

# Efeito dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings

Aluno: Alessandro Paulo Sérvio de Moura

Orientadora: Profa. Dra. Kyoko Furuya

dissertação submetida ao  
Instituto de Física "Gleb Wataghin"  
para a obtenção do título de Mestre

Universidade Estadual de Campinas

2 de abril de 1997

*Este exemplar corresponde à relação final  
da tese de mestrado defendida pelo aluno  
Alessandro Paulo Sérvio de Moura e aprovada  
pela comissão julgadora.*

*24/06/97 Kyoko Furuya*

**PARECER DE APROVAÇÃO  
DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE  
ALESSANDRO PAULO SÉRVIO DE MOURA**

**Data: 03 / 02 / 97**

**BANCA EXAMINADORA:**



- Profa. Dra. Kyoko Furuya (Orientadora)



- Prof. Dr. Henrique Elias Borges



- Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco

# Resumo

Em estudos do modelo de Jaynes-Cummings, a chamada *Aproximação de Onda Girante*, que consiste em desprezar os termos antiressonantes da Hamiltoniana de interação, é em geral assumida desde o início, devido (entre outras coisas) à extrema simplificação resultante no tratamento do problema. Neste trabalho, estudamos em detalhes a influência dos termos contra-girantes no modelo. Primeiramente, investigamos as diferenças na dinâmica do sistema devido a estes termos, em particular nos fenômenos de colapso e “revival”, bem conhecidos da óptica quântica. Comparamos os resultados fornecidos pela teoria de perturbações com aqueles obtidos por cálculo numérico, e analisamos exatamente em que condições os termos contra-girantes podem ser desprezados. Além disso, estudamos as propriedades de simetria do modelo, e descobrimos que uma nova simetria aparece no limite de acoplamento forte entre o átomo e o campo, o que dá origem a uma degenerescência dos níveis de energia do sistema neste limite.

# Abstract

In studies concerned with the Jaynes-Cummings model, the so-called *Rotating-Wave Approximation*, which consists in neglecting the counter-rotating terms in the interaction Hamiltonian, is in general adopted since the very beginning, due to (among other things) the extreme simplification which results. In our work, we study in detail the effects of the counter-rotating terms on the model. First, we investigate the differences in the system's dynamics due to these terms, in particular in connection to the phenomena of collapse and revival, well-known in quantum optics. We compare the results we get using perturbation theory with those obtained by direct numerical computation, and we analyse under which conditions the counter-rotating terms can be neglected. We also studied the model's symmetry properties, by using group-theoretical methods, and we found that a new symmetry appears in the strong coupling limit, which gives rise to an energy-level degeneracy in this limit.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar à Kyoko, por ter orientado este trabalho, e por ter contribuído com inúmeras sugestões e discussões; ao Sérgio Dutra e ao Antônio Vidiella-Barranco por suas valiosas sugestões, e pelo encorajamento; ao Daniel, ao Cláudio e ao Marcos por nossas conversas alucinadas sobre tudo (inclusive física); ao Adilson, pelo seu estímulo constante e ininterrupto; e finalmente à FAPESP, por ter fornecido o financiamento, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

# Conteúdo

|          |                                                                                                |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Quantização do Campo Eletromagnético em uma Cavidade</b>                                    | <b>7</b>  |
| 1.1      | Potenciais do Campo, Transformações de Gauge e Condições de Contorno em uma Cavidade . . . . . | 8         |
| 1.2      | Modos da Cavidade . . . . .                                                                    | 10        |
| 1.3      | Energia do Campo . . . . .                                                                     | 11        |
| 1.4      | Interação com um Átomo . . . . .                                                               | 16        |
| <b>2</b> | <b>O Modelo de Jaynes-Cummings e a Aproximação de Onda Girante</b>                             | <b>20</b> |
| 2.1      | A Aproximação de Onda Girante . . . . .                                                        | 25        |
| 2.2      | As Transições Anti-Ressonantes e a Conservação de Energia . .                                  | 30        |
| <b>3</b> | <b>Tratamento Perturbativo e Numérico dos Termos Contra-Girantes</b>                           | <b>33</b> |
| 3.1      | Tratamento perturbativo . . . . .                                                              | 34        |
| 3.2      | Correções nas energias . . . . .                                                               | 35        |
| 3.3      | Correções nos autoestados . . . . .                                                            | 36        |
| 3.4      | Evolução temporal com os termos contra-girantes . . . . .                                      | 38        |
| 3.5      | Comparação com o Cálculo Numérico . . . . .                                                    | 40        |
| <b>4</b> | <b>Simetrias no Modelo de Jaynes-Cummings</b>                                                  | <b>49</b> |
| 4.1      | Hamiltoniana Sem Interação . . . . .                                                           | 49        |
| 4.2      | Aproximação de Onda Girante . . . . .                                                          | 53        |
| 4.3      | Hamiltoniana Total . . . . .                                                                   | 55        |
| 4.4      | Hamiltoniana no Limite $\lambda \rightarrow \infty$ . . . . .                                  | 56        |
| 4.5      | Caso com “Detuning” . . . . .                                                                  | 59        |

# Introdução

O modelo de Jaynes-Cummings é o mais simples conhecido capaz de modelar a interação de um átomo com a radiação, e vem sendo extensamente usado em ótica quântica, para estudar aspectos básicos da interação da radiação com a matéria. A grande maioria dos estudos feitos com este modelo, no entanto, é realizada no contexto da aproximação de onda girante, por causa da simplificação resultante. Neste trabalho, estudamos os efeitos dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings, tanto em propriedades estáticas (ou seja, os autoestados e as autoenergias), como na dinâmica do sistema. Para isto, usamos métodos perturbativos, válidos quando o acoplamento entre o átomo e o campo é pequeno (o que é verdade em cavidades óticas reais), e também métodos numéricos, que não são limitados a casos de acoplamento fraco. Usando estes dois métodos conjuntamente, nós vemos quais são as novas características do comportamento do sistema causadas pelos termos contra-girantes, e tentamos interpretá-las com base no significado físico dos termos contra-girantes.

Este trabalho é dividido em quatro capítulos:

No capítulo 1, nós reobtemos a Hamiltoniana do sistema composto por um átomo interagindo com um campo eletromagnético em uma cavidade não-dissipativa, seguindo uma modificação de métodos canônicos de quantização encontrados em livros-texto. A diferença em nosso procedimento está em que nós aplicamos ao campo elétrico as condições de contorno correspondentes a uma cavidade cujas paredes são condutores perfeitos, em vez das condições de contorno periódicas comumente usadas, o que resulta em importantes diferenças físicas entre os resultados dos dois procedimentos.

No capítulo 2, mostramos as várias aproximações necessárias para se chegar à Hamiltoniana do modelo de Jaynes-Cummings a partir da Hamiltoniana obtida no primeiro capítulo, e em seguida estudamos o significado físico dos vários termos, mostrando então o que é a aproximação de onda girante e como ela é justificada. Em seguida, chegamos a algumas conclusões qualitativas sobre quais devem ser os efeitos dos termos contra-girantes.

No capítulo 3, nós primeiramente consideramos o caso em que o acoplamento entre o átomo e o campo é fraco, e usamos teoria de perturbação (independente do tempo) para calcular os efeitos dos termos contra-girantes nos

autoestados e autoenergias, e também na dinâmica do sistema. Em seguida, comparamos estes resultados com aqueles obtidos por diagonalização numérica da Hamiltoniana, e chegamos a uma condição para que os resultados perturbativos sejam válidos.

Finalmente, no capítulo 4, estudamos o papel das simetrias no modelo (com e sem termos contra-girantes), através da teoria de grupos, para entender um fenômeno de degenerescência que aparece no limite de acoplamento forte.

# Capítulo 1

## Quantização do Campo Eletromagnético em uma Cavidade

O tratamento completo da quantização do campo eletromagnético é um problema bastante complicado e que levou bastante tempo para ser resolvido de forma mais ou menos satisfatória, mesmo que para isso tenha tido que recorrer a procedimentos matemáticos complicados, como por exemplo a renormalização (ver por exemplo [1]).

Para os nossos objetivos, no entanto, não necessitamos de uma teoria completa do campo eletromagnético. O que vamos estudar aqui são os aspectos fundamentais da interação de um átomo (considerado como um sistema de dois níveis não-degenerados de energia) com um modo do campo eletromagnético no interior de uma cavidade perfeitamente condutora. O átomo que consideraremos é neutro, e move-se sempre com velocidades não-relativísticas em relação à cavidade; além disso, consideraremos sempre o átomo sendo pequeno o suficiente em relação ao comprimento de onda para que possamos fazer a aproximação dipolar da interação. Todas estas aproximações simplificam consideravelmente o problema da quantização; além de tudo isso, vamos considerar o campo eletromagnético como sempre estando restrito a uma cavidade, o que significa que os seus graus de liberdade passem a ser discretos, em vez de contínuos, o que também representa uma simplificação apreciável<sup>1</sup>.

Assim, em vez de proceder a uma quantização canônica usual, a partir de uma lagrangeana (como é feito em [2] e [3], por exemplo), vamos adotar uma abordagem mais simples, e que no entanto é genérica o suficiente para

---

<sup>1</sup>Na verdade, como toda cavidade sempre tem alguma dissipação, os modos do campo nunca são exatamente contínuos; consideraremos, no entanto, cavidades com um fator de qualidade bom o suficiente para que esta seja uma boa aproximação.

os nossos propósitos; por ser mais simples, a interpretação física das entidades matemáticas que vão aparecer é mais fácil e direta, sendo este o motivo principal que nos levou a adotá-lo.

Assim, procederemos da seguinte maneira: primeiramente, vamos quantizar o campo eletromagnético livre em uma cavidade, ou seja, vamos quantizar o campo na ausência de cargas; depois, introduziremos separadamente a interação do átomo e do campo. O método de quantização que empregaremos foi parcialmente inspirado em [4] e [5].

## 1.1 Potenciais do Campo, Transformações de Gauge e Condições de Contorno em uma Cavidade

Para fazer a quantização do campo eletromagnético, partimos da eletrodinâmica clássica, dada pelas equações de Maxwell (no vácuo)<sup>2</sup>:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0; \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Podemos reescrever as equações acima em termos dos potenciais  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  e  $\phi(\vec{r}, t)$ , definidos por:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}; \quad (1.5)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (1.6)$$

Com as definições acima, as equações (1.2) e (1.3) ficam identicamente satisfeitas; substituindo as eqs. (1.5) e (1.6) nas eqs. (1.1) e (1.4), obtemos as equações de movimento para os potenciais:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = 0; \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.8)$$

---

<sup>2</sup>Sobre a eletrodinâmica clássica, ver [6], [7], ou [8].

As equações (1.5) e (1.6) não determinam unicamente os potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$ ; os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são invariantes perante as chamadas *transformações de gauge*, dadas por:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla f; \quad (1.9)$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f, \quad (1.10)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo. Nos aproveitamos desta liberdade para escolher  $f$  tal que:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.11)$$

que é o chamado *gauge de Coulomb*<sup>3</sup>. Substituindo a eq.(1.11) em (1.7) e (1.8), teremos:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0; \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.13)$$

Vemos através das equações acima que no gauge de Coulomb o potencial vetorial  $\phi$  não é de fato uma variável dinâmica independente; na verdade, ele é determinado pela configuração instantânea de cargas no sistema, e portanto é uma função dos graus de liberdade translacionais das cargas. Na ausência de cargas, que é o caso que estamos tratando, podemos sempre escolher  $\phi = 0$  como solução da equação (1.13), desde que não haja campos de origem externa. Dessa maneira, a equação de movimento de  $\vec{A}$  assume a forma:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.14)$$

que é uma simples equação de onda sem fontes, onde as soluções se propagam à velocidade da luz  $c$ . Com o gauge de Coulomb, os campos elétrico e magnético são escritos apenas em função do potencial vetorial:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (1.15)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.16)$$

Nas paredes da cavidade, que assumimos serem perfeitamente condutoras, valem as condições de contorno usuais:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \implies \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = 0; \quad (1.17)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \implies \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A} = 0, \quad (1.18)$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal à superfície que delimita a cavidade.

---

<sup>3</sup>se o potencial vetorial  $\vec{A}$  é tal que  $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ , escolha  $f$  em (1.9) satisfazendo  $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \vec{A}$ .

## 1.2 Modos da Cavidade

Como estamos tratando de uma cavidade que delimita completamente os campos ao seu interior (estamos assumindo que suas paredes têm condutância infinita), podemos escrever o potencial vetorial  $\vec{A}$  como uma combinação linear de um conjunto discreto de funções ortonormais  $\vec{A}_\lambda^*(\vec{r})$ , onde  $\lambda$  é um conjunto de três índices discretos. Como o potencial vetor é uma função real, ele é escrito em termos dos modos  $\vec{A}_\lambda$  e  $\vec{A}_\lambda^*$  como:

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} \{ b_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) + b_{\lambda}^* \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \},$$

onde as funções  $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$  e  $\vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r})$  satisfazem as relações de ortonormalidade:

$$\frac{1}{V} \int d^3r \vec{A}_{\lambda} \cdot \vec{A}_{\lambda'} = \frac{1}{V} \int d^3r \vec{A}_{\lambda}^* \cdot \vec{A}_{\lambda'}^* = 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{V} \int d^3r \vec{A}_{\lambda} \cdot \vec{A}_{\lambda'}^* = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (1.20)$$

onde  $\lambda$  e  $\lambda'$  são dois modos quaisquer. Das expressões acima, vemos que  $\vec{A}_{\lambda}$  e  $\vec{A}_{\lambda}^*$  são adimensionais.

Os coeficientes  $b_{\lambda}$  e  $b_{\lambda}^*$  determinam completamente o potencial vetor dentro da cavidade, e por conseguinte os campos elétrico e magnético, pelas eqs.(1.15) e (1.16). Assim, em cada instante de tempo teremos diferentes  $b_{\lambda}$  e  $b_{\lambda}^*$ , dependendo da evolução temporal dos campos. Os coeficientes  $b_{\lambda}$  e  $b_{\lambda}^*$  são, portanto, dependentes do tempo. Teremos então:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \{ b_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) + b_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}^*(\vec{r}) \}. \quad (1.21)$$

Agora, substituindo a eq.(1.21) na eq.(1.14), e lembrando que os  $\vec{A}_{\lambda}$  só dependem de  $\vec{r}$ , enquanto que os  $b_{\lambda}$  só dependem do tempo, teremos as duas equações:

$$\nabla^2 \vec{A}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} = 0; \quad (1.22)$$

$$\ddot{b}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 b_{\lambda} = 0. \quad (1.23)$$

$\vec{A}_{\lambda}^*$  e  $b_{\lambda}^*$  satisfazem equações idênticas. A equação (1.22) é uma equação de autovalores do tipo Sturm-Liouville, o que significa que as funções  $\vec{A}_{\lambda}$  e  $\vec{A}_{\lambda}^*$  formam um conjunto completo: qualquer função espacial na cavidade pode ser expressa como combinação linear destas funções. Além disso, os modos  $\vec{A}_{\lambda}$  satisfazem às condições de contorno nas paredes da cavidade:

$$\vec{n} \times \vec{A}_{\lambda} = \vec{n} \times \vec{A}_{\lambda}^* = 0; \quad (1.24)$$

e

$$\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A}_\lambda = \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A}_\lambda^* = 0, \quad (1.25)$$

como pode ser visto através das equações (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) e (1.14). A condição (1.11) do gauge de Coulomb é escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{A}_\lambda = \nabla \cdot \vec{A}_\lambda^* = 0. \quad (1.26)$$

A eq.(1.22) é a *equação de Helmholtz*, que deve ser resolvida para que possamos determinar os modos  $\vec{A}_\lambda$ . As suas soluções  $\vec{A}_\lambda$  e  $\vec{A}_\lambda^*$  dependem unicamente da geometria da cavidade, através das condições de contorno (1.24) e (1.25). Não vamos especificar aqui a nenhuma geometria em particular, e vamos admitir que a eq.(1.22) já foi resolvida e que sabemos quais são os modos da cavidade. Para exemplos específicos de cavidades com vários tipos de simetria, ver por exemplo [8].

A equação (1.23) mostra que (no vácuo) os coeficientes  $b_\lambda$  e  $b_\lambda^*$  têm dependência senoidal com o tempo:

$$b_\lambda(t) = b_\lambda(t_0)e^{i\omega_\lambda(t-t_0)}; \quad (1.27)$$

$$b_\lambda^*(t) = b_\lambda^*(t_0)e^{-i\omega_\lambda(t-t_0)}. \quad (1.28)$$

As constantes  $b_\lambda(t_0)$  e  $b_\lambda^*(t_0)$  são determinadas a partir do estado inicial  $\vec{A}(\vec{r}, t_0)$  do campo, através da eq.(1.21).

### 1.3 Energia do Campo

Vamos agora escrever a energia total do campo na cavidade, que é dada pela expressão:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (E^2 + H^2). \quad (1.29)$$

Usando as expressões (1.15) e (1.16) para os campos elétrico e magnético, a expansão (1.21) do potencial vetor, e usando também as eqs.(1.27) e (1.28), escrevemos a energia  $H$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, \lambda'} \int d^3r \left\{ b_\lambda b_{\lambda'} (\nabla \times \vec{A}_\lambda) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda'}) + b_\lambda^* b_{\lambda'}^* (\nabla \times \vec{A}_\lambda^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda'}^*) + \right. \\ & \left. b_\lambda b_{\lambda'}^* (\nabla \times \vec{A}_\lambda) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda'}^*) + b_\lambda^* b_{\lambda'} (\nabla \times \vec{A}_\lambda^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda'}) \right\} + \\ & \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\omega_\lambda \omega_{\lambda'}}{c^2} \int d^3r \left\{ b_\lambda b_{\lambda'} \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_{\lambda'} + b_\lambda^* b_{\lambda'}^* \vec{A}_\lambda^* \cdot \vec{A}_{\lambda'}^* + \right. \\ & \left. b_\lambda b_{\lambda'}^* \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_{\lambda'}^* + b_\lambda^* b_{\lambda'} \vec{A}_\lambda^* \cdot \vec{A}_{\lambda'} \right\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Usando a eq.(1.19), vemos que o primeiro e o segundo termo de cada integral tem contribuição nula; usando a eq.(1.20), chegamos à expressão seguinte para  $H$ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda} b_{\lambda}^* b_{\lambda} \int d^3r \left[ (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}) + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda}^* \cdot \vec{A}_{\lambda} \right]. \quad (1.31)$$

Vamos usar agora a seguinte identidade vetorial, válida para quaisquer vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ :

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}. \quad (1.32)$$

Fazendo  $\vec{b} = \nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*$  e  $\vec{a} = \vec{A}_{\lambda}$ , teremos:

$$\nabla \cdot (\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)) = (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}) + \vec{A}_{\lambda} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*. \quad (1.33)$$

Usando a relação:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}_{\lambda}^* = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}_{\lambda}^*) - \nabla^2 \vec{A}_{\lambda}^*; \quad (1.34)$$

como (1.26)  $\nabla \cdot \vec{A}_{\lambda}^* = 0$ , a equação (1.33) fica:

$$\nabla \cdot (\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)) = (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}) + \vec{A}_{\lambda} \cdot \nabla^2 \vec{A}_{\lambda}^*. \quad (1.35)$$

Usando agora a equação de Helmholtz (1.22), temos:

$$\nabla \cdot (\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)) = (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}) - \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} \cdot \vec{A}_{\lambda}^*. \quad (1.36)$$

Substituindo esta identidade na equação para a energia (1.29), teremos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} b_{\lambda}^* b_{\lambda} \int d^3r \left[ \vec{A}_{\lambda}^* \cdot \vec{A}_{\lambda} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)) \right]. \quad (1.37)$$

Usando o teorema de Gauss, vemos que o segundo termo do integrando se transforma em uma integral de superfície:

$$\begin{aligned} \int d^3r \nabla \cdot [\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)] &= \int [\vec{A}_{\lambda} \times (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*)] \cdot \vec{n} dS \\ &= \int (\vec{n} \times \vec{A}_{\lambda}) \cdot (\nabla \times \vec{A}_{\lambda}^*) dS; \end{aligned} \quad (1.38)$$

Levando em conta a condição de contorno (1.24), vemos que a expressão acima é nula. Lembrando que podemos sempre escolher as funções  $\vec{A}_{\lambda}$  e  $\vec{A}_{\lambda}^*$  tais que elas sejam ortonormais, a equação (1.37) reduz-se simplesmente a:

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}^2}{2\pi c^2} V b_{\lambda}^* b_{\lambda}, \quad (1.39)$$

onde  $V$  é o volume da cavidade.

Vamos agora definir as variáveis dinâmicas  $q_\lambda$  e  $p_\lambda$  através das relações:

$$q_\lambda = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(b_\lambda + b_\lambda^*); \quad (1.40)$$

$$p_\lambda = i\sqrt{\frac{V\omega_\lambda^2}{4\pi c^2}}(b_\lambda^* - b_\lambda). \quad (1.41)$$

Invertendo as relações acima:

$$b_\lambda = \sqrt{\frac{\pi c^2}{V}}\left(q_\lambda + \frac{i}{\omega_\lambda}p_\lambda\right); \quad (1.42)$$

$$b_\lambda^* = \sqrt{\frac{\pi c^2}{V}}\left(q_\lambda - \frac{i}{\omega_\lambda}p_\lambda\right). \quad (1.43)$$

Substituindo as expressões acima na expressão (1.39) para a energia total do campo na cavidade, teremos:

$$\mathcal{H} = \sum_\lambda \frac{1}{2} (p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2). \quad (1.44)$$

A expressão para a energia  $H$  acima é exatamente a mesma que a expressão para a energia de uma coleção de osciladores harmônicos unidimensionais independentes de massa unitária, cada modo do campo na cavidade correspondendo a um oscilador, se interpretarmos  $q_\lambda$  como a coordenada do oscilador, e  $p_\lambda$  como o momento conjugado; usando as equações (1.27) e (1.28), juntamente com as relações (1.40) e (1.41), vemos que vale a relação:

$$p_\lambda = \dot{q}_\lambda, \quad (1.45)$$

o que é natural, se lembrarmos que cada modo corresponde a um oscilador harmônico de massa unitária.

Assim, *postulamos* que as quantidades  $q_\lambda$  e  $p_\lambda$  definidas por (1.40) e (1.41) são a coordenada generalizada e o momento canonicamente conjugado da Hamiltoniana (1.44). Assim, para quantizar o sistema descrito por esta Hamiltoniana, vamos passar das funções  $p_\lambda$  e  $q_\lambda$  para os operadores  $\hat{p}_\lambda$  e  $\hat{q}_\lambda$  correspondentes, distinguidos das funções clássicas pelo “chapéu” ( $\hat{\phantom{x}}$ ), e que estão ligados pela condição de quantização de Dirac:

$$[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_\lambda] = i\hbar. \quad (1.46)$$

Daqui por diante, usaremos o símbolo ( $\hat{\phantom{x}}$ ) para denotar um operador quântico.

Como os vários modos do campo são independentes uns dos outros, os operadores correspondentes a modos diferentes devem comutar entre si:

$$[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_{\lambda'}] = i\hbar\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.47)$$

A partir das coordenadas  $q_\lambda$  e dos momentos conjugados  $\hat{p}_\lambda$ , podemos definir os operadores adimensionais de criação e aniquilação para cada modo:

$$\hat{a}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \left( q_\lambda + \frac{i}{\omega_\lambda} \hat{p}_\lambda \right); \quad (1.48)$$

$$\hat{a}_\lambda^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \left( q_\lambda - \frac{i}{\omega_\lambda} \hat{p}_\lambda \right). \quad (1.49)$$

Estes operadores satisfazem a conhecida regra de comutação:

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\lambda^\dagger] = 1. \quad (1.50)$$

Invertendo as relações (1.48) e (1.49), e substituindo na expressão da Hamiltoniana, encontramos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left( \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right). \quad (1.51)$$

Os operadores  $\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$ , como está demonstrado em todos os livros-textos básicos de física quântica, só têm autovalores inteiros positivos; assim, em cada modo  $\lambda$  do campo a energia é quantizada em múltiplos de  $\hbar\omega$ , e a energia total, portanto, tem os valores permitidos:

$$E = \sum_\lambda \left( n_\lambda + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_\lambda. \quad (1.52)$$

Os números de excitação  $n_\lambda$  nos dão o número de fótons do modo  $\lambda$  do campo, onde consideramos fótons aqui como significando o número de excitações fundamentais daquele modo. O operador de aniquilação  $\hat{a}_\lambda$  destrói um fóton no modo  $\lambda$ , e o operador de criação  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  cria um fóton.

Comparando as expressões (1.42) e (1.43) com (1.48) e (1.49), vemos que os operadores  $\hat{a}_\lambda$  e  $\hat{b}_\lambda$  são múltiplos:

$$\hat{a}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega_\lambda V}{2\pi c^2 \hbar}} \hat{b}_\lambda; \quad \hat{a}_\lambda^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_\lambda V}{2\pi c^2 \hbar}} \hat{b}_\lambda^\dagger. \quad (1.53)$$

Assim, os operadores  $\hat{a}_\lambda$  e  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  também satisfazem a equação de movimento (1.23). No espaço livre, portanto, estes operadores evoluem harmonicamente:

$$\hat{a}_\lambda(t) = \hat{a}_\lambda(t_0) e^{i\omega_\lambda t}; \quad (1.54)$$

$$\hat{a}_\lambda^\dagger(t) = \hat{a}_\lambda^\dagger(t_0)e^{-i\omega_\lambda t}. \quad (1.55)$$

Substituindo a relação acima na equação (1.21), escrevemos o operador potencial vetor em termos dos operadores de aniquilação e criação:

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_\lambda V}} \left\{ \hat{a}_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{A}_\lambda^*(\vec{r}) \right\}. \quad (1.56)$$

Vamos definir por conveniência as funções:

$$\vec{\mathcal{A}}_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_\lambda V}} \vec{A}_\lambda; \quad \vec{\mathcal{A}}_\lambda^* = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_\lambda V}} \vec{A}_\lambda^*. \quad (1.57)$$

Usando estas definições, o potencial vetorial é escrito simplesmente:

$$\hat{\vec{A}} = \sum_\lambda \left\{ \hat{a}_\lambda \vec{\mathcal{A}}_\lambda(\vec{r}) + \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{\mathcal{A}}_\lambda^*(\vec{r}) \right\}. \quad (1.58)$$

Usando agora a equação (1.15), escrevemos o operador do campo elétrico em função dos operadores de criação e aniquilação:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} &= i \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega^2}{\omega_\lambda V}} \left( \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{\mathcal{A}}_\lambda^* - \hat{a}_\lambda \vec{\mathcal{A}}_\lambda \right) = \\ &= i \sum_\lambda \omega_\lambda \left( \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{\mathcal{A}}_\lambda^* - \hat{a}_\lambda \vec{\mathcal{A}}_\lambda \right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Definimos então:

$$\vec{E}_\lambda = -i\omega_\lambda \vec{\mathcal{A}}_\lambda. \quad (1.60)$$

Ficamos então com a simples expressão:

$$\hat{\vec{E}} = \sum_\lambda \left( \hat{a}_\lambda \vec{E}_\lambda + \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{E}_\lambda^* \right). \quad (1.61)$$

Lembramos que  $\vec{A}_\lambda$  e  $\vec{E}_\lambda$  são funções espaciais; elas *não* são operadores.

A quantidade  $\vec{E}_\lambda$  pode ser heurísticamente considerada como o campo elétrico devido a um único fóton. Esta não é uma interpretação rigorosa, pois um campo com um número bem definido de fótons, ou seja, um autoestado da Hamiltoniana (1.51), não é ao mesmo tempo um autoestado do operador campo elétrico (1.61).

Usando a expressão (1.16), encontramos o operador campo magnético:

$$\hat{\vec{H}} = \sum_\lambda \left( \hat{a}_\lambda \vec{H}_\lambda + \hat{a}_\lambda^\dagger \vec{H}_\lambda^* \right), \quad (1.62)$$

onde definimos:

$$\vec{H}_\lambda = \nabla \times \vec{A}_\lambda. \quad (1.63)$$

Da mesma maneira que com o campo elétrico, podemos considerar  $\vec{H}_\lambda$  como o campo magnético devido a um fóton, com as mesmas ressalvas.

Vamos agora discutir uma importante questão: a diferença entre os campos em uma cavidade com paredes condutoras, e o campo no espaço vazio. A maioria dos livros de óptica quântica faz a quantização do campo no espaço livre, através do seguinte procedimento (ver por exemplo [5]): admite-se que o campo está restrito a uma caixa cúbica de lado  $L$ , e impõem-se condições periódicas de contorno aos campos; em seguida, fazemos  $L \rightarrow \infty$ , e temos os campos quantizados para o espaço livre. Mas os campos dentro de uma cavidade condutora são bastante diferentes dos campos livres, mesmo que façamos as paredes irem para o infinito. Comparando as expressões (1.59) e (1.62) dos campos elétrico e magnético dentro de uma cavidade, vemos que estes oscilam sempre com uma defasagem de  $\pi/2$ , enquanto que no espaço livre eles oscilam em fase. Além disso, dentro das cavidades, devido às condições de contorno das paredes, vão haver pontos (nodos) onde os campos serão nulos, para todos os tempos. Estes são os pontos onde  $\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = 0$ . Os nodos não estão presentes no espaço vazio.

Uma outra diferença entre as duas situações é o papel das “coordenadas” e momentos conjugados  $q_\lambda$  e  $\hat{p}_\lambda$ . Suponha que os modos  $\vec{A}_\lambda$  sejam reais, ou seja,  $\vec{A}_\lambda = \vec{A}_\lambda^*$ . Neste caso, o campo elétrico e o campo magnético ficam:

$$\vec{E} = \sum_\lambda i\omega_\lambda \vec{A}_\lambda (\hat{a}_\lambda^\dagger - \hat{a}_\lambda) = i \sum_\lambda \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega_\lambda}} \vec{E}_\lambda \hat{p}_\lambda; \quad (1.64)$$

$$\vec{H} = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\omega_\lambda}{\hbar}} \vec{H}_\lambda q_\lambda. \quad (1.65)$$

Assim, se os modos  $\vec{A}_\lambda$  (ou  $\vec{A}_\lambda$ ) forem reais, o campo elétrico  $\vec{E}_\lambda$  será então proporcional ao momento  $\hat{p}_\lambda$ , e o campo magnético  $\vec{H}_\lambda$  será proporcional à “coordenada”  $q_\lambda$ . Se escolhermos os modos  $\vec{A}_\lambda$  puramente imaginários, os papéis de  $q_\lambda$  e  $\hat{p}_\lambda$  invertem-se. Esta simples relação entre os campos e as variáveis dinâmicas não existe no caso de o campo estar no espaço livre; neste caso, não existe nenhuma interpretação física simples do significado das coordenadas e dos momentos, como a que temos aqui.

## 1.4 Interação com um Átomo

Até agora estivemos tratando do campo livre em uma cavidade, mas na verdade estamos interessados na interação do campo eletromagnético com um átomo.

Para introduzir esta interação, deveríamos começar da Lagrangiana clássica do eletromagnetismo, obter os momentos conjugados e a Hamiltoniana clássica, e aplicar o procedimento de quantização canônica de Dirac para chegar em uma versão quântica da teoria. Novamente, não vamos seguir este procedimento; o que faremos aqui vai ser introduzir o termo de interação *ad hoc*, fazendo várias aproximações, de uma maneira bem mais simples do que a quantização canônica, e onde temos interpretações físicas mais diretas.

Se tivermos apenas um átomo dentro da cavidade, esperamos que a Hamiltoniana total do sistema átomo + campo seja da forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_a + \hat{H}_i, \quad (1.66)$$

onde  $\hat{H}_c$  é a Hamiltoniana do campo isoladamente (ou seja, sem a presença do átomo),  $\hat{H}_a$  é a Hamiltoniana do átomo isoladamente, e  $\hat{H}_i$  descreve a interação do campo com o átomo. Nós já encontramos a Hamiltoniana do campo na seção anterior:

$$\hat{H}_c = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left( \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.67)$$

$\hat{H}_a$  vai depender de com qual átomo estamos lidando. Nós vamos supor que  $\hat{H}_a$  é bem conhecida, e que sabemos quais são todos os seus autoestados e autoenergias, ou seja, supomos resolvida a equação de Schrodinger independente do tempo para  $\hat{H}_a$ . Denotaremos o conjunto de autoenergias e autoestados de  $\hat{H}_a$  por  $\{E_i\}$  e  $\{|\Psi_i\rangle\}$ , respectivamente, onde  $i$  representa o conjunto de índices necessários para numerar os autoestados:

$$\hat{H}_a |\Psi_i\rangle = E_i |\Psi_i\rangle. \quad (1.68)$$

Vamos agora introduzir os operadores  $\sigma_{ij}$ , definidos por:

$$\sigma_{ij} = |\Psi_i\rangle \langle \Psi_j|. \quad (1.69)$$

Usando estes operadores, a Hamiltoniana atômica escreve-se na forma:

$$\hat{H}_a = \sum_i E_i \sigma_{ii}. \quad (1.70)$$

Agora, temos que descobrir qual é a Hamiltoniana de interação átomo-campo  $\hat{H}_i$ , para completar o trabalho. Para isso, vamos fazer algumas simplificações.

Estamos interessados aqui em campos óticos, ou seja, com comprimentos de onda da ordem de alguns milhares de angstroms, enquanto que o tamanho típico de um átomo é de apenas alguns angstroms. Assim, estamos no caso

onde os comprimentos de onda dos campos na cavidade são muito maiores do que o tamanho do átomo, ou seja, podemos desprezar a variação espacial dos campos ao longo da extensão do átomo. Os campos vêem o átomo como um ponto. Como o átomo é neutro, o campo só “vê” o dipolo do átomo. Podemos considerar, portanto, o átomo como sendo um dipolo, no que concerne à sua interação com o campo.

Além da aproximação de interação dipolar, vamos desprezar a influência do campo magnético  $\vec{H}$ , o que pode ser feito tranquilamente, pois as contribuições magnéticas são muito menores que o termo de interação do campo elétrico com o dipolo atômico[5].

Assim, o termo de interação  $\hat{H}_i$  é a interação do dipolo atômico  $\vec{d}$  com o campo elétrico  $\vec{E}$ . No eletromagnetismo clássico, a energia de interação de um dipolo elétrico com um campo externo é:

$$H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (1.71)$$

onde  $\vec{d}$  é o vetor momento de dipolo do átomo.

Mas o campo elétrico presente na cavidade não é um campo externo: ele faz parte do sistema, tem graus de liberdade próprios, que evoluem no tempo de acordo com a Hamiltoniana. Neste caso, pode ser mostrado (ver [2]) que a Hamiltoniana de interação é dada por:

$$\hat{H}_{int} = -\vec{d} \cdot \hat{\vec{D}}, \quad (1.72)$$

onde  $\hat{\vec{D}}$  é o deslocamento elétrico:

$$\hat{\vec{D}} = \hat{\vec{E}} + 4\pi\hat{\vec{P}}, \quad (1.73)$$

sendo  $\hat{\vec{P}}$  a polarização. Em nosso caso, temos apenas um átomo, que aproximamos por um dipolo pontual:

$$\hat{\vec{P}} = \vec{d}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (1.74)$$

onde  $\vec{r}_0$  é a posição do átomo. Assim, a energia de interação (1.72) é composta de dois termos: o primeiro é  $-\vec{d} \cdot \hat{\vec{E}}$ , e o segundo é um termo divergente proporcional a  $d^2$ , que é a autoenergia do dipolo pontual. Vamos desprezar este segundo termo divergente, e renormalizar a Hamiltoniana, ficando novamente com a expressão (1.71). O campo elétrico  $\hat{\vec{E}}$  é dado pela mesma soma (1.61) nos modos do caso em que não havia átomo na cavidade e o campo era livre, com a diferença de que os operadores de criação e aniquilação  $\hat{a}_\lambda$  e  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  não evoluem mais harmonicamente no tempo, como no caso de campo livre; agora,

devido à interação com o dipolo atômico, a evolução temporal do campo é mais complexa.

Usando os operadores  $\sigma_{ij}$  introduzidos em (1.69) e (1.68), podemos escrever o operador momento de dipolo na forma:

$$\hat{\vec{d}} = \sum_{ij} \sigma_{ij} \vec{d}_{ij}, \quad (1.75)$$

onde

$$\vec{d}_{ij} = \langle \Psi_i | \hat{\vec{d}} | \Psi_j \rangle = \vec{d}_{ij}^*. \quad (1.76)$$

A Hamiltoniana de interação fica então:

$$\hat{H}_{int} = - \sum_{ij} \sum_{\lambda} \left\{ \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}_{\lambda} \sigma_{ij} \hat{a}_{\lambda} + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}_{\lambda}^* \sigma_{ij} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \right\}; \quad (1.77)$$

## Capítulo 2

# O Modelo de Jaynes-Cummings e a Aproximação de Onda Girante

No final do capítulo anterior, chegamos à Hamiltoniana total do sistema composto por um único átomo interagindo com o campo eletromagnético no interior de uma cavidade com paredes perfeitamente condutoras (ou seja, com dissipação nula), na aproximação dipolar. O resultado é a eq.(1.77), que reescrevemos aqui:

$$H_{int} = - \sum_{ij} \sum_{\lambda} \left\{ \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}_{\lambda} \sigma_{ij} a_{\lambda} + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}_{\lambda}^* \sigma_{ij} a_{\lambda}^{\dagger} \right\}; \quad (2.1)$$

No capítulo anterior, usamos o “chapéu” ( $\hat{\phantom{x}}$ ) para denotar um operador quântico. A partir de agora, como usaremos exclusivamente as variáveis quânticas, vamos deixar de usar esta convenção, sem risco de confusão.

Vemos da equação acima que todos os modos  $\lambda$  do campo e todos os níveis do átomo contribuem para a Hamiltoniana, o que torna a dinâmica do sistema extremamente complexa. Vamos tentar simplificar o problema através de algumas aproximações.

Suponha que a geometria da cavidade seja ajustada de tal maneira que dois dos níveis atômicos tenham uma frequência de transição  $\omega_0$  muito próxima à frequência  $\omega$  de um dos modos da cavidade; se este modo estiver suficientemente separado em frequência dos modos vizinhos, ou seja, se os intervalos de frequência para os modos vizinhos forem (em módulo) muito maiores que a largura espectral da transição entre os dois estados, então a transição entre estes dois níveis vai excitar praticamente apenas este modo de frequência  $\omega$ . Se garantirmos ainda (utilizando regras de seleção, por exemplo) que apenas aqueles dois níveis vão ter uma probabilidade não desprezível de estarem

ocupados, então só precisamos levar em conta os dois níveis e o modo  $\omega$ , e podemos esquecer todos os outros níveis atômicos e modos do campo; obtemos então uma considerável simplificação em nosso modelo: podemos considerar a cavidade como tendo apenas um modo, e podemos considerar o átomo como um sistema de dois níveis (que vamos admitir que sejam não degenerados), com autoenergias  $E_g < E_e$  e autoestados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ .

O dipolo atômico  $\vec{d} = e\vec{r}$  é um operador ímpar com respeito à inversão pelo centro do átomo ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ). A Hamiltoniana atômica  $H_a$  é invariante perante esta operação, o que significa que os autoestados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  têm paridade bem definida. Assim, os elementos de matriz  $\langle e|\vec{d}|e\rangle$  e  $\langle g|\vec{d}|g\rangle$  são necessariamente nulos, pois sendo  $\Psi_e(\vec{r}) = \langle \vec{r}|e\rangle$ , temos:

$$\langle e|\vec{d}|e\rangle = e \int d^3r |\Psi_e(\vec{r})|^2 \vec{r}. \quad (2.2)$$

A integral varre todo o espaço, e o integrando é uma função ímpar, logo a integral é nula. O mesmo raciocínio vale para  $\langle g|\vec{d}|g\rangle$ .

Assim, para um átomo de dois níveis, o operador  $\vec{d}$  tem elementos diagonais nulos na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ . Adotando a notação:

$$\sigma_{eg} = |e\rangle\langle g| = \sigma^+, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ge} = |g\rangle\langle e| = \sigma^-, \quad (2.4)$$

teremos:

$$\vec{d} = \vec{k}\sigma^- + \vec{k}^*\sigma^+, \quad (2.5)$$

onde  $\vec{k} = \langle g|\vec{d}|e\rangle$ . Assim, a Hamiltoniana total do sistema fica:

$$\begin{aligned} H = & \hbar\omega a^\dagger a + E_e\sigma_{ee} + E_g\sigma_{gg} \\ & - \{ \vec{k} \cdot \vec{E}\sigma^- a + \vec{k} \cdot \vec{E}^*\sigma^- a^\dagger \\ & + \vec{k}^* \cdot \vec{E}\sigma^+ a + \vec{k}^* \cdot \vec{E}^*\sigma^+ a^\dagger \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  é o modo do campo elétrico, e  $\omega$  é a frequência do modo.

Escolhendo o modo  $\vec{E}$  como sendo real (o que podemos fazer, pois estamos tratando de um único modo), e ajustando a fase relativa de  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  para que  $\vec{k}$  seja real (o que também podemos fazer, já que os autoestados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  são definidos a menos de um número complexo de módulo unitário), podemos então definir a *constante de acoplamento*  $g$ , dada por:

$$g = -\vec{k} \cdot \vec{E}. \quad (2.7)$$

Assim, a Hamiltoniana total fica:

$$\begin{aligned} H = & \hbar\omega a^\dagger a + E_e\sigma_{ee} + E_g\sigma_{gg} \\ & + g(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Do mesmo modo que  $\vec{E}$ ,  $g$  depende da posição. Se o modo tiver nodos, ou seja, pontos onde  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ , o átomo e o campo não interagem nestes pontos.

Vamos agora reescrever a eq.(2.8) em uma forma mais conveniente. Na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , a Hamiltoniana atômica  $H_a$  é escrita:

$$H_a = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_e - E_g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_g. \quad (2.9)$$

Assim, a menos de um deslocamento na origem das energias, a Hamiltoniana atômica é:

$$H_a = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Usando as equações (2.3) e (2.4), vemos que:

$$H_a = \hbar\omega_0 \sigma^+ \sigma^-. \quad (2.11)$$

Assim, a Hamiltoniana total fica:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 \sigma^+ \sigma^- + \hbar g(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+). \quad (2.12)$$

Podemos escrever  $H_a$  ainda de outra maneira, fazendo um deslocamento de  $\hbar\omega_0/2$  na origem das energias na eq.(2.11):

$$H_a = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z, \quad (2.13)$$

onde  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  é a matriz de Pauli da componente  $z$  do momento angular para uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$ . Desta maneira, a Hamiltoniana completa é escrita:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar g(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+). \quad (2.14)$$

Os operadores  $\sigma_z$ ,  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$  estão ligados pela regra de comutação:

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma_z. \quad (2.15)$$

Os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  são operadores de aniquilação e criação bosônicos:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (2.16)$$

enquanto que os operadores  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$  são operadores de aniquilação e criação fermiônicos:

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = 1. \quad (2.17)$$

Esta diferença no caráter dos comutadores dos existe porque o átomo (em nosso modelo) tem apenas dois níveis, enquanto que o campo tem infinitos níveis de energia.

Para simplificar a notação, adotaremos um sistema de unidades em que  $\hbar = 1$ , e  $\omega = 1$ ; a Hamiltoniana do sistema fica então

$$H = a^\dagger a + w\sigma^+\sigma^- + \lambda(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+), \quad (2.18)$$

ou

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}w\sigma_z + \lambda(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+), \quad (2.19)$$

onde

$$m = \frac{\omega_0}{\omega}; \quad \lambda = \frac{g}{\omega}. \quad (2.20)$$

A constante  $g$  é a frequência na qual a energia é trocada entre o átomo e o campo, quando o átomo está inicialmente no estado excitado, e o campo está inicialmente no vácuo (ou seja,  $g$  é a frequência de Rabi do vácuo). Assim,  $\lambda$  é a razão entre a frequência de Rabi do vácuo e a frequência do campo, que é muito pequena em experimentos com cavidades de baixa dissipação e átomos de Rydberg (da ordem de  $10^{-5}$ ).

Vamos discutir agora o significado físico dos termos que aparecem na Hamiltoniana. Para isso, reescrevemos a eq.(2.19) na forma:

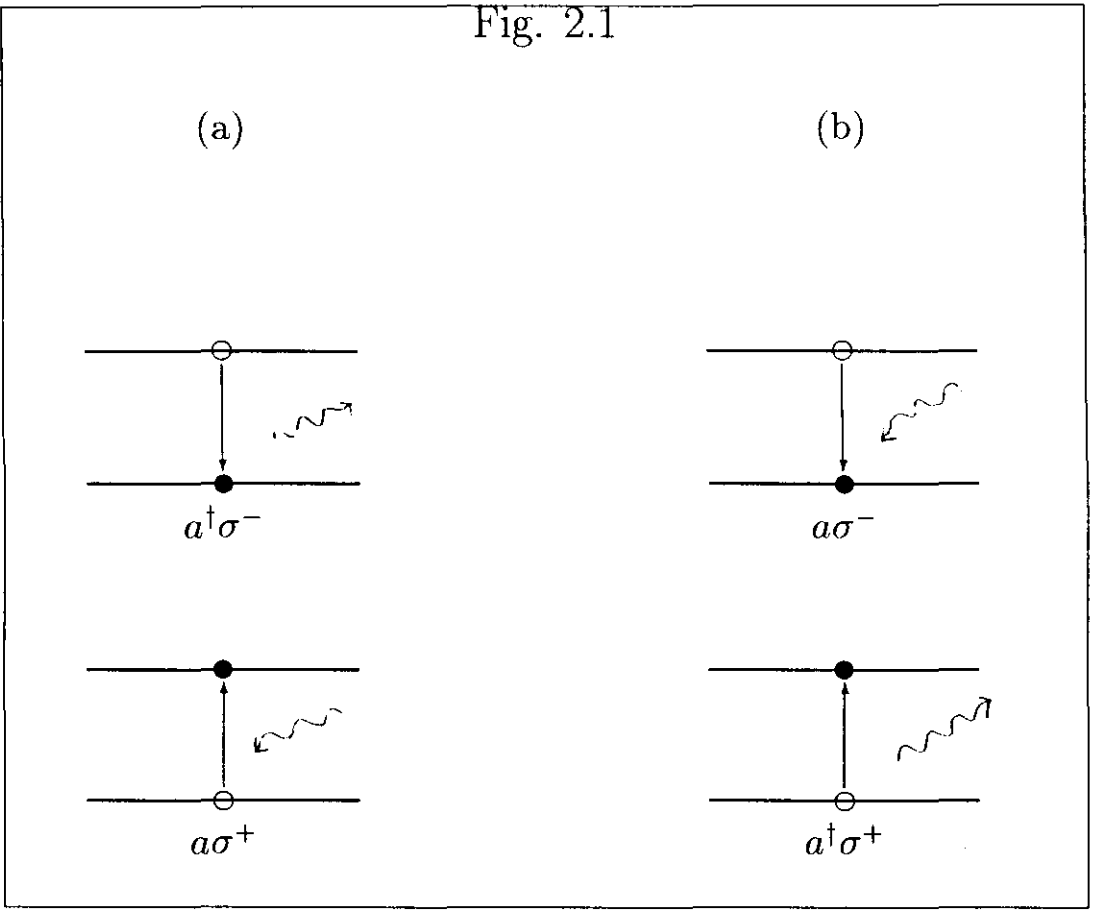
$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}m\sigma_z + \lambda(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-) + \lambda(a\sigma^- + a^\dagger\sigma^+). \quad (2.21)$$

Lembremos do significado dos operadores que aparecem aqui:  $a$  destrói um fóton do campo,  $a^\dagger$  cria um fóton;  $\sigma^-$  passa o átomo do estado excitado para o estado fundamental, e  $\sigma^+$  do estado fundamental para o estado excitado. Tendo isso em mente, vemos que na Hamiltoniana de interação aparecem dois tipos de termos, que representam diferentes processos elementares:

Primeiramente, temos os *termos ressonantes*  $a\sigma^+$  e  $a^\dagger\sigma^-$ , que representam respectivamente a absorção de um fóton pelo átomo e a consequente transição deste para o estado excitado, e a emissão de um fóton seguida pela transição do átomo do estado excitado para o estado fundamental (ver fig.(2.1a)). Estes são os termos “normais”, que representam os processos que nós costumeiramente imaginamos que acontecem na interação de átomos com fótons.

Acontece que temos também os chamados *termos anti-ressonantes*, ou *termos contra-girantes*  $a\sigma^-$  e  $a^\dagger\sigma^+$ ; estes termos representam a absorção de um fóton seguida pela de-excitação do átomo, e a emissão de um fóton seguida pela excitação do átomo (ver fig.(2.1b)). Estes termos definitivamente não são “normais”, e parecem à primeira vista violar a conservação de energia.

Fig. 2.1



Usando a base de estados  $\{|g, n\rangle, |e, n\rangle\}$ , onde  $|g, n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle$ ,  $|e, n\rangle = |e\rangle \otimes |n\rangle$ , nós obtemos uma representação matricial da Hamiltoniana (2.21) (ou (2.19)). Vamos nos restringir ao caso em que o átomo é exatamente ressonante com o campo, ou seja,  $w = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \sigma_z + \lambda(a\sigma^+ + a^\dagger \sigma^-) + \lambda(a\sigma^- + a^\dagger \sigma^+). \quad (2.22)$$

Ficamos então com:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \lambda & & \\ & \frac{1}{2} & \lambda & & & \\ & \lambda & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{3}{2} & \sqrt{2}\lambda & \\ & & & \sqrt{2}\lambda & \frac{3}{2} & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Os blocos diagonais  $2 \times 2$ , juntamente com o elemento de matriz isolado no canto esquerdo ( $\langle g, 0 | H | g, 0 \rangle$ ) correspondem à Hamiltoniana (2.22) sem os termos contra-girantes.

## 2.1 A Aproximação de Onda Girante

A aproximação de onda girante consiste em ignorar os termos contra-girantes da Hamiltoniana (2.21), o que é válido quando o acoplamento é muito fraco ( $\lambda \ll 1$ ), e quando o campo não é muito intenso<sup>1</sup>.

Para justificar esta aproximação, observamos que os elementos de matriz dos termos contra-girantes em (2.23) ligam estados que, sem a interação (ou seja, com  $\lambda = 0$ ), teriam energias diferentes: de fato, eles ligam os estados  $|g, n\rangle$  e  $|e, n+1\rangle$ , que têm uma diferença de energia de  $\Delta E = 2$  (ou  $\Delta E = 2\hbar\omega$ , em unidades usuais). Sabemos da teoria de perturbações que estes termos só terão uma contribuição importante se o elemento de matriz  $\langle g, n | H | e, n+1 \rangle = \lambda\sqrt{n+1}$  for comparável a  $\Delta E$ ; assim, desde que a condição  $\lambda\sqrt{\bar{n}} \ll 1$  seja satisfeita, os termos contra-girantes terão uma contribuição muito pequena para a dinâmica do sistema.

Os termos ressonantes, ao contrário, ligam estados que para  $\lambda = 0$  têm a mesma energia ( $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ ), o que significa que, mesmo sendo pequenos, eles contribuem para a dinâmica do sistema, através de oscilações de população entre os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  (oscilação de Rabi).

Para abordar esta questão de uma outra maneira, vamos passar temporariamente para a representação de interação, onde os operadores  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$  dependem do tempo da seguinte maneira:

$$a(t) = ae^{i\omega t} \quad (2.24)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger e^{-i\omega t} \quad (2.25)$$

$$\sigma^-(t) = \sigma^- e^{i\omega_0 t} \quad (2.26)$$

$$\sigma^+(t) = \sigma^+ e^{-i\omega_0 t} \quad (2.27)$$

A Hamiltoniana na representação de Heisenberg vai ficar dependente do tempo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H = & \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g(\sigma^+ a e^{i(\omega-\omega_0)t} + \sigma^- a^\dagger e^{-i(\omega-\omega_0)t}) + \\ & g(\sigma^- a e^{i(\omega+\omega_0)t} + \sigma^+ a^\dagger e^{-i(\omega+\omega_0)t}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

<sup>1</sup> Veremos mais adiante que a condição rigorosa para que possamos desprezar os termos contra-girantes é  $\lambda\sqrt{\bar{n}} \ll 1$ , onde  $\bar{n}$  é o número médio de fótons no campo.

Assim, próximo da condição de ressonância (ou seja, quando  $\omega \approx \omega_0$ ), os termos contra-girantes oscilarão muito mais rapidamente que os termos ressonantes. Além disso, na maioria dos sistemas físicos, a constante de acoplamento  $g$  é muito menor que  $\omega$  e  $\omega_0$ . Neste caso, apesar de a interação entre átomo e campo ser fraca (no sentido de que  $g$  é muito menor que  $\omega$  e  $\omega_0$ ), os termos ressonantes têm uma contribuição cumulativa no tempo e, à medida que o sistema evolui, seu efeito é de uma troca periódica de energia entre o átomo e o campo (no caso de um número bem definido de fótons no campo). Assim, os efeitos dos termos ressonantes são visíveis nas *oscilações de Rabi* da população do nível excitado do átomo, apesar de o acoplamento ser fraco. Se o átomo no estado excitado entrar na cavidade onde haja vácuo eletromagnético (ausência de fótons), a constante  $g$  é igual à frequência de troca de energia entre o átomo e o campo; por isso,  $g$  é chamado de *frequência de Rabi do vácuo*. Assim, a frequência com que a energia é trocada entre os dois sistemas é em geral muito menor do que as frequências da cavidade e do átomo (ver fig.(2.2a)).

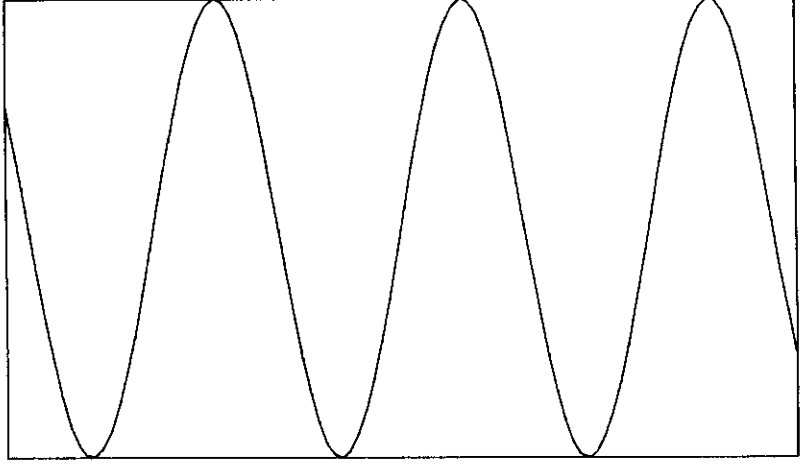
Os termos contra-girantes, ao contrário, oscilam fora da ressonância, com frequências da ordem da frequência da cavidade  $\omega$ , muito maiores portanto do que a frequência típica de troca de energia  $g$ . Assim, estes termos não vão ter nenhum efeito cumulativo no tempo, e devem contribuir apenas com uma pequena oscilação de alta frequência em cima da oscilação de Rabi devida aos termos ressonantes<sup>2</sup> (ver fig.(2.2b)). Assim, o procedimento usual em estudos do modelo de Jaynes-Cummings é desprezar estes termos e ficar apenas com os termos ressonantes, o que simplifica bastante o problema matemático, pois com esta aproximação a Hamiltoniana (2.21) é exatamente diagonalizável. O objetivo deste trabalho é ir além desta aproximação, chamada *aproximação de onda girante*.

---

<sup>2</sup>Durante esta discussão semi-qualitativa, admitimos sempre que há um número bem definido de fótons dentro da cavidade, para efeito de simplicidade. No caso geral, as oscilações devidas a vários números de fótons vão se superpor, mas o argumento não é alterado.

Fig. 2.2a

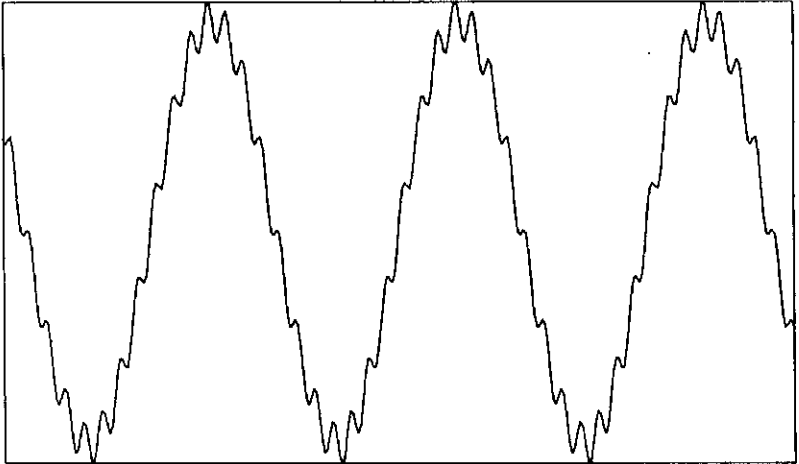
Prob.



t

Fig. 2.2b

Prob.



t

Assim, no limite  $\lambda \ll 1$  podemos desprezar os termos contra-girantes, e a Hamiltoniana (2.21) no caso ressonante ( $w = 1$ ) pode ser aproximada por:

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}\sigma_z + \lambda(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-). \quad (2.29)$$

A representação matricial desta Hamiltoniana é:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & \lambda & & & \\ & \lambda & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{3}{2} & \sqrt{2}\lambda & \\ & & & \sqrt{2}\lambda & \frac{3}{2} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Assim,  $H$  é a soma direta:

$$H = H_g \oplus H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots, \quad (2.31)$$

onde

$$H_g = -\frac{1}{2}|g, 0\rangle\langle g, 0|; \quad (2.32)$$

$$H_n = \begin{pmatrix} n + \frac{1}{2} & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Assim, os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  geram um subespaço invariante para a Hamiltoniana (3.1). A diagonalização de  $H$  reduz-se então à diagonalização de matrizes  $2 \times 2$ , o que a torna analiticamente diagonalizável. Os autoestados e as respectivas autoenergias são:

$$|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle) \quad (2.34)$$

$$E_n^\pm = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \lambda\sqrt{n+1} \quad (2.35)$$

$$|\Psi_0\rangle = |g, 0\rangle \quad (2.36)$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} \quad (2.37)$$

onde os  $|\Psi_n^\pm\rangle$  são os autoestados, e  $E_n^\pm$  são as autoenergias correspondentes;  $|\Psi_0\rangle$  é o estado fundamental, e  $E_0$  é a energia deste. Em nossas unidades, a energia é adimensional; para voltar às unidades usuais, basta multiplicar as energias por  $\hbar\omega$ .

Se o estado inicial é  $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ , com o campo tendo  $n$  fótons e o átomo estando no estado excitado, o estado evoluído  $|\Psi(t)\rangle$  vai oscilar no tempo entre os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ , ou seja, o átomo e o campo vão trocar energia periodicamente, como fazem dois pêndulos acoplados linearmente. A frequência desta troca de energia é dada por  $\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1}$ , que é a frequência

de Rabi. Mesmo quando o campo está inicialmente no vácuo ( $n = 0$ ), ainda existe uma oscilação de Rabi de frequência  $2\lambda$  (ou  $2g$ , em unidades usuais).

Notamos que a frequência de Rabi para  $n$  fótons é proporcional a  $\sqrt{n+1}$ , o que é consequência do caráter bosônico dos fótons presentes no campo.

A Hamiltoniana (3.1) tem uma importante propriedade: definindo o operador número de excitações como sendo

$$N = a^\dagger a + \frac{1}{2} \sigma_z, \quad (2.38)$$

ou, equivalentemente:

$$N = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-, \quad (2.39)$$

vale a lei de conservação

$$[H, N] = 0 \quad (2.40)$$

para  $H$  dada por (3.1). A equação (2.40) também é válida para o caso de detuning não nulo, ainda na aproximação de onda girante.

Na base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  o operador  $\sigma^+ \sigma^-$  assume a seguinte representação matricial:

$$\sigma^+ \sigma^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Assim, o operador  $N$  dado pela eq.(2.39) é:

$$N = \text{No. de fótons no campo} + \begin{cases} 1 & \text{p/ átomo no estado excitado} \\ 0 & \text{p/ átomo no estado fundamental} \end{cases} \quad (2.42)$$

A eq.(2.40) diz que este número de excitações é conservado, e que portanto os autoestados  $|\Psi_n^\pm\rangle$  de  $H$  também são autoestados de  $N$ ; de fato, das eqs.(3.2-3.5) vemos imediatamente que

$$N|\Psi_n^\pm\rangle = (n+1)|\Psi_n^\pm\rangle. \quad (2.43)$$

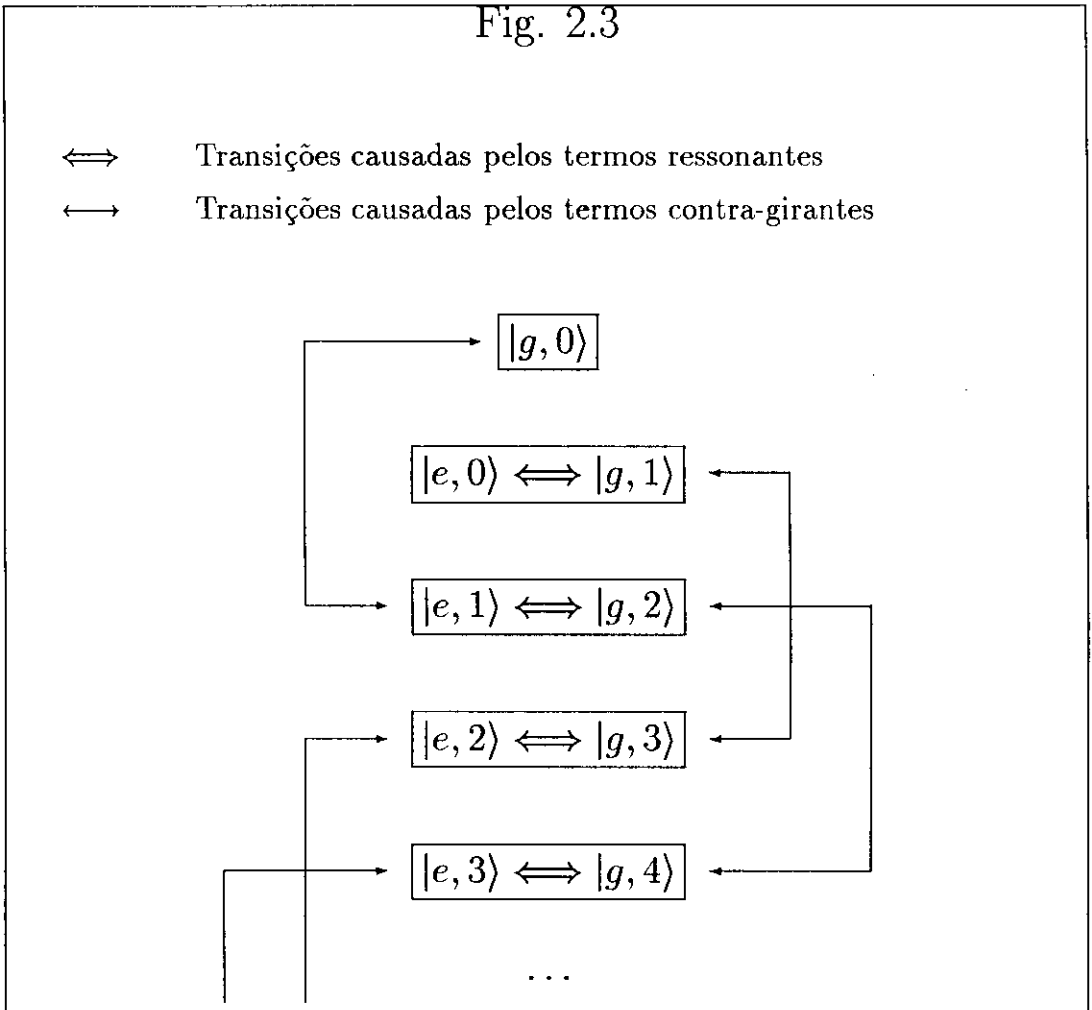
A equação (2.40) não é válida para a Hamiltoniana completa (2.21), o que quer dizer que os termos contra-girantes quebram a conservação de  $N$ , e este deixa de ser uma constante de movimento do sistema.

A Hamiltoniana (3.1), apesar de ser aparentemente muito simples, apresenta características muito interessantes, e proporciona um rico campo de estudos para a ótica quântica. Para um artigo de revisão recente, ver [9], onde há também uma excelente lista de referências. Para tratamentos básicos, ver [10] e [3].

## 2.2 As Transições Anti-Ressonantes e a Conservação de Energia

Como vimos na seção anterior, o número de excitações  $N$  não é uma constante de movimento quando levamos em conta os termos contra-girantes na Hamiltoniana. Isto é uma consequência direta do fato de que  $a^\dagger\sigma^+$  representa um processo em que o átomo vai para o estado excitado *emitindo* um fóton, enquanto que o termo  $a\sigma^-$  representa o processo inverso. Assim, o espaço de estados gerado pelos estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  não é mais invariante pela dinâmica do sistema: os termos contra-girantes provocam transições entre estados com diferentes números de excitação (ver fig.(2.3)).

Fig. 2.3



Os termos  $a\sigma^-$  e  $a^\dagger\sigma^+$  causam transições entre estados com  $\Delta N = 2$ . É claro que estas transições podem ocorrer em cascata, o que significa que todos

os estados com  $\Delta N$  par vão estar ligados pelos termos contra-girantes. Os autoestados da Hamiltoniana vão então ser do tipo

$$\sum_n \{a_{2n}|\Psi_{2n}^+\rangle + b_{2n}|\Psi_{2n}^-\rangle\}, \quad (2.44)$$

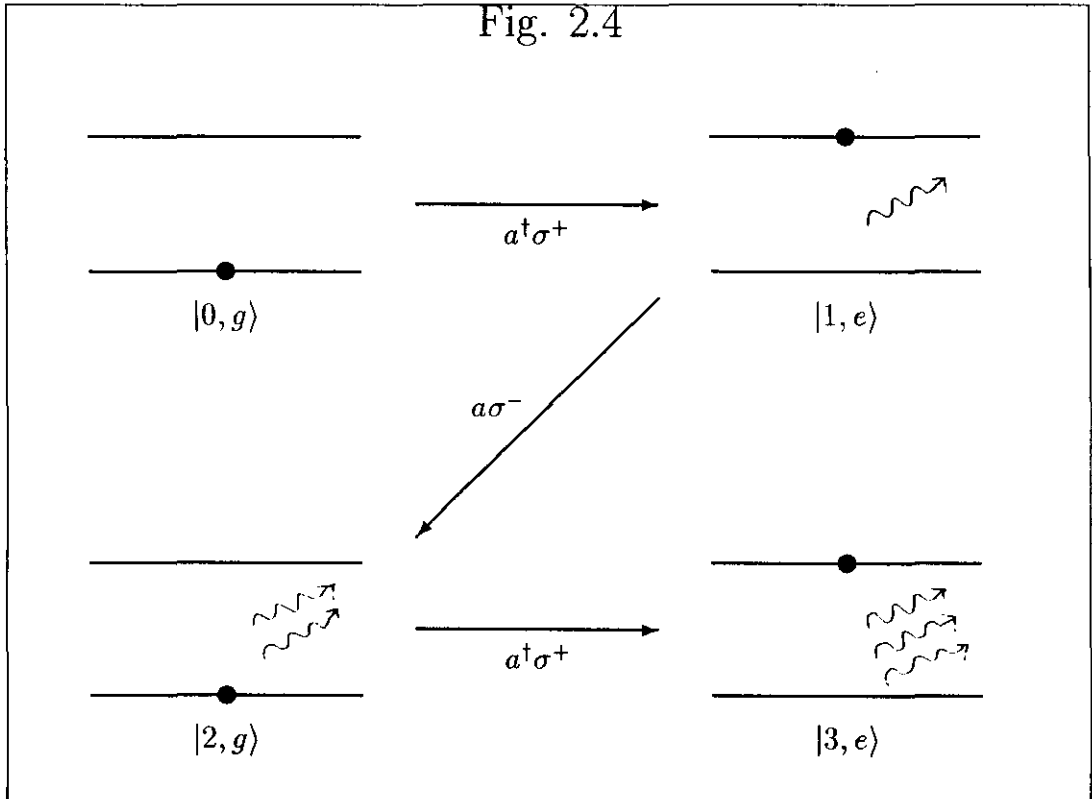
e

$$\sum_n \{a_{2n+1}|\Psi_{2n+1}^+\rangle + b_{2n+1}|\Psi_{2n+1}^-\rangle\}, \quad (2.45)$$

com  $n$  inteiro.

Considere agora um átomo parado em uma cavidade, inicialmente no estado fundamental, estando o campo inicialmente no vácuo ( $|\Psi(0)\rangle = |g, 0\rangle$ ). Na aproximação de onda girante, este é um autoestado do sistema, e nada acontece. Mas os termos contra-girantes podem causar uma transição  $|g, 0\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$ , ou seja, temos uma probabilidade não nula de medir um fóton e uma excitação atômica onde antes não havia nada: aparentemente, criamos uma quantidade de energia de  $2\hbar\omega$  ! Este “paradoxo” torna-se ainda mais aparente se lembrarmos que o estado  $|e, 1\rangle$  pode evoluir “normalmente” para o estado  $|g, 2\rangle$  (através dos termos ressonantes na Hamiltoniana), e então sofrer uma outra transição anti-ressonante para o estado  $|e, 3\rangle$  e assim por diante (ver fig.(2.4)).

Fig. 2.4



Mesmo quando não levamos em conta a aproximação de onda girante, se considerarmos uma situação de não-ressonância ( $\omega \neq \omega_0$ ) já teremos problemas: suponha que um fóton de frequência  $\omega$  (e energia  $\hbar\omega$ ) é absorvido, enquanto que o átomo passa do estado fundamental para o estado excitado, ganhando uma energia de  $\hbar\omega_0$ ; aparentemente, uma quantidade de energia de  $\hbar(\omega - \omega_0)$  foi perdida (ou ganha) pelo sistema. Como isso é possível?

A resposta, é claro, é que não há paradoxo nenhum. A energia só parece não estar sendo conservada se nós considerarmos a energia do sistema átomo-campo como a energia do átomo *mais* a energia do campo. Acontece que isso claramente *não* é verdade, pois o átomo e o campo interagem! A partir do momento em que o átomo entra na cavidade, o número de fótons não é mais uma medida da energia; matematicamente, a Hamiltoniana do sistema não mais comuta com o operador número de fótons  $a^\dagger a$ . A energia de interação age como uma espécie de “energia potencial” do sistema total, que dá conta das diferenças de energia nos processos discutidos acima, preservando a conservação.

## Capítulo 3

# Tratamento Perturbativo e Numérico dos Termos Contra-Girantes

Neste capítulo, vamos investigar os efeitos dos termos contra-girantes usando teoria de perturbações (independente do tempo) e diagonalização numérica, comparando os resultados obtidos pelos dois métodos. Antes, no entanto, vamos fazer uma breve revisão dos principais trabalhos que abordam o problema dos termos contra-girantes. No modelo de Jaynes-Cummings clássico e semi-clássico, os termos contra-girantes são responsáveis pelo surgimento de caos na dinâmica do sistema [11, 12, 13, 14]; os termos contra-girantes também são responsáveis pelo aparecimento do caos quântico (definido através da estatística de níveis) no modelo completamente quantizado, embora neste caso o caos só apareça para um sistema com vários átomos [15, 16, 17]. Ainda no modelo clássico, foi demonstrada a existência de uma transição de fase superradiante para o modelo com muitos átomos, com e sem os termos contra-girantes [18], com um interessante análogo clássico [19, 20, 21]. Usando a teoria de perturbações dependente do tempo nas equações de movimento, alguns estudos foram feitos comparando alguns resultados da aproximação de onda girante (AOG) com os correspondentes resultados com os termos contra-girantes (TCG): os efeitos dos TCG na dinâmica do Laser são estudados em [22], com o resultado de que ocorrem apenas desvios muito pequenos (da ordem de  $\lambda^2$ ) no “threshold”, no número médio de fótons e na variância da distribuição de fótons de equilíbrio, em relação às previsões da AOG; em [23], é discutido um efeito de dependência de fase devido aos TCG que não existe na AOG; a evolução do operador de fase de Pegg-Barnett [24] com os TCG é estudada em [25], e a conclusão é de que os TCG causam uma difusão de fase e um deslocamento na frequência do campo. Empregando um método diferente

de aproximação, baseado em integrais de caminho, os artigos [26, 27] desenvolvem expressões aproximadas para a inversão atômica e para a energia total em função do tempo (válida para tempos curtos). Eles mostram que os colapsos e “revivals” encontrados na AOG aparecem também no modelo com os TCG, mas superpostos a oscilações de alta frequência, causadas pelos TCG. Este método de integrais de caminho é, no entanto, bastante complicado e difícil de ser aplicado, e só estados iniciais em que o campo está em um estado coerente são tratáveis por este método.

Todos os resultados descritos acima só são válidos no limite de acoplamento fraco ( $\lambda$  pequeno).

Métodos numéricos são usados em [28, 29] para estudar a evolução temporal de quantidades importantes tais como squeezing, antibunching, e inversão atômica, para vários estados iniciais. Um resultado interessante é que os TCG tendem a “matar” a compressão do campo [28]. Estudos também foram feitos investigando a influência dos TCG no modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons [30] e de vários fótons [31], e também em sistemas dissipativos [32]. É interessante também mencionar o artigo de M. Crisp [33], onde ele mostra como, usando luz polarizada e explorando regras de seleção atômicas, podemos minimizar os efeitos dos TCG, e assim garantir que a AOG seja válida mesmo para regimes de acoplamento forte.

Para terminar, citamos o artigo de S. Swain [34], em que ele obtém expressões aproximadas para os autoestados e para as autoenergias da Hamiltoniana (2.22), comparando com os conhecidos resultados da AOG. O método que ele usa (método das frações continuadas) é no entanto bastante complicado, e não permite uma interpretação física clara das etapas intermediárias do cálculo.

### 3.1 Tratamento perturbativo

Por simplicidade, vamos admitir que a frequência de transição do átomo esteja exatamente em ressonância com o modo da cavidade:  $\omega = \omega_0$ . Na aproximação de onda girante, a Hamiltoniana do sistema é:

$$H_0 = a^\dagger a + \frac{1}{2}\sigma_z + \lambda(a^\dagger\sigma^- + a\sigma^+) \quad (3.1)$$

Os autoestados e as autoenergias são (ver [10, 3]):

$$|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle) \quad (3.2)$$

$$E_n^\pm = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \lambda\sqrt{n+1} \quad (3.3)$$

$$|\Psi_0\rangle = |g, 0\rangle \quad (3.4)$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} \quad (3.5)$$

onde os  $|\Psi_n^\pm\rangle$  são os autoestados, e  $E_n^\pm$  são as autoenergias correspondentes;  $|\Psi_0\rangle$  é o estado fundamental, e  $E_0$  é a energia deste. Em nossas unidades, a energia é adimensional; para voltar às unidades usuais, basta multiplicar as energias por  $\hbar\omega$ .

Agora, se não fizermos a aproximação de onda girante, a Hamiltoniana  $H_0$  acima é transformada em:

$$H = H_0 + V \quad (3.6)$$

onde

$$V = \lambda(a^\dagger\sigma^+ + a\sigma^-) \quad (3.7)$$

Assim,  $V$  será a nossa perturbação.

## 3.2 Correções nas energias

A correção de primeira ordem nas autoenergias é dada por (para uma revisão de teoria de perturbações na mecânica quântica, ver ref.[35]):

$$\Delta E_n^\pm = \langle \Psi_n^\pm | V | \Psi_n^\pm \rangle \quad (3.8)$$

Mas, das expressões (3.2) e (3.7) vemos imediatamente que o valor médio de  $V$  em qualquer um dos autoestados de  $H_0$  é nulo (isso vale também para o estado fundamental), ou seja, em primeira ordem as energias não são perturbadas pelos termos contra-girantes.

Em segunda ordem em  $\lambda$ , as correções nas autoenergias são:

$$\Delta E_n^{\pm(2)} = \Delta E_0^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{2}. \quad (3.9)$$

Assim, em primeira ordem as autoenergias não são afetadas pelos termos contra-girantes, enquanto que em segunda ordem todas elas sofrem um desvio de  $-\lambda^2/2$ , o que equivale a uma mudança na origem das energias, e que portanto não afeta a dinâmica do sistema. Concluimos então que até segunda ordem em  $\lambda$  as variações nas autoenergias devidas aos TCG podem ser ignoradas. Nós desprezaremos os efeitos de terceira ordem no que segue.

### 3.3 Correções nos autoestados

As correções de primeira ordem nos autoestados (3.2, 3.4) são calculadas da seguinte maneira[35]: seja  $|\phi_0\rangle$  o autoestado não perturbado; aplicando o operador  $V$  que representa a perturbação, teremos em geral uma mistura de vários autoestados:

$$V|\phi_0\rangle = \sum_a c_a |\phi_a\rangle \quad (3.10)$$

onde  $|\phi_a\rangle$  são autoestados. Como  $V$  é conhecido, os coeficientes  $c_a$  podem ser encontrados. A correção de primeira ordem do autoestado  $|\phi_0\rangle$  é então dada por:

$$\Delta\phi_0 = \sum_a \frac{c_a}{E_0 - E_a} |\phi_a\rangle \quad (3.11)$$

Vamos aplicar isto aos autoestados não perturbados (3.2). Primeiro, devemos calcular a ação de  $V$  (dado pela eq 3.7) nos autoestados:

$$\begin{aligned} V|\Psi_n^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} V(|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\sqrt{n}|g, n-1\rangle \pm \sqrt{n+2}|e, n+2\rangle) \end{aligned}$$

Escrevendo os estados  $|g, n-1\rangle$  e  $|e, n+2\rangle$  em termos dos autoestados (3.2):

$$|g, n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{n-2}^+\rangle - |\Psi_{n-2}^-\rangle) \quad (3.12)$$

$$|e, n+2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{n+2}^+\rangle + |\Psi_{n+2}^-\rangle) \quad (3.13)$$

Assim, a ação de  $V$  nos autoestados não perturbados é:

$$V|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{\lambda}{2} \sqrt{n} (|\Psi_{n-2}^+\rangle - |\Psi_{n-2}^-\rangle) \pm \frac{\lambda}{2} \sqrt{n+2} (|\Psi_{n+2}^+\rangle + |\Psi_{n+2}^-\rangle) \quad (3.14)$$

Para poder aplicar a equação (3.11), precisamos das diferenças de energia  $E_0 - E_a$ :

$$E_n^+ - E_{n-2}^\pm = 2 + \lambda(\sqrt{n+1} \mp \sqrt{n-1}) \quad (3.15)$$

$$E_n^+ - E_{n+2}^\pm = -2 + \lambda(\sqrt{n+1} \mp \sqrt{n+3}) \quad (3.16)$$

$$E_n^- - E_{n-2}^\pm = 2 - \lambda(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n-1}) \quad (3.17)$$

$$E_n^- - E_{n+2}^\pm = -2 - \lambda(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n+3}) \quad (3.18)$$

Assim, a correção de primeira ordem de  $|\Psi_n^+\rangle$  vai ser:

$$\begin{aligned} \Delta|\Psi_n^+\rangle &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\left\{\frac{|\Psi_{n-2}^+\rangle}{2+\lambda(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}-\frac{|\Psi_{n-2}^-\rangle}{2+\lambda(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\right\} \\ &+ \frac{\lambda}{2}\sqrt{n+2}\left\{\frac{|\Psi_{n+2}^+\rangle}{-2-\lambda(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})}+\frac{|\Psi_{n+2}^-\rangle}{-2+\lambda(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}\right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como já vimos no capítulo anterior, a teoria de perturbações só vale desde que seja satisfeita a condição:

$$\lambda\sqrt{n} \ll 1 \quad (3.20)$$

Para cavidades de microondas típicas, isso implica  $n \ll 10^{12}$ . Com esta restrição, podemos eliminar nos denominadores de (3.19) os fatores multiplicados por  $\lambda$ , pois estes são da ordem de  $\sqrt{n}$  e portanto, pela condição (3.20), são muito menores que 2. Assim, a expressão para a correção de  $|\Psi_n^+\rangle$  é consideravelmente simplificada:

$$\Delta|\Psi_n^+\rangle = \sqrt{\frac{n}{8}}\lambda|g, n-1\rangle - \sqrt{\frac{n+2}{8}}\lambda|e, n+2\rangle \quad (3.21)$$

onde usamos as expressões (3.2).

Fazendo exatamente o mesmo tipo de desenvolvimento, e usando novamente a condição (3.20), encontramos a correção de primeira ordem para o estado  $|\Psi_n^-\rangle$ :

$$\Delta|\Psi_n^-\rangle = \sqrt{\frac{n}{8}}\lambda|g, n-1\rangle + \sqrt{\frac{n+2}{8}}\lambda|e, n+2\rangle \quad (3.22)$$

Assim, os novos autoestados (corrigidos em primeira ordem)  $|\phi_n^\pm\rangle$  correspondentes aos estados (3.2) são:

$$|\phi_n^\pm\rangle \cong |\Psi_n^\pm\rangle + \sqrt{\frac{n}{8}}\lambda|g, n-1\rangle \mp \sqrt{\frac{n+2}{8}}\lambda|e, n+2\rangle \quad (3.23)$$

Observamos que em primeira ordem os estados  $|\phi_n^\pm\rangle$  estão normalizados, como deveriam ser.

As expressões (3.21) e (3.22) não valem para o estado fundamental  $|\Psi_0\rangle$ : devemos fazer o cálculo separadamente, seguindo o mesmo procedimento; o resultado é:

$$|\phi_0\rangle = |\Psi_0\rangle - \frac{\lambda}{2}|e, 1\rangle \quad (3.24)$$

Para que possamos fazer uso dos resultados obtidos acima, é conveniente que possamos escrever os estados  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$  em termos dos novos autoestados  $|\phi_n^\pm\rangle$ . Fazemos isso diretamente usando as eqs. (3.23) e (3.2), e o resultado, correto em primeira ordem, é:

$$|e, n\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_n^+\rangle + |\phi_n^-\rangle) + \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\lambda(|\phi_{n-2}^-\rangle - |\phi_{n-2}^+\rangle) \quad (3.25)$$

$$|g, n+1\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_n^+\rangle - |\phi_n^-\rangle) + \frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{2}}\lambda(|\phi_{n+2}^+\rangle - |\phi_{n+2}^-\rangle) \quad (3.26)$$

Para o estado fundamental  $|g, 0\rangle = |\Psi_0\rangle$ , teremos:

$$|g, 0\rangle = |\phi_0\rangle + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}(|\phi_1^+\rangle + |\phi_1^-\rangle) \quad (3.27)$$

Tendo em mãos as expressões (3.25), (3.26) e (3.27), podemos expressar diretamente qualquer estado do sistema composto átomo-campo (que normalmente é dado em termos dos estados  $\{|g, n\rangle, |e, n\rangle\}$ ) em termos dos novos autoestados  $|\phi_n^\pm\rangle$ , e assim calcular a evolução temporal do sistema para um dado estado inicial, que é o que faremos na próxima seção.

### 3.4 Evolução temporal com os termos contragirantes

Usaremos agora os resultados obtidos na seção anterior para calcular a evolução temporal de todos os estados  $\{|g, n\rangle, |e, n\rangle\}$ ; como estes estados definem uma base no espaço de Hilbert de nosso sistema, fazendo isto teremos calculado a evolução temporal de qualquer estado inicial.

Como em até segunda ordem em  $\lambda$  podemos ignorar as correções nas autoenergias, os estados  $|\phi_n^\pm\rangle$  satisfazem às mesmas equações de autovalores que os correspondentes estados  $|\Psi_n^\pm\rangle$ :

$$H|\phi_n^\pm\rangle = \left[(n + \frac{1}{2}) \pm \lambda\sqrt{n+1}\right] |\phi_n^\pm\rangle \quad (3.28)$$

$$H|\phi_0\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_0\rangle \quad (3.29)$$

Vamos começar com os estados  $|e, n\rangle$ . Expressando este estado em função dos autoestados  $|\phi_n^\pm\rangle$ , segundo a expressão (3.23), e aplicando o operador de

evolução  $U(t) = e^{-iHt}$ , teremos, a menos de um fator de fase global de  $e^{-it/2}$ :

$$U(t)|e, n\rangle = \frac{e^{-int}}{\sqrt{2}} \left[ (e^{-i\omega t}|\phi_n^+\rangle + e^{i\omega t}|\phi_n^-\rangle) + e^{-it/2} \frac{\sqrt{n}}{2} \lambda (e^{i\Omega_{n-2}t}|\phi_{n-2}^-\rangle - e^{-i\Omega_{n-2}t}|\phi_{n-2}^+\rangle) \right] \quad (3.30)$$

onde a frequência de Rabi  $\Omega$  é dada por:

$$\Omega_n = \lambda\sqrt{n+1} \quad (3.31)$$

Lembramos que em nossas unidades, o tempo é adimensional; uma unidade de tempo é igual à oscilação de um radiano (na frequência  $\omega$ ).

Expandindo os estados  $|\phi_n^\pm\rangle$  nos estados  $|e, n\rangle$ ,  $|g, n\rangle$ , e reagrupando termos teremos, após um cálculo direto:

$$U(t)|e, n\rangle = e^{-int} \left[ \cos(\omega t)|e, n\rangle - i \sin(\omega t)|g, n+1\rangle + i \frac{\sqrt{n}}{2} \lambda e^{2it} \sin(\Omega_{n-2}t)|e, n-2\rangle - i \frac{\sqrt{n+2}}{2} \lambda \sin(\omega t)|e, n+2\rangle + \frac{\sqrt{n}}{2} \lambda \left( \cos(\omega t) - e^{2it} \cos(\Omega_{n-2}t) \right) |g, n-1\rangle \right] \quad (3.32)$$

De maneira exatamente análoga, chegamos ao resultado correspondente para a evolução de  $|g, n+1\rangle$ :

$$U(t)|g, n+1\rangle = e^{-int} \left[ \cos(\omega t)|g, n+1\rangle - i \sin(\omega t)|e, n\rangle + \frac{\sqrt{n+2}}{2} \lambda e^{-2it} \cos(\Omega_{n+2}t)|g, n+3\rangle - i \frac{\sqrt{n}}{2} \lambda \sin(\omega t)|g, n-1\rangle - \frac{\sqrt{n+2}}{2} \lambda \left( \cos(\omega t) + e^{-2it} i \sin(\Omega_{n+2}t) \right) |e, n+2\rangle \right] \quad (3.33)$$

Para a evolução do estado  $|g, 0\rangle$ , encontramos a seguinte expressão (a menos de uma fase global  $e^{-it/2}$ ):

$$U(t)|g, 0\rangle = e^{2it}|g, 0\rangle + \frac{\lambda}{2} \left[ \cos(\Omega_1 t) - e^{2it} \right] |e, 1\rangle - i \frac{\lambda}{2} \sin(\Omega_1 t) |g, 2\rangle \quad (3.34)$$

Um estado genérico do sistema átomo-campo pode ser escrito como uma combinação linear dos estados tratados acima:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n|n, g\rangle + b_n|n, e\rangle) \quad (3.35)$$

e como o operador de evolução  $U(t)$  é linear, o estado no tempo  $t$  será:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n U(t)|n, g\rangle + b_n U(t)|n, e\rangle) \quad (3.36)$$

Vamos agora examinar com mais atenção as equações (3.32-3.34). Além da oscilação de Rabi usual devida aos termos ressonantes, temos também a possibilidade de transições que não conservam o número de excitação  $N$  (ver eq.2.38). Observe no entanto que a variação de  $N$  sempre é de  $\pm 2$ , o que corresponde a um dos processos “virtuais” discutidos no capítulo anterior, como por exemplo um átomo absorver um fóton e ir do estado excitado para o estado fundamental (isto reduziria  $N$  em 2), ou a emissão de um fóton por um átomo, enquanto este vai do estado fundamental para o estado excitado (o que causaria uma variação de  $+2$  em  $N$ ). Em princípio, poderiam haver múltiplas transições deste tipo: por exemplo, um átomo inicialmente no estado fundamental poderia ir para o estado excitado emitindo um fóton ( $\Delta N = 2$ ), decair em seguida para o estado fundamental através da emissão normal de um fóton, e depois ir para o estado excitado novamente ( $\Delta N = 4$ ) com a emissão de outro fóton, e assim por diante. Na aproximação de primeira ordem só processos correspondentes a uma única transição deste tipo são levados em conta. A razão disso é fácil de ver: pelas eqs.(3.32-3.34), vemos que a probabilidade de ocorrência de qualquer uma destas transições (isto é, de detectarmos uma quebra na conservação de  $N$ ) é da ordem de  $\lambda^2$ ; assim, a probabilidade de que ocorram *duas* destas transições é de cerca de  $\lambda^4$ ; como assumimos que  $\lambda$  seja muito menor que um, podemos em primeira aproximação desprezar estas transições múltiplas.

## 3.5 Comparação com o Cálculo Numérico

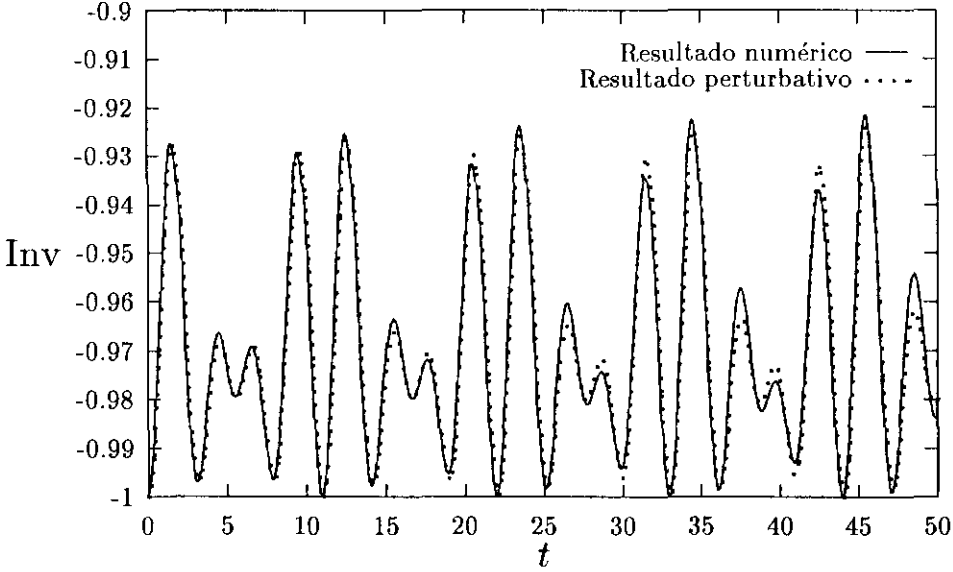
Vamos comparar os resultados que obtivemos por métodos perturbativos com os resultados obtidos através de diagonalização numérica. Para isso, vamos observar a dinâmica da inversão atômica para algumas condições iniciais simples.

Usando o método de diagonalização numérica, calculamos a evolução temporal da inversão atômica (que é a probabilidade de o átomo estar no estado excitado menos a probabilidade de ele estar no estado fundamental), para o estado inicial  $|\psi_0\rangle = |g, 0\rangle$ , e com a constante de acoplamento  $\lambda$  igual a 0.2. O resultado está mostrado na fig.3.1 (linha contínua). Lembramos que na AOG, o estado  $|g, 0\rangle$  é um autoestado da Hamiltoniana, e portanto não evolui no tempo nesta aproximação. Na AOG, a inversão seria igual a  $-1$  para todos os tempos. O fato de a inversão assumir valores maiores que  $-1$  é devido às

transições virtuais causadas pelos TCG. Em nossas unidades, o tempo é adimensional, e  $\Delta t = 2\pi$  é o intervalo de tempo correspondente a uma oscilação do modo do campo.

Figura 3.1

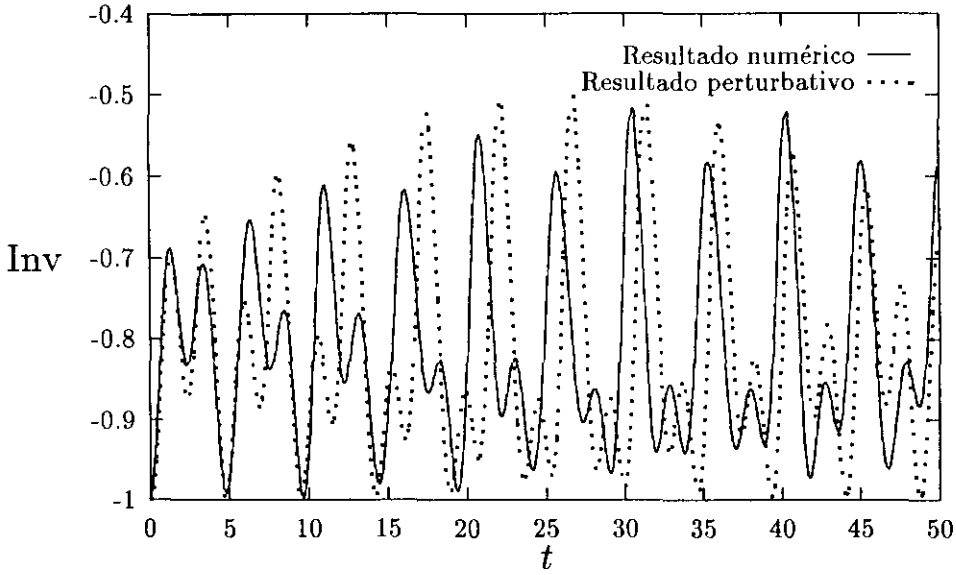
$\lambda = 0.2$  Estado inicial:  $|g, 0\rangle$



Usando a eq.(3.34), obtemos a inversão de acordo com a teoria de perturbação; o resultado está na fig.3.1 (linha tracejada). Como vemos, os resultados da teoria de perturbação são muito bons mesmo para valores relativamente grandes de  $\lambda$ . Para  $\lambda = 0.1$ , as duas curvas são praticamente indistinguíveis. Para  $\lambda = 0.5$ , por outro lado, já estamos em uma região onde a teoria de perturbações não pode mais ser usada, como vemos pela fig.3.2.

Figura 3.2

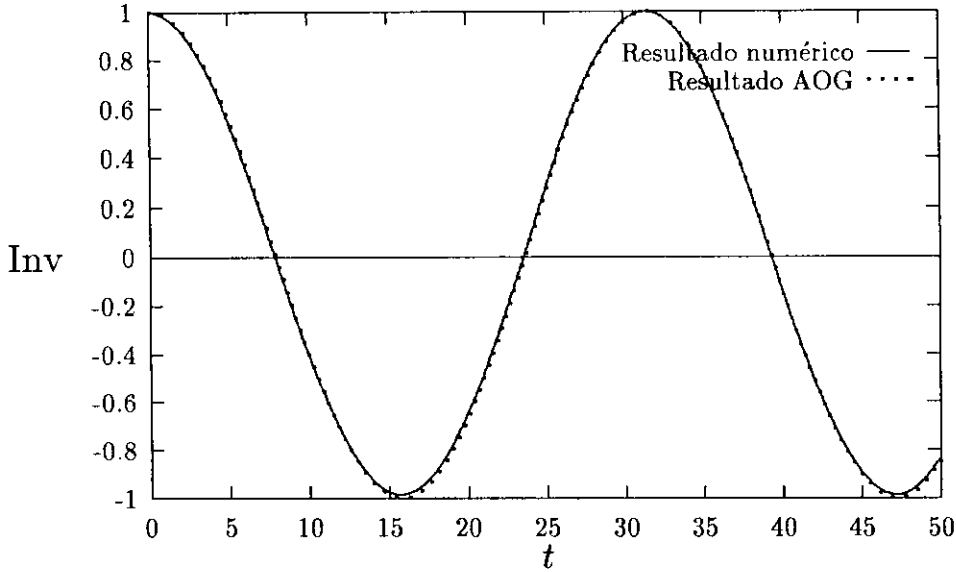
$\lambda = 0.5$  Estado inicial:  $|g, 0\rangle$



As expressões (3.23) e (3.24) mostram que a importância dos TCG cresce com o número de fótons; quanto maior o valor de  $n$ , mais incorretas serão as previsões da AOG. Isto está exemplificado nas figuras 3.3 e 3.4, calculadas usando a diagonalização numérica. Estando o átomo inicialmente no estado excitado e sendo  $\lambda = 0.1$ , se o campo estiver inicialmente no vácuo ( $n = 0$ ), as previsões da AOG e da Hamiltoniana completa (2.22) concordam quase perfeitamente (fig.3.3). Isso já não é mais verdade se o campo tiver muitos fótons e a condição (3.20) não for satisfeita, como mostra a figura 3.4.

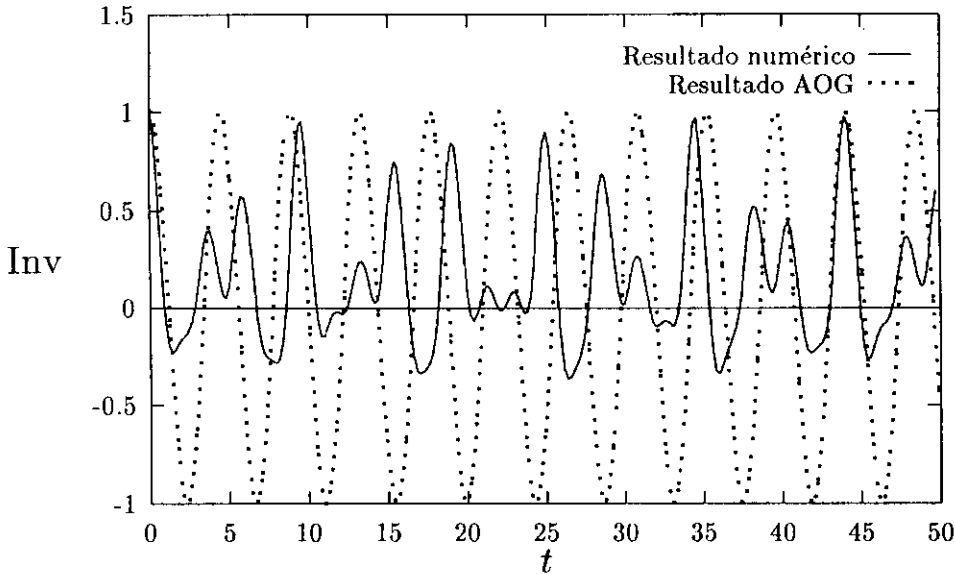
# Figura 3.3

$\lambda = 0.1$  Estado inicial:  $|e, 0\rangle$



# Figura 3.4

$\lambda = 0.1$  Estado inicial:  $|e, 50\rangle$



Uma importante condição inicial para a óptica quântica é aquela em que o campo está em um estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Sabe-se então que na AOG o campo apresenta colapsos e “revivals” em sua evolução [36, 37, 38](o que é uma “assinatura” do caráter quântico do campo). Um exemplo típico de um colapso

na AOG é mostrado na fig.3.5 (linha pontilhada), onde temos  $\lambda = 0.1$  e o estado inicial é  $|g, \alpha\rangle$ , com  $\alpha = 7.0$ . Para estes parâmetros, o efeito dos TCG é “matar” o colapso (ver fig.3.5, linha contínua, onde mostramos o cálculo numérico da inversão com os TCG): a inversão não é mais constante durante o período em que anteriormente havia o colapso. Vemos então que os TCG podem acabar com os colapsos e “revivals” da AOG. Para este caso, o número médio de fótons no campo é  $\bar{n} = \alpha^2 = 49$ ; assim, a condição

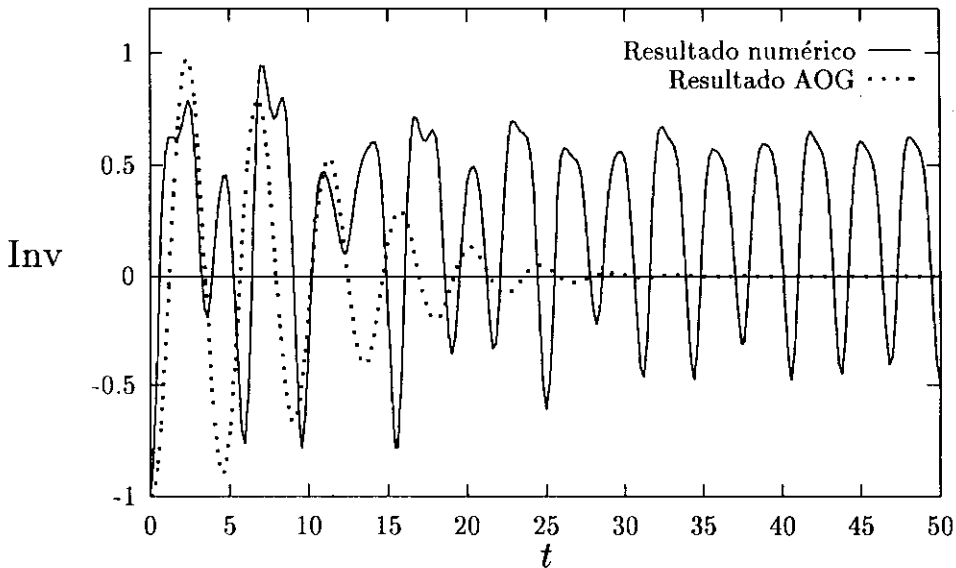
$$\lambda\sqrt{\bar{n}} \ll 1 \quad (3.37)$$

não é satisfeita, e a teoria de perturbação não pode ser usada. Se (3.37) for satisfeita, os TCG causarão apenas pequenas alterações às previsões da AOG, e os colapsos e revivals continuarão sendo bem definidos. Assim, a condição para que existam colapsos e revivals na evolução do campo pela Hamiltoniana (2.22) é:

$$\lambda\alpha \ll 1. \quad (3.38)$$

Figura 3.5

$\lambda = 0.1$  Estado inicial:  $|g, \alpha\rangle$ , com  $\alpha = 7.0$

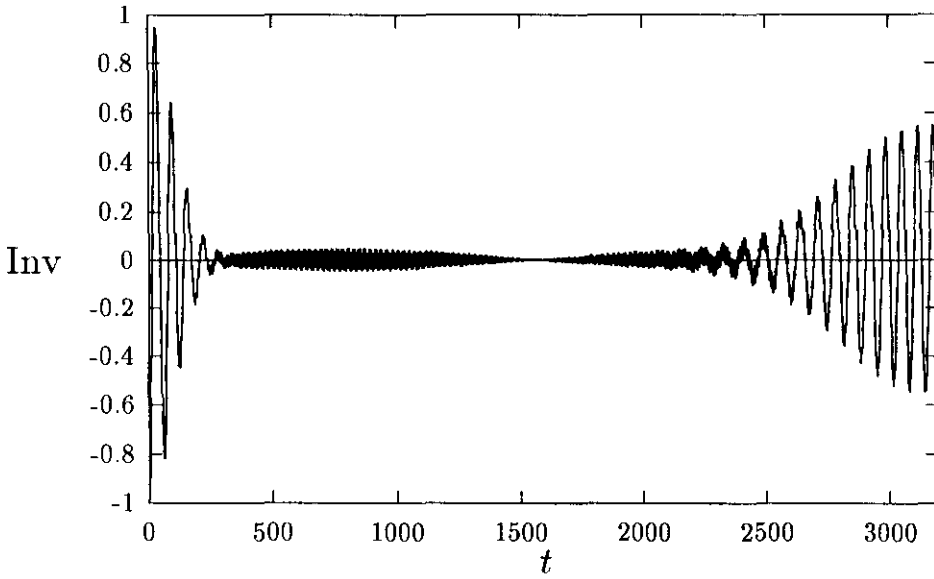


A fig.3.6 mostra o exemplo de um caso onde ainda podemos observar reminiscências do colapso e do “revival” observados na aproximação de onda girante ; os parâmetros são  $\alpha = 5.0$  e  $\lambda = 0.01$ . O estado inicial é  $|e, \alpha\rangle$ . Para estes valores, a condição (3.38) é satisfeita, e vemos que de fato há um colapso e um revival razoavelmente bem definidos, embora oscilações de alta frequência (causadas pelos TCG) estejam superpostas ao perfil usual da curva

de inversão. Os tempos de colapso e de revival são os mesmos da AOG. O gráfico da fig.3.6 foi calculado por diagonalização numérica.

Figura 3.6

$\lambda = 0.01$  Estado inicial:  $|e, \alpha\rangle$ , com  $\alpha = 5.0$



Para entender melhor o comportamento da curva de inversão da fig.3.6, vamos aplicar os resultados perturbativos que obtivemos anteriormente, que são válidos para este caso.

Para um estado inicial da forma  $|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |e, n\rangle$ , vamos denotar o estado no tempo  $t$  resultante de sua evolução temporal por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \{a_n(t)|e, n\rangle + b_n(t)|g, n\rangle\}. \quad (3.39)$$

A probabilidade de detetarmos o átomo no estado excitado será então:

$$P_e(t) = 1 - P_g(t) = \sum_n |a_n(t)|^2. \quad (3.40)$$

Para calcular os coeficientes  $a_n(t)$ , usamos as equações (3.32), (3.33) e (3.34), obtendo:

$$a_n(t) = e^{-int} \left\{ c_n \cos(\sqrt{n+1}\lambda t) - i\lambda \frac{\sqrt{n+2}}{2} c_{n+2} \sin(\sqrt{n+1}\lambda t) - ie^{2it}\lambda \frac{\sqrt{n}}{2} c_{n-2} \sin(\sqrt{n-1}\lambda t) \right\} \quad (3.41)$$

O módulo quadrado de  $a_n(t)$  é então igual a:

$$|a_n(t)|^2 = c_n^2 \cos^2(\sqrt{n+1}\lambda t) + \lambda \sqrt{n} c_n c_{n-2} \sin(2t) \sin(\sqrt{n-1}\lambda t) \cos(\sqrt{n+1}\lambda t), \quad (3.42)$$

onde mantemos apenas os termos de até primeira ordem em  $\lambda$ .

Usamos agora a conhecida identidade trigonométrica para escrever:

$$\sin(\sqrt{n-1}\lambda t) \cos(\sqrt{n+1}\lambda t) = \frac{1}{2} \left\{ \sin[(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\lambda t] + \sin[(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})\lambda t] \right\}. \quad (3.43)$$

Vamos admitir agora que no estado inicial  $|\psi_0\rangle$  os coeficientes  $c_n$  com  $n$  pequeno sejam desprezíveis (como é o caso para estados coerentes com  $\alpha$  suficientemente grande). Neste caso, podemos considerar  $n \gg 1$  na expressão acima, e escrever:

$$\sqrt{n \pm 1} \approx \sqrt{n} \pm \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad (3.44)$$

e teremos então:

$$\sin(\sqrt{n-1}\lambda t) \cos(\sqrt{n+1}\lambda t) \approx \frac{1}{2} \left\{ \sin(2\sqrt{n}\lambda t) - \sin\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}}\right) \right\}. \quad (3.45)$$

A probabilidade  $P_e$  fica então:

$$P_e(t) = \sum_n c_n^2 \cos^2(\sqrt{n+1}\lambda t) + \frac{\lambda}{2} \sin(2t) \sum_n \sqrt{n} c_n c_{n-2} \left\{ \sin(2\sqrt{n}\lambda t) - \sin\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}}\right) \right\}, \quad (3.46)$$

e a inversão fica:

$$I(t) = I_0(t) + \lambda \sin(2t) \sum_n \sqrt{n} c_n c_{n-2} \left\{ \sin(2\sqrt{n}\lambda t) - \sin\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}}\right) \right\}, \quad (3.47)$$

onde  $I_0(t)$  é a inversão prevista pela AOG, e o segundo termo é a correção de primeira ordem, que vem dos TCG. Vamos examinar este termo de correção com mais detalhes. Ele é composto do termo rapidamente oscilante  $\sin(2t)$  multiplicado pela subtração dos dois termos  $A(t)$  e  $B(t)$ :

$$A(t) = \sum_n \sqrt{n} c_n c_{n-2} \sin(2\sqrt{n}\lambda t); \quad (3.48)$$

$$B(t) = \sum_n \sqrt{n} c_n c_{n-2} \sin\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{n}}\right), \quad (3.49)$$

ou seja:

$$I(t) = I_0(t) + \lambda \sin(2t)[A(t) - B(t)]. \quad (3.50)$$

Tanto  $A(t)$  como  $B(t)$  são somas de termos oscilantes modulados pela distribuição  $\sqrt{n}c_n c_{n-2}$ . Se a distribuição  $c_n$  tiver um pico bem definido em torno de algum valor médio  $\bar{n}$  (como é o caso do estado coerente, onde  $\bar{n} = \alpha^2$ ),  $\sqrt{n}c_n c_{n-2}$  também vai ter um pico bem definido, que também vai estar centrado em torno de  $\bar{n}$ . Neste caso, a função  $A(t)$  vai ter colapsos e “revivals” nos mesmos tempos que  $I_0(t)$ , pois os termos oscilantes de  $A$  têm a mesma frequência que os de  $I_0$ . Assim, no intervalo de tempo em que ocorre o colapso (que acontece aproximadamente entre  $t = 300$  e  $t = 2000$  no caso da fig.3.6),  $A(t)$  é praticamente igual a zero, e pode ser desprezada. Neste intervalo, apenas  $B(t)$  aparece; ela é o envoltório das rápidas oscilações. Este envoltório tem uma frequência dada por:

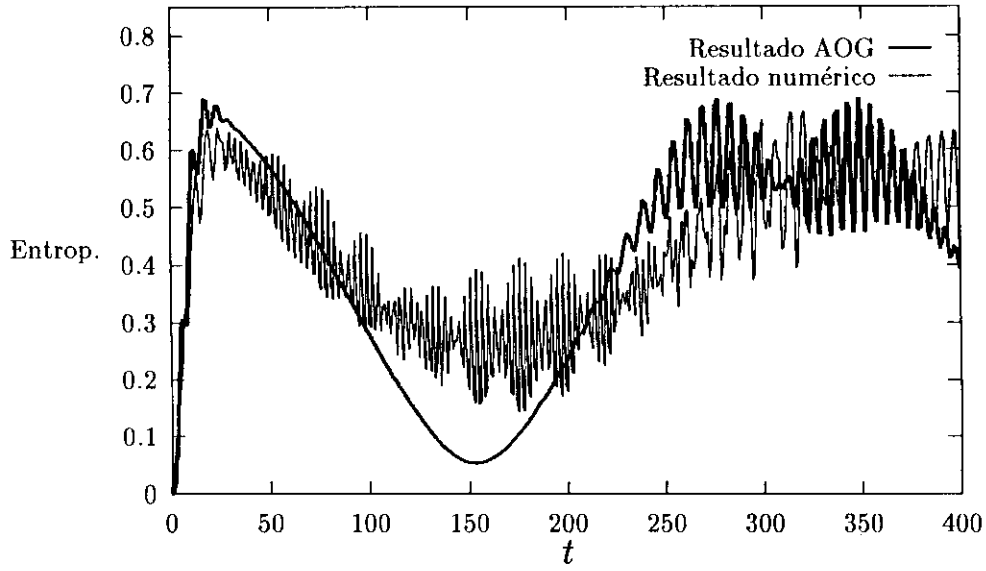
$$\bar{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{\bar{n}}} = \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (3.51)$$

No caso da fig.3.6, temos  $\bar{\omega} = 2 \cdot 10^{-3}$ . O envoltório tem então uma forma aproximadamente senoidal, e atinge o zero no tempo dado por  $\bar{\omega}t = \pi$ , ou seja, metade do tempo de “revival”. Em nosso caso, isto corresponde a um tempo de  $t \approx 1570$ . Como vemos na fig.3.6, este é realmente o tempo em que a amplitude das rápidas oscilações (vindas do termo  $\sin(2t)$ ) vai a zero. É claro que para tempos múltiplos deste a mesma coisa vai acontecer, mas para tempos muito grandes o envoltório não terá mais uma forma senoidal, devido à interferência entre as diferentes frequências em  $B(t)$ .

Notamos que no tempo correspondendo a metade do tempo de “revival”, o campo atinge o máximo de pureza, e se encontra aproximadamente em um estado do tipo “gato de Schroedinger”. Os termos contra-girantes tendem a aumentar a entropia, pois eles ligam mais estados que a Hamiltoniana da AOG, causando mais flutuações. Isto de fato é observado na figura 3.7 abaixo, onde plotamos a entropia em função do tempo para um estado inicial onde o campo é um estado coerente. Vemos que de fato a entropia é maior para a Hamiltoniana com os TCG; em particular, o valor da entropia ponto de mínimo é “levantado” pelos TCG. Observamos ainda que o instante correspondente também é deslocado.

# Figura 3.7

$\lambda = 0.1$  Estado inicial:  $|g, \alpha\rangle$ , com  $\alpha = 5.0$



# Capítulo 4

## Simetrias no Modelo de Jaynes-Cummings

Neste capítulo, vamos aplicar a teoria de grupos [39, 40, 41] ao modelo de Jaynes-Cummings, para entender em termos das simetrias do modelo as características e regularidades dos níveis de energia do sistema.

Para facilitar a abordagem do problema, vamos proceder por etapas, da Hamiltoniana sem interação (com  $\lambda = 0$ ), passando pela aproximação de onda girante, até a Hamiltoniana total, quando investigaremos o que acontece no limite  $\lambda \rightarrow \infty$ . Trataremos inicialmente do caso ressonante, e depois investigaremos os efeitos do “detuning”.

### 4.1 Hamiltoniana Sem Interação

Se o átomo e o campo não interagem, então  $\lambda = 0$ , e a Hamiltoniana do sistema fica simplesmente

$$H = H_0 = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-, \quad (4.1)$$

o que é a soma das energias do átomo e do campo.

A Hamiltoniana (4.1) é invariante perante as seguintes operações:

$$A(\theta) = \begin{cases} a \longrightarrow a e^{i\theta} \\ a^\dagger \longrightarrow a^\dagger e^{-i\theta} \end{cases} ; \quad (4.2)$$

$$B(\phi) = \begin{cases} \sigma^- \longrightarrow \sigma^- e^{-i\phi} \\ \sigma^+ \longrightarrow \sigma^+ e^{i\phi} \end{cases} ; \quad (4.3)$$

$$P = \begin{cases} |e, n\rangle \longrightarrow |g, n+1\rangle \\ |g, n\rangle \longrightarrow |n-1, e\rangle \end{cases} . \quad (4.4)$$

Das definições acima, vemos imediatamente que  $A$ ,  $B$  e  $P$  são operações unitárias. Inspecionando a eq.(4.1), é óbvio que  $A$  e  $B$  são operações de simetria. Por outro lado, como  $\lambda = 0$ , as energias dos estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n + 1\rangle$  são as mesmas, logo  $P$  também é uma simetria do sistema. Denotaremos os grupos de simetria correspondentes às operações  $A$ ,  $B$  e  $P$  por  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{P}$ , respectivamente.

$\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são grupos de Lie de um parâmetro ( $\theta$  e  $\phi$  respectivamente), logo eles são isomorfos ao grupo  $SO(2)$  de rotações no plano.  $\mathcal{P}$  é um grupo discreto de dois elementos (pois  $P^2 = 1$ ), que são a identidade e  $P$ . As operações (4.2), (4.3) e (4.4), juntamente com todos os seus produtos, formam todas as operações de simetria da Hamiltoniana  $H_0$ , ou seja,  $A(\theta)$ ,  $B(\phi)$  e  $P$  são os geradores do grupo de simetria de  $H_0$ .

Notamos que  $A(\theta)$  e  $B(\phi)$  estão definidos por suas ações nos operadores  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$ , enquanto que  $P$  está definido pela ação nos estados. Precisaremos mais adiante saber a ação de  $A$  e  $B$  nos estados da base  $\{|g, n\rangle, |e, n\rangle\}$ , e também a ação de  $P$  nos operadores do átomo e do campo.

$A(\theta)$  atua nas variáveis do campo; para calcular sua ação no estado de Fock  $|n\rangle$ , basta aplicá-lo aos dois lados da relação:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (4.5)$$

ficando então com:

$$AaA^\dagger A|n\rangle = \sqrt{n}A|n-1\rangle, \quad (4.6)$$

ou seja, usando a eq.(4.2),

$$e^{i\theta}aA|n\rangle = \sqrt{n}A|n-1\rangle. \quad (4.7)$$

Da relação acima, encontramos de imediato que

$$A(\theta)|n\rangle = e^{-in\theta}|n\rangle. \quad (4.8)$$

Assim, o efeito de  $A(\theta)$  é rodar a fase do campo pelo ângulo  $\theta$ . O fato de  $\mathcal{A}$  ser um grupo de simetria de  $H_0$  significa que a energia do sistema é invariante por mudanças na fase do campo, o que é de se esperar, já que o campo e o átomo não interagem.

Da eq.(4.8), vemos que os estados de Fock  $|n\rangle$  correspondem às representações irredutíveis  $\Gamma^{(n)}$  univaluadas do grupo  $SO(2)$  com índice  $n$ .

Vamos agora estudar o operador  $B(\phi)$ , que atua sobre as variáveis atômicas; para determinar sua ação nos estados do átomo, usamos a relação

$$\sigma^-|e\rangle = |g\rangle. \quad (4.9)$$

Aplicando  $B(\phi)$  dos dois lados, temos:

$$e^{-i\phi}B(\phi)|e\rangle = B(\phi)|g\rangle. \quad (4.10)$$

Teremos então:

$$B(\phi)|e\rangle = e^{i\phi/2}|e\rangle; \quad B(\phi)|g\rangle = e^{-i\phi/2}|g\rangle. \quad (4.11)$$

Assim, os estados atômicos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  correspondem às representações irreduzíveis bi-valoradas de spin  $1/2$  do grupo  $SO(2)$  com índices  $+1/2$  e  $-1/2$ , respectivamente. Isto está ligado ao caráter fermiônico dos operadores  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ . Os operadores do campo  $a$  e  $a^\dagger$ , por outro lado, satisfazem uma relação de comutação bosônica, o que está de acordo com o fato de que os estados  $|n\rangle$  correspondem a representações irreduzíveis com índices inteiros.

Vamos agora calcular o efeito de  $P$  nos operadores  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$ . Para isso, é conveniente definir os operadores  $P_c$  e  $P_c^\dagger$ , que têm o efeito de adicionar ou subtrair um fóton do campo:

$$P_c|n\rangle = |n+1\rangle; \quad P_c^\dagger|n\rangle = |n-1\rangle. \quad (4.12)$$

Sendo  $N$  o operador número de fótons do campo:

$$N = a^\dagger a, \quad (4.13)$$

então  $P_c$  e  $P_c^\dagger$  podem ser escritos como:

$$P_c = N^{-1/2}a^\dagger; \quad P_c^\dagger = aN^{-1/2}. \quad (4.14)$$

Da expressão (4.12), segue de imediato que  $P_c$  é unitário:

$$P_c^\dagger P_c = P_c P_c^\dagger = 1. \quad (4.15)$$

Usando os operadores  $P_c$  e  $P_c^\dagger$ , podemos escrever  $P$  na forma:

$$P = P_c \sigma^- + P_c^\dagger \sigma^+, \quad (4.16)$$

como pode ser diretamente verificado através de sua ação nos estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n\rangle$ .

A ação de  $P_c$  e  $P_c^\dagger$  nos operadores de campo  $a$  e  $a^\dagger$  é dada por:

$$P_c a P_c^\dagger = \left( \frac{N}{N+1} \right)^{1/2} a; \quad (4.17)$$

$$P_c a^\dagger P_c^\dagger = a^\dagger \left( \frac{N}{N+1} \right)^{1/2}; \quad (4.18)$$

$$P_c^\dagger a P_c = a \left( \frac{N+1}{N} \right)^{1/2}; \quad (4.19)$$

$$P_c^\dagger a^\dagger P_c = \left( \frac{N+1}{N} \right)^{1/2} a^\dagger. \quad (4.20)$$

A ação de  $P$  em  $a$  é então dada por:

$$\begin{aligned} a \longrightarrow PaP^\dagger &= P_c a P_c^\dagger \sigma^- \sigma^+ + P_c^\dagger a P_c \sigma^+ \sigma^- = \\ &= \left( \frac{N}{N+1} \right)^{1/2} a \sigma^- \sigma^+ + a \left( \frac{N+1}{N} \right)^{1/2} \sigma^+ \sigma^-. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para o operador de criação  $a^\dagger$ , temos:

$$a^\dagger \longrightarrow Pa^\dagger P^\dagger = a^\dagger \left( \frac{N}{N+1} \right)^{1/2} \sigma^- \sigma^+ + \left( \frac{N+1}{N} \right)^{1/2} a^\dagger \sigma^+ \sigma^-. \quad (4.22)$$

A ação de  $P$  no operador número de fótons  $N$  é facilmente encontrada:

$$\begin{aligned} PNP^\dagger &= P_c N P_c^\dagger \sigma^- \sigma^+ + P_c^\dagger N P_c \sigma^+ \sigma^- = \\ &= (N-1) \sigma^- \sigma^+ + (N+1) \sigma^+ \sigma^-. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como  $P_c$  e  $P_c^\dagger$  só atuam nas variáveis do campo, a ação de  $P$  em  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  é muito simples:

$$P\sigma^-P^\dagger = \sigma^+; \quad P\sigma^+P^\dagger = \sigma^-. \quad (4.24)$$

Usando os resultados anteriores, podemos calcular a ação de  $P$  sobre a Hamiltoniana  $H_0$ . Usando as expressões (4.23) e (4.24), encontramos que:

$$PH_0P^\dagger = H_0. \quad (4.25)$$

Assim,  $P$  é realmente uma transformação de simetria de  $H_0$ .

Como já falamos, o grupo total de simetria de  $H_0$  é o resultado da combinação dos três grupos geradores  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{P}$ . Os elementos de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  comutam, e eles definem o produto direto  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , que age nos estados da seguinte maneira:

$$|e, n\rangle \xrightarrow{A \otimes B(\theta, \phi)} e^{-i(n\theta - \phi/2)} |e, n\rangle; \quad (4.26)$$

$$|g, n\rangle \xrightarrow{A \otimes B(\theta, \phi)} e^{-i(n\theta + \phi/2)} |g, n\rangle. \quad (4.27)$$

Assim, o estado  $|e, n\rangle$  corresponde à representação produto  $\Gamma^{(n)} \otimes \Gamma^{-1/2} \equiv \Gamma^{n, -1/2}$ , e o estado  $|g, n\rangle$  corresponde a  $\Gamma^{(n)} \otimes \Gamma^{1/2} \equiv \Gamma^{n, 1/2}$ .

$\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são grupos de Lie monoparamétricos, e portanto todas as suas representações irredutíveis são unidimensionais, assim como as representações produto  $\Gamma^{(n)} \otimes \Gamma^{(j)}$  ( $j = \pm \frac{1}{2}$ ). Assim, se o grupo  $\mathcal{P}$  não estivesse presente, todas as representações irredutíveis do grupo de simetria de  $H_0$  seriam unidimensionais, e portanto todos os níveis de energia seriam não-degenerados. O fato de  $\mathcal{P}$  fazer parte do grupo de simetria de  $H_0$ , no entanto, muda isto, pois

$\mathcal{P}$  não comuta com  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , o que significa que  $P$  vai misturar as representações irredutíveis de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Isto é visto facilmente da equação (4.4):

$$|e, n\rangle \xleftrightarrow{P} |g, n+1\rangle. \quad (4.28)$$

Assim,  $P$  mistura as representações  $\Gamma^{n+1, -1/2}$  e  $\Gamma^{n, 1/2}$ , de forma que elas não são mais representações irredutíveis. Das eqs. (4.26), (4.27) e (4.28), vemos que na base  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$ , os elementos de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  e  $P$  admitem a seguinte representação matricial:

$$A \otimes B(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-i((n+1)\theta - \phi/2)} & 0 \\ 0 & e^{-i(n\theta + \phi/2)} \end{pmatrix}; \quad (4.29)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

O estado  $|g, 0\rangle$  é um caso especial, pois ele não se liga a nenhum outro estado por  $P$ :

$$P|g, 0\rangle = 0. \quad (4.31)$$

Assim,  $\Gamma^{0, -1/2}$  continua sendo uma representação irredutível do grupo total.

Vemos então que para  $H = H_0$ , todos os níveis de energia (com exceção do estado fundamental  $|g, 0\rangle$ ) são duplamente degenerados; além disso, as representações irredutíveis geradas pela mistura de  $\Gamma^{n+1, -1/2}$  e  $\Gamma^{n, 1/2}$  são indexadas pelo “número de excitação”  $N$ :

$$N = n + j, \quad (4.32)$$

com  $n$  sendo o número de fótons,  $j = 1/2$  para o estado  $|e\rangle$ , e  $j = -1/2$  para o estado  $|g\rangle$ . Ou seja,  $N$  é um bom número quântico para o sistema.

Obviamente, todas estas conclusões para a Hamiltoniana (4.1) podem ser obtidas de maneira muito mais simples, sem usar a teoria de grupos, pois sabemos exatamente quais são os autoestados e autovalores de  $H_0$ . No entanto, o que fizemos aqui será bastante útil para os casos mais complicados tratados adiante, em particular para o limite  $\lambda \rightarrow \infty$ .

## 4.2 Aproximação de Onda Girante

Vamos investigar agora o que acontece com as simetrias do sistema átomo-campo quando “ligamos” a interação ressonante  $\lambda(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-)$ . A Hamiltoniana é então:

$$H = H_0 + \lambda(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-) = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^- + \lambda(a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-). \quad (4.33)$$

Quando perturbamos uma Hamiltoniana, o que em geral acontece é que o grupo de simetria diminui, o que pode acarretar quebras de degenerescências. Neste caso, vemos imediatamente que as operações (4.2) e (4.3) em geral não deixam a Hamiltoniana (4.33) invariante: somente o subgrupo correspondente a  $\theta = -\phi$  de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  continua a ser um grupo de simetrias de (4.33). Assim, ficamos com apenas um grupo de Lie uniparamétrico (em vez de dois). Denotaremos este grupo por  $\mathcal{C}$ , e os seus elementos são  $C(\theta)$ , dados por:

$$C(\theta) = \begin{cases} a \longrightarrow ae^{i\theta}; & a^\dagger \longrightarrow a^\dagger e^{-i\theta} \\ \sigma^- \longrightarrow \sigma^- e^{i\theta}; & \sigma^+ \longrightarrow \sigma^+ e^{-i\theta} \end{cases} \quad (4.34)$$

O grupo  $\mathcal{P}$  continua a ser uma simetria, como podemos verificar diretamente das equações (4.16), (4.17-4.20) e (4.24):

$$PHP^\dagger = H, \quad (4.35)$$

onde  $H$  é dada por (4.33). O fato de  $\mathcal{P}$  continuar a ser um grupo de simetria de  $H$  quer dizer que o número de excitação, dado por

$$N_e = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-, \quad (4.36)$$

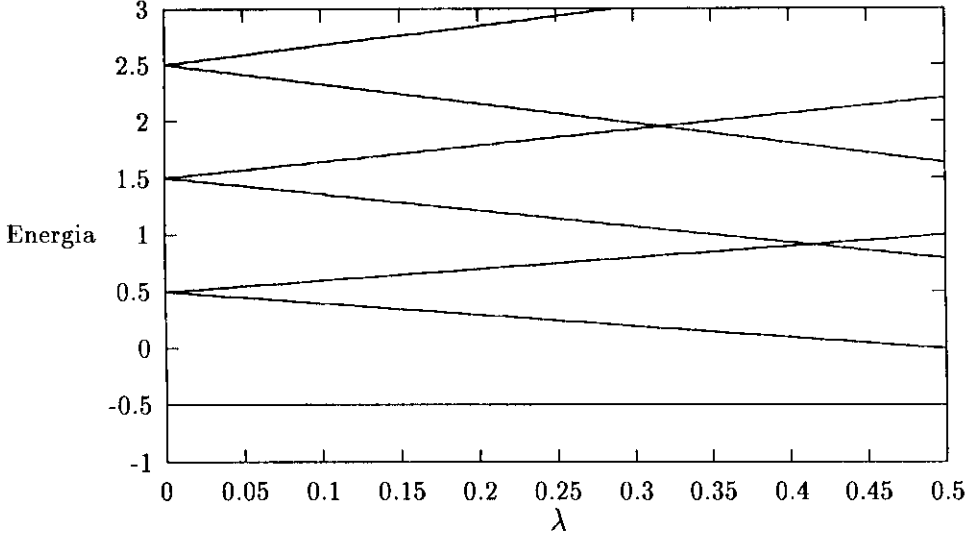
continua a ser uma constante de movimento do sistema.

As representações irredutíveis unidimensionais  $\Gamma^N$  de  $\mathcal{C}$  são indexadas por  $N = n + j$  ( $j = \pm \frac{1}{2}$ ). A ação de  $C(\theta)$  no espaço de estados é calculada diretamente das eqs.(4.26) e (4.27) para  $\theta = -\phi$ :

$$C(\theta)|e, n\rangle = e^{-i(n+1/2)\theta}|e, n\rangle; \quad C(\theta)|g, n+1\rangle = e^{-i(n+1/2)\theta}|g, n+1\rangle. \quad (4.37)$$

Assim,  $\mathcal{P}$  não mistura as representações irredutíveis de  $\mathcal{C}$ , pois os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  correspondem a um mesmo valor de  $N$  ( $N = n + 1/2$ ). Em outras palavras,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{P}$  comutam, o que quer dizer que o grupo total de simetria de  $H$  é simplesmente o produto direto  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{P}$ . As representações irredutíveis de  $\mathcal{P}$  são  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ , correspondendo respectivamente a estados simétricos e antissimétricos perante  $P$ . As representações irredutíveis do grupo total são portanto  $\Gamma^N \otimes \Gamma^\pm \equiv \Gamma^{N,\pm}$ , correspondendo a estados com número de excitações  $N$ , simétricos (ou antissimétricos) perante a permutação  $|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$ . Todas as representações  $\Gamma^{N,\pm}$  são unidimensionais, o que quer dizer que a interação átomo-campo quebra a degenerescência dupla que havia entre os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$ ; ver fig.(4.1).

Fig. 4.1: Autoenergias na aprox. de onda girante



### 4.3 Hamiltoniana Total

Introduzindo os termos contra-girantes, obtemos a Hamiltoniana total do sistema:

$$H = a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^- + \lambda(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+). \quad (4.38)$$

$\mathcal{P}$  não é mais um grupo de simetria do sistema, pois os termos contra-girantes não comutam com o operador número de excitações. Além disso,  $C(\theta)$  dada por (4.34) não é uma operação de simetria de  $H$ , a não ser para o subgrupo  $\theta = \{0, \pi\}$ ; chamaremos este subgrupo de  $\mathcal{S}$ .  $\mathcal{S}$  é composto pela identidade ( $\theta = 0$ ) e pela operação  $S$  ( $\theta = \pi$ ), dada por:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll} a \longrightarrow -a; & a^\dagger \longrightarrow -a^\dagger \\ \sigma^- \longrightarrow -\sigma^-; & \sigma^+ \longrightarrow -\sigma^+ \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Usando a equação (4.37) com  $\theta = \pi$ , encontramos a ação de  $S$  sobre os estados:

$$S|\Psi_N\rangle = e^{-iN\pi}|\Psi_N\rangle, \quad (4.40)$$

onde  $N = n + j$ , e  $|\Psi_N\rangle$  é um estado com número de excitação igual a  $N$ . Como  $j = \pm\frac{1}{2}$ , teremos:

$$S|\Psi_N\rangle = ie^{-iN\pi}|\Psi_N\rangle = \begin{cases} +i|\Psi_N\rangle, & \text{para } N_e \text{ par} \\ -i|\Psi_N\rangle, & \text{para } N_e \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.41)$$

As representações irredutíveis  $\Gamma_S^\pm$  correspondem então a estados com número par e ímpar de excitações, que não mais se conservam devido aos termos contra-girantes, mas cuja paridade é bem definida.

A simetria  $\mathcal{S}$  corresponde à conservação do observável  $e^{i\pi(a^\dagger a + \sigma^+ \sigma^-)}$ .

## 4.4 Hamiltoniana no Limite $\lambda \rightarrow \infty$

No limite  $\lambda \rightarrow \infty$ , a energia de interação, dada pelo operador  $H_I = \lambda(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+)$ , tende a ficar muito grande (em módulo). Como o átomo pode sofrer apenas uma excitação (ao contrário do campo, que pode ter um número arbitrário de fótons), neste limite podemos desprezar o termo  $\sigma^+ \sigma^-$  da energia atômica em comparação com os outros termos na Hamiltoniana. Para  $\lambda \rightarrow \infty$ , o campo tende a conter muitos fótons, pois a probabilidade de transições “anormais” causadas pelos termos contra-girantes é muito grande, e os autoestados têm uma grande dispersão no número de fótons (ver capítulo anterior). Assim, a energia do campo (dada por  $a^\dagger a$ ) não pode ser desprezada, ao contrário da energia do átomo.

Podemos então, para  $\lambda \rightarrow \infty$ , escrever a Hamiltoniana como:

$$H = a^\dagger a + \lambda(a + a^\dagger)(\sigma^- + \sigma^+). \quad (4.42)$$

Vamos analisar as simetrias de (4.42). Evidentemente  $\mathcal{S}$  continua a ser uma operação de simetria de  $H$ . Além de  $\mathcal{S}$ , a ausência do termo  $\sigma^+ \sigma^-$  faz surgir uma outra simetria, que denotaremos  $\mathcal{Q}$ .  $\mathcal{Q}$  é uma simetria atômica, que é composta pela operação identidade, e pela operação  $Q$ , dada por:

$$Q = \begin{cases} \sigma^+ \longrightarrow \sigma^- \\ \sigma^- \longrightarrow \sigma^+ \end{cases}. \quad (4.43)$$

O efeito de  $Q$  sobre os estados atômicos é uma troca entre os estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ :

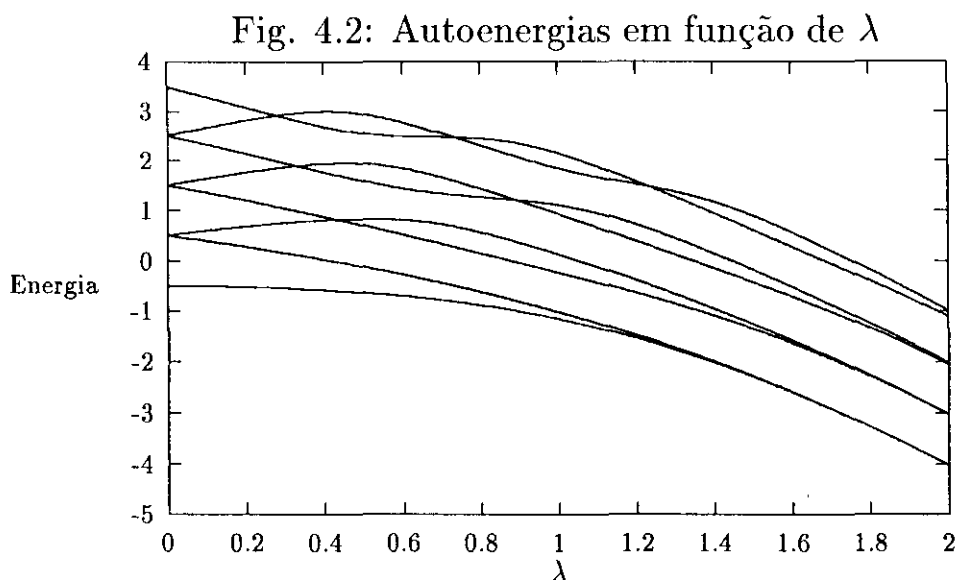
$$Q|e\rangle = |g\rangle; \quad Q|g\rangle = |e\rangle. \quad (4.44)$$

$\mathcal{Q}$  ser uma simetria de  $H$  significa que a energia do sistema é insensitiva ao estado do átomo.

Como  $Q$  provoca uma mudança de  $\pm 1$  no número de excitação,  $\mathcal{Q}$  mistura as representações irredutíveis de  $\mathcal{S}$ , e os dois grupos não comutam; assim, o grupo total de simetria de (4.42) não vai ser simplesmente um produto direto.  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}$  admitem a representação matricial:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

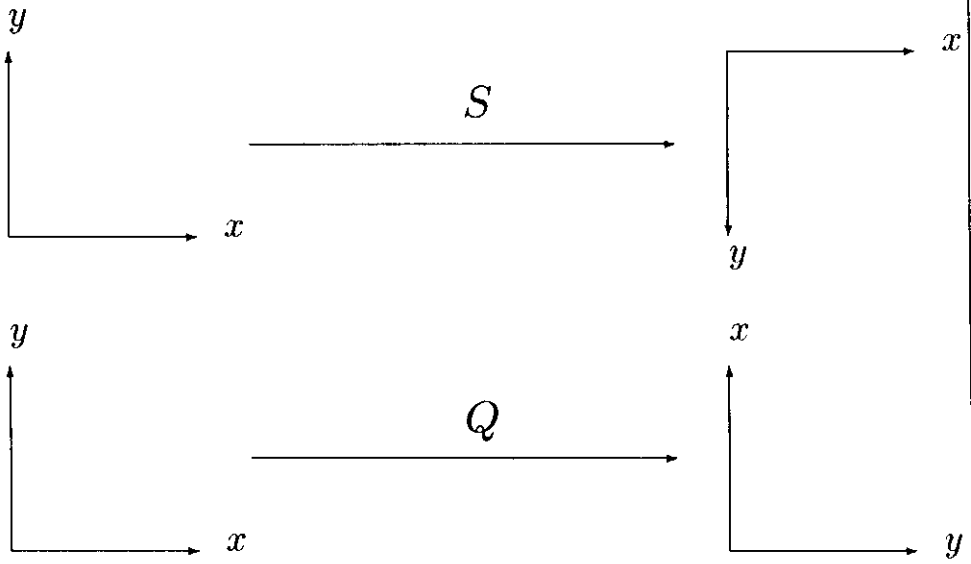
Obviamente esta representação é irredutível. Esperamos então que para  $\lambda \rightarrow \infty$ , os estados correspondentes às representações  $\Gamma_S^+$  e  $\Gamma_S^-$  se degenerem dois a dois. Na fig.(4.2), vemos um cálculo numérico das oito primeiras autoenergias em função de  $\lambda$ . Vemos que de fato para grandes valores de  $\lambda$ , as autoenergias vizinhas correspondentes a  $\Gamma_S^+$  e  $\Gamma_S^-$  vão se degenerando assintoticamente, como esperávamos. Além disso, vemos também que estados correspondentes a uma mesma representação irredutível não se cruzam, o que também é previsto pela teoria de grupos [41].



Na fig.(4.2) notamos também que existe um padrão no número de cruzamentos entre os estados cujas energias acabam se degenerando para  $\lambda \rightarrow \infty$ : o primeiro par não se cruza, o segundo se cruza uma vez, o terceiro duas vezes, e assim por diante; além disso, existe apenas um cruzamento de um par de autoenergias no intervalo de energias entre dois cruzamentos consecutivos do par seguinte. Todas estas propriedades não decorrem das simetrias do sistema; elas são propriedades gerais da equação diferencial de autovalores (equação de Schroedinger independente do tempo), análogas às regularidades no número de nodos dos autoestados de um potencial ligado unidimensional.

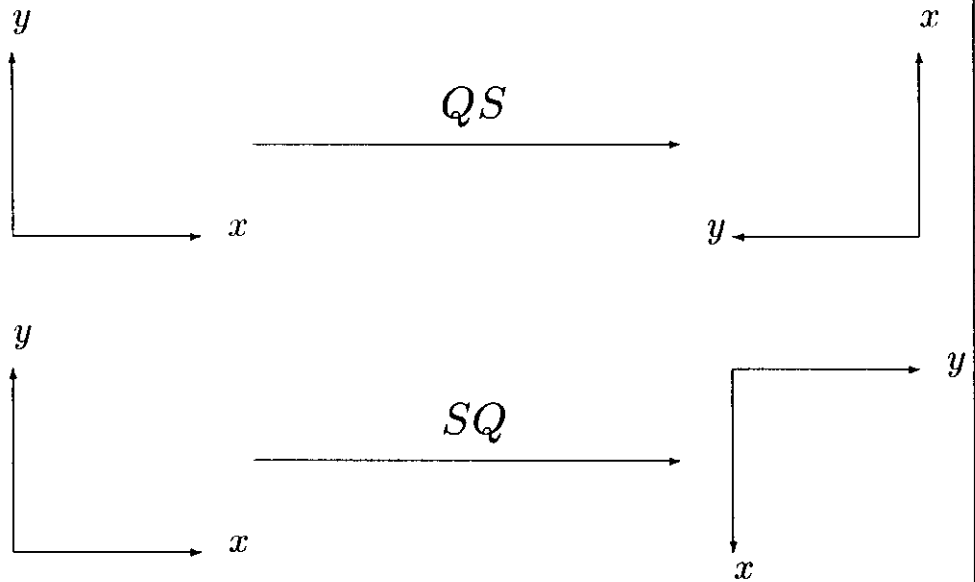
O grupo total de simetria de (4.42) é gerado pelas matrizes  $S$  e  $Q$  (4.45), multiplicadas de todas as maneiras possíveis. Como as matrizes são bidimensionais, a representação (4.45) admite um isomorfismo com transformações lineares no plano. Neste caso,  $S$  é uma reflexão pelo eixo  $x$ , e  $Q$  é uma reflexão pela diagonal entre os eixos  $x$  e  $y$  (ver fig.(4.3)).

Fig.4.3

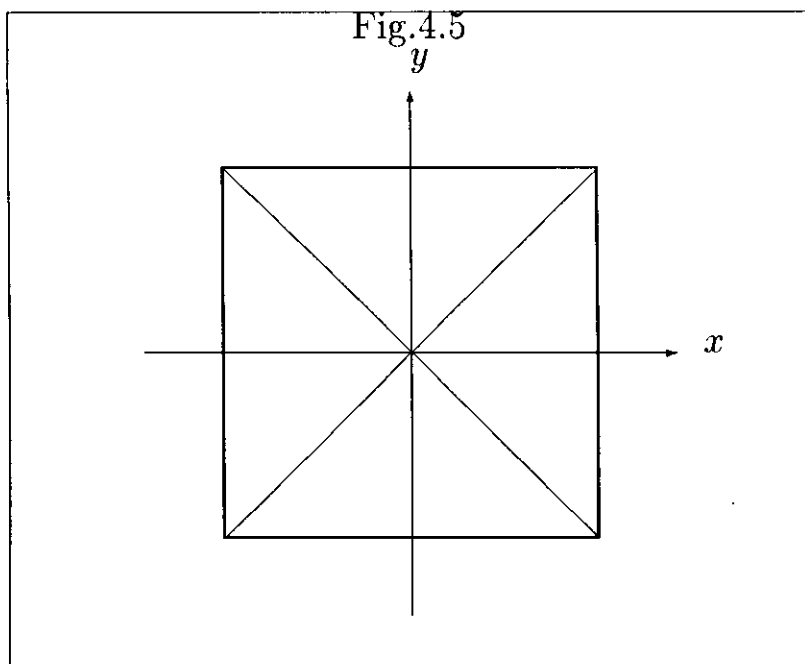


Por um cálculo direto (ou olhando as figs.(4.4a) e (4.4b)), vemos que  $QS$  corresponde a uma rotação anti-horária de  $90^\circ$ , enquanto que  $SQ$  corresponde a uma rotação horária pelo mesmo ângulo.

Fig.4.4



Assim, o grupo total inclui rotações de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ , juntamente com reflexões pelos eixos  $x$  e  $y$ , e pelas diagonais (ver fig.(4.5)). Trata-se então do grupo de simetrias do quadrado, conhecido em cristalografia como  $C_{4v}$ . Este grupo é bem conhecido (ver por exemplo [40]), e tem cinco representações irredutíveis, sendo que apenas uma é bidimensional (a chamada representação  $E$ ). Esta representação, se decomposta na soma direta das representações  $\Gamma_S^+$  e  $\Gamma_S^-$  de  $\mathcal{S}$ , resulta  $\Gamma_S^+ \oplus \Gamma_S^-$ , o que realmente tinha que acontecer.



## 4.5 Caso com “Detuning”

Para terminar, vamos examinar brevemente o efeito de um “detuning” não nulo sobre as simetrias do sistema.

Para a Hamiltoniana sem interação, as simetrias  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  (eqs.(4.2) e (4.3)) continuam a existir, mas  $\mathcal{P}$  não está mais presente, pois como a frequência dos fótons do campo não é mais igual à frequência de transição do átomo, os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  não são mais equivalentes. Como  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  comutam, o grupo total de simetria vai ser simplesmente  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , e as representações irredutíveis vão ser unidimensionais, ou seja, os níveis de energia vão ser não-degenerados (a não ser por degenerescências acidentais).

Para a Hamiltoniana da aproximação de onda girante, a simetria  $\mathcal{C}$  continua, e como não há mais a simetria  $\mathcal{P}$ , os níveis continuam não-degenerados,

mas não mais podem ser classificados em simétricos e antissimétricos perante a troca  $|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n + 1\rangle$ , apesar de eles ainda serem combinações lineares destes estados, por causa da simetria  $\mathcal{C}$ .

Para a Hamiltoniana completa (com os termos contra-girantes), o grupo de simetrias continua o mesmo ( $\mathcal{S}$ ); as simetrias também permanecem inalteradas para o limete  $\lambda \rightarrow \infty$ , o que significa que as características principais da fig.4.2 neste limite devem ser as mesmas.

# Conclusão

Para concluir, vamos resumir as principais conclusões a que chegamos neste trabalho.

Em primeiro lugar, vimos que para um acoplamento fraco entre o átomo e o campo, a teoria de perturbações descreve satisfatoriamente a dinâmica do sistema, e as correções nas autoenergias podem ser desprezadas até segunda ordem em  $\lambda$ , desde que a condição  $\lambda\sqrt{n} \ll 1$  seja satisfeita; este é o limite de validade da teoria de perturbações. Vimos também que os termos contra-girantes tendem a introduzir oscilações de alta frequência (com o dobro da frequência de oscilação do campo), que têm amplitude tendendo a zero no limite da aproximação de onda girante; além disso, a entropia quântica tende a ser aumentada pelos TCG.

Se o estado inicial do campo for um estado coerente, vimos que se a condição  $\lambda\sqrt{n} \ll 1$  não for satisfeita, o período de colapso na inversão atômica não existe, por causa das oscilações rápidas introduzidas pelos TCG. Se, por outro lado, a condição for satisfeita, a inversão nunca colapsa realmente (por causa das pequenas oscilações dos TCG), a não ser no instante igual à metade do tempo de “revival” (este é um resultado que vale em primeira ordem em  $\lambda$ ). É interessante observar que este instante é o mesmo em que a entropia atinge um mínimo, e onde o estado do campo é um estado do tipo “gato de Schroedinger”.

Para terminar, descobrimos os grupos de simetria das Hamiltonianas com e sem termo contra-girante, analisando o significado físico de cada grupo. Usando em seguida a teoria de grupos, vimos que quando a constante de acoplamento  $\lambda$  fica muito grande, surge uma nova simetria no sistema, aumentando o grupo de simetria de  $Z^2$  para  $C_{4v}$ , o que faz com que os níveis de energia se degenerem dois a dois, neste limite, como observado na diagonalização numérica.

# Bibliografia

- [1] Julian Schwinger. *Quantum Electrodynamics*. Dover, New York, 1958.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes: Introduction à l'électrodynamique quantique*. Éditions du CNRS, Paris, 1987.
- [3] Werner Vogel and Dirk-Gunnar Welsh. *Lectures on Quantum Optics*. Akademie Verlag, Berlin, 1994.
- [4] Lev Davidovich Landau and E. Lifchitz. *Théorie Quantique Relativiste*. Mir, Moscow, 1972.
- [5] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, Oxford, 1973.
- [6] Richard P. Feynmann, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume II. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
- [7] Lev Davidovich Landau and E. Lifchitz. *Teoria do Campo*. Hemus, São Paulo, 1965.
- [8] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [9] B. W. Shore and P. L. Knight. The jaynes-cummings model. *J. Mod. Opt.*, 40:1195, 1993.
- [10] P. Meystre and M. Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] P. W. Milloni, J. R. Ackerhalt, and H. W. Galbraith. Chaos in the semiclassical  $n$ -atom Jaynes-Cummings model: Failure of the rotating-wave approximation. *Phys.Rev.Lett.*, 50(13):966, 1983.

- [12] M. Munz. Chaotic behaviour in quantum optics and the failure of the rotating wave approximation at high intensities. *Zeitschrift fur Physik B*, 53:311, 1983.
- [13] J. C. Eidson and R. F. Fox. Quantum chaos in a two-level system in a semiclassical radiation field. *Phys.Rev.A*, 34(4):3288, 1986.
- [14] R. F. Fox and J. C. Eidson. Systematic corrections to the rotating-wave approximation and quantum chaos. *Phys.Rev.A*, 36(9):4321, 1987.
- [15] R. Graham and M. Hohnerbach. Quantum chaos of the two-level atom. *Phys.Lett.*, 101A(2):61, 1984.
- [16] M. Kús. Statistical properties of the spectrum of the two-level system. *Phys.Rev.Lett.*, 54(13):1343, 1985.
- [17] R. Graham and M. Hohnerbach. Statistical spectral and dynamical properties of two-level systems. *Phys.Rev.Lett.*, 57(11):1378, 1986.
- [18] K. Hepp and E. H. Lieb. *Ann.Phys.*, 76:360, 1973.
- [19] M. A. M. Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf, and M. C. Nemes. Chaos in a spin-boson system: Classical analysis. *Ann.Phys.*, 216(2):291, 1992.
- [20] K. Furuya, M. A. M. Aguiar, C. H. Lewenkopf, and M. C. Nemes. Distributions of a spin-boson system and the signatures of its classical mechanics. *Ann.Phys.*, 216(2):313, 1992.
- [21] F. Camargo, K. Furuya, and M. C. Nemes. On the behaviour of quantum observables in the chaotic maser model. *Physica A*, 212:299, 1994.
- [22] R. Vyas and S. Singh. Laser theory without the rotating-wave approximation. *Phys.Rev.A*, 33(1):375, 1986.
- [23] S. J. D. Phoenix. Counter-rotating contributions in the Jaynes-Cummings model. *J.Mod.Opt.*, 36(9):1163, 1989.
- [24] S. M. Barnett and D. T. Pegg. On the hermitean optical phase operator. *J.Mod.Opt.*, 1989.
- [25] Jin sheng Peng. Phase fluctuations in the Jaynes-Cummings model with and without the rotating-wave approximation. *Phys.Rev.A*, 45(5):3289, 1992.

- [26] K. Zaheer and M. S. Zubairy. Atom-field interaction without the rotating-wave approximation: A path-integral approach. *Phys.Rev.A*, 37(5):1628, 1988.
- [27] K. Zaheer and M. S. Zubairy. Photon statistics in Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *Opt.Commun.*, 73(4):325, 1989.
- [28] P. Lais and T. Steimle. Squeezing in the Jaynes-Cummings model without the rwa. *Opt.Commun.*, 78(5,6):346, 1990.
- [29] J. Seke. Squeezing and rabi oscillations in the dicke model within and without rotating-wave approximation. *Physica A*, 213:587, 1995.
- [30] X. Ruihua, X. Gong-Ou, and L. Dunhuan. Study of photon antibunching in the vacuum field of two-photon Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *J.Mod.Opt.*, 42(10):2119, 1995.
- [31] M. Fang and P. Zhou. Multiphoton Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *J.Mod.Opt.*, 42(6):1199, 1995.
- [32] W. J. Munro and C. W. Gardiner. Non-rotating-wave master equation. *Phys.Rev.A*, 53(4):2633, 1996.
- [33] M. D. Crisp. Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *Phys.Rev.A*, 43(5):2430, 1991.
- [34] S. Swain. Continued fraction expressions for the eigensolutions of the hamiltonian describing the interaction between a single atom and a single field mode: comparisons with the rotating-wave solutions. *J.Phys.A*, 6:1919, 1973.
- [35] Lev Davidovich Landau and E. Lifchitz. *Théorie Quantique Non-Relativiste*. Mir, Moscow, 1972.
- [36] S. J. D. Phoenix and P. L. Knight. Fluctuations and entropy in models os quantum optical resonance. *Ann. Phys.*, 186:381, 1988.
- [37] J. Gea-Banacloche. Collapse and revival of the state vector in the jcm: an example of state preparation by a quantum apparatus. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3385, 1990.
- [38] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, and S. J. D. Phoenix. Schroe-dinger cat states in the resonant jcm: collapse and revival of oscillations of the photon number distribution. *Phys. Rev. A*, 45:8190, 1992.

- [39] M. Hamermesh. *Group theory and its application to physical problems*. Dover, New York, 1989.
- [40] A. W. Joshi. *Elements of group theory and quantum mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [41] Volker Heine. *Group Theory in Quantum Mechanics*. Dover Publications, New York, 1993.