**Universidade Estadual de Campinas**

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Tese de Doutorado

# Acreção de matéria exótica por buracos negros

Manuela Gibim Rodrigues Maurer

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (orientador)

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor - IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Orlando Luís Goulart Peres - IFGW/UNICAMP
Prof. Dr. Elcio Abdalla - IFUSP/UNICAMP
Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini - UFSCAR

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado defendida pela aluna Manuela Gibim Rodrigues Maurer e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de Janeiro de 2010

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M446a

Maurer, Manuela Gibim Rodrigues
Acreção de matéria exótica por buracos negros / Manuela Gibim Rodrigues Maurer.-- Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Energia escura. 2. Quintessência. 3. Buracos negros (Gravitação) I. Saa, Alberto Vazquez. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Accretion of exotic matter by black holes
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  1. Dark energy
  2. Quintessence
  3. Black holes (Gravitation)
- **Área de Concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Doutora em Ciências
- **Banca Examinadora:**
  Prof. Alberto Vazquez Saa
  Prof. Patricio Anibal Letelier Sotomayor
  Prof. Orlando Luis Goulart Peres
  Prof. Elcio Abdalla
  Prof. Alex Eduardo de Bernardini
- **Data da Defesa:** 30-11-2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

Secretaria de Pós-Graduação - Tel: (19) 3521-5305 FAX: (19) 3521-4142

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **MANUELA GIBIM RODRIGUES MAURER - RA 041215,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 30 DE NOVEMBRO DE 2009.

**COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – DMA/IMEC/UNICAMP
(Orientador da Candidata)

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini – UFSCAR

Prof. Dr. Elcio Abdalla – IF/USP

Prof. Dr. Orlando Luís Goulart Peres - DRCC /IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Patricio Letelier Sotomayor – DMA/IMEC/UNICAMP

Nada existe,
as coisas todas
vão se tornando.
(Bhagvad Gita)

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Primeiramente à Deus, pela vida.

Aos meus pais, Sonia e Ademir, pelo exemplo de vida, pelo amor que nunca morre. Ao meu irmão Lucas, e minha família de coração, Madrinha, Elton, Flávia, Marcela, Chris e Dan, por toda ajuda e apoio em todos os momentos. Obrigada por existirem na minha vida.

Aos meus amigos, de infância, sempre presentes, mesmo que por e-mail ou telefone. Aos amigos de trabalho, da UEL e da UNICAMP, pelos *coffee breaks* no Marcão com discussões animadas e conselhos. Às minhas amigas do ballet, pelo carinho e pela força que os ensaios na hora do almoço me deram.

Aos meus professores, que contribuíram para minha formação, especialmente meu orientador, Alberto, pela paciência, dedicação e amizade.

À UEL, à UNICAMP, e por final ao suporte financeiro do CNPq.

# Resumo

Nos últimos anos, a interpretação do cenário cosmológico sofreu inúmeras modificações, devido às contribuições das pesquisas em SNe Ia e em núcleos galáticos. Estes estudos evidenciam a presença de componentes exóticos no universo, a matéria e energia escuras.

Os modelos de quintessência descrevem esta energia escura como um campo escalar acoplado à gravidade, considerando todo o universo permeado por ele. Na vizinhança de um buraco negro, este campo deverá ser absorvido, modificando a sua distribuição de massa. Esta acreção de massa exótica vem sendo interligada ao caso de buracos negros primordiais, sugerindo um possível mecanismo para a formação de buracos negros supermassivos.

Utilizando uma abordagem quasi-estacionária, consideramos a evolução da massa de um buraco negro de Schwarzschild na presença de um campo cosmológico escalar não minimamente acoplado. A equação da evolução da massa é resolvida analiticamente para um acoplamento genérico, revelando um comportamento qualitativamente diferente do caso de acoplamento mínimo. Em particular, para buraco negros com massas menores que um certo valor crítico, o acréscimo do campo escalar pode levar à diminuição da massa, mesmo se nenhuma energia de *phantom* for envolvida. A validade física da abordagem quasi-estacionária adotada e algumas implicações do nosso resultado para evolução dos buracos negros primordiais e astrofísicos são discutidas. Mais precisamente, nós discutimos que os dados observacionais de buracos negros poderiam ser usados para colocar restrições no conteúdo de energia não minimamente acoplado.

# Abstract

In the last years, the interpretation of the cosmological scenario suffered uncountable modifications because of contribution of research in SNe Ia and galactic core. These studies demonstrate the presence of exotics components in the universe, the dark matter and the dark energy.

Quintessencial models describe this dark energy as a scalar field coupled to gravity, considering the entire universe permeated by it. In the vicinity of a black hole, this field should be absorbed, modifying its distributions of mass. This accretion of this exotic mass has been interconnected at the case of primordial black holes, suggesting a possible mechanism for the formation of supermassive black holes.

By using a quasi-stationary approach, we consider the mass evolution of Schwarzschild black holes in the presence of a nonminimally coupled cosmological scalar field. The mass evolution equation is analytically solved for generic coupling, revealing a qualitatively distinct behavior from the minimal coupling case. In particular, for black hole masses smaller than a certain critical value, the accretion of the scalar field can lead to mass decreasing even if no phantom energy is involved. The physical validity of the adopted quasi-stationary approach and some implications of our result for the evolution of primordial and astrophysical black holes are discussed. More precisely, we argue that black hole observational data could be used to place constraints on the nonminimally coupled energy content of the universe.

# Índice

**Agradecimentos** **iv**

**Resumo** **vi**

**Abstract** **vii**

**Lista de Figuras** **xi**

**Introdução** **1**

**1 Expansão acelerada do universo** **3**
1.1 Evidências experimentais para expansão acelerada . . . 3
1.2 Modelo ΛCDM . . . 4
1.2.1 A Constante Cosmológica . . . 4
1.2.2 Estruturas Causais . . . 6
1.2.3 Problemas com a constante cosmológica . . . 11
1.3 Quintessência . . . 11
1.4 *Phantom* . . . 12
1.5 Gás de Chaplygin . . . 13

**2 Modelos de Quintessência** **14**
2.1 Equações de movimento . . . 14
2.2 Acoplamento mínimo . . . 19
2.3 Acoplamento não mínimo . . . 19

**3 Distribuição de Massa na vizinhança de um buraco negro** **23**
3.1 Acreção e evaporação de matéria . . . 23
3.2 Buracos Negros permeados por um fluido perfeito . . . 25
3.3 Buracos Negros permeados por um campo escalar . . . 27
3.4 Acreção de massa por campo escalar minimamente acoplado . . . 29
3.4.1 Acreção do campo . . . 29
3.4.2 Taxa de variação total da massa . . . 31

**4 Acreção de massa por campo escalar não minimamente acoplado** **33**
4.1 O campo na região do horizonte de eventos . . . 33
4.2 A evolução de massa . . . 35
4.2.1 Acoplamento linear - $F(\phi) = 1 + \xi\phi$ . . . 37

4.2.2 Acoplamento não linear - $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$ . . . . . 48
4.2.3 Acoplamento exponencial - $F(\phi) = e^{\xi\phi}$ . . . . . 54
4.2.4 Era da radiação e era da matéria . . . . . 58

**5 Considerações finais e Perspectivas futuras** **62**

**A Apêndice** **64**

**Referências** **70**

# Lista de Figuras


1.1 Distância comóvel através do tempo. . . . . 9
1.2 Distância comóvel através do tempo conforme. . . . . 9
1.3 Distância própria através do tempo. . . . . 10

2.1 Espaço de fase $(\phi, H)$ . . . . . 20
2.2 Potencial Efetivo em função do campo . . . . . 21
2.3 Parâmetro $\omega$ no tempo . . . . . 22

3.1 Evolução de um buraco negro ignorando a evaporação . . . . . 30
3.2 Evolução da massa de um buraco negro em relação a massa crítica. . . . . 30
3.3 Evolução de um buraco negro com evaporação de matéria . . . . . 31
3.4 Evolução de um buraco negro em relação a linha crítica . . . . . 32

4.1 Evolução de massa sem o termo de radiação Hawking . . . . . 38
4.2 Evolução de massa em relação a linha crítica . . . . . 39
4.3 Distribuição total da massa para acoplamento linear . . . . . 40
4.4 Soluções da taxa de variação total de massa variando $\xi$ . . . . . 41
4.5 Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, para $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . 42
4.6 Distribuição de massa em relação a linha crítica . . . . . 43
4.7 Soluções de acreção de massa variando $\xi$ . . . . . 44
4.8 Distribuição total da massa . . . . . 44
4.9 Soluções da taxa de variação total de massa variando $\xi$ . . . . . 45
4.10 Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking relativa a linha crítica, para $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 46
4.11 Soluções de taxa de variação de massa, variando $\xi$, com $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 46
4.12 Distribuição total da massa, com $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 47
4.13 Soluções de taxa de variação total da massa, variando $\xi$, caso 2 . . . . . 48
4.14 Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, com acoplamento não linear . . . . . 50
4.15 Distribuição total da massa, com acoplamento não linear . . . . . 51
4.16 Evolução da massa para acoplamento não mínimo, com $\phi_\infty$ dependente do tempo 51
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 51
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 51
4.17 Soluções da massa variando $\xi$, para acoplamento não mínimo . . . . . 52
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 52
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 52

4.18 Evolução total da massa para acoplamento não mínimo, com $\phi_\infty$ dependente do tempo . . . . . 53
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 53
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 53
4.19 Soluções da massa com evaporação, variando $\xi$, para acoplamento não mínimo . . 53
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 53
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 53
4.20 Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, com acoplamento exponencial . . . . . 55
4.21 Distribuição total da massa para $F(\phi) = e^{\xi\phi}$ . . . . . 55
4.22 Evolução da massa para acoplamento exponencial, com $\phi_\infty$ dependente do tempo 56
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 56
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 56
4.23 Soluções da massa variando $\xi$, para acoplamento exponencial . . . . . 57
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 57
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 57
4.24 Evolução total da massa para acoplamento exponencial, com $\phi_\infty$ dependente do tempo . . . . . 57
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 57
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 57
4.25 Soluções da massa com evaporação, variando $\xi$, para acoplamento exponencial . . 58
(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ . . . . . 58
(b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$ . . . . . 58

# Introdução

A acreção de matéria por objetos compactos massivos é um dos processos mais estudados na relatividade geral [1]. Salpeter e Zeldovich foram os primeiros, em 1964, a propor que galáxias e quasares poderiam obter parte de sua energia a partir de processos de acreção [2]. Desde então, estes processos de acreção têm sido considerados como possíveis mecanismos de formação dos buracos negros supermassivos (SMBH) presentes no centro da maioria das galáxias ativas [3].

Há grandes evidências da existência de buracos negros supermassivos (massa de até $M \geq 10^6 M_\odot$) no centro da maioria das galáxias, incluindo a Via Láctea. Os melhores resultados para a nossa galáxia mostram $M \approx 3 \times 10^6 M_\odot$ [2], sendo que uma massa solar equivale a $1.9891 \times 10^{33} g$. A origem destes buracos negros, ainda é incerta, no entanto, muitas teorias são formuladas. Não se acredita atualmente que eles tenham se formado por evolução estelar, o mais provável é que tenham crescido e aumentado sua massa lentamente. Uma possibilidade analisada é a de que buracos negros primordiais podem ter dado origem aos SMBH [4–12].

Buracos negros primordiais (PBH) foram criados no final do período inflacionário e muitas teorias tentam explicar sua formação. Diversos processos físicos podem ter levado à formação de PBH. Eles podem ter se formado a partir das pertubações, durante a transição de fase da equação de estado, ou também através de defeitos topológicos.

A comparação entre a densidade cosmológica algum tempo após o Big Bang e a densidade associada a um buraco negro mostra que um buraco negro primordial poderia ter massa da ordem do seu horizonte de eventos no momento de sua formação [13], $\left(M \sim \frac{c^3 t}{G} \sim \frac{10^{15}}{10^{-23}} \left(\frac{t}{s}\right) g\right)$. A massa inicial apresenta ampla faixa de valores, aqueles formados no tempo de Planck $(5,4 \times 10^{-44} s)$ poderiam ter massa da ordem da massa de Planck $(2,2 \times 10^{-5} g)$, e aqueles formados um segundo após o Big Bang poderiam ter massa de até $10^5 M_\odot$, e se pudessem ser criados hoje, não poderiam ter massa inferior a $1 M_\odot$. É bastante improvável que após este instante PBH tenham se formado, visto que isto teria afetado a nucleossíntese primordial [14, 15].

Buracos negros com $M \leq 10^{15} g$ não devem ser observados atualmente, pois podem ter evaporado completamente por radiação de Hawking [16–18] e contribuir para o fluxo de raios cósmicos. Já aqueles com $M \geq 10^{15} g$ poderiam produzir efeitos observáveis hoje [19], como efeito de microlentes gravitacionais e poderiam também contribuir significativamente para quantidade de matéria escura [20]. Se estes PBH se formaram com uma quantidade suficiente de massa para não evaporar completamente e ao mesmo tempo absorveram matéria e energia em grande quantidade, poderemos relacionar estes objetos ao buracos negros supermassivos observados hoje.

À parte esta questão, a partir da década de 90, fortes evidências observacionais acumularam-se mostrando que o universo é dominado por uma energia escura e passa por uma fase de expansão acelerada [21–25], levando à introdução de novos graus de liberdade no cenário cosmológico.

Um modo de descrever a energia escura seria usando um campo escalar. Estes modelos

em cosmologia são chamados de Modelos de Quintessência [26–29]. Deste modo, consideramos que o Universo é completamente preenchido por um campo quintessencial. Nas proximidades de um buraco negro, este campo escalar será absorvido e isto pode favorecer seu aumento de massa.

Nosso objetivo é mostrar que o acréscimo de massa no decorrer da vida de um buraco negro primordial é algo relevante e não pode ser negligenciado. Com isto, vamos analisar se os buracos negros supermassivos de hoje podem ter sido os primordiais que absorveram muita quintessência. Tentaremos assim, responder perguntas em três assuntos diferentes. Usaremos campo escalar não minimamente acoplado (como explicação para a energia escura) na região do horizonte de eventos de um buraco negro primordial, justificando seu crescimento, levando à formação de um buracos negro supermassivo.

No primeiro capítulo, será apresentada uma revisão sobre a questão da expansão acelerada, discutindo os cosmológicos mais estudados na atualidade, apontando seus avanços e seus pontos ainda obscuros. No capítulo seguinte discutiremos os modelos de quintessência com acoplamento mínimo e não mínimo ao tensor de Ricci. No capítulo 3, estudaremos a acreção e evaporação de matéria feita por buracos negros na região do seu horizonte de eventos, verificando os casos de acreção de um fluido perfeito e de um campo escalar.

O estudo de acreção de matéria por buracos negros, seja apenas um fluido perfeito ou energia escura na forma de campo escalar já foi realizado, no entanto modelos de quintessência com acoplamento mínimo apresentam muitas restrições enquanto modelo, indicando a necessidade deste estudo com modelos mais completos. Assim, no capítulo 4, analisaremos detalhadamente a taxa de variação da massa da um buraco negro, considerando modelos de quintessência não minimamente acoplado, com diversos tipos de acoplamentos e em tempos diferentes. Trabalhamos em todas as situações com acreção de matéria e energia por buracos negros de Schwarzschild, soluções das equações de campo de Einstein no vácuo, com simetria esférica, sem carga e sem rotação.

Adotamos as unidades naturais, $8\pi G = c = \hbar = 1$, com assinatura da métrica $(-+++)$.

# 1 Expansão acelerada do universo

Na procura pelas explicações da dinâmica do universo, a força gravitacional tomou papel cosmológico desde a época de Newton. Quando Einstein procurou elucidações para o universo, procurou soluções para um universo homogêneo, isotrópico e estacionário, mas esta solução mostrou-se não ser a mais apropriada. Devido à natureza atrativa da força gravitacional, as galáxias poderiam cair umas sobre as outras, colapsando-se. Einstein imaginou que deveria existir uma força repulsiva que compensasse a atração gravitacional. Para garantir a solução que esperava, ou seja, um universo estacionário, introduziu um termo de pressão negativa sem justificação física, em suas equações de campo, denominado constante cosmológica. À própria visão de Einstein, este termo, por ser um artifício matemático, retirava a simplicidade das suas equações.

Com as descobertas de Hubble sobre o movimento de recessão das galáxias, ou seja, um universo em expansão, a repulsão imaginada por Einstein tornou-se desnecessária e o termo da constante cosmológica foi retirado de suas equações. Apesar disto, neste mesmo período, W. de Sitter, encontrou uma solução para a teoria modificada de Einstein (com a constante cosmológica) que previa um deslocamento para o vermelho proporcional à distância e coerente com o Princípio Cosmológico.

Em 1998, as pesquisas em SNe Ia encontraram indícios de uma aceleração da expansão do universo. Esta expansão não está prevista no Modelo Cosmológico Padrão e, à partir desta descoberta, começaram a surgir propostas de satisfazer os modelos existentes ou mesmo a criação de outros [22].

## 1.1 Evidências experimentais para expansão acelerada

A principal evidência de que o universo está atualmente acelerando está relacionada à observação das distâncias da luminosidade dos altos desvios para vermelho das Supernovas Ia. As pesquisas em SNe Ia, tentando estabelecer uma extensão do diagrama de Hubble, mostraram que o parâmetro de desaceleração é negativo ($q_0 < 0$), ou seja, que o universo passa por uma fase de aceleração [22].

Em 2003, resultados das observações do WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), juntamente com as pesquisas de SNe Ia, estabeleceram que $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$, para um universo espacialmente plano [30]. O parâmetro de densidade total conta com contribuições de matéria bariônica, $\Omega_B = 0.044$, e radiação (neutrinos, fótons, etc), $\Omega_R = 4,76.10^{-5}$ [30]; e estas contribuições não são suficientes para aproximar o parâmetro de densidade deste valor, ou seja, existe um déficit de matéria e energia.

Paralelo a isto, estudos das velocidades de rotação das estrelas ao redor do núcleo galático

em função da distância radial ao centro galático resultam em relações incompatíveis com o conteúdo de matéria observável. E os melhores resultados para a densidade de matéria do universo apresentaram $\Omega_m = 0.28^{+0.09}_{-0.08}$. Supõe-se então, que existe uma matéria não visível à qual se denomina matéria escura e que deve estar simetricamente distribuída em toda a extensão da galáxia, com $\Omega_M \approx 0.23$ [23].

Com isto, vemos que ainda existe um componente desconhecido, responsável pelos restantes $\Omega_? = 0.73$ [23]. Uma forma de resolver este problema é introduzir uma componente energética que seja responsável por esta possível aceleração.

O modelo cosmológico mais utilizado atualmente é o modelo ΛCDM, por ser uma extensão do antigo modelo cosmológico padrão, diferenciado pelas evidências de matéria e energia escura. No entanto, como veremos adiante, existem muitos pontos obscuros neste modelo e outros têm sido criados de modo a satisfazer estes pontos. Vamos apresentar brevemente alguns destes modelos, analisando os pontos positivos e negativos de cada um.

## 1.2 Modelo ΛCDM

Uma forma de explicar esta energia faltante, chamada energia escura, é relacioná-la à constante cosmológica, colocada adequadamente de volta nas equações de Einstein. A energia escura seria uma energia que não emite luz, exerce pressão negativa e é aproximadamente homogênea, de modo a garantir a aceleração. Com isto, temos um novo modelo cosmológico, o modelo ΛCDM (Λ Cold Dark Matter), que descreve o universo com matéria escura fria, ou seja, não relativística, e constante cosmológica Λ.

Como evidência da existência da constante cosmológica temos também a comparação entre a idade do universo $t_0$ e a idade das estrelas mais antigas no universo $t_e$. Obviamente espera-se que $t_0 > t_e$. No entanto, isto não é satisfeito para um universo plano formado de matéria. Esta relação somente é satisfeita adicionando a constante cosmológica [22].

### 1.2.1 A Constante Cosmológica

A explicação física associada à constante cosmológica, seja ela matéria ou energia, deve ser uma distribuição uniforme, independente das inomogeneidades da distribuição da matéria ordinária. Se isto acontecesse, ela poderia afetar a interação gravitacional, impossibilitando a existência de sistemas gravitacionais tal como se conhece.

As Equações de Einstein, reintroduzindo a constante cosmológica, em unidades de Planck [31–33], são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

onde $R_{\mu\nu}$ e $R$ são o tensor e escalar de Ricci, respectivamente, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia e momento e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

O escalar de Ricci é obtido da contração do tensor de Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, e o tensor de Ricci é uma contração do tensor de Riemann,

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}, \tag{1.2}$$

ou seja,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}, \tag{1.3}$$

onde

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right\} \tag{1.4}$$

é chamado de conexão afim e assume o papel do campo gravitacional; e o tensor métrico (entidade geométrica) $g^{\nu\sigma}$ faz o papel de um potencial gravitacional (entidade física), o que dá a idéia de geometrização da gravitação.

Para que a forma das equações seja preservada, pode-se aglutinar o termo da constante cosmológica no termo de fonte,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\widetilde{T}_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

definindo um novo termo de fonte

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G}. \tag{1.6}$$

No qual o tensor de energia e momento toma a forma

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = \widetilde{p}g_{\mu\nu} + \left(\widetilde{p} + \widetilde{\rho}\right)u_\mu u_\nu, \tag{1.7}$$

onde $p$ é a pressão, $\rho$ é a densidade e $u_\mu$ é o componente radial da 4-velocidade. O novo termo de pressão fica

$$\widetilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G} = p - p_\Lambda \tag{1.8}$$

e o termo de densidade fica

$$\widetilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda. \tag{1.9}$$

A equação de fluido com constante cosmológica fica

$$\dot{\rho_\Lambda} + 3H\left(\rho_\Lambda + p_\Lambda\right) = 0, \tag{1.10}$$

sendo $\rho_\Lambda$ constante, de modo que

$$p_\Lambda + \rho_\Lambda = 0, \tag{1.11}$$

Substituindo a equação de estado

$$p = \omega\rho, \tag{1.12}$$

mostrando que $\omega = -1$.

A solução geral, homogênea e isotrópica das equações de campo originais de Einstein foi obtida por Friedmann. As equações de Friedmann descrevem a dinâmica do universo e são obtidas calculando as componentes espaciais e temporais das equações de Einstein, com

$$R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a}\right)\delta^i_j, R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a}, R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a}\right). \tag{1.13}$$

As equações de movimento são

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\widetilde{\rho}, \tag{1.14}$$

e

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\widetilde{\rho}a^2 \tag{1.15}$$

sendo $H$ o parâmetro de Hubble, dado por

$$H\left(t\right) = \frac{\dot{a}\left(t\right)}{a\left(t\right)}, \tag{1.16}$$

onde $a(t)$ é o fator cósmico de escala fornecido pela relação

$$r\left(t\right) = a\left(t\right)r\left(t_0\right), \tag{1.17}$$

em que $t_0$ é o tempo de referência, podendo ser o tempo presente, e $r\left(t_0\right) = r_0$ é a distância no tempo presente.

Substituindo a equação 1.14 em 1.15, obtemos

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\widetilde{\rho} + 3\widetilde{p}\right)a, \tag{1.18}$$

onde a densidade crítica é dada por

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}\left(H^2 - \frac{\Lambda}{3}\right). \tag{1.19}$$

Deste modo, a densidade crítica é menor que a densidade crítica para um universo sem constante cosmológica.

### 1.2.2 Estruturas Causais

A equação de Friedmann em termos das densidades, tal que $\rho = \rho_M + \rho_\Lambda$ é dada por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{M_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \rho_{\Lambda_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3(1+\omega)}\right), \tag{1.20}$$

onde $\rho_M \propto a^{-3}$ e $\rho_\Lambda \propto a^{-3(1+\omega)}$. Multiplicando por $(a^2/a_0^2)$, obtemos

$$\dot{a}(t) = a_0 H_0\left[\rho_{M_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \rho_{\Lambda_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(1+3\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.21}$$

que pode ser rescrita em função dos parâmetros de densidade [34],

$$\dot{a}(t) = a_0 H_0 \left[1 + \Omega_M \left(\frac{1}{a} - 1\right) + \Omega_\Lambda \left(a^2 - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.22}$$

Lembrando que $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$.

Para o universo plano, homogêneo e isotrópico, $ds = 0$,

$$\int_0^{r_0} dr = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a\,(t)}, \tag{1.23}$$

As estruturas causais de um espaço-tempo determinam como os eventos se desenvolvem em relação a causa e efeito. Um conceito importante em Relatividade é a causalidade, ou seja, a noção de que um acontecimento não pode anteceder sua causa. Estes conceitos nos permite descrever regiões causalmente conectadas ou não. As estruturas causais são [34]:

1. Cone de Luz passado

   Cada evento no universo define um cone de luz. A parte interior do cone descrevem linhas de universo do tipo tempo, ou seja, uma região do espaço tempo na qual velocidade da luz é maior que qualquer outro objeto, e os eventos dentro desta região são causalmente relacionados.

   A parte exterior ao cone temos uma região com linhas de universo tipo espaço, na qual a velocidade da luz é menor que de outros objetos, o que viola um dos princípios da relatividade geral, assim, dois eventos nesta região são separados por um intervalo tipo espaço e não têm relação causal.

   A linha delimitadora entre as duas regiões é uma linha de universo tipo luz, onde objetos se movem na velocidade da luz, como por exemplo fótons.

   Para visualizar o cone de luz, escrevemos a equação 1.23 com os limites apropriados,

   $$\chi_{CL}(t_{em}) = c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \tag{1.24}$$

   onde $\chi$ é a coordenada comóvel associada a uma galáxia observada hoje, $t_0$ é o tempo atual e $t_{em}$ é o tempo no qual um sinal luminoso foi emitido.

2. Horizonte de Partículas

   As linhas de universo são o caminho construído por eventos. O horizonte de partículas está relacionado com a observação de linhas de universo. Ele marca o tamanho do nosso universo observável, a distância até o mais distante objeto que poderemos ver em qualquer tempo. Assim, em cada momento, o horizonte de partículas é descrito por uma esfera em torno de um observador, cujo raio é igual a a distância do objeto mais longe que se pode

observar, ou seja, o horizonte de partículas se encontra a uma distância igual ao raio do universo observável.

O horizonte de partículas pode ser construído resolvendo

$$\chi_{HP}(t) = c\int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \tag{1.25}$$

3. Horizonte de Eventos

O horizonte de eventos está relacionado com a observação dos eventos e estabelece uma divisão entre os eventos que são observáveis num momento em algum instante e os que nunca serão observados, por nunca se encontrarem no interior de algum cone de luz passado do observador.

A distância do horizonte de eventos é definida pela distância que os fótons percorreram desde o início do universo durante o tempo de vida do universo e pode ser obtido por

$$\chi_{HE}(t) = c\int_t^{t_{final}} \frac{dt'}{a(t')}, \tag{1.26}$$

4. Esfera de Hubble

A esfera de Hubble é a distância além da qual a velocidade de recessão das galáxias excede a velocidade da luz. Isto não viola a Relatividade porque o movimento não é em qualquer referencial inercial, considerando a expansão do universo. Assim, ela não define um horizonte, pois podemos observar galáxias além deste limite. A equação 1.27 permite a visualização da esfera de Hubble.

$$\chi_{HE}(t) = \frac{c}{\dot{a}\,(t)} \tag{1.27}$$

Podemos agora analisar a distância comóvel $D = r_0\chi$, através do tempo e do tempo conforme $d\tau = \frac{dt}{r(t)}$, como pode ser visto nas Figuras (1.1), (1.2) [34]. Fazendo

$$\frac{dt}{r\,(t)} = \frac{da}{\dot{a}\,(t)\,a\,(t)}, \tag{1.28}$$

assim,

$$D = c\int \frac{da}{H_0 a}\left[1 + \Omega_M\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \Omega_\Lambda\left(a^2 - 1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.29}$$

e

$$t = \int \frac{da}{H_0}\left[1 + \Omega_M\left(\frac{1}{a} - 1\right).+ \Omega_\Lambda\left(a^2 - 1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.30}$$

A distância própria é dada por $D = r\,(t)\,\chi$ e pode ser analisada na Figura (1.3).

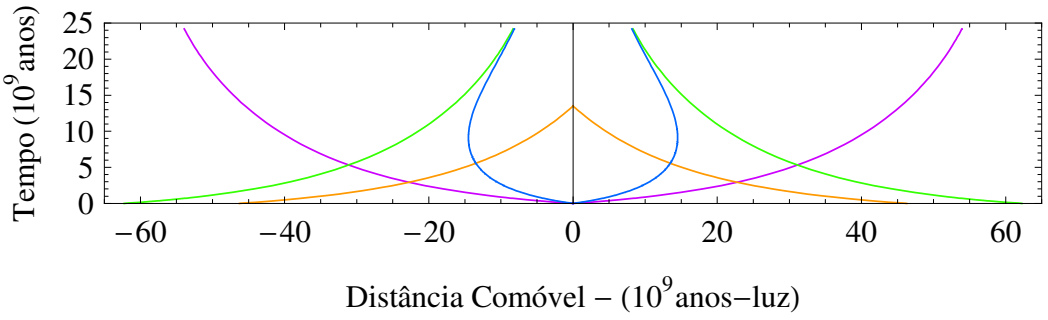



Figura 1.1: Distância comóvel através do tempo, com $c = 3,0.10^5 km/s$, $H_0 = 70 km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

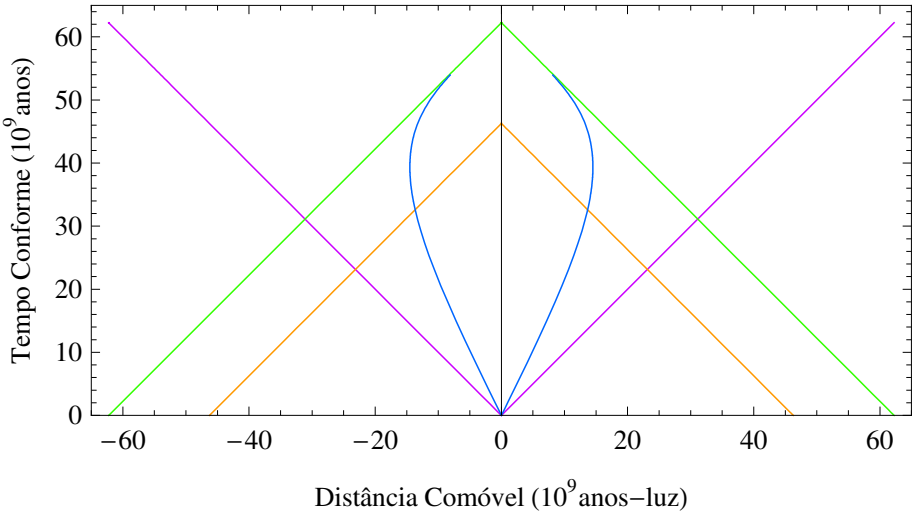



Figura 1.2: Distância comóvel através do tempo conforme, com $c = 3,0.10^5 km/s$, $H_0 = 70 km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

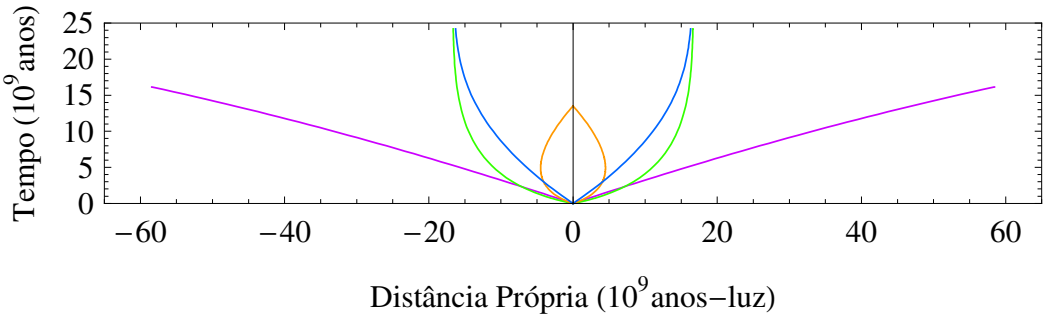



Figura 1.3: Distância própria através do tempo,com $c = 3,0.10^5 km/s$, $H_0 = 70 km.s^{-1}.Mpc^{-1}$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

Vejamos a Figura (1.1), o horizonte de partículas é maior que o horizonte de eventos. Embora não possamos ver do objetos além do horizonte de eventos, podemos ver galáxias além dele pela luz que elas emitiram tempos atrás. Estas galáxias estavam dentro do horizonte de eventos, mas num universo em expansão, hoje elas estão fora, mas estavam dentro do horizonte de eventos quando emitiram luz e por isto podem ser vista. Elas serão vistas para sempre. Se o universo não estivesse em expansão elas nunca sairiam do horizonte de eventos.

Entendemos nos gráficos também porque a esfera da Hubble não é um horizonte. Ela se encontra dentro do horizonte de partículas e por isto objetos localizados dentro da esfera são obrigatoriamente observados, mas regiões fora da esfera também podem ser observados. Localizando dois objetos, um dentro e outro fora da esfera de Hubble, que emitem ao mesmo tempo um sinal luminoso. Como a distância comóvel pode ser escrita como $D = c/H$, e o parâmetro de Hubble, $H = 1/t$, o objeto fora da esfera está a uma distância maior, então deve estar, necessariamente com uma velocidade de recessão maior do que a velocidade da luz.

Todos os sinais observados hoje foram emitidos quando o objeto emissor estava dentro do cone de luz e hoje está obrigatoriamente dentro do horizonte de partículas, caso esteja também dentro do horizonte de eventos seus sinais emitidos hoje serão vistos eventualmente, no entanto, se estiverem fora, os sinais emitidos hoje nunca serão visto, ou seja, os sinais observados desta fonte serão os sinais emitidos até o momento em que saiu do horizonte de eventos e passaremos a observá-los no momento em que este objeto adentrar o horizonte de partículas. Em qualquer instante o cone de luz passado está dentro do horizonte de eventos, para $t$ tendendo ao infinito os dois coincidem.

Pelo formato da curva do cone de luz, vemos que na origem do tempo, todos os pontos no universo estavam causalmente conectados, o que explica a isotropia da radiação cósmica de fundo, provenientes de regiões não conectadas atualmente devido ao período de expansão acelerada. Comparando o formato do cone de luz na Figura 1.3 com o formato na Figura 1.1, vemos que todos os pontos comóveis do universo estavam em um ponto físico somente, o que

explica sua conexão causal.

A Figura 1.2, vemos que no futuro, o horizonte de eventos, cone de luz e esfera de Hubble coincidirão na origem, isto mostra que devido à expansão acelerada, somente eventos ocorridos a distâncias comóveis cada vez menores os atingirão, ou seja, nosso universo observável está diminuindo. Caso a expansão acelerada cesse, poderemos ver eventos emitidos no futuro de objetos cujos eventos não observamos hoje, exatamente como ocorreu no período inflacionário.

Num universo estacionário, não faz sentido a distinção entre as estruturas causais. Se o universo fosse estacionário desde o princípio, todos os eventos ocorridos em qualquer tempo, sempre seriam visto, no entanto, se ele se tornasse estacionário hoje, os horizontes coincidiriam com o cone de luz futuro, pois estariam limitados somente pela velocidade da luz.

### 1.2.3 Problemas com a constante cosmológica

Existem dois principais problemas com a representação de energia escura pela constante cosmológica. Um deles consiste no próprio valor da constante. A teoria quântica de campos prevê $\rho_\Lambda \approx 10^{95} kg/m^3$, para o período inflacionário, no entanto, o valor obtido atualmente é $\rho_\Lambda \approx 10^{-26} kg/m^3$, diferindo em mais de 120 ordens de grandeza.

Outro dificuldade no modelo é entender por que a constante estaria dominando a energia do universo justamente agora, ou seja, porque a densidade de energia da constante cosmológica tem hoje a mesma ordem de grandeza que a densidade de energia da matéria. Este problema é chamado problema da coincidência. Isto requer um enorme ajuste fino para fazer a constante cosmológica dominar a energia do universo justamente agora, visto que, ela não varia no tempo [35].

## 1.3 Quintessência

Podemos substituir a constante cosmológica por um componente dinâmico, com equação de estado diferente de bárions, neutrinos, fótons e matéria escura. Este quinto componente é denominado quintessência, cuja equação de estado é a razão entre pressão e sua densidade de energia [26].

A maioria dos modelos de quintessência mostra que $-1 \leq \omega \leq 0$, mostrando a expansão acelerada do universo. Diferentemente da constante cosmológica, a pressão e densidade de energia evoluem no tempo. Componentes espacialmente homogêneos independentes do tempo são dependentes de gauge, assim, se a quintessência é dependente do tempo, ela é necessariamente, por covariância geral, um componente inomogêneo, com flutuações.

Este novo componente é descrito por um campo fundamental, que pode ser escalar, vetorial ou tensorial, e que interage com a matéria apenas gravitacionalmente.

Os modelos de quintessência construídos com potenciais adequados, mostram coerência com os dados do CMB (Cosmic Microwave Background), ou seja, apresentam mesmo valor da

equação de estado hoje e valor diferente da obtida em qualquer tempo passado. Estes modelos mostram um comportamento atrator, ou seja, as soluções são independentes de condições iniciais, mas dependentes do que acontece no universo, por exemplo, na era dominante pela radiação, o campo de quintessência se manifestava como qualquer outra radiação, mostrando que nem sempre a energia escura foi dominante. Assim, o universo passou de uma fase dominada pela radiação, para um dominada pela matéria e atualmente passa por uma fase dominada pela quintessência. Estas soluções atratoras foram denominadas por Steinhardt de soluções *trackers* [27] e resolvem o problema da coincidência.

Modelos de quintessência minimamente acoplados a gravidade tem ação dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{R - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2V\left(\phi\right)\right\}. \tag{1.31}$$

Para potenciais que diminuem lentamente de um grande valor do campo para um valor próximo de zero, temos um comportamento de inflação.

Com isto, os campos de quintessência são uma possível resposta ao problema da energia escura, explicando a curvatura nula e a expansão acelerada do universo.

Discutiremos detalhadamente estes modelos no próximo capítulo.

## 1.4 *Phantom*

A constante cosmológica corresponde a um fluido com equação de estado constante, $\omega = -1$, entretanto, dados observacionais levam a crer num valor de $\omega$ oscilante no tempo. Modelos de quintessência, em geral, apresentam $\omega \geq -1$, o que restringe as possibilidades mediante as observações.

Modelos tipo *phantom* respondem o outro lado da equação de estado, eles apresentam $\omega < -1$, abrindo uma vantagem em relação a estes modelos de quintessência [36].

*Phantom* são modelos de quintessência com termo de energia cinética não canônico. A energia de *phantom* tem densidade de energia crescente com o tempo, positiva, $\rho_p > 0$, mas pressão negativa, $\rho_p + p_p < 0$, o que nos fornece $\omega < -1$. A ação de um campo tipo *phantom* minimamente acoplado a gravidade é dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2V\left(\phi\right)\right\}. \tag{1.32}$$

onde o sinal do termo de energia cinética é oposto dos modelos de quintessência para um campo comum e este termo negativo viola as condições de energia.

Ao contrário dos modelos de quintessência, os *phantom* evoluem através do máximo do potencial para um valor do campo próximo de zero, levando a um aumento da densidade de energia. Em geral, os potenciais exponenciais são usados nestes modelos, pois fornecem uma equação de estado $\omega < -1$.

Embora *phantom* sejam descritos como campo cosmológico clássico, de modo a resolver o problema de violação das condições de energia, estes campos sofrem instabilidades quânticas ultra violeta. Como o potencial é ilimitado por baixo, o vácuo se torna instável [37, 38].

## 1.5 Gás de Chaplygin

Uma outra forma de explicar a expansão acelerada e a energia escura utilizando um fluido é através do Gás de Chaplygin [39, 40].

O modelo de Gás de Chaplygin foi derivado do modelo generalizado de D-branas, e propõe uma unificação entre matéria e energia escura, e é caracterizado por uma equação de estado dada por

$$p = -\frac{a}{\rho} \tag{1.33}$$

onde $A$ é uma constante positiva. Esta equação de estado leva a um componente que se comporta como partícula no estágios passados do universo e como constante cosmológica no presente, levando a expansão acelerada. Existe também uma situação intermediária, na qual, este componente se manifesta como uma mistura de constante cosmológica e matéria.

Podemos descrever este fluido também como um campo escalar homogêneo dependente do tempo e um potencial adequado, de modo a construir as equações de movimento.

Embora a interessante possibilidade de unificação dos dois conteúdos exóticos no mesmo modelo, o Gás de Chaplygin apresenta problemas em explicar recentes dados observacionais, como o espectro de potência do CMB [35]. Este problema pode, no entanto, ser resolvido no modelo de Gás de Chaplygin generalizado, no qual a equação de estado é fornecida por

$$p = -\frac{a}{\rho^{\alpha}}, \tag{1.34}$$

onde $\alpha$ é um valor muito restrito, $0 < \alpha < 1$, o que também impõe vínculos ao modelo.

# 2 Modelos de Quintessência

Modelos de quintessência são aqueles que descrevem a energia escura como um campo escalar. Um campo escalar é uma função contínua no espaço-tempo, $\phi(x^{\mu})$, que descreve uma partícula de spin nulo [41, 42], cuja densidade de Lagrangiana é dada por

$$L = \int d^3x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}), \tag{2.1}$$

onde $\phi_{,\mu} = \partial_{\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}$. A ação é dada por

$$S = \int Ldt = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}). \tag{2.2}$$

Calculando a variação da ação, $\delta S$, obtemos a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_{,\mu}}\right) = 0. \tag{2.3}$$

Para modelos de quintessência com tensor de Ricci acoplado a gravidade, a ação tem a forma

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{F(\phi)R - \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - 2V(\phi)\right\}. \tag{2.4}$$

onde $V(\phi)$ é o potencial de auto-interação e $F(\phi)$ caracteriza o tipo de acoplamento. Quando $F = 1$, temos um acoplamento mínimo [43].

## 2.1 Equações de movimento

Para obter as equações de movimento aplicamos o princípio de mínima ação, $\delta S = 0$,

$$\int d^4x\left\{\underbrace{\delta\sqrt{-g}\left[F(\phi)R - \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - 2V(\phi)\right]}_{\delta S_1} + \sqrt{-g}\left(\underbrace{F(\phi)\delta R}_{\delta S_2} + \underbrace{\delta F(\phi)R}_{\delta S_3} - \underbrace{\delta\left(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi\right)}_{\delta S_4} - 2\underbrace{\delta(\phi)}_{\delta S_5}\right)\right\}. \tag{2.5}$$

Vamos obter separadamente os termos:

1. $\delta S_1 = \int d^4x\delta\sqrt{-g}\left[F(\phi)R - \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - 2V(\phi)\right]$

   Calculando primeiramente a variação em $\sqrt{-g}$,

   $$\delta\sqrt{-g} = \delta\left(-g^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(-g^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}\delta\left(-g^{-1}\right), \tag{2.6}$$

   lembrando que $g \equiv -detg_{\mu\nu}$ e que para uma matriz $M$, $tr\left(M^{-1}\delta M\right) = \frac{\delta(detM)}{detM}$,

   $$\delta\left(-g^{-1}\right) = -g^{-1}tr\left(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

e,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

este termo fica então

$$\delta S_1 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}RF\left(\phi\right) + \int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + 2V\left(\phi\right)\right), \tag{2.9}$$

mas o tensor de Einstein é dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \tag{2.10}$$

assim,

$$\delta S_1 = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(F\left(\phi\right)G_{\mu\nu} - F\left(\phi\right)R_{\mu\nu}\right) + \int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + 2V\left(\phi\right)\right). \tag{2.11}$$

2. $\delta S_2 = \int d^4x\sqrt{-g}F\left(\phi\right)\delta R$

Usando as equações (1.3) e (1.2), podemos obter as variações do escalar de Ricci e do tensor de Riemann, tal que,

$$\delta R = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

e

$$\delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}, \tag{2.13}$$

E a variação da conexão afim fica,

$$\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\delta g^{\nu\sigma}\left\{\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right\} + \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\delta g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\delta g_{\mu\lambda}\right\}, \tag{2.14}$$

mas $\delta\left(g_{\lambda\rho}g^{\rho\sigma}\right) = 0$, assim,

$$g_{\lambda\rho}\delta g^{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma}\delta g_{\lambda\rho} = 0, \tag{2.15}$$

multiplicando ambos os lados por $g^{\nu\lambda}$,

$$\delta g^{\nu\sigma} = -g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}\delta g_{\lambda\rho}. \tag{2.16}$$

Usando estas considerações na variação da conexão afim,

$$\delta\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}\delta g_{\lambda\rho}\left\{\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right\} + \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\delta g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\delta g_{\mu\lambda}\right\}. \tag{2.17}$$

A variação no tensor de Ricci fica,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

que é chamada de identidade de Palatini,

$$\delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu \left\{g^{\lambda\rho}\nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\lambda}\right\} - \frac{1}{2}\nabla_\lambda \left\{g^{\lambda\rho}\nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left\{\nabla_\nu\nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\nu\nabla_\rho \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\lambda\nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}\right\}. \quad (2.19)$$

Desse modo,

$$\delta S_2 = \int d^4x\sqrt{-g}F(\phi)\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}\left\{\nabla_\nu\nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\nu\nabla_\rho \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\lambda\nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}\right\} +$$

$$+ \int d^4x\sqrt{-g}F(\phi)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Lembrando que $AB\nabla_\omega\nabla_u C = \nabla_\omega(AB\nabla_u C) - (\nabla_u C)(\nabla_\omega AB)$, o primeiro termo da integral fica,

$$\int d^4x\sqrt{-g}F(\phi)g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} = \int d^4x\nabla_\nu\left(\sqrt{-g}F(\phi)g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}\nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho}\right) +$$

$$- \int d^4x\left(\nabla_\nu \delta g_{\lambda\rho}\right)\left(\nabla_\nu\sqrt{-g}F(\phi)g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}\right). \quad (2.21)$$

Integrando sobre todo espaço, do teorema de Gauss,

$$\oint V^\mu\sqrt{-g}dS_\mu = \int \nabla_\mu V^\mu\sqrt{-g}d\Omega, \quad (2.22)$$

vemos que a integral é igual a zero. utilizando a equação (2.16),

$$\delta S_2 = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F(\phi) - g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\nabla_\mu\nabla_\lambda F(\phi)\right) + \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}F(\phi)R_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

3. $\delta S_3 = \int d^4x\sqrt{-g}\delta F(\phi)R$

   A variação em $F$ só depende de $\phi$, assim,

$$\delta S_3 = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial F}{\partial\phi}\delta\phi R. \quad (2.24)$$

4. $\delta S_4 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)$

   Escrevendo em termos de derivada covariante $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$,

$$\delta S_4 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right). \quad (2.25)$$

Calculando cada variação separadamente,

$$\delta S_4 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \int d^4x\sqrt{-g}\left\{g^{\mu\nu}\frac{\partial\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\right)}{\partial_\mu\phi} + g^{\mu\nu}\frac{\partial\left(\partial_\nu\phi\partial_\mu\right)}{\partial_\mu\phi}\right\}\delta\left(\partial_\mu\phi\right), \tag{2.26}$$

assim,

$$\delta S_4 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}2\partial_\nu\phi\delta\left(\partial_\mu\phi\right), \tag{2.27}$$

mas $\delta\left(\partial_\mu\phi\right) = \partial_\mu\left(\delta\phi\right)$ e este termo fica

$$\delta S_4 = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \int d^4x\sqrt{-g}2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\delta\phi. \tag{2.28}$$

5. $\delta S_5 = -\int d^4x\sqrt{-g}2\delta V\left(\phi\right)R$

A variação em $V$ também depende somente de $\phi$, de modo que,

$$\delta S_5 = -\int d^4x\sqrt{-g}2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi. \tag{2.29}$$

Reunindo todos os termos,

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left\{FG_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi + 2V - 2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F\right) - \nabla_\mu\nabla_\nu F - \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right\} +$$

$$+ \int d^4x\sqrt{-g}\delta\phi\left\{\frac{\partial F}{\partial\phi}R + 2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - 2\frac{\partial V}{\partial\phi}\right\} = 0. \tag{2.30}$$

As equações de Einstein obtidas são

$$FG_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi + 2V - 2\Box F\right) + \nabla_\mu\nabla_\nu F. \tag{2.31}$$

E a equação de Klein-Gordon,

$$\Box\phi - V' + \frac{1}{2}F'R = 0, \tag{2.32}$$

onde $V'$ e $F'$ denotam derivada em relação a $\phi$ e $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$.

Considerando um universo isotrópico e espacialmente plano,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(t\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \tag{2.33}$$

os elementos não nulos da conexão afim e do tensor de Ricci são

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{\dot{a}}{a^2}g_{ij}, \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a^2}\delta^i_j, \tag{2.34}$$

$$R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a}\right)\delta^i_j, R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a}. \tag{2.35}$$

O escalar de Ricci e o tensor de Einstein são

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a}\right), \tag{2.36}$$

$$G_{00} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \tag{2.37}$$

$$G_{ij} = -\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a}\right)\delta^i_j, \tag{2.38}$$

onde 0 é o componente temporal e $i, j$ os componentes espaciais.

Podemos agora obter os componentes espaciais e temporais das equações de Einstein. O componente temporal das equações de Einstein obtidas fornece o vínculo de energia,

$$3H\left(FH - F'\phi\right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\left(\phi\right), \tag{2.39}$$

e os componentes espaciais fornecem a equação de Friedmann modificada,

$$-2\left(F + \frac{3}{2}F'^2\right)\dot{H} = 3\left(F + 2F'^2\right)H^2 + \frac{1}{2}\left(1 + F''\right)\dot{\phi}^2 - V - F'\left(V' + H\dot{\phi}\right). \tag{2.40}$$

E a equação de Klein-Gordon pode ser reescrita como

$$\ddot{\phi} + \frac{G\left(\phi, \dot{\phi}, H\right)}{F_1}\dot{\phi} + V'_{eff}\left(\phi\right) = 0, \tag{2.41}$$

onde

$$G\left(\phi, \dot{\phi}, H\right) = 3F_1H + \frac{1}{2}\left(1 + 3F''\right)F'\dot{\phi}, \tag{2.42}$$

$$V'_{eff}\left(\phi\right) = \frac{1}{F_1}\left(FV' - 2F'V\right) \tag{2.43}$$

e

$$F_1\left(\phi\right) = F + \frac{3}{2}\left(F'\left(\phi\right)\right)^2. \tag{2.44}$$

onde $\dot{\phi}$ denota a derivada em relação ao tempo.

## 2.2 Acoplamento mínimo

Modelos de quintessência com tensor de Ricci minimamente acoplado a gravidade são aqueles com $F(\phi) = 1$. Substituindo a equação de Klein-Gordon temos

$$\ddot{\phi} + 3H\phi + V'(\phi) = 0. \tag{2.45}$$

E o tensor de energia-momento, considerando que $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, fica

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + 2V\right). \tag{2.46}$$

A densidade e pressão são obtidas dos componentes temporal e espacial,

$$\rho_\phi = T_0^0 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \tag{2.47}$$

e

$$p_\phi = T_i^i = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \tag{2.48}$$

A equação de estado é dada por

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \tag{2.49}$$

desse modo,

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \tag{2.50}$$

No caso de $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, encontramos $\omega_\phi = -1$, e no caso de $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$, obtemos que $\omega_\phi = 1$, assim, limitamos os valore que $\omega_\phi$ pode ter

$$-1 \leq \omega_\phi \leq 1 \tag{2.51}$$

O grande interesse na obtenção de $\omega$ está no fato que este pode ser determinado experimentalmente. Observações de SNe Ia estabelecem $\omega = -1.02^{+0.13}_{-0.19}$ [43]. Se as observações confirmarem $\omega < -1$, todas as descrições de energia escura com base em constante cosmológica ($\omega = -1$) [30] ou campos minimamente acoplados serão descartadas.

Precisamos então modelar o acoplamento de modo a satisfazer estes vínculos.

## 2.3 Acoplamento não mínimo

Pode-se construir modelos a partir de campos com acoplamento não mínimo [44–55]. Vamos utilizar o acoplamento $F(\phi) = 1 - \xi\phi^2$, $\xi < 0$, considerando um potencial exponencial [43, 56–62], $V(\phi) = Ae^{-\sigma\phi}$.

A partir das equações de movimento, verificamos os pontos fixos para o modelo de acoplamento, onde $\phi = \bar{\phi}$ e $H = \bar{H}$, tal que, utilizando as equações de Friedmann,

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{4\xi}}\right) \tag{2.52}$$

e

$$\bar{H}^2_{\pm} = \frac{V\left(\bar{\phi}_{\pm}\right)}{3F\left(\bar{\phi}_{\pm}\right)} \tag{2.53}$$

A Figura (2.1) mostra o comportamento de $\phi$ e $H$ para algumas condições iniciais,

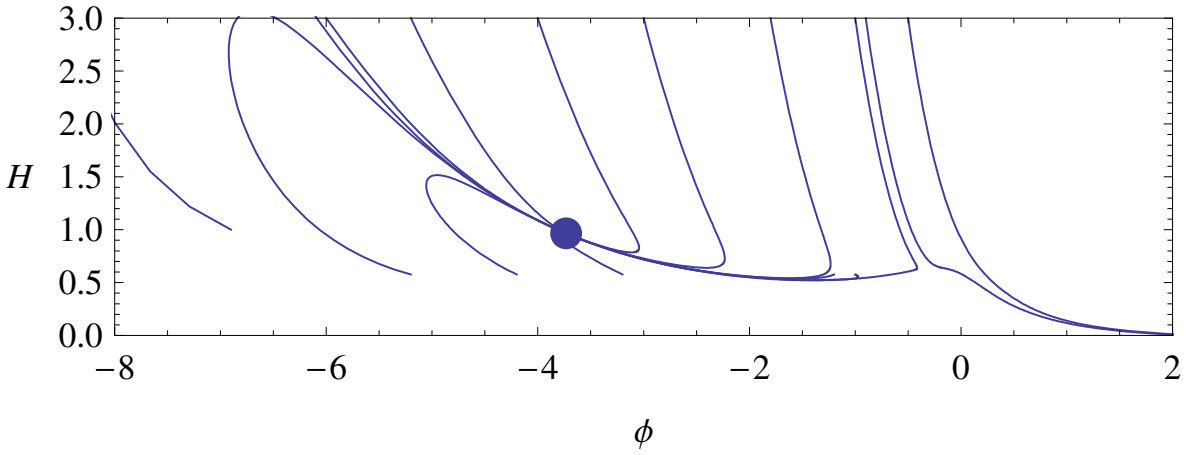



Figura 2.1: Espaço de fase $(\phi, H)$, para o caso $-\xi = A = \sigma = 1$.

Vemos então, que embora o potencial exponencial usado no modelo não possua pontos fixos, o potencial efetivo apresenta, sendo $\bar{\phi}_{-}$ seu valor mínimo, ou seja, o ponto atrator. Este comportamento atrator indica a independência de condições iniciais, mostrando que este modelo de quintessência é um bom modelo. Para soluções $\phi > \bar{\phi}_{+}$, as soluções se afastam, como pode ser visto na Figura (2.2).

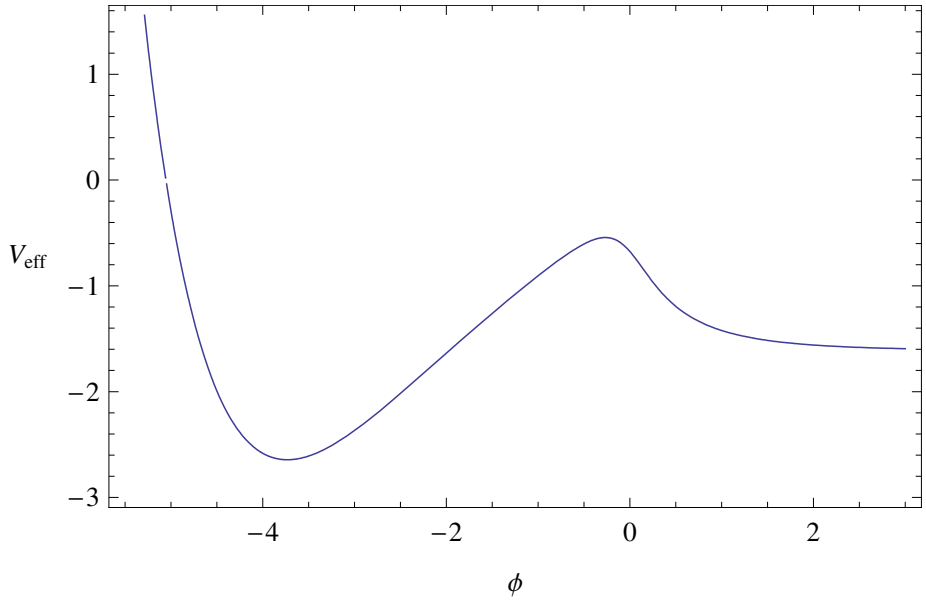



Figura 2.2: Potencial Efetivo em função do campo, para o caso $-\xi = A = \sigma = 1$.

Assumindo $G_{ab} = T_{ab}$, encontramos a densidade e pressão,

$$p_\phi = -2\dot{H} - 3H^2, \tag{2.54}$$

e

$$\rho_\phi = 3H^2. \tag{2.55}$$

A equação de estado fica

$$\omega = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \tag{2.56}$$

que está de acordo para uma expansão acelerada quando $H > 0$. A Figura 2.3 mostra as curvas de $\omega\,(t)$ para algumas soluções apresentadas da Figura 2.1.

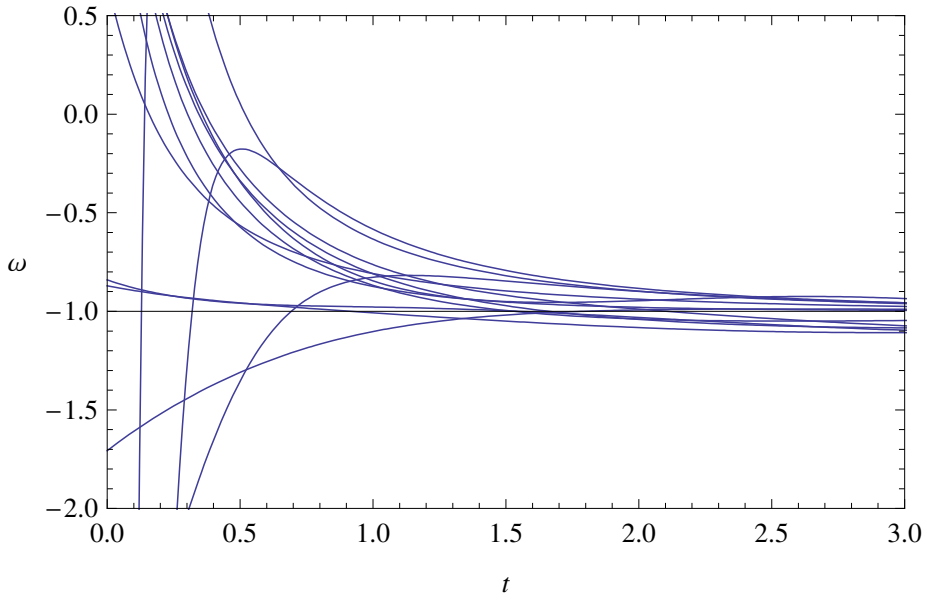



Figura 2.3: Parâmetro $\omega$ no tempo, para algumas soluções apresentadas no espaço de fase.

Vemos que com este modelo de quintessência de acoplamento não mínimo, algumas soluções se aproximam de $\omega = -1$ por baixo, ou seja, $\omega < -1$, mostrando compatibilidade com os dados experimentais.

# 3 Distribuição de Massa na vizinhança de um buraco negro

Num buraco negro, a força gravitacional é tão intensa que qualquer forma de matéria ou radiação que estiver próxima será atraída para seu interior. Na região do horizonte de eventos de um buraco negro, a variação da massa conta com dois fatores, a quantidade de matéria e energia presente na fronteira que será absorvida e a evaporação por radiação Hawking. Esta acreção de matéria já tinha sido estudada supondo matéria ordinária, fluido perfeito e campo escalar [63,64], entretanto, até a descoberta da expansão acelerada do universo, não havia conexão entre acreção destes componentes e energia escura. Vamos estender os processos de acreção e evaporação de matéria, utilizando fluido perfeito e campo escalar.

## 3.1 Acreção e evaporação de matéria

### Modelo de Acreção de Bondi

Vamos admitir um buraco negro de massa $M$, sem rotação e em repouso numa nuvem infinita de gás, ou seja, vamos supor um buraco negro de Schwarzschild. Supondo que no infinito o gás está em repouso, caracterizado por uma densidade uniforme $\rho_\infty$ e uma pressão $p_\infty$. Consideramos também que o gás é adiabático, de modo que

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma, \tag{3.1}$$

sendo $\gamma$ o índice adiabático do gás com valor $1 < \gamma < 5/3$ [1].

A equação de conservação do fluxo de energia é dada por

$$T^\mu_{0;\nu} = 0, \tag{3.2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u^\mu\right) = 0, \tag{3.3}$$

onde $u^\mu$ é a velocidade. Se considerarmos que o fluxo de partículas é esfericamente simétrico e constante no tempo, em notação vetorial temos,

$$\nabla.\left(\rho u^\mu\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr^2}\left(r^2 \rho u\right) = 0, \tag{3.4}$$

sendo $u$ a componente radial da velocidade.

Integrando a equação (3.4), encontramos um valor constante,

$$r^2 \rho u = K, \tag{3.5}$$

com unidades $Kg/s$, o que pode ser interpretado como uma taxa de acreção. Vamos escrever $K$ convenientemente como $dM/4\pi dt$

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho u, \tag{3.6}$$

mas $T_0^r = \rho u^r$, assim,

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 T_0^r. \tag{3.7}$$

## Termo de Acreção

Vamos considerar que no horizonte de eventos, $r = 2M$, todo fluxo de energia será absorvido, assim a taxa de massa esfericamente simétrica acrescida pode ser dada por

$$\dot{M} = \oint_{r=2M} d\Omega r^2 T_0^r = 4\pi r^2 T_0^r, \tag{3.8}$$

onde $T_0^r$ é o componente espaço-temporal do tensor de energia-momento, que representa o fluxo de energia absorvido pela área total do horizonte, $4\pi r^2$.

## Termo de Evaporação

Ao considerar a distribuição de massa de um buraco negro primordial, temos que levar em consideração não somente a quantidade de matéria absorvida, mas também o decréscimo de massa via radiação Hawking.

Em teoria quântica de campos, o vácuo não é completamente vazio. Numa dada região do espaço, não se pode fixar todos os campos em zero, pois isto viola o princípio da incerteza. Deve existir sempre um mínimo de incerteza e esta manifesta-se sob a forma de pequenas flutuações no vácuo. Assim, o vácuo possui pares virtuais de partículas e antipartículas que se criam e se aniquilam, com tempo de vida determinado pelo princípio da incerteza. Estes pares são ditos virtuais pois não podem ser determinados diretamente.

O conceito de energia está relacionado com a equação de Planck, $E = \nu h$, onde $\nu$ é a frequência e $h$ é a constante de Planck. Na teoria quântica, frequência positiva representa partícula e frequência negativa representa antipartículas.

Quando um par virtual é criado no vácuo, a energia total é zero, no entanto, uma partícula tem energia positiva e a outra tem energia negativa. Embora isto seja proibido pela física clássica, enquanto o par virtual se aniquilar em tempo inferior a $h/E$, o princípio da incerteza não será violado e estas flutuações serão permitidas. Supondo que antes desse tempo, uma partícula de energia negativa cruza o horizonte de eventos, o buraco negro pode absorver a partícula e a outra de energia positiva fica livre pra escapar no espaço [65].

A relatividade não faz distinção entre massa e energia, assim, o efeito no buraco negro é que sua massa pode diminuir uma quantidade igual a energia carregada pela partícula que escapou para o infinito. Este processo funciona apenas neste sentido, o buraco negro pode perder energia, mas não pode ganhar por flutuações do vácuo, pois uma partícula de energia negativa não pode existir fora do horizonte por um tempo superior a $h/E$ [66].

Este processo de diminuição da massa por radiação Hawking é chamado de evaporação e é dada por

$$\dot{M} = -\frac{\alpha}{M^2}, \tag{3.9}$$

onde $\alpha$ é uma constante característica, que conta os graus de liberdade da partícula na evaporação. O valor de $\alpha$ depende do modelo e é dado por,

$$\alpha = \frac{1}{\Gamma - 1}, \tag{3.10}$$

onde $\Gamma$ também é uma constante dependente de modelo [67]. Integrando a equação (3.9), temos a massa evaporada

$$M = \left(M_0^3 - 3\alpha\left(t - t_0\right)\right)^{1/3}, \tag{3.11}$$

o que nos dá o tempo de evaporação

$$\tau = \frac{M_0^3}{3\alpha}. \tag{3.12}$$

Para buracos negros formados a temperaturas muito menores que a temperatura de Planck este efeito pode ser ignorado. O cálculo da radiação de Hawking assume que não existe recuo, ou seja, a massa foi admitida constante. Quando $dM/dt \ll M$ isto é uma boa aproximação, entretanto, esta consideração falha no estágio final da evaporação.

A radiação emitida pelo buraco negro é radiação de corpo negro, ou seja, tipo térmica e transporta apenas informação sobre massa, carga e momento angular, o demais é perdido. No entanto, a mecânica quântica não permite estes processos de perda de informação. Atualmente acredita-se que radiação Hawking não é perfeitamente térmica, mas os detalhes microscópicos do processo de evaporação ainda não são bem definidos.

## 3.2 Buracos Negros permeados por um fluido perfeito

Vamos considerar um fluido perfeito na vizinhança de um buraco negro, admitindo uma acreção estacionária e esfericamente simétrica por um buraco negro de Schwarzschild, com métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sen^2 d\varphi^2\right), \tag{3.13}$$

sendo $M$ a massa do buraco negro, $r$, a coordenada radial, $\theta$ e $\varphi$ as coordenadas angulares.

Modelando a energia escura como um fluido perfeito com tensor de energia-momento dado por

$$T^{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho)\, u_\mu u_\nu, \tag{3.14}$$

onde $p$ é a pressão, $\rho$ é a densidade e $u_\mu$ é o componente radial da 4-velocidade, sendo $u^1 = \frac{dr}{ds}$ e $u_0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{ds}$.

Precisamos encontrar $p$ e $\rho$, para isto vamos encontrar as equações de movimento. A primeira é tirada da lei de conservação de energia

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0, \tag{3.15}$$

para simetria esférica [68],

$$\frac{d}{dr}\left(T^r_0\sqrt{-g}\right) = \frac{d}{dr}\left(\sqrt{-g}\left(pg_{0r} + (p+\rho)\,u_0 u_r\right)\right) = 0. \tag{3.16}$$

Integrando, a equação de movimento fica

$$(p+\rho)u_0 u^r\sqrt{-g} = C_1 \tag{3.17}$$

ou

$$(p+\rho)(1 - \frac{2}{x} + u^2)^{\frac{1}{2}}x^2 u = C_1, \tag{3.18}$$

sendo $x = r/M$ [10] e $u = u^r/c$.

Outra equação de movimento pode ser obtida de $u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$,

$$u^\nu\partial_\nu\rho + (p+\rho)\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}u^\lambda\right) = 0. \tag{3.19}$$

que pode ser expressa como

$$\frac{1}{u\sqrt{-g}}\frac{\partial_r}{\partial r}\left(u\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{(p+\rho)}\frac{\partial\rho}{\partial r}. \tag{3.20}$$

Para um fluido perfeito, podemos escrever a pressão como função de densidade, $p = p\,(\rho)$, com isto, introduzimos uma função $n = u\sqrt{-g}$. Integrando a equação (3.20),

$$\frac{d\rho}{p+\rho} = \frac{dn}{n} \tag{3.21}$$

$n$ é idêntico à concentração de partículas para um gás atômico, mas que também pode descrever um contínuo sem introduzir nenhuma partícula. Para um fluido que vem do infinito e é absorvido no horizonte de eventos,

$$\frac{n\,(\rho)}{n_\infty} = exp\left(\int_{\rho_\infty}^{\rho}\frac{d\rho'}{p(\rho') + \rho'}\right), \tag{3.22}$$

substituindo na equação de movimento,

$$\frac{n\,(\rho)}{n_\infty}x^2 u = -A, \tag{3.23}$$

onde $n_\infty$ é a concentração de energia escura no infinito e a constante adimensional $A > 0$. Combinando as duas equações de movimento,

$$(p+\rho)(1-\frac{2}{x}+u^2)^{\frac{1}{2}} exp\left(\int_{\rho_\infty}^{\rho}\frac{d\rho'}{p(\rho')+\rho'}\right) = -\frac{C_1}{A} = C_2, \tag{3.24}$$

para

$$C_2 = \rho_\infty + p(\rho_\infty). \tag{3.25}$$

A taxa de variação da massa do buraco negro fica

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 T_0^r = 4\pi A M^2(\rho_\infty + p(\rho_\infty)). \tag{3.26}$$

Para um fluido descrito como campo tipo *phantom*, $\rho + p < 0$, a lagrangeana [36],

$$L_{ph} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{3.27}$$

possui termo de energia cinética negativa,

$$T_{or} = -\partial_0\phi\partial_r\phi, \tag{3.28}$$

assim, temos uma diminuição da massa do buraco negro.

## 3.3 Buracos Negros permeados por um campo escalar

Na vizinhança de um buraco negro, um campo cosmológico escalar gera um campo gravitacional muito mais fraco que o buraco negro, neste caso, podemos utilizar nesta região a métrica de Schwazschild, mas precisamos relacionar este campo escalar trazido do infinito com o campo absorvido pelo buraco negro na região do seu horizonte [69].

Utilizando a métrica de Schwazschild, a equação de Klein Gordon para um campo escalar, na região do horizonte de eventos tem a forma

$$\Box\phi = -\frac{\ddot{\phi}}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\phi'\right)' = \frac{\partial V}{\partial\phi}, \tag{3.29}$$

para ondas livres, ou seja, $V = 0$,

$$\phi = e^{-i\omega t}R(r). \tag{3.30}$$

Substituindo em (3.29), utilizando a coordenada Kruskal, $r* = r + 2M\log\left(\frac{r}{2M}-1\right)$, temos

$$\frac{d^2R}{dr*^2} + \frac{2}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dR}{dr*} + \omega^2 R = 0. \tag{3.31}$$

Vemos então, que para longe a solução é

$$\phi = \frac{e^{-i\omega(t\pm r)}}{r}, \tag{3.32}$$

e perto do horizonte, ela se torna

$$\phi = \frac{e^{-i\omega(t\pm r*)}}{r*}. \tag{3.33}$$

Vamos usar a coordenada $v = t + r*$, de modo que (3.29) pode ser escrita como,

$$2\partial_r\partial_v\phi + \frac{2}{r}\partial_v\phi + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\partial_r\phi\right) = V'(\phi). \tag{3.34}$$

Construindo o campo, $\phi = f(v) + g(r)$, onde $f = Bv + D$, para um potencial, $V = -\mu\phi$, encontramos que

$$\partial_r g = \frac{-\mu r^2}{3(r-2M)} - \frac{Br}{r-2M} + \frac{C}{r(r-2M)}. \tag{3.35}$$

Para a solução ser regular no horizonte, $C = 4M^2\left(B + \frac{2\mu M}{3}\right)$, e $g$ fica,

$$g = -Br - \frac{2M\mu r}{3} - \frac{\mu r^2}{6} - 2BM\log(r) - \frac{4}{3}M^2\mu\log(r) + F. \tag{3.36}$$

Incorporando F em D,

$$\phi = B\left[v - r - 2M\log(r)\right] - \frac{\mu}{3}\left(\frac{r^2}{2} + 2Mr + 4M^2\log(r)\right) + D. \tag{3.37}$$

A solução geral é a superposição da solução de ondas livres e esta solução.

Utilizando a expansão de Taylor, vamos impor a condição de contorno,

$$\phi(t,\infty) = \phi_\infty + \dot{\phi}_\infty t, \tag{3.38}$$

onde $\phi_\infty$ se refere ao campo cosmológico. Fixando os valores de B e D,

$$\phi = \phi_\infty + \dot{\phi}_\infty\left[v - r - 2M\log\frac{r}{2M}\right] - \frac{\mu}{3}\left(\frac{r^2}{2} + 2Mr + 4M^2\log\frac{r}{2M}\right). \tag{3.39}$$

Temos, assintoticamente

$$\phi(t,\infty) = \phi_0 + \dot{\phi}_0 t - \frac{\mu r_\infty^2}{6}, \tag{3.40}$$

onde

$$\dot{\phi}_\infty = \dot{\phi}_0 \tag{3.41}$$

e

$$\phi_\infty = \phi_0 - \frac{\mu r_\infty^2}{6}. \tag{3.42}$$

Com isto, vemos que a diferença é apenas um atraso, ou seja, o campo incorporado pelo buraco negro é o mesmo campo no infinito, no entanto, atrasado.

## 3.4 Acreção de massa por campo escalar minimamente acoplado

Para um campo escalar minimamente acoplado, utilizando a aproximação feita na equação (3.38) e o tensor de energia momento dado pela equação (2.46), podemos calcular o componente $T_0^r$, que nos dá o termo de acreção de massa pelo buraco negro

$$\frac{dM}{dt} = 16\pi M^2 \dot{\phi}_\infty^2. \tag{3.43}$$

### 3.4.1 Acreção do campo

Considerando um potencial exponencial qualquer, $V = V_0 e^{-\lambda\phi}$, resolvendo a equação de Klein-Gordon dada pela equação (2.45), temos [4]

$$\phi = \frac{2}{\lambda\sqrt{8\pi}} \log \frac{t}{t_0}, \tag{3.44}$$

Calculando a derivada e substituindo em (3.43), o termo de acreção, fica

$$\dot{M} = k\frac{M^2}{t^2}, \tag{3.45}$$

onde $k = \frac{8}{\lambda^2}$. Resolvendo a equação diferencial, a massa acrescida é

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + k\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0}\right). \tag{3.46}$$

Para um buraco negro com massa menor que a massa crítica, $M_{crit} = t/k$, a massa assintótica é dada por

$$M_\infty = \frac{M_0}{1 - k\frac{M_0}{t_0}}. \tag{3.47}$$

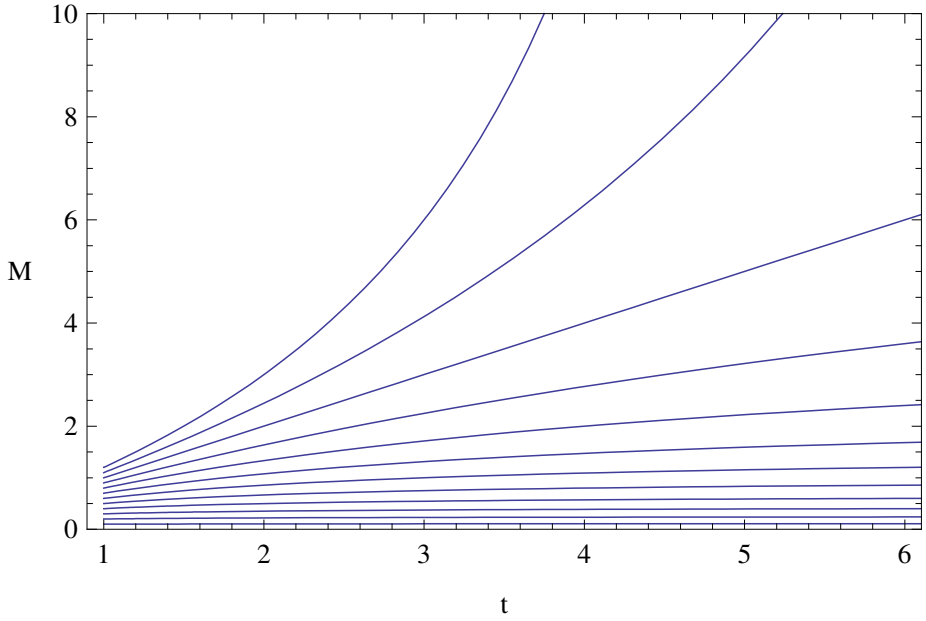



Figura 3.1: Evolução de um buraco negro ignorando a evaporação, para alguns valores de massa inicial.

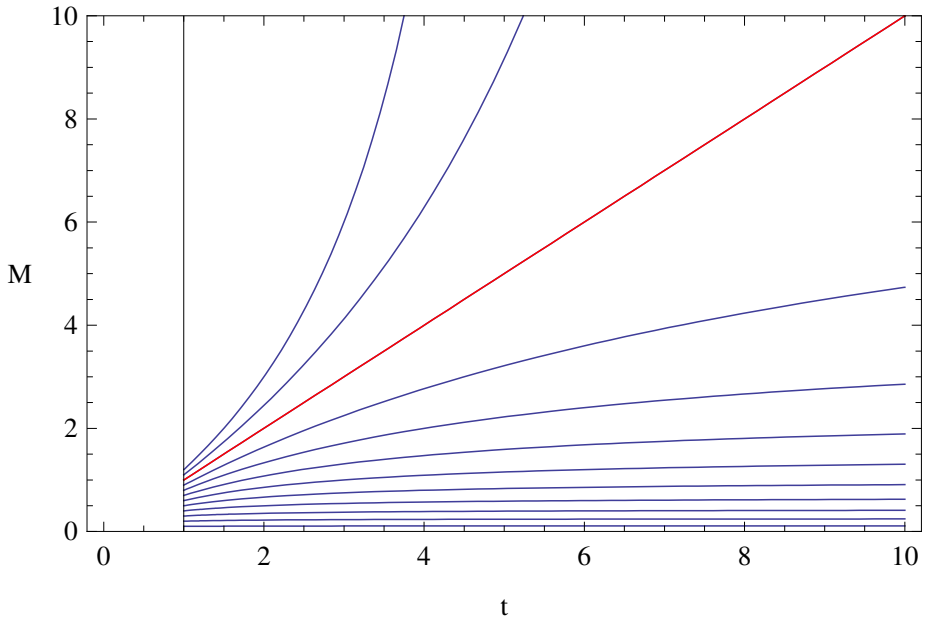



Figura 3.2: Evolução da massa de um buraco negro em relação a massa crítica, com os mesmos valores de massa inicial utilizado no caso sem evaporação.

A Figura (3.1) mostra a evolução de um buraco negro para alguns valores de massa

inicial. Na Figura (3.2), vemos o comportamento limitado pela massa crítica, descrito pela linha vermelha, para as mesmas condições iniciais. Para $M = M_{crit}$, eles crescem com $t$; e para valores maiores de $M$, eles crescem mais rápidos que $t$.

### 3.4.2 Taxa de variação total da massa

A taxa de variação de massa de um buraco negro considerando o termo de acreção e evaporação é

$$\dot{M} = k\frac{M^2}{t^2} - \frac{\alpha}{M^2}, \tag{3.48}$$

e pode ser visualizada na Figura (3.3), com as mesmas condições iniciais.

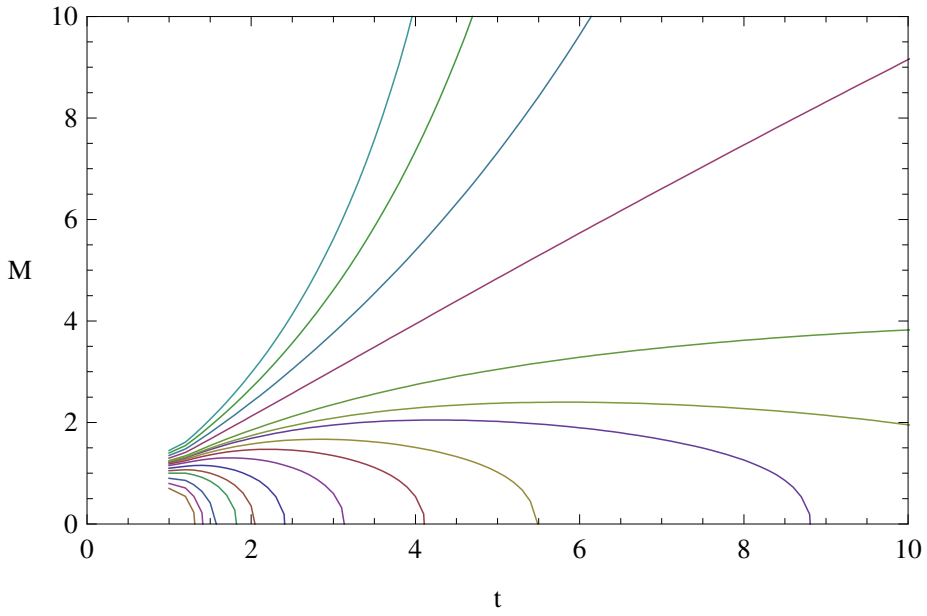



Figura 3.3: Evolução de um buraco negro com evaporação de matéria, para $\alpha = k = 1$, com as mesmas condições iniciais.

Fazendo $\dot{M} = 0$, podemos traçar uma linha crítica,

$$M_{cr} = \sqrt{t} \tag{3.49}$$

A linha crítica delimita uma região em os buracos negros crescem ou decrescem sua massa. Ela não indica, no entanto se este comportamento durará para sempre na evolução deste buraco negro. Para uma determinada condição inicial de massa, sua curva de evolução temporal pode cruzar em algum ponto a curva da linha crítica, decrescendo sua massa, no entanto, em um tempo futuro, ela pode voltar a cruzar a linha crítica e voltar a crescer. Entretanto, se ela cruzar

a curva da massa crítica, indicando diminuição da massa, este comportamento é definitivo, ou seja, este buraco negro não voltará a aumentar sua massa por acreção de campo.

Na Figura (3.4), vemos que abaixo de linha crítica, descrita pela linha vermelha, $\dot{M} < 0$, ou seja, o termo de evaporação se sobrepõe e todos os buracos negros evaporam completamente; e acima da linha crítica, $\dot{M} > 0$, o termo de acreção se sobrepõe e todos crescem indefinidamente.

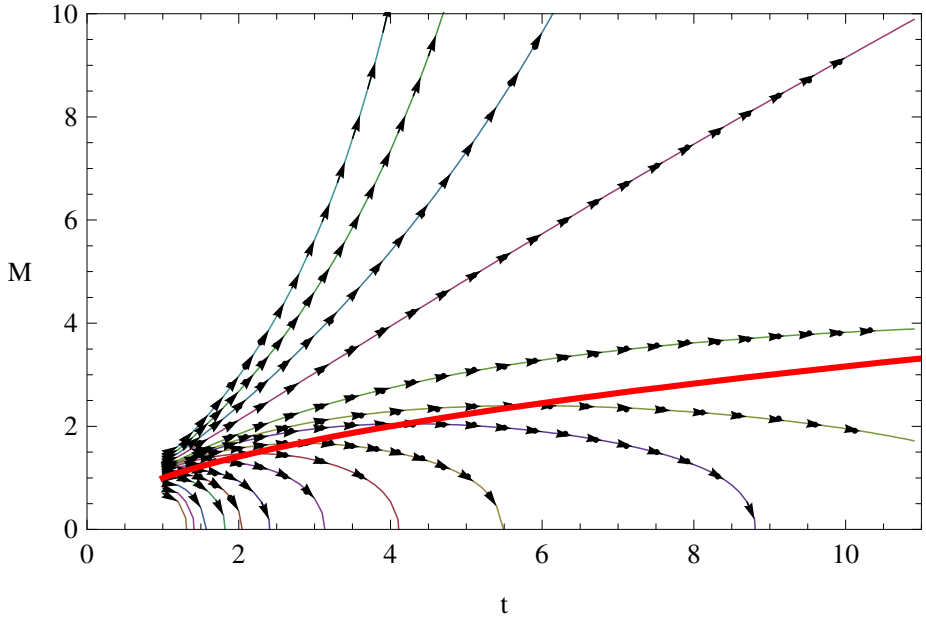



Figura 3.4: Evolução de um buraco negro em relação a linha crítica, com as mesmas condições iniciais.

# 4 Acreção de massa por campo escalar não minimamente acoplado

## 4.1 O campo na região do horizonte de eventos

O procedimento padrão do processo estacionário de acreção de Bondi para este tipo de problema consiste em considerar soluções tais que,

$$lim_{r\to\infty}\phi\left(r,t\right)=\phi_c\left(t\right), \tag{4.1}$$

onde $\phi_c$ corresponde a uma solução homogênea e isotrópica do campo cosmológico. Nossa aproximação requer que a energia contida no campo escalar deve ser pequena na região do buraco negro.

Em termos das coordenadas de Eddington-Finkelstein, $(v,r)$, com $v=(t+r_*)$, onde $r_*$ é a coordenada tartaruga, dada por

$$r_*=r+2M\log\left(\frac{r}{2M}-1\right). \tag{4.2}$$

A solução de $\phi$ corresponde a uma configuração estacionária,

$$\phi\left(v,r\right)=\beta+\gamma\left[v-r+2M\log\left(\frac{2M}{r}\right)\right], \tag{4.3}$$

onde $\beta$ e $\gamma$ são constantes.

Não esperamos que para este modelo de acoplamento exista este tipo de solução estacionária. Em geral soluções estacionárias são obtidas apenas para ações invariantes pela transformação

$$\phi\rightarrow\phi+\lambda. \tag{4.4}$$

Entretanto, podemos considerar uma solução quase-estacionária, na qual, para uma variação lenta do campo, na vizinhança de um buraco negro,

$$\phi\left(r,t\right)\approx\phi_c\left[v-r+2M\log\left(\frac{2M}{r}\right)\right]. \tag{4.5}$$

A veracidade desta consideração se dá, substituindo e verificando a aproximação na equação de Klein-Gordon dada pela equação (3.29)

$$\left(1+\frac{2M}{r}+\left(\frac{2M}{r}\right)^2+\left(\frac{2M}{r}\right)^3\right)\ddot{\phi}_c+V'\left(\phi_c\right)=0. \tag{4.6}$$

Para $r \to \infty$, ou seja, no infinito, nossa aproximação é válida quando

$$\ddot{\phi}_c \approx 0 \tag{4.7}$$

e

$$V'(\phi_c) \approx 0. \tag{4.8}$$

A equação (4.7) não é muito restritiva, nada mais é que uma condição de *slow-roll* [70, 71]. *Slow-roll* significa uma rolagem lenta do campo ao longo do potencial, na direção do valor mínimo de $\phi$. É durante esta situação que ocorre o período inflacionário. Vemos então, que na equação (2.45),

$$\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi} \ll H^2\phi, \tag{4.9}$$

ou seja, o termo $\ddot{\phi}$ é desprezável.

Um sistema de equações só gera soluções inflacionárias quando a densidade de energia potencial domina sobre a densidade de energia cinética. Da equação de estado (2.50) temos a primeira condição de *slow-roll* [72],

$$V(\phi) \gg \dot{\phi}^2. \tag{4.10}$$

Para garantir as soluções inflacionárias,

$$\frac{\ddot{a}}{a} \gg 0, \tag{4.11}$$

ou seja,

$$-\dot{H} \ll H^2. \tag{4.12}$$

Estas condições ainda não justificam a consideração sobre a derivada do potencial.

Vamos aplicar as condições no caso de acoplamento não mínimo. A equação de Klein-Gordon (2.41) fica

$$\ddot{\phi} = -\frac{\dot{\phi}}{F_1}\left(3F_1H + \frac{1}{2}\left(1 + 3F''\right)F'\dot{\phi}\right) - V'_{eff} \approx 0, \tag{4.13}$$

o termo cinético morre, e

$$-V'_{eff} \approx 3H\dot{\phi}. \tag{4.14}$$

No caso de acoplamento mínimo:

$$-V' \approx 3H\dot{\phi}. \tag{4.15}$$

As equações para acoplamento mínimo e não mínimo têm o mesmo comportamento. Se fizermos $F = 1$, a equação (4.14) recai em (4.15). Então se aplicarmos a condição $V'_{eff} \ll 1$, ela acontecerá da mesma forma para os dois modelos. Como $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi} \ll H^2\phi$ é aproximado para zero, $H\dot{\phi} \ll H^2\phi$ também pode ser, permitindo que eu possa impor a condição $V' \approx 0$.

Nosso formalismo é baseado então na condição quasi-estacionária, requerendo $\ddot{\phi}_c \approx 0$ e para o caso de condição não estacionária pode ser visto em [73].

A equação (4.5) nos mostra que o campo no horizonte de eventos tem o valor do campo cosmológico no infinito, mas que chega com certo atraso, assim,

$$\phi_c(t) \approx \phi_\infty + \dot{\phi}_\infty(t), \tag{4.16}$$

tal que $\phi_\infty$ e $\dot{\phi}_\infty(t)$ são constantes.

## 4.2 A evolução de massa

Considerando que para um campo escalar $T_{ab} = G_{ab}$,

$$T_0^r = \frac{2M}{r^2}\left[2M\left(1+F''\right)\dot{\phi}_c^2 + F'\left(2M\ddot{\phi}_c - \frac{1}{2}\dot{\phi}_c\right)\right]. \tag{4.17}$$

A distribuição de massa fica [74]

$$\dot{M} = 16\pi M^2\left[\left(1+F''\right)\dot{\phi}_\infty^2 - F'\left(\frac{1}{4M}\dot{\phi}_\infty\right)\right]. \tag{4.18}$$

Para uma função qualquer de acoplamento, podemos definir a evolução da massa como [74]

$$\dot{M} = f(t)M^2 - g(t)M - \frac{\alpha}{M^2}, \tag{4.19}$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções suaves. Primeiramente vamos considerar apenas a acreção de matéria, ou seja, $\alpha = 0$.

Resolvendo a equação diferencial de $M(t)$,

$$M(t) = \frac{M_0 e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds}}{1 - M_0\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s_0}^{s} g(s)ds} f(s)\,ds}, \tag{4.20}$$

onde $M(t_0) = M_0$. A massa pode ser escrita como

$$M(t) = \frac{M_0 G(t)}{1 - M_0 H(t)}, \tag{4.21}$$

com

$$G(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)ds} \tag{4.22}$$

e

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,G(s)\,ds. \tag{4.23}$$

Analisando a equação (4.21), vemos que se o denominador é diferente de zero, a massa diminui de acordo com a equação (4.22), para valores positivos de $g(t)$. Quando o denominador

é igual a zero, temos o crescimento da massa. Para valores positivos de $f(t)$, a função $H(t)$ crescerá monotonicamente, limitada por

$$H_\infty = \lim_{t\to\infty} H(t), \tag{4.24}$$

levando a um valor crítico da massa,

$$1 - M_{cr} H(t \to \infty) = 0. \tag{4.25}$$

Assim

$$M_{cr} = H_\infty^{-1}, \tag{4.26}$$

Vemos então que qualquer buraco negro com massa inicial $M_0$, tal que $M_0 < M_{cr}$, irá evaporar completamente mesmo com a acreção de campo escalar, e sem o termo de evaporação por radiação Hawking, e este processo será lento, pois a perda de massa tem comportamento assintótico.

Por outro lado, aqueles buracos negros com massa inicial tal que, $M_0 > M_{cr}$ crescerão muito rapidamente com a acreção do campo escalar. Na equação (4.21), o denominador desaparece para $t = t_{cr}$, com $H(t_{cr}) = M_0^{-1}$, mostrando que o buraco negro cresce indefinidamente num tempo muito curto.

Voltando o termo devido a evaporação, a massa crítica pode ser obtida resolvendo a equação da massa, tal que

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{f(t) M^2 - g(t) M - \frac{\alpha}{M^2}} = \int_{t_0}^{t} dt. \tag{4.27}$$

Vamos analisar detalhadamente o comportamento da massa para alguns tipos de acoplamentos não mínimos. Os acoplamentos não mínimos escolhidos obedecem ao critério de acrescentar o mínimo de parâmetros adicionais ao modelo. A partir do acoplamento mínimo, que corresponde à função de acoplamento igual a uma constante, é natural escolher termos de aproximação via expansão em polinômios com constantes pequenas, por exemplo. Essa abordagem garante a redutibilidade ao caso de acoplamento mínimo ao mesmo tempo que adiciona pouca complexidade ao modelo. Também deve-se considerar que em nenhum momento supõe-se que tais acoplamentos não mínimos advêm de primeiros princípios, pelo contrário, a abordagem realizada é estritamente fenomenológica e portanto a utilizaï¿½ï¿½o da expansão em potências não só é útil como correta.

Apesar das restrições impostas pelas observações em escala do sistema solar, a relatividade geral está em excelente concordância com estes observações, consequentemente, todo modelo que visa explicar a expansão acelerada do universo reproduz a relatividade geral na escala do sistema solar [75], de modo que o modelo com constante cosmológica, ΛCDM, e todos os modelos de quintessência com os diversos tipos de acoplamentos são válidos e não interferem em escala planetária.

### 4.2.1 Acoplamento linear - $F(\phi) = 1 + \xi\phi$

Neste acoplamento linear, as funções $f(t)$ e $g(t)$ ficam

$$f(t) = 16\pi(1 + F'')\dot{\phi}_c^2 = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 \tag{4.28}$$

e

$$g(t) = 4\pi F'\dot{\phi}_c = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty. \tag{4.29}$$

Considerando primeiramente somente a acreção, ou seja, $\alpha = 0$, as funções $G(t)$ e $H(t)$ são neste caso

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t} \tag{4.30}$$

e

$$H(t) = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}(1 - G(t)). \tag{4.31}$$

Para valor positivo de $\dot{\phi}_\infty$

$$M_{cr} = \frac{\xi}{4}\dot{\phi}_\infty^{-1}. \tag{4.32}$$

Podemos encontrar o tempo crítico

$$H(t_{cr}) = \frac{1}{M_0} = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1 - e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t}\right), \tag{4.33}$$

escrita em termos da massa crítica,

$$\frac{1}{M_0} = \frac{1}{M_{cr}}\left(1 - e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t}\right), \tag{4.34}$$

de modo que,

$$t_{cr} = \frac{1}{4\pi\xi\dot{\phi}_\infty}\log\frac{M_0}{M_0 - M_{cr}}. \tag{4.35}$$

A Figura (4.1) mostra o comportamento da distribuição de massa, para alguns valores de massa inicial

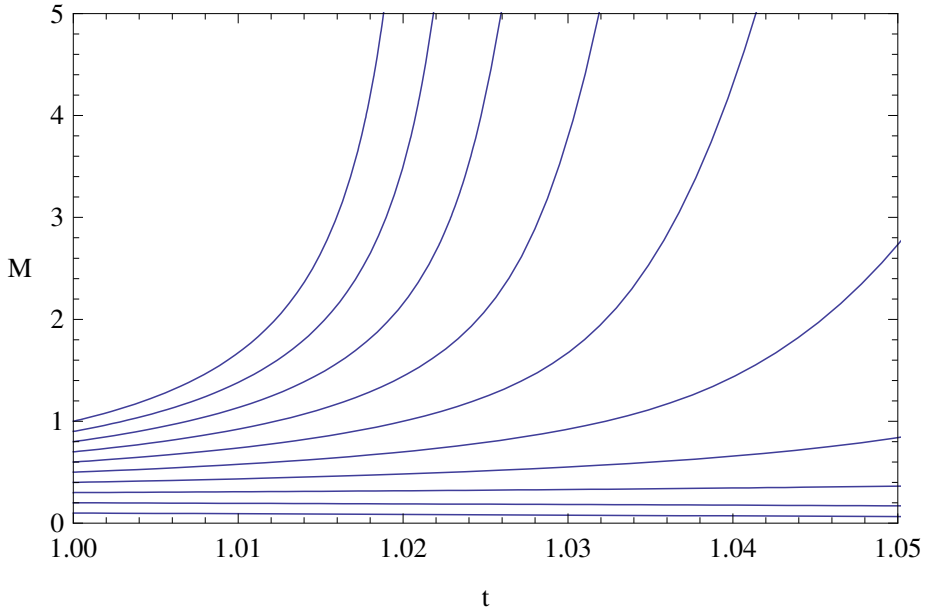



Figura 4.1: Evolução de massa sem o termo de radiação Hawking, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi$, com $\phi_\infty = \dot{\phi}_\infty = \xi = 1$.

Ao fixarmos a taxa de variação da massa igual a zero,

$$-4M\pi\xi + 16\pi M^2 = 0, \tag{4.36}$$

encontramos uma linha crítica, tal que, $M = 1/4$. Esta linha delimita o comportamento do buraco negro, qualquer solução que atravesse esta linha indicará que a massa do buraco negro irá decrescer. Neste caso, a linha crítica coincide com a massa crítica, como pode ser visto na Figura (4.2)

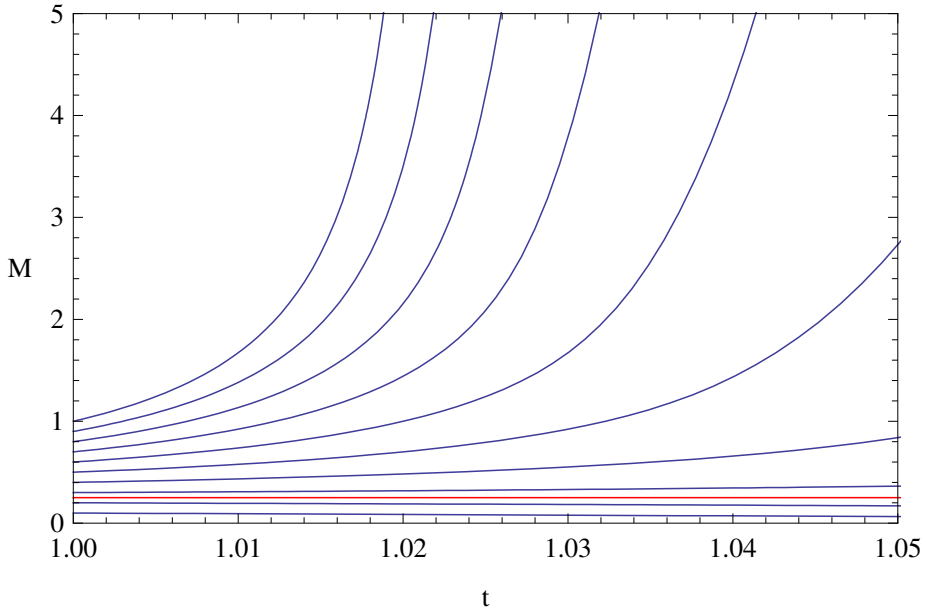



Figura 4.2: Evolução de massa sem o termo de radiação Hawking. A linha vermelha representa a linha crítica e a massa crítica.

Se considerarmos $\dot{\phi}_\infty^2$ da ordem da densidade crítica do universo atual, $\dot{\phi}_\infty^2 \sim \rho_{cr} \approx 10^{-29} g/cm^3$,

$$\rho_{cr} = 10^{-29} \left(g/cm^3\right) \times \frac{\ell_{pl}^3}{m_{pl}}, \tag{4.37}$$

onde $\ell_{pl} = 1,6 \times 10^{-33} cm$ é o comprimento de Planck e $m_{pl} = 2,2 \times 10^{-5} g$ é a massa de Planck. Em unidades naturais, a densidade crítica fica $\rho = 1,9 \times 10^{123}$ e $\dot{\phi}_\infty = 1,3 \times 10^{-61}$. Para calcular a massa crítica, multiplicamos pela massa de Planck, garantindo a unidade em gramas, assim, com $\xi = 1$, obtemos $M_{cr} \approx 10^{56} g$.

O tempo crítico, é dado pela equação (4.35), $10^{61}$ em unidades naturais, multiplicando pelo tempo de Planck ($t_{pl} = 5,4 \times 10^{-44} s$), temos que $t_{cr} = 10^{17} s$, ou seja, da ordem da idade do universo.

Considerando $\alpha = 1$, temos soluções nas quais a massa pode evaporar completamente. Resolvendo a equação (4.19) igual a zero,

$$-\frac{1}{M^2} - 4M\pi + 16M^2\pi = 0, \tag{4.38}$$

para as mesmas condições iniciais do caso sem evaporação, encontramos quatro soluções possíveis para a linha crítica, sendo duas delas imaginárias, uma real e negativa, e a outra real e positiva. Utilizando apenas a solução real positiva, descrevemos a linha crítica, conforme a Figura (4.3).

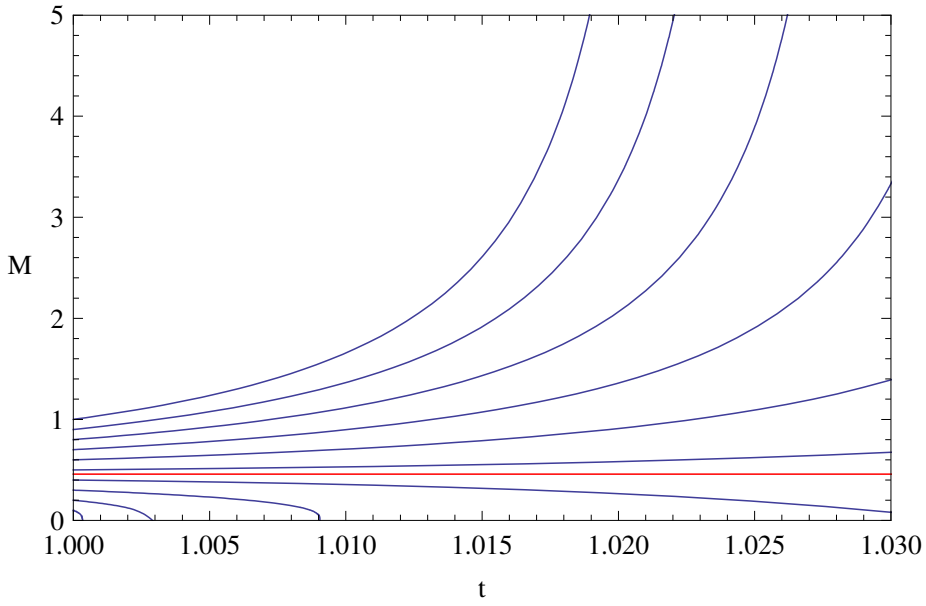



Figura 4.3: Distribuição total da massa para mesmas condições iniciais. A linha em vermelho representa a linha crítica.

Vemos então que para valores de massa inicial, tal que, $M_0$ esteja abaixo da linha crítica, a massa do buraco negro, mesmo com acreção do campo, irá decrescer; e para massas tais que, $M_0$ esteja acima deste linha, o buraco negro cresce indefinidamente em um intervalo de tempo muito curto. O valor adotado para $\xi$ não interfere na análise do comportamento da massa quando levada em conta a radiação Hawking, como mostra Figura (4.4), a diferença é desprezável.

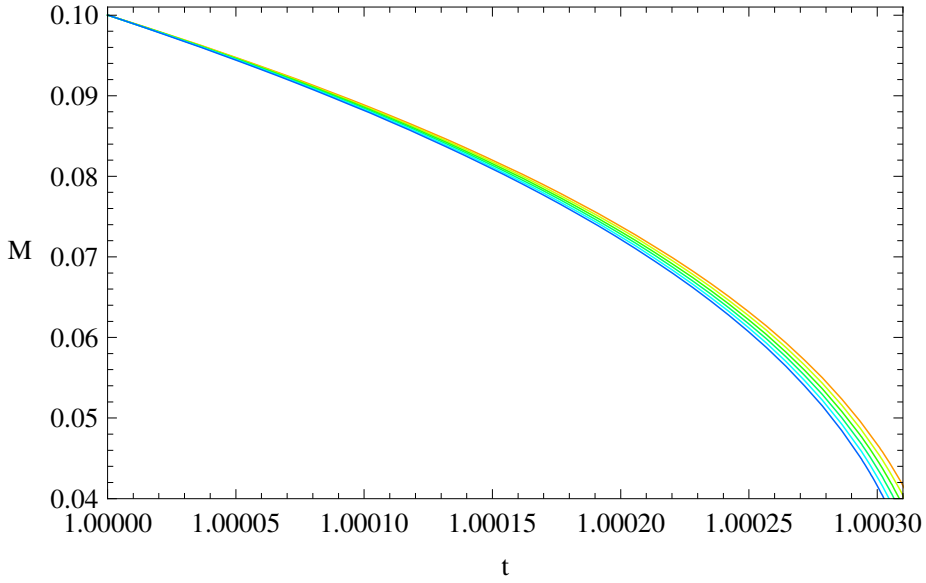



Figura 4.4: Soluções de taxa de variação de massa, para $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Vamos analisar agora o caso de $\phi$ estacionário, escrevendo o campo no infinito como uma função. Escolhemos dois casos estacionários, um caso simples, $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$, e outro visando uma possível comparação com tempos passados na história térmica do universo. Na era da matéria ou da radiação, a densidade de energia é descrita como $\alpha t^{-2}$, vamos então analisar um caso estacionário proporcional a $t^{-\beta}$, $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$.

## Caso 1 - $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$

Para alguns valores de massa inicial, na Figura (4.5) observamos que sem o termo de evaporação, para qualquer valor de $M_0$ a massa do buraco negro crescerá indefinidamente.

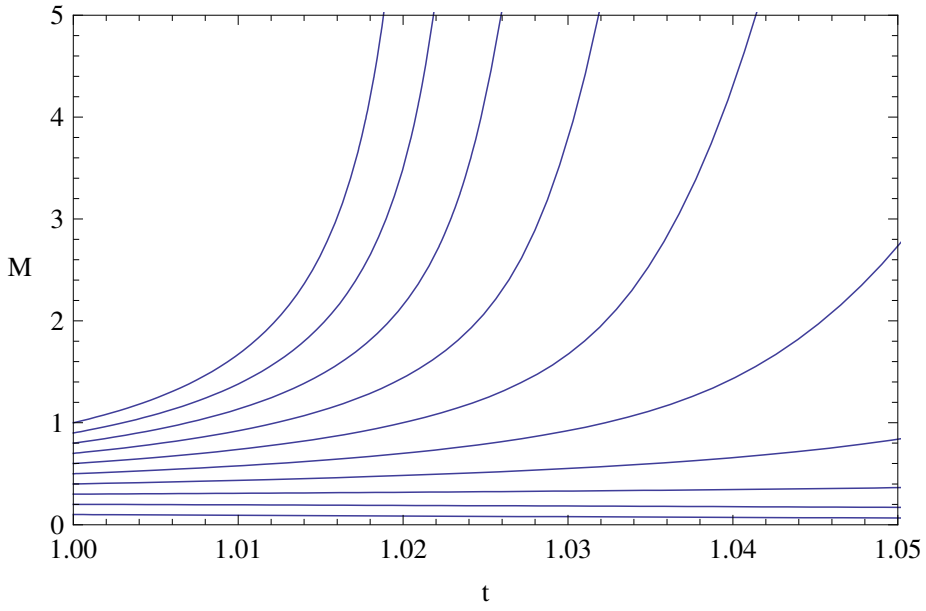



Figura 4.5: Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi$, com $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$, para $C_1 = C_2 = \xi = 1$.

A linha crítica, é dada por $M = 1/4$, e a massa crítica,

$$M_{cr} = \frac{\xi}{4}\dot{\phi}_\infty^{-1} = 1/4, \tag{4.39}$$

que neste caso, coincide com a linha crítica. Estas soluções são exatamente as mesmas para o caso de $\phi_\infty$ independente do tempo, como pode ser visto na Figura (4.6).

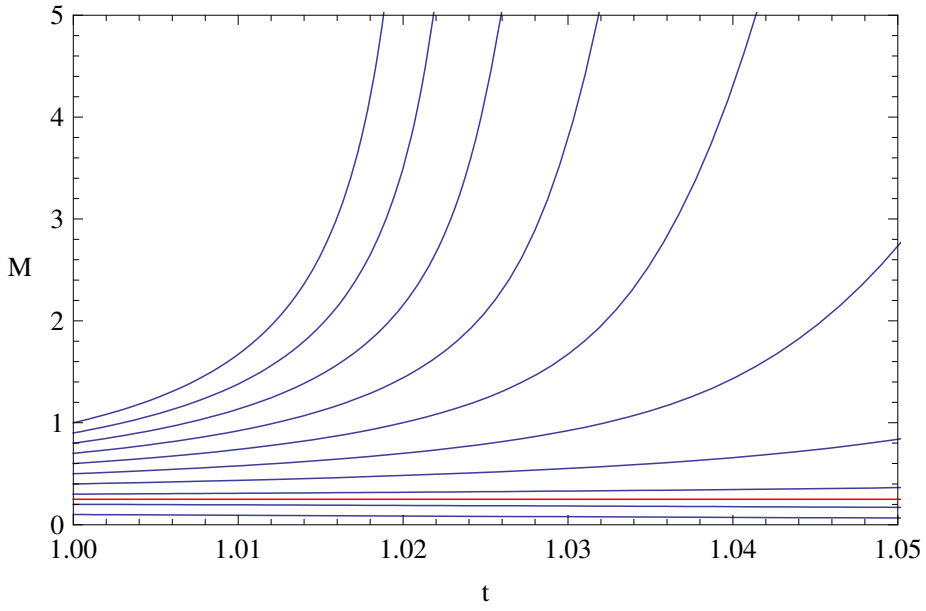



Figura 4.6: Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking. A linha vermelha representa a linha crítica e a linha verde, a massa crítica.

A Figura (4.7) mostra soluções para diferentes valores de $\xi$. Notamos que a linha laranja, $\xi = 0$, que descreve o caso de acoplamento mínimo, destoa das demais curvas, no entanto, as curvas com acoplamento não mínimo, representadas pelos demais valores de $\xi$, diferem apenas na velocidade com que a massa decresce para um mesmo valor de massa inicial.

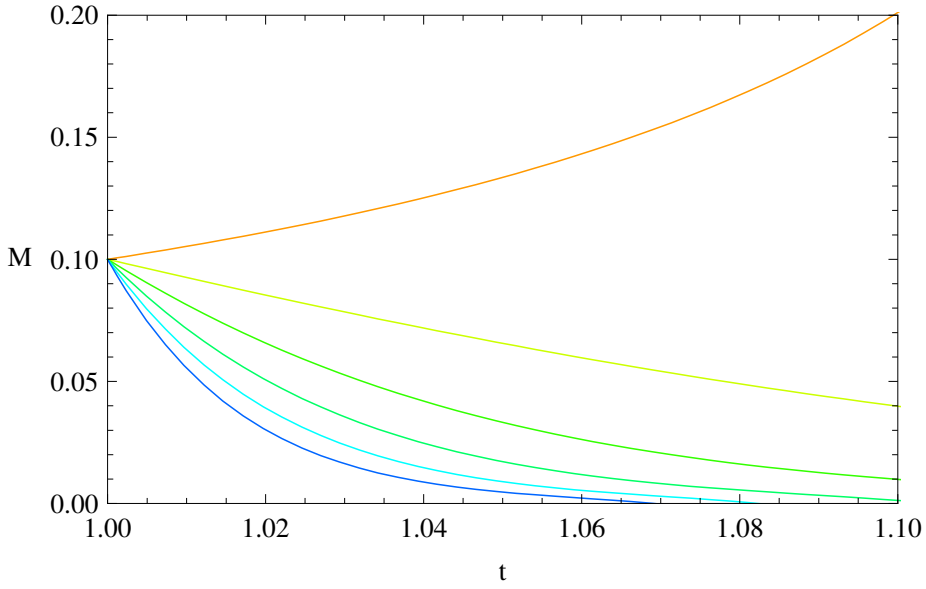



Figura 4.7: Soluções de acreção de massa para $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mostrado pelas curvas variando de cor laranja até azul escuro, respectivamente.

Para $\alpha = 1$, o comportamento da massa pode ser visto na Figura (4.8).

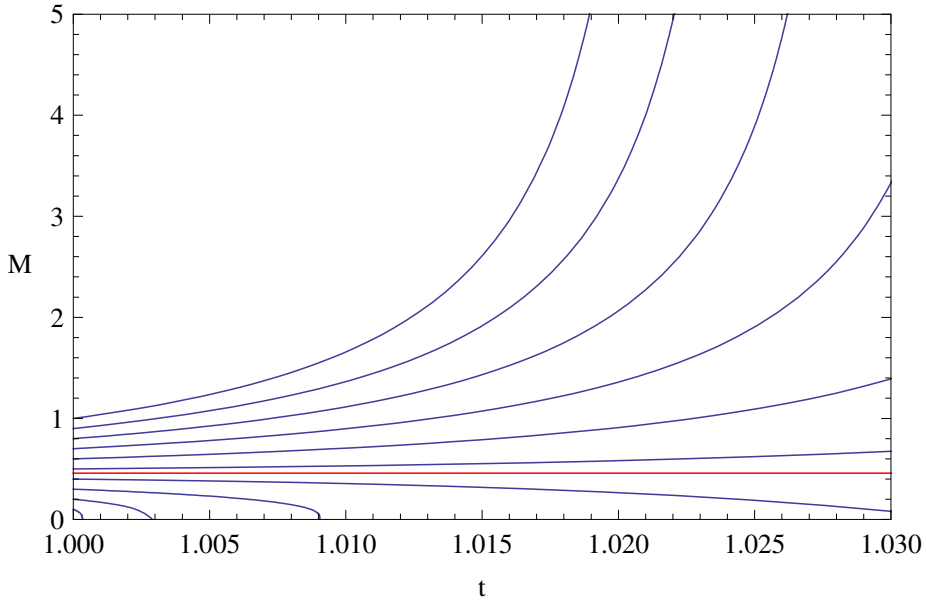



Figura 4.8: Distribuição de massa com termo de radiação Hawking, para mesmas condições iniciais. A linha em vermelho representa a linha crítica.

Vemos então o mesmo comportamento pro caso de $\phi_\infty$ independente do tempo. O valor

adotado para $\xi$ não interfere na análise do comportamento da massa quando levada em conta a radiação Hawking, como mostra Figura (4.9), a diferença é desprezável.

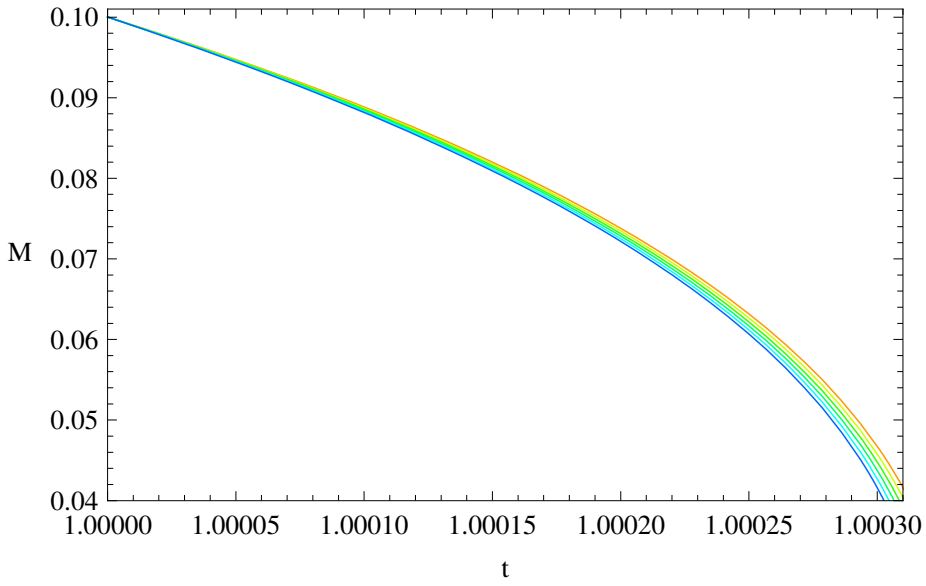



Figura 4.9: Soluções de taxa de variação de massa, para $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mostrado pelas curvas variando de cor laranja até azul escuro, respectivamente.

## Caso 2 - $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Para $\alpha = 0$, construímos do mesmo modo que no caso anterior a equação da taxa de variação da massa. O cálculo da derivada igual a zero também apresenta uma linha crítica coincidente com a massa crítica, com

$$M_{cr} = \frac{\xi}{4}\dot{\phi}_\infty^{-1} = t^2/4, \tag{4.40}$$

que pode ser visto na Figura (4.10)

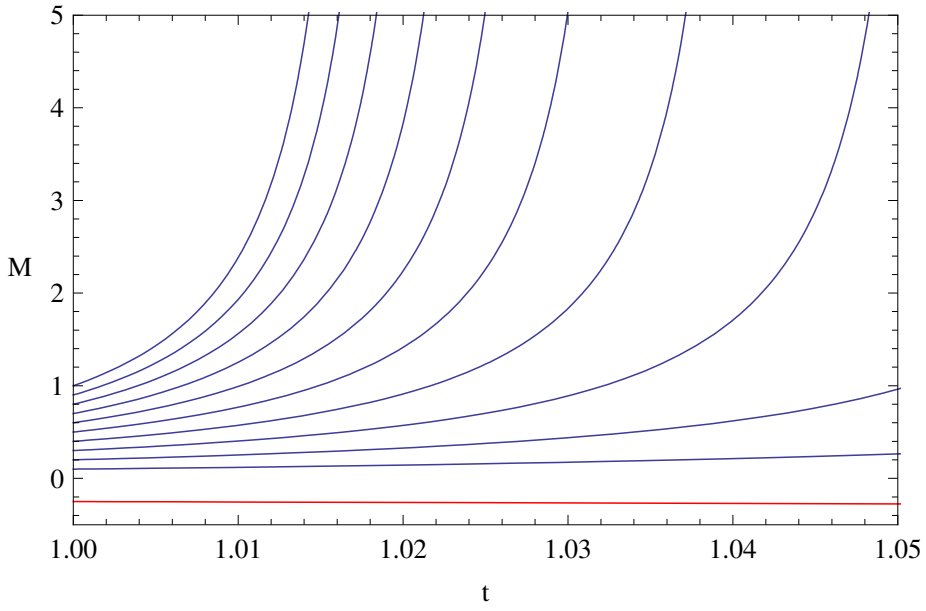



Figura 4.10: Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi$, com $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$, para $C_1 = C_2 = \xi = \beta = 1$.

Neste caso, a variação no valor de $\xi$ mostra um crescimento mais rápido com o aumento no valor adotado, conforme a Figura (4.11).

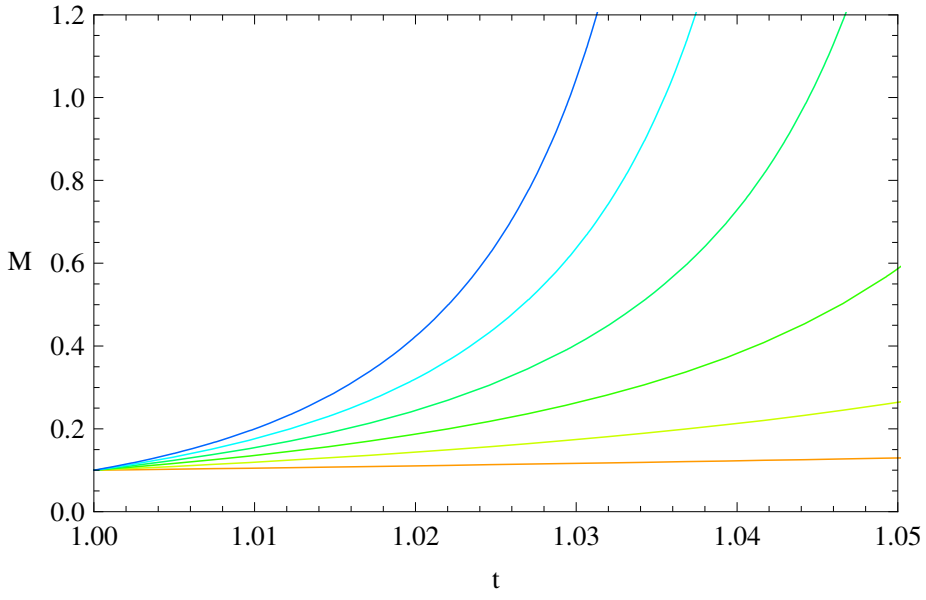



Figura 4.11: Soluções de taxa de variação de massa, para $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mostrado pelas curvas variando de cor laranja até azul escuro, respectivamente.

Para $\alpha = 1$, o comportamento da massa é observado na Figura (4.12), cuja linha crítica foi obtida fixando $M' = 0$, ou seja,

$$-\frac{1}{M^2} + \frac{16M^2\pi}{t^4} + \frac{4M\pi\xi}{t^2} = 0. \tag{4.41}$$

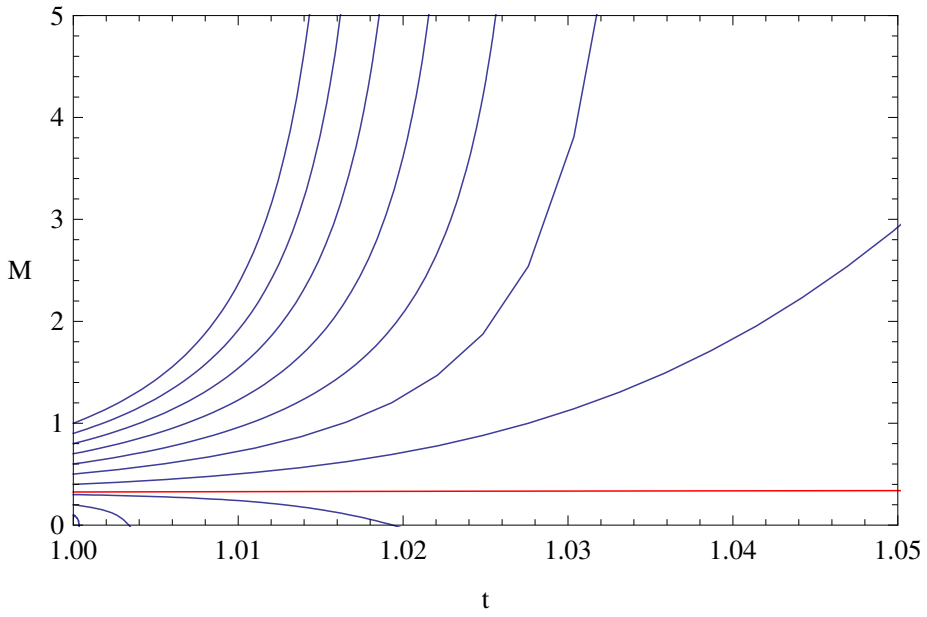



Figura 4.12: Distribuição total da massa, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi$, para $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$, com $C_1 = C_2 = \xi = \beta = 1$.

Variando o valor de $\xi$, obtemos soluções muito próximas do caso anterior.

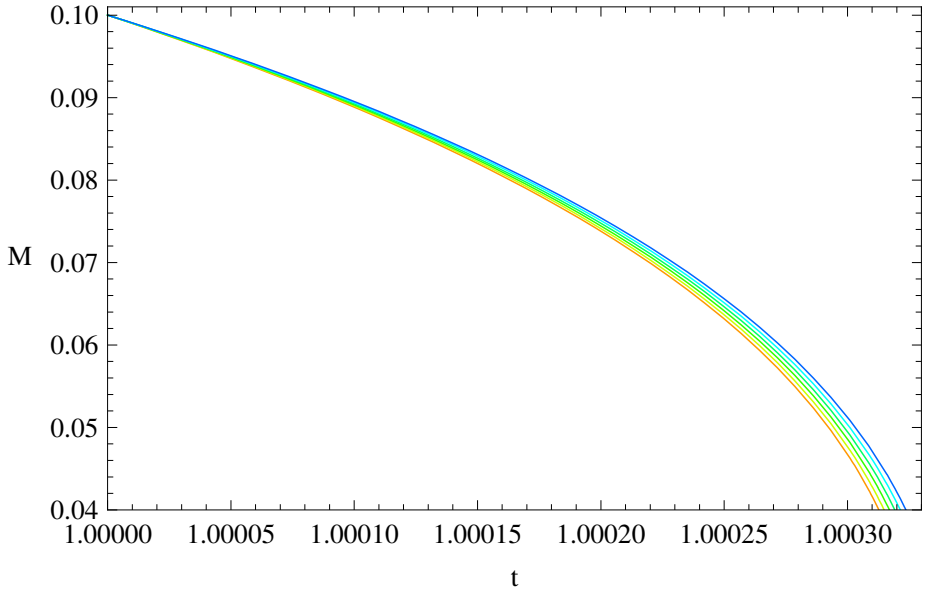



Figura 4.13: Soluções de taxa de variação de massa, para $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mostrado pelas curvas variando de cor laranja até azul escuro, respectivamente.

### 4.2.2 Acoplamento não linear - $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$

Tomando apenas o termo de acreção na análise da distribuição da massa, as funções $f(t)$ e $g(t)$ ficam,

$$f(t) = 16\pi\left(1 + F''\right)\dot{\phi}_c^2 = 16\pi\left(1 + 2\xi\right)\dot{\phi}_\infty^2 \tag{4.42}$$

e

$$g(t) = 4\pi\xi F'\dot{\phi}_c = 8\pi\xi\left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty + \dot{\phi}_\infty^2 t\right). \tag{4.43}$$

Com isto, obtemos que

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty t + \dot{\phi}_\infty^2 t^2\right)} \tag{4.44}$$

e

$$H(t) = 16\pi\left(1 + 2\xi\right)\dot{\phi}_\infty^2 \int_0^t e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty s + \dot{\phi}_\infty^2 s^2\right)} ds \tag{4.45}$$

A massa crítica é dada por $M_{cr} = H_\infty^{-1}$, tal que,

$$H_\infty = lim_{t\to\infty} H(t) = 16\pi\left(1 + 2\xi\right)\dot{\phi}_\infty^2 \int_0^t e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty s + \dot{\phi}_\infty^2 s^2\right)} ds, \tag{4.46}$$

mas

$$2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty s + \dot{\phi}_\infty^2 s^2 = \left(\dot{\phi}_\infty s + \phi_\infty\right)^2 - \phi_\infty^2, \tag{4.47}$$

a integral fica

$$\int_0^t e^{4\pi\xi\phi_\infty^2} e^{-4\pi\xi\left(\dot{\phi}_\infty s + \phi_\infty\right)^2} ds, \tag{4.48}$$

denominando $\tau = \dot{\phi}_\infty s + \phi_\infty$, $d\tau = \dot{\phi}_\infty ds$, para valor positivo de $\dot{\phi}_\infty$,

$$e^{4\pi\xi\phi_\infty^2}\int_{\phi_\infty}^{+\infty}\frac{1}{\dot{\phi}_\infty}e^{-4\pi\xi\tau^2}d\tau = \frac{e^{4\pi\xi\phi_\infty^2}}{\left|\dot{\phi}_\infty\right|}\left(\int_0^{+\infty}e^{-4\pi\xi\tau^2}d\tau - \int_0^{\phi_\infty}e^{-4\pi\xi\tau^2}d\tau\right), \tag{4.49}$$

fazendo $\omega = 2\sqrt{\pi\xi}\tau$,

$$\frac{e^{4\pi\xi\phi_\infty^2}}{2\sqrt{\pi\xi}\left|\dot{\phi}_\infty\right|}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\omega^2}d\omega - \int_0^{2\sqrt{\pi\xi}\phi_\infty}e^{-\omega^2}d\omega\right), \tag{4.50}$$

mas

$$\int_0^{+\infty}e^{-\omega^2}d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.51}$$

e

$$\int_0^{2\sqrt{\pi\xi}\phi_\infty}e^{-\omega^2}d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}erf\left(2\sqrt{\pi\xi}\phi_\infty\right), \tag{4.52}$$

podemos escrever entã0

$$H_\infty = 16\pi\left|\dot{\phi}_\infty\right|\frac{1+2\xi}{\sqrt{2\xi}}e^{4\pi\xi\phi_\infty^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - erf\left(\sqrt{2\pi\xi}\phi_\infty\right)\right], \tag{4.53}$$

onde $erf\,(x)$ é a Função Erro [76]. Em geral, consideramos o campo muito pequeno, de modo que podemos fazer a aproximação

$$M_{cr} \approx \frac{\sqrt{2\xi}}{8\pi\,(1+2\xi)}\left|\dot{\phi}_\infty\right|^{-1}. \tag{4.54}$$

A equação (4.54) tem o mesmo comportamento que a massa crítica no caso do acoplamento feito anteriormente.

A Figura (4.14) mostra o comportamento da distribuição de massa, para alguns valores de massa inicial

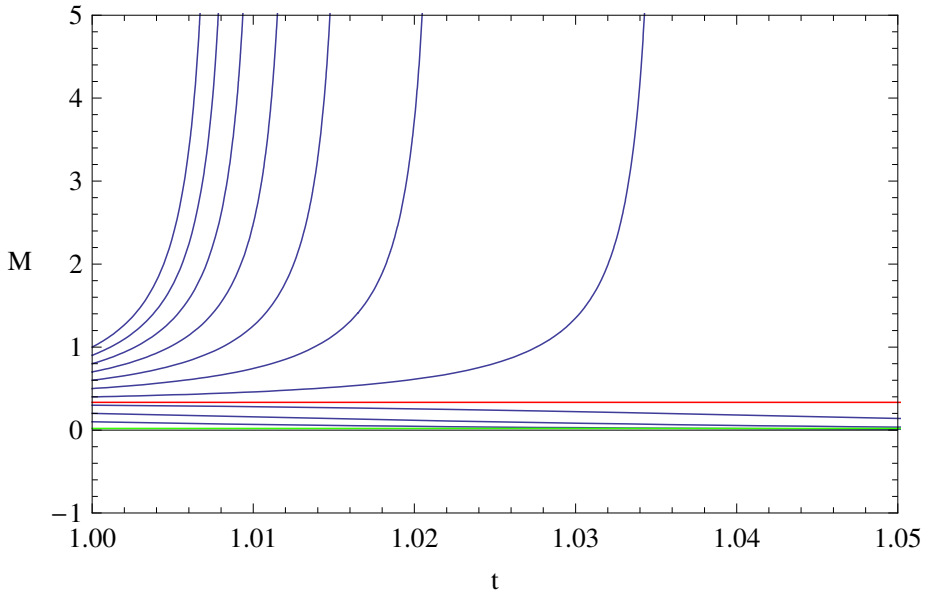



Figura 4.14: Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$, com $\phi_\infty = \dot{\phi}_\infty = \xi = 1$.

A taxa de variação da massa igual a zero fornece a linha crítica, $M = 1/3$ descrita pela linha vermelha e a massa crítica $M_{cr} = \frac{1}{12\pi\sqrt{2}}$, descrita pela linha verde.

Para $\alpha = 1$, linha crítica foi obtida fixando

$$-\frac{1}{M^2} + 48M^2\pi + 4M\pi = 0 \tag{4.55}$$

como mostra a Figura (4.15)

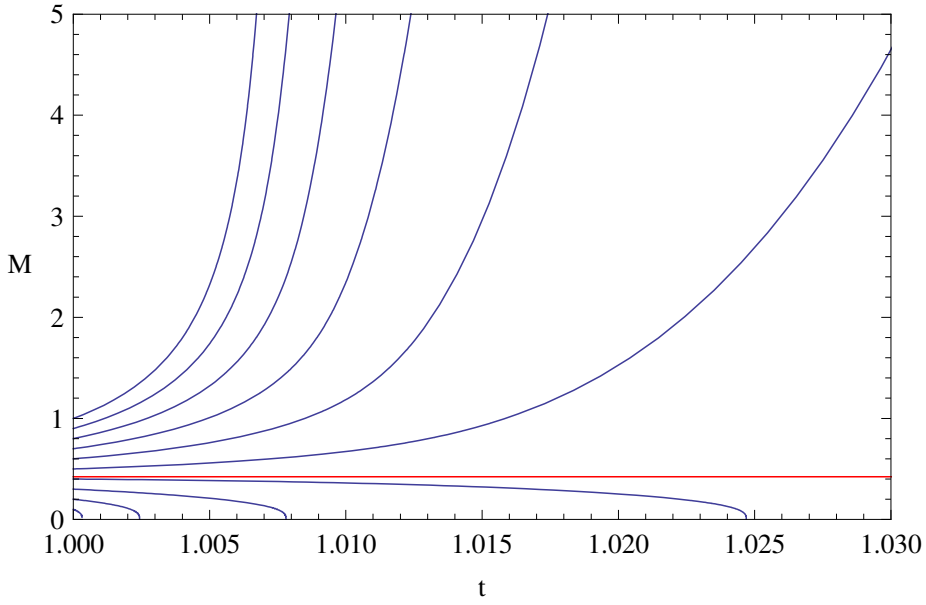
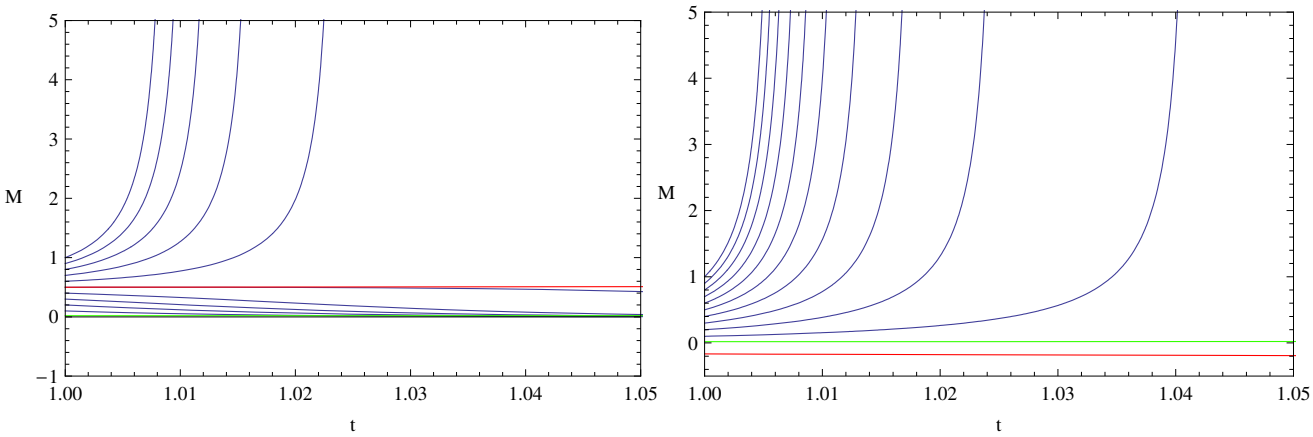



Figura 4.15: Distribuição total da massa, para $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$, com $\phi_\infty = \dot{\phi}_\infty = \xi = \beta = 1$.

## Solução estacionária

A Figura (4.16) mostra a evolução da massa para os dois casos de valor de campo.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

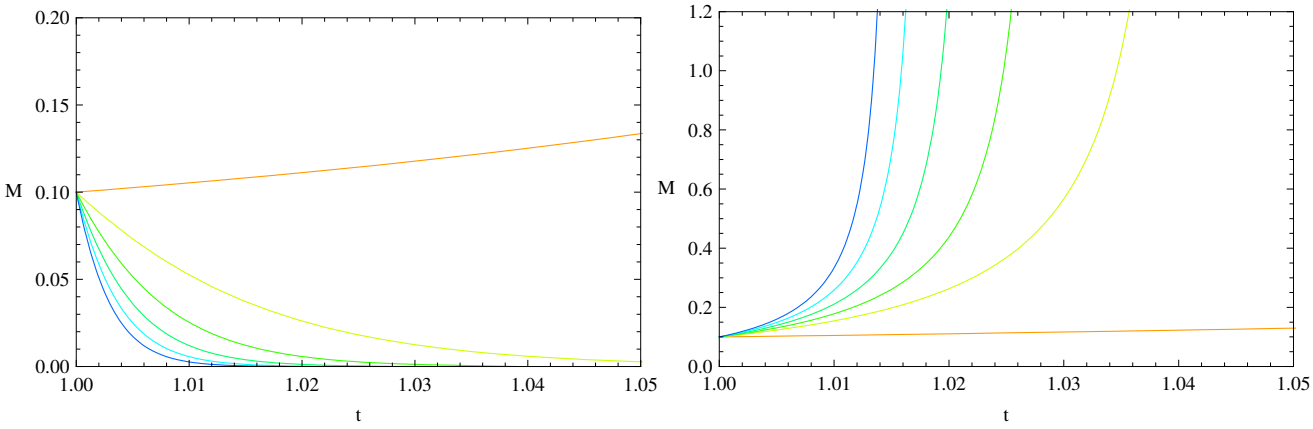
Figura 4.16: Evolução da massa para acoplamento não mínimo, com $\phi_\infty$ dependente do tempo, com $C_1 = C_2 = \xi = \beta = 1$.

Na Figura (4.16a), vemos que mesmo sem o termo devido à radiação Hawking, algumas condições iniciais de massa podem apresentar o decréscimo da massa até total evaporação. Neste

caso de acoplamento, linha crítica, $M = \frac{2+t}{6}$, mostrada pela linha vermelha não coincide com a curva para a massa crítica, $M_{cr} = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}}$, representada pela linha verde.

A Figura (4.16b) mostra que sem o termo devido à radiação Hawking, da mesma forma que no caso de acoplamento linear, seja qual for a massa inicial de um buraco negro, ele crescerá indefinidamente e mais rapidamente que no caso linear. A linha crítica neste caso, mostra que $M = \frac{1}{6}(1 - t - t^2)$, mostrada pela linha vermelha e a linha verde mostra a curva para a massa crítica, $M_{cr} = \frac{t^2}{12\sqrt{2\pi}}$.

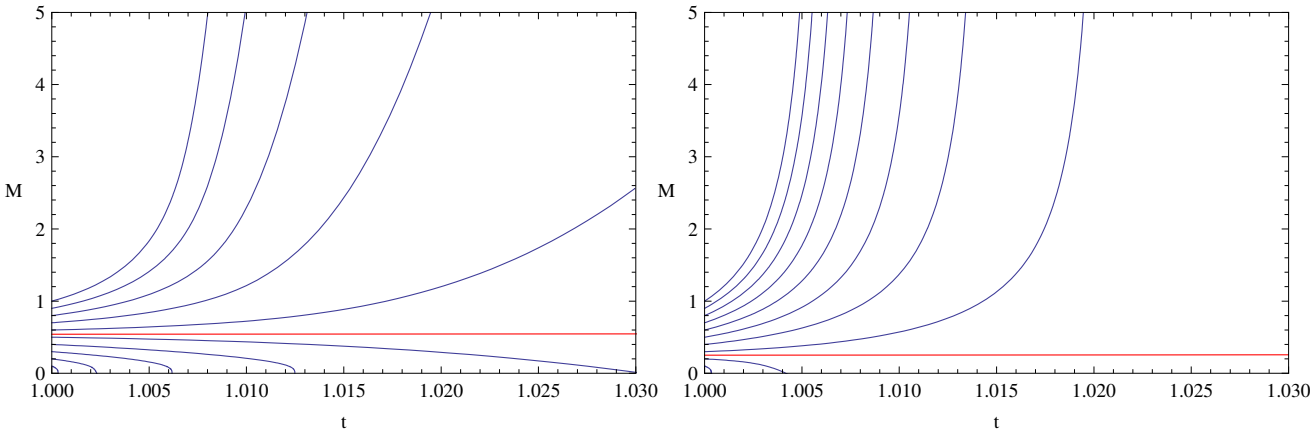
A mudança no valor de $\xi$, mostra que para maiores valores, a massa decresce ou cresce, dependendo da massa inicial adotada, mais rapidamente, como pode ser visto na Figura(4.17). Quando fixamos $\xi = 0$ a solução recai no caso de modelo de quintessência com acoplamento mínimo e esta curva, representada pela linha laranja, mostra uma diferença significativa em relação às demais, assim como já visto no primeiro caso estacionário.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.17: Soluções da massa variando $\xi$, com $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Com $\alpha = 1$, novamente encontramos quatro soluções possíveis para a massa crítica, com apenas uma real e positiva. A massa crítica é obtida a partir desta solução e a distribuição da massa para condições inicias diversas é mostrada na Figura (4.18).

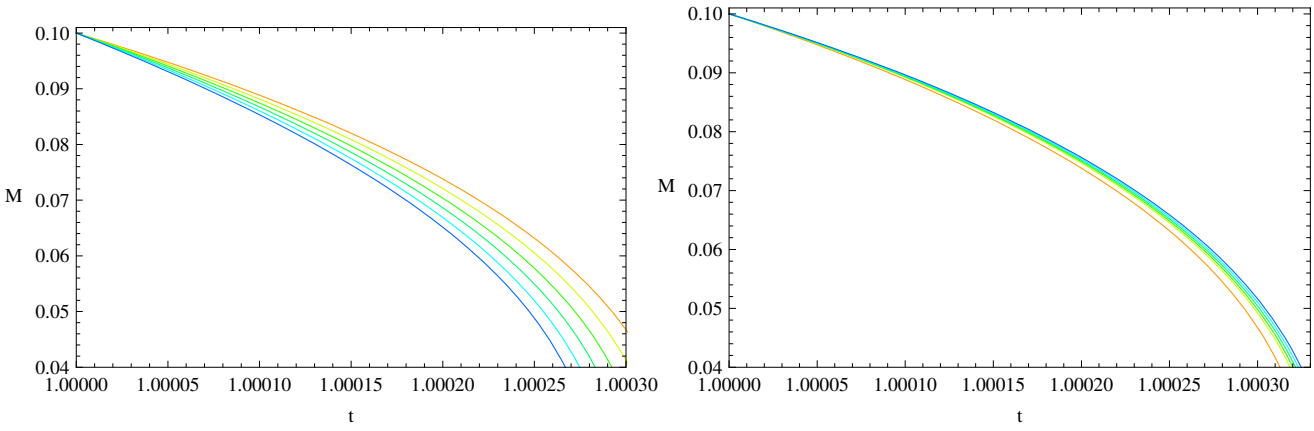



(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.18: Evolução total da massa para acoplamento não mínimo, com $\phi_\infty$ dependente do tempo

Novamente, para valores de massa inicial, $M_0 < M_{cr}$, a massa do buraco negro irá evaporar completamente; e para $M_0 > M_{cr}$, para mesmas condições iniciais que os casos de acoplamento linear, temos mais soluções de evaporação e aquelas nas quais vemos crescimento, este acontece de modo mais lento. A Figura (4.18b) mostra que para $M_0 > M_{cr}$, o buraco negro cresce indefinidamente em um intervalo de tempo menor que no caso do acoplamento $F(\phi) = 1 + \xi\phi$.

A Figura (4.19) acreção e evaporação variando $\xi$. Vemos o mesmo comportamento que os casos de acoplamento linear, ou seja, as diferenças entre soluções podem ser desprezadas.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.19: Soluções da massa com evaporação, variando $\xi$, com $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

### 4.2.3 Acoplamento exponencial - $F(\phi) = e^{\xi\phi}$

No caso de $\alpha = 0$, as funções $f(t)$ e $g(t)$ ficam,

$$f(t) = 16\pi\left(1 + \xi^2 e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty t\right)}\right)\dot{\phi}_\infty^2 \tag{4.56}$$

e

$$g(t) = 4\pi\xi e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty t\right)}\dot{\phi}_\infty. \tag{4.57}$$

Podemos escrever agora

$$G(t) = e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty t} - 1\right)} \tag{4.58}$$

e

$$H(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 \int_0^t \left(1 + \xi^2 e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty s\right)}\right) e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty t} - 1\right)} ds \tag{4.59}$$

ou

$$H(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 e^{4\pi e^{\xi\phi_\infty}}\left[\int_0^t e^{-4\pi\xi e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty s\right)}} ds + \xi^2 \int_0^t e^{-4\pi\xi e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty s\right)} + \xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty s\right)} ds\right], \tag{4.60}$$

escrevendo $\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty s = \tau$, para $\dot{\phi}_\infty$ positivo,

$$H_\infty = 16\pi\dot{\phi}_\infty e^{4\pi e^{\xi\phi_\infty}}\left[\int_{\phi_\infty}^\infty e^{-4\pi e^{\xi\tau}} ds + \xi^2 \int_{\phi_\infty}^\infty e^{-4\pi e^{\xi\tau} + \xi\tau} ds\right], \tag{4.61}$$

fazendo $\omega = e^{\xi\tau}$, $d\omega = \xi e^{\xi\tau} d\tau$, a segunda integral fica,

$$\int_{\phi_\infty}^\infty e^{-4\pi e^{\xi\tau}} e^{\xi\tau} d\tau = \int_{e^{\xi\phi_\infty}}^\infty e^{-4\pi\omega}\frac{d\omega}{\xi} = \frac{1}{4\pi\xi} e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}}, \tag{4.62}$$

e a primeira integral fica,

$$\int_{\phi_\infty}^\infty e^{-4\pi e^{\xi\tau}} ds = \frac{1}{\xi}\int_{e^{\xi\phi_\infty}}^\infty e^{-4\pi\omega}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{\xi}\int_{4\pi e^{\xi\phi_\infty}}^\infty e^{-\kappa}\frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{1}{\xi}\Gamma\left(0, 4\pi e^{\xi\phi_\infty}\right). \tag{4.63}$$

A massa crítica é dada por $M_{cr} = H_\infty^{-1}$, tal que,

$$M_{cr}^{-1} = \frac{16\pi\dot{\phi}_\infty}{\xi} e^{4\pi\xi\dot{\phi}_\infty e^{\xi\phi_\infty}}\left[\frac{\xi^2}{4\pi} + \left(1 + \xi^2 e^{\xi\phi_\infty}\right)\Gamma\left(0, 4\pi e^{\xi\phi_\infty}\right)\right], \tag{4.64}$$

onde $\Gamma(z, x)$ á a função Gama Incompleta [76]. Para $\phi_\infty$ pequeno

$$M_{cr}^{-1} \approx= \frac{\xi}{\left(16\pi e^{4\pi}\Gamma(0, 4\pi) + \left(16\pi e^{4\pi}\Gamma(0, 4\pi) + 4\right)\xi^2\right)}\dot{\phi}_\infty^{-1}, \tag{4.65}$$

sendo $16\pi e^{4\pi}\Gamma(0, 4\pi) \approx 3.72$. A equação 4.65 mostra mesmo comportamento dos casos de acoplamentos anteriores.

A Figura (4.20) mostra o comportamento da distribuição de massa, para alguns valores de massa inicial

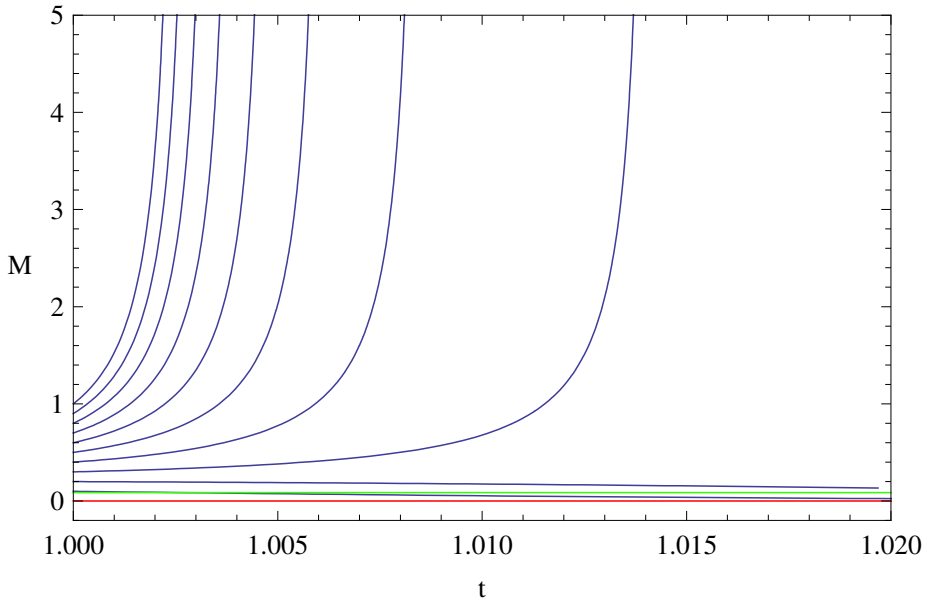



Figura 4.20: Distribuição de massa sem o termo de radiação Hawking, para $F(\phi) = e^{\xi\phi}$, com $\phi_\infty = \dot{\phi}_\infty = \xi = 1$. A linha vermelha e a linha verde indicam as linha crítica e massa crítica, respectivamente.

Com o termo de evaporação, as soluções são mostradas na Figura (4.21).

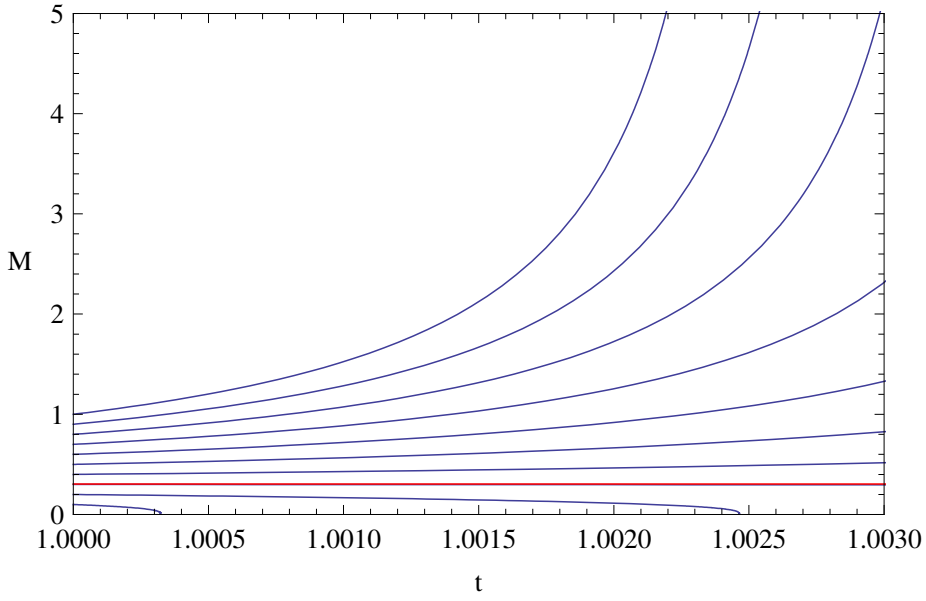


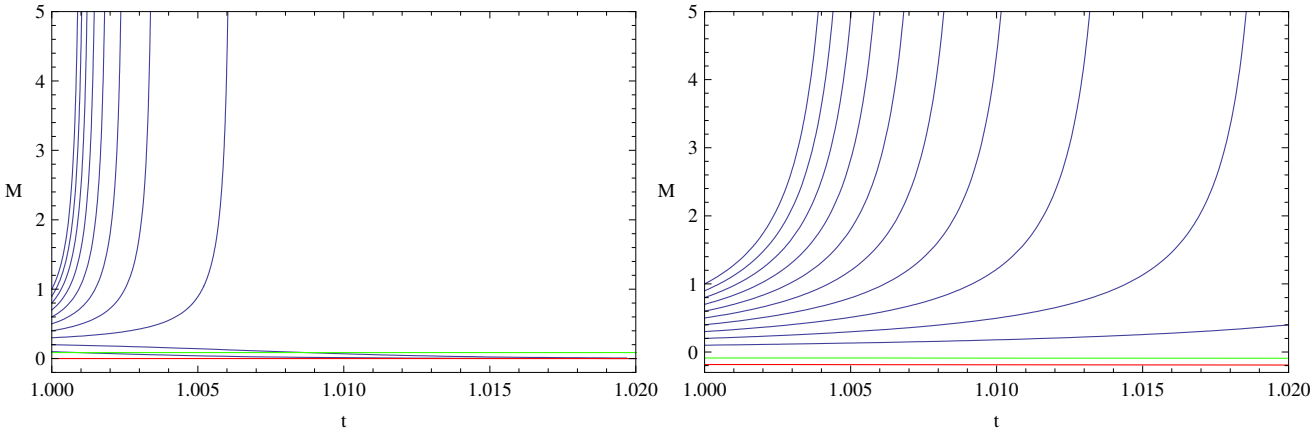

Figura 4.21: Distribuição de massa para $F(\phi) = e^{\xi\phi}$, com mesmas condições iniciais. A linha em vermelho representa a linha crítica.

## Solução estacionária

A Figura (4.22) mostra as soluções para alguns valores de massa inicial. A linha crítica

$$M = \frac{e^{1+2t}}{4\left(1+e^{1+2t}\right)} \tag{4.66}$$

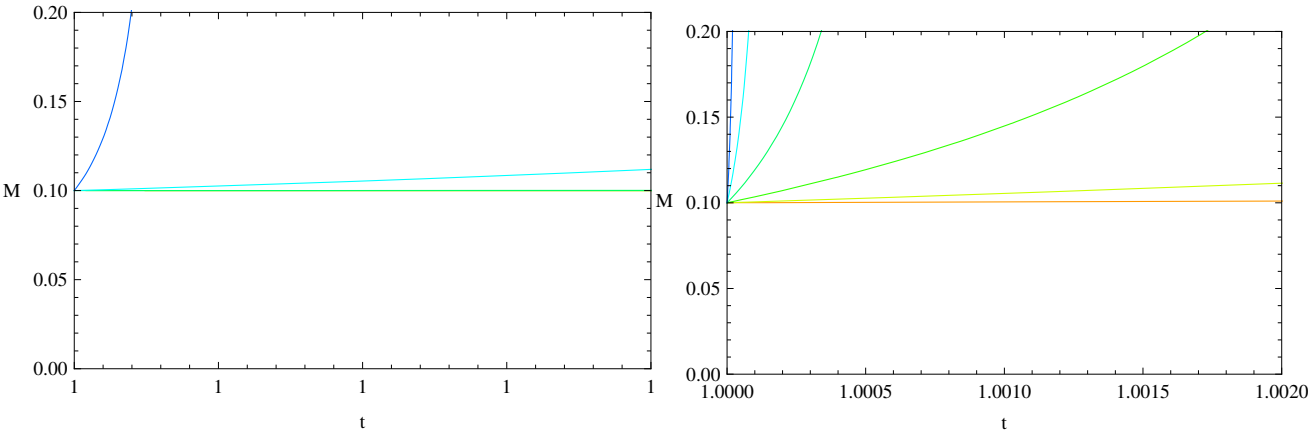
é mostrada pela linha vermelha na Figura (4.22a) não coincide com a curva para a massa crítica, representada pela linha verde. e na Figura (4.22b), a linha crítica é descrita pela linha vermelha, dada por $M = \frac{et^2}{4(1+e)}$, e a linha azul mostra a curva para a massa crítica, $M_{cr} \propto -t^2$.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.22: Evolução da massa para acoplamento exponencial, com $\phi_\infty$ dependente do tempo, com $C_1 = C_2 = \xi = \beta = 1$.

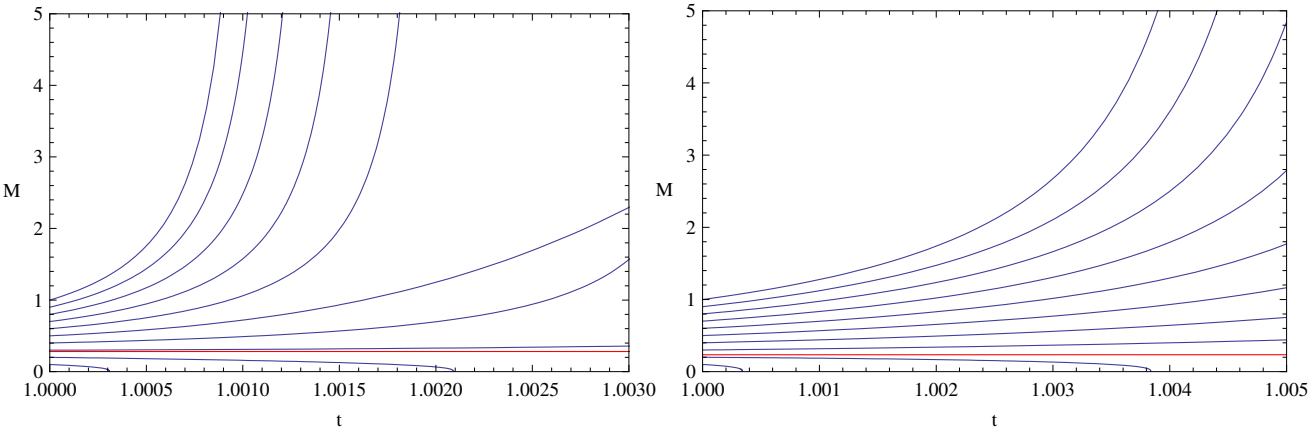
Na Figura (4.23) vemos que a mudança no valor de $\xi$, acontece apenas para $\xi = 0$, a solução no caso de modelo de quintessência com acoplamento mínimo, para os demais valores, a diferença acontece para um tempo muito curto e pode ser desconsiderada.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.23: Soluções da massa variando $\xi$, para acoplamento exponencial, com $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

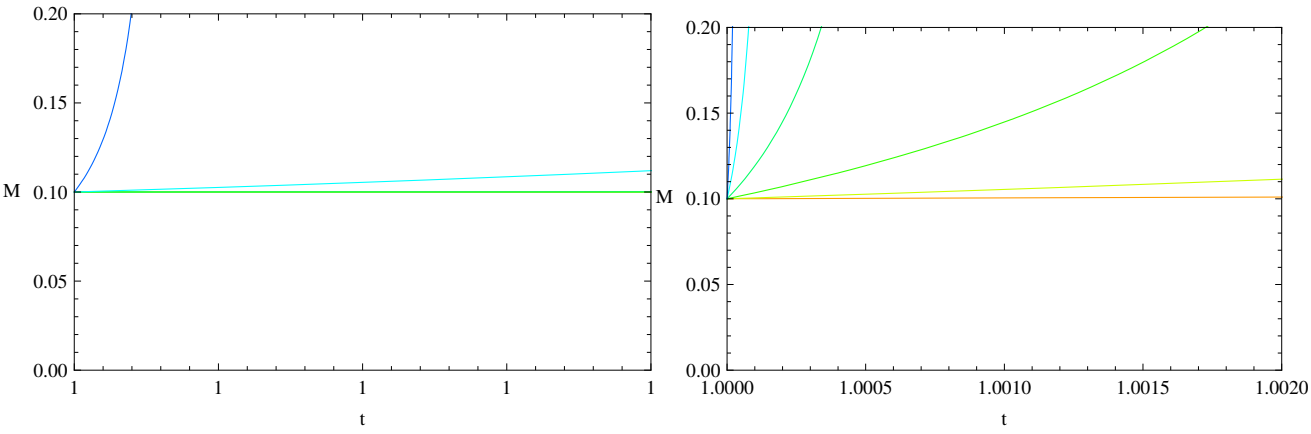
Com $\alpha = 1$, repetindo o processo para a obtenção da massa crítica, podemos verificar algumas soluções da massa na Figura (4.24).




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.24: Evolução total da massa para acoplamento exponencial, com $\phi_\infty$ dependente do tempo

A Figura (4.25) apresenta acreção e evaporação variando $\xi$, repetindo o comportamento sem evaporação. Na Figura (4.25b), vemos que algumas condições de massa inicial passam a evaporar.




(a) $\phi_\infty = C_1 + C_2 t$ (b) $\phi_\infty = C_1 + \frac{C_2}{t^\beta}$

Figura 4.25: Soluções da massa com evaporação, para acoplamento exponencial, variando $\xi$, com $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

### 4.2.4 Era da radiação e era da matéria

## Era da radiação e acoplamento linear

Na era da radiação, $\rho \propto a^{-4}$

$$\dot{\rho} = -4a^{-5}\dot{a} = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho = -4\left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{1/2}\rho, \tag{4.67}$$

usando $G = 1$, podemos escrever

$$\rho = \frac{3}{32\pi t^2}, \tag{4.68}$$

o termo devido a densidade de energia na era da radiação é absorvido pelo buraco negro conforme a acreção de Bondi, ou seja, $\propto M^2$ e pode ser incorporado em $f(t)$, de modo que,

$$f(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 + \frac{3}{2t^2} \tag{4.69}$$

e

$$g(t) = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty. \tag{4.70}$$

Podemos escrever agora

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(t-t_0)} \tag{4.71}$$

e

$$H(t) = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1 - e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(t-t_0)}\right) + \frac{3}{2}e^{\beta}\int_{t_0}^{t} s^{-2}e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(s-t_0)}ds, \tag{4.72}$$

fazendo $\beta = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t_0$,

$$H_\infty = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1 - e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(t-t_0)}\right) + \frac{3}{2}e^{-\beta}\int_{t_0}^{\infty} s^{-2}e^{-\beta s}ds, \tag{4.73}$$

com $\beta s = \omega$, a integral fica

$$\int_{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t_0}^{\infty} \beta\omega^{-2} e^{-\beta\omega} d\omega = \beta\Gamma\left(-1, \beta\right), \tag{4.74}$$

pois $\Gamma\left(a, x\right) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$. Com isto,

$$H_\infty = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1 + \frac{3\xi e^\beta}{8\dot{\phi}_\infty t_0}\beta\Gamma\left(-1, \beta\right)\right), \tag{4.75}$$

onde $\beta = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t_0$. Para

$$lim_{x\to 0} x\Gamma\left(-1, x\right) = 1, \tag{4.76}$$

temos neste caso, se $\beta$ for pequeno,

$$M_{cr} = H_\infty^{-1} \approx \frac{\xi}{4\dot{\phi}_\infty}\left(1 + \frac{3\xi}{8\dot{\phi}_\infty t_0}\right)^{-1}. \tag{4.77}$$

Discutimos no primeiro capítulo que a equação de estado no caso de modelos de quintessência é variável no tempo, então, vamos supor, a nível de exemplo, que o conteúdo de energia escura no universo tenha mudado levemente em um instante $t_0 = 1s$. Neste caso, em unidades naturais, $t_0 = 1,9 \times 10^{43}$. Assim, $\dot{\phi}_\infty t_0 \approx 10^{-18}$, o que justifica tomarmos $\beta \approx 0$ para obter a massa crítica, $M_{cr} = 10^{43}$ em unidades naturais ou $M_{cr} = 10^{38} g$.

Num tempo $t_0 = 10^{11} s$, ou seja, na era radiação-matéria, teremos, $\dot{\phi}_\infty t_0 \approx 10^{-7}$ em unidade de Planck, que mostra, $M_{cr} = 10^{49} g$.

## Era da radiação e acoplamento não linear

Vamos entender como poderemos aplicar acoplamento não linear para a era da radiação. Adicionando o termo devido a radiação em $f\left(t\right)$,

$$f\left(t\right) = 16\pi\left(1 + 2\xi\right)\dot{\phi}_\infty^2 + \frac{3}{2t^2}. \tag{4.78}$$

A função $g\left(t\right)$ não muda e $G\left(t\right)$ fica

$$G\left(t\right) = e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty(t-t_0) + \dot{\phi}_\infty^2(t-t_0)^2\right)} \tag{4.79}$$

e

$$H\left(t\right) = 16\pi\left(1 + 2\xi\right)\dot{\phi}_\infty^2 e^{4\pi\xi\left(t_0^2 + t_0\right)} \int_{t_0}^{t} e^{-4\pi\xi\left(\dot{\phi}_\infty^2 s^2 + 2\left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)s\right)} ds +$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{3}{2} s^{-2} e^{-4\pi\xi\left(\dot{\phi}_\infty^2 s^2 + 2\left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)s\right)} ds, \tag{4.80}$$

que pode ser escrito como

$$H(t) = 16\pi(1+2\xi)\dot{\phi}_\infty e^{4\pi\xi\phi_\infty^2} e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf\left(2\sqrt{\pi\xi}\phi_\infty\right)\right) +$$

$$+ \frac{3}{2} e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)} \int_0^t s^{-2} e^{-4\pi\xi\left(\dot{\phi}_\infty^2 s^2 + 2\left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)s\right)} ds. \quad (4.81)$$

Para calcularmos $H_\infty$, tomamos o limite de $\phi_\infty \to 0$

$$H_\infty = 8\pi(1+2\xi)\dot{\phi}_\infty\sqrt{\pi}e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)} + \frac{3}{2}\left|\dot{\phi}_\infty\right| e^{4\pi\xi\phi_\infty^2} e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)} \int_{\dot{\phi}_\infty\left(1-\dot{\phi}_\infty\right)t_0+\phi_\infty\dot{\phi}_\infty}^{+\infty} \frac{e^{-4\pi\xi\omega^2}}{\omega^2} d\omega, \quad (4.82)$$

onde $\omega = \dot{\phi}_\infty s + \left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)$, $d\omega = \dot{\phi}_\infty ds$. A massa crítica fica então

$$M_{cr}^{-1} \approx= 8\pi(1+2\xi)\dot{\phi}_\infty\sqrt{\pi}e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)} +$$

$$+ \frac{3}{2}\left|\dot{\phi}_\infty\right| e^{4\pi\xi\phi_\infty^2} e^{4\pi\xi\left(t_0^2+t_0\right)} \left(\frac{-e^{-4\pi\xi\left(\dot{\phi}_\infty t_0 + \left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)\right)^2}}{\dot{\phi}_\infty t_0 + \left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty - \dot{\phi}_\infty^2 t_0\right)}\right). \quad (4.83)$$

## Era da matéria e acoplamento exponencial

Podemos também analisar um acoplamento, por exemplo, o acoplamento exponencial, na era da matéria, onde $\rho \propto a^{-3}$, assim

$$\dot{\rho} = -3a^{-4}\dot{a} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho = -3\left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{1/2}\rho, \quad (4.84)$$

podemos escrever

$$\rho = \frac{1}{6\pi t^2}, \quad (4.85)$$

para $G = 1$. Podemos escrever

$$f(t) = 16\pi\left(1 + \xi^2 e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty t\right)}\right)\dot{\phi}_\infty^2 + \frac{8}{3t^2}. \quad (4.86)$$

A função $g(t)$ não muda, mas $G(t)$, $H(t)$ devem ser reescritas como

$$G(t) = e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty(s-t_0)}-1\right)} \quad (4.87)$$

e

$$H(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 \int_0^t \left(1 + \xi^2 e^{\xi\left(\phi_\infty + \dot{\phi}_\infty(s-t_0)\right)}\right) e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty(s-t_0)}-1\right)} ds +$$

$$+ 16\pi \int_0^t \frac{8}{3s^2} e^{-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty(s-t_0)}-1\right)} ds. \quad (4.88)$$

E a massa crítica pode ser obtida, fazendo $t \to \infty$

$$M_{cr} = H_{\infty}^{-1}. \tag{4.89}$$

# 5 Considerações finais e Perspectivas futuras

Em todos os tipos de acoplamento não mínimos estudados, encontramos $M_{cr} \propto \dot{\phi}_{\infty}^{-1}$. Se considerarmos $\dot{\phi}_{\infty}$ da ordem da densidade crítica do universo atual, $\rho_{cr} \approx 10^{-29} g/cm^3$, obtemos $M_{cr} \approx 10^{56} g$. Todos os buracos negros com massa inferior a este valor devem estar encolhendo conforme a equação (4.21). Mesmo os buracos negros supermassivos no centro da galáxia, com $M \geq 10^6 M_{\odot} \approx 10^{39} g$ estão bem abaixo deste valor.

Notamos que a velocidade com que a massa decai depende do tipo de acoplamento, nos casos de acoplamento não linear e exponencial, a massa decresce mais rapidamente. Desse modo, o fato de observamos buracos negros supermassivos, pode então limitar o tipo de acoplamento usado e excluir alguns modelos de quintessência.

O acoplamento linear para a era da radiação, para um tempo $t_0 > 0$, mostrou uma massa crítica, $M_{cr} = 10^{38} g$, muito acima da massa de Hawking, $M_{cr} = 10^{15} g$, num tempo superior, na era da radiação-matéria, vimos uma massa ainda maior. Este comportamento indica que estes buracos negros criados na era da radiação devem estar se contraindo desde então. Eles devem ter perdido cerca de 60% de sua massa, tornando-se os supermassivos observados atualmente, creditando o tipo de acoplamento usado nos modelos de quintessência.

Em primeira análise, consideramos $\phi_{\infty}$ e $\dot{\phi}_{\infty}$ constantes e positivos, usando aproximação quasi-estacionária. Verificamos, no entanto, que $\phi_{\infty}$ dependente do tempo não difere bruscamente das soluções iniciais, no caso linear, elas podem ser consideradas praticamente iguais.

Todos os gráficos referentes a distribuição de massa do buraco negro são adimensionais, limitando nossa discutição sobre tempo de crescimento e diminuição de massa. Fizemos uma análise qualitativa sobre a evolução temporal e pretendemos analisar quantitativamente estes resultados.

Em todos os casos estudados consideramos buraco negro de Schwarzschild, mas dentro de um universo em expansão acelerada, considera-se na verdade, buraco negro de Schwarzschild-de Sitter. Os buracos negros supermassivos são observados nos centros das galáxias, no entanto, a expansão acelerada é observada em supernovas, ou seja, em escalas diferentes, muito maiores que as galáticas. Se considerarmos Schwarzschild-de Sitter, obteremos nos limites relevantes, os mesmos resultados, os resultados serão diferentes apenas para buracos negros do tamanho do universo. Este problema é também interessante, e já foi feito para o caso de fluido perfeito e campo escalar minimamente acoplado [77]. Segue nas perspectivas de trabalho futuro desenvolver o caso de acoplamento não mínimo.

Outra ponto interessante a ser trabalhado é a utilização de acoplamento não mínimo em modelos de gás de Chaplygin para verificar também a formação de buracos negros supermassivos.

# Accretion of nonminimally coupled scalar fields into black holes

O capítulo 4 se trata de uma reprodução integral, detalhada e estendida, do artigo (arXiv:0909.3033v2) constante na próxima página. O artigo foi aceito para publicação na edição de novembro da revista *Physical Review D*.

# Accretion of nonminimally coupled scalar fields into black holes

Manuela G. Rodrigues*
*Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP, C.P. 6165, 13083-970 Campinas, SP, Brazil.*

Alberto Saa†
*Departamento de Matemática Aplicada, UNICAMP, C.P. 6065, 13083-859 Campinas, SP, Brazil.*

By using a quasi-stationary approach, we consider the mass evolution of Schwarzschild black holes in the presence of a nonminimally coupled cosmological scalar field. The mass evolution equation is analytically solved for generic coupling, revealing a qualitatively distinct behavior from the minimal coupling case. In particular, for black hole masses smaller than a certain critical value, the accretion of the scalar field can lead to mass decreasing even if no phantom energy is involved. The physical validity of the adopted quasi-stationary approach and some implications of our result for the evolution of primordial and astrophysical black holes are discussed. More precisely, we argue that black hole observational data could be used to place constraints on the nonminimally coupled energy content of the universe.

PACS numbers: 04.70.Bw, 95.36.+x, 97.60.Lf, 98.80.Cq

## I. INTRODUCTION

The accretion of matter is one of the most studied physical process involving black holes. Assuming the validity of certain energy conditions for the accreting matter, the black hole mass will never decrease. In fact, if the null energy condition holds, no classical process can lead to mass decreasing for black holes[1]. The situation changes completely if quantum processes are allowed: a black hole can, in fact, shrink due to the emission of Hawking radiation[2]. Such processes are particularly relevant, for instance, to Primordial black holes (PBH)[3]. One of the most striking features of PBH is that they could indeed evaporate completely due to the emission of Hawking radiation. It is known, in particular, that a PBH with mass smaller than the so called Hawking mass $M_{\rm H} = 10^{15}$g should have already evaporated by now. PBH with masses close to that limit are specially relevant because their emitted Hawking radiation might, in principle, produce observable effects in the present day universe[4].

The interest in these problems has increased considerably in the last years due to the many dark energy phenomenological models that have been proposed to described the recent accelerated expansion of the universe[5]. Such models[6] typically involve a scalar field pervading all the universe that could, in principle, be absorbed by any black hole, implying consequently in new channels for black hole mass accretion[7]. It is interesting to notice that the study of black holes growth in the presence of scalar fields has been initiated before[8] the discovery of the recent acceleration of the universe and, thus, before the proposal of any dark energy model.

The mass evolution of any black hole is governed by two competing processes. The first one is Hawking radiation, which decreases the black hole mass due to the emission of a thermal radiation. The other one, which tends to increase the black hole mass, is the accretion of the surrounding available matter and energy. The survival or not of a PBH until nowadays, for instance, will depend on the detailed balance of these processes. The unexpected possibility that black hole masses could effectively decrease due to the accretion of exotic (phantom) dark energy[9] was received with great interest because, mainly, it could alter qualitatively the evolution of any black hole, implying, occasionally, in observational consequences for both astrophysical and primordial black holes. Since phantom dark energy violates the usual energy conditions, there is no contradiction between these results and the classical theory of black holes. Nevertheless, one should keep in mind that the physical viability of models involving phantom energy has been constantly challenged by their severe inherent classical and quantum instabilities[10].

In this paper, we study the mass evolution of Schwarzschild black holes in the presence of a nonminimally coupled scalar field. A quasi-stationary approach is introduced and the mass evolution equation is analytically solved for generic coupling. Our main conclusion is that, for black hole initial masses smaller than a certain critical value, one could indeed have mass decreasing even in the absence of the Hawking evaporation mechanism and without any component of phantom energy in the model. This is a more robust scenario for mass decreasing of black holes due to the accretion of exotic matter since it is not plagued by the phantom energy instabilities. Moreover, one could have, in principle, mass decreasing for considerably larger black holes than the minimally coupled case, with possible implications for primordial and astrophysical black holes, which could be explored in order to place observation constraints on the nonminimally coupled energy content of the universe.

*Electronic address: manu@ifi.unicamp.br
†Electronic address: asaa@ime.unicamp.br

## II. NONMINIMALLY COUPLED SCALAR FIELDS AROUND BLACK HOLES

We are concerned here with a scalar field $\phi$ governed by the action

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[F(\phi)R - \partial_a\phi\partial^a\phi - 2V(\phi)\right], \quad (1)$$

surrounding a Schwarzschild black hole. Nonminimally coupled cosmological models of the type (1) have been intensively used in modern cosmology[11]. Models for which it is indeed possible to reach $F(\phi) = 0$ are known to be plagued with singularities[12]. The hypersurface $F(\phi) = 0$ marks, in a sense, the boundary between standard ($F(\phi) > 0$) and phantom-like ($F(\phi) < 0$) behavior for the scalar field $\phi$[13]. We are mainly interested here in models such that $F(\phi) > 0$ everywhere since, in such cases, phantom-like behavior is excluded by construction.

Since Schwarzschild spacetime is Ricci-flat, the equation of motion for $\phi$ obtained from (1) reads simply

$$\Box\phi = V'(\phi), \quad (2)$$

and the associated energy momentum tensor is given by

$$T_{ab} = \partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{g_{ab}}{2}\left(\partial_c\phi\partial^c\phi + 2V\right) + \nabla_a\nabla_b F - g_{ab}\Box F. \quad (3)$$

Note that, due to Ricci-flatness of Schwarzschild spacetime, we have $\nabla_b T_a{}^b = 0$. By adopting the usual Schwarzschild coordinates, the spherically symmetrical version of Eq. (2) will be given by

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\partial\phi}{\partial r}\right] = \left(1-\frac{2M}{r}\right)V'(\phi). \quad (4)$$

The standard formulation of the stationary Bondi accretion process[14] for this problem consists in considering solutions of (4) with the following boundary condition

$$\lim_{r\to\infty}\phi(t,r) = \phi_c(t), \quad (5)$$

where $\phi_c(t)$ corresponds to the cosmological homogeneous and isotropic solution of the model (1), with cosmological and Schwarzschild time coordinates identified. Since no back reaction of the scalar field is taken into account, our approach requires that the energy content of the scalar field must remain bounded and small around the black hole. Once we have a solution $\phi(t,r)$ of (4) with bounded energy and obeying the boundary condition (5), we assume that its energy flux on the black hole horizon is completely absorbed by the black hole, implying that

$$\frac{dM}{dt} = \oint_{r=2M} r^2 T_t{}^r d\Omega\,. \quad (6)$$

This problem was solved, for $F(\phi) = 1$ and $V(\phi) = 0$, in [15]. In the Eddington-Finkelstein coordinates $(v,r)$, with $v = t + r + 2M\log(r/2M-1)$ corresponding to incoming light geodesics, the pertinent solution corresponds to the stationary configuration

$$\phi(v,r) = \beta + \gamma\left(v - r + 2M\log\frac{2M}{r}\right), \quad (7)$$

with $\beta$ and $\gamma$ constant. We do not expect to have stationary solutions like this for the generic model (1). In fact, stationary solutions are possible only for actions that are invariant under shifts $\phi \to \phi + \lambda$, see [16]. We can, however, adopt a quasi-stationary approach based on the observation[17] that, for slowly varying cosmological solutions $\phi_c(t)$, the "delayed" field configuration given by

$$\phi(v,r) = \phi_c\left(v - r + 2M\log\frac{2M}{r}\right), \quad (8)$$

is an approximated solution of (4) for certain potentials $V(\phi)$. The validity of this approximation will assure, of course, the validity of our quasi-stationary approach. By substituting (8) in (4) one gets

$$\left(1 + \frac{2M}{r} + \left(\frac{2M}{r}\right)^2 + \left(\frac{2M}{r}\right)^3\right)\ddot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0, \quad (9)$$

with the dot standing for the derivative with respect to $t$. Hence, our approximation is valid if $\ddot{\phi}_c \approx 0$ and $V'(\phi_c) \approx 0$. Due to the typical cosmological time scales, the assumption of a quasi-stationary ($\ddot{\phi}_c \approx 0$) evolution around the black hole is not, in fact, too restrictive. The same is true for the assumption $V'(\phi_c) \approx 0$, but the argument is more involved. Assuming a small variation of $\phi_c$, the potential can be linearized as $V(\phi_c) = \mu\phi_c$, since the constant factor is irrelevant here. In this case, equation (4) will be a linear equation, and it is possible to find a stationary solution obeying the Bondi boundary condition (5). The approximation will be valid provided $\phi_c$ is small and $r$ is kept smaller than the cosmological horizon scale, see [7] for the details. It is interesting to notice that the explicit examples of failure of the approximation (8) presented in [17] corresponds clearly to situations where one cannot assure $\ddot{\phi}_c \approx 0$ or $V'(\phi_c) \approx 0$.

For the solution (8), one has

$$T_t{}^r = \left(\frac{2M}{r}\right)^2\left(\left(1+F''\right)\dot{\phi}_c^2 + F'\ddot{\phi}_c - \frac{F'}{4M}\dot{\phi}_c\right). \quad (10)$$

Also from (8), we see that, on the black hole horizon, the field $\phi$ assumes the value of $\phi_c$, propagated along a incoming light geodesic, but arriving with a certain "delay"[17]. Our quasi-stationary analysis neglects also such delay and, hence, in the quasi-stationary approximation

$$\phi_c(t) \approx \phi_\infty + \dot{\phi}_\infty(t - t_0), \quad (11)$$

with $\phi_\infty$ and $\dot{\phi}_\infty$ constants, we have

$$\dot{M} = 16\pi M^2\left(1+F''\right)\dot{\phi}_\infty^2 - 4\pi M F'\dot{\phi}_\infty. \quad (12)$$

For the minimal coupling case, $F(\phi) = 1$ and (12) reduces to the usual scalar field accretion rate[15]. It is clear, however, that for the nonminimally coupled case one could have, in principle, $\dot{M} < 0$ even in the absence of phantom modes. The rate (12) corresponds only to the accretion of the scalar field. The complete mass evolution equation is obtained by adding to the right-handed side a term $\propto M^{-2}$ corresponding to the Hawking radiation. As we will see in the next section, the fact that the two accretion terms in (12) have different signs and different powers of $M$ will imply in the existence of a critical mass $M_{\rm cr}$ delimiting the mass increasing and decreasing accretion regimes.

We finish this section by noticing that the possibility of negative energy fluxes for nonminimally coupled scalar fields and their implications for mass decreasing process involving black holes has been already considered previously in another context, namely in the investigation of the generalized second law of thermodynamics[18].

## III. MASS EVOLUTION

For a generic coupling function $F(\phi)$, the complete mass evolution equation has the general form

$$\dot{M} = f(t)M^2 - g(t)M - \frac{\alpha}{M^2}, \tag{13}$$

where $f(t)$ and $g(t)$ are smooth functions and $\alpha$ is a characteristic constant for Hawking radiation. Let us consider, initially, only the accretion process ($\alpha = 0$). By introducing $M(t) = G(t)P(t)$, with

$$G(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds}, \tag{14}$$

we obtain a separable equation for $P(t)$, which can be easily solved leading to the following solution for (13) with $\alpha = 0$

$$M(t) = \frac{M_0 G(t)}{1 - M_0 H(t)}, \tag{15}$$

where $M(t_0) = M_0$ and

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)G(s)\,ds. \tag{16}$$

Typically, if the denominator of (15) does not vanish, the mass $M(t)$ decreases according to (14) for positive $g(t)$. Mass increasing solutions appear when the denominator vanishes. For positive and well behaved $f(t)$ and $g(t)$, the function $H(t)$ will be monotonically increasing and bounded by $H_\infty = \lim_{t\to\infty} H(t)$, leading to a critical mass $M_{\rm cr} = H_\infty^{-1}$. Any black hole with initial mass $M_0$ such that $0 < M_0 < M_{\rm cr}$, even in the absence of Hawking radiation, will disappear due to the accretion of the scalar field, but such process typically will take an infinite amount of time. On the other hand, those black holes with initial masses $M_0 > M_{\rm cr}$ will grow by accreting the scalar field. In fact, in this case, the denominator of (15) vanishes for $t = t_{\rm cr}$, with $H(t_{\rm cr}) = {M_0}^{-1}$, implying that the black hole grows up to infinite mass in a finite time. The larger is the black hole initial mass $M_0$, the shorter is $t_{\rm cr}$. In contrast to the $0 < M_0 < M_{\rm cr}$ case, such behavior for $M_0 > M_{\rm cr}$ is similar to that one observed for the minimally coupled case $F = 1$. The qualitative evolution for the case $M_0 = M_{\rm cr}$ will depend on the details of the functions $f(t)$ and $g(t)$.

For situations with large $M_{\rm cr}$, the inclusion of Hawking radiation will alter qualitatively only the final instants of the mass decreasing process. In such a case, for $M_0 < M_{\rm cr}$, the black hole also disappears, but now in a finite time, since Hawking radiation dominates the process for $M(t) \ll 1$. In fact, for $M > M_{\rm cr}$, the Hawking radiation term can be neglected and the dynamics are essentially that one described by (15). Let us now consider some explicit examples of the coupling function $F(\phi)$ in order to elucidate these points.

### A. $F(\phi) = 1 + \xi\phi$

In this linear coupling case, equation (13) is autonomous, with $f(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2$ and $g(t) = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty$, and can be integrated by quadrature for any value of $\alpha$. We do not need, however, the exact solution here. We assume $\xi$ and $\phi$ to be both positive in order to avoid possible singularities[12] and, without loss of generality, $t_0 = 0$. The functions $G(t)$ and $H(t)$ are in this case

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t} \tag{17}$$

and

$$H(t) = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1 - G(t)\right). \tag{18}$$

For $\dot{\phi}_\infty$ positive, we have

$$M_{\rm cr} = \frac{\xi}{4}\dot{\phi}_\infty^{-1}, \tag{19}$$

and

$$t_{\rm cr} = \frac{1}{4\pi\xi\dot{\phi}_\infty}\log\frac{M_0}{M_0 - M_{\rm cr}}. \tag{20}$$

Notice that, for typical cosmological situations, $\dot{\phi}_\infty$ is small, implying in large values of $M_{\rm cr}$ for $\xi$ of the order of unity (in Planck units). In these cases, the Hawking radiation is important only in the final instants of the mass decreasing phase.

### B. $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$

We assume $\xi > 0$. We have $f(t) = 16\pi(1 + 2\xi)\dot{\phi}_\infty^2$ and $g(t) = 8\pi\xi\left(\phi_\infty\dot{\phi}_\infty + \dot{\phi}_\infty^2 t\right)$ in this case. The pertinent

functions are, for $t_0 = 0$,

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty t+\dot{\phi}_\infty^2 t^2\right)} \tag{21}$$

and

$$H(t) = 16\pi(1+2\xi)\dot{\phi}_\infty^2\int_0^t e^{-4\pi\xi\left(2\phi_\infty\dot{\phi}_\infty s+\dot{\phi}_\infty^2 s^2\right)}\,ds. \tag{22}$$

The critical mass is given by $M_{\rm cr} = H_\infty^{-1}$, with

$$H_\infty = 4\pi\frac{1+2\xi}{\sqrt{\xi}}\left|\dot{\phi}_\infty\right| e^{4\pi\xi\phi_\infty^2}\left[1-\sigma{\rm erf}\left(2\sqrt{\pi\xi}\phi_\infty\right)\right], \tag{23}$$

where $\sigma = {\rm sgn}\dot{\phi}_\infty$ and ${\rm erf}(x)$ is the error function[19]. For the typical cosmological situations we have that $\phi_\infty$ is very small, leading to

$$M_{\rm cr} \approx \frac{\sqrt{\xi}}{4\pi(1+2\xi)}\left|\dot{\phi}_\infty\right|^{-1}. \tag{24}$$

Notice that, as in the previous case, $M_{\rm cr}\propto\dot{\phi}_\infty^{-1}$.

### C. $F(\phi) = e^{\xi\phi}$

In this case, we have $f(t) = 16\pi\left(1+\xi^2 e^{\xi(\phi_\infty+\dot{\phi}_\infty t)}\right)\dot{\phi}_\infty^2$ and $g(t) = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty e^{\xi(\phi_\infty+\dot{\phi}_\infty t)}$, leading, for $t_0 = 0$, to

$$G(t) = \exp\left(-4\pi e^{\xi\phi_\infty}\left(e^{\xi\dot{\phi}_\infty t}-1\right)\right) \tag{25}$$

and

$$H(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2\int_0^t\left(1+\xi^2 e^{\xi(\phi_\infty+\dot{\phi}_\infty s)}\right)G(s)ds. \tag{26}$$

The critical mass is given by

$$M_{\rm cr}^{-1} = \frac{16\pi\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left[\frac{\xi^2}{4\pi}+\exp\left(4\pi e^{\xi\phi_\infty}\right)\Gamma\left(0,4\pi e^{\xi\phi_\infty}\right)\right], \tag{27}$$

where $\Gamma(z,x)$ is the incomplete Gamma function[19]. For $\phi_\infty$ small, we have

$$M_{\rm cr} \approx \frac{\xi}{a+4\xi^2}\dot{\phi}_\infty^{-1}, \tag{28}$$

where $a$ is a numerical constant of the order of unity, namely $a = 16\pi e^{4\pi}\Gamma(0,4\pi) \approx 3.72$. Again, we observe the same behavior $M_{\rm cr}\propto\dot{\phi}_\infty^{-1}$.

### D. Radiation era with $F(\phi) = 1+\xi\phi$

The previous examples involve only the nonminimally scalar field in the quasi-stationary approximation. This is not enough, for instance, to describe PBH, since they were created in the primordial universe and have existed for eras where dark energy was not the gravitationally dominant content of the universe. In the radiation dominated era, in particular, the universe was filled and dominated by ultra relativistic matter which energy density is described in Planck units by

$$\varepsilon_\gamma = \frac{3}{32\pi t^2}. \tag{29}$$

Such an energy density has been also available to be accreted by the black hole and should be incorporated in our analysis. The case of linear coupling $F(\phi) = 1+\xi\phi$ in the presence of radiation with energy density (29) corresponds to the choices $f(t) = 16\pi\dot{\phi}_\infty^2 + (3/2)t^{-2}$ and $g(t) = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty$. The $G(t)$ and $H(t)$ functions in this case are

$$G(t) = e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(t-t_0)} \tag{30}$$

and

$$H(t) = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1-G(t)\right)+\frac{3}{2}\int_{t_0}^t s^{-2}e^{-4\pi\xi\dot{\phi}_\infty(s-t_0)}\,ds, \tag{31}$$

leading to

$$H_\infty = \frac{4\dot{\phi}_\infty}{\xi}\left(1+\frac{3\xi e^\beta}{8\dot{\phi}_\infty t_0}\beta\Gamma(-1,\beta)\right), \tag{32}$$

with $\beta = 4\pi\xi\dot{\phi}_\infty t_0$. Since

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma(-1,x) = 1, \tag{33}$$

we have in the present case

$$M_{\rm cr} = H_\infty^{-1} \approx \frac{\xi}{4\dot{\phi}_\infty}\left(1+\frac{3\xi}{8\dot{\phi}_\infty t_0}\right)^{-1}, \tag{34}$$

if $\beta$ is small.

## IV. DISCUSSION

If we assume that $\dot{\phi}_\infty^2$ is of the same order of the critical density of the universe today ($\rho_0 \approx 10^{-29}{\rm g/cm}^3$), we have $M_{\rm cr}\approx 10^{56}g$ for coupling constants $\xi$ of the order of unity (in Planck units) in the three first cases considered in the last section, allowing all the black holes in the universe to be in the shrinking phase today. In fact, even the galactic supermassive black holes (SMBH) with $M\approx 10^6 M_\odot \approx 10^{39}$g are far below such a limit. These black holes would be shrinking today according to (15). The exact characteristic decaying time will depend on the particular coupling function. For the case of the linear coupling, the characteristic time is, according to (17), $10^{17}$s, similar to the universe age. Notice that all the other coupling functions considered in the last section lead, typically, to faster decreasing mass regimes.

The fact that there are likely many black hole around us might be used to constraint the nonminimally coupled energy content of the universe during the cosmological history. Let us consider, for simplicity, the last example of the previous section: the linear coupling case during the radiation dominated era. Suppose that the dark energy content of the universe has changed lightly after, say, $t_0 = 1$s. In this case, $\dot{\phi}_\infty t_0 \approx 10^{-18}$ in Planck units, justifying to take $\beta \approx 0$ in (32) and leading to $M_{\rm cr} \approx 10^{38}$g for a coupling constant $\xi$ of the order of unity. Thus, only PBH with mass greater than $10^{38}$g would escape from the shrink phase. Notice that this mass is extremely large if compared with the usual Hawking mass $M_{\rm H} = 10^{15}$g. Observational constraints on the PBH mass cutoff[4] could be used, in principle, to establish constraints on the non-minimal coupling parameter $\xi$, although the details depends on the coupling function $F(\phi)$. If we take $t_0 = 10^{11}$s, corresponding to the radiation-matter equality era, we will have $\dot{\phi}_\infty t_0 \approx 10^{-7}$, leading to $M_{\rm cr} \approx 10^{49}$g. This is, again, a huge mass and implies that virtually all black holes present at the end of radiation era have existed during all the matter dominated era in a shrinking regime. They should have lost two thirds of their mass by now, suggesting that observational data about SMBH could also be used to constraint the nonminimally coupled energy content of the universe.

We finish by noticing two points. First, one knows that it is not expected, in general, to have constant values for $\phi_\infty$ and $\dot{\phi}_\infty$ along the cosmological history. Equation (13) accommodates also situations where $\phi_\infty$ and $\dot{\phi}_\infty$ are functions of $t$. However, we should keep in mind that our formalism is based on the assumption of a quasi-stationary evolution, requiring $\ddot{\phi}_c(t) \approx 0$ in order to work properly. One needs to take backreaction into account in order to treat non stationary situations, see, for instance, [20] for a recent discussion.

The second point is related with the hypothesis that $\phi$ is a field test around a Schwarzschild black-hole. This is a good approximation provided that the energy content of the scalar field (dark energy) is negligible when compared with the black-hole Physics scale. For the much larger cosmological scale, on the other hand, the scalar field is indeed the dominant energy content, being the sole responsible for the accelerated expansion of the universe, usually described by a quasi-de Sitter solution. In our universe, these two scales are very different. Since the dark energy content is so small, in order to probe the quasi-de Sitter properties of the spacetime one needs to consider length scales of the same order of the Hubble radius. It is perfectly possible, in particular, to apply condition (9) in a region far from de black-hole (large $r$), but still far from the cosmological horizon. Furthermore, provided that the effective cosmological constant of the accelerated expansion is small, the dynamics near the black-hole horizon are essentially the same of the Schwarzschild case, implying that (12) is still valid. From a theoretical point of view, however, it is certainly interesting to consider the problem of accretion onto Schwarzschild-de Sitter black-holes as it is done, for instance, in [21] for the case of perfect fluids and minimally coupled fields. We already know, however, that our present analysis should arise naturally in the limit of small $\Lambda$. These points are now under investigation.

### Acknowledgments

This work was supported by FAPESP and CNPq.


[1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space Time*, Cambridge University Press (1973).

[2] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974); Comm. Mat. Phys. **43**, 199 (1975).

[3] B.J. Carr, *Primordial Black Holes as a Probe of Cosmology and High Energy Physics*, in *Quantum Gravity: From Theory to Experimental Search*, Ed. D. Giulini, C. Kiefer, and C. Lammerzahl, Lect. Notes Phys. **631**, 301 (2003), [arXiv:astro-ph/0310838].

[4] M. Schroedter, *et al.*, Astropart. Phys. **31**, 102 (2009).

[5] A. G. Riess, *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter, *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[6] P. J. E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003); T. Padmanabhan, Phys. Rept. **380**, 235 (2003).

[7] R. Bean and J. Magueijo, Phys. Rev. D **66**, 063505 (2002).

[8] J.D. Barrow, Phys. Rev. D **46**, R3227 (1992); J.D. Barrow and B.J. Carr, Phys. Rev. D **54**, 3920 (1996).

[9] E. Babichev, V. Dokuchaev and Yu. Eroshenko, Phys. Rev. Lett. **93**, 021102 (2004); J. Exp. Theor. Phys. **100**, 528 (2005) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **127**, 597 (2005)].

[10] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003); S. D. H. Hsu, A. Jenkins and M. B. Wise, Phys. Lett. B **597**, 270 (2004).

[11] T. Futamase and K.I. Maeda, Phys. Rev. **D39**, 399 (1989); T. Futamase, T. Rothman, and R. Matzner, Phys. Rev. **D39**, 405 (1989); S. Deser, Phys. Lett. **134B**, 419 (1984); Y. Hosotani, Phys. Rev. **D32**, 1949 (1985); O. Bertolami, Phys. Lett. **186B**, 161 (1987); S. Sonego and V. Faraoni, Class. Quant. Grav. **10**, 1185 (1993); V. Faraoni, Phys. Rev. D **53**, 6813 (1996); N. Bartolo and M. Pietroni, Phys. Rev. D **61**, 023518 (1999). C. Baccigalupi, S. Matarrese and F. Perrotta, Phys. Rev. D **62**, 123510 (2000); E. Gunzig, A. Saa, L. Brenig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho and A. Figueiredo, Phys. Rev. D **63**, 067301 (2001); A. Saa, E. Gunzig, L. Brenig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho and A. Figueiredo, Int. J. Theor. Phys. **40**, 2295 (2001); V. Faraoni, Int. J. Theor. Phys. **40**, 2259 (2001); F. C. Carvalho and A. Saa, Phys. Rev. D **70**, 087302 (2004).

[12] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig and A. Saa, Phys. Rev. D **67**, 027301 (2003); L. R. Abramo, L. Brenig,

E. Gunzig and A. Saa, Int. J. Theor. Phys. **42**, 1145 (2003); L. A. Elias and A. Saa, Phys. Rev. D **75**, 107301 (2007); M. F. Figueiro and A. Saa, Phys. Rev. D **80**, 063504 (2009).
[13] L. R. Abramo, L. Brenig and E. Gunzig, Phys. Lett. B **549**, 13 (2002).
[14] H. Bondi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **112**, 195 (1952).
[15] T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **83**, 2699 (1999).
[16] R. Akhoury, C.S. Gauthier, and A. Vikman, JHEP **03**, 082 (2009).
[17] A. Frolov and L. Kofman, JCAP **0305**, 009 (2003).
[18] L. H. Ford and T. A. Roman, Phys. Rev. D **64**, 024023 (2001).
[19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, (2007).
[20] J. A. Gonzalez and F. S. Guzman, Phys. Rev. D **79**, 121501R (2009).
[21] P. Martin-Moruno, A. E. Marrakchi, S. Robles-Perez and P. F. Gonzalez-Diaz, *Dark Energy Accretion onto black holes in a cosmic scenario*, arXiv:0803.2005 [gr-qc]; to appear in Gen. Relat. Grav.

# Referências


[1] H. Bondi, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **112**, 195 (1952).

[2] D. Merritt and L. Ferrarese, *Relationship of Black Holes to Bulges*, astro-ph/0107134v2 (2001).

[3] J.W. Moffat, *Do supermassive black holes exist at the center of galaxies?*, astro-ph/9704232 (1998).

[4] R. Bean, J. Magueijo, *Phys. Rev. D* **66**, 063505 (2002).

[5] K. J. Mack, J. P. Ostriker, M. Ricotti, *The Astro. J.* **665** 1277 (2007).

[6] N. Duchting, *Phys.Rev. D* **70** 064015 (2004).

[7] J. A. de Freitas Pacheco, J. E. Horvath *Class. Quantum Grav.* **24** 5427 (2007).

[8] D. C. Guariento, J. E. Horvath, J. A. F. Pacheco, P. S. Custodio, *Gen. Rel. Gravi.* **40** 1593 (2008).

[9] P. S. Custódio, J. E. Horvath, *Int. J. of Mod. Phys. D*, 14, 257 (2005).

[10] E. O. Babichev, V. I. Dokuchaev, Yu. N. Eroshenko, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 021102 (2004).

[11] E. Babichev, V. Dokuchaev and Yu. Eroshenko, *J. Exp. Theor. Phys.* **100**, 528 (2005).

[12] A.V. Frolov, L. Kofman, *J. Cosmol. and Astrophys. Phys.* **5**, 9 (2003).

[13] B. Carr, S. Hawking, *MNRAS* **168**, 399 (1974).

[14] B. Carr, *Lect. Notes Phys.* **631**, 301 (2003).

[15] M. Ricotti, J. P. Ostriker, K. J. Mack, *Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates*, arXiv:0709.0524v1

[16] B. Carr, S. Hawking, *Mon. Not. of the Roy. Astro. Soc.* **168**, 399 (1974).

[17] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space Time*, Cambridge University Press (1973).

[18] S. W. Hawking, Nature 248, 30 (1974).

[19] M. Schroedter, et al., *Astropart. Phys.* **31**, 102 (2009).

[20] B.J. Carr, *Primordial Black Holes as a Probe of Cosmology and High Energy Physics, in Quantum Gravity: From Theory to Experimental Search, Lect. Notes Phys.* **631**, 301 (2003).

[21] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).

[22] A. V. Filippenko,astro-ph/0410609 v1.

[23] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565. (1999).

[24] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).

[25] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).

[26] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582, (1998).

[27] P. J. Steinhardt, L. Wang, I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 12504-13 (1999).

[28] L. Amendola, *Phys. Rev. D* **62**, 043511 (2000).

[29] L. Amendola, *Phys. Lett. B* **301** 175 (1993).

[30] C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Supp.* **148**, 1 (2003).

[31] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, (1972).

[32] S. M. Carrol, *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity* (2004).

[33] T. Padmanabhan, *Cosmology and Astrophysics through problems*, Cambridge University Press (1996).

[34] T. M. Davis, C. H. Lineweaver, *Astronomical Society of Australia* **21**, 97 (2004).

[35] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 1753 (2006).

[36] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002).

[37] S.M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden, *Phys. Rev. D* **68**, 023509 (2003)

[38] S. D. H. Hsu, A. Jenkins and M. B. Wise, *Phys. Lett. B* **597**, 270 (2004).

[39] C. J. Feng, X.Z. Li, *Chaplygin gas and the cosmological evolution of alpha*, arXiv:0909.5476v1 (2009).

[40] Z. K. Guo, Y. Z. Zhang, *Phys. Lett. B* **645** 326 (2007).

[41] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory* (1993).

[42] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (1995).

[43] F. C. Carvalho, A. Saa, *Phys. Rev. D* **70** 087302 (2004).

[44] T. Futamase and K.I. Maeda, *Phys. Rev. D* **39**, 399 (1989).

[45] T. Futamase, T. Rothman, and R. Matzner, *Phys. Rev. D* **39**, 405 (1989).

[46] S. Deser, *Phys. Lett. B* **134**, 419 (1984).

[47] Y. Hosotani, *Phys. Rev. D* **32**, 1949 (1985).

[48] O. Bertolami, *Phys. Lett. B* **186**, 161 (1987).

[49] S. Sonego and V. Faraoni, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1185 (1993).

[50] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **53**, 6813 (1996).

[51] N. Bartolo and M. Pietroni, *Phys. Rev. D* **61**, 023518 (1999).

[52] C. Baccigalupi, S. Matarrese and F. Perrotta, *Phys. Rev. D* **62**, 123510 (2000).

[53] E. Gunzig, A. Saa, L. Brenig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho and A. Figueiredo, *Phys. Rev. D* **63**, 067301 (2001).

[54] A. Saa, E. Gunzig, L. Brenig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho and A. Figueiredo, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 2295 (2001).

[55] V. Faraoni, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 2259 (2001).

[56] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, A. Saa, *Phys. Rev. D* **67**, 027301 (2003).

[57] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig and A. Saa, *Phys. Rev. D* **67**, 027301 (2003).

[58] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig and A. Saa, *Int. J. Theor. Phys.* **42**, 1145 (2003).

[59] L. A. Elias and A. Saa, *Phys. Rev. D* **75**, 107301 (2007).

[60] M. F. Figueiro and A. Saa, *Phys. Rev. D* **80**, 063504 (2009).

[61] L. R. Abramo, L. Brenig and E. Gunzig, *Phys. Lett. B* **549**, 13 (2002).

[62] D. F. Torres, *Phys. Rev. D* **66**, 043522 (2002).

[63] J.D. Barrow, *Phys. Rev. D* **46**, R3227 (1992).

[64] J.D. Barrow and B.J. Carr, *Phys. Rev. D* **54**, 3920 (1996).

[65] S. Hawking, *Commun. math. Phys.* **43**, 199 (1975).

[66] V. F. Mukhanov, S.Winitzki, *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, Cambridge University Press (2007).

[67] D. B. Cline, D. A. Sanders, W. Hong, *The Astrophys. J.* **486**, 169 (1997).

[68] F. C. Michel, *Astronphys. Space Sci.* **15**, 153 (1972).

[69] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2699 (1999).

[70] M. Li, *J. Cosmol. and Astrophys. Phys.* **0610** 003 (2006).

[71] V. Faraoni, *Phys. Lett. A* **269** 209 (2000).

[72] D. F. Torres, *Phys. Lett. A* **225** 13 (1997).

[73] J. A. Gonzalez and F. S. Guzman, *Phys. Rev. D* **79**, 121501 (2009).

[74] M. G. Rodrigues, Tese de Doutoramento (2009).

[75] G. Allemandi, M. L. Ruggiero, *Gen. Relativ. Gravit.* **39** 1381 (2007).

[76] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (2005).

[77] P. Martin-Moruno, A. E. Marrakchi, S. Robles-Perez, P. F. Gonzalez-Diaz, *Gen. Relativ. Gravit.* **41** 2797 (2009).