podem ser reescritas como relações entre os parâmetros da teoria:

$$m_A^2 \sin 2\beta = 2b \quad (3.14)$$

$$m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2 = -(m_z^2 + m_A^2) \cos 2\beta \quad (3.15)$$

onde $m_A^2 = 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2$, $\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}$ e $m_z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{2}(v_u^2 + v_d^2)$ é a massa do bóson Z (como mostrado a seguir). Da Eq. (3.15) e da Eq.(3.14), temos:

$$\frac{m_z^2}{2} = \frac{m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2 \tan^2 \beta}{\tan^2 \beta - 1} - \mu^2 \quad (3.16)$$

$$m_z^2 = \frac{m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2}{\cos 2\beta} - \frac{2b}{\sin 2\beta} \quad (3.17)$$

Como μ é um parâmetro supersimétrico, espera-se que este reflita a escala supersimétrica ou escalas superiores, sendo portanto muito maior do que os parâmetros *soft* m_{H_d} e m_{H_u} , que devem ser da ordem de alguns TeV, como visto na Seção 3.1. Logo, da Eq.(3.16), temos $m_z \sim \mu$. Ou seja, a existência de um parâmetro de massa supersimétrico resulta em um novo problema de hierarquia (também conhecido como *problema* μ). A solução mais comum para este problema é assumir que μ seja gerado pela quebra de supersimetria, assim como os parâmetros *soft*.

Outra maneira conveniente de escrever a Eq.(3.14) e a Eq.(3.15) é:

$$\begin{aligned} m_{H_u}^2 + |\mu|^2 &= \frac{1}{2}m_A^2 + \frac{1}{2}(m_z^2 + m_A^2)\cos 2\beta \\ m_{H_d}^2 + |\mu|^2 &= \frac{1}{2}m_A^2 - \frac{1}{2}(m_z^2 + m_A^2)\cos 2\beta \end{aligned} \quad (3.18)$$

O lado esquerdo das equações acima são parâmetros da teoria, enquanto o lado direito pode ser facilmente medido experimentalmente⁵, exceto pelo valor de β .

Apesar de a quebra $SU(2) \times U(1)/U(1)$ ocorrer em apenas um subespaço do espaço de parâmetros do MSSM, geralmente a quebra eletrofraca é imposta, reduzindo assim o número de parâmetros da teoria. Posteriormente verifica-se se a imposição é consistente e se não

⁵A seguir será mostrado que m_A^2 é a massa de um dos escalares.

necessita de um grande ajuste fino. Portanto, assumindo a quebra espontânea de simetria $SU(2) \times U(1)/U(1)$ e deslocando os campos escalares neutros

$$h_u^0 \rightarrow h_u^0 + v_u \text{ e } h_d^0 \rightarrow h_d^0 + v_d$$

obtemos o seguinte potencial escalar:

$$\begin{aligned} V(h) = & (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)|h_u|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)|h_d|^2 + \left(\frac{g^2 + g'^2}{8}\right)(|h_u|^2 - |h_d|^2)^2 \\ & + \left(\frac{g^2 + g'^2}{2}\right)v_d^2(Re(h_d^0))^2 + \left(\frac{g^2 + g'^2}{2}\right)v_u^2(Re(h_u^0))^2 + \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}\right)(|h_u|^2 - |h_d|^2)(v_u^2 - v_d^2 + 2v_u Re(h_u^0) - 2v_d Re(h_d^0)) \\ & - (g^2 + g'^2)Re(h_u^0)Re(h_d^0) + \frac{g^2}{2}[|h_u^+|^2 v_d^2 + |h_u^+|^2 |h_d^0|^2 + 2v_d |h_u^+|^2 Re(h_d^0) + |h_d^-|^2 v_u^2 + |h_d^-|^2 |h_u^0|^2 \\ & + 2v_u |h_d^-|^2 Re(h_u^0) + 2Re(h_u^+ h_d^{0\dagger} h_u^{0\dagger} h_d^-) + 2v_u Re(h_u^+ h_d^{0\dagger} h_d^-) + 2v_d Re(h_u^+ h_u^{0\dagger} h_d^-) \\ & + 2v_d v_u Re(h_u^+ h_d^-)] + 2bRe(h_u^+ h_d^-) - 2bRe(h_u^0 h_d^0) \end{aligned}$$

Do potencial acima obtém-se as seguintes matrizes de massas para os escalares neutros e carregados:

$$\begin{aligned} (Re(h_u^0), Re(h_d^0)) & \begin{pmatrix} \frac{m_A^2}{2}(1 + \cos 2\beta) + \frac{m_z^2}{2}(1 - \cos 2\beta) & -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_z^2)\sin 2\beta \\ -\frac{1}{2}(m_A^2 + m_z^2)\sin 2\beta & \frac{m_A^2}{2}(1 - \cos 2\beta) + \frac{m_z^2}{2}(1 + \cos 2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(h_u^0) \\ Re(h_d^0) \end{pmatrix} \\ (Im(h_u^0), Im(h_d^0)) & \begin{pmatrix} \frac{m_A^2}{2}(1 + \cos 2\beta) & \frac{1}{2}m_A^2 \sin 2\beta \\ \frac{1}{2}m_A^2 \sin 2\beta & \frac{m_A^2}{2}(1 - \cos 2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Im(h_u^0) \\ Im(h_d^0) \end{pmatrix} \\ & \frac{1}{2}(m_A^2 + m_w^2)(h_u^{+\dagger}, h_d^-) \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & 1 - \cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_d^{-\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que, devido à conservação de carga elétrica, não ocorre mistura entre os escalares carregados e neutros, como de fato mostram as matrizes acima. Além disso, devido à invariância CP do setor escalar neutro, também não pode ocorrer mistura entre as componentes reais e imaginárias dos campos neutros. A diagonalização das matrizes acima resulta nas seguintes massas:

$$\begin{aligned} (Re(h_u^0), Re(h_d^0)) & \rightarrow \begin{aligned} m_H^2 &= \frac{1}{2}[m_A^2 + m_z^2 + \sqrt{(m_A^2 + m_z^2)^2 - 4m_A^2 m_z^2 \cos^2 2\beta}] \\ m_h^2 &= \frac{1}{2}[m_A^2 + m_z^2 - \sqrt{(m_A^2 + m_z^2)^2 - 4m_A^2 m_z^2 \cos^2 2\beta}] \end{aligned} \quad (3.19) \\ (Im(h_u^0), Im(h_d^0)) & \rightarrow \begin{aligned} m_{H'}^2 &= m_A^2 \\ m_{h'}^2 &= 0 \end{aligned} \\ (h_u^{+\dagger}, h_d^-) & \rightarrow \begin{aligned} m_C^2 &= m_A^2 + m_w^2 \text{ (escalar complexo)} \\ m_{C'}^2 &= 0 \text{ (escalar complexo)} \end{aligned} \end{aligned}$$

Os escalares não massivos h' e C' são bósons de Goldstone e através do mecanismo de Higgs são absorvidos pelos bósons Z e W^\pm , respectivamente. No gauge unitário (omitindo os bósons de Goldstone) podemos definir os auto-estados de massa como:

$$h_u^+ = \cos\gamma H^+, h_d^- = -\sin\gamma H^- \quad (3.20)$$

$$h_u^0 = h\cos\alpha - H\sin\alpha + iA\cos\gamma \text{ e } h_d^0 = H\cos\alpha + h\sin\alpha - iA\sin\gamma \quad (3.21)$$

onde H^\pm representa o auto-estado de massa carregado e os ângulos α e γ são dados em termos dos parâmetros da matriz de massa dos escalares [15, 11].

Caso um dos escalares físicos acima fosse não massivo, este já teria sido facilmente observado em diversos experimentos em aceleradores. Logo devemos ter (ver Eq.(3.14)):

$$m_A \neq 0 \Rightarrow b > 0$$

Além disso, para que v_u e v_d sejam realmente um ponto de mínimo do potencial escalar, devemos ter $m_A^2 > 0$. Mas, como $b > 0$, da Eq.(3.14) temos:

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Note que sobre estas restrições a condição para um potencial limitado inferiormente é automaticamente satisfeita:

$$m_A^2 \geq m_A^2 \sin 2\beta$$

Da Eq.(3.19) e assumindo $m_z = 91 \text{ GeV}$ podemos obter os valores (em nível de árvore) para as massas dos escalares neutros, tomando valores arbitrários de m_A e β . As regiões de parâmetros permitidas para as massas m_H e m_h estão mostradas na Figura 3.1.

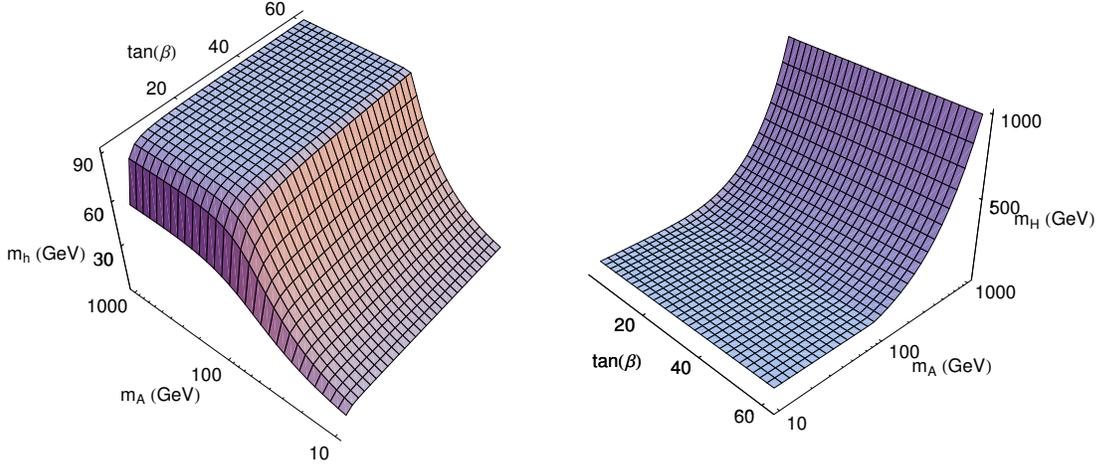


Figura 3.1: Valores permitidos para as massas m_h e m_H em função da massa m_A e de $\tan\beta$.

A Figura 3.1 demonstra claramente as seguintes desigualdades:

$$m_H \geq \text{Max}[m_A, m_z] \text{ e } m_h \leq \text{Min}[m_A, m_z]$$

Como espera-se $m_A > m_z$, o escalar neutro h deve possuir uma massa inferior à do bóson Z , pelo menos em nível de árvore. Cálculos em 1-loop demonstram que correções radiativas para m_h serão da forma [9]⁶:

$$m_h^2 \approx m_z^2(1 + \cos^2 2\beta) \Rightarrow m_h \approx m_z \sqrt{1 + \cos^2 2\beta}$$

No entanto, medidas experimentais impõe $m_h \geq 90 \text{ GeV}$ ⁷ [24]. Portanto é desejável termos $\cos 2\beta \approx -1 \Rightarrow \beta \approx \pi/2$. Porém, como demonstrado anteriormente, as massas dos quark top e bottom serão da ordem de $\lambda_t v_u$ e $\lambda_b v_d$, de tal forma que:

$$\frac{m_t}{m_b} \approx \frac{\lambda_t}{\lambda_b} \tan\beta \approx 40$$

Como não podemos ter $\lambda_t \gg \lambda_b$ ou $\lambda_t \ll \lambda_b$, para que o regime perturbativo ainda seja válido, podemos estimar que $\tan\beta$ estará no intervalo:

$$1 \lesssim \tan\beta \lesssim 60$$

⁶Cálculos mais precisos resultam em $m_h \leq 152 \text{ GeV}$ [23].

⁷O limite mais comumente usado para análises fenomenológicas é $m_h > 114 \text{ GeV}$. No entanto este limite assume que o Higgs do MSSM e o do Modelo Padrão possuem os mesmos acoplamentos com o bóson Z , o que é válido para $m_A \gg m_z$, já que neste limite os Higgs pesados do MSSM desacoplam a baixas energias. Já para valores arbitrários de m_A , em particular se $m_A \sim m_h$, o limite $m_h > 90 \text{ GeV}$ deve ser usado.

Logo, um valor grande de $\tan\beta$ (ou equivalentemente de m_t) é normalmente preferido, já que resulta em um Higgs mais pesado.

3.3.3 Quarks e Léptons

Assumindo a quebra espontânea do setor eletrofraco, os termos que geram massa para os quarks e léptons serão idênticos aos do Modelo Padrão:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta}H_d^\alpha L^\beta \lambda_l E^C + hc &\rightarrow h_d^0 e_i (\lambda_l)_{ij} e_j^C + hc \rightarrow v_d e \lambda_l e^C + v_d \bar{e}^C \lambda_l^\dagger \bar{e} \\ \epsilon_{\alpha\beta}H_u^\alpha Q^\beta \lambda_u U^C + hc &\rightarrow h_u^0 u_i (\lambda_u)_{ij} u_j^C + hc \rightarrow v_u u \lambda_u u^C + v_u \bar{u}^C \lambda_u \bar{u} \\ \epsilon_{\alpha\beta}H_d^\alpha Q^\beta \lambda_d D^C + hc &\rightarrow h_d^0 d_i (\lambda_d)_{ij} d_j^C + hc \rightarrow v_d d \lambda_d d^C + v_d \bar{d}^C \lambda_d \bar{d}\end{aligned}$$

Considerando uma base em que as matrizes de Yukawa são diagonais e eliminando todas as fase não físicas (ver Seção 3.2.4) podemos definir o 4-espinor:

$$\psi_{e_i} = \begin{pmatrix} e_i \\ \bar{e}_i^C \end{pmatrix}$$

de tal forma que

$$v_d e \lambda_l e^C + v_d \bar{e}^C \lambda_l^\dagger \bar{e} = v_d (\lambda_l)_i (e_i e_i^C + \bar{e}_i^C \bar{e}_i) = v_d (\lambda_l)_i \bar{\psi}_{e_i} \psi_{e_i} = (M_l)_i \bar{\psi}_{e_i} \psi_{e_i}$$

já que λ_l é real. No caso dos quarks as matrizes diagonais λ_d e λ_u possuem uma fase física (assim como no SM), que pode ser eliminada redefinindo os campos. Portanto, de maneira análoga aos léptons:

$$\begin{aligned}v_u u \lambda_u u^C + v_u \bar{u}^C \lambda_u \bar{u} &= (M_u)_i \bar{\psi}_{u_i} \psi_{u_i} \\ v_d d \lambda_d d^C + v_d \bar{d}^C \lambda_d \bar{d} &= (M_d)_i \bar{\psi}_{d_i} \psi_{d_i}\end{aligned}$$

Então:

$$M_l = v_d \lambda_l, M_u = v_u \lambda_u \text{ e } M_d = v_d \lambda_d$$

3.3.4 Bósons de Gauge

Os termos de massa para os bósons de gauge não são alterados pelos termos *soft* e, portanto, são dados por:

$$\frac{g^2}{2} (|h_d^0|^2 + |h_u^0|^2) [W^- W^+ + \frac{1}{2} (\frac{g'}{g} B - W^3)^2]$$

onde $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2)$. Definindo $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} (\frac{g'}{g} B - W^3)$, temos:

$$\frac{g^2}{2} \frac{v_u^2}{\sin^2 \beta} W^- W^+ + \frac{g^2}{2} \frac{v_d^2}{\cos^2 \beta \cos^2 \theta_w} Z^2 = m_w^2 W^- W^+ + m_z^2 Z^2$$

sendo

$$\tan\theta_w = \frac{g'}{g}, m_w^2 = \frac{g^2}{2}(v_u^2 + v_d^2) \text{ e } m_z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{2}(v_u^2 + v_d^2)$$

3.3.5 Higgsinos e Gauginos

Em geral os férmions de mesma cor e carga serão misturados pelas matrizes de massa. Como o único férmion neutro colorido é o gluino, seu único termo de massa será proveniente dos termos *soft* (por convenção fez-se M_3 real):

$$\frac{M_3}{2}\tilde{g}\tilde{g} + hc \Rightarrow M_{gluinos} = M_3$$

Os demais gauginos possuem matrizes de massa que os misturam com os férmions dos doubletos H_u e H_d . Considerando apenas os gauginos e higgsinos carregados (já que campos carregados e neutros não se misturam), temos os seguintes termos de massa:

$$\frac{M_2}{2}(\tilde{W}_1\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2\tilde{W}_2) + hc \rightarrow \text{Termos Soft}$$

$$g(\tilde{W}^- \tilde{h}_u^+) h_u^{0\dagger} + g(\tilde{W}^+ \tilde{h}_d^-) h_d^{0\dagger} + hc \rightarrow \text{Termos D}$$

$$\mu \tilde{h}_u^+ \tilde{h}_d^- + hc \rightarrow \text{Termo do Superpotencial}$$

onde $\tilde{W}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{W}_1 \mp i\tilde{W}_2)$. Então⁸:

$$\frac{1}{2}(\tilde{W}^+, \tilde{h}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{h}_d^-) \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_2 & gv_d \\ 0 & 0 & gv_u & \mu \\ M_2^* & gv_u & 0 & 0 \\ gv_d & \mu^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{h}_u^+ \\ \tilde{W}^- \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}$$

a matriz de massa pode ser simplificada através das definições:

$$\begin{aligned} \chi^+ &\equiv (\tilde{W}^+, \tilde{h}_u^+) \text{ e } \chi^- \equiv (\tilde{W}^-, \tilde{h}_d^-) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}(\chi^+ X \chi^- + \bar{\chi}^- X^\dagger \bar{\chi}^+) \end{aligned}$$

onde X é a matriz de mistura:

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}\sin\beta m_w \\ \sqrt{2}\cos\beta m_w & \mu \end{pmatrix}$$

sendo $m_w = \frac{gv_u}{\sqrt{2}\sin\beta}$. Note que X não é simétrica ou real e, portanto, deve ser diagonalizada

⁸Considerando os *vevs* reais, já que as fases sempre podem ser absorvidas por transformações de gauge.

por uma transformação biunitária de acordo com o procedimento da Seção 3.2.4:

$$V_C^T X U_C^* = X_d \Rightarrow \chi'^+ = V_C^\dagger \chi^+ \text{ e } \chi'^{-T} = \chi^{-T} U_C \quad (3.22)$$

Após estas transformações:

$$\frac{1}{2}(\chi^+ X \chi^- + \bar{\chi}^- X^\dagger \bar{\chi}^+) = \frac{1}{2}\chi_i'^+(X_d)_i \chi_i'^- + \frac{1}{2}\bar{\chi}_i'^-(X_d)_i^* \bar{\chi}_i'^+$$

As duas fases físicas da matriz X_d devem ser absorvidas pelos campos e são possíveis fontes de violação CP. Após esta última transformação podemos definir os 4-espinores de Dirac:

$$\tilde{\chi}_1^+ = \begin{pmatrix} \chi_1'^+ \\ \bar{\chi}_1'^- \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{\chi}_2^+ = \begin{pmatrix} \chi_2'^+ \\ \bar{\chi}_2'^- \end{pmatrix}$$

Devido às matrizes U_C e V_C , os auto-estados de massa $\tilde{\chi}_i^+$ serão uma combinação linear dos gauginos e higgsinos carregados, sendo chamados de charginos.

Para os higgsinos e gauginos neutros temos os seguintes termos de massa:

$$\frac{M_1}{2}\tilde{B}\tilde{B} + \frac{M_2}{2}\tilde{W}_3\tilde{W}_3 + hc \rightarrow \text{Termos Soft}$$

$$g(\tilde{W}_3\tilde{h}_u^0)h_u^{0\dagger} + g(\tilde{W}_3\tilde{h}_d^0)h_d^{0\dagger} - g'(\tilde{B}\tilde{h}_u^0)h_u^{0\dagger} + g'(\tilde{B}\tilde{h}_d^0)h_d^{0\dagger} + hc \rightarrow \text{Termos D}$$

$$\mu\tilde{h}_u^0\tilde{h}_d^0 + hc \rightarrow \text{Termo do Superpotencial}$$

Novamente, definindo $(\chi^0)^T \equiv (\tilde{B}, \tilde{W}^3, \tilde{h}_d^0, \tilde{h}_u^0)$, temos:

$$\frac{1}{2}(\chi^0)^T \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_z \cos\beta \sin\theta_w & m_z \sin\beta \sin\theta_w \\ 0 & M_2 & m_z \cos\beta \cos\theta_w & -m_z \sin\beta \cos\theta_w \\ -m_z \cos\beta \sin\theta_w & m_z \cos\beta \cos\theta_w & 0 & -\mu \\ m_z \sin\beta \sin\theta_w & -m_z \cos\beta \sin\theta_w & -\mu & 0 \end{pmatrix} \chi^0 + hc$$

Note que, como esperado, a mistura entre higgsinos e gauginos só ocorre com a quebra do $SU(2) \times U(1)$, ou seja, para v_u e $v_d \neq 0$. Além disso, como a matriz acima é simétrica (mas complexa), ela pode ser diagonalizada por uma única matriz unitária Z [11]:

$$Z^* M Z^\dagger = M_d \Rightarrow \chi'^0 = Z \chi^0 \text{ e } \bar{\chi}'^0 = \bar{\chi}^0 Z^\dagger \quad (3.23)$$

Assim:

$$\frac{1}{2}\chi^{0T} M \chi^0 + hc = \frac{1}{2}\chi_i'^0 (M_d)_i \chi_i'^0 + \frac{1}{2}\bar{\chi}_i'^0 (M_d)_i^* \bar{\chi}_i'^0$$

Em muitos casos as duas possíveis fases de M (já que $M_{1,2}$ podem ser complexos) são ignoradas. No entanto, assim como no caso dos charginos, estas fases podem resultar em interações com violação CP. Então (após a eliminação das fases físicas), podemos definir os

seguintes 4-espinores de Majorana:

$$\tilde{\chi}_i^0 = \begin{pmatrix} \chi_i'^0 \\ \bar{\chi}_i'^0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Os estados acima são os auto-estados de massa, com autovalores de massa dados por $M^\dagger M$ e são chamados de neutralinos.

3.3.6 Squarks

Em uma base arbitrária (sem diagonalizar as matrizes de Yukawa), temos os seguintes termos de massa para os squarks (omitindo o índice de geração):

$$\begin{aligned} & v_u^2 (\tilde{u} \lambda_u^\dagger \lambda_u \tilde{u}^\dagger + \tilde{u}^c \lambda_u^\dagger \lambda_u \tilde{u}^{c\dagger}) - v_d (\mu^* \tilde{u} \lambda_u \tilde{u}^c) \rightarrow \text{Termos } f \\ & \frac{(v_u^2 - v_d^2)}{4} \left(\frac{1}{3} g'^2 - g^2 \right) |\tilde{u}|^2 - (v_u^2 - v_d^2) \frac{1}{3} g'^2 |\tilde{u}^c|^2 \rightarrow \text{Termos } D \\ & \tilde{u} m_Q^2 \tilde{u}^\dagger + \tilde{u}^{c\dagger} m_{\tilde{U}}^2 \tilde{u}^c + v_u \tilde{u} \tilde{A}_u \tilde{u}^c \rightarrow \text{Termos } Soft \end{aligned}$$

e os termos análogos para os squarks \tilde{d} . Definindo $\tilde{U}^T = (\tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{t})$ e $\tilde{D}^T = (\tilde{d}, \tilde{s}, \tilde{b})$, obtemos as seguintes matrizes de massa:

$$(\tilde{U}^T, \tilde{U}^{C\dagger}) \begin{pmatrix} v_u^2 |\lambda_u|^2 + m_Q^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{U}} & -\mu^* \cot \beta v_u \lambda_u + v_u \tilde{A}_u \\ -\mu \cot \beta v_u \lambda_u + v_u \tilde{A}_u^\dagger & v_u^2 |\lambda_u|^2 + m_{\tilde{U}}^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{U}^C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}^* \\ \tilde{U}^C \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

e

$$(\tilde{D}^T, \tilde{D}^{C\dagger}) \begin{pmatrix} v_d^2 |\lambda_d|^2 + m_Q^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{D}} & -\mu^* \tan \beta v_d \lambda_d + v_d \tilde{A}_d \\ -\mu \tan \beta v_d \lambda_d + v_d \tilde{A}_d^\dagger & v_d^2 |\lambda_d|^2 + m_{\tilde{D}}^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{D}^C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{D}^* \\ \tilde{D}^C \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_{u,d}$, $m_{Q,U,D}^2$ e $\tilde{A}_{u,d}$ são matrizes de mistura entre as gerações e:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{U}} &= \frac{1}{6} \cos 2\beta (4m_w^2 - m_z^2), \quad D_{\tilde{U}^C} = \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \cos 2\beta m_z^2, \\ D_{\tilde{D}} &= -\frac{1}{6} \cos 2\beta (2m_w^2 + m_z^2) \quad \text{e} \quad D_{\tilde{D}^C} = -\frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \cos 2\beta m_z^2 \end{aligned}$$

são provenientes dos termos D do potencial escalar e, portanto, são diagonais nas gerações.

Note que as matrizes que diagonalizam a matriz de massa para os quarks (ou seja, as matrizes $\lambda_{u,d}$) não necessariamente diagonalizam as matrizes de massa para os squarks, devido à presença dos termos *soft*. Como os termos de massa são reais podemos reescrever os termos acima como:

$$(\tilde{U}^T, \tilde{U}^{C\dagger}) \tilde{M}_{\tilde{U}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{U}^* \\ \tilde{U}^C \end{pmatrix} = (\tilde{U}^\dagger, \tilde{U}^{CT}) (\tilde{M}_{\tilde{U}}^2)^* \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^{C*} \end{pmatrix} = (\tilde{U}_L^\dagger, \tilde{U}_R^{C\dagger}) (\tilde{M}_{\tilde{U}}^2)^* \begin{pmatrix} \tilde{U}_L \\ \tilde{U}_R^C \end{pmatrix}$$

onde \tilde{M}_U^2 é a matriz de massa, $\tilde{U}_L = \tilde{U}$ e $\tilde{U}_R = \tilde{U}^{C*}$. Desta forma, como a matriz de massa é hermitiana, podemos diagonalizá-la utilizando uma única transformação unitária:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} V_{uL} \\ V_{uR} \end{pmatrix}_{\alpha i} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}_i$$

sendo $V_{uL,R}$ matrizes 3×6 , α o índice de sabor e i o de massa. As matrizes $V_{dL,R}$ são definidas de maneira análoga. Portanto os auto-estados de massa serão (em geral) misturas entre as gerações e os squarks (\tilde{u}_L, \tilde{u}_R)

3.3.7 Sléptons

De maneira semelhante aos squarks do tipo d, temos:

$$(\tilde{E}^T, \tilde{E}^{C\dagger}) \begin{pmatrix} v_d^2 |\lambda_l|^2 + m_L^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{E}} & -\mu^* \tan \beta v_d \lambda_l + v_d \tilde{A}_l \\ -\mu \tan \beta v_d \lambda_l + v_d \tilde{A}_l^\dagger & v_d^2 |\lambda_l|^2 + m_E^2 + \mathbf{1} D_{\tilde{E}^C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}^* \\ \tilde{E}^C \end{pmatrix}$$

já para os sneutrinos não temos contribuições do superpotencial, apenas dos termos *soft* e D:

$$\tilde{N}^T (m_L^2 + D_{\tilde{N}}) \tilde{N}^*$$

sendo $\tilde{E}^T = (\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau})$, $\tilde{N} = (\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau)$, $D_{\tilde{E}} = \frac{1}{2} \cos 2\beta (m_z^2 - 2m_w^2)$, $D_{\tilde{E}^C} = -\sin^2 \theta_w \cos 2\beta m_z^2$ e $D_{\tilde{N}} = \frac{1}{2} \cos 2\beta m_z^2$.

3.3.8 Limite Supersimétrico

Considerando o limite supersimétrico (termos *soft* $\rightarrow 0$) para as matrizes de massa acima, vemos que na maioria dos casos não há degenerescência entre as massas das partículas e das superpartículas. Para o caso dos neutrinos, por exemplo:

$$\tilde{N}^T (m_L^2 + D_{\tilde{N}}) \tilde{N}^* \rightarrow \frac{1}{2} \cos 2\beta m_z^2 \tilde{N}^T \tilde{N}^*$$

Enquanto o neutrino não possui massa no MSSM. Ou seja, o resultado acima aparenta uma violação do limite supersimétrico já que neste caso $m_{\tilde{\nu}} \neq m_\nu$. Esta violação resulta de *vevs* não nulos para os campos D e de termos proporcionais à μ (no caso dos escalares carregados), gerados da quebra espontânea de simetria $SU(2) \times U(1)/U(1)$. No entanto, no limite supersimétrico, a Eq.(3.12) e a Eq.(3.13) se tornam:

$$|\mu|^2 v_u + \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}\right) (v_u^2 - v_d^2) v_u = 0$$

$$|\mu|^2 v_d - \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}\right) (v_u^2 - v_d^2) v_d = 0$$

Das equações acima vemos que a solução $v_u, v_d \neq 0$ só é possível se:

$$\mu = 0 \text{ e } v_u = v_d \Rightarrow \tan\beta = 1 \Rightarrow \sin\beta = \cos\beta$$

Portanto obtemos $\cos 2\beta = 0$ e $\mu = 0$, o que restaura o limite supersimétrico, já que todos os termos D nas matrizes de massa são proporcionais à $\cos 2\beta$. Ou seja, apesar de aparentemente a quebra eletrofraca quebrar a supersimetria, isso só ocorre devido à presença de termos *soft* no potencial escalar.

3.4 Interações do MSSM

Como mostrado anteriormente, uma lagrangeana supersimétrica possuirá os seguintes termos de interação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \phi_i)^\dagger D^\mu \phi_i + i\bar{\chi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi_i + i\lambda^A \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - (\sqrt{2} g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \lambda^A \chi_j + hc) \\ & - \frac{1}{2} (m_{ij} \chi_i \chi_j + \lambda_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k + hc) - V(\phi) + \text{termos soft} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$V(\phi) = f_i f_i^\dagger + \frac{1}{2} (D^A)^2 = |m_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k|^2 + \frac{1}{2} [g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j]^2$$

Para o MSSM temos:

$$m_{ij} = \mu \text{ e } \lambda_{ijk} = \lambda_l, \lambda_u, \text{ e } \lambda_d$$

Para se obter as interações em termos dos auto-estados de massa é necessário diagonalizar as matrizes obtidas na Seção 3.3 e reescrever todos os termos de interação incluindo as matrizes de rotação. Como mostrado nas Figuras 4.3 e 4.13, na maioria dos casos a primeira e segunda gerações de sléptons e squarks são praticamente degeneradas. Portanto em muitos casos é uma boa aproximação supor que os efeitos da diagonalização das matrizes *soft* só sejam relevantes para a terceira geração (obviamente esta suposição não é válida para parâmetros *soft* arbitrários).

A seguir apresentaremos alguns dos principais termos de interação na base de auto-estados de massa. As interações serão apresentadas de acordo com sua origem na lagrangeana supersimétrica (potencial de Kähler, superpotencial, tensor de força ou potencial escalar). Uma lista completa dos acoplamentos e as respectivas regras de Feynman pode ser encontrada em [11, 15, 21].

3.4.1 Potencial de Kähler

Usando a Eq.(3.6) e a Eq.(3.25) podemos obter as interações entre os bósons de gauge, os gauginos e as demais partículas do MSSM.

Para as interações de gauge entre os quarks e os glúons, por exemplo:

$$ig_s \bar{u} \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u g_\mu^a - i \bar{u}^C \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^{a*}}{2} u^C g_\mu^a$$

onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann, u e u^C são os espinores de mão esquerda dos supercampos Q (componente up) e U^C e g_μ^a é o gluon. Note que, como U^C se transforma pela representação conjugada (ver Tabela 3.1) temos $-i\lambda^*$ no segundo termo. Explicitando os índices de cor, podemos reescrever o segundo termo como

$$(\bar{u}^C)_\alpha \bar{\sigma}^\mu \frac{(\lambda^{a*})_{\alpha\beta}}{2} (u^C)_\beta = -(u^C)_\beta \sigma^\mu \frac{(\lambda^{a*})_{\alpha\beta}}{2} (\bar{u}^C)_\alpha = -(u^C)_\beta \sigma^\mu \frac{(\lambda^a)_{\beta\alpha}}{2} (\bar{u}^C)_\alpha$$

onde foi usada a hermiticidade das matrizes λ e a identidade $\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi = -\xi \sigma^\mu \bar{\chi}$. Portanto, definido-se o espinor de Dirac e as matrizes γ^μ como

$$\psi_u = \begin{pmatrix} u_a \\ (\bar{u}^C)^{\dot{a}} \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} ig_s \bar{u} \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u g_\mu^a - ig_s \bar{u}^C \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^{a*}}{2} u^C g_\mu^a &= ig_s \bar{u} \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u g_\mu^a + ig_s u^C \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \bar{u}^C g_\mu^a \\ &= ig_s \bar{\psi}_u \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi_u g_\mu^a \end{aligned}$$

de maneira análoga ao Modelo Padrão. Todas as demais interações entre os léptons e quarks e os bósons de gauge também são idênticas às do SM. Logo os efeitos da matriz de mistura dos quarks só serão relevantes para as correntes carregadas.

Para os sférmions e sléptons temos as seguintes interações com os bósons de gauge:

$$(D_\mu \tilde{f})^\dagger D^\mu \tilde{f} \rightarrow [(\partial_\mu + ig_s g_\mu \frac{\lambda}{2} + ig \vec{V}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + ig' V'_\mu \frac{Y}{2}) \tilde{f}]^\dagger [(\partial^\mu + ig_s g^\mu \frac{\lambda}{2} + ig \vec{V}^\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + ig' V'^\mu \frac{Y}{2}) \tilde{f}] \quad (3.26)$$

Portanto, teremos acoplamentos do tipo $\tilde{f} \tilde{f} V$ e $\tilde{f} \tilde{f} V V$:

$$g \tilde{f}^\dagger \vec{V}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \partial^\mu \tilde{f} \text{ e } g \tilde{f}^\dagger (\vec{V}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2})^2 \tilde{f}$$

Além dos termos acima, também temos acoplamentos que misturam os bósons de gauge:

$$gg_s \tilde{f}^\dagger (g^\mu \frac{\lambda}{2}) (\vec{V}_\mu \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}) \tilde{f}$$

Todas as interações acima estão escritas em termos dos auto-estados de sabor (e portanto são diagonais nas gerações). Após transformar para os auto-estados de massa, todas as interações que misturem sférmions diferentes sentirão os efeitos das matrizes de mis-

tura. A partir da Eq.(3.26), temos por exemplo que, na base de massa [15, 21]:

$$\mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}W} = \frac{-ig}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger V_{dL} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{d} + hc)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}^{C*} \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} V_{uL} \\ V_{uR} \end{pmatrix}_{\alpha i} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}_i \quad \text{e} \quad \tilde{u}^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{d} = \tilde{u}^\dagger \partial^\mu \tilde{d} - (\partial^\mu \tilde{u}^\dagger) \tilde{d}$$

sendo $V_{uL,R}$ matrizes 3×6 de rotação da base de massa para a base de sabor . As matrizes $V_{dL,R}$ são definidas de maneira análoga. Para os acoplamentos com o bóson Z também teremos efeitos de mistura, já que o Z se acopla diferentemente com as componentes \tilde{u}_L e \tilde{u}_R e estas se misturam nas matrizes de massa. Logo:

$$\mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}Z} = -\frac{ie}{2}(\cot\theta_w - \frac{1}{3}\tan\theta_w)(Z_\mu \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger V_{uL} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{u}) - \frac{2ie}{3}\tan\theta_w(Z_\mu \tilde{u}^\dagger V_{uR}^\dagger V_{uR} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{u})$$

já que $V_{uL}^\dagger V_{uL} \neq 1$. Como o fóton (glúon) se acopla da mesma forma com os squarks \tilde{u}^\dagger e \tilde{u}^C , estes acoplamentos não serão alterados após a rotação para a base de massa:

$$\mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}A} = -i\frac{2e}{3}A_\mu \tilde{u}^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{u} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}g} = -ig_s g_\mu^b \tilde{u}^\dagger \frac{\lambda^b}{2} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{u}$$

Acoplamentos análogos são obtidos para os demais squarks e sléptons.

Os acoplamentos com dois fótons ou dois glúons também serão diagonais:

$$\mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}AA} = e^2 q_f^2 A_\mu A^\mu \tilde{f}_i^\dagger \tilde{f}_i \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}gg} = \frac{g_s^2}{4} \tilde{f}_i^\dagger \lambda^a \lambda^b \tilde{f}_i g_\mu^a g^{\mu b}$$

onde \tilde{f}_i representam sférmions nos auto-estados de massa e q_f suas respectivas cargas. Todos os outros acoplamentos incluem matrizes de rotação. A seguir mostraremos alguns dos acoplamentos mistos que envolvem as matrizes de mistura. Uma relação completa dos acoplamentos pode ser encontrada em [11, 15, 21]. Para os acoplamentos do tipo $\tilde{f}\tilde{f}VV$ proveniente dos acoplamentos com squarks *left* (\tilde{u}_L):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}Vg} &= g_s g_\mu^b \left[\frac{2e}{3} A^\mu + \frac{e}{2} \left(\frac{\tan\theta_w}{3} - \cot\theta_w \right) Z^\mu \right] \tilde{u}^\dagger \lambda^b V_{uL}^\dagger V_{uL} \tilde{u} \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}VW} &= \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \left[\frac{2e}{3} A^\mu + \frac{e}{2} \left(\frac{\tan\theta_w}{3} - \cot\theta_w \right) Z^\mu \right] \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger V_{dL} \tilde{d} + hc \\ &\quad + \frac{gg_s}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ g^{b\mu} \tilde{u}^\dagger \lambda^b V_{uL}^\dagger V_{dL} \tilde{d} + hc \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}WW} &= \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger V_{uL} \tilde{u} \end{aligned}$$

Já para as componentes *right* (\tilde{u}_R) temos acoplamentos análogos, exceto pelos termos en-

volvendo W^\pm :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}ZA} &= \frac{-4e^2}{9} \tan\theta_w A_\mu Z^\mu \tilde{u}^\dagger V_{uR}^\dagger V_{uR} \tilde{u} \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}\tilde{f}Vg} &= \frac{eg_s}{3} (\tan\theta_w Z^\mu - A^\mu) g_\mu^b \tilde{u}^\dagger \lambda^b V_{uR}^\dagger V_{uR} \tilde{u}\end{aligned}$$

As componentes escalares dos supercampos H_u e H_d também se acoplarão com os bósons de gauge através das derivadas covariantes geradas pelo potencial de Kähler. Para acoplamentos $hhWW$, por exemplo:

$$\frac{g^2}{4} h_u^\dagger \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}^2 h_u + \frac{g^2}{4} h_d^\dagger \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}^2 h_d = \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} (|h_u^+|^2 + |h_u^0|^2 + |h_d^-|^2 + |h_d^0|^2)$$

Reescrevendo os escalares em termos dos auto-estados de massa (ver Eq.(3.20) e Eq.(3.21)):

$$= \frac{g^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} (H^+ H^- + A^2 + h^2 + H^2)$$

Assim como no caso dos squarks, também teremos acoplamentos cúbicos e acoplamentos mistos (que misturam bósons de gauge carregados e neutros).

Além das interações citadas acima, o potencial de Kähler também fornece as interações entre gauginos, férmions e sférmions. Como os primeiros se misturam com os higgsinos para formar neutralinos e charginos, é necessário decompor os auto-estados de massa em termos dos gauginos. Da Eq.(3.25), temos que os acoplamentos gaugino-férmion-sférmion são do tipo:

$$\sqrt{2} g \tilde{f}^\dagger (T_A)_{ij} \lambda^A f \quad (3.27)$$

Para o supercampo de quarks *left*, por exemplo:

$$i\sqrt{2}(\tilde{u}^\dagger, \tilde{d}^\dagger) \left[g_s \frac{\lambda^a}{2} \tilde{g}^a + \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} \tilde{W}_3 & \sqrt{2}\tilde{W}^+ \\ \sqrt{2}\tilde{W}^- & -\tilde{W}_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} g' \tilde{B} \right] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Logo temos as seguintes interações com os gluinos:

$$i\sqrt{2} g_s \tilde{u}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} \tilde{g}^a u \rightarrow i\sqrt{2} g_s \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger U_{uL} \frac{\lambda^a}{2} \tilde{g}^a u \quad (3.29)$$

onde o segundo termo está na base de massa e $U_{uL(dL)}$ é a matriz que diagonaliza a matriz de massa dos quarks *up* (*down*). Para as interações envolvendo charginos temos termos do tipo:

$$ig\tilde{u}^\dagger \tilde{W}^+ d + \dots$$

Para reescrever o termo acima na base de massa temos que transformar tanto o wino (\tilde{W}^+) como os quarks e squarks:

$$ig\tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger U_{dL} (V_C)_{1i} \frac{1-\gamma^5}{2} \tilde{\chi}_i^+ d$$

onde, conforme definido na Eq.(3.22), V_C e U_C são as matrizes que diagonalizam a matriz de massa dos gauginos e higgsinos carregados e $\tilde{\chi}_{1,2}^{\pm}$ são os 4-espinores dos charginos.

Da Eq.(3.28) temos os seguintes acoplamentos com neutralinos:

$$i\sqrt{2}\tilde{u}^{\dagger}\left(\frac{1}{6}g'\tilde{B} + \frac{1}{2}g\tilde{W}_3\right)u \rightarrow i\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{u}^{\dagger}V_{uL}^{\dagger}U_{uL}\left[\frac{1}{6}g'(Z^{\dagger})_{1i}\chi_i^0 + g(Z^{\dagger})_{2i}\chi_i^0\right]u$$

onde Z é a matriz de rotação definida pela Eq.(3.23) e χ_i^0 são os quatro neutralinos.

Além dos acoplamentos com quarks, squarks e sléptons, a Eq.(3.27) também resulta em acoplamentos do tipo $h\lambda^A\tilde{h}$, onde h e \tilde{h} representam higgs e higgsinos. Para o dubleto up , por exemplo:

$$i\sqrt{2}h_u^{\dagger}\left(ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W} + ig'\frac{1}{2}\tilde{B}\right)\tilde{h}_u$$

Considerando apenas os termos com gauginos carregados:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}(h_u^0\tilde{W}^-\tilde{h}_u^+ + h_u^{+\dagger}\tilde{W}^+\tilde{h}_u^0)$$

Usando a Eq.(3.22), a Eq.(3.23) e as definições da Eq.(3.20) e da Eq.(3.21), podemos escrever a expressão acima na base de massa:

$$\begin{aligned} &-\frac{g}{\sqrt{2}}[(h\cos\alpha - H\sin\alpha - iA\cos\gamma)(U_C^{\dagger})_{1i}(V_C)_{2j}(\tilde{\chi}_i^+)^C P_L\tilde{\chi}_j^+] \\ &-\frac{g}{\sqrt{2}}[H^-\cos\gamma(V_C)_{2i}(Z^{\dagger})_{4j}\tilde{\chi}_i^+ P_L\tilde{\chi}_j^0] \end{aligned}$$

onde $P_{L,R} = \frac{1\mp\gamma^5}{2}$. Portanto os charginos possuirão acoplamentos com os escalares neutros e com o escalar carregado e neutralinos. Como termos cúbicos nos supercampos H_u e H_d não são permitidos no superpotencial, o potencial de Kähler é a única fonte destes acoplamentos.

Os únicos termos provenientes do potencial K que ainda não foram citados são os acoplamentos entre os bósons de gauge e os higgsinos. No entanto como os higgsinos se combinam com os gauginos para formar neutralinos e charginos, existem duas possíveis fontes para o acoplamento entre neutralinos (ou charginos) e os bósons de gauge: o potencial de Kähler (com acoplamentos higgsino-bóson de gauge) e o tensor de força (gaugino-bóson de gauge). A contribuição dos higgsinos (proveniente do potencial de Kähler) é da forma:

$$i\tilde{h}_u\bar{\sigma}^{\mu}\left(ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_{\mu} + ig'B_{\mu}\right)\tilde{h}_u + i\tilde{h}_d\bar{\sigma}^{\mu}\left(ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_{\mu} - ig'B_{\mu}\right)\tilde{h}_d$$

Considerando apenas a corrente carregada:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}W_{\mu}^-(\tilde{h}_u^0\bar{\sigma}^{\mu}\tilde{h}_u^+ + \tilde{h}_d\bar{\sigma}^{\mu}\tilde{h}_d^0) + hc \quad (3.30)$$

Já para a contribuição proveniente do tensor de força⁹:

$$i\lambda^a\sigma^\mu(-gf_{abc}V^b)\bar{\lambda}^c \rightarrow -gi\epsilon_{ijk}\tilde{W}^i\sigma^\mu W_\mu^j\tilde{W}^k$$

Novamente, agrupando apenas os termos que envolvem W_μ^\pm :

$$-gi\epsilon_{ijk}\tilde{W}^i\sigma^\mu W_\mu^j\tilde{W}^k \rightarrow -gW_\mu^-(\tilde{W}^3\sigma^\mu\tilde{W}^- + \tilde{W}^3\bar{\sigma}^\mu\tilde{W}^+) + hc \quad (3.31)$$

Juntando as contribuições da Eq.(3.30) e da Eq.(3.31):

$$\mathcal{L}_{W\tilde{\chi}\tilde{\chi}} = -gW_\mu^-(\tilde{W}^3\sigma^\mu\tilde{W}^- + \tilde{W}^3\bar{\sigma}^\mu\tilde{W}^+) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{h}_u^0\bar{\sigma}^\mu\tilde{h}_u^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{h}_d^-\bar{\sigma}^\mu\tilde{h}_d^0 + hc$$

Usando a Eq.(3.22) e a Eq.(3.23), podemos reescrever os acoplamentos acima na base de massa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W\tilde{\chi}\tilde{\chi}} &= gW_\mu^-\tilde{\chi}_j^0\gamma^\mu[Z_{j2}(V_C)_{1i} - \frac{1}{\sqrt{2}}(Z)_{j4}(V_C)_{2i}]P_L\tilde{\chi}_i^+ \\ &+ gW_\mu^-\tilde{\chi}_j^0\gamma^\mu[(Z^*)_{j2}(U_C^T)_{1i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(Z^*)_{j3}(U_C^T)_{2i}]P_R\tilde{\chi}_i^+ \end{aligned}$$

onde $\tilde{\chi}^0$ e $\tilde{\chi}^+$ são os 4-espinores dos neutralinos e charginos definidos na Seção 3.3.5. De maneira análoga, os bósons Z_μ e A_μ se acoplarão com os neutralinos e charginos, porém sem que haja mistura entre estes, devido à conservação de carga elétrica. Por exemplo, para acoplamentos com o campo do fóton:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A\tilde{\chi}\tilde{\chi}} &= -eA_\mu\tilde{\chi}_j^+\gamma^\mu[(V_C^\dagger)_{j2}(V_C)_{2i} + (V_C^\dagger)_{j1}(V_C)_{1i}]P_L\tilde{\chi}_i^+ \\ &- eA_\mu\tilde{\chi}_j^+\gamma^\mu[(U_C^*)_{j2}(U_C^T)_{2i} + (U_C^*)_{j1}(U_C^T)_{1i}]P_R\tilde{\chi}_i^+ \end{aligned}$$

Usando a unitariedade das matrizes U_C e V_C :

$$\mathcal{L}_{A\tilde{\chi}\tilde{\chi}} = -eA_\mu\tilde{\chi}_j^+(P_L + P_R)\tilde{\chi}_i^+ = -eA_\mu\tilde{\chi}_i^+\gamma^\mu\tilde{\chi}_i^+$$

como esperado, já que os acoplamentos com A_μ devem ser diagonais na base de massa.

Como mostrado aqui o potencial de Kähler define praticamente todos os acoplamentos que envolvem as constantes de acoplamento de gauge. Além dos termos discutidos aqui, o potencial de Kähler também contribui com termos f e D para o potencial escalar (ver Eq.(2.42)). Estes acoplamentos serão discutidos na Seção 3.4.4.

3.4.2 Tensor de Força

Conforme mostrado na Seção 2.6.1, os acoplamentos entre gauginos e bósons de gauge, assim como os vértices triplos e quárticos entre os bósons de gauge são gerados através do

⁹Como o bino pertence à um grupo abeliano, ele não se acopla com os bósons de gauge.

tensor de força não abeliano. Da Eq.(2.53):

$$\mathcal{L} = i\lambda^A \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}$$

Os tensores $F_{\mu\nu}$ são iguais aos tensores de força do Modelo Padrão. Logo acoplamentos envolvendo apenas bósons de gauge são idênticos aos do SM. Já para os termos que envolvem gauginos e bósons de gauge temos:

$$-igf_{ABC}\lambda^A\sigma^\mu V_\mu^B\bar{\lambda}^A$$

Os termos envolvendo binos e winos já foram discutidos no final da Seção 3.4.1. Para os gluinos as interações podem ser diretamente escritas na base de massa (já que pelas nossas convenções M_3 é real):

$$-ig_s f_{abc} \tilde{g}^a \sigma^\mu g_\mu^b \bar{\tilde{g}}^c$$

3.4.3 Superpotencial

O superpotencial do MSSM é dado pela Eq.(3.5):

$$F = \mu\epsilon_{\alpha\beta}H_u^\alpha H_d^\beta + \epsilon_{\alpha\beta}[H_d^\alpha L_i^\beta(\lambda_l)_{ij}E_j^C - H_u^\alpha Q_i^\beta(\lambda_u)_{ij}U_j^C + H_d^\alpha Q_i^\beta(\lambda_d)_{ij}D_j^C]$$

e resulta em acoplamentos cúbicos do tipo

$$-\frac{1}{2}\lambda_{ijk}\chi_i\chi_j\phi_k + hc$$

Para $\phi_k = h_{u,d}$, temos os acoplamentos de Yukawa usuais:

$$h_d^0 e \lambda_l e^C + h_u^0 u \lambda_u u^C + h_d^0 d \lambda_d d^C$$

Além dos acoplamentos com as componentes carregadas (h_u^+ e h_d^-). Como exemplo podemos considerar apenas os acoplamentos entre os quarks up e os escalares h_u :

$$\mathcal{L}_{hq} = -h_u^+ d \lambda_u u^C + h_u^0 u \lambda_u u^C$$

Reescrevendo os quarks em termos dos auto-estados de massa, assim como os escalares:

$$\mathcal{L}_{hq} = -\cos\gamma H^+ d U_{dL} \lambda_u U_{dR} u^C + (i\cos\gamma A + \cos\alpha h - \sin\alpha H) u U_{uL} \lambda_u U_{uR} u^C$$

sendo $U_{uL,R}$ as matrizes que diagonalizam os acoplamentos de Yukawa dos quarks up . Portanto:

$$u U_{uL} \lambda_u U_{uR} u^C = \frac{1}{v_u} u M_u u^C = \frac{g}{\sqrt{2} m_w \sin\beta} u M_u u^C$$

e

$$dU_{dL}\lambda_u U_{uR}u^C = dU_{dL}U_{uL}^\dagger U_{uL}\lambda_u U_{uR}u^C = \frac{g}{\sqrt{2}m_w \sin\beta} dU_{dL}U_{uL}^\dagger M_u u^C$$

onde M_u é a matriz de massa (diagonal) dos quarks up e $U_{dL}U_{uL}^\dagger = V_{CKM}$ é a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Então:

$$\mathcal{L}_{hqq} = \frac{g}{\sqrt{2}m_w \sin\beta} [-\cos\gamma H^+ dV_{CKM} M_u u^C + (i\cos\gamma Au + \cos\alpha h - \sin\alpha H)u M_u u^C]$$

Logo temos acoplamentos entre quarks e todos os escalares de Higgs. Além disso, os termos de acoplamento com o escalar carregado H^+ resultarão em interações não diagonais, que misturam gerações de maneira análoga às correntes carregadas no SM. Acoplamentos semelhantes também são obtidos para os léptons.

Além de acoplamentos do tipo hqq ($\phi_k = h_{u,d}$), o superpotencial também resulta em acoplamentos entre squarks (ou sléptons) e higgsinos ($\phi_k = \tilde{q}, \tilde{l}$). Portanto teremos termos do tipo

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}q\tilde{q}} = \tilde{h}_u^0 u \lambda_u \tilde{u}^C + \tilde{h}_u^0 \tilde{u} \lambda_u u^C + \tilde{h}_u^+ d \lambda_u \tilde{u}^C + \tilde{h}_u^+ \tilde{d} \lambda_u u^C$$

Escrevendo os higgsinos em termos de seus auto-estados de massa (neutralinos e charginos), assim como os quarks e squarks:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\chi}q\tilde{q}} &= (Z^\dagger)_{4i} P_L \tilde{\chi}_i^0 u U_{uL} \lambda_u V_{uR}^* \tilde{u} + (Z^\dagger)_{4i} P_L \tilde{\chi}_i^0 \tilde{u} V_{uL} \lambda_u U_{uR} u^C \\ &+ (V_C)_{2i} P_L \tilde{\chi}_i^+ d U_{dL} \lambda_u V_{uR}^* \tilde{u} + (V_C)_{2i} P_L \tilde{\chi}_i^+ \tilde{d} V_{dL} \lambda_u U_{uR} u^C \end{aligned}$$

3.4.4 Potencial Escalar

Os termos f e D do superpotencial e do potencial de Kähler formam o potencial escalar, dado por:

$$V(\phi) = f_i f_i^\dagger + \frac{1}{2} (D^A)^2 = |m_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} \phi_j \phi_k|^2 + \frac{1}{2} [g \phi_i^\dagger (T_A)_{ij} \phi_j]^2 \quad (3.32)$$

onde ϕ são todos os escalares do MSSM. Da Eq.(3.32) vemos que além dos termos de massa, $V(\phi)$ também contém termos cúbicos e quárticos nos escalares. Os termos envolvendo apenas os escalares neutros $h_{u,d}^0$ já foram discutidos na Seção 3.3.2. A seguir discutiremos alguns dos outros possíveis termos de interação.

Devido ao pequeno valor das constantes de acoplamento de Yukawa (se comparadas com a constante de acoplamento forte), os termos quárticos predominantes para os squarks serão aqueles gerados pelo termo D do potencial escalar:

$$\mathcal{L}_{(\tilde{q}\tilde{q})^2} = -\frac{1}{2} g_s^2 [\tilde{q}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} \tilde{q}]^2 + \dots$$

onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann. Como os termos acima são diagonais nas gerações, eles não sofrem efeitos das matrizes de mistura. Isto ocorrerá em todos os acoplamentos

provenientes de termos D. No entanto, para os termos provenientes do superpotencial:

$$\mathcal{L}_{(\tilde{u}\tilde{u})^2} = \frac{1}{4}|\tilde{u}\lambda_u\tilde{u}^C|^2 \rightarrow \frac{1}{4}|\tilde{u}V_{uL}\lambda_uV_{uR}\tilde{u}^C|^2$$

onde o último termo está escrito na base de massa. Da Eq.(3.32) vemos que os squarks (e sléptons) também possuirão acoplamentos com os escalares de Higgs provenientes dos termos f do potencial escalar:

$$\mathcal{L}_{(\tilde{u}h)^2} = | -h_u^+\tilde{u}_i(\lambda_u)_{ij} + h_u^0\tilde{d}_i(\lambda_u)_{ij} |^2 + \dots$$

Reescrevendo o termo acima na base de massa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\tilde{u}h)^2} &= \cos^2\gamma H^+ H^- \tilde{u}^\dagger V_{uL}^\dagger |\lambda_u|^2 V_{uL} \tilde{u} \\ &+ (\cos^2\gamma A^2 + \cos^2\alpha h^2 + \sin^2\alpha H^2 - \sin 2\alpha h H) \tilde{d}^\dagger V_{dL}^\dagger |\lambda_u|^2 V_{dL} \tilde{d} \\ &- \cos\gamma H^+ \tilde{d}^\dagger V_{dL}^\dagger |\lambda_u|^2 V_{uL} \tilde{u} [(-i\cos\gamma A + \cos\alpha h - \sin\alpha H) + hc] \end{aligned}$$

Finalmente, podemos obter os termos quárticos envolvendo apenas os escalares de Higgs. Para isto basta transformar para a base de massa a Eq.(3.11):

$$V(h) = \left(\frac{g^2 + g'^2}{8}\right)(|h_u|^2 - |h_d|^2)^2 + \frac{g^2}{2}|h_u^\dagger h_d|^2 + \dots$$

Considerando apenas o segundo termo:

$$V(h) = \frac{g^2}{2} H^+ H^- [h^2 \sin^2(\alpha - \gamma) + H^2 \cos^2(\alpha - \gamma) + hH \sin 2(\alpha - \gamma)] + \dots$$

Apesar de não terem sido discutidos aqui, os termos cúbicos também estarão presentes. Estes são gerados pelos termos cruzados que envolvem o parâmetro μ :

$$|\mu h_u^+ - \frac{1}{2}\tilde{e}\lambda_l\tilde{e}^C - \frac{1}{2}\tilde{u}\lambda_d\tilde{d}^C|^2 \rightarrow -\frac{1}{2}\mu^* h_u^{+\dagger}\tilde{e}\lambda_l\tilde{e}^C + \dots \quad (3.33)$$

e após o deslocamento dos escalares neutros $h_{u,d}^0$:

$$\frac{g^2}{2}|h_u^\dagger h_d|^2 \rightarrow \frac{g^2}{2}|h_u^{+\dagger}(v_d + h_d^0) + (v_u + h_u^{0\dagger})h_d^-|^2 = \frac{g^2}{2}v_u h_u^+ h_d^{0\dagger} h_d^- + \dots$$

Existe ainda uma terceira fonte de acoplamentos cúbicos entre os escalares, que são os termos *soft* trilineares (ver Eq.(3.9)):

$$\mathcal{L}_{soft} = -\epsilon_{\alpha\beta}(\tilde{q}^\alpha \tilde{A}_u \tilde{u}^C h_u^\beta - \tilde{q}^\alpha \tilde{A}_d \tilde{d}^C h_d^\beta - \tilde{l}^\alpha \tilde{A}_l \tilde{e}^C h_d^\beta + hc) + \dots$$

Estes termos são semelhantes aos da Eq.(3.33), pois acoplam os sférmions com os escalares

de higgs.

3.4.5 Violação de Sabor

Como vimos cima, diversos acoplamentos do MSSM envolvem mistura entre sabores, sobretudo no setor escalar. Estes termos contribuem para novos processos com violação de sabor e para processos já existentes no Modelo Padrão. Neste, em nível de árvore, somente as correntes carregadas violam sabor. No entanto, em diagramas de ordem superior, é possível gerar processos com violação de sabor em correntes neutras. Em geral estes diagramas envolvem caixas ou loops como os da Figura 3.2.

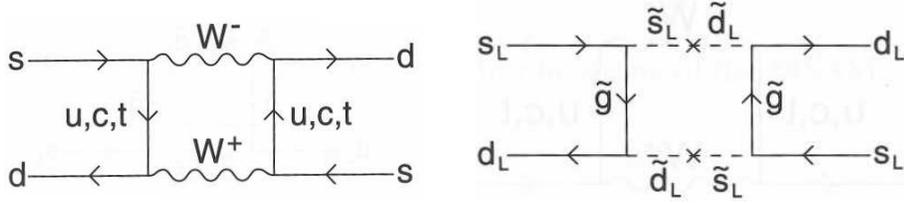


Figura 3.2: Contribuições do Modelo Padrão (esquerda) e do MSSM (direita) para a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$.

Para o cálculo das contribuições dos diagramas tipo caixa existe uma maneira de relacionar diretamente a contribuição do diagrama aos elementos não diagonais da matriz de massa. Se considerarmos diagramas semelhantes aos da Figura 3.2, podemos escrever a amplitude resultante como:

$$\mathcal{M} = C(V_{\alpha i}V_{j\gamma}^\dagger V_{\delta j}V_{i\beta}^\dagger)I(m_i^2, m_j^2, m_V^2)$$

onde C é uma constante numérica, V é a matriz de mistura e m_i , m_j e m_V são as massas das partículas que participam do loop. Uma expressão geral para a função I pode ser encontrada em [25]. No entanto esta pode ser expandida em torno de uma massa média $\bar{m} = \sqrt{m_i m_j}$:

$$I(m_i^2, m_j^2, m_V^2) = \sum_{m,n} \frac{C_{m,n}(x)}{\bar{m}^{2(1+m+n)}} (\Delta m_i^2)^m (\Delta m_j^2)^n$$

onde $\Delta m_{i,j}^2 = m_{i,j}^2 - \bar{m}^2$ e $x = m_V^2/\bar{m}^2$. Portanto, podemos reescrever a amplitude acima como:

$$\mathcal{M} = C \sum_{m,n} \frac{C_{m,n}(x)}{\bar{m}^{2(1+m+n)}} [V_{\alpha i}(\Delta m_i^2)^m V_{i\beta}^\dagger] [V_{\delta j}(\Delta m_j^2)^n V_{j\gamma}^\dagger] \quad (3.34)$$

Se as massas m_i e m_j forem aproximadamente degeneradas, ou seja, se $m_{i,j}^2 \approx \bar{m}^2$, então podemos manter apenas os primeiros termos da expansão acima. Porém, assumindo uma matriz de mistura V unitária, todos os termos com $m = 0$ ou $n = 0$ serão nulos exceto para

$\alpha = \beta$ ou $\delta = \gamma$. Supondo $\alpha \neq \beta$ e $\delta \neq \gamma$, o primeiro termo não nulo será:

$$\mathcal{M} = C \frac{C_{1,1}(x)}{m^6} [V_{\alpha i}(\Delta m_i^2) V_{i\beta}^\dagger] [V_{\delta j}(\Delta m_j^2) V_{j\gamma}^\dagger]$$

Mas, devido à unitariedade de V :

$$V_{\alpha i}(\Delta m_i^2) V_{i\beta}^\dagger = V_{\alpha i}(m^2 + \Delta m_i^2) V_{i\beta}^\dagger = V_{\alpha i}(m_i^2) V_{i\beta}^\dagger = (M^2)_{\alpha\beta}$$

onde M^2 é a matriz de massa (não diagonal) na base de sabor. Portanto, nesta aproximação, a matriz de amplitude será proporcional aos elementos não diagonais da matriz de massa (já que assumimos $\alpha \neq \beta$ ou $\delta \neq \gamma$):

$$\mathcal{M} = C \frac{C_{1,1}(x)}{m^6} (M^2)_{\alpha\beta} (M^2)_{\delta\gamma}$$

Logo, vínculos experimentais para processos representados por \mathcal{M} podem ser diretamente transformados em vínculos para os elementos de matriz não diagonais da matriz de massa.

Um exemplo bem conhecido do tipo de processo calculado acima é a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$. No Modelo Padrão, este processo ocorre através de diagramas como os mostrados na Figura 3.2. A diferença de massa entre os estados K_L e K_S é dada por [26, 24]:

$$\Delta m_K = 2Re\langle K^0 | H | \bar{K}^0 \rangle < 3.5 \times 10^{-12} \text{ MeV (valor experimental)}$$

Usando o acoplamento da Eq.(3.29) e aplicando a Eq.(3.34) para a contribuição do MSSM, temos [25]:

$$\Delta m_K \propto Re\left[C \sum_{m,n} \frac{C_{m,n}(x)}{\tilde{m}^{2(1+m+n)}} [(U_{uL}^\dagger V_{uL})_{1i} (\Delta \tilde{m}_i^2)^m (V_{uL}^\dagger U_{uL})_{i2}] [(U_{uL}^\dagger V_{uL})_{1j} (\Delta \tilde{m}_j^2)^n (V_{uL}^\dagger U_{uL})_{j2}] \right]$$

Assumindo que a matriz V_{uL} é unitária (ou seja, não existe mistura entre os squarks *left* e *right*), o que em geral é uma boa aproximação para a primeira e segunda geração de squarks, podemos utilizar os resultados acima:

$$\Delta m_K \propto \frac{1}{\tilde{m}^6} Re[(\tilde{M}_{\tilde{U}}^2)_{12} (\tilde{M}_{\tilde{U}}^2)_{12}] \quad (3.35)$$

Note que a matriz $\tilde{M}_{\tilde{U}}^2$ é a matriz de massa dos squarks \tilde{U}_L , na base em que a matriz de massa dos quarks é diagonal, já que:

$$\tilde{M}_{\tilde{U}}^2 = U_{uL}^\dagger V_{uL} \tilde{m}^2 V_{uL}^\dagger U_{uL}$$

Para $\tilde{m} = 500 \text{ GeV}$ e usando o limite experimental para Δm_K , o resultado acima implica em

[26]:

$$\frac{\text{Re}[(\tilde{M}_U^2)_{12}^2]}{\tilde{m}^4} \lesssim 10^{-2}$$

Logo, uma das formas de suprimir as contribuições do MSSM é assumir squarks pesados, de tal forma que $(\tilde{M}_U^2)_{12}/\tilde{m}^2 \ll 1$. Algumas análises mostram que para evitar os vínculos experimentais deveríamos ter $\tilde{m} \gtrsim 40$ TeV [27]. Como esta escala de massas só é necessária para os squarks da primeira e segunda geração e estes se acoplam fracamente com o Higgs, é possível que estes tenham massas acima de 1 TeV sem desestabilizar o potencial escalar.

Outra possibilidade, conhecida como universalidade, é assumir squarks degenerados ($\tilde{m}_i = \tilde{m}_0$ para todo i), de tal forma que:

$$(\tilde{M}_U^2)_{ij} = \tilde{m}_0^2 (U_{uL}^\dagger V_{uL} V_{uL}^\dagger U_{uL})_{ij} = \tilde{m}_0^2 \delta_{ij}$$

excluindo, assim, qualquer contribuição de termos fora da diagonal. Porém, se a matriz de massa dos squarks for proporcional à matriz de massa dos quarks:

$$V_{uL} \tilde{m}^2 V_{uL}^\dagger = \alpha M_U^2$$

$$\Rightarrow (\tilde{M}_U^2)_{ij} = \alpha (U_{uL}^\dagger M_U^2 U_{uL})_{ij} = \alpha m_i^2 \delta_{ij}$$

onde M_U é a matriz de massa dos quarks (não diagonal) e m_i são as massas dos quarks. Logo, o alinhamento entre as matrizes dos quarks e squarks anula as contribuições dos termos não diagonais.

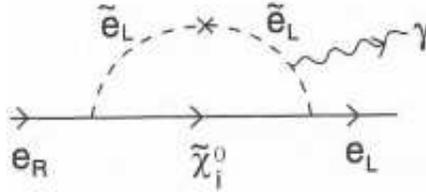


Figura 3.3: Contribuição do MSSM para o momento de dipolo elétrico do elétron.

Uma grande variedade de processos também permite vincular os elementos não diagonais tanto das matrizes de massa dos squarks e sléptons quanto das matrizes *soft* \tilde{A} . Em particular, processos envolvendo violação CP e contribuições para o momento de dipolo elétrico (ver Figura 3.3) impõe vínculos para as fases destas matrizes [26]. A alternativa mais comum para evitar tais vínculos é simplesmente assumir que os parâmetros *soft* sejam reais e universais. Apesar desta suposição restringir consideravelmente o espaço de parâmetros do MSSM, alguns modelos de quebra de supersimetria geram parâmetros *soft* reais e aproximadamente universais (ver Seção 4).

3.4.6 Unificação das Constantes de Acoplamento

Com as novas interações entre os bósons de gauge e os sférmions e gauginos do MSSM, podemos indagar como estas interações modificarão a evolução das constantes de acoplamento de gauge para altas energias. Como todas as novas superpartículas do MSSM devem possuir massas da ordem ou acima da escala GeV, as constantes g_s , g e g' se comportarão de maneira idêntica ao Modelo Padrão para energias inferiores à 1 GeV.

Em uma teoria de gauge não abeliana, a constante de acoplamento de gauge (g) evoluirá de acordo com a expressão [6, 11]:

$$\frac{dg^2}{dt} = \beta(g(t)) \quad (3.36)$$

onde β é a função beta, $t = \ln(Q/Q_0)$ e Q_0 é uma escala de referência. Para o grupo $SU(N)$, com férmions e escalares na representação fundamental, temos (em 1-loop) [11, 15]:

$$\beta(g(t)) = \frac{1}{8\pi^2} g^4 b_g$$

$$b_g = -\frac{11}{3}N + \frac{1}{3}n_f + \frac{1}{6}n_s \quad (3.37)$$

sendo n_f o número de férmions (onde as componentes *left* e *right* são contadas independentemente) e n_s o número de escalares complexos. Já para o grupo abeliano $U(1)$:

$$b_{g'} = \frac{2}{3} \sum_i \left(\frac{Y_i}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \sum_\alpha \left(\frac{Y_\alpha}{2}\right)^2 \quad (3.38)$$

onde a soma em i é sobre todos os férmions e em α sobre todos os escalares. Logo, para o Modelo Padrão:

$$b_{g_s} = -11 + 4 = -7$$

$$b_g = -\frac{22}{3} + \frac{12}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{19}{6}$$

$$b_{g'} = \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{10}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{41}{6}$$

Para o MSSM devemos adicionar as contribuições dos gauginos que pertencem à representação adjunta e dos sléptons, squarks e higgsinos, além de duplicar o número de dubletos escalares de Higgs. Portanto a Eq.(3.37) e a Eq.(3.38) se tornam [11]

$$b_g = -3N + \frac{1}{2}n_\Phi \text{ e } b_{g'} = \sum_\Phi \left(\frac{Y_\Phi}{2}\right)^2$$

onde Φ indica soma nos supercampos quirais e n_Φ é o número destes. Então:

$$b_{g_s} = -9 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = -3$$

$$b_g = -6 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$b_{g'} = 3 \times \frac{20}{6} + \frac{1}{2} \times 2 = 11$$

Resolvendo a Eq.(3.36) nos dois casos (SM e MSSM), podemos calcular como as constantes de acoplamento evoluem para altas energias. A Figura 3.4 mostra claramente que a convergência das constantes de acoplamento é muito mais satisfatória no MSSM do que no SM. Isto poderia indicar que para altas energias ocorre a unificação do grupo de gauge do MSSM. Usando os valores das constantes de acoplamento a baixas energias é possível calcular qual a escala de grande unificação (M_{GUT}). Da Figura 3.4 temos $M_{GUT} \approx 2.6 \times 10^{16}$ GeV. No entanto, este resultado pode ser radicalmente alterado caso existam novas partículas com massa inferior à M_{GUT} e que se acoplam ao grupo de gauge do Modelo Padrão.

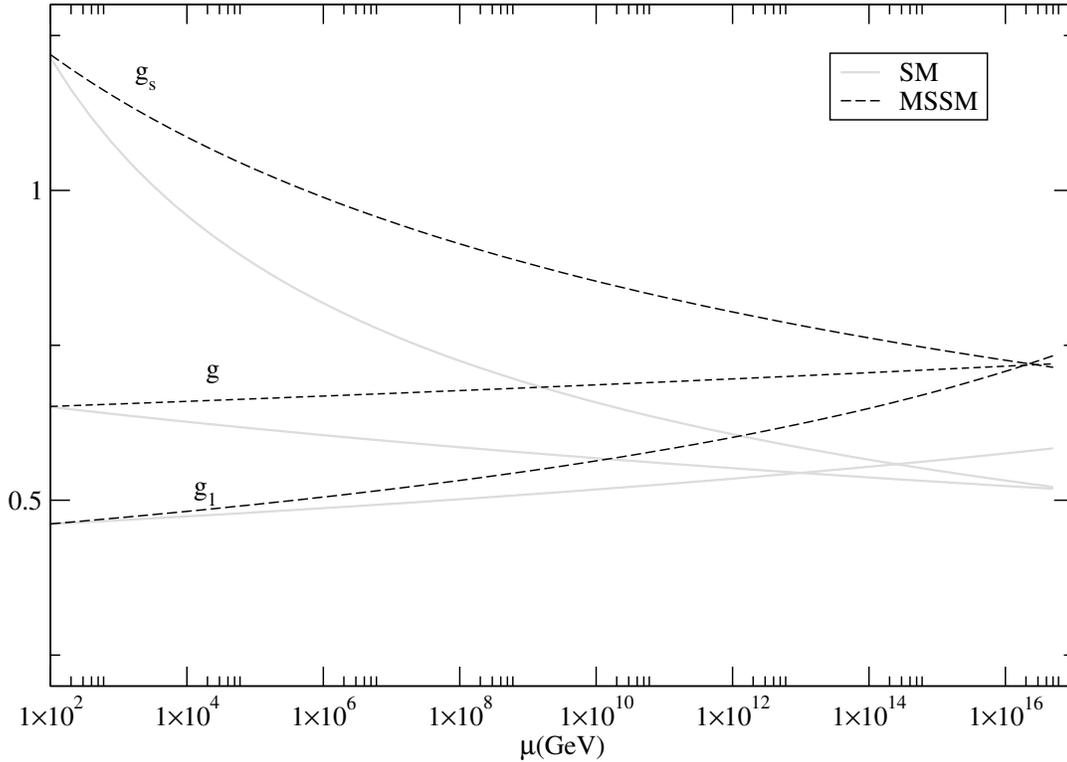


Figura 3.4: Evolução das constantes de acoplamento de gauge no Modelo Padrão e no MSSM, calculada utilizando-se a Eq.(3.36) em 1-loop. No gráfico $g_1 = g' \sqrt{5/3}$ (ver comentário na Seção 4.2).

Capítulo 4

Quebra de Supersimetria

Na Seção 3.4 vimos que para calcular os acoplamentos do MSSM é necessário conhecer (na maioria dos casos) as matrizes de mistura dos squarks, charginos, neutralinos, etc. Portanto, sem nenhuma hipótese sobre os parâmetros *soft*, análises fenomenológicas se tornam praticamente inviáveis. Muitos modelos tentam explicar a origem dos termos *soft* através da quebra espontânea de supersimetria, o que, em princípio, permite reduzir consideravelmente o número de parâmetros.

No entanto, os argumentos apresentados na Seção 3.2.2 mostram a dificuldade de uma quebra espontânea de supersimetria utilizando apenas os supercampos presentes no MSSM. Logo, diversos modelos propostos visam obter os termos *soft* através de uma extensão do MSSM com novos supercampos e interações. Estes permitiriam quebrar a supersimetria e obter os termos *soft*, evitando que a identidade $S\text{Tr}(m^2) = 0$ (ver Eq.(2.68)) implique, necessariamente, em superpartículas leves.

Mas para que isto seja possível, o setor onde ocorre a quebra espontânea de supersimetria deve possuir massas em uma escala muito superior à escala TeV, de tal forma que este setor desacople do MSSM. Por este motivo, o setor de quebra é chamado de setor escondido. Obviamente, em alguma escala de energia, o setor escondido deve se acoplar (direta ou indiretamente) com os supercampos do MSSM (setor visível), permitindo que a quebra de supersimetria seja sentida pelas partículas do setor visível. Além disso, como os termos *soft* devem estar na escala TeV, estes não podem refletir diretamente a escala do setor escondido. Portanto, o setor escondido e o setor visível devem interagir através de um terceiro setor, chamado de setor mensageiro. Estas interações devem ser relativamente fracas, de tal forma a gerar termos *soft* na escala TeV.

O mecanismo descrito acima é muito semelhante à quebra espontânea de simetria do Modelo Padrão, onde as partículas mais leves (elétron, quark up, etc) possuem massas muito inferiores à escala da quebra eletrofraca. Isto é possível devido às constantes de acoplamento de Yukawa, que suprimem a escala eletrofraca. Neste caso, o setor escalar (bóson de Higgs) faz o papel do setor escondido, enquanto os férmions leves representariam

o setor visível. No entanto, diferentemente do MSSM, estes dois setores podem se acoplar diretamente, já que não existe um análogo à Eq.(2.68) para o SM.

Da discussão acima, podemos afirmar que os termos *soft* serão tipicamente [9]:

$$m_{soft} \propto g_m \frac{1}{M_m} \Lambda_s^2 \quad (4.1)$$

onde Λ_s reflete a escala do setor invisível, M_m a escala do setor mensageiro e g_m é uma constante de acoplamento típica entre o setor mensageiro e o visível. Portanto, da Eq.(4.1) vemos que as interações do setor mensageiro com o setor visível constituem o fator mais importante para a determinação dos parâmetros *soft*. Teorias com quebra mediada por interações de gauge (GMSB) são exemplos típicos dos modelos citados acima.

Uma outra possibilidade é o uso de teorias com invariância por transformações supersimétricas locais (supergravidade ou SUGRA), que invalidam a Eq.(2.68) e possuem interações não renormalizáveis entre o setor visível e o escondido. Nestes modelos, os termos *soft* serão naturalmente pequenos (quando comparados à escala de quebra), já que são proporcionais à constante de acoplamento gravitacional (ou ao inverso da massa de Planck) [9]:

$$m_{soft} \propto \sqrt{G} \Lambda_s^2 = \frac{\Lambda_s^2}{M_P} \text{ ou } m_{soft} \propto G \Lambda_s^3 = \frac{\Lambda_s^3}{M_P^2}$$

onde M_P é a massa de Planck.

A necessidade de um setor escondido e de um setor mensageiro¹ para a obtenção de uma teoria realista é um importante aspecto de modelos supersimétricos, que os distingue radicalmente do Modelo Padrão. Este, apesar de ser considerado uma teoria efetiva, foi extremamente bem sucedido na explicação dos dados experimentais das últimas décadas, sem a necessidade de nenhuma suposição sobre escalas superiores de energia. Esta característica de modelos supersimétricos realistas, apesar de introduzir novos parâmetros de difícil acesso experimental, permite uma conexão mais direta entre a física atual (de baixas energias) e a física próxima da escala de Planck (ou da escala de Grande Unificação).

4.1 Quebra via SUGRA

Apesar de o setor escondido interagir fracamente com o setor visível, espera-se que a interação gravitacional acople diretamente os dois setores. Portanto, independentemente de como seja a quebra de supersimetria no setor escondido, espera-se que esta seja transmitida pelo setor visível através de interações gravitacionais. No entanto, devido à natureza da gravidade, tal interação é suprimida (pelo menos em uma teoria efetiva, não renormalizável) pela massa de Planck ($M_P \sim 10^{19}$ GeV) e, em geral, espera-se que não influa na física de baixas energias. Porém, se a escala da quebra de supersimetria estiver próxima da escala

¹Alguns modelos recentes (de quebra mediada por interações de gauge) conseguiram eliminar a necessidade de um setor mensageiro [28].

de Planck, as interações gravitacionais podem ser as principais mensageiras da quebra de supersimetria.

Se as simetrias do espaço-tempo forem representadas pelo supergrupo de Poincaré, as interações gravitacionais também devem ser supersimétricas e são chamadas de supergravidade (ou SUGRA). A lagrangeana da supergravidade pode ser obtida impondo-se a invariância por transformações supersimétricas locais. No entanto precisamos abrir mão da renormalizabilidade da teoria, já que a Relatividade Geral por si só não é renormalizável.

Por se tratar de uma teoria não renormalizável, a lagrangeana da supergravidade será da forma [15]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[K(\Phi^\dagger e^{2gVT}, \Phi)]_D - \frac{1}{2}[F(\Phi) + hc]_f - \frac{1}{4}[f_{AB}(\Phi)W^A W^A]_f$$

onde K , F e f_{AB} são funções arbitrárias dos supercampos. Obviamente estas funções devem manter a invariância de gauge da teoria. A função f_{AB} é chamada de função cinética de gauge e, no caso usual é dada por:

$$f_{AB}(\Phi) = \delta_{AB}$$

Já as funções K e F são a generalização do potencial de Kähler e do superpotencial para teorias não renormalizáveis. Em geral a lagrangeana dependerá destas duas funções e da função f_{AB} . Porém, pode-se mostrar [11] que a invariância por transformações supersimétricas locais reduz esta dependência à função f_{AB} e à combinação:

$$G = \frac{1}{M_P^2}K + \ln\left[\frac{|F(\Phi)|^2}{M_P^6}\right] \text{ (Função de Kähler)}$$

Além de todos os termos cinéticos e de interações de uma teoria supersimétrica global, a lagrangeana \mathcal{L}_{SUGRA} também envolve termos de interações com o supercampo gravitacional e novos termos de interação (não renormalizáveis) entre os supercampos quirais. O supercampo gravitacional compreende o gráviton e o gravitino, sendo este último um campo de spin $3/2$. O supercampo gravitacional pode ser interpretado como a versão supersimétrica do bóson de gauge, que surge quando impomos a invariância por transformações supersimétricas locais. A construção de uma teoria com supersimetria local será omitida aqui, já que apenas um esboço do mecanismo de quebra mediada por supergravidade será apresentado. A lagrangeana geral da supergravidade pode ser encontrada em diversas referências [15, 21, 11].

O termo de \mathcal{L}_{SUGRA} mais relevante para a discussão da quebra mediada por supergravidade é a parte do potencial escalar que no limite $M_P \rightarrow \infty$ e $f_{AB} \rightarrow \delta_{AB}$ resulta no potencial escalar usual. Este termo é dado por:

$$V_{SUGRA} = \mathbf{e}M_P^4 e^G [G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3] + \mathbf{e}\frac{g^2}{2} Re(f_{AB}^{-1}) [(G^i (T_A)_{ij} \phi_j) (G^k (T_B)_{kl} \phi_l)] \quad (4.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, $e = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$, T_A são os geradores do grupo de gauge e

$$G_i = \frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi_i^\dagger}, \quad G^j = \frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi_j} \quad e \quad (G^{-1})^i_j = \left(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j^\dagger} \right)^{-1}$$

Note que este termo permite (dependendo da função G) acoplamentos entre todos os campos escalares, inclusive entre campos do setor visível e do escondido.

Outra importante característica da Eq.(4.2) é que o potencial não é necessariamente positivo, já que temos pelo menos um termo negativo ($-3eM_P^4 e^G$). Logo, diferentemente do caso global, podemos ter quebra espontânea de supersimetria com $V > 0$, $V < 0$ ou $V = 0$ (em geral este último caso requer grande ajuste fino). Além disso, podem existir mínimos supersimétricos que não sejam mínimos globais.

De maneira análoga ao caso global, para que a supersimetria local seja quebrada espontaneamente, devemos ter:

$$\langle 0 | \delta\chi | 0 \rangle \neq 0 \quad \text{ou} \quad \langle 0 | \delta\lambda | 0 \rangle \neq 0$$

onde χ e λ são as componentes fermiônicas dos supercampos quirais e dos supercampos vetoriais, respectivamente. No entanto, as transformações locais dos campos χ e λ diferem do caso global. As condições acima podem ser reescritas como [15]:

$$\langle 0 | e^{G/2} (G^{-1})^i_j G_i | 0 \rangle \neq 0 \quad \text{ou} \quad \langle 0 | Re(f_{AB}^{-1}) G^i (T_B)_{ij} \phi_j | 0 \rangle \neq 0 \quad (4.3)$$

que são os análogos locais para as condições $\langle f \rangle \neq 0$ ou $\langle D \rangle \neq 0$. Na maioria dos casos as condições acima implicam $\langle G \rangle \neq 0$, de tal forma que o gravitino (ψ_μ) adquire massa m_g , através do acoplamento:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} M_P e^{G/2} \bar{\psi}_\mu \sigma^{\mu\nu} \psi_\nu &\rightarrow \frac{i}{2} M_P e^{\langle G \rangle / 2} \bar{\psi}_\mu \sigma^{\mu\nu} \psi_\nu \\ \Rightarrow m_g &= M_P e^{\langle G \rangle / 2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como citado anteriormente, o gravitino é o análogo supersimétrico dos bósons de gauge. Portanto o resultado acima nada mais é do que o análogo supersimétrico do mecanismo de Higgs, que neste caso gera massa para uma partícula de spin 3/2. Ou seja, o goldstino resultante da quebra espontânea de supersimetria é absorvido pelo gravitino, que se torna massivo.

Uma importante propriedade da quebra de supersimetria local é que a Eq.(2.68) não é mais válida, sendo modificada da seguinte forma [15]:

$$STr(m^2) = \sum_A [-2gTr(T_A)\langle D^A \rangle + 2(N-1)(2m_g^2 - \frac{\langle D^A \rangle^2}{M_P^2})] \quad (4.5)$$

onde N é o número de supermultipletos quirais da teoria. A Eq.(4.5) não mais resulta nos fortes vínculos impostos no caso de quebra de supersimetria global, permitindo diferenças

da ordem de m_g entre os férmions e seus superparceiros.

4.1.1 mSUGRA

Como discutido na secao anterior, por se tratar de uma teoria não renormalizável, a lagrangeana da supergravidade permite um número arbitrário de interações, que são definidas pelas escolhas das funções G e f_{AB} . O caso mais simples e que resulta em teorias realistas é conhecido como *Minimal Supergravity* (ou mSUGRA). Neste modelo assume-se a seguinte função de Kahler:

$$G = \frac{1}{M_P^2} \sum_i (|\Phi_i|^2 + |\tilde{\Phi}_i|^2) + \ln \left[\frac{|F(\Phi)|^2}{M_P^6} \right]$$

onde

$$F = F_0(\Phi) + F_h(\tilde{\Phi})$$

e Φ e $\tilde{\Phi}$ são os supercampos do setor visível e escondido, respectivamente. Note que o potencial de Kahler (K) não possui nenhum termo de mistura entre os dois setores. Isto pode ser justificado impondo-se uma simetria $U(1)$ e atribuindo-se cargas opostas para os campos Φ e $\tilde{\Phi}$. Da Eq.(4.2), temos que o potencial escalar resultante desta escolha será [15, 29]:

$$\begin{aligned} V(\phi, \tilde{\phi}) = & e^{\frac{1}{M_P^2}(|\phi|^2 + |\tilde{\phi}|^2)} \left[\left| \frac{\partial F_0(\phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{M_P^2} \phi^\dagger F(\phi, \tilde{\phi}) \right|^2 + \left| \frac{\partial F_h(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} + \frac{1}{M_P^2} \tilde{\phi}^\dagger F(\phi, \tilde{\phi}) \right|^2 \right. \\ & \left. - \frac{3}{M_P^2} |F(\phi, \tilde{\phi})|^2 \right] + \frac{g^2}{2} \text{Re}(f_{AB}^{-1}) [(\phi^\dagger T_A \phi)(\tilde{\phi}^\dagger T_B \tilde{\phi})] + \frac{\tilde{g}^2}{2} \text{Re}(f_{AB}^{-1}) [(\tilde{\phi}^\dagger T_A \tilde{\phi})(\phi^\dagger T_B \phi)] \end{aligned}$$

onde foram omitidos os índices dos campos e assumiu-se que os campos do setor escondido são singletos sob o grupo de gauge do setor visível. Para a obtenção da equação acima foi utilizada a invariância de gauge do superpotencial:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = \frac{\partial F}{\partial \phi_i} (T_A)_{ij} \phi_j = 0$$

Do potencial acima vemos que no limite $M_P \rightarrow \infty$ e $f_{AB} \rightarrow \delta_{AB}$ temos:

$$V_0(\phi, \tilde{\phi}) = \left| \frac{\partial F_0(\phi)}{\partial \phi} \right|^2 + \left| \frac{\partial F_h(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} \right|^2 + \frac{1}{2} (D^A)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{D}^A)^2$$

que representa o potencial do setores visível e escondido desacoplados². Logo todos os termos de interação entre os campos ϕ e $\tilde{\phi}$ são transmitidos via interação gravitacional e, portanto, são suprimidos por um fator da ordem da massa de Planck ($\sim 10^{19}$ GeV).

Assume-se que o potencial para os campos $\tilde{\phi}$ possua um mínimo local de tal forma que

²Onde \tilde{D}^A são os termos D para o setor escondido. A separação dos termos D em D^A e \tilde{D}^A é válida, já que $\tilde{\Phi}_i$ são singletos sob $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

a supersimetria local seja espontaneamente quebrada. Além disso, para que os efeitos da quebra espontânea sejam significativos, devemos ter *vevs* comparáveis à M_P , ou seja, a quebra espontânea deve ocorrer próximo à escala de Planck. Assim:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\phi} \rangle &= aM_P, \quad \left\langle \frac{\partial F_h(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} \right\rangle = m^2 \text{ e } \langle F_h(\tilde{\phi}) \rangle = bm^2 M_P \\ \Rightarrow \langle G \rangle &= a^2 + \ln\left[\frac{b^2 m^4}{M_P^4}\right]\end{aligned}$$

onde a e b são constantes da ordem de 1 e m representa outra escala de massa. Portanto, da Eq.(4.4):

$$m_g = e^{a^2/2} \left(\frac{bm^2}{M_P}\right)$$

Substituindo os campos do setor escondido por seus *vevs* e considerando apenas os campos do setor visível, teremos:

$$\begin{aligned}V_{ef}(\phi) &= \left| \frac{\partial F_0(\phi)}{\partial \phi_i} \right|^2 + \frac{1}{2}(D^A)^2 \\ m_g^2 |\phi_i|^2 + m_g [\phi_i \frac{\partial F_0(\phi)}{\partial \phi_i} + F_0(\phi)(a^2 - 3 + \frac{a}{b}) + hc]\end{aligned} \quad (4.6)$$

onde o superpotencial F_0 foi reescalado ($F_0 \rightarrow e^{-\frac{1}{2}a^2} F_0$), fez-se $M_P \rightarrow \infty$ com m_g mantido constante e $f_{AB} \rightarrow \delta_{AB}$. Para que o limite a baixas energias coincida com o MSSM, devemos fazer:

$$F_0(\phi) = F_{MSSM}(\phi)$$

onde F_{MSSM} é o superpotencial do MSSM. Portanto, da Eq.(4.6), temos os seguintes termos *soft*:

$$\begin{aligned}m_{soft}^2 &= m_g^2 \\ \tilde{A}_i &= m_g(a^2 + \frac{a}{b})\lambda_i \\ b &= \mu m_g(a^2 + \frac{a}{b} - 1)\end{aligned}$$

sendo λ_i os acoplamentos de Yukawa e m_{soft} as massas escalares *soft*. Portanto, comparando com a lagrangeana *soft* da Eq.(3.9):

$$\begin{aligned}m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = m_L^2 = m_Q^2 = m_E^2 = m_D^2 = m_U^2 &\equiv m_g^2 \\ \tilde{A}_u = \lambda_u A_0, \quad \tilde{A}_d = \lambda_d A_0, \quad \tilde{A}_l = \lambda_l A_0 \text{ e } b = \mu(A_0 - m_g)\end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $A_0 = m_g(a^2 + \frac{a}{b})$ é da ordem da massa do gravitino. As propriedades acima são usualmente conhecidas como **universalidade**³ dos parâmetros *soft* e é uma das conseqüências

³Um dos argumentos essenciais para a obtenção da universalidade é a suposição de um potencial de Kähler

favoráveis do mSUGRA. Como discutido anteriormente, a universalidade dos parâmetros *soft* inibe processos com violação de sabor. Como a relação entre os parâmetros b e A_0 não é válida para casos mais gerais (sobretudo em GUTs supersimétricas), costuma-se considerá-los como parâmetros independentes.

Até agora as modificações resultantes da imposição de uma supersimetria local só foram analisadas para o setor escalar. Porém, pode-se mostrar [15, 11] que a lagrangeana da supergravidade também possuirá termos do tipo:

$$\mathcal{L}_{SUGRA} = \frac{1}{4} e^{G/2} \frac{\partial f_{AB}^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger} (G^{-1})^i_j G^j \lambda^A \lambda^B + \dots$$

onde λ^A são gauginos. Logo, após a quebra espontânea (com $M_P \rightarrow \infty$ e m_g constante):

$$\frac{1}{4} e^{G/2} \frac{\partial f_{AB}^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger} (G^{-1})^i_j G^j \lambda^A \lambda^B \rightarrow \frac{1}{4} a m_g \sum_i \frac{\partial f_{AB}^\dagger}{\partial \phi_i^\dagger} \lambda^A \lambda^B$$

Desta forma a quebra mediada por supergravidade gera todos os termos *soft* da lagrangeana do MSSM⁴. Portanto, assim como os demais termos *soft*, a massa dos gauginos é da ordem de $m_g \sim m^2/M_P$.

Como a e b são da ordem de 1, para que os termos *soft* estejam na escala TeV devemos ter:

$$\frac{m}{M_P} \sim 10^{-9}$$

o que pode ser visto como um enorme ajuste fino. Porém, como m depende do superpotencial do setor escondido, não temos como estimar o que seria um valor natural neste caso.

Em muitas análises fenomenológicas simplificações adicionais são impostas, como a universalidade das massas dos gauginos:

$$(M_\lambda)_{AB} = \delta_{AB} M_{1/2}$$

Portanto, juntamente com os resultados anteriores, obtemos o seguinte espaço de parâmetros:

$$\{m_g, A_0, b_0, M_{1/2}\}$$

Resta ainda adicionar à lista acima o parâmetro μ da lagrangeana supersimétrica. Porém, a imposição da quebra eletrofraca permite reduzir este espaço de parâmetros. Usando a Eq.(3.14), a Eq.(3.15) e a Eq.(3.18), temos:

$$2b = (m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2) \tan 2\beta - m_z^2 \sin 2\beta \quad (4.8)$$

diagonal nos supercampos Φ e $\tilde{\Phi}$.

⁴Note que a função cinética de gauge (f_{AB}) não pode ser trivial ($f_{AB} = \delta_{AB}$), pois neste caso teríamos gauginos sem massa.

$$|\mu|^2 = \frac{1}{\cos 2\beta} (m_{H_u}^2 \sin^2 \beta - m_{H_d}^2 \cos^2 \beta) - \frac{1}{2} m_z^2 \quad (4.9)$$

Logo é possível determinar $|\mu|$ e b_0 em termos de $\tan\beta$ e m_z . Desta forma o conjunto de parâmetros livres serão:

$$\{\text{sinal de } \mu, m_g, A_0, \tan\beta, M_{1/2}\} \quad (4.10)$$

No entanto os parâmetros *soft* resultantes da quebra de supersimetria são válidos em uma escala próxima à escala de quebra ($M_s = M_P$ ou m), muito acima da escala eletrofraca. Logo, para realizar previsões para as energias acessíveis experimentalmente, é necessário evoluir todos os parâmetros da escala de quebra (M_s) até a escala eletrofraca, utilizando como condição de contorno a universalidade dos parâmetros (Eq.(4.7)). Esta evolução é realizada pelas equações do grupo de renormalização (RGEs) [30, 31]. No entanto, se existirem novos campos e interações (além do MSSM) entre a escala eletrofraca e a escala de quebra, as RGEs devem ser modificadas na escala dos novos campos. Como mostrado na Seção 3.4.6, a unificação das constantes de acoplamento de gauge sugere a existência de novas partículas na escala M_{GUT} . Então, entre as escalas M_{GUT} e M_P , as RGEs dependerão especificamente do modelo de Grande Unificação. Mas, devido à proximidade destas escalas, é razoável supor que as RGEs não sofram alterações significativas entre M_{GUT} e M_s . Portanto podemos impor as seguintes condições de contorno:

$$(m_L^2)_{ij} = (m_Q^2)_{ij} = (m_E^2)_{ij} = (m_D^2)_{ij} = (m_U^2)_{ij} \equiv m_0^2 \delta_{ij} |_{M_{GUT}}$$

$$m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 \equiv m_0^2 |_{M_{GUT}}$$

$$\tilde{A}_u = \lambda_u A_0 |_{M_{GUT}}, \tilde{A}_d = \lambda_d A_0 |_{M_{GUT}}, \tilde{A}_l = \lambda_l A_0 |_{M_{GUT}}$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_{1/2} |_{M_{GUT}}$$

$$b = b_0 |_{M_{GUT}}$$

onde $|_{M_{GUT}}$ indica que estas condições de contorno são válidas na escala de Grande Unificação. Esta relativa simplicidade justifica o nome desta classe de modelos (*Minimal Supergravity*).

A evolução de alguns dos parâmetros acima está representada nas Figuras 4.1 e 4.2. O resultado apresentado corresponde à um cálculo aproximado, onde todas as RGEs são calculadas em 1-loop, foram desprezados efeitos de limiar e foi utilizado o potencial escalar em nível de árvore para o cálculo dos parâmetros μ e b .

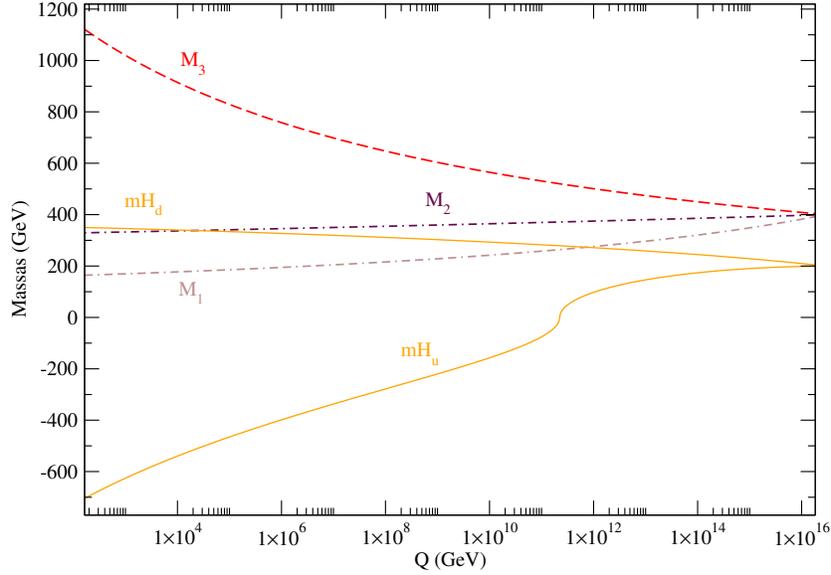


Figura 4.1: Evolução de alguns parâmetros *soft* (plotados como $\text{sign}[m_{soft}^2]\sqrt{|m_{soft}^2|}$) para o modelo mSUGRA com $\tan\beta = 3$, $M_{GUT} = 2.9 \times 10^{16}$ GeV, $M_{1/2} = 400$ GeV, $m_0 = 200$ GeV, $A_0 = b_0 = 0$, $\mu > 0$ e $m_t = 178$ GeV. A região mostrada representa energias de M_{GUT} até m_z .

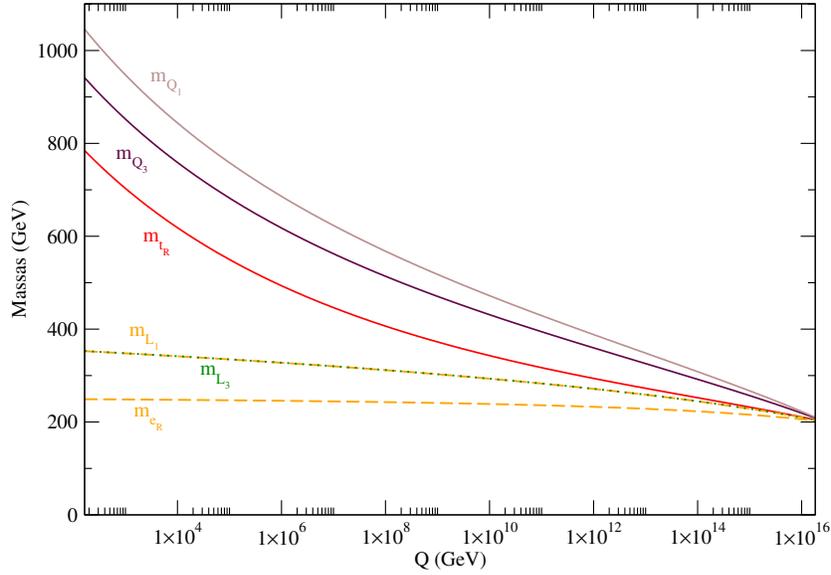


Figura 4.2: Evolução de alguns parâmetros *soft* (plotados como $\text{sign}[m_{soft}^2]\sqrt{|m_{soft}^2|}$) para o modelo mSUGRA com $\tan\beta = 3$, $M_{GUT} = 2.9 \times 10^{16}$ GeV, $M_{1/2} = 400$ GeV, $m_0 = 200$ GeV, $A_0 = b_0 = 0$, $\mu > 0$ e $m_t = 178$ GeV. A região mostrada representa energias de M_{GUT} até m_z .

Da Figura 4.1 vemos que a massa *soft* $m_{H_u}^2$ se torna negativa para energias próximas à

10^{11} GeV, possibilitando assim a quebra eletrofraca (ver Eq.(3.16)). Já as massas *soft* dos gauginos (em geral os gauginos não são auto-estados de massa) obedecem à mesma evolução das constantes de acoplamento de gauge, mantendo assim a hierarquia de massas: $M_3 > M_2 \gtrsim M_1$. De fato pode-se mostrar que

$$\frac{d(M_i/g_i^2)}{d \ln[\frac{Q}{Q_0}]} = 0$$

onde Q e Q_0 são diferentes escalas de energia.

Para as massas dos sférmions vemos que apesar de a condição inicial impor universalidade, esta degenerescência é perdida após a evolução para baixas energias. Isto se deve principalmente às diferenças entre as constantes de acoplamento de gauge e Yukawa. Em 1-loop, as constantes de Yukawa contribuem positivamente para a evolução das massas, enquanto as constantes de gauge contribuem negativamente [30, 11]:

$$\frac{dm^2}{dt} = A(t)\lambda(t)^2 - Bg_i^2|M_i^2| + \dots$$

onde $t = \ln(Q/Q_0)$ e A e B dependem dos demais parâmetros *soft*. Para os squarks, a contribuição proveniente dos acoplamentos de gauge é dominante e resulta em um aumento das massas *soft* quando estas são evoluídas para baixas energias. Como o acoplamento de Yukawa é maior para a terceira geração, temos que as massas das gerações terão uma hierarquia invertida, ou seja, a massa *soft* para o squark \tilde{u} será superior à do squark \tilde{t} , como pode ser visto na Figura 4.2.

Já para os sléptons a contribuição dos acoplamentos de gauge é proporcional apenas às constantes g e g' e apesar de ainda serem dominantes resultam em massas inferiores às dos squarks. Esta contribuição é ainda mais desprezível para o parâmetro m_E^2 que só recebe correções proporcionais às g' .

Após a evolução de todos os parâmetros até baixas energias (escala eletrofraca), devemos diagonalizar as matrizes de massa (calculadas anteriormente) para obter os auto-estados de massa da teoria. Assumindo um ponto no espaço de parâmetros (Eq.(4.10)) obtemos o seguinte espectro de massas para o modelo mSUGRA:

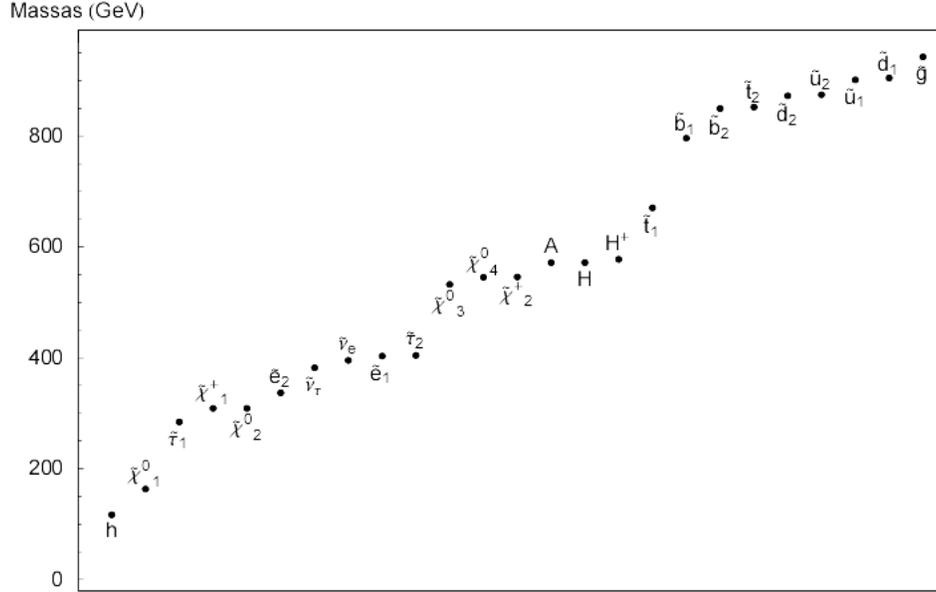


Figura 4.3: Espectro de massas para o modelo mSUGRA (desprezando o gravitino e a segunda geração) com $\{\text{sinal de } \mu, m_0, A_0, \tan\beta, M_{1/2}\} = \{> 0, 300 \text{ GeV}, 0, 30, 400 \text{ GeV}\}$ e com $m_{top} = 178 \text{ GeV}$. Os valores foram obtidos utilizando o programa SuSpect [32].

Como visto acima após o Higgs mais leve, temos o neutralino como a superpartícula mais leve do modelo. Após o primeiro neutralino, temos os sléptons e alguns charginos e neutralinos com massas semelhantes. Os sléptons da primeira e segunda geração são degenerados em massa, já que seus acoplamentos de Yukawa são desprezíveis. Em seguida temos outros neutralinos e charginos, além dos escalares de Higgs pesados (A , H e H^+). Mantendo a hierarquia entre sléptons e squarks, estes últimos estão entre os escalares mais pesados da teoria. Como citado acima isto se deve às contribuições dos acoplamentos de gauge para a evolução dos parâmetros *soft*. Portanto, sempre pode-se esperar que esta hierarquia seja mantida.

Um dos principais vínculos sobre o MSSM é a massa do escalar de Higgs mais leve (h). Como já discutido na Seção 3.3.2, os valores em nível de árvore para m_h são inaceitáveis experimentalmente, já que teríamos $m_h < m_z$. Nas Figuras 4.4 e 4.5 temos os valores de m_h e da superpartícula mais leve (χ_1^0) para diferentes valores de m_0 e $\tan\beta$. Como já citado, os valores de m_h obtidos são sempre superiores à m_z quando são incluídas as correções radiativas, tanto para os parâmetros *soft* quanto para o potencial escalar neutro (que induz correções nas matrizes de massa). Desta forma, evita-se que o MSSM seja completamente eliminado pelos dados experimentais atuais.

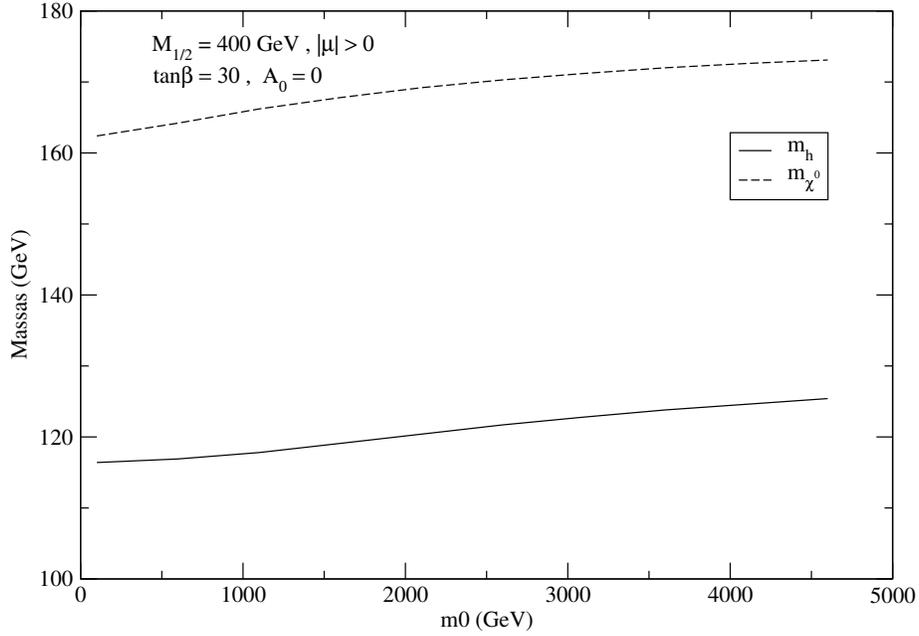


Figura 4.4: Valores para m_h e $m_{\chi^0_1}$ em função de m_0 . Os resultados foram obtidos utilizando-se o programa SuSpect [32].

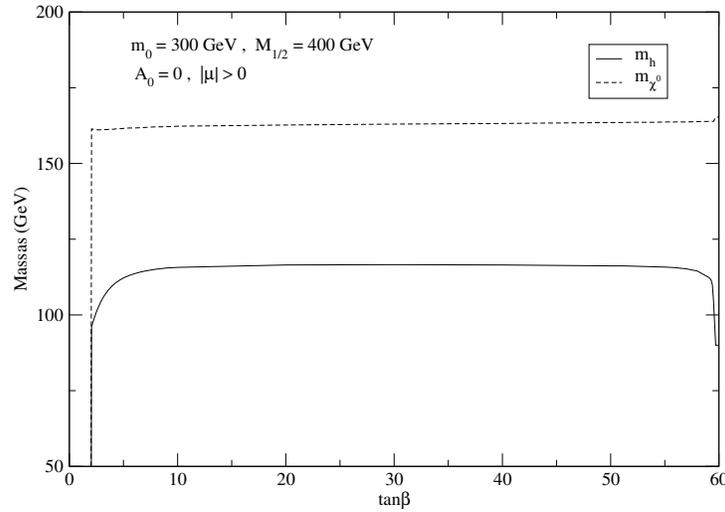


Figura 4.5: Valores para m_h e $m_{\chi^0_1}$ em função de $\tan\beta$. Os resultados foram obtidos utilizando-se o programa SuSpect [32].

Para os parâmetros da Figura 4.3, podemos calcular o valor de $|\mu|$ através da imposição da quebra eletrofraca. Neste caso temos $|\mu| = 526.9$ GeV, valor próximo de m_0 . Como pode-se ver nas Figuras 4.6 e 4.7, μ é aproximadamente constante para todo o espaço de parâmetros (impondo-se a quebra eletrofraca). Porém, por ser um parâmetro supersimétrico, espera-se

que μ reflita a escala supersimétrica. Ou seja, é natural supor que $\mu \sim M_{GUT} \gg 500$ GeV. Mas, como discutido na Seção 3.3.2 e mostrado nas Figuras 4.6 e 4.7, é essencial que o parâmetro μ seja ordem dos demais parâmetros *soft* (neste caso ~ 500 GeV) para que ocorra a quebra eletrofraca com valores aceitáveis de m_z .

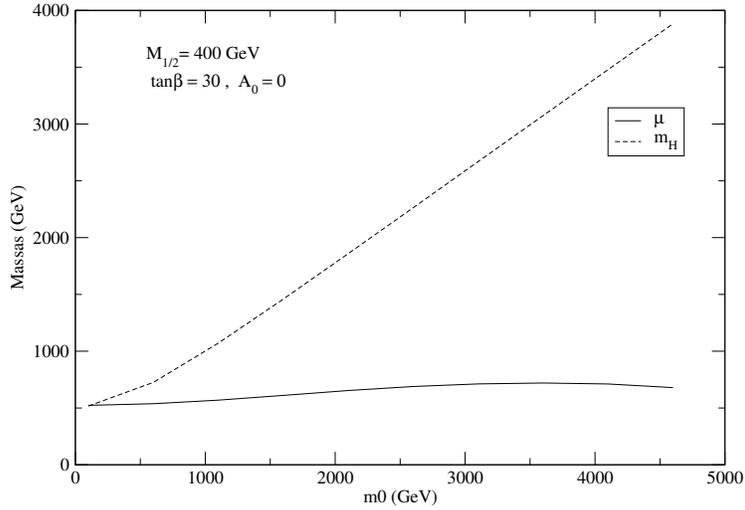


Figura 4.6: Valor do parâmetro μ e da massa do escalar de Higgs pesado (H) em função do parâmetro m_0 . Os valores foram obtidos utilizando o programa SuSpect [32].

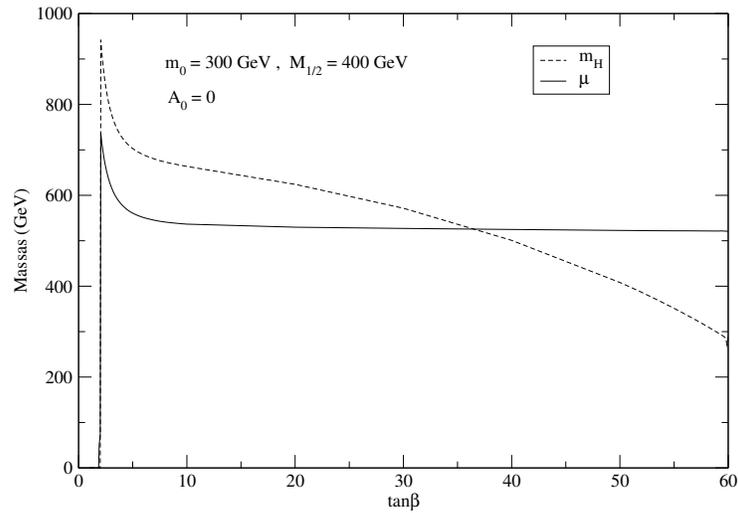


Figura 4.7: Valor do parâmetro μ e da massa do escalar de Higgs pesado (H) em função do parâmetro $\tan\beta$. Os valores foram obtidos utilizando o programa SuSpect [32].

Como o parâmetro μ é praticamente constante quando evoluído pelas RGEs, a única maneira de gerar $\mu \sim m_0$ na escala eletrofraca é ter $\mu \sim m_0$ na escala GUT. Para tal é

comum impor que μ também seja gerado através da quebra espontânea de supersimetria. No mSUGRA, isto pode ser resolvido facilmente se incluirmos acoplamentos do tipo:

$$K|_f = \frac{1}{M_P} \rho [\tilde{\Phi} H_u H_d] |_f \rightarrow \frac{1}{M_P} \rho \langle f_{\tilde{\Phi}} \rangle h_u h_d$$

resultando em $\mu = \frac{m^2}{M_P} \rho \sim m_g$, já que $\langle f_{\tilde{\Phi}} \rangle = \langle \frac{\partial F_h(\tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} \rangle \sim m^2$.

4.2 Quebra Mediada por Interações de Gauge

Nos modelos do tipo SUGRA, apesar de haver quebra espontânea de supersimetria, os vínculos entre as massas escalares provenientes de $STr(m^2) = 0$ são evitados abrindo-se mão da renormalizabilidade. Como estes vínculos são derivados da lagrangeana supersimétrica (renormalizável) em nível de árvore, eles também podem ser evitados se a quebra espontânea no MSSM só ocorrer através de correções quânticas. Isto pode ser realizado se incluirmos novos supercampos ($\tilde{\Phi}$, $\tilde{\bar{\Phi}}$) que não sejam singletos sob o grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Desta forma a quebra no setor escondido pode ser transmitida através das interações de gauge, compartilhadas pelo setor mensageiro e os campos do MSSM. Em geral assume-se que $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\bar{\Phi}}$ pertençam à uma representação vetorial (e sua adjunta), de tal forma que estes campos possuam termos de massa muito acima da escala eletrofraca e ao mesmo tempo não alterem a unificação das constantes de acoplamento a altas energias. Além disso, assumiremos o seguinte termo de interação entre o setor escondido (S) e o mensageiro:

$$F_{ms} = \lambda_n S \tilde{\Phi}_n \tilde{\bar{\Phi}}_n$$

Após a quebra espontânea de simetria, temos:

$$\langle f_S \rangle = f_0 \text{ e } \langle \phi_S \rangle = \phi_0, \text{ com } f_0, \phi_0 \neq 0$$

onde f_S e ϕ_S são as componentes f e escalar do supercampo S . Neste caso, as componentes escalares ($\tilde{\phi}_n, \tilde{\bar{\phi}}_n$) e espinoriais ($\tilde{\chi}_n, \tilde{\bar{\chi}}_n$) dos supercampos $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\bar{\Phi}}$ possuirão as seguintes matrizes de massa:

$$(m_{\tilde{\chi}})_{nm} = \frac{\partial^2 F_{ms}(\phi_0, f_0)}{\partial \tilde{\phi}_n \partial \tilde{\bar{\phi}}_m} = \lambda_n \phi_0 \delta_{mn} \quad (4.11)$$

$$(m_{\tilde{\phi}}^2) = \begin{pmatrix} |\lambda_n \phi_0|^2 & f_0 \lambda_n \\ f_0^* \lambda_n^* & |\lambda_n \phi_0|^2 \end{pmatrix}$$

A diagonalização da matriz de massa para os escalares resulta em dois auto-estados com as massas:

$$M_{1,2}^2 = |\lambda_n \phi_0|^2 \pm |f_0 \lambda_n| \quad (4.12)$$

Para que as massas acima sejam positivas, ϕ_0 e f_0 devem satisfazer:

$$|\lambda_n \phi_0|^2 \geq |f_0| \quad (4.13)$$

Note que para os campos mensageiros o supertraço das massas deve ser nulo, já que não há quebra de supersimetria por termos de *Fayet-Iliopoulos* e que a quebra espontânea de simetria ocorre em nível de árvore. De fato, termos:

$$M_1^2 + M_2^2 - 2m_\chi^2 = 0$$

Devido à falta de um termo de interação direta entre o setor escondido e o visível, este último não sente os efeitos da quebra espontânea de simetria em nível de árvore. No entanto correções quânticas permitem que os efeitos da quebra no setor escondido sejam transmitidos para o setor visível através do setor mensageiro. Esta transmissão só é possível através dos bósons de gauge e gauginos, já que estes são os únicos campos comuns entre o setor mensageiro e os supercampos do MSSM. As interações entre o setor mensageiro e os gauginos ocorrem através de termos do tipo:

$$\tilde{\phi}_n^\dagger (g_s \tilde{g}^c T_{3c}^{(n)} + g \tilde{W}^a T_{2a} + g' \tilde{B} T_1^{(n)}) \tilde{\chi}_n$$

onde \tilde{g} , \tilde{W} e \tilde{B} são os gluinos, winos e bino do MSSM e $T_k^{(n)}$ é a representação do grupo de gauge ($k = 1, 2, 3$, para $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, respectivamente) à qual pertence os supercampos $\tilde{\Phi}_n$. Estas interações geram as seguintes correções para a massa dos gauginos (ver Figura 4.8) [9]:

$$M_A^{(k)} = \sum_n g_k^2 (T_{kA}^{(n)})_{ij} (T_{kA}^{(n)})_{ji} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Sigma_n(q) = \frac{g_k^2}{16\pi^2} \sum_n \text{Tr}[T_{kA}^{(n)2}] \frac{|f_0|}{|\phi_0|} g\left(\frac{|f_0|}{|\lambda_n| |\phi_0|^2}\right)$$

onde

$$g(x) = \frac{1}{2x^2} [(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] \quad (4.14)$$

e $M_A^{(k)}$ é a massa do gaugino A pertencente ao grupo k . Assumindo que os geradores de cada grupo estão normalizados, ou seja, $\text{Tr}[T_{kA}^{(n)} T_{kB}^{(n)}] = N_k^{(n)} \delta_{AB}$, temos:

$$M_A^{(k)} = \frac{g_k^2}{16\pi^2} \sum_n N_k^{(n)} \frac{|f_0|}{|\phi_0|} g\left(\frac{|f_0|}{|\lambda_n| |\phi_0|^2}\right)$$

Ou seja, as massas dos gauginos são degeneradas entre gauginos do mesmo grupo (o que é esperado devido à simetria de gauge).

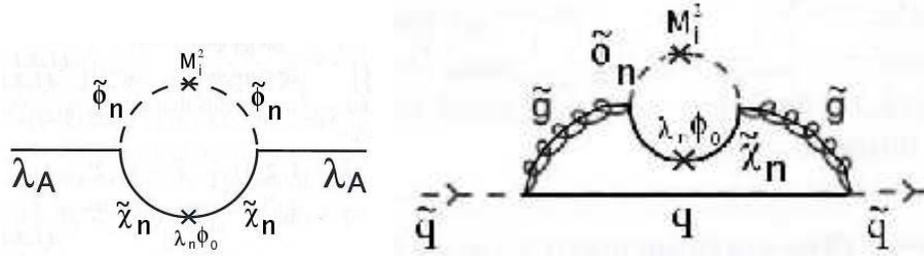


Figura 4.8: Alguns dos diagramas de 1-loop e 2-loop que geram massas para os gauginos e sférmions no mecanismo de GMSB.

De maneira análoga, as massas dos sférmions do setor visível sofrem correções devido à suas interações com os gauginos, através de diagramas de 2-loop⁵ (ver Figura 4.8). Como estas correções devem ser proporcionais às massas dos gauginos (pois, no limite supersimétrico, $M_A = 0$):

$$m_a^2 = \sum_{k,l} g_k^2 (T_{kl}^2)_{aa} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Pi(q) M^{(k)} = \sum_{n,k,l} \left(\frac{g_k^2}{16\pi^2} \right)^2 (T_{kl}^2)_{aa} N_k^{(n)} \int d^4 q \hat{\Pi}_n(q)$$

onde T_{kl} são os geradores das representações dos sférmions e todos os fatores não triviais do loop foram absorvidos em $\hat{\Pi}_n$. Para as representações do MSSM temos [9]:

$$SU(2) \rightarrow \sum_l (T_{2l}^2)_{aa} = \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right)_{aa} = \frac{3}{4}$$

$$SU(3) \rightarrow \sum_l (T_{3l}^2)_{aa} = \sum_{c=1}^8 \left(\frac{\lambda^c}{2} \frac{\lambda^c}{2} \right)_{aa} = \frac{4}{3}$$

$$U(1) \rightarrow \sum_l (T_{1l}^2)_{aa} = \left(\frac{Y^2}{4} \right)_{aa}$$

e

$$\int d^4 q \hat{\Pi}_n(q) = \frac{2|f_0|^2}{|\phi_0|^2} f\left(\frac{|f_0|}{|\lambda_n||\phi_0|^2}\right)$$

onde

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2} \left[\ln(1+x) - 2Li_2\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}Li_2\left(\frac{2x}{1+x}\right) \right] + x \leftrightarrow -x \quad (4.15)$$

e

$$Li_2(y) = - \int_0^y \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

⁵Note que as massas **quadradas** dos sférmions são geradas em 2-loop, de tal forma que os gauginos e sférmions têm massas da mesma ordem.

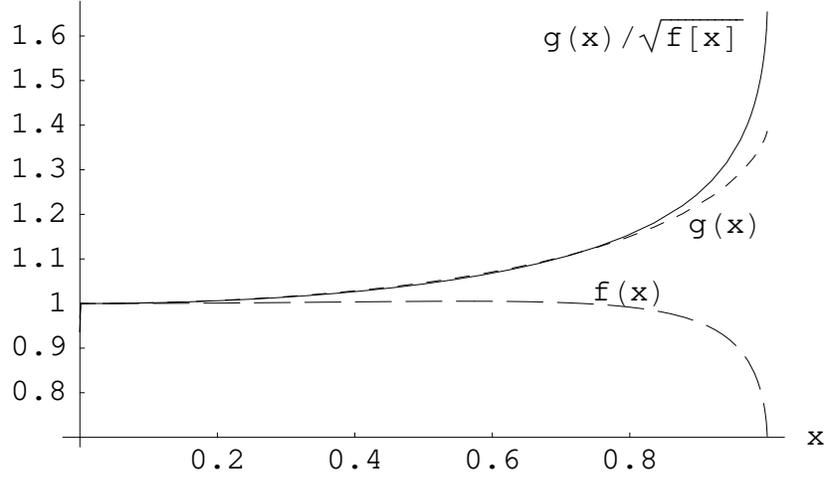


Figura 4.9: Gráfico das funções $f(x)$, $g(x)$ e $g(x)/\sqrt{f(x)}$, conforme definidas nas Eq.(4.15) e (4.14).

As funções f e g estão mostradas na Figura 4.9, onde pode-se ver que f e g só se distanciam de 1 para $x \gtrsim 0.8$, ou seja, para $f_0 \simeq \phi_0^2$. Por conveniência define-se:

$$M_k = \sum_n N_k^{(n)} \frac{|f_0|}{|\phi_0|} g\left(\frac{|f_0|}{|\lambda_n||\phi_0|^2}\right)$$

e

$$m_k^2 = \frac{|f_0|^2}{|\phi_0|^2} \sum_n N_k^{(n)} f\left(\frac{|f_0|}{|\lambda_n||\phi_0|^2}\right)$$

Assim:

$$M_A^{(k)} = \frac{g_k^2}{16\pi^2} M_k \text{ e } m_a^2 = 2 \sum_{k,l} \left(\frac{g_k^2}{16\pi^2}\right)^2 (T_{kl}^2)_{aa} m_k^2$$

Ou seja, os parâmetros $(\frac{g}{4\pi})^2 M_k$ e $(\frac{g}{4\pi})^2 m_k$ fornecem as escalas típicas para as massas dos gauginos e dos sférmions. Comparando estas escalas, obtemos:

$$\frac{M_k}{m_k} = \sqrt{\sum_n N_k^{(n)} \frac{g}{\sqrt{f}}}$$

Mas, da Figura 4.9:

$$1 \leq \frac{g}{\sqrt{f}} \leq 1.65$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_n N_k^{(n)}} \leq \frac{M_k}{m_k} \leq 1.65 \sqrt{\sum_n N_k^{(n)}}$$

Logo o efeito do aumento da razão $\frac{|f_0|}{|\lambda_n||\phi_0|^2}$ é simplesmente aumentar as massas dos gauginos

e reduzir a dos sférmions. Assumindo $f = g = 1$ (ou $f_0 < \phi_0^2$) e definindo $M = \frac{|f_0|}{|\phi_0|}$, obtemos os seguintes termos *soft*:

$$m_Q^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{4}{3} N_3^{(n)} + \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{3}{4} N_2^{(n)} + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 N_1^{(n)} \right]$$

$$m_U^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{4}{3} N_3^{(n)} + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 N_1^{(n)} \right]$$

$$m_D^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{4}{3} N_3^{(n)} + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 N_1^{(n)} \right]$$

$$m_L^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{3}{4} N_2^{(n)} + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 N_1^{(n)} \right]$$

$$m_E^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 (1)^2 N_1^{(n)} \right]$$

e

$$M_1 = \frac{g'^2}{16\pi^2} M \sum_n N_1^{(n)}$$

$$M_2 = \frac{g^2}{16\pi^2} M \sum_n N_2^{(n)}$$

$$M_3 = \frac{g_s^2}{16\pi^2} M \sum_n N_3^{(n)}$$

onde a soma é sobre as representações do setor mensageiro ($\tilde{\Phi}_n$) e os termos *soft* seguem a notação da Eq.(3.9).

Em geral, a introdução de campos mediadores em representações quaisquer do grupo de gauge do MSSM influi na evolução das constantes de acoplamento para altas energias. Como resultado, a unificação das mesmas na escala de Grande Unificação é perdida. Portanto é comum impor que o multipletto dos campos mediadores forme uma representação completa de um único grupo de gauge G , que é o grupo da GUT. Desta forma, mantém-se a unificação das constantes de acoplamento para altas energias e, conseqüentemente:

$$\sum_n \frac{3}{5} N_1^{(n)} = \sum_n N_2^{(n)} = \sum_n N_3^{(n)} = N$$

já que todos os geradores pertencem à G . O fator multiplicativo na frente de $N_1^{(n)}$ se deve ao fato de que a definição usual de hipercarga do Modelo Padrão possui uma normalização diferente da dos geradores do $SU(3)$ e $SU(2)$. Portanto, para que todos os geradores do $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ se unifiquem em um único grupo de gauge, é necessário redefinir a hipercarga, o que equivale a redefinir a constante de acoplamento g' .

Uma das grandes vantagens da quebra mediada por interações de gauge é que as massas

só dependem dos números quânticos das partículas, ou seja, não há distinção de geração. Obviamente este resultado ainda é válido após a evolução das constantes de acoplamento de gauge para a escala eletrofraca. No entanto correções radiativas também possuirão contribuições proporcionais à matrizes de Yukawa λ_u , λ_d e λ_l , que são responsáveis pela distinção entre gerações.

As massas dos dubletos de Higgs são geradas de maneira análoga às massas dos sférmions. Como os supercampos H_u e H_d possuem os mesmos números quânticos (exceto pelo sinal da hipercarga) do dubleto leptônico L , temos:

$$m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = 2M^2 \sum_n \left[\left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{3}{4} N_2^{(n)} + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 N_1^{(n)} \right]$$

Finalmente, como os acoplamentos trilineares só são gerados em diagramas com 3 loops e como têm dimensão de massa, estes representam correções de ordem superior para os termos *soft*, portanto é comum assumir $\tilde{A} = 0$. Desta forma todos os termos *soft* são dados pelos parâmetros:

$$\{M, m_M, N, \tan\beta \text{ e sinal de } \mu\}$$

já que, assim como na quebra via SUGRA, os parâmetros μ e b podem ser eliminados impondo-se a Eq.(4.8) e a Eq.(4.9). A inclusão da escala do setor mensageiro (m_M) é necessária, já que é nesta escala que são válidas as relações de massa obtidas acima. Este número reduzido de parâmetros é resultado do modelo simples adotado para o setor mensageiro e o escondido.

Apesar de a escala do setor mensageiro ser um dos parâmetros livres do GMSB, é simples obter alguns limites sobre a escala m_M . Das Eq.(4.11), Eq.(4.12) e Eq.(4.13) vemos que

$$m_M \sim |\lambda_n \phi_0| \text{ e } M = \frac{|f_0|}{|\phi_0|} < |\lambda_n \phi_0|$$

$$\Rightarrow M < m_M$$

Portanto, se m_M for pequeno temos necessariamente superpartículas leves. A Figura 4.10 mostra que devemos ter $m_M > 50$ TeV para evitar um neutralino e um bóson de Higgs muito leves. Por outro lado, para escalas muito elevadas de energia, efeitos gravitacionais se tornam relevantes. Como estes efeitos aumentam a mistura entre gerações e a probabilidade de processos com violação de sabor, é desejável impor que as contribuições provenientes das interações com o gravitino sejam pequenas. Supondo que estes efeitos sejam proporcionais à $\frac{|f_0|}{M_P}$ e impondo contribuições inferiores a 0.1%, temos [11]:

$$\frac{|f_0|}{M_P} < 10^{-5} M \Rightarrow |\phi_0| < 10^{-5} M_P \approx 10^{14} \text{ GeV}$$

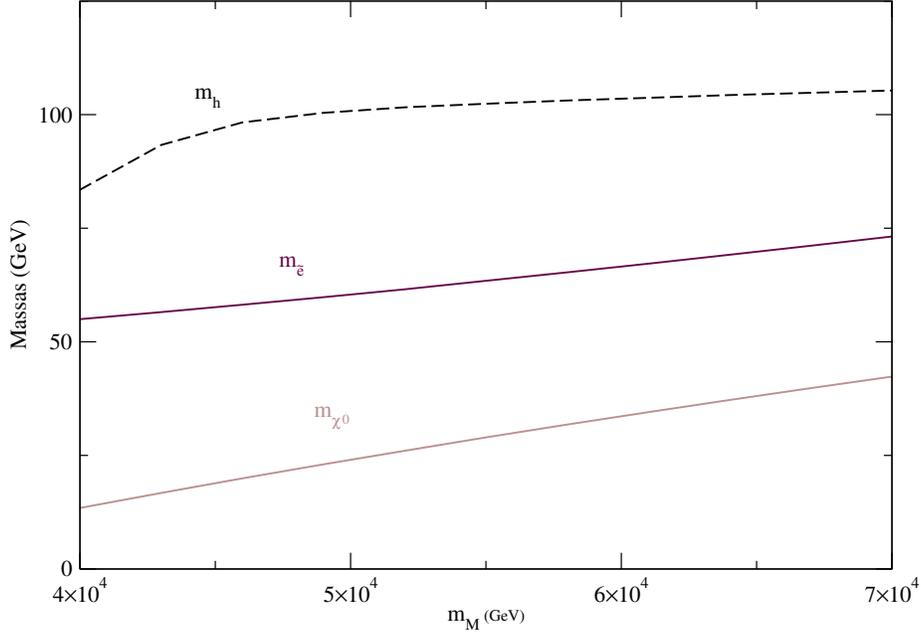


Figura 4.10: Valores das massas do Higgs (h) do neutralino e do selétron mais leve (\tilde{e}) em função da escala do setor mensageiro (m_M), com $N_5 = 1$, $\tan\beta = 15$, $\mu > 0$ e $M = m_M/2$. Os resultados foram obtidos através do programa SuSpect [32].

$$\Rightarrow m_M = \lambda\phi_0 < 10^{14} \text{ GeV}$$

Portanto, de maneira aproximada:

$$5 \times 10^4 \text{ GeV} < m_M < 10^{14} \text{ GeV} \quad (4.16)$$

Justamente por permitir uma escala de quebra muito inferior à massa de Planck, modelos com GMSB implicam em um gravitino leve. Como discutido na Seção 4.1, a massa do gravitino dependerá dos ν eus responsáveis pela quebra da supersimetria. Portanto, para quebra mediada por interações de gauge:

$$m_g \sim \frac{f_0}{M_P} \ll M$$

Ou seja, em modelos com GMSB o gravitino é a superpartícula mais leve. Porém, como o gravitino só interage através de interações gravitacionais, pode-se supor que decaimentos do tipo neutralino \rightarrow gravitino são fortemente suprimidos. No entanto, pode-se mostrar [11, 15] que as interações entre o gravitino e as outras partículas são proporcionais à $1/(m_g M_P) \sim 1/f_0$ e, portanto, podem se tornar relevantes se a escala de quebra supersimétrica for pequena.

4.2.1 mGMSB

O modelo realista mais simples com quebra mediada por interações de gauge é conhecido como mGMSB e consiste nas simplificações descritas anteriormente, assim como a suposição de que os campos mensageiros formam uma representação vetorial do grupo $SU(5)$. Desta forma preserva-se a unificação das constantes de acoplamento e tem-se $N = N_5$. Logo o espaço de parâmetros do mGMSB é dado por:

$$\{M, m_M, N_5, \tan\beta \text{ e sinal de } \mu\}$$

Na escala do setor mensageiro (m_M) temos as seguintes condições de contorno:

$$m_{\tilde{f}}^2 = 2M^2 N \left[\left(\frac{g_s^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{4}{3} \mathcal{T}_3 + \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{3}{4} \mathcal{T}_2 + \left(\frac{g'^2}{16\pi^2} \right)^2 \left(\frac{Y}{2} \right)^2 \frac{5}{3} \right]$$

$$M_k = \frac{g_k^2}{16\pi^2} M N_k \text{ e } \tilde{A} = 0 \quad (4.17)$$

onde, na Eq.(4.17), $m_{\tilde{f}}$ são as massas dos sférmions, M_k dos gauginos, $\mathcal{T}_i = 0(1)$ para singletos (não singletos) sob o grupo i , $N_k = N_5$ para os grupos $SU(3)$ e $SU(2)$ e $N_k = \frac{5}{3}N_5$ para $U(1)$.

O valor de N_5 , que é basicamente o número de pares $(\tilde{\Phi}_n, \bar{\tilde{\Phi}}_n)$ no setor mensageiro, está limitado pela imposição de que o regime perturbativo seja mantido até a escala GUT. Como o aumento de N_5 resulta em um aumento do valor de g e g' para altas energias, obtém-se [9, 11]:

$$\frac{g_k^2(M_{GUT})}{4\pi} < 1 \Rightarrow N_5 \leq 5$$

Desta forma podemos ter no máximo cinco pares $(\tilde{\Phi}, \bar{\tilde{\Phi}})$ na representação fundamental ($5 \times [5 + \bar{5}]$) ou um par de decupletos e dois pares na representação fundamental ($[10 + \bar{10}] + 2 \times [5 + \bar{5}]$).

Como discutido anteriormente, as condições de contorno da Eq.(4.17) devem ser evoluídas da escala m_M até a escala eletrofraca para que seja possível uma análise fenomenológica. No entanto, como m_M pode estar apenas algumas ordens de grandeza acima da escala eletrofraca, os efeitos da evolução serão muito menores do que no modelo mSUGRA. Como mostrado na Figura 4.11, apesar de termos $m_{H_u} = m_{H_d}$ na escala do setor mensageiro e esta ser muito menor do que a escala GUT, ainda é possível obter a quebra eletrofraca radiativa. Isto se deve ao acoplamento com os stops, pois [11]:

$$\frac{dm_{H_u}^2}{dt} = \frac{3}{8\pi^2} \lambda_t^2 (m_{Q_3}^2 + m_{t_R}^2) + \dots$$

Como os stops já são muito mais pesados que os Higgs na escala m_M , temos que m_{H_u} se torna rapidamente negativa.

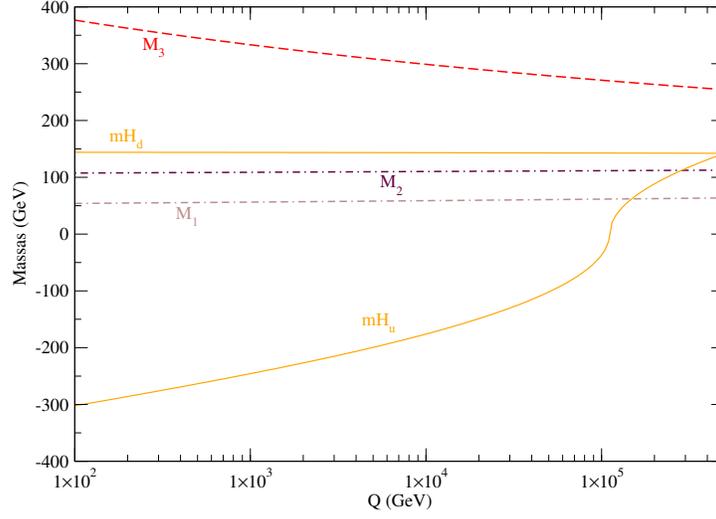


Figura 4.11: Evolução de alguns parâmetros *soft* (plotados como $\text{sign}[m_{soft}^2] \times \sqrt{|m_{soft}^2|}$) para o modelo mGMSB com $\tan\beta = 3$, $m_M = 5 \times 10^5$ GeV, $M = 4 \times 10^4$ GeV, $N_5 = 1$, $\mu > 0$ e $m_t = 178$ GeV. A região mostrada representa energias de m_M até m_z .

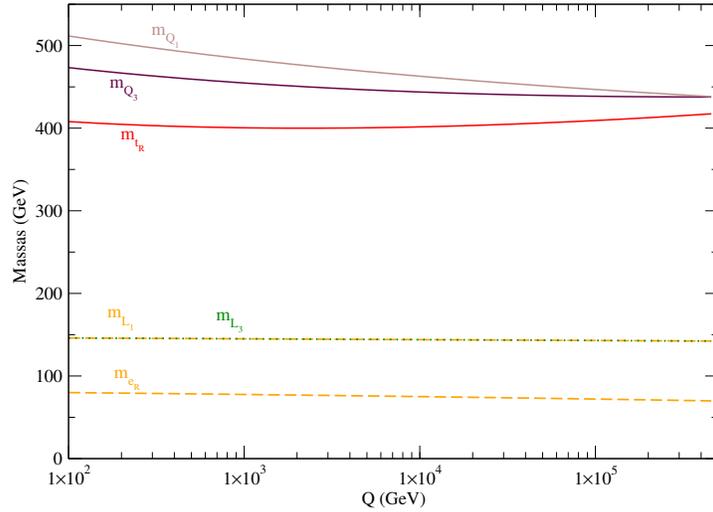


Figura 4.12: Evolução de alguns parâmetros *soft* (plotados como $\text{sign}[m_{soft}^2] \times \sqrt{|m_{soft}^2|}$) para o modelo mGMSB com $\tan\beta = 3$, $m_M = 5 \times 10^5$ GeV, $M = 4 \times 10^4$ GeV, $N_5 = 1$, $\mu > 0$ e $m_t = 178$ GeV. A região mostrada representa energias de m_M até m_z .

eletrofraca, onde esta comparação deve ser feita. A Figura 4.14 mostra a discrepância entre os valores “naturais” e aqueles calculados pela Eq.(4.8) e Eq.(4.9). Como esperado, eles diferem de algumas ordens de grandeza.

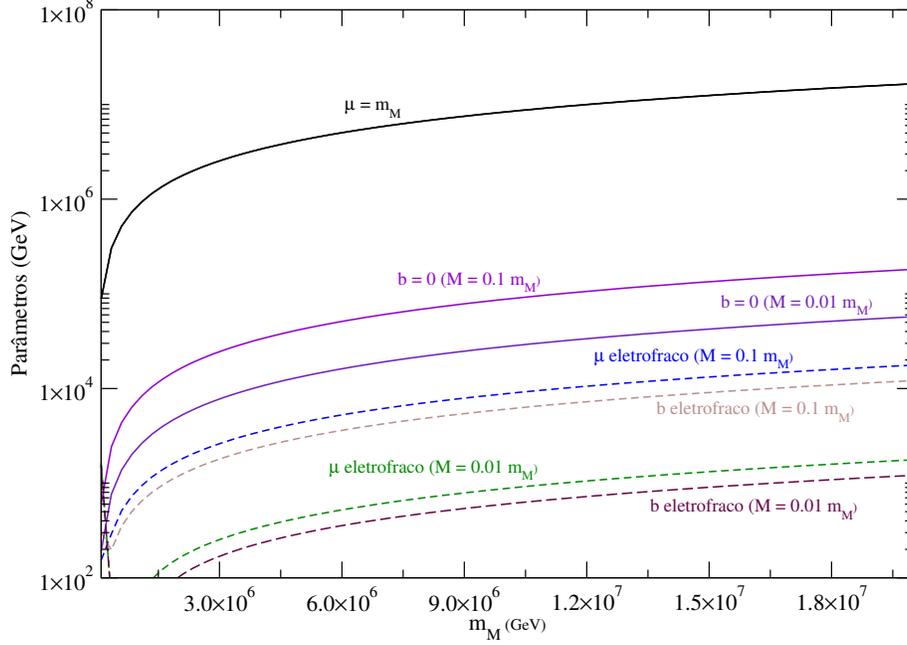


Figura 4.14: Valores dos parâmetros μ e b (linha cheia) na escala eletrofraca impondo $\mu = m_M$ e $b = 0$ (em m_M) e dos mesmos parâmetros impondo-se a quebra eletrofraca na escala GeV (linha tracejada) em função de m_M . As curvas foram calculadas para dois diferentes valores de M ($M = 0.1m_M$ e $M = 0.01m_M$). Assumiu-se $\tan\beta = 30$, $N_5 = 1$ e $\mu > 0$.

Assim como no mSUGRA, podemos tentar obter um valor de μ razoável supondo que o termo $\mu\epsilon_{\alpha\beta}H_u^\alpha H_d^\beta$ seja gerado através da quebra de supersimetria no setor escondido, assim como o termo *soft* b . Isto pode ser feito supondo o seguinte acoplamento no superpotencial:

$$W|_f = \epsilon_{\alpha\beta}\lambda_\mu(SH_u^\alpha H_d^\beta)|_f$$

este termo pode ser reescrito como:

$$W|_f = \epsilon_{\alpha\beta}\lambda_\mu f_S h_u^\alpha h_d^\beta + \epsilon_{\alpha\beta}\lambda_\mu \phi_S (H_u^\alpha H_d^\beta)|_f$$

onde f_S e ϕ_S são as componentes f e escalar do supercampo S , respectivamente. Como $\langle\phi_S\rangle = \phi_0$ e $\langle f_S\rangle = f_0$, comparando os termos acima com os termos μ e b , temos:

$$\mu = \lambda_\mu \phi_0 \text{ e } b = \lambda_\mu f_0$$

Portanto, se impusermos μ na escala dos demais parâmetros *soft*:

$$\mu \sim \frac{g_k^2}{16\pi^2} M = \frac{g_k^2}{16\pi^2} \frac{|f_0|}{|\phi_0|} \Rightarrow \lambda_\mu = \frac{g_k^2}{16\pi^2} \frac{|f_0|}{|\phi_0|^2} \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\mu} = \frac{|f_0|}{|\phi_0|} = M \gg 1$$

Ou seja, não é possível gerar termos μ e b da mesma ordem. Logo, das Eq.(3.16) e Eq.(3.17), obtemos uma massa para o bóson Z em grande desacordo com os dados experimentais. Outro problema é a necessidade de uma constante de acoplamento λ_μ extremamente pequena, o que não é natural. Portanto a solução para o *problema* μ em modelos com GMSB não é facilmente implementada, como no mSUGRA. Algumas extensões do mGMSB assumem um superpotencial com mais supercampos S e novos acoplamentos, visando reduzir o valor de b . Em geral, isto é possível se b só for gerado em ordens superiores. No entanto, para que isto ocorra novas simetrias discretas *ad hoc* devem ser impostas.

4.3 Vínculos Experimentais

Como discutido anteriormente, para que o Problema de Hierarquia seja resolvido pela supersimetria, as superpartículas devem possuir massas inferiores à ~ 10 TeV. Portanto, nos últimos anos diversos grupos têm buscado sinais de superpartículas em aceleradores. Até agora nenhum sinal positivo foi encontrado e os principais vínculos foram obtidos pelos experimentos ALEPH, DELPHI, L3 e OPAL [33, 34, 35], no LEP 2 e pelas colaborações CDF e DØ do Tevatron [36, 37].

A busca por superpartículas envolve análises dos novos processos permitidos pelo MSSM e dos respectivos *backgrounds* do Modelo Padrão. Em geral, estas análises assumem a conservação de Paridade R, que implica a produção de pares de superpartículas e a estabilidade da superpartícula mais leve (LSP). Logo, a principal assinatura de supersimetria é a falta de uma grande quantidade de momento transversal, carregado pela superpartícula mais leve, que normalmente não é detectada (já que na maioria dos casos a LSP é o neutralino ou o gravitino).

Como citado na Seção 3.4.5, além dos vínculos obtidos de buscas diretas, o espaço de parâmetros do MSSM também pode ser vinculado através de processos presentes no Modelo Padrão, mas que recebem contribuições significativas das novas interações presentes no MSSM. A seguir apresentaremos alguns dos vínculos sobre o espaço de parâmetros do MSSM, baseado no modelo mSUGRA. Os resultados apresentados aqui foram extraídos das referências [38, 39, 33, 40].

De acordo com a Seção 4.1.1, se assumirmos o modelo mSUGRA com $\mu > 0$, temos um

espaço de parâmetros 4-dimensional:

$$\{m_0, A_0, \tan\beta, M_{1/2}\}$$

Porém, pequenas mudanças nos parâmetros do Modelo Padrão podem alterar de maneira significativa os resultados. Logo, em muitas análises fenomenológicas é comum permitir que alguns parâmetros do SM variem em torno do valor experimental. Normalmente o parâmetro mais relevante é a massa do quark top (m_t), já que este afeta de maneira significativa a evolução dos parâmetros *soft* e as correções radiativas do Modelo Padrão. No entanto, em alguns casos também são relevantes os seguintes parâmetros [39]:

$$\{m_b(m_b), \alpha(m_z), \alpha_s(m_z)\} \quad (4.18)$$

onde $m_b(m_b)$, $\alpha(m_z)$ e $\alpha_s(m_z)$ são a massa do quark bottom, as constantes de acoplamento eletromagnética e a constante de acoplamento forte calculados nas escalas de energia indicadas através do esquema de renormalização \overline{MS} (*modified minimal subtraction* [6]). A Tabela 4.1 mostra os valores destes parâmetros e seu erro experimental.

Parâmetros do SM	Valor Médio	Desvio
m_t	172.7 GeV	2.9 GeV
$m_b(m_b)$	4.24 GeV	0.11 GeV
$\alpha_s(m_z)$	0.1186	0.002
$1/\alpha(m_z)$	127.958	0.048

Tabela 4.1: Valores experimentais de alguns dos parâmetros do Modelo Padrão e suas incertezas [38].

A Tabela 4.2 exibe os principais limites para as massas das superpartículas, provenientes dos experimentos do LEP 2 e do Tevatron. Como visto na Figura 4.15, estes limites podem ser relaxados para algumas regiões do espaço de fase. A massa do selétron, por exemplo, pode ser inferior à 100 GeV caso o neutralino e o selétron tenham praticamente a mesma massa. No entanto, assumiremos aqui que os vínculos da Tabela 4.2 são válidos. Como esperado, os vínculos mais restritivos são sobre as superpartículas que interagem fortemente (gluinos e squarks), enquanto os vínculos mais fracos são sobre as partículas neutras, que só interagem fracamente (neutralinos).

Superpartícula	Limite Inferior
$\tilde{\chi}^0$	50 GeV
$\tilde{\chi}_1^+$	103.5 GeV
\tilde{e}_1	100 GeV
$\tilde{\mu}_1$	95 GeV
$\tilde{\tau}_1$	87 GeV
$\tilde{\nu}$	94 GeV
\tilde{t}_1	95 GeV
\tilde{b}_1	95 GeV
$\tilde{u}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1$ e \tilde{s}_1	318 GeV
\tilde{g}	233 GeV

Tabela 4.2: Limites inferiores para algumas das massas das superpartículas, com 95% de C.L., obtidos pelos experimentos LEP 2 e Tevatron [38].

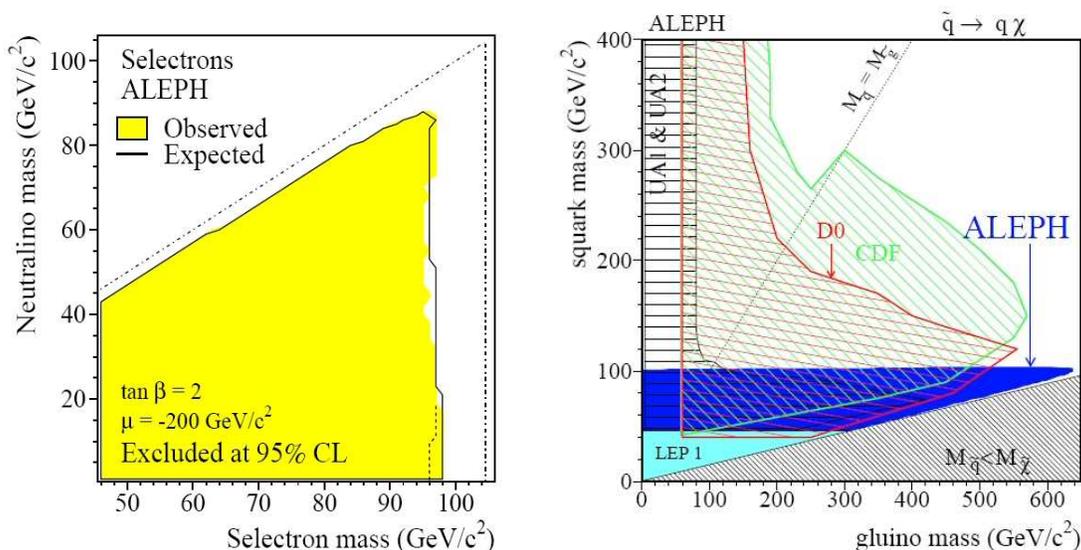


Figura 4.15: À esquerda, curvas de exclusão (com 95% C.L.) no plano $m_{\tilde{e}_R} - m_{\tilde{\chi}^0}$ para buscas diretas no LEP. A linha tracejada vertical mostra a região acessível ao LEP 2 ($\sqrt{s} = 209$ GeV), enquanto a linha tracejada diagonal delimita a região na qual o neutralino é a LSP [33]. À direita, curvas de exclusão (com 95% C.L.) no plano $m_{\tilde{q}} - m_{\tilde{g}}$ para buscas diretas de squarks no LEP e no Tevatron [40].

Os vínculos da Tabela 4.2 podem ser reescritos para os parâmetros do mSUGRA. A Figura 4.16 mostra a região permitida no plano $m_0 - M_{1/2}$ para dois valores de $\tan\beta$.

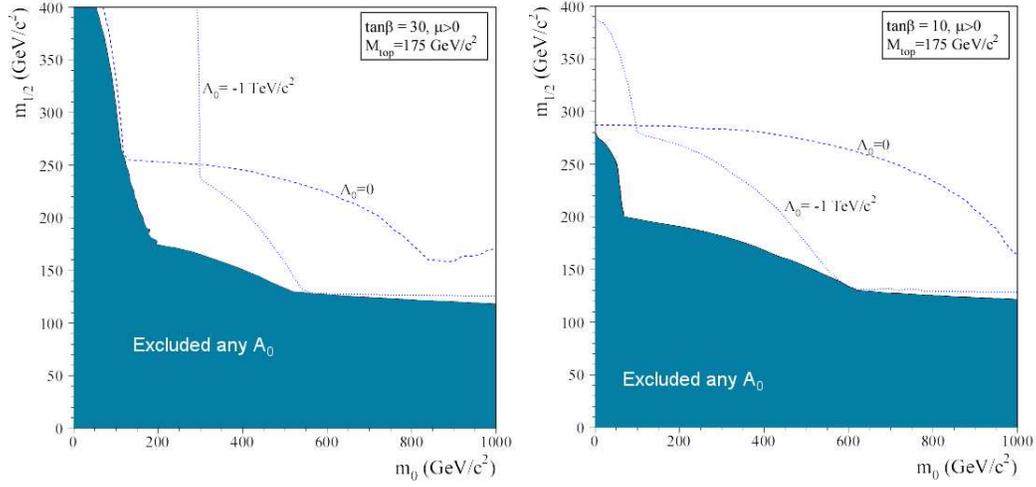


Figura 4.16: Região excluída no plano $m_0 = M_{1/2}$ para $\tan\beta = 10$ e 30 . As linhas tracejadas indicam as regiões excluídas para $A_0 = 0$ e $A_0 = -1$ TeV [40].

Os limites mostrados na Figura 4.16 podem ser melhorados se considerarmos as contribuições do MSSM para outros observáveis, como o momento magnético anômalo do múon ($a_\mu = (g_\mu - 2)/2$). A precisão experimental para a_μ é de cerca de 10 dígitos e portanto é extremamente sensível à correções radiativas que possam incluir partículas supersimétricas. O valor medido experimentalmente é [24]:

$$a_\mu^{exp} = (11659208 \pm 6) \times 10^{-10} e/2m_\mu$$

Já a previsão teórica do Modelo Padrão é [41]:

$$a_\mu^{SM} = (11659184 \pm 8) \times 10^{-10} e/2m_\mu$$

Portanto:

$$a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM} = \Delta a_\mu = (24 \pm 9) \times 10^{-10} e/2m_\mu$$

Ou seja, as contribuições do MSSM devem ser:

$$\delta a_\mu^{MSSM} \lesssim 20 \times 10^{-10} e/2m_\mu$$

o que pode ser usado para limitar o espaço de parâmetros do mSUGRA.

Também é possível vincular o mSUGRA utilizando medidas de precisão para massa do bóson W . Esta pode ser calculada teoricamente usando os valores experimentais para a constante de Fermi (G_F) e a massa do Z [42]:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8m_w^2 \left(1 - \frac{m_w^2}{m_z^2}\right)} (1 + \delta r)$$

onde δr representa correções radiativas. O valor experimental possui uma precisão de aproximadamente 0.04% ($m_w = 80.403 \pm 0.029$ GeV [24]), ou seja, de 29 MeV. Já as incertezas teóricas são dominadas pelo erro experimental da massa do quark top e são estimadas em ~ 13 MeV, o que ainda nos possibilita excluir contribuições do mSUGRA acima de 40 MeV.

Além dos observáveis citados acima, análises fenomenológicas normalmente incluem ainda a massa do Higgs (m_h), o seno de Weinberg efetivo ($\sin^2\theta_{eff}$) e os *branching ratios* $BR(\bar{B}_s \rightarrow X_s \gamma)$ e $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ [43, 44, 45, 46, 42]. Nos últimos anos todos estes vínculos têm sido utilizados para calcular quais pontos do espaço de parâmetros do mSUGRA são favorecidos pelos dados experimentais. Usualmente as análises são feitas fixando-se dois ou três parâmetros e variando os demais. No entanto, trabalhos recentes [39, 38] utilizam algoritmos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) para varrer simultaneamente todo o espaço de parâmetros. Desta forma, os resultados podem ser apresentados marginalizando-se todos os parâmetros, exceto os de interesse.

Seguindo a referência [38], apresentaremos alguns mapas de *likelihood* para o espaço de parâmetros do mSUGRA através de uma varredura realizada com o algoritmo MCMC. Além dos parâmetros do mSUGRA também foram consideradas variações nos parâmetros do Modelo Padrão listados na Eq.(4.18). Para tal assumiu-se uma *likelihood* gaussiana sem correlação entre os parâmetros. Os parâmetros do mSUGRA e do Modelo Padrão foram variados nos seguintes intervalos:

$$\{50 \text{ GeV}, -7 \text{ TeV}, 2, 50 \text{ GeV}\} < \{m_0, A_0, \tan\beta, M_{1/2}\} < \{4 \text{ TeV}, 7 \text{ TeV}, 62, 4 \text{ TeV}\} \quad (4.19)$$

$$\{127.5, 0.10\} < \{1/\alpha(m_z), \alpha_s(m_z)\} < \{128.5, 0.13\}$$

$$\{160 \text{ GeV}, 4 \text{ GeV}\} < \{m_t, m_b(m_b)\} < \{190 \text{ TeV}, 5 \text{ TeV}\} \quad (4.20)$$

A Figura 4.17 mostra os mapas de *likelihood* para o mSUGRA, onde foram levados em consideração os dados experimentais de todos os observáveis citados acima e os vínculos proveniente de medidas cosmológicas para a densidade de matéria escura⁶. A análise pode ser transformada diretamente em um mapa de probabilidades relativas para os parâmetros do mSUGRA, se assumirmos uma probabilidade *a priori* constante para os intervalos da Eq.(4.19) e da Eq.(4.20). Todos os parâmetros que não aparecem nos eixos (incluindo as incertezas nos parâmetros do SM) foram marginalizados.

⁶Aqui assume-se que o neutralino seja o responsável por toda a densidade de energia associada à matéria escura. Os resultados apresentados podem ser alterados se esta hipótese for modificada.

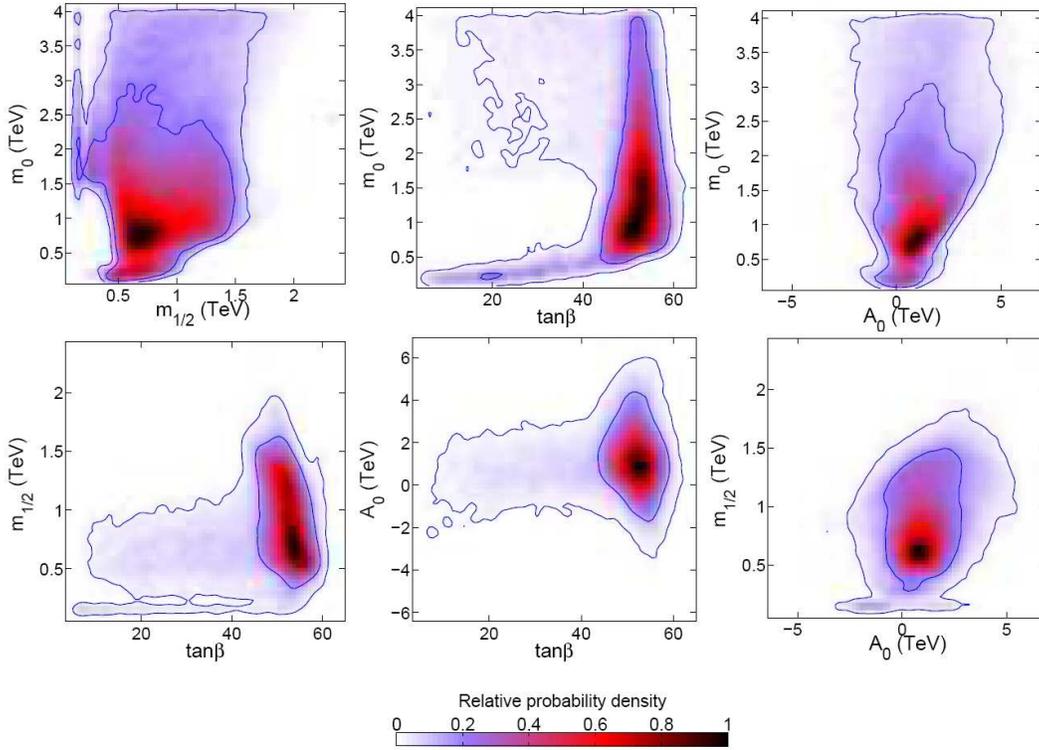


Figura 4.17: Mapas de *likelihood* para os parâmetros do mSUGRA construídos utilizando-se o algoritmo MCMC. As curvas interna e externa representam as regiões com 68% e 95% de probabilidade total, respectivamente. A escala de probabilidades relativas está representada a baixo, onde assumiu-se probabilidades *a priori* constantes para todos os parâmetros [38].

Como visto na Figura 4.17, o ponto de maior probabilidade para os parâmetros m_0 e $M_{1/2}$ (marginalizando os demais parâmetros) é:

$$\{m_0, M_{1/2}\} = \{0.8 \text{ TeV}, 0.7 \text{ TeV}\}$$

Além disso, vemos que valores de $M_{1/2}$ maiores que 1.5 TeV são fortemente desfavorecidos. Já a região de 95% C.L. (na primeira figura) se estende até $m_0 = 4$ TeV, que é o limite superior imposto pelo *a priori*. Ou seja, os dados experimentais não são suficientemente precisos para restringir significativamente m_0 e o limite superior obtido é simplesmente o resultado da escolha do *a priori*.

Por outro lado, o parâmetro A_0 demonstra claramente um máximo concentrado em torno de 0.8 TeV, que é praticamente independente dos demais parâmetros. Isto mostra como neste caso os resultados experimentais são suficientes para restringir o valor de A_0 , independentemente da escolha do *a priori*. As duas últimas figuras demonstram claramente que os dados experimentais preferem um valor de $\tan\beta$ próximo de 60 (como discutido na

Seção 3.3.2), já que neste caso temos um Higgs mais pesado.

Os vínculos experimentais apresentados até aqui correspondem aos resultados do LEP e do Tevatron, além de medidas de precisão e de processos com violação de sabor. As energias máximas alcançadas foram $\sqrt{s} = 0.209$ e 2 TeV para o LEP 2 e o Tevatron, respectivamente. Como visto, com estas energias foi possível excluir superpartículas com massas inferiores à ~ 100 GeV. No entanto, como discutido na Seção 3.1, análises de ajuste fino sugerem um limite superior de alguns TeV para as massas das superpartículas. A partir de 2008 o Large Hadron Collider (LHC) entrará em funcionamento com uma energia máxima no centro de massa de 14 TeV, o que possibilitará investigar uma região bem mais ampla de massas [47]. A Figura 4.18 mostra a região do plano $m_0 - M_{1/2}$ coberta pelo LHC após uma luminosidade total de 100 fb^{-1} . A região excluída para $m_0 \sim 0$ corresponde a um stau como a superpartícula mais leve, o que está excluído pelas observações cosmológicas. Já a região à direita está excluída por ser inconsistente com a quebra eletrofraca. Os limites de busca direta mostrados na Figura 4.16 estão representados pela região cinza.

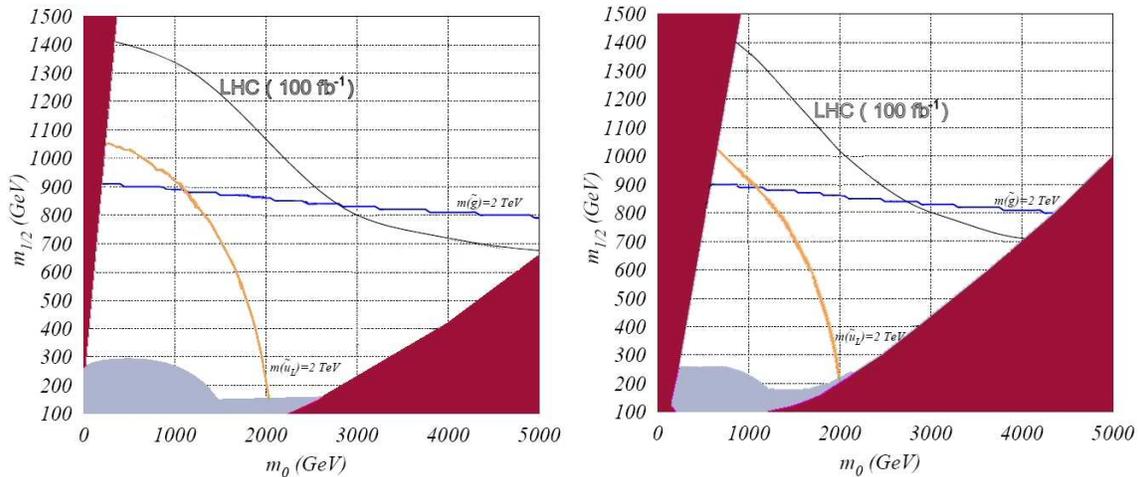


Figura 4.18: Região do mSUGRA investigada pelo LHC após uma luminosidade integrada total de 100 fb^{-1} , o que equivale a alguns anos de funcionamento. Na figura da esquerda assumiu-se $\tan\beta = 10$, $A_0 = 0$ e $\mu > 0$, enquanto na figura da direita $\tan\beta = 52$, $A_0 = 0$ e $\mu > 0$ [48].

A comparação entre as Figuras 4.16 e 4.18 nos permite ver como o LHC ampliará de maneira muito significativa a região de parâmetros verificada experimentalmente. No entanto, até que ponto podemos afirmar que o LHC pode excluir o mSUGRA? O único argumento para o MSSM na escala eletrofraca é o Problema de Hierarquia, que se baseia em uma análise de ajuste fino. Portanto, mesmo que nenhuma superpartícula seja detectada no LHC, isto obviamente não exclui o mSUGRA, mas este pode deixar de ser uma solução para o Problema de Hierarquia. A Figura 4.19 mostra a relação entre o plano $m_0 - M_{1/2}$ e o ajuste fino necessário para estabilizar a escala eletrofraca. Para o cálculo do ajuste fino foi

utilizada a expressão [19]:

$$c_a = \left| \frac{\partial \ln m_z^2}{\partial \ln a} \right|$$

onde a são os parâmetros do mSUGRA. Os valores mostrados na Figura 4.19 se referem à $c = \max\{c_a\}$. Apesar de não existir um consenso sobre qual a quantidade máxima de ajuste fino aceitável, alguns autores utilizam $c < 50$ para impor limites às massas das superpartículas [49, 19]. Portanto, como mostrado pela curva tracejada, se nos primeiros anos de funcionamento não houver nenhum sinal positivo para o mSUGRA, o ajuste fino necessário para que a escala eletrofraca seja da ordem de 100 GeV excederá em muito o limite $c = 50$. Por este motivo muitos consideram o LHC como o experimento decisivo para o MSSM, se este pretende resolver o Problema de Hierarquia.

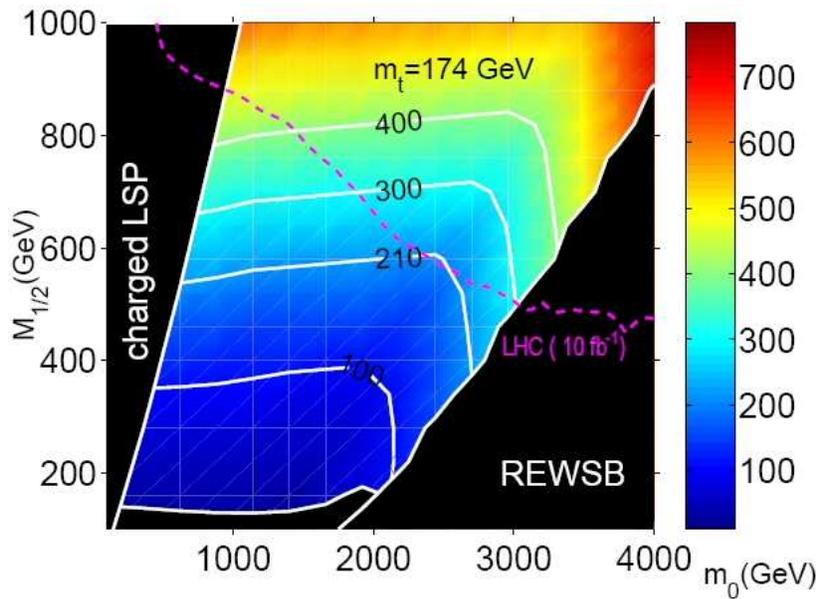


Figura 4.19: Análise de ajuste fino no LHC para $\tan\beta = 10$, $A_0 = 0$ e $\mu > 0$. As linhas brancas mostram isocurvas de ajuste fino, enquanto a linha tracejada mostra a região coberta pelo LHC após uma luminosidade total de 10 fb^{-1} , o que equivale a um ano de tomada de dados com uma luminosidade de $10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ [49].

Conclusão

Assim como todas as teorias de sucesso, o Modelo Padrão deve ser encarado como uma teoria efetiva válida em uma determinada escala de energia. Conforme discutido na Seção 3.1, argumentos de ajuste fino sugerem que este limite de validade seja a escala multi-TeV. Pela primeira vez desde a proposta do Modelo Padrão, estamos próximos de atingir esta escala com a próxima geração de aceleradores. No entanto, qual será a teoria fundamental da escala multi-TeV? Como vimos, modificar o SM é extremamente difícil, devido ao seu enorme sucesso experimental e aos poucos indícios experimentais para a física além do Modelo Padrão.

Nas últimas décadas (e em especial nos últimos anos) surgiu uma grande quantidade de possíveis extensões do SM. A abordagem apresentada aqui se baseou em revisar os fundamentos do SM, buscando possíveis generalizações. Como mostrado nas Seções 2.1.2 e 2.1.4, a supersimetria é a simetria espacial mais geral possível em quatro dimensões, o que a torna uma das mais importantes possibilidades de física além do Modelo Padrão. No entanto, uma análise superficial sugere que esta é uma possibilidade remota. O MSSM possui mais que o dobro de partículas do SM, incluindo uma enorme quantidade de campos escalares. Não existe nenhuma evidência da existência destas novas partículas ou mesmo da existência de uma partícula escalar. Além disso, a possibilidade de supersimetria ser uma simetria exata da natureza implicaria selétrons na escala MeV e está completamente excluída. Portanto, à primeira vista, o MSSM aparenta ser uma teoria pouco provável.

Porém, como vimos na Seção 3.2.3 e nos modelos das seções 4.1 e 4.2, a própria quebra de supersimetria permite gerar massas para sférmions e gauginos muito acima das massas de seus parceiros. Esta hierarquia de massas é gerada naturalmente, como mostramos explicitamente nos modelos mSUGRA e mGMSB. Além disso, estes mesmos modelos fornecem mecanismos para suprimir efeitos de violação de sabor e violação de CP, que em geral superariam em muitas ordens de grandeza os dados experimentais.

Apesar de ser fortemente vinculado pelos dados experimentais e por argumentos de naturalidade, o MSSM nos permite abordar uma série de questões que não eram possíveis no Modelo Padrão. Vimos que o potencial escalar do SM é naturalmente estabilizado em teorias supersimétricas, desde que as superpartículas estejam na escala TeV. Como consequência direta da introdução destas superpartículas obtivemos a unificação das constantes de aco-

plamento de gauge com grande precisão, permitindo-nos estimar qual a escala de grande unificação. Além disso, a evolução dos parâmetros *soft* nos modelos mSUGRA e mGMSB explica de maneira mais satisfatória a quebra eletrofraca, já que esta é gerada radiativamente. Finalmente, a existência de um neutralino estável (ou quase estável) em modelos com conservação de Paridade R fornece um forte candidato para a matéria escura.

Porém, assim como o SM, o MSSM também está longe de ser uma teoria definitiva e deixa uma série de questões em aberto: um novo problema de hierarquia é introduzido com o parâmetro μ . Por quê a violação de CP e sabor são tão suprimidas? Até que ponto a Paridade R pode ser considerada uma simetria exata? Como devem ser introduzidos os termos de massa para os neutrinos? A maioria destas questões exige um conhecimento detalhado dos parâmetros *soft*, ou seja, do mecanismo de quebra de supersimetria.

Como mostrado na Seção 3.2.3, a parametrização mais geral desta quebra, introduz cerca de 109 novos parâmetros. Apesar de existirem algumas exceções (como o limite superior para a massa do Higgs), o grande número de parâmetros torna o MSSM pouco preditivo. O mesmo não ocorre com o Modelo Padrão, onde, mesmo sem nenhum conhecimento sobre a origem das matrizes de Yukawa, é possível parametrizá-las e manter a preditividade do modelo. Logo, para reduzir o número de parâmetros do MSSM, temos que realizar suposições sobre escalas de energia muito acima da escala TeV, através da introdução de um setor escondido e mensageiro ou de supergravidade. Esta conexão entre a física da escala TeV e a física de altíssimas energias (que é invisível no SM), pode ser vista como uma grande vantagem do MSSM, pois nos permite ter acesso indireto a energias muito além daquelas alcançadas em laboratório. Portanto, com esta extensão do Modelo Padrão na escala eletrofraca, adquirimos também informações indiretas sobre escalas de energias próximas à escala GUT ou à escala de Planck.

Além de todas estas vantagens, talvez a característica mais relevante do MSSM seja a sua testabilidade na próxima geração de aceleradores. Como vimos na Seção 3.1, apesar de ser possível gerar sférmions e gauginos com massas muito além de 1 TeV, para que a supersimetria resolva o problema de hierarquia é necessário que as partículas do Modelo Padrão e suas superparceiras possuam diferenças de massa menores ou da ordem de 1 TeV. De acordo com os resultados apresentados na Seção 4.3, em apenas alguns anos o LHC já poderá nos fornecer dados suficientes para verificarmos se o MSSM é a solução para o Problema de Hierarquia.

Como discutido acima, se o MSSM for de fato testado e confirmado na próxima década, uma série de novas questões serão abertas. Com o ILC será possível ter um conhecimento parcial sobre o setor de quebra de supersimetria, o que permitirá investigar indiretamente escalas de energia muito além da escala TeV. Além disso, se os modelos do tipo SUGRA forem confirmados experimentalmente, estaríamos pela primeira vez obtendo evidências indiretas de uma teoria efetiva para a gravitação quântica.

Apêndice A

Notação e Convenções

A seguir apresentaremos algumas das convenções utilizadas neste trabalho, assim como a relação entre espinores de 2 e 4 componentes.

Matrizes de Pauli e Matrizes Gama:

Utilizaremos a representação quirial, onde temos as seguintes expressões para as matrizes σ^μ , γ^μ e γ^5 :

$$\sigma^\mu = (\sigma^\mu)_{ab} = (1, \vec{\sigma}) \text{ e } \bar{\sigma}^\mu = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} = (1, -\vec{\sigma}) = \sigma_\mu$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sendo

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Além disso, adotamos a seguinte métrica:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A.1 Espinores

Como em modelos supersimétricos os espinores fundamentais (presentes nos supermultipletos) são 2-espinores (com apenas duas componentes), é conveniente trocar a notação usual (em termos de 4-espinores) para uma notação baseada em 2-espinores. A seguir

listaremos algumas das propriedades destes 2-espinores e como estas se relacionam com a notação usual, em termos de espinores de quatro componentes. Assumiremos a representação quiral das matrizes γ^μ , já que esta é a representação mais natural para a definição dos 2-espinores.

As transformações (infinitesimais) de Lorentz dos espinores com duas componentes é dada de acordo com a seguinte convenção de índices:

$$\text{Índice Inferior: } \chi_a \rightarrow \text{Espinor } \textit{left-handed} \Rightarrow \chi'_a = (1 + i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}) \chi_a$$

$$\text{Índice Superior: } \chi^a \rightarrow \text{Espinor } \textit{right-handed} \text{ Conjugado} \Rightarrow \chi'^a = (1 - i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}^*}{2} - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}^*}{2}) \chi^a$$

$$\text{Índice Superior: } \bar{\chi}^{\dot{a}} \rightarrow \text{Espinor } \textit{right-handed} \Rightarrow \bar{\chi}'^{\dot{a}} = (1 + i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}) \bar{\chi}^{\dot{a}}$$

$$\text{Índice Inferior: } \bar{\chi}_{\dot{a}} \rightarrow \text{Espinor } \textit{left-handed} \text{ Conjugado} \Rightarrow \bar{\chi}'_{\dot{a}} = (1 - i \vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}^*}{2} + \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\sigma}^*}{2}) \bar{\chi}_{\dot{a}}$$

Os diferentes tipos de espinores acima se relacionam pelas seguintes transformações¹:

$$\chi^a = e^{ab} \chi_b, \quad \chi_a = e_{ab} \chi^b$$

$$\bar{\chi}_{\dot{a}} = e_{\dot{a}b} \bar{\chi}^{\dot{b}}, \quad \bar{\chi}^{\dot{a}} = e^{\dot{a}b} \bar{\chi}_{\dot{b}}$$

e

$$\bar{\chi}_{\dot{a}} = \chi_a^*, \quad \bar{\chi}^{\dot{a}} = \chi^{a*}$$

onde

$$e^{ab} = e^{\dot{a}b} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{ab} = e_{\dot{a}b} = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando os 2-espinores *left-handed* e *right-handed* e seus conjugados podemos construir os seguintes 4-espinores:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \text{ (Dirac)}$$

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \chi^{a*} \end{pmatrix} \text{ (Majorana)}$$

já que nesta representação a conjugação de carga é definida como:

$$\Psi_D^C = -i(\gamma^2)^T \Psi_D^* = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \Psi_D^* = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Psi_M^C = \Psi_M \text{ e } \Psi_D^C \neq \Psi_D$$

¹A notação introduzida aqui para 2-espinores também é usada para os parâmetros das transformações supersimétricas (θ_a, θ_a^*) .

Produtos Invariantes

Usando as transformações dos 2-espinores, vemos que os seguintes produtos são invariantes de Lorentz:

$$\chi\xi = \chi^a\xi_a = e^{ab}\chi_b\xi_a = \chi_2\xi_1 - \chi_1\xi_2$$

$$\bar{\psi}\bar{\xi} = \psi_{\dot{a}}\xi^{\dot{a}} = e_{\dot{a}\dot{b}}\psi^{\dot{b}}\xi^{\dot{a}} = \psi^{\dot{1}}\xi^{\dot{2}} - \psi^{\dot{2}}\xi^{\dot{1}}$$

Com todas estas definições é fácil reescrever qualquer quantidade em termos de 4-espinores ou 2-espinores. Para os termos de massa de Dirac, por exemplo:

$$m\bar{\Psi}_D\Psi_D = m \begin{pmatrix} \psi^a & \bar{\chi}_{\dot{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} = m(\psi\chi + \bar{\chi}\bar{\psi})$$

enquanto, para termos de massa de Majorana:

$$m\bar{\Psi}_M\Psi_M = m \begin{pmatrix} \chi^a & \bar{\chi}_{\dot{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} = m(\chi\chi + \bar{\chi}\bar{\chi})$$

A.2 Identidades

A seguir apresentaremos algumas identidades úteis para a manipulação de 2-espinores e de variáveis de Grassmann:

$$\theta_\alpha = \alpha\theta, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\alpha}\bar{\theta}$$

$$\theta^a\theta^b = -\frac{1}{2}e^{ab}\theta\theta, \theta_a\theta_b = \frac{1}{2}e_{ab}\theta\theta$$

$$\bar{\theta}^{\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{b}} = \frac{1}{2}e^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\theta}\bar{\theta}, \bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\theta}_{\dot{b}} = -\frac{1}{2}e_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\theta}\bar{\theta}$$

$$\frac{\partial(\theta\theta)}{\partial\theta^a} = 2\theta_a, \frac{\partial(\bar{\theta}\bar{\theta})}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} = -2\bar{\theta}_{\dot{a}}, \frac{\partial(\bar{\theta}\bar{\theta})}{\partial\bar{\theta}_{\dot{a}}} = 2\bar{\theta}^{\dot{a}}$$

$$\bar{\alpha}\bar{\sigma}^\mu\theta = -\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}$$

$$\sigma_2\sigma^\mu\sigma_2 = -e^{ab}\sigma_{bb}^\mu e^{b\dot{a}} = (\bar{\sigma}^{\mu T})^{a\dot{a}}$$

$$Tr(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}$$

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta} = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}g^{\mu\nu}$$

$$(\theta\alpha)(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}) = -\frac{1}{2}\theta\theta\alpha\sigma^\mu\bar{\xi}$$

Apêndice B

Supermultipletos Massivos

A seguir, a partir da álgebra supersimétrica serão construídas os supermultipletos fundamentais para estados com massa.

Como mostrado na Seção 2.3.2, para partículas massivas temos que $Q_{\frac{1}{2}}$ e $Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger$ aumentam de $\frac{1}{2}$ a componente z do spin, enquanto $Q_{-\frac{1}{2}}$ e $Q_{\frac{1}{2}}^\dagger$ diminuem de $\frac{1}{2}$. Para construir os supermultipletos devemos obter estados de spin total mínimo e máximo, aplicando sucessivamente os operadores acima à um dado estado.

Para tal escolhe-se um conjunto de estados $|j, \sigma\rangle$ (para $\sigma = -j, \dots, j$) de tal forma que

$$Q_{\frac{1}{2}}^\dagger |j, \sigma\rangle = Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger |j, \sigma\rangle = 0 \quad (\text{B.1})$$

Isto é sempre possível, pois para um estado qualquer $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q_{\frac{1}{2}}^\dagger Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger |\psi\rangle \\ \Rightarrow Q_{\frac{1}{2}}^\dagger |\psi'\rangle &= Q_{-\frac{1}{2}}^\dagger |\psi'\rangle = 0 \end{aligned}$$

já que $\{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} = 0$. Além disso, se a Eq.(B.1) é satisfeita, então, da Eq.(2.9):

$$Q_a^\dagger \vec{J} |j, \sigma\rangle = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{ba} Q_b^\dagger |j, \sigma\rangle = 0$$

portanto os estados $|j, \sigma\rangle$ ($\sigma = -j, \dots, j$) são um conjunto que satisfazem a Eq.(B.1).

Sob rotações infinitesimais, temos:

$$\begin{aligned} (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) Q_a |j, \sigma\rangle &= (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) Q_a (1 - i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) |j, \sigma\rangle \\ &= (Q_a + i\vec{\theta} \cdot [\vec{J}, Q_a]) (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) |j, \sigma\rangle = (1 + \frac{1}{2} i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}) Q_a (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{D}^j) |j, \sigma\rangle \\ &= [1 + i\vec{\theta} \cdot (\frac{1}{2} \vec{\sigma} + \vec{D}^j)] Q_a |j, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde \vec{D}^j é a representação dos geradores \vec{J} na representação $2j + 1$. Da Eq.(B.2) percebe-se que $Q_a|j, \sigma\rangle$ se transforma de acordo com a representação produto $j \pm \frac{1}{2}$, ou seja [9]:

$$Q_a|j, \sigma\rangle = C_{j\frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}, \sigma + a; a, \sigma)|j + \frac{1}{2}, \sigma + a\rangle + C_{j\frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}, \sigma + a; a, \sigma)|j - \frac{1}{2}, \sigma + a\rangle \quad (\text{B.3})$$

onde $C_{j\frac{1}{2}}(j', \sigma'; a, \sigma)$ é o coeficiente de Clebsch-Gordan para o acoplamento de duas partículas com spin j e $\frac{1}{2}$, em termos dos estados com spins $j' = j \pm \frac{1}{2}$ e $\sigma' = \sigma + a$. Portanto, a partir de $|j, \sigma\rangle$ satisfazendo a Eq.(B.1), obtém-se os estados $|j \pm \frac{1}{2}, \sigma'\rangle$:

$$|j \pm \frac{1}{2}, \sigma\rangle = \sum_a C_{j\frac{1}{2}}(j \pm \frac{1}{2}, \sigma; a, \sigma - a) Q_a|j, \sigma - a\rangle$$

Os estados acima não estão normalizados, já que:

$$\langle j \pm \frac{1}{2}, \sigma | j \pm \frac{1}{2}, \sigma \rangle = \langle j, \sigma - a | Q_a^\dagger Q_a | j, \sigma - a \rangle = 2M$$

Portanto redefini-se:

$$|j \pm \frac{1}{2}, \sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_a C_{j\frac{1}{2}}(j \pm \frac{1}{2}, \sigma; a, \sigma - a) Q_a|j, \sigma - a\rangle$$

Aplicando-se novamente Q_a :

$$Q_a Q_b |j, \sigma\rangle = e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j, \sigma\rangle$$

onde $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, já que $\{Q_a, Q_b\} = 0$. Como $e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}}$ representa um operador antissimétrico e como este produto só pode resultar em duas representações: $(0, 0)$ (singleto) ou $(1, 0)$ (tripletto), $e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}}$ é um escalar (momento angular total nulo), já que somente a representação singleto é antissimétrica. Logo o produto $Q_a Q_b |j, \sigma\rangle$ terá momento angular total $J = 0 + j$:

$$(1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j, \sigma\rangle = (1 + i\vec{\theta} \cdot \vec{D}^j) e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j, \sigma\rangle$$

Ou seja:

$$\frac{1}{2M} e_{ab} Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j, \sigma\rangle = |j, \sigma'\rangle$$

No entanto

$$Q_a |j, \sigma'\rangle = 0 \quad (\text{B.4})$$

enquanto para o conjunto $|j, \sigma\rangle$, satisfazendo a Eq.(B.1), temos a Eq.(B.3), que em geral é diferente de zero. Logo $|j, \sigma'\rangle \neq |j, \sigma\rangle$. Portanto as relações de comutação exigem a existência de dois estados $|j, \sigma\rangle$ de mesmo spin.

A partir do estado $|j, \sigma\rangle'$ repete-se o procedimento para Q_a^\dagger sob a condição da Eq.(B.4):

$$Q_a^\dagger |j, \sigma\rangle' = \frac{1}{2M} e_{cb} Q_a^\dagger Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} |j, \sigma\rangle$$

Mas da Eq.(2.18):

$$\begin{aligned} [Q_a^\dagger, Q_{\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}}] &= 2M(\delta_{a\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2}} - \delta_{a-\frac{1}{2}} Q_{\frac{1}{2}}) = 2M \sum_b e_{ab} Q_b \\ \Rightarrow Q_a^\dagger |j, \sigma\rangle' &= \sum_b e_{ab} Q_b |j, \sigma\rangle \end{aligned}$$

já que $Q_a^\dagger |j, \sigma\rangle = 0$. Usando a Eq.(B.3) normalizada:

$$\begin{aligned} Q_a^\dagger |j, \sigma\rangle' &= \sum_b e_{ab} Q_b |j, \sigma\rangle = \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} C_{j\frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}, \sigma + b; b, \sigma) |j + \frac{1}{2}, \sigma + b\rangle \\ &\quad + \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} C_{j\frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}, \sigma + b; b, \sigma) |j - \frac{1}{2}, \sigma + b\rangle \end{aligned}$$

Aplicando Q_a^\dagger novamente:

$$Q_a^\dagger Q_b^\dagger |j, \sigma\rangle' = \sum_c e_{bc} Q_a^\dagger Q_c |j, \sigma\rangle = 2M e_{ba} |j, \sigma\rangle$$

retornando, assim, para o estado inicial. Portanto, a partir de um estado $|j\rangle$ com autovalores $q_a^\dagger = 0$ e $|j\rangle'$ com autovalores $q_a = 0$, obtém-se os seguintes estados:

$$\begin{aligned} |j\rangle &\rightarrow Q \rightarrow |j \pm \frac{1}{2}\rangle \rightarrow Q \rightarrow |j\rangle' \\ &\quad \rightarrow Q^\dagger \rightarrow |j\rangle \\ |j\rangle &\rightarrow Q^2 \rightarrow |j\rangle' \rightarrow Q \rightarrow 0 \\ &\quad \rightarrow Q^\dagger \rightarrow |j \pm \frac{1}{2}\rangle \\ |j\rangle &\rightarrow Q^\dagger \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando os resultados anteriores temos que as relações corretas são:

$$\begin{aligned} Q_a |j, \sigma\rangle &= \sqrt{2M} [C_{j\frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}, \sigma + a; a, \sigma) |j + \frac{1}{2}, \sigma + a\rangle + C_{j\frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}, \sigma + a; a, \sigma) |j - \frac{1}{2}, \sigma + a\rangle] \\ Q_a |j \pm \frac{1}{2}, \sigma\rangle &= \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} C_{j\frac{1}{2}}(j \pm \frac{1}{2}, \sigma; b, \sigma - b) |j, \sigma - b\rangle' \\ Q_a^\dagger |j \pm \frac{1}{2}, \sigma\rangle &= \sqrt{2M} C_{j\frac{1}{2}}(j \pm \frac{1}{2}, \sigma; a, \sigma - a) |j, \sigma - b\rangle \\ Q_a^\dagger |j\rangle' &= \sqrt{2M} \sum_b e_{ab} [C_{j\frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}, \sigma + b; b, \sigma) |j + \frac{1}{2}, \sigma + b\rangle + C_{j\frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}, \sigma + b; b, \sigma) |j - \frac{1}{2}, \sigma + b\rangle] \end{aligned}$$

Apêndice C

Quebra Espontânea de Paridade R

Como discutido na Seção 3.2.1, o MSSM assume a existência de uma simetria R discreta (Paridade R). O principal motivo por trás desta hipótese é a inibição de processos que levem ao rápido decaimento do próton. Caso a Paridade R não fosse imposta, teríamos os seguintes termos adicionais no superpotencial do MSSM (ver Eq.(3.3)):

$$F_R = \epsilon_{\alpha\beta}[(c_l)_{ijk}L_i^\alpha L_j^\beta E_k^C + (c_d)_{ijk}L_i^\alpha Q_j^\beta D_k^C + c_i H_u^\alpha L_i^\beta] + (c_u)_{ijk}U_i^C D_j^C D_k^C \quad (\text{C.1})$$

Por violarem número bariônico e leptônico, estes termos permitem processos tais como $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Da Figura C.1 temos que este processo seria tipicamente proporcional à $(c_d)_{i1k}(c_u)_{11k}$. Pode-se mostrar [11] que para squarks na escala TeV e acoplamentos da ordem de 10^{-1} , teríamos um tempo de decaimento do próton de $\sim 10^{-9}$ s. Portanto o presente limite experimental (10^{33} anos [24]) indica que os acoplamentos c_d ou c_u devem ser fortemente suprimidos.

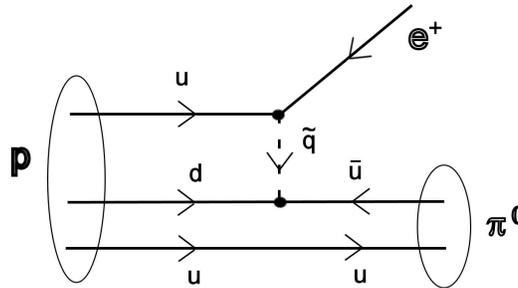


Figura C.1: Um dos processos que leva ao rápido decaimento do próton em modelos com violação de Paridade R.

A maneira mais simples de evitar tais processos é simplesmente supor que os termos da Eq.(C.1) são nulos, através da imposição de Paridade R. Porém, se apenas B (número

bariônico) ou L (número leptônico) forem conservados pelo superpotencial, temos $c_d = c_u = 0$ ou $c_l = c_d = c_i = 0$, o que já seria suficiente para impedir o rápido decaimento do próton¹. Portanto a Paridade R não é necessária para satisfazer todos os vínculos experimentais.

Outro motivo para assumir quebra de Paridade R é a introdução de massa para os neutrinos. Caso estes sejam férmions de Majorana, teremos violação de número leptônico. Modelos com quebra de Paridade R apresentam diversas alternativas para a geração de neutrinos leves.

Como a hipótese de conservação de Paridade R é muito importante para a fenomenologia de produção e decaimento de superpartículas, a possibilidade de violação de R tem sido investigada em diversos modelos. No entanto, os novos acoplamentos da Eq.(C.1) introduzem cerca de 96 parâmetros reais no superpotencial (além dos novos termos *soft*). Além disso, como vimos acima, alguns destes parâmetros devem ser arbitrariamente pequenos. Devido a isto, na maioria dos casos, análises fenomenológicas assumem que os parâmetros são reais e que somente alguns deles são diferentes de zero. Uma outra maneira de motivar estas hipóteses é assumir que a Paridade R seja quebrada espontaneamente. Desta forma apenas alguns dos termos de F_R seriam gerados.

Um dos modelos mais simples que possibilita a quebra espontânea de Paridade R necessita da introdução de um supercampo singleto Φ ($R_\Phi = +1$) e de três pares de singletos (N_i^C, S_i) com números leptônicos $(-1, 1)$ e Paridade R -1 . Com estes novos campos, temos os seguintes termos no superpotencial [50]:

$$F_{BR} = \epsilon_{\alpha\beta}[(h_0 H_u^\alpha H_d^\beta - \epsilon^2)\Phi + H_u^\alpha L^\beta h_\nu N^C] + \Phi N^C h S + M N^C S + M_\Phi \Phi^2 + A_\Phi \Phi^3$$

onde h_ν e h são matrizes 3×3 . A quebra espontânea de R ocorrerá se, no mínimo do potencial escalar, os campos $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}^C$, s ou ϕ possuírem *vevs* não nulos. Comparando o superpotencial acima com o da Eq.(C.1), seria gerado o termo:

$$F = c_i H_u^\alpha L_i^\beta = H_u^\alpha L_i^\beta (h_\nu)_{ij} \langle N_j^C \rangle$$

Enquanto os termos que violam número bariônico são nulos. Note que o superpotencial F_{BR} introduz "apenas" 46 novos parâmetros supersimétricos e destes somente h_ν , $\langle \tilde{\nu}_i^C \rangle$ e $\langle \tilde{\nu}_i \rangle$ comunicam a quebra espontânea para os campos do MSSM. Além destes parâmetros temos ainda novos termos *soft* possíveis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & \tilde{A}\phi h_u h_d + B\phi - \tilde{\nu}^C C \tilde{\nu} h_u - \phi \tilde{\nu}^C D s \\ & - m_R^2 |\tilde{\nu}^C|^2 - m_S^2 |s|^2 - m_\Phi^2 |\phi|^2 \end{aligned}$$

onde C , D , m_R e m_S são matrizes 3×3 e s , ϕ são as componentes escalares dos supercampos

¹ Apesar de outros processos onde ocorre violação de número bariônico ou violação de número leptônico também vinculem os acoplamentos da Eq.(C.1), em geral estes limites são bem mais fracos.

S e Φ , respectivamente.

Devido ao grande número de parâmetros, faremos algumas hipóteses sobre os acoplamentos e os termos *soft*, mantendo, porém, as principais características do modelo. Primeiramente assumiremos que todos os parâmetros são reais e consideraremos apenas uma geração de supercampos $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}^C$ e s e de léptons. Os termos de massa MN^CS e $M_\Phi\Phi^2M$, e o termo $A\Phi^3$ não são relevantes para a discussão da quebra de Paridade R e serão desprezados. Com relação aos parâmetros *soft*, assumiremos condições de universalidade típicas de modelos SUGRA (ver Seção 4.1.1), de tal forma que

$$\tilde{A} = am_g h_0, \quad B = bm_g \epsilon^2, \quad C = am_g h_\nu, \quad D = am_g h$$

$$\text{e } m_R^2 = m_S^2 = m_\Phi^2 = m_g^2$$

Apesar destas condições só serem válidas na escala de Planck, assumiremos que em baixas energias apenas as massas *soft* diferirão de m_g .

Adotando as simplificações acima, teremos o seguinte potencial escalar neutro:

$$\begin{aligned} V = & |h\phi s + h_\nu \tilde{\nu} h_u^0|^2 + |h_0 \phi h_u^0|^2 + |h\phi \tilde{\nu}^C|^2 + |h_\nu \tilde{\nu}^C h_u^0|^2 \\ & + |h_0 \phi h_d^0 + \mu h_d^0 - h_\nu \tilde{\nu} \tilde{\nu}^C|^2 + |h_0 \phi h_u^0 + \mu h_u^0|^2 + |h_0 h_u^0 h_d^0 - h \tilde{\nu}^C s + \epsilon^2|^2 \\ & + 2m_g [a(h\phi \tilde{\nu}^C s - h_0 \phi h_u^0 h_d^0 + h_\nu \tilde{\nu} \tilde{\nu}^C h_u^0) + (1-a)\mu h_u^0 h_d^0 + (2-a)\epsilon^2 \phi] \\ & + \sum_i m_i^2 |\tilde{\phi}_i^0|^2 + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} (|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2 - |\tilde{\nu}|^2)^2 \end{aligned}$$

onde m_i são as massas *soft* e $\tilde{\phi}_i^0$ são todos os campos escalares neutros. A minimização do potencial acima permite soluções onde os escalares $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}^C$, ϕ e s adquirem *vevs* não nulos:

$$\langle \tilde{\nu} \rangle = v_L, \quad \langle \tilde{\nu}^C \rangle = v_R, \quad \langle \phi \rangle = v_f \quad \text{e} \quad \langle s \rangle = v_s$$

Além disso, para algumas destas soluções, os escalares de Higgs também adquirem *vevs* possibilitando a quebra eletrofraca. Pode-se mostrar [50] que estas soluções minimizam o potencial. Além disso, das equações de minimização, temos

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\nu}} = \alpha v_L + am_g h_\nu v_u v_R + h_\nu h v_u v_f v_s = 0$$

sendo α um fator constante. Portanto, no limite $h_\nu \rightarrow 0$, teremos $v_L = 0$. Ou seja, v_L pode ser feito arbitrariamente pequeno se escolhermos $h_\nu \ll 1$ no superpotencial.

Como neste modelo a quebra de Paridade R ocorre simultaneamente com a quebra de número leptônico (já que $v_{L,R,s} \neq 0$) e esta é uma simetria global, um dos auto-estados de massa será um bóson de Goldstone, usualmente chamado de Majoron [51, 52]. Por ser um estado sem massa, este escalar deve se acoplar fracamente com os bósons de gauge do

Modelo Padrão, caso contrário já teria sido detectado. Para encontrar a combinação linear dos escalares neutros que forma o Majoron (J), basta impor

$$M^2 J = 0 \quad (\text{C.2})$$

onde M^2 é a matriz de massa. Como o potencial escalar só possui termos reais (devido às nossas simplificações), as partes imaginárias e reais dos escalares não se misturam, pois CP é conservado. Logo podemos reescrever os termos de massa como:

$$V_m = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\phi}_i) M_{ij}^2 \text{Re}(\tilde{\phi}_j) + \frac{1}{2} \text{Im}(\tilde{\phi}_i) N_{ij}^2 \text{Im}(\tilde{\phi}_j)$$

Impondo a Eq.(C.2), encontra-se uma única solução com:

$$J = \frac{1}{V} \text{Im} \left[\frac{v_L^2}{v^2} (v_u h_u^0 - v_d h_d^0) + v_L \tilde{\nu} - v_R \tilde{\nu}^C + v_s s \right]$$

onde $V = \sqrt{v_s^2 + v_R^2}$ e $v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2 + v_L^2}$. Como discutido acima, pode-se escolher h_ν de tal forma que $v_L \ll v_u, v_d, v_R$ e v_s , de tal forma que

$$J \approx \frac{1}{V} \text{Im} [-v_R \tilde{\nu}^C + v_s s]$$

Ou seja, o Majoron é praticamente um singlete. Desta forma diversos limites experimentais são evitados, tais como o do decaimento invisível do Z^0 [53, 54, 55].

Além da presença de um bóson de Goldstone, outra importante característica deste modelo é a violação de número leptônico, que implica matrizes de massa que misturam os léptons carregados com os charginos do MSSM e os neutrinos com os neutralinos. A matriz para os férmions carregados na base $(e^-, \tilde{h}_d^-, -i\tilde{W}^-)$ será [56, 57, 58]

$$M_e = \begin{pmatrix} \lambda_l v_d & -h_\nu v_R & 0 \\ 0 & \mu & \sqrt{2} g v_d \\ 0 & \sqrt{2} g v_u & M_2 \end{pmatrix}$$

onde foram desprezadas as contribuições de v_L e M_2 é a massa *soft* para os winos. A diagonalização da matriz acima resulta em um férmion leve com massa $\lambda_l v_d$, que é justamente a massa do elétron. Os outros dois auto-estados de massa serão os charginos do MSSM. Já para os férmions neutros:

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & h_\nu v_R & 0 & 0 & 0 \\ h_\nu v_R & 0 & -\mu & -g v_u & g' v_u \\ 0 & -\mu & 0 & g v_d & -g' v_d \\ 0 & -g v_u & g v_d & M_2 & 0 \\ 0 & g' v_u & -g' v_d & 0 & M_1 \end{pmatrix}$$

Novamente, o férmion mais leve será o neutrino, cuja massa será dada por (novamente assumimos $v_L = 0$) [58]:

$$m_\nu = \frac{g^2 h_\nu^2 M_0 v_R^2 v_d^2}{\mu(2g^2 v_u v_d M_0 - \mu M_1 M_2)}$$

onde $M_0 = \tan^2 \theta_w M_2 + M_1$. Como assumiu-se $h_\nu \ll 1$, é possível gerar neutrinos suficientemente leves.

O modelo apresentado aqui possui outras características importantes, relacionadas à violação de Paridade R. Em particular, o neutralino, que continua sendo a superpartícula mais leve, pode decair em léptons e nos bósons W e Z , ou em neutrinos e Majorons. Além disso, temos a possibilidade de criar neutralinos e charginos desacompanhados de outras superpartículas, como nos decaimentos $Z \rightarrow \tilde{\chi}^\pm + \tau^\pm$ e $Z \rightarrow \tilde{\chi}^0 + \nu_\tau$ [56, 50]. Já para baixas energias temos possíveis decaimentos envolvendo o Majoron. Como este é composto basicamente de $\tilde{\nu}^C$ e s , seus principais acoplamentos serão do tipo:

$$\mathcal{L} = ig\bar{\nu}\gamma^5\nu J$$

já que o Majoron é um pseudo-escalar. Para o modelo apresentado acima temos:

$$g \approx \frac{v_R}{V} h_\nu \quad (\text{C.3})$$

Note que o acoplamento acima é proporcional à massa do neutrino (m_ν). A seguir apresentaremos alguns dos possíveis efeitos que estes acoplamentos podem ter nos decaimentos dos mésons e léptons do Modelo Padrão.

C.1 Novos Limites para Acoplamentos Neutrino-Majoron

No modelo discutido na seção anterior diversas simplificações foram feitas com relação ao modelo de quebra espontânea de Paridade R e assumiu-se apenas uma geração de léptons. Em geral, os acoplamentos entre Majorons e neutrinos podem ser parametrizados da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = ig_{\alpha\beta}\bar{\nu}_\alpha\gamma^5\nu_\beta J, \quad \alpha, \beta = e, \mu, \tau$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma matriz de acoplamento complexa na base de sabor. Como visto acima, J é basicamente um singlete (evitando assim os limites impostos pelos resultados do LEP), sendo os acoplamentos acima os mais relevantes para análises fenomenológicas (pelo menos a baixas energias). Na maioria dos modelos também devemos incluir acoplamentos entre neutrinos e um novo escalar massivo (χ) com os mesmos acoplamentos:

$$\mathcal{L} = g_{\alpha\beta}\bar{\nu}_\alpha\nu_\beta\chi, \quad \alpha, \beta = e, \mu, \tau$$

Normalmente a matriz de massa e mistura dos neutrinos dependerão dos ν evs associados à quebra espontânea de L e da matriz g (ver Eq.(C.3)). Neste contexto, o conhecimento dos acoplamentos entre neutrinos e Majorons pode ajudar a compreender a escala de massa dos neutrinos. No entanto, esta relação depende fortemente do modelo e pode ser muito difícil de se obter na prática. Para tornar nossos resultados tão independentes de modelo quanto possível, não faremos nenhuma suposição sobre $g_{\alpha\beta}$ e apresentaremos nossos resultados com e sem a existência de um escalar massivo χ .

Modelos com Majorons podem ser interessantes do ponto de vista cosmológico, pois podem afetar os limites nas massas dos neutrinos provenientes da formação de estruturas de larga escala [59]. Neutrinos vindos de fontes astrofísicas também podem ser significativamente afetados se estes decaírem rapidamente. O único mecanismo de decaimento que ainda não foi eliminado se deve à acoplamentos entre neutrinos e Majorons.

Atualmente sabemos que o papel dos acoplamentos entre neutrinos e Majorons é pouco significativo em fenômenos envolvendo neutrinos solares e atmosféricos, portanto é possível impor limites para tais acoplamentos [60]

$$|g_{21}|^2 < |g_{\alpha\beta}U_{\alpha 2}^*U_{\beta 1}|^2 < 4 \times 10^{-6} \left(\frac{7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2}{\Delta m_{\odot}^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

A observação da explosão da supernova 1987A nos garante que uma grande parcela da energia da supernova é liberada na forma de neutrinos, o que implica no limite [61]

$$|g_{ee}|^2 < (1 - 20) \times 10^{-5}, \quad 1.5 \times 10^{-11} < |g_{e\mu}|^2 |g_{\mu\mu}|^2 < 2.5 \times 10^{-10} \quad (\text{C.5})$$

Além disso, limites de espalhamentos e decaimentos de Majorons dentro de uma supernova resultam nos limites [61]

$$3.0 \times 10^{-7} < |g_{\alpha\beta}| < 2.0 \times 10^{-5} \quad (\text{C.6})$$

Enquanto decaimentos $\beta\beta 0\nu$ [62] nos fornece

$$|g_{ee}| < 2.0 \times 10^{-4} (1.5) \quad (\text{C.7})$$

para Majorons com número leptônico igual a $L=0$ e $L=2$, respectivamente. Como nenhuma evidência da produção de Majorons foi vista em decaimentos de káons e píons temos [63, 64, 65]

$$\sum_{l=e,\mu,\tau} |g_{el}|^2 < 3.0 \times 10^{-5}, \quad \sum_{l=e,\mu,\tau} |g_{\mu l}|^2 < 2.4 \times 10^{-4} \quad (\text{C.8})$$

Neste trabalho tentaremos melhorar estes limites ou torná-los mais independentes de modelos através da análise de decaimentos tanto de mésons quanto de léptons. Discutiremos

os limites obtidos dos decaimentos dos píons, káons, D, D_s e B, incluindo os decaimentos de mésons em taus; em seguida incluiremos pela primeira vez limites obtidos dos decaimentos de léptons (tanto da taxa total de decaimento, quanto de distorções no espectro). Finalmente, transformaremos os limites obtidos para a base de massa.

C.1.1 Resultados

Aqui tentaremos melhorar os limites para os acoplamentos neutrino-Majoron através da análise dos possíveis efeitos nos decaimentos de mésons e léptons, assim como no espectro do decaimento do múon. Também reescreveremos nossos resultados na base de massa, que em muitos casos é mais relevante para análises de modelos. Os resultados obtidos aqui foram calculados com o auxílio dos programas FeynArt, FeynCalc e FormCalc [66, 67, 68].

Taxa de Decaimento dos Mésons

O processo $M \rightarrow l + \nu_l$ já foi extensamente estudado na literatura e possui a seguinte taxa de decaimento total [24]:

$$\Gamma_{SM} = \frac{G_F^2 |V_{qq'}|^2}{8\pi} f_m^2 m_l^2 M \left(1 - \frac{m_l^2}{M^2}\right)^2 f_{rad}, \quad (\text{C.9})$$

onde f_{rad} representa correções radiativas. Na Eq.(C.9), G_F é a constante de Fermi, f_m é a constante de decaimento do méson e $V_{qq'}$ é o respectivo elemento da matriz de CKM. Exceto quando afirmado o contrário, usaremos os valores experimentais listados no Particle Data Group [24]. Também utilizaremos esta mesma fonte para o cálculo das correções radiativas para as taxas de decaimentos dos mésons. Uma importante propriedade da Eq.(C.9) é que, por ser um decaimento em dois corpos, Γ é proporcional à m_l^2 , como esperado pela conservação de momento angular.

Nos últimos anos, diversas constantes de decaimentos dos mésons foram calculadas utilizando-se QCD na Rede (lattice QCD) [69], que podem ser usadas para obter previsões teóricas mais significativas. Nós usaremos tanto os valores experimentais [24] como os teóricos [70, 71, 72, 73] de f_m em nossos cálculos. Mostraremos os dois resultados, onde aqueles obtidos com os valores de lattice serão mostrados em parênteses.

Devido aos acoplamentos entre neutrinos e Majorons, o seguinte processo também contribui para as taxas de decaimento dos mésons:

$$M \rightarrow l + \bar{\nu}_{l'} + J \quad (\text{C.10})$$

onde J representa o Majoron e $\nu_{l'}$ pode ser um neutrino de qualquer sabor. Uma complexa expressão analítica para a taxa total deste decaimento pode ser encontrada em [64]. Aqui

mostraremos um resultado simples para o limite $m_l = m_\nu = 0$:

$$\Gamma_J = \frac{G_F^2 |V_{qq'}|^2}{768\pi^3} f_m^2 M^3 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |g_{l\alpha}|^2$$

Este resultado mostra que quando incluímos Majorons, a taxa total de decaimento não é mais proporcional à massa do lépton (pois agora temos um decaimento em três corpos). Portanto a contribuição do Majoron pode facilmente superar as predições do Modelo Padrão se $g \sim 1$. Assumindo que a taxa total de decaimento seja

$$\Gamma_{total} = \Gamma_{SM} + \Gamma_J,$$

o decaimento em J será o canal dominante, exceto para g pequeno. Como apenas pequenos desvios do SM são permitidos pelos dados experimentais, devemos ter $g \ll 1$. A Tabela C.1 mostra os limites obtidos usando-se esta análise.

Mesons	$ g_{e\alpha} ^2$	$ g_{\mu\alpha} ^2$	$ g_{\tau\alpha} ^2$
π	1.6×10^{-4} (1.7×10^{-3})	2.1×10^{-1} (2.2)	
K	9.5×10^{-4} (9.6×10^{-4})	9.3 (9.3)	
D	1.6×10^{-1} (1.4×10^{-1})	2.3 (2.3)	23 (19)
D_s		1 (8.8×10^{-1})	6.3 (8.1)
B	0.85 (0.65)	1.5 (1)	19 (17)

Tabela C.1: Limites para $\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |g_{\alpha\beta}|^2$ (incluindo apenas a emissão de J) obtidos a partir de decaimentos de mésons. Em parênteses estão os resultados obtidos utilizando-se as constantes de decaimento de lattice QCD.

Como esperado dos argumentos acima e dos resultados da Tabela C.1, os elementos de matriz $g_{\alpha\beta}$ mais vinculados serão aqueles relativos ao ν_e , já que a aproximação $m_l = 0$ é razoável neste caso. Este limite pode ser melhorado se utilizarmos medidas recentes [74] para a razão:

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} = (2.416 \pm 0.043) \times 10^{-5}$$

onde o erro exibido é a quadratura dos erros estatístico e sistemático. Usando este resultado obtemos, com 90% C.L.:

$$\sum_{\alpha} |g_{e\alpha}|^2 < 1.1 \times 10^{-5}$$

Com relação aos elementos de matriz $g_{\mu\alpha}$, os melhores limites são obtidos do limite experimental superior para o decaimento leptônico do káon em três neutrinos e um lépton [24]:

$$BR(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \nu + \bar{\nu}) < 6 \times 10^{-6}$$

Como a contribuição do SM para este decaimento é desprezível, podemos assumir que:

$$BR(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + J) < 6 \times 10^{-6}$$

resultando em (em parênteses está o resultado utilizando-se a constante de decaimento teórica $f_K = 156.6 \pm 4$ MeV [71]):

$$\sum_{\alpha} |g_{\mu\alpha}|^2 < 9 \times 10^{-5} \quad (9 \times 10^{-5})$$

Finalmente, novas medidas experimentais para taxas de decaimento leptônicas dos mésons pesados D^+ , D_s^+ e B^+ [24, 75, 76, 77, 78] nos permite impor limites para os elementos de matriz $g_{\tau\alpha}$, como mostrados na Tabela C.1. O melhor limite resulta do decaimento leptônico do D_s^+ em $\tau^+ + \nu_\tau$ (novamente, em parênteses está o resultado calculado com a constante de decaimento teórica $f_{D_s} = 278 \pm 21$ MeV [72, 73]):

$$\sum_{\alpha} |g_{\tau\alpha}|^2 < 6.3 \quad (8.1)$$

Devido à grande incerteza experimental, o limite obtido é insignificante, como pode ser visto acima.

Ressaltamos ainda que, diferentemente de [63, 65], os resultados mostrados até agora não incluem possíveis decaimentos em um escalar leve (chamado de χ) e portanto são praticamente independentes de modelo. Se incluirmos as contribuições deste novo escalar com uma massa de 1 KeV, os resultados anteriores são basicamente melhorados por um fator 2:

$$\sum_{\alpha} |g_{e\alpha}|^2 < 5.5 \times 10^{-6}, \quad \sum_{\alpha} |g_{\mu\alpha}|^2 < 4.5 \times 10^{-5} \quad (5 \times 10^{-5}) \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha} |g_{\tau\alpha}|^2 < 3.2 \quad (4.1)$$

Taxa de Decaimento dos Léptons

Por causa de sua grande precisão experimental, decaimentos de léptons são bons candidatos para se obter vínculos para os acoplamentos entre neutrinos e Majorons. Além disso, neste caso não existem incertezas tais como as constantes de decaimento dos mésons ou os elementos da matriz CKM. Porém o termo dominante em $\Gamma(l_i \rightarrow l_j + \bar{\nu}_j + \nu_i)$ não é mais proporcional à massa do lépton final (como era o caso nos decaimentos dos mésons), pois o decaimento do SM é um decaimento em 3 corpos. Isto resulta em uma redução da taxa de decaimento quando incluimos Majorons, ao invés de um aumento como no caso dos mésons. Mas ainda é possível obter bons limites para certos decaimentos.

Usando os valores experimentais para as taxas de decaimento do μ e do τ [24], os se-

guintes limites foram obtidos, respectivamente sem e com as contribuições do escalar χ :

$$\sum_{\alpha} |g_{\mu\alpha}|^2 < 4 \times 10^{-4} \quad (2.7 \times 10^{-4}), \quad \sum_{\alpha} |g_{\tau\alpha}|^2 < 10 \times 10^{-2} \quad (5.5 \times 10^{-2}).$$

Espectro do Decaimento de Léptons

Outro método que pode ser utilizado para melhorar os vínculos obtidos acima é a análise do espectro do elétron emitido no decaimento do múon, que pode ser alterado pela inclusão de Majorons. O espectro normalizado para o SM e para decaimentos com emissão de Majorons estão mostrados na Figura C.2.

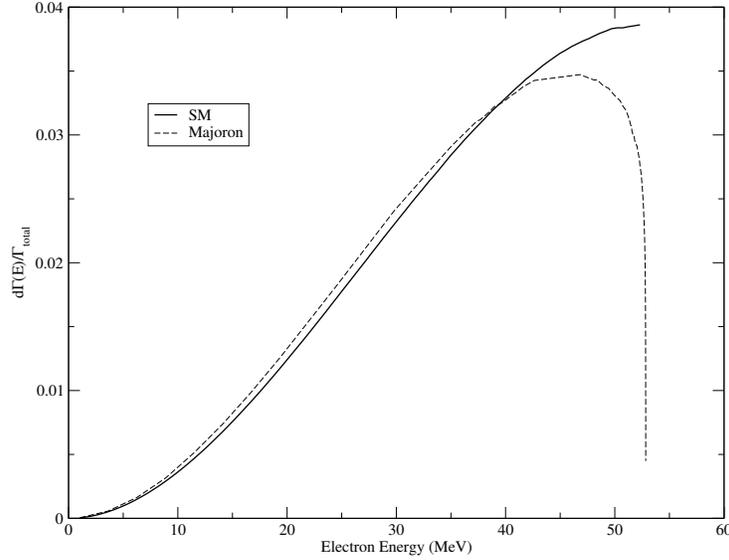


Figura C.2: Espectros normalizados do elétron para o decaimento do múon no SM (linha cheia) e apenas com emissão de Majoron (linha tracejada).

Medidas precisas do espectro do elétron (utilizadas para vincular outros tipos de interações) podem vincular g se considerarmos as alterações no espectro do SM após a inclusão de Majorons. A análise padrão parametriza o espectro do elétron com dois parâmetros (ρ e η) [24]:

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} x^2 \left[3(1-x) + \frac{2}{3}\rho(4x-3) + 3\eta \frac{m_e}{E_{max}} \frac{1-x}{x} \right]$$

onde $x = \frac{E}{E_{max}}$ e $E_{max} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu}$. Para o Modelo Padrão, os valores previstos são $\rho = 0.75$ e $\eta = 0$:

$$\frac{d\Gamma_{SM}(x)}{dx} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} \left[\frac{3}{2}x^2 - x^3 \right]$$

Os valores experimentais atuais são [24] $\rho = 0.7509 \pm 0.001$ e $\eta = 0.001 \pm 0.024$.

Como o espectro com Majorons é naturalmente suprimido (mesmo com $g = 1$), quando consideramos o espectro total (SM mais Majoron), encontramos apenas pequenos desvios do espectro do Modelo Padrão:

$$\frac{d\Gamma_{total}(x)}{dx} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} [0.0066g^2 - 0.09g^2x + (\frac{3}{2} + 0.35g^2)x^2 - (1 + 0.25g^2)x^3]$$

Da expressão acima e da Figura C.2 vemos que a região mais sensível do espectro é a de altas energias ($x \sim 1$), que pode ser usada para limitar g . A Figura C.3 mostra a região permitida pelos dados experimentais (região entre linhas cinzas) e a forma do espectro total (incluindo as contribuições do SM e dos Majorons) para diferentes valores de $\sum_\alpha |g_{\mu\alpha}|^2$.

Uma análise mais cuidadosa de todo o espectro resulta em (com 90% CL):

$$\sum_\alpha |g_{\mu\alpha}|^2 < 9 \times 10^{-3}$$

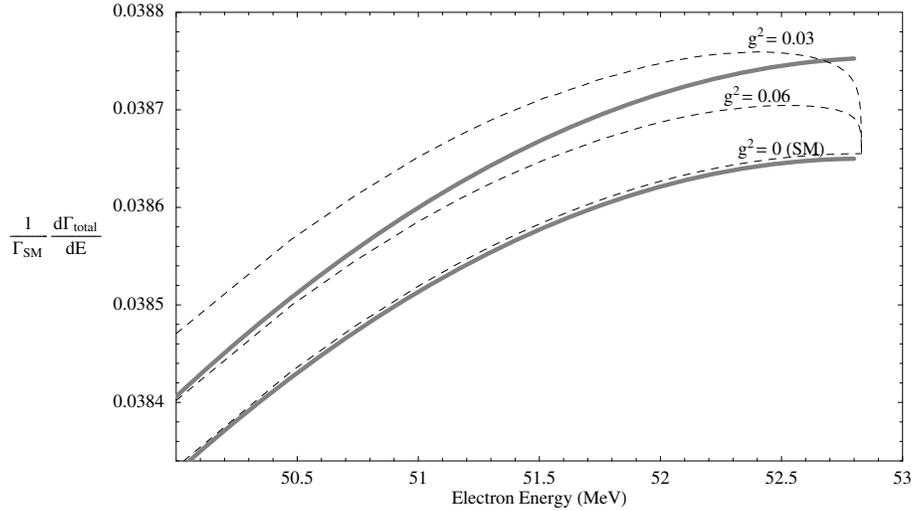


Figura C.3: Região experimental permitida (entre linhas cheias) para o espectro do elétron e o espectro total predito (SM mais Majorons) para três valores de $g^2 = \sum_\alpha |g_{\mu\alpha}|^2$.

Como pode ser visto na Figura C.4, as principais modificações causadas pela inclusão do Majoron ocorrem no espectro do neutrino, que foi recentemente medido pelo experimento Karmen [79]. Porém, devido às incertezas experimentais, os limites para g obtidos neste caso não são significativos.

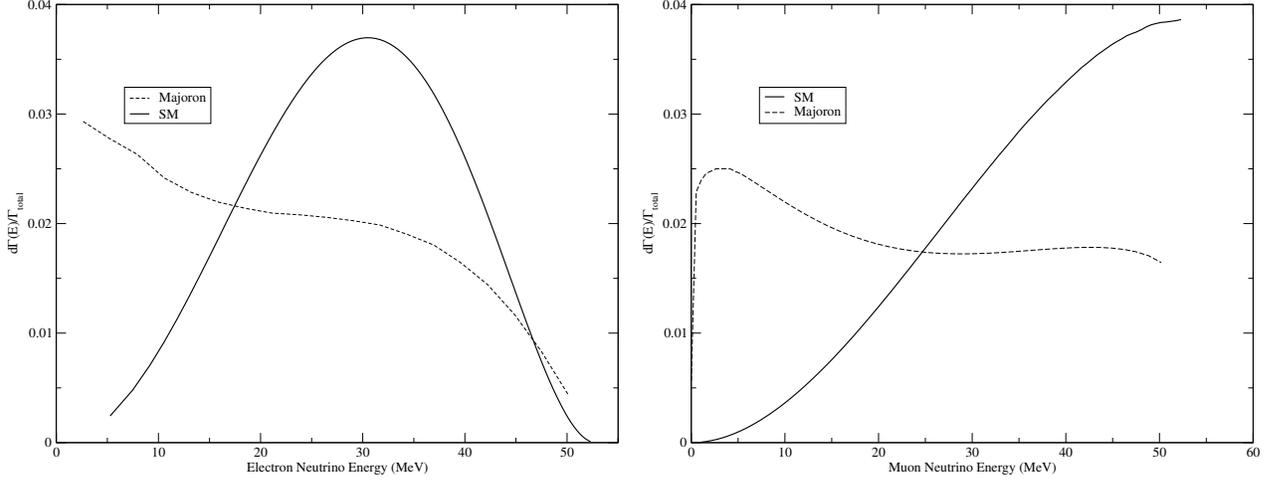


Figura C.4: À esquerda (direta) está o espectro normalizado do neutrino do elétron (múon) para o decaimento do múon no Modelo Padrão (curva cheia) e apenas com emissão do Majoron (linha tracejada). Em ambos os casos assumimos uma matriz $g_{\alpha\beta}$ diagonal.

Base de Massa

Todos os resultados obtidos até então estão expressos na base de sabor. No entanto, em muitos casos, análises fenomenológicas são mais fáceis na base de massa. Nesta seção assumiremos neutrinos de Majorana para transformar nossos limites para a base de massa.

Podemos traduzir nossos resultados anteriores para a base de massa utilizando a matriz de transformação U [24]:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \text{diag}(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1)$$

onde $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ e $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$. Para calcular os limites na base de massa, assumimos que a matriz de acoplamentos é proporcional à matriz de massa [80]:

$$G = \text{diag}(g_1, g_2, g_3) \propto \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad (\text{C.11})$$

onde G é a matriz de acoplamentos na base de massa:

$$G = U^T g U \quad (\text{C.12})$$

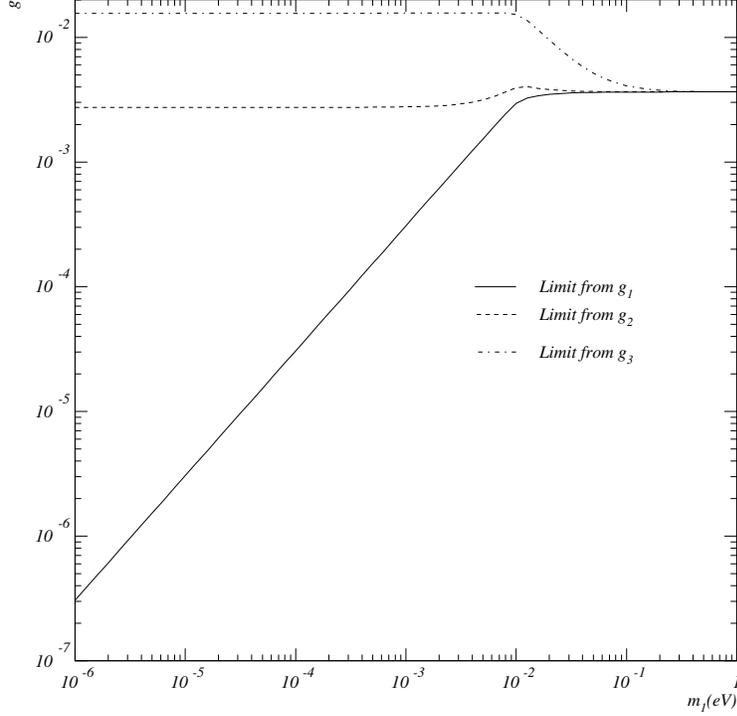


Figura C.5: Curvas de exclusão no plano $m_1 - g_1$. Estão exibidas as curvas para g_1 , g_2 e g_3 . Estas curvas foram obtidas para $\theta_{13} = 0$, valores não-nulos de θ_{13} são mais restritivos.

Apesar desta suposição não ser válida em geral, muitos modelos têm estas propriedades (pelo menos em algum limite). Usando a Eq.(C.11) e a Eq.(C.12), podemos escrever todos os elementos de G em termos de g_1 , m_1 e das diferenças de massa [80]:

$$\Delta m_{12}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 = \Delta m_{\odot}^2 \text{ e } \Delta m_{23}^2 \equiv m_3^2 - m_2^2 = \Delta m_{atm}^2$$

Usando o limite conservativo

$$\sum_{\alpha} |g_{l\alpha}|^2 < L_{l\alpha}^2 \Rightarrow |g_{l\alpha}| < L_{l\alpha}$$

e impondo

$$g_{\alpha\beta} = (U^* G U^\dagger)_{\alpha\beta} < L_{\alpha\beta}$$

podemos vincular o plano $m_1 - g_1$. Apesar de as diferenças de massa e dos ângulos de mistura terem sido medidos experimentalmente [24], não temos nenhuma informação sobre

as fases de Majorana δ , α_1 e α_2 . Seguindo o que foi feito em [80], nós calculamos a região permitida para diferentes valores de δ , α_1 e α_2 e então escolhemos a união destas regiões como o resultado final, como pode ser visto na Figura C.5.

C.1.2 Conclusões

Usando três técnicas diferentes nós conseguimos obter os seguintes vínculos para a matriz de acoplamentos neutrino-Majoron $g_{\alpha\beta}$ (incluindo a contribuição do escalar χ):

$$\sum_{\alpha} |g_{e\alpha}|^2 < 5.5 \times 10^{-6} \text{ (decaimento do } K \text{)} \quad \sum_{\alpha} |g_{\mu\alpha}|^2 < 4.5 \times 10^{-5} \text{ (decaimento do } K \text{)}$$

$$\sum_{\alpha} |g_{\tau\alpha}|^2 < 5.5 \times 10^{-2} \text{ (decaimento do } \tau \text{)}$$

Considerando apenas os limites provenientes dos decaimentos de mésons, nós melhoramos os limites anteriores para $\sum_{\alpha} |g_{e\alpha}|^2$ e $\sum_{\alpha} |g_{\mu\alpha}|^2$ [63, 64, 65] em uma ordem de magnitude . Apesar dos melhores limites terem sido obtidos dos decaimentos dos mésons, nós mostramos que limites independentes também podem ser obtidos do decaimento do μ e do τ . Este último sendo o melhor para vincular os elementos $g_{\tau\alpha}$.

A terceira alternativa utilizada foi a análise do espectro do decaimento do múon. Apesar de seu potencial para vincular os elementos $g_{\mu\alpha}$, os valores experimentais não são suficientemente precisos para tornar esta análise útil.

Como os modelos citados aqui visam explicar a escala de massa dos neutrinos, é conveniente analisar os limites para os acoplamentos neutrino-Majoron na base de massa. Com isso em mente, nós transformamos todos os nossos resultados da base de sabor para a base de massa, usando os valores atuais para os ângulos da matriz de mistura dos neutrinos. Como mostrado acima, os limites na base de massa são em geral mais fracos do que na base de sabor.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev.* **D73**, 013003 (2006).
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1 (Cambridge University Press, 1995).
- [3] T. Inui, Y. Tanabe, and Y. Onodera, *Group Theory and its Applications in Physics* (Springer, 1996).
- [4] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions* (Addison-Wesley, 1997).
- [5] P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction* (Institute of Physics Publishing, 1986).
- [6] M. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
- [7] S. Coleman and J. Mandula, *Physical Review* **159**, 1251 (1967).
- [8] I. Aitchison, [hep-ph/0505105](#).
- [9] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 3 (Cambridge University Press, 2000).
- [10] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, *Nuclear Physics B* **88**, 257 (1975).
- [11] M. Drees, R. Godbole, and P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles* (World Scientific, 2005).
- [12] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory* (Institute of Physics Publishing, 1999).
- [13] A. Bilal, [hep-ph/0101055](#).
- [14] L. O’Raifeartaigh, *Nuclear Physics B* **96**, 331 (1975).
- [15] H. Baer and X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry* (Cambridge University Press, 2006).
- [16] M. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos* (EDUSP, 2002).
- [17] E. J. Weinberg (1973), [hep-th/0507214](#).

- [18] J. R. Ellis, K. A. Olive, and Y. Santoso, *New J. Phys.* **4**, 32 (2002).
- [19] G. W. Anderson and D. J. Castano, *Phys. Rev.* **D52**, 1693 (1995).
- [20] H. Murayama (2000), [hep-ph/0002232](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0002232).
- [21] D. J. H. Chung et al., *Phys. Rept.* **407**, 1 (2005).
- [22] L. Girardello and M. T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194**, 65 (1982).
- [23] B. C. Allanach, A. Djouadi, J. L. Kneur, W. Porod, and P. Slavich, *JHEP* **09**, 044 (2004).
- [24] W. M. Yao et al. (Particle Data Group), *J. Phys.* **G33**, 1 (2006).
- [25] G. Raz, *Physical Review D* **66**, 037701 (2002).
- [26] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero, and L. Silvestrini, *Nuclear Physics B* **477**, 321 (1996).
- [27] K. Agashe and M. Graesser, *Phys. Rev.* **D59**, 015007 (1999).
- [28] H. Murayama, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 18 (1997).
- [29] L. J. Hall, J. D. Lykken, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27**, 2359 (1983).
- [30] D. J. Castano, E. J. Piard, and P. Ramond, *Phys. Rev.* **D49**, 4882 (1994).
- [31] Y. Yamada, *Phys. Rev.* **D50**, 3537 (1994).
- [32] A. Djouadi, J.-L. Kneur, and G. Moultaka (2002), [hep-ph/0211331](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0211331).
- [33] A. Heister et al. (ALEPH), *Phys. Lett.* **B526**, 206 (2002).
- [34] R. Barate et al. (LEP Working Group for Higgs boson searches), *Phys. Lett.* **B565**, 61 (2003).
- [35] P. Achard et al. (L3), *Phys. Lett.* **B580**, 37 (2004).
- [36] P. K. Mal (D0) (2006), [hep-ex/0610083](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0610083).
- [37] E. Lytken (CDF and D0) (2006), [hep-ex/0605061](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0605061).
- [38] R. R. de Austri, R. Trotta, and L. Roszkowski, *JHEP* **05**, 002 (2006).
- [39] B. C. Allanach and C. G. Lester, *Phys. Rev.* **D73**, 015013 (2006).
- [40] LEP SUSY Working Group (ALEPH) (2002), <http://lepsusy.web.cern.ch/lepsusy>.
- [41] D. Stockinger (2006), [hep-ph/0609168](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0609168).
- [42] S. Heinemeyer, W. Hollik, D. Stockinger, A. M. Weber, and G. Weiglein (2006), [hep-ph/0611371](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0611371).

- [43] A. Sopczak, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **109B**, 271 (2002).
- [44] J. R. Ellis, S. Heinemeyer, K. Olive, and G. Weiglein (2005), hep-ph/0508169.
- [45] J. R. Ellis, S. Heinemeyer, K. A. Olive, and G. Weiglein, JHEP **05**, 005 (2006).
- [46] Z.-j. Xiao, F.-g. Li, and W.-j. Zou, Commun. Theor. Phys. **46**, 687 (2006).
- [47] V. Buescher et al. (2006), hep-ph/0608322.
- [48] H. Baer, C. Balazs, A. Belyaev, T. Krupovnickas, and X. Tata, JHEP **06**, 054 (2003).
- [49] B. C. Allanach, J. P. J. Hetherington, M. A. Parker, and B. R. Webber, JHEP **08**, 017 (2000).
- [50] J. C. Romao, C. A. Santos, and J. W. F. Valle, Phys. Lett. **B288**, 311 (1992).
- [51] Y. Chikashige, R. N. Mohapatra, and R. D. Peccei, Phys. Rev. Lett. **45**, 1926 (1980).
- [52] G. B. Gelmini and M. Roncadelli, Phys. Lett. **B99**, 411 (1981).
- [53] D. Decamp et al. (ALEPH), Phys. Lett. **B231**, 519 (1989).
- [54] M. Z. Akrawy et al. (OPAL), Phys. Lett. **B231**, 530 (1989).
- [55] M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, Phys. Lett. **B232**, 383 (1989).
- [56] J. W. F. Valle (1996), hep-ph/9603307.
- [57] A. Masiero and J. W. F. Valle, Phys. Lett. **B251**, 273 (1990).
- [58] J. C. Romao and J. W. F. Valle, Nucl. Phys. **B381**, 87 (1992).
- [59] J. F. Beacom, N. F. Bell, and S. Dodelson, Phys. Rev. Lett. **93**, 121302 (2004).
- [60] J. F. Beacom and N. F. Bell, Phys. Rev. D **65**, 113009 (2002).
- [61] Y. Farzan, Phys. Rev. D **67**, 073015 (2003).
- [62] R. Arnold et al. (NEMO), Nucl. Phys. A **765**, 483 (2006).
- [63] V. D. Barger, W. Y. Keung, and S. Pakvasa, Phys. Rev. **D25**, 907 (1982).
- [64] G. B. Gelmini, S. Nussinov, and M. Roncadelli, Nucl. Phys. **B209**, 157 (1982).
- [65] D. I. Britton et al., Phys. Rev. **D49**, 28 (1994).
- [66] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **140**, 418 (2001).
- [67] R. Mertig, M. Bohm, and A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64**, 345 (1991).
- [68] T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999).

- [69] C. T. H. Davies et al. (HPQCD Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 022001 (2004).
- [70] A. Gray et al. (HPQCD Collaboration), Phys. Rev. Lett. **95**, 212001 (2005).
- [71] C. Aubin et al. (MILC Collaboration), Phys. Rev. **D70**, 114501 (2004).
- [72] M. Wingate, C. T. H. Davies, A. Gray, G. P. Lepage, and J. Shigemitsu, Phys. Rev. Lett. **92**, 162001 (2004).
- [73] T.-W. Chiu, T.-H. Hsieh, J.-Y. Lee, P.-H. Liu, and H.-J. Chang, Phys. Lett. **B624**, 31 (2005).
- [74] L. Fiorini (NA48/2 Collaboration), ICHEP05, July 21st - 27th 2005, Lisboa, Portugal (2005).
- [75] M. Artuso et al. (CLEO) (2006), [hep-ex/0607074](#).
- [76] M. Artuso et al. (CLEO), Phys. Rev. Lett. **95**, 251801 (2005).
- [77] L. A. Corwin (the BaBar Collaboration) (2006).
- [78] N. Satoyama (Belle) (2006), [hep-ex/0611045](#).
- [79] R. Maschuw et al. (KARMEN Collaboration), Prog. Part. Nucl. Phys. **40**, 183 (1998).
- [80] R. Tomas, H. Pas, and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D64**, 095005 (2001).