

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

*Departamento de Física de Matéria Condensada
Laboratório de Óptica*

Dissertação de Mestrado

Estudo de Imagens por Dupla Difração com seleção de Luz Branca e elementos definidos bidimensionalmente

Daniel Souza Ferreira Magalhães

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Joaquín Lunazzi (orientador) – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Fernando de Souza Barros – IF/UFRJ

Prof. Dr. Luiz Gonçalves Neto – DEE/USP São Carlos

Prof. Dr. Mario Eusébio Fóglio – IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa (suplente) – IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física “Gleb Wataghin” para a obtenção
do título de Mestre em Física

22 de Março 2005

Este exemplar corresponde à redação final da tese de mestrado
defendida pelo aluno Daniel Souza Ferreira Magalhães e
aprovada pela Comissão Julgadora

JL

11.04.05

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M27e

Magalhães, Daniel Souza Ferreira

Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente / Daniel Souza Ferreira Magalhães. -- Campinas, SP : [s.n.], 2005.

Orientador: José Joaquin Lunazzi.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Sistemas imageadores – Difração. 2. Difração. 3. Ótica. 4. Imagem tridimensional. I. Lunazzi, José Joaquin. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** Image formation by a double diffraction process through white light selection using bidimensionally acting diffracting elements
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Imaging systems - Diffraction
 2. Diffraction
 3. Optics
 4. Three-dimensional imaging
- **Área de concentração:** Ótica
- **Titulação:** Mestre em física
- **Banca examinadora:**

Prof. José Joaquim Lunazzi
Prof. Fernando de Souza Barros
Prof. Mário Eusébio Fóglio
- **Data da defesa:** 22.03.2005



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE DANIEL SOUZA FERREIRA MAGALHÃES – RA 995027 APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 22 / 03 / 2005.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. José Joaquin Lunazzi (Orientador do Candidato) –
DFMC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Fernando de Souza Barros – IF/UFRJ

Prof. Dr. Mario Eusébio Foglio – DFMC/IFGW/UNICAMP

Aos meus pais Ubiraci e Laura,
pelo sacrifício que fizeram
para que eu pudesse
chegar até aqui.

Conteúdo

Agradecimentos	1
Resumo	2
Abstract	3
Resumo	4
Resumen	5
Apresentação	6
1. Introdução	7
1.1 Histórico da difração: da primeira publicação a aplicações em imagens	7
1.2 Difração	10
1.2.1 Traçado de raios: difração por uma estrutura periódica	12
1.2.2 Difração de Fresnel e Fraunhofer	13
1.3 Dupla difração com redes de difração planas intermediadas por uma fenda	14
1.4 Referências	16
2. Imagem em um processo de dupla difração com elementos definidos bidimensionalmente	17
2.1 Imagem pseudoscópica em um processo de dupla difração com elementos definidos bidimensionalmente	17
2.1.1 Descrição do sistema	17
2.1.2 Formação da imagem pseudoscópica	18
2.1.2.1 Comprovação experimental da posição da imagem pseudoscópica	21
2.1.3 Campo de vista do observador	24
2.1.3.1 Medida experimental do campo de vista do observador	26
2.1.4 Ponto Crítico	27

2.1.4.1 Experimental do ponto crítico	27
2.1.5 Imagem de um corpo extenso	27
2.1.6 Aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo	28
2.1.6.1 Medições do aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo	28
2.2 Comparação entre a imagem com redes planas e uma fenda e a com dois elementos difrativos descritos bidimensionalmente e um orifício	30
2.3 Referências	31
3. Difração com elementos bidimensionais usando teoria escalar de difração	32
3.1 Elementos de difração circulares e espirais	32
3.1.1 Difração por um elemento senoidal circular	33
3.1.2 Difração por um elemento espiral	37
3.2 Dupla difração usando a teoria escalar de difração	42
3.3 Referências	46
4. Aplicações	47
4.1 Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente com elemento intermediário como câmera fotográfica	48
4.2 Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente com elemento intermediário como sistema de holo-televisão	49
4.3 Astro-fotografias por meio de um elemento descrito bidimensionalmente	49
4.4 Super-resolução	49
4.5 Referências	49
5. Conclusões	50
Apêndices	51
A Exemplos de Espectro de Difração	51
B Funções Especiais	55
C Relações envolvendo funções de Bessel	56
D Holo-televisão	57
E Publicações	63

Agradecimentos

Ao professor José Joaquín Lunazzi pela orientação, amizade, ensinamentos e conhecimentos a mim transmitidos.

A colega Noemí I. R. Rivera pela amizade e companheirismo no trabalho.

Aos professores do laboratório de óptica, prof^a Lucila Cescato e prof Jaime Frejlich, por seus conhecimentos e amizades.

Aos funcionários do laboratório pela força que deram.

Aos meus irmãos e amigos, enfim, a todos que porventura eu tenha esquecido de citar, mas que com certeza sou grato por tudo que fizeram.

E finalmente a CAPES (Coordenação para Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho analisamos a formação de imagens por elementos difrativos com luz branca fazendo o traçado de raios pelas direções principais e explorando as possibilidades que a simetria de um conjunto de dois elementos definidos bidimensionalmente e intermediados por um pequeno orifício oferece. A mais interessante delas é a de termos uma imagem convergente, que pode ser vista projetando sobre uma tela, por exemplo.

Abstract

We perform ray tracing analysis on the imaging of white light objects by diffractive elements by means of the main direction of the rays. We explore the possibilities that the symmetry of a set of two bidimensionally acting diffracting elements intermediated for a pinhole offers. The most interesting of them is that we have a convergent image, that can be seen projecting on a screen, for example.

Resumo

Ni analizas la bildojn far de difraktaj elementoj per blanka lumo pere de la cxefaj direktoj de radioj, kaj esploras la eblecojn de la simetrio de unu ensemblo de du elementoj dudimensie difinitaj kun eta truo selektante la lumon inter ili. La plej interesa ebleco trovita de ni estas havi konvergcan bildon, videbla, ekzemple, per projekcio sur ekrano.

Resumen

Analizamos las imágenes hechas por elementos difractivos con luz blanca por medio de la dirección principal de los rayos difractados. Exploramos las posibilidades de la simetría de un conjunto de dos elementos definidos bidimensionalmente con un pequeño agujero seleccionando la luz entre ellos. La posibilidad más interesante que encontramos es la de tener una imagen convergente, que puede ser observada, por ejemplo, proyectando sobre una pantalla.

Apresentação

A estrutura desta dissertação está apresentada da seguinte forma:

No início de cada capítulo fazemos uma introdução (com exceção do primeiro que é uma introdução a dissertação), colocando o assunto que será apresentado. Nas seções seguintes os assuntos são abordados e estudados em detalhes.

No texto estão inseridas *notas de rodapés*, indicadas por números sobreescritos (exemplo: ¹²), que tem a função de detalhar ou dar alguma informação adicional ao leitor. Esta informação é colocada no rodapé da página em que está sua respectiva numeração. Os números são crescentes, não tendo novo início a cada capítulo.

As referências são feitas por números entre colchetes (exemplo: ^[3] ou [3]), situadas no final de cada capítulo. As referências tem novo início a cada capítulo.

As figuras e tabelas são numeradas de forma a revelar no primeiro algarismo o número do capítulo ou letra do apêndice, seguido por um ponto e a sequência dela no capítulo. O mesmo para as equações, com a diferença que o número do capítulo e a ordem da equação é separada por um hífen.

No primeiro capítulo fazemos uma introdução ao tema *dupla difração*, um histórico da difração e uma breve amostragem das ferramentas teóricas usadas nos capítulos seguintes. Desta forma, o capítulo 1 não é dedicado aos resultados originais da tese, servindo mais como uma preparação para os capítulos posteriores.

No segundo capítulo estudamos a dupla difração com elementos bidimensionais e elemento intermediário como um sistema formador de imagem.

No terceiro capítulo resolvemos a difração por um elemento bidimensional usando duas diferentes descrições para seu perfil. Também esquematizamos a dupla difração por teoria escalar de difração.

No quarto capítulo falamos de possíveis aplicações, fazendo uma breve comparação de uma imagem obtida com o sistema de dupla difração com elemento bidimensional e uma câmera fotográfica refrativa convencional, citando as vantagens e desvantagens de ambos. Estudamos a possibilidade de um sistema de dupla difração com elementos bidimensionais como holo-televisão.

No capítulo 5 estão as conclusões sobre o trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

No apêndice A colocamos alguns exemplos de espectros de difração importantes que servem de introdução ao capítulo 3.

Nos apêndices B e C, fazemos definições de algumas funções elementares que são usadas no texto com bastante frequência no capítulo 3 além de algumas relações importantes citadas amplamente.

No apêndice D, falamos resumidamente sobre a Holo-televisão, assunto bastante presente no período de mestrado, que é também um sistema de dupla difração.

Finalmente, no apêndice E expomos os trabalhos publicados e em submissão que estão diretamente relacionados com o tema da tese.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico da difração: da primeira publicação a aplicações em imagens

Um corpo opaco intermediando uma tela e uma fonte pontual produz uma sombra confusa formada por regiões claras e escuras, completamente diferente de qualquer coisa que poderia ser predita pela óptica geométrica. O trabalho de Francesco Grimaldi (1618-1663) no século XVII foi a primeira publicação (1665) do estudo detalhado desse *desvio da luz a partir de uma propagação linear*, algo que ele chamou de “*diffractio*”. O termo *difração* foi definido por Sommerfeld como *qualquer desvio dos raios de luz a partir de caminhos retilíneos que não são interpretados como reflexão ou refração*. O efeito é uma característica geral de um fenômeno ondulatório ocorrendo sempre que uma parte da frente de onda, seja sonora, de algum material, ou luz, é obstruída de alguma forma. Se no curso do encontro de um obstáculo, transparente ou opaco, uma região da frente de onda é alterada em amplitude ou fase, ocorrerá difração.

A difração não deve ser confundida com o *efeito penumbra*, para o qual a extensão finita de uma fonte causa a luz transmitida por uma pequena abertura, um espalhamento quando ela se propaga através dela.



Fig.1.1: Sombra de uma mão segurando uma moeda, tirada diretamente com uma Polaroid usando um feixe He-Ne sem lentes. Como a fonte é pontual e monocromática, surgem franjas de difração contornando a região de sombra.

O passo inicial na evolução de uma teoria que explicasse esses efeitos foi feita pelo primeiro a propor a teoria ondulatória para a luz, Christian Huygens, no ano de

1678.



Fig.1.2: Christian Huygens

Huygens expressou a convicção intuitiva que cada ponto da frente de onda de uma perturbação é considerado como uma nova fonte de uma perturbação esférica “secundária”, então a frente de onda em um instante posterior poderia ser encontrada construindo o “envoltório” das ondículas secundárias.

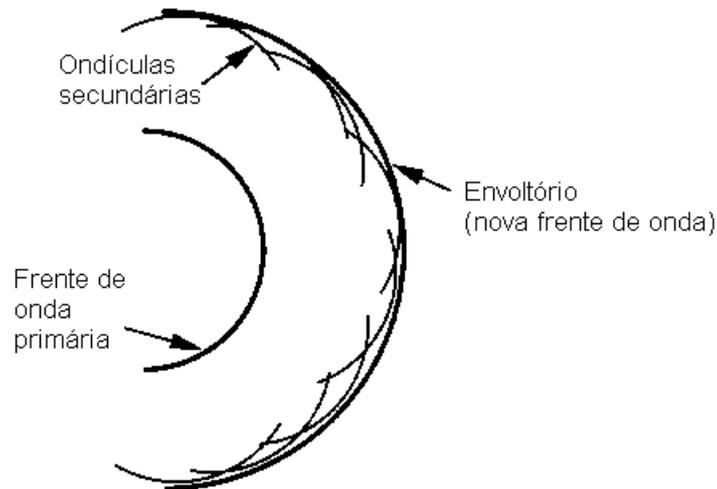


Fig.1.3: Construção do envoltório de Huygens

O progresso no entendimento da difração foi impedido durante todo o século XVIII pelo fato de Isaac Newton, um cientista com uma enorme reputação por suas diversas contribuições para física em geral e a óptica em particular, favorecer a teoria corpuscular da luz desde 1704. Seus seguidores aceitaram essa visão inflexivelmente. Até que no ano de 1804, Thomas Young, um físico inglês, introduziu o conceito de *interferência*. A idéia foi chocante, pois na soma de luz com luz, poderia-se criar escuridão.

As idéias de Huygens e Young foram trazidas juntas em 1818 por Augustin Jean Fresnel. Fresnel foi capaz de calcular a distribuição de luz em espectros de difração com excelente precisão.

Na apresentação de Fresnel de seu artigo para um comitê premiado da Academia Francesa de Ciências, sua teoria foi fortemente criticada pelo grande matemático francês S. Poisson, um membro do comitê. Poisson mostrou o absurdo da teoria mostrando que ela previa uma mancha clara no centro da sombra de um disco opaco. F. Arago executou um experimento e encontrou essa mancha. Fresnel ganhou o prêmio, e desde então o efeito tem sido conhecido como a *Mancha de Poisson*.



Fig.1.4: Augustin Jean Fresnel

Em 1860 Maxwell identificou luz como sendo onda eletromagnética, esse foi um passo de enorme importância. Em 1882 Gustav Kirchhoff colocou as idéias de Huygens e Fresnel em um fundamento matemático mais firme. Em seu tratamento, Kirchhoff baseou sua formulação em cima de duas considerações que Poincaré (em 1892) e Sommerfeld (em 1894) mostraram ser inconsistente uma com a outra. Com isso o tratamento de Kirchhoff passou a ser tratado como uma aproximação, mas que concorda perfeitamente bem com os resultados experimentais. Kottler reinterpretou o problema como um problema de descontinuidade. Sommerfeld modificou a teoria desconsiderando uma das considerações no tratamento.

A primeira solução rigorosa do problema de difração foi obtida por Sommerfeld em 1896, que tratou o problema bidimensional de uma onda plana incidente em um semi-plano. Mas o problema resolvido era fisicamente irreal, por se tratar de uma tela perfeitamente condutora, plana, opaca e infinitamente fina. Soluções rigorosas deste tipo não existem mesmo hoje para muitas configurações de interesse prático. Kottler, mais tarde, comparou a solução de Sommerfeld com os resultados correspondentes no tratamento de Kirchhoff.

Em 1948, o húngaro Dennis Gabor propôs uma nova técnica de que ele chamou de *reconstrução da frente de onda*, que hoje conhecemos como *holografia* ^[1]. Gabor percebeu que quando luz de uma coerência apropriada está presente simultaneamente com luz difratada ou espalhada de um objeto, então a informação tanto da amplitude quanto da fase da onda difratada ou espalhada podem ser gravadas, independente do fato de o material de gravação responder apenas à intensidade da luz. Ele demonstrou que a partir de um padrão de interferência gravado (que ele chamou de holograma) era possível obter a imagem de um objeto. Em 1971 Gabor foi agraciado com o prêmio Nobel, e seu trabalho foi citado pela revista Nature ^[2] como um dos mais marcantes do século XX.



Fig.1.5: Dennis Gabor

Em 1958, sem saber da invenção de Gabor, o físico Yuri N. Denisyuk lê um livro de ficção científica e, inspirado por ele desenvolve a holografia desconhecendo as

idéias de Gabor. Assim, a holografia resulta ter sido inventada de outra maneira. A principal diferença do holograma de reflexão (ou holograma Denisyuk) é que ele reconstrói o objeto com luz branca, e não com luz monocromática como seu antecessor.

Sempre pensando no desenvolvimento de imagens tridimensionais com o uso de luz branca, nas décadas de 80 e 90, José J. Lunazzi dedicou-se a criação e ao aperfeiçoamento de técnicas de holoprojeção sobre um tipo de tela difrativa¹ chamada *tela holográfica*. Esse tipo de tela é o único que permite projetar com luz branca.

Com a tela holográfica foi possível realizar a projeção de objetos, a ampliação de hologramas (etapa fundamental para o cinema holográfico), de imagens vetoriais geradas por computador, imagens eletrônicas geradas por varredura e da holo-televisão².

O estudo dos fenômenos da difração e da dupla difração são essenciais para a criação de novas técnicas de geração de imagens assim como para o desenvolvimento das já existentes.

Em 1999, um sistema composto por elementos difrativos levantou interesse pelo seu potencial de aplicação na realização de telescópios espaciais^[3,4]. O sistema era semelhante a um trabalho^[5] apresentado por professor Lunazzi em 1991 sobre um novo tipo de imagem na qual o sistema formador era composto por duas redes de difração intermediadas por uma lente³. A formação dessa imagem dava-se com luz branca.

Com interesse na retomada do trabalho de dupla difração devido a viabilidade de uma grande aplicação, professor Lunazzi recrutou uma aluna de mestrado, Noemí I. R. Rivera, que caracterizou, em sua dissertação de mestrado^[6], a dupla difração com duas redes de difração planas intermediada por uma fenda, ao invés de uma lente. Esse novo sistema, mais simples que seu predecessor, resultou em imagens que parecem ser holográficas, mas que são geradas de maneira não convencional. Em seu trabalho, Rivera explicou a formação das imagens pseudoscópica⁴ e ortoscópica⁵ obtidas via teoria de traçado de raios.

No primeiro semestre de 2002, orientado pelos professores J. J. Lunazzi e H. Figueroa, apresentei o trabalho intitulado “*Difração por CDs e ondas X*”^[7] como projeto de instrumentação para o ensino; tendo sido o trabalho premiado naquele ano.

Foi proposto então reunir a difração por um *compact disc* (CD), que é um elemento difrativo de baixo custo, com a idéia do sistema de dupla difração. Obtemos assim um sistema formado por dois CDs intermediado por um pequeno orifício circular (pinhole).

1.2 Difração

A difração ocorre sempre que uma parte de uma frente de onda fica limitada por um obstáculo ou por uma abertura de qualquer tipo. A intensidade da luz em qualquer ponto do espaço pode ser calculada tomando-se cada ponto da frente de onda como uma fonte puntiforme e calculando-se a configuração de interferência que daí resulta (Princípio de Huygens).

A referência [9] explica, detalhadamente, os trabalhos de Fresnel-Kirchhoff e Rayleigh-Sommerfeld na dedução das equações regentes do fenômeno de difração, seus resultados e uma interessante comparação, donde observa-se que a equação encontrada por Kirchhoff é uma média das soluções possíveis encontradas por Sommerfeld.

1 É um elemento difrativo sobre o qual se faz uma projeção. Devido a difração, oferece características direcionais diferentes da quase isotropia angular de uma tela difusora comum.

2 Apêndice D

3 Mais informações também na referência [6].

4 Imagem com relevo invertido, assim como seria o molde de um objeto.

5 Imagem normal, onde o relevo é natural.

Usando o Teorema de Green, com escolhas adequadas de uma função de Green e da superfície fechada que circunda um volume ^[9], e sabendo que a função de Green escolhida e U satisfazem a equação de Helmholtz; chega-se a (1-1), que está de acordo com o princípio de Huygens-Fresnel:

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta \, ds \quad (1-1)$$

onde,

P_0 é o ponto de observação,

P_1 é um ponto do plano onde se encontra a obstrução interior a superfície Σ .

j é o negativo da raiz quadrada de -1 , ou seja, $j = -i$. ⁶

θ é o ângulo entre a normal da superfície onde se encontra a abertura Σ e a reta que liga o ponto de observação com o ponto de onde provém a normal daquela superfície.

λ é o comprimento da luz

k é o módulo do vetor de onda, igual a $2\pi/\lambda$

ds é o elemento de área da superfície Σ .

r_{01} é a distância entre P_0 e P_1 .

A figura 1.6 ilustra essas dimensões.

A equação 1-1 expressa o campo de observação $U(P_0)$ como uma superposição de ondas esféricas divergentes $\exp[jk\mathbf{r}_{01}]/r_{01}$ originando de fontes secundárias localizadas em cada e todo ponto $U(P_1)$ dentro da abertura. Cada fonte secundária tem um cosseno diretor $\cos \theta$. $U(P)$ pode ser considerado como qualquer componente do campo elétrico ou magnético desde que o dielétrico onde ocorre a propagação seja linear, isotrópico (propriedades independentes da direção de polarização da luz), homogêneo (permissividade constante no meio de propagação), não dispersivo (permissividade independente do comprimento de onda na propagação) e não magnético (permeabilidade magnética constante e igual a μ_0). Neste caso a teoria da difração escalar pode descrever completamente o fenômeno.

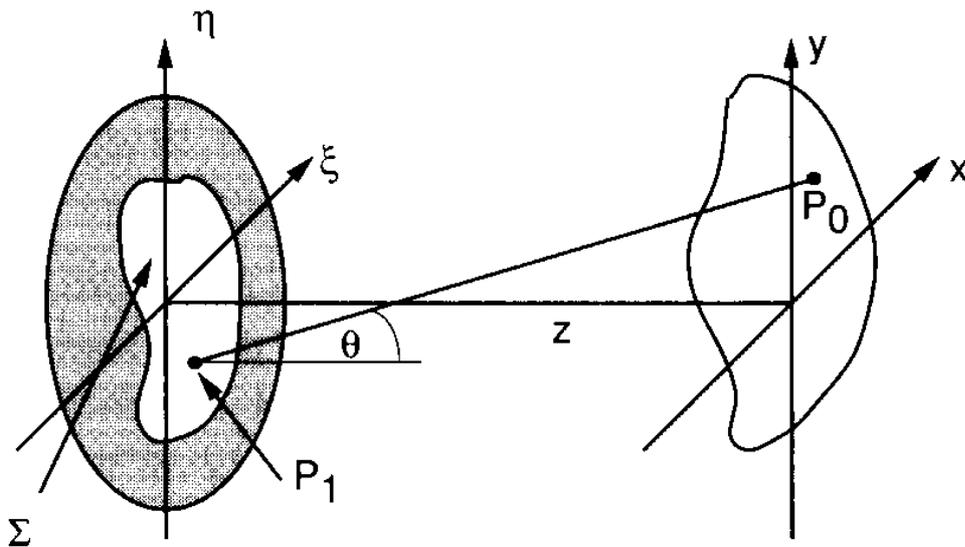


Fig. 1.6: Ilustração das dimensões envolvidas na relação de Rayleigh-Sommerfeld.

⁶ Nessa dissertação, usaremos j como sendo o negativo da unidade imaginária i .

1.2.1 Traçado de Raios: Difração por uma estrutura periódica

A direção dos raios⁷ difratados de uma onda qualquer, incidente em uma estrutura periódica, pode ser calculada utilizando a equação das redes de difração:

$$\sin \theta_i - \sin \theta_d = m \cdot \lambda \cdot v \quad (1-2)$$

onde,

θ_i e θ_d são os ângulos de incidência e difração respectivamente,
 m é um número inteiro e é chamado de ordem de difração e
 v é a frequência espacial da estrutura periódica

A chamada *rede de difração* nada mais é que uma estrutura periódica capaz de difratar uma certa onda incidente para direções indicadas pela equação 1-2. Vale ressaltar que para que ocorra difração por uma estrutura periódica, as dimensões envolvidas da estrutura devem ser da ordem de grandeza do comprimento de onda da onda envolvida.

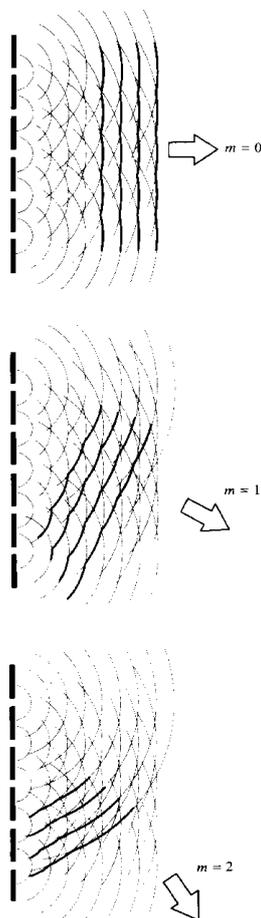


Fig.1.7: A formação das frentes de onda difratadas usando o princípio de Huygens-Fresnel na qual cada ponto da frente de onda, que passa pelo buraco, serve como origem de uma nova frente de onda esférica. A onda resultante difratada é a soma dessas ondas secundárias. Vemos a formação das diferentes ordens de difração.

Para trabalhar com a equação 1-2, é necessário definir uma 'regra de sinais' para os ângulos e para a ordem de difração. A convenção usada nessa tese segue a definida pela referência [11]. Esta convenção é explicitada abaixo.

∞ O ponto onde o raio toca o plano da estrutura periódica é a origem do plano coordenado.

⁷ Direção indicada pela normal da superfície de uma frente de onda.

- ∞ Os ângulos de incidência e difração são tomados a partir da normal, como de costume.
- ∞ Os ângulos que encontram-se em quadrantes pares são negativos, enquanto que os encontrados em quadrantes ímpares são positivos.
- ∞ A ordem de difração é considerada positiva quando o raio é desviado para cima em relação a ordem zero (raio que não é desviado), e negativa em caso contrário.

Vale lembrar que o seno de um ângulo negativo é o negativo do seno do módulo do ângulo, pois o seno é uma função ímpar.

A figura 1.8 mostra um exemplo da convenção. Nesse caso os ângulos de incidência e difração são negativos e a ordem de difração é positiva.

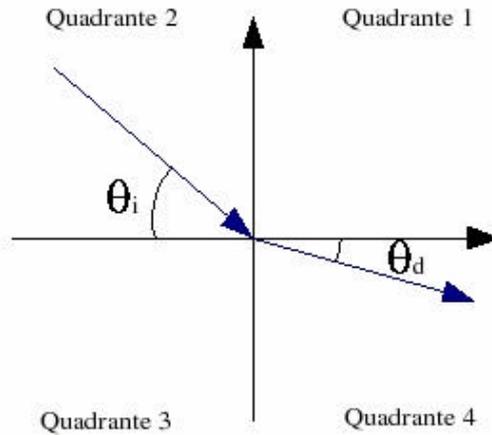


Fig. 1.8: Exemplo da convenção adotada para análise da difração de uma estrutura periódica.

A equação resultante para esse caso seria:

$$- \sin |\theta_i| + \sin |\theta_d| = + |m| \lambda v \quad (1-3)$$

1.2.2 Difração de Fresnel e Fraunhofer

Na seção 1.2, encontramos a equação 1-1, que é a forma geral da difração escalar. Nossa atenção agora será voltada para certas aproximações que facilitarão o cálculo dos espectros de difração.

Escrevendo a equação 1-1 em coordenadas cartesianas, e fazendo a expansão

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

binomial encontramos a integral de difração de Fresnel:

(1-4)

Uma aproximação mais forte é chamada de *aproximação de Fraunhofer* ou de *campo distante*, quando z é muito grande em relação as distâncias ξ e η . Obtemos como campo resultante a equação 1-5.

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

(1-5)

Como descrito na seção 1.2, estas equações (e a teoria de difração escalar) são válidas desde que o dielétrico onde ocorre a propagação seja linear, isotrópico, homogêneo, não dispersivo e não magnético; além disso 1-4 é válido para ângulos pequenos ^[15] e 1-5 para grandes distâncias relativas ao tamanho da abertura ^[16].

Utilizaremos ele mais adiante com o intuito de se chegar a uma solução analítica mais completa, porém a explicação básica do sistema de imagens por nós desenvolvido será dada pela análise mais simples onde consideraremos que há sempre um raio se difratando na direção que nos interessa e que este raio representa proporcionalmente a intensidade do ponto objeto de onde surgiu.

1.3 Dupla difração com redes de difração planas intermediadas por uma fenda

Como dito na seção 1.1, J. J. Lunazzi e N. I. R. Rivera trabalharam num sistema de dupla difração com redes de difração planas intermediadas por uma fenda vertical. O maior problema desse sistema, além da baixa luminosidade, era o forte astigmatismo horizontal, que era atenuado devido a abertura da pupila do olho do observador ou de uma câmera de captação ser muito pequena. No capítulo 2 veremos como é possível reduzir esse astigmatismo horizontal substituindo as redes de difração por elementos bidimensionais e seu respectivo elemento intermediário.

O sistema de dupla difração com redes planas e uma fenda intermediária, fonte por onde baseamos a explicação e o trabalho com elementos difrativos descritos bidimensionalmente, será descrito abaixo.

Um processo de formação de imagem por dupla difração pode ser esquematizado como mostra a figura 1.9.

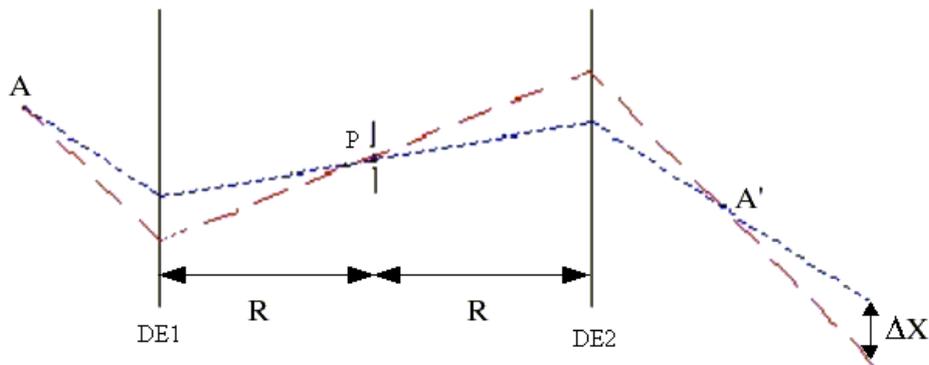


Fig.1.9: Visão aérea da formação de imagem em um processo de dupla difração com redes de difração.

Um ponto objeto de luz branca **A** ilumina uma rede de difração plana de fase **DE1**. A luz difratada (primeira ordem, a menos que seja dito o contrário) alcança um elemento de absorção intermediário **P**, que faz uma seleção espacial da luz difratada por **DE1** que irá alcançar a segunda rede **DE2**. A luz previamente difratada por **DE1** e selecionada por **P** difratará novamente em **DE2**. Formando imagem em **A'**.

Na figura estão mostradas apenas dois comprimentos de onda pertencentes a extremidade do espectro visível. Todos os comprimentos de onda intermediários saindo de **A** encontrarão **A'** se, e apenas se, estiverem na região compreendida entre o feixe azul e o feixe vermelho em **DE1**. Essa convergência acontece apenas na horizontal.

O elemento **P** é colocado na meia distância entre **DE1** e **DE2**, ou seja, **R**.

ΔX é o campo imagem do objeto **A**.

Quando um observador se colocar na região do campo imagem poderá ver a imagem com paralaxe contínua, sendo que em cada posição dentro de $\Delta\mathbf{X}$ que ele vê \mathbf{A}' será interceptada por uma faixa de comprimentos de onda. Como efeito resultante temos que com a variação horizontal da posição x do observador, ele verá a imagem do objeto com uma cor diferente.

Utilizou-se em [3] uma lente no centro de simetria \mathbf{P} com o intuito de adquirir mais luminosidade e brilho, o que gera um problema mais complicado de traçado de raios.

A imagem pseudoscópica gerada por duas redes de difração simples⁸ intermediada por uma fenda foi estudada através da caracterização do campo para visão do objeto, presença de astigmatismo e aberrações, magnificação e relevo da imagem.

A imagem pseudoscópica foi também capa da revista Opt. Express no ano de 2002^[6].

⁸ Redes de difração de fase, unidimensionais de frequência constante.

1.4 Referências:

- [1] Gabor, D. "A New Microscopic Principle", **Nature**, v. 161, p.777-778, 1948
- [2] Gabor, D. "A New Microscopic Principle", **Nature**, A celebration of Physics, p.24-25, 1998
- [3] Hyde, R. A. "Very large aperture diffractive telescopes", **Applied Optics**, v.38, n.19, jul. 1999
- [4] Early, J.; Hyde, R.; Baron, R. "Twenty meter space telescope based on diffractive fresnel lens", **SPIE**, v.5166, p.148-156, fev. 2004
- [5] Lunazzi, J. J. "Holoprojection of images by a double diffraction process", in: "Opt. e Fis. Atômica", Proc. of the **XIV Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada**, SBF eds., Caxambu-MG-BR, V.S. Bagnto, C. H. de Brito Cruz eds., 7-11.5.91, p.OTI 5a. 12:00.
- [6] Rivera, N. I. R. "**Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, 2003
- [7] Magalhães, D. S. F. "**Difração por CDs e ondas X**", Dissertação, in: "Relatórios Finais 1 semestre 2002 – Volume 2: F530-F590-F809", Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, Campinas, 2002. Disponível em: <<http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F809/arquivos/DIFRA%C7%C3O%20POR%20CDs%20E%20ONDAS%20X.pdf>> . Acesso em: 16 dez. 2004 13:58:00
- [8] Hecht, E. "**Optics**" 3rd. ed. New York, Addison Wesley Longman, Inc., 1998. 694p. Hecht, E. "**Óptica**" ed. Fund. Calouste Gulbenkian (1991), Tradução: J. M. Rebordão.
- [9] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, **Chap.3: Foundations of Scalar Diffraction Theory**, Boston: Mc. Graw Hill, 1996
- [10] Tipler, P. A. "**Física**" v. 2b, 2a. ed., Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S. A., 1982. p.820-1044
- [11] Hutley, M. C. "**Diffraction Gratings**" 1a. ed., London, Academic Press, 1982. p.23-26
- [12] Lunazzi, J. J. "**Difração**" apostila digital 1982-2002. Disponível em: <http://geocities.com/prof_lunazzi/f641/f641.htm>
- [13] Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J. "**Fundamentos de física : Ótica e física moderna**" Rio de Janeiro, LTC, 1995
- [14] Marciante, J. R. et al. "**Polarization-insensitive, high-dispersion TIR diffraction gratings**" Proceedings of the **Frontriers of Optics 2004**, Rochester, EUA, 11-10-2004.
- [15] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.69
- [16] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.74

Capítulo 2

Imagem em um processo de dupla difração com elementos definidos bidimensionalmente

Neste capítulo estudaremos a imagem pseudoscópica produzida com dois elementos difrativos bidimensionais, intermediados por um orifício. Esse elemento poderia ser qualquer estrutura difrativa de difração direcionada, com par idêntico, colocado em posição simétrica. Em nosso tratamento usaremos uma estrutura formada por anéis concêntricos ou por espirais por serem mais compreensíveis do ponto de vista do traçado de raios e experimentalmente verificáveis por meio de *discos compactos* ou *CDs*.

Com esse novo sistema obtemos como nova propriedade a projeção, em relação ao sistema de formação de imagens por dupla difração com redes de difração intermediadas por uma fenda. Estudaremos a formação da imagem pseudoscópica, o campo imagem de um objeto visto pelo observador, o ponto crítico⁹ e o aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo.

2.1 Imagem pseudoscópica em um processo de dupla difração com elementos definidos bidimensionalmente

Imagens pseudoscópicas (relevo invertido) eram conhecidas apenas da estéreo fotografia ou de processos holográficos^[7], só recentemente vieram a ser conhecidas em sistemas difrativos formadores de imagem^{[5] [6]}. A imagem era pseudoscópica mas não podia ser projetada sobre uma tela devido a diferença entre os processos de formação na horizontal e na vertical, apresentando astigmatismo horizontal^[8]. Extendemos a idéia para um novo sistema cujos elementos difrativos são bidimensionais, analisando-o com o mesmo tratamento teórico, que explica a imagem pelas direções principais dos raios. A nova imagem também pode ter ampliação infinita, e pode ser projetada com igual magnificação (unitária) lateral e longitudinal.

Este novo tipo de imagem é interessante pois poderia render uma grande paralaxe para a imagem, maiores que as obtidas com a óptica refrativa e reflexiva. Além de constituírem uma nova possibilidade a ser estudada na comparação de graus de aberração com os sistemas convencionais de formação de imagem.

2.1.1 Descrição do sistema

O sistema é composto por dois elementos difrativos simetricamente localizados

⁹ Ponto singular onde acontece um aumento infinito aos olhos de um observador, ou a imagem perfeita em uma projeção

a um pequeno orifício circular¹⁰. Esses elementos são duas redes circulares¹¹, de frequência espacial constante, da qual metade ou menos é empregado no processo de imagem. A reta normal que passa pelo centro do orifício também passa pelo centro de curvatura dos dois elementos. Um objeto de luz branca é colocado de um lado, de forma a iluminar um elemento. Parte da luz difratada pelo primeiro elemento (ordem um) atravessa o orifício, chegando ao segundo elemento difrativo. A primeira ordem negativa da luz difratada pelo segundo elemento formará imagem em uma posição simétrica ao orifício. A figura 2.1 ilustra esse processo de formação de imagem.

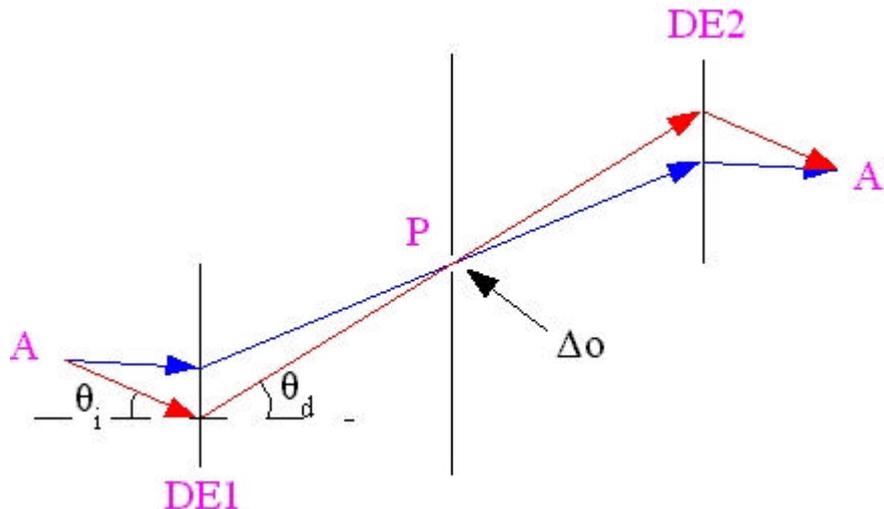


Fig.2.1: Traçado de raios da situação de formação de imagem para um ponto objeto A.

DE1 e DE2 são os elementos difrativos e o ponto P corresponde a posição do orifício. De um ponto objeto A, dois raios de diferentes comprimentos de onda difratam em DE1. Desprezando os efeitos de difração do orifício, uma situação de simetria total pode ser atribuída a distribuição de luz saindo do orifício devido ao posicionamento simétrico do segundo elemento difrativo. Podemos considerar que o orifício determina o caminho de cada raio e é evidente que só existe um único comprimento de onda que, de acordo com a equação de difração 2-2, corresponde a direção de cada raio.

2.1.2 Formação da imagem pseudoscópica

O tratamento teórico usado para a descrição da formação da imagem pseudoscópica com os CDs nessa seção será o mesmo usado no tratamento com redes de difração simples. Isso é justificado pela alta simetria do sistema em torno de uma reta (Fig.2.2). Assim, para qualquer ponto objeto, existe um plano definido pela reta que passa pelo centro de curvatura dos CDs e o próprio ponto objeto na qual o problema pode ser tratado como uma difração por redes de difração simples¹².

Sejam dois pontos A e B colocados em frente a uma metade do primeiro elemento difrativo como mostra a figura 2.2.

¹⁰ Faremos referência a esse orifício circular também como *pinhole*

¹¹ Na verdade em espiral, mas consideradas circulares com grande precisão.

¹² Observe que as ranhuras (ou sulcos) do CD são sempre perpendiculares a esse plano.

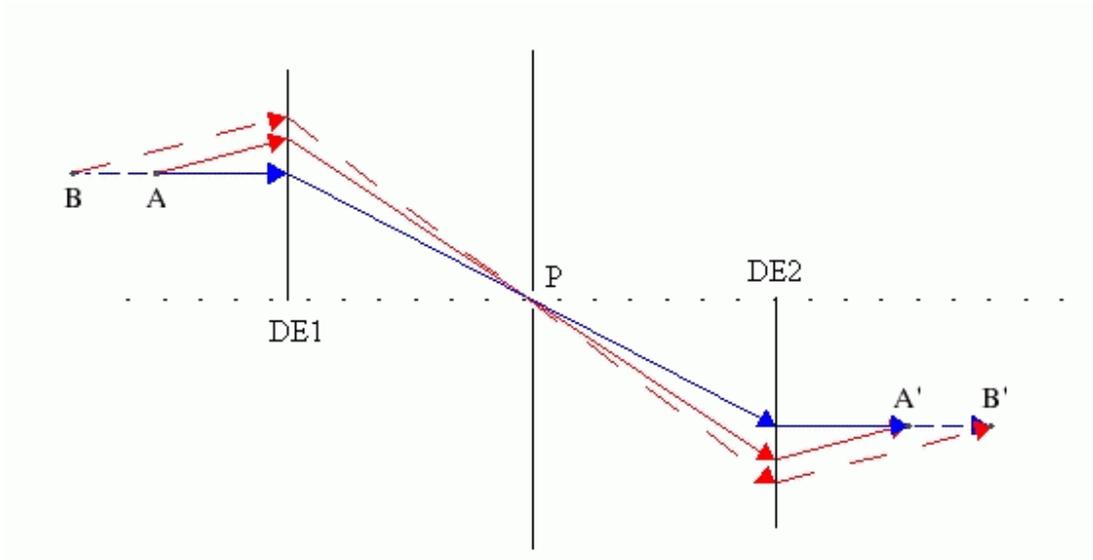


Fig.2.2: Formação da imagem de dois pontos objetos A e B.

A linha pontilhada indica o centro de simetria do sistema. Mostraremos a seguir que os pontos A' e B' são as imagens dos pontos A e B localizados simetricamente em relação ao orifício. Para isso, primeiro vamos observar a o caminho de um raio saindo de A, como mostra a figura 2.3.

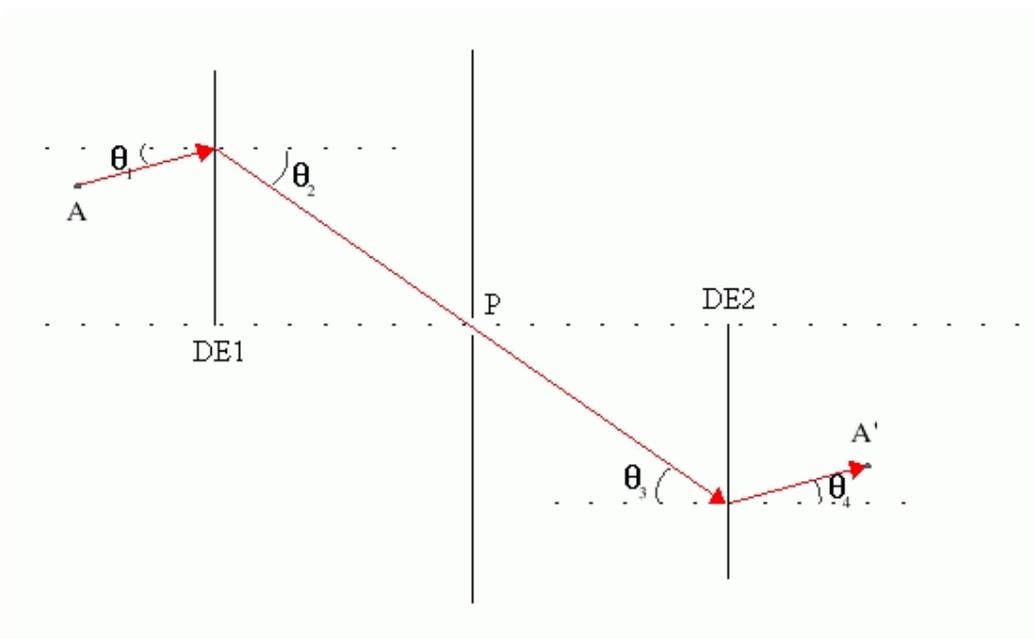


Fig.2.3: Trajetória de um raio saindo do ponto A.

Da primeira difração (ordem 1) sofrida pelo raio temos:

$$\mathbf{\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 = \lambda \nu} \quad (2-1)$$

onde θ_1 e θ_2 são ângulos positivos.

Da segunda difração (ordem -1):

$$\mathbf{-\text{sen } \theta_3 - \text{sen } \theta_4 = -\lambda \nu} \quad (2-2)$$

onde θ_3 e θ_4 são ângulos positivos.

Dos teoremas da geometria sabemos que ângulos alternos internos de retas paralelas são congruentes. Logo $\theta_2 = \theta_3$.

De 2-2 tiramos que:

$$\sin \theta_4 = \lambda \nu - \sin \theta_2 \quad (2-3)$$

Comparando as equações (2-1) e (2-3) tiramos que $\theta_1 = \theta_4$.

Sabendo o ângulo e a origem do feixe (ordem -1) que parte do segundo elemento conhecemos perfeitamente sua trajetória. Como os ângulos θ_1 e θ_4 são idênticos, a distância entre o centro de curvatura do elemento e o ponto onde o raio é difratado são iguais na primeira e na segunda difração, como mostra a figura 2.4. Obviamente essa distância é diferente para cada comprimento de onda partindo de A devido a equação (2-1).

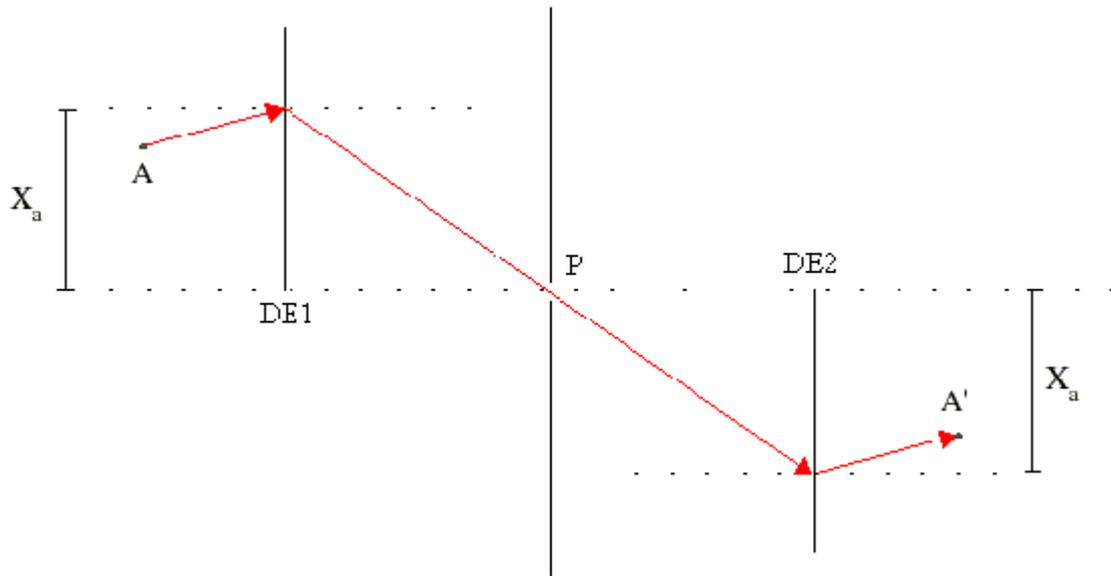


Fig.2.4: Definição da distância X_a , distância entre o centro de curvatura do elemento e o ponto onde o raio é difratado

A origem desse feixe, ou seja, o ponto no primeiro elemento difrativo (pela simetria da situação, idêntica ao segundo) por onde um raio de comprimento de onda λ é difratado até encontrar a posição exata do orifício, pode ser calculado usando a equação (2-1) conhecendo exatamente a posição de A.

$$\frac{X_a - X_1}{\sqrt{Z_1^2 + (X_a - X_1)^2}} + \frac{X_a}{\sqrt{X_a^2 + R^2}} = \lambda \nu \quad (2-4)$$

onde as distâncias são mostradas na figura 2.5:

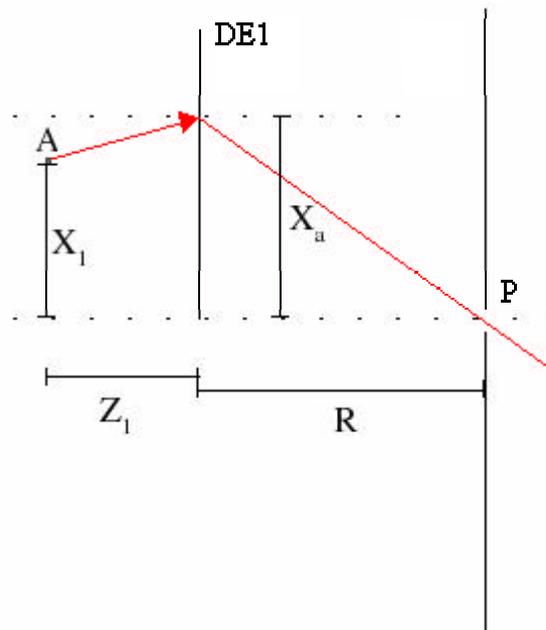


Fig.2.5: Identificação das distâncias para o traçado de raios.

Tendo então, perfeitamente definida a posição do segundo feixe difratado, podemos repetir o processo para outro comprimento de onda saindo do mesmo ponto A. Da intersecção dos dois raios de comprimentos de onda diferentes obtemos a imagem. É evidente que não apenas esses dois raios chegarão a se encontrar no ponto da imagem, mas todos os do espectro visível.

Usando os argumentos provados nessa seção, a imagem A' do ponto A acontece em uma posição totalmente simétrica ao orifício. Considerando que o orifício seja a origem de um sistema de coordenadas cartesianas, A estaria localizado em (Z_1+R, X_1) e A' em $(-Z_1-R, -X_1)$.

2.1.2.1 Comprovação experimental da posição da imagem pseudoscópica

Empregando dois meio-CDs transparentes¹³, parcialmente iluminados¹⁴ (ver figura 2.6), com frequência espacial constante, idêntica em cada metade, igual a 658 ± 5 linhas/mm, eficiência de difração de 10% obtemos a imagem de dois filamentos de tungstênio de uma lâmpada de 40 W (Fig. 2.8).

A distribuição da luz após passar pelo primeiro elemento difrativo, no plano onde encontra-se o orifício é mostrado na figura 2.7.

13 Esse tipo de CD pode ser obtido facilmente em caixas de CDs, ou a partir de CDs convencionais retirando-se a camada reflexiva como descrito na referência [9].

14 Essa limitação é usada apenas para facilitar a identificação da área iluminada nos cálculos teóricos e pela praticidade da montagem do suporte representado na figura 3.7. Não tendo nenhuma influência, na mudança de posição das imagens a serem estudadas. Existirá sim, uma pequena limitação do campo vertical e perda de luminosidade.

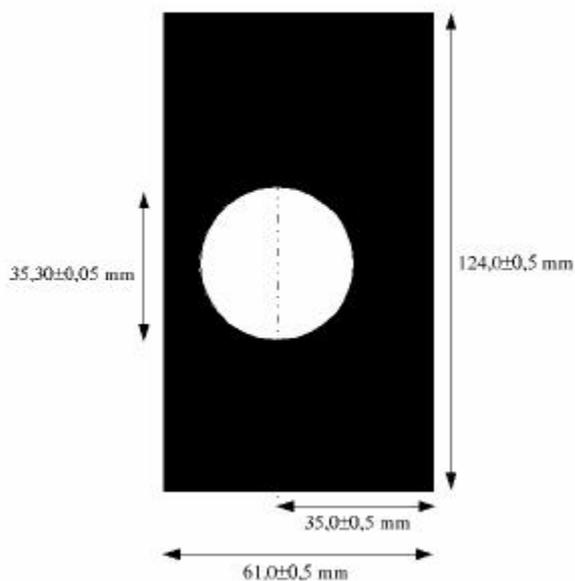


Fig.2.6: Suporte para o CD, empregado no experimento. Na região circular, onde se encontra o CD, ocorre a passagem de luz, a ser difratada.

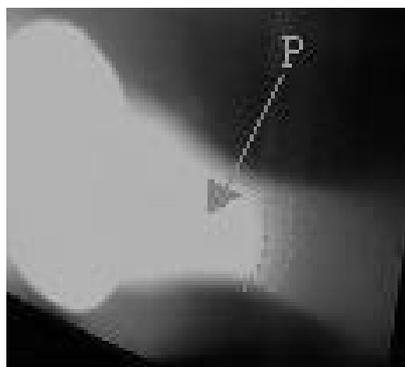


Fig.2.7: Distribuição de luz chegando ao orifício.

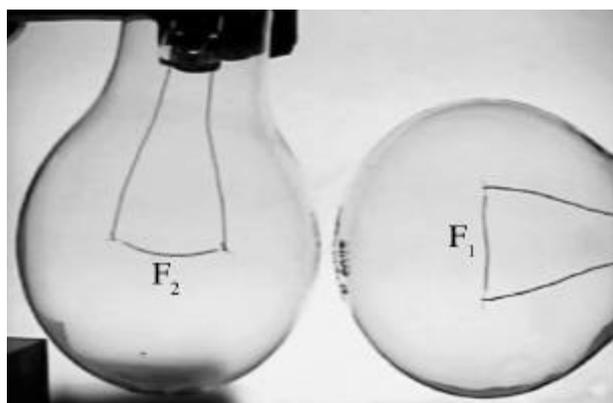


Fig.2.8: Foto dos objetos usados (filamento da lâmpada) para obter a imagem pseudoscópica com o sistema de dupla difração.

Observe que um filamento encontra-se na vertical (F_1) e o outro na horizontal (F_2). F_1 será colocado na frente de F_2 , para um observador (câmera) situado como mostrado na figura 2.9.

Uma visão aérea do aparato experimental é mostrado na figura 2.9. Uma câmera de mão Sony com foco regulável, ligada a uma câmera de rede Intel com entrada de vídeo, é usada na captação da imagem. A imagem é enviada a um microcomputador onde é feito o armazenamento da imagem pelo programa Intelsnapshot.

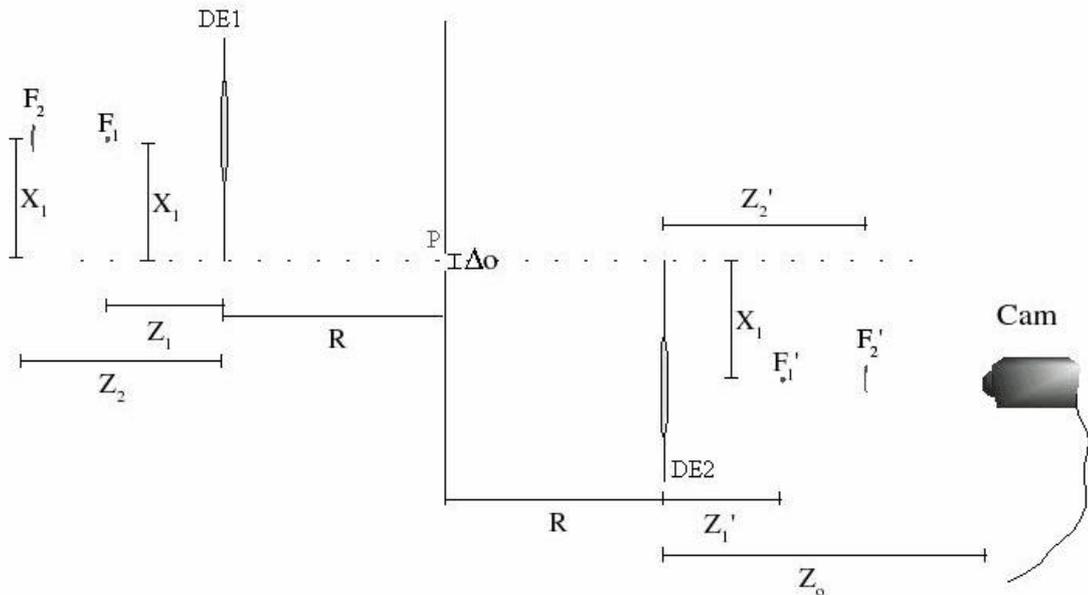


Fig.2.9: Visão aérea do sistema de dupla difração.

Um anteparo difusor é colocado na posição de focalização de cada uma das imagens F_1' e F_2' , isso não poderia ser feito, por exemplo, em um sistema de dupla difração com redes de difração unidimensionais. Através da focalização horizontal e vertical da imagem, que permite a projeção, uma câmera pode facilmente obter imagem de objetos nesse sistema.

Os valores das variáveis mostradas na figura 2.9 foram:

R [mm]	Z_o [mm]	Δo [mm]	X_1 [mm]	Z_1 [mm]	Z_2 [mm]	Z_1' [mm]	Z_2' [mm]
130 ± 1	477 ± 1	$0,5 \pm 0,1$	35 ± 1	73 ± 2	122 ± 2	67 ± 3	117 ± 3

Tabela 1: Valores obtidos na comprovação experimental da imagem pseudoscópica.

As imagens da focalização de cada filamento são mostradas nas figuras 2.10 e 2.11:

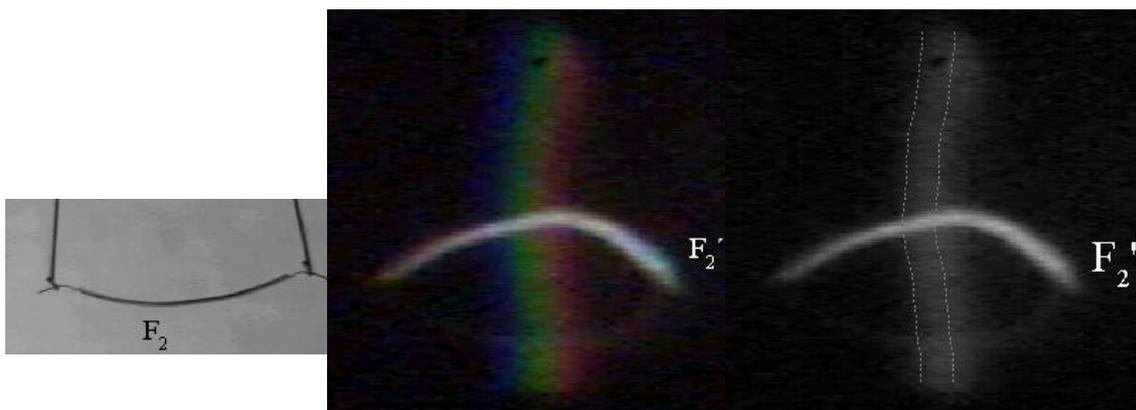


Fig.2.10: F_2 a esquerda e a imagem de F_2 (F_2') ao centro e a direita (em escala de cinza com uma linha tracejada indicando a separação entre azul verde e vermelho).

Podemos notar que a imagem é invertida direita-esquerda, cima-baixo, e como comprovado nessa seção, invertida em relevo (pseudoscópica); o aumento nessas três dimensões é proporcional. Podemos ver na figura 2.10 à esquerda um borrão espectral. Esse borrão é formado pelos raios que compuseram F_1' . A largura desse borrão “guarda” a informação de profundidade ^{[13][14]}.

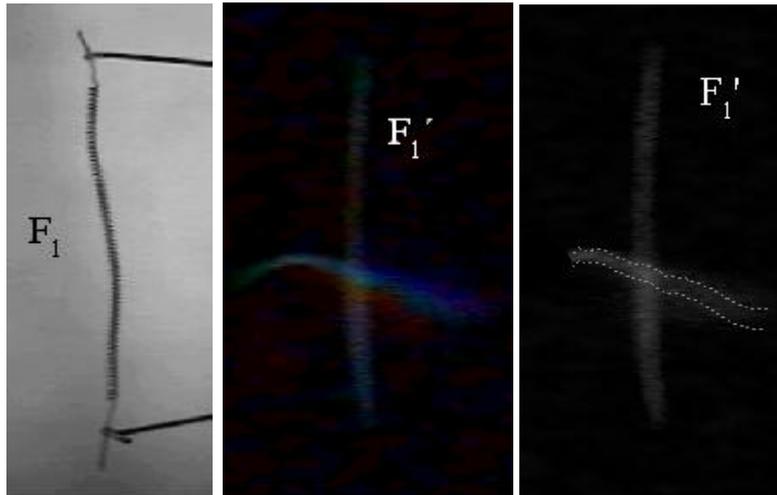


Fig.2.11: F_1 a esquerda e a imagem de F_1 (F_1') ao centro e a direita (em escala de cinza com uma linha tracejada indicando a separação entre azul verde e vermelho).

Torna-se evidente então, que um observador colocado na posição da câmera Z_0 verá F_2' na frente de F_1' . Sendo portanto, as imagens F_2' e F_1' pseudoscópicas.

Da tabela 1, temos que $Z_1 \cong Z_1'$ e $Z_2 \cong Z_2'$, o que indica que a simetria proposta pelo modelo é cumprida. Valores mais de acordo com o previsto teoricamente poderiam ter sido alcançados se pudéssemos localizar com mais precisão a posição de cada elemento do sistema de dupla difração.

2.1.3 Campo de vista do observador

É chamado campo objeto a região comum correspondente à superposição dos raios que são permitidos passar pelo pinhole, e após isso, difratar novamente no segundo elemento difrativo. Esse campo gera um campo simétrico que converge na imagem, e então diverge angularmente produzindo o campo de visão do observador. A paralaxe radial (a respeito da curvatura do elemento difrativo) pode ser calculada considerando dois pontos do objeto e o caminho que é permitido a luz de cujos comprimentos de onda estão nos extremos do espectro. A região limitada por esses raios é a região comum para observação simultânea dos dois pontos e todos os pontos intermediários a eles.

A figura 2.12 mostra dois pontos objetos A e B. De cada um desses pontos traçamos apenas os raios correspondentes ao extremo do espectro.

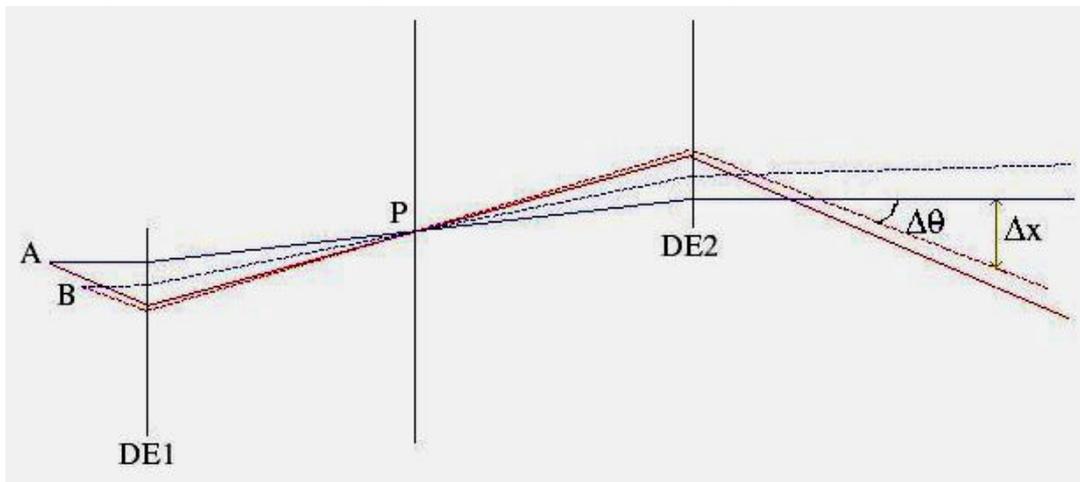


Fig.2.12: Cena do traçado de raios para o cálculo do campo de observação.

Embora não inclusos na figura, é facilmente demonstrado que ambos os pontos objeto tem sua imagem feita por todos os comprimentos de onda se traçarmos um raio com o menor comprimento de onda saindo do ponto objeto A, e outro raio de maior comprimento de onda saindo de B. Ambos podem passar pelo pinhole e encontrar seus correspondentes pontos imagem.

Podemos calcular o campo angular $\Delta\theta$ através do conhecimento do trajeto do raio de menor comprimento de onda que sai de B e do maior que sai da A. Mas, ao invés disso, vamos calcular o comprimento de paralaxe radial Δx como função da distância do observador.

As figura 2.13 e 2.14 mostram as distâncias relativas de cada elemento.

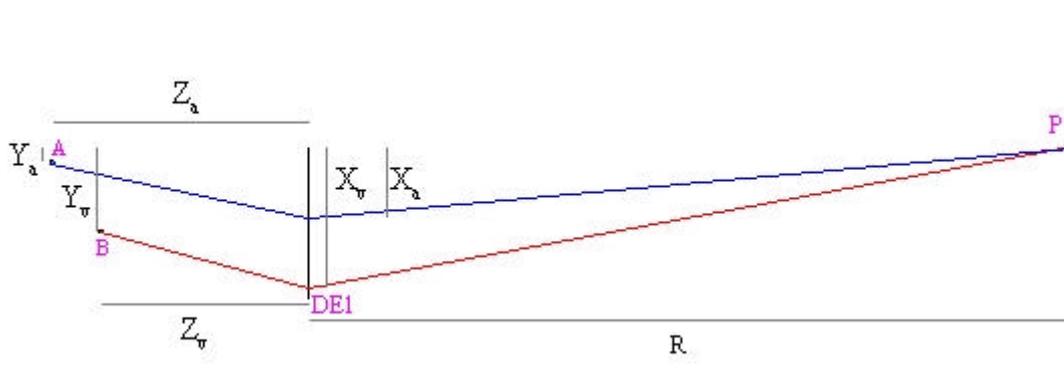


Fig.2.13: Dois pontos objetos e suas distâncias.



Fig.2.14: Campo de vista para o observador

Usando a figura 2.15, calculamos a tangente de ϕ_a e de ϕ_v .

$$\tan\phi_v = \frac{X_v + L}{Z_{ob}}; \tan\phi_a = \frac{X_a + L + \Delta x}{Z_{ob}} \quad (2-5)$$

De 2.13 tiramos a relação (2-6)

$$\tan\phi_v = \frac{X_v - Y_v}{Z_v}; \tan\phi_a = \frac{X_a - Y_a}{Z_a} \quad (2-6)$$

Em (2-5), subtraímos a primeira da segunda equação e isolamos Δx . Usando (2-6), chegamos a:

$$\Delta x = Z_{ob} \left(\frac{X_a - Y_a}{Z_a} - \frac{X_v - Y_v}{Z_v} \right) + X_v - X_a \quad (2-7)$$

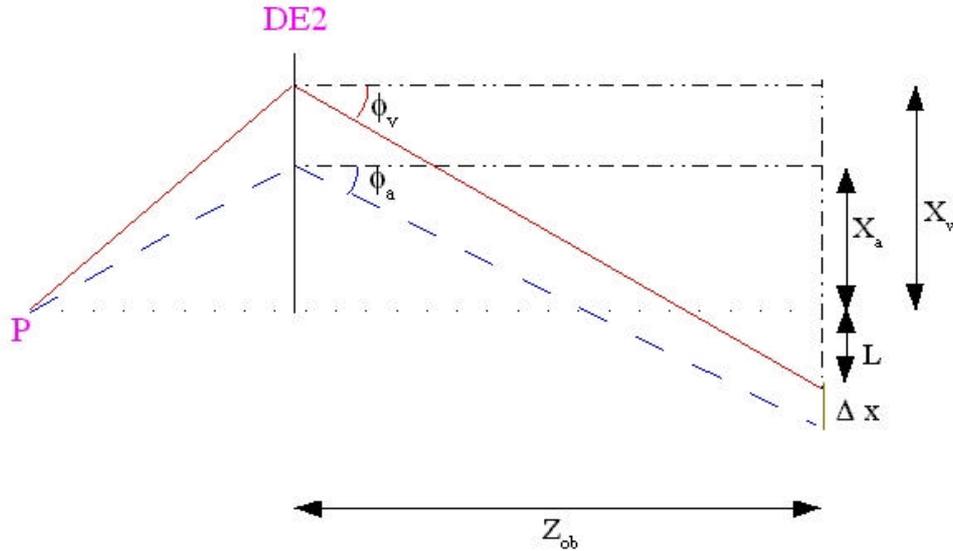


Fig.2.15: Análise geométrica para o cálculo do campo imagem.

Observe que X_v e X_a são grandezas que dependem da frequência espacial da rede e do comprimento de onda. Como calculado em na equação (2-4), temos que X_a e X_v são as soluções da equação (2-8) e (2-9).

$$\frac{X_a - Y_a}{\sqrt{(X_a - Y_a)^2 + Z_a^2}} + \frac{X_a}{\sqrt{X_a^2 + R^2}} = \lambda_a \nu \quad (2-8)$$

$$\frac{X_v - Y_v}{\sqrt{(X_v - Y_v)^2 + Z_v^2}} + \frac{X_v}{\sqrt{X_v^2 + R^2}} = \lambda_v \nu \quad (2-9)$$

Vemos pela figura 2.15 que o campo imagem está diminuindo com o aumento de Z_{ob} . Depois da do cruzamento dos dois raios, o novo campo será dado por

$$\Delta x' = -\Delta x \quad (2-10)$$

onde Δx é dado pela equação (2-7).

2.1.3.1 Medida experimental do campo de vista do observador

Usando duas lâmpadas de filamento de 4 mm de diâmetro e potência 5W, simulamos dois pontos extremos de um objeto extenso. Desta vez empregamos as duas metades de cada elemento difrativo sem a limitação de iluminação da figura 2.6. A frequência espacial de cada elemento difrativo usado foi de 658 ± 5 linhas/mm.

Medimos um Δx de $1,8 \pm 0,3$ cm. Através da equação (2-7), usando os valores da tabela 2, obtivemos Δx de $1,9 \pm 0,2$ cm. O erro percentual calculado foi de 6% entre os valores experimental e teórico. Esse desvio é resultado da falta de percepção para reconhecimento de comprimentos de onda do olho humano. Se fossem usados outros meios para a detecção dos dois raios representados na figura 2.15, os valores poderiam chegar mais próximos dos valores teóricos.

	$\lambda_a=500\text{nm}$	$\lambda_v=670\text{nm}$
$\nu=658 \pm 5$ linhas/mm	$Z_a=10,0 \pm 0,1$ cm	$Z_v=8,0 \pm 0,1$ cm
$R=30 \pm 0,1$ cm	$Y_a=0,6 \pm 0,1$ cm	$Y_v=3,3 \pm 0,1$ cm
$Z_{ob}=18,0 \pm 0,1$ cm	$X_a=3,0 \pm 0,1$ cm	$X_v=5,5 \pm 0,1$ cm

Tabela 2: Dados experimentais para o cálculo do campo do observador através da equação (2-5). X_a e X_v foram calculados usando a equação (2-8) e (2-9).

Para esses valores de Y_a e Y_v , não é concedido para o observador um campo que permita visão binocular, pois a distância média entre os dois olhos de um ser humano está por volta de 7 cm. Não havendo triangulação, não é possível perceber a inversão de relevo da imagem.

2.1.4 Ponto Crítico^[10]

Chama-se *ponto crítico* ao ponto em que a distância entre o objeto e DE1 é igual a distância entre o observador (ou difusor) e DE2. Neste ponto ocorre a inversão do espectro difratado do objeto. Nele a imagem do objeto encontra-se focalizada, estando portanto, exatamente igual ao próprio objeto. Esta focalização pode ser vista colocando, por exemplo, um difusor na posição do ponto crítico do observador como na imagem central da figura 2.17.

A figura 2.16 mostra o sistema com um objeto em três diferentes posições de profundidade O_1 , O_2 , O_3 . Podemos observar que o campo objeto, para um ponto fixo do observador, depende da distância do objeto de uma maneira que assemelha-se com o de um objeto sob uma lente convergente: podendo mudar drasticamente quando perto de certa distância crítica, que rende magnificação infinita.

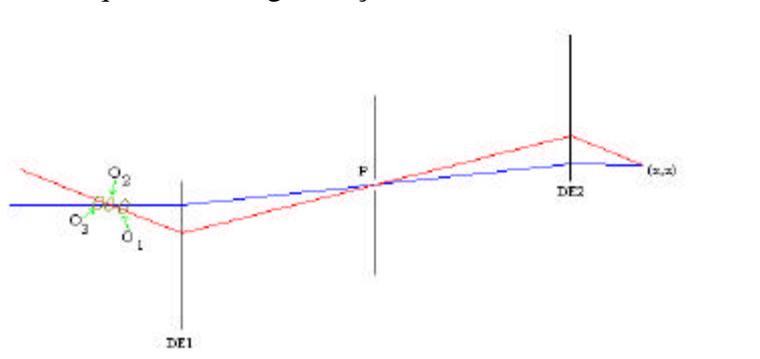


Fig.2.16: Um observador fixo no ponto (x,z) vê um objeto em três posições próximas ao ponto crítico. Na frente O_1 , no ponto crítico O_2 e atrás do ponto crítico O_3

2.1.4.1 Experimental do ponto crítico

Na figura 2.17 podemos ver três diferentes posições da imagem de uma lâmpada halógena (sem o refletor), correspondentes a O_1 , O_2 e O_3 (fig.2.16). A imagem é projetada, então a magnificação lateral e longitudinal são unitárias.

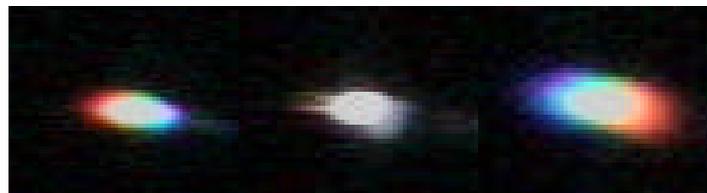


Fig.2.17: Imagem projetada em uma tela de uma lâmpada halógena passando pelo ponto crítico.

Podemos ver a inversão de cores devido a passagem pelo ponto crítico. Esse borrão espectral é a imagem desfocalizada da lâmpada. Não podemos ver a distribuição de cores circular devido ao tamanho reduzido do objeto.

2.1.5 Imagem de um corpo extenso^[10]

Usamos uma lâmpada halógena de 50W com um refletor facetado de 46 mm de diâmetro atrás dela, para compor um corpo extenso. A imagem e o objeto são mostrados

na figura 2.18. A captação da imagem foi feita de maneira direta, ou seja, sem o uso de um difusor.

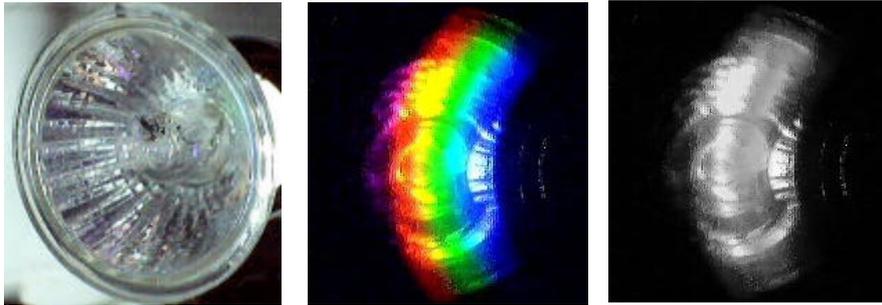


Fig.2.18: À esquerda, uma lâmpada halógena (de lado) com refletor é tomada como objeto. No centro, a imagem do objeto extenso obtido pelo sistema. À direita, a imagem com cores filtradas digitalmente.

A imagem foi obtida centralizando-se ao centro da lâmpada, em *close*, não permitindo a observação do objeto por inteiro. Na figura 2.18, direita, podemos ver uma distribuição de cores, feita pelo elemento de difração circular.

2.1.6 Aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo ^[11]

Pelo deslocamento do segundo elemento difrativo (modificando R_2), ocorre um aumento na imagem, vista por um observador fixo na posição ($Z_{ob} + R_2$), de um objeto fixo colocado em Z_{oj} (Figura 2.19).

O aumento é dado por L/L_0 . A relação desse aumento com o deslocamento do ponto de simetria ($R_1=R_2$) é esperado ser linear porque os raios que encontram Z_{ob} são apenas a projeção geométrica dos que passaram por Z_{oj} na imagem, depois de passar pelo segundo elemento difrativo.

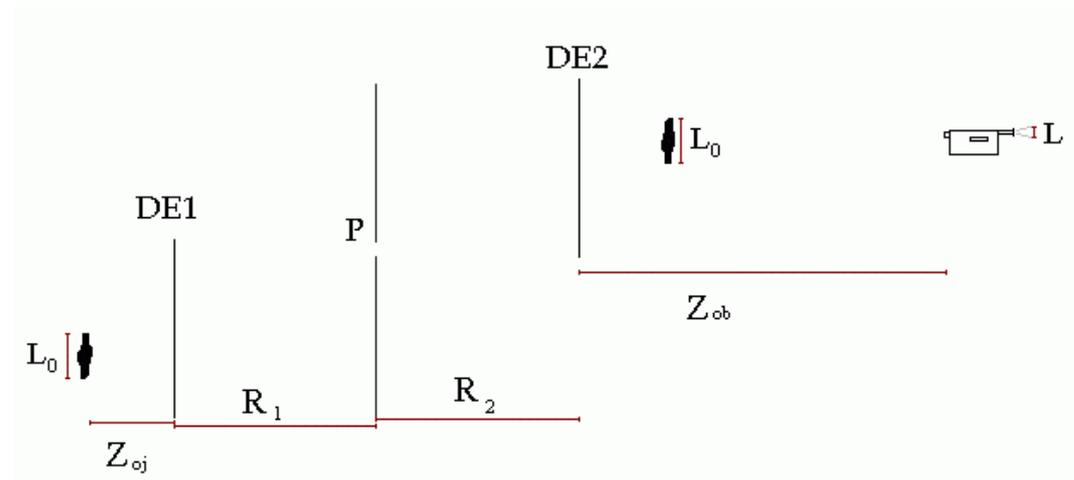


Fig.2.19: Dimensões utilizadas na descrição do sistema.

2.1.6.1 Medições do aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo

Usando uma lâmpada halógena de 20W a 16,5 cm do primeiro elemento difrativo (Z_{oj}), estando a câmera situada a 70 cm do orifício ($Z_{ob} + R_2 = 70$ cm) temos uma magnificação angular de quase x2 para onde a magnificação era x1. Medimos o aumento da imagem quando o segundo elemento era deslocado, tomando como

referência o caso de simetria total ($R_1=R_2$). A figura 2.20 mostra a relação linear encontrada e a figura 2.21, algumas fotos tiradas em um ponto fixo do observador (as fotos estão em escala).

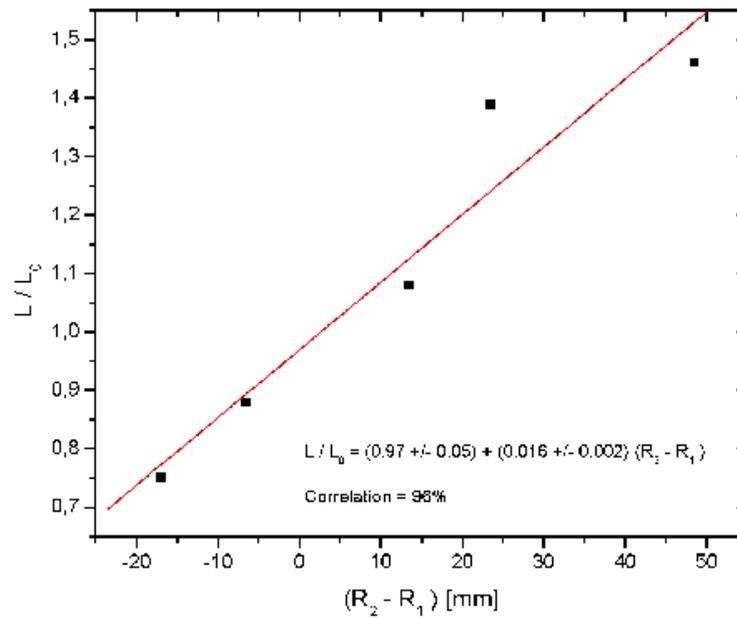


Fig.2.20: Relação linear entre o deslocamento do segundo elemento difrativo e da magnificação.

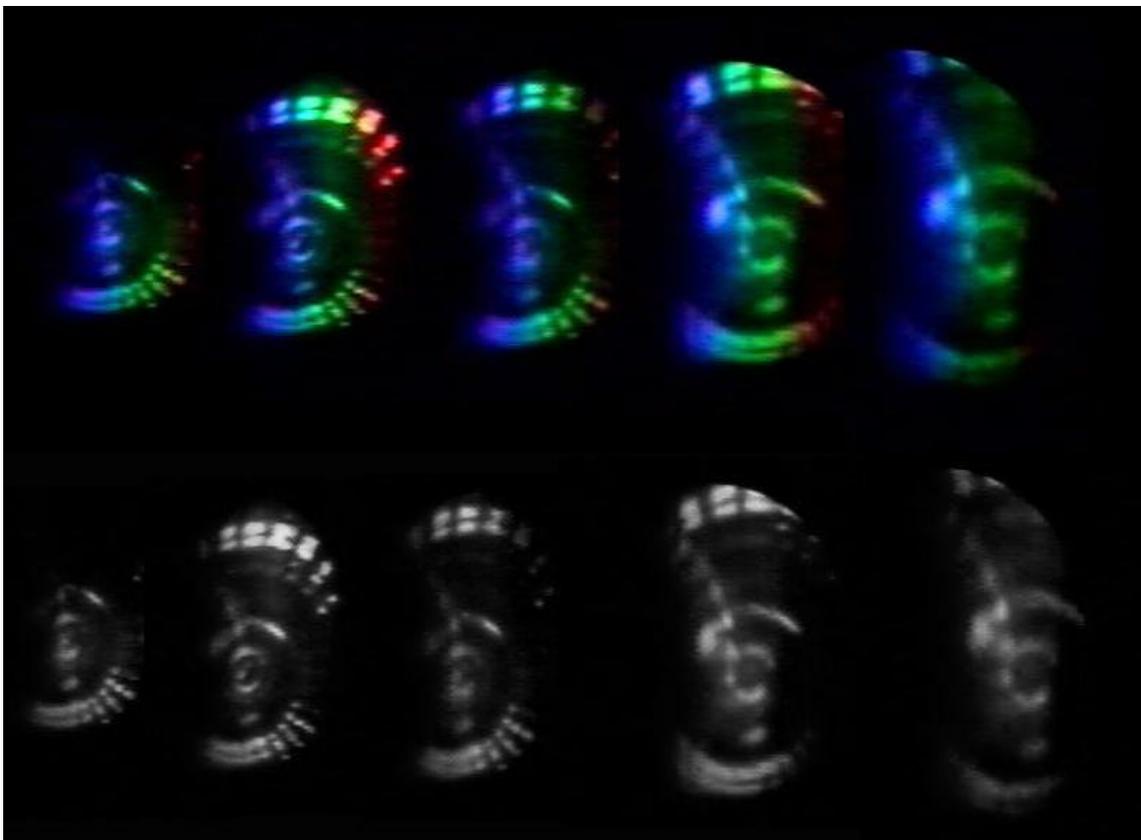


Fig.2.21: Magnificação em cinco diferentes posições do segundo elemento difrativo. Em cima, seqüência de fotos como é vista por um observador. Em baixo, seqüência com as cores filtradas, em tons de cinza.

2.2 Comparação entre a imagem com redes planas e uma fenda e a com dois elementos difrativos descritos bidimensionalmente e um orifício

No sistema com dois elementos difrativos descritos bidimensionalmente e um orifício perdemos luminosidade, tendo um aproveitamento de 0,05% da radiação incidente. Esta luminosidade pode ser aumentada com o desenvolvimento de materiais difrativos para luz branca de maior eficiência ^[15].

Na tabela 3 fazemos uma comparação, citando as principais diferenças entre uma imagem em um sistema de dupla difração com redes planas intermediadas por uma fenda e em um sistema de dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente intermediados por um orifício.

Dupla difração com redes planas intermediadas por uma fenda	Dupla difração com elementos bidimensionais intermediados por um orifício
Astigmatismo horizontal	Sem astigmatismo horizontal
Sem possibilidade de projeção	Possibilidade de projeção
Maior eficiência luminosa	Menor eficiência luminosa
Aumento horizontal	Aumento proporcional
Maior campo imagem e objeto	Menor campo imagem e objeto

Tabela 3: Comparação dos resultados com dupla difração com redes planas intermediadas por uma fenda e dupla difração com elementos bidimensionais intermediados por um orifício.

2.3 Referências:

- [1] Lunazzi, J. J. "Holophotography with a diffraction grating" *Opt. Eng.* **29** p.15-18, 1990
- [2] Lunazzi, J. J.; Ocampo, J. "Binocular disparity and stereopsis obtained under white light by means of diffraction gratings" *Journal of Modern Optics* vol **42**, n.1, p.3-6, 1995
- [3] Lunazzi, J. J. "Holoprojection of images by a double diffraction process" in *Opt. e Fis. Atômica, Proc. of the XIV Enc. Nac. de Fis. da Mat. Condensada*, Soc. Bras. de Física eds., Caxambu-MG-BR, Bagnato, V.; Cruz, B. Eds., 7-11.5.91, p.OTI 5a.12:00.
- [4] Lunazzi, J. J. "New possibilities in the utilisation of holographic screens" *SPIE* V1667 p.289, 1992
- [5] Rivera, N. "**Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, 2003
- [6] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. "Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit" *Opt. Express* **10**, p.1368-1373, 2002. Disponível em:
<<http://opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=OPEX-10-23-1368>>
<http://opticsexpress.org/issue.cfm?issue_id=168>. Acesso em: 14 jan. 2005 13:09:00
- [7] Goodman, J. W. "**Introduction to Fourier Optics**" Chapter 9: Holography; 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.309-312
- [8] Rivera, N. "**Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado - Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, p. 23 , 2003
- [9] Magalhães, D. S. F. "**Difração por CDs e ondas X**", Dissertação, in: "Relatórios Finais 1 semestre 2002 – Volume 2: F530-F590-F809", Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, Campinas, 2002. Disponível em:
<<http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F809/arquivos/DIFRA%C7%C3O%20POR%20CDs%20E%20ONDAS%20X.pdf>> . Acesso em: 16 dez. 2004 13:58:00
- [10] Lunazzi, J. J.; Magalhães, D. S. F. "Diffractive imaging with bidimensional elements: first experimental results" *Proc. of XXVII Enc. Nac. de Fis. da Mat. Cond.*, p. 127 Poços de Caldas- MG. Disponível no Apêndice E.1
- [11] Lunazzi, J. J.; Magalhães, D. S. F. "Pseudoscopic white-light imaging by means of two bi-dimensional diffracting elements and a pinhole" *SPIE*, v.5622, p.1463-1468, out. 2004. Disponível em:
<<http://bookstore.spie.org/index.cfm?fuseaction=detailpaper&cachedsearch=1&productid=591749&producttype=pdf&CFID=1568010&CFTOKEN=23535837>>
- [12] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, **Chap.3 and 4**, Boston: Mc. Graw Hill, 1996
- [13] Lunazzi, J. J. "3D Photography by holography" *Opt.Eng.* **V29** N1 (1990) p.9-14
- [14] Lunazzi, J. J. "Holophotography with a diffraction grating" *Opt.Eng.* **V29** N1 (1990) pp.15-18
- [15] Marciante, J. R. et al. "**Polarization-insensitive, high-dispersion TIR diffraction gratings**" Proceedings of the **Frontiers of Optics 2004**, Optical Society of America annual meeting, Rochester, EUA, 11-10-2004

Capítulo 3

Difração com elementos bidimensionais usando teoria escalar de difração

Neste capítulo, caracterizaremos dois tipos de elementos difrativos definidos bidimensionalmente¹⁵, um circular e outro espiral. A principal motivação na caracterização desses elementos está na utilização de *Compact Discs* (CDs) como elementos formadores de imagem. Lentes difrativas poderiam ter sido empregadas no processo mas, a simetria circular e a facilidade com que o CD pode ser obtido no dia a dia, tornam-se um incentivo na utilização desse último.

Na seção 3.2 deste capítulo usamos o teoria escalar de difração para esquematizar o sistema de dupla difração com elementos bidimensionais para que futuramente o problema possa ser resolvido computacionalmente.

3.1 Elementos de difração circulares e espirais

Para caracterizar o *Compact Disc* (CD) como elemento difrativo, vamos fazer duas aproximações. A primeira aproximará o elemento a uma estrutura de fase composta por círculos concêntricos equidistantes. A variação da fase será dada por uma função senoidal.

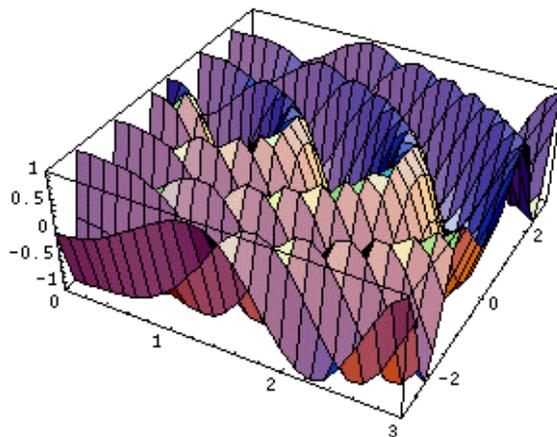


Fig. 3.1: Ilustração da estrutura de variação de fase de um CD na primeira aproximação.

Na segunda aproximação consideraremos uma estrutura espiralada cuja variação de fase é dada por uma função periódica qualquer.

15 Na verdade, uma estrutura circular senoidal pode ser caracterizada com uma única variável radial. Optamos pela nomenclatura “bidimensional” porque, normalmente pensa-se em estruturas definidas pelo plano cartesiano.

3.1.1 Difração por um elemento senoidal circular

Para uma estrutura periódica de frequência f_0 de 625 linhas por milímetro, as distâncias consideradas são da ordem de $1,6 \mu\text{m}$, podemos usar a equação de Fresnel para o cálculo do espectro de difração. Como função de transmitância temos:

$$t_A(r) = \left[\text{circ}\left(\frac{r}{R_{\max}}\right) - \text{circ}\left(\frac{r}{R_{\min}}\right) \right] e^{j \frac{m}{2} \text{sen}(2\pi f_0 r)} \quad (3-1)$$

onde m é um número real.

Usando as equações C-3 e C-1, obtemos:

$$t_A(r) = \left[\text{circ}\left(\frac{r}{R_{\max}}\right) - \text{circ}\left(\frac{r}{R_{\min}}\right) \right] \left\{ J_0\left(\frac{m}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) [(-1)^n e^{j2\pi f_0 r} + e^{-j2\pi f_0 r}] \right\} \quad (3-2)$$

Iluminando o elemento difrativo (que está em $z=0$) com uma onda incidente plana, monocromática de amplitude unitária, logo após o elemento a função de onda torna-se igual a t_A e podemos usar a equação de Fresnel para calcular o espectro.

O campo difratado terá duas partes, uma com o fator que acompanha a função de Bessel de ordem zero e outra que acompanha todas as outras funções de Bessel:

$$E(r', z) = E_{\text{abertura}}(r', z) + E_{\text{círculos}}(r', z) \quad (3-3)$$

Nos interessa estudar agora apenas o campo difratado pelos círculos e não o campo difratado pela abertura anular homogênea^[2] (quando $n=0$, isto é, o termo com J_0).

$$E_{\text{abertura}}(r', z) = \frac{2\pi}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j \frac{k}{2z} r'^2} J_0\left(\frac{m}{2}\right) \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r e^{jk \frac{r^2}{2z}} J_0\left(\frac{2\pi r r'}{\lambda z}\right) dr \quad (3-4)$$

Analisando o termo dos círculos concêntricos:

Usando a equação de Fresnel (com simetria circular) em coordenadas polares temos:

$$E_{\text{círculos}}(r', z) = \frac{2\pi}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j \frac{k}{2z} r'^2} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) [(-1)^n e^{j2\pi f_0 r} + e^{-j2\pi f_0 r}] e^{j \frac{k}{2z} r^2} J_0\left(\frac{2\pi r r'}{\lambda z}\right) dr \quad (3-5)$$

Podemos “tirar” o somatório para fora da integral e dividir o campo em

componentes.

$$E_{\text{circulos}}(r', z) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(r', z) \quad (3-6)$$

Ficamos então com,

$$E_n(r', z) = \frac{2\pi}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}r'^2} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} r \left[(-1)^n e^{j2\pi(nf_0 r + \frac{r^2}{2\lambda z})} + e^{j2\pi(-nf_0 r + \frac{r^2}{2\lambda z})} \right] J_0\left(\frac{2\pi r r'}{\lambda z}\right) dr \quad (3-7)$$

Fazendo três substituições,

$$r \rightarrow Rr, \quad r' \rightarrow \lambda r', \quad z \rightarrow Rz \quad (3-8)$$

para que possamos usar grandezas adimensionais no cálculo da integral, obtemos

$$E_n(r', z) = \frac{2\pi}{j\lambda z R} J_n\left(\frac{m}{2}\right) \times e^{jk\left(\frac{zR + r'^2}{2Rz}\right)} (I_1 + I_2) \times R^2 \quad (3-9)$$

onde I_1 e I_2 são:

$$I_1 = \int_{R_{\min}/R}^{R_{\max}/R} r (-1)^n e^{ja\left(2\pi nr + \frac{\pi r^2 b}{z}\right)} J_0\left(\frac{2\pi r r'}{z}\right) dr \quad (3-10)$$

$$I_2 = \int_{R_{\min}/R}^{R_{\max}/R} r e^{ja\left(-2\pi nr + \frac{\pi r^2 b}{z}\right)} J_0\left(\frac{2\pi r r'}{z}\right) dr \quad (3-11)$$

onde a grandeza adimensional a é definida como Rf_0 e a grandeza adimensional b é definida como $1/\lambda f_0$.

Para calcularmos os valores dessas integrais usaremos o *método das fases estacionárias*^{[1] 16}, para uma integral do tipo:

$$I = \int_A^B f(r) e^{ja u(r)} dr \quad (3-12)$$

que é válida se $u(r)$ é duplamente diferenciável e a é muito grande.

Para nosso caso:

¹⁶ Esse método nada mais é que um método para resolver integrais do tipo (3-12). Usado pois tivemos problemas na resolução das integrais usando computadores.

$$f(r) = r (-1)^n J_0 \left(\frac{2 \pi r r'}{z} \right)$$

$$u(r) = 2 \pi n r + \frac{\pi r^2 b}{z} \quad (3-13)$$

Podemos fazer integração por partes em (3-11) e obter:

$$I = \frac{f(r) e^{j a u(r)}}{j a u'(r)} \Big|_A^B - \frac{1}{j a} \int_A^B e^{j a u(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{u'(r)} \right) dr \quad (3-14)$$

A última integral tende a zero rapidamente, uma vez que $u'(r)$ não possui pontos estacionários no intervalo $[(R_{\min}/R), (R_{\max}/R)]$ como é mostrado na referência [3] e I_1 fica sendo:

$$I_1 \sim \frac{1}{j a} \left[\frac{f(R_{\max}/R) e^{j a u(R_{\max}/R)}}{u'(R_{\max}/R)} - \frac{f(R_{\min}/R) e^{j a u(R_{\min}/R)}}{u'(R_{\min}/R)} \right] \quad (3-15)$$

Essa integral tem como termo inicial na expansão um termo com $1/a \sim 10^{-4}$. Para I_2 temos

$$f(r) = r J_0 \left(\frac{2 \pi r r'}{z} \right)$$

$$u(r) = -2 \pi n r + \frac{\pi r^2 b}{z} \quad (3-16)$$

A integral I_2 possui um ponto estacionário em nz/b no intervalo referido. Isso faz com que a integral em (3-13) tenha um valor significativo, da ordem de $(1/a)^{1/2} \sim 10^{-2}$. Sendo seu valor igual a

$$I_2 \sim f \left(\frac{nz}{b} \right) e^{j a u(nz/b)} \sqrt{\frac{2 \pi}{a u''(nz/b)}} e^{j \frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{nz}{b} J_0 \left(\frac{2 \pi n r'}{b} \right) e^{j a \left(\frac{-2 \pi n^2 z}{b} + \frac{\pi n^2 z}{b} \right)} \sqrt{\frac{z}{a b}} e^{j \frac{\pi}{4}} \quad (3-17)$$

Finalmente, voltando as variáveis dimensionais ($z \rightarrow z/R$ e $r' \rightarrow r'/\lambda$) e substituindo os valores de a e b ($a \rightarrow R f_0$ e $b \rightarrow 1/\lambda f_0$), encontramos a componente E_n

17 $u'(r)=0$ implica em um $r_0=1/f_0=-nz/b$; que não pertence ao intervalo uma vez que n é sempre positivo.

do campo difratado (desconsideramos a contribuição da primeira integral, por sua ordem de grandeza inferior).

$$E_n(r', z) = \omega_n J_n\left(\frac{m}{2}\right) J_0(\omega_n r') e^{jk(z + \frac{r'^2}{2z})} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\omega_n^2 \frac{1z}{4\pi}} \sqrt{z\lambda} \quad (3-18)$$

onde $\omega_n = 2\pi f_0 n$.

Essa expressão é válida no intervalo:

$$\frac{R_{\min}}{f_0 \lambda n} \leq z \leq \frac{R_{\max}}{f_0 \lambda n} \quad (3-19)$$

Fora desse intervalo o campo torna-se muito fraco, e podemos despezá-lo.

A expressão (3-18) mostra que o n ésimo modo propaga sem espalhar (isto é, um feixe não difrativo) na região (3-19) e é negligenciável fora desse intervalo. Dependendo do número de modo n pode-se identificar zonas para cada modo no eixo z . Modos de ordens mais baixas estarão mais afastadas que os de ordem mais altas, mas esses modos poderão se sobrepor. Esperam-se mudanças abruptas nas intensidades dos modos devido a mudança dos coeficientes J_n nas fronteiras.

Como $J_0(r'=0)=1$, obtemos um máximo na origem. Como, em geral, os termos dominantes são os de $|n|$ menor ou igual a 1. Assim encontraremos o primeiro zero de intensidade perto de $0,613\mu\text{m}$, quando f_0 igual a 625 linhas/mm e n igual a 1.

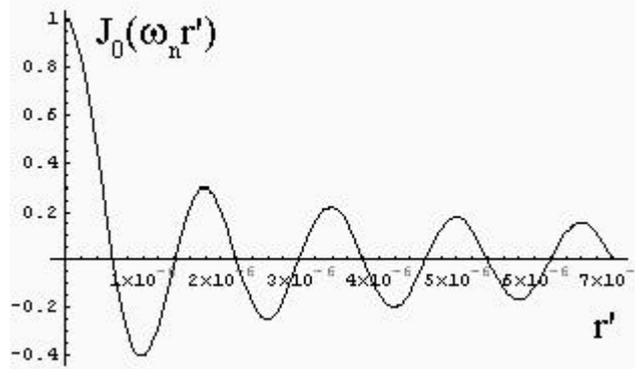


Fig.3.2: Zeros da função de Bessel de ordem zero.

Lembrando que o campo difratado é dado por (3-6), percebemos que cada modo da decomposição de Fourier resulta em uma linha de tamanho bem definido. Como os modos mais significativos são os de menor n (J_n de menor n tem maior valor), obtemos para $n=1$ uma linha $5,25\text{cm} < z < 13,8\text{cm}$ para um comprimento de onda de 670nm . Para $n=2$ uma linha de $2,6\text{cm} < z < 6,9\text{cm}$.

Se em alguma parte dessa linha (chamada de feixe não difrativo) colocarmos um obstáculo, vemos que a linha se auto-reconstrói logo após a obstrução do feixe. Isso acontece porque a luz não propaga como um feixe na direção z ; esse feixe é produzido pela difração no CD, vindo a energia das regiões laterais da linha. Essa auto-reconstrução é uma característica dos feixes não difrativos, que tem sido extensamente estudado na literatura ^{[4][5]}.

3.1.2 Difração por um elemento espiral [6]

Essa seção é baseada no trabalho apresentado na referência [6].

Considere agora o CD como um elemento com uma ranhura em formato espiralado (como podemos observar em discos de vinil) e com perfil dado por uma função periódica qualquer. Essa função pode ser expandida em série de Fourier como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{r}{r_0}} \quad (3-20)$$

onde c_n são constantes complexas e r_0 é a distância radial entre voltas adjacentes.

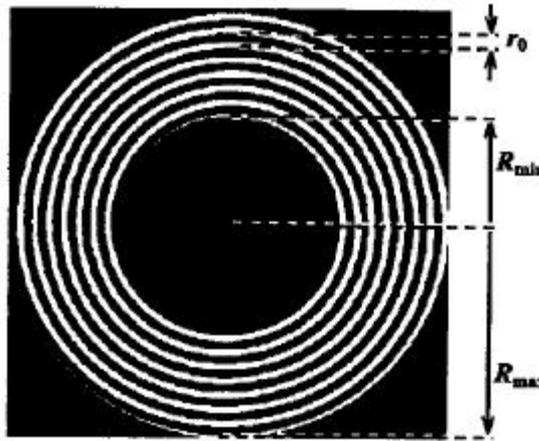


Fig.3.3: Figura esquemática representativa de um CD usando o modelo espiralado.

Fazendo a substituição $2\pi r/r_0 \rightarrow 2\pi r/r_0 - \theta$ obtemos um expressão para o perfil espiral válidos para todos os valores do ângulo polar. Uma função de transferência pode ser:

$$t_A(r, \theta) = \left[\text{circ}\left(\frac{r}{R_{\max}}\right) - \text{circ}\left(\frac{r}{R_{\min}}\right) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn(2\pi \frac{r}{r_0} - \theta)} \quad (3-21)$$

Iluminando o elemento difrativo com uma onda plana incidente monocromática de amplitude E_0 ; logo após o elemento a função de onda torna-se igual a $E_0 \times t_A$ e podemos usar a equação de Fresnel para calcular o espectro. O elemento difrativo é colocado em $z=0$.

O campo difratado terá duas partes, uma com o fator $n=0$ (campo difratado pela abertura anular homogênea) e outra que acompanha todos os outros valores de n (campo difratado pela espiral).

$$E(r', \theta', z) = E_{\text{abertura}}(r', \theta', z) + E_{\text{espiral}}(r', \theta', z) \quad (3-22)$$

O campo resultante da abertura anular é:

$$E_{\text{abertura}}(r', \theta', z) = \frac{c_0 E_0}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z} r'^2} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{j\frac{k}{2z} r^2} e^{-j2\pi \frac{r'}{z} \cos(\theta - \theta')} r d\theta dr \quad (3-23)$$

Enquanto que o campo resultante das espirais é:

$$E_{\text{espiral}}(r', \theta', z) = \frac{E_0}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}r'^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \int_0^{2\pi} \{c_n e^{jn(2\pi\frac{r}{r_0}-\theta)} + c_{-n} e^{-jn(2\pi\frac{r}{r_0}-\theta)}\} e^{j\frac{k}{2z}r^2} e^{-j2\pi\frac{r'}{z} \cos(\theta-\theta')} r d\theta dr \quad (3-24)$$

Podemos separar o campo em uma soma de componentes:

$$E_{\text{espiral}}(r', \theta', z) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(r', \theta', z) \quad (3-25)$$

com E_n igual a

$$E_n(r', \theta', z) = \frac{E_0}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}r'^2} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \int_0^{2\pi} \{c_n e^{jn(2\pi\frac{r}{r_0}-\theta)} + c_{-n} e^{-jn(2\pi\frac{r}{r_0}-\theta)}\} e^{j\frac{k}{2z}r^2} e^{-j2\pi\frac{r'}{z} \cos(\theta-\theta')} r d\theta dr \quad (3-26)$$

Cada um dos campos parciais E_n representa o campo difratado pelo enésimo modo da decomposição de Fourier da ranhura espiral. Integrando em θ :

$$E_n(r', \theta', z) = \frac{E_0}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}r'^2} \pi j^{-n} \left\{ c_n e^{-jn\theta'} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} e^{j(\frac{k}{2z}r^2 + 2\pi nr/r_0)} J_n\left(\frac{2\pi rr'}{\lambda z}\right) r dr + c_{-n} e^{jn\theta'} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} e^{j(\frac{k}{2z}r^2 - 2\pi nr/r_0)} J_n\left(\frac{2\pi rr'}{\lambda z}\right) r dr \right\} \quad (3-27)$$

Usando (3-8), renomeando $R/r_0=a$ e $r_0/\lambda=b$, (3-27) torna-se

$$E_n(r', \theta', z) = \frac{E_0 ab}{jz} e^{jkRz} e^{j\frac{\pi}{abz}r'^2} \pi j^{-n} \left\{ c_n e^{-jn\theta'} \int_{R_{\min}/R}^{R_{\max}/R} e^{ja(\frac{\pi b}{z}r^2 + 2\pi nr)} J_n\left(\frac{2\pi rr'}{z}\right) r dr + c_{-n} e^{jn\theta'} \int_{R_{\min}/R}^{R_{\max}/R} e^{ja(\frac{\pi b}{z}r^2 - 2\pi nr)} J_n\left(\frac{2\pi rr'}{z}\right) r dr \right\} \quad (3-28)$$

Chegamos novamente em integrais do tipo de (3-12). Dessa vez com

$$\begin{aligned} f(r) &= J_n(2\pi r r' / z) r \\ u(r) &= (\pi b r^2 / z) \pm 2\pi n r \end{aligned} \quad (3-29)$$

Prosseguindo da mesma maneira que no exemplo anterior: não encontramos nenhum ponto estacionário na primeira integral e encontramos um ponto estacionário na segunda ($r_1 = nz/b$). Assim no intervalo (3-19)¹⁸ (é o mesmo devido ao intervalo de integração e o ponto estacionário serem os mesmos) a segunda integral é mais significativa (possui um termo com $a^{-1/2}$) que a primeira por ser algumas ordens de grandeza maior. Portanto a componente n do campo é aproximadamente igual a

$$\begin{aligned} E_n(r', \theta', z) &\approx n E_0 c_{-n} \pi j^{-(n+1)} e^{jkRz} \\ &\times e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{az}{4b}} e^{jn\theta'} e^{-ja\pi n^2 \frac{z}{b}} J_n\left(\frac{2\pi n r'}{b}\right) \end{aligned} \quad (3-30)$$

Finalmente, voltando as variáveis dimensionais ($z \rightarrow z/R$ e $r' \rightarrow r'/\lambda$) e substituindo os valores de a e b ($a \rightarrow R/r_0$ e $b \rightarrow r_0/\lambda$), encontramos a componente E_n do campo difratado (desconsideramos a contribuição da primeira integral, por sua ordem de grandeza inferior).

$$\begin{aligned} E_n(r', \theta', z) &\approx n E_0 c_{-n} \pi j^{-(n+1)} e^{jkz} \\ &\times e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{z\lambda}{4r_0^2}} e^{jn\theta'} e^{-j\pi n^2 \frac{z\lambda}{r_0^2}} J_n\left(\frac{2\pi n r'}{r_0}\right) \end{aligned} \quad (3-31)$$

para

$$\frac{R_{\min}}{f_0 \lambda n} \leq z \leq \frac{R_{\max}}{f_0 \lambda n} \quad (3-19)$$

Desta vez encontramos um feixe não difrativo escuro, ou seja, sem luz. Isso porque a função de onda é nula na origem do plano de observação para qualquer modo n ($J_n(0)=0$ para qualquer $n \neq 0$).

Sendo os menores modos os mais expressivos ($|n| \leq 1$) podemos estimar o valor do primeiro máximo de intensidade do campo. Para $J_1(2\pi n r'/r_0)$ o primeiro máximo acontece quando $2\pi n r'/r_0 = 1,841$. Então o anel brilhante tem um raio de aproximadamente $0,3 r_0 \cong 0,5 \mu\text{m}$. Uma distância muito pequena, sendo incapaz de ser resolvida devido ao espalhamento que a luz tem já na sua saída (pinhole, de aproximadamente $25 \mu\text{m}$ de diâmetro), visto que esta nunca é realmente pontual. Esse espalhamento em um campo angular é criado por difração^[10], devido a abertura de saída do laser. Uma abertura de saída circular criaria, por exemplo, o disco de Airy.

18 Com $f_0 = 1/r_0$

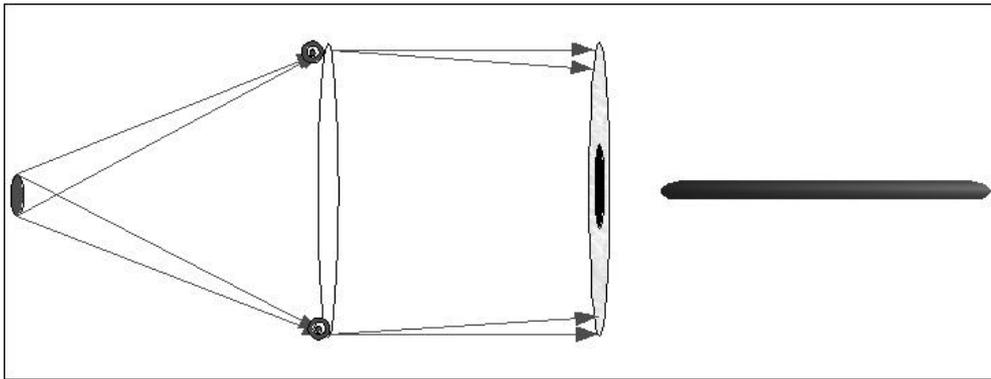


Fig.3.4: Na saída do l iser, a resolu o   limitada por difrac o.

A figura 3.5 mostra o feixe n o difrativo.



Fig.3.5: Feixe n o difrativo produzido por um CD (  esquerda representa o,   direita uma foto).

Como foi comentado no exemplo anterior, acontece a auto-reconstru o do feixe quando ele   bloqueado por alguma barreira, como   caracter stica de um feixe n o difrativo.

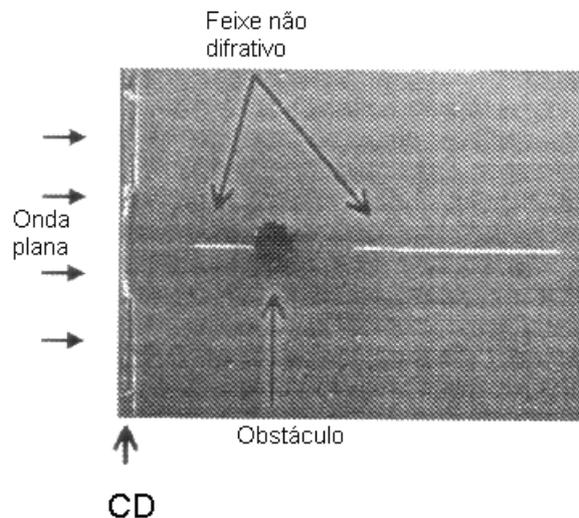


Fig.3.6: Obst culo bloqueando o intenso feixe propagando ao longo do eixo. Alguns cent metros ap s a obstru o, o feixe   auto-reconstru do.

A propor o da energia associada com cada modo n depende dos coeficientes de Fourier c_n associados ao perfil do CD.

Por exemplo, se escolhermos como perfil uma fun o de amplitude $\text{rect}(r/2a) \otimes \text{comb}(r/L)$ com a e L s o mostrados na figura 3.7.

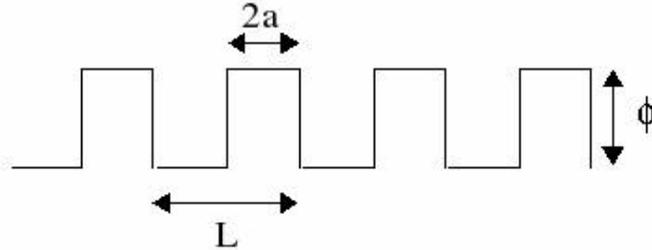


Fig.3.7: Modelo de um perfil quadrado de amplitude para um CD.

Expandindo a função em harmônicos encontramos:

$$\Phi(r) = \frac{2\phi a}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cos\left[\frac{2\pi n}{L} x\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left[\frac{2\pi n}{L} x\right] \quad (3-32)$$

com,

$$c_n = c_{-n} = \frac{\phi}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{2\pi na}{L}\right) \quad (3-33)$$

Assim vemos que a intensidade de cada ordem é proporcional a n^{-2} , e dependendo da razão a/L poderemos ter certos E_n nulos.

Para funções senoidais, a distribuição de energia entre os modos está ligada a uma função de Bessel de ordem n ao quadrado ($J_n^2(m/2)$).

Usando luz branca, como foi feito em [7], obtemos um conjunto de feixes não difrativos para cada E_n , ou seja, para cada E_n haverá uma infinidade de feixes, um para cada comprimento de onda. A relação (3-19) continua válida portanto, para um mesmo modo n , quanto maior o comprimento de onda, mais próximo ao CD estará o feixe não difrativo. Considerando, como dito anteriormente, mais expressiva a contribuição dos menores modos, a intensidade observada no feixe resultante possui variação cromática. Observamos que o feixe não difrativo resultante (da combinação cromática) inicia no espectro vermelho, e a medida que z aumenta ocorre uma miscigenação de cores tornando o feixe quase branco [11]. No final do feixe voltamos a observar cores definidas, dessa vez no azul e violeta (fig.3.8).

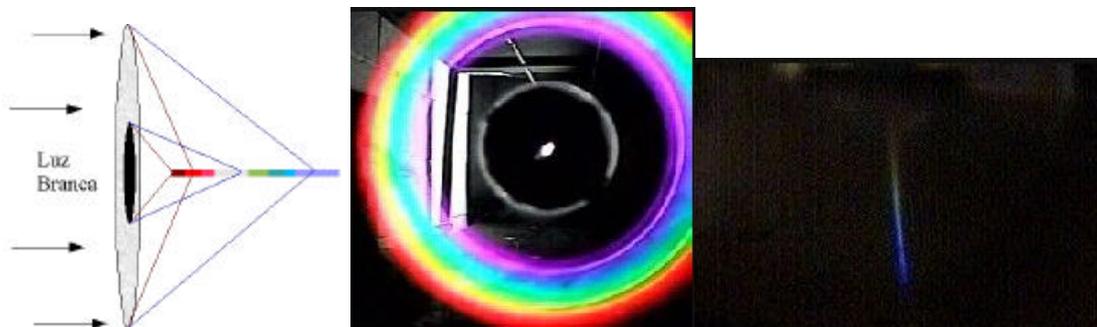


Fig.3.8: À esquerda, formação do feixe não difrativo com luz. Ao centro, fonte pontual de luz branca iluminando um CD com observador fixo em uma posição z dentro do intervalo (3-19). À direita, linha resultante da iluminação com luz branca vista de cima, projetada sobre um difusor.

Para cada modo n temos uma intensidade, para cada λ , linear com z ; obtida pelo módulo quadrado de (3-31). Por exemplo, para $n=1$: a intensidade seria proporcional a $(z\lambda/4r_0^2) \times J_1(2\pi r'/r_0)$ multiplicado por uma função limitadora da região (3-19) do tipo rect , que depende de λ e z . Assim, é possível somar a intensidade resultante de cada n .

A figura 3.9 mostra uma representação gráfica da intensidade para $n=1$, com três λ s distintos.

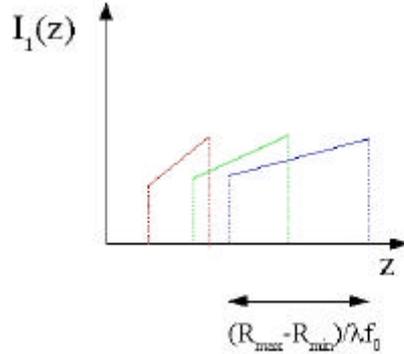


Fig.3.9: Intensidade como função de z da primeira ordem para três comprimentos de onda distintos

Como há uma grande concentração de feixes não difrativos de diferentes λ s o centro do feixe tende a parecer branco.

3.2 Dupla difração usando a teoria escalar de difração

Até agora, tratamos o problema da dupla difração na teoria como se o orifício P fosse de dimensões desprezíveis, ou seja, um ponto matemático. Para conhecermos o comportamento da imagem quando a seleção feita pelo orifício é mais tolerante e sabermos o aproveitamento da energia luminosa usada na formação da imagem, usaremos a formulação da teoria escalar de difração^[8]. Tendo o problema esquematizado, futuramente poderemos resolver o problema computacionalmente, pois analiticamente torna-se inviável.

Seja uma função $U(x,y,0)$, monocromática, que expresse uma cor do objeto¹⁹, como mostra a figura 3.10.

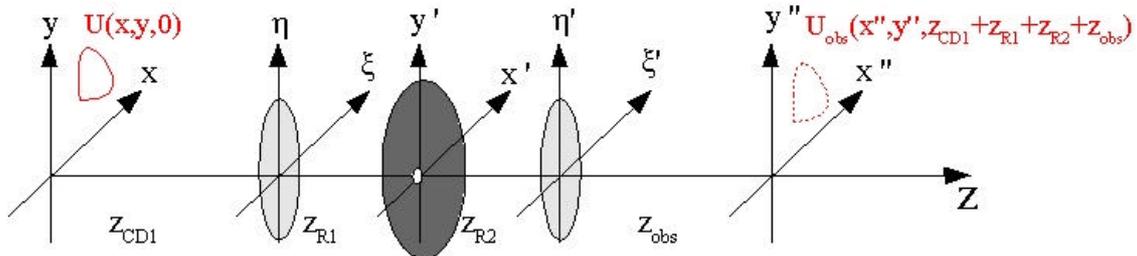


Fig. 3.10: Notação de coordenadas cartesianas para a formação da imagem por dupla difração.

O primeiro elemento difrativo localiza-se no plano $z=Z_{CD1}$, o orifício circular encontra-se em $z=Z_{CD1}+Z_{R1}$, o segundo elemento difrativo encontra-se em $z=Z_{CD1}+Z_{R1}+Z_{R2}$ e o observador encontra-se em $z=Z_{CD1}+Z_{R1}+Z_{R2}+Z_{obs}$.

O campo que chega no primeiro elemento difrativo é:

$$U(x, y, z_{CD1}) = \mathfrak{S}^{-1}\{A(f_x, f_y, z_{CD1})\} \quad (3-34)$$

onde A é o espectro angular de U e \mathfrak{S}^{-1} é a transformada de Fourier inversa.

¹⁹ A função objeto completa será dada pela soma de funções monocromáticas.

$U(x,y,z_{CD1})$ deve satisfazer a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (3-35)$$

Resolvendo (3-35) chegamos a uma equação que deve ser respeitada para o espectro angular de $U(x,y,z_{CD1})$, $A(f_x, f_y, z_{CD1})$:

$$\frac{d^2}{dz_{CD1}^2} A(f_x, f_y, z_{CD1}) + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2 \right] A(f_x, f_y, z_{CD1}) = 0 \quad (3-36)$$

Assim, conforme [9], obtem-se uma solução para (3-36) e substitue-se em (3-34):

$$U(x, y, z_{CD1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(f_x, f_y, 0) \times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} z_{CD1}} \times \\ \times \text{circ}((\lambda f_x)^2 + (\lambda f_y)^2) \times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (3-37)$$

onde o espectro angular da função $U(x,y,0)$ é dado por:

$$A(f_x, f_y, 0) = \mathfrak{F}\{U(x, y, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \cdot e^{-j 2\pi (f_x x + f_y y)} dx dy \quad (3-38)$$

(3-37) é a função que atinge o primeiro elemento difrativo. Conforme a figura 3.10, faremos uma mudança de coordenadas de (x,y) (ξ, η). Logo $U(x,y,z_{CD1})$ $U(\xi, \eta, z_{CD1})$.

Para calcularmos o espectro de difração da função que chega até o primeiro elemento difrativo, devemos multiplicar (3-37) por uma função de transmitância que represente o elemento difrativo.

Duas possíveis funções de transmitância poderiam ser:

$$t(\xi, \eta) = \exp\left[j \frac{m}{2} \text{sen}\left(2\pi f_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)\right] \times \left[\text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{R_{\max}}\right) - \text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{R_{\min}}\right) \right] \times \\ \times \text{rect}\left[\frac{\xi}{R_{\max}} - \frac{1}{2}\right] \quad (3-39)$$

que representa metade de um elemento circular senoidal de fase. R_{\max} e R_{\min} são limitações radiais do elemento.

Ou,

$$t(\xi, \eta) = \exp\left[j \frac{m}{2} \text{sen}\left(2\pi f_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)\right] \times \left[\text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{R_2}\right) - \text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{R_1}\right) \right] \times$$

$$\times \text{rect} \left[\frac{\theta(\xi, \eta)}{2\theta_0} \right] \quad (3-40)$$

onde $\theta(\xi, \eta) = \arctan[\eta/\xi]$. R_1 , R_2 e θ_0 são mostrados na figura 3.11:

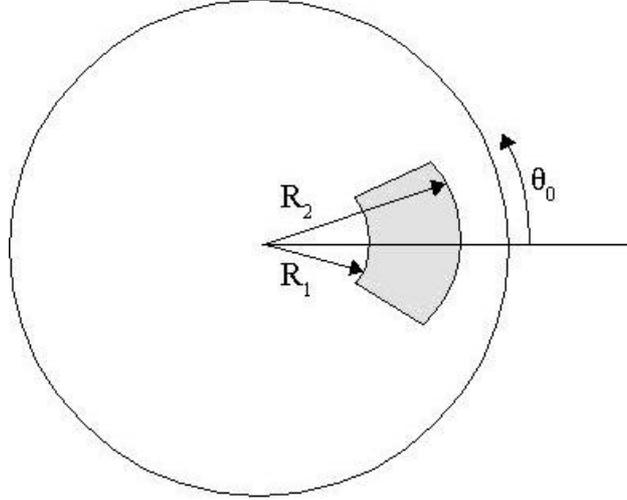


Fig. 3.11: Exemplo de função de transmitância para um elemento difrativo definido bidimensionalmente. A região em cinza, representa a região iluminada.

Poderíamos escolher, obviamente uma descrição espiral para o elemento, como em (3-21).

A função de onda imediatamente após passar pelo primeiro elemento é:

$$U_t(\xi, \eta, z_{CD1}) = U(\xi, \eta, z_{CD1}) \times t(\xi, \eta) \quad (3-41)$$

A difração de (3-41) resulta em:

$$U(x', y', z_{CD1} + z_{R1}) = \frac{e^{jk(z_{CD1} + z_{R1})} e^{jk \frac{x'^2 + y'^2}{2(z_{CD1} + z_{R1})}}}{j\lambda(z_{CD1} + z_{R1})} F\{U_t(\xi, \eta, z_{CD1})\} \quad (3-42)$$

$F\{\}$ é uma transformada que poderia ser uma transformada de fourier para a difração de Fraunhofer ou uma transformada de fourier de U_t multiplicada por uma fase (1-4) para a difração de Fresnel.

No plano $z = z_{CD1} + z_{R1}$ encontra-se um orifício de raio R_f . Multiplicando (3-42) por uma função de transmitância que represente esse orifício temos:

$$U_t(x', y', z_{CD1} + z_{R1}) = U(x', y', z_{CD1} + z_{R1}) \times \text{circ} \left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{R_f} \right) \quad (3-43)$$

Propagando a função de onda (3-43) até chegar ao segundo elemento difrativo usando o mesmo procedimento usado em [9] e renomeando as coordenadas (x', y') (ξ', η') , chega-se à:

$$U_t(\xi', \eta', z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'(f_x', f_y', z_{CD1} + z_{R1}) \times \text{circ}((\lambda f_x')^2 + (\lambda f_y')^2) \times \\ \times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x')^2 - (\lambda f_y')^2} (z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2})} \times e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (f_x' \xi' + f_y' \eta')} df_x' df_y' \quad (3-44)$$

onde

$$A'(f_x', f_y', z_{CD1} + z_{R1}) = \mathfrak{F}\{U_t(x', y', z_{CD1} + z_{R1})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_t(x', y', z_{CD1} + z_{R1}) e^{-j2\pi(f_x'x' + f_y'y')} dx' dy' \quad (3-45)$$

Multiplicamos (3-44) por uma função de transmitância do tipo (3-39) ou (3-40),

$$U_u(\xi', \eta', z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2}) = U_t(\xi', \eta', z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2}) \times t(\xi', \eta') \quad (3-46)$$

atento para a inversão de lado da área iluminada. (3-39) ficaria, por exemplo:

$$t(\xi', \eta') = \exp\left[j \frac{m}{2} \text{sen}\left(2\pi f_0 \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\right)\right] \times \left[\text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{R_{\max}}\right) - \text{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{R_{\min}}\right) \right] \times \\ \times \text{rect}\left[\frac{\xi'}{R_{\max}} + \frac{1}{2}\right] \quad (3-47)$$

Finalmente, o espectro de difração para um observador a uma distância z_{obs} do segundo elemento difrativo seria:

$$U_{\text{obs}}(x'', y'', z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2} + z_{\text{obs}}) = \frac{e^{jk(z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2} + z_{\text{obs}})} e^{jk \frac{x''^2 + y''^2}{2(z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2} + z_{\text{obs}})}}}{j\lambda(z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2} + z_{\text{obs}})} \times \\ \times F\{U_u(\xi', \eta', z_{CD1} + z_{R1} + z_{R2})\} \quad (3-48)$$

Esta é a função monocromática para a imagem. Para uma imagem com luz branca fazemos uma superposição de funções com esta no espectro visível.

Não dispomos deste resultado como expressão que nos permita ter valores numéricos para U_{obs} e conseqüentemente I_{obs} devido a problemas no cálculo numérico das integrais usando o software *Mathematica*. Acreditamos que em breve esse problema poderá ser resolvido, assim poderemos comparar uma função objeto com a intensidade de U_{obs} com o intuito de entender, usando o tratamento de difração escalar, a imagem pseudoscópica obtida com o sistema.

3.3 Referências:

- [1] Papoulis, A. “**Systems and Transforms with Applications in Optics**” New York, McGraw-Hill, 1968. p.234-239
- [2] Dubra, A.; Ferrari, J. A.; Am. J. Phys. **67**, 87, 1999
- [3] Papoulis, A. “**Systems and Transforms with Applications in Optics**” New York, McGraw-Hill, 1968. p.234
- [4] Bouchal, Z. Opt. Commun. **210**, 155, 2002
- [5] Bouchal, Z.; Wagner, J. and Chlup, M. Op. Commun. **151**, 207, 1998
- [6] Ferrari, J. A.; Garbusi, E. and Frins, E. M. Physical Review E **67**, 2003
- [7] Magalhães, D. S. F. “**Difração por CDs e ondas X**”, Dissertação, in: “Relatórios Finais 1 semestre 2002 – Volume 2: F530-F590-F809”, Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, Campinas, 2002. Disponível em: <<http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F809/arquivos/DIFRA%C7%C3O%20POR%20CDs%20E%20ONDAS%20X.pdf>> . Acesso em: 16 dez. 2004 13:58:00
- [8] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, **Chap.3 and 4**, Boston: Mc. Graw Hill, 1996
- [9] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996; **p.57-58**
- [10] Lunazzi, J. J. “**Difração**” apostila digital 1982-2002. Disponível em: <http://geocities.com/prof_lunazzi/f641/f641.htm>
- [11] Magalhães, D. S. F. “**Difração por CDs e ondas X**”, Vídeo “Difração” disponível em: <http://www.geocities.com/prof_lunazzi/ensino.htm>.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo falaremos sobre possíveis aplicações do sistema de dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente. Compararemos nosso sistema com uma câmera fotográfica refrativa, falaremos sobre a possível utilização de um simples CD para astro-fotografias e um pouco sobre aberrações. O fruto de um possível trabalho, partindo de uma nova observação experimental, será citado no final do capítulo

Para que o sistema de dupla difração com dois elementos descritos bidimensionalmente possa ser comparado com uma câmera fotográfica refrativa é necessário descrever rapidamente dois tipos de aberração presentes em sistemas refrativos.

Aberração cromática refrativa ^[1]

A luz visível abrange um espectro amplo que vai desde a cor vermelha até a cor violeta. Analisando as três cores primárias, o vermelho, o verde e o azul, (com as quais podemos obter qualquer outra cor), cada uma delas possui comprimento de onda diferente, sendo que o da luz vermelha é maior seguida pela luz verde depois pela luz azul que tem o menor comprimento de onda. Devido essa diferença, ao atravessar uma lente simples cada cor sofrerá um grau diferente de refração. Como consequência a luz vermelha irá focar mais afastada da lente, sendo que a luz verde fica em um ponto intermediário e a luz azul mais próxima da lente. Essas diferenças provocam o fenômeno da aberração cromática, que afeta a nitidez e gera contornos com cores alteradas

A figura 4.1 ilustra o fenômeno da aberração cromática em uma lente simples:

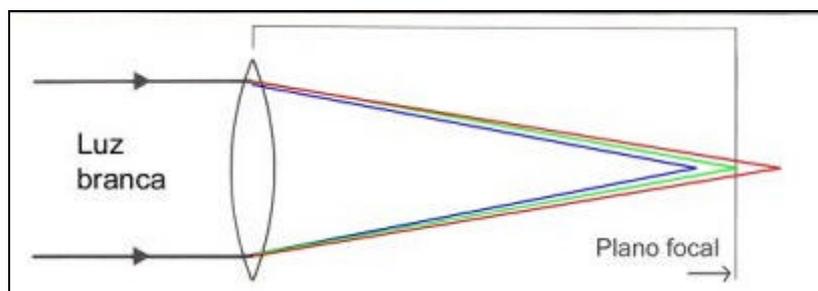


Fig.4.1: Aberração cromática

Com essa diferença de comportamento para cada cor, fica difícil fazer com que toda imagem seja focalizada no mesmo plano. Para corrigir este problema, utiliza-se a combinação de duas lentes, uma convergente e outra divergente, com vidros de diferentes índices de refração. Nas lentes menores elas são coladas uma à outra, mas em lentes maiores elas são apenas justapostas. Essas lentes recebem o nome de "lentes acromáticas".

Curvatura de campo focal refrativa ^[1]

Essa distorção está relacionada com a deficiência da lente focar em um campo realmente plano. As astro-fotografias, devido ao filme ser plano, ficam bem prejudicadas com este tipo de distorção.

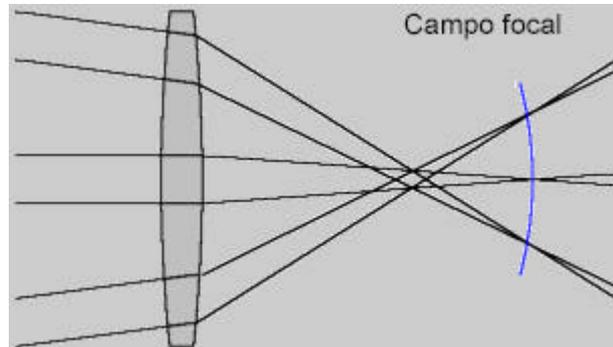


Fig.4.2: Detalhe do campo focal não plano

4.1 Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente com elemento intermediário como câmera fotográfica

Quando colocamos um filme fotográfico na posição de simetria em relação ao objeto, ou seja, no ponto crítico do observador, temos um tipo de câmera fotográfica para o registro da imagem.

Da mesma maneira que uma câmera convencional, com lentes refrativas, a imagem obtida com nosso sistema é fiel ao objeto na posição de focalização, mas com algumas diferenças:

Câmera fotográfica refrativa	Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente e elemento intermediário
Alta luminosidade, baixo tempo de exposição	Pouca luminosidade que implica em grande tempo de exposição.
Imagens desfocalizadas ficam como um borrão mantendo a cor original	Imagens desfocalizadas ficam como um borrono cromático, como pode ser visto, por exemplo na figura 2.17. Esse borrono guarda a informação de profundidade do desfoque.
Possível presença da aberração <i>curvatura de campo</i> , dependendo da lente usada	Sem <i>curvatura de campo</i>
Possível presença de <i>aberração cromática</i> , dependendo da lente usada	Sem <i>aberração cromática</i>
Aumentos transversais diferentes do longitudinal	Aumentos transversais iguais ao aumento longitudinal
Imagem com relevo normal, mas esticado longitudinalmente	Imagem com relevo invertido

Tabela 1: Comparação do sistema de dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente e elemento intermediário com uma câmera fotográfica refrativa.

É importante diferenciar o borrono cromático na desfocalização da chamada

aberração cromática. Nosso sistema preserva cor, mas no desfoque, a imagem fica colorido por um espectro que tem a propriedade original de codificar a profundidade com que o elemento desfocado estava a respeito da focal, ou seja, do ponto crítico.

4.2 Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente com elemento intermediário como sistema de holo-televisão

A rede de difração, a tela holográfica e a objetiva que compõe o sistema da holo-televisão poderiam ser substituídos pelo sistema de de dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente como mostrado na figura 4.3:

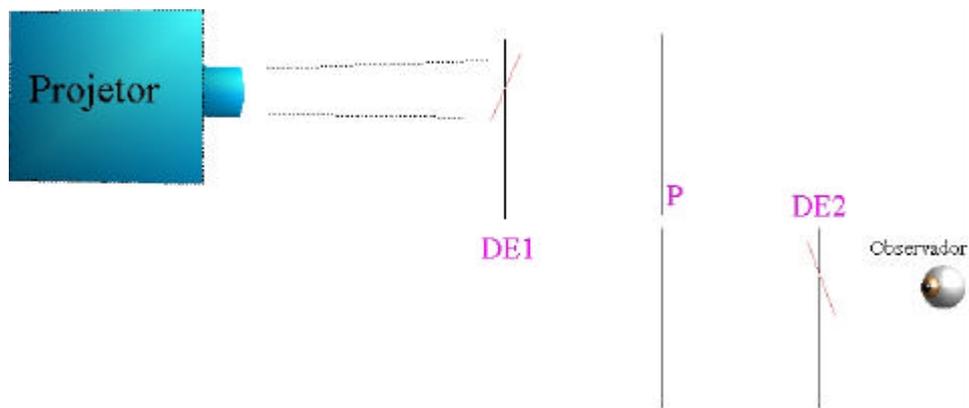


Fig. 4.3: Dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente com elemento intermediário como sistema de holo-televisão.

A vantagem seria a eliminação de aberrações e desfoque pela lente projetora mas por enquanto essa substituição é inviável devido a perda de luminosidade na substituição da objetiva de grande abertura por um orifício além da redução do campo de vista do observador.

4.3 Astro-fotografias por meio de um elemento descrito bidimensionalmente

Um objeto pontual tem sua imagem ao longo do feixe não difrativo (como na figura 3.8) na difração com um único elemento descrito bidimensionalmente. Uma possível fotografia poderia ser obtida colocando um filme dentro da região do feixe não difrativo. Uma foto tirada com esse sistema seria livre de aberração cromática e curvatura de campo.

4.4 Super-resolução

Detectamos o que parece ser uma super-resolução, no sistema de dupla difração, estando a imagem resultante com mais nitidez que o tamanho do orifício. Esse poderá ser fruto de trabalho futuro.

4.5 Referências

[1] INAPE (Instituto de Astronomia e Pesquisas – Araçatuba SP) “Óticos” em: <<http://www.inape.org.br/oticos.html>>

Capítulo 5

Conclusões:

- Um novo tipo de imagem foi estudada, que assemelha-se muito as imagens convencionais da óptica refrativa e reflexiva, mas tendo relevo invertido e magnificação longitudinal e transversal iguais.
- A simplicidade deste sistema pode ajudar no entendimento de propriedades complexas para a formação de imagens e no desenvolvimento de aplicações práticas, como telescópios e sistemas ampliadores de imagem mais leves, fáceis de fabricar e talvez com menos aberrações.
- A imagem obtida com elementos descritos bidimensionalmente é livre de astigmatismo horizontal e permite projeção devido a igual focalização horizontal e vertical.
- Os elementos difrativos descritos bidimensionalmente geram feixes não difrativos.

Apêndice A

Exemplos de espectros de difração

Com o intuito de familiarizar o leitor com os cálculos de difração escalar, resolveremos três casos de difração de Fraunhofer que serão úteis posteriormente na caracterização dos CDs. Nos três casos a onda incidente na função de transmitância é uma onda plana monocromática.

a) Abertura circular

Sendo o raio da abertura igual a w , e q a coordenada radial no plano da abertura então uma função de amplitude de transmitância t_A , que descreve a abertura pode ser:

$$t_A(q) = \text{circ}\left(\frac{q}{w}\right) \quad (\text{A-1})$$

onde a função circ é definida no apêndice B, equação B-6 e B-7.

Devido a simetria circular do problema, poderemos facilitar os cálculos usando a chamada transformada de Fourier-Bessel ^[1], que nada mais é do que a transformada de Fourier em coordenadas polares de uma função que depende apenas de sua dimensão radial. Explicitamente:

$$\mathcal{B}\{g_R(q)\} = G(\rho) = 2\pi \int_0^\infty q g_R(q) J_0(2\pi q\rho) dq \quad (\text{A-2})$$

O campo a uma distância z é dado pela equação 1-5, que nos leva a:

$$U(r) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{kr^2}{2z}} \mathcal{B}\{t_A(q)\} \Big|_{\rho=r/\lambda z} \quad (\text{A-3})$$

A transformada da função circ é imediata quando usamos a relação C-2 do apêndice C. Como resultado:

$$U(r) = \frac{A e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{kr^2}{2z}} \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \quad (\text{A-4})$$

E a distribuição de intensidade pode ser escrita como:

$$I(r) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z}\right]^2 \quad (\text{A-5})$$

Este é o espectro conhecido como espectro de Airy, em homenagem a G. B. Airy que foi o primeiro a derivá-lo. A figura A.1 é uma foto do espectro da abertura circular.

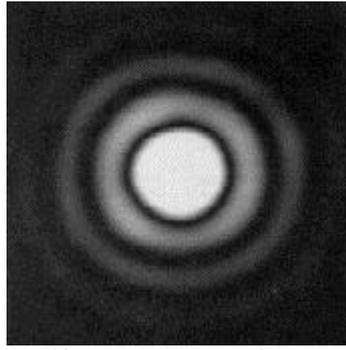


Fig. A.1: Espectro de difração de Fraunhofer de uma abertura circular.

b) Rede senoidal fina de amplitude

Consideremos uma rede de difração unidimensional (periodicidade ocorre em apenas uma dimensão cartesiana) de amplitude, ou seja, em uma dimensão ocorre uma modulação senoidal na transparência, variando de 0 a 1.

Uma função cosseno com eixo deslocado de meio (para eliminar valores negativos de transmitância) multiplicada por um modulador de transparência definem essa variação na transparência. Duas funções rect ²⁰ limitam o tamanho da rede.

$$t_A(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 \xi) \right] \text{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right) \quad (\text{A-6})$$

A transformada de Fourier do termo constante e o termo com cosseno resultará em três funções delta, uma centrada na origem do espaço de frequência e outras duas deslocadas de f_0 .

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 \xi)\right\} = \frac{1}{2} \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0, f_y) \quad (\text{A-7})$$

A transformada do rect resulta em uma função sinc.

$$\mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)\right\} = A \text{sinc}(2wf_x) \text{sinc}(2wf_y) \quad (\text{A-8})$$

Como sabemos que a transformada de Fourier de um produto simples resulta no produto de convolução das transformadas^[2], e que uma integral de uma função multiplicada por uma função delta é a função em questão no ponto da delta, temos:

$$U(x, y) = \frac{A}{j2\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \text{sinc}\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right) \left\{ \text{sinc}\left(\frac{2wx}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{2w(x+f_0\lambda z)}{\lambda z}\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{2w(x-f_0\lambda z)}{\lambda z}\right] \right\} \quad (\text{A-9})$$

Se f_0 é muito maior que $1/w$, ou seja, se a rede é muito maior que a distância entre os picos podemos desprezar a superposição das três ordens de difração no cálculo

²⁰ Função definida no apêndice B, equação B-1

da intensidade, obtendo

$$I(x, y) = \left(\frac{A}{2\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{2wy}{\lambda z} \right) \left\{ \text{sinc}^2 \left(\frac{2wx}{\lambda z} \right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2 \left[\frac{2w(x + f_0 \lambda z)}{\lambda z} \right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2 \left[\frac{2w(x - f_0 \lambda z)}{\lambda z} \right] \right\} \quad (\text{A-10})$$

Observamos três picos distintos, um na origem e outros dois em $x = -f_0 \lambda z$ e $x = f_0 \lambda z$. A largura do primeiro lóbulo da sinc, nos três casos, é igual a $\lambda z/w$.

A figura A.2 ilustra o espectro de difração.

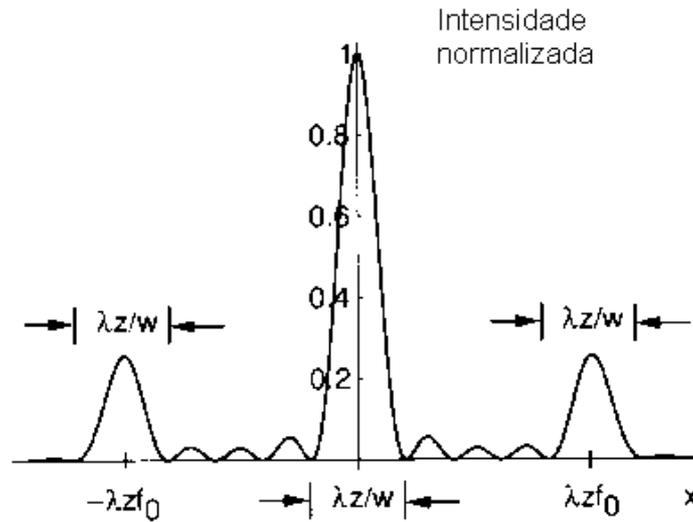


Fig. A.2: Espectro de difração de Fraunhofer para uma rede de difração fina senoidal de amplitude.

c) Rede senoidal fina de fase

Uma rede senoidal de fase causaria a uma onda incidente uma variação de fase dependente da posição de incidência da onda. Essa variação segue uma função cosseno e poderia ser causada por uma variação de índice de refração ou uma espessura variável de material.

Atentos a isso, podemos definir uma função da forma,

$$t_A(\xi, \eta) = e^{j \frac{m}{2} \text{sen}(2\pi f_0 \xi)} \text{rect} \left(\frac{\xi}{2w} \right) \text{rect} \left(\frac{\eta}{2w} \right) \quad (\text{A-11})$$

Usando a expansão em funções de Bessel da exponencial complexa, como é mostrada no apêndice C, equação C-3.

A transformada de Fourier dessa função é apenas uma somatória de funções delta deslocadas de qf_0 .

$$\mathcal{F} \left\{ e^{j \frac{m}{2} \text{sen}(2\pi f_0 \xi)} \right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q \left(\frac{m}{2} \right) \delta(f_x - qf_0, f_y) \quad (\text{A-12})$$

Como no exemplo anterior, o produto de convolução de uma função sinc por uma delta, resulta num sinc no ponto da delta. Logo a função de onda fica:

$$U(x, y) = \frac{A}{j\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \text{sinc}\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}\left[\frac{2w(x - qf_0 \lambda z)}{\lambda z}\right] \quad (\text{A-13})$$

Assumindo novamente que $f_0 \gg 1/w$, podemos desconsiderar a superposição dos ordens. A distribuição de intensidade fica:

$$I(x, y) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}^2\left[\frac{2w(x - qf_0 \lambda z)}{\lambda z}\right] \quad (\text{A-14})$$

Analisando a expressão, podemos ver infinitos picos da sinc equidistantes de largura $\lambda z/w$. Vemos que a amplitude de cada ordem está multiplicada por uma função de Bessel quadrada de ordem q . Esse termo é o chamado de eficiência de difração da rede, nesse caso igual a $J_q^2(m/2)$.

Na figura A.3 representamos a intensidade (normalizada a unidade) com m igual a 8 radianos.

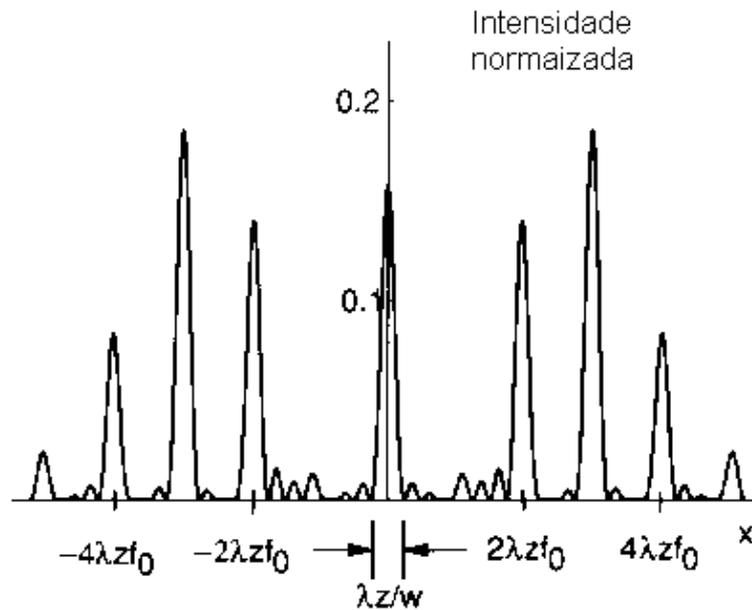


Fig. A.3: Espectro de difração de Fraunhofer para uma rede de difração fina senoidal de fase. As ordens +1 e -1 praticamente desaparecem nesse exemplo.

Referências:

[1] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.11-12

[2] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.9

Apêndice B

Funções Especiais [1]

Nesse apêndice definimos funções especiais usadas no texto. Algumas funções largamente usadas no texto são definidas como:

Função retângulo:

$$rect(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

Função sinc:

$$Sinc(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \quad (\text{B-2})$$

Função sinal:

$$Sgn(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 0 \\ 0, & |x| = 0 \\ -1, & |x| < 0 \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

Função triângulo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (\text{B-4})$$

Função Comb ou Pente de Dirac:

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad (\text{B-5})$$

Função círculo:

$$circ(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ \frac{1}{2}, & \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

em simetria circular torna-se:

$$circ(r) = \begin{cases} 1, & r < 1 \\ \frac{1}{2}, & r = 1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

Referências:

[1] Goodman, J. W. "Introduction to Fourier Optics" 2a. edição, **Chap.2:** Analysis of Two-Dimensional Signals and Systems, Boston: Mc. Graw Hill, 1996. p.12-15

Apêndice C

Relações envolvendo funções de Bessel [1]

Nesse apêndice citamos algumas relações envolvendo funções de Bessel que foram citadas no texto. Facilitando assim a compreensão dos tópicos associados.

A figura (C.1) mostra as funções de ordem zero, um e dois:

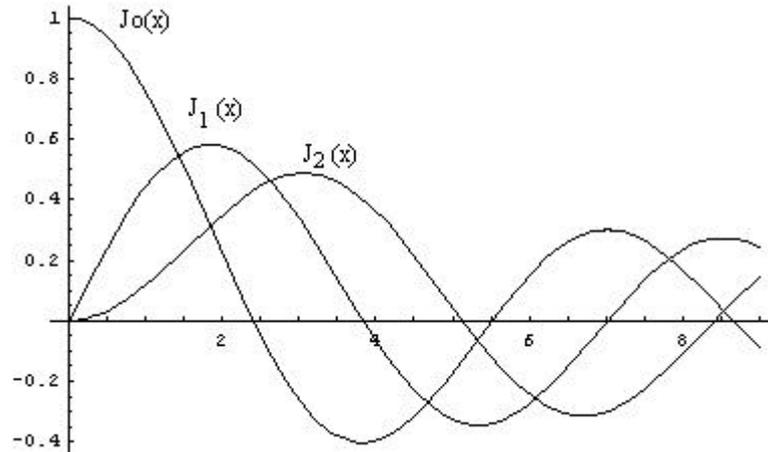


Fig.(C.1): Representação geométrica das funções de Bessel de ordem zero, um e dois.

Uma relação importante das funções de Bessel, relacionando funções de índices negativos e positivos é:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{C-1})$$

para n inteiro.

Uma relação bastante usada na integral de difração com simetria circular é:

$$\int_0^{\xi} x \cdot J_0(x) dx = \xi \cdot J_1(\xi) \quad (\text{C-2})$$

Uma identidade importante das funções de Bessel é usada para expansão de funções senoidais em exponenciais:

$$e^{j\frac{m}{2}\text{sen}(2\pi\nu x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{m}{2}\right) e^{j2\pi\nu x} \quad (\text{C-3})$$

Referências:

[1] Arfken, G. "Mathematical methods for physicists" **Chap 11: Bessel Function**. Ed. Academic Press, New York, 1968 p.627-692

Apêndice D

Holo-televisão

A holo-televisão é um sistema de imagem por dupla difração composto por uma rede de difração (codificadora de profundidade) uma objetiva (elemento intermediário seletor) e uma tela holográfica (decodificadora de profundidade).

Holo é um radical que vem do grego (*holos*) e significa “todo”. O termo holo-televisão faz menção a uma televisão na qual a imagem de "algo" fosse completa, com volume, como se estivesse diante do telespectador. Porém a cor ainda não é a real, tendo cores artificiais, ou mesmo apenas um "borreio cromático".

O desejo pelo desenvolvimento de uma holo-televisão interessaria a vários ramos da indústria, para que seus protótipos pudessem ser melhor visualizados antes da produção. Seria de grande utilidade para a simulação de sistemas tridimensionais e teria aceitação garantida em residências.

No texto a seguir será descrito um sistema de projeção na qual a imagem (um plano) pode-se encontrar em diferentes posições no espaço de uma tela especial. Possibilitando, por exemplo, uma pessoa filmada tocar sua mão (até mesmo atravessá-la) como se a imagem vista a sua frente fosse a de seu próprio fantasma.



Fig.D.1: Tira humorística sobre a expectativa de uma televisão holográfica publicada em 1989 numa entrevista com professor Lunazzi

1. Descrição

O aparato experimental da holo-televisão é composto de:

- Uma câmera doméstica Sony (SteadyShot Handycam Vision), com visão noturna;
- Um projetor multimídia Sharp XG-H400U;
- Uma rede de difração plana de fase de 1000 linhas/mm (incerteza de 5%);
- Uma objetiva PENTAX Takumar de 90 cm de distância focal;
- Uma tela holográfica de 65 cm de comprimento por 35 de altura.

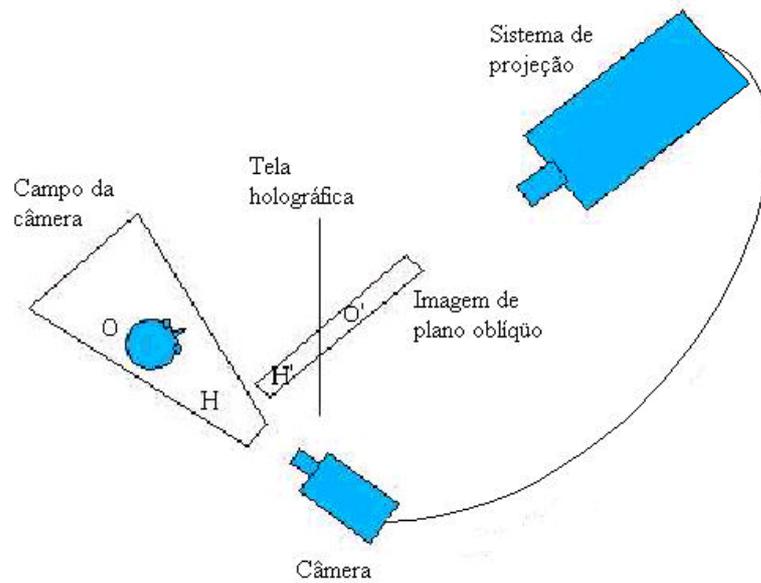


Fig.D.2: Descrição da holo-televisão. A câmera de vídeo capta a imagem do objeto/espectador, envia ao sistema de projeção (composto por projetor, rede de difração e objetiva) que projeta a imagem codificada pela rede de difração na tela holográfica. Esta última decodificará a imagem como um plano oblíquo a tela.

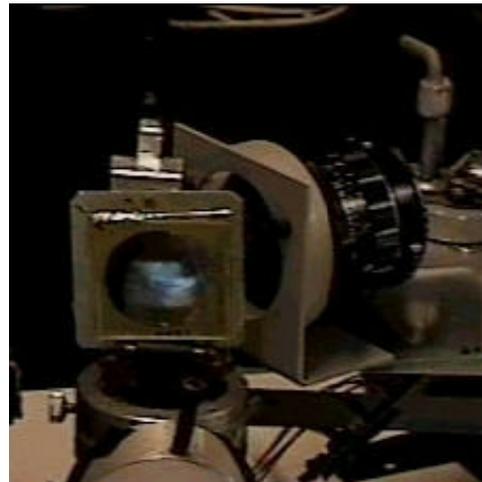
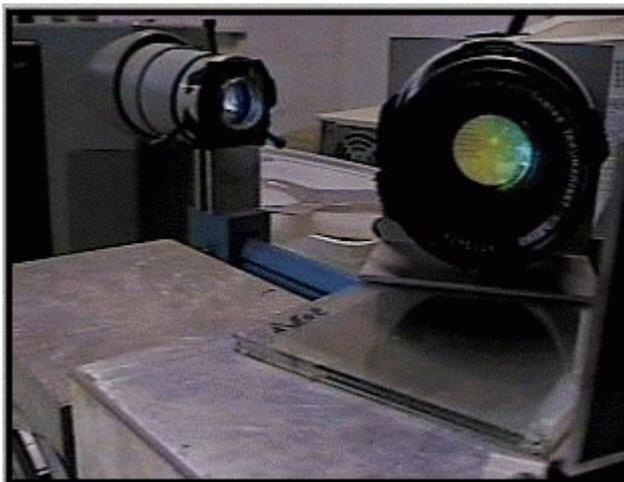


Fig.D.3: Fotos do sistema de projeção, composto pelo projetor, rede de difração e objetiva.



Fig.D.4: Sistema de projeção (esquerda). Câmera presa a tela holográfica (direita); a imagem é a mesma vista pelo telespectador enquanto é filmado.

2. Resultados experimentais:

Imagens típicas são mostradas abaixo:



Fig.D.5: Imagens feitas pelo sistema de holo-televisão onde (à direita) cenas de fotografias podem ser mostradas em posições fixas por trás, na tela e à frente dela. À esquerda uma cena de televisão é colocada a frente da tela



Imagens feitas pelo sistema com um único plano oblíquo, ou seja, parte da imagem e parte na frente da tela.

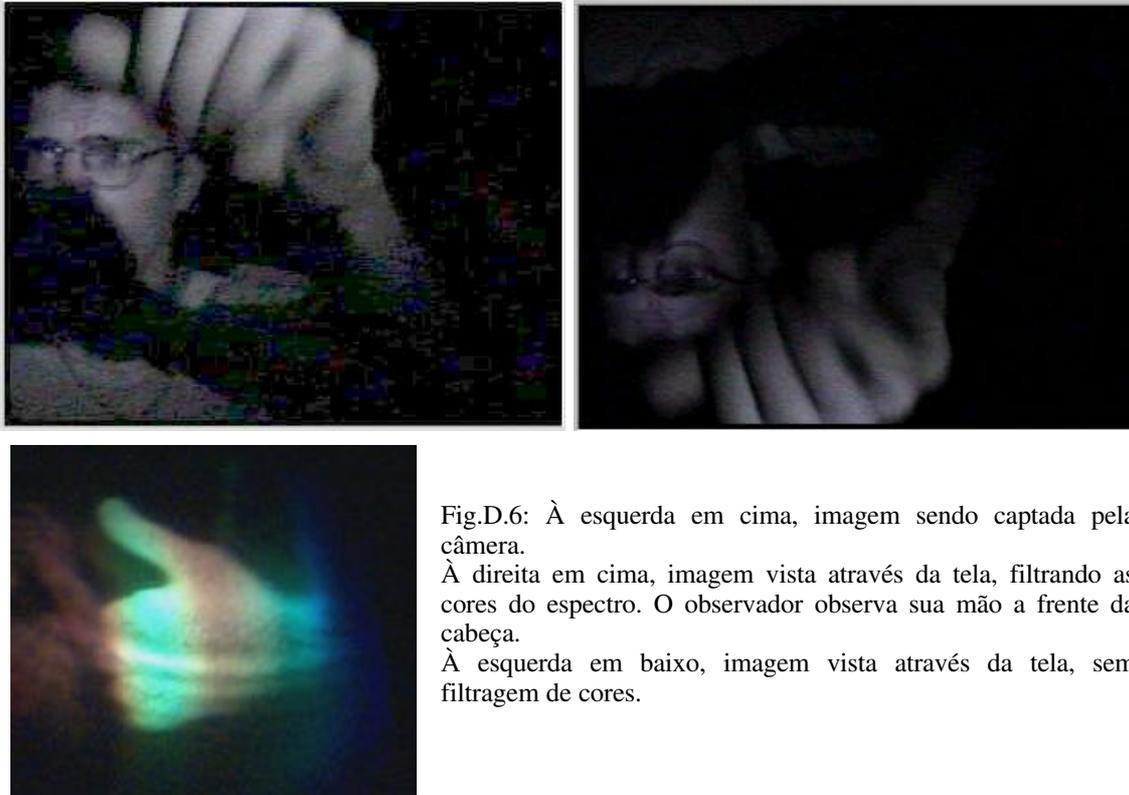


Fig.D.6: À esquerda em cima, imagem sendo captada pela câmera.
À direita em cima, imagem vista através da tela, filtrando as cores do espectro. O observador observa sua mão a frente da cabeça.
À esquerda em baixo, imagem vista através da tela, sem filtragem de cores.

Abaixo vemos a captação da imagem dos dedos de uma mão e duas fotos geradoras de um par estéreo.

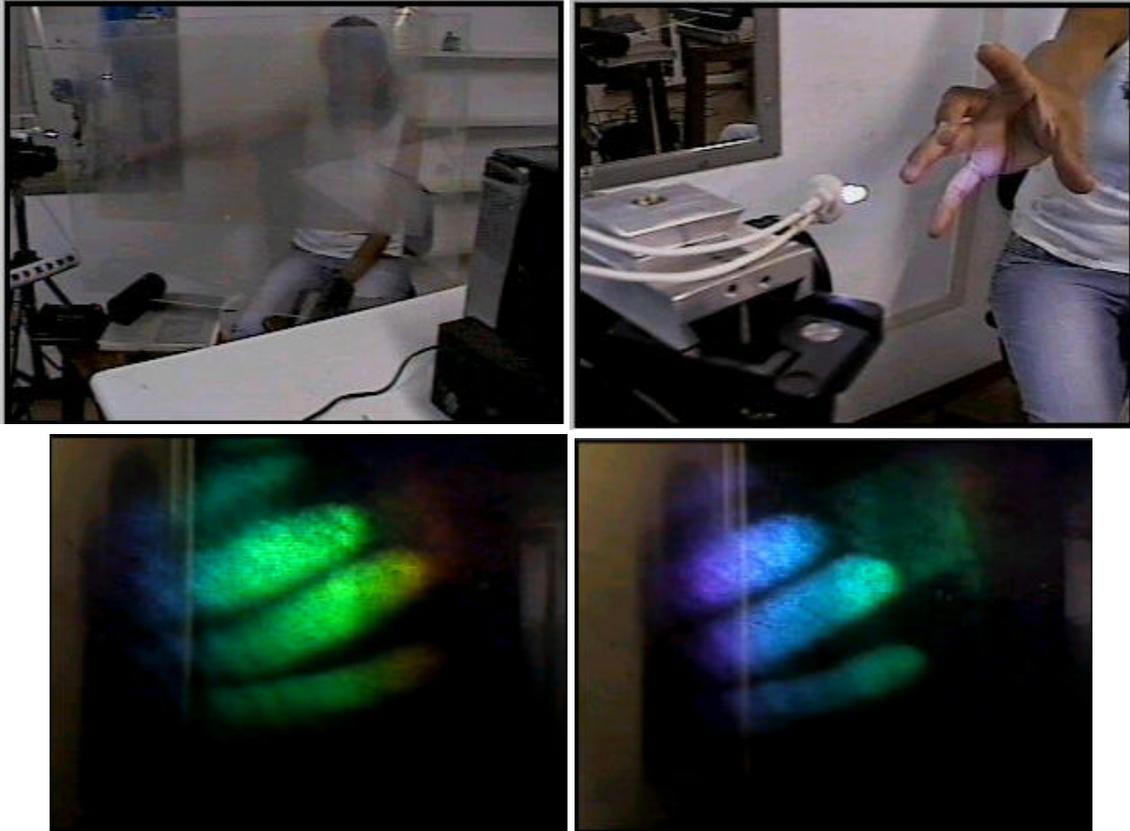


Fig.D.7: Captação da imagem e foto de um possível par estéreo.

Animações criadas pelo computador podem ser projetadas da mesma maneira que as imagens captadas pela câmera, essa técnica é conhecida como holoimagem eletrônica.



Fig.D.8: Animações feitas por computador

3. Referências

- [1] Lunazzi, J. J. "A New Possibility for Holographic television", Proc. of the **International Conference on Holography and Optical Image Processing**, Nanjing, China, 26-28.08.96, P.218-221 SPIE V2866
- [2] Lunazzi, J. J. "The Use of Holographic Screens for Electronic Imaging", Proc. of the **Regular Meeting of the Holographic Display Artists and Engineering Club-HODIC**, Nihon University, Japan, 30.08.96. Vol. 17, No. 1, p. 24-29 (Feb. 1997).
- [3] Mendonça, C. F. X.; Fonseca, E. G.; Lunazzi, J. J. "A Holographic Animation System Based on Holography", in Proc. of the **"Symposium on Lasers and their Applications"**, Campinas, SP, Brazil, December 3- 5, 1997, p.70-73.
- [4] Fonseca, E. G. et al. "A Holographic Visualisation System: A Sequel", Proc. of the **X International Symposium on Computer Graphics, Image Processing and Vision**, SIBGRAP'98, p.135-141, October 1998. Disponível em:
<<http://fenix.sid.inpe.br:1906/col/sid.inpe.br/banon/1998/06.04.18.20/doc/tag.html>>
- [5] Fonseca, E. G. "**Dois sistemas para animação holográfica**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado, Instituto de Computação, Unicamp, 1998.
- [6] Lunazzi, J. J. "Holografia Televido", Proceedings of the meeting **"Internacia Kongreso Universitato"**, Topical meeting of Universal Kongreso de Esperanto, Fortaleza-CE-BR,3-10.08.02 pp.25-32
- [7] Diamand, M. "**Sistema para visualização Holográfica de figuras geradas por computador**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica, Unicamp, 1994
- [8] Rivera, N. I. R. "**Imagem por dupla difração com luz branca usando duas redes de difração e uma fenda**" Campinas, SP. Originalmente apresentada como dissertação de mestrado, Instituto de Física Gleb Wataghin, Unicamp, 2003
- [9] Lunazzi, J. J. "Televisão Holográfica", Proceedings of the **V Seminário Iberoamericano de Mostradores de Informação- "V InfoDisplay"**, CenPRA, Campinas-SP-BR, 17-20.09.02 com demonstração de televisão 2D/3D sobre tela holográfica durante todo o evento.
- [10] Lunazzi, J. J. "Mostradores Holográficos", palestra e curso convidados pelo **VI Seminário Iberoamericano de Mostradores de Informação- "VI InfoDisplay"**, Fortaleza-CE-BR, 29.09-03.09.03 com demonstração de televisão 2D/3D sobre tela holográfica durante todo o evento.
- [11] Lunazzi, J. J. "A simplified HoloTV system", Proceedings of the **Frontiers of Optics 2004**, Rochester, EUA, 14-10-2004. Resumo disponível em:
<[61](http://www.abstractsonline.com/viewer/viewAbstract.asp?CKey={444DE338-5922-496B-838C-152ABC033450}&MKey={D9465EB9-EEA3-4476-89FC-7A424B368B75}&AKey={57B06C54-08A9-4FEF-9FDE-02D441047638}&SKey={99104A5A-5611-4308-9216-D74925DCB9BF}>></p></div><div data-bbox=)

- [13] Lunazzi, J.J. et al. "HoloTV using a single oblique plane: first results", **RIA/OPTILAS 2004** Isla de Margarita – Venezuela, in: *Libro de Resúmenes* p.114
- [14] Lunazzi, J. "**Procédé et dispositif pour projeter et observer des images différenciées ou stéréoscopiques, dessins, photographies, films cinématographiques ou vidéo**", INPI-FR, n. 8907241 1989/1993
- [15] Lunazzi, J. "**Processo para projeção de imagens com paralaxe horizontal sobre tela holográfica**", INPI, n. 9302553-0, solicitada 18.07.93, concedida em out. de 2000.
- [16] Ursel, D' "**Stereoscopic image production method and device for implementing same**", INPI -USA, n. 6483534, nov. 2002

Apêndice E

Publicações

Neste apêndice são postadas as publicações relacionadas ao assunto principal da tese feitas no período de mestrado, a dupla difração com elementos definidos bidimensionalmente com elemento intermediário.

A primeira (E.1) foi apresentada em Poços de Caldas no **XXVII Enc. Nac. de Fis. da Mat. Cond.** São estudadas: a imagem obtida por um sistema de dupla difração com elementos descritos bidimensionalmente, o ponto crítico e o campo para o observador. Neste último assunto existe uma correção que está mostrada na seção 2.2.3. Referência [10] do capítulo 2.

Na segunda (E.2), publicada na SPIE em outubro de 2004, estuda-se o aumento da imagem pelo deslocamento do segundo elemento difrativo. Referência [11] do capítulo 2.

Na terceira (E.3), submetida a Josa A em 30/03/2005, é provada a formação de uma imagem pseudoscópica pelo sistema.

Apêndice E.1

DIFFRACTIVE IMAGING WITH BIDIMENSIONAL ELEMENTS: FIRST EXPERIMENTAL RESULTS

José Joaquim Lunazzi, Daniel Souza Ferreira Magalhães

Laboratório de Óptica, Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas
lunazzi@ifi.unicamp.br; dsouza@ifi.unicamp.br

Abstract

Pseudoscopic (inverted depth) images made with bidimensional elements through a double diffraction process intermediated by a pinhole can be explained by its symmetry properties. The whole process is made under common white light illumination and allows the projection of images. To an observer the image appears enlarged up to infinite magnification.

Introduction

Pseudoscopic (inverted depth) images were only known from stereo photographic or holographic processes but only recently known in diffractive optics imaging. In a previous paper one of the authors [1] analyzed the properties of a diffraction-absorption-diffraction white-light imaging system composed of two diffraction gratings intermediated by a slit. That system can be considered as a magnifier and may have infinite magnification [2,3,4]. The image was pseudoscopic but could not be projected on a screen due to the difference between the horizontal and vertical imaging processes, which performs astigmatically. We extended the idea to a new system whose diffractive elements are bidimensional, analyzing it with the same theoretical approach, which explains the image through main ray directions. The new image may also have infinite magnification, and can be projected with equal lateral and longitudinal unitary magnifications. This new kind of images is interesting because could render larger parallax field than refractive or reflective optics, and constitute a new possibility to be studied for comparing its degree of aberrations with the conventional imaging systems. The diffraction properties of ordinary optical disks [5] can be employed as preliminar elements for experiencing this kind of imaging.

Experimental Setup

The system is composed of two identical diffractive elements symmetrically located to a pinhole. They are circular gratings (with constant spatial frequency of 658 ± 5 lines/mm) of which only a fraction of less than a half is being employed. The perpendicular to the pinhole pass through the center of curvature of the grating lines. A white-light object is on one side and part of the light, which is diffracted by the first element, goes through the pinhole. Figure 1 shows the ray-tracing situation.

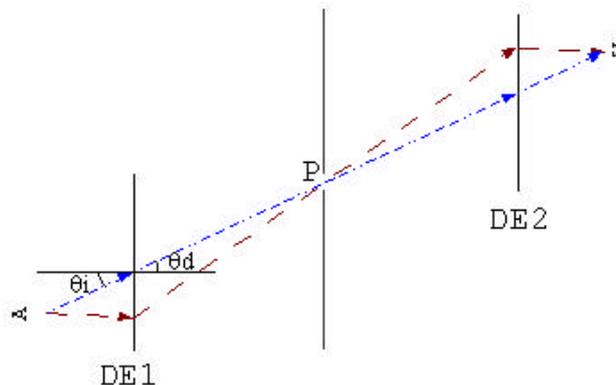


Figure 1: Ray-tracing situation of the imaging formation.

DE1 e DE2 are the diffractive elements and point P corresponds to the position of the pinhole. From a point of the A shaped object, two different wavelength rays spread and are diffracted at DE1. Neglecting diffraction effects by the pinhole, a completely symmetrical situation can be attributed to the light distribution exiting the pinhole due to the symmetrical positioning of the second diffractive element. We can consider that the pinhole determines the path of every ray and it is evident that there is only one

wavelength that, according to the diffraction law, corresponds to each ray direction. That is:

$$\sin \theta_i - \sin \theta_d = \lambda v \quad (1)$$

θ_i being the angle of incidence to DE1, θ_d the corresponding diffraction angle, λ the wavelength and v the number of lines per millimeter of the gratings. Rays passing through DE2 diffracting to an order opposite to that of the first diffraction converge to a point symmetrically located in respect to the pinhole and the object. The result is an image after the second diffracting element whose depth is inverted. To understand that the image is complete one must notice that the selected plane for Figure 1 can be any plane containing the pinhole and the center of curvature of the grating lines so that rays from many directions constitute the image. If a screen is located on the position of the convergence, the image could be focused. Figure 2 shows the position of two object points, the first diffraction element, and the light path to the point of symmetry.

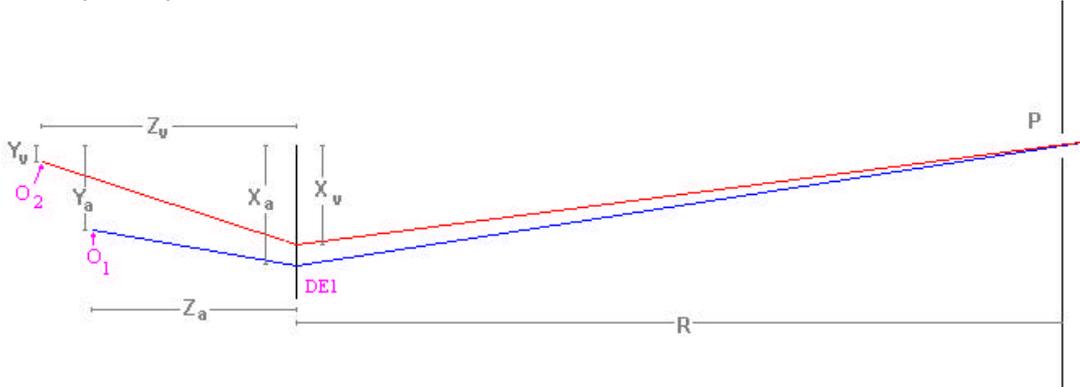


Figure 2: Two object points and its distances.

Subscript **a** indicates the blue ray and **v** the red ray. The position of the rays at the grating, X_a and X_v , are calculated using the diffraction equation set (2).

$$\begin{aligned} \frac{X_a - Y_a}{\sqrt{(X_a - Y_a)^2 + Z_a^2}} + \frac{X_a}{\sqrt{X_a^2 + R^2}} &= \lambda_a v \\ \frac{X_v - Y_v}{\sqrt{(X_v - Y_v)^2 + Z_v^2}} + \frac{X_v}{\sqrt{X_v^2 + R^2}} &= \lambda_v v \end{aligned} \quad (2)$$

With these coordinates and using symmetrical properties we can know the trajectory of the rays diffracted by the second element.

Critical Point

In Figure 3 (x, y) are the coordinates of an observer. The figure shows the system with an object at three different depth positions O_1, O_2, O_3 . We can notice that the object field of view for a fixed position of the observer depends on the object distance in a manner which resembles that of an object under a converging lens: it can change dramatically when close to a certain critical distance which renders infinite magnification.

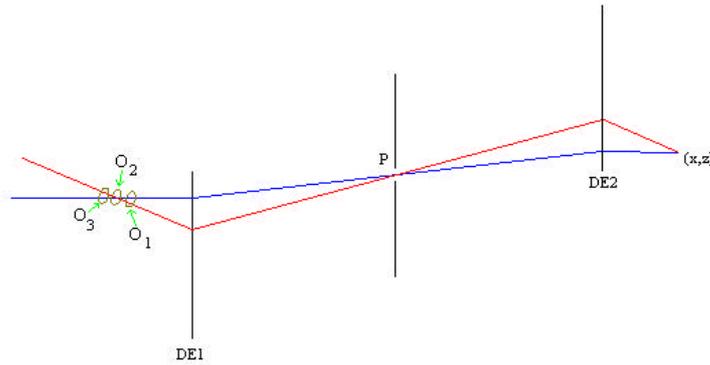


Figure 3: Ray-tracing scheme showing object field of view. Object in three positions around the critical point. In front O_1 , at the critical point O_2 and behind the critical point O_3

Field of view of the observer:

The object field is the common region corresponding to the superposition of rays allowed to pass the pinhole and then diffracted. It generates a symmetrical field that converges into the image, and then diverges angularly to render the observer's field. The radial (respects to the diffraction element curvature) parallax can be calculated by considering two points of the object and the path that is allowed to light whose wavelength values are on extremes of the spectrum. The angular region limited by this rays is the common region for simultaneous observation of the two points and includes all intermediary points (Figure 4).

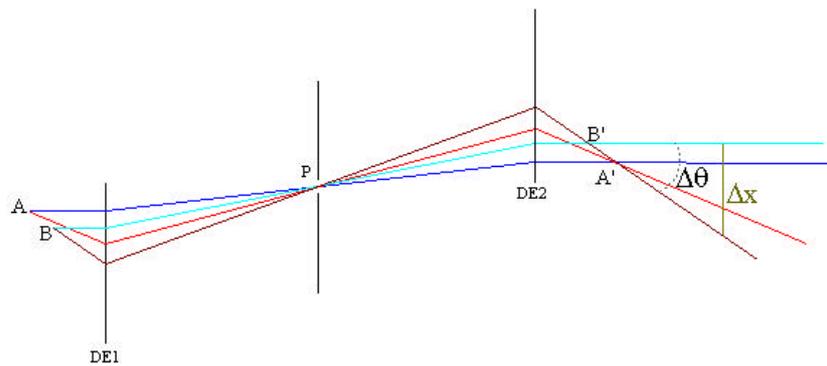


Figure 4: Ray-tracing scheme for calculating the field of view.

Although not included in the figure, it is easy to demonstrate that both object points are imaged by all wavelengths if we trace a ray with the longer wavelength exiting from object point A, and one with the shorter wavelength exiting from object point B. Both rays can pass the pinhole and meet their corresponding image points.

We can then obtain the angular field $\Delta\theta$ by calculating two λ values at the extreme wavelengths at the corresponding extreme lateral points of the object and subtracting them.

Results and Discussions

Image of a halogeneous lamp with reflector

We used a halogeneous 50 W lamp (Figure 6) with a parabolic 46 mm diameter faceted reflector behind it, constituting an extended object. The image is showed in figure 5:

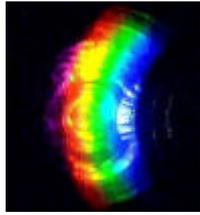


Figure 5: Image of a halogene lamp done by the system



Figure 6: Halogene lamp with reflector.

The extension of the image was close to that of the object, but not allowing to see the whole object. From figure 5 we can see the circular distribution of colors, done by the circular diffraction element.

Critical point observations

In the figure 7 we can see three different positions of the image of a 25 W halogene lamp (without reflector), corresponding with O_1 , O_2 and O_3 (figure 3). The image was projected, and we verified the lateral and longitudinal magnifications to be unitary.



Figure 7: Image projected in a screen of an halogene lamp passing through the critical point.

We can see the inversion of colors due to the passage through the critical point. We can not see a circular color distribution because the filament thickness was very small causing color mixing in the dispersion.

Measurement of the field of view of the observer:

Using two small filament lamps (with 2 mm of diameter, 5W) we simulated the end points (O_1 and O_2 showed in figure 2) of an entire object. The object field is in between both points. Figure 8 shows the field of view (Δx) to an observer that is at distance Z_{ob} of the second element.

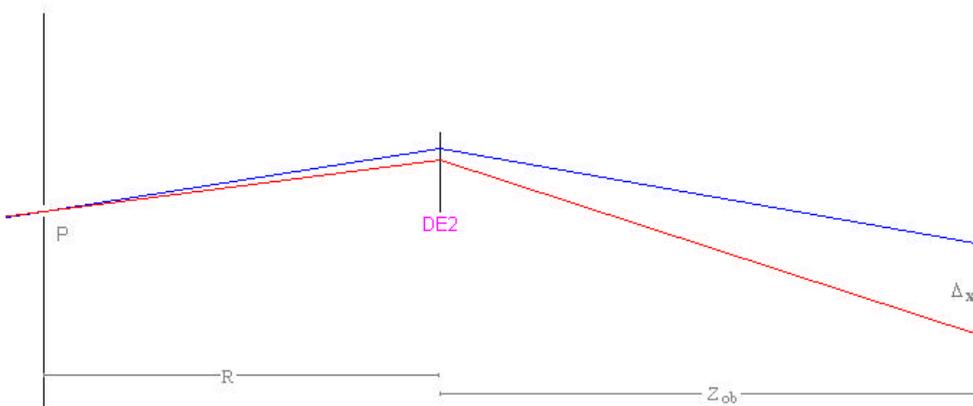


Figure 8: Field of view to an observer

The field of view was calculated using geometrical analysis, providing the equation (3).

$$\Delta x = Z_{ob} \left(\frac{X_v - Y_v}{Z_v} - \frac{X_a - Y_a}{Z_a} \right) + X_a - X_v \tag{3}$$

Using the values of table 1, with a scientific calculator we solved equations (2) and (3) obtaining the field of view Δx of 71 ± 3 mm. By measuring, we founded 65 ± 4 mm. The percent error calculated was 7,5 %, with accuracy to an experimental error due to the color perception of the human eye.

	$\lambda_r = 670 \text{ nm}$	$\lambda_a = 500 \text{ nm}$
$v = 658 \pm 5 \text{ lines/mm}$	$X_r = 39 \pm 1 \text{ mm}$	$X_a = 47 \pm 1 \text{ mm}$
$R = 300 \pm 1 \text{ mm}$	$Z_r = 100 \pm 1 \text{ mm}$	$Z_a = 80 \pm 1 \text{ mm}$
$Z_{ob} = 411 \pm 1 \text{ mm}$	$Y_r = 6 \pm 1 \text{ mm}$	$Y_a = 33 \pm 1 \text{ mm}$

Table 1: Experimental values.

Conclusions

A new kind of images can be achieved using diffracting elements and white-light objects, which resembles very much the conventional imaging of refractive or reflective optics, but having inverted depth and unitary longitudinal and transversal magnification simultaneously. Its extreme simplicity may help in understanding further properties and for developing practical applications.

Acknowledgements

The “Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior”- CAPES of the Brazilian Ministry of Education is acknowledged for a fellowship for D.S. Ferreira Magalhães
The “FAEP” of Campinas State University for founding and support.

References:

- [1] J.J. Lunazzi and N.I Rivera, “Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit”, Opt. Express 10, 1368-1373 (2002) on: http://www.opticsexpress.org/issue.cfm?issue_id=168pl
- [2] J. J. Lunazzi and N. I. Rivera, “Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: Critical point and experimental checking” XXVI ENFMC, SBF. Caxambu-M.G. on: http://www.sbf1.if.usp.br/procs/2003/R_estendido/e97.pdf
- [3] J.J. Lunazzi and N.I Rivera, “Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: critical point properties” submitted to Opt. Exp. in december 2003.
- [4] N. I. R. Rivera "Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda" on:<http://www.ifi.unicamp.br/ccjdr/teses/apresentacao.php3?filename=IF1368>
- [5] D. S. F. Magalhães “Difração por CDs e ondas X” on: http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/lista_projetosF809-1o_sem_2002.htm

Pseudoscopic white-light imaging by means of two bi-dimensional diffracting elements and a pinhole

José J. Lunazzi*^a, D.S. F. Magalhães^a

^aInstitute of physics, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil

ABSTRACT

Diffracted images with inverted depth were first reported by the authors where a lens or slit intermediated the white-light double diffraction process. The diffracting elements were simple straight line diffraction gratings and the image could be seen but not projected due to its strong astigmatism. The generalization of the symmetry properties to bi-dimensionally defined diffracting elements allows to produce projected images with circular gratings intermediated by a pinhole. Acting as a focusing element, the possibility of enlargement is reported here with experimental results.

Keywords: diffractive imaging

1. INTRODUCTION

Pseudoscopic (inverted depth) images were only known from stereo photographic or holographic processes but only recently known in diffractive optics imaging. In a previous paper one of the authors [1] analyzed the properties of a diffraction-absorption-diffraction white-light imaging system composed of two diffraction gratings intermediated by a slit. That system can be considered as a magnifier and may have infinite magnification [2,3]. The image was pseudoscopic but could not be projected on a screen due to the difference between the horizontal and vertical imaging processes, which performs astigmatically. We extended the idea to a new system whose diffractive elements are bidimensional, analyzing it with the same theoretical approach, which explains the image through main ray directions. The new image can be projected [4] with equal lateral and longitudinal unitary magnifications. This new kind of images is interesting because could render larger parallax field than refractive or reflective optics. The diffraction properties of ordinary optical disks [5] can be employed as preliminar elements for experiencing this kind of imaging.

2. METHODOLOGY

The system is composed of two identical diffractive elements symmetrically located to a pinhole. They are circular gratings (with constant spatial frequency of 658 ± 5 lines/mm) of which only a fraction of less than a half is being employed. The perpendicular to the pinhole pass through the center of curvature of the grating lines. A white-light object is on one side and part of the light, which is diffracted by the first element, goes through the pinhole. Figure 1 shows the ray-tracing situation.

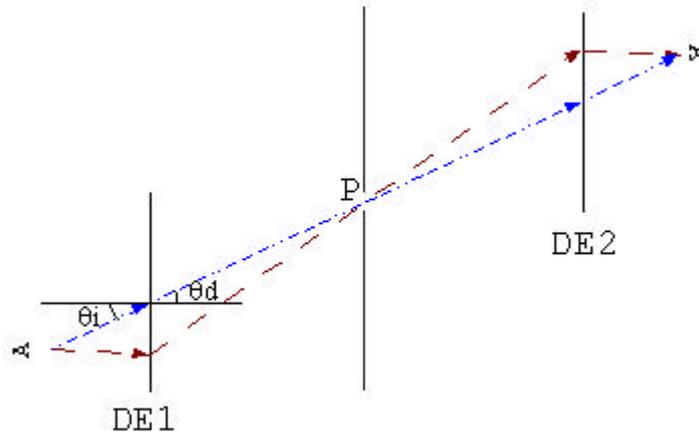


Fig. 1. Ray-tracing situation of the imaging formation.

DE1 e DE2 are the diffraction elements and point P corresponds to the position of the pinhole. From a point of the A shaped object, two different wavelength rays spread and are diffracted at DE1. Neglecting diffraction effects by the pinhole, a completely symmetrical situation can be attributed to the light distribution exiting the pinhole due to the symmetrical positioning of the second diffractive element. We can consider that the pinhole determines the path of every ray and it is evident that there is only one wavelength that, according to the diffraction law, corresponds to each ray direction. That is:

$$\sin \hat{\epsilon}_i - \sin \hat{\epsilon}_d = \hat{\epsilon} \hat{\iota} \quad (1)$$

$\hat{\epsilon}_i$ being the angle of incidence to DE1, $\hat{\epsilon}_d$ the corresponding diffraction angle, $\hat{\epsilon}$ the wavelength and $\hat{\iota}$ the number of lines per millimeter of the gratings. Rays passing through DE2 diffracting to an order opposite to that of the first diffraction converge to a point symmetrically located in respect to the pinhole and the object. The result is an image after the second diffracting element, whose depth is inverted. To understand that the image is complete one must notice that the selected plane for Figure 1 can be any plane containing the pinhole and the center of curvature of the grating lines so that rays from many directions constitute the image. If a screen is located on the position of the convergence, the image can be focused.

2.1. Enlargement by displacement of the second diffracting element

By displacing the second diffracting element (modifying R_2), an enlargement of the image occurs to a fixed observer at position $(Z_{ob} + R_2)$ and a fixed object put in to Z_{oj} . The enlargement is dealt by L/L_0 and a relation with the distance of the displacement from the symmetrical point ($R_1=R_2$) is expected to be linear because the rays that found Z_{ob} is just the geometric projection of the ones that has passed through Z_{oj} (in the image after the second DE).

Figure 2 shows the situation:

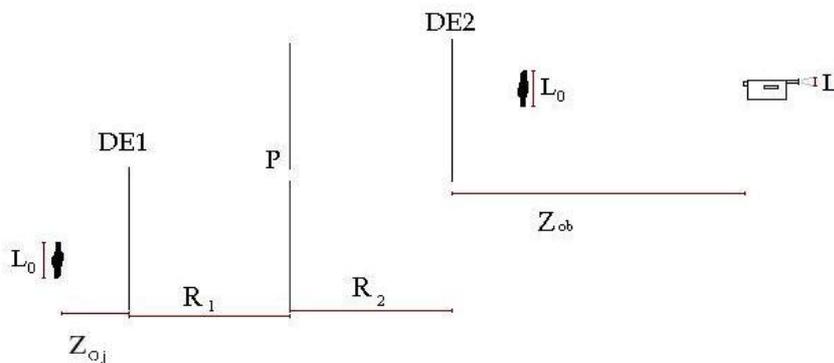


Fig. 2. Notation to be used in the enlargement.

4. RESULTS

3.1. Image of a Halogeneous lamp with reflector

We used a halogeneous 50 W lamp (Figure 3, left side) with a parabolic 46 mm diameter faceted reflector behind it, constituting an extended object. The image is showed in figure 3, right side:



Fig. 3. Halogeneous lamp and its image done by the system

The extension of the image was close to that of the object, but not allowing to see the whole object. From figure 3 we can see the circular distribution of colors, done by the circular diffraction element.

3.2. Enlargement by displacement of the second diffracting element

Using a halogeneous lamp of 20 W and $(Z_{ob} + R_2) = 70$ cm and the object at 16.5 cm from the first diffraction element we have an angular magnification of almost $\times 2$ for the situation where the magnification was $\times 1$. We measured the enlargement of the image when the second diffracting element was displaced, taking with reference this case of total symmetry ($R_1=R_2$). Figure 4 shows the linear relation gotten and the Figure 5, some pictures taken from a fixed position of the observer (they are in scale).

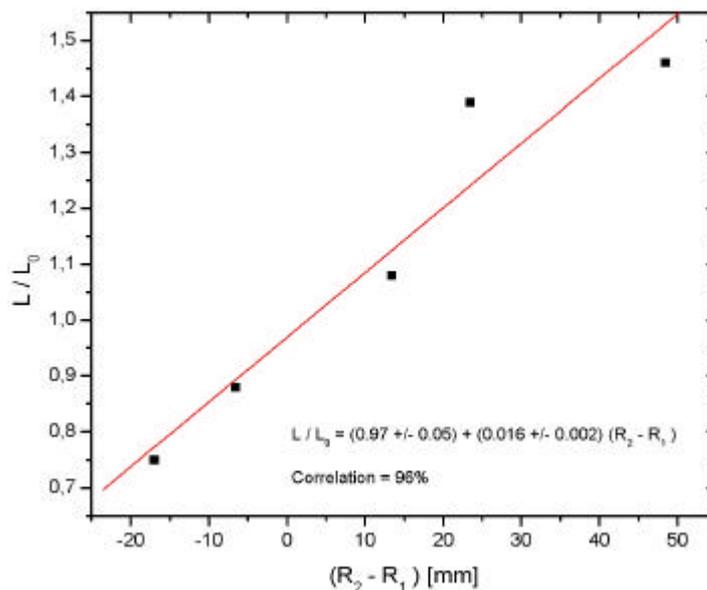


Fig. 4. Linear relationship between displacement of the second diffracting element and magnification.

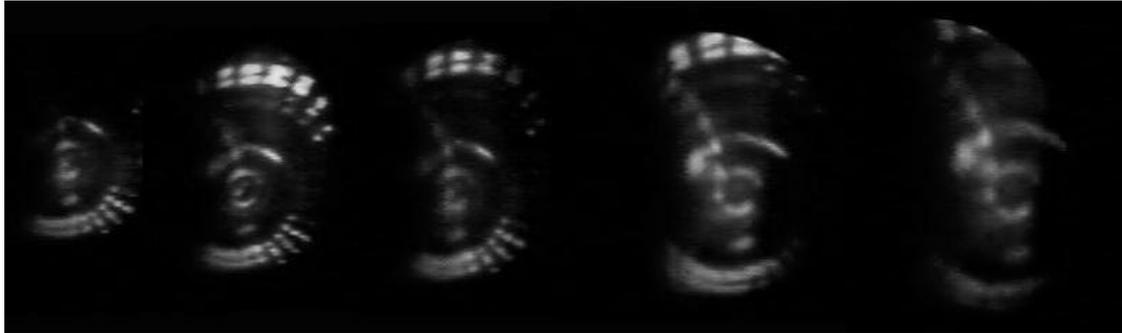


Fig. 5. Magnification at five positions of the second diffracting element.

4. CONCLUSIONS

A new kind of images can be achieved using diffracting elements and white-light objects, which resembles very much the conventional imaging of refractive or reflective optics, but having inverted depth and unitary longitudinal and transversal magnification simultaneously. Its extreme simplicity may help in understanding further properties for practical applications.

ACKNOWLEDGEMENTS

The “Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior”- CAPES of the Brazilian Ministry of Education is acknowledged for a fellowship for D.S. Ferreira Magalhães

REFERENCES

1. J.J. Lunazzi and N.I Rivera, *Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit*, Opt. Express 10, 1368-1373 (2002) on: http://www.opticsexpress.org/issue.cfm?issue_id=168pl
2. J. J. Lunazzi and N. I. Rivera, *Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit: Critical point and experimental checking*, XXVI ENFMC, SBF, Caxambu-M.G. on: http://www.sbf1.if.usp.br/procs/2003/R_estendido/e97.pdf
3. N. I. R. Rivera, *Imagens por dupla difração com luz branca usando redes de difração e uma fenda*, on: <http://www.ifi.unicamp.br/ccjdr/teses/apresentacao.php3?filename=IF1368>
4. J.J. Lunazzi, D.S.F. Magalhães, *Diffracting imaging with bidimensional elements: first experimental results*, Brazilian Society of Physics meeting “XXVII ENFMC”-Poços de Caldas-MG, May 4-8th, 2004.
5. D. S. F. Magalhães , *Difração por CDs e ondas X*, on: http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/lista_projetosF809-Io_sem_2002.htm

*lunazzi@ifi.unicamp.br; phone 54-19-37882451

Pseudoscopic imaging in a bidimensional double diffraction process intermediated by a pinhole: experimental checking

José J. Lunazzi, Daniel S. F. Magalhães

Institute of Physics Gleb Wataghin, State University of Campinas, Campinas SP Brazil

lunazzi@ifi.unicamp.br; dsouza@ifi.unicamp.br

Abstract

Pseudoscopic (inverted depth) images made with bidimensional elements through a double diffraction process intermediated by a pinhole can be explained by its symmetry properties. The whole process is made under common white light illumination and allows the projection of images. This projection let us demonstrate that the position of the image of two object points away longitudinally are really pseudoscopic image points.

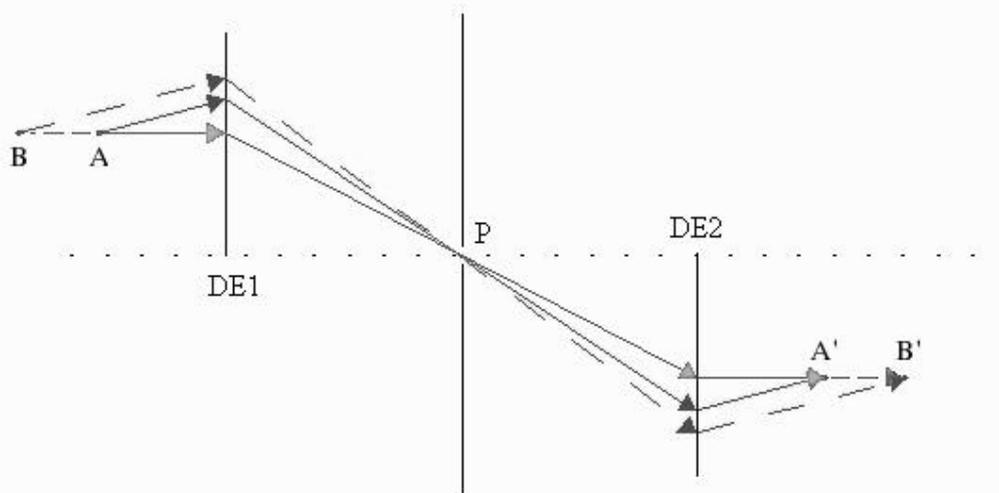
Introduction

The pseudoscopic image in a double diffraction process with diffraction gratings intermediated by a slit is known from [1,2] where the image was not real because convergence happened in only the horizontal plane thus generating strong astigmatism. But when we substitute the diffraction gratings for bidimensionally acting diffracting elements and the slit for a pinhole, it will cause a convergence of all rays at the position of the image [3,4]. This convergence permit the image to be projected. The projected image is focused in the symmetrical position to the object, where it seems as correct as the object is. The defocused points appears as a chromatic spot. In this paper we demonstrate the inverted depth of two imaged objects by means of the projection of their images.

Description

The diffracting elements considered are constituted of spiral grooves but we can consider also more general circular or bidimensional diffracting elements.

Figure 1 shows two object points A and B placed in front of a half diffraction element (DE1). The diffracted light passes through a pinhole (P) and reaches an identical half diffraction element (DE2). The



center of the spiral for DE1 and DE2 was aligned as to be on the line perpendicular to the pinhole, indicated as a dotted line on the figure. The image is formed at A' and B', which stay at a point symmetrical of A and B respect to P.

Figure 1: Image formation of two object points A and B.

To demonstrate the imaging properties of our system it suffices to consider that for each ray exiting an object point a plane as shown in figure 1 can be traced to determine the symmetric image. The existence

of light rays can be assured for an extense region reached by the diffracted light after the first element.

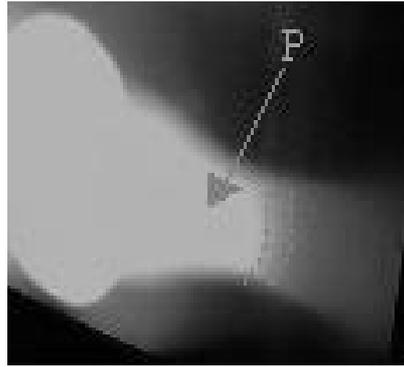


Figure 2: Light distribution reaching the pinhole P.

Experimental Setup

We employed two transparent²¹ halves of a compact disc as DE1 and DE2 with spacial frequency of 658 ± 5 lines/mm at any radial distance. We limited the illuminated region as shown in figure 3 just to facilitate the identification of the illuminated area.

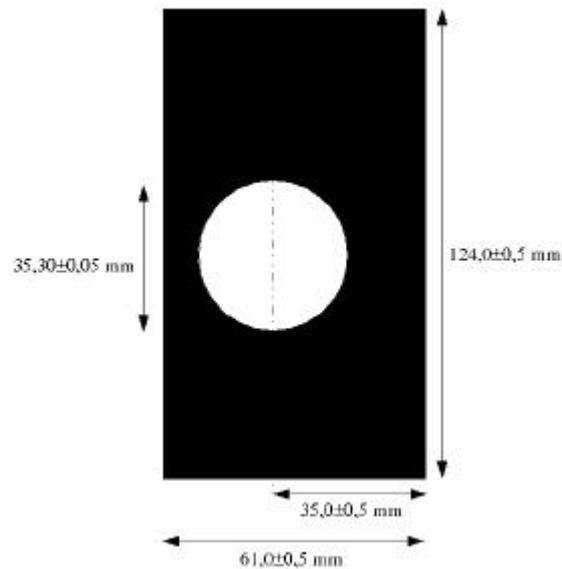


Figure 3: Support for the diffraction element, used in the experiment. In the circular region, where stays the diffraction element, the light passes through, being diffracted.

As objects we employed two filaments (F_1 and F_2) of tungsten lamps of 40 W. The objects are showed in figure 4.

²¹This can be gotten removing the reflective layer of conventional CDs.

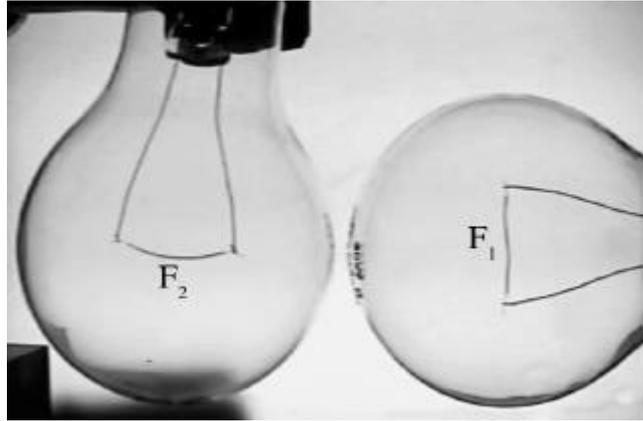


Figure 4: Picture of the objects F_1 and F_2 used to obtain the pseudoscopic image.

One can observe that one filament stays in vertical position (F_1) and the other stays in horizontal (F_2). F_1 will be placed in front of F_2 , to an observer (cam) situated as shown in figure 5.

An aerial vision of the experimental apparatus is shown in figure 5. A camera “Sony handycam” with adjustable focus, linked with a web cam Intel, is used in the image caption.

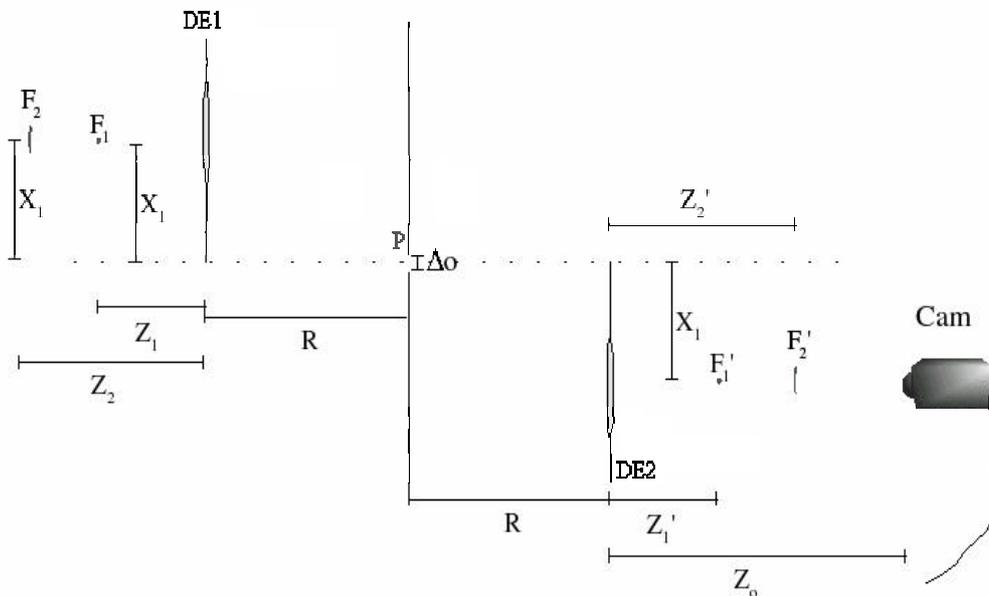


Figure 5: Aerial vision of the apparatus of image formation.

Results and Discussions

The values of the variables in figure 5 were:

R [mm]	Z_o [mm]	Δo [mm]	X_1 [mm]	Z_1 [mm]	Z_2 [mm]	Z_1' [mm]	Z_2' [mm]
130 ± 1	477 ± 1	$0,5 \pm 0,1$	35 ± 1	73 ± 2	122 ± 2	67 ± 3	117 ± 3

Table 1: Experimental checking of the pseudoscopic image.

The focalized images of each filament are showed in figures 6 and 7.

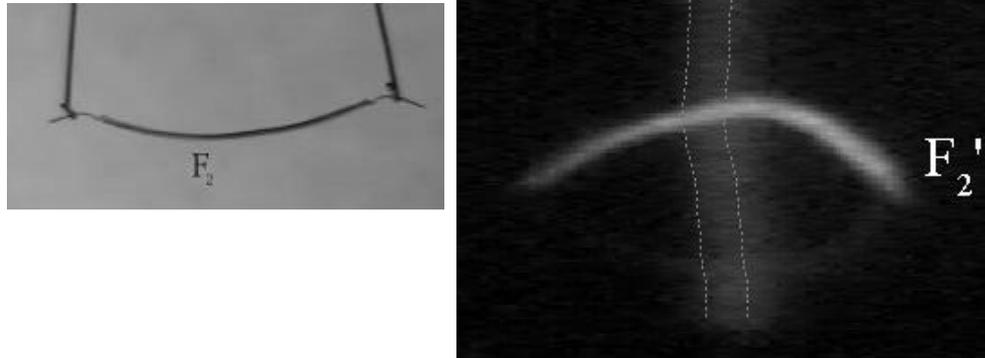


Figure 6: F_2 at left. The image of F_2 (F_2') at right. To represent the defocus of the image of F_1 we separate the three fundamental colors: blue, green and red (from left to right) with a hatched line.

We can note that the image is inverted up-down. The chromatical spot at figure 6 right, is composed of the rays that had composed F_1' . The width of this spot keeps the information of the depth of the image, as is known as “codification and decodification by diffraction” [5,6].

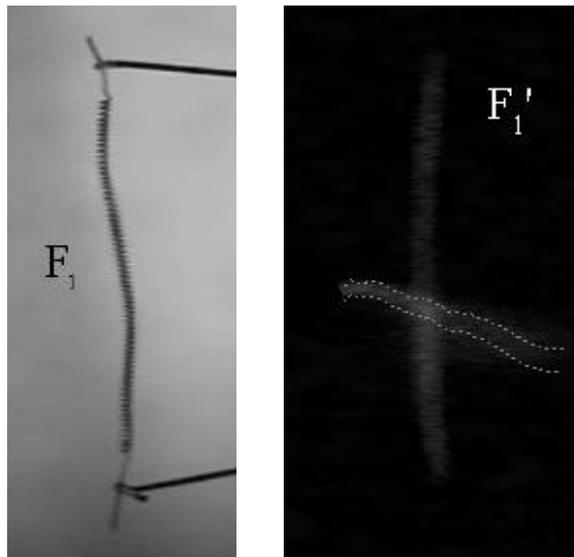


Figure 7: F_1 at left. The image of F_1 (F_1') at right. To represent the defocus of the image of F_2 we separate the three fundamental colors: blue, green and red (from up to down) with a hatched line.

It is evident then, that an observer placed in the position of the Z_0 camera will see F_2' in front of F_1' . Then, the image of the joint object constituted of elements F_2' e F_1' is pseudoscopic.

By the table 1, one can see that $Z_2' \cong Z_2$ and $Z_1' \cong Z_1$. It indicates that the symmetry proposal for the model is experimentally fulfilled. Values in more agreement with the foreseen theoretically could probably have been reached if we could locate with more precision the position of each element of the system of double diffraction.

The defocused points appering as a chromatic spectrum whose width is proportional to the distance to a plane constitutes a way to register the depth information on a bidimensional image, a phenomena that was previously reported for other diffraction imaging systems [5,6]

Conclusions

The pseudoscopic image was proved when we locate the position of the focalization of two objects at different longitudinal distances. The diffraction system allows the focalization without astigmatism.

Acknowledgements

The authors thank the “Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo” - FAPESP, the “Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior” - CAPES of the Brazilian Ministry of Education and the “Pró-reitoria de Pós-Graduação” Campinas State University -UNICAMP.

References

- [1] Lunazzi, J. J. “Holoprojection of images by a double diffraction process” in Opt. e Fis. Atômica, Proc. of the **XIV Enc. Nac. de Fis. da Mat. Condensada**, Phys. Brazilian Soc. eds., Caxambu-MG-BR, Bagnato, V.; Cruz, B. Eds., 7-11.5.91, p.OTI 5a.12:00.
- [2] Lunazzi, J. J.; Rivera, N. “Pseudoscopic imaging in a double diffraction process with a slit” **Opt. Express** **10**, p.1368-1373, 2002. Available at: <<http://opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=OPEX-10-23-1368>> <http://opticsexpress.org/issue.cfm?issue_id=168>. Acesso em: 14 jan. 2005 13:09:00
- [3] Lunazzi, J. J.; Magalhães, D. S. F. “Diffractive imaging with bidimensional elements: first experimental results” Proc. of **XXVII Enc. Nac. de Fis. da Mat. Cond.**, p. 127 Poços de Caldas- MG
- [4] Lunazzi, J. J.; Magalhães, D. S. F. “Pseudoscopic white-light imaging by means of two bi-dimensional diffracting elements and a pinhole” **SPIE**, v.5622, p.1463-1468, out. 2004. Available at: <<http://bookstore.spie.org/index.cfm?fuseaction=detailpaper&cachedsearch=1&productid=591749&producttype=pdf&CFID=1568010&CFTOKEN=23535837>>
- [5] Lunazzi, J. J. "3D Photography by holography" **Opt.Eng.** **V29** N1 (1990) p.9-14
- [6] Lunazzi, J. J."Holophotography with a diffraction grating" **Opt.Eng.****V29** N1 (1990) pp.15-18