UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física Gleb Wataghin

MURILO FERREIRA VELO

Interações magnetostáticas em rede de agulhas magnéticas: inclusão da expansão multipolar

Campinas

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física Gleb Wataghin

MURILO FERREIRA VELO

Interações magnetostáticas em rede de agulhas magnéticas: inclusão da expansão multipolar

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA.

Orientadora:

Profª. Drª. Fanny Béron

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação de mestrado defendida pelo aluno Murilo Ferreira Velo, orientada pela Profª. Drª. Fanny Béron.

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 1374983/2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

V546i

Velo, Murilo Ferreira, 1989-
Interações magnetostáticas em rede de agulhas magnéticas: inclusão da expansão multipolar / Murilo Ferreira Velo. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Fanny Béron.
Coorientador: Kleber Roberto Pirota.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Interações dipolares. 2. Expansões multipolares. 3. Momentos multipolares. I. Béron, Fanny,1980-. II. Pirota, Kleber Roberto,1973-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Magnetostatic interaction in arrays of magnetic needles: inclusion of the multipolar expansion
Palavras-chave em inglês:
Dipolar interactions
Multipolar expansions
Multipolar moments
Área de concentração: Física
Titulação: Mestre em Física
Banca examinadora:
Fanny Béron [Orientador]
João Paulo Sinnecker
Antonio Manoel Mansanares
Data de defesa: 30-06-2016
Programa de Pós-Graduação: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **MURILO FERREIRA VELO - RA 092447** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 30 / 06 / 2016.

COMISSÃO JULGADORA:

- Profa. Dra. Fanny Béron – Orientadora – DFMC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. João Paulo Sinnecker – CBPF
- Prof. Dr. Antonio Manoel Mansanares – DEQ/IFGW/UNICAMP

OBS.: Informo que as assinaturas dos respectivos professores membros da banca constam na ata de defesa já juntada no processo vida acadêmica do aluno.

Campinas

2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à toda minha família que sempre estiveram ao meu lado, apoiando, incentivando e torcendo pelo meu êxito. Dedico também a memória do meu eterno amigo Marcos Paulo Soares Amaral.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente à Deus por ter conseguido atingir mais esta etapa de crescimento pessoal.

Agradeço minha orientadora Fanny Béron e meu co-orientador Kleber Roberto Pirota por todo o apoio e orientação no decorrer deste últimos anos. Não apenas a orientação, mas também a amizade e companheirismo nesta jornada.

Agradeço a todos os meus amigos que moram comigo, os amigos de Manduri, os amigos que trabalham comigo e os amigos de bar. Citar os nomes de cada um de vocês seria um trabalho homérico, principalmente para citar todos os companheiros de cachaça.

Agradeço em especial a minha namorada Maria Cristina Martins que me apoiou durante o meu mestrado e que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos desta jornada.

Agradeço os meus amigos do LMBT, Diego Muraca, Oscar, Gabriel Soares, Sérgio, Luiz Arzuza, Karoline, Maria Eugênia, Célia... que compartilhando o mesmo ambiente de trabalho nos tornamos uma segunda família.

Agradeço, também, o corpo técnico do instituto pelos 30 minutos diáirios de truco proporcionados depois do bandejão, obrigado, Zéquinha, André Rebach, Lorival Toma Seis Rebac, Sérgio, Alcides joga quieto, Tucurui, Gustavo Internauta, Adelino, Milton, Eduardo Japannha Todo Dia e Renato Sucuri.

RESUMO

Interações dipolares são amplamente estudadas em magnetismo, devido ao fato de que elas têm um papel fundamental na maioria dos sistemas magnéticos. Porém, para vários sistemas, o cálculo das interações magnetostáticas é feito de duas maneiras: considerando-se apenas o primeiro termo da expansão multipolar e/ou aproximando as entidades magnéticas por dipolos perfeitos. Neste trabalho iremos realizar este cálculo de maneira exata, através da expansão multipolar, considerando a forma geométrica da entidade magnética. Para tal montamos um sistema macroscópico bidimensional composto por agulhas magnéticas de bússola, no qual foi automatizado a aquisição de imagens e o controle de campo magnético. No objetivo de verificar a exatidão do nosso cálculo, implementamos uma simulação utilizando o método de Monte Carlo para comparar com os resultados experimentais. Focamos o estudo sobre sistemas de duas e cinco agulhas, sendo que o primeiro permite a comparação com a solução analítica exata do problema. Observamos que a introdução dos termos de ordem mais alta na expansão multipolar modifica o potencial magnético gerado por uma agulha de bússola. A expansão multipolar do potencial mostrou que devemos considerar termos de ordem $l = 1$, 3 e 5, sendo que os termos de ordem par são nulos e termos $l \geq 7$ são desprezíveis. A simulação de Monte Carlo reproduziu com fidelidade o comportamento dos sistemas experimentais, mostrando uma boa concordância entre as curvas de histerese simuladas e experimentais. Explicamos os resultados a partir do fato que a expansão multipolar introduz mínimos locais nos diagramas de energia de interação de duas partículas com campo magnético aplicado nulo. Estas regiões são conhecidas como os pontos de equilíbrio metaestáveis de um sistema magnético. Para um sistema de duas agulhas, descrevemos como os saltos na curva de histerese estão relacionados com descontinuidades na trajetória no espaço de fases de energia do sistema, criadas pelos termos de ordem mais alta. Dos nossos resultados, concluímos que para descrevermos o comportamento magnético de um sistema de agulhas de bússola, devemos levar em conta termos de ordem mais alta na expansão multipolar, bem como a geometria desta entidade.

ABSTRACT

Dipolar interactions are widely studied in magnetism, since they play a key role in most magnetic systems. However, for several systems the magnetostatic interactions calculation is done through two ways: considering only the multipole expansion first term and/or approximating the magnetic entities as perfect dipoles. In this work we will perform this calculation exactly, through the multipole expansion, considering the magnetic entities geometric shape. For such, we set up a two-dimensional macroscopic system made of magnetic compass needles, where we automated the image acquisition and the magnetic field control. In the objective of verifying our calculation accuracy, we implemented a simulation using the Monte Carlo's method to compare with the experimental results. We focused the study on systems of two and five needles, since the first one allowing comparing with the experimental results. We observed that the introduction of higher order terms in the multipole expansion modifies the magnetic potential generated by a compass needle. The multipole expansion showed that we need to consider order terms of l = 1, 3 and 5, with nulls even terms are and terms of $l \geq 7$ are negligible. The Monte Carlo simulation accurately reproduced the experimental systems behaviors, exhibiting a good agreement between the simulated and experimental hysteresis curves. We explained the results through the fact that the multipole expansion introduces local minima in the two magnetic particles interaction energy diagrams with null applied magnetic field. These regions are known as metastable equilibrium points in a magnetic system. For a two-needle system, we described in detail how the hysteresis curve drops are related to trajectory discontinuities in the system energy phase space, created by the higher order terms. From our results, we conclude that to describe the magnetic behavior of a compass needle system, one must take into account higher order terms in the multipole expansion, as well as the entity geometry.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 17

2.1. Motivação e hipótese de uma agulha macroscópica como um dipolo puro 17

2.2. Formalismo da expansão multipolar 19

2.3. Aplicação do formalismo para um sistema real 21

3. EXPANSÃO MULTIPOLAR DE UMA AGULHA MAGNÉTICA 25

3.1. Formalismo da expansão multipolar 25

3.1.1. Considerações iniciais 26

3.1.2. Cálculo do potencial magnético 29

3.1.3. Expansão multipolar do potencial magnético 32

3.1.4. Energia de interação magnetostática 33

3.2. Aplicação a um sistema de agulhas magnéticas 37

3.2.1. Parametrização do sistema 37

3.2.2. Cargas magnéticas 40

3.2.3. Momentos de multipolo magnético 41

3.2.4. Potencial magnético 49

4. MÉTODOS E TÉCNICAS 52

4.1. Montagem experimental do sistema de agulhas 52

4.1.1. Caracterização magnética de uma única agulha 52

4.1.2. Sistema agulha-haste 54

4.1.3. Montagem da rede de agulhas 56

4.1.4. Campo magnético aplicado 57

4.1.5. Sistema de aquisição de imagens 60

4.1.6. Tratamento de imagens 63

4.1.7. Calibração do experimento e análise de erros 65

4.2. Simulação Monte Carlo 68

5. RESULTADOS E ANÁLISE 71

5.1. Resultados 71

5.1.1. Sistema de duas agulhas 72
5.1.2. Sistema de cinco agulhas 74
5.2. Discussão 76
5.2.1. Solução analítica para o sistema de duas agulhas (estado fundamental, $H = 0$) 76
5.2.2. Competição entre energia Zeeman e energia de interação magnetostática 79
5.2.4. Mecanismos de inversão da magnetização 83
5.2.5. Sistema de cinco agulhas 84
5.3. Outros resultados 85
5.3.1. Redes de agulhas com defeitos e sem defeitos uma análise qualitativa 86
5.3.2. Variação do campo coercivo com o tamanho dos tabuleiros quadrados 88
5.3.3. Curva *MxH* para um tabuleiro de 11x11 a 45º 89
6. CONCLUSÕES 91
7. PERSPECTIVAS 94
BIBLIOGRAFIA 96
ANEXO I – PROGRAMA DE CÁLCULO DOS MOMENTOS DE MULTIPOLO 97

1. INTRODUÇÃO

Interações dipolares estão presentes em todos os sistemas magnéticos que são compostos por mais de uma entidade magnética. Estas interações geram uma força que tende a orientar as entidades magnéticas no sentido de minimizar a energia magnetostática. Uma outra característica desta interação é que ela depende do inverso da distância ao cubo entre as entidades magnéticas. Por isso, a força de interação dipolar é muito intensa nas proximidades das entidades magnéticas. Como dois exemplos de sistemas importantes que possuem interações dipolares podemos citar as redes de nanofios e aglomerados de nanopartículas, onde, em ambos os sistemas, temos mais de uma entidade magnética (nanofios/nanopartículas). Ademais, sabemos que essas entidades magnéticas são fortemente interagentes devido à proximidade dos elementos na matriz em que elas estão contidas.

Assim, quando é medido o comportamento magnético temos, além da componente intrínseca de magnetização, uma segunda componente que é devida a interação dipolar com seus vizinhos. Quando essas estruturas são medidas com técnicas convencionais de magnetometria, não obtemos um resultado "puro", i.e., existe sempre um resultado "mascarado" devido a essas interações presentes na rede. Uma maneira de contornarmos esse problema seria a medição dessas nanoestruturas isoladas. Contudo, neste procedimento reside o problema de que esses materiais são nanométricos e, por isso, possuem um sinal magnético muito baixo, tornando inviável as medidas usuais de magnetometria massiva.

Um modelo que frequentemente utilizamos para retirar informações individuais de um sistema magnético a partir de medidas globais é o modelo clássico de Preisach [1]. Esse modelo é baseado no fato de que a curva de histerese global é formada pela atuação de operadores matemáticos, *não interagentes*, chamados *histerons*. Esses histerons são todos normalizados com relação à magnetização, mas podem estar deslocados da origem pelo efeito de um campo de interação efetivo. Portanto com uma rotina de várias medidas globais sucessivas, chamada curvas de inversão de primeira ordem (*First-Order Reversal Curves,* FORC, em inglês), é possível termos a distribuição de todos os histerons que compõem uma amostra [2]. Com essas distribuições é possível tirarmos informações detalhadas de cada parte isolada do sistema.

Os diagramas FORC são amplamente utilizados em caracterizações magnéticas. Contudo, para que a técnica FORC entregue a distribuição de histerons do modelo de Preisach

de um sistema, este deve cumprir dois pré-requisitos básicos: (ii) perca de memória (*wiping-out*, em inglês) e (ii) congruência. A propriedade (i) está ligada com as curvas globais de magnetização em função do campo magnético aplicado, onde essas não devem ter memória, portanto qualquer variação do campo magnético apaga a história anterior do sistema (perda da memória). Já a propriedade (ii) diz respeito a congruência das curvas de magnetização em função do campo magnético aplicado: entre dois valores quaisquer de campo magnético aplicado, as curvas de histereses dentro desse intervalo são congruentes. Como elas têm a mesma forma geométrica podendo, apenas, estar deslocadas para cima ou para baixo nas curvas de magnetização. Desta maneira, antes de aplicarmos o modelo FORC devemos inspecionar a válidade de ambas as propriedades.

Agora, voltando para o caso de sistemas magnéticos com interações dipolares, vemos que, como já mencionado anteriormente, essa interação ocorre entre duas entidades magnéticas diferentes. Esse fato por si só já desabilita a interpretação deste sistema magnético dentro do modelo de Preisach, pois neste modelo supõe-se que os histerons não são interagentes entre si. Devido a essa caracteristica os sistemas magnéticos com interações dipolares não satisfazem, em geral, a condição (ii) de aplicabilidade do protocolo FORC. Portanto, o objetivo inicial deste projeto foi tentar incluir as interações dipolares no modelo FORC, pois como já mencionado a maior parte dos sistemas magnéticos de interesse possui interações dipolares.

Como supracitado, o objetivo principal desta dissertação é a inclusão de interações dipolares no modelo FORC, mas para isso devemos escolher um sistema "teste" de estudo. Este sistema deve cumprir dois pré-requisitos: ser de fácil manipulação e possuir a possibilidade de observação direta das entidades magnéticas isoladas. O primeiro pré-requisito é necessário mais pelo ponto de vista prático de implementação do sistema, pois queremos um sistema que seja de fácil manipulação, onde não se gaste muito tempo preparando amostras. O segundo pré-requisito é mais conceitual, pois se temos as medidas de magnetização das partes do sistema, somos capazes de identificar cada parte do sistema com um histeron matemático. Desta maneira, a escolha do sistema magnético de estudo é uma das tarefas mais importantes deste projeto de mestrado.

Neste projeto de mestrado escolhemos estudar o mecanismo das interações dipolares em um sistema planar composto por agulhas magnéticas de bússola, onde essas estão livres para girar em torno de seu eixo central. Este sistema, como veremos na revisão bibliográfica, tem um amplo interesse científico em estuda-lo, pois, o mesmo é de simples manipulação e nele podemos observar as partes individuais do sistema diretamente. Além disso, neste sistema, temos os dois pré-requisitos de aplicabilidade satisfeitos, pois como estamos

trabalhando com agulhas de bússola de dimensões macroscópicas, temos como manipulá-las e observá-las facilmente. Na **Figura 1**, mostramos as dimensões da agulha bem como elas são montadas em cima de sua haste, livres para girarem em torno de seu centro. Portanto, o nosso primeiro objetivo desta dissertação é construir e automatizar o controle, aquisição e tratamento de dados deste sistema de agulhas magnéticas.

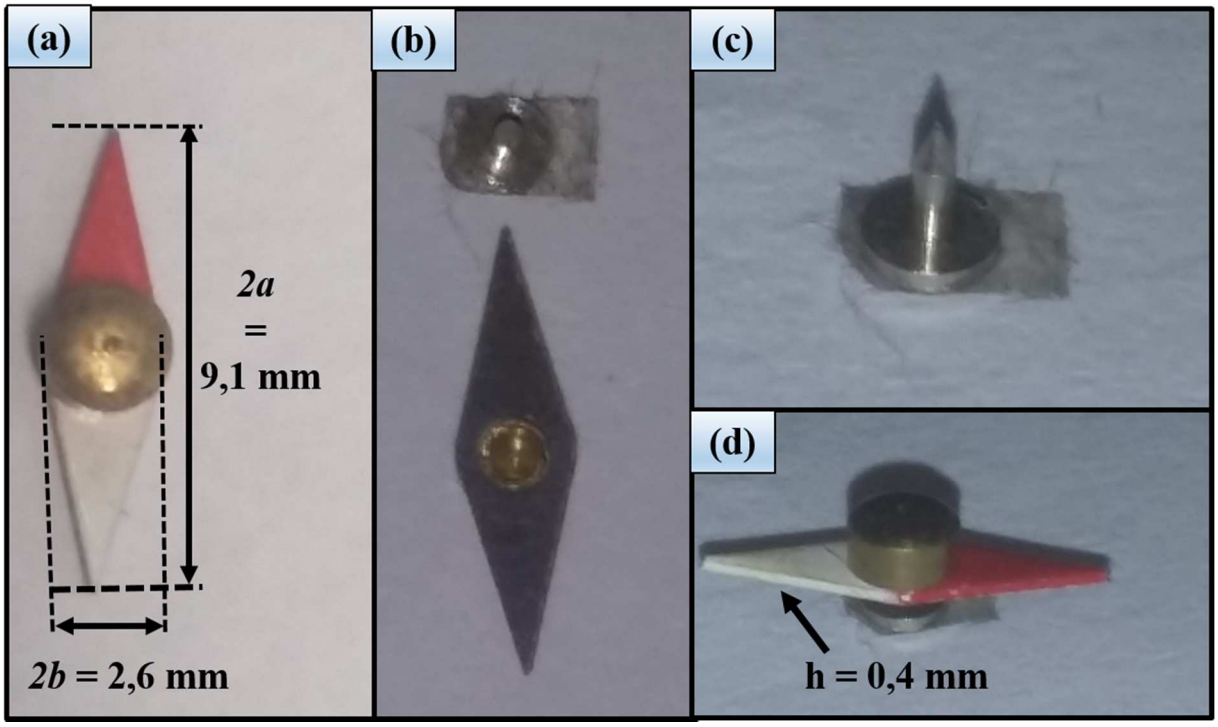

Figura 1: Agulha magnética e suas dimensões. (a) vista superior, com as dimensões, (b) vista superior da haste e a parte de trás da agulha, (c) haste de sustentação e (d) o sistema haste-agulha com a espessura da agulha.

Para atingir o objetivo mais ambicioso de incluirmos interações dipolares no modelo FORC, primeiro, inevitavelmente, devemos ser capazes de entender em detalhes como cada agulha de bússola se comporta no sistema. Não apenas o comportamento individual, mas como que uma agulha magnética influencia no comportamento da outra. Essa tarefa é realizada quando sabemos em detalhes como funciona o mecanismo de interação das agulhas de bússolas magnéticas. Pois bem, sabemos que cada agulha magnética tem uma magnetização constante ao longo de seu eixo maior e pode girar livremente em torno de seu eixo central de rotação. É razoável supormos que uma agulha deve se comportar como um dipolo puro livre para girar em torno do eixo central de rotação (onde aqui nos restringimos a sistemas bidimensionais). Porém, analisando os resultados iniciais (**Figura 2**), vimos que essa hipótese logo de início é equivocada e, portanto, deveríamos pensar em uma nova abordagem para desenvolvermos um

modelo que descreva satisfatoriamente este sistema. Assim, nasceu a ideia de fazermos uma expansão multipolar do potencial das agulhas magnéticas de bússola.

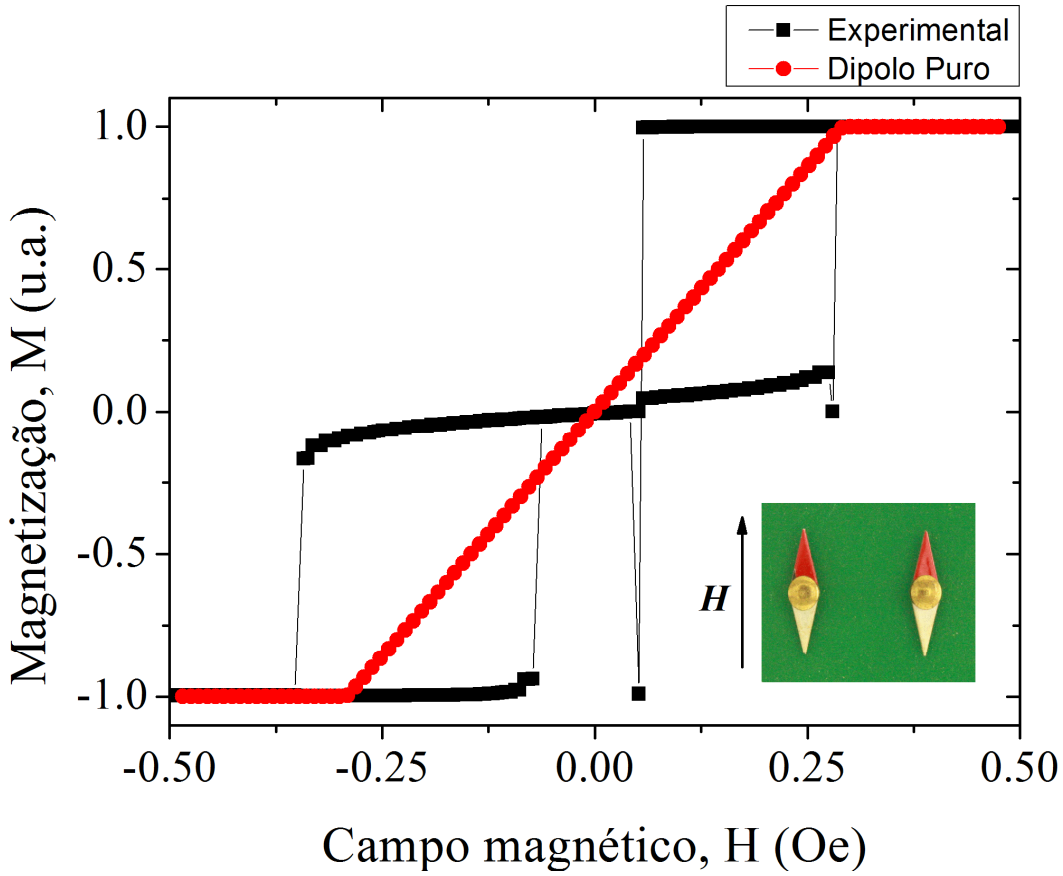

Figura 2: Curvas de histereses de duas agulhas magnéticas considerando o caso experimental (experimento das agulhas discutido nesta dissertação) e o caso em que consideramos cada agulha como um dipolo puro.

A abordagem de expansão multipolar quando analisada na literatura possui alguns casos [6-9] em que esta técnica já foi utilizada, entretanto, nunca para o caso de agulhas macroscópicas. Esta técnica pode ser abordada de várias maneiras diferentes, mas a mais eficiente para este problema é continuar considerando a agulha com magnetização constante ao longo de uma direção. Porém, adicionamos o detalhe de considerarmos a forma geométrica desta agulha no problema. Um fator que se torna importante neste tipo de abordagem é que, diferentemente dos problemas que são resolvidos nos livros de ensino de eletromagnetismo, devemos considerar os termos adicionais desta expansão. Pois, como veremos mais adiante estes termos extras, que vêm da expansão multipolar, não são desprezíveis. Portanto, o novo objetivo desta tese de mestrado passou a ser o entendimento em detalhes das interações entre agulhas magnéticas de bússola.

Desta maneira, o nosso objetivo principal dessa dissertação de mestrado, como já citado, passou a ser: *cálcular exatamente a interação magnetostática entre agulhas magnéticas através da expansão multipolar*. Com este novo objetivo surgiram outros que passaram a ser extremamente importantes e complementares com relação a este. Um desses objetivos é, a partir do cálculo da energia de interação magnetostática das agulhas magnéticas, gerarmos uma simulação computacional utilizando o método de Monte Carlo para o comportamento magnético do sistema de agulhas. Com esta simulação, iremos ter uma nova fonte de dados e seremos capazes de testar o modelo de expansão multipolar do potencial. Já adiantamos, que os principais resultados deste trabalho foram obtidos para o caso de duas e cinco agulhas magnéticas (**Figura 3**), respectivamente. Isto vem do fato que com sistemas menores temos mais controle dos parâmetros envolvidos e menos variáveis para tratarmos.

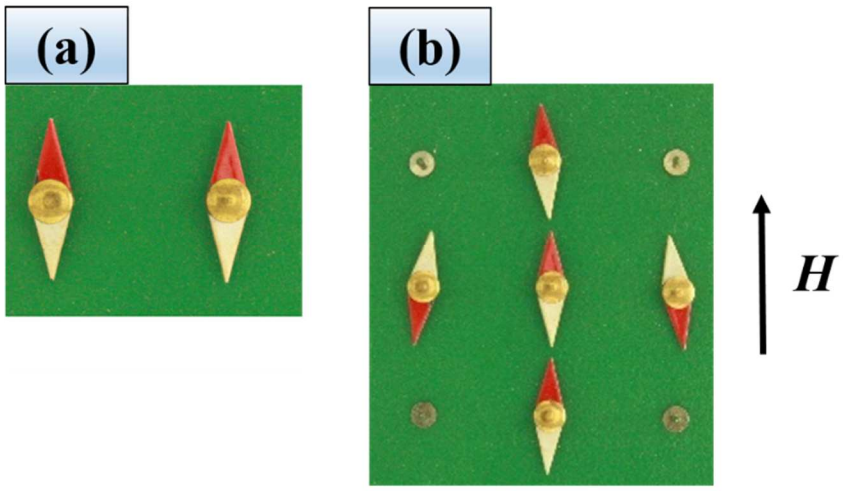

Figura 3: Sistemas de (a) duas e (b) cinco agulhas magnéticas.

Visando realizar os novos objetivos expostos acima dividimos a tese da seguinte maneira: primeiramente iniciamos com uma revisão bibliográfica, onde mostramos trabalhos já realizados no sistema de agulhas magnéticas, bem como, a revisão da técnica de expansão multipolar para sistemas análogos. Já o segundo capítulo aborda o desenvolvimento do formalismo da expansão multipolar, onde não só explicamos como esta etapa foi realizada como também fazemos a aplicação deste formalismo para o caso de uma agulha magnética. O tercerio capítulo é dedicado a aspectos experimentais do sistema, bem como, o desenvolvimento de uma simulação Monte Carlo do sistema de agulhas magnéticas. Neste capítulo, mostra-se detalhes de como foi feita a automatização do controle/aquisição e tratamento de dados do sistema, complementarmente a isso, mostramos como implementamos a simulação Monte Carlo para este problema. No quarto capítulo mostra-se os resultados experimentais, simulados e teóricos

para os dois principais casos estudados aqui: redes de duas e cinco agulhas magnéticas. No quinto capítulo tem-se a conclusão do projeto, onde mostra-se quais objetivos alcançamos e quais são as principais conclusões do experimento de rede de agulhas. Por último, tem-se uma breve indicação sobre as perspectivas de continuidade deste projeto, dando resultados que não foram analisados nesta dissertação, mas que possuem grande potencial científico.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Antes de introduzirmos o formalismo necessário para resolvermos o problema das agulhas de bússolas macroscópicas, deve-se fazer uma atenta revisão bibliográfica para ter-se uma indicação exata do atual estado da arte do desenvolvimento das soluções deste sistema magnético macroscópico. Aqui nesta seção vamos dar um panorama geral dos trabalhos que foram desenvolvidos para estudar exatamente este problema, partindo dos primeiros trabalhos que contém uma motivação inicial da comunidade científica para estudar este tipo de sistema, em seguida, surge a necessidade de um formalismo mais preciso para descrever o sistema que é alcançado através da expansão multipolar do potencial magnético e, por fim, mostra-se a aplicação desse formalismo para um sistema experimental realizado para um sistemas de nanodiscos no estado de monodomínios que evidencia a validade do método aplicado.

2.1. Motivação e hipótese de uma agulha macroscópica como um dipolo puro

Sistemas compostos por agulhas magnéticas macroscópicas têm despertado o interesse de vários grupos de físicos que trabalham com magnetismo. Esse interesse se concentra nos fatos de que o sistema é relativamente simples de ser implementado, os resultados são medidas físicas diretas e o entendimento do comportamento desses sistemas macroscópicos pode ajudar no entendimento de sistemas magnéticos mais complexos. Os primeiros trabalhos foram reportados na literatura já nos anos 90 por E. Olive *et al.* [3, 4]. Estes trabalhos tratavam de um sistema composto por agulhas magnéticas de bússolas arranjadas em matrizes quadradas, onde o problema foi abordado do ponto de vista termodinâmico. Nestes trabalhos cada agulha foi tratada como se fosse um dipolo magnético perfeito, i.e., não há nenhuma menção ao formato geométrico das agulhas ou sua distribuição de magnetização.

Essas distorções introduzidas pela simplificação do problema causam o problema de que a simulação apresentada nesses artigos não consegue reproduzir o estado fundamental do sistema relaxado (*ground state,* em inglês) observado experimentalmente (formação de linhas de agulhas magnéticas nas direções horizontal e vertical da rede), sendo que a simulação tem como estado fundamental uma estrutura de micro-vórtices no centro do tabuleiro (**Figura 4**). Esta estrutura aparece porque os efeitos de tamanho finito removem a degenerescência contínua que existe nas configurações quadradas infinitas. Tal configuração de micro-vórtice

não pode existir em uma matriz quadrada de 22x22 agulhas magnéticas devido aos efeitos multipolares.

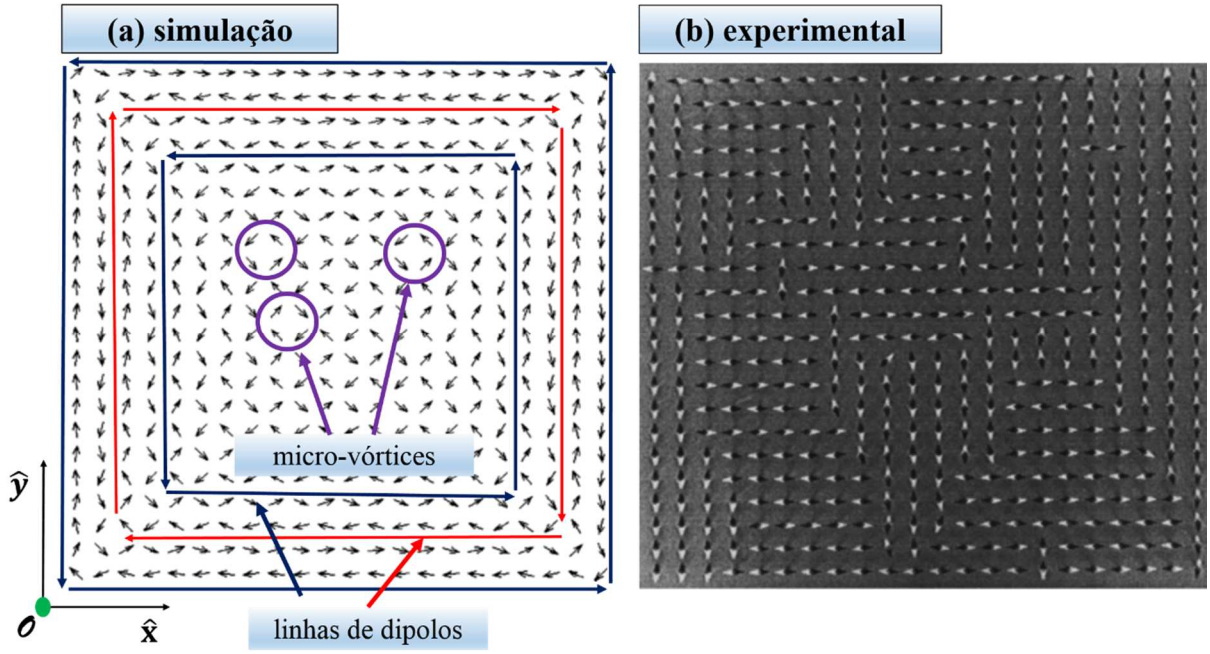

Figura 4: Estado fundamental de uma matriz quadrada de 22x22 agulhas magnéticas: (a) caso onde cada agulha é considerada como um dipolo "puro", através de simulação numérica e (b) resultado experimental de uma rede de agulhas magnéticas. Em (a) tem-se duas regiões destacadas: as linhas de dipolos que são observadas nas bordas da rede e no centro, por razões de simetria, tem-se uma estrutura de micro-vórtices. Em (b) tem-se a formação de linhas de agulhas nas direções vertical e horizontal da rede de agulhas magnéticas. Figura adaptada da referência [4].

Para resolver este problema os autores propuseram a adição de um termo extra de energia anisotrópica (E_{ani}), para impedir a formação da estrutura de micro-vórtices. Esse termo, escrito como $E_{ani} = k\sum_i \mu_i^2 sen^2(2\theta_i)$, onde k é uma constante de proporcionalidade e μ_i é a magnetização normalizada da i-ésima agulha magnética de bússola, inclinada de um ângulo θ_i, induz eixos fáceis nas direções θ = 0º e 90º que correspondem aos eixos $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ indicados na figura. Com a adição deste termo foi possível recuperar os resultados experimentais de comprimento de linha de agulhas magnéticas, calor específico, susceptibilidade magnética e parâmetro de ordem do sistema experimental [4]. Note que este trabalho não apresentou o resultado simulado do estado fundamental com o termo adicional de energia anisotrópica.

Outro artigo que busca entender o comportamento de um sistema de agulhas foi apresentado em 1998 por R.L.Novak *et al.*, para o caso de um sistema magnético composto com poucas agulhas [5]. Este trabalho aborda o fenômeno do ponto de vista fenomenológico,

onde foi possível mostrar que variando a disposição ou o número de agulhas magnéticas é possível estudar os efeitos das interações dipolares presentes no sistema. No entanto, este trabalho não aplica nenhum modelo para a análise dos resultados do experimento.

Portanto, tendo à luz estes trabalhos pioneiros, ficou evidente que uma agulha magnética não pode ser tratada como sendo apenas um dipolo puro. Se essa hipótese fosse verdadeira, entre outras coisas, ter-se-ia um estado fundamental com a presença de micro-vórtices. Então, tendo em vista os problemas apontados acima, o sistema de agulhas tornou-se um possível candidato para a aplicação de um método de cálculo que considera a distribuição de magnetização de maneira mais detalhada e precisa, que é o formalismo da expansão multipolar do potencial magnético que será mostrada na próxima seção.

2.2. Formalismo da expansão multipolar

O formalismo da expansão multipolar do potencial magnético foi o modelo que se mostrou adequado para o sistema físico de rede de agulhas magnéticas macroscópicas. Esse modelo teórico, generalizado, foi inicialmente desenvolvido em 2004 para o caso de partículas no estado de monodomínios magnéticos [6]. A magnetização da partícula magnética é considerada constante no interior do seu volume (estado monodomínio), mas a geometria da partícula magnética monodominio foi levada em conta através da expansão multipolar do potencial magnético. O formalismo matemático utilizado neste modelo foi baseado, como mencionado anteriormente, em uma expansão em série de potências do potencial magnético e no fato de que não se utiliza apenas o primeiro termo não-nulo da expansão e, sim, dois ou três termos não-nulos dependendo do problema magnético a ser analisado.

A teoria desenvolvida é, como os autores mostraram, uma teoria invariante por escala, pois como explicado por N. Mikuszeit *et al.* [6] o cálculo é todo baseado em eletromagnetismo clássico de Maxwell. Então ao aplicar o modelo para sistemas extremamente pequenos, por exemplo um sistema nanométrico composto por nanodiscos monodominios, ou, por exemplo um sistema macroscópico composto por agulhas magnéticas, tem-se, em tese, resultados análogos. Ademais, este problema possui uma analogia direta com o problema de cargas elétricas livres em um condutor perfeito. A análogia vem devida a mesma estrutura das equações de Maxwell, para estes dois casos supracitados, apenas com a alteração, é claro, do campo elétrico pelo campo magnético.

Em 2005 os cálculos dos momentos de multipolo foram formalizados para o caso de discos magnetizados [7]. Esse sistema tem seu comportamento magnético regido via interação magnetostática, por possuir duas características principais: tamanho finito (discos com diâmetros bem definidos) e distância entre discos (50 nm) muito maior que o comprimento típico da interação de troca (Py ($Ni_{80}Fe_{20}$) possui comprimento típico de troca de 5 nm). Note que o resulatado do balanço energético de cada disco individual faz com que o mesmo esteja em um estado de monodôminio e com a magnetização contida no plano do disco, podendo girar livremente neste plano.

Logo em seguida, em 2005, o mesmo grupo de pesquisa apresentou os resultados de simulação [8]. O sistema de nanodiscos foi simulado para os casos de duas situações distintas: um caso considerando os nanodiscos como dipolos perfeitos e o segundo caso considerando a expansão multipolar desenvolvida em [7]. Como será mostrado mais adiante, os dois resultados simulados (**Figura 5**) foram comparados com resultados experimentais e como resultado final o modelo de expanção multipolar foi o que conseguiu descrever adequadamente as redes de nanodiscos magnéticos. Lembre-se de que quando é considerada a expansão multipolar leva-se em conta a geometria da entidade magnética, no caso um nanodisco, e, leva-se em conta também a magnetização como sendo constante em todo o interior da entidade magnética. Esta última consideração é válida pois o disco encontra-se em um estado de monodomínio, i.e., toda a magnetização aponta para um mesmo sentido.

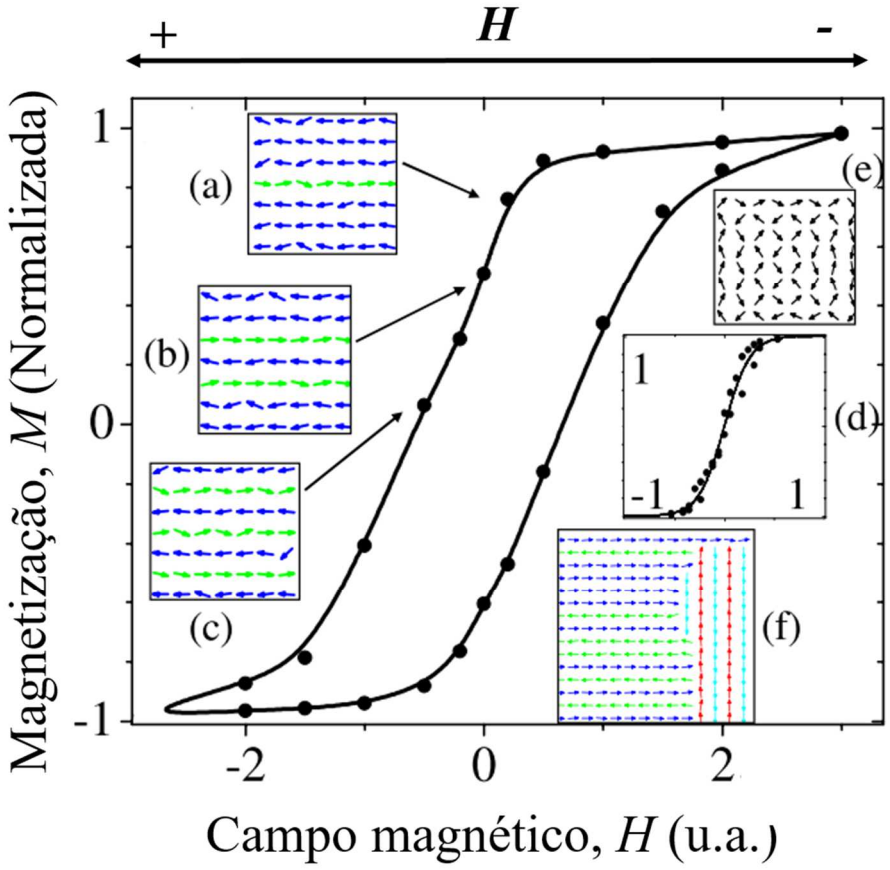

Figura 5: Curva de histerese simulada para uma matriz quadrada de 20x20 nanodiscos considerando os momentos de multipolo e um sistema com interação dipolar pura [inserção (d)]. Inserções (a)-(c) mostram parte dos estados de configurações magnéticas intermediárias; (e) e (f) mostram configurações de campo nulo para o caso de interação dipolar pura e multipolos, respectivamente. Figura adaptada da referência [8].

2.3. Aplicação do formalismo para um sistema real

Agora, relembrando, que à luz do método científico, devemos necessariamente comprovar, através de um experimento científico, os resultados contidos na seção anterior. Nesse sentido, o trabalho de M. Ewerlin *et al.* de 2013, nos mostra um sistema experimental onde o mesmo se comporta como o previsto pelo formalismo de expansão multipolar [9]. Este sistema experimental é composto por nanodiscos fabricados fisicamente através do processo de litografia por feixe de elétrons e caracterizados com medidas de magnetização em função do campo magnético aplicado (curvas $M \times H$), bem como, medidas com luz síncrotron polarizada. A amostra estudada compõe-se por uma matriz quadrada de nanodiscos ($Pd_{0,87}Fe_{0,13}$) de diâmetro de 150 nm e distância entre centros de 300 nm (**Figura 7**).

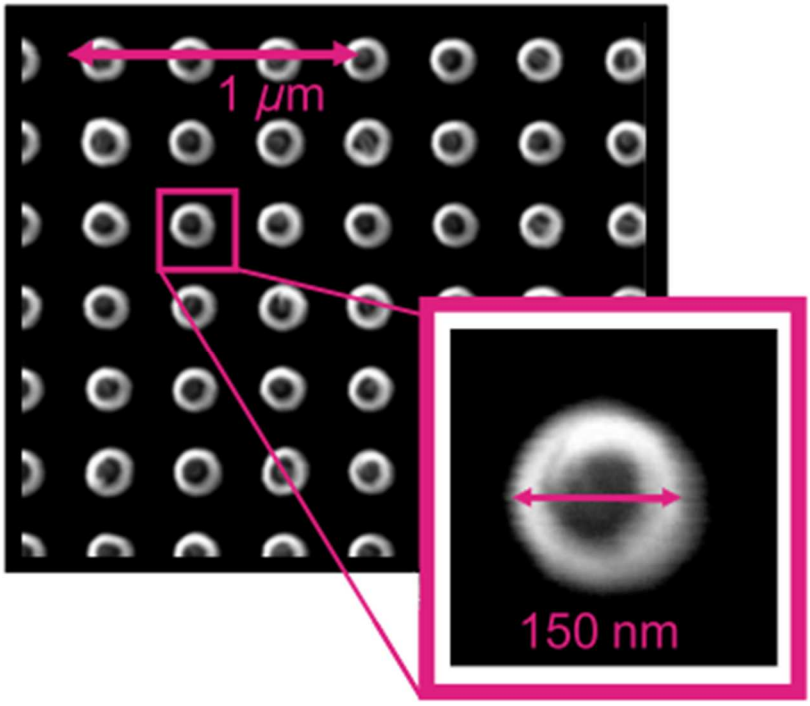

Figura 6: Imagem de varredura por feixe de elétrons de uma matriz quadrada de nanodiscos de PdFe fabricada via litografia por feixe de elétrons. A imagem aumentada mostra o anel branco na borda do nanodisco causado por efeitos de borda e resíduos de fotoresiste. Extraído da referência [9].

Esse tipo de redes quadradas decoradas com nanodiscos magnéticos possue um comportamento físico dependente da temperatura. Essa dependência com a temperatura é limitada com duas temperaturas críticas de transições (T_{C1} e T_{C2}). Para uma temperatura $T > T_{C2}$ o sistema se encontra em um estado paramagnético, i.e., os discos ainda não são monodomínios. No intervalo $T_{C1} < T < T_{C2}$ os nanodiscos se tornam monodomínios, mas ainda não apresentam uma ordem de longo alcance, esse estado é chamado de ferromagnético. Entretanto, para o caso de $T < T_{C1}$ há o surgimento da ordem de longo alcance causada pela interação magnetostática, essa configuração é chamada de estado dipolar acoplado. Para os nanodiscos aqui presentes tem-se T_{C2} = 256 K e T_{C1} = 160 K então o experimento deve ser realizado em temperaturas abaixo de T_{C1} = 160 K. Com isto, garante-se a condição de que o sistema estará acoplado via interação puramente magnetostática, i.e., a energia térmica não consegue "destruir" o acoplamento magnetostático.

Assim, essa amostra foi caracterizada, do ponto de vista magnético, através de microscopia eletrônica de fotoemissão polarizada (*x-ray photoemission electron microscopy*, X-PEEM, em inglês), a campo magnético nulo para observar o estado fundamental (**Figura 7**).

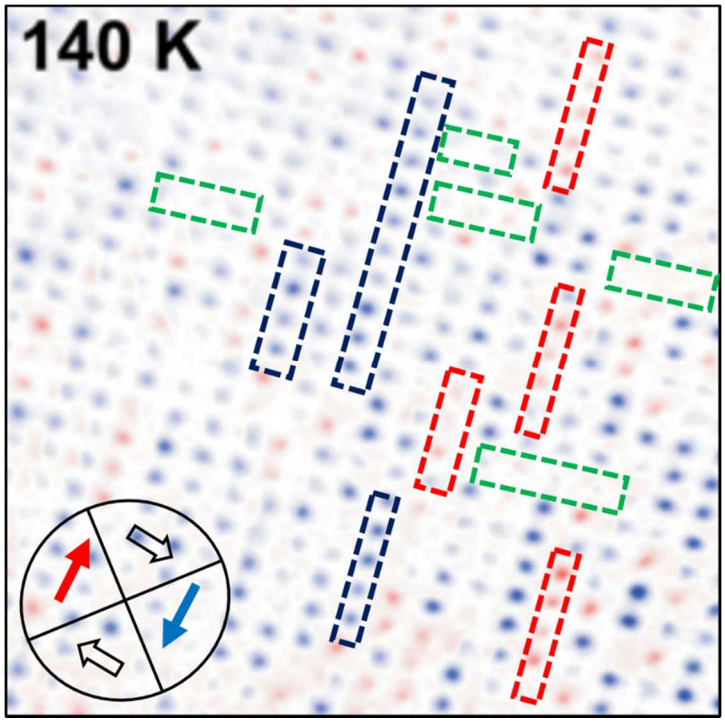

Figura 7: Imagens da magnetização de nanodiscos de PdFe resolvidas espacialmente por microscopia eletrônica de fotoemissão polarizada utilizando radiação síncrotron polarizada à esquerda e à direita ajustada para a linha de absorção L_3 do Fe. A dependência na orientação da magnetização é codificada nas cores de acordo com o círculo mostrado na inserção. Os destaques, quadros pontilhados, são as linhas de magnetização nas direções horizontal e vertical da rede de nanodiscos. Adaptada da referência [9].

Note a formação de linhas nas direções de "eixo fácil" que correspondem as direções das linhas demarcadas na imagem. Esse tipo de comportamento foi previsto na simulação feita pelo trabalho de E.Y. Vedmedenko e colaboradores [9] (ou compare diretamente com a inserção (f) na **Figura 5**). Esta estrutura de formação de linhas nas direções dos vetores de base que formam a rede quadrada aparecem também no caso macroscópico de agulhas magnéticas de bússola que é o sistema principal abordado nesta dissertação. Assim, este é um dado concreto que mostra o poder do método de expansão multipolar sendo utilizado em diferentes escalas de tamanho e conduz a resultados análogos (dai a idéia de utilizar um experimento macroscópico para buscar entender um experimento nanoscópico).

Logo, este modelo possui o principal pré-requisito para ser um modelo aplicado para descrever um fenômeno físico pois possui previsibilidade, i.e., podemos utilizar este modelo para prever novos comportamentos de sistemas físico. Este pré-requisito é evidenciado pelo fato de que para o caso de nanodiscos previu-se um comportamento físico, respeitando-se algumas condições, e observou-se o mesmo em duas situações distintas: primeiro em uma

simulação e, logo em seguida, a observação experimental do fenômeno de formação de linhas no estado fundamental sem campo magnético aplicado.

Em resumo, esta foi a bibliográfia que estudamos e tomamos como alicerce para desenvolvermos este trabalho. Portanto, nos próximos capítulos iremos aplicar a teoria de expansão multipolar seguindo o modelo descrito nas referências [3-8] para resolver o problema macroscópico das agulhas magnéticas. Vamos sempre manter em vista que esse método explicou os fenômenos observados em redes de nanodiscos e que, ainda, esse modelo é invariante por escala (comportamento nanoscópico análogo ao comportamento macroscópico). Assim, vamos fazer uma expansão multipolar do potencial magnético, considerando a geometria de cada agulha, e colocar várias agulhas umas próximas às outras para observar o efeito da interação magnética entre essas entidades magnéticas. E neste trabalho iremos comparar os resultados analíticos, simulados e experimentais para as configurações de agulhas magnéticas analisadas.

3. EXPANSÃO MULTIPOLAR DE UMA AGULHA MAGNÉTICA

Neste capítulo será abordado o desenvolvimento teórico da expansão multipolar necessário para análise do sistema de agulhas macroscópicas bem como a aplicação deste desenvolvimento para o caso de uma agulha de bússola magnética. O desenvolvimento teórico é baseado inteiramente nas equações de Maxwell e no formalismo introduzido pelas referências [6,10], onde primeiramente faz-se uma analogia do sistema magnético com um sistema elétrico de distribuição de cargas sobre uma superfície condutora. Uma vez que se define as relações entre as variáveis magnéticas e elétricas faz-se uma expansão multipolar do potencial gerado pela distribuição de cargas magnéticas sobre a superfície da entidade magnética. É nesta etapa que são introduzidos os termos de multipolo. Finalmente, seguindo o desenvolvimento apresentado na referência [10], podemos escrever a energia de interação entre duas ou mais distribuições de cargas magnéticas com auxílio de uma expansão multipolar. Logo após esse desenvolvimento teórico tem-se, na segunda parte, a aplicação desse formalismo para o caso particular de uma agulha magnética de bússola. Por último, mostra-se os novos resultados obtidos, dando-se enfoque nas alterações introduzidas pela expansão multipolar, para o potencial magnético de uma única agulha magnética isolada.

Outro aspecto importante para o desenvolvimento desse capítulo é o sistema de unidades adotado: Sistema Internacional (SI). O sistema de unidades Centímetro-Grama-Segundo (CGS) seria o mais apropriado pelo fato de que os campos elétrico e magnético têm a mesma dimensão no sistema de unidades CGS. A analogia do sistema elétrico com sistema magnético se tornaria assim mais simples, pois as unidades serão as mesmas para ambos sistemas. Contudo, ao analisar as referências bibliográficas, nota-se que todos os desenvolvimentos e resultados estão com unidades no SI, portanto, para facilitar a comparação dos resultados desta tese com a literatura escolhemos trabalhar com o Sistema Internacional de unidades.

3.1. Formalismo da expansão multipolar

Nas próximas subseções será abordado o formalismo necessário para a expansão multipolar do potencial magnético [6-8,10], bem como, a descrição detalhada do problema no contexto mais geral de magnetostática e os principais resultados que serão a base para a solução do problema específico para o caso da agulha magnética.

3.1.1. Considerações iniciais

O problema a ser resolvido pode ser enunciado de uma forma geral como: dada uma distribuição bem localizada de magnetização $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')$ que pode, em príncipio, depender das coordenadas dentro da distribuição ($\boldsymbol{x}'$) em um volume *V*, encontre o campo magnético ($\boldsymbol{H}$) em todo espaço da região externa a esse volume. Esse problema pode ser resolvido de várias maneiras. Neste trabalho optou-se por utilizar a solução com auxílio do potencial escalar magnético (Φ_M), pois uma vez que se tem ele pode-se saber qual é a energia total do sistema e assim calcular o estado de mínima energia do sistema de agulhas.

A descrição do problema é uma parte importante deste trabalho pois a partir deste ponto todo o desenvolvimento teórico utilizará as definições contidas nesta seção. As definições do problema e onde adota-se os referencias e origens dos sistemas de coordenadas seguem diretamente das convenções contidas no livro do D. Jackson "*Classical Electrodynamics*" [11]. Estas escolhas são importantes, pois consegue-se uma uniformização do formalismo para diferentes casos.

O sistema de coordenadas adotado é o mesmo que é utilizado usualmente em livros de eletrodinâmica clássica, onde além da variável $\boldsymbol{x}$ (liga origem do sistema de coordenadas, $\boldsymbol{0}$, com o ponto *P* onde queremos calcular alguma grandeza), introduzimos uma variável espacial $\boldsymbol{x'}$ (liga a origem do sistema de coordenadas com a distribuição de cargas magnéticas especificas de cada problema) e a variável espacial $\boldsymbol{r}$ (liga a distribuição de cargas magnéticas com o ponto de cálculo *P*). A **Figura 8** exemplifica o sistema de referência adotado assim como a **equação (1)** representa a relação entre as variáveis presentes.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} \tag{1}$$

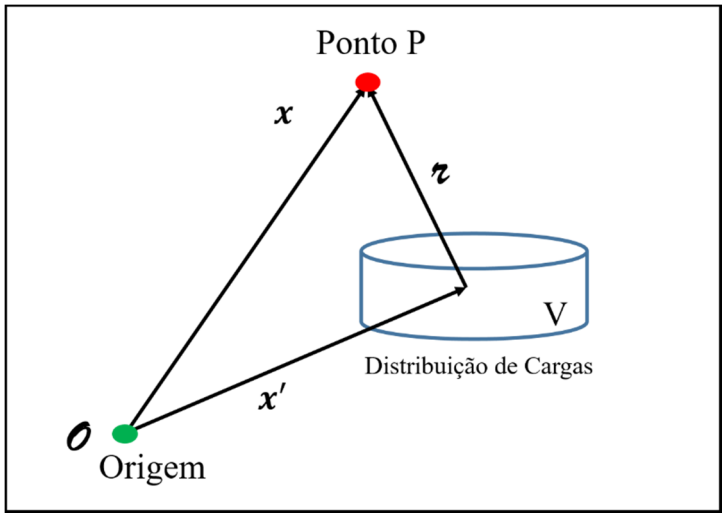

Figura 8: Sistema de coordenadas espaciais adotado seguindo a convenção canônica de coordenadas.

As condições de contorno deste problema são importantes pois tem-se regiões de interface entre material magnético e a região sem material magnético (ar). Assim, supõe-se a interface de dois materiais magnéticos quaisquer com permeabilidades magnéticas μ_1e μ_2. É notável percebermos que esse problema, devido às complicadas relações entre vetor indução magnética ($\boldsymbol{B}$) e campo magnético ($\boldsymbol{H}$) gerados pela distribuição bem localizada de magnetização, tem uma complexidade intrínseca maior que o problema análogo eletrostático. Contudo, se neste mesmo problema existir uma diferença significativa entre as permeabilidades, como na relação material magnético com ar, pode-se fazer algumas simplificações e tornar esse problema solúvel como no caso eletrostático.

As relações entre $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$ em uma interface de dois materiais diferentes (permeabilidades magnéticas μ_1e μ_2) são dadas por:

$$(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{2}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K}_l \tag{3}$$

onde $\hat{\boldsymbol{n}}$ é o vetor normal e unitário da superfície apontando da região 1 para região 2 e $\boldsymbol{K}_l$ é a corrente livre de superfície na interface entre os dois materiais. Agora supondo que não há nenhuma corrente livre na interface do problema ($\boldsymbol{K}_l = 0$), podemos escrever as **equações (2)** e **(3)** alternativamente como:

$$\boldsymbol{B}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{B}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{B}_2 \times \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \boldsymbol{B}_1 \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{4}$$

ou

$$\boldsymbol{H}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{H}_2 \times \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{H}_1 \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{5}$$

Note agora que se a região 1 é não magnética, como o ar, quando a região 2 é magnética, como a agulha de bússola obtem-se que $\mu_1 \ll \mu_2$. Em consequência, a componente normal de $\boldsymbol{H}_2$ é muito maior que a componente normal de $\boldsymbol{H}_1$ (**Figura 9**). No caso limite, que é o caso da agulha magnética ($lim\left({}^{\mu_2}/_{\mu_1}\right) \to \infty$), o campo magnético $\boldsymbol{H}_2$ é normal a interface e independente da direção de $\boldsymbol{H}_1$ (com exceção do caso em que $\boldsymbol{H_1}$ é exatamente paralelo a interface). A condição na interface dos dois materiais para o campo magnético $\boldsymbol{H}$ se torna a mesma que no caso eletrostático, sendo este problema análogo ao problema de achar o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ na vizinhança de uma superfície condutora. A superfície de materiais magnéticos com alta permeabilidade é em primeira aproximação "equipotencial" e as linhas de $\boldsymbol{H}$ são normais a essa superfície equipotencial.

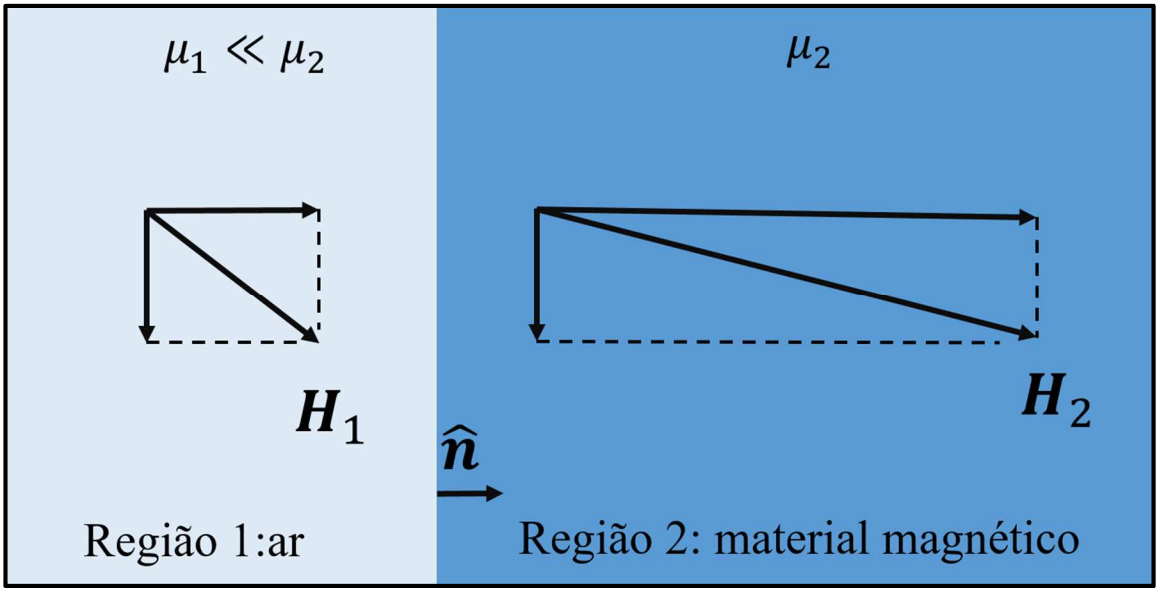

Figura 9: Interface entre ar (região 1) e um material magnético (região 2), onde $\boldsymbol{H_1}$ e $\boldsymbol{H_2}$ representam o vetor campo magnético nas respectivas regiões e $\hat{\boldsymbol{n}}$ representa o vetor unitário e normal apontando da região 1 para a região 2. Note que, para o caso onde $\boldsymbol{\mu_1 \ll \mu_2}$ a componente normal de $\boldsymbol{H_2}$ é muito maior que a componente normal de $\boldsymbol{H_1}$.

Esta analogia eletrostática/magnética é explorada em vários problemas magnéticos e o desenvolvimento pode ser encontrado com mais detalhes nas referências [9] e [10]. Porém deve-se tomar cuidado com a interpretação desta analogia, pois no problema eletrostático temos o conceito físico de carga elétrica, enquanto no caso magnético esse conceito de carga magnética pode ser confundido com a interpretação de monopolos magnéticos. Essa analogia somente se dá pelo fato da estrutura das equações ser a mesma, mas com interpretações físicas completamente distintas. Portanto, neste trabalho, quando utilizarmos o termo "cargas

magnéticas", estaremos nos referindo apenas a uma analogia com o conceito de cargas elétricas devido a estrutura matemática similar dos dois problemas.

Para definir o referencial do sistema de coordenadas da agulha de bússola macroscópica, levamos em conta que ela tem a forma de um losango. Devido a simetria, o centro de massas desse sistema coincide com o centro de cargas. Por conveniência, e para garantir a unicidade da solução para o caso da agulha magnética, escolhemos a origem do sistema de coordenadas $\boldsymbol{O}$ para coincidir com os centros de massa e carga. Esta é a escolha que mais simplifica o problema.

3.1.2. Cálculo do potencial magnético

Antes de fazer uma expansão multipolar de um sistema, deve-se confirmar dois pré-requisitos: i) o problema possui solução e (ii) a solução encontrada é única. A primeira questão é trivialmente satisfeita pois o problema foi reduzido a um problema elétrico de condutores. Contudo, para satisfazer à segunda condição (ii), é necessário fazer coincidir o centro de massa com o centro da distribuição de cargas (ver **seção 3.2.1**). Partindo-se das equações de Maxwell na matéria temos (mostramos somente a parte magnética uma vez que o problema é inteiramente de caráter magnético):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_l \tag{7}$$

onde $\boldsymbol{J}_l$ é o vetor densidade de corrente livre. Estas equações são completas pela relação constitutiva em magnetismo, entre $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{8}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo. Essa relação é necessária pois na maioria dos problemas magnéticos, seja por meio de medidas experimentais ou cálculos teóricos, é o vetor magnetização que é bem conhecido, ao invés da indução magnética. Assim, a **equação (8)** permite eliminar da **equação (6)** a variável indução magnética ***B:***

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{9}$$

Como no problema em questão, não há nenhuma corrente livre passando pelo sistema, podemos dizer que $\boldsymbol{J}_l = 0$, então a **equação (7)** fica:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{10}$$

A **equação (10)** permite escrever o campo magnético $\boldsymbol{H}$ como sendo o gradiente de um campo escalar. Como neste problema estamos tratando de um sistema magnético, utiliza-se a nomenclatura potencial magnético Φ_M. Desta maneira o campo magnético pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \Phi_M \tag{11}$$

O sinal negativo na **equação (11)** é introduzido apenas para fazermos com que se tenha o mesmo sinal para as cargas elétricas e magnéticas. Com essa convenção o polo norte magnético é uma região de concentração de cargas positivas e o polo sul uma região de concentração de cargas negativas. Agora colocando-se a **equação (11)** na **equação (9)** ficamos com:

$$\nabla^2 \Phi_{\boldsymbol{M}} = \nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{12}$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos deve-se fazer a definição das cargas magnéticas. Assim como na primeira equação de Maxwell para a matéria, onde $\boldsymbol{D}$ o vetor deslocamento elétrico na matéria, é definido uma densidade volumétrica de cargas elétricas $\rho_e = -\nabla \cdot \boldsymbol{D}$, o mesmo acontece do lado direito da **equação (12)** se definirmos:

$$\rho_{\boldsymbol{M}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{13}$$

onde $\rho_{\boldsymbol{M}}$ representa uma "densidade de cargas magnéticas". Lembre-se da interpretação física que se deve dar para a **equação (13)** (ver discussão no final da **seção 3.1**). Finalmente, colocando a **equação (13)** na **equação (12)**, tem-se:

$$\nabla^2 \Phi_M = -\rho_M \tag{14}$$

que é uma equação de Poisson que tem uma solução bem conhecida. Na ausência de condições de contorno, ela é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi_M}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi}} \int_{\substack{\boldsymbol{Espaço\ todo} \\ \boldsymbol{com\ M \neq 0}}} \frac{\boldsymbol{\nabla' \cdot M(x')}}{\boldsymbol{|x - x'|}} \boldsymbol{d^3 x'} \tag{15}$$

Contudo, a **Equação (15)** ainda não está em uma forma adequada de se trabalhar, pois ela exige uma integral sobre todo o espaço e a ausência de condições de contorno. Para contornar esse problema utilizamos o teorema do divergente:

$$\int_{V_G} (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) d^3x = \oint_{S_G} (\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) dS \tag{16}$$

onde $\boldsymbol{A}$ é um campo vetorial e $\hat{\boldsymbol{n}}$ é o vetor normal a superfície S_G a qual engloba um volume geral V_G da distribuição de cargas. Primeiro, dividimos o intervalo de integração da **equação (15)** em duas partes: uma que engloba o volume V da distribuição de cargas e a outro que engloba todo o espaço menos esse volume:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{Espaço\ todo - V} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' \tag{17}$$

Em seguida, aplicamos o teorema do divergente no segundo termo do lado direito da **equação (17)**:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} da' \tag{18}$$

onde V é o volume da região onde é dada a magnetização, S a superfície que engloba essa região e onde a magnetização tem uma descontinuidade abrupta (região da condição de contorno do problema). Esta é a solução geral para o problema enunciado até aqui, o sinal positivo do segundo termo aparece pois neste volume, espaço todo menos V, o vetor normal aponta para dentro. Considerando o caso onde a magnetização dentro do volume magnético V é uniforme, o que implica $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{constante}$, o primeiro termo da **equação (18)** se torna nulo, pois $\nabla \cdot \boldsymbol{M_0} = 0$. Note que agora podemos definir a densidade de cargas superficiais magnéticas como:

$$\sigma_M = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{M} \tag{19}$$

onde $\hat{\boldsymbol{n}}$ é o vetor normal à superfície do volume magnético e aponta para fora do volume. Então, tem-se a solução final do problema:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} da',\ onde\ \ \sigma_M = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{M} \tag{20}$$

A **equação (20)** é a equação final deste desenvolvimento e é a partir dela que segue a expansão multipolar da próxima seção. Vale lembrar que esta equação se restringe ao caso de

distribuições de magnetização bem localizadas e uniformes em um dado volume *V*. Além disso, o material deve ser um material magnético duro para que se tenha a validade da **equação (20)**.

3.1.3. Expansão multipolar do potencial magnético

Uma vez que se tem a equação para o potencial magnético (**equação (20)**) deve-se fazer a expansão multipolar do mesmo, pois calcular esta equação de maneira analítica para um dado material magnético pode não ser possível analiticamente devido às formas que as condições de contorno podem assumir.

Para realizar a expansão multipolar do sistema tem-se duas maneiras distintas que dependem das simetrias presentes na distribuição de cargas magnéticas (ou da magnetização). As duas maneiras são: (i) utilizando coordenadas esféricas (faz-se uso do formalismo de harmônicos esféricos), e (ii) utilizando coordenadas cartesianas (utiliza-se tensores cartesianos). Este último método possui a desvantagem de ter que trabalhar com tensores de ordem superior, o que na prática tornam os cálculos mais complexos e susceptíveis a erros. Desta maneira, se trabalharmos com coordenadas cartesianas e queremos calcular a expansão multipolar até termos de quinta ordem por exemplo, tem-se que trabalhar com um tensor de ordem cinco, i.e., um tensor D_{ijklm} com $(i,j,k,l,m) \in (x,y,z)$ em coordenadas cartesianas, o que se torna em um trabalho muito complexo e árduo de se realizar.

Assim, escolhendo trabalhar em coordenadas esféricas e utilizando o Teorema da Soma de Harmônicos Esféricos, permite a seguinte expanção:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{21}$$

onde $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ é um harmônico esférico de ordem *l* com *m = -l,-l+1, ..., l-1, l* que depende dos ângulos esféricos usuais θ e φ, *r* é o raio (distância da origem ao ponto em questão) com o subindice $>$ ou $<$ significando, respectivamente, o maior ou o menor entre as quantidades *r* e *r'* (*r(r')* é o módulo do vetor ***x(x')***). Note que neste trabalho, teremos sempre o caso em que $r_<$ = *r'* e, consequentemente, $r_>$ = *r*, pois sempre queremos saber o valor do potencial fora da distribuição de cargas e nunca dentro desta.

Substituindo a **equação (21)** na **(20)**, tem-se:

$$\Phi_M(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)r^{l+1}} \underbrace{\left\{ \oint_S r'^l Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da' \right\}}_{=Q_l^m} \tag{22}$$

onde o termo entre chaves é apenas um número. De fato, ele só depende das variáveis que existem apenas na superfície *S* que engloba o volume *V* da distribuição da magnetização. Como elas são integradas na superfície, o resultado será apenas um número sem nenhuma dependência explicita de outras variáveis. Note que toda a informação sobre o volume magnético *V* está completamente contida neste termo. Assim ele pode ser interpretado como um "fator de forma", pois carrega toda a informação da distribuição de cargas magnéticas/magnetização do sistema. Finalmente, define-se a seguinte quantidade como sendo o termo de momento de multipolo, Q_l^m:

$$Q_l^m = \oint_S r'^l Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da' \tag{23}$$

onde a variável *l* diz respeito à ordem do termo da expansão. Note que o momento de multipolo pode ser um número complexo, pois possui um harmônico esférico no integrando ($Y_{lm}^*(\theta',\varphi')$). Contudo, quando se faz a soma em todos os valores possíveis de *m* para um dado valor de *l*, o resultado será, necessariamente, um número real.

Outra informação relevante para esse problema é que, embora opte-se por fazer uma expansão em termos de harmônicos esféricos, nada impede que para resolver a integral da **equação (23)** mude-se o sistema de coordenadas para outro sistema de coordenadas. Por exemplo, para uma distribuição de cargas que tenha as fronteiras em forma retangular, o que sugere o sistema de coordenadas cartesianas, faz-se a expansão em termos de harmônicos esféricos, mas para calcular a **equação (23)** utiliza-se o sistema de coordenadas cartesianas. Desta maneira, os limites de integração simplificam-se e o cálculo é mais direto.

3.1.4. Energia de interação magnetostática

Nesta subseção será abordada a interação entre duas ou mais distribuições de cargas magnéticas distintas. Esta etapa é de suma importância para efeitos de simulação, pois nela o termo de energia de interação será calculado baseado nesta equação de interação. O roteiro da demonstração será o mesmo que o utilizado na referência [10]. Este procedimento é bem

estabelecido na área de físico-química para calcular a interação intermolecular coulombiana entre duas distribuições de cargas elétricas não interagentes [10].

Inicialmente deve-se escrever a hamiltoniana deste sistema que será considerada como duas regiões distintas de distribuições rígidas de cargas magnéticas “não interagentes”. O significado preciso da expressão “não interagentes” está no fato de que as energias de interação entre as duas distribuições de cargas magnéticas não são capazes de alterar a distribuição/configuração interna de magnetização das mesmas. Primeiramente, definimos os vetores posição para o sistema de duas distribuições de cargas magnéticas "não interagentes” (**Figura 10**).

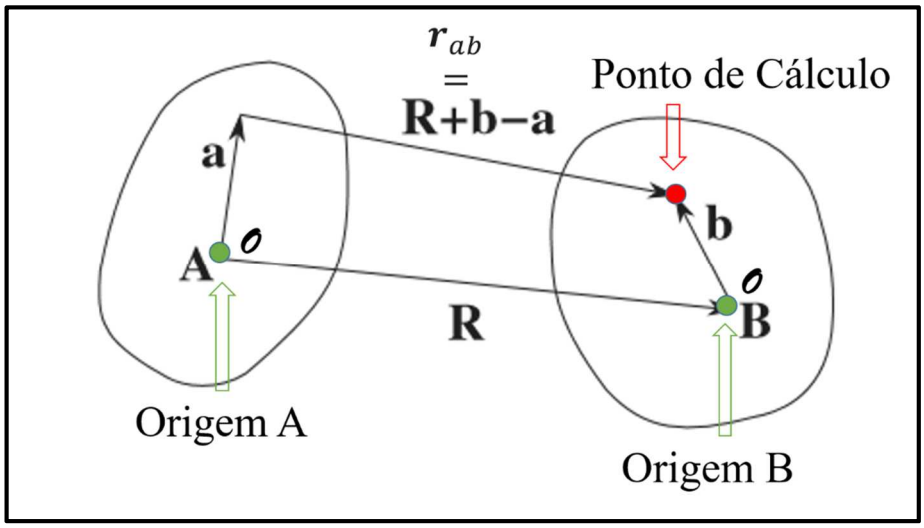

Figura 10: Vetores posição para o caso de duas distribuições de cargas magnéticas não interagentes (A e B).

Note que as duas distribuições de cargas (A e B) estão distribuídas no espaço e possuem origem própria cada uma. Inicialmente vamos supor que elas estão contidas em um volume arbritário, V_A e V_B, mas no final iremos supor que elas são cargas magnéticas superficiais como no caso de uma agulha magnética. O príncipio para calcular a energia de interação magnética é análogo aquele entre duas distribuições de cargas elétricas, que consiste em multiplicar o potencial gerado por uma distribuição pela carga da outra distribuição. Desta maneira, lembre-se da analogia entre eletricidade e magnetismo, multiplica-se o potencial gerado pela distribuição de cargas magnéticas A **equação (15)** vezes a carga magnética da distribuição de cargas B. Assim, partindo da **equação (15)** do potencial da distribuição A, com a carga fonte no ponto $\boldsymbol{a}$ e o ponto de cálculo no ponto $\boldsymbol{b}$, i.e., $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{a}$, vem:

$$\Phi_{M,a\to b}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V} \frac{\rho_{MA}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_A} \frac{\rho_{MA}}{|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}d^3x_A \tag{24}$$

onde ρ_{MA} é a densidade de cargas magnéticas da distribuição A e assumimos que $|\boldsymbol{R}| > |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$, pois as duas distribuições de cargas magnéticas não se interceptam no espaço. A energia de interação entre as duas distribuições de cargas se calcula como:

$$E_{AB} = \Phi_{M,a\to b}q_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_B} \Phi_{M,a\to b}(\boldsymbol{x}_B)\rho_{MB}\,d^3x_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_A}\int\limits_{V_B} \frac{\rho_{MA}\rho_{MB}}{|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}d^3x_A\,d^3x_B \tag{25}$$

O Teorema de Adição de Harmônicos Esféricos (ver **equação (21)** fica, lembrando que $Y^*_{l,m}(\boldsymbol{r}) = (-1)^m Y_{l,-m}(\boldsymbol{r})$:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{R}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{(-1)^m}{(2l+1)}\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^l}{R^{l+1}}Y_{l,-m}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})Y_{l,m}(\boldsymbol{R}) \tag{26}$$

Colocando a **equação (26)** na **(25)** e utilizando a paridade dos harmônicos esféricos $Y_{lm}(-\boldsymbol{r}) = (-1)^l Y_{l,m}(\boldsymbol{r})$, vem:

$$E_{AB} = \mu_0\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int\limits_{V_A}\int\limits_{V_B}\frac{(-1)^m(-1)^l}{(2l+1)}\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^l}{R^{l+1}}Y_{l,-m}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})Y_{l,m}(\boldsymbol{R})\rho_{MA}\rho_{MB}d^3x_A\,d^3x_B \tag{27}$$

Antes de prosseguirmos iremos definir duas grandezas $R_{l,m}(\boldsymbol{r})$ e $I_{l,m}(\boldsymbol{r})$ para facilitar a notação e a mesma ficar em conformidade com [10]:

$$R_{l,m}(\boldsymbol{r}) = r^{-l-1}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{28}$$

$$I_{l,m}(\boldsymbol{r}) = r^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{29}$$

Assim reescrevendo a **equação (27)** com a nova notação, onde fazemos $R_{l,m}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ e $I_{l,m}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R})$, vêm:

$$E_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int\limits_{V_A}\int\limits_{V_B}(-1)^m(-1)^l R_{l,-m}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})I_{l,m}(\boldsymbol{R})\rho_{MA}\rho_{MB}d^3x_A\,d^3x_B \tag{30}$$

Agora guardamos esta equação e vamos utilizar uma identidade padrão de adição de harmônicos esféricos regulares (Brink and Satchler, "*Angular Momentum*", 1993):

$$R_{L,m}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \sum_{l_1,l_2}\sum_{m_1,m_2} \delta_{l_1+l_2,L}(-1)^{L+m}\left[\frac{(2L+1)!}{(2l_1)!\,(2l_2)!}\right]^{1/2} \times R_{l_1,m_1}(\boldsymbol{b})R_{l_2,m_2}(-\boldsymbol{a})\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix} \tag{31}$$

Onde $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M\end{pmatrix}$ é o símbolo 3j-Wigner definido por:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix} = (2L+1)^{-1/2}(-1)^{l_1-l_2+m}\langle l_1 l_2 m_1 m_2 | L, m\rangle \tag{32}$$

Colocando a **equação (31)** na **(30)** ficamos com:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l_1,l_2}\sum_{m_1,m_1} (-1)^{l_1}\left(\frac{(2l_1+2l_2+1)!}{(2l_1)!\,(2l_2)!}\right)^{1/2} I_{l_1+l_2,m}(\boldsymbol{R})\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_1+l_2 \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix} \\ &\qquad \times \int_{V_A} \rho_{MA}\, R_{l_1,m_1}(\boldsymbol{a})d^3x_A \int_{V_B} \rho_{MB}\, R_{l_2,m_2}(\boldsymbol{b})d^3x_B \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{l_1,l_2}\sum_{m_1,m_1} (-1)^{l_1}\left(\frac{(2l_1+2l_2+1)!}{(2l_1)!\,(2l_2)!}\right)^{1/2} I_{l_1+l_2,m}(\boldsymbol{r})\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_1+l_2 \\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix} Q_{l_1}^{m_1} Q_{l_2}^{m_2} \end{aligned} \tag{33}$$

onde na última linha fizemos a identificação dos momentos de multipolo Q_l^m (**equação (23)**. Agora, podemos escrever essa equação de uma maneira mais compacta utilizando a notação tensorial [10]:

$$E_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\substack{l_A m_A l_B m_B \\ A\neq B}} T_{l_A m_A l_B m_B}(\boldsymbol{R}_{AB}) Q^A_{l_A m_A} Q^B_{l_B m_B} \tag{34}$$

onde definimos:

$$\begin{aligned} &T_{l_A m_A l_B m_B}(\boldsymbol{R}_{AB}) \\ &= (-1)^{l_B} I^*_{l_A+l_B,m_A+m_B}(\boldsymbol{R}_{AB})\sqrt{\frac{(l_A+l_B-m_A-m_B)!\,(l_A+l_B+m_A+m_B)}{(l_A-m_A)!\,(l_B-m_B)!\,(l_A+m_A)!\,(l_B+m_B)!}} \end{aligned} \tag{35}$$

Em resumo, como proposto no início desta subseção o formalismo para a expansão do potencial foi reproduzido aqui com a intenção de mostrar os passos detalhados para se chegar as equações gerais que servirão de base para resolver um problema específico. Assim, os resultados mais importantes que podemos destacar são sumarizados nas **equações (22)**, **(23)** e **(34).** A primeira dessas equações representa o potencial magnético (Φ_M) que traz a informação da energia magnética ao redor de uma distribuição magnética, a segunda equação traz a definição dos momentos de multipolos (Q_l^m) que são amplamente utilizados neste formalismo, pois simplificam o problema e, por último, a equação da energia de interação magnética (E_{ab}) entre duas distribuições magnéticas não interagentes. Esta última é extremamente importante para realizar simulações do sistema, pois nela está contida a informação da energia potencial total do sistema, já considerando as duas distribuições de cargas magnéticas com suas respectivas geometrias.

3.2. Aplicação a um sistema de agulhas magnéticas

Nesta subseção, introduzimos pela primeira vez o formalismo da expansão multipolar para um caso macroscópico real. Neste trabalho é considerado uma agulha imantada de bússola, que está livre para girar em torno de seu eixo central. Esta agulha de bússola é a mesma que será utilizada, mais adiante, no experimento. Esta subseção divide-se em quatro partes. A primeira parte é a descrição do sistema de coordenadas/parametrização de uma agulha magnética, bem como as convenções que adotaremos no decorrer dos cálculos. A segunda parte é onde calculamos as cargas magnéticas na superfície das agulhas magnéticas. A terceira parte é o cálculo dos momentos de multipolo magnético específicos das agulhas consideradas. Como veremos mais adiante, eles facilitam o cálculo dos termos da expansão multipolar do potencial magnético. Na conclusão, onde se dará o cálculo do potencial magnético para o caso de uma agulha isolada, será mostrado a importância dos termos de ordem mais alta no cálculo do potencial magnético.

3.2.1. Parametrização do sistema

Para tal vamos considerar que a agulha magnética possui um formato ideal de losango e que é livre para girar em torno do seu centro. Como outra hipótese, assume-se que essa agulha magnética possui o seu centro de massa coincidente com o centro de cargas

magnéticas (CCM) e escolhe-se a origem como sendo o CCM. Lembre-se que essa hipótese, origem coincidindo com o CCM, é razoável do ponto de vista da simetria do problema e com isso garantimos também a unicidade da solução do problema, sendo assim essa hipótese torna-se *necessária* para a aplicação da solução desenvolvida.

A **Figura 11** contém a parametrização de uma agulha magnética onde a origem é colocada no centro do losango e convencionou-se o eixo maior da agulha de comprimento $2a$ = 0,91 cm ao longo do eixo $\hat{\boldsymbol{x}}$ e o eixo menor de comprimento $2b$ = 0,26 cm ao longo do eixo $\hat{\boldsymbol{y}}$. Na direção $\hat{\boldsymbol{z}}$, que no caso da nossa figura apontaria para fora do papel, possui uma espessura h = 0,04 cm. Para efeitos deste trabalho essa altura é muito menor que as outras dimensões envolvidas ($h << 2a, 2b$). Esse fato faz com que possamos considerar que não há variação da densidade de carga magnética na direção $\hat{\boldsymbol{z}}$, que assim pode ser escrita como $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$.

A magnetização do sistema considerado é o caso mais simples de se supor sendo correspondente a uma magnetização constante ao longo da direção do eixo fácil, que neste problema é o eixo maior da agulha. O fato da magnetização ser constante nos permite aplicar o formalismo desenvolvido até aqui sem maiores problemas adicionais, pois como já vimos o termo que envolve $\nabla' \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')$ na **equação (18)** se anula.

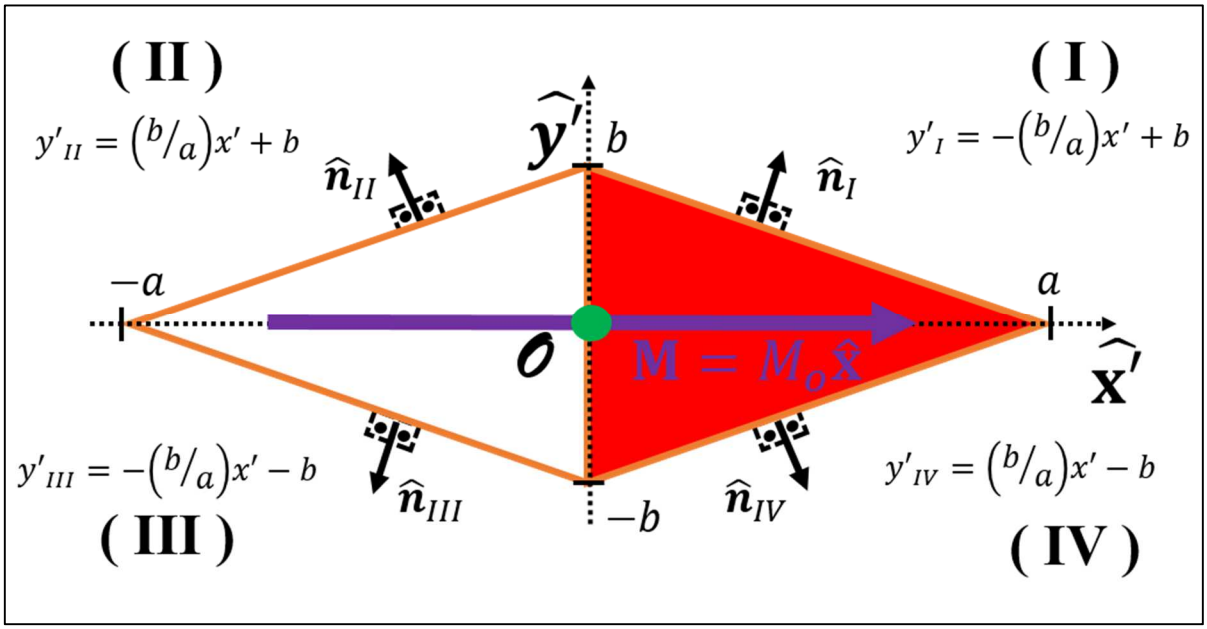

Figura 11: Parametrização de uma agulha macroscópica magnética, no sistema de coordenadas (x',y'), em função dos valores do semieixo maior, a, e menor, b, bem como as retas que descrevem as fronteiras do losango nos respectivos quadrantes.

Os versores normais de cada uma das retas, que delimitam a região da agulha magnética em cada um dos quatro quadrantes, são dados por:

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{I}} = \frac{(b\widehat{\boldsymbol{x}}' + a\widehat{\boldsymbol{y}}')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{36.1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{II}} = \frac{(-b\widehat{\boldsymbol{x}}' + a\widehat{\boldsymbol{y}}')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{36.2}$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{III}} = \frac{(-b\widehat{\boldsymbol{x}}' - a\widehat{\boldsymbol{y}}')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{36.3}$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{IV}} = \frac{(b\widehat{\boldsymbol{x}}' - a\widehat{\boldsymbol{y}}')}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{36.4}$$

Onde o sub-índice denota em qual quadrante estamos calculando. Abaixo colocamos todas as equações de reta que delimitam o losango que formam a região da agulha, bem como seu respectivo quadrante:

$$y'_{I} = -\left(b/a\right)x' + b \tag{37.1}$$

$$y'_{II} = \left(b/a\right)x' + b \tag{37.2}$$

$$y'_{III} = -\left(b/a\right)x' - b \tag{37.3}$$

$$y'_{IV} = \left(b/a\right)x' - b \tag{37.4}$$

Uma etapa importante para a parametrização do sistema é a definição do sistema de coordenadas. Até o presente momento consideramos a agulha estática e não mencionamos o que acontece quando ela gira em torno de seu eixo de rotação. Assim, para este trabalho iremos considerar dois sistemas de coordenadas: um estático (x,y), onde o centro de rotação de todas as agulhas que compõe o sistema permanece estáticos, e um segundo (x^R,y^R), onde o sistema de coordenadas gira junto com a agulha (a agulha permanece estática). Vamos considerar que o primeiro sistema de coordenadas (x,y) possui um ângulo de rotação (ψ) com relação ao segundo (x^R,y^R), ou escrevendo em termos de matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^R \\ y^R \end{bmatrix} \tag{38}$$

A rotação é aplicada no início da execução do programa de cálculo dos momentos de multipolo, ver seção **3.2.3**, mas aqui neste trabalho vamos mostrar as contas, para melhor clareza, considerando que não há as rotações. Assim, iremos mostras vários resultados considerando $\psi = 0$, mas quando colocarmos explicitamente a dependenia angular nos momentos de multipolos (Q_l^m) fica subentendido que se trata de uma rotação da agulha. Outro fator digno de nota é o fato de que neste trabalho os objetos giram, mas o sistema de coordenadas se mantém fixo.

3.2.2. Cargas magnéticas

O primeiro passo para calcular os momentos de multipolo magnético é o cálculo da densidade de cargas magnéticas que é feito através da **equação (19)**. Essa equação é calculada considerando-se a magnetização constante na direção $\hat{\boldsymbol{x}}'$, sendo que são consideradas as quatro direções normais, $\hat{\boldsymbol{n}}$, referentes às quatro linhas que limitam a região da agulha magnética **(Figura 12)**. Não haverá cargas nas superfícies superior e inferior da agulha, pois nesta região temos o vetor normal perpendicular à direção da magnetização ($\hat{\boldsymbol{n}}' \perp \boldsymbol{M_o} \rightarrow \sigma_M = 0$). Assim a densidade superficial de carga fica constante e localizada nas superfícies laterais das agulhas. Aqui, fazemos a simplificação, como já mencionamos, de considerarmos a distribuição de cargas ao longo do eixo $\hat{\boldsymbol{z}}'$ como uma constante. Isto é possível pois, para as dimensões do problema, consideramos que *h* é muito menor que *a* a e *b* da agulha magnética (*h* << 2*a*, 2*b*). Ainda é importante notar que o eixo fácil de magnetização destas agulhas magnéticas está na direção do eixo maior de cada agulha.

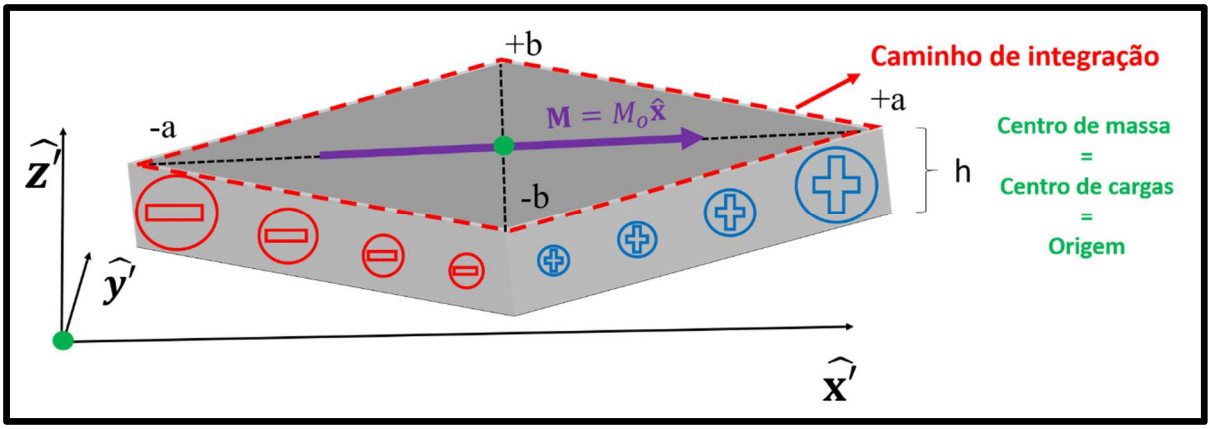

Figura 12: Representação esquemática de uma agulha magnética de bússola, onde o centro de massa, o centro de cargas magnéticas e a origem são coincidentes (ponto verde no centro da agulha). Note que as cargas magnéticas (+) e (-) se encontram nas laterais da agulha, e o caminho de integração é percorrido ao longo do perímetro do losango marcado pela linha tracejada.

Agora, tomamos o produto escalar com a magnetização e ficamos com:

$$\sigma_I = \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{M} = \frac{(b\hat{\boldsymbol{x}}' + a\hat{\boldsymbol{y}}') \cdot M_0\hat{\boldsymbol{x}}'}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{bM_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{39.1}$$

$$\sigma_{II} = \hat{\boldsymbol{n}}_{II} \cdot \boldsymbol{M} = \frac{(-b\hat{\boldsymbol{x}}' + a\hat{\boldsymbol{y}}') \cdot M_0\hat{\boldsymbol{x}}'}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{bM_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{39.2}$$

$$\sigma_{III} = \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{III}} \cdot \boldsymbol{M} = \frac{(-b\hat{\boldsymbol{x}}' - a\hat{\boldsymbol{y}}') \cdot M_0\hat{\boldsymbol{x}}'}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{bM_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{39.3}$$

$$\sigma_{IV} = \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{IV}} \cdot \boldsymbol{M} = \frac{(b\hat{\boldsymbol{x}}' - a\hat{\boldsymbol{y}}') \cdot M_0\hat{\boldsymbol{x}}'}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{bM_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{39.4}$$

Esse conjunto de equações descreve a densidade de cargas magnéticas por unidade de comprimento. As densidades de cargas magnéticas dependem apenas dos parâmetros geométricos *a, b* e da magnetização M_o da agulha magnética. Por conta dessa suposição da magnetização constante, temos duas simetrias que são importantes para o problema, pois irão anular alguns termos na expansão multipolar do potencial magnético. A primeira simetria diz respeito a propriedade de paridade da densidade de cargas que satisfaz a seguinte relação: $\sigma(-\boldsymbol{r}) = -\sigma(\boldsymbol{r})$, que mostra que a densidade superficial de cargas tem uma paridade ímpar. Já a segunda relação diz respeito a reflexão com relação ao plano *x-y*. Neste caso a densidade superficial de cargas tem paridade par: $\sigma(x, y, z) = \sigma(x, y, -z)$.

3.2.3. Momentos de multipolo magnético

Um programa utilizando o software *Mathematica* foi escrito para facilitar os cálculos dos momentos de multipolo magnético (**Anexo I**). Este programa utiliza as convenções adotadas nesta tese e o seu funcionamento baseia-se em calcular a integral da **equação (23)**. Aqui, nesta subseção encontra-se a descrição de como o cálculo foi realizado. Outra informação relevante para o desenvolvimento do problema é que limitamos o número de termos na expansão multipolar para $l = 5$. Pois como veremos mais adiante, termos de ordem mais altas como por exemplo $l = 7$ são quase nulos e não são levados em conta. Esta suposição é coerente se comparada com os trabalhos análogos mostrados na literatura [5,6] que consideram os termos até $l = 5$ para reproduzir os sistemas analisados.

Simetrias dos momentos de multipolo magnético

A próxima etapa do trabalho é calcular os momentos de multipolos efetivamente, mas para tal devemos antes notar que devido às simetrias presentes na distribuição de cargas temos algumas simplificações a fazer. Estas simplificações nos auxiliarão nos cálculos, pois, não precisaremos calcular todos os termos presentes na expansão, alguns termos saberemos de antemão que são nulos.

Vamos montar as integrais presentes na **equação (23)**. Para entendermos como proceder no cálculo dos momentos multipolares, vamos fazer esse cálculo de uma maneira mais geral para deduzirmos as propriedades de simetria do sistema. Assim, separando em duas partes a integral geral dos momentos de multipolo magnéticos ficamos com:

$$\begin{aligned} Q_l^m &= \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \sigma_M(\boldsymbol{x}') da' \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \sigma_M(\boldsymbol{x}') da' \right. \\ &\left. + \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \sigma_M(\boldsymbol{x}') da' \right\} \end{aligned} \tag{40}$$

Nesta integral *C* é o caminho de integração na superfície da agulha magnética de bússola, caminho de integração destacado na **Figura 12**. Agora fazemos $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ no segundo termo da equação, para revelarmos à simetria:

$$\begin{aligned} Q_l^m = \frac{1}{2}\left\{ \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \sigma_M(\boldsymbol{x}') da' \right. \\ \left. + \oint_C r'^l \underbrace{Y_{lm}(\pi - \theta', \varphi' + \pi)}_{=(-1)^l Y_{lm}(\theta', \varphi')} \underbrace{\sigma(\pi - \theta', \varphi' + \pi)}_{=-\sigma(\boldsymbol{r})} da' \right\} \end{aligned} \tag{41}$$

Agora utilizando a primeira propriedade de simetria das cargas $[\sigma(-\boldsymbol{r}) = -\sigma(\boldsymbol{r})]$ junto com a propriedade de paridade dos esféricos hamônicos $[Y_{lm}(\pi - \theta', \varphi' + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta', \varphi')]$, ficamos com:

$$Q_l^m = \frac{1}{2}\left\{\oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da' - (-1)^l \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da'\right\} = \\ = \frac{[1-(-1)^l]}{2}\left\{\oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da'\right\} \tag{42}$$

Este termo se reduz a zero para valores pares de *l*, logo *l* é ímpar na expansão. A segunda propriedade em termos de coordenadas esféricas fica $(\theta,\varphi,r) = (\pi-\theta,\varphi,r)$ que é o mesmo que trocarmos o sinal da componente *z*:

$$Q_l^m = \frac{[1-(-1)^l]}{2}\frac{1}{2}\left\{\oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da' \right. \\ \left. + \oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da'\right\} \\ = \frac{[1-(-1)^l]}{2}\frac{1}{2}\left\{\oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da' \right. \\ \left. + \oint_C r' \underbrace{Y_{lm}(\pi-\theta',\varphi')}_{=(-1)^{l+m}Y_{lm}(\theta',\varphi')} \underbrace{\sigma(\pi-\theta',\varphi')}_{=\sigma(\theta',\varphi')} da'\right\} \tag{43}$$

Agora utilizando a primeira propriedade de simetria das cargas $[\sigma(\pi-\theta',\varphi') = \sigma(\theta',\varphi')]$ junto com a propriedade análoga dos harmônicos esféricos $[Y_{lm}(\pi-\theta',\varphi') = (-1)^{l+m}Y_{lm}(\theta',\varphi')$, mas com *l* ímpar fica $Y_{lm}(\pi-\theta',\varphi') = -(-1)^m Y_{lm}(\theta',\varphi')]$ e ficamos com:

$$Q_l^m = \frac{[1-(-1)^l]}{2}\frac{[1-(-1)^m]}{2}\left\{\oint_C r'^l Y_{lm}(\theta',\varphi')\sigma_M(\boldsymbol{x}')da'\right\} \tag{44}$$

onde esse termo é zero para valores de *l* ou *m* pares. Portanto, para este problema específico os valores de *l* e *m* permitidos devem ser ímpares. Essa propriedade deriva apenas da geometria das agulhas magnéticas. Assim, qualquer distribuição de carga que possuir essas duas simetrias $[\sigma(-\boldsymbol{r}) = -\sigma(\boldsymbol{r})$ e $\sigma(x,y,z) = \sigma(x,y,-z)]$ terá todos os termos pares da expansão multipolar do potencial necessariamente nulos.

Ângulo de rotação nulo

Os momentos de multipolo magnético Q_l^m foram calculados utilizando um programa escrito em *Mathematica*, ver **Anexo I**. Então, nesta seção iremos tratar dos resultados destes cálculos e suas implicações na análise dos resultados do sistema experimental de agulhas magnéticas. Outro fator importante que abordaremos aqui será o método que utilizamos para testar o programa: reproduzir com o nosso programa os resultados encontrados na referência [7], que trata o caso de nanodiscos monodomínios. Não apenas mostraremos a concordância entre os cálculos, mas também uma comparação qualitativa entre os dois sistemas (agulhas magnéticas de bússola vs. nanodiscos monodomínios).

A ideia principal desta comparação é apenas termos um sistema padrão onde podemos confrontar resultados para evitar cometer erros "triviais" tais como: sinais invertidos, ordem equivocada de termos, etc... Assim, iremos reproduzir com o nosso programa os resultados encontrados na referência [7], onde as entradas serão exatamente as mesmas, i.e, $Q_l^m(\psi = 0)$. Como dados de comparação vamos plotar para os dois sistemas a relação de aspecto que é definida como a espessura h dividida pelo raio r_o do disco. Além disso, vamos fazer, como na referência [7], a normalização dos momentos de monopolo pelo primeiro termo da expansão, i.e., o termo dipolar (Q_l^m/Q_1^1).

Assim, montamos o seguinte gráfico, com os dados extráidos do programa de cálculo dos momentos de multipolo para o caso em que o disco está contido no plano *x*-*y*, fixo na origem e a magnetização aponta na direção do eixo *x*.

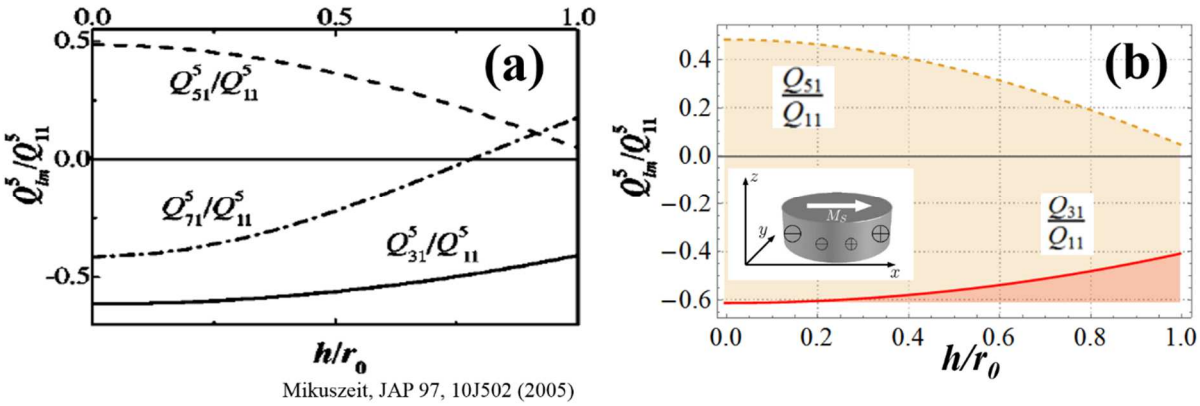

Figura 13: Comparação entre os termos de expansão multipolar para o caso de um disco magnético de raio r_o e altura h para os seguintes casos: (a) resultado mostrado na referência [7] e (b) mesmo resultado obtido por um programa escrito em *Mathematica*.

Observamos na **Figura 13** que o programa utilizado nesta dissertação conseguiu com sucesso reproduzir os resultados expostos na literatura. O resultado exposto neste gráfico é importante pois nele podemos notar que termos de ordem mais alta contribuem de maneira significante na expansão multipolar, isto é notado pois notamos que para razões de aspecto baixas o termo Q_5^1 é da ordem de 50 % com relação ao primeiro termo da expansão.

Outro resultado importante que podemos testar com o nosso programa é tabela com os momentos de multipolo calculados explicitamente em termos do raio r_o e da altura h do disco (**Tabela 1**). Os termos cáculados são exatamente iguais com os termos que foram cálculados na referência [7].

Tabela 1: Momentos de multipolo Q_{lm}^5(em unidades de cargas superficiais) até ordem $l = 5$ de um disco em um estado de cebola (*onion state,* do inglês). A distribuição da densidade de carga pode ser descrita por $\rho(\varphi) = \mu_0 M_s cos^5(\varphi)$. Todos os Q_{lm}^5 com l ou m pares zeram.

	m = -1[a]	m = -3	m = -5[b]
l =1	$\frac{5}{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\pi h r_0^2$		
l = 3	$\frac{5}{8}\frac{1}{4\sqrt{3}}\pi h r_0^2(h^2 - 3r_0^2)$	$\frac{5}{8}\frac{\sqrt{5}}{8}\pi h r_0^4$	
l = 5	$\frac{5}{8}\frac{1}{32\sqrt{14}}\pi h r_0^2(h^3 - 10r_0^2h^2 + 10r_0^4)$	$\frac{5}{8}\frac{\sqrt{35}}{96}\pi h r_0^4(3r_0^2 - 2h^2)$	$\frac{3\sqrt{7}}{256}\pi h r_0^4$

[a] $Q_{l,-m} = (-1)^m Q_{lm}^*$ devido à simetria dos esféricos harmônicos

[b] $|m| = 5$ é o maior valor possível.

Portanto, o nosso programa consegue reproduzir os resultados que já se encontram na literatura [7], o que indica que o método de cálculo está certo e que este programa pode ser utilizado para outros problemas análogos.

Dando início a nossa série de resultados, o primeiro dado importante que podemos extrair desse formalismo é a equação dos momentos de multipolos que nesse caso podemos comparar também com a tabela análoga ao caso dos nanodiscos magnéticos. Este resultado é obtido para o caso em que a magnetização aponta para a direção do eixo $\hat{\boldsymbol{x}}$ (ψ = 0). A única diferença para esses dois casos será a geometria da entidade magnética (losango/disco ambos com altura h). Desta, maneira temos, para o caso de nanodiscos a **Tabela 1**, e para o caso das agulhas magnéticas de bússola temos a seguinte tabela:

Tabela 2: Momentos de multipolo Q_l^m (em unidades de cargas superficiais) até ordem $l = 5$ de uma agulha com magnetização constante na direção do eixo maior. A distribuição de densidade volumétrica de carga pode ser descrita por $\rho = \mu_0 M_0$.

	m = -1[a]	m = -3	m = -5
l =1	$\frac{\sqrt{2}a^2bh}{\sqrt{a^2+b^2}}$		
l = 3	$\frac{a^2bh(-3a^2-b^2+2h^2)}{4\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{\sqrt{5}a^2bh(a-b)(a+b)}{4\sqrt{a^2+b^2}}$	
l = 5	$\frac{a^2bh}{8\sqrt{30}\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}10a^4+2b^4-5b^4h^2\\+3h^4+2a^2b^2-15a^2h^2\end{pmatrix}$	$\frac{a^2bh}{24\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}5a^4+3b^4-5b^4h^2\\+3h^4+a^2b^2+5a^2h^2\end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{7}a^2bh}{8\sqrt{a^2+b^2}}(a^2-b^2)^2$

[a] $Q_l^{-m} = (-1)^m Q_l^{m\,*}$ devido à simetria dos esféricos harmônicos

A comparação entre as duas tabelas é feita de maneira direta e nos mostra as semelhanças entre elas. O primeiro fato interessante de observarmos é o fato de que as dimensões dos momentos são as mesmas e que os termos de cada momento multipolar apresentam apenas uma constante de diferença entre eles, i.e., os dois conjuntos de momentos de multipolo carregam a mesma estrutura matemática, variando apenas as proporções que variam de problema para problema. Portanto, a única diferença que encontramos na comparação é que o disco depende do parâmetro raio (r_o) e as agulhas magnéticas em forma de losango dependem dos eixos maiores ($2a$) e menores ($2b$), mas ambas dependem da espessura da distribuição de cargas.

Para mostrarmos como varia o comportamento dos momentos de multipolo com a razão de aspecto do sistema, montamos o gráfico da dependência dos momentos de multipolo ($Q_l^m(\psi = 0)$) com relação a razão de aspecto ($^h/_a$) (**Figura 14**). Deixamos as dependências apenas na razão de aspecto da distribuição magnética que definimos primeiro fixando a relação entre os eixos maior e menor ($^b/_a = 0.285$). Desta relação escolhemos eliminar a variável b dos Q_l^m e, finalmente, dividimos pelo valor da espessura h da agulha magnética de bússola. Com estas escolhas somos capazes de avaliar como os momentos de multipolo se comportam de acordo com a geometria do problema.

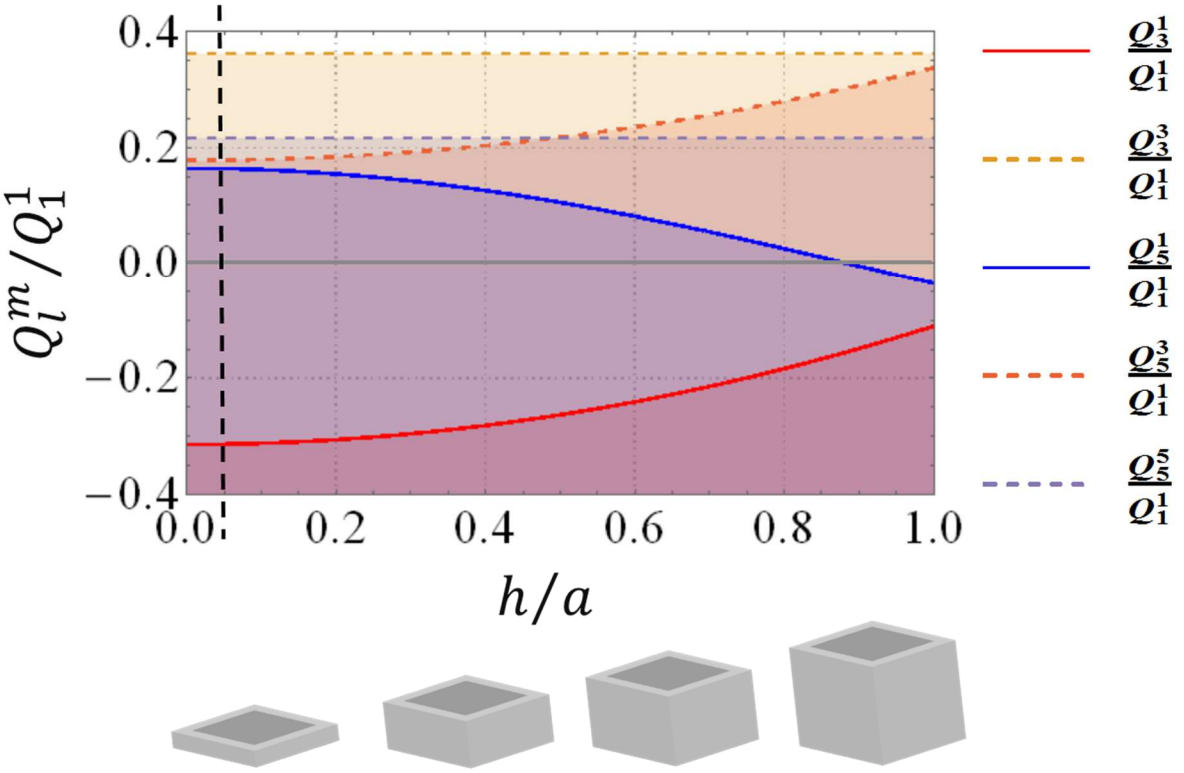

Figura 14: Momentos de multipolo $Q_l^m(\psi = 0)$ para l = 1, 3, 5 e m = 1, 3, 5, todos normalizados pelo primeiro termo não nulo da expansão (Q_1^1). Os esquemas abaixo ilustram o significado da razão de aspecto (*h/a*). A linha pontilhada vertical mostra a razão de aspecto que corresponde ao caso experimental e simulado das agulhas magnéticas de bússola.

Este gráfico nos mostra o comportamento dos termos de ordem mais alta, sendo que momentos de ordem superior ($Q_l^m, l > 1$) podem ser comparáveis com o primeiro termo não nulo da expansão multipolar (Q_1^1). Sendo que para o caso em que estamos trabalhando os termos Q_3^1 e Q_3^3 são respectivamente 30 % e 40 % do valor de Q_1^1, isto mostra que esses termos não são desprezíveis para expansão. Se quisermos ter um modelo mais fiel com a realidade física do experimento devemos necessariamente considerar estes termos adicionais. Como já discutimos, anteriormente, os valores $l > 5$ não precisam ser considerados, pois são menores em desprezíveis.

Outro aspecto importante é que dependendo da razão de aspecto da agulha (*h/a*) os momentos de multipolo podem assumir diferentes valores. Nestes casos extremos, por exemplo quando *h/a* = 1, temos que tomar cuidados adicionais ao interpretarmos estes dados, pois nesse tipo de estrutura onde $h = a$ a suposição de que a magnetização da amostra pode ser considerada constante na direção do eixo maior da agulha pode não ser satisfeita e então para corrigir este problema deveríamos considerar previamente qual seria a magnetização do sistema isolado.

Dependência angular

Como podemos notar, o momento de multipolo $Q_l^m = Q_l^m(\psi)$ é uma função apenas do ângulo ψ de rotação entre os dois referenciais, que para esse problema é o ângulo com que a agulha gira em torno de seu próprio eixo de rotação. Esta dependência angular vem do fato de que a agulha magnética pode girar em torno de seu eixo de rotação central (rotação contida no plano *x*-*y*). Note, também, que como mencionado antes, a quantidade Q_l^m pode assumir valores complexos, mas isso não acarreta nenhum problema para os cálculos pois quando procedemos com o mesmo, os valores finais serão sempre reais, i.e., com componentes imaginárias nulas, resultando assim em valores reais.

Devido a essa dependência em ψ e utilizando o fato de que os momentos de multipolo serão extensivamente utilizados nesta dissertação, tanto para realizarmos cálculos analíticos quanto para realizarmos simulações, decidimos calcular as expressões dos momentos de multipolo e salvar em uma tabela. Desta maneira, não precisamos recalcular os momentos a cada vez que necessitamos de um valor, mas apenas consultar em uma tabela o valor que queremos, cometendo um erro mínimo. Assim, na **Figura 15**, somos capazes de fazer o gráfico dos momentos de multipolo com l =1, 3 e 5 e m = 1, ..., l - 2, l em função ψ. Lembrando que se l ou m forem pares o momento de multipolo é nulo ($Q_{l(par)}^m = Q_l^{m(par)} = 0$).

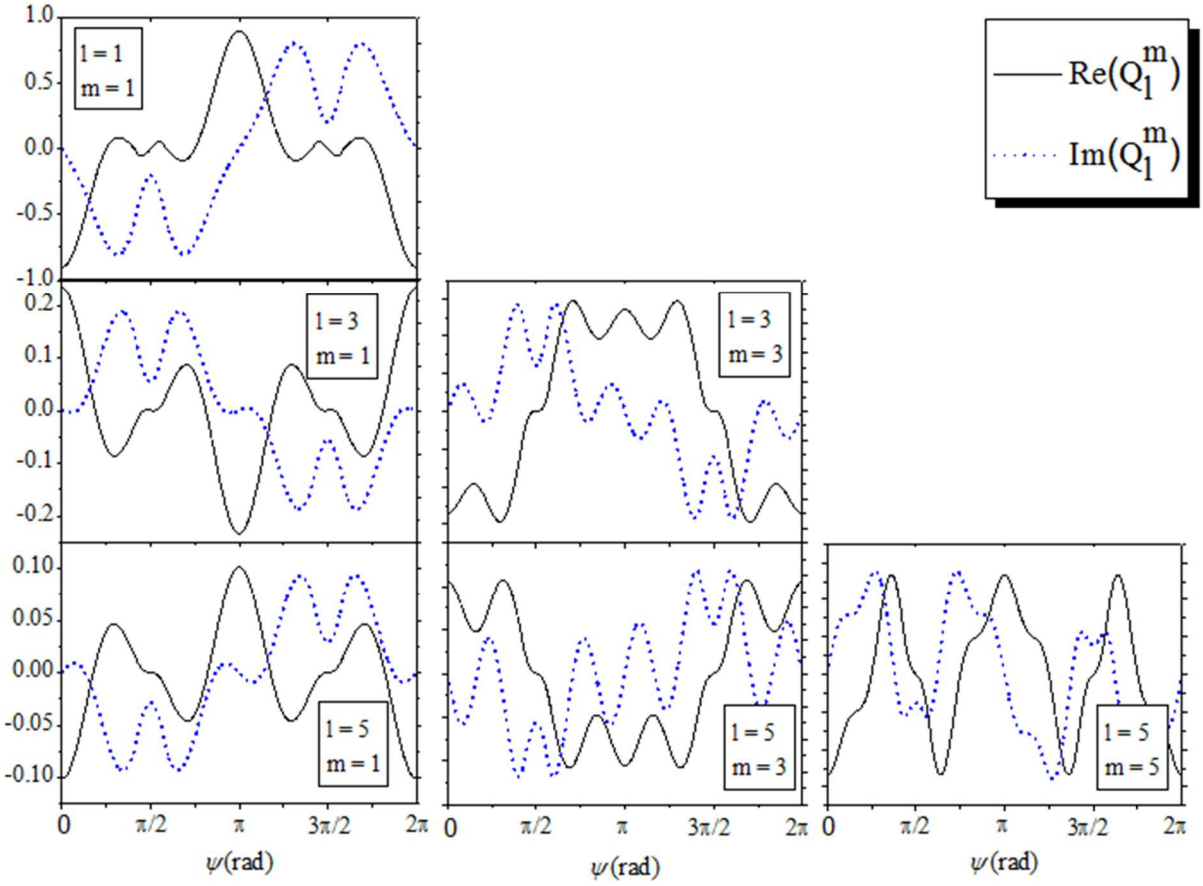

Figura 15: Gráficos dos momentos multipolares magnéticos (Q_l^m) para l = 1, 3 e 5. Os momentos foram normalizados para Q_1^1 e os demais seguiram a mesma regra de normalização. Note a diminuição dos valores dos momentos para cada valor de l (diminuição da escala).

Notamos que os momentos multipolares $Q_l^m(\psi)$ possuem uma paridade bem definida em torno de $\psi = \pi$ sendo que para a componente $Re\{Q_l^m(\psi)\}$ temos uma função par e para a componente $Im\{Q_l^m(\psi)\}$ temos uma função ímpar. Essa simetria que observamos nos momentos de multipolo $Q_l^m(\psi)$ emerge das duas simetrias fundamentais que a agulha de bússola possui, ver subseção "Simetrias da agulha". Notamos que essas mesmas simetrias são responsáveis por anularem os termos pares da expansão multipolar em l e m. Esses gráficos como já mencionados anteriormente foram retirados de uma tabela com os valores previamente calculados para o ângulo ψ = [0, 2π].

3.2.4. Potencial magnético

Agora que podemos calcular todos os momentos de multipolo e podemos utilizar a **equação (22)** para plotarmos o potencial magnético gerado por uma agulha de bússola. Assim, a **Figura 16** representa esse gráfico em duas dimensões.

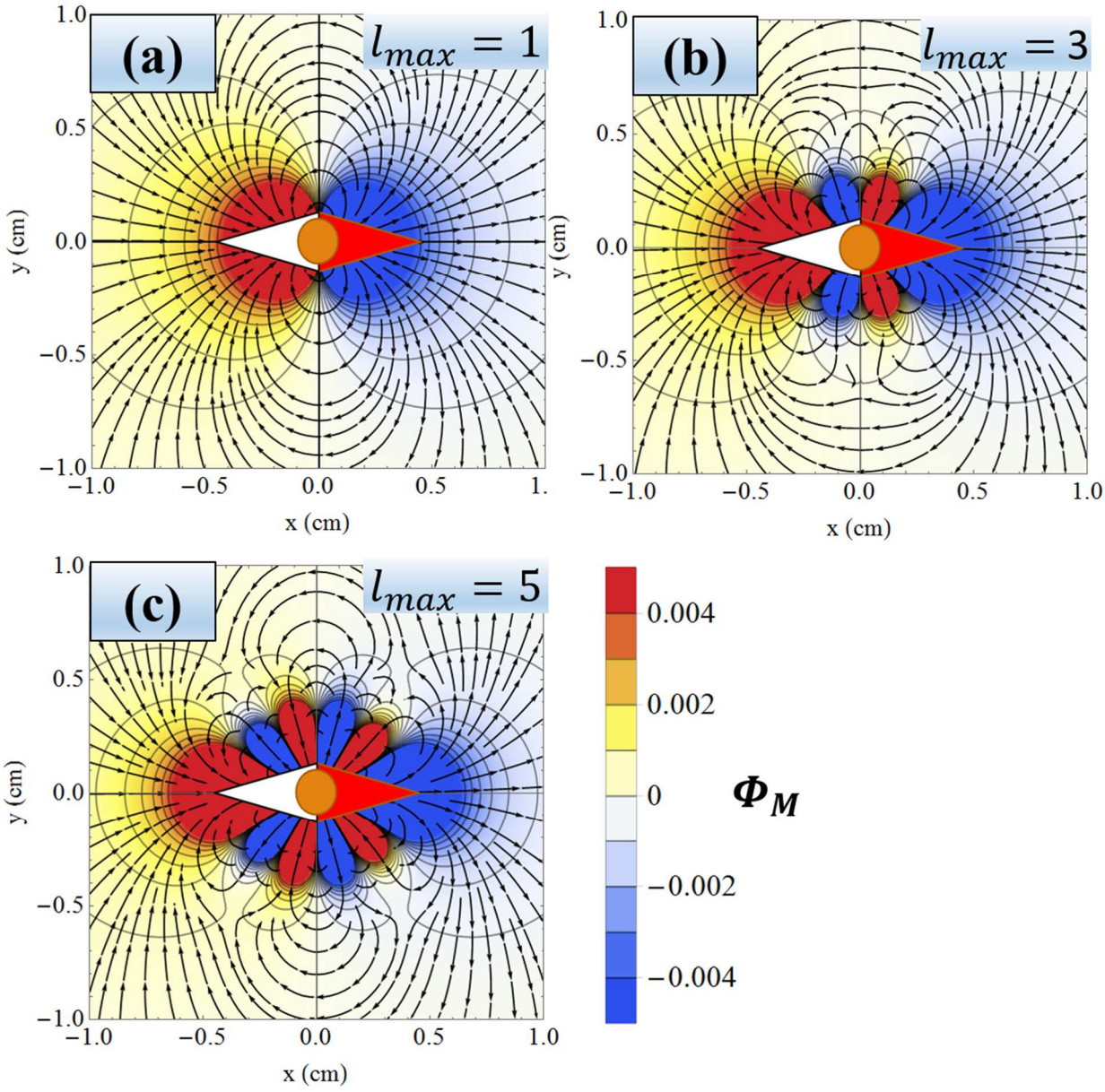

Figura 16: Curvas de nível para o potencial magnético ao redor de uma agulha de bússola macroscópica. Consideramos uma expansão multipolar onde em (a) l_{max} = 1, (b) l_{max} = 3 e (c) l_{max} = 5. As linhas contínuas representam as linhas equipotencias do potencial magnético e as setas representam o campo magnético gerado pela distribuição de cargas localizadas no interior da agulha.

Neste gráfico do potencial magnético podemos ver que efetivamente temos uma extremidade da agulha concentrando cargas positivas, lado direito em azul, e o outro concentrando cargas negativas, lado esquerdo em vermelho. Quando analisamos apenas o primeiro termo não nulo da expansão observamos que este termo se comporta como um dipolo puro. Este fato, corrobora a hipótese de que para alguns sistemas magnéticos devemos considerar apenas o termo dipolar (l = 1). Esta ideia só é verdade se ao calcularmos os termos de ordem superior, esses forem muito menores que o termo dipolar. Portanto, em primeira

análise, devemos calcular os momentos de multipolos e compararmos os termos entre si para termos a noção exata da ordem de grandeza entre os termos e, assim, escolher até que termos devemos calcular na expansão multipolar.

O gráfico também nos mostra como o potencial magnético se modifica de acordo com o número de termos presentes na expansão multipolar. Assim, temos que quanto maior o valor de *l*, melhor será a representação do potencial magnético da agulha magnética. Podemos notar esta melhor aproximação olhando a região central da agulha, pois nesta o campo magnético gerado pela magnetização fora da agulha vai se aproximando, cada vez mais, do caso de um campo magnético gerado por uma magnetização constante na direção do eixo $\hat{\boldsymbol{x}}$. Essa visualização nos deixa claro que para o caso aqui abordado é necessário que tenhamos termos que vão além do termo dipolar para representarmos com fidelidade uma agulha magnética.

Outro fator interessante que observarmos são as simetrias do problema que são devidas a forma geométrica da agulha magnética. Essas simetrias geram um potencial que carrega as mesmas simetrias da distribuição de cargas: temos para o potencial magnético que $\boldsymbol{\Phi_M(-r) = -\Phi_M(r)}$ e temos que o plano *x*-*y* tem paridade par com relação ao espelhamento. Portanto, a análise da simetria do problema é de extrema importância. Aqui sempre temos um potencial com um número igual de regiões positivas e negativas. Isso faz com que as simetrias sejam preservadas, não havendo um desbalanço de cargas. Esse desbalanço só seria possível em entidades magnéticas com essas simetrias ausentes e então neste caso, possivelmente, admitiríamos na expansão termos de ordem ímpar ($l_{\text{ímpar}}$, $m_{\text{ímpar}}$).

Em conclusão, neste capítulo mostramos como se realizar os cálculos para obtermos os momentos de multipolo Q_l^m. Vimos que esses "carregam" as simetrias da entidade magnética que estamos calculando e que esses funcionam como um fator de forma da distribuição de cargas, pois carrega toda a informação da distribuição espacial de cargas. Analisamos a comparação entre agulhas em forma de losango e discos monodomínios, vimos que os dois sistemas possuem a mesma estrutura dos termos, mas que são diferentes quanto aos fatores de proporcionalidade. E, por último, fomos capazes de visualizar o potencial magnético gerado por uma agulha magnética, bem como o campo magnético gerado em sua vizinhança devido a sua distribuição de magnetização e fomos capazes de concluir que quanto maior o valor de *l*, melhor é a aproximação do problema. Note que para valores $l_{max} > 5$ isto continua verdade, mas as modificações introduzidas serão insignificantes, pois $\frac{Q_{l_{max}>5}^m}{Q_1^1} \ll 1$.

4. MÉTODOS E TÉCNICAS

Neste capítulo será abordado os aspectos técnicos do projeto, seja os métodos experimentais e como uma simulação utilizando o método Monte Carlo foi implementada para termos uma análise mais precisa dos resultados experimentais. Assim, na seção "Montagem experimental do sistema de agulhas" é abordada a montagem experimental do sistema composto por rede de agulhas e na seção "Simulação Monte Carlo" encontra-se os detalhes do algoritmo implementado.

4.1. Montagem experimental do sistema de agulhas

O principal objetivo deste trabalho é entender o processo de magnetização de um sistema magnético macroscópico composto por agulhas magnéticas de bússola. Para tal, necessitamos primeiro caracterizar do ponto de vista magnético uma única agulha macroscópica de bússola, pois devemos primeiro caracterizar as partes isoladas do sistema e depois o sistema como um todo. Esta etapa é extremamente importante, pois quando fazemos a medida do sistema completo, não somos capazes de separar os efeitos que são devidos ao comportamento individual e quais são devidos a interações entre as agulhas magnéticas individuais. Como passo seguinte, vamos descrever como montamos o sistema de agulhas magnéticas, i.e., como o experimento das agulhas magnéticas foi montado com todos os detalhes experimentais. E, finalmente, dedicamos uma seção de como fizemos o processo de aquisição de imagens e como realizamos o processo posterior de tratamento de imagens (reconhecimento de padrões em imagens digitais). Ao final de todas essas etapas, fizemos entre outras coisas a determinação do erro em que cometemos ao medir o ângulo de uma agulha magnética.

4.1.1. Caracterização magnética de uma única agulha

Nesta seção o principal objetivo é caracterizar o comportamento magnético de uma única agulha magnética de bússola isolada. Esta etapa é de suma importância quando estamos trabalhando com um sistema magnético, pois se queremos entender como o sistema magnético se comporta, em detalhes, devemos de antemão realizarmos a caracterização magnética desta amostra, i.e., realizarmos as medidas de magnetometria. Portanto, antes de passarmos a analisar o sistema como um todo devemos caracterizar as partes isoladas do mesmo, que no nosso caso é uma agulha de bússola isolada. Note que para este trabalho o que nos interessa é saber como

se comporta a magnetização total de uma agulha de bússola, não nos importando com os detalhes micromagnéticos tampouco os detalhes referentes a composição estrutural.

Este entendimento é fundamental para este trabalho, pois, se essa agulha apresentar efeitos que acarretem em uma mudança na magnetização total da agulha, por exemplo o caso em que a magnetização varie significativamente com o campo externo aplicado total no experimento (~50 Oe), este tipo de comportamento deveria ser levado em conta no desenvolvimento do problema, porque a hipótese de considerarmos a magnetização de uma agulha macroscópica como constante seria falsa e todo o modelo desenvolvido até aqui deveria ser alterado.

Tendo em vista a importância de conhecermos o comportamento magnético interno da agulha, fizemos uma medida de magnetização em função do campo magnético externo (***M***x***H***) aplicado na direção do eixo maior da agulha (**Figura 17**). Nesta situação, a agulha está fixa, não podendo girar e, portanto, é a magnetização interna da agulha que se inverte. Outro fator importante é notarmos a forma da magnetização da agulha que é típica de um material ferromagnético, onde a inversão da magnetização ocorre de maneira suave. Esse comportamento mostra que a magnetização, dependendo da "história" do campo magnético aplicado, pode estar em qualquer ponto dentro da curva de histerese. Contudo, para o nosso experimento, todas as agulhas são primeiramente saturadas na direção do eixo maior. Para garantir essa condição inicial, nós simplesmente saturamos a magnetização da agulha aplicando um campo magnético externo da ordem de 50 Oe, na direção do eixo maior das agulhas.

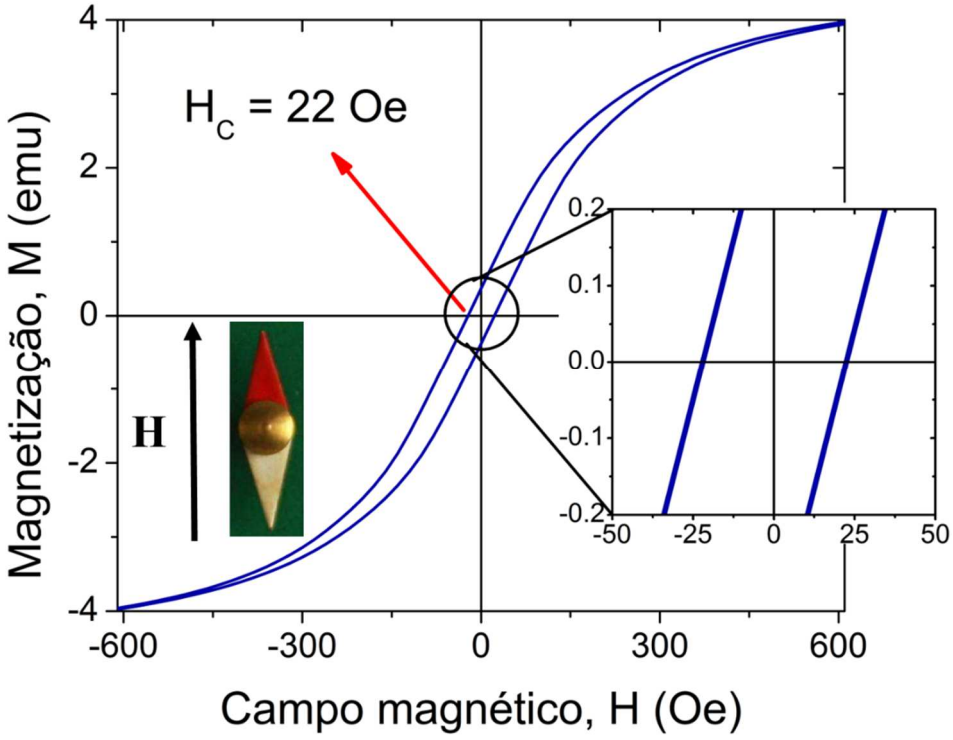

Figura 17: Curva de magnetização, adquirida por um VSM (*Vibrating Sample Magnetometer*, do inglês), de uma agulha fixa em função do campo magnético externo aplicado ao longo do eixo maior da agulha. Campo máximo da medida $H_{máx}$ = 20000 Oe.

Portanto, analisando a curva ***M***x***H***, vemos que a agulha magnética possui um campo coercivo H_c = 22 Oe, que é um campo magnético elevado, se levarmos em conta que o campo magnético máximo aplicado no sistema é da ordem de 10 Oe. Assim, todos os resultados experimentais que são apresentados nesta tese consideram que as inversões que ocorrem no sistema são devidas a processos de rotação mecânica das agulhas e não inversões da magnetização dentro do material das agulhas.

4.1.2. Sistema agulha-haste

Neste experimento foram utilizadas agulhas de imãs comerciais, que são utilizadas para construir-se bússolas magnéticas ordinárias.

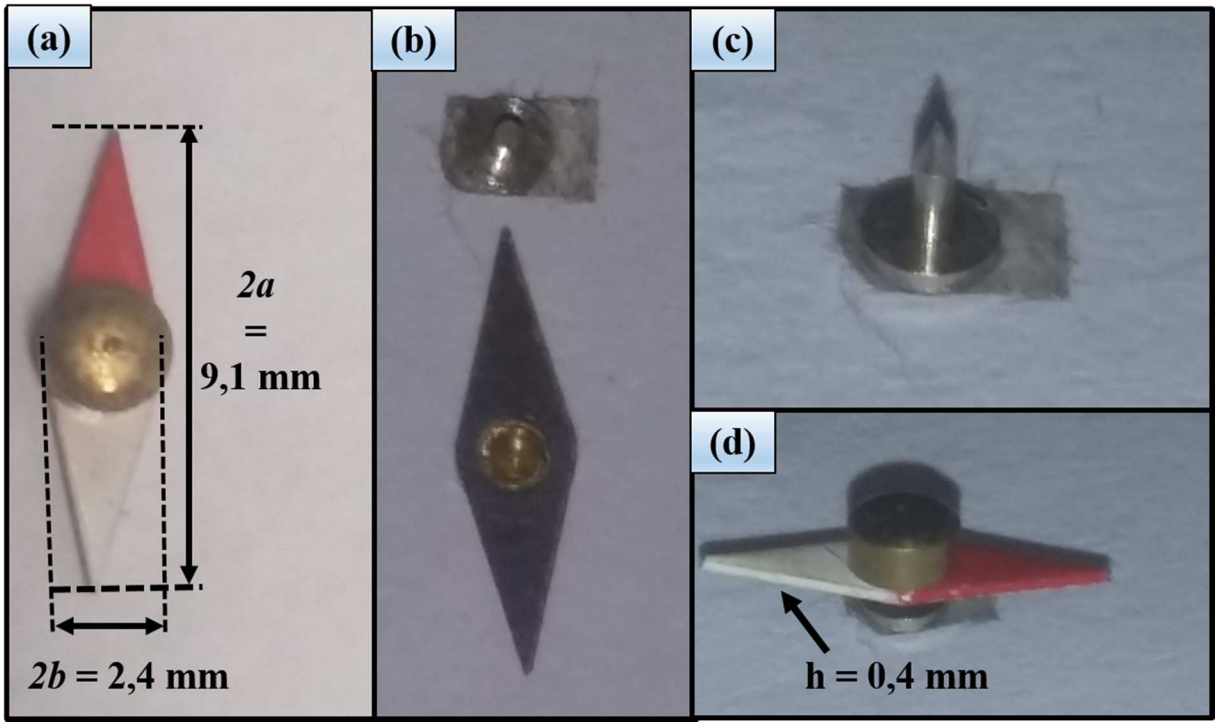

Figura 18: Agulha magnética e suas dimensões. Em (a) vista superior, com eixo maior $2a$ = 9,1 mm e eixo menor $2b$ = 2,4 mm, (b) vista superior da haste e a parte de traz da agulha, (c) haste de sustentação e (d) o sistema haste-agulha com a espessura da agulha h = 0,4 mm.

Essas agulhas magnéticas (**Figura 18-(a)**) supracitadas são fixadas e sustentadas no seu centro por uma haste metálica não-magnética (**Figura 18-(b,c)**). Dessa maneira a agulha magnética fica livre para girar em torno da sua respectiva haste no plano *x*-*y* (**Figura 18-(d)**) (note que a haste é fixada ao substrato com o auxílio de fita dupla face). Nesta montagem da agulha magnética é possível que haja oscilações na direção do eixo $\hat{\boldsymbol{z}}$, mas essas oscilações, devido ao encaixe da haste, são muito pequenas e são negligenciadas por este modelo. Desta maneira, consideramos o movimento de rotação contido apenas no plano *x*-*y*, i.e., não temos liberdade na variável angular φ.

A condição ideal seria que cada agulha estivesse livre para executar seu movimento de rotação em torno da haste de sustentação, mas a haste de sustentação é o eixo de rotação da agulha e, assim, existe uma força de atrito entre essas duas partes. Porém, para este trabalho, não se levou em conta esta força, pois o sistema é quase-estático, o que significa que a força de atrito pode ser desprezada. Isto é válido pois a força de atrito será em todas as situações muito fraca se comparada com as interações magnéticas. Desta maneira, todo o movimento de rotação das agulhas aqui neste trabalho é causado unicamente e exclusivamente pela interação magnética do campo magnético externo com a magnetização de cada agulha magnética e pelas interações magnetostáticas multipolares entre as agulhas que compõem a rede.

4.1.3. Montagem da rede de agulhas

Como já indicado na seção anterior, a nossa agulha de bússola é composta por duas partes: haste e agulha. Como a agulha é sustentada pela haste e esta é o centro de rotação da agulha, temos que fixar a haste com precisão e depois apenas colocar a agulha em cima da sua respectiva haste.

Um aspecto importante para o nosso projeto é que o seu principal interesse está nas interações magnéticas entre duas ou mais agulhas magnéticas. Sendo assim, é conveniente que essas interações sejam amplificadas ao máximo, pois queremos que elas sejam a principal força que atua no sistema. Este objetivo é realizado quando temos a menor distância possível de centro a centro de agulhas, onde o limite é fixado quando as agulhas não se tocam com suas vizinhas. Para este sistema específico o menor valor possível de distância entre agulhas é d = 10 mm (**Figura 19-(a)**). Com este valor de d a distância mais próxima de duas agulhas é de cerca de 1 mm e isto só ocorre quando as pontas de duas agulhas estão perfeitamente alinhadas uma com a outra.

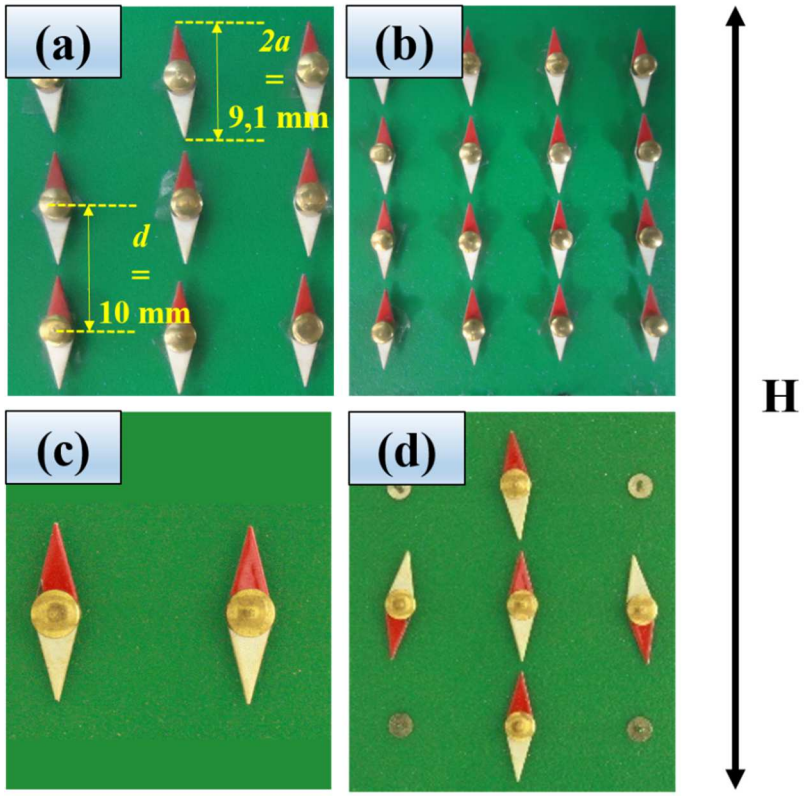

Figura 19: Redes de agulhas magnéticas. Em (a) as dimensões das redes estudadas, em (b) um exemplo de uma rede quadrada de 4x4, em (c) o caso de duas agulhas magnéticas (·· ↕) e em

(d) o cados de cinco agulhas magnéticas em forma de cruz (+ ↕). A seta vertical na imagem indica a direção do campo magnético aplicado para todas as configurações.

Agora respeitando todas as condições acima, é possível montarmos as redes de agulhas magnéticas onde cada ponto destas redes decoramos com uma agulha macroscópica magnética. Então as duas principais configurações escolhidas e estudadas neste trabalho são: (i) duas agulhas paralelas (·· ↕), (**Figura 19-(c)**), com a linha que liga o centro das duas agulhas magnéticas perpendicular com o campo magnético aplicado (***H***) e (ii) com cinco agulhas magnéticas formando uma cruz (+ ↕), (**Figura 19-(d)**), com uma das duas linhas principais da cruz paralela ao campo magnético aplicado (***H***). Ademais, a primeira configuração (·· ↕), corresponde ao caso onde pode-se ter uma solução analítica do problema porque tem-se para esse sistema apenas duas variáveis livres para resolver. Além desses sistemas menores estudamos, também, sistemas de agulhas em redes quadradas de *n*x*n* agulhas magnéticas, **(Figura 19-(b)**). Nestes sistemas maiores com *n* indo de 2 a 14 realizamos o estudo de um ponto de vista qualitativo.

4.1.4. Campo magnético aplicado

Uma característica importante que devemos ter atenção no decorrer deste projeto é como vamos gerar o campo magnético. Para o nosso problema este campo magnético deve satisfazer três condições de operação básicas: (i) estar confinado no plano da amostra (plano *x*-*y*), pois componentes perpendiculares podem fazer a agulha se desencaixar do seu eixo de rotação, (ii) ser uniforme ao longo da rede de agulhas (região com área de 15x15 cm^2), e, ainda, (iii) devemos possuir um controle externo de sua intensidade. Como solução decidimos utilizar um par de bobinas de Helmholtz, pois com essa montagem conseguimos satisfazer o três pré-requisitos listados acima e, além disso, temos a precisão que necessitamos para este experimento. Portanto, nesta seção iremos mostrar detalhes de como montamos o aparato que nos gera o campo magnético externo aplicado na amostra, não apenas isso, mas também os detalhes da calibração dele.

Como já mencionamos anteriormente, todas as redes de agulhas foram medidas dentro de um par de bobinas de Helmholtz (**Figura 20**). Este tipo de bobina é essencial pois com ela nos é possível gerar um campo magnético aplicado confinado no plano *x*-*y* da rede de agulhas magnéticas (direções indicadas na **Figura 20**). Portanto, satisfazemos o primeiro pré-requisito (i), mas o segundo pré-requisito (ii) está ligado com o primeiro. Então a solução é medirmos a uniformidade do campo no plano *x*-*y* (área de 15x15 cm²) da amostra e, também,

Δz = 1 cm acima e abaixo da bobina, pois, assim, iremos comprovar a uniformidade do campo na região da amostra. Desta maneira, utilizamos um gaussímetro de bancada (LAKE SHORE 410 E) e medimos em diferentes regiões da amostra (com um campo magnético aplicado constante de 10 Oe). Como resultado, mesmo no menor fundo de escala do equipamento (precisão de 0,01 Oe) não conseguimos detectar variações no campo magnético gerado pelo conjunto de bobinas de Helmholtz. Isso nos mostra que o aparato das bobinas de Helmholtz satisfaz os pré-requisitos (i) e (ii).

O par de bobinas de Helmholtz é alimentado por uma fonte de corrente (KEPCO BOP-20M), operando em um modo de corrente constante, i.e., informamos um determinado valor de corrente e o mesmo é mantido constante pela fonte. Este fator é importante pois o campo magnético gerado pelo par de bobinas de Helmholtz é diretamente proporcional com a corrente circulando nas bobinas, via lei de Ampére, portanto não devemos utilizar o modo tensão constante. Desta maneira, conseguimos os valores típicos de corrente entre -9 A até 9 A, o que para este experimento corresponde a um intervalo de campo de -45 Oe até 45 Oe.

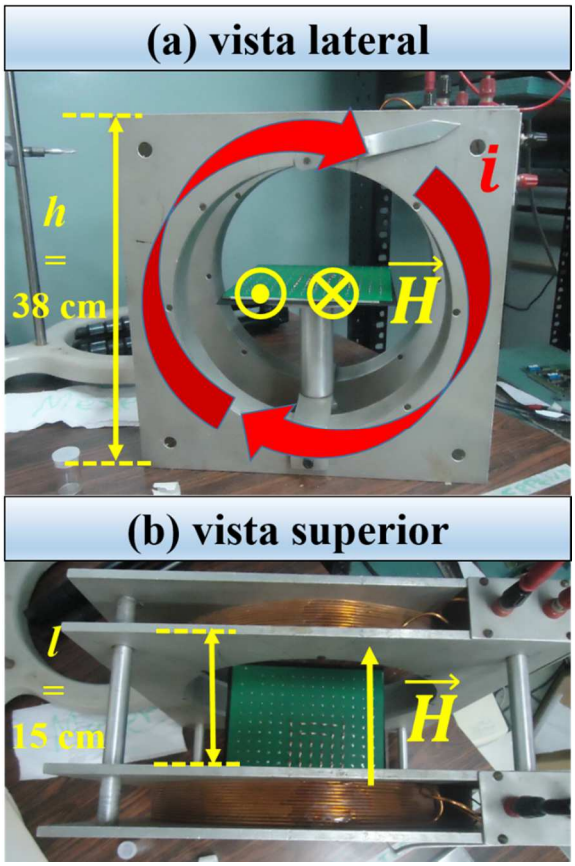

Figura 20: Bobinas de Helmholtz. (a) vista lateral da bobina, com a indicação do caminho da corrente na bobina e (b) a vista superior. Em ambas indicamos a direção do campo magnético gerado.

Como a fonte de corrente possui comunicação GPIB (*General Purpose Interface Bus*, em inglês), é possível automatizarmos o controle de intensidade do campo magnético, realizando assim o pré-requisito (iii) de controle de intensidade de campo magnético. Isto é feito pela importante etapa de calibração do campo magnético dentro desta bobina. Esta calibração é feita posicionando um gaussímetro de bancada (LAKE SHORE 410 E) no centro da amostra e aplicando diversos valores de corrente e medindo o valor de campo correspondente. O gráfico do ajuste é apresentado na **Figura 21**. Adicionalmente, temos que tomar cuidado para não ficarmos muito tempo (aproximadamente 8 min) em cada ponto próximo de 9 A (45 Oe), devido ao problema de aquecimento das bobinas pela corrente elétrica circulante (dissipação hômica nos filamentos das bobinas).

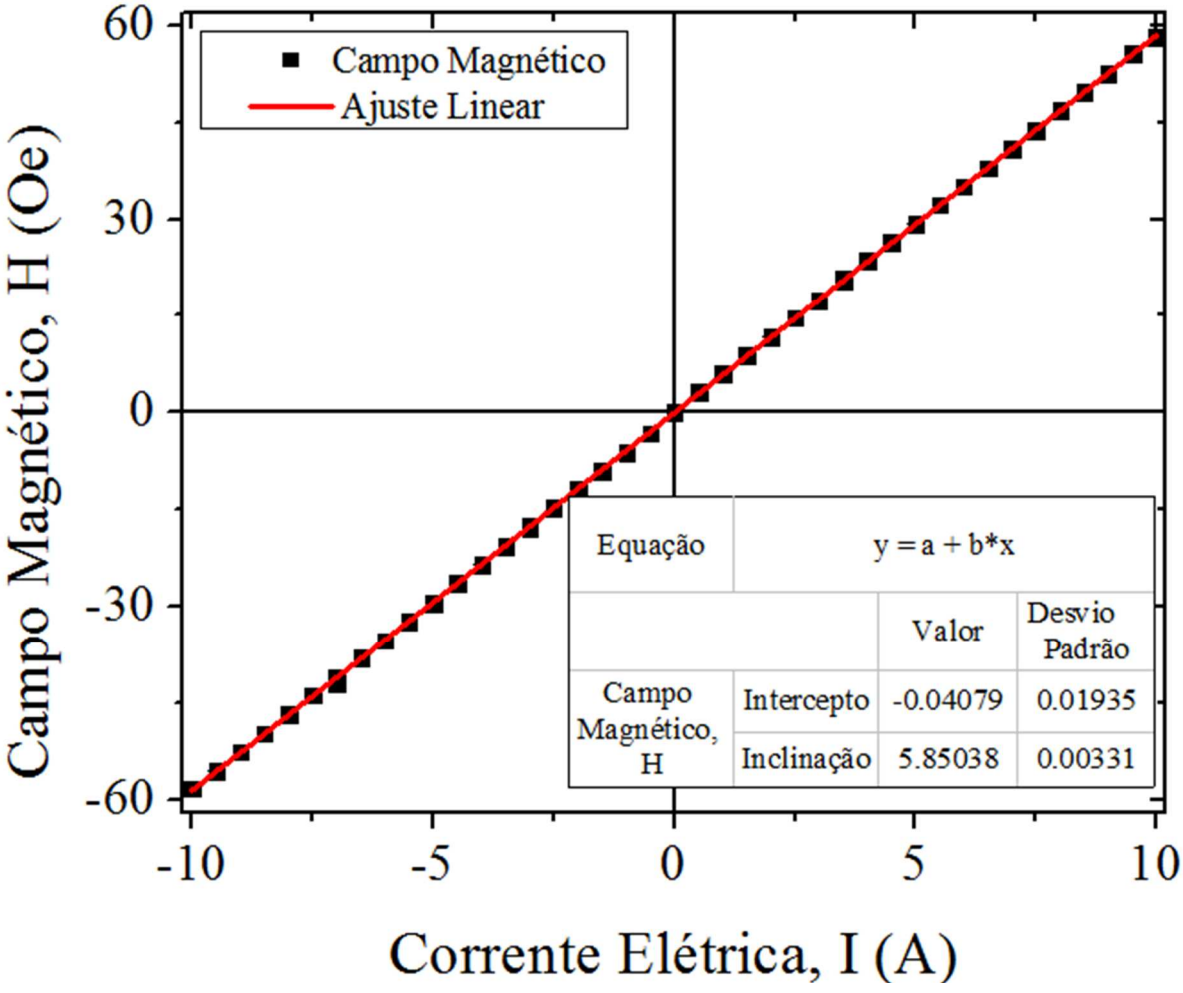

Figura 21: Calibração do campo magnético gerado por um par de bobinas de Helmholtz. As barras de erro são menores que a dimensão dos pontos, tanto em *x* (corrente elétrica) quanto em *y* (campo magnético).

Em resumo, o uso por nós do conjunto bobinas de Helmholtz/fonte de corrente conseguiu suprir todas os pré-requisitos que necessitamos para este projeto. Portando, temos um campo magnético uniforme sendo aplicado na amostra, tanto no plano da amostra quanto para regiões abaixo e acima da mesma. Além disso, a intensidade do campo pode ser controlada, com precisão de 0,05 Oe, através da fonte de corrente. Como veremos mais adiante, o controle externo na fonte de corrente atravé do protocolo GPIB nos permitiu a automatização do sistema de medidas.

4.1.5. Sistema de aquisição de imagens

Nesta seção iremos mostrar como fizemos todo o processo de aquisição de imagens, i.e., vamos mostrar em detalhes como o conjunto de aquisição de medidas experimentais funciona. Antes de entrarmos em mais detalhes vale a pena lembrarmos que a medida do ângulo que agulha faz com um certo referencial é a medida que nos dará a magnetização ($\boldsymbol{m_i}$) da agulha. Portanto, devemos entre outras coisas, aplicar campo externo e fotografar o tabuleiro em cada ponto de campo, esta será a *instrução fundamental* do experimento. Não apenas a instrução em si, mas como foi feita a automatização do sistema como um todo. Estes serão os temas que passaremos a discutir a partir de agora.

Com o objetivo de fotografarmos as redes de agulhas magnéticas, posicionamos em cima das bobinas de Helmholtz uma máquina fotográfica (CANON 75BSE) que tira fotos com alta resolução (14 megapixels). Como já mencionamos, o conjunto de bobinas de Helmholtz é alimentado pela fonte de corrente e essa por sua vez está ligada ao computador via GPIB. O mesmo acontece com a máquina fotográfica que, também, está conectada com o computador (**Figura 22**). Outro fator importante é que todas as partes do experimento estejam conectadas ao computador, pois pela quantidade de medidas que vamos ter de aquisição (cerca de 200 fotos por curva), é praticamente impossível de realizar esta tarefa manualmente. Portanto a automatização do sistema foi uma das etapas mais importante e motivante deste projeto.

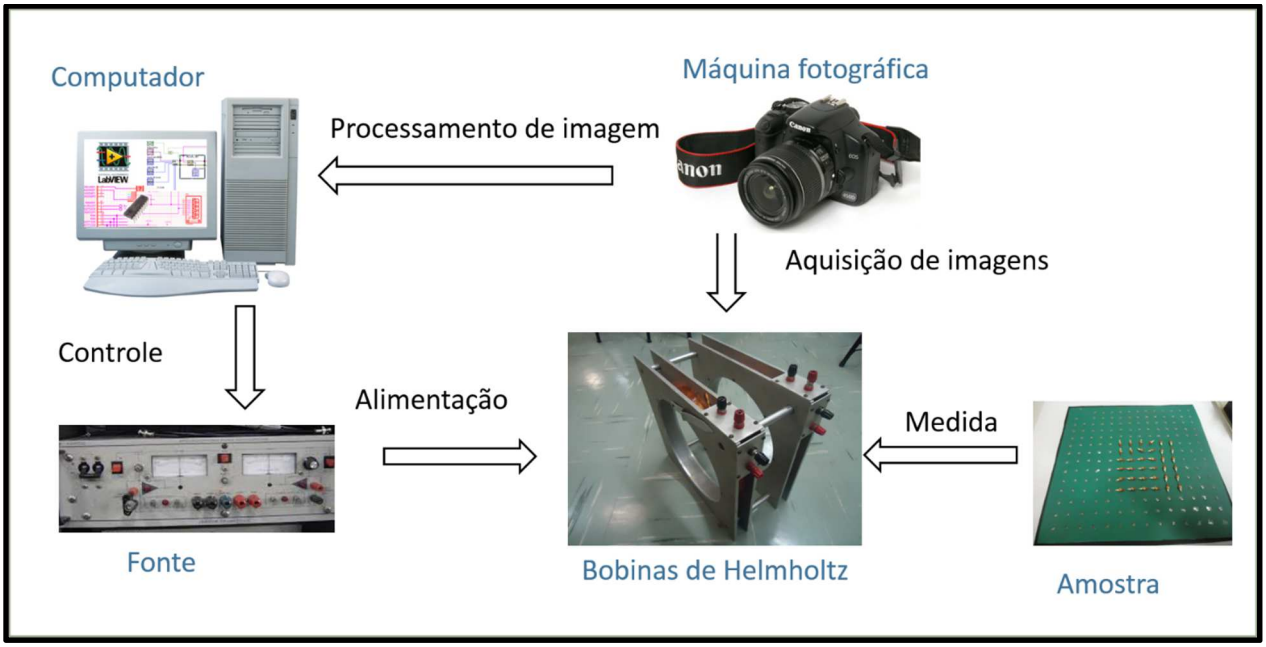

Figura 22: Diagrama esquemático do experimento das agulhas magnéticas.

A integração completa do sistema foi feita através de um programa de controle em *LabVIEW*. As bobinas de Helmholtz são ligadas a um computador por meio de uma interface GPIB que é controlada diretamente por um programa escrito em *LabVIEW*. Contudo, a máquina fotográfica não possui interface de controle *LabVIEW*. Então, para contornar este problema, utilizamos a interface USB da câmera que permite acesso remoto via programa *GPHOTO2*. Assim através do programa escrito em *LabVIEW* é possível mandar instruções para a câmera via *GPHOTO2* (note que essas instruções são passadas como linhas sequenciais de execução em MSDOS).

O programa escrito em *LabVIEW* (**Figura 23**) foi batizado como "Sistema de Controle e Aquisição de Imagens-SCAI", e com ele é possível adquirir as imagens necessárias para o experimento de maneira automatizada. O usuário informa os intervalos de campo em que ele tem interesse em estudar bem como o intervalo entre uma foto e outra. O sistema SCAI impõe uma corrente nas bobinas Helmholtz que corresponderá ao dado valor de campo. Logo em seguida o programa aguarda um tempo, também informado pelo usuário, para o sistema relaxar, e não ter na imagem adquirida nenhuma foto "borrada" pelo movimento de uma agulha, i.e., o sistema fica sempre em um regime quase-estático. Logo após este intervalo o sistema executa, através de comandos passados via MSDOS, a rotina de controle remoto da câmera que é dividida em duas etapas: comando para tirar a foto e o segundo comando para salvar no disco local a foto adquirida. Assim, as fotos são salvas no disco rígido do computador em uma pasta

definida pelo usuário e logo em seguida, após o término da medida o programa também salva uma lista com os valores de campo utilizados pelo sistema.

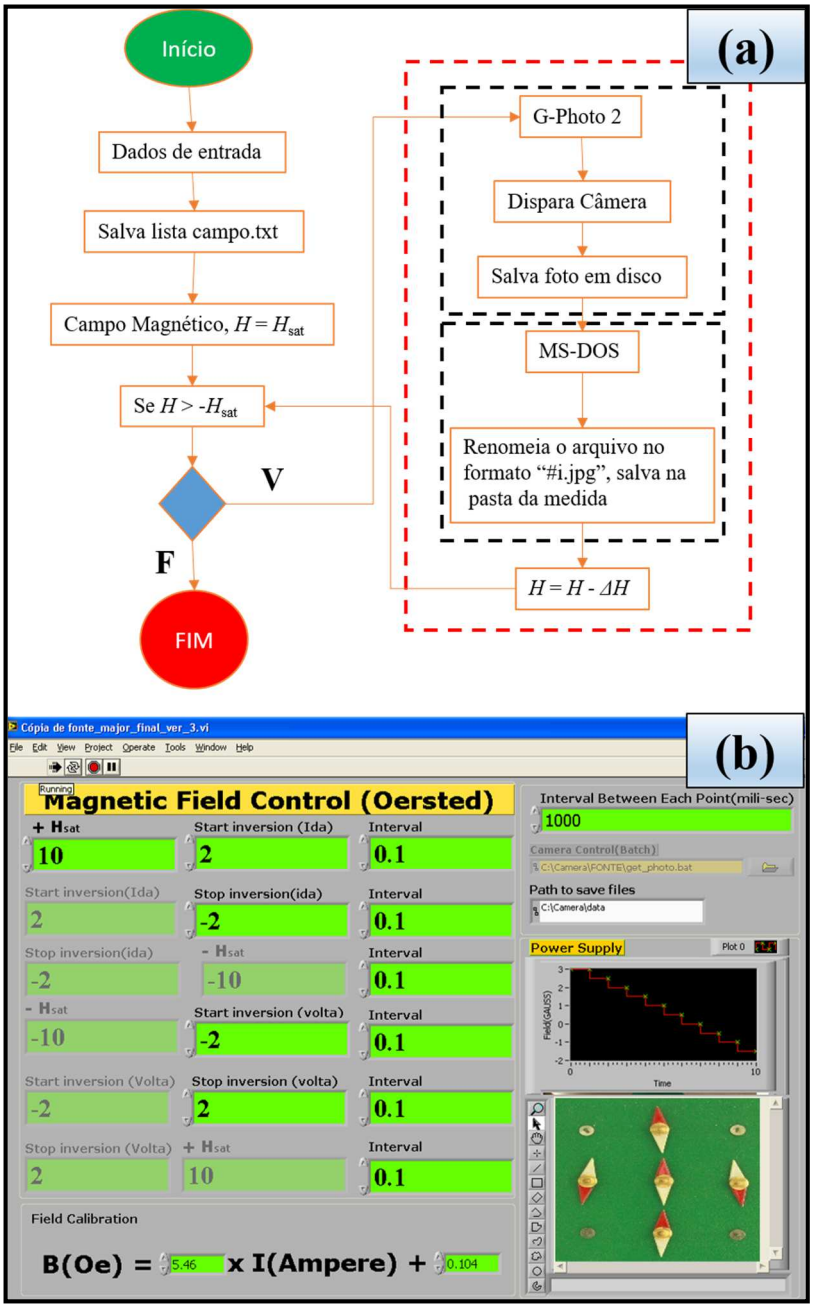

Figura 23: Sistema de controle de aquisição de imagens. (a) Diagrama de fluxo de controle do programa e (b) SCAI (Sistema de Controle e Aquisição de Imagens), feito em LabVIEW, que controla o processo de aquisição de imagens.

Outro fator importante para o nosso experimento é o tempo de aquisição total de cada ponto de campo magnético aplicado. Este tempo pode ser subdividido em três componentes: (i) o tempo de abertura do obturador da câmera (parâmetro *shutter*, em inglês), (ii) tempo para enviar o comando e salvar a imagem em disco e (iii) tempo de aguardo informado pelo usuário. O primeiro tempo (*shutter*) é 0,2 s, que é um tempo uma ordem de

grandeza menor do que os outros dois tempos. O segundo tempo (ii) é o tempo em que o programa demora para se comunicar com a câmera e mandar tirar a photo e salvar a foto em disco local. Este tempo é de 9 s, podendo variar de +2 s de acordo com a memória do computador. O terceiro tempo é um tempo passado pelo usuário em segundos, que determina um tempo para o programa aguardar até a próxima instrução. Então, podemos concluir que o menor intervalo entre duas fotos é de 1 s (*shutter*) + 11 s (tempo de espera de processamento do programa) = 12 s. Assim, se quisermos maiores intervalos de tempo entre uma foto e outra devemos informar o tempo total menos 11 s. Desta maneira, uma curva ***M***x***H*** com 100 pontos de campo levaria cerca de 22 min.

Portanto com este programa somos capazes de realizar protocolos de medidas tal como as medidas ***MxH*** exigem. Este sistema completo é capaz, dadas as condições iniciais, trabalhar de maneira automatizada. Sendo o único fator limitante de tempo de medida total, a duração da bateria da câmera fotográfica (cerca de 8 horas tirando fotos em intervalos de 20 s entre cada foto). Assim, estamos prontos para passar para a fase de tratamento e análise de imagens.

4.1.6. Tratamento de imagens

Com todas as imagens adquiridas, como mostramos na seção anterior, podemos realizar o passo subsequente que é a etapa de reconhecimento de padrões em imagens. Nesta etapa, o nosso programa batizado como "Reconhecimento de Padrões em Imagens-RPI", deve ser capaz de identificar as agulhas presentes na rede, i.e., a posição do seu centro/eixo de rotação (x,y) bem como o ângulo de orientação (θ) de cada agulha que é medido com relação a uma dada direção. Veremos adiante que realizamos esta etapa com a escrita de um programa em *MatLab* que faz os reconhecimentos dos padrões de imagens e nos devolve os valores de magnetização de maneira automática. Mais uma vez notamos a importância da automatização do sistema de reconhecimento de imagens, pois essa tarefa é irrealizável se a fizermos de maneira manual.

Antes de prosseguirmos com a explicação do tratamento de imagens é importante explicar o esquema de cores adotados para o tabuleiro e para as agulhas. Neste caso, o programa de reconhecimento de imagens enxerga o tabuleiro no padrão de cores RGB (do inglês vermelho, verde e azul), assim todas as outras cores serão uma mistura destas três cores primarias. Para a cor de fundo escolhemos o verde, pois é uma das cores primarias do sistema

RGB e neste caso quando olharmos apenas o canal vermelho, tudo que é verde ficará preto nesta imagem e o que é vermelho ficara branco. Isto faz com que a imagem fique com um alto grau de contraste, pois a agulha é vermelha e branca. Temos que a cor da agulha é fixada pelo fabricante, possuindo uma ponta positiva vermelha e a ponta negativa branca. Desta maneira escolhemos o canal azul para identificarmos a direção das agulhas, pois o branco possui ao mesmo tempo as três componentes de cor (vermelho, verde e azul).

Com o sistema já no devido padrão de cores é possível escrevermos uma rotina para o reconhecimento de imagens. Neste trabalho optamos por utilizar o programa *MatLab* para o reconhecimento de padrões e análise de imagens. Este programa foi escolhido pois apresenta uma vasta biblioteca e opções de funções pré-prontas já otimizadas para o reconhecimento de fronteiras e contornos em imagens digitais. Assim, o programa recebe como entrada uma série de arquivos de imagens nomeados sequencialmente começando em 0 até o número da última imagem. A partir daí realizamos o reconhecimento individual de cada imagem, identificando a posição e ângulo para cada agulha magnética.

Na figura abaixo mostramos o diagrama esquemático de como é feita o reconhecimento de imagens:

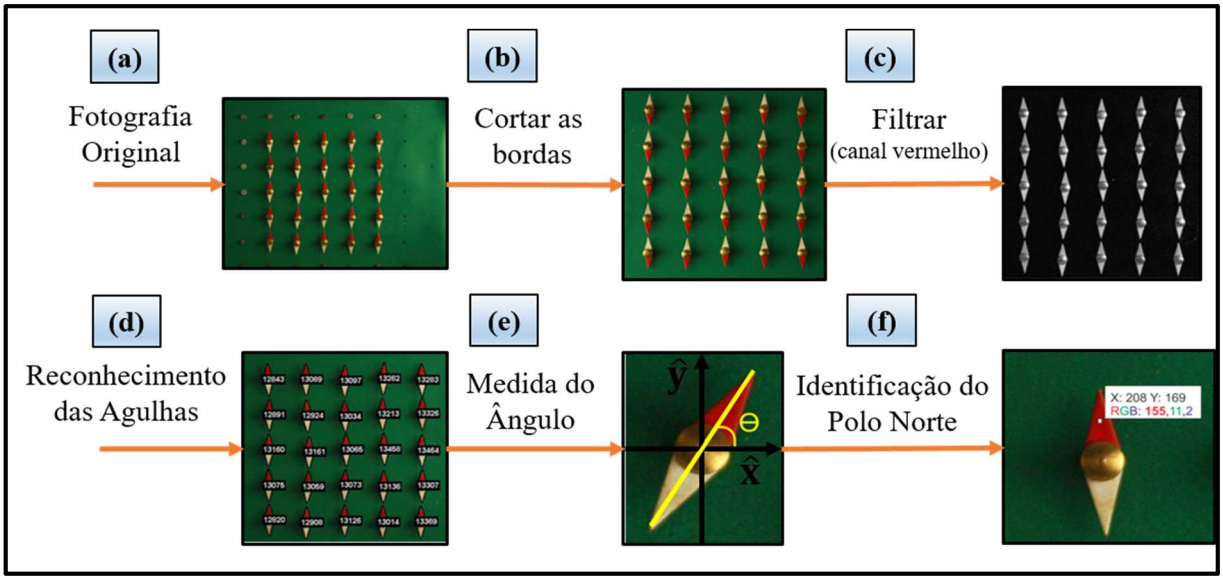

Figura 24: Esquema do reconhecimento de imagens onde a entrada é uma foto e a saída é a medida do ângulo de cada agulha com relação ao eixo *x*.

A identificação de cada agulha magnética é feita sequencialmente da seguinte maneira: (a) primeiro temos a foto sem nenhum tratamento que é passada ao programa, (b) logo em seguida fazemos a seleção da região de interesse das agulhas, através do corte das bordas,

na próxima etapa (c) aplicamos um filtro vermelho na imagem e, após, (d) utilizamos a função *regionprops* (nativa do *MatLab*) que reconhece áreas continuas (nesse caso cada agulha tem cerca 13.000 pixels), identificamos o índice de cada agulha utilizando o fato de que os centros se mantém fixos (importante para gerar informações locais de cada agulha), (e) medimos o ângulo da agulha e (f) identificar o polo norte das agulhas para saber se adiciona ou não o valor de 180º na medida do ângulo (sentido da agulha). Essas são as etapas do reconhecimento do padrão nas imagens e como realizamos a medida de ângulo.

Como citamos no passo (d), onde o programa faz o reconhecimento das agulhas "olhando" para os seus contornos, essa é a etapa que consideramos ser o erro íntrinsico do programa de reconhecimento de imagens. Como nas imagens cada agulha tem uma área de aproximadamente cerca de 13000 pixels, consideramos que os erros são quase inexistentes nesta etapa. Para se ter uma comparação, programas análogos que fazem reconhecimento de padrões em imagens de folhas de árvores necessitam de uma área de 4000 pixels. Portanto o *erro cometido nesta etapa não será considerado* por nós, pois ele é no mínimo uma ordem de grandeza menor do que os outros erros presentes no experimento.

Esta etapa que acabamos de descrever é o processo fundamental do nosso programa de reconhecimento de padrões RPI. Mas, vale notar que este programa não faz apenas o reconhecimento das imagens, mas lê uma sequencia de arquivos de um determinado diretório e faz a análise de todas as fotos em formato de imagem que ele encontrar, de maneira que o RPI vai salvando os arquivos com a posição e magnetização de cada agulha para cada valor de campo encontrado no arquivo "campo.txt" gerado pelo SCAI. Assim, no final somos capazes de juntar todos os pontos calculados e montar o gráfico de $\boldsymbol{M}$x$\boldsymbol{H}$ da configuração em questão.

4.1.7. Calibração do experimento e análise de erros

A calibração e propagação dos erros que fizemos é mostrada aqui onde levamos em conta os dois eixos principais em que trabalhamos: campo magnético e magnetização. O primeiro erro é o do campo magnético aplicado que constitui no erro mais complicado de minimizarmos, pois ele depende do alinhamento simultâneo de três partes distintas do experimento: câmera fotográfica, bobinas de Helmholtz e a rede de agulhas. Já o segundo erro, erro na medida da magnetização, vem quase exclusivamente da etapa de reconhecimento de padrões em imagens, e, como já mencionado, é o menor erro de todos. Sendo assim, nesta seção iremos discutir os processos de alinhamento do experimento, bem como o erro que cometemos

nesta etapa, mas não iremos discutir sobre o erro na medida da magnetização (vamos assumir um erro de 2º).

Em ordem para realizar a etapa de calibração da câmera fotográfica/bobinas de Helmholtz/rede de agulhas, um procedimento prático foi desenvolvido para que o nosso sistema consiga simultaneamente alinhar esses três parâmetros. O procedimento consiste em alinhar os componentes dois-a-dois, mantendo um componente sempre fixo e variando o segundo. O procedimento que adotamos pode ser descrito da seguinte maneira: (a) alinhamento das bobinas de Helmholtz com os campos magnéticos espúrios (principal fonte de campo magnético expúrio é o campo magnético terrestre), (b) alinhamento da câmera com as bobinas de Helmholtz e (c) o alinhamento da rede de agulhas com a câmera. Com essas três etapas de alinhamento somos capazes de minimizar o erro cometido devido ao alinhamento do experimento, vale notarmos que esta é a principal fonte de erros do experimento.

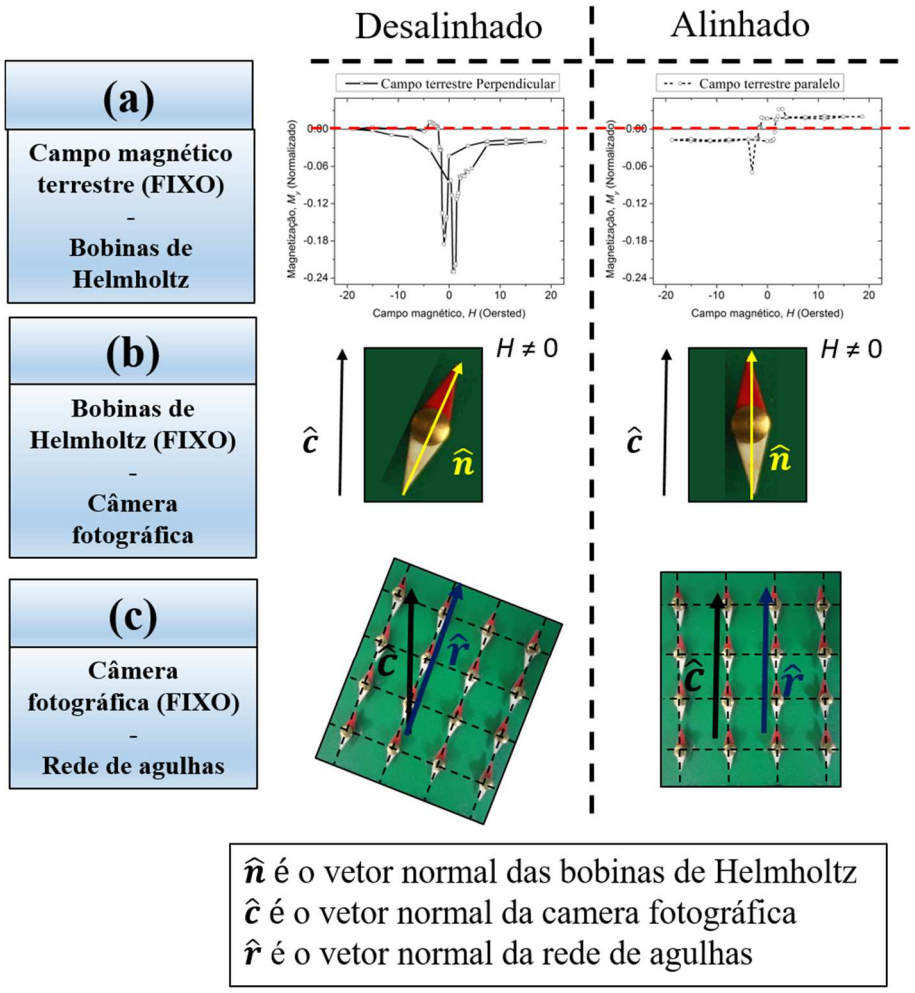

Figura 25: Alinhamento do experimento das agulhas com exemplos para os casos: desalinhados e alinhados. (a) o alinhamento do campo terrestre (fixo) com relação as bobinas

de Helmholtz, mostra-se o efeito deste desalinhamento em uma curva *MxH* para uma rede quadrada de 5x5 agulhas magnéticas, (b) o alinhamento das bobinas de Helmholtz (fixo) com relação a câmera fotográfica e (c) o alinhamento da câmera fotográfica (fixo) com a rede de agulhas.

O primeiro alinhamento (a) fizemos de maneira a garantir que o campo magnético gerado pelas bobinas de Helmholtz fiquem paralelos aos campos espúrios. Por exemplo, o campo magnético terrestre poderia tirar esse alinhamento com o centro da bobina, pois, esse campo seria uma componente a mais em uma dada direção arbitraria dentro das bobinas de Helmholtz, outros fatores importantes são o alinhamento da câmera fotográfica com a rede de agulhas e o mesmo com as próprias bobinas de Helmholtz. funciona iniciando pela eliminação de campos magnéticos externos espúrios, esta tarefa é realizada colocando-se uma agulha magnética no centro das bobinas de Helmholtz e então faz-se uma medida sem nenhuma corrente elétrica aplicada, i.e., campo magnético aplicado zero e na sequência com uma corrente elétrica circulando nas bobinas de Helmholtz, i.e., campo magnético diferente de zero, assim quando a diferença entre o ângulo das duas medidas é diferente de zero significa que o campo espúrio está paralelo ao campo da bobina. Mostramos um exemplo da influência de campos magnéticos espúrios na medida (**Figura 25** - **(a)**) onde a componente da magnetização perpendicular ao campo magnético aplicado é deslocada na direção do campo espúrio.

Na sequência do processo de alinhamento, a posição das bobinas de Helmholtz será fixada e não será alterada durante todo o processo, em geral isto é feito, fixando-se a mesma em cima da mesa óptica. Na segunda etapa (b) calibramos a posição da câmera fotográfica em relação as bobinas de Helmholtz, com isto, a posição da câmera é alterada e temos, novamente, uma agulha magnética no centro das bobinas de Helmholtz com um campo magnético aplicado diferente de zero. Buscamos atingir a posição ideal que é a agulha apontando na direção vertical da câmera (**Figura 25** - **(b)**), isso significa que a agulha está o mais vertical possível com relação a foto.

A última etapa de calibração (c) é feita com o auxílio de uma rede de agulhas. Nesta etapa, medimos essa rede de agulhas e olhamos a posição do centro de cada agulha e verificamos quando que todas as coordenadas *x* de uma tem variações menores 0,05 mm e assim definimos a melhor condição de alinhamento (**Figura 25 - (c)**). O parâmetro que variamos neste caso é um ângulo que gira o tabuleiro dentro das bobinas de Helmholtz, note que essa rotação tem seu eixo no centro do tabuleiro, não afetando assim os alinhamentos anteriores. Uma nota importante, depois que realizamos o processo de alinhamento, refazemos a calibração da

intensidade do campo magnético, **seção 4.1.4**, para garantir que este alinhamento foi feito na condição de melhor alinhamento.

Com todos os processos de calibração realizados, intensidade do campo magnético e alinhamento, obtemos erros para medida dos ângulos das agulhas magnéticas menores que 2º. Assim, no decorrer deste trabalho vamos omitir as barras de erro, pois esses como vimos são insignificantes para o nosso experimento, i.e., eles são menores que os pontos que utilizamos para mostrar nos gráficos *MxH*.

4.2. Simulação Monte Carlo

Nesta seção iremos mostrar como implementamos uma simulação de Monte Carlo (MC) do sistema de agulhas macroscópicas utilizando o formalismo de expansão multipolar. Esta simulação foi inteiramente desenvolvida por nós, portanto não utilizamos nenhum código pronto para implementarmos a simulação MC. Assim, primeiramente explicaremos como funciona uma simulação de MC, com seus aspectos técnicos e os principais parâmetros. Logo em seguida, mostramos como a simulação MC funciona em nosso contexto, e, finalmente, mostramos os parâmetros de convergência que é uma parte fundamental do programa.

A simulação Monte Carlo é utilizada para melhor interpretar o sistema físico sendo uma parte importante do experimento. Essa técnica é inspirada nos jogos de cassino da cidade de Monte Carlo e está baseada em um algoritmo computacional que faz várias amostragens estatísticas randômicas. Essa estatística randômica permite que o sistema prove várias regiões aleatórias do espaço de fase fazendo com que o sistema evolua para um mínimo de energia. Energia esta que é calculada utilizando o formalismo da expansão multipolar. Esta simulação é necessária para este problema, pois com exceção do caso de arranjos com poucas agulhas não temos como tratar o problema analiticamente. Por essa razão principal escrevemos um código em linguagem *C* que executa esses cálculos.

Essa simulação utiliza o método de amostragem Monte Carlo (**Figura 26**). O sistema inicia com um dado estado inicial, com energia E_0. Geramos um estado aleatório, que representa uma pequena variação em torno do estado inicial. Logo em seguida, calculamos e comparamos a energia deste novo estado, se esta energia é menor que a do estado anterior ela é imediatamente aceita. Contudo, se essa energia é maior ela não é imediatamente aceita, sendo condicionada a ser aceita por um processo aleatório. Esse processo consiste em gerarmos um

número aleatório *A* (entre 0 e 1) e se esse número for menor que um parâmetro *W* (parâmetro de aceitação) esse estado é aceito, mesmo com a energia maior que a do estado anterior. Acabamos de descrever um processo de amostragem pelo método de Monte Carlo.

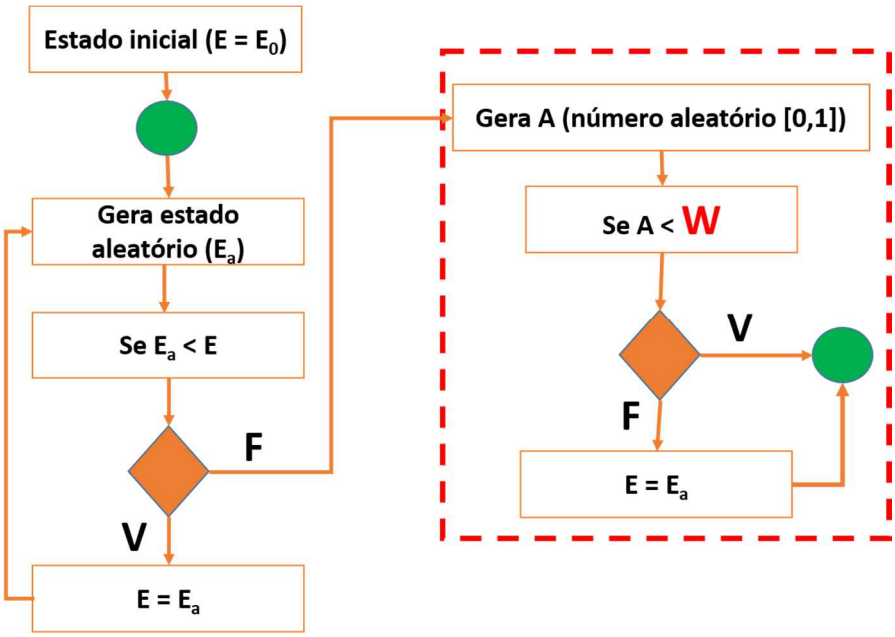

Figura 26: Diagrama de fluxo para a simulação de Monte Carlo, utilizando o método de amostragem.

Outro aspecto importante da simulação de Monte Carlo é o critério de parada da simulação. Este critério diz o momento em que a simulação deve parar que significa o momento em que o sistema convergiu para uma solução. Antes de mostrarmos o critério de parada devemos definir a taxa de aceitação: é a porcentagem de estados aleatórios aceitos, para um dado número *n* de amostragens. Então, o critério de parada foi definido quando a taxa de aceitação atinge um valor de 57,4 %. Este critério foi escolhido de maneira empírica, mas é um valor típico se considerarmos outros problemas que empregam a mesma técnica de simulação.

Finalmente, a **Figura 27** nos mostra uma curva de convergência para um sistema de 4x4 agulhas magnéticas. Notamos que a curva inicia em um estado aleatório com uma energia média de 0,0075 u.a. e, após várias amostragens, o sistema evolui para uma energia média de 0,0009 u.a.. Quando o sistema atinge este valor, o mesmo fica oscilando em torno deste valor, pois o mesmo está em equilíbrio no mínimo de energia. Assim, se olharmos para o valor da taxa de aceitação, veremos que a mesma se encontra com um valor em torno de 57%, como esperávamos.

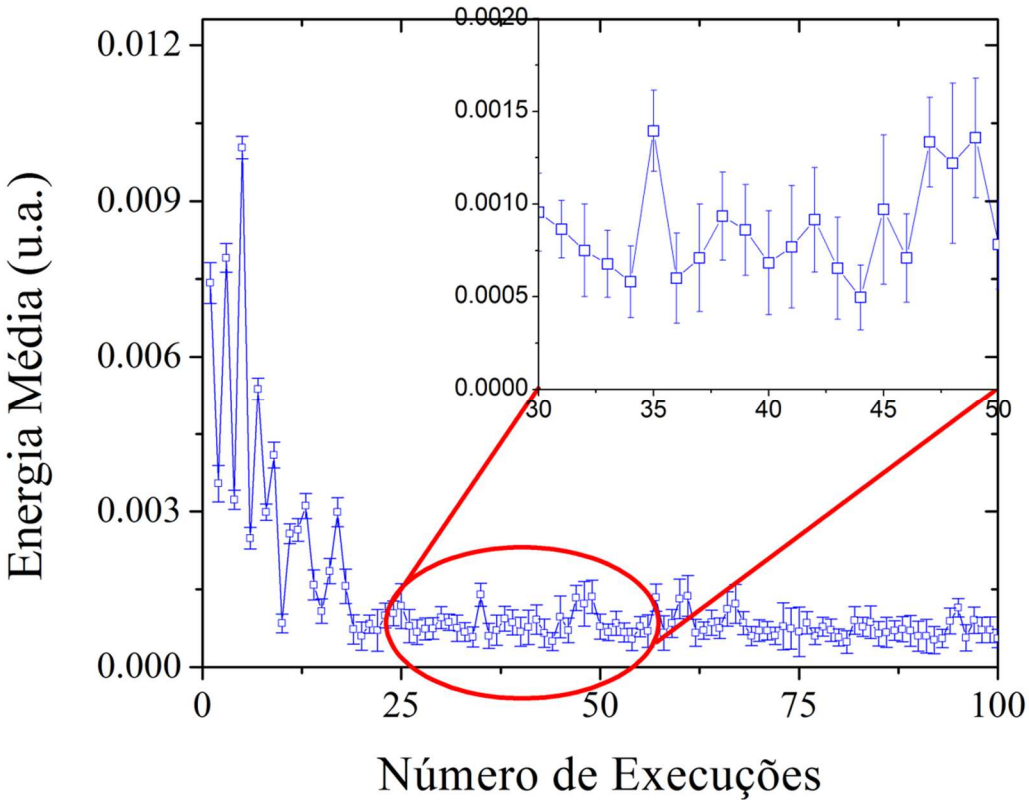

Figura 27: Gráfico da convergência do método Monte Carlo. Onde cada ponto de execução é uma média de 50 repetições da amostragem de Monte Carlo, e a barra de erros é o desvio padrão da média. Inserção mostra o sistema no equilíbrio, com uma taxa de aceitação de 57%.

Portanto, seguindo os critérios estabelecidos nesta subseção, implementamos uma simulação Monte Carlo. Esta simulação foi utilizada para calcular todos os ciclos de histereses simulados mostrados nesta dissertação. No caso das curvas de histerese, o estado final de um ponto com campo magnético aplicado H é utilizado como entrada para o ponto imediatamente seguinte $H + \Delta H$. Com isso, conseguimos que o sistema convirja mais rápido para o equilíbrio (mínimo de energia).

5. RESULTADOS E ANÁLISE

Este capítulo apresenta os principais resultados obtidos no sistema experimental da rede de agulhas magnéticas e a discussão destes. Note que os resultados podem ser de três tipos: resultado experimental, resultado de simulação computacional ou resultado analítico. As abordagens, analítica e computacional, constituem as ferramentas que servem como fonte de dados do modelo proposto nesta dissertação de mestrado. Esses resultados, quando comparados com o resultado experimental, constituem uma importante forma de teste para o modelo que tenta descrever o sistema experimental real. Outro fator importante é que podemos extrair parâmetros que não são acessíveis diretamente com o sistema físico, como por exemplo o campo magnético total sentido em um certo ponto da rede de agulhas magnéticas ou mesmo para ter-se uma ideia de como cada parâmetro do sistema interfere na evolução do mesmo.

Os principais resultados que mostramos inicialmente são para o caso de duas e cinco agulhas respectivamente. O caso de duas agulhas é utilizado neste capítulo como um modelo de referência, pois este possui as três fontes distintas de resultados. Adicionalmente, com o auxílio deste sistema explicaremos a competição entre a energia Zeeman e a energia de interação magnetostática. Logo em seguida, discutiremos o caso do sistema com cinco agulhas magnéticas dispostas em formato de cruz. Este sistema será discutido à luz da interpretação e análise do sistema de duas agulhas magnéticas. Para finalizar o capítulo, iremos mostrar alguns resultados experimentais adicionais, que como veremos sugerem novos rumos para projetos futuros.

5.1. Resultados

Nesta subseção iremos apresentar os resultados experimentais e simulados que obtivemos para os casos de duas e cinco agulhas. Como já mencionamos anteriormente, os principais resultados são devidos a sistemas menores, pois esses apresentam um número menor de parâmetros a serem tratados. Este número reduzido de parâmetros é fundamental, pois facilita a visualização da energia do sistema através dos diagramas de fase em duas dimensões que serão mostrados posteriormente. Portanto o principal objetivo desta subseção é descrevermos os resultados e destacar os detalhes que encontramos nestas medidas magnéticas.

Antes de prosseguirmos, daremos dois detalhes importantes para o entendimento da descrição dos resultados e que são comuns aos dois sistemas de agulhas: (i) a descrição de como realizamos uma curva de histerese e (ii) a normalização da magnetização.

Assim, primeiramente vamos descrever como controlamos o campo magnético em uma curva de histerese. Iniciamos o campo em um valor alto suficiente para que o sistema esteja todo na saturação positiva (todas as agulhas apontando para cima), logo em seguida, vamos diminuindo o campo, em um regime "quase-estático" (mais detalhes na **seção 4.1**) até que o sistema alcance a saturação negativa (todas as agulhas apontando para baixo). Finalmente, aumentamos o campo magnético aplicado, ainda em um regime "quase-estático" e voltamos para o sistema saturado. Este protocolo de campo magnético apresentado é o que realizamos para obtermos curvas de histereses, e, sempre que mostrarmos curvas de histerese, é esse o padrão que iremos aplicar.

O segundo detalhe é relacionado ao valor da magnetização (M) que normalizamos no seguinte intervalo $-M_{sat} = -1 < M < M_{sat} = 1$. Lembramos que a unidade desta medida é arbitrária, i.e., ela é proporcional ao valor da magnetização de cada agulha. O importante é notarmos que para este projeto não precisamos conhecer esse valor exatamente, pois temos acesso a imagem do "momento magnético" da agulha. Assim, a direção da agulha nos dá a orientação da magnetização e o módulo é apenas uma constante de proporcionalidade, que é identica para todas as agulhas. Ademais, esta normalização é adequada para o nosso sistema, pois queremos, futuramente, comparar nosso sistema com outros sistemas análogos, então, com medidas normalizadas a comparação se torna mais fácil.

5.1.1. Sistema de duas agulhas

O sistema com a configuração de duas agulhas paralelas (·· ↕), com a linha que liga o centro das duas agulhas magnéticas perpendicular com o campo magnético aplicado, é o sistema que estudamos com mais detalhes nesta dissertação. Com este sistema foi possível comparar os resultados experimentais, simulados e analíticos, devido ao fato do sistema possuir apenas dois parâmetros livres (o ângulo de cada uma das duas agulhas). Em resumo, nesta subseção mostraremos e descreveremos os resultados experimentais, simulados e o caso em que consideramos apenas a interação puramente dipolar para o caso (·· ↕).

A **Figura 28** abaixo sintetiza os resultados para o caso de duas agulhas (·· ↕):

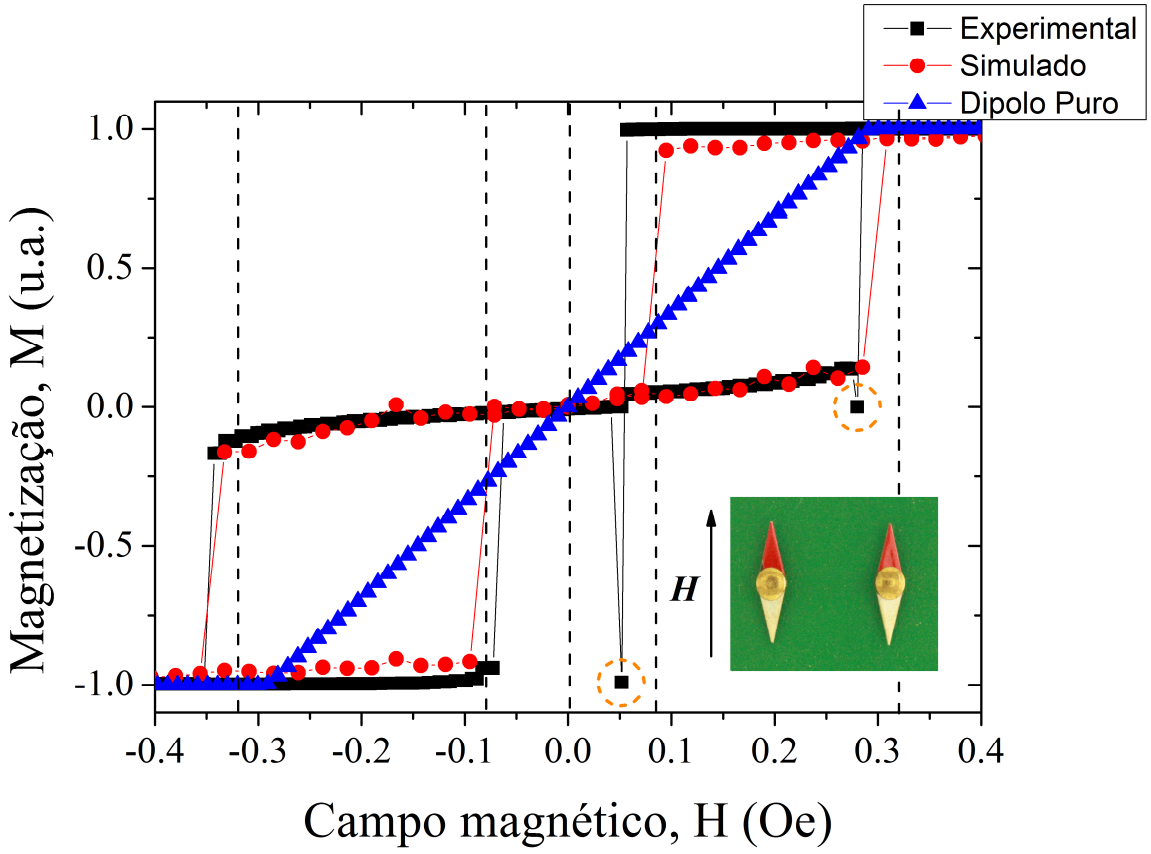

Figura 28: Curva de histerese para o caso de duas agulhas macroscópicas magnéticas, onde o campo magnético é aplicado perpendicularmente a linha que liga o centro das duas agulhas. As linhas verticais tracejadas são os pontos em que serão mostrados os diagramas de energia. Os pontos circulados representam o momento onde ocorre o processo de transição do sistema de agulhas experimental, que é diferente para o caso simulado.

Este gráfico nos mostra junto os resultados de três fontes de dados diferentes (sistema experimental, simulado e interação dipolar pura). Primeiramente, descrevemos os resultados experimentais e simulados, que como notamos os dois têm um comportamento similar na curva de histerese. Este sistema começa em um estado saturado onde as duas agulhas apontam para cima (saturação positiva - ↑↑), e com a diminuição do campo magnético elas continuam saturadas até um ponto de inversão (H_i = 0,08 Oe). Neste momento, o sistema sai de um estado com magnetização positiva para um estado intermediário de magnetização nula, com as duas agulhas, simultaneamente, giradas de 0º ou 180º (→→ ou ←←). A próxima inversão se dá em H_{ii} = -0,35 Oe, onde as agulhas saem do estado intermediário e vão para o estado de saturação negativa (↓↓). A volta, com o campo magnético aumentando, é análoga à ida da curva, mas as transições são invertidas (↓↓, →→ ou ←←, ↑↑).

Como já mencionamos, neste gráfico é possível percebermos que os dois resultados, experimental e simulado, são similares, pois as duas curvas se sobrepõem e possuem

o mesmo comportamento. Adicionalmente, se pegarmos uma foto experimental e uma simulada de qualquer ponto das curvas, teremos as mesmas orientações das agulhas magnéticas. Além disso, é importante ressaltar que nesta simulação consideramos o formalismo da expansão multipolar magnética com termos indo até $l_{máx} = 5$. Note que os únicos pontos em que há diferenças entre os dois resultados ocorrem no momento da inversão das agulhas, pontos circulados no gráfico.

Finalmente, descrevemos o resultado onde consideramos as agulhas como dipolos puros e temos, portanto, apenas a interação dipolar pura. Como nos casos anteriores, as duas agulhas iniciam em um estado de saturação positiva (↑↑), a inversão ocorre a partir de um campo magnético $H = 0{,}28$ Oe. Neste caso, a curva de inversão não apresenta saltos, mas tem um comportamento "suave" quando passa para o estado de saturação negativa (↓↓). Este caminho "suave" é representado por uma reta e esta representa uma rotação coerente das magnetizações, i.e., os valores dos ângulos são os mesmos para as duas agulhas em toda a curva de histerese. Portanto, neste sistema dipolar puro, as agulhas percorrem uma trajetória suave no espaço de fases do sistema, não apresentando nenhuma descontinuidades/saltos.

5.1.2. Sistema de cinco agulhas

O outro sistema é com a configuração de cinco agulhas em forma de cruz (+ ↕), com o campo magnético aplicado na direção de um dos "braços" da cruz. Com este sistema foi possível comparar os resultados experimentais e simulados. Este sistema foi escolhido porque não apresenta equilíbrios metaestáveis degenerados para o estado intermediário da inversão. Em resumo, nesta subseção, mostraremos e descreveremos os resultados experimentais e simulados para o caso (+ ↕).

A **Figura 29** abaixo sintetiza os resultados para o caso de cinco agulhas (+ ↕):

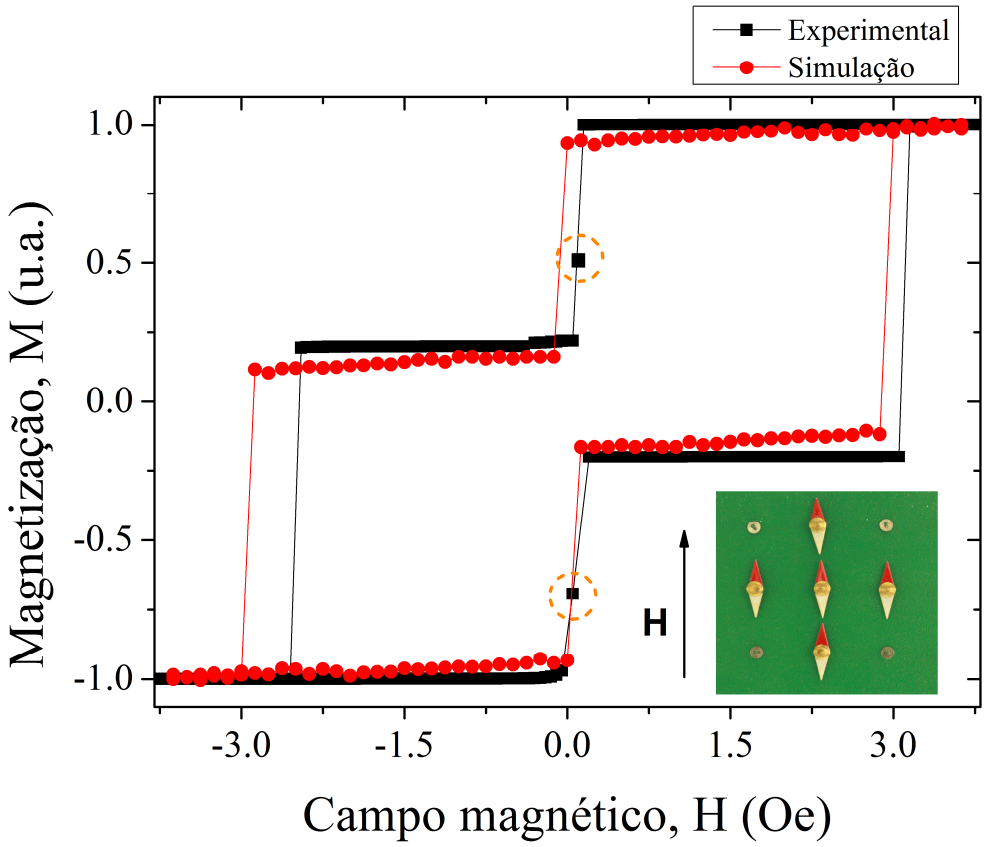

Figura 29: Curvas de histerese para o caso de cinco agulhas macroscópicas magnéticas, onde o campo magnético é aplicado paralelo a uma das hastes da cruz. Os pontos circulados representam o momento onde ocorrem o processo de transição do sistema de agulhas experimental, que é diferente para o caso simulado.

Para este caso também vemos que existe uma boa concordância entre os dados experimentais e os valores simulados. Como no caso de duas agulhas o modelo de expansão multipolar magnética é a abordagem mais apropriada, então, nos resultados simulados colocamos como energia de interação magnética os dados da expansão multipolar magnética para $l_{máx} = 5$. Notamos que neste caso o sistema não tem como ser resolvido analiticamente, *a priori*, pois possui um número elevado de parâmetros livres, neste caso cinco. Assim, a simulação pelo método de Monte Carlo torna-se uma ferramenta essencial para a análise de resultados. Nem mesmo é possível plotarmos o diagrama do espaço de fase do sistema e o que fazemos é uma análise baseada nos dados da simulação que contém a nossa teoria implementada nos cálculos de energia de interação magnética.

Observamos que o sistema de cinco agulhas também possui transições de estados e regiões de platô onde o sistema de agulhas magnéticas permanece por ser uma região de mínimo global. O sistema começa em um estado saturado positivamente das agulhas e logo evolui para o estado intermediário em $H_i = 0{,}08$ Oe. A grande diferença, com o sistema de duas

agulhas magnéticas, é que o estado intermediário não é degenerado, sendo um estado único, indicado na **Figura 29**. A última inversão ocorre para um campo negativo H_{ii} = -2,5 Oe, onde o sistema chega para o estado de saturação negativa. A volta, com o campo magnético aumentando, é análoga a ida da curva, mas as transições são invertidas.

Como no caso de duas agulhas magnéticas, temos os dados simulados corroborando com os dados experimentais. Note que os únicos pontos em que há discrepâncias entre os dois resultados ocorrem no momento da inversão das agulhas: estado saturado para cima indo para o estado metaestável ou vice-versa, pontos destacados em laranja na **Figura 29**.

5.2. Discussão

Na seção de discussão iremos analisar o comportamento do sistema físico e explicar como os resultados do modelo devem ser interpretados. Iniciaremos discutindo os resultados para o caso de duas agulhas, pois neste caso temos como mostrar, através de curvas de contorno, os perfis de energia do sistema. Estes perfis são mostrados para os casos de campo magnético aplicado nulo e, logo após uma discussão da competição entre a energia Zeeman e de interação magnetostática, mostramos o caso das curvas $M \times H$, com campos magnéticos aplicados não-nulos. Em seguida discutimos as trajetórias deste sistema de duas agulhas no espaço de fase do sistema. Não obstante a isso, fazemos uma comparação dessas trajetórias considerando dipolos puros e o caso em que levamos em conta a expansão multipolar. Outro fator importante que discutimos é como funcionam os mecanismos de dissipação de energia. Após, com toda essa experiência acumulada discutimos os resultados para o caso de cinco agulhas. Essa discussão foi toda embasada nos resultados experimentais mostrados na seção de resultados gerados pelo nosso experimento e simulação.

5.2.1. Solução analítica para o sistema de duas agulhas (estado fundamental, $H = 0$)

Como o sistema possui apenas duas agulhas é possível analisar a solução analítica dos estados pelos quais o sistema poderá evoluir e a partir disso, podemos montar o diagrama de fase da energia do sistema. Para prosseguir, escolhemos como duas variáveis generalizadas (θ e ξ) sendo o ângulo de rotação de cada uma das agulhas magnéticas. Assim, tem-se como resultado diagramas de níveis de energia magnética bi-dimensionais onde a componente z representa o valor da energia livre do sistema e os eixos x-y representam as variáveis θ-ξ (**Figura 30**). Desta maneira podemos facilmente achar o mínimo de energia do sistema, bem como os pontos metaestáveis de equilíbrio/pontos de mínimos locais de energia.

Então aplicando a **equação (34)** de energia de interação magnética entre duas distribuições independentes de cargas magnéticas, onde para os momentos multipolares utilizamos as equações contidas na **Tabela 2** que é o caso de uma agulha magnética macroscópica, podemos facilmente montar os diagramas de nível de energia magnética. Note que as equações de energia de interação magnética dependem apenas dos ângulos de orientação das agulhas magnéticas (θ, ξ).

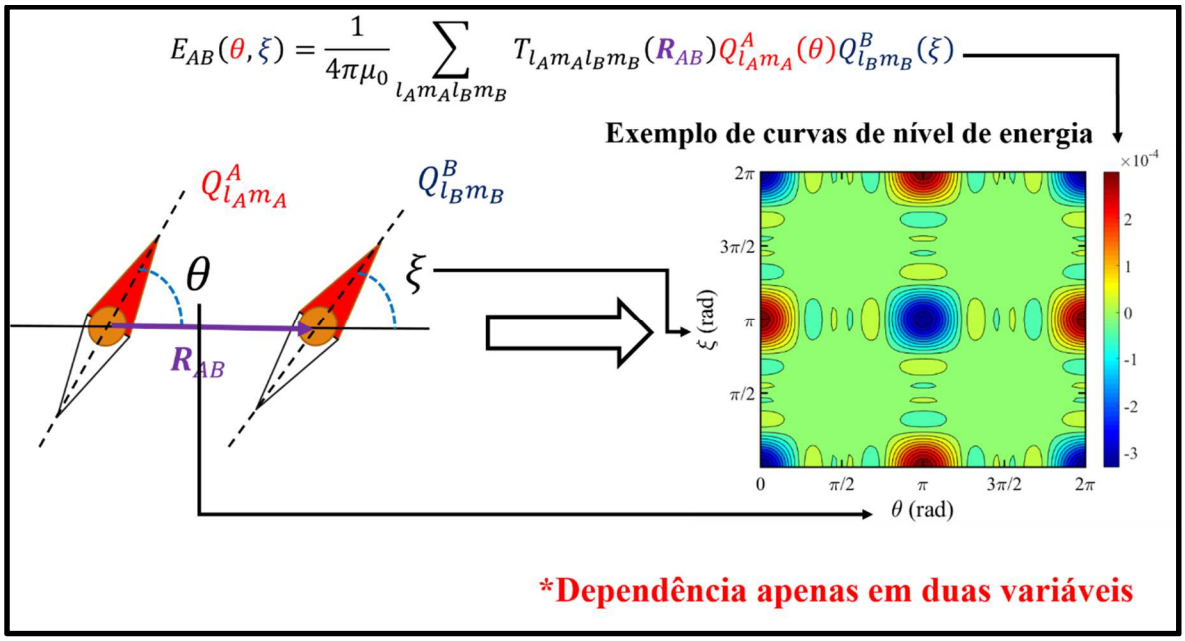

Figura 30: Esquema de montagem dos diagramas de curvas de nível de energia para o caso de duas agulhas, onde E_{AB} é a energia de interação entre duas agulhas macroscópicas, θ é o ângulo de orientação da primeira agulha, da esquerda, ξ é o ângulo de orientação da segunda agulha, da direita, e $\boldsymbol{R_{AB}}$ o vetor que liga o centro das agulhas.

Montando os diagramas de níveis de energia magnética como indicado acima temos como resultado, o seguinte gráfico:

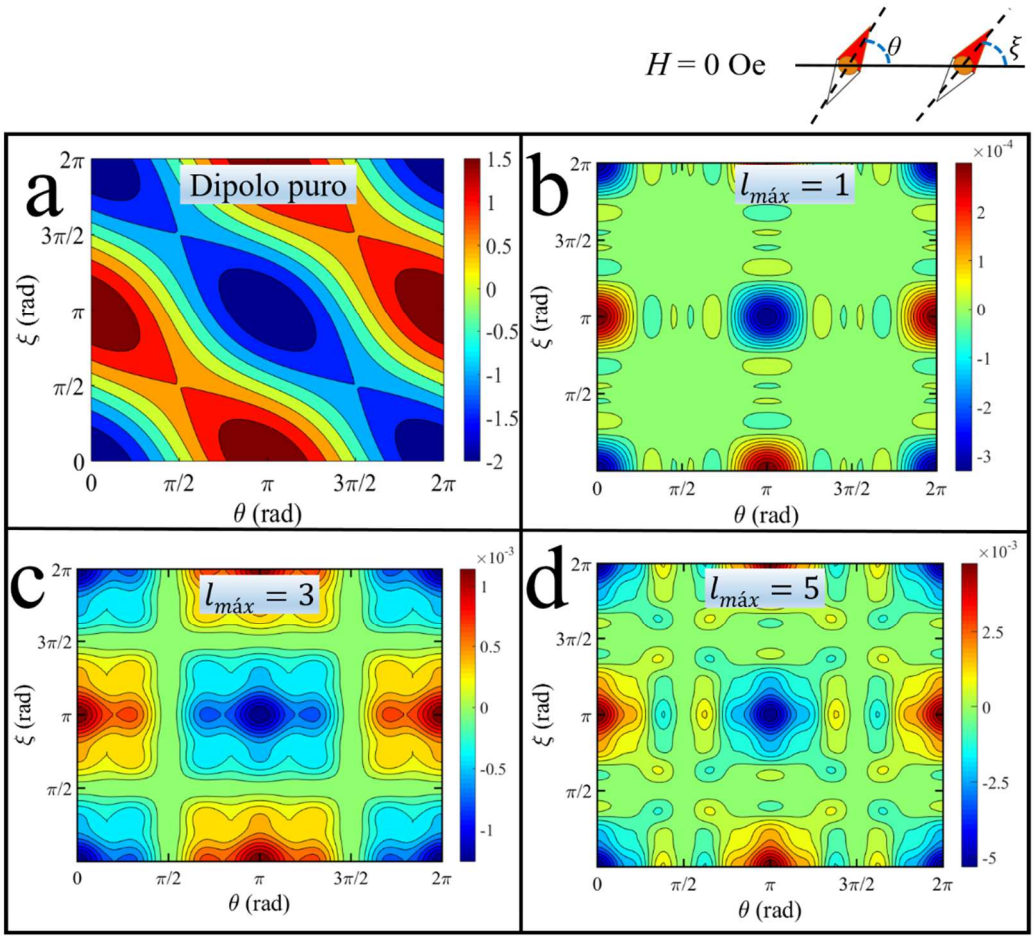

Figura 31: Diagramas de curvas de nível de energia magnética para os casos: caso de dipolo simples (a), expansão multipolar considerando termos até primeira ordem (b), terceira ordem (c) e quinta ordem (d). Note que os eixos horizontal e vertical θ e ξ representam os ângulos de rotação de cada agulha separada.

Nestes diagramas primeiramente notamos que em todos os casos, sem exceção, a posição dos mínimos, regiões em azul-escuro, e dos máximos, regiões em vermelho escuro, estão centradas na mesma posição. Este fato indica que a expansão multipolar para este sistema em particular não altera a posição dos mínimos e máximos. Esta última afirmação é equivalente a dizer que os detalhes a mais sobre a forma das agulhas macroscópicas magnéticas no problema, que inserimos através da expansão multipolar, não são suficientes para mudar as posições dos extremos de energia. Portanto, as configurações estáveis do sistema em equilíbrio para este caso são as configurações com as duas agulhas apontando para direita (0,0) ou para a esquerda (π, π).

Um outro fator interessante que observamos é a região entre os picos que muda de maneira drástica. Como exemplo pegamos os pontos ($\pi/2$, $\pi/2$) e ($3\pi/2$, $\pi/2$). No caso de um dipolo puro esses dois pontos têm energias de interação magnética diferentes, mas no modelo

proposto de expansão multipolar esses dois pontos possuem a mesma energia, i.e., concluímos que esses dois estados se tornaram degenerados.

Por fim, também notamos nos diagramas da **Figura 31** que a região entre os mínimos e máximos muda de acordo com o modelo utilizado. Por exemplo, o caso de dipolo puro não tem pontos de mínimos locais para a região entre picos e vales. Já para os casos onde temos a expansão multipolar magnética, é possível notarmos uma riqueza maior de fenômenos, i.e., aparição de platôs e/ou mínimos locais que neste caso podem representar estados metaestáveis de magnetização dando origem a um comportamento mais complexo do sistema.

5.2.2. Competição entre energia Zeeman e energia de interação magnetostática

Nos sistemas magnéticos estudados até agora existem dois tipos principais de energias envolvidas no processo: a energia de interação magnetostática entre as agulhas e a energia de interação de cada agulha com o campo magnético aplicado (energia Zeeman). A energia de interação magnetostática é a que vem sendo tratada em mais detalhes nesta dissertação, mas a energia Zeeman tem um papel fundamental na análise dos resultados. Na verdade, os resultados que observamos, tanto experimentais quanto simulados, são resultados de uma competição entre essas duas parcelas de energia. Portanto, aqui iremos discutir melhor como se dá essa competição entre energias.

Para tal, relembramos que a energia Zeeman é $E_{Zeeman} = -\sum_i \boldsymbol{m_i} \cdot \boldsymbol{H} = -\sum_i m_i H \cos\theta_i$, onde H é o campo magnético aplicado, $\boldsymbol{m}_i$ é o vetor magnetização da i-ésima agulha e θ_i é a orientação da i-ésima agulha. Esta parcela de energia é proporcional com o campo magnético aplicado. A orientação dos momentos com o campo magnético aplicado minimiza essa energia e quando a magnetização é antiparalela temos a situação de máximo de energia. A partir de agora vamos ilustrar como ocorre esse balanço entre as energias supracitadas.

Como notamos a componente de energia Zeeman pode ser dominante, dependendo apenas da intensidade do campo magnético aplicado. Então, se queremos saturar o sistema em uma dada direção devemos aplicar o campo magnético nesta direção com a intensidade necessária. Para o caso de duas agulhas, por exemplo, o mínimo de energia de interação magnetostática se dá para o caso em que as duas agulhas estão apontando na mesma direção (0 ou π). Mas, quando temos a energia Zeeman no balanço energético, este valor dependerá sensivelmente do valor de campo magnético aplicado. Daí, vem o fato de que as primeiras

transições irreversíveis ocorrem sempre próximas de $H = 0$ Oe, e a segunda transição representa o quanto de energia é necessário para retirar o sistema desse estado metaestável. Portanto, temos, como em micromagnetismo, um balanço energético entre diferentes termos de energia e o "caminho" escolhido pelo sistema será sempre aquele que minimiza este balanço.

5.2.3. Evolução da magnetização para o sistema de duas agulhas

Como citamos anteriormente o sistema de duas agulhas possui uma solução analítica e esta solução pode ser enxergada através de diagramas bidimensionais. O que iremos fazer, nesta seção, é simplesmente somarmos as duas parcelas de energia (energia Zeeman e de interação magnetostática) e fazermos a evolução do campo magnético, igual fazemos em uma curva de histerese. Além disso, mostraremos também a mesma evolução, mas considerando as agulhas magnéticas como dipolos puros (**Figura 28**). Portanto, no decorrer do texto iremos discutir não só a evolução da magnetização, mas também, retomaremos a discussão sobre a hipótese de uma agulha magnética como um dipolo puro.

A evolução do sistema é mostrada acompanhando a posição do mínimo global do sistema, então para cada valor de campo magnético aplicado teremos um valor para o mínimo global. Como já dissemos anteriormente, o sistema sempre buscará a situação de mínimo de energia, então para um sistema pequeno, como o caso de duas agulhas, podemos supor que o mínimo global é a posição em que o sistema se encontra. Com esta hipótese, tiramos a possibilidade de o sistema ficar armadilhado em mínimos locais. Essa é uma simplificação, que para sistemas pequenos não causará efeitos mensuráveis, mas não consideraremos esta hipótese para o caso de sistemas maiores. No caso desses sistemas (com mais de 10 agulhas), serão vários os mínimos locais, e o sistema experimental quase sempre escolhe caminhos diferentes através desses mínimos.

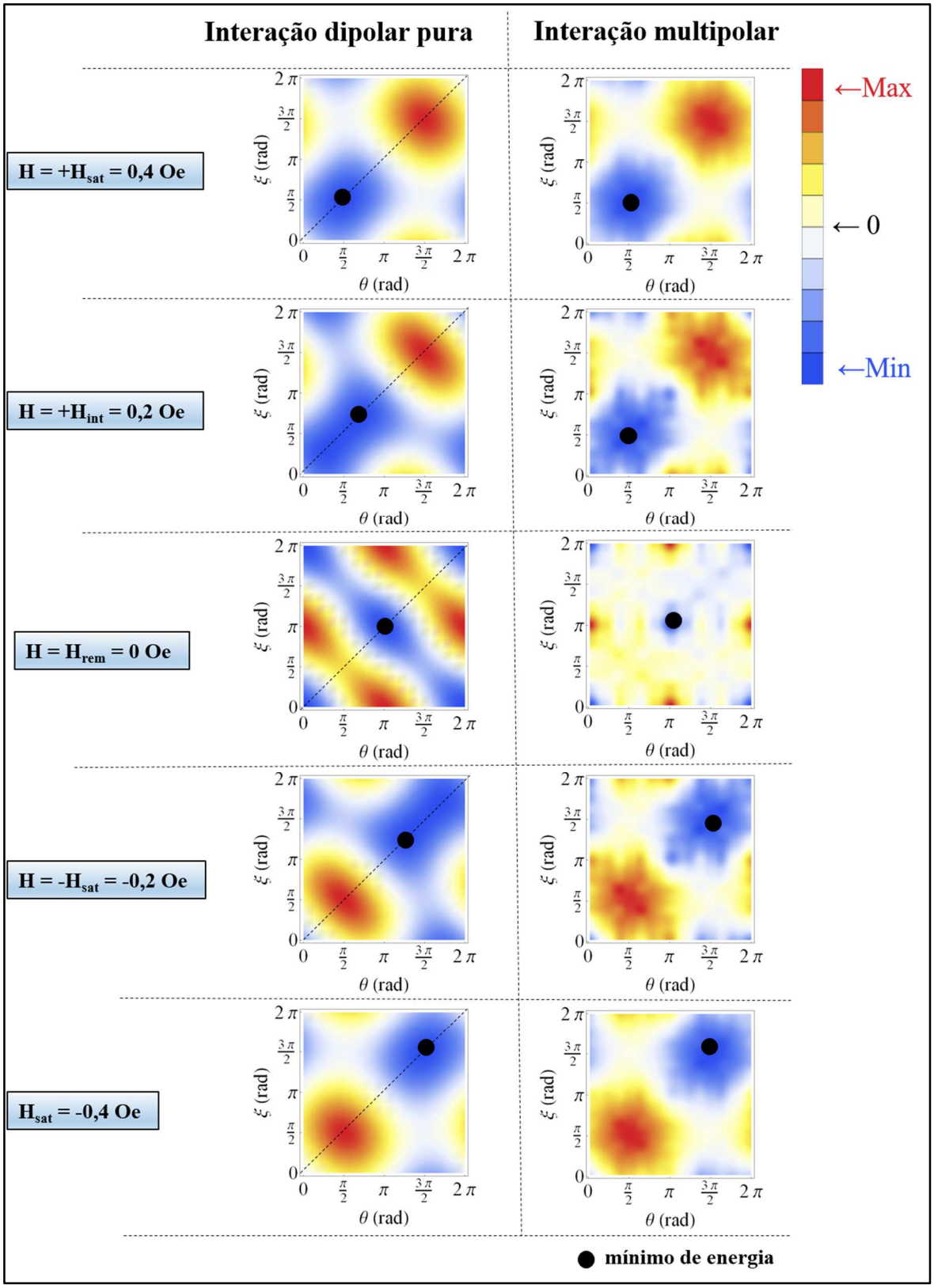

Figura 32: Diagramas de energia para a curva *MxH* no caso de duas agulhas magnéticas. Considerando o caso de dipolos, onde a linha pontilhada representa a trajetória do sistema, puros e o caso com interação multipolar, o ponto preto é o mínimo de energia. Os valores de campo são os mesmos indicados pelas linhas tracejadas na **Figura 28**.

Portanto mostramos aqui a evolução do sistema para o caso em que consideramos a interação de dipolos puros, coluna da esquerda, e o caso onde consideramos as interações multipolares, coluna da direita (**Figura 32**). Consideramos os pontos de campo magnético indicados na **Figura 28** através das linhas tracejadas, onde temos cinco valores de campo distintos ($H = +H_{sat}, +H_{int}, H_{rem}, -H_{int}, -H_{sat}$), onde temos o campo magnético de saturação (H_{sat}), um valor de campo magnético intermediário (H_{int}) e o valor de campo magnético nulo, campo de remanência (H_{rem}). Com essa escolha somos capazes de visualizar uma inversão da magnetização com o campo magnético decrescente ($+H_{sat} \rightarrow -H_{sat}$), notamos que o processo inverso ($-H_{sat} \rightarrow +H_{sat}$) é análogo.

A inversão de magnetização para o caso dos dipolos puros acontece de uma maneira suave, i.e., ao longo do caminho não temos saltos. Este fato é importante, pois isto nos mostra que ao longo de toda a curva *MxH* temos processos puramente reversíveis. Isto significa dizer que não há dissipação de energia ao longo do ciclo. Esta informação pode ser observada, também, se pegarmos a curva para o caso de dipolos puros (**Figura 28**) e calcularmos a área abaixo desta curva (numericamente igual a energia dissipada pelo sistema durante um ciclo). Teremos assim um valor nulo, o que nos mostra que se em qualquer ponto do ciclo mudarmos a direção de crescimento do campo magnético ($\frac{dH}{dt} \rightarrow -\frac{dH}{dt}$) sempre voltaremos pelo mesmo "caminho" da ida. Ademais, este comportamento fica evidente pela trajetória que o sistema realiza no diagram de fase, que é uma trajetória retilínea com $\theta = \xi$, coluna da esquerda na **Figura 32** (linha tracejada indicando a condição $\theta = \xi$).

Já para o caso onde consideramos a expansão multipolar teremos uma situação distinta, pois neste caso temos a presença de saltos. Este fato é importante, pois isto nos mostra que ao longo de toda a curva *MxH* temos processos reversíveis e irreversíveis. Neste processo, é possível observarmos que dependendo de onde estamos no ciclo de histerese e se fazermos a inversão da direção de crescimento do campo magnético ($\frac{dH}{dt} \rightarrow -\frac{dH}{dt}$) podemos não voltar pelo mesmo caminho. Essas irreversibilidades são observadas na solução analítica pela descontinuidade na trajetória do mínimo, i.e., entre H_{int} e H_{rem}, o mínimo não apresenta estados intermediários entre eles. Assim, o mínimo salta da região das saturações (positivas e negativas), para a configuração intermediária ($\theta = \xi = 0$) do ciclo de histerese, ou vice-versa.

Assim, se montarmos a curva de histerese baseada nos modelos analíticos, vemos que a solução analítica será a mesma que a mostrada pelo resultado experimental. Esta semelhança mostra que o resultado analítico para este caso ($\cdot\cdot \updownarrow$) reproduz o comportamento do

sistema experimental. Com esta combinação podemos validar duas hipóteses fundamentais: (i) o sistema físico de duas agulhas magnéticas reais tem o seu comportamento capturado pelo modelo da expansão multipolar e (ii) a simulação Monte Carlo pode ser usada para reproduzir o comportamento de tal sistema. Assim, passamos a discutir os detalhes dos saltos (processos irreversíveis no ciclo de histerese) na próxima seção.

5.2.4. Mecanismos de inversão da magnetização

Observando mais atentamente o processo de inversão da magnetização notamos que os mecanismos de inversão não são suaves, observe os saltos nas curvas de histerese apresentadas na **Figura 28** e a discussão da seção anterior. Os dois pontos que não estão em cima da curva acontecem devido ao fato de como ocorre o processo de transição entre dois estados de energia mínima diferentes. Notamos, observando o sistema experimental visualmente, que quando ocorrem os saltos as agulhas giram em torno de seu próprio eixo, e esse movimento de rotação faz com que a foto da agulha saia "borrada", pois a câmera possui um tempo de abertura de diafragma alto. Assim, temos uma imagem que não representa um estado estacionário e o programa de reconhecimento de imagem devolve um resultado que, *a priori*, não possui um significado físico para este contexto.

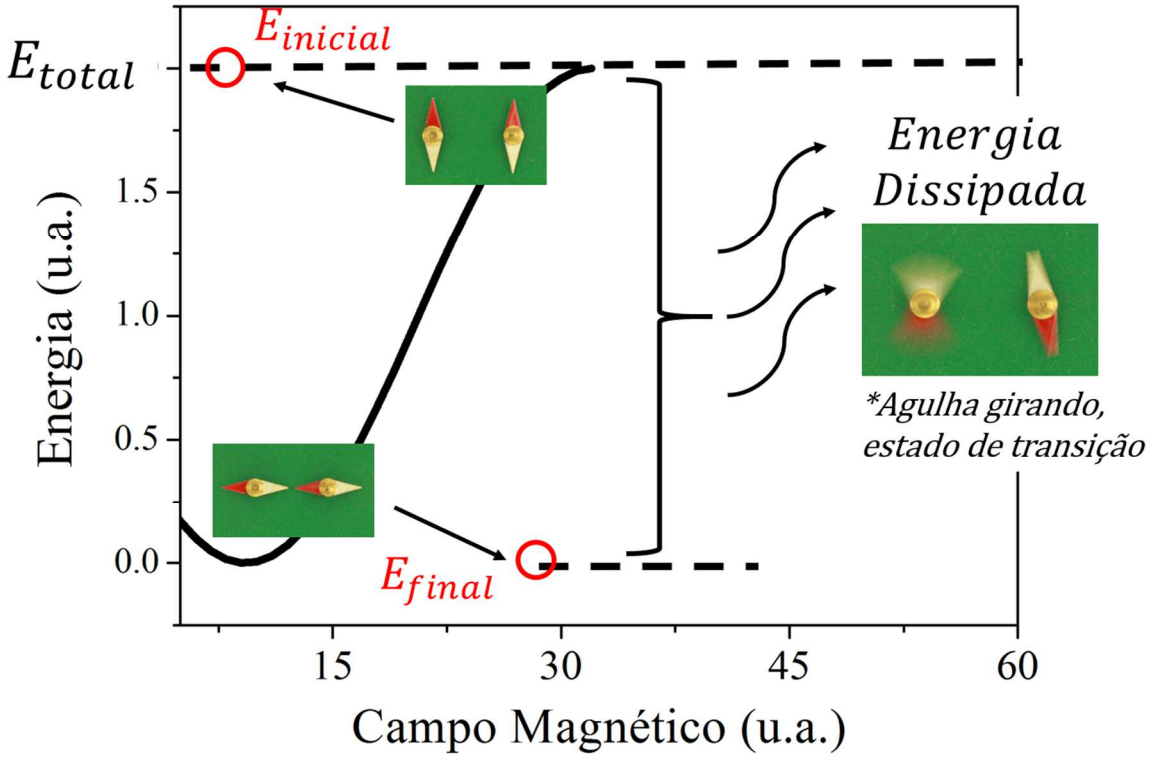

Figura 33: Esquema de transição entre dois estados de energias diferentes, note o movimento de rotação das agulhas que é um dos mecanismos fundamentais de dissipação de energia.

De fato, quando ocorre uma transição entre estados diferentes (esquema na **Figura 33**), as agulhas dissipam energia através de dois mecanismos: (i) rotação mecânica e (ii) dissipação de energia através de atrito. O mecanismo (i) ocorre, pois, o único grau de liberdade que a agulha possui é a rotação em torno de seu eixo. Assim, quando ela começa a girar, energia é transferida na aceleração angular mecânica das agulhas. Logo, como existe atrito mecânico entre a haste e a agulha, o mecanismo (ii) de dissipação de energia acontece, e o sistema de agulhas relaxa, i.e., evolui para a nova posição de equilíbrio que é o novo estado de mínimo de energia.

5.2.5. Sistema de cinco agulhas

O sistema de cinco agulhas foi outro sistema magnético de interesse estudado, pois ele contém um número relativamente pequeno de agulhas. Este sistema apesar de possuir poucas agulhas já não é possível resolvermos este problema de maneira analítica, porque ele apresenta cinco parâmetros livres (cinco ângulos de magnetização). Como mencionamos na seção de resultados, os dados simulados e experimentais concordam entre si, i.e., as duas curvas

de histerese representam o mesmo comportamento físico. De novo, observamos os pontos espúrios que saem "fora" da curva, no momento dos saltos irreversíveis de magnetização. Aqui, como para o caso de duas agulhas, estes saltos são explicados pelos mecanismos de dissipação de energia, que explicamos na seção anterior.

Outo fator interessante é a posição onde ocorre o primeiro salto irreversível de magnetização que é próximo de zero. Este fato, como para o caso do sistema com duas agulhas, vem do balanço energético entre as energias Zeeman e de interação magnetostática, ou seja, quando temos campo nulo ($H = 0$ Oe) temos apenas a energia de interação magnetostática. Este ponto no gráfico indica que temos um mínimo local ou global (não temos como afirmar se o mínimo é local ou não, pois não há como inspecionar como no caso de duas agulhas), na situação intermediária de magnetização, onde temos as duas agulhas magnéticas das pontas da cruz invertida e a linha central ainda no estado inicial saturado, estado destacado na **Figura 29**. Ainda podemos relacionar este estado intermediário com a hipótese de que ele é causado pela entrada da parede de domínio pelas bordas da rede de agulhas magnéticas, portanto as partes ligadas mais fracamente com o resto do sistema e se invertem primeiro.

Portanto, encerramos nossa seção de discução do nosso experimento. Estes foram os principais resultados que obtivemos do experimento das redes de agulhas magnéticas. Todos os resultados, como discutimos acima, foram testados de maneira a mostrar a validade do nosso modelo de expansão multipolar bem como a validade do processo de simulação deste. Assim, os próximos resultados que mostraremos abaixo constituem resultados adicionais que consideramos com grande potencial de desenvolvimento e que ainda se mostram promissores do ponto de vista científico.

5.3. Outros resultados

Nesta seção mostraremos outros resultados importantes observados no experimento das redes de agulhas magnéticas. Selecionamos três resultados que podem nos sugerir futuros experimentos e trabalhos para tentarmos entender melhor esse sistema de agulhas magnéticas macroscópicas. O primeiro resultado interessante é o caso de redes de agulhas onde são introduzidos pequenos defeitos, que alteram drasticamente o comportamento da rede de agulhas magnéticas. O segundo resultado que sugere a possibilidade de estudos mais detalhados é o caso da variação das propriedades magnéticas do sistema de acordo com o tamanho da rede, onde como veremos nos resultados, possui uma oscilação até um número de

agulhas e depois um comportamento linear a partir deste número. Já, o terceiro experimento nos mostra as possibilidades de estudarmos sistemas que apesar de continuarem sendo quadrados, possuem um ângulo de 45º com o campo magnético aplicado, e isto nos dá um comportamento totalmente diferente se compararmos com o caso da rede quadrada com o campo a 0º. Portanto, nas próximas três seções iremos abordar cada um desses sistemas citados anteriormente.

5.3.1. Redes de agulhas com defeitos e sem defeitos uma análise qualitativa

O objetivo desta seção é reportar o resultado que provém do fato de inserirmos defeitos na rede de agulhas. O sistema de agulhas foi montado de duas maneiras diferentes: com defeitos e sem defeitos. Inicialmente não tínhamos o interesse em estudar esses resultados extras, mas com o desenvolver do experimento eles provaram ser uma grande fonte de resultados adicionais e novas fronteiras para o modelo. O primeiro tipo de rede que montamos foi o sistema de agulhas magnéticas que apresentava imperfeições/defeitos de dois tipos principais: (i) rede quadrada não alinhada corretamente com variações de 1 a 2 mm no parâmetro *d* de distância entre o centro das agulhas e (ii) a fita dupla face que prende a base da haste de sustentação das agulhas magnéticas ao substrato era maior do que deveria ser, isso causou uma força adicional aleatória de atrito nos pontos onde o corpo das agulhas podiam eventualmente se "grudar" a fita dupla face.

O segundo tipo de rede foi o sistema de agulhas magnéticas onde tomamos todos os cuidados para evitar esses problemas citados acima: a distância entre a base das agulhas foi montada com mais precisão diminuindo as variações em *d* para valores menores que 1 mm, e em segundo, tomou-se o cuidado para que a fita dupla face que se adere ao substrato fosse menor que o diâmetro da base da haste metálica de sustentação das agulhas magnéticas. Este segundo tipo de redes, é o tipo que se estudou até o presente momento desta dissertação de mestrado. Neste tipo de sistema o mecanismo de inversão principal é o de dissipação de energia através de rotações mecânicas e dissipação de energia através do atrito mecânico entre a haste de sustentação e a agulha magnética.

Abaixo, mostramos uma rede de agulhas de 7x7 com defeitos (mostraremos apenas o caso com defeitos, pois este apresenta uma histerese com saltos no ciclo, fato que não ocorre para a rede sem defeitos, que é apenas uma histerese retangular sem pontos intermediários entre as saturações positiva e negativa):

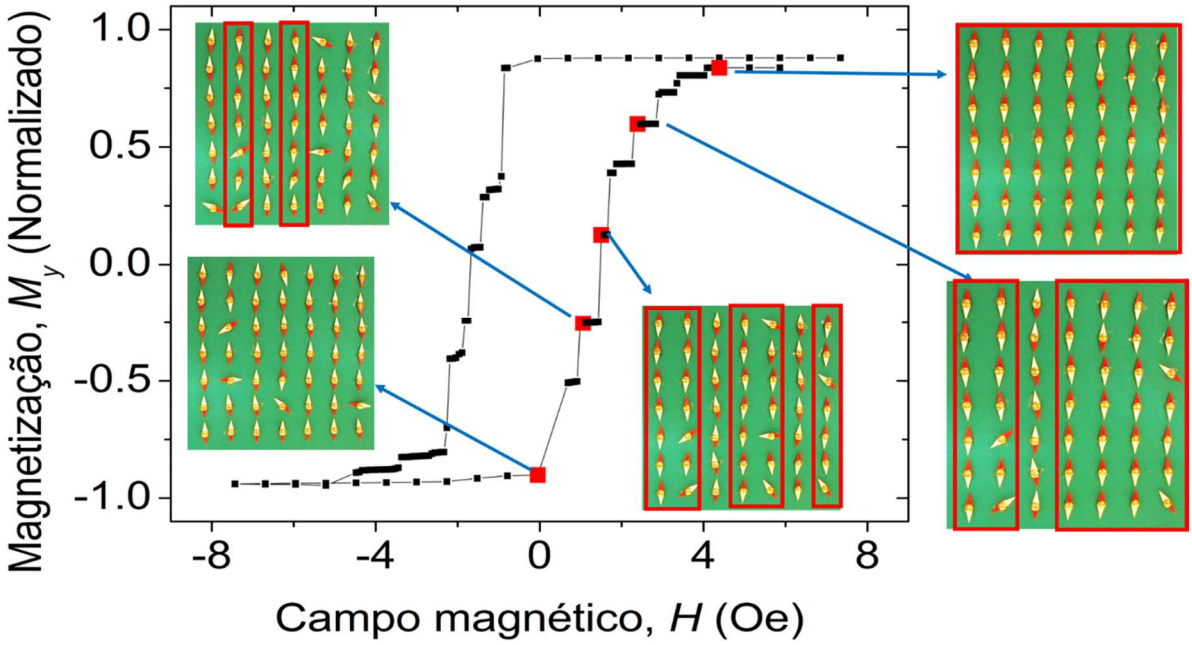

Figura 34: Rede de agulhas 7x7 com defeitos, os pontos destacados mostram a inversão da magnetização linha-por-linha.

Como vemos neste gráfico temos pontos intermediários de magnetização entre a saturação negativa e positiva (pontos destacados na **Figura 34**). Como já mencionado, esses estados intermediários acontecem apenas em redes quadradas com defeitos. Se olharmos nos destaques da **Figura 34** vemos como se dá o processo de inversão da magnetização, que ocorre primeiro invertendo uma ou duas linhas, e, logo em seguida, linhas vizinhas começam a se inverter. Este fato sugere que primeiramente, nucleamos alguns domínios magnéticos e logo esses começam a crescer até que todas as agulhas magnéticas do sistema se saturam. Portanto, aqui temos um comportamento causado exclusivamente pela inserção de defeitos na rede de agulhas, fato que não ocorre para uma rede "perfeita".

Esses dois tipos de sistemas mostram que podemos inserir defeitos nas redes e investigarmos que efeitos surgirão no sistema magnético. Assim, em primeira análise poderíamos ter um protótipo onde seríamos capazes de investigarmos defeitos em sistemas magnéticos mais generalizados, uma vez que esta teoria é invariante por escala. Não apenas isso, mas também poderíamos propor relações diretas entre tipos de defeitos mais comuns, como exemplo centros de travamento, deslocamento de rede, pontos vazios, e, com isso, deduzirmos através deste protótipo quais seriam os efeitos medidos/observados nas curvas *MxH*, ou em outras medidas magnéticas globais do sistema magnético inteiro.

5.3.2. Variação do campo coercivo com o tamanho dos tabuleiros quadrados

Este resultado é o caso de redes de agulhas com montagem em um sistema perfeito. Neste tipo de rede notamos que os dados apresentam apenas três tipos de pontos (imagens) nas curvas *MxH*: um ponto com o sistema saturado positivamente, outro com o sistema saturado negativamente e uma terceira com o sistema na transição (as agulhas magnéticas aparecem borradas na imagem, porque estão girando mecanicamente para dissiparem energia). Então, mostramos como varia o campo coercivo H_c (campo para o qual a magnetização é nula) de cada rede quadrada de agulha *n*x*n*, onde *n* é o número de agulhas magnéticas em uma linha da rede.

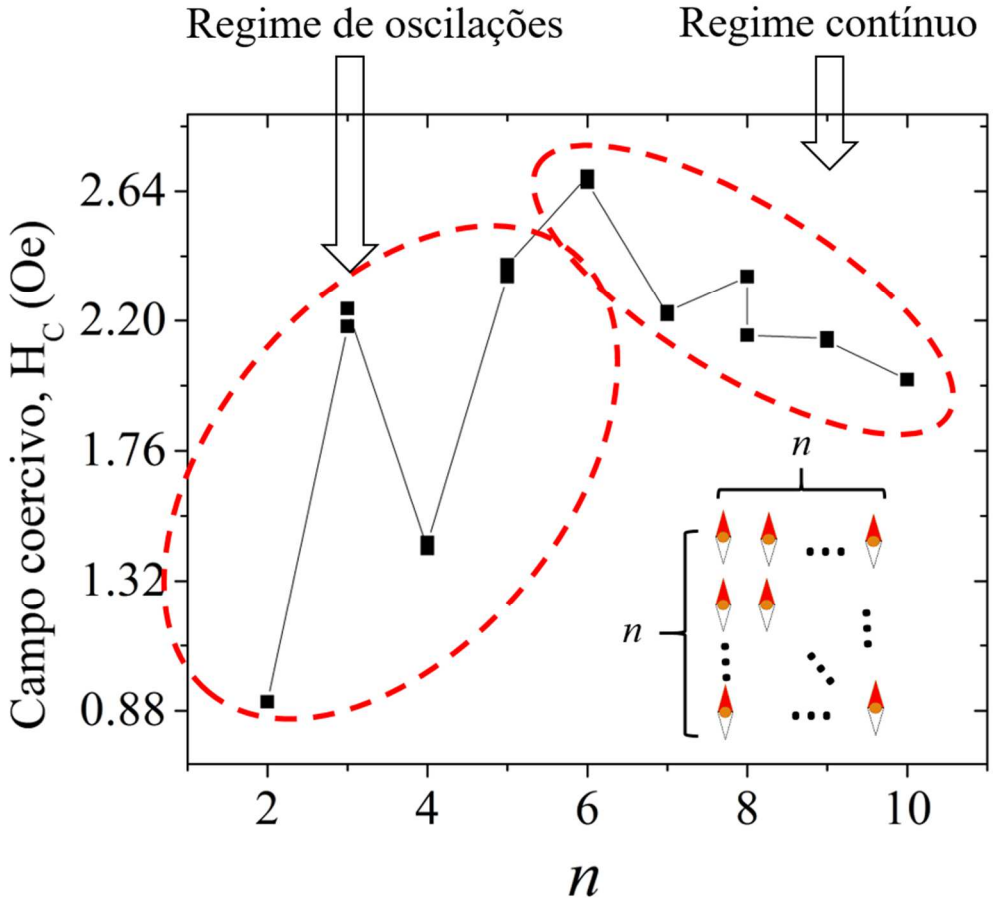

Figura 35: Comportamento do campo coercivo em função do tamanho da rede de agulhas quadradas *nxn*, onde *n* é o número de agulhas magnéticas.

A **Figura 35** nos mostra dois comportamentos da rede quadrada de agulhas magnéticos distintos: (i) o primeiro comportamento é para valores $n < 6$ e o (ii) comportamento e para valores de $n \geq 6$. No primeiro intervalo (i) notamos uma oscilação nos valores do campo coercivo, isso pode ser explicado à luz de que o sistema é muito pequeno e as interações variam dependendo se temos um número ímpar ou par de agulhas na rede. Já o segundo caso (ii) notamos uma tendência decrescente e linear dos valores de campo coercivo que podemos supor

que as oscilações desaparecem porque o sistema vai ficando maior. Portanto, podemos sugerir um estudo de mudança de comportamento magnético em função do tamanho da rede de agulhas magnéticas.

5.3.3. Curva *MxH* para um tabuleiro de 11x11 a 45º

Um outro resultado importante que mostramos aqui é o caso de uma rede quadrada de 11x11 agulhas magnéticas (**Figura 36**). Neste experimento variamos o ângulo da rede de agulhas magnéticas com relação ao campo magnético aplicado, na prática giramos a rede dentro das bobinas de Helmholtz. Neste experimento, com a rede sem defeitos, notamos que a rede magnética possui comportamentos distintos de acordo com o ângulo de orientação. Para o caso de 0º notamos apenas uma curva de histerese quadrada, apresentando um salto onde tem-se a transição do estado saturado positivamente para o saturado negativamente. Quando colocamos o tabuleiro a 45º temos uma curva de histerese completamente diferente. Sendo que a curva principal tem uma transição entre as saturações separadas em duas fases: uma reversível e outra irreversível. A parte reversível possui uma formação de estruturas de domínios, enquanto a irreversível representa apenas a passagem desses domínios para o estado de saturação.

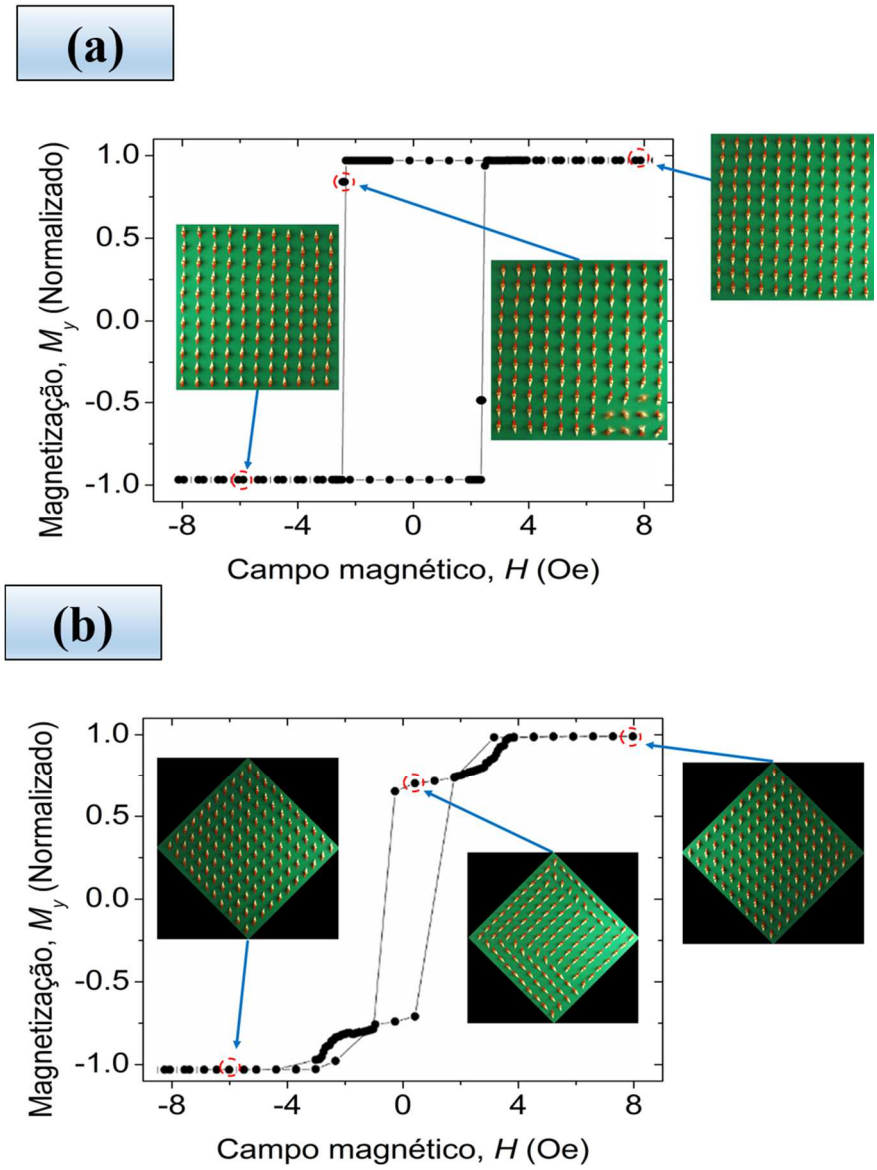

Figura 36: Rede de 11x11 agulhas magnéticas medidas para (a) 0º e (b) 45º.

6. CONCLUSÕES

Nesta dissertação procuramos entender melhor os sistemas magnéticos que possuem interação dipolar. Uma maneira de conseguir isso seria através da inserção das interações dipolares no modelo clássico de Preisach. O modelo de Preisach é famoso pois trata cada entidade magnética fundamental como sendo um histeron. Através dessa interpretação podemos analisar os comportamentos individuais das partes do sistema a partir de medidas globais do sistema. Este protocolo de medida é realizado experimentalmente através do protocolo de medidas FORC. Mas, como vimos, logo de início tivemos que mudar esse objetivo inicial, devido ao fato de que a hipótese de que uma agulha magnética se comporta como um dipolo puro não foi satisfeita.

Assim, os novos objetivos foram propostos para esta dissertação que passava primeiramente pela construção de um sistema automatizado de controle/aquisição e tratamento de imagens de uma rede de agulhas magnéticas. O objetivo principal passou a ser, como vimos no decorrer desta dissertação, calcular exatamente a interação magnetostática entre agulhas magnéticas através da expansão multipolar. Um terceiro objetivo, devido ao desenvolvimento do projeto foi a implementação de uma simulação computacional utilizando o método de Monte Carlo.

O sistema de agulhas magnéticas foi montado e automatizado com sucesso. Este sistema serviu como fonte de todos os resultados experimentais apresentados nesta tese. Esse sistema foi todo automatizado via um programa que controlava a aplicação de campo magnético externo, acionava a câmera fotográfica remotamente e adicionalmente salvava em disco as imagens da medida. Enquanto, um segundo programa realizou de maneira automatizada a medida da direção de cada agulha magnética presente na rede. Com isto, fomos capazes de gerar curvas *MxH* de várias configurações de redes de agulhas magnéticas, dando ênfase para o caso de duas e cinco agulhas magnéticas, respectivamente. Através dos resultados gerados por esse experimento observamos, pela primeira vez em uma medida *M*x*H*, que uma agulha magnética real não se comporta como um dipolo puro.

A partir disso, passamos a estudar e a aplicar o formalismo da expansão multipolar para o caso de uma agulha magnética. Para tal inicialmente calculamos os momentos de multipolo (Q_l^m), com o auxílio de um programa escrito por nós para realizar este procedimento. Logo em seguida, com os momentos de multipolo já calculados, vimos que a expansão deveria levar em conta apenas termos com $l_{máx} = 5$, pois termos de ordem superior que esses seriam desprezíveis. Constatamos, também que, devido às simetrias das agulhas magnéticas, os

momentos de multipolo se anulam para valores *l* ou *m* pares. E, finalmente, fomos capazes de calcular o potencial magnético para uma agulha magnética real em forma de losango e inspecionar as alterações no potencial devido aos termos de ordem mais alta da expansão multipolar.

Como tínhamos os resultados do cálculo do potencial magnético junto com os momentos multipolares, fomos capazes, também de calcularmos a energia de interação entre duas agulhas magnéticas. Não apenas isso mas implementamos uma simulação computacional utilizando o método de Monte Carlo. Esses resultados simulados concordaram com os resultados experimentais para o caso de duas e cinco agulhas. Ademais, o caso de duas agulhas ainda mostrou a concordância entre os resultados simulados, analíticos e simulados apresentados nesta dissertação. Sendo que concluímos que para uma agulha magnética devemos levar em conta a sua forma geométrica, através da expansão multipolar, para reproduzirmos o seu comportamento experimental.

Voltando para os resultados do sistema de duas agulhas, fomos capazes de analisar outros fenômenos interessantes. O primeiro que destacamos foi o aparecimento de mínimos locais nos diagramas de energia, que possibilitam, para que em sistemas maiores, o sistema fique "armadilhado" nesta situação de equilíbrio metaestável. Mostramos, também, o aparecimento dos saltos dos mínimos globais nesses sistemas, onde há a competição entre energia Zeeman e de interação multipolar. Novamente, concluímos que estes efeitos apenas ocorrem devido a expansão multipolar que leva em conta a forma da agulha magnética.

Um outro resultado interessante foi o estudo dos mecanismos de dissipação de energia do sistema, onde vimos que quando temos um salto no mínimo de energia, o sistema vai de um estado para o outro de energia mais baixa, liberando este excesso de energia através de rotações mecânicas. Este fato foi notado principalmente analisando os pontos "fora" das curvas *M*x*H*, no momento em que estes saltos ocorrem, para o caso de duas e cinco agulhas. Além disso, via observações diretas do sistema, notamos visualmente estas rotações nestes estados de transição de mínimo de energia. Assim, podemos dizer, também, que a forma da agulha introduz processos irreversíveis nas redes de agulhas magnéticas (saltos do mínimo de energia magnética).

Portanto, concluímos que este trabalho conseguiu mostrar que as interações puramente dipolares não são as únicas interações relevantes para os sistemas de agulhas magnéticas e que, além disso, a geometria das entidades magnéticas (forma das agulhas magnéticas) deve ser sempre levada em conta para o cálculo dos potenciais magnéticos. Outro fator que ficou evidente é que esses detalhes a mais, não apenas mudam os valores absolutos

de energia, mas introduzem processos irreversíveis ao sistema magnético interagente e, desta maneira, mudam completamente o comportamento magnético destes sistemas. Assim, a expansão magnética multipolar é a técnica mais adequada para tratarmos as agulhas magnéticas de bússola.

7. PERSPECTIVAS

Nesta seção de perspectivas mostramos e apontamos possíveis rumos para a continuação deste projeto. Esta é uma tarefa importante, pois como veremos temos vários fenômenos físicos que ainda não abordamos com este projeto. Vale lembrar que para a continuação de qualquer estudo proposto até aqui, devemos apenas continuar com o processo de aquisição de imagens e executar a simulação para esses novos casos. Em resumo, vamos mostrar as três principais novas direções que o projeto pode seguir: (i) estudo da influência de defeitos na rede de agulhas magnéticas, (ii) a variação do tamanho do tabuleiro com relação ao comportamento das medidas magnéticas, por exemplo, a variação do campo coercivo com relação ao número de agulhas em uma rede quadrada *nxn* e (iii) os efeitos causados pela rotação do tabuleiro de agulhas magnéticas com relação ao campo magnético aplicado. Note, todas essas três novas direções possíveis do trabalho são mostradas na **seção 5.3** desta dissertação como outros resultados experimentais adicionais.

As redes de agulhas magnéticas que utilizamos nesta tese de dissertação foram todas consideradas como um arranjo perfeito. Contudo, se colocássemos alguns defeitos na rede estes dão origem a novos comportamentos físicos, aparição de saltos nas curvas de histereses. Os novos comportamentos podem ser utilizados para tentarmos entender comportamentos complexos em sistemas magnéticos nanoscópicos, uma vez que esta teoria de expansão multipolar não depende da escala de tamanho adotada. Assim, poderíamos inserir diversos defeitos como: deslocamentos da rede, centros de travamento, ausência de agulhas na rede... e a partir disso, inferir qual comportamento evidenciamos nas curvas de magnetização, fazendo uma relação entre o tipo de defeito e o tipo de alteração na medida magnética.

Um fator importante para este trabalho é considerarmos apenas redes de agulhas magnéticas pequenas. Porém, não estudamos de maneira sistemática o que acontece se vamos aumentando, gradativamente, o tamanho da rede. Este fenômeno é importante, pois com ele estaríamos olhando o limite em que podemos considerar o sistema como um contínuo. A abordagem para este estudo seria de considerar quando ocorre a transição entre o estado onde há oscilações nas medidas magnéticas e quando essas oscilações deixam de ocorrer dando origem a comportamento lineares. O resultado, que esperamos é de se fazer uma analogia direta entre a transição de um comportamento nanoestruturado para um comportamento massivo (*bulk*).

A variação do ângulo do campo magnético com relação a rede de agulhas é um grau de liberdade importante de se analisar. Porém, ainda não estudamos de maneira sistemática esta característica do sistema, apenas medimos para um tabuleiro quadrado de 11x11 agulhas magnéticas, a 0º e a 45º com o campo magnético aplicado. O resultado foi completamente diferente para cada um dos casos, sendo que a 0º o sistema apresenta uma curva de histerese quadrada e a 45º uma curva de histerese com regiões de curvas, em forma de "L", e saltos da magnetização. Com este tipo de medidas poderíamos medir as direções preferenciais de magnetização de uma rede de agulhas magnéticas e qual a influência dos efeitos de borda no sistema para diferentes orientações da rede.

Portanto, como já mencionamos, qualquer um destes três objetivos pode ser tratado sem grandes alterações na configuração do experimento. A possibilidade, de primeiro testar estes novos arranjos com a simulação de Monte Carlo é plausível, uma vez que esta reproduz o sistema de agulhas magnéticas. Assim, este projeto pode ser utilizado como uma ferramenta auxiliar para entendermos sistemas nanoscópicos através de um sistema macroscópico.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Preisach, “Über die magnetische Nachwirkung,” *Z. Angew. Phys.*, vol. 94, pp. 277–302, 1935.

[2] I. D. Mayergoyz, “Mathematical Models of Hysteresis,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, no. 15, 1986.

[3] E. Olive, P. Molho, J. L. Porteseil, and L. L. N, “of magnetism and magnetic materials Dipolar interactions in 2D lattices,” vol. 144, pp. 1885–1886, 1995.

[4] E. Olive and P. Molho, “Thermodynamic study of a lattice of compass needles in dipolar interaction,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, no. 14, pp. 9238–9247, 1998.

[5] R. . Novak and J. . Sinnecker, “Macroscopic system for studies of magnetic dipolar interaction in small particles,” *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 272–276, pp. 1557–1558, May 2004.

[6] N. Mikuszeit, E. Y. Vedmedenko, and H. P. Oepen, “Multipole interaction of polarized single-domain particles,” *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 16, no. 49, pp. 9037–9045, 2004.

[7] N. Mikuszeit, E. Y. Vedmedenko, R. Wiesendanger, and H. P. Oepen, “Multipole moments of in-plane magnetized disks,” *J. Appl. Phys.*, vol. 97, no. 10, pp. 95–98, 2005.

[8] E. Vedmedenko, N. Mikuszeit, H. Oepen, and R. Wiesendanger, “Multipolar Ordering and Magnetization Reversal in Two-Dimensional Nanomagnet Arrays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, no. 20, p. 207202, Nov. 2005.

[9] M. Ewerlin, D. Demirbas, F. Brüssing, O. Petracic, A. a. Ünal, S. Valencia, F. Kronast, and H. Zabel, “Magnetic Dipole and Higher Pole Interaction on a Square Lattice,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 17, p. 177209, Apr. 2013.

[10] A. J. Stone, *The Theory of Intermolecular Foces*, 2nd ed. Oxford University Series, 2013.

[11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics Third Edition*. 1999.

[12] G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism*. 1998.

ANEXO I – PROGRAMA DE CÁLCULO DOS MOMENTOS DE MULTIPOLO

Neste anexo mostramos e explicamos o funcionamento do programa feito em *Mathematica* para o cálculo dos momentos de multipolo Q_l^m. Este programa, dado os valores de l e m (coeficientes introduzidos pela expansão em termos de harmônicos esféricos), tem como objetivo principal devolver como saída a fórmula exata dos momentos de multipolo Q_l^m. Portanto nos próximos parágrafos segue a explicação do funcionamento do programa que pode ser acompanhada, também, nos comentários do programa. Note, que as linhas do programa estão enumeradas (*(*#número da linha*)*) com exceção das linhas de comentário que são delimitadas por caracteres especiais (*(*comentário*)*).

O código do programa inicia com instruções básica de limpeza de memória (linhas #1 e #2), este é um passo padrão para os algorítimos escritos em *Mathematica*. Logo em seguida começam as declarações dos valores de l e m (linhas #3 e #4), vale notar que se o usuário colocar valores pares para l ou m então o programa irá realizar o cálculo normalmente, mas resultado será zero como esperado. Assim, cabe ao usuário a tarefa de informar corretamente os valores das entradas dos dados.

Uma vez que informamos os valores de entrada do programa passamos para as definições das váriáveis de calculo utilizadas no programa. A primeira variável que informamos é a densidade de carga (linhas #5-8) que é declarada em quatro regiões diferentes, pois temos as quatro retas que delimitam a geometria da agulha. Outro fator importante é que já estamos levando em conta a variável de rotação (ψ). Assim, por exemplo se fazemos $\psi = 0$ nessas linhas iremos voltar ao conjunto de equações de carga magnética que descrevem uma única agulha orientada na direção do eixo $\hat{\boldsymbol{x}}$.

A segunda etapa é definirmos o integrando do momento de multipolo, onde novamente devemos definilos para as quatro regões principais (linhas #9-12). Não apenas definimos os integrandos, como mudamos o sistema de coordenadas de esféricas para cartesianas, em seguida passamos as equações das retas que delimitam a agulha magnética, já considerando o ângulo ψ (linhas #13-16). Logo em seguida, no sistema de coordenadas cartesianas, integramos sobre as retas que delimitam o losango da agulha magnética (linhas #21-24). Como etapa final somamos estas quatro integrais e passamos os valores dos parâmetros $2a$, $2b$ e h.

```
(*#1*)ClearAll;
(*#2*)Clear;
(* Especifica qual momento de monopolo magnético queremos calcular (Q_l^m) *)
(*#3*)l = 1
(*#4*)m = 1
(* Inicia calculando os valores das densidades de carga para cada uma das regiões da agulha *)
(*#5*)c1 = FullSimplify[ (2 * a * Sin[ψ] * Cos[ψ] + b (Cos[ψ] * Cos[ψ] - Sin[ψ] * Sin[ψ])) / (Sqrt[a^2 + b^2])]
(*#6*)c2 = FullSimplify[ (2 * a * Sin[ψ] * Cos[ψ] - b (Cos[ψ] * Cos[ψ] - Sin[ψ] * Sin[ψ])) / (Sqrt[a^2 + b^2])]
(*#7*)c3 = FullSimplify[ (-2 * a * Sin[ψ] * Cos[ψ] - b (Cos[ψ] * Cos[ψ] - Sin[ψ] * Sin[ψ])) / (Sqrt[a^2 + b^2])]
(*#8*)c4 = FullSimplify[ (-2 * a * Sin[ψ] * Cos[ψ] + b (Cos[ψ] * Cos[ψ] - Sin[ψ] * Sin[ψ])) / (Sqrt[a^2 + b^2])]
(* Calcula os integrandos dos momentos de multipolo (Q_l^m), i.e., multiplica a carga pelo
 esférico harmônico correspondente *)
(*#9*)nucleo1 = FullSimplify[c1 * Sqrt[4 π / (2 * l + 1)] * (Sqrt[x^2 + y1^2 + z^2])^l * TransformedField["Spherical" →
     "Cartesian", SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ], {r, θ, ϕ} → {x, y1, z}]]
(*#10*)nucleo2 = FullSimplify[c2 * Sqrt[4 π / (2 * l + 1)] * (Sqrt[x^2 + y2^2 + z^2])^l * TransformedField["Spherical" →
     "Cartesian", SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ], {r, θ, ϕ} → {x, y2, z}]]
(*#11*)nucleo3 = FullSimplify[c3 * Sqrt[4 π / (2 * l + 1)] * (Sqrt[x^2 + y3^2 + z^2])^l * TransformedField["Spherical" →
     "Cartesian", SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ], {r, θ, ϕ} → {x, y3, z}]]
(*#12*)nucleo4 = FullSimplify[c4 * Sqrt[4 π / (2 * l + 1)] * (Sqrt[x^2 + y4^2 + z^2])^l * TransformedField["Spherical" →
     "Cartesian", SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ], {r, θ, ϕ} → {x, y4, z}]]
(* Aplica a rotação que permite calcular os momentos de multipolo (Q_l^m) em função do ângulo *)
(*#13*)y1 = (a b - b x Cos[ψ] - a x Sin[ψ]) / (a Cos[ψ] - b Sin[ψ])
(*#14*)y2 = (a b + b x Cos[ψ] - a x Sin[ψ]) / (a Cos[ψ] + b Sin[ψ])
(*#15*)y3 = (-a b - b x Cos[ψ] - a x Sin[ψ]) / (a Cos[ψ] - b Sin[ψ])
(*#16*)y4 = (-a b + b x Cos[ψ] - a x Sin[ψ]) / (a Cos[ψ] + b Sin[ψ])
(* Simplifica as equações *)
(*#17*)nucleo1 = FullSimplify[nucleo1]
(*#18*)nucleo2 = FullSimplify[nucleo2]
(*#19*)nucleo3 = FullSimplify[nucleo3]
(*#20*)nucleo4 = FullSimplify[nucleo4]
(* Integra as equações *)
(*#21*)I1 = Integrate[nucleo1, {x, b * Sin[ψ], a * Cos[ψ]}, {z, -h / 2, h / 2}]
(*#22*)I2 = Integrate[nucleo2, {x, -a * Cos[ψ], b * Sin[ψ]}, {z, -h / 2, h / 2}]
(*#23*)I3 = Integrate[nucleo3, {x, -a * Cos[ψ], -b * Sin[ψ]}, {z, -h / 2, h / 2}]
(*#24*)I4 = Integrate[nucleo4, {x, -b * Sin[ψ], a * Cos[ψ]}, {z, -h / 2, h / 2}]
(*#25*)res1 = I1 + I2 + I3 + I4
(* Passa os parâmetros da agulhas real *)
(*#26*)a = 0.910 / 2
(*#27*)b = 0.260 / 2
(*#28*)h = 0.040 / 2
(* Imprime a equação final *)
(*#29*)res1 = FullSimplify[res1]
```