

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Departamento de Eletrônica Quântica

Grupo de Óptica Quântica

O Modelo Raman Quase-Degenerado

e

Transferência de Emaranhamento

Felipe de Campos Lourenço

Orientador: Antonio Vidiella Barranco

Dissertação apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Campinas, 6 de maio de 2008.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida
pelo aluno Felipe de Campos Lourenço e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 6 de maio de 2008.



Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

**FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

L934m	Lourenço, Felipe de Campos O modelo Raman quase-degenerado e transferência de emaranhamento / Felipe de Campos Lourenço. – Campinas, SP : [s.n.], 2008. Orientador: Antonio Vidiella Barranco. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin". 1. Interação átomo-fóton. 2. Manipulação de emaranhamento. I. Vidiella Barranco, Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título. (vsv/ifgw)
-------	---

- **Título em inglês:** The quasi-degenerative Raman model and entanglement reciprocation
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Atom-photon interaction
 - 2. Entanglement manipulation
- **Área de concentração:** Física Atômica e Molecular
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**
 - Prof. Antonio Vidiella Barranco
 - Prof. Salomon Sylvain Mizrahi
 - Prof. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar
- **Data da defesa:** 17.04.2008
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **FELIPE DE CAMPOS LOURENÇO – RA 016035** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 17 / 04 / 2007.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco (Orientador do Candidato)
DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi
DF/UFSCar

Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar
DFMC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

*“O correr da vida embrulha tudo.
A vida é assim: esquentada e esfria, apertada e daí afrouxa,
sossega e depois desinquieta.
O que ela quer da gente é coragem.”*
GUIMARÃES ROSA

Ao meu pai, José Maria Lourenço Junior, minha mãe, Ilza Aparecida de Campos Lourenço e meu irmão, Tiago de Campos Lourenço, agradeço o apoio incondicional. Sem o esforço deles não teria me formado físico e nem escrito essa dissertação. À Elita Selmara de Abreu agradeço o apoio em todas as decisões, as discussões, os conselhos sempre oportunos e, claro, a paciência. Antonio Vidiella Barranco, meu orientador, me ensinou a fazer pesquisa de maneira completa e foi essencial para a realização dessa dissertação e dos nossos trabalhos. Sou muito grato à ele. Também agradeço à todos os colegas do grupo de Óptica Quântica pela agradável convivência nesses quase quatro anos e pelas discussões sobre física, que contribuíram para minha formação. Não menos importantes foram os meus amigos, tanto aqueles conhecidos na Unicamp, como aqueles que me acompanham desde muitos anos atrás.

Por fim, agradeço a todos que se dedicam ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” e à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento, não só dos meus estudos de mestrado, como também do meu projeto de iniciação científica.

Resumo

O principal propósito dessa dissertação é estudar um novo modelo de interação entre um átomo e um modo do campo eletromagnético quantizado, assim como a sua aplicação no problema de transferência de emaranhamento entre qubits e sistemas de variáveis contínuas. Inicialmente, apresentamos uma revisão do principal modelo de interação átomo-campo quantizado, conhecido como modelo de Jaynes-Cummings, e também uma introdução ao emaranhamento, com o objetivo de estabelecer as medidas que serão utilizadas no restante do trabalho. Após essa parte introdutória, baseados no já conhecido modelo Raman degenerado, propomos o modelo Raman Quase-degenerado com intuito de descrever a interação de um átomo de três níveis na configuração Λ e um modo do campo quantizado. Admitimos que o campo, no limite dispersivo, acopla os dois níveis atômicos inferiores ao estado de maior energia e este é eliminado por uma transformação unitária, ou por eliminação adiabática. Dessa forma, ele passa a desempenhar o papel de um nível virtual que possibilita a transição efetiva entre os dois estados de menor energia do átomo. Para chegarmos à forma final do Hamiltoniano efetivo, ainda supomos que a diferença de energia entre os dois níveis inferiores é muito pequena se comparada à dessintonia do nível excitado em relação à frequência do campo interagente. A partir das equações que descrevem a dinâmica do átomo interagindo com um campo coerente, investigamos a transferência de emaranhamento de um par de átomos maximamente emaranhados para um par de cavidades preparadas inicialmente no estado puro e separável de campo coerente. Naturalmente, também consideramos a transferência no sentido contrário, campo $\rightarrow$ átomo. Os resultados obtidos mostram que é possível a transferência completa nas duas situações. O último assunto abordado nessa dissertação foram os estados coerentes emaranhados do tipo cluster. Propomos um esquema para a geração desse tipo de estado entre quatro cavidades separadas espacialmente utilizando apenas um átomo e duas zonas de Ramsey e também estudamos a influência da dissipação de energia.

Abstract

The main purpose of this dissertation is to study a new model to describe the interaction between an atom and a mode of the quantized electromagnetic field and also its application to the entanglement reciprocation problem between qubits and continuous variable systems. Firstly, we review the main model used to describe the atom-field interaction, known as the Jaynes-Cummings model, and also make an introduction to entanglement, aiming to establish the measures that will be used latter. After this introductory part and based on the known degenerate Raman model, we propose the Quasi-degenerate Raman model with the intention to describe the interaction between a three level atom in the Λ configuration and a mode of the quantized field. We admit that the field, in the dispersive limit, couples the two lower atomic levels to the highest energy state, which is then eliminated by a unitary transformation, or by an adiabatic elimination. In this way, it plays the role of a virtual level which enables the effective transition between the other two lower energy levels. To get to the final form of the effective Hamiltonian we still assume that the energy difference between these two lower energy levels is too small when compared to the detuning of the excited level. From the equations that describe the dynamics of an atom interacting with a coherent field, we investigate the entanglement transfer from two maximally entangled atoms to two cavities initially prepared in a pure separable coherent state. Naturally, we also consider the transfer on the opposite way, field $\rightarrow$ atom. Our results show that the complete entanglement reciprocation is possible. The last subject of this dissertation is the cluster-type entangled coherent states. We propose a new scheme for the generation of this kind of state among four spatially separated cavities using only one atom and two Ramsey zones and also study the energy dissipation influence.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Teoria Elementar	4
1.1 Interação Clássica Elétron-Campo E.M.	4
1.1.1 Dedução da Lagrangeana e do Hamiltoniano	4
1.1.2 A aproximação de dipolo	6
1.2 Átomo de dois níveis num campo clássico	7
1.3 Modelo de Jaynes-Cummings	8
1.3.1 Hamiltoniano de interação átomo-campo	9
1.3.1.1 Solução do Hamiltoniano de JC	11
1.3.2 Limite ressonante	11
1.3.3 Limite dispersivo	12
1.3.3.1 Dinâmica com Campo Coerente	13
1.4 Introdução ao Emaranhamento	13
1.4.1 Definição	14
1.4.2 Medidas de Emaranhamento	15
1.4.2.1 Postulados	15
1.4.2.2 Entropia de von Neumann (ou Entropia de Emaranhamento)	16
1.4.2.3 Emaranhamento de Formação/ <i>Concurrence</i>	17
1.4.2.4 Negatividade e Negatividade Logarítmica	18
2 O Modelo Raman Quase-Degenerado	19
2.1 Dedução do Hamiltoniano efetivo	19
2.1.1 Aplicação do limite $\delta/\Delta \ll 1$	21
2.2 Diagonalização de $\mathcal{H}$	22
2.3 Dinâmica gerada pelo Hamiltoniano efetivo	23
2.4 Limite degenerado	26
3 Transferência de Emaranhamento Átomo $\leftrightarrow$ Campo	29
3.1 Transferência de emaranhamento com o modelo Jaynes - Cummings	29
3.2 Transferência de emaranhamento com o modelo Raman Quase-degenerado	33
3.2.1 Transferência no limite degenerado	38
3.3 Conclusão	41
4 Estados Coerentes Emaranhados do tipo Cluster	43
4.1 Introdução	43
4.2 Esquema de geração	45
4.3 Dissipação de energia nos CTECS	47
Conclusões e Perspectivas Futuras	50

A	Identidades Matemáticas	52
B	Teoria de Perturbação	55
C	Estados Não-Ortogonais Emaranhados	57
D	Cavidades Emaranhadas com Dissipação	58
	Referências Bibliográficas	61

Termo de autorização para utilização das figuras 3.1 e 3.2

*“Reprinted figures with permission from J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, Phys. Rev. Lett., **96** 080501 (2006). Copyright 2008 by the American Physical Society.”*

Para a utilização da versão eletrônica dessa dissertação, os leitores devem observar também a seguinte mensagem em relação as figuras 3.1 e 3.2:

“Readers may view, browse, and/or download material for temporary copying purposes only, provided these uses are for noncommercial personal purposes. Except as provided by law, this material may not be further reproduced, distributed, transmitted, modified, adapted, performed, displayed, published, or sold in whole or part, without prior written permission from the American Physical Society.”

Link para o arquivo original:

J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, Phys. Rev. Lett., **96** 080501 (2006)

Lista de Figuras

1.1	Níveis de energia de um átomo de dois níveis interagindo com um campo clássico de frequência ν	7
1.2	Esquema da interação descrita pelo modelo de JC. Criação de um fóton pelo decaimento do átomo (esquerda) e absorção de um fóton pelo átomo que passa a ocupar um estado de maior energia (direita).	9
2.1	Configuração atômica do modelo Raman quase-degenerado. A diferença de energia entre os dois níveis inferiores é definida por $\hbar\delta = E_{g_2} - E_{g_1}$, g_1 e g_2 são as constantes de acoplamento das respectivas transições e a dessintonia entre a frequência do campo (ω) e as frequências de transição atômica é $\hbar\Delta = E_e - E_{g_1} - \hbar\omega$	19
2.2	Configuração atômica do modelo Raman degenerado.	26
2.3	Inversão atômica no modelo Raman degenerado em função do tempo de interação do átomo com um campo coerente (linha sólida) e com um campo térmico (linha tracejada). O número médio de fótons é $\langle n \rangle = 25$. Note as oscilações de Rabi induzidas pelo campo coerente e a relaxação causada pelo campo térmico.	28
3.1	(a) Emaranhamento das cavidades em função do tempo de interação λt em unidades de π e da amplitude α dos campos coerentes iniciais. (b) Probabilidade de detectar os átomos no estado fundamental após deixarem as cavidades. “Reprinted figure with permission from J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, <i>Phys. Rev. Lett.</i> , 96 080501 (2006). Copyright 2008 by the American Physical Society.” http://link.aps.org/abstract/PRL/v96/e080501	31
3.2	(a) Emaranhamento do segundo par de átomos em função do tempo de interação ($\lambda t' = \lambda t$) e da amplitude coerente α . (b) Gráfico análogo para o caso no qual é feita a pós-seleção das cavidades no estado coerente $ \alpha\rangle$. Note a semelhança com o gráfico da figura 3.1 (a). “Reprinted figure with permission from J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, <i>Phys. Rev. Lett.</i> , 96 080501 (2006). Copyright 2008 by the American Physical Society.” http://link.aps.org/abstract/PRL/v96/e080501	33
3.3	O esquema de projeção da cavidade no estado coerente $ \alpha\rangle$ consiste basicamente em injetar um coerente de amplitude $-\alpha$ e monitorar o número de fótons que sai da cavidade após a liberação de um dos espelhos (o que pode ser feito com uma corrente elétrica que diminui a sua qualidade). Se nenhum fóton for detectado, então a cavidade estava no estado $ \alpha\rangle$; caso contrário deve-se repetir o experimento até seleção do evento desejado.	34
3.4	Emaranhamento do estado $ \text{cav-3}\rangle$. Inicialmente prepara-se as cavidades com um campo coerente de amplitude $\alpha = 1$ (pontilhada), $\alpha = 3$ (tracejada) e $\alpha = 5$ (sólida). É interessante dizer que basta determinar a fração $\frac{\Delta\epsilon}{\lambda_0} = \frac{\delta}{g_1^2/\Delta}$, dos parâmetros atômicos do problema, para que o emaranhamento se torne uma função apenas do tempo e de α . Neste gráfico escolhemos $\Delta\epsilon/\lambda_0 = 1/10$	36
3.5	Gráfico do emaranhamento das cavidades, no estado $ \text{cav-3}\rangle$, em função do tempo de interação e da amplitude coerente inicial das cavidades. Neste gráfico foi feita a escolha $\Delta\epsilon/\lambda_0 = 1/10$	37
3.6	Emaranhamento do estado $ \text{cav-3}\rangle$ em função do parâmetro $\frac{\Delta\epsilon}{\lambda_0} = \frac{\delta}{g_1^2/\Delta}$. A linha pontilhada corresponde à $\alpha = 1$, a tracejada à $\alpha = 3$ e a sólida à $\alpha = 5$. Escolhemos o tempo de interação que maximiza o emaranhamento das cavidades: $\lambda_0 t = \pi/2$. . .	38

3.7	Emaranhamento do estado $ f_1\rangle_{ab}$ em função do tempo de interação e da amplitude do campo coerente inicial $ \alpha\rangle$ das cavidades. Perceba a semelhança com a figura 3.5, do caso quase-degenerado.	40
3.8	Emaranhamento do estado 3.19 em função da amplitude coerente inicial das cavidades. Perceba que se $\alpha > 1$ já temos a transferência completa de emaranhamento. . .	41
4.1	Esquema de montagem para geração dos CTECS com a interação JC dispersiva: quatro cavidades (C_i), duas zonas de Ramsey (RZ), um átomo (cujo percurso é indicado pela seta e o estado inicial é $(e\rangle + g\rangle)/\sqrt{2}$) e o detector atômico (D). Para a interação Raman degenerado o esquema possui duas modificações: a última RZ é descartada e o estado inicial do átomo é $ e\rangle$	46
4.2	A pureza de um CTECS como função do tempo de dissipação t e da amplitude coerente α . Nesse gráfico consideramos $N = 4$ cavidades.	49
D.1	Emaranhamento das cavidades em função do tempo de dissipação, o estado inicial das cavidades é $ f_+\rangle_{ab}$. Amplitudes coerentes escolhidas: $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1$ (tracejado) e $\alpha = 2$ (pontilhado).	59
D.2	Emaranhamento das cavidades em função do tempo de dissipação, o estado inicial das cavidades é $ f_-\rangle_{ab}$ e γ é a constante de dissipação. Amplitudes coerentes escolhidas: $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1$ (tracejado) e $\alpha = 2$ (pontilhado).	60

Introdução

A interação entre (poucos) átomos e fótons é um dos principais assuntos estudados dentro da área de pesquisa que ficou conhecida como Óptica Quântica. Em 1963, Jaynes e Cummings [1] apresentaram o primeiro modelo totalmente quântico para descrever a interação entre um átomo de dois níveis e o campo, que foi utilizado para examinar a emissão espontânea e revelou a existência de frequências de Rabi [2] na população dos estados atômicos quando o campo tem uma distribuição bem definida do número de fótons (como o estado de Fock).

Por exemplo, imagine um átomo de dois níveis, preparado no estado excitado, entrando numa cavidade no estado de vácuo do campo eletromagnético. O modelo de Jaynes-Cummings prevê que a população dos estados atômicos varia periodicamente entre o estado excitado $|e\rangle$ e o estado fundamental $|g\rangle$, com uma frequência característica λ (constante de acoplamento da interação átomo-campo), ou seja, o átomo sofre uma espécie de “emissão espontânea reversível”; a energia eletromagnética é emitida e absorvida periodicamente para um tempo de interação suficientemente longo. Outra conclusão interessante que tiramos desse exemplo é que a interação de sistemas quânticos produz certo tipo de correlações, já que se o átomo for detectado no seu estado fundamental, após deixar a cavidade, então inferimos que a cavidade passou do estado de vácuo para o estado de Fock de um fótons. Da mesma maneira, inferimos que a cavidade está no estado de vácuo se o átomo for medido no seu estado excitado. Matematicamente, devemos utilizar o princípio da superposição - uma das propriedades mais fundamentais da Mecânica Quântica - para escrever o estado do sistema após um tempo de interação: $a|0\rangle|e\rangle \pm b|1\rangle|g\rangle$, sendo a e b as amplitudes de probabilidade, que dependem de t , de encontrarmos o sistema no respectivo estado. Esse tipo de correlação, também conhecida como correlação quântica ou emaranhamento, aparece em diversos sistemas físicos e deu origem a um complexo formalismo que visa caracterizá-la tanto qualitativamente quanto quantitativamente. Além disso, esses estados quânticos fortemente correlacionados, ou estados emaranhados, passaram a ocupar papel central nos inúmeros trabalhos de informação quântica que surgiram nas duas últimas décadas.

Nesta dissertação, em particular, damos atenção especial ao caso de um átomo de três níveis interagindo com um modo do campo eletromagnético. Quando a dessintonia do estado atômico intermediário, que acopla os outros dois níveis através do campo, é muito alta, podemos eliminá-lo adiabaticamente [3], fazendo com que ele se torne um nível virtual. Através dessa eliminação, obtém-se um “átomo de dois níveis” cujas transições efetivas ocorrem via transições de dois fótons ($a_2^\dagger a_1$) se consideramos dois modos do campo ou via transições de zero fótons ($a^\dagger a$) se considerarmos apenas um modo do campo¹. O primeiro trabalho a explorar um átomo de três níveis na configuração Λ interagindo no limite dispersivo com um modo do campo eletromagnético foi publicado em 1986 por Peter L. Knight [4]. Nessa referência considera-se um átomo degenerado, de forma que os dois níveis inferiores possuam a mesma energia (menor que a do nível intermediário), e que o campo acopla a transição entre cada nível inferior e o intermediário. O Hamiltoniano efetivo obtido nesse limite apresenta uma dinâmica periódica bastante simples e que permite a obtenção de resultados analíticos como no caso do modelo de Jaynes-Cummings. Aqui também podemos explorar propriedades puramente quânticas dos estados de campo gerados após a interação com o átomo.

Inspirados por esse e outros trabalhos relacionados, nos propusemos a investigar o sistema físico composto de um átomo quase-degenerado² na configuração Λ e um modo do campo eletromagnético.

¹Aqui justifica-se o termo “modelo Raman degenerado” que será utilizado posteriormente ao referir-se à este modelo, já que no caso de dois modos temos um processo análogo ao espalhamento Raman, no qual um fóton do feixe de bombeio é absorvido e um fóton do feixe de Stokes é emitido.

²Utilizamos o termo “quase-degenerado” para indicar que, apesar dos dois níveis inferiores não possuírem a mesma

Essa generalização aparece naturalmente quando pensamos que assim um único fóton poderá satisfazer as regras de seleção das duas transições e que podemos obter o modelo anterior como o limite completamente degenerado desse novo modelo. O Hamiltoniano efetivo que descreve essa situação é obtido após a aplicação dos dois limites envolvidos: o limite dispersivo e o limite quase-degenerado. Matematicamente, esses limites são implementados por transformações unitárias que são escritas como uma série de potências do parâmetro de expansão e truncadas, guardando termos até primeira ordem desse parâmetro. Os resultados obtidos para o cálculo da evolução do sistema átomo-campo exibe, em parte, a mesma simplicidade matemática do caso degenerado, o que nos permitiu generalizar um outro trabalho que vínhamos desenvolvendo paralelamente.

A transferência de emaranhamento entre qubits e sistemas variáveis contínuas foi primeiramente estudada por J. Lee *et al.* [5] em 2006, no âmbito do modelo de Jaynes-Cummings. Descobrimos que este tipo de problema constituiria uma aplicação interessante do modelo de interação desenvolvido nesta dissertação, com átomos de três níveis na configuração Λ (quase) degenerada e o campo no estado coerente, que representa o sistema de variáveis contínuas. Em particular, esse tipo de interação átomo-campo coerente é descrita por equações que favorecem a obtenção de resultados analíticos para o esquema de transferência de emaranhamento; o que possibilitou, por exemplo, mostrar que podemos obter a transferência completa independentemente da amplitude coerente inicial e do tempo de interação. Além do mais, a periodicidade da dinâmica também aparece no emaranhamento transferido aos campos, o que reduz consideravelmente as restrições impostas sobre o tempo de interação.

Outro tópico analisado nessa dissertação foi a geração de estados coerentes emaranhados do tipo cluster [6]. Esses estados, que são composto por quatro cavidades na proposta original, constituem uma nova classe de estados emaranhados [7] e possuem perspectiva de aplicação em protocolos de informação quântica - assim como a sua versão baseada em qubits [8]. O objetivo desse estudo foi buscar um esquema mais simples em relação ao que já foi proposto para a geração desse tipo de estado e também investigar qual a influência da dissipação de energia nesses estados. O primeiro objetivo foi alcançado quando percebemos que, utilizando um átomo cuja interação deixasse o campo coerente num estado do tipo gato de Schrödinger ($|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$), poderíamos obter o estado desejado colocando as cavidades em sequência e utilizando uma (ou duas) zonas de Ramsey convenientemente posicionadas. A segunda parte do nosso estudo foi extremamente simplificada ao reescrevermos os estados envolvidos de uma forma bastante compacta, o que inclusive permitiu a generalização para o caso de N cavidades emaranhadas e a obtenção de uma expressão analítica para operador densidade dependente do tempo de dissipação.

A organização dessa dissertação é a seguinte: no capítulo 1 reunimos alguns conceitos e cálculos elementares para o desenvolvimento dos assuntos abordados na dissertação. Primeiramente, deduzimos o Hamiltoniano que descreve a interação clássica de um elétron o campo eletromagnético, o que nos permite justificar a aproximação de dipolo, amplamente utilizada diversos problemas da física. Em seguida, aplicamos o Hamiltoniano deduzido anteriormente ao cálculo da dinâmica de um átomo de dois níveis interagindo com um campo clássico, o que também é conhecido como zona de Ramsey. Nesse capítulo também introduzimos o modelo de Jaynes-Cummings, fazendo a dedução do Hamiltoniano de interação átomo-campo, a sua diagonalização nos limites ressonante e dispersivo e também calculando a evolução do sistema quando o átomo de dois níveis interage dispersivamente com um campo coerente. A última seção do capítulo é dedicada a apresentação dos conceitos básicos sobre emaranhamento e os postulados e definições das medidas de emaranhamento que serão posteriormente utilizadas. No capítulo 2 apresentamos o modelo Raman quase-degenerado, deduzindo o Hamiltoniano efetivo dentro dos limites assumidos, diagonalizando-o por teoria de perturbação estacionária e então calculando a dinâmica para a situação em que o átomo interage com um campo coerente. Na última seção desse capítulo mostramos que no limite degenerado esse modelo se reduz àquele introduzido por Knight [4]. O capítulo 3 é sobre a transferência

energia, a diferença entre elas é muito pequena quando comparada à dessintonia do nível intermediário (excitado).

de emaranhamento entre átomos (qubits) e campos coerentes de cavidades distintas (sistemas de variáveis contínuas). Inicialmente revisamos o trabalho de Lee *et al.* [5] e em seguida apresentamos o esquema de transferência baseado no modelo Raman quase-degenerado [9]. O estado coerente emaranhado do tipo cluster é o assunto do capítulo 4. Por fim, concluímos o trabalho, fazendo também algumas perspectivas futuras, e apresentamos os apêndices que contém desenvolvimentos auxiliares ao texto principal.

1 Teoria Elementar

1.1 Interação Clássica Elétron-Campo E.M.

Nesta seção deduzimos o Hamiltoniano que descreve classicamente a interação de um elétron, ou uma partícula carregada qualquer, e um campo eletromagnético. Além disso, também justificamos a aproximação de dipolo que é comumente utilizada nos problemas de óptica quântica.

1.1.1 Dedução da Lagrangeana e do Hamiltoniano

O nosso ponto de partida é a expressão da força que um campo eletromagnético exerce sobre um elétron de carga e , também conhecida como força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = e \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (1.1)$$

É importante salientarmos aqui que esta é uma força não-conservativa, ou seja, ela não pode ser escrita como o gradiente de um potencial escalar e conseqüentemente o trabalho realizado por esta força depende da trajetória escolhida. Para elucidarmos isso, pensemos no caso de uma partícula carregada com velocidade não-paralela à um campo magnético constante. Nessa situação, a força do campo magnético sobre a partícula dará origem a um movimento acelerado, o que implica em emissão de radiação pela partícula. Claramente, essa quantidade de energia que a partícula cede ao campo depende da trajetória que ela percorre. Assim, percebemos, ao menos nesse caso simplificado, que a força magnética não é conservativa. Por causa disso, ao definir a Lagrangeana relativa ao problema de uma carga elétrica num campo eletromagnético não podemos interpretá-la como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial. Com isso em mente, observemos o seguinte: escrevendo os campos elétrico e magnético em função dos potenciais $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\Phi(\mathbf{r}, t)$, (a partir desse ponto, para simplificar a notação, deixamos de escrever explicitamente a dependência espacial e temporal dos campo e potenciais)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

temos que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} v_j B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v_j \frac{\partial A_m}{\partial r_l} = \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial r_i} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_i.$$

Lembrando que a fórmula para a derivada conectiva é

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial r_j}{\partial t} \frac{\partial A_i}{\partial r_j} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_i,$$

chegamos que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial r_i} - \frac{dA_i}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t}.$$

Substituindo essa expressão, junto com do campo elétrico em função dos potenciais, na componente i da equação 1.1

$$F_i = e \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial r_i} - \frac{dA_i}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mv_i) = e \left[-\frac{\partial}{\partial r_i} \left(\Phi - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]. \quad (1.3)$$

Agora lançamos mão de dois truques matemáticos. Utilizamos a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{mv_i^2}{2} \right) = mv_i$$

e também o fato de $\mathbf{A}$ não depender explicitamente da velocidade para escrever que

$$\frac{\partial}{\partial v_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = A_i.$$

Com isso, a equação para a força de Lorentz fica dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{mv_i^2}{2} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) \right] - e \frac{\partial}{\partial r_i} \left(-\Phi + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) = 0. \quad (1.4)$$

Para finalizar, também utilizamos que Φ não depende explicitamente da velocidade e que a velocidade não depende explicitamente da posição ($\partial v_i / \partial r_i = 0$). Levando isso em consideração, a última equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{mv_i^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r_i} \left(-e\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{mv_i^2}{2} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Agora basta identificar esta equação com aquela satisfeita por uma Lagrangeana (equação de Euler-Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Conseqüentemente, lembrando que os cálculos anteriores são válidos para qualquer componente i , podemos definir a Lagrangeana de um elétron num campo eletromagnético como

$$L = \frac{mv_i^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (1.6)$$

Aqui fica claro que não podemos separar a equação 1.6 em um termo cinético e outro potencial. Fisicamente, podemos dizer que isso acontece porque os campos, assim como o elétron, também possuem e transportam energia, como discutido anteriormente.

A formulação Hamiltoniana é obtida pela aplicação da definição do Hamiltoniano a partir de uma Lagrangeana

$$\begin{aligned} H(q_j, p_j) &\equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L, \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\dot{p}_j \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Para o caso que estamos tratando:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \left(\frac{mv_i^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right). \quad (1.7)$$

O momento conjugado, calculado por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, resulta em

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Escrevendo o Hamiltoniano como função apenas do momento conjugado e da posição (implicitamente na dependência dos potenciais)

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + e\Phi. \quad (1.8)$$

Este é o Hamiltoniano que descreve classicamente a interação de um elétron e um campo eletromagnético.

1.1.2 A aproximação de dipolo

Matematicamente, a aproximação de dipolo consiste em aplicar o limite $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ na expressão do potencial vetor e então substituir essa expressão aproximada no Hamiltoniano 1.8. Fisicamente, isso significa que consideraremos campos eletromagnéticos cujo comprimento de onda ($k = 2\pi/\lambda$) é muito maior que as dimensões lineares ($\sim r$) do átomo ou molécula envolvida. Considerando que o elétron é ligado por um potencial $V(\mathbf{r})$ a um núcleo posicionado em $\mathbf{r}_0$, então o potencial vetor de uma onda plana na aproximação de dipolo será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} \\ &= \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} (1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots) \\ &\simeq \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ou seja, na prática a aproximação de dipolo se reduz a considerar $\mathbf{r} = 0$ nas expressões que envolvem os potenciais eletromagnéticos. O Hamiltoniano 1.8, nesta aproximação, é¹

$$H \simeq \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \quad (1.10)$$

desprezando o termo quadrático em $\mathbf{A}$, pois para fontes comuns a intensidade da luz é suficientemente baixa para garantir que o efeito deste termo seja desprezível em relação aos outros.

Usualmente, utiliza-se na aproximação de dipolo um Hamiltoniano cujo termo de interação é do tipo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ ao invés da equação 1.10. Entretanto, pode-se mostrar que esses dois termos são equivalentes por uma transformação de gauge dos potenciais eletromagnéticos. Inicialmente, consideremos, sem perda de generalidade, que o potencial vetor está alinhado ao eixo z : $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \hat{\mathbf{z}}$ (aproximação de dipolo). Nesse caso, a transformação de gauge que relaciona os dois Hamiltonianos é dada pela função

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) \equiv -ze^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} A(t).$$

Os novos potenciais são dados por

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda = \mathbf{A} - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} A(t) = 0 \quad (1.11)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{z}{c} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \dot{A}(t) \\ &= \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{c} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \dot{A}(t) = \frac{\mathbf{r}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nesta última igualdade utilizamos a relação entre o campo elétrico e os potenciais no gauge original $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Neste novo gauge o Hamiltoniano 1.8 se reduz à

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad (1.13)$$

na aproximação de dipolo.

¹Aqui utilizamos o gauge Coulomb, ou gauge de radiação, no qual $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e também, para a situação tratada aqui, $\Phi = 0$.

1.2 Átomo de dois níveis num campo clássico

A interação de um átomo com um campo clássico é particularmente interessante em protocolos que necessitam manipular os estados atômicos, pois com a tecnologia atual essa tarefa pode ser realizada com boa eficiência [10, 11]. Particularmente para átomos de dois níveis, vale lembrar que de acordo com os resultados da seção 1.3 essa tarefa também pode ser realizada através da interação do átomo com o campo quantizado, a partir de condições iniciais específicas. Como é de se imaginar, entretanto, campos clássicos são mais viáveis experimentalmente. Nessa dissertação o sistema átomo de dois níveis + campo clássico é utilizado no capítulo 4, no qual apresentamos um esquema para geração de estados coerentes emaranhados do tipo cluster. Na literatura o conjunto cavidade + campo clássico, utilizado para realizar transformações dos estados atômicos, é conhecido com “Zona de Ramsey”.

O objetivo dessa seção é calcular a evolução do sistema átomo + campo clássico (figura 1.1) e, então, encontrar as condições necessárias para a realização da transformação utilizada no capítulo 4. Consideramos que o campo clássico tem a sua frequência ajustada na ressonância da transição atômica, de forma que $\nu = \omega_e - \omega_g$. Assumindo ainda que ele é polarizado na direção z , de forma que $\mathbf{E}(t) = E \cos(\nu t) \mathbf{z}$, e com base no resultado da seção 1.1 e nos desenvolvimentos da referência [12], conclui-se que o Hamiltoniano de interação é dado por

$$H_1 = -ezE(t) = -E|p_{eg}|\cos(\nu t) \left(e^{i\phi}|e\rangle\langle g| + e^{-i\phi}|g\rangle\langle e| \right), \quad (1.14)$$

na qual $p_{eg} = |p_{eg}|e^{i\phi} \equiv e\langle e|z|g\rangle = e \int d^3r \varphi_e^*(r) z \varphi_g(r)$ é o momento de dipolo elétrico de transição entre os estados atômicos e $\varphi_e(r)$ e $\varphi_g(r)$ são as suas funções de onda na representação de posição. Por simplicidade matemática, nessa expressão também consideramos que os momentos de dipolo elétrico dos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ são nulos ($p_{ee} = p_{gg} = 0$). Quando não há interação, admitimos que a energia do sistema é dada simplesmente pelo estado atômico populado²,

$$H_0 = \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g|g\rangle\langle g|.$$

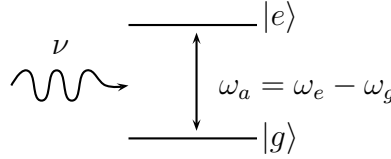


Figura 1.1: Níveis de energia de um átomo de dois níveis interagindo com um campo clássico de frequência ν .

Antes de partirmos para o cálculo da dinâmica em si, passemos para a representação de interação,

$$H_I = e^{iH_0t/\hbar} H_1 e^{-iH_0t/\hbar} = -E|p_{eg}| \left(\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} \right) \left(e^{i(\phi+\omega_a t)}|e\rangle\langle g| + e^{-i(\phi+\omega_a t)}|g\rangle\langle e| \right).$$

Agora devemos aplicar a aproximação de onda girante, assim como foi feito anteriormente na dedução do Hamiltoniano de JC. A justificativa física é a mesma: o termo $e^{\pm i2\nu t}$ está “muito longe” da ressonância atômica e não esperamos que ele induza nenhuma transição. Assim sendo, desprezamos esses termos frente aos termos ressonantes e ficamos com

$$H_I = -\frac{E|p_{eg}|}{2} \left(e^{i\phi}|e\rangle\langle g| + e^{-i\phi}|g\rangle\langle e| \right). \quad (1.15)$$

²Aqui supomos que a energia média do campo clássico é de ordem de grandeza muito maior que a energia atômica e que, portanto, não percebe qualquer alteração quando o átomo está ou não excitado. Dessa maneira, podemos omitir esse termo constante sem afetar a dinâmica do sistema.

O estado atômico após um tempo t de interação pode ser escrito como

$$|\psi(t)\rangle_I = C_e(t)|e\rangle + C_g(t)|g\rangle, \quad (1.16)$$

com $C_j(t) = \langle j|\psi(t)\rangle_I$, já que $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ é uma base do espaço de Hilbert. A equação de Schrödinger, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = H_I |\psi(t)\rangle_I$, nos leva ao sistema de equações diferenciais

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_e(t) = i\Omega_R e^{-i\phi} C_g(t), \\ \dot{C}_g(t) = i\Omega_R e^{i\phi} C_e(t), \end{cases}$$

nas quais definimos a “frequência de Rabi” $\Omega_R = E|p_{eg}|/2\hbar$. A solução desse sistema é bastante simples de ser obtida e apresentamos apenas o seu resultado final:

$$\begin{cases} C_e(t) = \cos(\Omega_R t) C_e(0) + ie^{-i\phi} \sin(\Omega_R t) C_g(0), \\ C_g(t) = \cos(\Omega_R t) C_g(0) + ie^{i\phi} \sin(\Omega_R t) C_e(0). \end{cases} \quad (1.17)$$

Logo, para as condições iniciais específicas a seguir temos que

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle_I = |e\rangle &\Rightarrow |\psi(t)\rangle_I = \cos(\Omega_R t)|e\rangle + ie^{i\phi} \sin(\Omega_R t)|g\rangle, \\ |\psi(0)\rangle_I = |g\rangle &\Rightarrow |\psi(t)\rangle_I = \cos(\Omega_R t)|g\rangle + ie^{-i\phi} \sin(\Omega_R t)|e\rangle. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Assim sendo, a transformação utilizada no capítulo 4 é obtida quando se tem $\Omega_R t = \pi/4$ e $\phi = \pi/2$.

1.3 Modelo de Jaynes-Cummings

Este modelo, apresentado pela primeira vez em 1963 por E. T. Jaynes e F. W. Cummings [1], estuda a interação entre um átomo (ou molécula) de dois níveis e um modo quantizado do campo eletromagnético. Inicialmente, o modelo foi usado para investigar aspectos da emissão espontânea, já que ele prevê o retorno ao estado fundamental de um átomo excitado mesmo quando o campo eletromagnético está no estado de vácuo. Subseqüentemente, evidenciou-se a natureza discreta dos fótons (excitações do campo eletromagnético quantizado) através do estudo da evolução temporal da população, ou ocupação, dos estados atômicos. As oscilações da probabilidade de ocupação dos estados atômicos e os seus colapsos e ressurgimentos, presentes nas soluções analíticas do modelo, são uma forte indicação teórica da natureza discreta dos fótons [13]. Além disso, também descobriu-se que o modelo prevê propriedades estatísticas puramente quânticas, ou seja, sem análogo clássico, para o campo modificado pela interação com o átomo. Um caso particular muito interessante, é a proposta teórica e a realização experimental, baseada no limite dispersivo do modelo de Jaynes-Cummings (JC), de estados de superposição quântica, também conhecidos como “gatos de Schrodinger” [14]. Mais recentemente, o estudo do emaranhamento em sistemas físicos compostos por átomos e campos quantizados encontrou nesse modelo a ferramenta ideal que possibilita a interface entre matéria e luz ou entre qubits e sistemas de variáveis contínuas. Por exemplo, inúmeras propostas surgiram com esquemas para gerar diferentes estados emaranhados [15, 10, 16–18], estudar a não-localidade da teoria quântica [19] e o acúmulo de emaranhamento³ em sistemas de variáveis contínuas [20]. Outro assunto interessante, e que será tratado na segunda parte desta dissertação, é a aplicação do modelo de JC para a transferência de emaranhamento entre qubits e sistemas de variáveis contínuas [5, 21].

³A expressão “acúmulo de emaranhamento” se refere ao fato de que sistemas de variáveis contínuas são capazes de armazenar mais de um *e-bit* de emaranhamento, ou seja, podem possuir emaranhamento maior que um.

O sistema físico descrito matematicamente pelo modelo de JC consiste num átomo de dois níveis⁴, $|e\rangle$ e $|g\rangle$, interagindo com um modo quantizado do campo eletromagnético de frequência ω , como ilustrado na figura 1.2. A interpretação física do modelo, a princípio, é simples. O átomo é excitado ($|g\rangle \rightarrow |e\rangle$) quando absorve um fóton do campo, ou seja, um fóton é “destruído” neste processo. Quando o átomo volta ao seu estado fundamental ($|e\rangle \rightarrow |g\rangle$) ele emite um fóton, criando um fóton no campo. A seguir partimos para a descrição matemática do modelo.



Figura 1.2: Esquema da interação descrita pelo modelo de JC. Criação de um fóton pelo decaimento do átomo (esquerda) e absorção de um fóton pelo átomo que passa a ocupar um estado de maior energia (direita).

1.3.1 Hamiltoniano de interação átomo-campo

Como está apresentado na seção 1.1, o termo de interação entre o campo eletromagnético e um átomo (veja a nota de rodapé 4), na aproximação de dipolo é do tipo $-\mathbf{er} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$, no qual $\mathbf{r}_0$ é a posição do núcleo atômico e $\mathbf{r}$ é a posição do elétron. Conseqüentemente, podemos assumir um Hamiltoniano do tipo

$$H = H_c + H_a - \mathbf{er} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.19)$$

para descrever a interação do átomo com o campo quantizado na aproximação de dipolo. O primeiro termo é a energia do campo quando não há interação. Admitimos que a quantização do campo eletromagnético é conhecida pelo leitor e apenas citamos algumas referências para consulta: [12, 22, 23]. Assim, a energia de um modo do campo, em termos dos operadores de aniquilação e criação de fótons a e $a^\dagger$, respectivamente, é dada por

$$H_c = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.20)$$

Para os termos H_a e $\mathbf{er}$ podemos encontrar expressões úteis a partir dos operadores de transição atômica $|i\rangle\langle j|$, com $i, j = e, g$. Isso porque os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ formam um conjunto completo dos estados atômicos, já que apenas estes dois níveis energéticos são relevantes para a interação com o campo considerado. Em razão disso, eles satisfazem a relação de fechamento $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbf{1}$ e também a relação de ortonormalidade $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Além disso, também podemos escrever esses dois vetores de estados na base binária: $|e\rangle \equiv (0, 1)$ e $|g\rangle \equiv (1, 0)$, o que evidencia o fato deles formarem uma base do espaço vetorial de duas dimensões. Utilizando o fato de que $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são autoestados de H_a , vem que

$$H_a = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) H_a (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g|. \quad (1.21)$$

Analogamente podemos tratar o termo de interação

$$\mathbf{er} = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \mathbf{er} (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) = \mathbf{p}_{eg} (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|), \quad (1.22)$$

⁴Para sermos rigorosos, devemos dizer que consideramos apenas um dos elétrons do átomo interagindo com o campo. Isso é possível através da escolha de regras de seleção específicas que permitem apenas transições deste elétron entre dois níveis (átomo de dois níveis), entre três níveis para os chamados átomos de três níveis e assim por diante.

sendo que aqui novamente consideramos, por simplicidade matemática, que os níveis atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$ possuem momento de dipolo elétrico nulo e que os elementos de matriz de dipolo elétrico de transição entre esses estados são reais, ou seja, $\mathbf{p}_{eg} \equiv e \int d^3r \varphi_e^*(\mathbf{r}) r \varphi_g(\mathbf{r}) \equiv \int d^3r \varphi_e(\mathbf{r}) r \varphi_g^*(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{p}_{eg}$, na qual $\varphi_j(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | j \rangle$ é a função de onda do estado $|j\rangle$ na representação de posição. Finalmente, basta expressar o campo elétrico em função dos operadores criação e aniquilação de fótons para chegarmos ao Hamiltoniano desejado. Novamente, apenas utilizaremos a expressão obtida no formalismo da segunda quantização, após a realização da quantização do campo eletromagnético, e o leitor pode encontrar detalhes sobre a dedução dessa expressão nas referências [12, 22, 23], entre outras. Considerando uma base linear para a polarização, cujos versores são reais, e que o átomo está posicionado na origem, de forma que $\mathbf{r}_0 = 0$, temos que o campo elétrico (mono-modo de frequência ω) é dado por

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (a + a^\dagger) \hat{\mathbf{e}}, \quad (1.23)$$

sendo V o volume da cavidade que contém o campo e $\hat{\mathbf{e}} = \cos\beta\hat{\mathbf{x}} + \sin\beta\hat{\mathbf{y}}$ o versor de polarização linear na base (x, y) , de forma que β é o ângulo do versor de polarização do campo neste plano. Assim, substituindo essas expressões para H_c , H_a , $\mathbf{e}\mathbf{r}$ e $\mathbf{E}$ no Hamiltoniano total, segue que

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| + \hbar g (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) (a + a^\dagger), \quad (1.24)$$

na qual

$$g = -\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}} \mathbf{p}_{ge} \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

é a constante de acoplamento átomo-campo, que por essa definição possui dimensão de frequência. Também devemos dizer que nessa expressão omitimos a energia de ponto zero do campo eletromagnético, pois esse termo constante não alterará fisicamente a dinâmica do sistema.

A última etapa para obter a expressão conhecida como Hamiltoniano de JC é realizar a *aproximação de onda girante*. Para justificarmos porque alguns termos serão descartados, passemos por um momento para a representação de interação. Separando H no termo de energia do sistema livre $H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g|$ e no termo de interação $H_1 = \hbar g (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) (a + a^\dagger)$, é simples de se obter⁵ que na representação de interação em relação a H_0

$$\begin{aligned} H_I &= e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} = \\ &= \hbar g \left(e^{i(\omega-\omega_a)t} a^\dagger |g\rangle\langle e| + e^{-i(\omega-\omega_a)t} a |e\rangle\langle g| + e^{i(\omega+\omega_a)t} a^\dagger |e\rangle\langle g| + e^{-i(\omega+\omega_a)t} a |g\rangle\langle e| \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

com $\hbar\omega_a \equiv E_e - E_g$. Agora devemos observar a frequência de oscilação das exponenciais da equação 1.25. Os dois primeiros termos, conhecidos como termos *girantes*, oscilam suavemente próximo a ressonância, pois $\omega - \omega_a \simeq 0$. Já os dois últimos termos, *contra-girantes*, oscilam com uma frequência muito maior ($\omega + \omega_a \simeq 2\omega$). Portanto, espera-se que a contribuição dos termos contra-girantes, na média, seja cancelada por essa rápida oscilação, sendo desprezível em relação aos termos girantes. Por causa disso, comumente realiza-se a aproximação de onda girante, que consiste em omitir os termos contra-girantes do Hamiltoniano. Assim sendo, chegamos no conhecido Hamiltoniano de JC, que é o ponto de partida de diversos trabalhos em óptica quântica,

$$H_{JC} = \hbar\omega a^\dagger a + E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| + \hbar g (a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g|). \quad (1.26)$$

Uma outra forma muito utilizada deste Hamiltoniano é obtida quando substitui-se a relação de fechamento dos estados atômicos ($|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbf{1}$) para escrever $E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| = \hbar\omega_a \sigma_z/2 + (E_e + E_g)/2$, na qual σ_z é a matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Omitindo o último termo (constante), que não alterará a dinâmica do sistema, o Hamiltoniano 1.26 fica

⁵Aqui utiliza-se o resultado do teorema A.1, apêndice A

$$H_{JC} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar g \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right). \quad (1.27)$$

Vale comentar que os dois últimos termos de 1.26, os termos de interação, correspondem aos esquemas de interação átomo-fóton ilustrados na figura 1.2. Também é interessante dizer que este é o Hamiltoniano de JC no **limite ressonante**, no qual a frequência do campo é ajustada num valor próximo à diferença de energia entre os níveis atômicos. Nesse limite, conseqüentemente, há troca de energia (na forma de fótons) entre o átomo e o campo, o que não acontece no **limite dispersivo** analisado adiante.

1.3.1.1 Solução do Hamiltoniano de JC

A diagonalização do Hamiltoniano 1.27 pode ser encontrada quando percebemos que o seu termo de interação causa transições do tipo $|e, n-1\rangle \leftrightarrow |g, n\rangle$. A partir disso, é intuitivo supor autoestados do tipo

$$\begin{aligned} |-, n\rangle &= \cos\theta_n |e, n-1\rangle - \sin\theta_n |g, n\rangle \\ |+, n\rangle &= \sin\theta_n |e, n-1\rangle + \cos\theta_n |g, n\rangle, \end{aligned} \quad (1.28)$$

sendo $\cos\theta_n$ e $\sin\theta_n$ coeficientes de normalização dependentes de n , que satisfazem $\sin^2\theta_n + \cos^2\theta_n = 1$. Ao aplicarmos H_{JC} à esses estados, percebemos que a condição

$$\frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n} = \frac{\Omega_n - \Delta}{2g\sqrt{n}},$$

com $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$ e $\Delta = \omega - \omega_a$, garante que eles sejam autoestados do Hamiltoniano e, ainda mais que isso, a equação de autovalor $H_{JC}|\pm, n\rangle = E_{\pm n}|\pm, n\rangle$ nos diz que as energias correspondentes são

$$\begin{aligned} E_{-n} &= \hbar \left((n-1)\omega + \frac{\omega_a}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} (\Omega_n - \Delta) \\ E_{+n} &= \hbar \left(n\omega - \frac{\omega_a}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} (\Omega_n - \Delta). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Também é interessante notar que a condição de normalização determina os coeficientes dos autoestados

$$\cos\theta_n = \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad \sin\theta_n = \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}.$$

1.3.2 Limite ressonante

O limite ressonante é obtido quando $\omega - \omega_a = 0$, ou seja, quando a frequência do campo é ajustada exatamente para o valor da frequência de transição atômica. Nesse caso, os autoestados se reduzem à

$$\begin{aligned} |-, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n\rangle \\ |+, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n\rangle, \end{aligned}$$

com as energias

$$\begin{aligned} E_{-n} &= \hbar \left((n-1)\omega + \frac{\omega_a}{2} \right) - \hbar g \sqrt{n} \\ E_{+n} &= \hbar \left(n\omega - \frac{\omega_a}{2} \right) + \hbar g \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Essas equações ajudam a clarificar o fato de que a interação JC provoca transições atômicas entre os níveis fundamentais e excitado, “seguidas” da absorção ou emissão de fótons.

Outra equação muito utilizada quando se considera o limite ressonante é a que se obtém para o operador evolução $U(t)$. Para isso, é conveniente trabalhar na representação de interação, obtida quando utilizamos a equação 1.25 sem os termos contra-girantes,

$$H_{JC_I} = \hbar g \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right). \quad (1.30)$$

Vale lembrar que estamos considerando a ressonância exata, tal que $\omega - \omega_a = 0$. Utilizando as expressões

$$\begin{aligned} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2q} &= (aa^\dagger)^q |e\rangle\langle e| + (a^\dagger a)^q |g\rangle\langle g|, \\ \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2q+1} &= (aa^\dagger)^q a |e\rangle\langle g| + a^\dagger (aa^\dagger)^q |g\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (1.31)$$

provadas no apêndice A (teorema A.2), podemos obter uma expressão fechada para o operador de evolução temporal

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-iH_{JC_I}t/\hbar} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\frac{-iH_{JC_I}t}{\hbar} \right)^q \\ \Rightarrow U(t) &= \begin{pmatrix} \cos \left(gt\sqrt{a^\dagger a + 1} \right) & -i \frac{\text{sen} \left(gt\sqrt{a^\dagger a + 1} \right)}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} a \\ -ia^\dagger \frac{\text{sen} \left(gt\sqrt{a^\dagger a + 1} \right)}{\sqrt{a^\dagger a + 1}} & \cos \left(gt\sqrt{a^\dagger a} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ do estados atômicos. Conhecendo essa expressão do operador evolução temporal tem-se, em princípio, a descrição completa da evolução do sistema átomo-campo sob a interação ressonante, já que para qualquer condição inicial dada, o estado do sistema após um tempo t de interação é $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$. Note uma das principais características que tornou o modelo de JC tão utilizado nas últimas décadas: a possibilidade de se obter resultados analíticos.

1.3.3 Limite dispersivo

O limite dispersivo consiste em considerar que a frequência do campo está tão dessintonizada da frequência de transição atômica que o termo de interação de 1.27 pode ser tratado como uma pequena perturbação [14, 12, 24]. Matematicamente, isso se traduz em considerar o limite

$$\frac{4g^2n}{\Delta^2} \ll 1 \quad (1.33)$$

válido para todos os “ n ” relevantes. Uma maneira de perceber que este é o limite correto é impor a condição $\Omega_n \simeq \Delta$, já que nesse caso as energias da solução geral (equação 1.29) tendem à energia do sistema sem interação. Uma consequência do limite 1.33 é que $\cos\theta_n \simeq 1$ e $\text{sen}\theta_n \simeq 0$, ou seja, $|+, n\rangle \simeq |e, n-1\rangle$ e $|- , n\rangle \simeq |g, n\rangle$, com as seguintes energias

$$\begin{aligned}
E_{-n} &= \hbar \left((n-1)\omega + \frac{\omega_a}{2} \right) - \frac{\hbar g^2 n}{\Delta} \\
E_{+n} &= \hbar \left(n\omega - \frac{\omega_a}{2} \right) + \frac{\hbar g^2 n}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Um ponto interessante a se notar é que, por exemplo, o estado $|g, n\rangle$, cuja energia não-perturbada (caso $g = 0$) é $\hbar(\omega n - \omega_a/2)$, no limite dispersivo sofre um deslocamento de energia⁶ de $\hbar g^2 n/\Delta$, proporcional ao número de fótons. Outro fato importante é que esse deslocamento de energia é dispersivo, ou seja, não é acompanhado pela absorção/emissão de fótons.

Para finalizar, notemos que se o limite 1.33 é satisfeito, então podemos trabalhar com o Hamiltoniano efetivo

$$H_{JC}^{disp} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z - \frac{\hbar g^2}{\Delta} \left((a^\dagger a + 1) |e\rangle\langle e| - a^\dagger a |g\rangle\langle g| \right), \quad (1.34)$$

pois ele possui os autoestados e energias obtidos no limite dispersivo.

1.3.3.1 Dinâmica com Campo Coerente

Uma rápida observação do Hamiltoniano 1.34 nos permite reescrevê-lo como

$$H_{JC}^{disp} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z - \frac{\hbar g^2}{\Delta} a^\dagger a \sigma_z - \frac{\hbar g^2}{\Delta} |e\rangle\langle e|, \quad (1.35)$$

o que evidencia o fato de H_{JC}^{disp} ser diagonal na base $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$. Com isso, o cálculo da evolução temporal do átomo interagindo com um campo coerente se torna trivial. Considerando o átomo inicialmente no estado excitado e o campo no estado coerente $|\alpha\rangle$, a evolução do sistema após um tempo t é

$$\begin{aligned}
e^{-iH_{JC}^{disp}t/\hbar} |e, \alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{-it(\omega n + \omega_a/2 - g^2(n+1)/\Delta)} |e, n\rangle \\
\Rightarrow e^{-iH_{JC}^{disp}t/\hbar} |e, \alpha\rangle &= e^{-it(\omega_a/2 - g^2/\Delta)} |e, e^{-it(\omega - g^2/\Delta)} \alpha\rangle.
\end{aligned} \quad (1.36)$$

Analogamente,

$$e^{-iH_{JC}^{disp}t/\hbar} |g, \alpha\rangle = e^{i\omega_a t/2} |g, e^{-it(\omega + g^2/\Delta)} \alpha\rangle. \quad (1.37)$$

Dessas expressões, confirmamos que a interação dispersiva não altera o número médio de fótons do campo $(|e^{-it(\omega \pm g^2/\Delta)} \alpha|^2 = |\alpha|^2)$, ou seja, como o campo está longe da ressonância ele não induz a emissão/absorção atômica e, portanto, não há troca de energia nesse processo.

1.4 Introdução ao Emaranhamento

“All our former experience with application of quantum theory seems to say: what is predicted by quantum formalism must occur in laboratory. But the essence of quantum formalism - entanglement, recognized by Einstein, Podolsky, Rosen and Schrödinger - waited over 70 years to enter to laboratories as a new resource as real as energy.”

Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki and Karol Horodecki, [25].

⁶Tradução para *energy shift*.

1.4.1 Definição

O estudo do emaranhamento e suas aplicações, como na criptografia, computação e teletransporte quântico, têm recebido grande atenção de muitos físicos de todo o mundo durante os últimos anos. Todo este destaque se deve, em particular, a resultados de pesquisas que utilizam-se dele como ferramenta essencial para a realização de tarefas impossíveis classicamente.

Mas o que é emaranhamento? Basicamente, podemos definir emaranhamento de duas maneiras. A primeira, mais objetiva e matemática, é dizer que ele é uma característica (ou propriedade) da Mecânica Quântica que não tem análogo clássico e, então, mostrar o que são estados emaranhados ou, ainda mais, o que são estados não-emaranhados (veja por exemplo, [25–28]). Outra abordagem que também pode ser feita é descrever o emaranhamento como correlações quânticas que podem ocorrer em estados quânticos constituídos por mais de uma parte (estados bipartites, tripartites ou multipartite em geral). Naturalmente, isto nos leva a questão: O que são correlações quânticas? E o que as diferencia das correlações clássicas? A resposta surge no contexto da informação quântica via *Local Operations and Classical Communication* (LOCC) - Operações Locais e Comunicações Clássicas. O que se faz é definir as correlações clássicas e dizer que as correlações quânticas são aquelas que não podem ser simuladas classicamente, ou seja, através de LOCC. As correlações clássicas, por sua vez, são definidas como aquelas que podem ser geradas por LOCC. Logo, conclui-se que o emaranhamento pode ser definido como as correlações que não podem ser criadas através de LOCC apenas [25, 29]. Dessa definição segue uma importante conclusão sobre o emaranhamento, a de que este não pode crescer sob operações do tipo LOCC, sendo esta um dos postulados que deve ser satisfeito por qualquer medida de emaranhamento.

Dando continuidade à tentativa de se definir emaranhamento, apresentamos o que são estados emaranhados e não-emaranhados. Devemos dizer que mesmo a resposta desta pergunta não é geral e de fácil implementação. Para o caso de sistemas bipartites (sistemas compostos de dois subsistemas), que é a situação de interesse deste trabalho, existem condições necessárias e suficientes. Se, além disso, consideramos estados puros, podemos encontrar os estados emaranhados e não-emaranhados através do traço parcial sobre as variáveis de um dos subsistemas. Se um estado é emaranhado, o estado remanescente após o cálculo do traço parcial, será necessariamente uma mistura estatística. Por outro lado, se um estado não é emaranhado, então o estado reduzido será puro. Desta forma, faz sentido associarmos o grau de emaranhamento do sistema bipartite com o quão misto o seu estado reduzido é. A partir desta interpretação, define-se a entropia de von Neumann como uma medida de emaranhamento de estados puros para sistemas bipartites. Para estados mistos, entretanto, esta tarefa se complica bastante. Diversas medidas de emaranhamento já foram propostas, mas elas, geralmente, não resultam no mesmo ordenamento dos estados em relação à quantidade de emaranhamento, o que é um dos pontos que dificulta bastante o estudo de estados emaranhados mistos - veja [25, 27–29] para uma boa revisão do assunto. Além dessas duas situações, podemos ainda pensar em sistemas compostos de muitas partes. Porém, aqui vamos nos restringir a dizer que o estudo do emaranhamento em sistemas multipartites é extremamente complicado e mesmo os trabalhos mais atuais não apresentam métodos operacionais de tratá-lo. Neste trabalho estudamos exclusivamente o emaranhamento bipartite e, portanto, o termo *bipartite* apenas será utilizado nos casos em que a sua omissão poderá gerar dúvidas.

Apesar da definição de estados puros emaranhados já ter sido apresentada, precisamos de uma definição mais ampla e que também abranja os estados mistos. Perceba que isto se faz necessário se quisermos estudar o emaranhamento átomo-campo quando o campo está preparado num estado térmico, por exemplo. Felizmente, existe uma definição bastante geral de estados emaranhados para um sistema composto de N subsistemas. Como temos interesse apenas no caso de dois subsistemas, apresentamos a definição simplificada e específica para sistemas bipartites (composto dos subsistemas A e B):

*Um estado misto é **emaranhado** quando ele não pode ser escrito como um estado separado, ou seja, como uma soma de estados produtos,*

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (1.38)$$

na qual p_i é a distribuição de probabilidade e satisfaz $\sum_i p_i = 1$. Analogamente, podemos dizer que ρ representa um sistema **não emaranhado** se, e somente se, ele pode ser escrito na forma de 1.38.

1.4.2 Medidas de Emaranhamento

O estudo das medidas de emaranhamento por si só é uma vasta área de pesquisa que detém boa parte dos esforços da comunidade científica especializada. Nesta seção apresentamos uma breve discussão das medidas escolhidas para descrever o emaranhamento produzido pela interação átomo-campo.

1.4.2.1 Postulados

Antes de passarmos as medidas, apresentamos os postulados que toda boa medida de emaranhamento deve satisfazer. Algumas delas, como o emaranhamento destilável e o custo de emaranhamento [25], são construídas com o objetivo de descrever o emaranhamento em termos de tarefas de otimização de protocolos que utilizam estados quânticos. Por outro lado, pode-se realizar uma abordagem axiomática; de forma que qualquer função do estado quântico possa ser uma medida do emaranhamento deste, desde que satisfaça certos postulados. Um resultado bastante geral e interessante é que qualquer dessas medidas de emaranhamento (E) que satisfaça esses postulados é limitada inferiormente pelo emaranhamento destilável (E_D) e superiormente pelo emaranhamento de formação (EoF) [30], ou seja,

$$E_D < E < EoF.$$

Os postulados que uma medida de emaranhamento deve satisfazer foram inicialmente divididos em três grupos [30]. Porém, após sete anos de pesquisa houve uma pequena reclassificação [25], mas que não alterou o conteúdo principal deles. Apresentamos abaixo, de forma simplificada, a versão mais atual:

Postulados necessários

1. **Monotonicidade sob LOCC:** O emaranhamento não pode crescer sob operações locais e comunicação clássica [31].
2. **O emaranhamento é nulo para estados separáveis:** Do fato de que todo estado separável pode ser transformado em qualquer outro estado separável por LOCC [32], segue que se uma medida E satisfaz o postulado anterior, então ela é constante para estados separáveis. Além disso, E deve ser mínima, já que qualquer estado separável pode ser obtido por LOCC de qualquer outro estado. Por conveniência, escolhe-se essa constância igual a zero. Perceba que esses dois postulados impõem a não-negatividade de E .

Outros postulados possíveis

Estes são postulados que, apesar de não serem estritamente necessários, são bastante úteis e naturais em certos contextos.

3. **Normalização:** $E(\psi_d^{max}) = \log_2(d)$, na qual ψ_d^{max} é o estado maximamente emaranhado e d é a dimensão do espaço de Hilbert do subsistema de menor dimensão. Note que para o caso de dois qubits (sistema 2x2) temos $E(\psi_2^{max}) = 1$ e para sistemas de variáveis contínuas podemos ter $E(\psi_{d \rightarrow \infty}^{max}) \rightarrow \infty$.

4. Continuidade assintótica: Se ρ_n e σ_n são estados de um espaço de Hilbert de dimensão d_n , então [30, 32]

$$\|\rho_n - \sigma_n\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|E(\rho_n) - E(\sigma_n)|}{\log_2 d_n} \rightarrow 0.$$

Um exemplo da importância da continuidade assintótica é que junto com a normalização e a propriedade de adição ela determina uma medida única de emaranhamento para estados puros (veja em [25]).

5. Convexidade: Esse era considerado [30] um postulado fundamental para a formulação matemática da monotonicidade; entretanto, passou-se a considerar a convexidade apenas como uma propriedade matemática conveniente [25]. A maioria das medidas conhecidas são convexas, por exemplo: entropia de emaranhamento, emaranhamento de formação, robustez de emaranhamento e negatividade.

Para finalizar, é interessante dizer que toda medida que satisfaz o postulado da monotonicidade é invariante por operações locais unitárias: $E(\rho) = E(U_1 \otimes \dots \otimes U_N \rho U_1^\dagger \otimes \dots \otimes U_N^\dagger)$, já que essas são um caso particular de LOCC e são reversíveis. Em particular, primeiramente costuma-se verificar se esta condição é satisfeita, quando se propõe uma nova medida de emaranhamento, especialmente nos casos nos quais é difícil provar a monotonicidade.

1.4.2.2 Entropia de von Neumann (ou Entropia de Emaranhamento)

A entropia de von Neumann (do sistema reduzido) é uma das únicas medidas de emaranhamento que tem justificativa física [33] e simples implementação ao mesmo tempo. Entretanto, ela só é aplicável ao caso de estados puros. Se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ é a matriz densidade do sistema em questão, o emaranhamento deste estado, dado pela entropia de von Neumann, é

$$E_{vN}(\rho) = -\text{Tr}[\rho_A \log_2(\rho_A)] = -\text{Tr}[\rho_B \log_2(\rho_B)], \quad (1.39)$$

sendo $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$ e $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$ as matrizes densidade reduzidas do sistema composto de A e B .

Desta definição, segue claramente que os estados do tipo $|\Psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|10\rangle + |01\rangle)$, conhecidos como estados de Bell, têm emaranhamento igual a 1, justificando o termo estados maximamente emaranhados. Por outro lado, os estados que podem ser escritos como $|\psi\rangle = |\varphi\rangle_A \otimes |\zeta\rangle_B$, estados produtos (ou separáveis), têm emaranhamento igual a zero. Vale salientar, que apesar da entropia de von Neumann ser uma medida de emaranhamento para estados puros bipartites, o número de dimensões de cada subsistema não é limitado, podendo tender a infinito no caso de variáveis contínuas. Para explicitar isto, podemos aplicar a conhecida decomposição de Schmidt a um estado $|\psi\rangle$ [28]:

$$|\psi\rangle = \sum_i^N \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle_A |\zeta_i\rangle_B,$$

sendo que N é o mínimo entre as dimensões dos subsistemas A e B e $\sqrt{p_i}$ são os coeficientes de Schmidt, que satisfazem $\sum_i p_i = 1$. Nesse caso, o emaranhamento é dado por

$$E_{vN}(\rho) = -\sum_i^N p_i \log_2 p_i;$$

perceba que não há restrição sobre o número de dimensões N .

Por fim, é interessante dizer que a entropia de von Neumann serve de “referência” para outras medidas de emaranhamento, no sentido de que estas se reduzem àquela quando são aplicadas a estados puros⁷.

⁷ Na realidade, uma medida de emaranhamento que não se reduz a entropia de von Neumann no caso puro é chamada de *entanglement monotone*.

1.4.2.3 Emaranhamento de Formação/*Concurrence*

O número mínimo de singletos necessários para produzir um conjunto de pares de partículas descritas pelo estado ρ , usando-se apenas LOCC. Esta é a interpretação física do emaranhamento de formação, *EoF*, dada por Bennett *et al.* [31]. Formalmente, define-se esta medida como

$$EoF(\rho) = \min \sum_i p_i S(|\psi_i\rangle), \quad (1.40)$$

na qual $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ e $S(|\psi_i\rangle) = E_{vN}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$ é a entropia de von Neumann do sistema reduzido, calculada a partir de 1.39. Infelizmente, como é comum em definições de medidas de emaranhamento para estados mistos, temos que lidar com um problema de minimização, que pode ser suficientemente complicado a ponto de inviabilizar o cálculo do *EoF*. Perceba que, a partir desta definição, é necessário que se encontre a decomposição de ρ em estados puros que minimize a quantidade $\sum_i p_i S(|\psi_i\rangle)$ - vale lembrar que em alguns casos existem infinitas decomposições da matriz densidade.

Felizmente, Wootters [26] simplificou extremamente o cálculo do *EoF* para qualquer tipo de estado de sistemas de dimensão 2, ou seja, sistemas compostos de duas partes 2x2 (ou de dois qubits⁸). Antes de apresentarmos a fórmula obtida por Wootters, vamos introduzir algumas grandezas que serão utilizadas posteriormente. A primeira delas é a transformação de *spin-flip*, aplicável a estados de número arbitrário de qubits. Para um estado puro de um único qubit, o spin-flip é definido por

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle,$$

sendo $|\psi^*\rangle$ o complexo conjugado de $|\psi\rangle$ e σ_y a conhecida matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, na mesma base em que $|\psi\rangle$ foi escrito. É interessante observar que a operação de conjugação complexa, muitas vezes denotada por um operador anti-unitário K , seguida da aplicação da matriz de Pauli σ_y é a definição padrão da operação de reversão temporal para partículas de spin 1/2 [34]. Para realizar o spin-flip em n qubits, devemos aplicar esta transformação em cada qubit separadamente. Considerando dois qubits, esta transformação pode ser escrita como

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (1.41)$$

A *Concurrence* do estado ρ é definida como

$$C(\rho) \equiv \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.42)$$

na qual os λ_i 's são as raízes quadradas dos autovalores da matriz não-hermitiana $R = \rho \tilde{\rho}$, em ordem decrescente. A seguir, definimos duas funções essenciais para o cálculo do *EoF*:

$$\varepsilon(c) \equiv h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2}\right), \quad (1.43)$$

$$h(x) \equiv -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x). \quad (1.44)$$

Com isso, Wootters [26] prova que o **emaranhamento de formação**, definido em 1.40, de um estado qualquer de dois qubits é dado por

$$EoF(\rho) = \varepsilon(C(\rho)). \quad (1.45)$$

Daí, vê-se que o *EoF*(ρ) e a *Concurrence* $C(\rho)$ estão monotonicamente relacionados, o que explica porque alguns autores utilizam a *Concurrence* para caraterizar o emaranhamento. Entretanto, é

⁸Qubit é utilizado para designar qualquer tipo de sistema de duas dimensões, como, por exemplo, o spin 1/2 ou um átomo de dois níveis.

interessante enfatizar que a *Concurrence* tem significado devido a sua relação com o emaranhamento de formação e que o contrário não é verdadeiro. Para sistemas de dimensão superior a 2, por exemplo, esta conexão entre as duas quantidades não é mais válida e, de fato, nem existe uma definição única para a *Concurrence* [29]. Desta forma, apenas o emaranhamento de formação é uma medida de emaranhamento e deve ser preferido inclusive em sistemas de dois qubits.

1.4.2.4 Negatividade e Negatividade Logarítmica

Estas duas grandezas, Negatividade e Negatividade Logarítmica, utilizadas para quantificar emaranhamento têm a sua definição baseada no resultado apresentado por A. Peres em 1996 [35]. Esse resultado é baseado na matriz obtida pela transposição parcial da matriz densidade, ρ^{T_B} , definida por

$$\begin{aligned}\rho &= \sum \rho_{ij,\mu\nu} |i\rangle\langle j| \otimes |\mu\rangle\langle\nu|, \\ \Rightarrow \rho^{T_B} &= \sum \rho_{ij,\mu\nu} |i\rangle\langle j| \otimes |\nu\rangle\langle\mu|,\end{aligned}\tag{1.46}$$

sendo que os caracteres latinos correspondem ao subsistema A e os gregos ao B . Em [35] demonstrou-se que sempre que ρ^{T_B} contiver autovalores negativos, então ρ é um estado emaranhado. Vale dizer que o espectro de autovalores da matriz parcialmente transposta independe da escolha de base e se a transposição parcial é feita em relação ao subsistema A ou B . A Negatividade é um “*entanglement monotone*” [36] (veja a nota de rodapé 7) que quantifica a negatividade no espectro da transposição parcial de ρ . A sua definição usual é [29, 36]

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_B}\| - 1}{2},\tag{1.47}$$

na qual $\|M\| = \text{Tr}\sqrt{M^\dagger M}$. É interessante notar que quando M é Hermitiano então $\|M\|$ corresponde à soma do módulo dos autovalores de M . Outra forma bastante utilizada [37] da negatividade é obtida quando escrevemos-a em função apenas dos autovalores negativos e, nesse caso, o emaranhamento, normalizado entre zero e um, é dado por $E = -2\sum_i \lambda_i^-$, na qual λ_i^- são os autovalores negativos de ρ^{T_B} .

A Negatividade Logarítmica, definida por

$$E_N(\rho) = \log_2 \|\rho^{T_B}\|,\tag{1.48}$$

é um outro “*entanglement monotone*” utilizado para detectar os autovalores negativos da transposição parcial de ρ . Por construção, ela é uma medida aditiva, o que não acontece com a Negatividade. Além disso, ela pode ser interpretada como um limite superior do emaranhamento destilável, veja [25, 28, 29] para mais detalhes.

2 O Modelo Raman Quase-Degenerado

Em 1986, Peter L. Knight [4] apresentou um modelo simples de interação átomo-campo que permite, por exemplo, o cálculo analítico de expressões exatas para a inversão atômica e a entropia do campo [38]. Esse modelo, que passaremos a chamar de “modelo Raman degenerado”, baseia-se na interação de **um** modo do campo quantizado com um átomo de três níveis ($|g_1\rangle$, $|g_2\rangle$ e $|e\rangle$) degenerado, de forma que $E_e > E_2 = E_1$ (figura 2.2). Fizemos questão de destacar o fato de que apenas um modo do campo interage com o átomo para deixar claro que “o mesmo fóton” é responsável pela transição $|g_1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ e também pela transição $|e\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$. O estudo detalhado desse modelo é apresentado na seção 2.4. Além dessas características interessantes, que privilegiam a interpretação física em relação a cálculos e dificuldades matemáticas, esse modelo foi aplicado a diversos esquemas, dentre eles: geração de estados não-locais do campo [39], estados atômicos maximamente emaranhados [40] e de estados coerentes emaranhados [41, 42], teletransporte de estados atômicos [43], processamento de informação quântica e geração de portas lógicas [44]. Outro trabalho interessante é a proposta para implementação física desse modelo no contexto de íons aprisionados [45]. Nesse caso, os operadores de criação e destruição bosônicos atuam sobre as excitações do movimento do centro de massa e os operadores de transição sobre os níveis internos de energia do íon.

Inspirado neste modelo, propomos neste capítulo um novo modelo para a interação de um átomo de três níveis com um modo do campo quantizado. Nesse modelo, os dois níveis inferiores possuem energias muito próximas (figura 2.1), mas diferentes - o que justifica o termo “quase-degenerado”. Acreditamos que esse seja um modelo mais realístico porque permite que um mesmo fóton satisfaça tanto as regras de seleção da transição $|g_1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ quanto aquelas da transição $|e\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$.

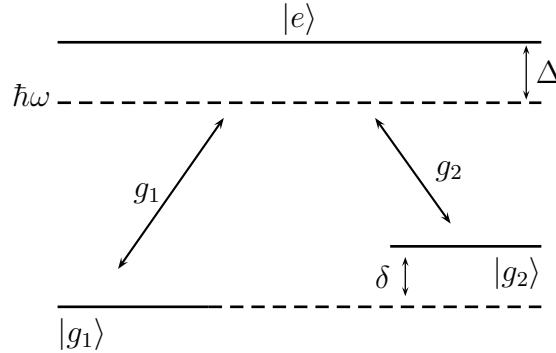


Figura 2.1: Configuração atômica do modelo Raman quase-degenerado. A diferença de energia entre os dois níveis inferiores é definida por $\hbar\delta = E_{g_2} - E_{g_1}$, g_1 e g_2 são as constantes de acoplamento das respectivas transições e a dessintonia entre a frequência do campo (ω) e as frequências de transição atômica é $\hbar\Delta = E_e - E_{g_1} - \hbar\omega$.

2.1 Dedução do Hamiltoniano efetivo

Com base no modelo de JC, podemos escrever o Hamiltoniano que descreve a interação entre um átomo, cuja configuração de níveis está ilustrada na figura 2.1, e um modo do campo quantizado (de frequência ω). Assim, consideramos, para cada transição, $|g_1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$ ¹, um termo

¹Assim como no capítulo anterior associamos os vetores de estado à vetores no plano Cartesiano, agora podemos associar a cada um deles um vetor no espaço de três dimensões. Explicitamente, podemos assumir que $|e\rangle = (1, 0, 0)$,

de interação que aparece no Hamiltoniano de JC (equação 1.26):

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ H_0 &= \hbar\omega a^\dagger a + E_{g_1}|g_1\rangle\langle g_1| + E_{g_2}|g_2\rangle\langle g_2| + E_e|e\rangle\langle e|, \\ H_1 &= \hbar g_1(a|e\rangle\langle g_1| + a^\dagger|g_1\rangle\langle e|) + \hbar g_2(a|e\rangle\langle g_2| + a^\dagger|g_2\rangle\langle e|). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nessas equações, H_0 representa a energia do sistema livre e H_1 contém os termos de interação do tipo JC.

No modelo, assumimos que as constantes de acoplamento têm a mesma ordem de grandeza, $g_1 \sim g_2 \sim g$, pois isso garantirá que podemos obter um Hamiltoniano efetivo até primeira ordem em g/Δ para as duas transições. O método que empregamos consiste em aplicar uma transformação unitária ao Hamiltoniano 2.1, expandi-la em potências de g/Δ e considerar termos até primeira ordem neste parâmetro adimensional, como foi feito nas referências [46–48]. Dessa forma, chegaremos a um Hamiltoniano efetivo válido no limite dispersivo $g/\Delta \ll 1$. Além disso, como consideramos um átomo quase-degenerado, há um detalhe a mais. Também devemos supor que $\delta/\Delta \ll 1$, pois precisamos garantir que $\Delta - \delta$ tenha a mesma ordem de grandeza de Δ para que todos os termos negligenciados na expansão do Hamiltoniano efetivo (equação 2.4) sejam realmente de ordem superior.

Definindo o operador $\mathcal{S}$ como (perceba que $\mathcal{S}$ é anti-Hermitiano, ou seja, $\mathcal{S}^\dagger = -\mathcal{S}$)

$$\mathcal{S} \equiv \frac{g_1}{\Delta}(a|e\rangle\langle g_1| - a^\dagger|g_1\rangle\langle e|) + \frac{g_2}{\Delta - \delta}(a|e\rangle\langle g_2| - a^\dagger|g_2\rangle\langle e|), \quad (2.2)$$

temos a transformação unitária que nos leva ao Hamiltoniano efetivo:

$$H' = e^{\mathcal{S}} H e^{-\mathcal{S}}. \quad (2.3)$$

A expansão de H' em potências de g/Δ é obtida através da aplicação do resultado do teorema A.1 à essa transformação unitária. Para calcular os termos de interesse na expansão de 2.3 são necessários os seguintes comutadores (com H_0 e H_1 definidos em 2.1)

$$\begin{aligned} H_0^{(1)} &= [\mathcal{S}, H_0] = -\hbar g_1 (a|e\rangle\langle g_1| + a^\dagger|g_1\rangle\langle e|) - \hbar g_2 (a|e\rangle\langle g_2| + a^\dagger|g_2\rangle\langle e|), \\ H_1^{(1)} &= [\mathcal{S}, H_1] = 2\hbar a a^\dagger |e\rangle\langle e| \left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta - \delta} \right) - \\ &\quad - \hbar a^\dagger a \left(2\frac{g_1^2}{\Delta}|g_1\rangle\langle g_1| + 2\frac{g_2^2}{\Delta - \delta}|g_2\rangle\langle g_2| + \left(\frac{g_1 g_2}{\Delta} + \frac{g_1 g_2}{\Delta - \delta} \right) (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|) \right), \\ H_0^{(2)} &= [\mathcal{S}, H_0^{(1)}] = -H_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Logo, a equação A.1 nos permite escrever que

$$H' = e^{\mathcal{S}} H e^{-\mathcal{S}} = H_0 + H_1 + H_0^{(1)} + H_1^{(1)} + \frac{1}{2} H_0^{(2)} + \dots$$

e, substituindo as expressões anteriores,

$$\begin{aligned} H' &= H_0 + \hbar \left(\frac{g_1^2}{\Delta} + \frac{g_2^2}{\Delta - \delta} \right) a a^\dagger |e\rangle\langle e| - \\ &\quad - \hbar a^\dagger a \left(\frac{g_1^2}{\Delta}|g_1\rangle\langle g_1| + \frac{g_2^2}{\Delta - \delta}|g_2\rangle\langle g_2| + \frac{g_1 g_2}{2\Delta(\Delta - \delta)}(2\Delta - \delta)(|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{g^2}{\Delta^2} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portanto, o Hamiltoniano efetivo nos limites dispersivo ($g/\Delta \ll 1$) e quase-degenerado ($\delta/\Delta \ll 1$) é

$$|g_1\rangle = (0, 1, 0) \text{ e } |g_2\rangle = (0, 0, 1).$$

$$\begin{aligned}
H_{eff} &= H_{eff}^0 + H_{eff}^1, \\
H_{eff}^0 &= \hbar\omega a^\dagger a + \left[E_{g_1} - \hbar \frac{g_1^2}{\Delta} a^\dagger a \right] |g_1\rangle\langle g_1| + \left[E_{g_2} - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta - \delta} a^\dagger a \right] |g_2\rangle\langle g_2|, \\
H_{eff}^1 &= \hbar\lambda a^\dagger a (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo que nessa expressão eliminamos o termo proporcional a $|e\rangle\langle e|$ porque ele claramente é uma “constante do movimento”, já que $[|e\rangle\langle e|, H_{eff}] = 0$, e não consideraremos nenhuma situação na qual o átomo esteja inicialmente populado no estado excitado. Perceba também que a constante de acoplamento efetiva é dada por

$$\lambda = -g_1 g_2 \frac{(2\Delta - \delta)}{2\Delta(\Delta - \delta)}. \tag{2.6}$$

É interessante notar que se considerarmos constantes de acoplamento idênticas ($g_1 = g_2$) e o átomo completamente degenerado ($\delta = 0$), esse Hamiltoniano efetivo se reduz ao introduzido por Knight [4] para o modelo Raman degenerado (equação 2.31).

2.1.1 Aplicação do limite $\delta/\Delta \ll 1$

Apesar do Hamiltoniano efetivo apresentado na equação 2.5 ser válido apenas nos limites dispersivo e quase-degenerado, ele ainda contém termos de ordem superior no parâmetro adimensional $\varepsilon \equiv \delta/\Delta$. Explicitamente, observa-se isso ao nos recordarmos da soma geométrica

$$\frac{1}{\Delta - \delta} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{1 - \varepsilon} \right] = \frac{1}{\Delta} [1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots] = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n. \tag{2.7}$$

Além disso, embora o Hamiltoniano 2.5 descreva a transição efetiva entre os dois níveis fundamentais, queremos um Hamiltoniano efetivo cujos autovalores sejam proporcionais ao número de fótons do estado de Fock do campo quantizado. Isso se faz necessário para que a evolução gerada por tal Hamiltoniano seja completamente análoga àquela obtida no caso de um átomo degenerado ($E_{g_1} = E_{g_2}$). Assim, poderemos explorar a simplicidade do cálculo da evolução temporal desse modelo. Como será mostrado a seguir (veja a seção 2.2), pode-se obter esse Hamiltoniano desejado a partir dos termos de H_{eff} que são lineares em ε .

Assim sendo, o “Hamiltoniano efetivo desejado”, denotado por $\mathcal{H}$, é definido por

$$H_{eff} = \mathcal{H} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aplicando 2.7 à 2.5, $\mathcal{H}$ fica dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}^1, \\
\mathcal{H}^0 &= \hbar\omega a^\dagger a + \left[E_{g_1} - \hbar \frac{g_1^2}{\Delta} a^\dagger a \right] |g_1\rangle\langle g_1| + \left[E_{g_1} + \hbar\Delta\varepsilon - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta} (1 + \varepsilon) a^\dagger a \right] |g_2\rangle\langle g_2|, \\
\mathcal{H}^1 &= \hbar\lambda_1 a^\dagger a (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

com

$$\lambda_1 = -\frac{g_1 g_2}{2\Delta} (2 + \varepsilon).$$

2.2 Diagonalização de $\mathcal{H}$

Na equação 2.8, consideramos $\mathcal{H}$ até primeira ordem em ε e, portanto, para manter a coerência dos cálculos, também devemos calcular as suas energias e autoestados apenas com correções lineares em ε . O desenvolvimento do formalismo da teoria de perturbação estacionária em primeira ordem do parâmetro perturbativo está feito no apêndice B e a seguir aplicamos os resultados obtidos para o Hamiltoniano $\mathcal{H}$, cujo parâmetro perturbativo é a razão $\delta/\Delta = \varepsilon$.

Inicialmente, devemos diagonalizar o Hamiltoniano do caso não perturbado, obtido quando fazemos $\varepsilon = 0$ em 2.8

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \left[E_{g_1} - \hbar \frac{g_1^2}{\Delta} a^\dagger a \right] |g_1\rangle\langle g_1| + \left[E_{g_2} - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta} a^\dagger a \right] |g_2\rangle\langle g_2| - \hbar \frac{g_1 g_2}{\Delta} a^\dagger a (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|).$$

Percebendo que os operadores de campo que aparecem neste Hamiltoniano já são diagonais na base de Fock, podemos restringir a diagonalização de H_0 a um espaço de Hilbert de duas dimensões, que tem como possível base $\{|g_1, n\rangle, |g_2, n\rangle\}$. Escrevendo o Hamiltoniano explicitamente nessa base

$$H_0|n\rangle = |n\rangle \otimes \begin{pmatrix} \hbar\omega n + E_{g_1} - \hbar g_1^2 n / \Delta & -\hbar g_1 g_2 n / \Delta \\ -\hbar g_1 g_2 n / \Delta & \hbar\omega n + E_{g_2} - \hbar g_2^2 n / \Delta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

A diagonalização dessa matriz 2x2 é trivial e resulta nos seguintes autovalores

$$\begin{aligned} E_{+,n}^{(0)} &= \hbar\omega n + E_{g_1}, \\ E_{-,n}^{(0)} &= \hbar\omega n + E_{g_1} - \frac{\hbar n}{\Delta} (g_1^2 + g_2^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Com isso,

$$E_{+,n}^{(0)} - E_{-,n}^{(0)} = \frac{\hbar n}{\Delta} (g_1^2 + g_2^2) = \frac{\hbar n}{\Delta} g_1^2 (1 + \gamma^2), \quad (2.11)$$

na qual definimos $\gamma \equiv g_2/g_1$. Os autovetores também podem ser obtidos facilmente e, após a devida normalização, são dados por

$$\begin{aligned} |v_+^0, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} (-\gamma|g_1\rangle + |g_2\rangle) \otimes |n\rangle, \\ |v_-^0, n\rangle &= \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left(\frac{1}{\gamma}|g_1\rangle + |g_2\rangle \right) \otimes |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora partimos para o cálculo das primeiras correções das energias de $\mathcal{H}$, que são dadas por $E_{\pm}^{(1)} = \langle v_{\pm}^{(0)}, n | H_1 | v_{\pm}^{(0)}, n \rangle$, de acordo com B.4. Reescrevendo a equação 2.8 como $\mathcal{H} = H_0 + \varepsilon H_1$, vemos que a parte do Hamiltoniano de perturbação é dada por

$$H_1 = \left(\hbar\Delta - \hbar \frac{g_2^2}{\Delta} a^\dagger a \right) |g_2\rangle\langle g_2| - \frac{\hbar g_1 g_2}{2\Delta} a^\dagger a (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|).$$

A partir disso, calcula-se que

$$\begin{aligned} E_+^{(1)} &= \frac{\hbar\Delta}{1+\gamma^2}, \\ E_-^{(1)} &= \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} \left(\hbar\Delta - \frac{\hbar g_1^2 n}{\Delta} (1+\gamma^2) \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

o que nos leva as energias de $\mathcal{H}$ em primeira ordem em ε :

$$\mathcal{E}_+ = \hbar\omega n + E_{g_1} + \hbar\Delta\varepsilon \left(\frac{1}{1 + \gamma^2} \right) \quad (2.14)$$

e

$$\mathcal{E}_- = \hbar\omega n + E_{g_1} - \frac{\hbar g_1^2 n}{\Delta} (1 + \gamma^2 + \gamma^2 \varepsilon) + \hbar\Delta\varepsilon \left(\frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \right). \quad (2.15)$$

Para as correções dos autoestados utilizamos as equações B.6 e B.7 e, conseqüentemente, faz-se necessário o cálculo dos elementos de matriz de transição entre os autoestados $|v_+^{(0)}, n\rangle$ e $|v_-^{(0)}, n\rangle$ não perturbados. Utilizando as equações em 2.12 chegamos ao resultado

$$\langle v_-^{(0)}, n | H_1 | v_+^{(0)}, n \rangle = \gamma \left[\frac{\hbar\Delta}{1 + \gamma^2} - \frac{\hbar g_1^2 n}{2\Delta} \right]. \quad (2.16)$$

Finalmente, com o auxílio das equações 2.11, 2.12 e 2.16, podemos escrever os autoestados de $\mathcal{H}$ com correção até primeira ordem no parâmetro ε

$$|v_+, n\rangle = |v_+^{(0)}, n\rangle + \xi |v_+^{(1)}, n\rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left[-(1 - \mathcal{C}_n \varepsilon) |g_1, n\rangle + \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \mathcal{C}_n \varepsilon \right) |g_2, n\rangle \right] \quad (2.17)$$

e

$$|v_-, n\rangle = |v_-^{(0)}, n\rangle + \xi |v_-^{(1)}, n\rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left[\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \mathcal{C}_n \varepsilon \right) |g_1, n\rangle + (1 - \mathcal{C}_n \varepsilon) |g_2, n\rangle \right], \quad (2.18)$$

sendo que definimos o coeficiente ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\mathcal{C}_n \equiv \frac{\Delta^2}{n g_1^2 (1 + \gamma^2)^2} - \frac{1}{2(1 + \gamma^2)}. \quad (2.19)$$

É importante esclarecer esse resultado não é válido quando $n = 0$ (perceba que inclusive $\mathcal{C}_0$ não é definido). Isso acontece porque nesse caso $E_{+,n}^{(0)} - E_{-,n}^{(0)} = 0$ e a teoria de perturbação deixa de ser aplicável, logo, é necessário tratar esse caso separadamente. Entretanto, com o campo no estado de vácuo o nosso modelo não prevê transição, já que não consideramos o átomo preparado no estado excitado, e $\mathcal{H}$ deve ser diagonal na base $\{|0, g_1\rangle, |0, g_2\rangle\}$, o que de fato se obtém

$$\mathcal{H}|0\rangle = |0\rangle \otimes \begin{pmatrix} E_{g_1} & 0 \\ 0 & E_{g_1} + \hbar\Delta\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Assim, quando $n = 0$ não há correção para os autoestados e as energias são E_{g_1} e $E_{g_1} + \hbar\Delta\varepsilon = E_{g_1} + \hbar\delta = E_{g_2}$, ou seja, quando não há fótons a energia do sistema é a energia do estado atômico populado, como era de se esperar.

2.3 Dinâmica gerada pelo Hamiltoniano efetivo

A evolução gerada pelo Hamiltoniano efetivo por ser facilmente obtida pela forma integral da equação de Schrödinger,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle,$$

já que na seção anterior calculamos os autoestados e as energias de $\mathcal{H}$. Disso segue diretamente que (para $n \neq 0$)

$$e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|v_+, n\rangle = e^{-i\mathcal{E}_+t/\hbar}|v_+, n\rangle = e^{-it[\omega_{g_1} + \nu]}e^{-i\omega t n}|v_+, n\rangle, \quad (2.21)$$

$$e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|v_-, n\rangle = e^{-i\mathcal{E}_-t/\hbar}|v_-, n\rangle = e^{-it[\omega_{g_1} + \gamma^2\nu]}e^{-i\omega t n}e^{ig_1^2 t(1+\gamma^2(1+\varepsilon))n/\Delta}|v_-, n\rangle,$$

nas quais definimos as frequências

$$\omega_{g_j} \equiv \frac{E_{g_j}}{\hbar} \quad \text{e} \quad \nu \equiv \frac{\Delta\varepsilon}{1 + \gamma^2}.$$

Se $n = 0$, as equações de evolução se reduzem à ($j = 1, 2$)

$$e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|0, g_j\rangle = e^{-i\omega_{g_j}t}|0, g_j\rangle. \quad (2.22)$$

Apesar das equações em 2.21, em princípio, já definirem a evolução do sistema para um tempo t de interação, temos interesse em obter expressões fechadas para a evolução do sistema quando a cavidade é preparada num estado coerente, assim como é possível no limite degenerado [44] (veja a seção 2.4). Isso se faz conveniente especialmente no estudo da transferência de emaranhamento átomo $\leftrightarrow$ campo (capítulo 3), no qual as cavidades são inicialmente preparadas com um campo coerente. Em razão disso, passamos a considerar a evolução do sistema no limite

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.23)$$

Fisicamente, esse limite se justifica quando assumimos que as duas transições, $|g_1\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ e $|g_2\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, têm a praticamente a mesma probabilidade de acontecer, já que os dois níveis inferiores são quase-degenerados e estão longe da ressonância com o campo. Essa dependência específica em ε , contudo, se justifica pela simplicidade matemática que esse limite traz aos cálculos seguintes. Para não perder a consistência devemos voltar em todas as expressões que envolvem γ e aplicar esse limite, guardando apenas os termos lineares em ε . O coeficiente definido em 2.19, por exemplo, se transforma em

$$C_n = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta^2}{ng_1^2} - 1 \right) + \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{2\Delta^2}{ng_1^2} - 1 \right).$$

Outra expressão útil de se explicitar é

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right).$$

Com isso, fica simples de obter as novas expressões para os autoestados de $\mathcal{H}$

$$|v_+, n\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon\Delta}{4n\lambda_0} \right) |g_1, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon\Delta}{4n\lambda_0} \right) |g_2, n\rangle \quad (2.24)$$

e

$$|v_-, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon\Delta}{4n\lambda_0} \right) |g_1, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon\Delta}{4n\lambda_0} \right) |g_2, n\rangle, \quad (2.25)$$

sendo que definimos $\lambda_0 = g_1^2/\Delta$, e para as energias

$$\mathcal{E}_+ = \hbar\omega n + E_{g_1} + \frac{\hbar\Delta\varepsilon}{2} \quad (2.26)$$

e

$$\mathcal{E}_- = \hbar\omega n + E_{g_1} + \frac{\hbar\Delta\varepsilon}{2} - 2\frac{\hbar g_1^2 n}{\Delta}. \quad (2.27)$$

No capítulo 3 investigamos a transferência de emaranhamento entre átomos e campos quando estes estão preparados no estado coerente. Por causa disso, escolhemos como exemplo o cálculo da

evolução do sistema com as condições iniciais de campo coerente, de amplitude α Real, e átomo nos estados $|g_1\rangle$ e $|g_2\rangle$:

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha, g_1\rangle &= e^{-\alpha^2/2}e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|0, g_1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|n, g_1\rangle = \\ &= e^{-\alpha^2/2}e^{-i\omega_{g_1}t}|0, g_1\rangle + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[-\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{4n\lambda_0}\right) e^{-i\omega_+t}|n, v_+\rangle + \left(1 + \frac{\Delta\varepsilon}{4n\lambda_0}\right) e^{-i\omega_-t}|n, v_-\rangle \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões 2.24 e 2.25 e guardando apenas termos de primeira ordem em ε , chegamos a

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha, g_1\rangle &= e^{-\alpha^2/2}e^{-i\omega_{g_1}t} \left(1 - e^{-i\Delta\varepsilon t/2}\right) |0, g_1\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{-i(\omega_{g_1} + \Delta\varepsilon/2)t} \left\{ |g_1\rangle \left[|\alpha'\rangle + |\alpha''\rangle - \frac{\varepsilon\Delta}{2\lambda_0} \left(\frac{1}{N_{\chi_{\alpha'}}} |\chi_{\alpha'}\rangle - \frac{1}{N_{\chi_{\alpha''}}} |\chi_{\alpha''}\rangle \right) \right] - |g_2\rangle (|\alpha'\rangle - |\alpha''\rangle) \right\}, \end{aligned}$$

sendo que definimos o estado do campo²

$$|\chi_{\alpha}\rangle = N_{\chi_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} \frac{\alpha^n}{n\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.28)$$

e as amplitudes coerentes $\alpha'' = e^{i2\lambda_0 t}\alpha'$, $\alpha' = e^{-i\omega t}\alpha$. A fim de simplificar a notação, definimos ainda os seguintes estados do campo

$$\begin{aligned} |\alpha_{-}\rangle &= N_{\alpha_{-}} (|\alpha'\rangle - |\alpha''\rangle), \\ |\alpha_{+}\rangle &= N_{\alpha_{+}} (|\alpha'\rangle + |\alpha''\rangle), \\ |\xi_{\alpha}^{\pm}\rangle &= N_{\xi_{\alpha}^{\pm}} \left[\frac{1}{2N_{\alpha_{+}}} |\alpha_{+}\rangle + e^{-\alpha^2/2} \left(e^{\pm i\Delta\varepsilon t/2} - 1 \right) |0\rangle \mp \frac{\Delta\varepsilon}{4\lambda_0} \left(\frac{1}{N_{\chi_{\alpha'}}} |\chi_{\alpha'}\rangle - \frac{1}{N_{\chi_{\alpha''}}} |\chi_{\alpha''}\rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

cujos fatores de normalização são dados por $N_{\alpha_{\pm}} = \left[2 \pm 2e^{\alpha^2(\cos(2\lambda_0 t)-1)} \cos(\alpha^2 \sin(2\lambda_0 t)) \right]^{-1/2}$ e $N_{\xi_{\alpha}^{\pm}} = \left[e^{-\alpha^2} (e^{\pm i\Delta\varepsilon t/2} - 1)^2 + 2e^{-\alpha^2} (e^{\pm i\Delta\varepsilon t/2} - 1) + N_{\alpha_{\pm}}^{-2}/4 \right]^{-1/2}$. Antes de escrever o resultado final, informamos ao leitor que o cálculo para a condição inicial $|\alpha, g_2\rangle$ é completamente análogo e pode-se utilizar as mesmas definições. Substituindo essas definições, chegamos nas expressões para o estado do sistema após a interação

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha, g_1\rangle &= \frac{1}{N_{\xi_{\alpha}^{+}}} |\xi_{\alpha}^{+}, g_1\rangle - \frac{1}{2N_{\alpha_{-}}} |\alpha_{-}, g_2\rangle \\ e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha, g_2\rangle &= \frac{1}{N_{\xi_{\alpha}^{-}}} |\xi_{\alpha}^{-}, g_2\rangle - \frac{1}{2N_{\alpha_{-}}} |\alpha_{-}, g_1\rangle, \end{aligned} \quad (2.30)$$

nas quais desprezamos a fase global $e^{-i(\omega_{g_1} + \Delta\varepsilon/2)t}$ que não altera as propriedades físicas do estado. Perceba a analogia dessas expressões com aquelas obtidas no limite degenerado (equação 2.33).

²O fator de normalização desse estado é dado pela soma

$$N_{\chi_{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2} \frac{1}{n^2} \frac{\alpha^2}{n!},$$

que não possui forma fechada, mas pode ser calculada numericamente quando necessário.

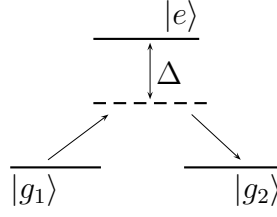


Figura 2.2: Configuração atômica do modelo Raman degenerado.

2.4 Limite degenerado

Observando o Hamiltoniano efetivo 2.5, que obtivemos através de uma transformação unitária do Hamiltoniano original 2.1 no limite dispersivo $g/\Delta \ll 1$; concluímos, como era de se esperar, que o modelo Raman degenerado proposto por Knight [4, 38] é um caso limite do nosso modelo. Para observar isso explicitamente, basta aplicar o limite $\delta = 0$ e a simplificação $g_1 = g_2 = g$ no Hamiltoniano efetivo 2.5 e recuperamos o Hamiltoniano do modelo Raman degenerado

$$\begin{aligned} H_{deg} &= H_{deg}^0 + H_{deg}^1, \\ H_{deg}^0 &= \hbar\omega a^\dagger a + \left[E_{g_1} + \hbar\lambda a^\dagger a \right] |g_1\rangle\langle g_1| + \left[E_{g_1} + \hbar\lambda a^\dagger a \right] |g_2\rangle\langle g_2|, \\ H_{deg}^1 &= \hbar\lambda a^\dagger a (|g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2|), \end{aligned} \quad (2.31)$$

com a constante de acoplamento efetiva $\lambda = -g^2/\Delta$.

A dinâmica gerada por esse Hamiltoniano tem algumas consequências interessantes que passamos a investigar a seguir. A diagonalização de H_{deg} é trivial quando passamos para a representação de interação

$$[H_{deg}^0, H_{deg}^1] = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{I_{deg}} = e^{iH_{deg}^0 t/\hbar} H_{deg}^1 e^{-iH_{deg}^0 t/\hbar} = H_{deg}^1,$$

e notamos que

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle \pm |g_2\rangle) \quad \Rightarrow \quad |g_2\rangle\langle g_1| + |g_1\rangle\langle g_2| = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|.$$

Logo,

$$H_{I_{deg}} = \hbar\lambda a^\dagger a (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|). \quad (2.32)$$

A primeira característica a se notar é a simplicidade da evolução quando escolhemos um campo coerente

$$\begin{aligned} e^{-iH_{I_{deg}} t/\hbar} |\alpha, g_1\rangle &= \frac{1}{2} \left[|g_1\rangle \left(|e^{-i\lambda t}\alpha\rangle + |e^{i\lambda t}\alpha\rangle \right) + |g_2\rangle \left(|e^{-i\lambda t}\alpha\rangle - |e^{i\lambda t}\alpha\rangle \right) \right] \\ e^{-iH_{I_{deg}} t/\hbar} |\alpha, g_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[|g_2\rangle \left(|e^{-i\lambda t}\alpha\rangle + |e^{i\lambda t}\alpha\rangle \right) + |g_1\rangle \left(|e^{-i\lambda t}\alpha\rangle - |e^{i\lambda t}\alpha\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A inversão atômica, $\langle \sigma_z \rangle$, é uma grandeza que pode ser calculada analiticamente nesse modelo, tanto para o campo no estado de Fock, estado coerente ou estado térmico [4]. Para o primeiro caso, o mais simples deles, vemos que quando o átomo está no estado $|g_1\rangle$

$$e^{-iH_{I_{deg}} t/\hbar} |n, g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-in\lambda t} |n, +\rangle + e^{in\lambda t} |n, -\rangle \right) = |n, g_1\rangle \cos(n\lambda t) - i |n, g_2\rangle \sin(n\lambda t)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \sigma_z \rangle_n = |\langle \psi(t) | g_1 \rangle|^2 - |\langle \psi(t) | g_2 \rangle|^2 = \cos(2n\lambda t). \quad (2.34)$$

O cálculo para os outros casos é análogo e apenas precisamos considerar a distribuição de probabilidade do número de fótons correspondente. Para o caso coerente temos a distribuição de Poisson

$$p_\alpha(n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$$

e para o campo térmico a temperatura T a distribuição de Bose-Einstein

$$p_{BE}(n) = \frac{\langle n \rangle_T^n}{(1 + \langle n \rangle_T)^{n+1}},$$

com

$$\langle n \rangle_T = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}.$$

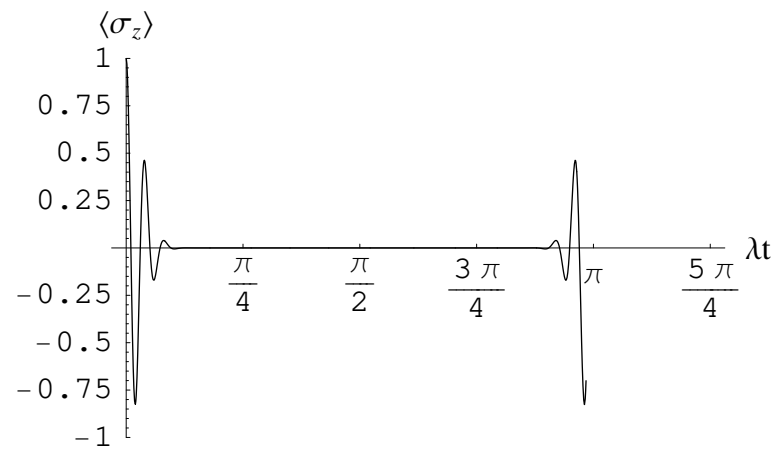
Disso vem que

$$\langle \sigma_z \rangle_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_\alpha(n) \langle \sigma_z \rangle_n = e^{-2\langle n \rangle \sin^2(\lambda t)} \cos(\langle n \rangle \sin(2\lambda t)), \quad (2.35)$$

na qual $\langle n \rangle = |\alpha|^2$, e

$$\langle \sigma_z \rangle_T = \sum_{n=0}^{\infty} p_{BE}(n) \langle \sigma_z \rangle_n = \frac{1 + 2\langle n \rangle_T \sin^2(\lambda t)}{1 + 4\langle n \rangle_T (\langle n \rangle_T + 1) \sin^2(\lambda t)}. \quad (2.36)$$

Essas expressões nos mostram que a interação com o campo coerente causa o ressurgimento perfeito das oscilações de Rabi a cada intervalo $\Delta t_R = \pi/\lambda$, quando o termo exponencial $e^{-2\langle n \rangle \sin^2(\lambda t)}$ vai a um. Além disso, para tempos curtos $\langle \sigma_z \rangle_\alpha \simeq \cos(2\langle n \rangle \lambda t)$, o que nos diz que nesse regime a frequência de Rabi é aproximadamente $2\langle n \rangle \lambda$ e o tempo de colapso, devido ao envelope Gaussiano, depende do número médio de fótons $t_c = 1/\lambda\sqrt{2\langle n \rangle}$



3 Transferência de Emaranhamento Átomo $\leftrightarrow$ Campo

Desde os primeiros trabalhos sobre informação quântica [50–53], os qubits, implementados por um spin $1/2$, um átomo de dois níveis, na polarização de fótons ou num circuito supercondutor, entre outros sistemas físicos de dois níveis, são utilizados como o meio físico ideal para a realização das tarefas previstas nos protocolos. A simplicidade matemática de sistemas bidimensionais e a clara interpretação física da maioria dos processos fez com que os qubits fossem amplamente utilizados nos trabalhos de informação quântica. Contribui para isso também o fato do emaranhamento bipartite de sistemas discretos de dimensão finita ser bem estabelecido e a existência de medidas que quantificam-no de maneira satisfatória (veja a seção 1.4 e as referências citadas lá). Por outro lado, alguns sistemas de variáveis contínuas, como o oscilador harmônico e o campo eletromagnético, que são definidos num espaço de Hilbert de dimensão infinita, têm atraído atenção tanto pelo desenvolvimento de técnicas experimentais (veja, por exemplo, as novas cavidades ópticas [54, 55] que podem armazenar um fóton por um tempo da ordem de 130 ms) quanto pelos desenvolvimentos teóricos que se utilizam dessa interface entre qubits e sistemas de variáveis contínuas. Alguns exemplos disso são trabalhos sobre como emaranhar qubits utilizando campos Gaussianos emaranhados [56–59] (em geral são utilizados estados comprimidos) e sobre a transferência de emaranhamento entre qubits e campos coerentes [5, 21]. Em [5] também menciona-se a possibilidade de utilizar sistemas de variáveis contínuas como memória de armazenamento de emaranhamento, o que tiraria proveito do fato desses sistemas poderem armazenar mais de um *ebit* de emaranhamento [60], devido a dimensão infinita do espaço de Hilbert associado. Conseqüentemente, é consenso geral que um elemento chave para a arquitetura de redes de processamento de informação quântica [5, 58, 59, 61] consiste nessa interface entre sistemas de variáveis contínuas e qubits. Veja também [62] para um exemplo de um canal quântico baseado em sistemas de muitos corpos.

Inspirados por essas idéias, aplicamos o modelo de interação átomo-campo que desenvolvemos no capítulo 2 ao estudo da transferência de emaranhamento entre qubits (átomos) e um sistema de variáveis contínuas (campos coerentes). Os resultados obtidos foram publicados no trabalho [9]. Antes de apresentarmos esse estudo (seção 3.2) revisamos os resultados da referência [5] na próxima seção.

3.1 Transferência de emaranhamento com o modelo Jaynes - Cummings

Quando dois átomos, de dois níveis, maximamente emaranhados interagem com duas cavidades (não dissipativas) inicialmente preparadas no vácuo, podemos obter um estado de emaranhamento máximo entre estas duas após um determinado tempo de interação ressonante [63]. Nesse caso, entretanto, os campos não se comportam como um sistema de variáveis contínuas real e sim como um qubit - já que ele assume apenas os estados ortonormais $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Mas, o que aconteceria se as cavidades fossem preparadas com campos coerentes de amplitude não nula? É possível transferir todo o emaranhamento atômico para esses campos coerentes? Seria possível o processo inverso, ou seja, emaranhar maximamente dois átomos a partir dessas cavidades emaranhadas? Essa é a motivação inicial da referência [5]. Os resultados obtidos por J. Lee *et al.* mostram que é possível depositar perfeitamente o emaranhamento atômico nos campos coerentes iniciais e, então, transferi-lo de volta para outro par de átomos. Eles consideram o modelo de JC ressonante para descrever a interação átomo-campo (veja a seção 1.3) e o seguinte estado inicial para o sistema [15, 64]

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |g\rangle_2 + |g\rangle_1 |e\rangle_2) |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b, \quad (3.1)$$

no qual as duas cavidades (a e b) estão preparadas no estado coerente de amplitude α e os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ representam os estados excitado e fundamental do átomo, respectivamente. Por conveniência matemática, admitimos que $\alpha \in \mathbf{R}$. Na notação que utilizamos o átomo 1 (2) interagem com a cavidade a (b). O cálculo da evolução desse sistema pode ser feito através do Hamiltoniano 1.26 ou do operador evolução 1.32, que nós reescrevemos aqui na base $\{|e\rangle_i, |g\rangle_i\}$

$$\Rightarrow \quad U^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \left(\right. \end{pmatrix}$$

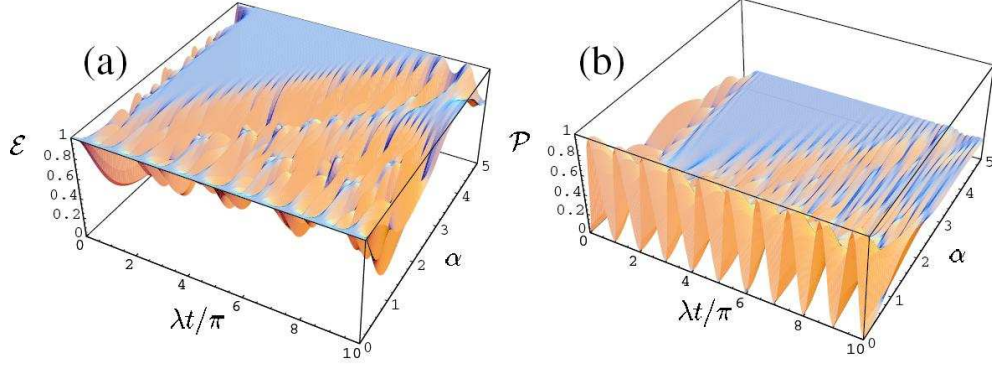


Figura 3.1: (a) Emaranhamento das cavidades em função do tempo de interação λt em unidades de π e da amplitude α dos campos coerentes iniciais. (b) Probabilidade de detectar os átomos no estado fundamental após deixarem as cavidades. “Reprinted figure with permission from J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, *Phys. Rev. Lett.*, **96** 080501 (2006). Copyright 2008 by the American Physical Society.”

<http://link.aps.org/abstract/PRL/v96/e080501>

estado 3.2 seja uma superposição de dois estados ortogonais de mesmo peso. Isso acontece quando o overlap

$$v_0(t) \equiv |\langle \alpha | U_{21}^\dagger(t) U_{22}(t) | \alpha \rangle| = \frac{e^{-\alpha^2}}{2} \sum_n \frac{\sqrt{n} \alpha^{2n}}{\alpha n!} \sin(2\lambda t \sqrt{n})$$

se anula. No limite $\alpha^2 \gg 1$, a distribuição Poissoniana pode ser substituída pela Gaussiana, de forma que $\frac{e^{-\alpha^2} \alpha^{2n}}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} e^{-(n-\alpha^2)^2/2\alpha^2}$. Levando em conta os termos em v_0 que mais contribuem para a soma, ou seja, aqueles com n próximo a α^2 , temos que $\sqrt{n} = \sqrt{\alpha^2 + (n - \alpha^2)} \simeq \alpha \left(1 + \frac{n - \alpha^2}{2\alpha^2}\right)$. Se, além disso, trocarmos a soma em n por uma integração em $x = (n - \alpha^2)/\alpha$ e a região de integração for estendida para $(-\infty, \infty)$, iremos reconhecer $v_0(t)$ como a transformada de Fourier da função Gaussiana

$$v_0(t) \propto \left(\sin(2\alpha\lambda t) + \frac{\lambda t}{2\alpha} \cos(2\alpha\lambda t) \right) e^{-\lambda^2 t^2/2}.$$

Disso, vemos que esse overlap tende Gaussianamente a zero em função do tempo de interação. Isso mostra a transferência completa do emaranhamento para campos coerentes de grandes amplitudes². Além disso, na figura 3.1 (b) podemos observar que nesse mesmo limite a probabilidade de sucesso na pós-seleção atômica tende a 1/4. Para vermos que os coeficientes do estado 3.2 terão o mesmo módulo, ou seja, $\langle \alpha | U_{21}^\dagger U_{21} | \alpha \rangle = \langle \alpha | U_{22}^\dagger U_{22} | \alpha \rangle$, observemos o seguinte: sabendo que se admitirmos a pós-seleção atômica no estado fundamental, o estado atômico $|e\rangle$ leva o estado coerente inicial a $U_{21}|\alpha\rangle$ e $|g\rangle$ a $U_{22}|\alpha\rangle$; então se os átomos são preparados no estado tripleto 3.1, cujos coeficientes dos dois termos têm o mesmo módulo, fica claro que os coeficientes dos termos do estado 3.2 também terão a mesma magnitude.

Para explicarmos o comportamento oscilatório do emaranhamento na figura 3.1 (a), temos que voltar à soma discreta do *overlap* v_0 . Os ressurgimentos ou colapsos acontecem quando os senos em v_0 entram ou saem de fase. Como a maior contribuição vem dos termos próximos ao pico da distribuição Poissoniana ($n \simeq \alpha^2$), podemos estimar o tempo de ressurgimento por $2\lambda t_r \left(\sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) = 2\pi$. Tomando a expansão do termo entre parênteses até segunda ordem

²O valor de α , contudo, não pode ser arbitrariamente grande, pois, como está mostrado no apêndice D para estados coerentes emaranhados, a dissipação anula drasticamente o emaranhamento para $\alpha \geq 3$

em α^2 , no limite $\alpha^2 \gg 1$, temos que $\lambda t_r = 2\alpha\pi$. Logo, conclui-se que a dinâmica do emaranhamento segue a conhecida dinâmica de colapso-resurgimento do modelo JC.

Após estudar a transferência de qubits para um sistema de variável contínua, naturalmente, surge a pergunta: é possível recuperar esse emaranhamento, de forma que dois qubits fiquem maximamente emaranhados depois da interação? Para responder a essa pergunta, consideramos um novo par de átomos, cada um inicialmente preparado no estado fundamental, que interage com o par de cavidades emaranhadas no estado $|C(t)\rangle$. Utilizando o operador evolução $U(t') = U^{(1)}(t') \otimes U^{(2)}(t')$, pode-se obter que ao interagir um tempo t' o sistema evolui para o estado

$$|\phi(t')\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{V}_{at}(t') |n\rangle_a |m\rangle_b, \quad (3.4)$$

com a matriz

$$\mathbf{V}_{at}(t') = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\lambda t' \sqrt{n+1}) \text{sen}(\lambda t' \sqrt{m+1}) c_{n+1,m+1} \\ -i \text{sen}(\lambda t' \sqrt{n+1}) \cos(\lambda t' \sqrt{m}) c_{n+1,m} \\ -i \cos(\lambda t' \sqrt{n}) \text{sen}(\lambda t' \sqrt{m+1}) c_{n,m+1} \\ \cos(\lambda t' \sqrt{n}) \cos(\lambda t' \sqrt{m}) c_{n,m} \end{pmatrix},$$

na base $\{|e\rangle_1, |g\rangle_1\} \otimes \{|e\rangle_2, |g\rangle_2\} = \{|e, e\rangle, |e, g\rangle, |g, e\rangle, |g, g\rangle\}$. O emaranhamento criado entre os dois átomos pode ser encontrado se traçarmos os estados dos campos de $|\phi(t')\rangle$, o que nos leva ao estado atômico $\rho_{at}(t') = \sum_{n,m} \mathbf{V}_{at}(t') \mathbf{V}_{at}^\dagger(t')$, e utilizarmos a negatividade logarítmica da transposição parcial de ρ_{at} (equação 1.48). O resultado obtido por esse procedimento está apresentado na figura 3.2 (a). Logo percebe-se que ele não é satisfatório, ou seja, os campos não são capazes de transferir o emaranhamento para os átomos se $\alpha \neq 0$. Entretanto, devemos lembrar que na transferência qubits $\rightarrow$ campo fizemos a pós-seleção dos átomos (o que destrói qualquer correlação existente entre eles), pois isso deixaria as cavidades num estado puro, para o qual podemos utilizar a entropia de von Neumann como medida de emaranhamento. Conseqüentemente, pode ser que o fato de não impor a medida das cavidades após a interação tenha contribuído para a não transferência completa de emaranhamento. Fisicamente, faz sentido pensarmos que ao traçarmos as cavidades iremos medir apenas o emaranhamento entre duas partes de um sistema composto por quatro partes (dois átomos e duas cavidades) e que ao fazermos a pós-seleção iremos colapsar duas partes desse sistema (as cavidades, nesse caso) num estado produto (puro), fazendo com que todo o emaranhamento do sistema se concentre nas duas partes restantes (os átomos).

Assim, temos que encontrar uma maneira de realizar essa pós-seleção dos campos. Seguindo a idéia da referência [5], podemos pensar no esquema de implementação do projetor $P_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ilustrado na figura 3.3. Logo, esse esquema reduz o projetor P_α a uma contagem de fótons. Matematicamente, ele se traduz em $D(-\alpha)|\alpha\rangle = |\alpha - \alpha\rangle = |0\rangle$ e $D(-\alpha)\rho D^\dagger(-\alpha) = \rho' \neq |0\rangle\langle 0|$ ($\rho \neq |\alpha\rangle\langle\alpha|$). O estado atômico, após a projeção $P_\alpha^{(a)} P_\alpha^{(b)}$ e um tempo de interação $t' = t$, pode ser escrito como

$$|A(t)\rangle = \frac{N_A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2v_1v_2 \\ v_1v_4 + v_2v_3 \\ v_3v_2 + v_4v_1 \\ 2v_3v_4 \end{pmatrix},$$

na qual $v_1 = \langle\alpha|U_{12}U_{21}|\alpha\rangle$, $v_2 = \langle\alpha|U_{12}U_{22}|\alpha\rangle$, $v_3 = \langle\alpha|U_{22}U_{21}|\alpha\rangle$, $v_4 = \langle\alpha|U_{22}U_{22}|\alpha\rangle$ e N_A é o fator de normalização. Aplicando os limites $\alpha^2 \gg 1$, $\lambda t \gg 1$ e utilizando o mesmo procedimento anterior, pode-se mostrar que $v_2 \rightarrow 0$, $v_3 \rightarrow 0$, $v_1 \rightarrow -1/2$ e $v_4 \rightarrow 1/2$. Portanto, o estado $|A(t)\rangle$ tende ao estado maximamente emaranhado $(|e\rangle_1|g\rangle_2 + |g\rangle_1|e\rangle_2)/\sqrt{2}$, o que demonstra a transferência completa do emaranhamento e pode ser visto na figura 3.2 (b). Baseado nisso, podemos concluir que a completa transferência de emaranhamento qubits $\leftrightarrow$ sistema de variável contínua é possível dentro do modelo de JC e dos limites aplicados.

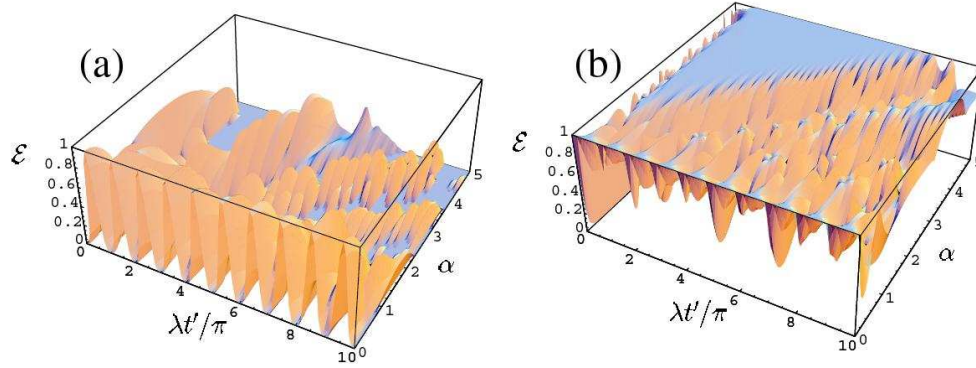


Figura 3.2: (a) Emaranhamento do segundo par de átomos em função do tempo de interação ($\lambda t' = \lambda t$) e da amplitude coerente α . (b) Gráfico análogo para o caso no qual é feita a pós-seleção das cavidades no estado coerente $|\alpha\rangle$. Note a semelhança com o gráfico da figura 3.1 (a). “*Reprinted figure with permission from J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim and S. Bose, Phys. Rev. Lett., 96 080501 (2006). Copyright 2008 by the American Physical Society.*”

<http://link.aps.org/abstract/PRL/v96/e080501>

É interessante informar ao leitor que L. Zhou *et al.* [21] estudou o mesmo esquema de transferência de emaranhamento, mas com a aplicação de um campo clássico extra nas cavidades. Nesse caso também é possível a transferência completa dentro de algumas aproximações, sendo que pode-se, inclusive, obter uma expressão analítica para a *Concurrence* das cavidades e dos átomos.

3.2 Transferência de emaranhamento com o modelo Raman Quase-degenerado

Agora apresentamos o estudo da transferência de emaranhamento qubits ↔ sistema de variável contínua baseado no modelo Raman Quase-degenerado. A motivação e a idéia básica é a mesma da seção anterior, o emaranhamento de dois átomos pode ser transferido para um par de cavidades inicialmente preparadas com campos coerentes? E o processo inverso, também é possível? Para responder a essas perguntas, vamos aplicar os resultados do capítulo 2 e as medidas de emaranhamento introduzidas na seção 1.4.

Átomo → Campo

O estado inicial do sistema é³

$$|\psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b(|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2 - |g_2\rangle_1|g_1\rangle_2). \quad (3.5)$$

Utilizando a equação 2.30 podemos obter que

³Após compreender todo o esquema de transferência de emaranhamento, o leitor poderá se convencer de que esse estado inicial atômico pode ser obtido a partir do próprio esquema. Por exemplo, se considerarmos um átomo preparado em $|g_1\rangle$ que interage sucessivamente com duas cavidades preparadas em estados coerentes e após deixá-las é medido no mesmo estado inicial, então o sistema de duas cavidades será deixado num estado análogo aos estados de 3.7 a 3.10. A partir disso, podemos aplicar a segunda parte do esquema de transferência para obter o estado atômico maximamente emaranhado.

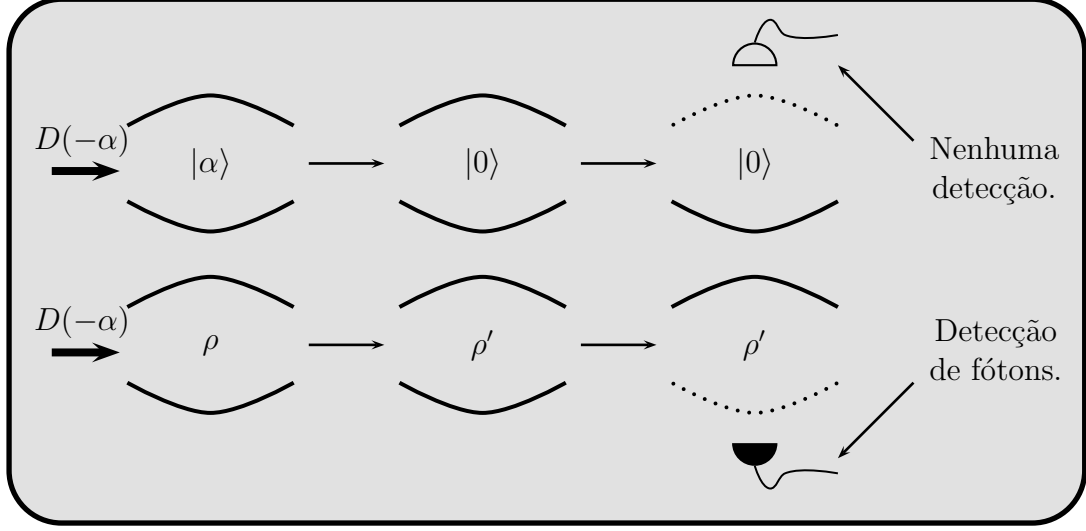


Figura 3.3: O esquema de projeção da cavidade no estado coerente $|\alpha\rangle$ consiste basicamente em injetar um coerente de amplitude $-\alpha$ e monitorar o número de fótons que sai da cavidade após a liberação de um dos espelhos (o que pode ser feito com uma corrente elétrica que diminui a sua qualidade). Se nenhum fóton for detectado, então a cavidade estava no estado $|\alpha\rangle$; caso contrário deve-se repetir o experimento até seleção do evento desejado.

$$\begin{aligned}
 e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha\rangle_a|g_1\rangle_1 \otimes e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\alpha\rangle_b|g_2\rangle_2 &= -\frac{1}{2N_{\xi_\alpha^+}N_{\alpha_-}}|g_1\rangle_1|g_1\rangle_2|\xi_\alpha^+\rangle_a|\alpha_-\rangle_b + \frac{1}{N_{\xi_\alpha^+}N_{\xi_\alpha^-}}|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2|\xi_\alpha^+\rangle_a|\xi_\alpha^-\rangle_b \\
 &+ \frac{1}{4N_{\alpha_-}^2}|g_2\rangle_1|g_1\rangle_2|\alpha_-\rangle_a|\alpha_-\rangle_b - \frac{1}{2N_{\xi_\alpha^-}N_{\alpha_-}}|g_2\rangle_1|g_2\rangle_2|\alpha_-\rangle_a|\xi_\alpha^-\rangle_b
 \end{aligned}$$

e, a partir disso, concluímos que após um tempo t de interação

$$\begin{aligned}
 |\psi_1(t)\rangle &= -\frac{1}{2N_{\xi_\alpha^+}N_{\alpha_-}}|g_1\rangle_1|g_1\rangle_2(|\xi_\alpha^+\rangle_a|\alpha_-\rangle_b - |\alpha_-\rangle_a|\xi_\alpha^+\rangle_b) \\
 &- \frac{1}{2N_{\xi_\alpha^-}N_{\alpha_-}}|g_2\rangle_1|g_2\rangle_2(|\alpha_-\rangle_a|\xi_\alpha^-\rangle_b - |\xi_\alpha^-\rangle_a|\alpha_-\rangle_b) \\
 &+ |g_2\rangle_1|g_1\rangle_2 \left(\frac{1}{4N_{\alpha_-}^2}|\alpha_-\rangle_a|\alpha_-\rangle_b - \frac{1}{N_{\xi_\alpha^+}N_{\xi_\alpha^-}}|\xi_\alpha^-\rangle_a|\xi_\alpha^+\rangle_b \right) \\
 &+ |g_1\rangle_1|g_2\rangle_2 \left(\frac{1}{N_{\xi_\alpha^+}N_{\xi_\alpha^-}}|\xi_\alpha^+\rangle_a|\xi_\alpha^-\rangle_b - \frac{1}{4N_{\alpha_-}^2}|\alpha_-\rangle_a|\alpha_-\rangle_b \right). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Conhecendo essa expressão, basta calcular o emaranhamento dos estados de duas cavidades obtidos pelas quatro possíveis projeções dos estados atômicos. A escolha natural da medida de emaranhamento é a entropia de von Neumann do sistema reduzido, já que estamos lidando com um sistema bipartite descrito por um estado puro. Nesse ponto utilizamos um resultado de X. Wang [65], demonstrado no apêndice C, que fornece uma expressão simples para os autovalores da matriz densidade reduzida de um estado geral do tipo $|\Psi\rangle_{ab} = a|\bar{\alpha}\rangle_a|\bar{\beta}\rangle_b + d|\bar{\gamma}\rangle_a|\bar{\delta}\rangle_b$, sendo que a e d são fatores de normalização e os estados de cada cavidade podem ser não-ortogonais, ou seja, $\langle\bar{\alpha}|\bar{\gamma}\rangle \neq 0$ e $\langle\bar{\beta}|\bar{\delta}\rangle \neq 0$.

Pós-seleção atômica em $|g_1\rangle_1|g_1\rangle_2$ ou $|g_2\rangle_1|g_2\rangle_2$

A detecção dos átomos num destes estados deixa as cavidades, respectivamente, num dos estados

$$|\text{cav-1}\rangle = \frac{1}{2N_{\xi_{\alpha}^+}N_{\alpha_-}} (|\xi_{\alpha}^+\rangle_a|\alpha_-\rangle_b - |\alpha_-\rangle_a|\xi_{\alpha}^+\rangle_b) \quad (3.7)$$

e

$$|\text{cav-2}\rangle = \frac{1}{2N_{\xi_{\alpha}^-}N_{\alpha_-}} (|\alpha_-\rangle_a|\xi_{\alpha}^-\rangle_b - |\xi_{\alpha}^-\rangle_a|\alpha_-\rangle_b). \quad (3.8)$$

Interessantemente, o resultado demonstrado no apêndice C nos diz que existe uma base na qual esses dois estados podem ser escritos como uma superposição, de pesos iguais, de dois estados compostos ortogonais - como acontece para os estados de Bell no caso de qubits. Em outras palavras, isso quer dizer que a matriz densidade reduzida, que descreve o estado de uma cavidade, é um estado de mistura máxima e, portanto, possui emaranhamento igual a um. O que torna esse resultado ainda mais interessante é a observação de que isso é válido para qualquer valor de α , de $\varepsilon = \delta/\Delta$, e do tempo de interação, desde que seja satisfeito $e^{i2\lambda_0 t} \neq 1$, ou seja, $2\lambda_0 t \neq 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Note que para esses tempos de interação $|\alpha_-\rangle = 0$. Fisicamente, podemos entender isso com base na periodicidade do modelo Raman Quase-degenerado. Logo, concluímos que uma escolha adequada do tempo de interação, que não depende do campo coerente inicial, possibilita a transferência completa de emaranhamento dos átomos para as cavidades.

Pós-seleção atômica em $|g_2\rangle_1|g_1\rangle_2$ ou $|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2$

Neste caso, a determinação do estado dos átomos deixará as cavidades num dos respectivos estados

$$|\text{cav-3}\rangle = \left(\frac{1}{4N_{\alpha_-}^2} |\alpha_-\rangle_a |\alpha_-\rangle_b - \frac{1}{N_{\xi_{\alpha}^+} N_{\xi_{\alpha}^-}} |\xi_{\alpha}^-\rangle_a |\xi_{\alpha}^+\rangle_b \right) \quad (3.9)$$

e

$$|\text{cav-4}\rangle = \left(\frac{1}{N_{\xi_{\alpha}^+} N_{\xi_{\alpha}^-}} |\xi_{\alpha}^+\rangle_a |\xi_{\alpha}^-\rangle_b - \frac{1}{4N_{\alpha_-}^2} |\alpha_-\rangle_a |\alpha_-\rangle_b \right), \quad (3.10)$$

que por óbvia questão de simetria possuem o mesmo emaranhamento. Escolhemos calcular explicitamente o emaranhamento de $|\text{cav-3}\rangle$, sempre lembrando que resultados análogos podem ser obtidos da mesma maneira para $|\text{cav-4}\rangle$. Na notação do apêndice C, temos os seguintes parâmetros para o estado $|\text{cav-3}\rangle$: $a = \frac{1}{4N_{\alpha_-}^2}$, $d = -\frac{1}{N_{\xi_{\alpha}^+} N_{\xi_{\alpha}^-}}$, $n_1 = \sqrt{1 - |\langle \alpha_- | \xi_{\alpha}^- \rangle|^2}$, $n_2 = \sqrt{1 - |\langle \xi_{\alpha}^+ | \alpha_- \rangle|^2}$ e os autovalores da matriz densidade reduzida $\rho_a = \text{Tr}_b(|\text{cav-3}\rangle\langle \text{cav-3}|)$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4|adn_1n_2|^2}. \quad (3.11)$$

Logo, o emaranhamento do estado $|\text{cav-3}\rangle$ é dado pela entropia de von Neumann do estado reduzido $E = -\lambda_+ \log_2(\lambda_+) - \lambda_- \log_2(\lambda_-)$. O comportamento de E em função dos principais parâmetros é apresentado nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6.

Desses dois primeiros gráficos, conclui-se que o emaranhamento das cavidades é uma função periódica do tempo de interação e que só é estritamente nulo para $\lambda_0 t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Isto demonstra certa robustez da transferência de emaranhamento em relação a variações no tempo de interação dos átomos com as cavidades, principalmente quando consideramos $\alpha > 2$, situação na qual o emaranhamento das cavidades é praticamente máximo para a maioria dos valores de $\lambda_0 t$. Disso, já podemos concluir que a transferência de emaranhamento completa também pode ser alcançada para a pós-seleção atômica em $|g_2\rangle_1|g_1\rangle_2$ ou $|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2$. Ou seja, com uma escolha adequada do tempo de interação e da amplitude α , podemos conseguir cavidades maximamente emaranhadas qualquer que seja o resultado da detecção atômica.

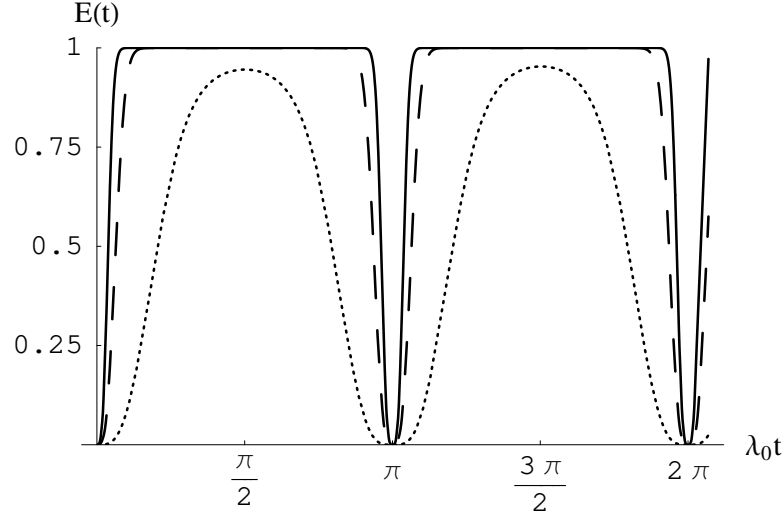


Figura 3.4: Emaranhamento do estado $|\text{cav-3}\rangle$. Inicialmente prepara-se as cavidades com um campo coerente de amplitude $\alpha = 1$ (pontilhada), $\alpha = 3$ (tracejada) e $\alpha = 5$ (sólida). É interessante dizer que basta determinar a fração $\frac{\Delta\varepsilon}{\lambda_0} = \frac{\delta}{g_1^2/\Delta}$, dos parâmetros atômicos do problema, para que o emaranhamento se torne uma função apenas do tempo e de α . Neste gráfico escolhemos $\Delta\varepsilon/\lambda_0 = 1/10$.

Também é interessante nos perguntarmos como o nosso parâmetro perturbativo $\varepsilon = \delta/\Delta$, a não-degenerescência atômica, influencia o emaranhamento das cavidades. O gráfico da figura 3.6 nos mostra que se $\alpha > 2$, ele é insensível a pequenas diferenças de energia nos dois níveis fundamentais. Variações significativas ocorrem apenas para pequenas amplitudes coerentes, $\alpha = 1$, por exemplo, ou para valores grandes de ε , situação na qual o Hamiltoniano 2.8 perde a validade. Assim, percebemos que o estudo da transferência de emaranhamento no limite degenerado (seção 3.2.1) descreve com boa aproximação o caso quase-degenerado, com a vantagem da grande simplicidade matemática.

Campo → Átomo

Agora o estado inicial do sistema passa a ser

$$|\psi_2(0)\rangle = |g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 |\text{cav-1}\rangle, \quad (3.12)$$

sendo que escolhemos o tempo de interação da primeira parte do esquema como $t_1 = \pi/2\lambda_0$, de forma que $\alpha'' = -\alpha' = e^{-i\pi\omega/2\lambda_0}\alpha \equiv \alpha_1$, na qual α é a amplitude do campo coerente inicial das cavidades. É importante salientar que estas escolhas foram feitas apenas para simplificar as contas e evitar complicações desnecessárias. De fato, resultados análogos podem ser obtidos com os outros estados do tipo $|\text{cav-i}\rangle$, definidos anteriormente.

O cálculo da evolução do sistema sob o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ requer que calculemos o termo $e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|g_1\rangle|\xi_{\alpha_1}^+\rangle$, o que pode ser feito a partir das equações 2.21 e 2.30. O resultado que se obtém é

$$e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|g_1\rangle|\xi_{\alpha_1}^+\rangle = \frac{e^{-i(\omega_{g_1} + \Delta\varepsilon/2)t}}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle|\text{aux-1}\rangle + |g_2\rangle|\text{aux-2}\rangle), \quad (3.13)$$

com

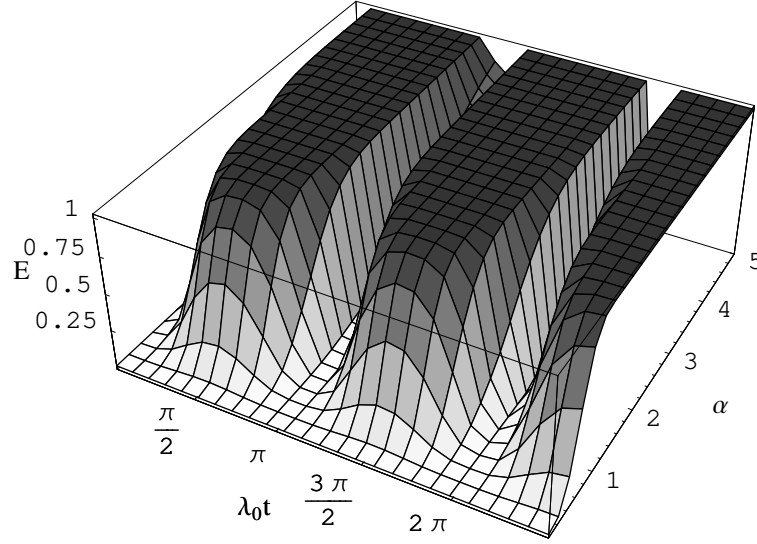


Figura 3.5: Gráfico do emaranhamento das cavidades, no estado $|\text{cav-3}\rangle$, em função do tempo de interação e da amplitude coerente inicial das cavidades. Neste gráfico foi feita a escolha $\Delta\varepsilon/\lambda_0 = 1/10$.

$$|\text{aux-1}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\xi_{\alpha_1}^+\rangle + |\xi_{-\alpha_1}^+\rangle + 2N_{\xi_{\alpha_1}^+} e^{-\alpha^2/2} e^{i\Delta\varepsilon t/2} \left(e^{i\Delta\varepsilon t/2} - 1 \right) |0\rangle \right. \\ \left. + \frac{\Delta\varepsilon}{4\lambda_0} \frac{N_{\xi_{\alpha_1}^+}}{N_{\chi_{\alpha_1}}} \left(|\chi_{\alpha_1'}\rangle + |\chi_{\alpha_1''}\rangle - |\chi_{-\alpha_1'}\rangle - |\chi_{-\alpha_1''}\rangle \right) \right]$$

e

$$|\text{aux-2}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{N_{\xi_{\alpha_1}^+}}{2N_{\alpha_{1-}}} (|\alpha_{1-}\rangle + |-\alpha_{1-}\rangle) + \frac{\Delta\varepsilon}{4\lambda_0} \frac{N_{\xi_{\alpha_1}^+}}{N_{\chi_{\alpha_1}}} \left(|\chi_{\alpha_1'}\rangle - |\chi_{\alpha_1''}\rangle + |\chi_{-\alpha_1'}\rangle - |\chi_{-\alpha_1''}\rangle \right) \right]$$

sendo $\alpha_1'' = e^{i2\lambda_0 t} \alpha_1'$, $\alpha_1' = e^{-i\omega t} \alpha_1$ e utilizamos as igualdades $|\alpha_1''|^2 = |\alpha_1'|^2 = |\alpha_1|^2 = \alpha^2$ para igualar e simplificar alguns fatores de normalização. Na realidade, o leitor não precisa se preocupar com as expressões complicadas dos estados auxiliares $|\text{aux-1}\rangle$ e $|\text{aux-2}\rangle$, pois, como veremos a seguir, apenas a estrutura da equação 3.13 é importante para a análise da transferência de emaranhamento.

A evolução do sistema pode então ser calculada a partir de 2.30 e 3.13, nos levando a

$$|\psi_2(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}N_{\xi_{\alpha_1}^+}} \left\{ \frac{1}{N_{\xi_{\alpha_1}^+}} |g_1, g_1\rangle \left[|\text{aux-1}\rangle_a (|\xi_{-\alpha_1}^+\rangle_b - |\xi_{\alpha_1}^+\rangle_b) - (|\xi_{-\alpha_1}^+\rangle_a - |\xi_{\alpha_1}^+\rangle_a) |\text{aux-1}\rangle_b \right] + \right. \\ + \frac{1}{2N_{\alpha_{1-}}} |g_2, g_2\rangle \left[|\text{aux-2}\rangle_a (|\alpha_{1-}\rangle_b - |-\alpha_{1-}\rangle_b) - (|\alpha_{1-}\rangle_a - |-\alpha_{1-}\rangle_a) |\text{aux-2}\rangle_b \right] + \\ + |g_1, g_2\rangle \left[\frac{1}{2N_{\alpha_{1-}}} |\text{aux-1}\rangle_a (|\alpha_{1-}\rangle_b - |-\alpha_{1-}\rangle_b) - \frac{1}{N_{\xi_{\alpha_1}^+}} (|\xi_{-\alpha_1}^+\rangle_a - |\xi_{\alpha_1}^+\rangle_a) |\text{aux-2}\rangle_b \right] \\ \left. + |g_2, g_1\rangle \left[\frac{1}{N_{\xi_{\alpha_1}^+}} |\text{aux-2}\rangle_a (|\xi_{-\alpha_1}^+\rangle_b - |\xi_{\alpha_1}^+\rangle_b) - \frac{1}{2N_{\alpha_{1-}}} (|\alpha_{1-}\rangle_a - |-\alpha_{1-}\rangle_a) |\text{aux-1}\rangle_b \right] \right\},$$

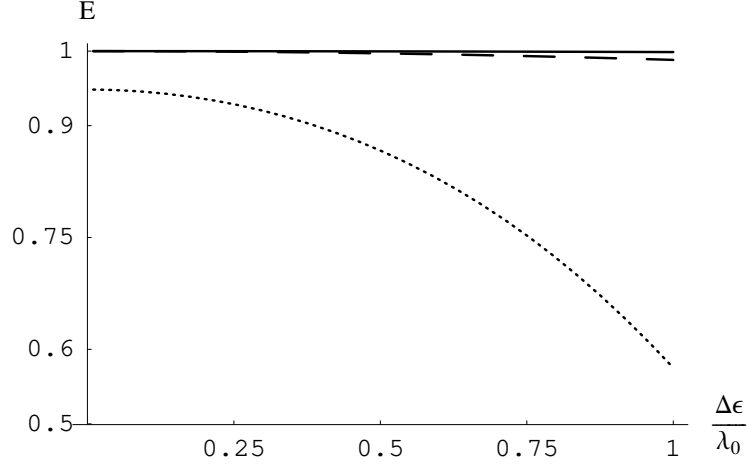


Figura 3.6: Emaranhamento do estado $|\text{cav-3}\rangle$ em função do parâmetro $\frac{\Delta\epsilon}{\lambda_0} = \frac{\delta}{g_1^2/\Delta}$. A linha pontilhada corresponde à $\alpha = 1$, a tracejada à $\alpha = 3$ e a sólida à $\alpha = 5$. Escolhemos o tempo de interação que maximiza o emaranhamento das cavidades: $\lambda_0 t = \pi/2$.

na qual eliminamos a fase global $e^{-i(\omega_{g_1} + \Delta\epsilon/2)t}$. Nessa expressão, só o que precisamos é observar a estrutura matemática do estado $|\psi_2(t)\rangle$ e notar que os termos proporcionais a $|g_1\rangle_1|g_1\rangle_2$ e $|g_2\rangle_1|g_2\rangle_2$ cancelam-se automaticamente para qualquer projeção das duas cavidades num mesmo estado, como $|\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b$. Fisicamente, isso significa que qualquer medida nas cavidades, seguindo o esquema da figura 3.3, por exemplo, irá deixar o subsistema de dois átomos num estado descrito apenas pela superposição de $|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2$ e $|g_2\rangle_1|g_1\rangle_2$. Ainda mais, conclui-se que para qualquer projeção o coeficiente dos termos de $|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2$ e $|g_2\rangle_1|g_1\rangle_2$ serão idênticos e de sinais opostos. Logo, após a medida das cavidade, o estado de dois átomos se reduzirá ao estado de Bell

$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle_1|g_2\rangle_2 - |g_2\rangle_1|g_1\rangle_2), \quad (3.14)$$

que é localmente equivalente a qualquer outro estado da base de Bell e cujo emaranhamento é máximo. Dessa forma, mostramos que é possível a transferência completa de emaranhamento campo → átomo. Também é interessante notar que o primeiro par de átomos foi preparado justamente nesse estado de Bell (veja a equação 3.5), ou seja, conseguimos recuperar o mesmo estado físico após todo o processo. Isso evidencia a dinâmica periódica da interação átomo-campo que, mesmo após duas medidas projetivas, que destroem todas as correlações existentes entre os subsistemas, ainda pode levar o segundo par de átomos ao mesmo estado quântico no qual o primeiro par foi preparado.

3.2.1 Transferência no limite degenerado

Nessa seção apresentamos os resultados para a transferência de emaranhamento quando consideramos átomos na configuração Raman degenerado (figura 2.2). Apesar de ser um limite do estudo apresentado anteriormente, a simplicidade matemática desse modelo permite obtermos expressões analíticas para o emaranhamento das cavidades, por exemplo, o que possibilita investigar a influência da dissipação no emaranhamento das cavidades (veja o apêndice D).

Antes de estudarmos a evolução do sistema a partir de uma condição inicial específica, introduzimos os seguintes estados coerentes emaranhados (também conhecidos como “*quasi-Bell states*” [66, 67])

$$\begin{aligned}
|f_1\rangle_{ab} &= N_1 \left(|e^{i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_b + |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{i\lambda t}\alpha\rangle_b \right), \\
|f_2\rangle_{ab} &= N_2 \left(|e^{i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_b - |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{i\lambda t}\alpha\rangle_b \right), \\
|f_3\rangle_{ab} &= N_3 \left(|e^{i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{i\lambda t}\alpha\rangle_b + |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_b \right), \\
|f_4\rangle_{ab} &= N_4 \left(|e^{i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{i\lambda t}\alpha\rangle_b - |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_a |e^{-i\lambda t}\alpha\rangle_b \right),
\end{aligned}$$

sendo que os fatores de normalização são dados por

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1/\sqrt{2(1+|\kappa|^2)}, \\
N_2 &= 1/\sqrt{2(1-|\kappa|^2)}, \\
N_3 &= 1/\sqrt{2(1+Re[\kappa^2])}, \\
N_4 &= 1/\sqrt{2(1-Re[\kappa^2])},
\end{aligned}$$

com $\kappa \equiv \langle e^{i\lambda t}\alpha | \alpha e^{-i\lambda t} \rangle = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2 e^{-i2\lambda t}} = e^{|\alpha|^2(\cos(2\lambda t)-1)} e^{-i|\alpha|^2 \sin 2\lambda t}$.

Agora basta utilizarmos o Hamiltoniano 2.32, ou as regras de evolução 2.33, para obtermos de maneira simples as seguintes evoluções

$$|\Psi^+\rangle |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{N_3} |f_3\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_2\rangle_2 + |g_2\rangle_1 |g_1\rangle_2) - \frac{1}{N_4} |f_4\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 + |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2) \right\},$$

$$|\Psi^-\rangle |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{N_1} |f_1\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_2\rangle_2 - |g_2\rangle_1 |g_1\rangle_2) + \frac{1}{N_2} |f_2\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 - |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2) \right\},$$

$$|\Phi^+\rangle |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{N_3} |f_3\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 + |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2) - \frac{1}{N_4} |f_4\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_2\rangle_2 + |g_2\rangle_1 |g_1\rangle_2) \right\},$$

e

$$|\Phi^-\rangle |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{N_1} |f_1\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 - |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2) + \frac{1}{N_2} |f_2\rangle_{ab} (|g_1\rangle_1 |g_2\rangle_2 - |g_2\rangle_1 |g_1\rangle_2) \right\},$$

nas quais $|\Psi^\pm\rangle$ e $|\Phi^\pm\rangle$ são os estados da base de Bell para o espaço de Hilbert de dois qubits, dados por

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle_1 |g_2\rangle_2 \pm |g_2\rangle_1 |g_1\rangle_2) \quad (3.15)$$

e

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 \pm |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2). \quad (3.16)$$

Portanto, se quisermos analisar a transferência de emaranhamento átomo $\rightarrow$ campo, basta caracterizarmos o emaranhamento dos estados de duas cavidades $|f_j\rangle_{ab}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Novamente, utilizamos o resultado do apêndice C para calcular os autovalores $(\lambda_\pm^{(j)})$ da matriz densidade reduzida desses estados:

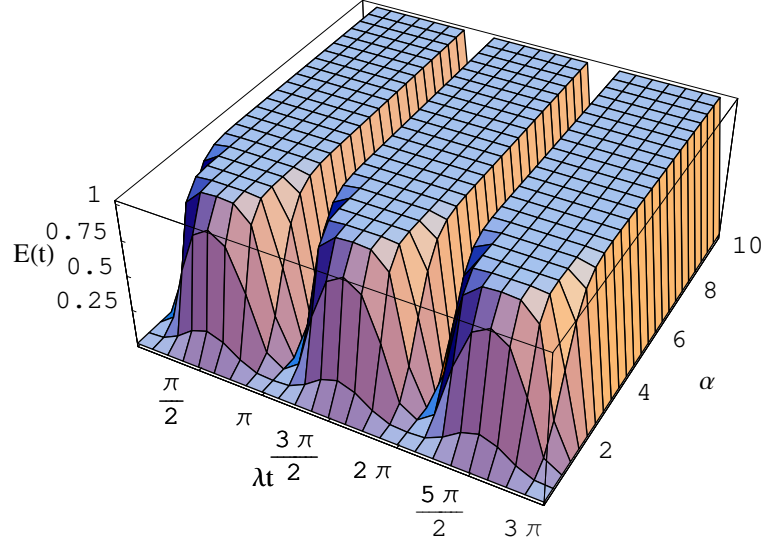


Figura 3.7: Emaranhamento do estado $|f_1\rangle_{ab}$ em função do tempo de interação e da amplitude do campo coerente inicial $|\alpha\rangle$ das cavidades. Perceba a semelhança com a figura 3.5, do caso quase-degenerado.

$$\begin{aligned}
 \rho_a^{(1)} = Tr_b(|f_1\rangle_{ab}\langle f_1|_{ab}) &\implies \lambda_{\pm}^{(1)} = \frac{(1 \pm |\kappa|)^2}{2(1 + |\kappa|^2)}, \\
 \rho_a^{(2)} = Tr_b(|f_2\rangle_{ab}\langle f_2|_{ab}) &\implies \lambda_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2}, \\
 \rho_a^{(3)} = Tr_b(|f_3\rangle_{ab}\langle f_3|_{ab}) &\implies \lambda_{\pm}^{(3)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{(1 - |\kappa|^2)^2}{(1 + Re[\kappa^2])^2}}, \\
 \rho_a^{(4)} = Tr_b(|f_4\rangle_{ab}\langle f_4|_{ab}) &\implies \lambda_{\pm}^{(4)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{(1 - |\kappa|^2)^2}{(1 - Re[\kappa^2])^2}}.
 \end{aligned}$$

Logo, podemos obter a expressão do emaranhamento em função do tempo de interação e da amplitude coerente inicial das cavidades a partir da entropia de von Neumann do sistema reduzido

$$E(|f_j\rangle_{ab}) = -\lambda_+^{(j)} \log_2(\lambda_+^{(j)}) - \lambda_-^{(j)} \log_2(\lambda_-^{(j)}).$$

O primeiro resultado imediato e muito interessante é que $E(|f_2\rangle_{ab}) = 1$ para qualquer estado coerente inicial das cavidades e qualquer tempo de interação que satisfaça $\lambda t \neq 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Essa restrição deve ser feita por causa da periodicidade do modelo Raman degenerado, que faz com que o sistema volte ao seu estado inicial, com apenas uma fase na amplitude do campo coerente, após ciclos de período $\lambda t = \pi$ (veja a equação 2.33). O emaranhamento dos estados $|f_1\rangle_{ab}$, $|f_3\rangle_{ab}$ e $|f_4\rangle_{ab}$ é uma função periódica do tempo de interação e para $\alpha > 2$ é muito próximo ao valor máximo, com exceção quando λt assume os valores já mencionados. Como exemplo, apresentamos na figura 3.7 o gráfico do emaranhamento do estado $|f_1\rangle_{ab}$. Gráficos análogos seriam obtidos caso escolhêssemos os estados $|f_3\rangle_{ab}$ ou $|f_4\rangle_{ab}$. É interessante ao leitor o apêndice D, no qual estudamos a influência da dissipação no emaranhamento desses estados.

A transferência campo $\rightarrow$ átomo pode ser analisada de forma semelhante. Para exemplificar e mostrar que também é possível a transferência completa, consideremos o seguinte estado inicial

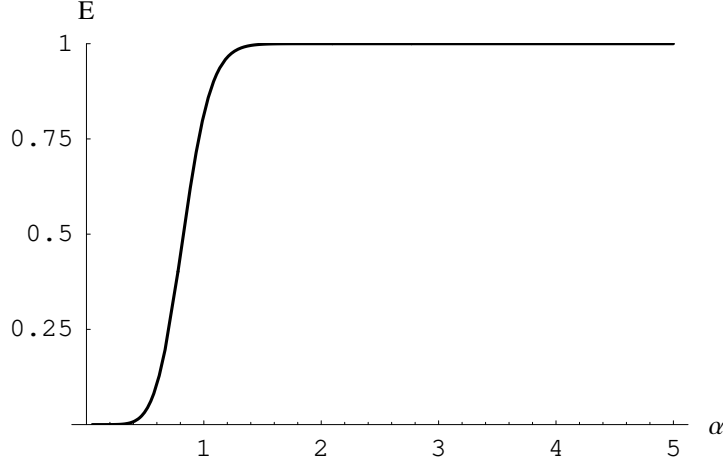


Figura 3.8: Emaranhamento do estado 3.19 em função da amplitude coerente inicial das cavidades. Perceba que se $\alpha > 1$ já temos a transferência completa de emaranhamento.

$$|\varphi(0)\rangle = N_1 (|i\alpha\rangle_a | -i\alpha\rangle_b + | -i\alpha\rangle_a |i\alpha\rangle_b) |g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2, \quad (3.17)$$

que pode ser obtido a partir da etapa anterior, ou, mais especificamente, do estado $|f_1\rangle_{ab}$, com um tempo de interação $\lambda t = \pi/2$. Após um pouco de álgebra, podemos obter a igualdade

$$2(|i\alpha\rangle_a | -i\alpha\rangle_b + | -i\alpha\rangle_a |i\alpha\rangle_b) = (|i\alpha\rangle_a + | -i\alpha\rangle_a) (|i\alpha\rangle_b + | -i\alpha\rangle_b) - (|i\alpha\rangle_a - | -i\alpha\rangle_a) (|i\alpha\rangle_b - | -i\alpha\rangle_b)$$

que, junto com a equação 2.33, nos leva a

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda t = \frac{\pi}{2})\rangle &= \frac{N_1}{2} [(|\alpha\rangle_a + | -\alpha\rangle_a) (|\alpha\rangle_b + | -\alpha\rangle_b) |g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 \\ &\quad - (|\alpha\rangle_a - | -\alpha\rangle_a) (|\alpha\rangle_b - | -\alpha\rangle_b) |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2] = \\ &= \frac{N_1}{2} [(|\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b + | -\alpha\rangle_a | -\alpha\rangle_b) (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 - |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2) \\ &\quad + (|\alpha\rangle_a | -\alpha\rangle_b + | -\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b) (|g_1\rangle_1 |g_1\rangle_2 + |g_2\rangle_1 |g_2\rangle_2)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A projeção do estado de duas cavidades, como foi feito nas últimas seções, é o último passo necessário para a obtenção de um estado atômico emaranhado. Supondo que medimos as cavidades nos estados coerentes $|\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b$, temos que

$${}_{ab}\langle\alpha, \alpha|\varphi(\lambda t = \frac{\pi}{2})\rangle = \frac{N_1}{\sqrt{2}} [(1 + \langle\alpha| -\alpha\rangle^2) |\Phi^-\rangle + 2\langle\alpha| -\alpha\rangle |\Phi^+\rangle], \quad (3.19)$$

cujo emaranhamento, calculado a partir da entropia de von Neumann do sistema reduzido, está apresentado na figura 3.8. Escolhendo um dos outros estados $|f_i\rangle_{ab}$, com $\lambda t = \pi/2$, para a condição inicial da transferência campo → átomo, obteríamos resultados análogos. A única exceção é o estado $|f_2\rangle_{ab}$, que faria com que os átomos fossem levados ao estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ após a interação; ou seja, os átomos teriam emaranhamento máximo independente do valor de α .

3.3 Conclusão

Baseados nos resultados das últimas seções, concluímos que, em princípio, a transferência completa do emaranhamento entre qubits e sistemas de variável contínua é possível. Nos esquemas

apresentados, átomos são utilizados como “qubits voadores” (ou *flying qubits*, em inglês) e o emaranhamento é armazenado pelos campos de cavidades distintas. É interessante notar, inclusive, que existe a possibilidade de utilizar-se dois modos do campo numa mesma cavidade, de forma que cada átomo interagisse com apenas um deles.

Além disso, também devemos salientar que a periodicidade da dinâmica da interação de um átomo na configuração Raman quase-degenerado com o campo coerente faz com que o emaranhamento (e outras quantidades como a inversão atômica) seja periódico. Isso pode ser visto explicitamente na figura 3.7, na qual a recorrência dos platôs indica a transferência completa de emaranhamento. Ainda mais que isso, a proximidade da energia dos dois níveis fundamentais nos leva a esperar alguma semelhança nas propriedades dos campo gerados a partir da interação com esses estados atômicos, independentemente do resultado da medida do átomo, como nós mostramos para emaranhamento. De fato, no limite degenerado percebemos que o campo é levado a um dos dois estados do tipo gato de Schrödinger quando o átomo é medido após a interação.

A comparação entre os dois esquemas de transferência de emaranhamento átomo $\leftrightarrow$ campo nos leva a algumas vantagens que o esquema utilizando o modelo Raman quase-degenerado possui. Primeiramente, não há a necessidade de campo clássico externo, como foi utilizado em [21]. Outro ponto positivo é a não necessidade de um tempo de interação muito preciso para que o emaranhamento seja completamente transferido. Isso se torna particularmente interessante quando queremos reduzir a sensibilidade à erros experimentais e ajuda a minimizar as perdas das cavidades quando consideramos tempos curtos. Além do mais, enquanto no esquema de J. Lee *et al.* [5] a probabilidade de sucesso na medida atômica é de aproximadamente $1/4$, no nosso caso o sucesso da transferência não depende do resultado dessa medida. Em particular, se considerarmos apenas os casos nos quais os átomos são medidos em $|g_1, g_1\rangle$ e $|g_2, g_2\rangle$, as cavidades ficam maximamente emaranhadas (1 *ebit*) independentemente da amplitude coerente inicial e do tempo de interação.

4 Estados Coerentes Emaranhados do tipo Cluster

4.1 Introdução

Nos últimos anos o emaranhamento quântico adquiriu papel de destaque em muitos trabalhos sobre informação quântica, sendo continuamente citado como *uma das mais celebradas características da mecânica quântica* [31], como *a mais marcante característica que distingue a mecânica quântica de nossa intuição clássica* [29], como *o que diferencia, através das suas propriedades, implicações e utilidades, a informação quântica da informação clássica* [68], como *o recurso fundamental para o processamento de informação quântica* [32, 36, 69] e assim por diante. Schrödinger, inclusive, chegou a dizer que emaranhamento é *o traço característico da mecânica quântica* (veja a referência citada em [26]).

Devido à esse caráter fundamental e à sua utilização em muitos (se não todos) protocolos de teletransporte, criptografia e computação quântica, a procura por classes equivalentes de estados emaranhados se tornou mais e mais importante. Em 2001, H. J. Briegel e R. Raussendorf [7] introduziram uma nova classe de estados emaranhados multipartite, chamada de estados de cluster (ou “*cluster state*”, no inglês), intrinsecamente diferente das classes GHZ e de estados W conhecidas anteriormente [70]. Mais que isso, eles também mostraram que os estados de cluster formam a base para um novo tipo de computação quântica, que ficou conhecida na literatura como “*one-way quantum computation*” [8] e se tornou uma alternativa ao tratamento convencional baseado em circuitos de operações quânticas [71]. Além dessa aplicação em computação quântica, estados de cluster também já foram utilizados para estudar a não-localidade da teoria quântica [72]. Nessa mesma referência mostrou-se que os estados de cluster formados por quatro qubits, ao contrário do estado GHZ análogo, viola maximamente a desigualdade de Bell deduzida pelos autores.

Como era de se esperar, a implementação experimental de estados de cluster passou a ser um objetivo perseguido por vários grupos pesquisa e gerou diversas propostas baseadas, por exemplo, em fótons [73–76], íons aprisionados [77–79], circuitos quânticos supercondutores [80–82] e eletrodinâmica quântica de cavidade [83–91]. Recentemente, inclusive, apresentou-se [92] a geração experimental de estados de cluster, com os qubits codificados na polarização de quatro fótons, e a sua utilização na implementação do algoritmo de procura de Glover. Outra realização experimental do estado de cluster, agora com apenas dois fótons codificando quatro qubits na polarização e no momento linear, e também a sua aplicação num teste de não-localidade pode ser encontrada em [93].

Todas essas implementações, contudo, baseiam-se em sistema discretos de dimensão finita, tipicamente qubits, seguindo os trabalhos originais de H. J. Briegel e R. Raussendorf. Notando o sucesso de protocolos de informação quântica baseados em sistemas de variáveis contínuas [94–97], a generalização de estados de cluster para sistemas de variáveis contínuas parece ser uma ferramenta em potencial para novas propostas que utilizem as propriedades do estado de cluster já conhecidas para o caso discreto. De fato, a partir de 2006 surgiram alguns trabalhos nessa linha [98–101, 6]. O nosso interesse neste capítulo concentra-se na primeira dessas propostas que utiliza estados coerentes, feita por Munhoz *et al.* [6]. A aplicação de estados coerentes se faz interessante devido à sua ampla utilização ao longo dos anos, o que fez com que muita experiência sobre a sua geração e manipulação fosse acumulada. Várias referências podem ser encontradas sobre estados coerente e aqui citamos apenas dois exemplos que demonstram realizações experimentais em uma sistema de íons aprisionados [102] e em cavidades de microondas [103]. Além disso, testes de realismo local [104, 105], teletransporte quântico [106, 37] e portas lógicas [107] figuram entre algumas das aplicações dos estados coerentes.

A idéia básica dos CTECS, sigla para “*Cluster-type Entangled Coherent States*”, é utilizar os estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ para codificar um qubit num espaço de Hilbert bidimensional. Apesar desses estados coerentes serem estritamente não ortogonais, a superposição $\langle\alpha|\alpha\rangle$ decai exponencialmente com o valor da amplitude α – para $\alpha \geq 3$, por exemplo, a sua ordem de grandeza é inferior a 10^{-7} . Na prática, isso torna possível utilizar $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$ com base para um qubit [107],

$$|\text{qubit}\rangle = \cos(\theta)|\alpha\rangle + \sin(\theta)e^{i\phi}|\alpha\rangle.$$

Nesse mesmo sentido, alguns trabalhos [104–106, 66] investigaram a extensão dos estados de Bell (estados maximamente emaranhados de dois qubits) para os “estados coerentes emaranhados do tipo Bell”

$$\begin{aligned} |\Phi_{\alpha}^{\pm}\rangle &= N_{\pm} (|\alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha\rangle) \\ |\Psi_{\alpha}^{\pm}\rangle &= N_{\pm} (|\alpha, -\alpha\rangle \pm |\alpha, \alpha\rangle), \end{aligned} \quad (4.1)$$

com $N_{\pm} = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})}$. Novamente, quando $|\alpha| \rightarrow \infty$ esses estados coerentes emaranhados formam, com boa aproximação, uma base ortonormal do espaço de Hilbert para dois qubits, graças ao decaimento exponencial de $\langle\alpha|\alpha\rangle$. Para o caso tripartite, mostrou-se [108] que os estados GHZ e W baseados em estados coerentes violam a desigualdade de Bell, ou seja, exibem não-localidade.

Antes de partimos para os esquemas de geração dos CTECS, vamos defini-los e discutir algumas propriedades.

O estado de cluster¹, como foi originalmente definido [7], é dado por

$$|\text{Cluster}^+\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle), \quad (4.2)$$

na qual $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formam uma base ortonormal para o espaço de Hilbert de um qubit. É interessante notar que apenas pela aplicação de operações unitárias locais em $|\text{Cluster}^{\pm}\rangle$, mais especificamente “*bit-flips*”, é possível obter uma base do espaço de Hilbert de quatro qubits (16 dimensões). Em [6] ela foi escrita como

$$\begin{aligned} |\text{Cluster}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (\pm|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle \mp |1111\rangle), \\ |C^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (|0000\rangle \pm |0011\rangle \mp |1100\rangle + |1111\rangle), \\ |L^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (\pm|0001\rangle \mp |0010\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle), \\ |U^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (|0001\rangle + |0010\rangle \mp |1101\rangle \mp |1110\rangle), \\ |S^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (\pm|0100\rangle + |0111\rangle \mp |1000\rangle + |1011\rangle), \\ |T^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (|0100\rangle \pm |0111\rangle + |1000\rangle \mp |1011\rangle), \\ |E^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (\pm|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle \mp |1010\rangle), \\ |R^{\pm}\rangle &= \frac{1}{2} (|0101\rangle \pm |0110\rangle \mp |1001\rangle + |1010\rangle). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Uma característica interessante desses estados é que o estado de um qubit obtido pelo traço dos outros três é maximamente misturado. Além disso, a possibilidade de se gerar toda a base a partir de um dos estados e apenas operações de “*bit-flips*” é uma propriedade interessante e que não é

¹Sempre temos em mente estados que envolvem quatro qubits, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

presente em outras bases conhecidas, como a base de Bell para dois qubits e a base GHZ para três qubits. A generalização proposta em [6] é obtida com a utilização do estado coerente $|\alpha\rangle$ para codificar o bit $|0\rangle$ e $|\alpha\rangle$ para codificar $|1\rangle$. Dessa forma, a base formada pelos CTECS fica dada por

$$\begin{aligned}
|\text{Cluster}^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (\pm|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + |\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|C^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (|\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|L^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (\pm|\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|U^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (|\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|S^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (\pm|\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle + |\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|T^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (|\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, \alpha, \alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha\rangle), \\
|E^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (\pm|\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle), \\
|R^\pm\rangle_\alpha &= \frac{1}{2} (|\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha\rangle \pm |\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha\rangle \mp |-\alpha, \alpha, \alpha, -\alpha\rangle + |-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha\rangle).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Utilizando a operação de “*bit-flip*” generalizada para estados coerentes [109],

$$\begin{aligned}
\hat{X}|\alpha\rangle &= \hat{P}(\pi)|\alpha\rangle = |-\alpha\rangle, \\
\hat{X}|-\alpha\rangle &= \hat{P}(\pi)|-\alpha\rangle = |\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

nas quais $\hat{P}(\pi) = e^{i\pi a^\dagger a}$ é o operador de paridade, também é possível demonstrar que todos os elementos da base podem ser obtidos a partir de um outro qualquer. Conseqüentemente, fica claro que todos os estados em 4.4 possuem a mesma quantidade de emaranhamento para o mesmo valor de α . Como será calculado na seção 4.3, ao realizar-se o traço de três subsistemas, o estado do quarto se reduz à

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2} \left[|\alpha\rangle\langle\alpha| \left(1 + e^{-4|\alpha|^2} \right) + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| \left(1 - e^{-4|\alpha|^2} \right) \right]. \tag{4.5}$$

Perceba que a dependência em α indica que no limite $\alpha \rightarrow \infty$ esse estado tende a um estado de mistura máxima, como é o caso quando se considera qubits e o que indica que a base em 4.3 pode ser obtida daquela em 4.4 nesse limite.

4.2 Esquema de geração

Nessa seção propomos um novo esquema para geração de CTECS, que assim como o esquema da referência [6] é baseado em eletrodinâmica quântica de cavidades. Vale dizer que esse esquema junto com alguns resultados da seção 4.3 resultaram no trabalho que apresentamos na conferência “*RIAO/OPTILAS'07*” [110]. Também é importante mencionar que um esquema similar ao nosso, mas com campo bimodais, foi apresentado por E. M. Bécerra-Castro *et al.* [111] após a submissão do trabalho [110].

Inspirados pelo trabalho de Munhoz *et al.* [6], percebemos que os CTECS podem ser gerados sempre que a interação átomo-campo deixar a cavidade num estado de superposição de estados coerentes de amplitude opostas, similar a um estado de “gato de Schrödinger”, ou seja,

$$|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle. \tag{4.6}$$

Nessa dissertação já apresentamos dois tipos de interação capazes de deixar o campo nesse estado: a interação JC dispersiva (seção 1.3.3) e a interação Raman no limite degenerado (seção 2.4). Aqui escolhemos utilizar a interação JC dispersiva por ela apresentar implementação experimental mais imediata, apesar da montagem experimental ser praticamente a mesma nos dois casos (figura 4.1). O sistema físico que consideraremos consiste num conjunto de quatro cavidades (que formarão o CTECS) preparadas inicialmente com um campo coerente $|\alpha\rangle$, duas zonas de Ramsey, um átomo de dois níveis e um detector atômico. Acreditamos que a simplicidade dessa montagem é a principal vantagem em relação àquela apresentada em [6].

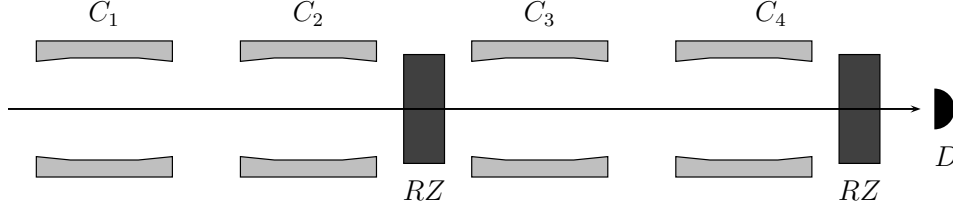


Figura 4.1: Esquema de montagem para geração dos CTECS com a interação JC dispersiva: quatro cavidades (C_i), duas zonas de Ramsey (RZ), um átomo (cujo percurso é indicado pela seta e o estado inicial é $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$) e o detector atômico (D). Para a interação Raman degenerado o esquema possui duas modificações: a última RZ é descartada e o estado inicial do átomo é $|e\rangle$.

As zonas de Ramsey são zonas de campo clássico comumente utilizadas para manipular os estados atômicos e que no nosso esquema devem realizar a seguinte transformação (veja a seção 1.2 para maiores detalhes)

$$\begin{aligned} |g\rangle &\longrightarrow (|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2} \\ |e\rangle &\longrightarrow (-|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Fisicamente, o esquema de geração consiste apenas em fazer com que o átomo de dois níveis atravessasse as quatro cavidades sequencialmente, passando pelas zonas de Ramsey estrategicamente posicionadas, e ao final realizar a medida do estado atômico na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, sendo que qualquer um dos resultados possíveis deixará as quatro cavidades num CTECS. Matematicamente, é simples de se observar que esse esquema nos levará ao resultado desejado. O estado inicial do sistema é

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)|\alpha, \alpha, \alpha\rangle,$$

sendo que a notação $|\alpha, \alpha, \alpha\rangle$ indica o estado das cavidades na mesma ordem na qual elas aparecem na figura 4.1. Por simplicidade consideramos $\alpha \in \mathbf{R}$. Após o átomo passar pela primeira cavidade, a interação JC dispersiva (equações 1.36 e 1.37) irá levar o sistema ao estado

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|i\alpha\rangle + (-i)|e\rangle|-i\alpha\rangle)|\alpha, \alpha, \alpha\rangle,$$

na qual consideramos um tempo de interação de $g^2 t / \Delta = \pi/2$, sendo que g é a constante de acoplamento átomo-campo e $\Delta = \omega - (\omega_e - \omega_g)$. Repetindo esse cálculo para a segunda cavidade e considerando a transformação causada pela zona de Ramsey (equação 4.7), o estado do sistema antes da terceira cavidade será

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|g\rangle (|i\alpha, i\alpha\rangle + (-i)^2 |-i\alpha, -i\alpha\rangle) + |e\rangle (|i\alpha, i\alpha\rangle - (-i)^2 |-i\alpha, -i\alpha\rangle)] |\alpha, \alpha\rangle.$$

A próxima parte do nosso esquema é considerar o último par de cavidades e zona de Ramsey, cujos cálculos são análogos aos anteriores. Calculando o estado do sistema logo após o átomo deixar a última zona de Ramsey vem que

$$\begin{aligned}
|\Psi_4\rangle &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}|g\rangle(-|i\alpha, i\alpha, i\alpha, i\alpha\rangle + |-i\alpha, -i\alpha, i\alpha, i\alpha\rangle + |i\alpha, i\alpha, -i\alpha, -i\alpha\rangle + |-i\alpha, -i\alpha, -i\alpha, -i\alpha\rangle) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}|e\rangle(|i\alpha, i\alpha, i\alpha, i\alpha\rangle - |-i\alpha, -i\alpha, i\alpha, i\alpha\rangle + |i\alpha, i\alpha, -i\alpha, -i\alpha\rangle + |-i\alpha, -i\alpha, -i\alpha, -i\alpha\rangle).
\end{aligned}$$

A medida do estado atômico é a última parte do nosso esquema. Do estado $|\Psi_4\rangle$ fica claro que qualquer resultado ($|e\rangle$ ou $|g\rangle$) levará o conjunto de cavidades a um CTECS. É interessante comentar que foi a “junção” dos estados do tipo gato de Schrödinger de uma forma apropriada, que foi alcançada pelo uso das zonas de Ramsey, o que possibilitou obtermos o CTECS e não alguma propriedade intrínseca da interação entre o átomo e as cavidades. Isso é reforçado pelo fato de que o mesmo resultado pode ser obtido com um átomo na configuração Raman degenerado e com uma montagem semelhante (com as pequenas modificações indicadas na legenda da figura 4.1).

A possibilidade de realização experimental desse esquema com a tecnologia atual pode ser verificada por uma rápida comparação entre o tempo gasto pelo átomo para cruzar toda a montagem e os tempos de relaxação envolvidos. O “tempo de vôo” do átomo pode ser estimado pela soma do tempo de interação nas cavidades e nas zonas de Ramsey: $T = 4 \times \frac{\pi\Delta}{2g^2} + 2 \times \frac{\pi}{4\Omega_R}$. Considerando valores típicos dessas grandezas [14, 6], $g \sim 2\pi \times 25$ kHz, $\Delta \sim 2\pi \times 8g$ e $\Omega_R \sim 4g$ temos que $T \sim 2$ ms. Para átomos de Rydberg o tempo de radiação é da ordem de 30 ms [10, 11] e as cavidades de hoje em dia são capazes de manter um fóton por tempo da ordem de 130 ms [54, 55]. Logo, conclui-se que o tempo de geração dos CTECS é bastante inferior aos principais tempos que poderiam limitar a implementação do esquema.

4.3 Dissipação de energia nos CTECS

A consideração de cavidades imperfeitas, que perdem fótons por espelhos cuja refletividade não é 100%, é sempre importante de ser feita quando propõe-se um esquema/protocolo baseado em eletrodinâmica quântica de cavidades. Além de trazer o tratamento teórico mais próximo à realidade dos laboratórios, o estudo da influência da perda de energia dos campos confinados em cavidades pode mostrar a viabilidade (ou não) do esquema em questão quando analisa-se os tempos envolvidos. Outro ponto interessante é analisar a influência da dissipação no emaranhamento de cavidades, ou, como a perda de energia dos campos altera as correlações quânticas existentes entre eles. Nesse sentido, já percebeu-se [37, 112] (veja também os resultados do apêndice D) que o emaranhamento diminui quando os campos perdem energia. Fisicamente isso é intuitivo, pois o sistema tende ao estado puro - e separável - de vácuo na medida em que as cavidades perdem os fótons. A seguir, desenvolvemos um novo formalismo para tratar a dissipação de energia nos CTECS. Com isso, conseguimos calcular a expressão analítica do operador densidade dependente do tempo de dissipação, o que, em princípio, caracteriza completamente o estado. Esses cálculos foram generalizados para um CTECS de N cavidades (N par), definido por

$$\begin{aligned}
|C\rangle &= \frac{1}{2}(|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle + |\alpha_1, \dots, \alpha_{N/2}, -\alpha_{(N+1)/2} \dots - \alpha_N\rangle + \\
&+ |- \alpha_1, \dots, -\alpha_{N/2}, \alpha_{(N+1)/2} \dots \alpha_N\rangle - |- \alpha_1, \dots, -\alpha_N\rangle).
\end{aligned}$$

Vale salientar que estados desse tipo, com número arbitrário de cavidades, podem ser obtidos por esquemas análogos ao mostrado na seção anterior. Primeiramente, vamos introduzir a função “degrau”

$$\theta(j) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } j < 0, \\ 1 & \text{se } j \geq 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

e a função “dois degraus” $\xi(j) \equiv \theta(j-2) - \theta(j-3) + \theta(j-4)$ que nos permitem reescrever $|C\rangle$ como

$$|C\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{\theta(j-4)} \prod_{k=1}^{N/2} |(-1)^{\theta(j-3)} \alpha_k\rangle \otimes \prod_{l=N/2+1}^N |(-1)^{\xi(j)} \alpha_l\rangle. \quad (4.9)$$

A equação mestra que descreve o processo de perda de fótons de cada cavidade, no limite de temperatura nula e dentro da aproximação de Born-Markov é dada por [37, 113, 114]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \hat{J} \rho + \hat{L} \rho, \\ \hat{J} \rho &= \gamma \sum_{k=1}^N b_k \rho b_k^\dagger, \\ \hat{L} \rho &= -\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^N (b_k^\dagger b_k \rho + \rho b_k^\dagger b_k), \end{aligned} \quad (4.10)$$

nas quais $\hat{J}$ e $\hat{L}$ são conhecidos como *superoperadores*, por atuarem sobre o operador densidade e γ é a constante de decaimento da cavidade, que assumimos ser a mesma para todas elas. Formalmente, a solução de 4.10 é $\rho(t) = \exp[(\hat{J} + \hat{L})t] \rho(0)$. Como estamos considerando apenas campos coerentes nas cavidades, essa solução pode ser encontrada pela aplicação da útil relação obtida por S. J. D. Phoenix [113]

$$\exp[(\hat{J} + \hat{L})t] |\alpha\rangle \langle \beta| = \langle \beta | \alpha \rangle^{1-\tau^2} |\alpha\tau\rangle \langle \beta\tau|,$$

sendo $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ estados coerentes do campo e $\tau \equiv e^{-\gamma t/2}$ uma nova escala de tempo para a dissipação (que é a mesma para todas as cavidades já que assumimos que todas têm a mesma constante de dissipação). Utilizando isso, podemos calcular a expressão analítica do operador densidade para a condição inicial $\rho(0) = |C\rangle \langle C|$:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^4 (-1)^{\theta(i-4)+\theta(j-4)} e^{\frac{N}{2}\alpha^2(1-\tau^2)(-2+(-1)^{\theta(j-3)+\theta(i-3)}+(-1)^{\xi(j)+\xi(i)})} \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N/2} |(-1)^{\theta(i-3)} \alpha\tau\rangle_{kk} \langle (-1)^{\theta(j-3)} \alpha\tau| \otimes \prod_{l=N/2+1}^N |(-1)^{\xi(i)} \alpha\tau\rangle_{ll} \langle (-1)^{\xi(j)} \alpha\tau|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A primeira consequência que podemos tirar desse resultado é a expressão para o operador densidade da k -ésima ($1 \leq k \leq N/2$) cavidade, após realizar o traço das outras $k-1$ em $\rho(t)$,

$$\rho_k(t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - e^{-\alpha^2 N}\right) |-\alpha\tau\rangle_{kk} \langle -\alpha\tau| + \left(1 + e^{-\alpha^2 N}\right) |\alpha\tau\rangle_{kk} \langle \alpha\tau| \right]. \quad (4.12)$$

Essa expressão é a generalização, para o caso de um número par arbitrário de cavidades imperfeitas, da equação 4.5 apresentada em [6]. É interessante notar a forte dependência no número de cavidades, o que será analisado mais adiante. A partir dessa expressão, pode-se obter número médio de fótons da k -ésima cavidade $\langle n_k \rangle = \text{Tr}[a_k^\dagger a_k \rho_k(t)]$. O resultado obtido é $(\alpha\tau)^2$, a mesma quantidade que se obtém quando a cavidade, inicialmente preparada no estado coerente $|\alpha\rangle$, sofre dissipação e passa a ser descrita pelo estado $|\alpha\tau\rangle$. A interpretação física para esse fato é imediata quando lembramos do tipo de interação átomo-campo que deu origem a esse estado emaranhado das cavidades. Tanto na interação JC dispersiva como na interação Raman no limite degenerado, não há troca de energia entre o átomo e o campo e, portanto, o número médio de fótons não é alterado. Outra grandeza interessante de calcular-se é a pureza de $\rho(t)$ em função do tempo de dissipação, da amplitude coerente inicial e do número de cavidades. Graças à notação compacta

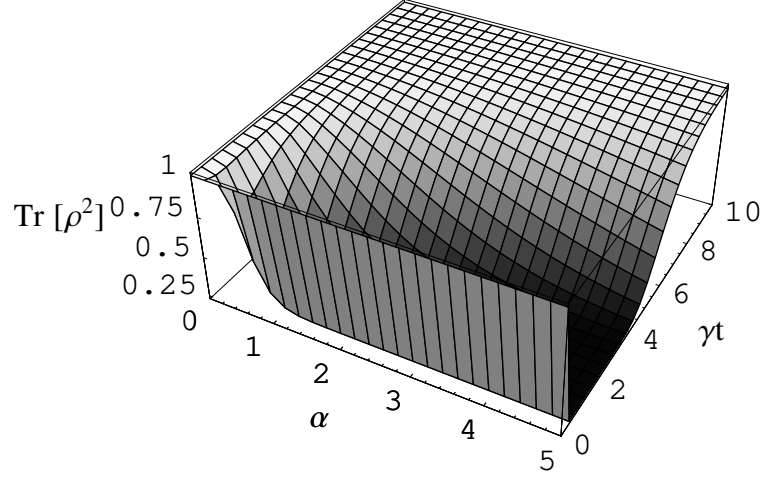


Figura 4.2: A pureza de um CTECS como função do tempo de dissipação t e da amplitude coerente α . Nesse gráfico consideramos $N = 4$ cavidades.

que utilizamos, podemos realizar esse cálculo sem maiores problemas e a partir da equação 4.11 obtemos que

$$Tr[\rho^2] = \frac{1}{4} \left[1 - e^{-2N\alpha^2} + e^{-2N\alpha^2\tau^2} + e^{-2N\alpha^2(1-\tau^2)} \right]^2, \quad (4.13)$$

da qual seguem algumas conseqüências interessantes. Observa-se que a pureza do campo é bastante sensível ao número de cavidades: ao aumentar N a pureza do sistema decai rapidamente, o que nos parece razoável já que haverá um acoplamento maior com o reservatório. Além disso, para tempos de dissipação curtos ($\tau \sim 1$) os termos exponenciais em 4.13 são muito pequenos, fazendo com que $Tr[\rho^2] \rightarrow 1/4$, o que é uma espécie de limite inferior para a pureza dos CTECS (figura 4.2). Para finalizar, quando γt se torna suficientemente grande ($\tau \rightarrow 0$) a pureza tende a 1 e essa é a representação matemática daquilo que já comentamos: as cavidades perdem todos os fótons e o sistema passa a ser descrito pelo estado puro de vácuo.

Conclusões e Perspectivas Futuras

O estudo da interação da radiação com a matéria é um assunto interessantíssimo e dá origem a uma vasta área de pesquisa dentro da Física. Nesse trabalho, focamos a nossa atenção no caso em que um átomo isolado interage com fótons, ou seja, excitações quânticas do campo eletromagnético. Como comumente é feito em trabalhos que estudam esse problema, assumimos que apenas dois ou três níveis de energia do átomo são relevantes, ou seja, o fóton só interage com esses poucos níveis escolhidos. Isso é possível através da escolha cuidadosa dos níveis atômicos, de forma que os fótons satisfaçam apenas as regras de seleção específicas da transição escolhida. Assim, o campo não será capaz de induzir qualquer outra transição e podemos simplificar a descrição do átomo como um sistema de dois ou três níveis.

Um dos assuntos do primeiro capítulo dessa tese foi o modelo de JC, que descreve a interação de um átomo de dois níveis com o campo quantizado. Esse modelo, que foi amplamente explorado durante as últimas décadas, explicou ou previu diversos efeitos quânticos, como a geração de estados não-clássicos da luz, e também foi aplicado a vários protocolos de informação quântica que se baseiam na interface luz/matéria. Nessa dissertação, esse modelo apareceu novamente no capítulo 3, no qual foi utilizado para o estudo da transferência de emaranhamento entre átomos e campos; assim como no capítulo 4 que utilizou a superposição de estados coerentes gerada pela interação dispersiva como ingrediente fundamental no esquema de geração de CTECS. Outro assunto revisado no capítulo 1 foi a interação de um átomo de dois níveis com um campo clássico. Esse é um sistema de interesse quando se pretende realizar transformações nos níveis atômicos internos, o que também foi utilizado no esquema de geração de CTECS. Pelas equações em 1.18, por exemplo, percebemos que através do campo clássico podemos obter um estado de superposição arbitrária entre os dois estados atômicos.

O capítulo 2 foi dedicado a apresentação do modelo Raman quase-degenerado. O objetivo foi descrever a interação de um átomo de três níveis na configuração Λ com um modo do campo quantizado, dentro dos limites dispersivo e quase-degenerado. O primeiro limite é obtido quando a frequência do campo é altamente dessintonizada em relação a frequência de transição atômica e, nesse caso, o estado atômico de maior energia pode ser eliminado adiabaticamente. Dessa forma, passamos a ter um Hamiltoniano que descreve a transição efetiva entre os dois níveis inferiores. O segundo limite considerado nesse modelo supõe que a diferença de energia desses dois níveis é muito pequena se comparada com a dessintonia do campo. O fato dessas energias não serem iguais é o que diferencia o modelo Raman degenerado, que pode ser obtido como um caso limite. Calculamos o Hamiltoniano efetivo com correções de primeira ordem nessa diferença de energia e obtivemos as equações de evolução para a condição inicial de campo coerente.

A partir do resultado desses cálculos pudemos propor um novo esquema de transferência de emaranhamento entre átomos e campos coerentes. Mostramos que um par de cavidades inicialmente preparadas no estado coerente pode apresentar 1 *ebit* após a interação com um par de átomos maximamente emaranhados e a medida destes. Ainda mais que isso, os resultados do capítulo 3 nos mostram que esse emaranhamento transferido seguirá a periodicidade do modelo Raman quase-degenerado. Outra característica interessante é que essa transferência não depende do resultado da medida atômica, basta projetar os átomos num dos “dois estados fundamentais”. Interpretamos isso como uma consequência da similaridade dos campos gerados pela interação quando o átomo entra na cavidade num desses dois estados de menor energia. A transferência no sentido oposto, campo $\rightarrow$ átomo, também mostrou-se possível. Nesse caso, após a interação dos átomos com o par de cavidades emaranhadas (num dos estados obtidos pela etapa anterior), a projeção das cavidades no mesmo estado leva os átomos a um estado da base de Bell.

Finalmente, acreditamos que o modelo Raman quase-degenerado pode ser investigado mais a fundo, de forma a clarificar propriedades tanto do átomo quanto do campo modificado pela interação. Exemplos disso são os cálculos do parâmetro Q [22], que determina se um estado do campo é ou não quântico, e das populações atômicas em função do tempo de interação. Alertamos, porém, que talvez alguns desses cálculos necessitem das correções de segunda do Hamiltoniano efetivo, o que também é outro ponto interessante de ser investigado. Por exemplo, se mostrássemos que os próximos termos da expansão do Hamiltoniano efetivo não prejudicam a transferência de emaranhamento, a hipótese do limite quase-degenerado poderia ser relaxada numa possível implementação experimental. Outra perspectiva interessante diz respeito ao CTECS. Ele possui as mesmas propriedades demonstradas para o caso discreto? Intuitivamente, esperamos que no limite de grande número de fótons elas sejam válidas, mas uma prova matemática e que, inclusive, limite inferiormente o número de fótons é desejável.

A Identidades Matemáticas

Teorema A.1. *Sejam dois operadores A e B que não necessariamente comutam, então a igualdade*

$$e^{\gamma A} B e^{-\gamma A} = B + \gamma [A, B] + \frac{\gamma^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (\text{A.1})$$

é válida para qualquer $\gamma \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja o operador

$$F(\gamma) = e^{\gamma A} B e^{-\gamma A},$$

que também é função de γ . Por definição, temos que

$$F'(\gamma) = e^{\gamma A} (AB - BA) e^{-\gamma A} = e^{\gamma A} [A, B] e^{-\gamma A}$$

e

$$F''(\gamma) = e^{\gamma A} (A[A, B] - [A, B]A) e^{-\gamma A} = e^{\gamma A} [A, [A, B]] e^{-\gamma A}.$$

Agora, definamos o comutador de ordem n por: $C_n \equiv \underbrace{[A, [A, [A, \dots, [A, B] \dots]]}_{n \text{ vezes}}$.

Procedendo a demonstração por indução, vamos supor que a igualdade é válida para n e provaremos que o caso $n + 1$ é válido. Para isso, vamos supor que

$$F^{(n)}(\gamma) = e^{\gamma A} C_n e^{-\gamma A}$$

é válido. Nesse caso,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\gamma) &= \frac{d}{d\gamma} (e^{\gamma A} C_n e^{-\gamma A}) = e^{\gamma A} (A C_n - C_n A) e^{-\gamma A} = e^{\gamma A} [A, C_n] e^{-\gamma A} \\ \Rightarrow F^{(n+1)}(\gamma) &= e^{\gamma A} C_{n+1} e^{-\gamma A} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Agora basta aplicar a expansão de Taylor à função $F(\gamma)$,

$$F(\gamma) = F(0) + \gamma F'(0) + \frac{\gamma^2}{2!} F''(0) + \dots,$$

para se obter a equação A.1. □

Corolário A.1.1. *Para os operadores de aniquilação e criação de fótons, a e $a^\dagger$, que satisfazem a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$; valem as seguintes transformações*

$$\begin{aligned} e^{\gamma a^\dagger a} a e^{-\gamma a^\dagger a} &= a e^{-\gamma} \\ e^{\gamma a^\dagger a} a^\dagger e^{-\gamma a^\dagger a} &= a^\dagger e^{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Demonstração. Utilizando as relações de comutação

$$\begin{aligned} [a^\dagger a, a] &= a^\dagger a a - a a^\dagger a = a^\dagger a a - (1 + a^\dagger a) a = -a, \\ [a^\dagger a, a^\dagger] &= a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger (1 + a^\dagger a) - a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a prova por indução, supomos que

$$\underbrace{[a^\dagger a, [a^\dagger a, [a^\dagger, \dots, [a^\dagger, a] \dots]]]}_{n \text{ vezes}} = (-1)^n a$$

e

$$\underbrace{[a^\dagger a, [a^\dagger a, [a^\dagger, \dots, [a^\dagger, a^\dagger] \dots]]]}_{n \text{ vezes}} = a^\dagger.$$

Para $n + 1$ temos, então,

$$\underbrace{[a^\dagger a, [a^\dagger a, [a^\dagger, \dots, [a^\dagger, a] \dots]]]}_{n+1 \text{ vezes}} = [a^\dagger a, (-1)^n a] = (-1)^{n+1} a$$

e

$$\underbrace{[a^\dagger a, [a^\dagger a, [a^\dagger, \dots, [a^\dagger, a^\dagger] \dots]]]}_{n+1 \text{ vezes}} = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger.$$

Logo, o teorema A.1 implica em

$$\begin{aligned} e^{\gamma a^\dagger a} a e^{-\gamma a^\dagger a} &= a - \gamma a + \frac{\gamma^2}{2!} a - \frac{\gamma^3}{3!} a + \dots = a e^{-\gamma} \\ e^{\gamma a^\dagger a} a^\dagger e^{-\gamma a^\dagger a} &= a^\dagger + \gamma a^\dagger + \frac{\gamma^2}{2!} a^\dagger + \frac{\gamma^3}{3!} a^\dagger + \dots = a^\dagger e^{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

□

Teorema A.2. *Seja o operador $O \equiv a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g|$, na qual a e $a^\dagger$ são os operadores de destruição e aniquilação de fótons, respectivamente, e $|i\rangle\langle j|$ os operadores de transição atômica, tais que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Então, as seguintes igualdades são válidas*

$$\begin{aligned} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2q} &= (aa^\dagger)^q |e\rangle\langle e| + (a^\dagger a)^q |g\rangle\langle g|, \\ \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2q+1} &= (aa^\dagger)^q a |e\rangle\langle g| + a^\dagger (aa^\dagger)^q |g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Demonstração. Explicitamente, verificamos que o caso $q = 1$ é válido, já que

$$\begin{aligned} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^2 &= \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right) \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right) = a^\dagger a |g\rangle\langle g| + aa^\dagger |e\rangle\langle e|, \\ \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^3 &= \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^2 \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right) = a^\dagger aa^\dagger |g\rangle\langle e| + aa^\dagger a |e\rangle\langle g|. \end{aligned}$$

Agora, suporemos que o caso $q = n$ é válido e provaremos que o caso $q = n + 1$ também é válido, concluindo a prova por indução matemática.

Caso $q = n$

$$\begin{aligned} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2n} &= (aa^\dagger)^n |e\rangle\langle e| + (a^\dagger a)^n |g\rangle\langle g|, \\ \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2n+1} &= (aa^\dagger)^n a |e\rangle\langle g| + a^\dagger (aa^\dagger)^n |g\rangle\langle e|. \end{aligned}$$

Caso $q = n + 1$

$$\begin{aligned} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2(n+1)} &= \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^{2n} \left(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a |e\rangle\langle g| \right)^2 = \\ &= \left((aa^\dagger)^n |e\rangle\langle e| + (a^\dagger a)^n |g\rangle\langle g| \right) \left(a^\dagger a |g\rangle\langle g| + aa^\dagger |e\rangle\langle e| \right) = \\ &= (aa^\dagger)^{n+1} |e\rangle\langle e| + (a^\dagger a)^{n+1} |g\rangle\langle g| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

e também

$$\begin{aligned}
 \left(a^\dagger|g\rangle\langle e| + a|e\rangle\langle g|\right)^{2(n+1)+1} &= \left(a^\dagger|g\rangle\langle e| + a|e\rangle\langle g|\right)^{2n+1} \left(a^\dagger|g\rangle\langle e| + a|e\rangle\langle g|\right)^2 = \\
 &= \left((aa^\dagger)^n a|e\rangle\langle g| + a^\dagger(aa^\dagger)^n|g\rangle\langle e|\right) \left(a^\dagger a|g\rangle\langle g| + aa^\dagger|e\rangle\langle e|\right) = \\
 &= (aa^\dagger)^{n+1} a|e\rangle\langle g| + a^\dagger (a^\dagger a)^{n+1}|g\rangle\langle e|. \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

□

Teorema A.3. *Seja z um número complexo qualquer, então temos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n}{n!} = \int_0^z \frac{e^x - 1}{x} dx \tag{A.9}$$

Demonstração. Utilizando a expansão da função exponencial em série de potências,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

segue que

$$\Rightarrow \quad \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^z \frac{e^x - 1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{n}.$$

□

B Teoria de Perturbação

Aqui fazemos o desenvolvimento formal da teoria de perturbação estacionária até primeira ordem do parâmetro perturbativo, $\xi \ll 1$. Assim, deduzimos as correções de primeira ordem da energia e dos autoestados do Hamiltoniano perturbado.

Consideramos que o Hamiltoniano total H pode ser dividido em uma parte livre H_0 , que descreve o sistema não perturbado, e em uma parte de interação H_1 , ou seja,

$$H = H_0 + \xi H_1. \quad (\text{B.1})$$

Também consideramos que H pertença a um espaço de Hilbert de duas dimensões, ou seja, possui apenas dois autoestados ($|v_{\pm}\rangle$) e duas energias ($E_{\pm}$). Denotamos por $E_{\pm}^{(0)}$ as energias do caso não interagente ($\xi = 0$) e $|v_{\pm}^{(0)}\rangle$ os respectivos autoestados, ou seja,

$$H_0 |v_{\pm}^{(0)}\rangle = E_{\pm}^{(0)} |v_{\pm}^{(0)}\rangle.$$

Como é usual assumir no tratamento perturbativo [23], admitimos que as energias e os autoestados de H podem ser escritos como uma série de potências de ξ :

$$\begin{cases} E_{\pm} = E_{\pm}^{(0)} + \xi E_{\pm}^{(1)} + \xi^2 E_{\pm}^{(2)} + \dots \\ |v_{\pm}\rangle = |v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi |v_{\pm}^{(1)}\rangle + \xi^2 |v_{\pm}^{(2)}\rangle + \dots \end{cases}$$

Perceba que nessas equações já impusemos o fato de que se $\xi = 0$, então $E_{\pm}$ e $|v_{\pm}\rangle$ se reduzem as respectivas quantidades do caso não interagente.

Escrevendo a equação de autovalor para H e guardando somente termos lineares em ξ , vem que

$$\begin{aligned} H |v_{\pm}\rangle &= E_{\pm} |v_{\pm}\rangle \\ \Rightarrow (H_0 + \xi H_1) (|v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi |v_{\pm}^{(1)}\rangle) &= (E_{\pm}^{(0)} + \xi E_{\pm}^{(1)}) (|v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi |v_{\pm}^{(1)}\rangle) \\ \Rightarrow H_0 |v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi [H_0 |v_{\pm}^{(1)}\rangle + H_1 |v_{\pm}^{(0)}\rangle] &= E_{\pm}^{(0)} |v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi [E_{\pm}^{(0)} |v_{\pm}^{(1)}\rangle + E_{\pm}^{(1)} |v_{\pm}^{(0)}\rangle]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Agora devemos igualar os termos de mesma potência em ξ , já que essa equação deve ser satisfeita para qualquer valor do parâmetro perturbativo (dentro do limite $\xi \ll 1$, é claro). Os termos de ordem zero não trazem nenhuma informação nova porque apenas nos dizem que para o caso não interagente a equação de autovalor de H_0 deve ser satisfeita. Os termos lineares em ξ implicam que

$$H_0 |v_{\pm}^{(1)}\rangle + H_1 |v_{\pm}^{(0)}\rangle = E_{\pm}^{(0)} |v_{\pm}^{(1)}\rangle + E_{\pm}^{(1)} |v_{\pm}^{(0)}\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Projetando essa equação no vetor de estado $\langle v_{\pm}^{(0)}|$, que é autoestado de H_0 , chegamos à conclusão de que a primeira correção da energia é dada por

$$E_{\pm}^{(1)} = \langle v_{\pm}^{(0)} | H_1 | v_{\pm}^{(0)} \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Para encontrar a primeira correção dos autoestados de H , utilizamos a relação de fechamento satisfeita pelos autoestados de H_0 , pois, já que este é um observável então os seus autoestados formam uma base do espaço de Hilbert:

$$|v_{+}^{(0)}\rangle \langle v_{+}^{(0)}| + |v_{-}^{(0)}\rangle \langle v_{-}^{(0)}| = \mathbf{1}.$$

Disso segue que

$$H_1|v_+^{(0)}\rangle = E_+^{(1)}|v_+^{(0)}\rangle + \langle v_-^{(0)}|H_1|v_+^{(0)}\rangle|v_-^{(0)}\rangle$$

e

$$H_1|v_-^{(0)}\rangle = \langle v_+^{(0)}|H_1|v_-^{(0)}\rangle|v_+^{(0)}\rangle + E_-^{(1)}|v_-^{(0)}\rangle.$$

Substituindo essas equações em B.3 temos que

$$\begin{cases} (E_+^{(0)} - H_0)|v_+^{(1)}\rangle = \langle v_-^{(0)}|H_1|v_+^{(0)}\rangle|v_-^{(0)}\rangle \\ (E_-^{(0)} - H_0)|v_-^{(1)}\rangle = \langle v_+^{(0)}|H_1|v_-^{(0)}\rangle|v_+^{(0)}\rangle \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Agora devemos fazer outra consideração comum a esse tipo de tratamento. Escolhemos procurar por correções de primeira ordem que não tragam nenhuma informação já contida nos estados do caso não interagente, ou seja, os vetores que dão a primeira correção devem ser ortogonais aos não perturbados:

$$\langle v_+^{(0)}|v_+^{(1)}\rangle = 0 \quad e \quad \langle v_-^{(0)}|v_-^{(1)}\rangle = 0.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} |v_+^{(1)}\rangle &= \langle v_-^{(0)}|v_+^{(1)}\rangle|v_-^{(0)}\rangle + \underbrace{\langle v_+^{(0)}|v_+^{(1)}\rangle}_{=0}|v_+^{(0)}\rangle \\ \Rightarrow |v_+^{(1)}\rangle &= \frac{\langle v_-^{(0)}|H_1|v_+^{(0)}\rangle}{E_+^{(0)} - E_-^{(0)}}|v_-^{(0)}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\begin{aligned} |v_-^{(1)}\rangle &= \langle v_+^{(0)}|v_-^{(1)}\rangle|v_+^{(0)}\rangle + \underbrace{\langle v_-^{(0)}|v_-^{(1)}\rangle}_{=0}|v_-^{(0)}\rangle \\ \Rightarrow |v_-^{(1)}\rangle &= \frac{\langle v_+^{(0)}|H_1|v_-^{(0)}\rangle}{E_-^{(0)} - E_+^{(0)}}|v_+^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

É interessante notar que devido à escolha de ortogonalidade entre o termo não interagente e o de primeira ordem, os autoestados de H ficam automaticamente normalizados até primeira ordem em ξ :

$$\langle v_{\pm}|v_{\pm}\rangle = \langle v_{\pm}^{(0)}|v_{\pm}^{(0)}\rangle + \xi^2 \langle v_{\pm}^{(1)}|v_{\pm}^{(1)}\rangle = 1 + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (\text{B.8})$$

C Estados Não-Ortogonais Emaranhados

Seguindo os passos de [65], começamos com um estado bipartite emaranhado qualquer

$$|\Psi\rangle_{ab} = a|\bar{\alpha}\rangle_a|\bar{\beta}\rangle_b + d|\bar{\gamma}\rangle_a|\bar{\delta}\rangle_b, \quad (C.1)$$

no qual a e d são fatores de normalização e os estados de cada modo (ou cavidade) podem ser não-ortogonais, ou seja, $\langle\bar{\alpha}|\bar{\gamma}\rangle \neq 0$ e $\langle\bar{\beta}|\bar{\delta}\rangle \neq 0$. Considerando que $|\bar{\alpha}\rangle$ ($|\bar{\delta}\rangle$) e $|\bar{\gamma}\rangle$ ($|\bar{\beta}\rangle$) são linearmente independentes entre si, então eles formam um subespaço dois dimensional do espaço de Hilbert. A partir disso, se escolhermos a base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, dada por

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |\bar{\alpha}\rangle, & |1\rangle &= (|\bar{\gamma}\rangle - p_1|\bar{\alpha}\rangle)/n_1 && \text{para o sistema } a \\ |0\rangle &= |\bar{\delta}\rangle, & |1\rangle &= (|\bar{\beta}\rangle - p_2|\bar{\delta}\rangle)/n_2 && \text{para o sistema } b, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle\bar{\alpha}|\bar{\gamma}\rangle & n_1 &= \sqrt{1 - |p_1|^2} \\ p_2 &= \langle\bar{\delta}|\bar{\beta}\rangle & n_2 &= \sqrt{1 - |p_2|^2}, \end{aligned}$$

o estado $|\Psi\rangle_{ab}$ pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle_{ab} = (ap_2 + dp_1)|0\rangle_a|0\rangle_b + an_2|0\rangle_a|1\rangle_b + dn_1|1\rangle_a|0\rangle_b. \quad (C.2)$$

Ainda mais que isso, pode-se facilmente calcular a matriz densidade reduzida $\rho_a = Tr_b(|\Psi\rangle_{abab}\langle\Psi|)$ e os seus autovalores,

$$\rho_a = Tr_b(|\Psi\rangle_{abab}\langle\Psi|) = \begin{pmatrix} |ap_2 + dp_1|^2 + |an_2|^2 & (ap_2 + dp_1)d^*n_1^* \\ (ap_2 + dp_1)^*dn_1 & |dn_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (C.3)$$

na base $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$. Os autovalores dessa matriz são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4|adn_1n_2|^2}, \quad (C.4)$$

sendo que para obter essa expressão devemos lembrar que a normalização da equação C.2 nos diz que

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 = |ap_2 + dp_1|^2 + |an_2|^2 + |dn_1|^2.$$

Uma aplicação bastante interessante deste cálculo é a obtenção de uma expressão para a entropia de von Neumann do estado $|\Psi\rangle_{ab}$, que quantifica o emaranhamento desse estado. Por definição temos que

$$E_{vN}(|\Psi\rangle_{ab}) = -Tr[\rho_a \log_2(\rho_a)] = -\lambda_+ \log_2(\lambda_+) - \lambda_- \log_2(\lambda_-). \quad (C.5)$$

D Cavernas Emaranhadas com Dissipação

Neste apêndice complementamos o estudo do emaranhamento de cavernas com o cálculo da influência da dissipação de energia. Suponha que um par de cavernas (a, b) encontre-se num dos estados

$$|f_{\pm}\rangle_{ab} = N_{\pm}(|\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b \pm |-\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (\text{D.1})$$

que são análogos aos estados $|f_1\rangle_{ab}$ e $|f_2\rangle_{ab}$ do capítulo 3, quando escolhemos $\lambda t = \pi/2$. Se considerarmos que as cavernas são imperfeitas, de forma que percam fótons pelos espelhos, então o estado desse sistema passará a ser descrito, no limite de temperatura nula e dentro da aproximação de Born-Markov, pela equação mestra 4.10, cuja solução formal é $\rho_{\pm}(t) = \exp[(\hat{J} + \hat{L})t]|f_{\pm}\rangle\langle f_{\pm}|$. Utilizando a igualdade [113]

$$\exp[(\hat{J} + \hat{L})t]|\alpha\rangle\langle\beta| = \langle\beta|\alpha\rangle^{1-\tau^2}|\alpha\tau\rangle\langle\beta\tau|,$$

na qual $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são estados coerentes, $\tau \equiv e^{-\gamma t/2}$ e γ é uma constante que caracteriza a dissipação da caverna (que assumimos ser igual para as duas), podemos obter a expressão para o operador densidade em função do tempo de dissipação

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(t) = N_{\pm}^2 & \left(|\tau\alpha\rangle_{aa}\langle\tau\alpha| \otimes |-\tau\alpha\rangle_{bb}\langle-\tau\alpha| \pm e^{-4|\alpha|^2(1-\tau^2)} |\tau\alpha\rangle_{aa}\langle-\tau\alpha| \otimes |-\tau\alpha\rangle_{bb}\langle t\alpha| \right. \\ & \left. \pm e^{-4|\alpha|^2(1-\tau^2)} |-\tau\alpha\rangle_{aa}\langle\tau\alpha| \otimes |\tau\alpha\rangle_{bb}\langle-\tau\alpha| + |-\tau\alpha\rangle_{aa}\langle-\tau\alpha| \otimes |\tau\alpha\rangle_{bb}\langle\tau\alpha| \right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Para caracterizar o emaranhamento deste estado misto, utilizamos, assim como feito em [37], a negatividade, na sua forma dada por $E = -2\sum_i \lambda_i^-$, sendo λ_i^- os autovalores negativos de $\rho_{\pm}(t)^{PT}$ - a matriz densidade parcialmente transposta (veja a equação 1.46). Logo, precisamos calcular e diagonalizar $\rho_{\pm}(t)^{PT}$.

Utilizando a base ortonormal

$$\begin{aligned} |\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_{\theta}}} (\cos(\theta)|t\alpha\rangle - \sin(\theta)|-t\alpha\rangle) \\ |\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_{\theta}}} (-\sin(\theta)|t\alpha\rangle + \cos(\theta)|-t\alpha\rangle), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

com

$$\cos(\theta) = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-4|\alpha|^2 t^2}}}{2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - e^{-4|\alpha|^2 t^2}}}{2} \right]^{1/2}, \quad (\text{D.4})$$

podemos escrever os elementos da matriz densidade $\rho_{\pm}(t)$ como

$$\begin{aligned} \rho_{11} = \rho_{44} = \rho_{14} &= \frac{e^{-4|\alpha|^2 t^2} \left(1 \pm e^{-4|\alpha|^2(1-t^2)} \right)}{4 \left(1 \pm e^{-4|\alpha|^2} \right)}; \\ \rho_{23} &= \frac{1}{2 \left(1 \pm e^{-4|\alpha|^2} \right)} \left[\frac{e^{-4|\alpha|^2 t^2}}{2} \pm e^{-4|\alpha|^2(1-t^2)} \left(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) \right) \right]; \end{aligned}$$

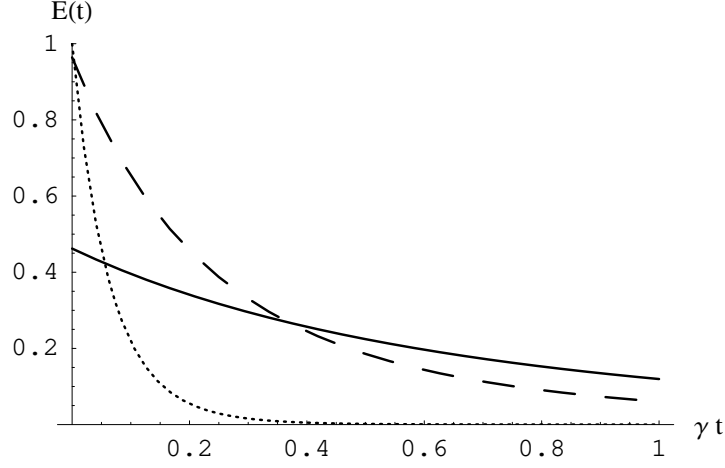


Figura D.1: Emaranhamento das cavidades em função do tempo de dissipação, o estado inicial das cavidades é $|f_+\rangle_{ab}$. Amplitudes coerentes escolhidas: $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1$ (tracejado) e $\alpha = 2$ (pontilhado).

$$\rho_{22} = \rho_{33} = \frac{1}{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})} \left(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) \pm \frac{e^{-4|\alpha|^2}}{2} \right);$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{24} = \rho_{34} = \frac{(1 \pm e^{-4|\alpha|^2(1-t^2)})}{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})} (\cos^3(\theta) \sin(\theta) + \sin^3(\theta) \cos(\theta)).$$

Na forma matricial, $\rho_{\pm}(t)^{PT}$ é dada por

$$\rho_{\pm}(t)^{PT} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}$$

e os autovalores dessa matriz são dados por

$$\lambda_1 = \rho_{22} - \rho_{11};$$

$$\lambda_2 = \rho_{11} - \rho_{23};$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{23} - \sqrt{16\rho_{12}^2 + \rho_{22}^2 - 2\rho_{22}\rho_{23} + \rho_{23}^2} \right);$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left(2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{23} + \sqrt{16\rho_{12}^2 + \rho_{22}^2 - 2\rho_{22}\rho_{23} + \rho_{23}^2} \right).$$

A partir dessas expressões, temos implicitamente o emaranhamento em função de α e de t . Nas figuras D.1 e D.2 apresentamos os gráfico do emaranhamento *versus* o tempo de dissipação. Como era de se esperar, o emaranhamento decai rapidamente com o tempo de dissipação, já que as cavidades tendem ao estado de vácuo $|0\rangle_a|0\rangle_b$, que é um estado produto e não possui nenhuma correlação. Um fato inesperado, entretanto, pode ser observado no comportamento do emaranhamento do estado $|f_+\rangle_{ab}$. Apesar dele não ser sempre máximo quando $\gamma t = 0$, é necessário um maior tempo de dissipação para que ele tenda a zero. Disso, percebemos que as correlações quânticas do estado $|f_+\rangle_{ab}$ são menos influenciadas pela perda de fótons quando o número médio destes dentro

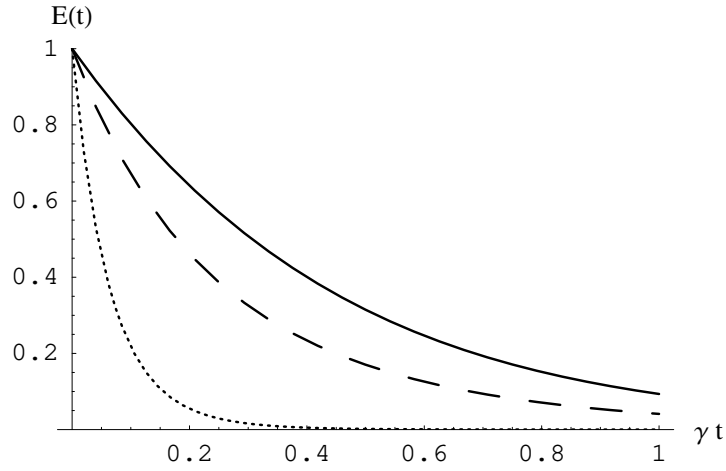


Figura D.2: Emaranhamento das cavidades em função do tempo de dissipação, o estado inicial das cavidades é $|f_{-}\rangle_{ab}$ e γ é a constante de dissipação. Amplitudes coerentes escolhidas: $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 1$ (tracejado) e $\alpha = 2$ (pontilhado).

é pequeno ($|\alpha|^2 < 1$). Essa mesma conclusão pode ser tirada do segundo gráfico, no qual o emaranhamento inicial é máximo, independentemente do valor inicial da amplitude coerente. Isso parece ser mais uma previsão não intuitiva da mecânica quântica, já que esperávamos que a perda de um fóton afetasse menos as correlações quânticas de um estado quando este possuísse um número médio de fótons elevado e afetasse mais quando esse número médio fosse menor.

Referências Bibliográficas

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proceeding IEEE* **51**, 89 (1963).
- [2] I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).
- [3] C. C. Gerry and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **42**, 6805 (1990).
- [4] P. L. Knight, *Physica Scripta* **T12**, 51 (1986).
- [5] J. Lee, M. Paternostro, M. S. Kim, and S. Bose, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080501 (2006).
- [6] P. P. Munhoz, F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco, and J. A. Roversi, *Phys. Lett. A* **372**, 3580 (2008).
- [7] H. J. Briegel and R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 910 (2001).
- [8] R. Raussendorf and H. J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).
- [9] F. C. Lourenço and A. Vidiella-Barranco, *Eur. Phys. J. D.* **47**, 127 (2008).
- [10] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [11] F. Yamaguchi, P. Milman, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. A* **66**, 010302 (2002).
- [12] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1999), 1st ed.
- [13] B. W. Shore and P. L. Knight, *Journal of Modern Optics* **40**, 1195 (1993).
- [14] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
- [15] J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **50**, R2799 (1994).
- [16] G.-C. Guo and Y.-S. Zhang, *Phys. Rev. A* **65**, 054302 (2002).
- [17] S.-B. Zheng and G.-C. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2392 (2000).
- [18] G.-P. Guo, C.-F. Li, J. Li, and G.-C. Guo, *Phys. Rev. A* **65**, 042102 (2002).
- [19] C. C. Gerry, *Phys. Rev. A* **53**, 4583 (1996).
- [20] M. Paternostro, M. S. Kim, and G. M. Palma, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140504 (2007).
- [21] L. Zhou and G.-H. Yang, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, 5143 (2006).
- [22] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995), 1st ed.
- [23] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, vol. 1 e 2 (Wiley-Interscience, 2006), 1st ed.
- [24] J. G. P. de Faria and M. C. Nemes, *Phys. Rev. A* **59**, 3918 (1999).

- [25] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, arXiv **0702225v2** [quant-ph] (2007), um extenso e completo trabalho de revisão sobre emaranhamento.
- [26] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [27] D. E. Browne, *Generation and manipulation of entanglement in quantum optical systems*, Tese de Doutorado - Imperial College of Science, Technology and Medicine. The Blackett Laboratory. Quantum Optics and Laser Science Group. London, UK. (2004), arXiv: **050737 v2**.
- [28] G. G. Rigolin, *Estados quânticos emaranhados*, Tese de Doutorado - Instituto de Física “Gleb Wataghin”, UNICAMP, Brasil (2005), <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/>.
- [29] M. B. Plenio and S. Virmani, arXiv **0504163v3** [quant-ph] (2006).
- [30] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **84**, 2014 (2000).
- [31] C. H. Bennett, D. P. Vincenzo, J. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [32] G. Vidal, J. Mod. Opt. **47**, 355 (2000).
- [33] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).
- [34] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley, 1993), 2nd ed.
- [35] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [36] G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (1996).
- [37] H. Jeong, M. S. Kim, and J. Lee, Phys. Rev. A **64**, 052308 (2001).
- [38] S. J. D. Phoenix and P. L. Knight, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 116 (1990).
- [39] C.-H. Yuan, Y.-C. Ou, and Z.-M. Zhang, Opt. Commun. **267**, 282 (2006).
- [40] S.-H. Xiang, B. Shao, K.-H. Song, and J. Zou, Chin. Phys. Lett. **24**, 1467 (2007).
- [41] S.-B. Zheng, Quantum Semiclass. Opt. **10**, 691 (1998).
- [42] K.-H. Song, W.-J. Zhang, and G.-C. Guo, Eur. Phys. J. D **19**, 267 (2002).
- [43] E. S. Guerra, J. Mod. Opt. **53**, 883 (2006).
- [44] M. Yang and Z.-L. Cao, Phys. A **366**, 243 (2006).
- [45] C. C. Gerry, Phys. Rev. A **55**, 2478 (1997).
- [46] M. Alexanian and S. K. Bose, Phys. Rev. A **52**, 2218 (1995).
- [47] Y. Wu, Phys. Rev. A **54**, 1586 (1996).
- [48] A. B. Klimov, L. L. Sánchez-Soto, and A. N. and E. C. Yustas, J. Mod. Opt. **49**, 2211 (2002).
- [49] F. W. Cummings, Phys. Rev. **140**, A1051 (1965).
- [50] C. H. Bennett and G. Brassard, Proc. of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing pp. 175–179 (1984).
- [51] A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [52] C. H. Bennett, G. Brassard, and N. D. Mermin, Phys. Rev. Lett. **68**, 557 (1992).

- [53] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [54] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Nature **446**, 297 (2007).
- [55] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, et al., arxiv **0612138** [quant-ph] (2006).
- [56] W. Son, M. S. Kim, J. Lee, and D. Ahn, J. Mod. Opt. **49**, 1793 (2002).
- [57] M. Paternostro, W. Son, and M. S. Kim, Phys. Rev. Lett. **92**, 197901 (2004).
- [58] M. Paternostro, W. Son, M. S. Kim, G. Falci, and G. M. Palma, Phys. Rev. A **70**, 022320 (2004).
- [59] B. Kraus and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **92**, 013602 (2004).
- [60] A. Serafini, M. Paternostro, M. S. Kim, and S. Bose, Phys. Rev. A **73**, 197901 (2006).
- [61] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, Phys. Rev. Lett. **78**, 3221 (1997).
- [62] M. J. Hartmann, M. E. Reuter, and M. B. Plenio, New J. Phys. **8**, 94 (2006).
- [63] S. J. van Enk, Phys. Rev. A **72**, 064306 (2005).
- [64] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **79**, 1 (1997).
- [65] X. Wang, J. Phys. A **35**, 165 (2002).
- [66] O. Hirota and M. Sasaki, arXiv **0101018** [quant-ph] (2001).
- [67] O. Hirota, S. J. van Enk, K. Nakamura, M. Sohma, and K. Kato, arXiv **0101096v1** [quant-ph] (2001).
- [68] J. Preskill, *Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation*, California Institute of Technology (1998), <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/index.html>.
- [69] S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight, and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **87**, 050401 (2001).
- [70] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
- [71] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge, UK, 2000).
- [72] V. Scarani, A. Acín, E. Schenck, and M. Aspelmeyer, Phys. Rev. A **71**, 042325 (2005).
- [73] X. B. Zou and W. Mathis, Phys. Rev. A **71**, 032308 (2005).
- [74] A.-N. Zhang, C.-N. Lu, X.-Q. Zhou, Y.-A. Chen, Z. Zhao, T. Yang, and J.-W. Pan, Phys. Rev. A **73**, 022330 (2006).
- [75] R. Prevedel, P. Walther, F. Tiefenbacher, P. Böhi, R. Kaltenbaek, T. Jennewein, and A. Zeilinger, Nature **445**, 65 (2007).
- [76] K. Chen, C.-M. Li, Q. Zhang, Y.-A. Chen, A. Goebel, S. Chen, A. Mair, and J.-W. Pan, arXiv **0705.0174** [quant-ph] (2007).

- [77] S.-B. Zheng, Phys. Rev. A **73**, 065802 (2006).
- [78] Z.-M. Zhan, W.-X. Yang, W.-B. Li, and J.-H. Li, Chin. Phys. Lett. **23**, 1984 (2006).
- [79] W.-X. Yang, Chin. Phys. Lett. **24**, 104 (2007).
- [80] T. Tanamoto, Y.-X. Liu, S. Fujita, X. Hu, and F. Nori, Phys. Rev. Lett. **97**, 230501 (2006).
- [81] X.-H. Zheng, P. Dong, Z.-Y. Xue, and Z.-L. Cao, Phys. Lett. A **365**, 156 (2007).
- [82] G.-P. Guo, H. Zhang, T. Tu, and G.-C. Guo, Phys. Rev. A **75**, 050301 (2007).
- [83] D. E. Browne and T. Rudolph, Phys. Rev. Lett. **95**, 010501 (2005).
- [84] J. Cho and H.-W. Lee, Phys. Rev. Lett. **95**, 160501 (2005).
- [85] X. B. Zou and W. Mathis, Phys. Rev. A **72**, 013809 (2005).
- [86] P. Dong, Z.-Y. Xue, M. Yang, and Z.-L. Cao, Phys. Rev. A **73**, 033818 (2005).
- [87] L. Ye, Eur. Phys. J. D **41**, 413 (2007).
- [88] L. Ye and G.-C. Guo, Phys. Lett. A **361**, 460 (2007).
- [89] Z.-M. Zhan and W.-B. Li, Chin. Phys. Lett. **24**, 344 (2007).
- [90] S. G. R. Louis, K. Nemoto, W. J. Munro, and T. P. Spiller, Phys. Rev. A **75**, 042323 (2007).
- [91] W.-X. Yang and Z.-X. Gong, arXiv **0704.2297** [quant-ph] (2007).
- [92] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Shenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger, Nature **434**, 169 (2005).
- [93] G. Vallone, E. Pomarico, P. Mataloni, F. D. Martini, and V. Beradi, Phys. Rev. Lett. **98**, 180502 (2007).
- [94] L. Vaidman, Phys. Rev. A **49**, 1473 (1994).
- [95] R. E. S. Polkinghorne and T. C. Ralph, Phys. Rev. Lett. **83**, 2095 (1999).
- [96] M. Ban, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, L9 (1999).
- [97] S. Loyd and S. L. Braunstein, Phys. Rev. Lett. **82**, 1784 (1999).
- [98] J. Zhang and S. L. Braunstein, Phys. Rev. A **73**, 032318 (2006).
- [99] N. C. Menicucci, P. van Loock, M. Gu, C. Weedbrook, T. C. Ralph, and M. A. Nielsen, Phys. Rev. Lett. **97**, 110501 (2006).
- [100] M. Van den Nest, A. Miyake, W. Dür, and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **97**, 150504 (2006).
- [101] X. Su, A. tan, X. Jia, J. Zhang, C. Xie, and K. Peng, Phys. Rev. Lett. **98**, 070502 (2007).
- [102] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [103] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).
- [104] B. C. Sanders, Phys. Rev. A **45**, 6811 (1992).
- [105] B. C. Sanders, Phys. Rev. A **46**, 2966 (1992).

- [106] S. J. van Enk and O. Hirota, Phys. Rev. A **64**, 022313 (2001).
- [107] H. Jeong and M. S. Kim, Phys. Rev. A **65**, 042305 (2002).
- [108] H. Jeong and N. B. An, Phys. Rev. A **74**, 022104 (2006).
- [109] A. G. ad K. Nemoto, W. J. Munro, T. C. Ralph, S. Glancy, S. L. Braunstein, and G. J. Milburn, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S828 (2004).
- [110] F. C. Lourenço and A. Vidiella-Barranco, AIP Proceeding of the RIAO/OPTILAS'07 conference (2007), <http://proceedings.aip.org/proceedings/confproceed/992.jsp>.
- [111] E. M. Becerra-Castro, W. B. Cardoso, A. T. Avelar, and B. Baseia, arXiv: **0709.0010v1** [quant-ph] (2007).
- [112] P. P. Munhoz, Trabalho ainda não publicado sobre a influência da dissipação de energia no emaranhamento de CTECS. (2007).
- [113] S. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A **41**, 5132 (1990).
- [114] C. W. Gardiner, *Quantum Noise - A Handbook Of Markovian And Non-markovian Quantum Stochastic Methods With Applications To Quantum Optics* (Springer-Verlag, UK, 1992).