

SIMULAÇÃO DE UM "  $\theta$ -PINCH" POR MODELO  
DE DOIS FLUIDOS

POR: Antonio Carlos de Jesus Paes

Orientador: José Busnardo Neto

SIMULAÇÃO DE UM "e-PINCH" POR MODELO DE DOIS FLUIDOS

por

Antonio Carlos de Jesus Paes

Orientador: Prof. Dr. José Busnardo Neto

*Tese apresentada ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Ciências.*

*Campinas, julho de 1979.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Busnardo Neto pela orientação dada para a execução deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo H. Sakanaka pela orientação e ajuda na revisão das partes teóricas envolvidas.

Aos Profs. Drs. Ricardo M. Galvão, Helmut K. Böckelmann, Massanobu Niimura e Shuko Aihara pela colaboração prestada nos momentos oportunos.

Aos meus colegas de pesquisa Armando, Munemasa, Roberto, Ivo, Hisataki, Cesar, Yoshiyuki, Edison, Milton, Francisco, Hersy, Marcos, Geraldo, Joaquim, Gláucia e Carmem, que foram acima de tudo grandes companheiros.

A todos aqueles que de alguma forma colaboraram na realização deste trabalho.

Muito obrigado.

Aos meus pais.

À Arlete

SIMULAÇÃO DE UM "θ-PINCH" POR MODELO DE DOIS FLUIDOS.Resumo

Foram usados os três primeiros momentos da equação de Boltzmann, para íons e elétrons, juntamente com as equações de Maxwell, para simular o estágio inicial de implosão de um "θ-pinch" de baixa densidade em um computador digital. Segundo o modelo de Braginskii foram calculados os termos de transporte clássico. A resistividade anômala foi introduzida mediante uma frequência de colisão constante da ordem de  $\omega_{pi}$ .

Foi simulado um "θ-pinch" de densidade  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , com um campo magnético que subia a 500 G em 80 nanosegundos. Foi estudada a influencia da resistividade clássica e anômala do plasma, nos perfis de densidade, campo magnético, densidade de corrente e temperatura. Além disso foi possível verificar a condição de quase neutralidade nas situações menos resistivas. Nesta região de densidades e temperaturas, o transporte clássico é desprezível. Comparado com os resultados experimentais da Universidade do Texas, conclui-se que é necessária uma frequência de colisão anômala dependente da posição.

*Trabalho realizado com auxílio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisas.*

ABSTRACT

The first three moments of Boltzmann equations, for ions and electrons, together with Maxwell equations were used to simulate the initial stage of implosion, of a low density  $\theta$ -pinch, by a digital computer.

The classical transport terms were calculated following Braginskii. The anomalous resistivity was introduced by a constant collision frequency of order  $\omega_{pi}$ .

A  $\theta$ -pinch of density  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  was simulated, the magnetic field raised to a maximum of 500 G in about 80 ns.

The effects of classical and anomalous resistivity on the density, magnetic field, current density and temperature profiles were studied. Besides that, it was possible to verify the quasineutrality condition, for the less resistivity situation. In this region of densities and temperatures the classical transport is negligible.

The comparison of these results, with Texas experimental results, leads to the conclusion that it is necessary an anomalous collision frequency depending on position.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II	- MODELO TEÓRICO .....	5
	II.1. Sistema de Equações .....	5
	II.2. Discussão do Significado Físico dos - Termos das Equações .....	16
	II.3. Aplicação das Equações a um "θ-pinch".	19
	II.4. Condições de Contorno .....	27
CAPÍTULO III	- MÉTODO NUMÉRICO .....	29
	III.1. Considerações Gerais .....	29
	III.2. Resolução das Equações de Fluido ....	32
	III.3. Resolução da Equação para o Campo - Radial .....	35
	III.4. Resolução da Equação para o Campo - Magnético .....	36
	III.5. Resolução da Equação para o Campo - Elétrico Tangencial .....	37
	III.6. Estabilidade do Código Numérico .....	40
CAPÍTULO IV	- APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS .....	45
	IV.1. Introdução .....	45
	IV.2. "Snow-Plow" .....	46
	IV.3. Transporte Clássico .....	48
	IV.4. Transporte Anômalo .....	49
	IV.5. Frequência de Colisão Constante .....	51
	IV.6. Densidade de Corrente .....	54
	IV.7. Temperatura .....	56

IV.8. Campo Elétrico Radial .....	57
IV.9. Densidade de Partículas .....	58
IV.10. Campo Magnético .....	59
CAPÍTULO - CONCLUSÃO .....	99
REFERÊNCIAS .....	102



## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

A maior parte das pesquisas, feitas na área de física de plasmas, estão direta ou indiretamente relacionadas a idéia de conseguir uma maior compreensão do comportamento do plasma sob a ação de agentes externos, com a finalidade de, tirando proveito de tais conhecimentos, conseguir viabilizar a fusão termonuclear controlada que forneceria uma quantidade de energia quase inesgotável para a humanidade.

No estágio atual destas pesquisas, dois são os esquemas básicos propostos para alcançar este objetivo. Um deles é a chamada fusão por laser, baseada no confinamento inercial do plasma. No segundo esquema, procura-se confinar um plasma de alta temperatura e densidade, por meio de campos magnéticos externos, a fim de que nele possam ocorrer as reações de fusão nuclear geradoras de energia. Em face disso tudo é desnecessário realçar a importância que deve ser atribuída aos estudos destinados a uma melhor compreensão da interação do plasma com o campo magnético. Este fenômeno dá origem a uma coleção enorme de problemas interessantes, que devem merecer especial atenção dos que atuam nesta área.

O objetivo deste trabalho é abordar, justamente, um dos aspectos desta interação, qual seja, o da penetração de um pulso de campo magnético no interior de um plasma. Pretende-se estudar a penetração do pulso magnético que ocorre em um "θ-pinch" linear, uma vez que este dispositivo, cuja descrição sucinta pode ser encontrada no capítulo II, foi escolhido como tema central das pesquisas que estão sendo realizadas pelo grupo de plasmas

ma da UNICAMP.

O pulso magnético ao penetrar no plasma, em virtude do comportamento diamagnético deste, provoca o surgimento de uma corrente no plasma que interagindo com o campo magnético propicia o surgimento de uma força que atua no plasma, tendendo a desenvolver neste, também, pulsos de densidade, temperatura, densidade de corrente etc., que caminham para o interior do plasma. A largura destes pulsos, bem como sua velocidade de penetração são fortemente influenciadas pela maior ou menor resistividade do plasma.

Entre as possíveis formulações que podem ser utilizadas para abordar este problema, foi escolhida uma, que procura simular o comportamento do plasma por meio de um modelo de dois fluidos, que leva em conta somente processos de transporte clássico, devido às colisões binárias. Como o sistema de equações, obtido a partir deste modelo, é não linear, é necessário para resolvê-lo a aplicação de métodos numéricos.

Todas as equações que aparecem na resolução deste problema, com exceção das equações de Maxwell, envolvem derivadas convectivas do tipo  $\partial A / \partial t + V \partial A / \partial x$ , sendo que a forma padrão destas equações é:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} = S$$

Tais equações, das quais um exemplo típico é a equação de continuidade - onde  $A = n$  e  $S = 0$  - requerem certo cuidado em sua resolução; uma vez que, como pode ser visto para o caso da -

equação de continuidade, admitem soluções descontínuas, consequentemente todos os métodos numéricos baseados em hipóteses de continuidade, como expansões em série de Taylor, por exemplo, fracas - sam quando aplicadas a este tipo de problema, que tende a apresentar gradientes bastante fortes.

Para resolver este problema foi acrescentado ao esquema numérico clássico, baseado em expansões em série de Taylor, um esquema corretivo denominado "Flux-Corrected-Transport (FCT)". A idéia básica do FCT é adicionar ao sistema convectivo um termo de difusão conhecido, que mais tarde é tirado com a condição de que nenhum novo máximo ou mínimo seja criado. Assim o problema é resolvido satisfatoriamente.

No capítulo II são apresentados detalhes a respeito do modelo físico empregado. Lá indica-se como as equações de dois fluidos são obtidas a partir da equação de Boltzmann, e são, também, apresentados os termos de Braginskii que estão associados ao transporte clássico. A seguir chega-se ao conjunto de equações, já no sistema de coordenadas apropriado ao problema.

No capítulo III é apresentado o método numérico, a partir do qual foi elaborado o programa de computador para resolver o sistema de equações. Além disso são fornecidos detalhes sobre o esquema numérico corretivo "Flux-Corrected-Transport".

No capítulo IV estão os resultados obtidos a partir da resolução numérica do sistema de equações. Foram obtidos perfis de densidade, campo magnético, temperatura, densidade de corrente e campo elétrico radial, em instantes diferentes, do tempo, para

diversos valores da resistividade do plasma. A partir dos quais - são feitas análises dos resultados alcançados.

Finalmente no capítulo V apresenta-se algumas conclusões e sugestões para continuação deste trabalho.

## CAPÍTULO II - MODELO TEÓRICO

Neste capítulo é feita uma análise do sistema de equações utilizado na simulação de um " $\theta$ -pinch". Inicialmente deriva-se o sistema de equações utilizado, a partir das equações de Boltzmann. A seguir, passa-se à interpretação física dos diferentes termos - que aparecem no sistema de equações obtido. Posteriormente faz-se uma breve descrição do " $\theta$ -pinch" e o sistema de equações é aplicado a ele. Finalmente são discutidas as condições de contorno a serem empregadas.

### II.1. Sistema de Equações.

O estado de um sistema de partículas, pode ser caracterizado por meio de uma função distribuição de uma partícula  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  tal que  $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} d\vec{x}$  dá o número de partículas no instante  $t$ , com velocidades no intervalo  $d\vec{v}$ , em torno de  $\vec{v}$  e cuja posição esteja na região espacial  $d\vec{x}$ , em torno de  $\vec{x}$ . Como, usualmente, num plasma tem-se diversas espécies de partículas, utiliza-se um índice na função distribuição para exprimir o fato de que cada uma das espécies é descrita por uma função distribuição própria. Pretende-se tratar o caso de um plasma de hidrogênio completamente ionizado, conseqüentemente, somente duas espécies, ions e electrons, estarão presentes, assim  $\alpha = i, e$ .

A descrição do sistema, através da função distribuição de uma partícula é uma simplificação do sistema geral de equações - que descreve as posições e velocidades de todas as partículas. Ao simplificar o sistema geral para a função distribuição, perde-se

alguma informação no que diz respeito às correlações entre as partículas. Em um plasma com muitas partículas na esfera de Debye esta simplificação é válida e o sistema de equações obtido é passível de resolução. As partículas agora interagem entre si, através de campos elétrico e magnético macroscópicos. É possível introduzir parte do efeito das correlações através de um termo de colisões binárias.

A evolução temporal do plasma, descrito por essas funções distribuição de uma partícula, levando em conta colisões binárias, é determinada pelas equações de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{x}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

juntamente com as equações de Maxwell, que são usados para determinar os campos macroscópicos:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \rho_{\alpha} d\vec{v} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d\vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z}$$

Os campos elétrico e magnético, que aparecem acima, representam médias sobre um volume contendo muitas partículas e sobre longos intervalos de tempo comparados ao tempo de colisão; portanto esses campos, não levam em conta as rápidas flutuações, nos valores dos campos, que surgem quando as partículas se aproximam muito. Esses efeitos são levados em conta pelos termos de colisão.

As partículas, de uma espécie colidem entre si e com partículas de outras espécies, sendo assim tem-se para os íons:

$$C_i = C_{ii}(f_i, f_i) + C_{ie}(f_i, f_e)$$

e para os elétrons:

$$C_e = C_{ei}(f_e, f_i) + C_{ee}(f_e, f_e)$$

O termo  $C_{\alpha\beta}$ , que depende das funções distribuição de  $\alpha$  e  $\beta$  dá a variação por unidade de tempo, na função distribuição da partícula de espécie  $\alpha$ , devido as colisões com partículas de es -

pécie  $\beta$ . Cabe aqui, lembrar que, por estar trabalhando com partículas carregadas, o termo colisão não se refere ao fenômeno da mudança repentina das velocidades das partículas interagentes ( como ocorre, por exemplo, no caso de colisão entre duas bolas de bilhar ), mas sim a um processo que acontece de uma maneira mais contínua e cumulativa, uma vez que as partículas interagem através de forças de longo alcance, e a mudança na velocidade é mais fruto de uma soma de pequenas variações devido as várias interações com outras partículas, do que propriamente uma grande variação na velocidade devido a interação com uma única partícula (1). Existe uma distinção sutil e às vezes arbitrária, que é feita quando se separa a interação de longo alcance entre duas partículas como sendo uma colisão ou uma contribuição para os campos macroscópicos. Uma discussão mais ampla está fora do alcance deste trabalho.

A solução do sistema de equações de Boltzmann-Maxwell escrito acima, com um modelo de colisões binárias conveniente, ainda constitui tarefa demasiada árdua. Tentar resolvê-lo em termos de aplicação a um dispositivo prático como um " $\theta$ -pinch" é praticamente impossível. Uma simplificação maior, mas ainda satisfatória, consiste em tomar os momentos da equação de Boltzmann e obter uma cadeia de equações de fluido. Aqui, novamente será necessário introduzir um modelo que permita fechar a cadeia de variáveis. Esta técnica leva a equações para evolução temporal da densidade, da velocidade, da temperatura etc.

O momento de ordem mais baixa é obtido ao integrar, no espaço das velocidades, a equação de Boltzmann e definir a densida-



de de partículas por:

$$n_{\alpha}(\vec{x}, t) = \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

e a velocidade média por:

$$\vec{u}_{\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{1}{n_{\alpha}} \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}$$

com  $\bar{n}_{\alpha} = N_{\alpha}/V$ . Obtem-se, assim a equação de continuidade:

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial \vec{x}} = 0 \tag{2.6}$$

Em particular o termo  $\sum_{\alpha} \int C_{\alpha\beta} d\vec{v}$ , representa a variação no número total de partículas de espécie  $\alpha$ , num elemento de volume  $d\vec{x}$ , devido a colisões com partículas de espécie  $\beta$ . Mas, em colisões elásticas que foram as únicas consideradas, não há variação do número de partículas de quaisquer espécies no intervalo  $d\vec{x}$ , pois colisões somente mudam a posição da partícula no espaço das velocidades. Assim sendo  $\sum_{\alpha} \int C_{\alpha\beta} d\vec{v} = 0$ .

O próximo momento da equação de Boltzmann é obtido multiplicando a equação (2.1) por  $m\vec{v}$ , e integrando no espaço das velocidades. A seguir  $\vec{v}$  pode ser separado na velocidade média do fluido  $\vec{u}_{\alpha}$  mais uma velocidade peculiar  $\vec{w}$ , ou seja  $\vec{v} = \vec{u}_{\alpha} + \vec{w}$ . Assim, pode-se definir  $\int f_{\alpha} \vec{w} \vec{w} d\vec{v}$  como sendo o tensor de pressão  $\bar{P}$ . Os elementos fora da diagonal deste tensor estão, usualmente, associados a viscosidade, que não será considerada aqui ( ou seja  $P_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  ) por razões que serão expostas mais adiante. Neste caso o

tensor pressão magnética pode ter duas formas igualmente simples. Uma forma é obtida quando a função distribuição é uma Maxwelliana isotrópica, neste caso:

$$\bar{\mathbb{P}} = \begin{vmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}$$

e reduz-se a um escalar. E a outra possibilidade surge como consequência do fato de que na presença de um campo magnético o plasma apresenta uma anisotropia na pressão tendo  $P_{//} \neq P_{\perp}$  e portanto:

$$\bar{\mathbb{P}} = \begin{vmatrix} P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & P_{//} \end{vmatrix}$$

Para o termo referente às colisões, fazendo

$\vec{R}_{\alpha} = \sum_{\beta} \int \vec{v} C_{\alpha\beta} d\vec{v}$ , tem-se que  $\vec{R}_{\alpha} = \sum_{\beta} \int \vec{w} C_{\alpha\beta} d\vec{v}$ , pois  $\vec{u}_{\alpha} \sum_{\beta} \int C_{\alpha\beta} d\vec{v} = 0$ . O termo  $\vec{R}_{\alpha}$  representa a variação média da quantidade de movimento das partículas de espécie  $\alpha$ , devido às colisões com partículas de espécie  $\beta$ . É conveniente lembrar que  $\int m_{\alpha} \vec{v} C_{\alpha\alpha} d\vec{v} = 0$ , uma vez que a quantidade de movimento se conserva. E assim obtêm-se:

$$m_{\alpha} \frac{\partial (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial t} + m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \frac{\partial (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial \vec{x}} + m_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) \vec{u}_{\alpha} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \bar{\mathbb{P}} - q_{\alpha} n_{\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) = \vec{R}_{\alpha} \quad (2.7)$$

A seguir usando a equação de continuidade (2.6) e além disso supondo o tensor de pressão isotrópico - o que é razoável pois não são consideradas as viscosidades e no caso do "θ-pinch" considera-se apenas o movimento numa direção perpendicular a  $\vec{B}$ , de modo que a anisotropia na pressão não precisa ser levada em conta - o tensor de pressão reduz-se a um escalar e a equação acima pode ser escrita:

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) \vec{u}_{\alpha} \right) = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} P_{\alpha} + q_{\alpha} n_{\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) + \vec{R}_{\alpha} \quad (2.8)$$

que é a equação de movimento do fluido, e onde  $P_{\alpha} = \int (m_{\alpha}/3) (\vec{w} \cdot \vec{w})^2 f_{\alpha} d\vec{v}$ . Como esta equação envolve mais uma variável dependente,  $P_{\alpha}$ , é necessário tomar mais um momento da equação de Boltzmann, afim de levar em conta a evolução temporal de  $P_{\alpha}$ .

Para obter essa nova equação, multiplica-se a equação (2.1) por  $(1/2)mv^2$  e integra-se, novamente, no espaço das velocidades. Define-se a temperatura por  $T_{\alpha}(t, \vec{x}) = \int (1/\bar{n}_{\alpha}) (m_{\alpha}/3) w^2 f_{\alpha} d\vec{v}$ , de maneira que  $P_{\alpha} = T_{\alpha} n_{\alpha}$ .

O vetor densidade de fluxo de calor é dado por:

$$\vec{q}_{\alpha} = \int \frac{m_{\alpha}}{2} w^2 w f_{\alpha} d\vec{v}$$

O termo das colisões é expandido da seguinte maneira:

$$\sum_{\beta} \int C_{\alpha\beta} \frac{mv^2}{2} d\vec{v} = \sum_{\beta} \int C_{\alpha\beta} \frac{mu_{\alpha}^2}{2} d\vec{v} + \sum_{\beta} \vec{u} \int C_{\alpha\beta} m\vec{w}d\vec{v} + \sum_{\beta} \int C_{\alpha\beta} \frac{mw^2}{2} d\vec{v}$$

Defini-se:

$$Q_{\alpha} = \sum_{\beta} \int C_{\alpha\beta} \frac{mw^2}{2} d\vec{v}$$

como sendo o calor produzido devido às colisões, por unidade de tempo e de volume.

Finalmente, considerando todas as definições e expansões feitas acima, chega-se a equação de temperatura:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3n_{\alpha} T_{\alpha}}{2} + \frac{m_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left( \vec{q}_{\alpha} + \frac{3n_{\alpha} T_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}}{2} + \frac{m_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha}^2 \vec{u}_{\alpha}}{2} + n_{\alpha} T_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right) = q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{E} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \vec{R}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + Q_{\alpha} \quad (2.9)$$

Usando as equações de continuidade (2.6) e de conservação da quantidade de movimento (2.8) pode-se colocar a equação (2.9) na forma simples

$$\frac{3}{2} n_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \vec{x}} + P_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{u}_{\alpha} = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{q}_{\alpha} + Q_{\alpha} \quad (2.10)$$

O conjunto de equações (2.6), (2.8) e (2.10) obtidas acima ao tomar momentos da equação de Boltzmann e conhecidas como equações de transporte, exprimem as leis de conservação do número de partículas, da quantidade de movimento e da energia. Não constituem um sistema de equações fechado, pois cada equação obtida ao

tomar um momento da equação de Boltzmann inclui termos envolvidos em momentos da equação de Boltzmann de ordem mais alta ( 2 ). Para uma descrição completa é necessário tomar todos os momentos (infinitos) da equação de Boltzmann; qualquer conjunto finito de momentos não descreve completamente o comportamento do plasma. - Afim de obter informação útil, a partir somente de poucos momentos, é necessário fechar o sistema de equações. Isto é conseguido ao relacionar, de algum modo, uma grandeza de momento mais alto, o fluxo de calor neste caso, com grandezas como temperatura, velocidade e densidade, para as quais existe uma equação de evolução temporal. Por exemplo, uma possível maneira de fechar o sistema de equações seria supor  $\vec{q}_\alpha = 0$ .

No presente trabalho, a avaliação de  $\vec{q}_\alpha$ , bem como de  $\vec{R}_\alpha$  e  $\vec{Q}_\alpha$  (estes mediante a prescrição de um modelo para as colisões) em função de  $n_\alpha$ ,  $\vec{u}_\alpha$  e  $T_\alpha$  é feita aproveitando os resultados obtidos por Braginskii ( 3 ). Em linhas gerais o procedimento para conseguir esse objetivo, seguido por Braginskii, é o seguinte: - faz-se  $f_\alpha = f_\alpha^0 + f_\alpha^1$  onde

$$f_\alpha^0 = \frac{n_\alpha(\vec{x}, t)}{\left( \frac{2T_\alpha(\vec{x}, t)}{m_\alpha} \right)^{3/2}} \exp\left( - \frac{m_\alpha}{2T_\alpha(\vec{x}, t)} (\vec{v} - \vec{u}_\alpha)^2 \right)$$

é localmente Maxwelliana e  $|f_\alpha^1| \ll f_\alpha^0$ . Esta aproximação implica essencialmente em exigir que todas as grandezas variem pouco quer espacialmente (gradientes pequenos) quer temporalmente. A possibilidade de usar uma solução Maxwelliana local prende-se ao fato

de existirem processos de relaxação, associados as colisões, que fazem com que qualquer distribuição arbitrária torne-se Maxwelliana, numa escala de tempo da ordem do tempo de colisão.

Na equação de Boltzmann, supõe-se que os termos importantes são o colisional e o magnético. Os outros termos, que contêm derivadas espaciais temporais, bem como o campo elétrico são supostos pequenos, além disso

$$\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial \vec{v}} = 0$$

Sendo assim ao substituir na equação  $f_{\alpha}$  por seu valor aproximado  $f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 + f_{\alpha}^1$  somente foi levado em conta  $f_{\alpha}^0$  nos termos pequenos, desprezando-se  $f_{\alpha}^1$ ; no termo de colisão  $C(f_{\alpha}, f_{\alpha})$  apenas foram considerados termos lineares em  $f_{\alpha}^1$ , isto é  $C(f_{\alpha}^0, f_{\alpha}^1)$  e  $C(f_{\alpha}^1, f_{\alpha}^0)$ . Nos termos pequenos as derivadas em relação as coordenadas e ao tempo aparecem somente como consequência da derivação dos parâmetros  $n_{\alpha}, \vec{u}_{\alpha}$  e  $T_{\alpha}$ . Por meio das equações de transporte (deduzidas anteriormente) as derivadas temporais podem então ser expressas em função das derivadas espaciais. Obtém-se, dessa maneira uma equação diferencial-integral linear para  $f_{\alpha}^1$  no espaço das velocidades. Resolvendo-se esta equação determina-se  $f_{\alpha}^1(\vec{v})$  em função dos parâmetros  $n_{\alpha}, \vec{u}_{\alpha}$  e  $T_{\alpha}$  e dos fatores que perturbam a distribuição de Maxwell, tais como  $\frac{\partial}{\partial \vec{x}} T_{\alpha}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{u}$  etc.. E a partir de  $f_{\alpha}^1(\vec{v})$  podem ser determinados  $\vec{q}_{\alpha}, \vec{R}_{\alpha}$  e  $Q_{\alpha}$  em função das variáveis conhecidas, e no caso de  $\vec{R}_{\alpha}$  e  $Q_{\alpha}$  em função do modelo adotado para as colisões. Os resultados obtidos por Braginskii para os valores destas grandezas são apresentados mais adiante, neste capítulo.

As equações obtidas a partir dos tres primeiros momentos da equação de Boltzmann, são transcritas abaixo em sua forma geral:

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})}{\partial \vec{x}} = 0$$

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) \vec{u}_{\alpha} \right) = - \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial \vec{x}} + q_{\alpha} n_{\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{u}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) + \vec{R}_{\alpha}$$

$$\frac{3}{2} n_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial \vec{x}} + P_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{u}_{\alpha} = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{q}_{\alpha} + Q_{\alpha}$$

O sistema completo de equações, a ser resolvido, é obtido ao acrescentar às equações acima as equações de Maxwell, que permitem determinar os campos elétrico e magnético a partir das densidades e velocidades de íons e eletrons. As equações de Maxwell são as seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{B} = 0$$

É necessário justificar aqui porque o termo relativo a corrente de deslocamento  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , da equação (2.3) foi desprezado. Como o campo elétrico pode ser decomposto em duas partes  $E = E_t + E_1$ , onde  $E_t$  é tal que seu divergente é nulo e para  $E_1$  tem-se que o rotacional se anula, o termo referente a corrente de deslocamento também pode ser decomposto numa parte solenoidal e noutra irrotacional. A parte irrotacional está automaticamente satisfeita ao se considerar a equação de Poisson e a equação de continuidade, já a parte solenoidal pode ser desprezada uma vez que as frequências que aparecem no fenômeno de interesse, a implosão do "θ-pinch", são bastante inferiores as frequências que aparecem em fenômenos onde estão envolvidos ondas eletromagnéticas, e somente para estas é importante levar em conta esta parte solenoidal da corrente de deslocamento.

## II.2. Discussão do Significado Físico dos Termos das Equações.

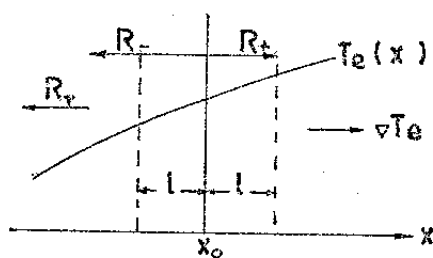
É interessante analisar o significado de cada um dos termos que aparecem principalmente nas equações de movimento e fluxo de calor, para o fluido.

Tomando-se a equação de movimento do fluido (2.8), no lado esquerdo da equação tem-se o termo de fluido correspondente à expressão "massa vezes aceleração", para uma partícula. Portanto, no lado direito da equação devem estar termos correspondentes as forças que atuam no fluido, por unidade de volume. O primeiro



termo da direita corresponde a existência de uma força devida ao gradiente de pressão; o segundo termo está associado às forças elétrica e magnética. O terceiro termo representa a transferência de momento elétron-íon devido às colisões. Este termo é composto de duas partes:  $\vec{R} = \vec{R}_u + \vec{R}_T$ . A primeira parte,  $\vec{R}_u$ , é devida a existência de uma velocidade relativa entre elétrons e íons, ou seja, os elétrons chocam-se com os íons e têm sua velocidade alterada em direção, seu módulo permanece praticamente o mesmo, havendo conseqüentemente uma transferência de momento elétron-íon, por unidade de tempo, da ordem de  $m_e n_e \vec{u} / \tau_e$  onde  $\vec{u} = \vec{u}_e - \vec{u}_i$  e  $\tau_e$  é o tempo de colisão.

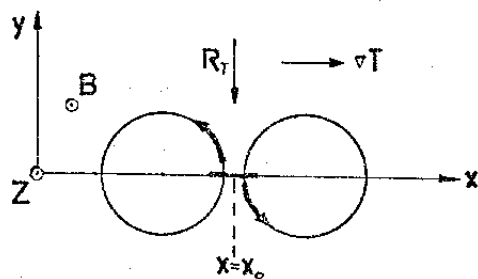
A segunda parte  $\vec{R}_T$  surge devido ao fato de que a secção de choque de colisão, entre partículas carregadas, depende da velocidade, sendo tanto menor quanto maior for a velocidade da partícula, logo se houver um gradiente na temperatura dos elétrons, como na figura abaixo, os elétrons vindos da direita terão ener-



gia média maior, do que os que vem da esquerda e portanto, sofrerão um número maior de choques do que os que vêm da direita, por isso haverá maior transferência de momento por parte dos elétrons que vem da esquerda, conseqüentemente haverá um fluxo líquido de momento para a região, diferente de zero, o que equivale a dizer que há uma força, no caso dirigida para a esquerda,

atuando sobre os elétrons.

Quando além do gradiente de temperatura, houver também um campo magnético forte, como esquematizado na figura abaixo,



a força será perpendicular ao campo magnético e ao gradiente de temperatura, uma vez que os elétrons tendem a girar em torno do campo magnético, e apesar do gradiente de temperatura estar na direção x é o fluxo na direção y que não estará balanceado.

Na equação de temperatura (2.9), o primeiro termo na esquerda representa a variação temporal na densidade de energia das partículas duma dada espécie, ou seja, variação temporal da densidade de energia cinética  $nm u^2/2$  e da densidade de energia interna  $3nT/2$ .

O segundo termo, que aparece dentro do divergente, representa o fluxo de energia e consiste do transporte macroscópico de energia, representado por:

$$\left( \frac{n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2}{2} + \frac{3n_{\alpha} T_{\alpha}}{2} \right) \vec{u}_{\alpha}$$

O termo  $\vec{q}_{\alpha}$  representa o fluxo microscópico de energia e está as-

sociado ao movimento aleatório, num sistema de coordenadas em que as partículas do plasma como um todo estão em repouso num dado ponto do espaço. O termo

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (n_{\alpha} T_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (P_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})$$

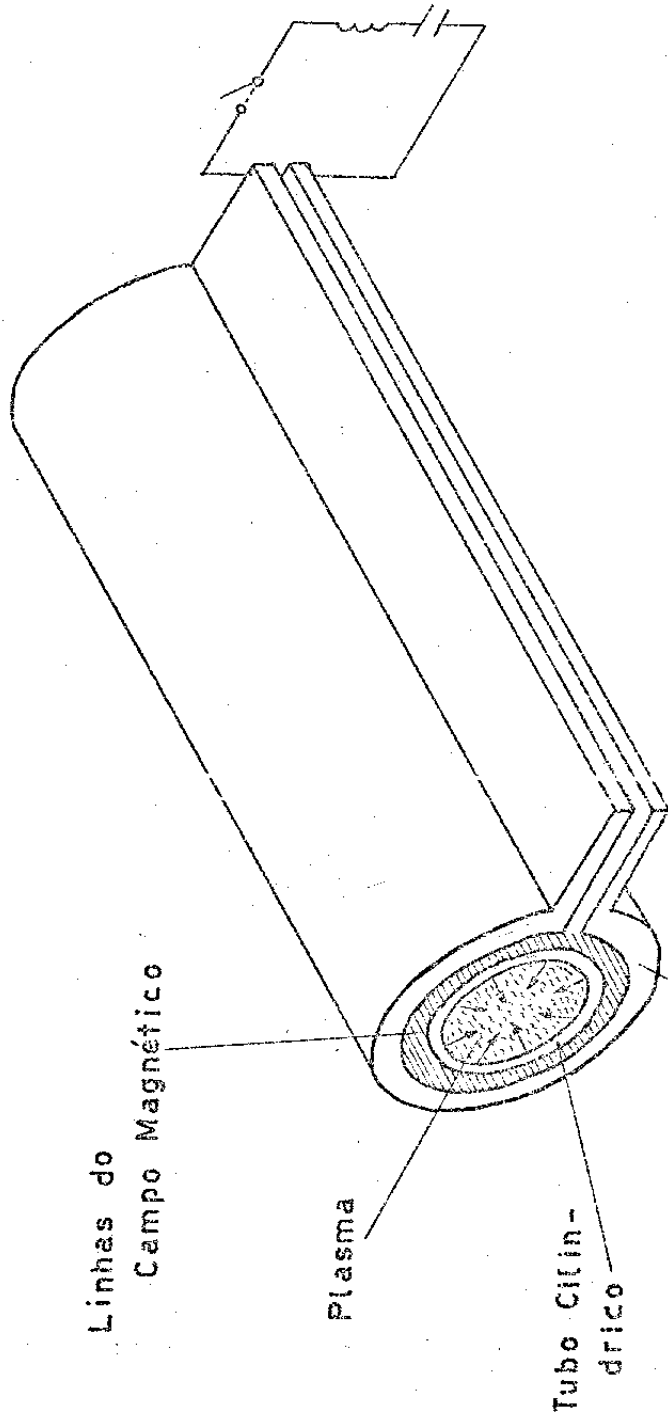
representa o trabalho por unidade de tempo (potência) feito pelas forças de pressão.

Os termos do lado direito da equação levam em conta no primeiro termo o trabalho por unidade de tempo e de volume, realizado pela força elétrica; o segundo termo refere-se ao calor gerado por unidade de tempo e de volume devido as colisões entre elétrons e íons. O último termo está associado ao calor por unidade de tempo e de volume, transferido entre as duas espécies, devido a diferença de temperatura.

### II.3. Aplicação das Equações a um "θ-pinch"

Um "θ-pinch" é basicamente um tubo cilíndrico, que contém o plasma em seu interior. Em torno desse cilindro está enrolada uma bobina de uma espira, que está ligada em série com um banco de capacitores de alta energia e baixa indutância, o circuito é completado com uma chave de vácuo, como pode ser esquematizado pela figura que segue.

"e-jinch"



Ao fechar a chave, o capacitor, inicialmente carregado, passa a descarregar através da bobina, surgindo nesta uma corrente. Esta corrente, produz um campo magnético axial entre a bobina e o plasma, este campo induz uma corrente imagem azimutal de densidade  $\vec{j}$  na superfície do plasma, pois sendo este diamagnético ao tentar introduzir em seu interior um campo magnético, surge uma corrente no plasma que gera um campo magnético de sentido contrário ao do campo magnético aplicado. E da interação dessa corrente azimutal no plasma, com o campo magnético axial surge uma força  $\vec{j} \times \vec{B}$  na direção radial, que age como um pistão magnético e empurra as partículas para dentro, acumulando-as na superfície do plasma ( não rigorosamente ) que vai implodindo em direção ao centro do cilindro. Aparece equilíbrio quando  $nkT = B^2/8\pi$  mas usualmente  $B^2/8\pi \gg nkT$  até o fim da fase de implosão. Existem muitos regimes de operação de um " $\theta$ -pinch" em que o plasma que está implodindo está sujeito a turbulências, que não são consideradas neste trabalho.

O sistema completo de equações de fluido a três dimensões para um " $\theta$ -pinch" é demasiado complexo, e se torna necessário introduzir hipóteses simplificadoras. Neste estudo de " $\theta$ -pinch", supõe-se que o mesmo seja suficientemente longo, de modo que as grandezas estudadas não dependem de  $z$  ( a coordenada ao longo do eixo do cilindro ) e portanto não se leva em conta o fenômeno muito comum num " $\theta$ -pinch", que é o da fuga de partículas pela extremidade. Além disso supõe-se que o sistema tem simetria cilíndrica, logo as grandezas estudadas dependem somente de  $r$  ( a distância ao eixo do cilindro ). As grandezas que aparecem no sistema de equações, ao levar em conta estas hipóteses, são:

$n_\alpha, n_\alpha v_{\alpha r}, n_\alpha v_{\alpha \theta}, T_\alpha, B_z, E_\theta$  e  $E_r$ .

O sistema de equações com essas hipóteses reduz-se a:

$$n_\alpha m_\alpha \left( \frac{\partial v_{\alpha \theta}}{\partial t} + v_{\alpha r} \frac{\partial v_{\alpha \theta}}{\partial r} + \frac{v_{\alpha \theta} v_{\alpha r}}{r} \right) = q_\alpha n_\alpha \left( E_\theta - \frac{v_{\alpha r} B_z}{c} \right) + R_{\alpha \theta}$$

$$n_\alpha m_\alpha \left( \frac{\partial v_{\alpha r}}{\partial t} + v_{\alpha r} \frac{\partial v_{\alpha r}}{\partial r} - \frac{v_{\alpha \theta}^2}{r} \right) + \frac{\partial n_\alpha T_\alpha}{\partial r} =$$

$$q_\alpha n_\alpha \left( E_r + \frac{v_{\alpha \theta} B_z}{c} \right) + R_{\alpha r}$$

$$n_\alpha \left( \frac{3}{2} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{3}{2} v_{\alpha r} \frac{\partial T_\alpha}{\partial r} + \frac{T_\alpha}{r} \frac{\partial r v_{\alpha r}}{\partial r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial r q_{\alpha r}}{\partial r} + Q_\alpha$$

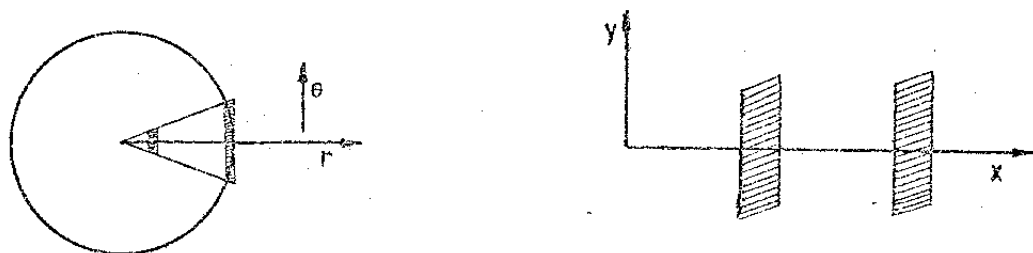
$$\frac{1}{r} \frac{\partial r E_r}{\partial r} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = - \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha v_{\alpha \theta}$$

A integração numérica, deste sistema de equações, leva a dificuldades associadas com a divergência do termo  $1/r$  na origem. É possível contornar esta dificuldade mudando-se para um sistema cartesiano onde  $x$  representa  $r$  e  $y$  representa  $\theta$ . Isto é possível porque o interesse está no estado microscópico de aquecimento e

difusão do campo que ocorrem durante a fase inicial da implosão. Esta troca de sistema de cordenadas, não leva a bons resultados na fase de pós-implosão e também não dá as densidades finais corretas, uma vez que não existe a compressão dos elementos de fluido associada com o movimento em direção a origem.



Em um sistema cartesiano e com as simplificações mencionadas o sistema de equações pode ser escrito na forma abaixo, - que foi a utilizada na resolução numérica.

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial (n v_{\alpha x})}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{\partial v_{\alpha x}}{\partial t} + v_{\alpha x} \frac{\partial v_{\alpha x}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial n_{\alpha} T_{\alpha}}{\partial x} + R_{\alpha x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( n_{\alpha} E_x + \frac{n v_{\alpha y} B_z}{c} \right) \quad (2.12)$$

$$m_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{\partial v_{\alpha y}}{\partial t} + v_{\alpha x} \frac{\partial v_{\alpha y}}{\partial x} \right) = q_{\alpha} \left( n_{\alpha} E_y - \frac{n_{\alpha} v_{\alpha x} B_z}{c} \right) + R_{\alpha y} \quad (2.13)$$

$$n_{\alpha} \left( \frac{3}{2} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + \frac{3}{2} v_{\alpha x} \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} + T_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha x}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial q_{\alpha x}}{\partial x} + Q_{\alpha} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \quad (2.15)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha y} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.17)$$

Cabe aqui lembrar, que com as simplificações feitas, a equação para o divergente de B esta automaticamente satisfeita.

Os termos  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $q_x$  e  $Q$  são calculados de acordo com o modelo de Braginskii e são dados por:

$$R_{ey} = -\alpha (v_{ey} - v_{iy}) - \beta_{\Lambda}^T \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

$$R_{ex} = -\alpha_{\Lambda} (v_{ey} - v_{iy}) - \beta^T \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

$$\alpha = \frac{m_e n_e}{\tau_{ei}} \left( 1 - \frac{(6.416x_e^2 + 1.837)}{\Delta_e} \right)$$

$$\alpha_{\Lambda} = \frac{m_e n_e x_e}{\tau_{ei}} \frac{(1.704x_e^2 + 0.7796)}{\Delta_e}$$

$$\beta^T = \frac{n_e (5.101x_e^2 + 2.681)}{\Delta_e}$$



$$\beta_{\Lambda}^T = \frac{n_e x_e (1.5x_e^2 + 3.053)}{\Delta_e}$$

onde  $x_e = w_{ce} \tau_{ei}$ ,  $w_{ce} = |eB_z/m_e c|$ ,  $\Delta_e = x_e^4 + 14.79x_e^2 + 3.770$  e

$$\tau_{ei} = 3.5 \times 10^5 \frac{(T_e(\text{ev}))^{3/2}}{n_e \ln \Lambda}$$

$$R_{iy} = \alpha (v_{ey} - v_{iy})$$

$$R_{ix} = \alpha_{\Lambda} (v_{ey} - v_{iy})$$

$$q_{ex} = -K_e \frac{\partial T_e}{\partial x} - T_e \beta_{\Lambda}^T (v_{ey} - v_{iy})$$

$$K_e = \frac{n_e T_e \tau_{ei} (4.664x_c^2 + 11.92)}{m_e \Delta_e}$$

$$Q_e = \left( \alpha (v_{ey} - v_{iy})^2 + \beta_{\Lambda}^T (v_{ey} - v_{iy}) \frac{\partial T_e}{\partial x} - \frac{3m_e n_e (T_e - T_i)}{m_i \tau_{ei}} \right)$$

$$q_{ix} = -K_i \frac{\partial T_i}{\partial x}$$

$$K_i = \frac{n_i T_i \tau_{ii} (2x_i^2 + 2.645)}{m_i \Delta_i}$$

onde  $x = w_{ci} \tau_{ii}$ ,  $w_{ci} = |eB_z/m_i c|$ ,  $\Delta_i = x_i^4 + 2.7x_i^2 + 0.677$  e

$$\tau_{ii} = 2.12 \times 10^7 \frac{(T_i(\text{ev}))^{3/2}}{n_i \ln \Lambda}$$

$$Q_i = \frac{3m_e n_e (T_e - T_i)}{m_i \tau_{ei}}$$

Agora cabe aqui justificar o fato de desprezar os efeitos de viscosidade neste trabalho. Os termos devidos a viscosidade, na ausência de um campo magnético são do tipo:

$$P_{ij} = -\eta_0 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{u} \right) \text{ onde}$$

$\eta_0 \sim nT\tau$ . Na presença de um campo magnético, há diferenças significativas na transferência de momento ao longo de  $\vec{B}$  e numa direção perpendicular a  $\vec{B}$ , de maneira que a situação se altera na direção perpendicular e  $\eta \sim \eta_0 / w\tau$ . Além disso quando  $T_e \sim T_i$  a viscosidade iônica é sempre muito maior do que a dos elétrons  $\eta_0^i / w_i \tau_i \sim m_i \eta_0^e / m_e w_e \tau_e$ , por esta razão a viscosidade de um plasma é determinada essencialmente pelos íons.

Como o sistema de interesse apresenta variações apenas em  $x$ , os únicos termos de viscosidade que interessam são  $P_{12}$  e  $P_{21}$ , ambos iguais, porém produzem forças nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

O termo  $P_{12}$  produz uma força  $-\frac{\partial P_{12}}{\partial x}$  na direção  $x$  e deve

ser comparado com  $nT$ . Como a viscosidade predominante é devida aos íons e além disso ela decresce com  $B_z$ , para ter uma idéia da comparação entre os dois termos são comparados  $nT$  e  $P_{12}$  para os íons quando  $B_z \rightarrow 0$ .

$$P_{12} \sim \eta \frac{\partial u_y}{\partial x} \sim \frac{nT \tau_{ii} v_{iy}}{L} \sim \frac{nT \tau_{ii} m_e v_{ey}}{L m_i}$$

e comparando com  $nT$  pode-se ver que  $nT/P_{12} \sim 1/(\tau_{ii} m_e v_{e0}/L m_i)$  e como  $\tau_{ii} = 2.12 \times 10^7 (T_i(\text{ev}))^{3/2} / (n_i \ln \Lambda)$  percebe-se que para densidades elevadas e temperaturas não muito elevadas o termo  $P_{12}$  fica bem menor que  $nT$ , justificando-se ser desprezado. Por exemplo para  $n_i > 10^{14} \text{cm}^{-3}$ ,  $T_i < 800 \text{ev}$  tem-se que  $P_{12} \sim 0.01 nT$ ; a medida que a densidade diminui  $P_{12}$  se aproxima mais de  $nT$ , mas por outro lado os termos que passam a predominar são aqueles devido a resistividade anômola (associado a turbulência e que não é considerada autoconsistentemente neste trabalho).

Ao comparar os termos  $R_{iy}$  e a viscosidade na direção  $y$ , mediante uma comparação semelhante a anterior chega-se a mesma conclusão. E por esta razão os termos referentes a viscosidade podem ser desprezados.

#### II.4. Condições de Contorno.

As condições de contorno empregadas juntamente com o sistema de equações (2.11) a (2.17) são enumeradas a seguir.

Na origem, em razão da simetria cilíndrica do problema,

a densidade, temperatura e o campo magnético têm gradiente nulo, ou seja, as funções  $B_z$ ,  $n_\alpha$  e  $T_\alpha$  são pares.

O campo elétrico radial, o campo elétrico tangencial, a velocidade radial e a velocidade tangencial por serem funções ímpares, são nulos na origem.

Na parede do cilindro,  $x = R$ , o valor de  $B_z$  é dado pela expressão  $B_{z0} \sin(\omega t)$ , onde  $B_{z0}$  é determinado, através da lei de Ampère, a partir do valor, prescrito externamente, da corrente. Este valor do campo magnético não leva em conta as reações do plasma, quando a corrente passa pela bobina, e que alteram o valor da indutância do plasma.

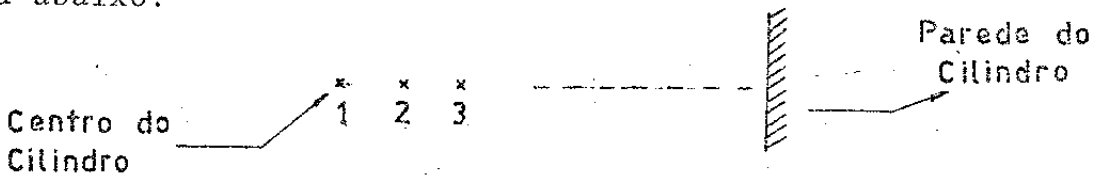
Além disso considera-se que para  $x = R$ , os gradientes da densidade, temperatura e velocidade tangencial são nulos enquanto que a velocidade radial, neste ponto, também é nula.

### CAPÍTULO III - MÉTODO NUMÉRICO

No capítulo anterior, foram deduzidas as equações que são utilizadas na simulação de um " $\theta$ -pinch", por um modelo de dois fluidos. Como o sistema obtido é não linear, não é possível a resolução analítica destas equações, e portanto o sistema deve ser resolvido numericamente. Além disso em um " $\theta$ -pinch" várias grandezas possuem gradientes bastantes fortes, chegando perto de funções do tipo degrau; isto torna a resolução numérica das equações diferenciais, bastante difícil. Métodos numéricos se baseiam sempre em expansões de Taylor, e intrinsecamente requerem gradientes fracos. São necessários cuidados e técnicas especiais para integrar estas funções que variam muito rapidamente.

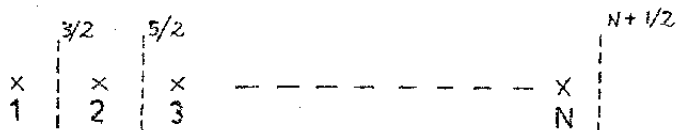
#### III.1. Considerações Gerais.

Afim de resolver numericamente qualquer equação o primeiro passo é escolher uma rede, que nada mais é do que um conjunto finito de pontos, onde estão definidas as grandezas de interesse. Assim, inicialmente, definé-se uma rede de pontos, separados por espaços iguais, que vai do centro à parede do cilindro. Esta rede é chamada a rede de índices inteiros  $j$  e é mostrada no esquema abaixo:



Além desta rede e com a finalidade de centrar espacialmente as equações de Maxwell, uma vez que derivadas centradas equivalem a expansões de segunda ordem, definé-se uma outra rede

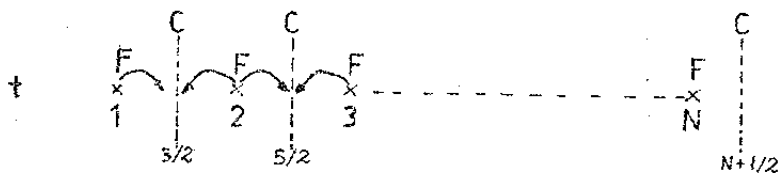
cujos pontos estão situados a meia distância dos pontos da rede representada anteriormente. Esta rede é chamada rede dos índices semi-inteiros  $j + 1/2$ , e é mostrada no esquema abaixo:



Sendo assim durante a resolução do sistema de equações, as grandezas de interesse estão separadas em dois grupos, um grupo de grandezas está definida na rede de índices inteiros ( por exemplo, grandezas tais como densidade, velocidade e temperatura dos fluidos ) e o outro na rede de índices semi-inteiros ( os campos elétrico emagnético ).

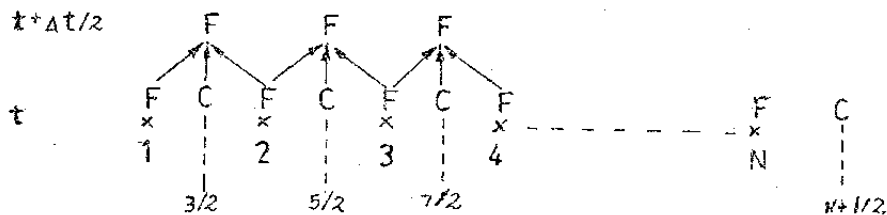
As equações a serem resolvidas envolvem derivadas espaciais e temporais. Para centrar a integração de derivadas espaciais, utilizam-se duas redes de pontos como descrito anteriormente. A seguir passa-se a descrever o esquema geral de integração temporal do sistema de equações, que é o esquema de Lax-Wendroff, e que vem centrar a integração no tempo.

Ao iniciar no tempo genérico  $t$  com as grandezas de fluido (  $F$  ) definidas na rede de índices inteiros, através das equações de Maxwell calculam-se os valores dos campos (  $C$  ) na rede dos índices semi-inteiros.

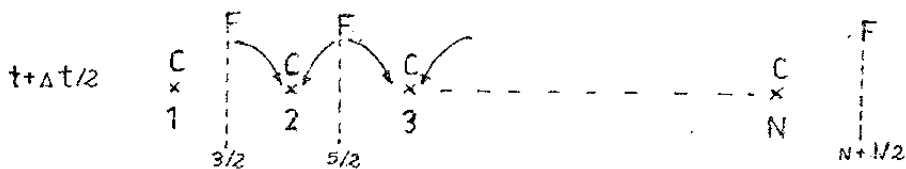


A partir destes valores das grandezas de fluido e dos campos no instante  $t$ , e através das equações de fluido calculam-

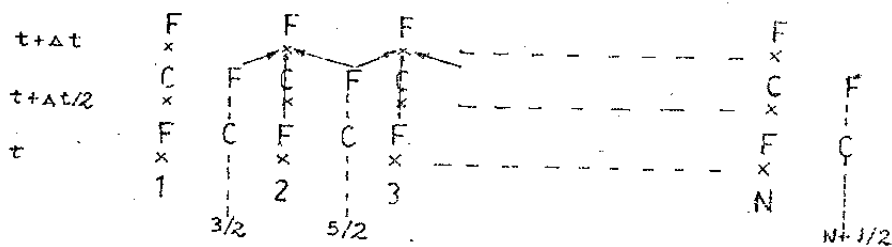
se os valores das grandezas de fluido no instante  $t + \Delta t/2$  e definidos na rede dos índices semi-inteiros.



Em seguida, a partir dos valores das grandezas de fluido no instante  $t + \Delta t/2$  e usando as equações de Maxwell, calculam-se os valores dos campos, definidos na rede dos índices inteiros, no instante  $t + \Delta t/2$ .



Finalmente, a partir dos valores das grandezas de fluido nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t/2$  e dos valores dos campos no instante  $t + \Delta t/2$  ao usar as equações de fluido calculam-se os novos valores das grandezas de fluido no instante  $t + \Delta t$ .



A partir dos valores das grandezas de fluido no instante  $t + \Delta t$ , definidos na rede de índices inteiros pode-se repetir o procedimento descrito e obter-se a evolução temporal das grandezas que caracterizam o sistema.

### III.2. Resolução das Equações de Fluido.

As equações de fluido de (2.11) a (2.14), podem ser colocadas na forma abaixo após alguma manipulação algébrica.

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha x}}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha x}}{\partial t} = & - \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha x} v_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( n_{\alpha} E_x + \frac{nv_{\alpha y} B_z}{c} \right) - \\ & \frac{1}{m_{\alpha}} \frac{\partial n_{\alpha} T_{\alpha}}{\partial x} + \frac{1}{m_{\alpha}} R_{\alpha x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha y}}{\partial t} = & - \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha y} v_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( n_{\alpha} E_y - \frac{nv_{\alpha x} B_z}{c} \right) + \\ & \frac{1}{m_{\alpha}} R_{\alpha y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} = - \frac{\partial T_{\alpha} v_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{1}{3} T_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha x}}{\partial x} - \frac{2}{3n_{\alpha}} \frac{\partial q_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{2Q_{\alpha}}{3m_{\alpha}} \quad (3.4)$$

Nota-se que todas as equações são da forma:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial R v_x}{\partial x} - \beta \frac{\partial S}{\partial x} + D \quad (3.5)$$

Esta é a forma generalizada da equação de advecção. É -



uma equação hiperbólica, logo admite soluções com descontinuidades, o que leva a dificuldades numéricas. Uma técnica recente para resolver equações do tipo (3.5) é a chamada "Flux Correct Transport", desenvolvida por Boris e Book (4,5). Este algoritmo é fundamental para integrar as equações de um "θ-pinch", pois neste caso existem gradientes grandes de densidade e campo magnético.

O algoritmo utilizado consta do seguinte:

a) A partir dos valores de  $R_j$ ,  $Rv_{xj}$ ,  $S_j$  e  $\beta_{j+1/2}$ ,  $D_{j+1/2}$  no instante  $t$  ( o índice  $i$  é usado para o tempo, de modo que  $i\Delta t = t$  ), avança-se  $R$  de meio espaço no tempo:

$$R_{j+1/2}^{i+1/2} = \frac{1}{2} ( R_j^i + R_{j+1}^i ) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ - \frac{ ( Rv_{xj+1}^i - Rv_{xj}^i ) }{\Delta x} - \beta_{j+1/2}^i \left( \frac{S_{j+1}^i - S_j^i}{\Delta x} \right) + D_{j+1/2}^i \right\}$$

b) Agora os  $Rv_x$ 's e os  $S$ 's estão definidos na rede  $j+1/2$ , no instante  $t + \Delta t/2$ , pois para eles ou há uma equação do tipo da do item a ou são formados a partir de grandezas para as quais haja uma equação semelhante a do item a. Os  $\beta$ 's e os  $D$ 's, que geralmente envolvem campos, estão definidos na rede  $j$  no instante  $t + \Delta t/2$ . Então  $R$  é calculado no instante  $t + \Delta t$ , com o lado direito da equação calculado no instante  $t + \Delta t/2$ .

$$\tilde{R}_j^{i+1} = R_j^i + \Delta t \left\{ - \frac{(R_{x_{j+1/2}}^{i+1/2} - R_{x_{j-1/2}}^{i+1/2})}{\Delta x} - \beta_j^{i+1/2} \frac{(S_{j+1/2}^{i+1/2} - S_{j-1/2}^{i+1/2})}{\Delta x} + D_j^{i+1/2} \right\}$$

Estes dois primeiros estágios constituem o algoritmo clássico, centrado no tempo e no espaço, de Lax-Wendroff e  $\tilde{R}_j^{i+1}$  representa o valor temporário de R, ao qual se aplica o algoritmo de "Flux Corrected Transported" ( FCT ). A razão disto é que os esquemas de integrao clássicos, como o de Lax-Wendroff, apresentam o fenmeno da dispersão que provoca o aparecimento de ondulaes não físicas. A idéia essencial do FCT é justamente, localizar a difusão nessas regiões onde aparecem ondulaes, ocasionadas pela dispersão, e assim eliminá-las. Os passos seguintes se referem ao algoritmo FCT.

c) A seguir acrescenta-se uma difusão, de quantidade conhecida, para remover os efeitos da dispersão numérica

$$\tilde{\tilde{R}}_j^{i+1} = \tilde{R}_j^{i+1} + \frac{1}{8} ( R_{j+1}^i - 2R_j^i + R_{j-1}^i )$$

Agora o fluxo  $( R_{j+1} - R_j )$  é corrigido de maneira que a difusão seja removida de modo a não permitir a formao de novo máximo ou mínimo provocado pela dispersão. Contudo, le não impede a formao dum máximo ou mínimo real.

$$d) \Delta_{j+1/2} = \tilde{\tilde{R}}_{j+1}^{i+1} - \tilde{\tilde{R}}_j^{i+1}$$

$$e) f_{j+1/2} = \text{sign}(\Delta_{j+1/2}) \max \left\{ 0, \min \left[ \text{sign}(\Delta_{j+1/2}) \cdot \Delta_{j-1/2}, \frac{1}{8} |\Delta_{j+1/2}|, \text{sign}(\Delta_{j+1/2}) \Delta_{j+1/2} \right] \right\}$$

onde:  $\text{sign}(a)$  é +1 se  $a > 0$  e -1 se  $a < 0$

$\max(a,b)$  é o maior dos dois números a ou b

$\min(a,b)$  é o menor dos dois números a ou b

f) Então o valor final para R é:

$$R_j^{i+1} = \tilde{R}_j^{i+1} - ( f_{j+1/2} - f_{j-1/2} )$$

Esta é a técnica utilizada para integrar todas as equações de fluido.

### III.3. Resolução da Equação para o Campo Radial.

A equação para o campo radial é a equação de Poisson

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi ( q_i n_i + q_e n_e )$$

Como são utilizadas duas redes, uma para os campos e outra para as grandezas de fluido, esta equação fica centrada. Por exemplo no instante t tem-se  $n_{\alpha j}$  e  $E_{xj+1/2}$ , e assim a resolução numérica da equação fica;

$$\frac{E_{xj+1/2} - E_{xj-1/2}}{\Delta x} = 4\pi ( q_i n_{ij} + q_e n_{ej} )$$

e faz-se a integração de dentro para fora, pois é conhecido, como condição de contorno, que o campo elétrico radial é antissimétrico na origem logo  $E_{x1/2} = - E_{x3/2}$  ( vale aqui lembrar que a origem  $x = 0$  é representada pelo índice  $j = 1$  ). Desta condição é possível determinar  $E_{x3/2}$  e seguir integrando, a partir da relação

$$E_{xj+1/2} = E_{xj-1/2} + 4\pi ( q_i n_{ij} + q_e n_{ej} ) \Delta x$$

#### III.4. Resolução da Equação para o Campo Magnético.

A equação para o campo magnético é a lei de Ampère, sem a corrente de deslocamento

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} ( q_c n_c v_{cy} + q_i n_i v_{iy} )$$

Como na equação anterior

$$\frac{B_{zj+1/2} - B_{zj-1/2}}{\Delta x} = \frac{4\pi}{c} ( q_e n_e v_{eyj} + q_i n_i v_{iyj} )$$

Mas agora, é prescrito o comportamento da corrente, na parede, e conseqüentemente é possível determinar  $B_z$  na parede, - assim  $B_z$  é determinado integrando-se de fora para dentro como se segue:

$$B_{zj-1/2} = B_{zj+1/2} + \frac{4\pi}{c} \Delta x ( q_e n_e v_{eyj} + q_i n_i v_{iyj} )$$

### III.5. Resolução da Equação para o Campo Elétrico Tangencial.

Resta descrever a resolução para  $E_y$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Esta equação não pode ser integrada diretamente, pois aparecem instabilidades numéricas. A técnica usual é derivar esta equação em  $x$  e obter

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

E ao substituir  $\partial B_z / \partial x$  por seu valor, dado pela equação (2.16), tem-se:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} ( q_e n_e v_{ey} + q_i n_i v_{iy} )$$

Mas  $\partial n_i v_{iy} / \partial t$  e  $\partial n_e v_{ey} / \partial t$  podem ser obtidas de (3.3) e substituídos na equação para  $E_y$ . Agora com o índice  $\alpha = i, e$ , a equação para  $E_y$  fica:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left( - \frac{\partial n_{\alpha} v_{\alpha x} v_{\alpha y}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( n_{\alpha} E_y - \frac{n_{\alpha} v_{\alpha x} B_z}{c} \right) \right) + \frac{R_{\alpha y}}{m_{\alpha}}$$

Para resolver esta equação ( quando por exemplo  $E_y$

está definido na rede  $j+1/2$  ) faz-se as seguintes substituições de derivadas por diferenças finitas

$$\left. \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right|_{j+1/2} \rightarrow \frac{E_{j-1/2} - 2E_{j+1/2} + E_{j+3/2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial n_{\alpha}^v \frac{\partial v_{\alpha x} v_{\alpha y}}{\partial x}}{\partial x} \right|_{j+1/2} \rightarrow \frac{n_{\alpha}^v \frac{\partial v_{\alpha x} v_{\alpha y}}{\partial x} \Big|_{j+1} - n_{\alpha}^v \frac{\partial v_{\alpha x} v_{\alpha y}}{\partial x} \Big|_j}{\Delta x}$$

$$n_{\alpha} \Big|_{j+1/2} \rightarrow \frac{n_{\alpha j+1} + n_{\alpha j}}{2}$$

Com isto obtem-se uma equação matricial para  $E_y$

$$\begin{vmatrix} L_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & L_2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & L_3 & 1 & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & L_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{y3/2} \\ E_{y5/2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{yn+1/2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{vmatrix}$$

$$\text{com } L_j = -2 - \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{(n_{\alpha j} + n_{\alpha j+1})}{2} (\Delta x)^2$$

$$F_j = - \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left[ ( n_{\alpha} v_{\alpha x} v_{\alpha y} |_{j+1} - n_{\alpha} v_{\alpha x} v_{\alpha y} |_j ) \Delta x - \frac{ ( n_{\alpha} v_{\alpha x} |_{j+1} + n_{\alpha} v_{\alpha x} |_j ) B_{j+1/2}}{2 \text{ cm}_{\alpha}} (\Delta x)^2 \right]$$

Esta equação é resolvida invertendo a matriz dos coeficientes, que é tridiagonal ( pois somente três de suas diagonais não são nulas ) ( 6 ). Portanto tem que ser resolvido um sistema do tipo:

$$E_{yj+3/2} + L_j E_{yj+1/2} + E_{yj-1/2} = F_j \tag{3.6}$$

Para isto supõe-se como solução

$$E_{yj+3/2} = X_j E_{yj+1/2} + Y_j$$

e substituindo na equação (3.6), obtêm-se:

$$E_{yj+1/2} = \frac{F_j - Y_j}{(X_j + L_j)} - \frac{1}{(X_j + L_j)} E_{yj-1/2}$$

e comparando com as definições de X<sub>j</sub> e Y<sub>j</sub>, chega-se as seguintes relações de recorrência:

$$X_{j-1} = - \frac{1}{X_j + L_j} \tag{3.7}$$

$$e \quad Y_{j-1} = \frac{F_j - Y_j}{(X_j + L_j)} \quad (3.8)$$

Assim, dadas as condições de contorno, que são obtidas da equação:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

calculada na parede (uma vez que  $\partial B_z / \partial t$  na parede é conhecido) é possível determinar  $X_{N-1}$  e  $Y_{N-1}$  e mediante as relações (3.7) e (3.8) determinam-se os outros X's e Y's. Juntando a esta condição de contorno, a condição de antiassimetria de  $B_y$  na origem, todos os valores de  $B_y$  podem ser determinados.

Tem-se então relações que permitem obter todas as grandezas de interesse. As grandezas de fluido tem seus valores prescritos em  $t = 0$ , com dados que são obtidos geralmente de medidas experimentais. Os campos são obtidos das grandezas de fluido e o valor do campo magnético na parede externa é imposto como uma função conhecida do tempo.

### III.6. Estabilidade do Código Numérico.

A aproximação do sistema de equações diferenciais por meio de equações de diferenças finitas, pode fazer com que soluções que são analiticamente estáveis, tornem-se numericamente instáveis. A taxa de crescimento, para essas instabilidades numéricas, depende da escala de tempo analítico, comparado com o  $\Delta t$



escolhido. Soluções com a escala de tempo mais rápida, se instáveis, são as que causam a maior restrição ao valor de  $\Delta t$ . A escala de tempo mais rápida, para as equações deste modelo, é a oscilação dos elétrons do plasma.

Para analisar a estabilidade considera-se uma ligeira perturbação nas equações acima tal que  $n_i = n_0$ ,  $n_e = n_0 + \delta$ ,  $m_i \rightarrow \infty$ ,  $E_x = \delta E$ ,  $V_{xe} = \delta V$ ,  $V_{xi} = E_y = B_z = V_{yi} = V_{ye} = 0$  e o conjunto de equações, para esta situação reduz-se a:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = - \frac{e}{m_e} \delta E \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} = - 4\pi e \delta n \quad (3.11)$$

Supondo solução da forma  $e^{I(kx-wt)}$ , com  $I = \sqrt{-1}$ , para as grandezas perturbadas, tem-se que:

$$w = \pm w_{pe} = \pm \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}$$

Portanto, como  $w$  é real as oscilações são estáveis, e não há alteração na amplitude de oscilação.

O sistema de equações (3.9) a (3.11) é resolvido numéri-

camente, usando o algoritmo de Lax-Wendroff e impondo variação da forma  $e^{ikx}$ , assim chega-se a equação:

$$\delta n_j^{i+1} = \delta n_j^i - n_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \delta v_{j+1/2}^{i+1/2} - \delta v_{j+1/2}^{i+1/2} \right) \quad (3.12)$$

$$\delta v_j^{i+1} = \delta v_j^i - \frac{e}{m} \Delta t \delta E_j^{i+1/2} \quad (3.13)$$

$$\delta E_j^{i+1/2} = - \frac{4\pi e \delta n_{j-1/2}^{i+1/2}}{\frac{1}{2}(1-e^{-Ikx})} \quad (3.14)$$

O sistema de equações (3.12) a (3.14) pode, então ser escrito na forma:

$$\begin{vmatrix} \delta n_j^{i+1} \\ \delta v_j^{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 & \frac{-In_0\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen}(k\Delta x) \\ \frac{\epsilon^2\Delta x}{n_0\Delta t} \frac{\cos(\frac{1}{2}k\Delta x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}k\Delta x)} & 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta n_j^i \\ \delta v_j^i \end{vmatrix}$$

onde  $\epsilon = w_{pe} \Delta t$ .

Os auto valores desta matriz dão o crescimento da amplitude  $\delta n_j^{i+1} = \lambda \delta n_j^i$ , por passo no tempo, com

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \pm I\epsilon \sqrt{\cos(\frac{1}{2}k\Delta x)}$$

consequentemente:

$$|\lambda|_k = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^4 - \epsilon^2 \text{sen}^2\left(\frac{1}{2}k\Delta x\right)}$$

e para  $k\Delta x \ll 1$ , tem-se:

$$|\lambda| \approx \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^4 - \frac{1}{4}\epsilon^2 (k\Delta x)^2}$$

A oscilação é estável somente quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ . Para longos comprimentos de onda,  $k\Delta x \rightarrow 0$ , a oscilação é instável, crescente, com  $|\lambda| \approx \sqrt{1 + 1/4\epsilon^4}$ . A instabilidade, praticamente, inutiliza o código numérico.

Para resolver este problema, primeiramente, faz-se  $\epsilon = w_{pe} \Delta t \ll 1$ , e o efeito é minimizado. No programa utilizado tem-se  $\Delta t = 1/4w_{pe}^{-1}$ . Além disso, para ter certeza de que nenhum dos modos é instável, utiliza-se uma correção para o modo de crescimento mais rápido (maior comprimento de onda).

O maior comprimento de onda possível é  $(N-1)\Delta x$  portanto,  $k = 2\pi/(N-1)\Delta x$ . Assim faz-se  $n_e \rightarrow (n_e - n_i)/\lambda + n_i$  e  $v_{xe} \rightarrow (v_{xe} - v_{xi})/\lambda + v_{xi}$  onde  $\lambda$  é calculado para o valor de  $k$  correspondente ao maior comprimento de onda, e é igual a:

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^4 - \epsilon^2 \left(\frac{\pi}{N}\right)^2}$$

nota-se que como nos problemas de pistão  $n_e \approx n_i$  e  $v_{xe} \approx v_{xi}$ , su

põe-se que  $\delta n_e \approx n_e - n_i$  e  $\delta v_{xe} \approx v_{xe} - v_{xi}$ .

O fato da oscilação do plasma ter um excesso de atenuação não é problema, pois não há interesse, em estudar fenômenos com escala de tempo de oscilação dos elétrons e sim fenômenos numa escala de tempo maior.

## CAPÍTULO IV - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

IV.1. Introdução.

Nos capítulos II e III foram apresentados o modelo físico, o sistema de equações e o método numérico a ser utilizado em sua resolução. Baseado nisto foi elaborado um programa de computador, para simular o "θ-pinch". Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através da execução de tal programa.

A condição para que o esquema numérico seja estável é - que  $\Delta t < 1/\omega_{pe}$  (na execução do programa foi utilizado  $\Delta t = 0.25/\omega_{pe}$ ); a seguir mostra-se que este fato conjugado a dois outros, impõe restrições ao valor da densidade que pode ser utilizado.

As escalas de tempo envolvidas no modelo são o período de oscilação do plasma dos elétrons  $T_{pe}$ , tempo de Alfvén  $T_A$  e o tempo de "pinch"  $T_p$ .

$$T_{pe} \sim n^{-1/2}$$

$$T_A = \frac{R}{V_A} \sim n^{1/2}$$

$$T_p \sim n^{1/4} \text{ (segundo o modelo de "snow-plow")}$$

Vê-se então que para  $n$  crescendo devemos ter  $\Delta t$  diminuindo para satisfazer a relação  $\Delta t < 1/\omega_{pe}$ , mas por outro lado  $T_A$  e

$T_p$  também crescem, conseqüentemente o número total de passos no tempo cresce com a primeira potência da densidade. Por limitações decorrentes do tempo de computador disponível e de erros de arredondamento ( que crescem com o aumento do número de passos no tempo ), chegou-se a conclusão de que da ordem de  $10^4$  a  $2 \cdot 10^4$  passos no tempo seriam possíveis. Isto limita o valor máximo da densidade por volta de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ . Este é um valor baixo para os "θ-pinches" grandes atuais e também para os "θ-pinches" existentes na UNICAMP, que operam em regime de pressão inicial alta, do gás neutro. No entanto o "θ-pinch" rápido da Universidade do Texas tem resultados experimentais conhecidos nesta faixa de densidades ( 7 ), que em princípio podem ser comparados com alguns resultados teóricos aqui obtidos.

Para os estudos numéricos considera-se um plasma de hidrogênio, portanto neste caso os íons são prótons. Inicialmente este plasma tem uma densidade de partículas de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , constante por todo volume do cilindro, o que num experimento não é necessariamente verdadeiro, por exemplo no já mencionado "θ-pinch" rápido da Universidade do Texas, a densidade, já de início é maior no centro do que nas regiões próximas a parede do "θ-pinch". O plasma considerado é suposto de início completamente ionizado e com  $T_e = T_i = 2\text{eV}$ . O campo magnético na parede do cilindro, cujo raio é de 5 cm sobe até 500 G em 80 nanosegundos. Estes, portanto, são os parâmetros do plasma, utilizados para a primeira série de resultados da simulação numérica.

#### IV.2. "Snow - Plow"

Primeiramente o programa foi executado com os valores

dos parâmetros densidade, temperatura etc, acima mencionados, porém sem levar em conta colisões de espécie alguma ou seja, fez-se no sistema de equações apresentado no capítulo II,  $R_{\alpha x} = R_{\alpha y} = Q_{\alpha} = q_{\alpha x} = 0$ .

Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 1 e 2. Na figura 1 estão perfis - num mesmo gráfico tem-se densidade iônica e campo magnético contra posição radial - descrevendo a situação de certos parâmetros do plasma em quatro instantes diferentes de tempo. Na figura 2 tem-se o raio do plasma em função do tempo, e por meio de uma extrapolação para o instante em que  $r = 0$  obtém-se um tempo de "pinch" da ordem de 82 nanosegundos.

O comportamento do plasma neste caso, assemelha-se bastante ao descrito pelo modelo de "snow-plow" ( 8 ), ou seja, com o tempo a densidade do plasma vai se acumulando, formando um pico cuja largura é da ordem de  $c/\omega_{pe}$ . Esta região de acúmulo de densidade vai sendo empurrada pelo pistão magnético (devido ao termo  $\vec{j} \times \vec{B}$ ) em direção ao centro do cilindro, sem que haja praticamente penetração do campo magnético no interior do plasma, em razão do comportamento diamagnético dos elétrons. Pode ser visto, da figura 1, que de fato as características previstas, através deste modelo físico simples estão presentes nos resultados apresentados. A largura do pico de densidade é de  $0.8c/\omega_{pe}$  e o campo magnético tem um valor muito baixo no interior do plasma.

O modelo de "snow-plow", que é tratável analiticamente prevê um tempo de "pinch" dado pela seguinte expressão:

$$T_p = 1.8c \left( \frac{lb}{I_0'} \right)^{1/2} \left( \frac{c^2 \rho_m(0)}{8\pi} \right)^{1/4}$$

onde  $b$  é o raio do cilindro,  $\rho_m(0)$  é a densidade de massa do plasma ( $n(m_e + m_i)$ ), no instante inicial,  $I_0$  é o valor da derivada temporal da corrente no instante inicial e  $l$  é o comprimento do cilindro ( que neste caso foi suposto muito grande, de maneira que fosse possível desprezar a dependência espacial das grandezas, em função do comprimento ao longo do eixo do cilindro; em todo caso o que importa é a relação  $I_0/l$  ). Substituindo, nesta equação para  $T_p$ , os valores dos parâmetros aqui utilizados, obtem-se um tempo de "pinch" de 76 nanosegundos que concorda com o valor obtido na figura 2, em função das aproximações feitas.

#### IV.3. Transporte Clássico.

A seguir, para os mesmos valores dos parâmetros, o programa foi executado, mas desta vez os termos de transporte clássico foram considerados, quer dizer resolveu-se o sistema de equações de ( 2.11 ) a ( 2.17 ) com os termos  $R_{ax}$ ,  $R_{ay}$ ,  $q_{ax}$  e  $Q_a$  calculados conforme o modelo de Braginskii.

Quando o plasma apresenta uma resistividade apreciável, o perfil do campo magnético tende a se difundir mais no interior do plasma, isto é, as linhas de campo magnético penetram no interior do plasma, além disso o pico de densidade é menos abrupto que no caso do "snow-plow". Portanto, se a resistividade fornecida pelos termos de transporte clássico for suficiente, ter-se-á alteração dos perfis do campo magnético e da densidade.

Na figura 3 são apresentados os resultados obtidos, neste segundo caso, nos mesmos instantes de tempo tomados anteriormente. Ao comparar as figuras 1 e 3 observa-se que os perfis es-



tão praticamente idênticos, a sugerir que para estes parâmetros a resistividade devido ao transporte clássico é muito baixa, o que pode ser visto com clareza a partir da discussão que se segue.

#### IV.4. Transporte Anômalo.

A resistividade devido aos termos de transporte clássico, para a densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , é baixa somente tendo alguma significação para densidades da ordem de 100 ou 1000 vezes maior do que esta ( 9 ). No entanto, resultados experimentais indicam a existência de uma resistência razoável, esta resistência é dita anômala ( 10 ) e é devida a turbulência e microinstabilidades.

O termo resistividade anômala é utilizado para levar em conta a resistividade adicional, que surge num plasma, em razão da interação das partículas do plasma com ondas de plasma instáveis, que surgem no mesmo e tendem a crescer às custas da energia de fluido do plasma, comportando-se assim como uma espécie de resistividade pois rouba energia na forma coerente ( de fluido ) do plasma, e a devolve em forma de energia incoerente ( térmica ), devido a interação dos campos associados a essas ondas com as partículas de plasma. É denominada anômala por não estar vinculada às colisões binárias ( transporte clássico ) que nos primeiros estudos eram os únicos fatores, supostos, de resistividade.

Uma teoria auto-consistente para levar em conta termos anômalos é muito mais complexa do que aquela utilizada ao considerar termos devidos ao transporte clássico, estando portanto além dos objetivos desta tese. Mas, aproveitando resultados obtidos em outros trabalhos ( 10 ), pretende-se fazer uma comparação entre

os termos de resistividade, aqui considerados, e os termos de resistividade anômala.

A partir de uma teoria que trate auto-consistentemente a resistividade anômala ( 10 ), é possível obter uma frequência de colisão definida por:

$$v_{\text{eff}} = - \frac{1}{nv_y} \frac{\partial nv_y}{\partial t} \Bigg|_{\text{anom}}$$

que é o parâmetro, que caracteriza a resistividade, que será estudada. Esta frequência de colisão varia localmente pois as grandezas que descrevem o plasma são função da distância ao eixo do cilindro. Como não está sendo considerado tal tratamento auto-consistente dos termos anômalos, tomou-se um valor médio da frequência de colisão associada a resistividade anômala igual a  $\omega_{pi}$  (10), que é a frequência íon-acústica do plasma para valores grandes de  $k$  ( constante de propagação ) uma vez que a instabilidade predominante no processo anômalo, nestas condições, é a instabilidade íon-acústica. Este valor  $\omega_{pi}$  foi comparado ao da frequência de colisão associado ao transporte clássico, definida de modo análogo àquela do transporte anômalo e calculada a partir deste modelo. Na figura 4 tem-se um gráfico do valor da frequência de colisão - devido ao transporte clássico dividida por  $\omega_{pi}$ , contra a posição radial. Este gráfico corresponde à situação no instante 60 nanossegundos, e a partir dele constata-se que de fato a resistividade associada ao transporte clássico é bem inferior aquela associada ao transporte anômalo, uma vez que o valor máximo que aparece no gráfico é  $0.67 \cdot 10^{-2}$ . Isto explica a pequena diferença dos perfis que aparecem nas figuras 1 e 3.

#### IV.5. Frequência de Colisão Constante.

Visando uma melhor compreensão da influência da resistividade na evolução temporal dos perfis de densidade iônica e do campo magnético resolveu-se executar o programa outras vezes, para os mesmos parâmetros, porém supondo que os termos de colisão devido ao transporte clássico fossem nulos ( $R_{\alpha x} = R_{\alpha y} = Q_{\alpha} = q_{\alpha x} = 0$ ), mas tomando um valor constante para a frequência de colisão, valor este que foi introduzido nas equações para a velocidade tangencial (na realidade a equação é para a densidade de partículas vezes a velocidade tangencial) e para a temperatura, de maneira que estas se tornam:

$$\frac{\partial n V_{ey}}{\partial t} = - \frac{\partial n V_{ey} V_{ex}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} \left( n_e E_y - \frac{n V_{ex} B_z}{c} \right) - \nu n V_{ey}$$

$$\frac{\partial n V_{iy}}{\partial t} = - \frac{\partial n V_{iy} V_{ix}}{\partial x} + \frac{e}{m_i} \left( n_i E_y - \frac{n V_{ix} B_z}{c} \right) - \nu n V_{iy}$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = - \frac{\partial T_e V_{ex}}{\partial x} + \frac{1}{3} T_e \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{m_e V_{ey}^2}{m_e}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = - \frac{\partial T_i V_{ix}}{\partial x} + \frac{1}{3} T_i \frac{\partial V_{ix}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{m_i V_{iy}^2}{m_i}$$

O programa foi executado várias vezes, variando apenas os valores desta frequência de colisão constante. A frequência de colisão tomou os seguintes valores  $\omega_{pi}$  (média espacial da frequência de colisão associada à resistividade anômala),  $\omega_{pi}/5$ ,  $\omega_{pi}/10$ , e  $\omega_{pi}/100$ . Os perfis para a densidade e o campo magnéti-

co são mostrados, respectivamente, nas figuras 5, 6, 7 e 8, sendo que os instantes de tempo considerados, novamente, são os mesmos das vezes anteriores, a fim de que seja possível ao olhar os seis gráficos ter uma idéia bastante razoável do que acontece com os perfis de densidade e campo magnético quando a resistividade do plasma é arbitrariamente variada. É justamente a coerência na variação dos perfis obtidos, em função da resistividade é um resultado importante a atestar a validade dos resultados obtidos.

Ao comparar os seis grupos de perfis que foi possível obter, nota-se que eles estão de acordo com o que poderia ter sido previsto raciocinando, apenas, em termos físicos. As figuras 1 e 3 são praticamente idênticas à figura 8, e por apresentarem baixa resistividade são as que tem maior acúmulo de densidade (chegando  $n/n_0$  a 3), máximo de densidade mais abrupto, com uma queda brusca no perfil do campo magnético, quando visto de fora para dentro. Além disso, são situações de maior tempo de "pinch" (haja visto que para 72 nanosegundos o máximo da densidade encontra-se a 1.75 cm do centro do cilindro); desta comparação é possível mais uma vez, verificar que de fato a resistividade, associada aos termos de colisão clássica, é muito baixa, e como o programa é incapaz de distinguir entre frequência de colisões da ordem de  $\omega_{pi}/100$  e inexistência de colisões, está explicado o fato da simulação sem resistividade produzir perfis idênticos à simulação com os termos de Braginskii (transporte clássico).

Ao observar as figuras 5, 6 e 7 constata-se, como era esperado, que à medida que a frequência de colisão aumenta o máximo da densidade torna-se menos abrupto e com menor acúmulo de

densidade ( no instante 72 nanosegundos tem-se que para  $\omega_{pi}/10$  tem-se  $\Delta n/n = 2.3$ , para  $\omega_{pi}/5$  tem-se  $\Delta n/n = 2$  ); além disso o perfil de campo magnético se difunde muito mais no interior do plasma. Os tempos de "pinch", por sua vez, decrescem ( para o caso  $\omega_{pi}/10$  o máximo no instante 72 nanosegundos está a cerca de 1.25 cm do centro, para  $\omega_{pi}/5$  o máximo de densidade está a 0.8 cm do centro enquanto que para  $\omega_{pi}$  o máximo já alcançou o centro do cilindro ).

Para concluir este estudo da influência da resistividade nos perfis da densidade e campo magnético, cabe aqui comparar os resultados obtidos, por simulação numérica, aos resultados experimentais obtidos no "θ-pinch" da Universidade do Texas ( 7 ) é que se encontram na figura 9. Estes resultados foram obtidos para uma densidade de  $4.10^{12} \text{ cm}^{-3}$  e para serem combinados àqueles através da simulação numérica, supõe-se que a escala de tempo depende de  $n^{1/2}$  ( uma vez que experimentalmente ( 7 ), neste caso, constatou-se que o tempo de "pinch" é proporcional a  $n^{1/2}$  ).

Os valores para o perfil do campo magnético, encontrados através da simulação numérica, não concordam muito bem com aqueles apresentados na figura 9. Uma vez que o perfil do campo magnético, experimentalmente obtido, não é tão abrupto como o perfil aqui obtido ao levar em conta somente termos de transporte clássico, nem tão difundido pelo interior do plasma como o perfil da simulação em que a frequência de colisão é igual a  $\omega_{pi}$ , o perfil da figura 9 tem uma forma intermediária. A razão disso é que este modelo não leva em conta termos de transporte anômalo de uma forma localizada ( uma vez que se supôs uma frequência de colisão constante para todo valor de  $x$  ) que influem no processo.

#### IV.6. Densidade de Corrente.

Como o plasma é um meio diamagnético ao tentar introduzir nele um campo magnético, neste caso criado pela corrente externa, surge uma densidade de corrente ( que gera uma corrente - no sentido contrário ao da corrente externa ) que origina um campo magnético de sentido contrário aquele da corrente externa. Para essa densidade de corrente, negativa em razão de ter sido atribuído valor positivo a corrente externa, praticamente só há contribuição do movimento na direção tangencial por parte dos elétrons, uma vez que a razão entre a aceleração dos íons e dos elétrons é inversamente proporcional a razão das massas, consequentemente a velocidade tangencial dos elétrons é bem maior que a dos íons, enquanto as densidades tem valores próximos.

Nas figuras 10, 11 e 12 são apresentados grupos de perfis em instantes diferentes, para os casos: figura 10 - transporte clássico, figura 11 - frequência de colisão constante  $\omega_{pi}/10$  e figura 12 - frequência de colisão constante  $\omega_{pi}$ . A exemplo do que ocorre com os perfis de densidade, o caso menos resistivo - que corresponde a figura 10 apresenta um perfil mais abrupto do que aqueles encontrados nas outras duas figuras, como era de se esperar, uma vez que para o caso menos resistivo há uma queda - muito mais acentuada no valor do campo magnético ao caminhar de fora para dentro, do que para o caso mais resistivo, ou seja a transição é muito mais rápida nos casos menos resistivos.

Nota-se na figura 10 que a partir de um certo instante há uma região onde o valor da densidade de corrente passa de negativo a positivo, este resultado que tem como consequência um

ligeiro aumento no valor do campo magnético  $B_z$  como pode ser visto nos dois últimos perfis da figura 3. Talvez não deva ser levado em conta, sendo possível consequência de algum efeito numérico surgido em razão dos perfis muito abruptos que tendem a surgir nos casos menos resistivos.

Na tabela I encontra-se o valor da corrente total que surge no plasma, correspondente aos diferentes perfis apresentados. Baseado nos resultados apresentados na tabela I vê-se que a corrente que passa pelo plasma tende a crescer ( em módulo ) com o tempo, a medida que o valor da corrente externa vai crescendo - o mesmo é válido para o valor máximo da densidade de corrente, como pode ser visto a partir das figuras 10, 11 e 12. Mas, quando o pulso de densidade de corrente vai alcançando regiões mais próximas do centro do cilindro, tende a haver uma diminuição no valor da corrente do plasma, com a transferência da energia associada ao movimento na direção tangencial para a temperatura dos elétrons que nos casos mais resistivos cresce bastante, como pode ser visto mais adiante.

Ao comparar as figuras 10 e 12, nota-se que na figura 12 correspondente ao caso mais resistivo, com o tempo de "pinch" menor, tem-se uma queda no valor da corrente muito mais cedo quando comparado ao caso representado na figura 10, esta queda acentuada no valor da corrente está associada ao crescimento muito maior da temperatura dos elétrons no caso em que há uma frequência de colisão  $\omega_{pi}$ .

#### IV.7. Temperatura.

O aquecimento do plasma é basicamente devido ao efeito Joule que é proporcional ao quadrado da densidade de corrente. Como já foi mencionado para a densidade de corrente a única contribuição é, praticamente a dos elétrons, que acabam alcançando temperaturas mais elevadas para quaisquer das resistividades consideradas neste trabalho. E portanto, em geral, a temperatura alcançada pelos elétrons é muito maior do que a alcançada pelos íons.

Perfis de temperatura de elétrons e de íons estão apresentados nas figuras 13, 14 e 15 que correspondem, respectivamente aos casos: transporte clássico,  $\omega_{pi}/10$  e  $\omega_{pi}$  - para cada uma das figuras considerou-se quatro instantes de tempo diferentes e num mesmo gráfico, estão os perfis de temperatura eletrônica e temperatura iônica. Quando há resistividade a temperatura eletrônica é muito maior do que para os casos com menor resistividade, uma vez que a frequência de colisão constante é um fator importante na determinação da temperatura dos elétrons. No caso dos íons para todos os casos, estes apresentam temperaturas baixas e da mesma ordem de grandeza, a indicar que para o caso dos íons o "pinch" em si não os aquece, de maneira considerável, sendo que dois fatores não considerados aqui são os responsáveis pelo aquecimento dos íons. Um deles é a termalização que ocorre no final do processo ( quando grande parte da energia do movimento ordenado do fluido é transformada em energia térmica ). Outro fator que poderia contribuir para o aquecimento iônico é a reflexão dos íons ao chocarem-se com o pistão magnético.



Dos perfis para a temperatura iônica apresentados vê-se que os valores máximos alcançados estão por volta de 5eV, sendo que para os casos de menor resistividade o perfil de temperatura é novamente, mais abrupto pois quando a resistividade é muito baixa, atrás do pistão magnético a densidade de partículas vai quase a zero, o mesmo acontecendo com a temperatura. Agora quando há maior resistividade, como na figura 15, o fato do perfil da densidade ser mais suave se reflete também no perfil da temperatura iônica.

Quanto aos perfis de temperatura dos elétrons o que se observa são diferenças mais marcantes em função da resistividade. A começar pelas temperaturas alcançadas, muito maiores nos casos mais resistivos. Além disso eles diferem substancialmente, uma vez que para baixa resistividade os elétrons são quase todos empurrados para dentro, e na região atrás do pistão magnético praticamente não há elétrons e a temperatura ali vai a zero. Já nos casos em que há resistividade, o perfil da densidade é muito suave e conseqüentemente, atrás do pistão magnético ainda se tem um valor significativo da densidade e a temperatura é bastante elevada.

#### IV.8. Campo Elétrico Radial.

Os valores do campo elétrico radial  $E_x$ , que são obtidos neste código mediante a integração da equação de Poisson são apresentados nas figuras 16 e 17. Ali estão dois grupos de perfis correspondentes a duas situações bastante próximas. Primeiro a situação física correspondente ao modelo "snow-plow" e a segunda à frequência de colisão constante  $\omega_{pi}/100$ .

Também para fins de comparação o campo  $E_x$  foi calculado a partir da condição de quase neutralidade ( 11 ):

$$E_x = - \frac{V_{ey} B_z}{c} - \frac{1}{n_e e} \frac{\partial (n_e T_e)}{\partial x}$$

e os valores assim obtidos foram também colocados nas figuras 16 e 17.

O campo obtido a partir do programa por ser um valor instantâneo apresenta-se com muitas flutuações, quando comparado ao perfil de  $E_x$  correspondente a condição de quase neutralidade. Nota-se que devem existir ondas de plasma se propagando. Para verificar a validade dessa hipótese calculou-se a média temporal do campo elétrico radial no intervalo de 0.2 ns e o valor obtido, para o caso correspondente ao "snow-plow", foi comparado àquele resultante da condição de quase neutralidade. Verificou-se uma boa semelhança entre os dois perfis obtidos, como pode ser constatado na figura 18.

Os perfis de  $E_x$  indicam que na região do pico de densidade, há uma razoável igualdade entre  $n_e$  e  $n_i$ , sendo que na região atrás do pistão magnético há um forte campo elétrico negativo associado a uma concentração menor de íons, em relação aos elétrons. Mas, em função da região em que o campo elétrico  $E_x$  surge, parece que estes altos valores de  $E_x$  não causam maiores problemas.

#### IV.9. Densidade de Partículas.

A densidade de partículas é reduzida de  $10^{12}$  para  $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ . Na execução do programa, para este caso foram encontradas algumas dificuldades, pois surgiram instabilidades numéricas para os casos em que a resistividade era muito baixa, uma vez que o valor do campo magnético permaneceu o mesmo ( a força que empurra permaneceu a mesma ) e a densidade de partículas foi reduzida ( inércia menor ) a tendência foi do perfil de densidade, tornar-se mais abrupto, e não havendo resistividade para compensar este efeito, o método numérico empregado foi incapaz de trabalhar com perfil tão abrupto. Assim foi necessário escolher um certo valor de frequência de colisão que estabiliza-se o código numérico. Frequências de colisão maiores do que  $\omega_{pi}/5$  foram necessárias. Os resultados obtidos encontram-se na figura 19, para a frequência de colisão  $\omega_{pi}$ .

Ao comparar as figuras 5 e 19 observa-se que a principal diferença está no valor do tempo de "pinch", pois enquanto, na figura 5 o máximo de densidade leva cerca de 72 ns para alcançar o centro do cilindro, na figura 19 em 45 ns o valor máximo da densidade está apenas 0.75 cm do centro do cilindro. Os demais detalhes são praticamente os mesmos, isto é, densidade difusa, campo magnético penetrando no interior do plasma e  $\Delta n/n = 1$ .

#### IV.10. Campo Magnético.

O campo magnético foi alterado, seu valor máximo foi de 22 000 G e seu tempo de subida da ordem de 1  $\mu\text{s}$ , permanecendo a densidade de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ . Na figura 20, estão os perfis obtidos neste caso, com frequência de colisão  $\omega_{pi}$ . E também, neste caso, a grande diferença quando comparadas as figuras 5 e 20, é no

novamente o tempo de "pinch", que para este caso é menor ainda -  
que o obtido no ítem anterior.

TABELA 1.

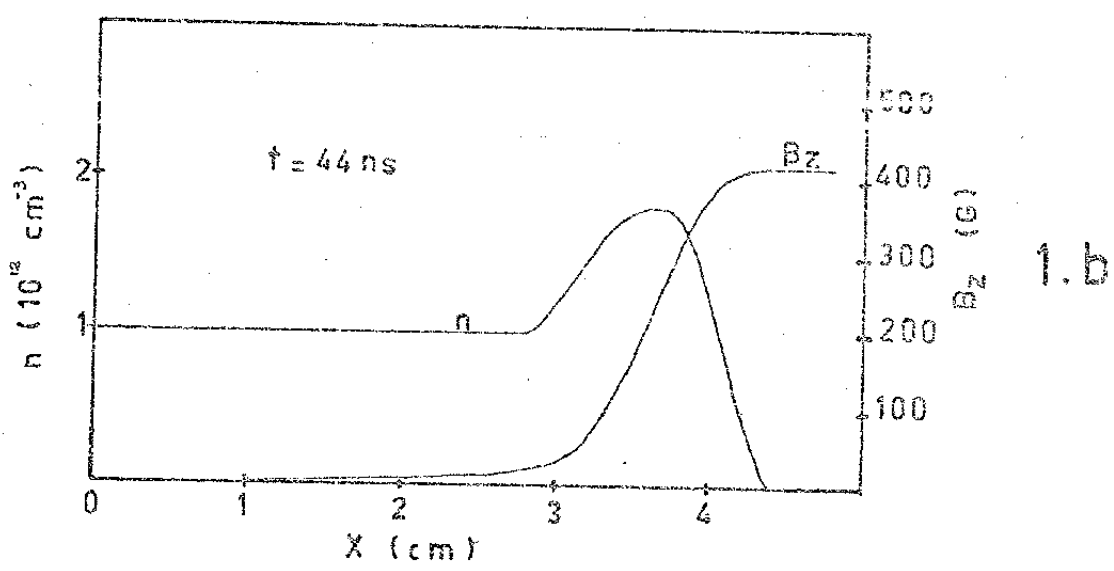
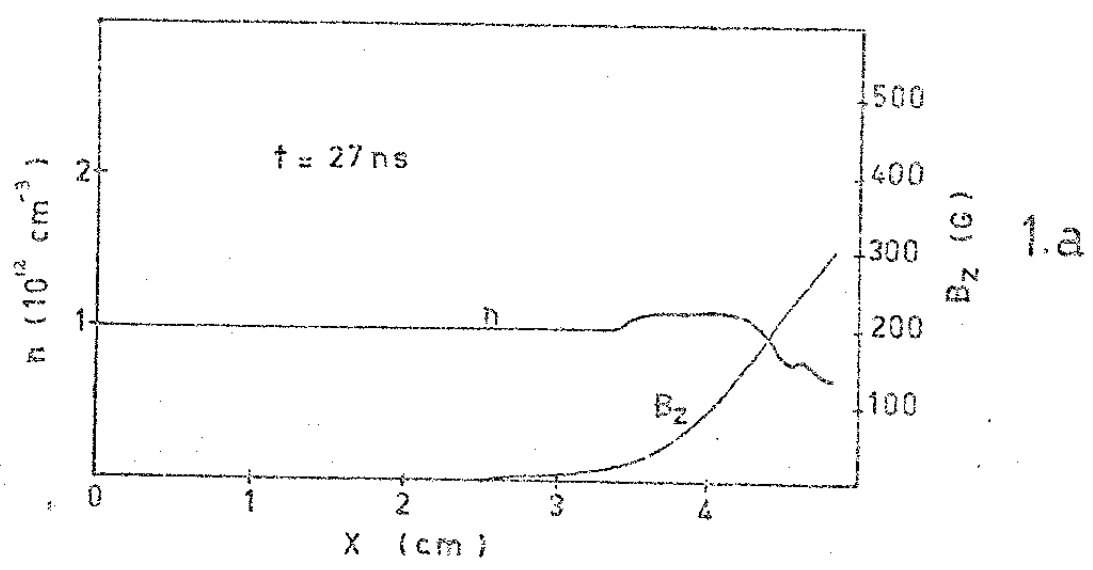
Simulação	Tempo (ns)	I (Calculado)* (stat-ampère)	I (Parede) (stat-ampère)
Transporte Clássico	20	$4.5 \cdot 10^{13}$	$4.63 \cdot 10^{13}$
	40	$9.0 \cdot 10^{13}$	$8.54 \cdot 10^{13}$
	60	$13. \cdot 10^{13}$	$11.1 \cdot 10^{13}$
	80	$11. \cdot 10^{13}$	$11.9 \cdot 10^{13}$
$\omega_{pi}/10$	20	$4.6 \cdot 10^{13}$	$4.63 \cdot 10^{13}$
	40	$9.0 \cdot 10^{13}$	$8.54 \cdot 10^{13}$
	60	$11. \cdot 10^{13}$	$11.1 \cdot 10^{13}$
	80	$5.9 \cdot 10^{13}$	$11.9 \cdot 10^{13}$
$\omega_{pi}$	20	$3.9 \cdot 10^{13}$	$4.63 \cdot 10^{13}$
	40	$4.9 \cdot 10^{13}$	$8.54 \cdot 10^{13}$
	60	$1.8 \cdot 10^{13}$	$11.1 \cdot 10^{13}$

\* I (Calculado) foi determinado mediante a integração dos perfis de densidade de corrente obtidos.

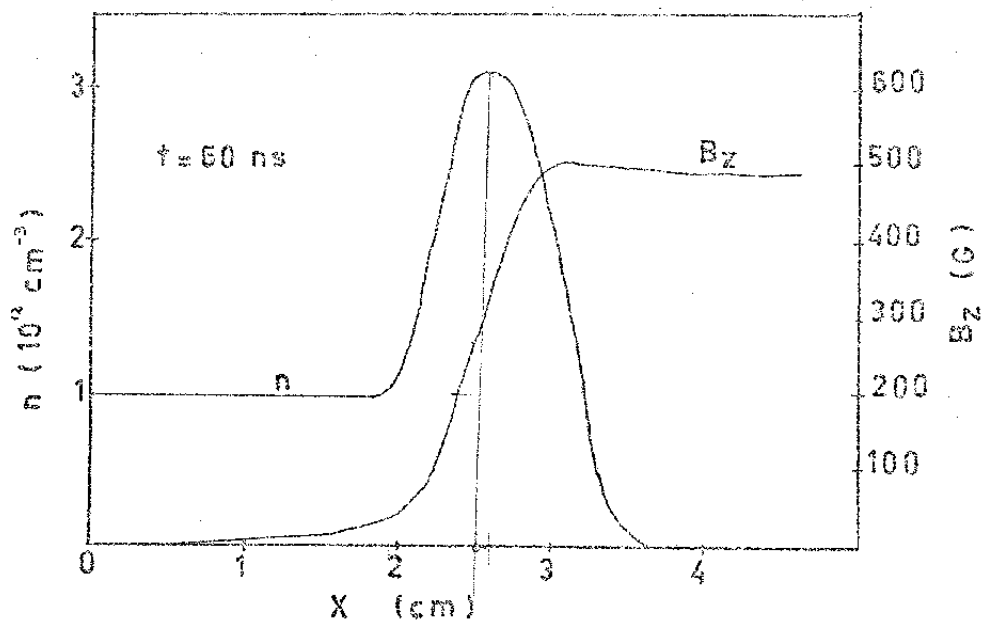
1 statvolt = 300 volts

1 statampere =  $1/3 \times 10^{-9}$  ampere

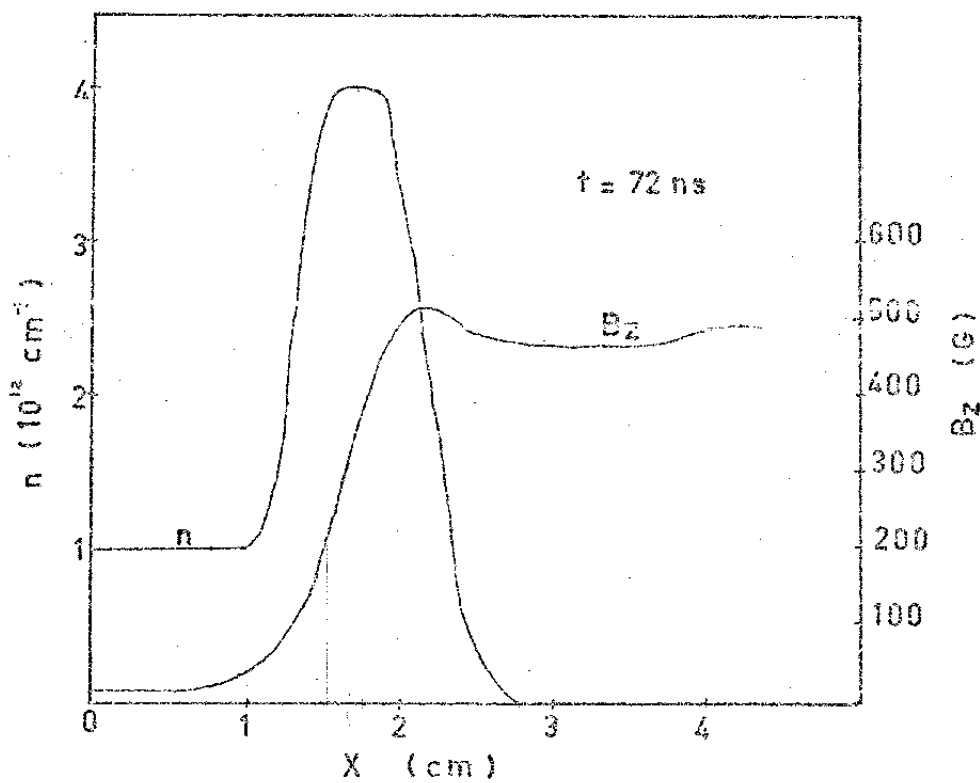
# FIGURA 1



A figura 1 corresponde à simulação sem resistividade, cujo desenvolvimento é análogo ao do modelo "snow-plow".



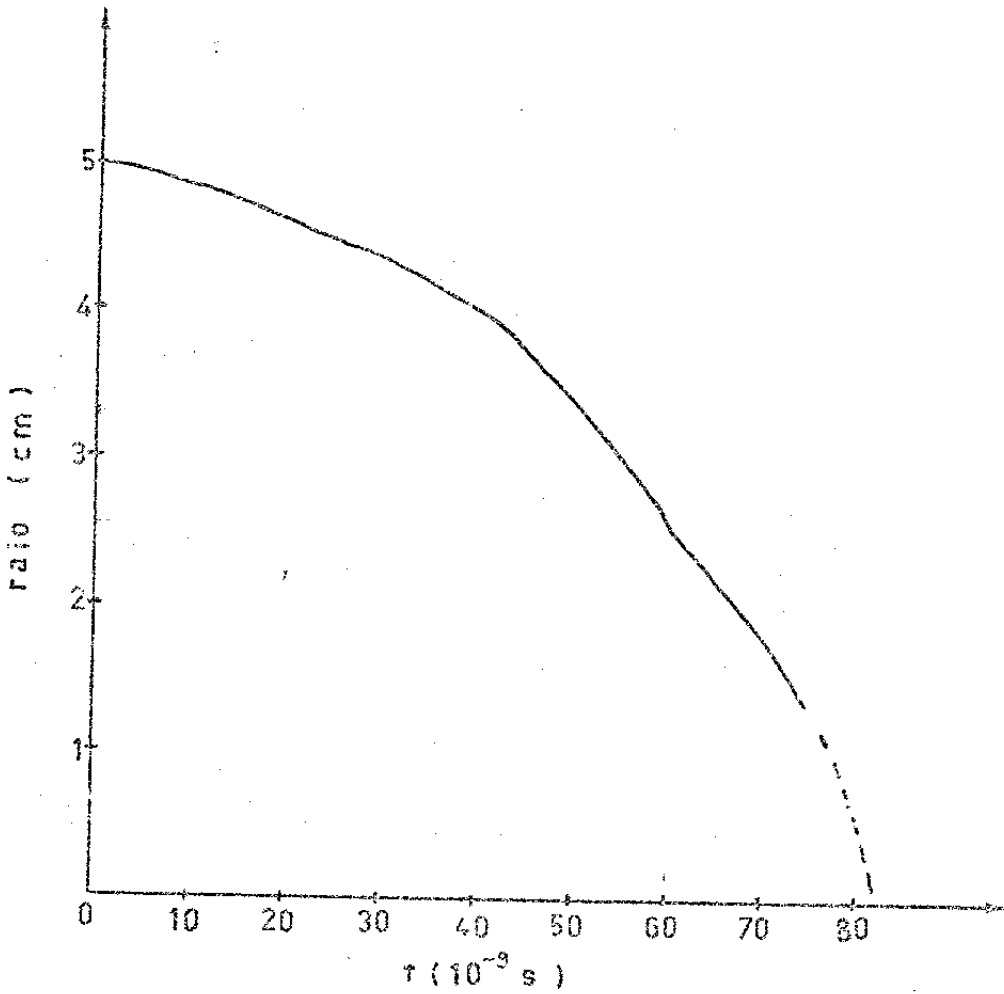
1.c



1.d

O campo magnético penetra pouco no interior do plasma, e as partículas são empurradas para dentro pelo pistão magnético. Na figura 1.d observa-se que  $\Delta n/n = 3$ .

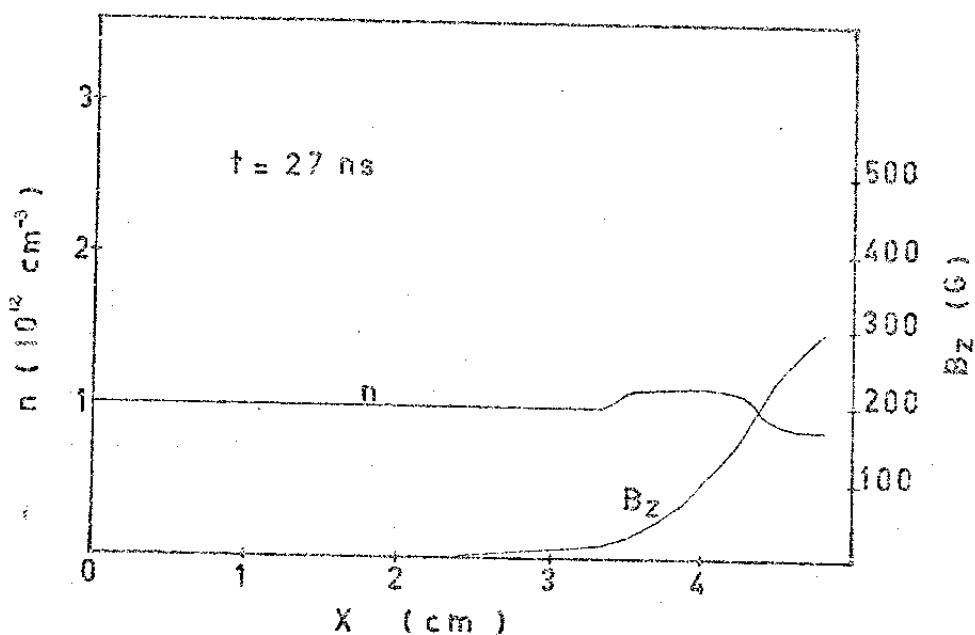
# FIGURA 2



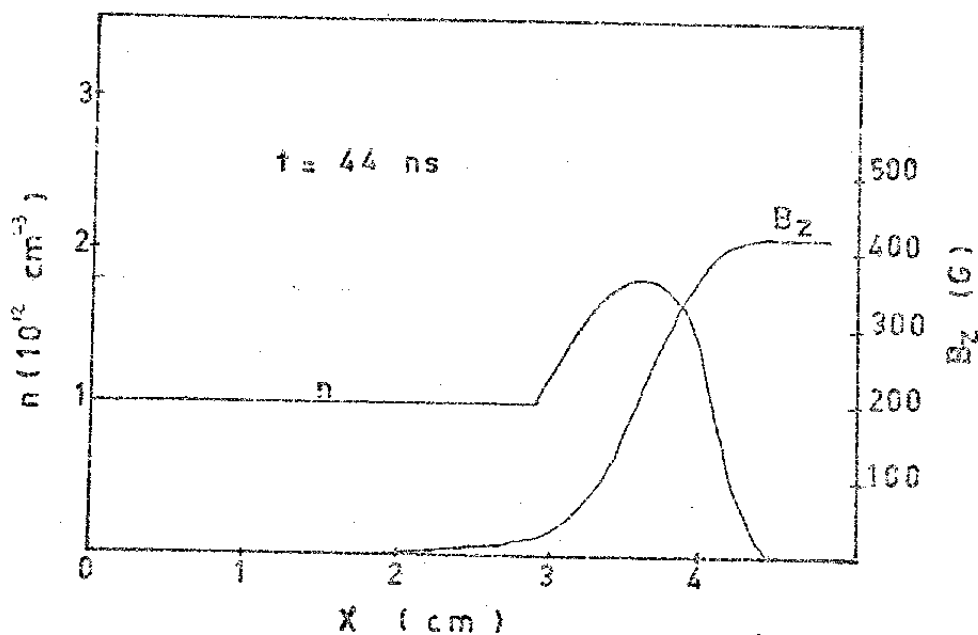
Por extrapolação, determina-se um tempo de "pinch" de ordem de 82 ns para o caso sem resistividade, simulação da figura 1; que concorda com o valor obtido a partir do modelo "snow-plow", 76 ns, em função das aproximações feitas.



# FIGURA 3

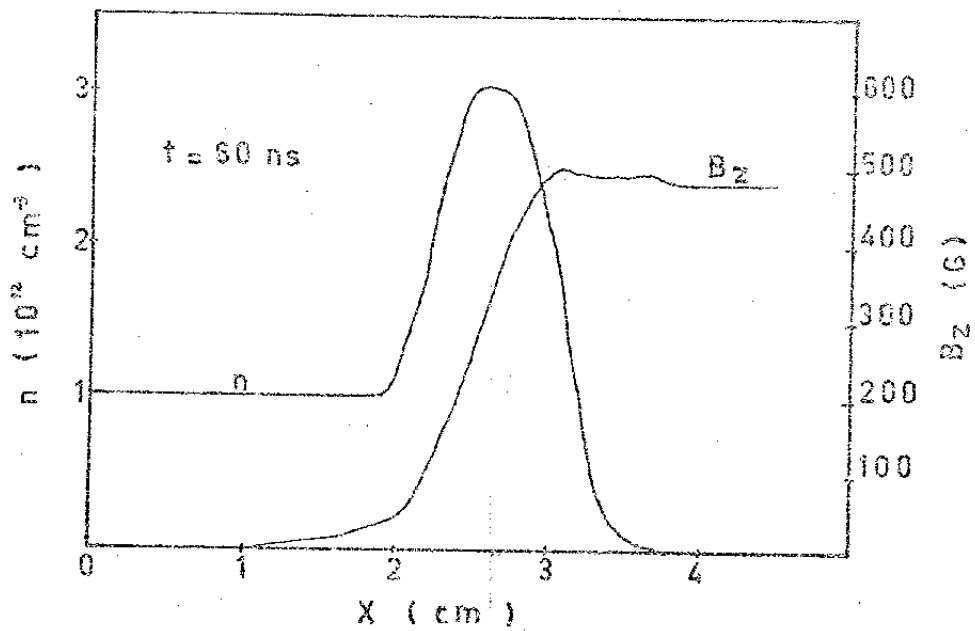


3.a

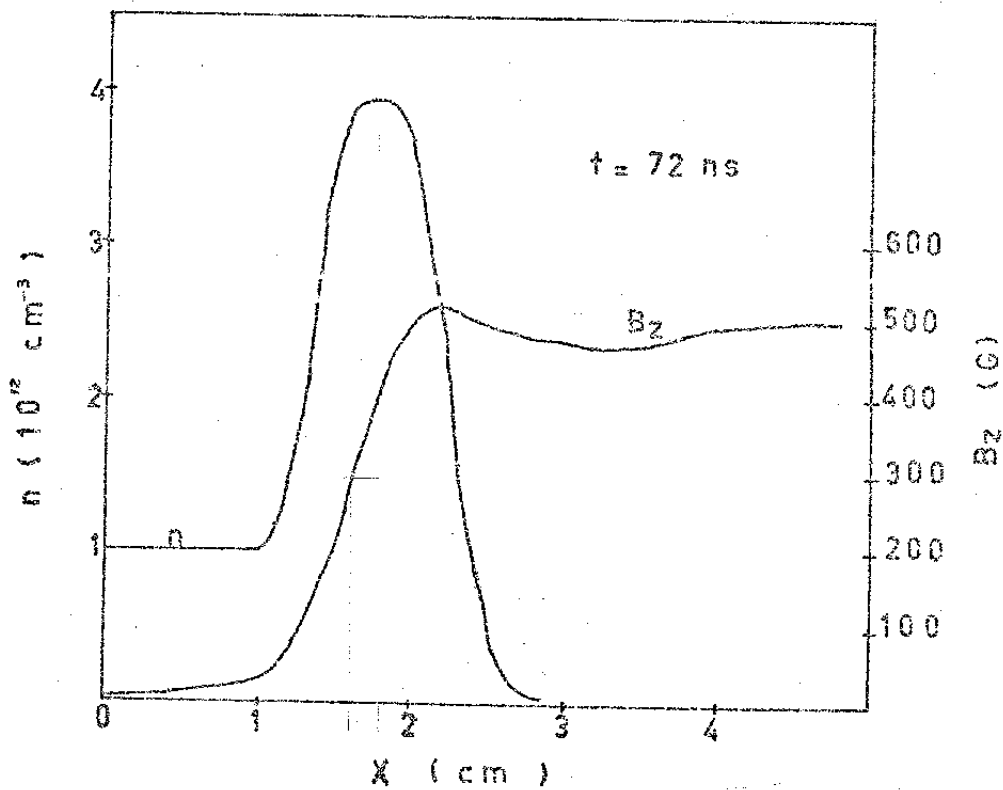


3.b

A figura 3 corresponde a simulação somente com termos de transporte clássico.



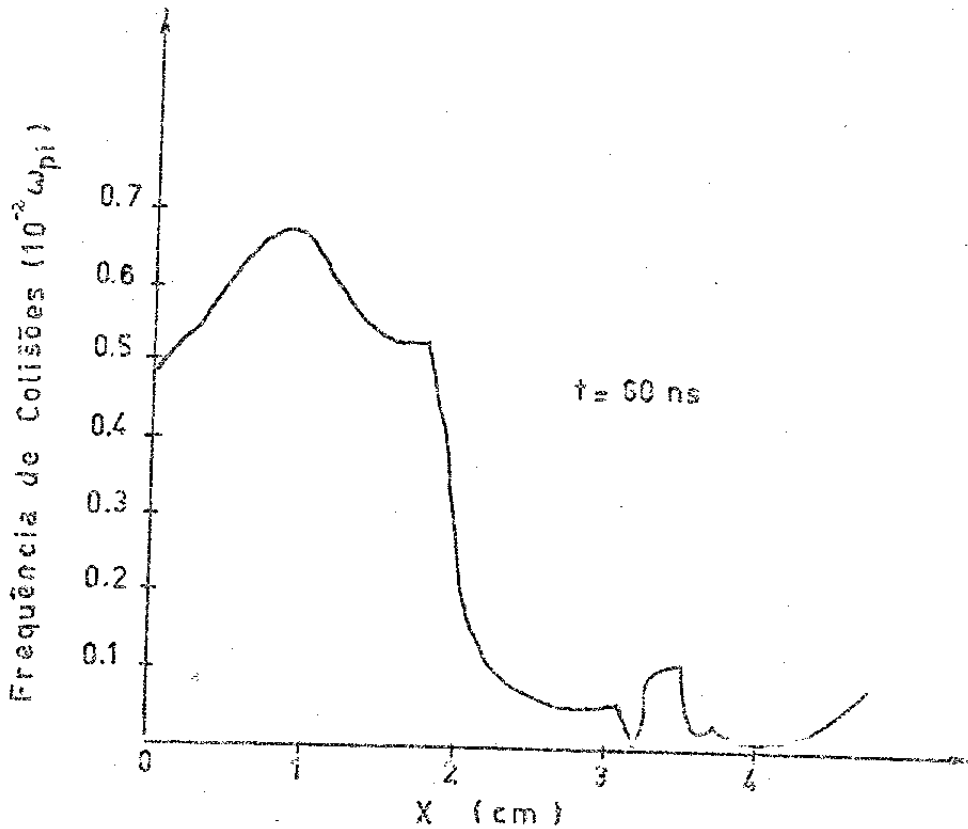
3.c



3.d

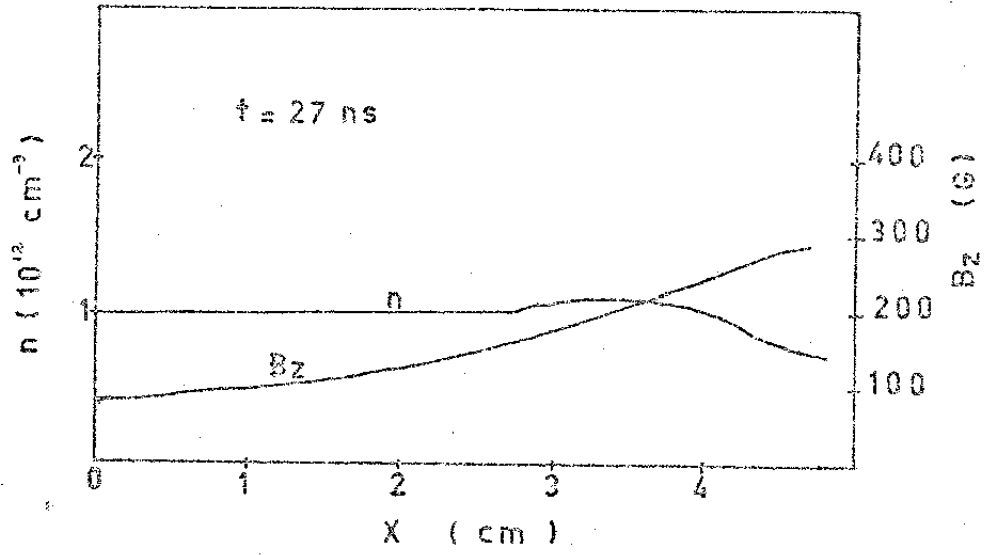
Nesta faixa de densidade e temperatura ( inicial de ordem de 2eV ), e resistividade fornecida por termos de transporte clássico é baixa. Nota-se a semelhança destes perfis, com os da figura 1.

FIGURA 4

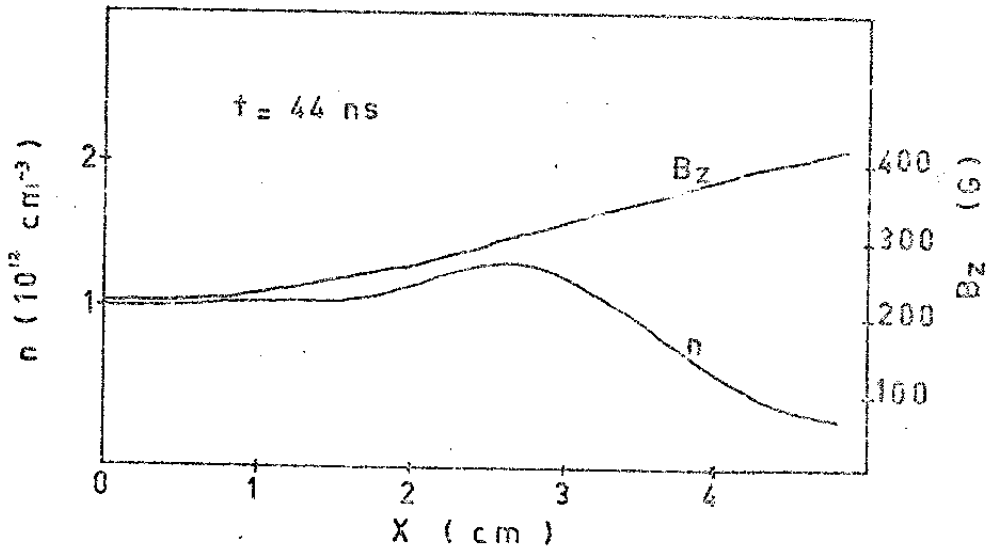


Tomou-se um valor médio da frequência de colisão, associada à resistividade anômala, igual a  $\omega_{pi}$ . Da figura 4 conclui-se que a resistividade associada ao transporte anômalo é muito maior que a associada ao transporte clássico.

# FIGURA 5

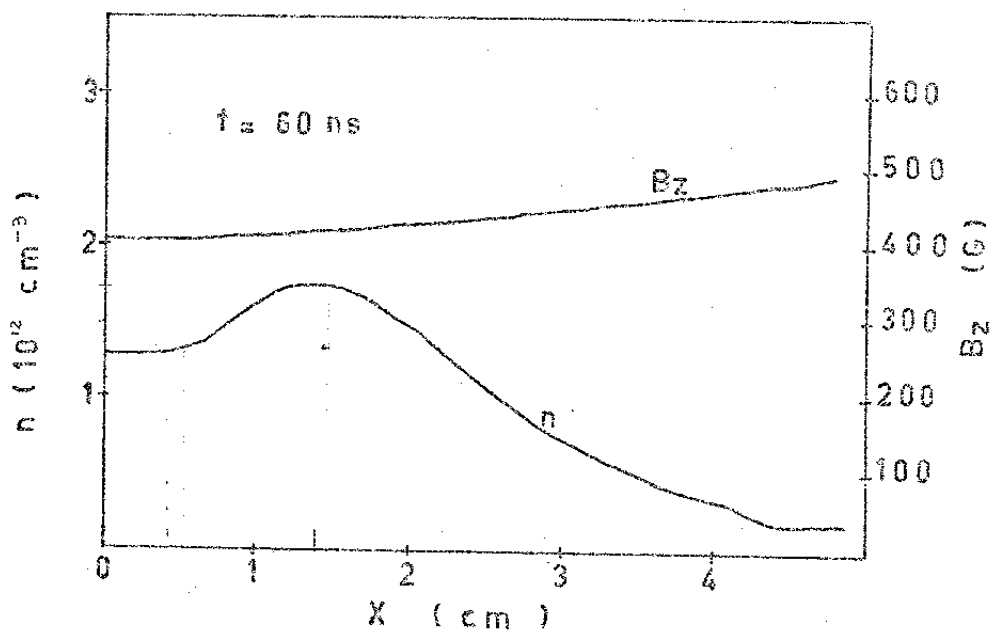


5.a

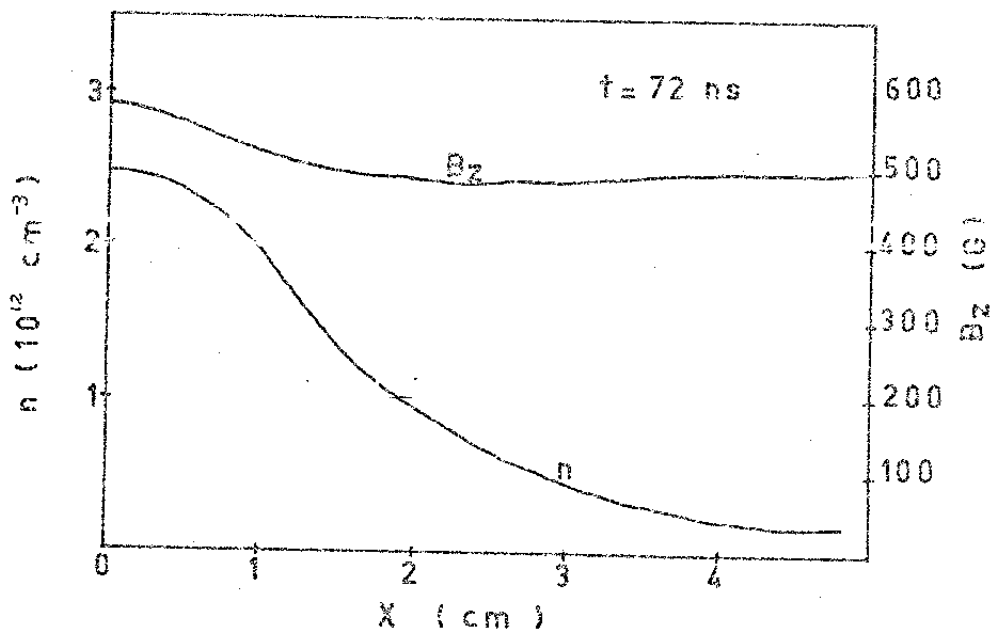


5.b

Esta figura corresponde a simulação com uma frequência de colisão constante  $\omega_{pi}$



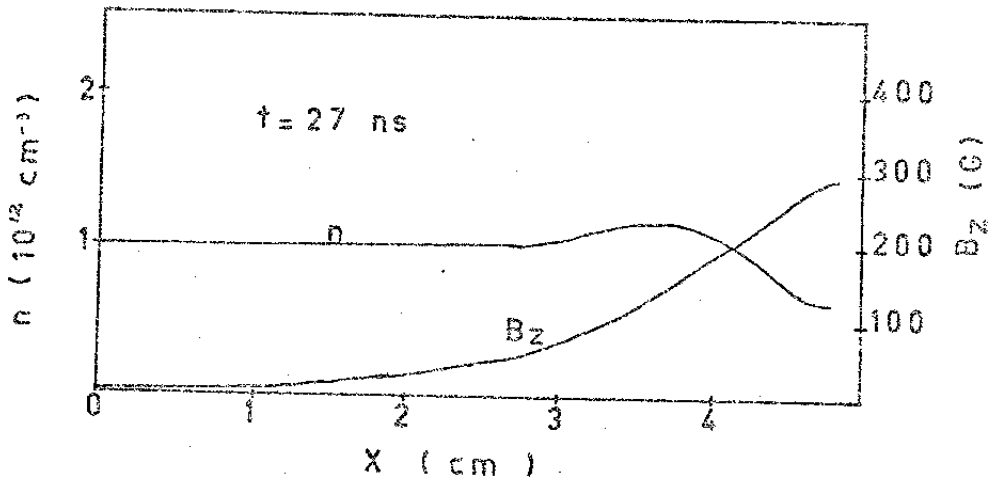
5.c



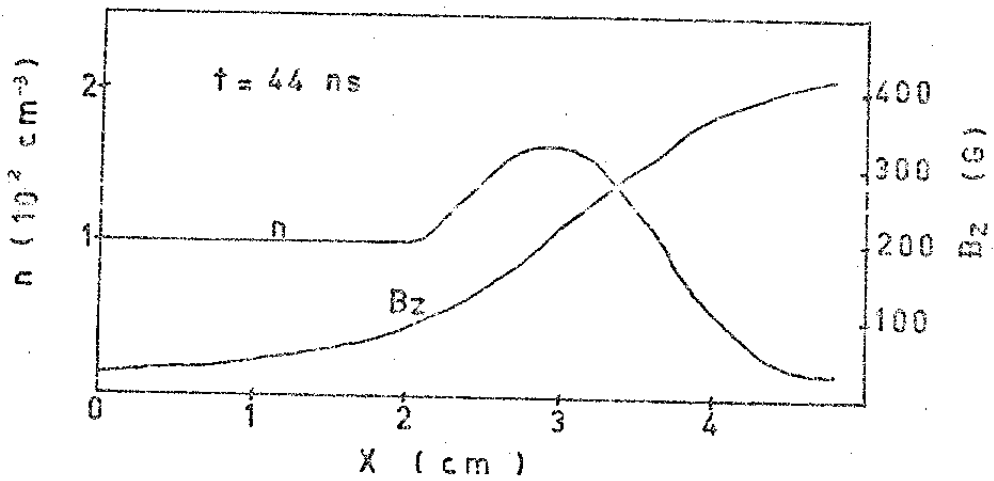
5.d

Note-se a penetração total do campo magnético. Nas figuras 5.c e 5.d ele tem quase o mesmo valor por todo o interior do plasma. Observa-se, também, menor acúmulo de densidade quando comparado à figura 3,  $\Delta n/n = 1.5$

# FIGURA 6

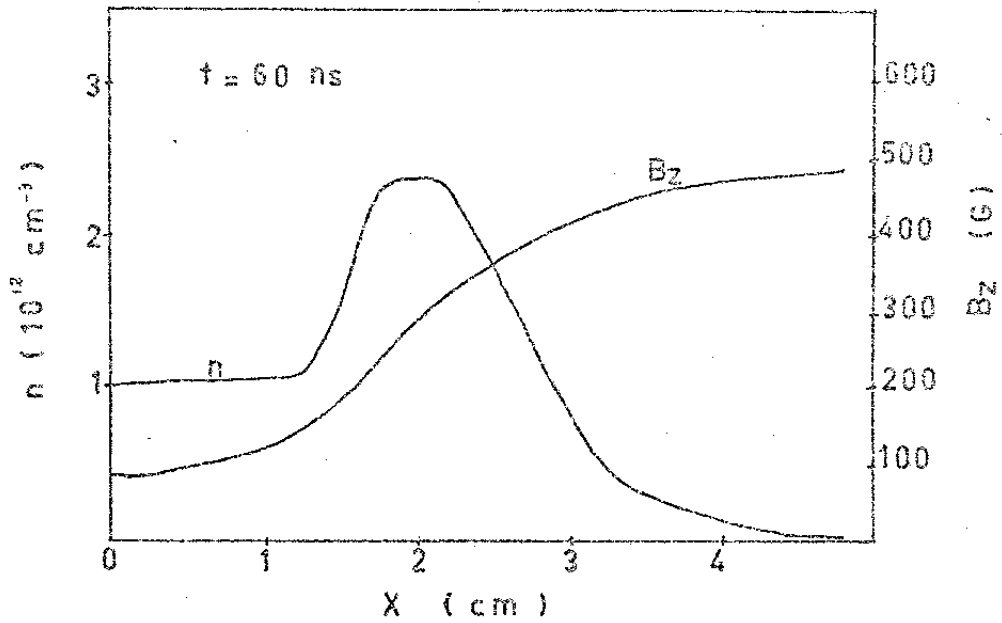


6.a

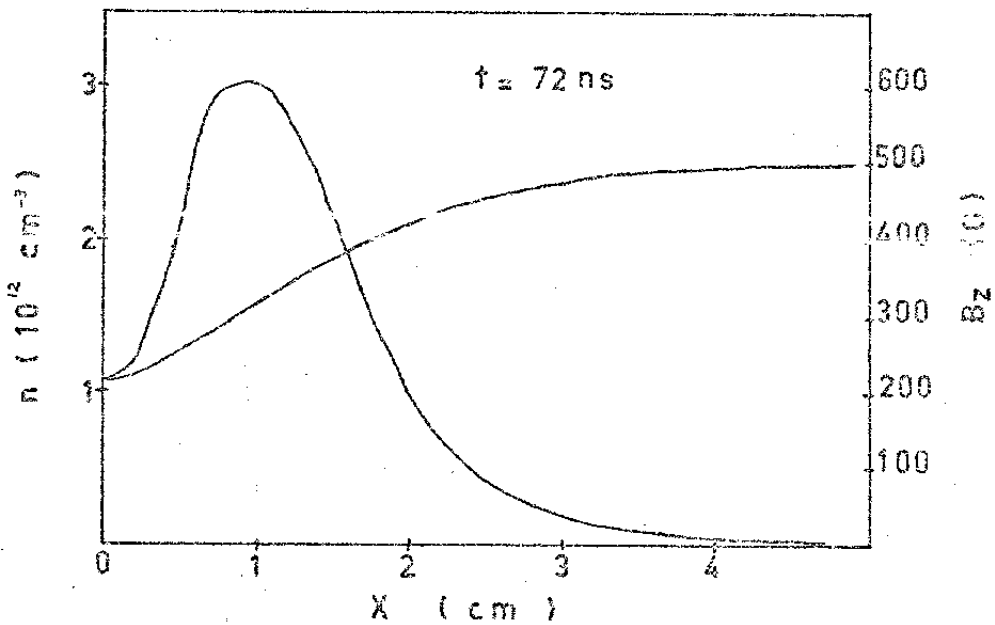


6.b

Esta figura corresponde a simulação com uma frequência de colisão  $\omega_{pi}/5$ .



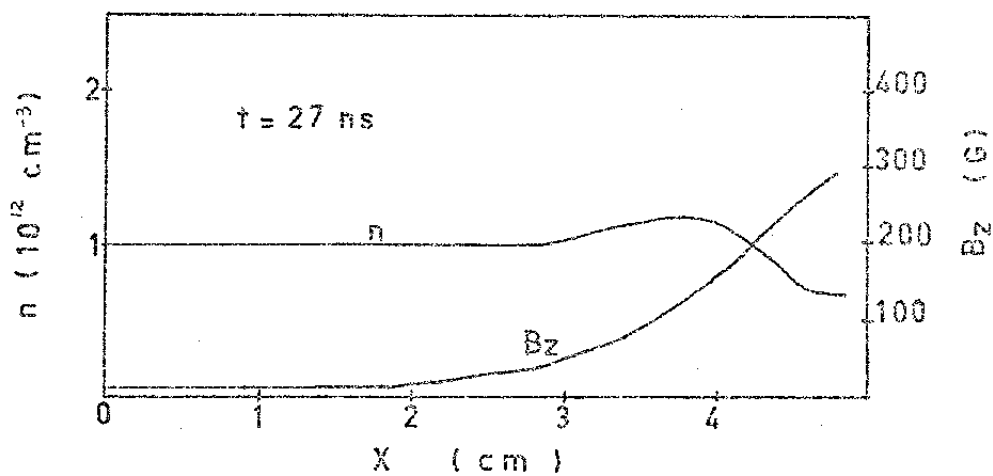
6.c



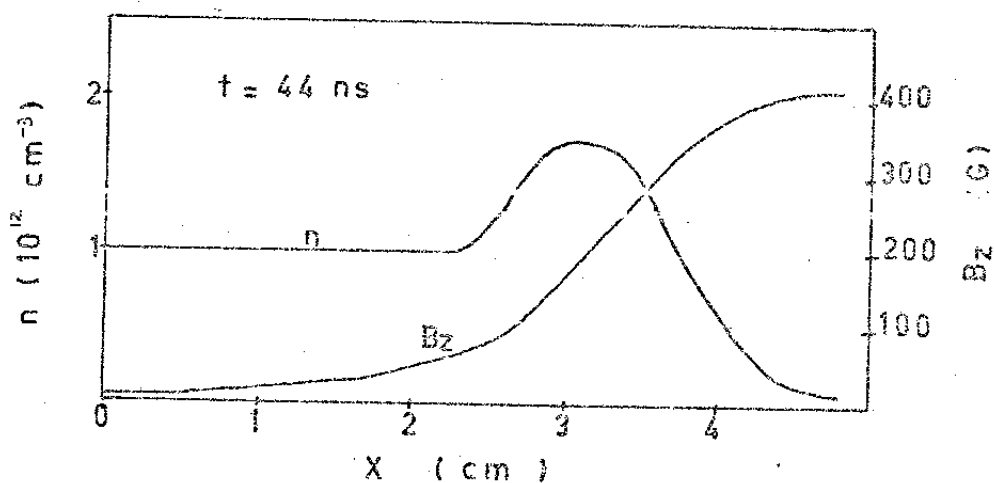
6.d

Observe-se que na figura 6.d há penetração do campo mag  
nético, porém há uma queda no valor do campo magnético  
desde a parede ( 500 G ) até o centro do cilindro  
( 200 ).

# FIGURA 7



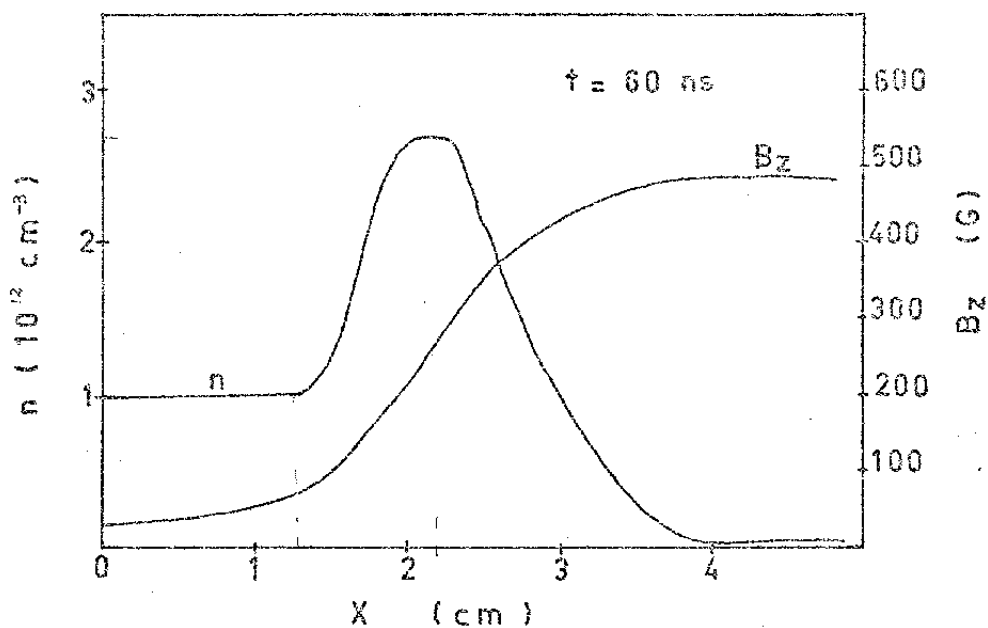
7.a



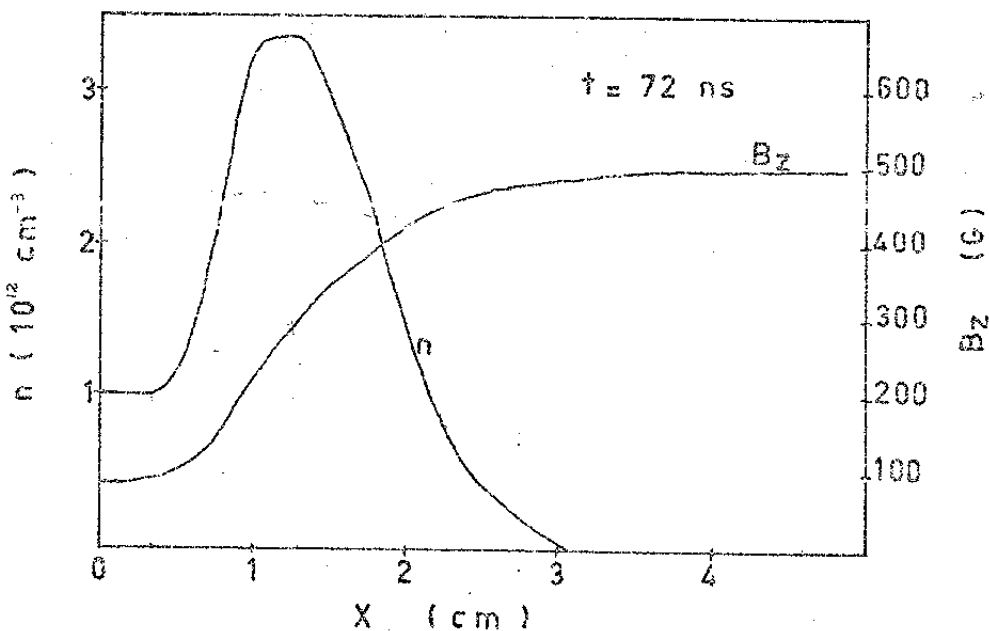
7.b

Esta figura corresponde à simulação com uma frequência de colisão  $\omega_{pi}/10$ .





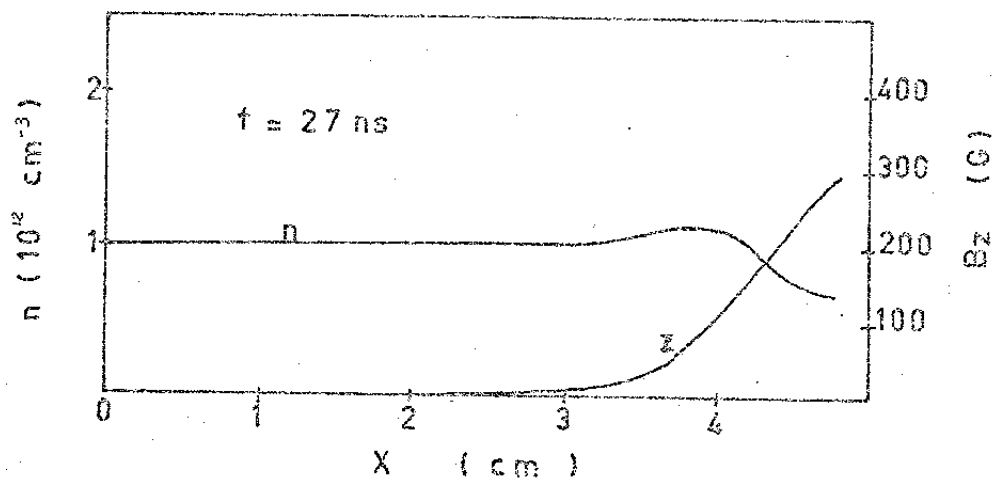
7.c



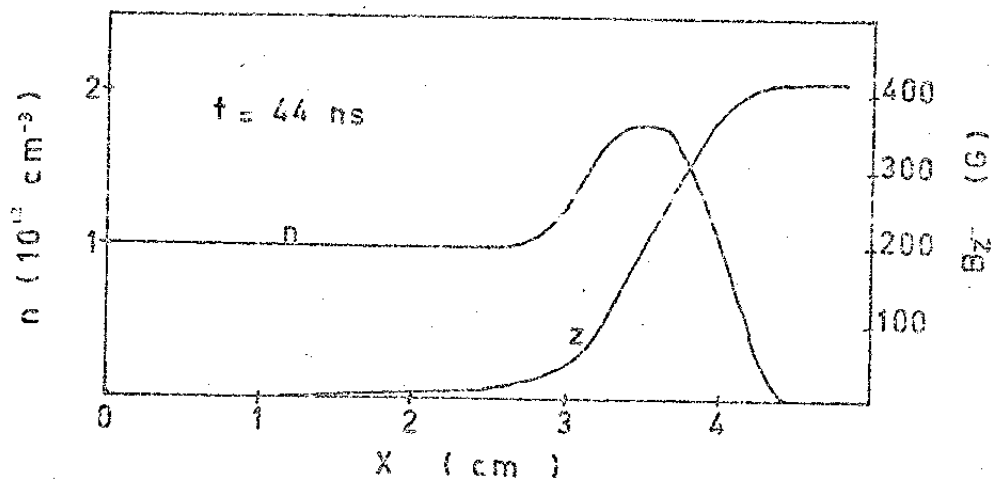
7.d

Nota-se que neste caso o campo magnético penetra menos que o caso da figura 6. Ao observar as figuras 5, 6 e 7 nota-se uma gradual diminuição da penetração do campo magnético, bem como um aumento no acúmulo de densidade,  $\Delta n/n$ , que neste caso vale 2.5.

# FIGURA 8

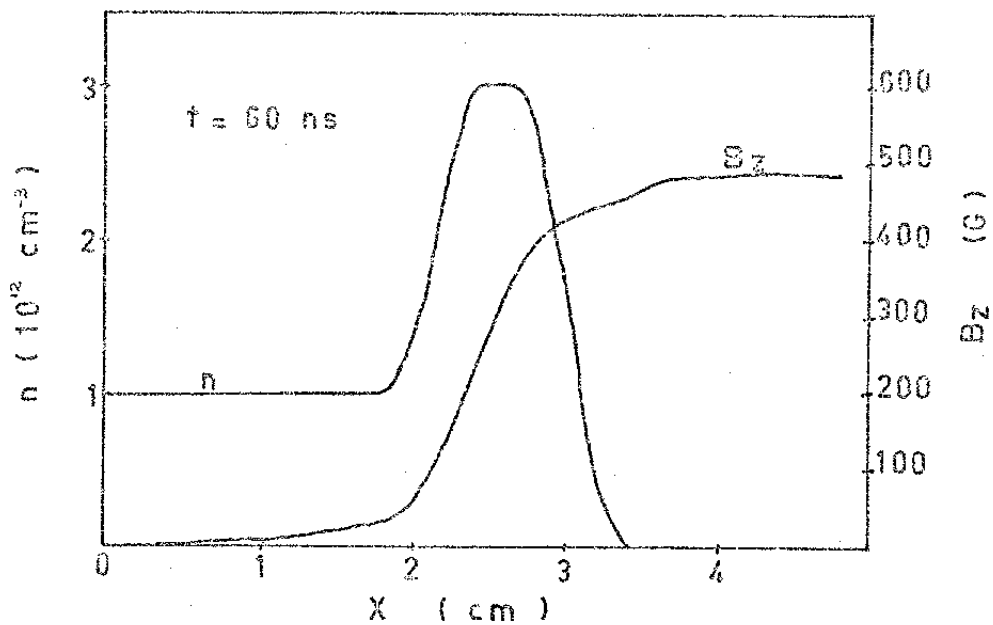


8.a

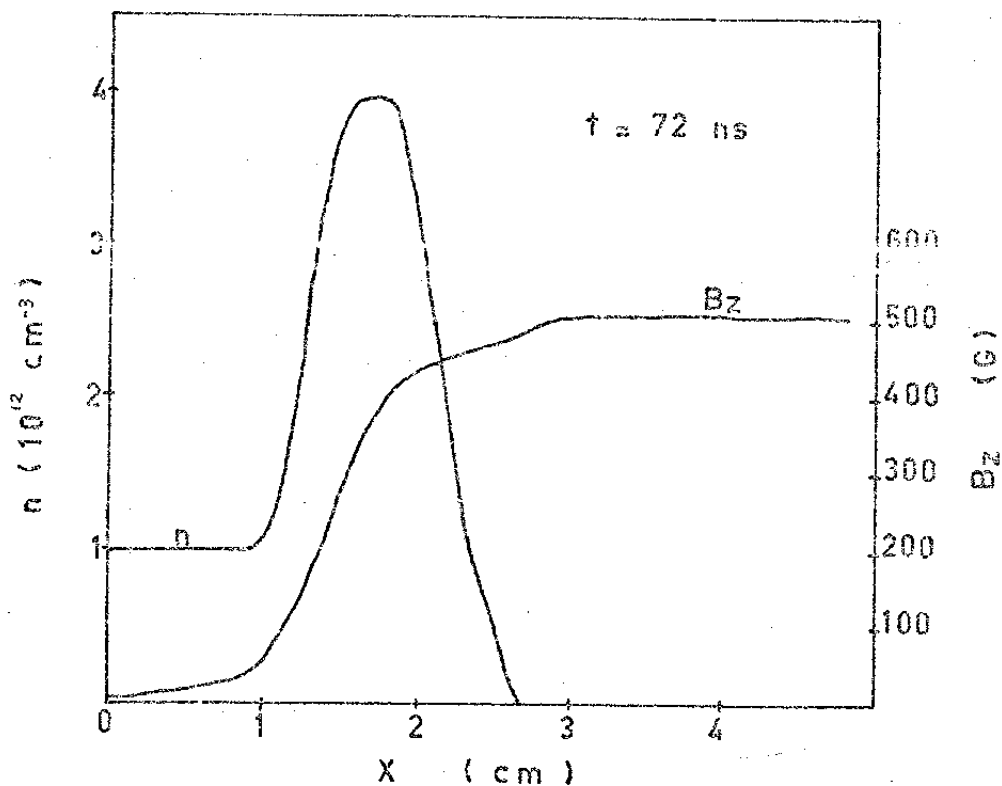


8.b

Esta figura corresponde à simulação com uma frequência de colisão  $\omega_{pi}/100$ .



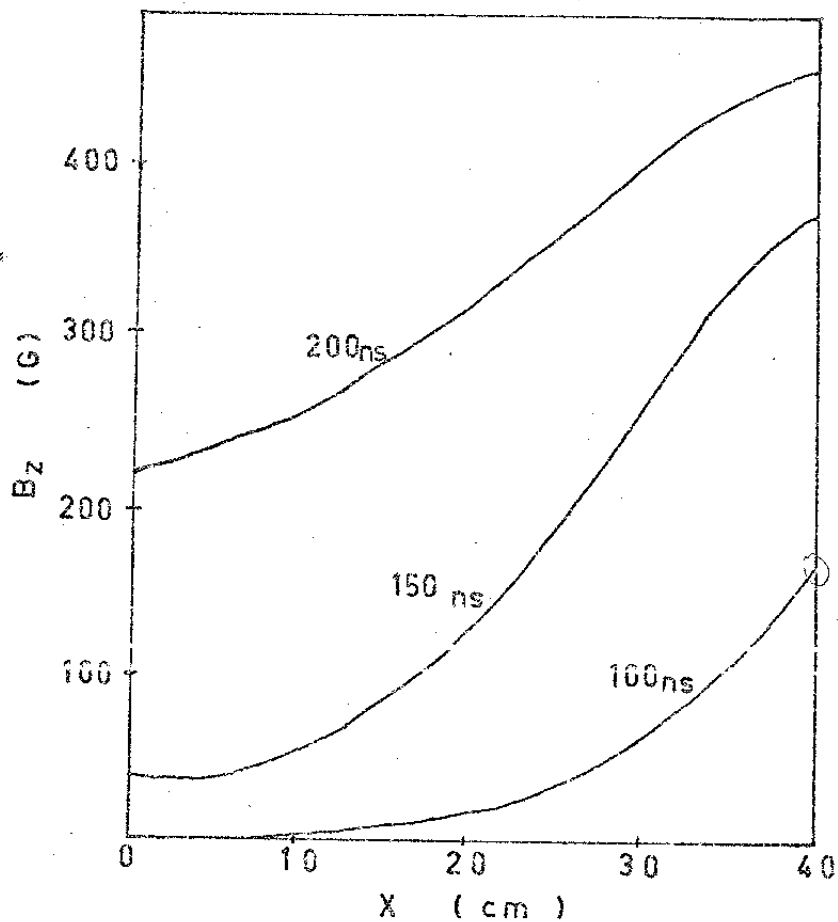
8.c



8.d

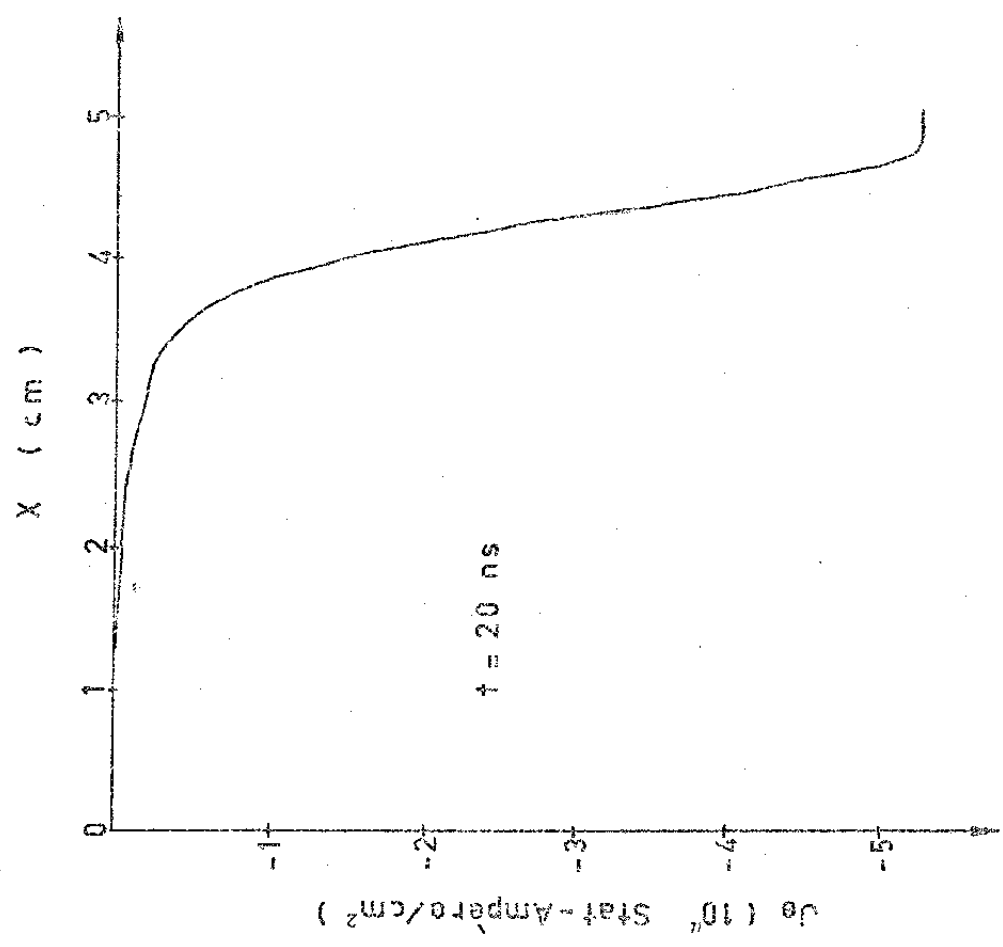
Note-se a semelhança dos perfis desta figura, com os das figuras 1 e 3.

# FIGURA 9

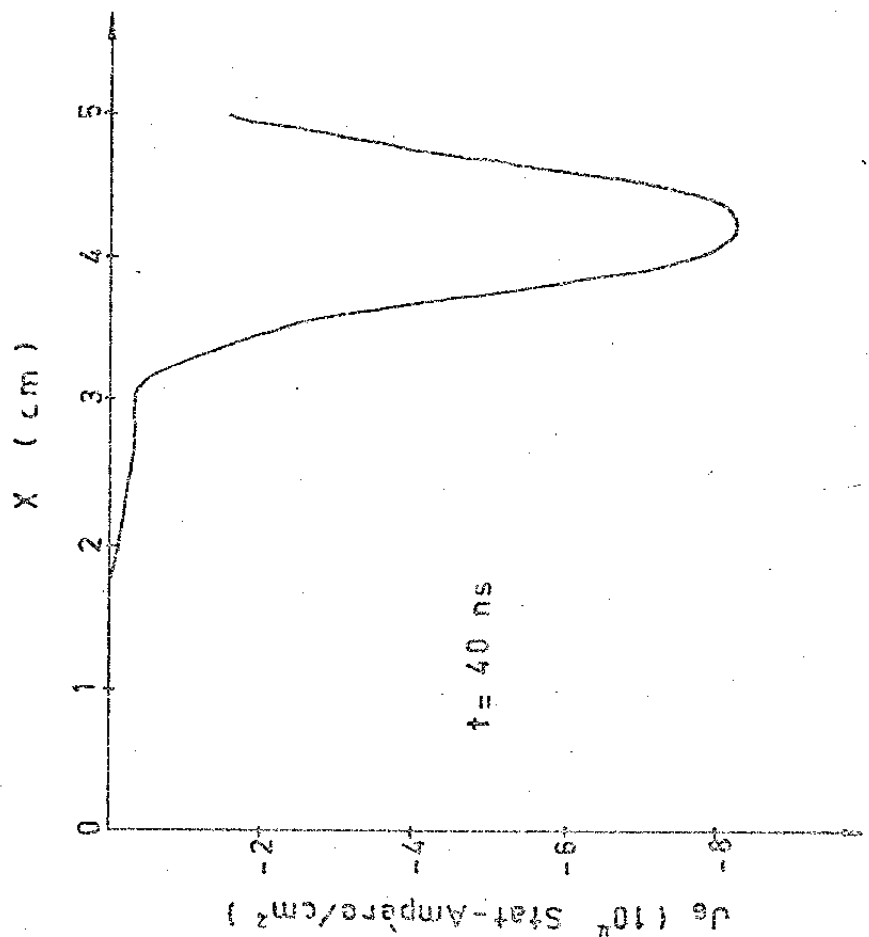


Resultados experimentais do "e-pinch" rápido da Universidade do Texas, cuja densidade é  $4 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ .

# FIGURA 10

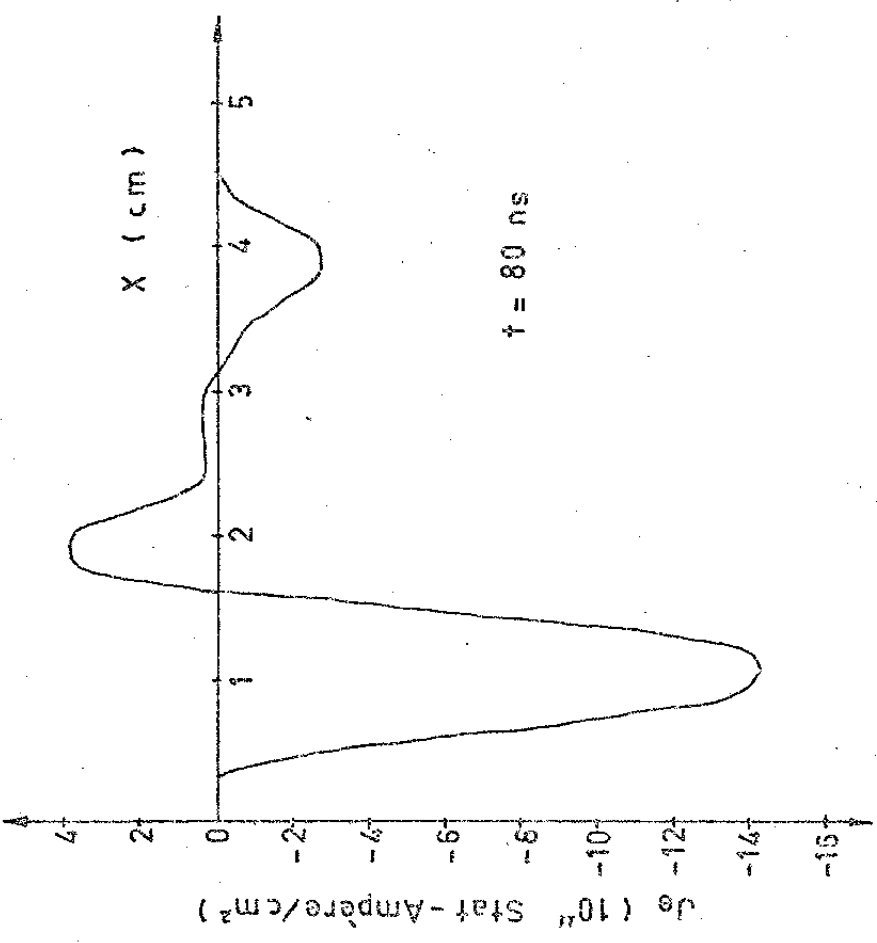


10.a



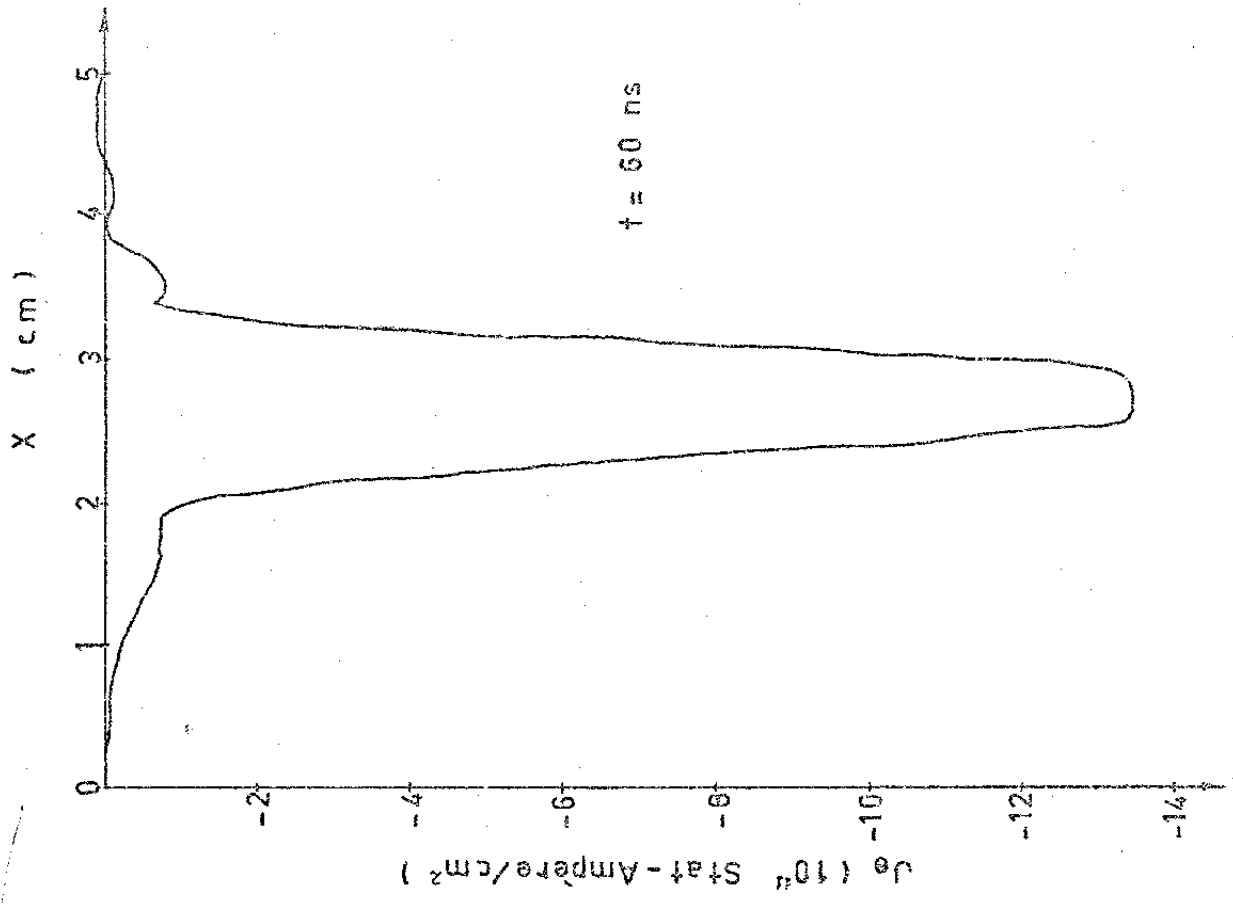
10.b

Esta figura corresponde a simulação com termos de transporte clássico. Apresenta perfis abruptos e o valor total de corrente cresce com o tempo.



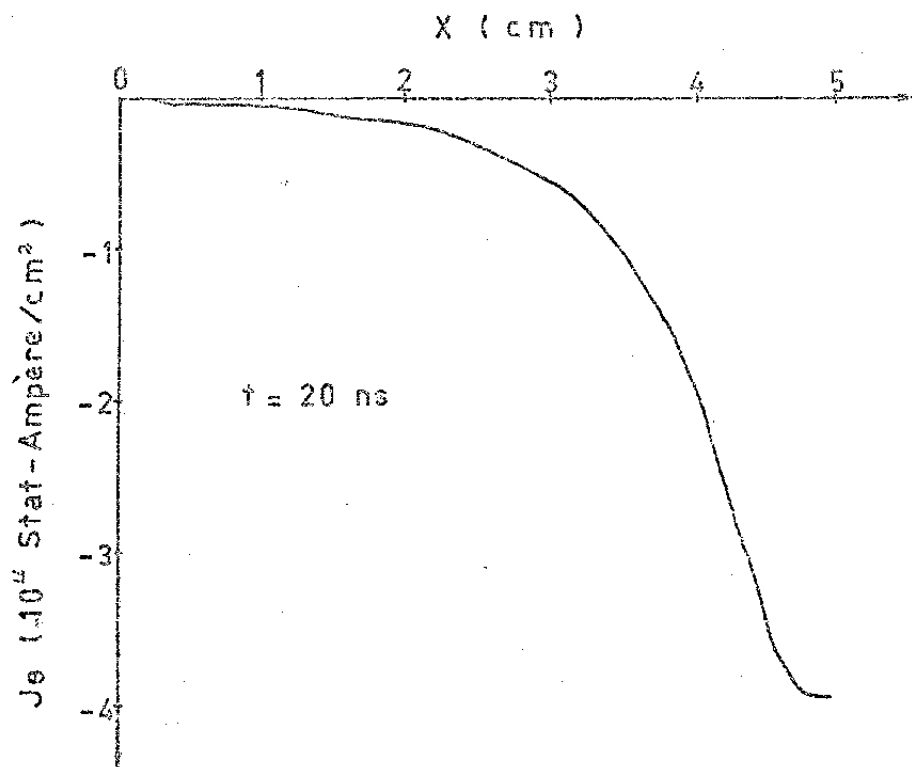
10.d

Na figura 10.d nota-se uma região de densidade de corrente positiva, que deve-se provavelmente, a efeitos numéricos. Em todo caso no compute geral ela, é anulada pela região adjacente, a direita, cuja densidade de corrente é positiva.

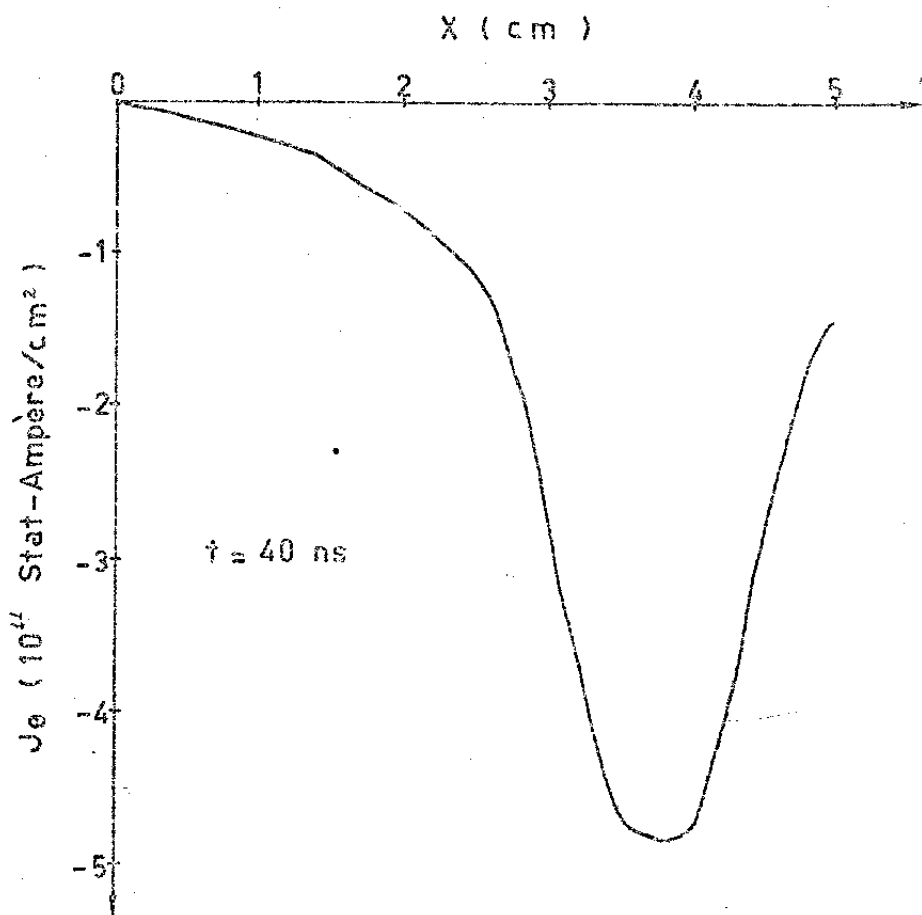


10.c

# FIGURA 11

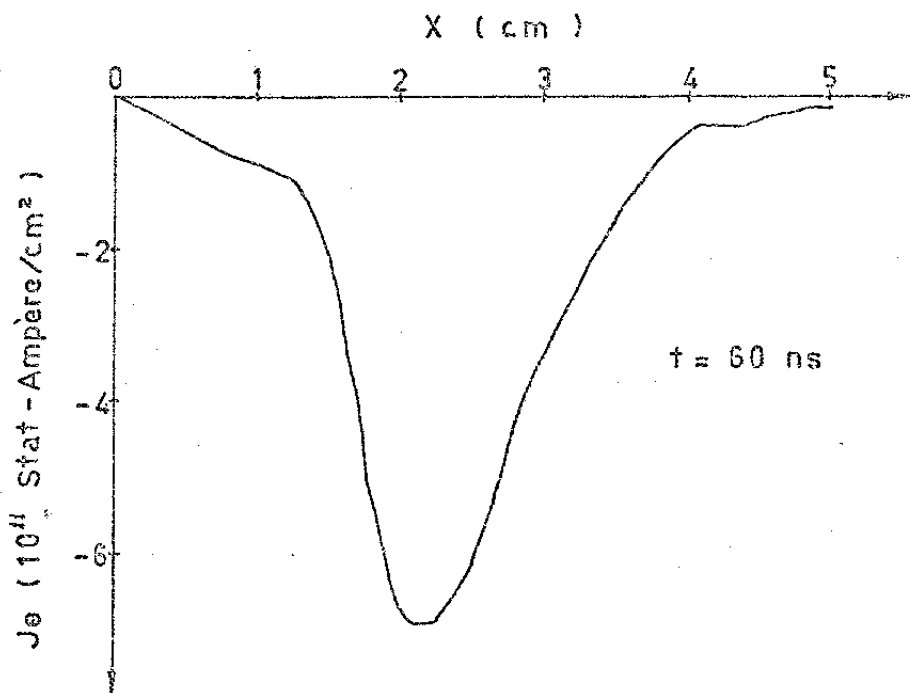


11.a

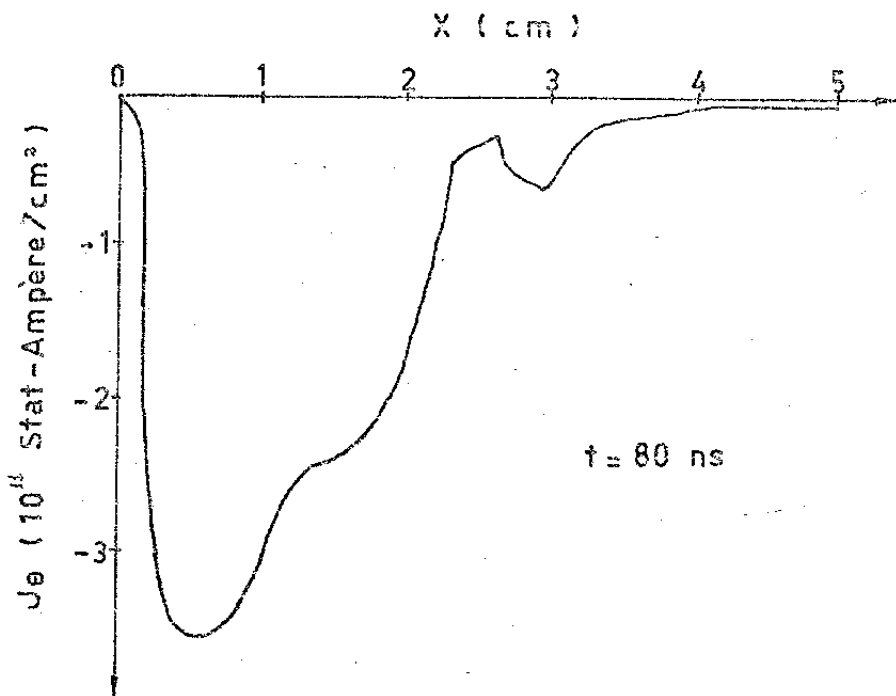


11.b

Esta figura corresponde a simulação com frequência de colisão constante  $\nu_{pi}/10$ .



11.c

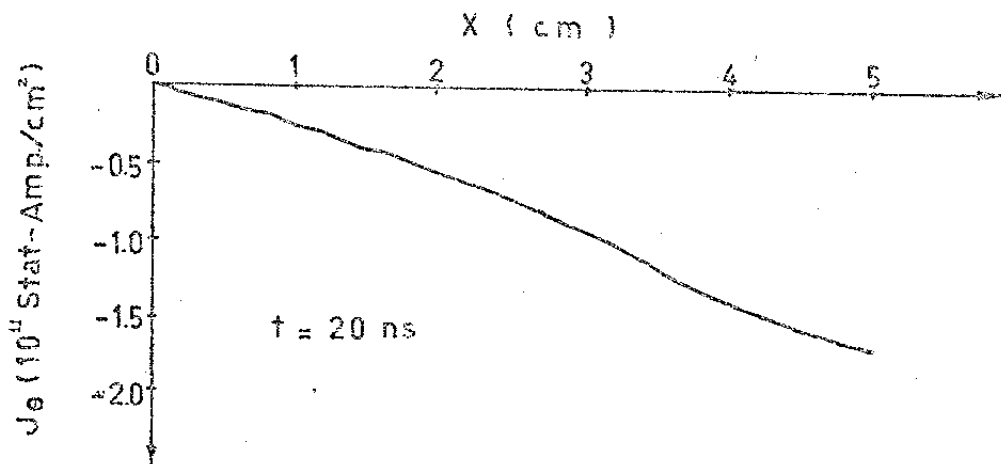


11.d

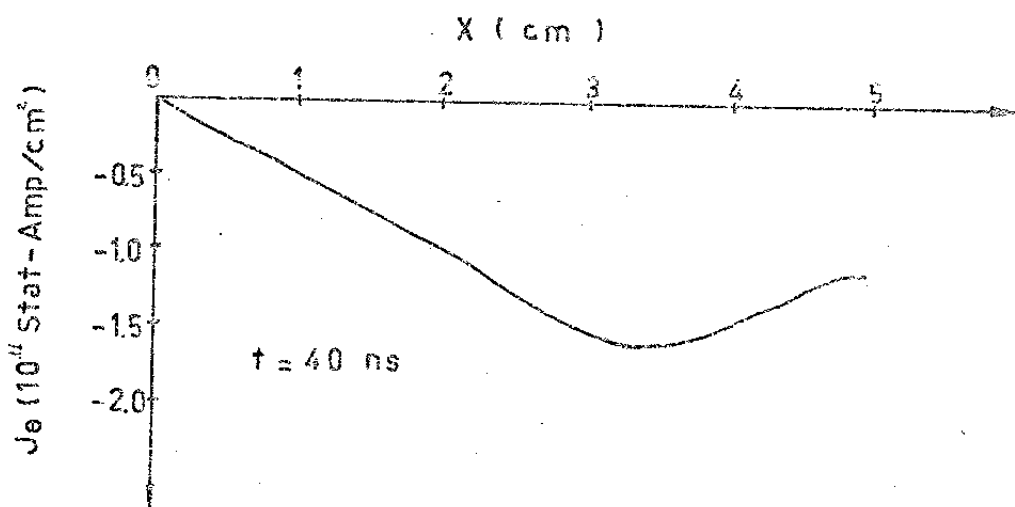
Observe que o máximo de densidade de corrente é menor na figura 11.d do que na figura 11.c, o mesmo acontecendo com a corrente total, ao contrário do que ocorre na figura 10.



# FIGURA 12

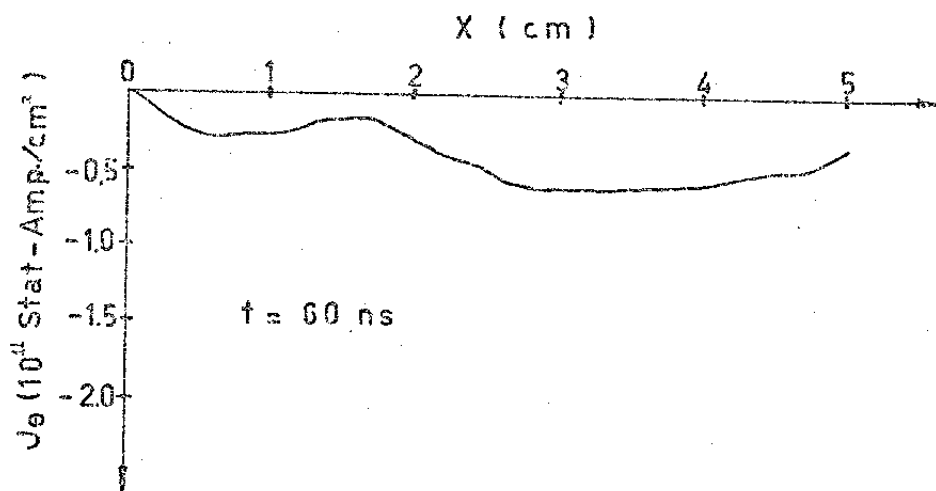


12.a



12.b

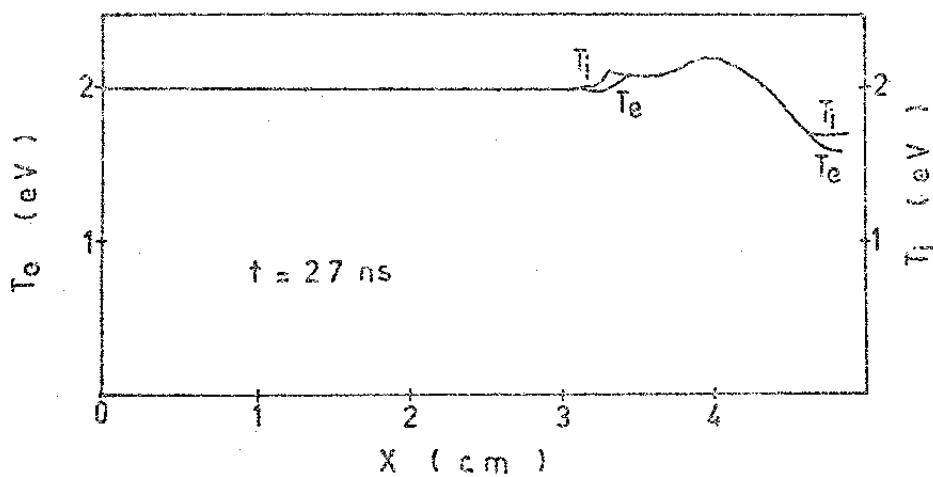
Esta figura corresponde a simulação com frequência de colisão constante  $\nu_{pi^+}$



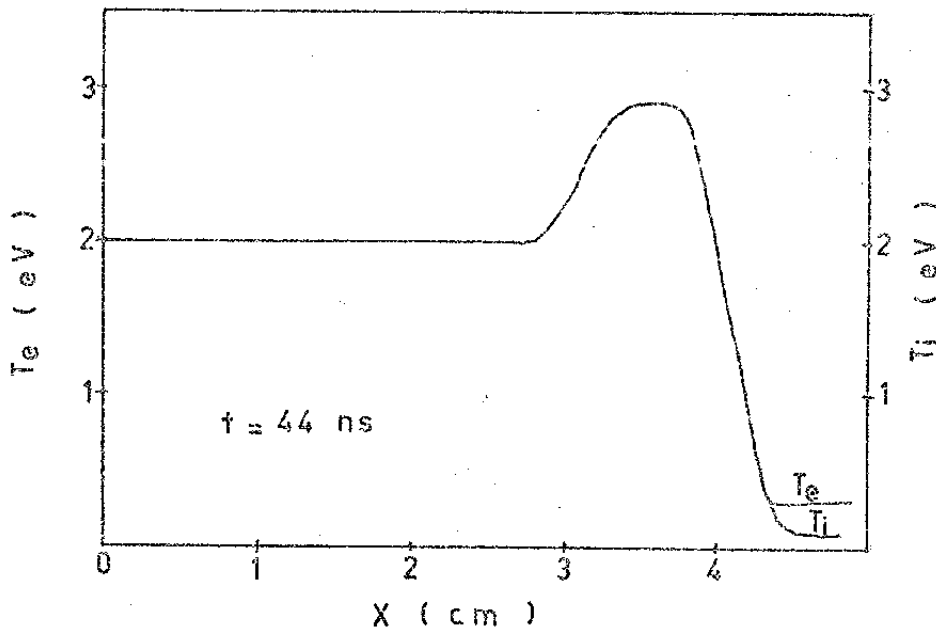
12.c

Na figura 12.c observe-se que o máximo de densidade é menor do que nas figuras 12.a e 12.b, como ocorre na figura 11. O mesmo acontece com a corrente total. Isto se deve ao efeito Joule que transfere energia da corrente para temperatura dos elétrons, o que não ocorre na figura 10, uma vez que lá a resistividade é muito baixa.

# FIGURA 13

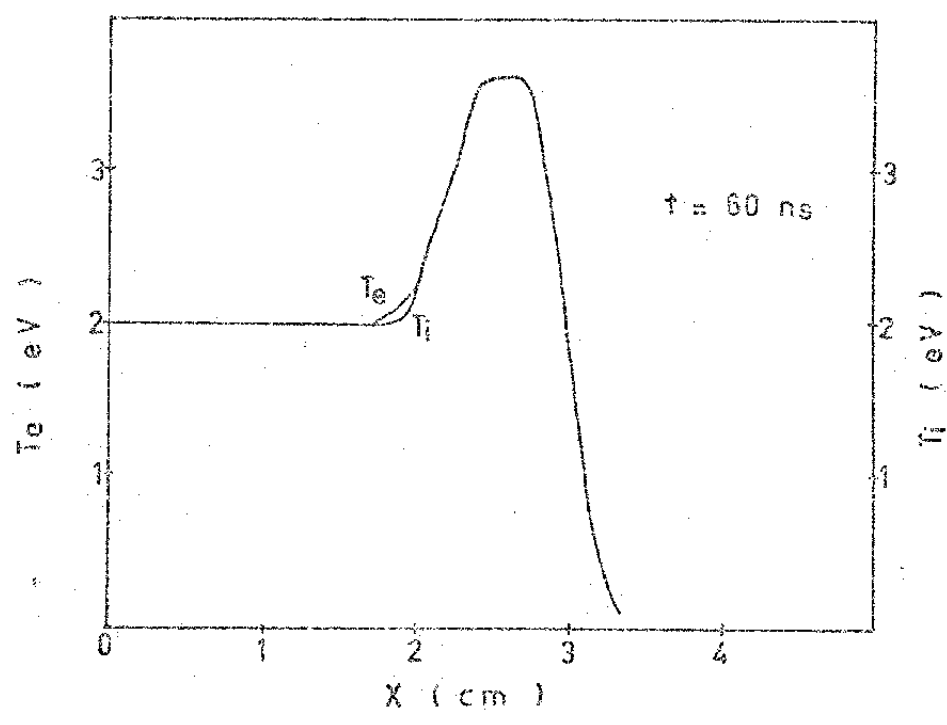


13.a

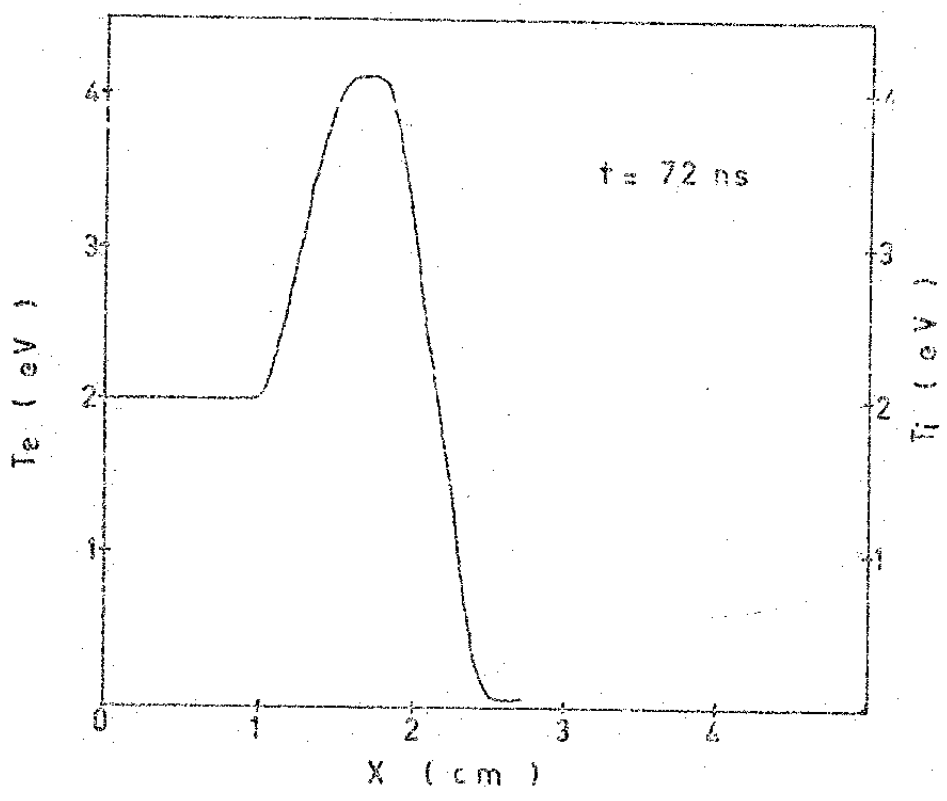


13.b

Neste figura tem-se perfis de temperatura de elétrons e íons, que neste caso praticamente coincidem, correspondente a simulação com termos de transporte clássico.



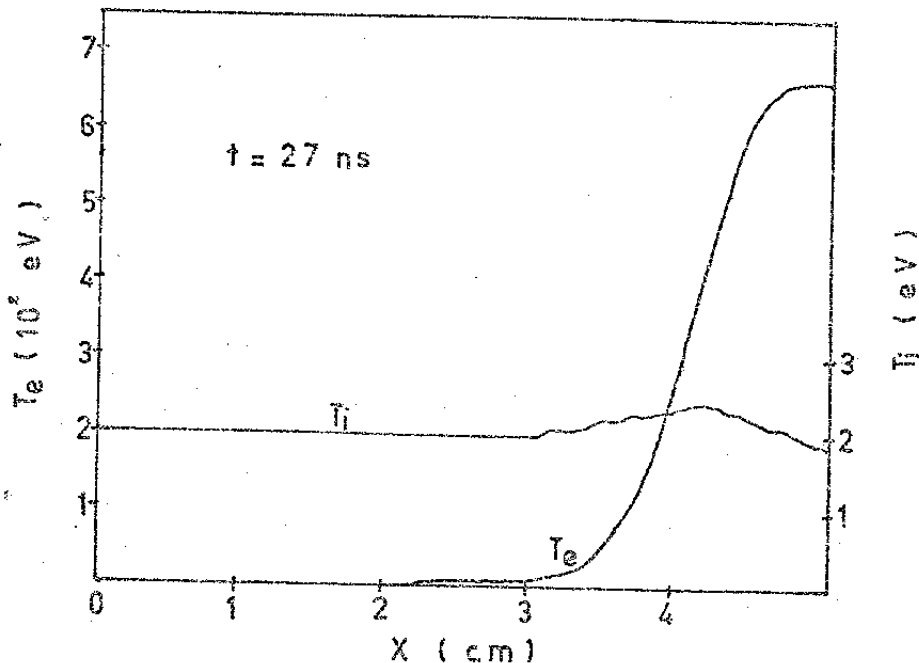
13.c



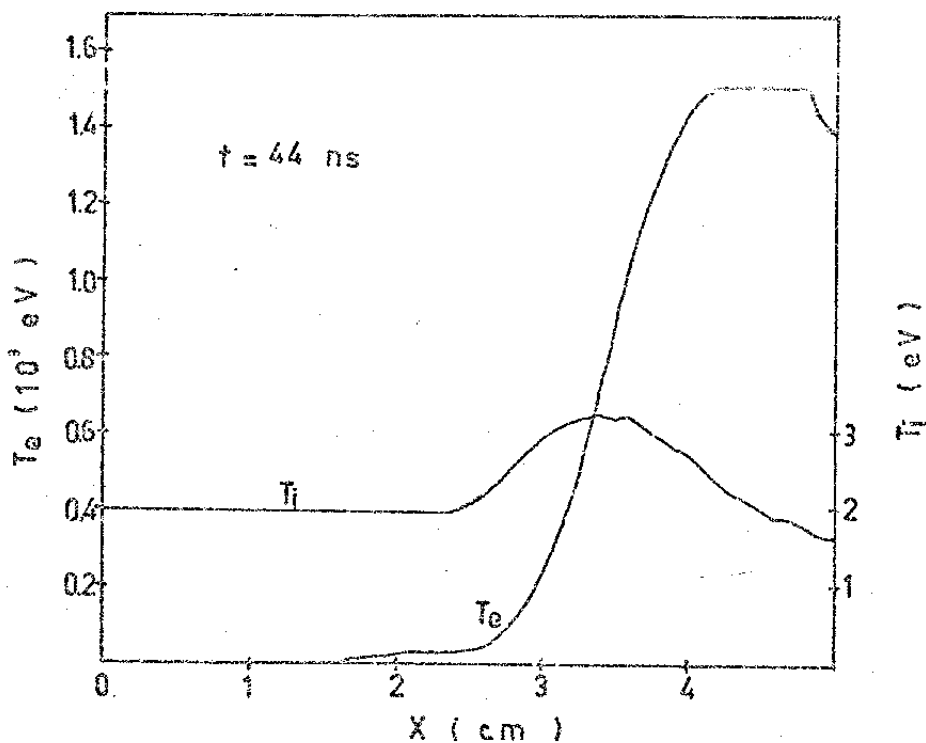
13.d

Neste caso tanto íons como elétrons se aquecem pouco, uma vez que o aquecimento provém apenas do "pinch" em si. Além disso o fato de usar coordenadas cartesianas, implica menor compressão do que ocorre num sistema cilíndrico.

# FIGURA 14

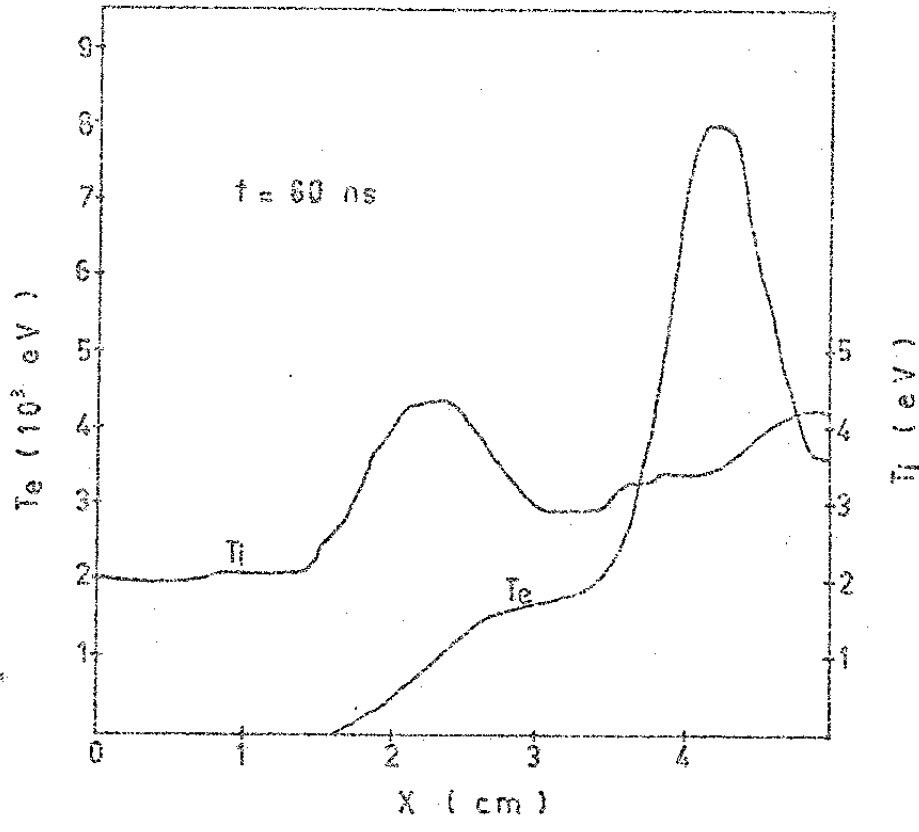


14.a

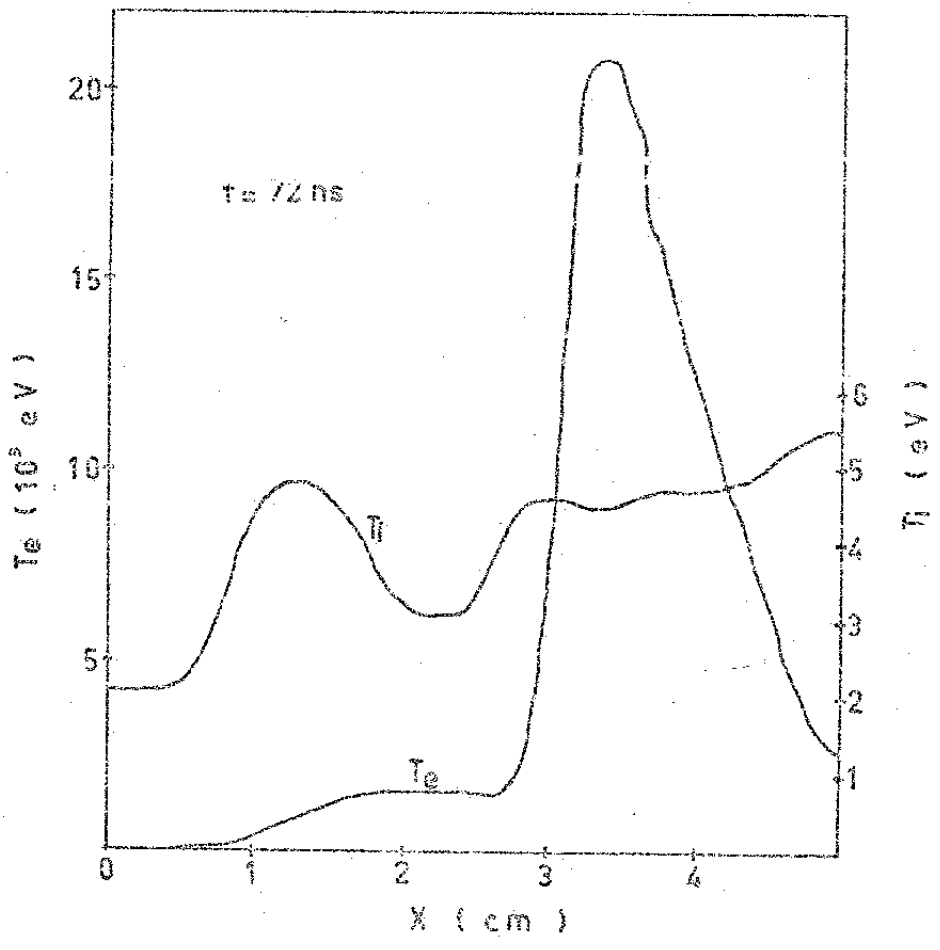


14.b

Esta figura corresponde a simulação com frequência de colisão constante  $\omega_{pi}/10$ . Note-se que as escalas de temperatura de elétrons e íons são bem diferentes, com a temperatura dos elétrons bem maiores.



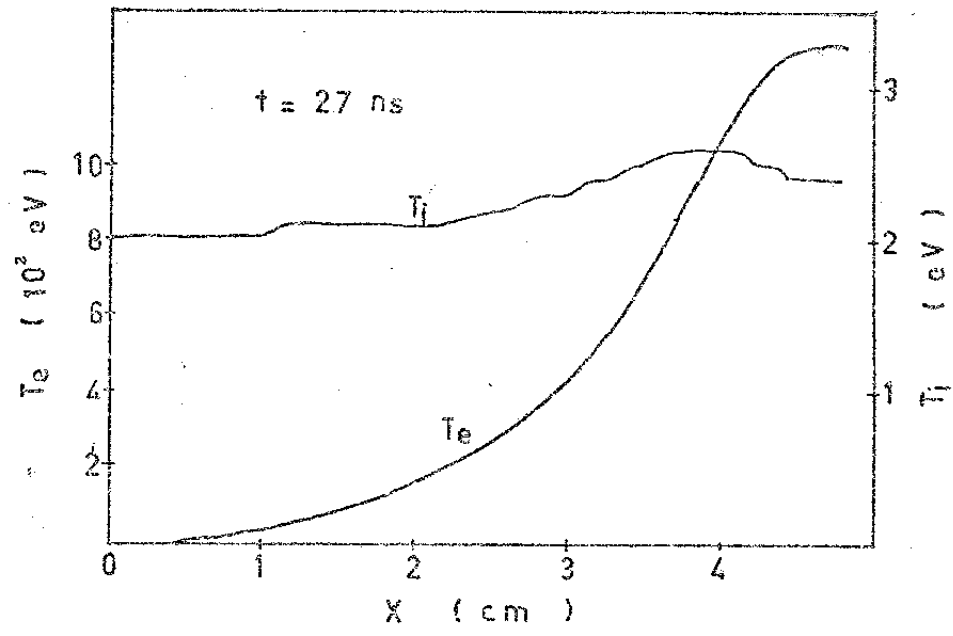
14.c



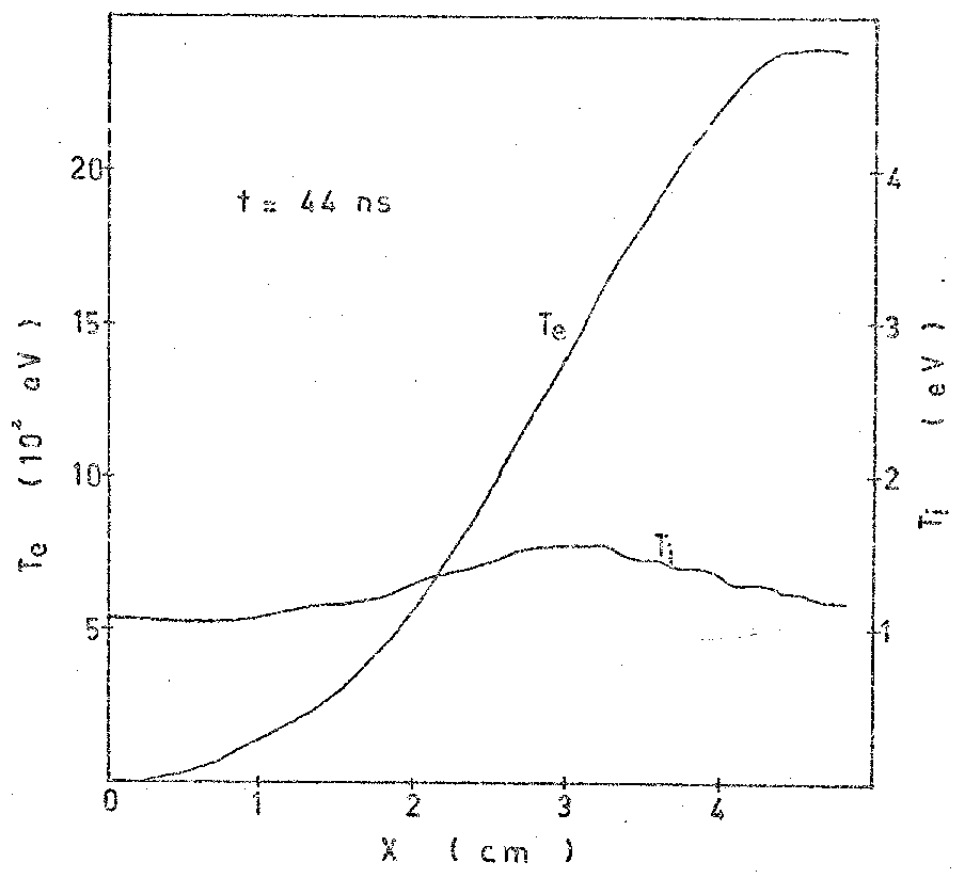
14.d

Observe-se que os íons praticamente não são aquecidos, uma vez que o efeito Joule somente aquece os elétrons.

# FIGURA 15

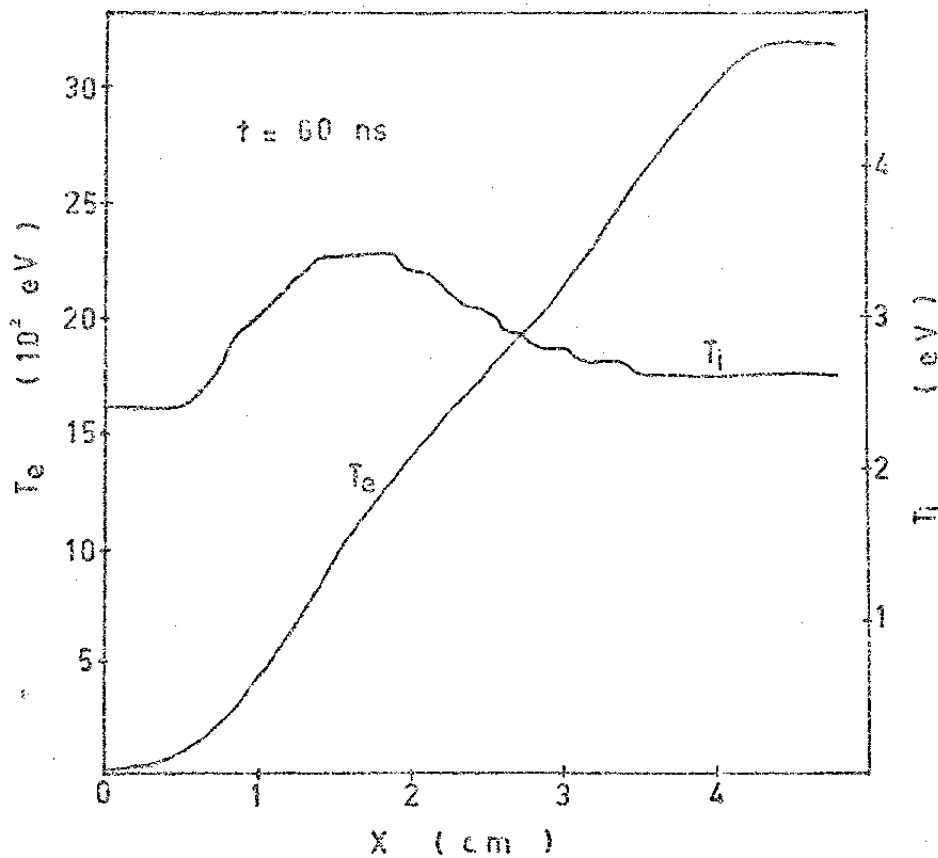


15.a

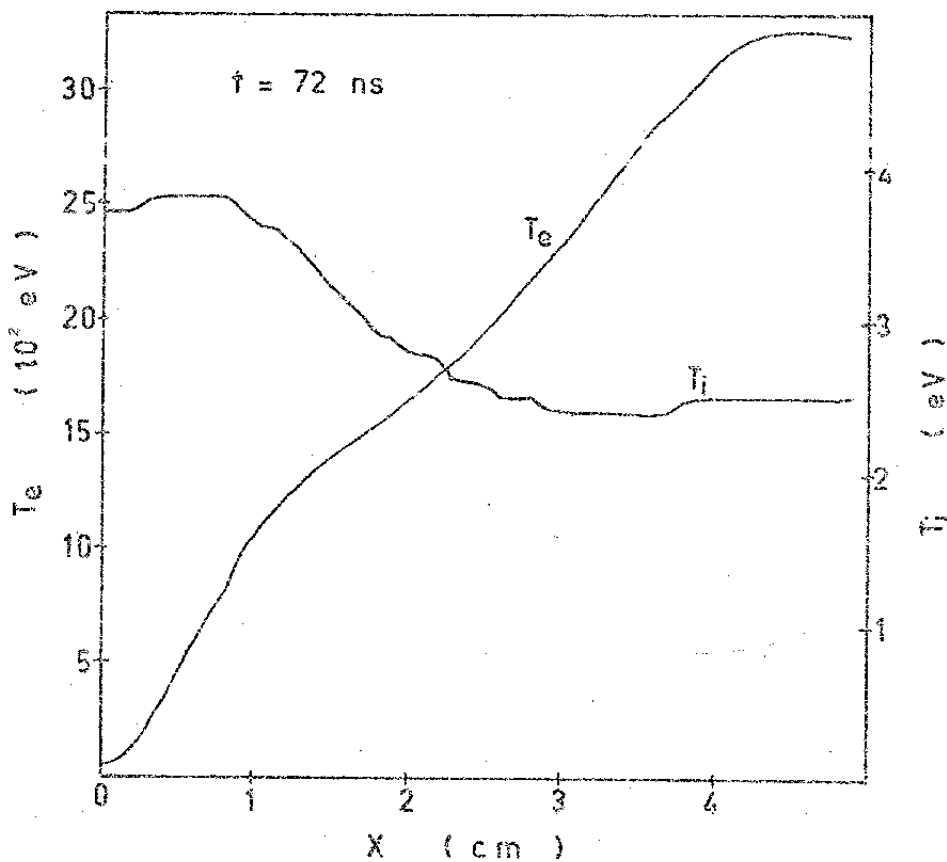


15.b

Esta figura corresponde a simulação com frequência de colisão constante  $\omega_{pi}$ . Note-se que a temperatura dos elétrons é bem maior que a dos íons.



15.c

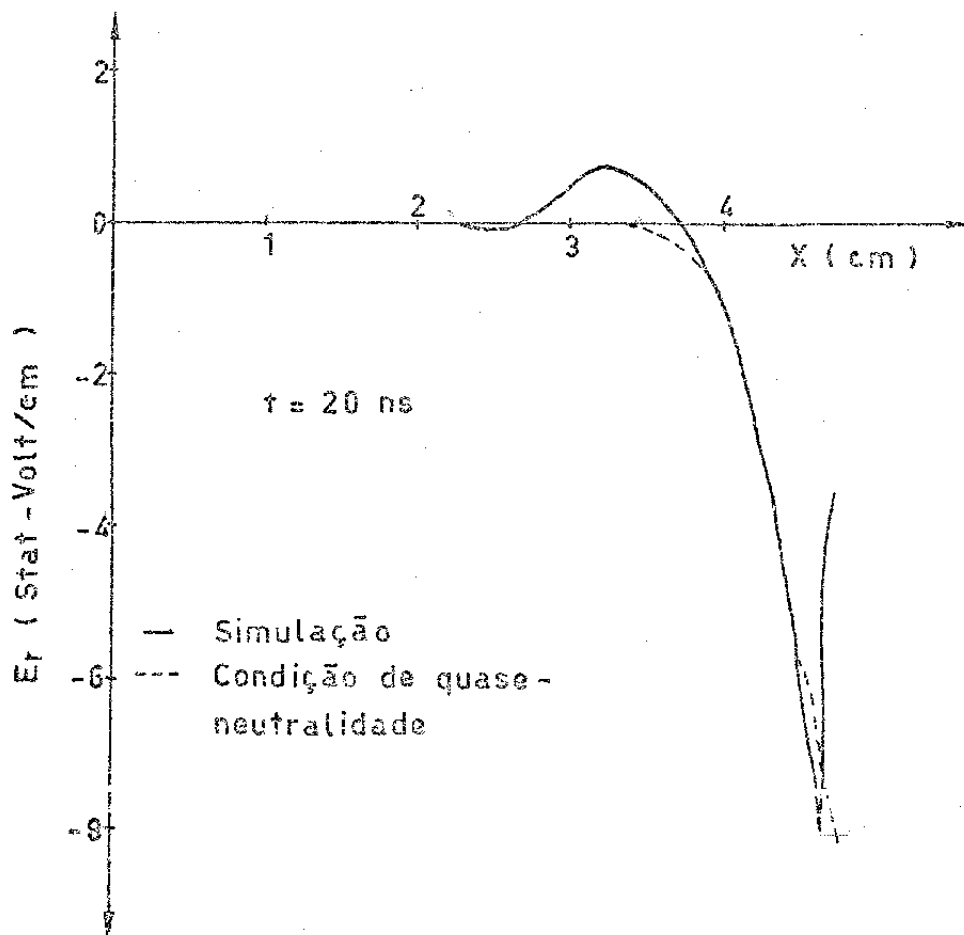


15.d

Analogamente do que ocorre na figure 14, os elétrons são aquecidos por efeito Joule, enquanto os íons não o são.

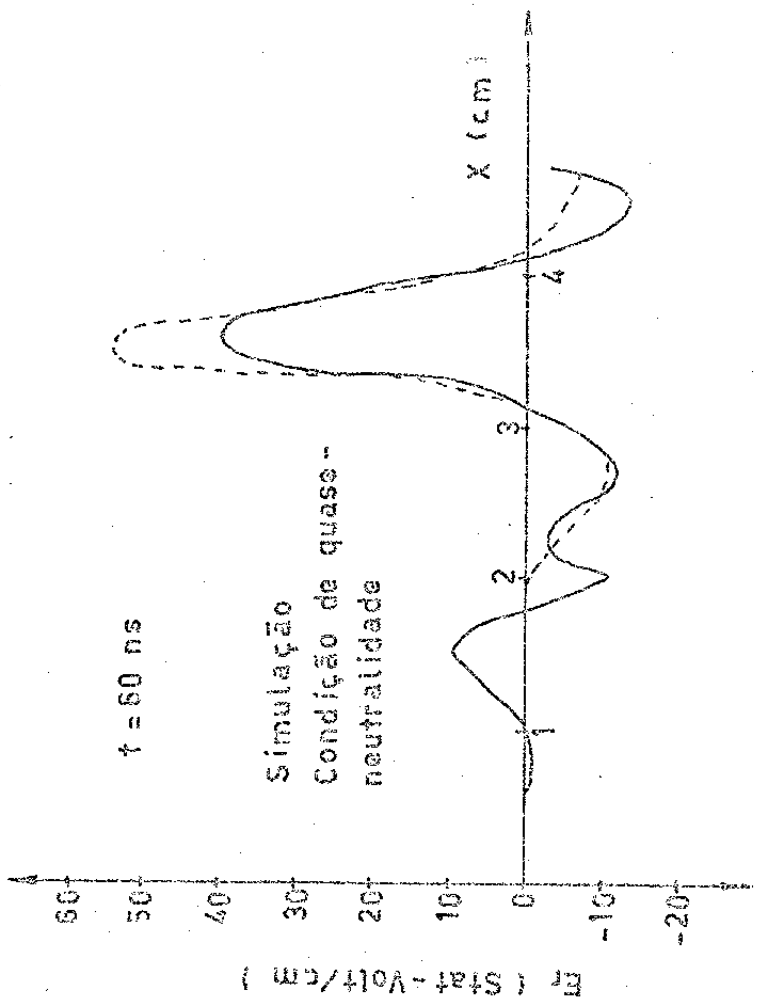


# FIGURA 16

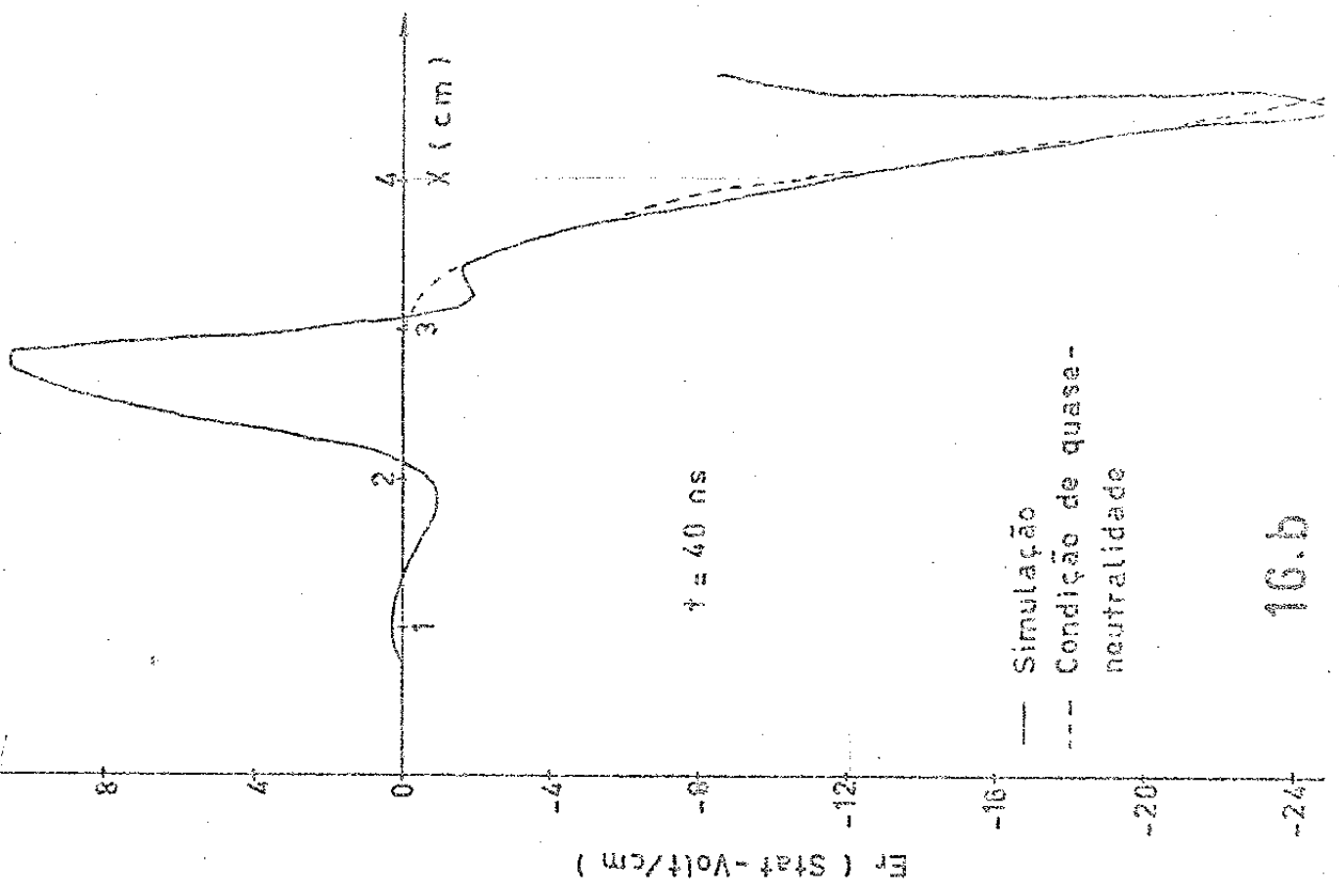


16.a

Esta figura corresponde à simulação sem resistividade. Note-se que os valores do campo elétrico radial instantâneo oscilam em torno dos valores correspondentes e - condição de quase neutralidade, e indicar a existência de ondas de plasma.

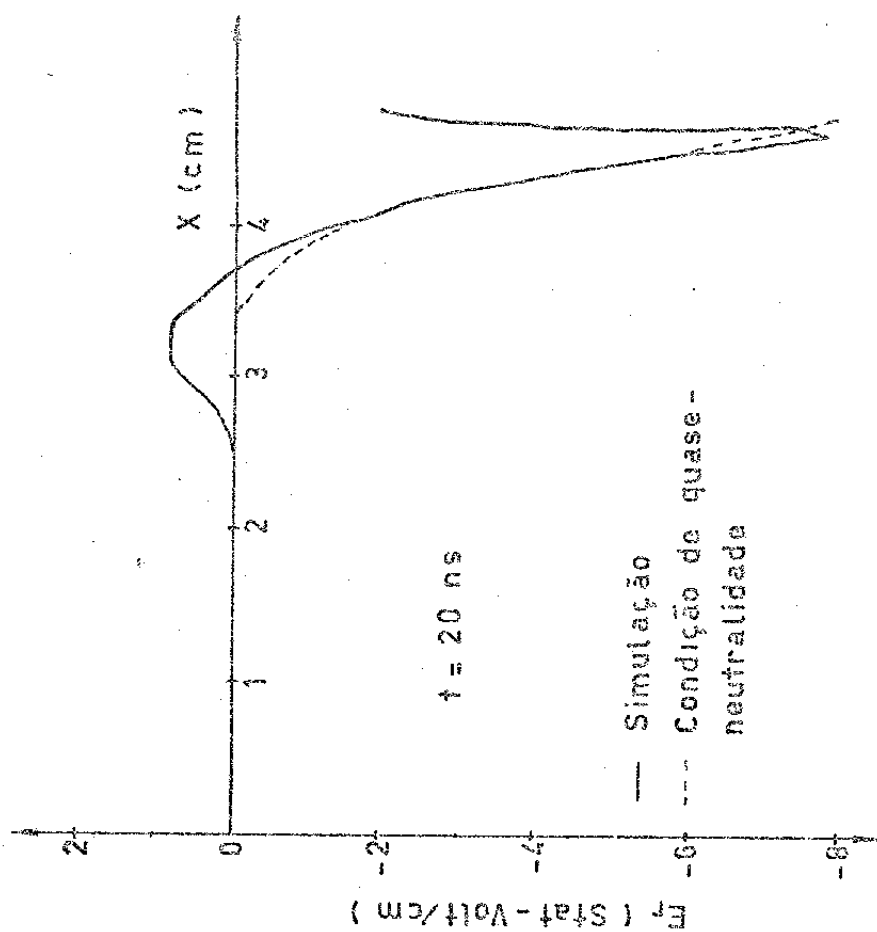


16.c

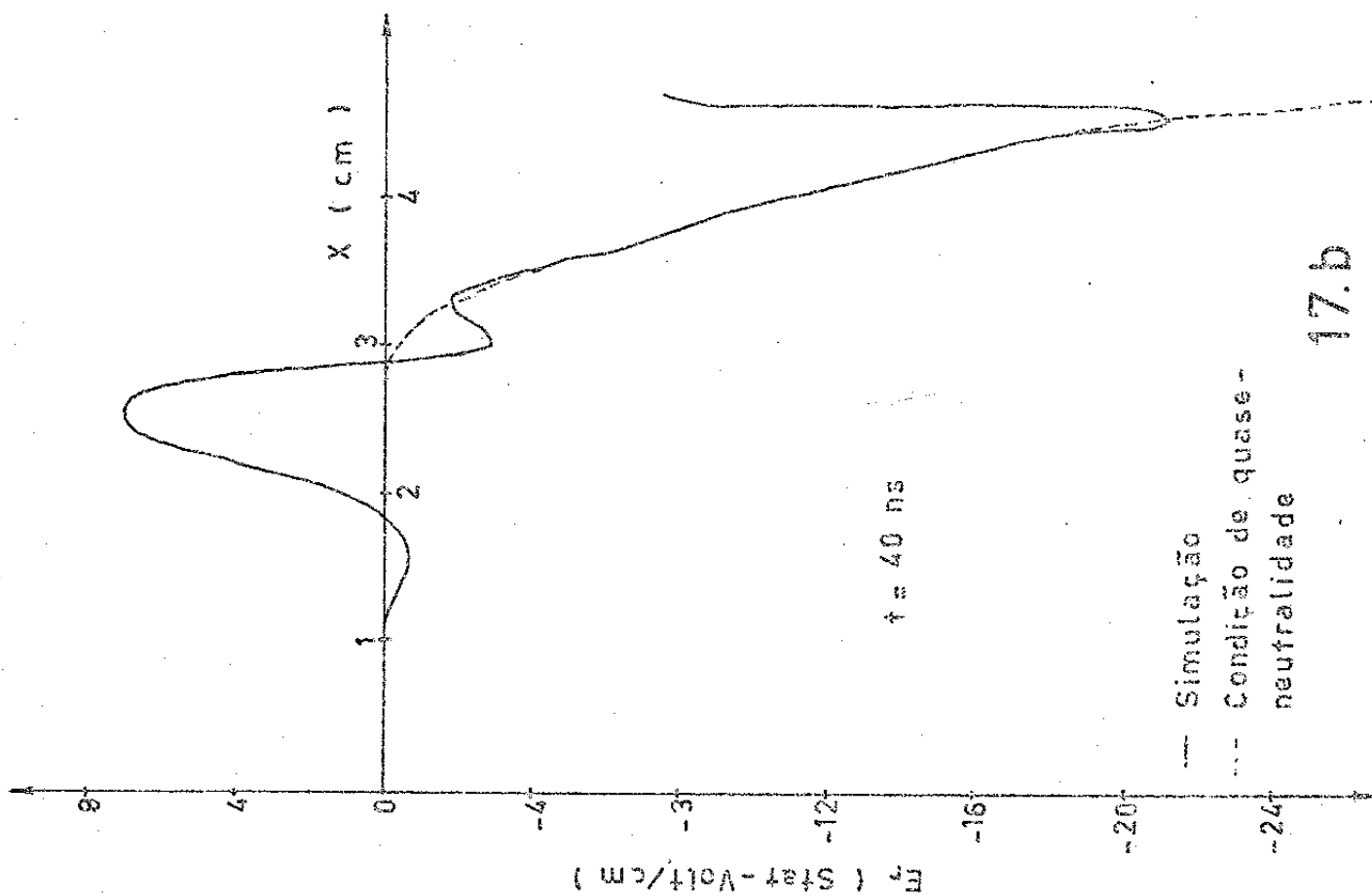


16.b

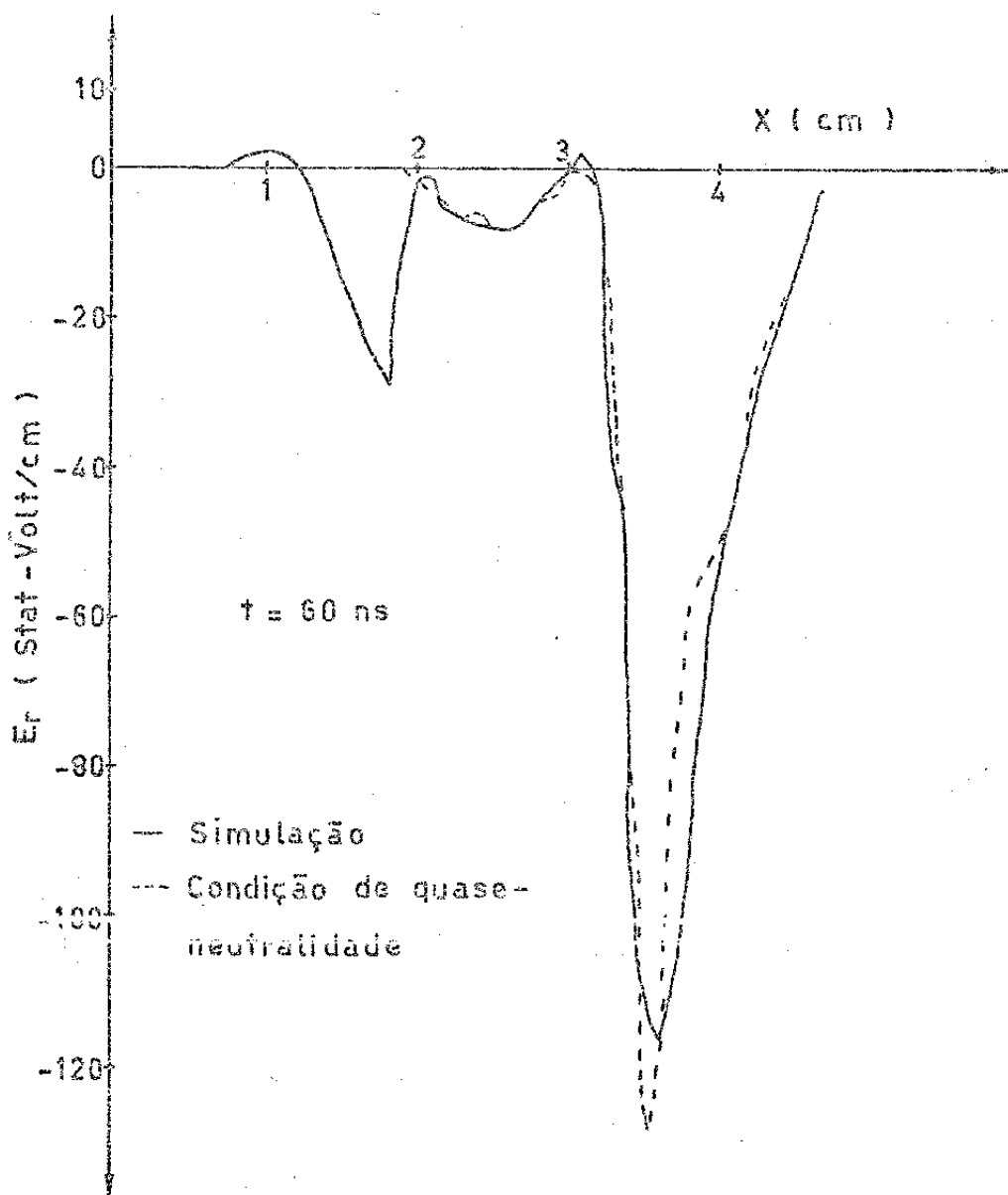
FIGURA 17



17.a



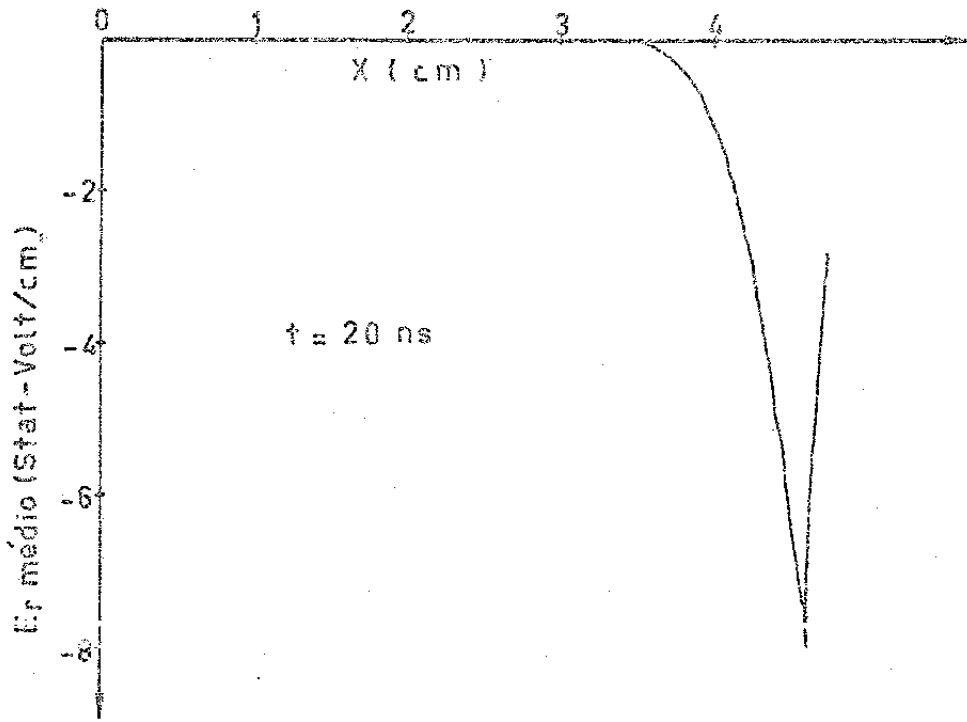
17.b



17.c

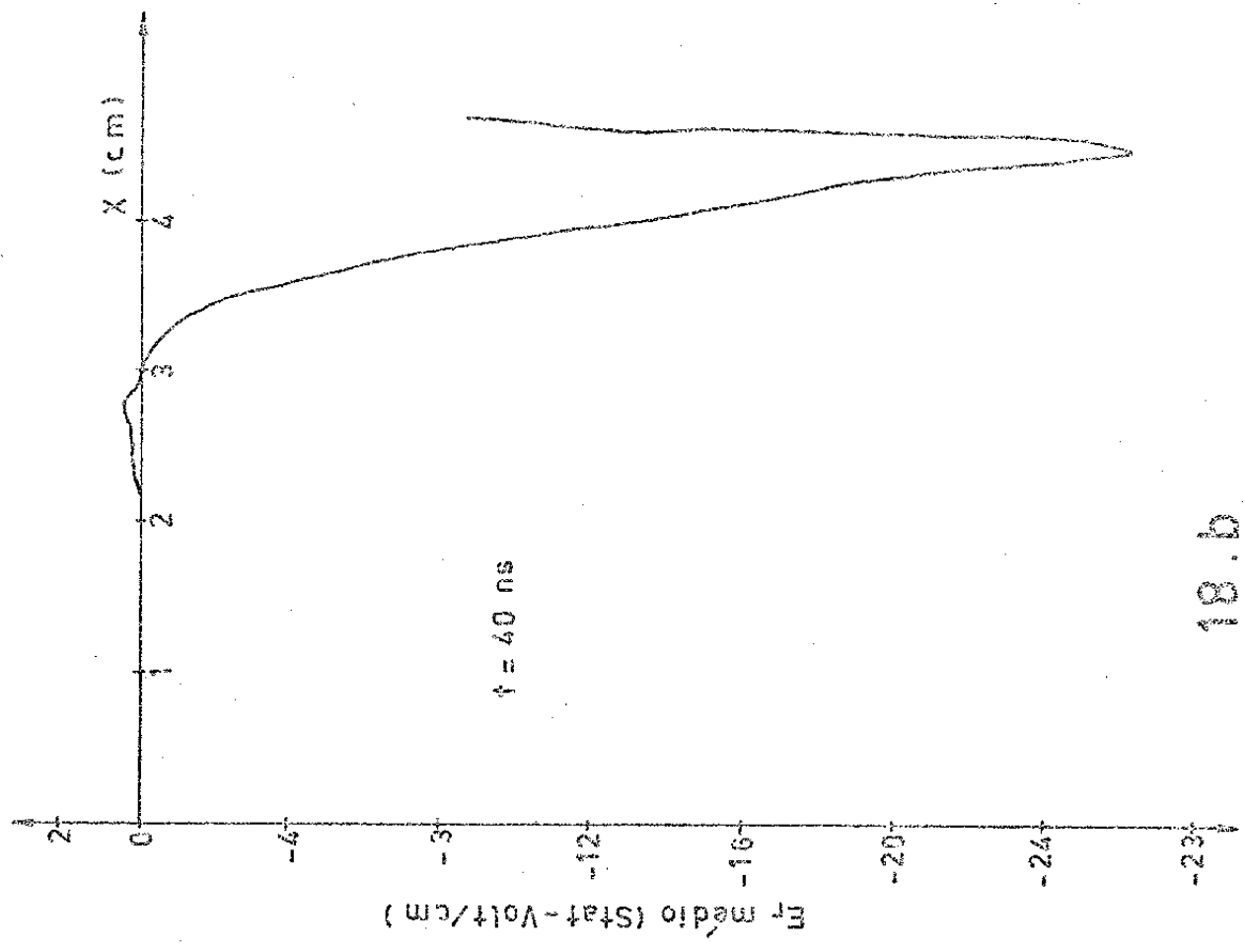
Esta figura corresponde à simulação com frequência de colisão  $\omega_{pi}/100$ . Os perfis 17.a e 17.b são bem semelhantes aos das figuras 16.a e 16.b. Já os perfis correspondentes as figuras 17.c e 16.c diferem em razão de efeitos numéricos que afetam a simulação sem resistividade, a partir de um certo instante e na região atrás do pistão magnético.

# FIGURA 18

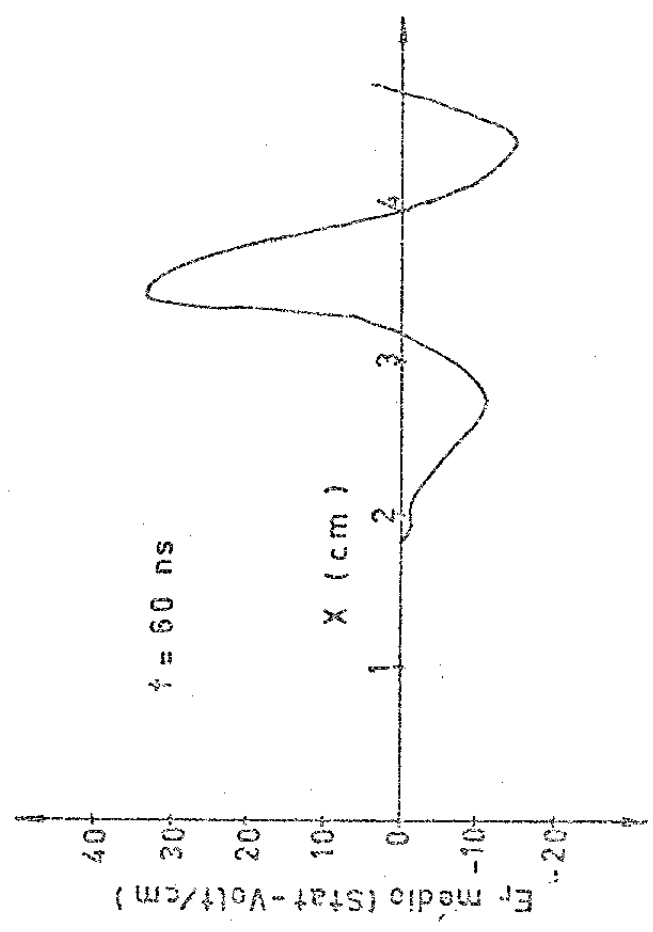


18.a

Esta figura correspondente a simulação sem resistividade. Os perfis do campo radial foram obtidos tomando uma média num intervalo de tempo de 0.2 ns. As oscilações desaparecem e o campo médio satisfaz a condição de quase neutralidade.

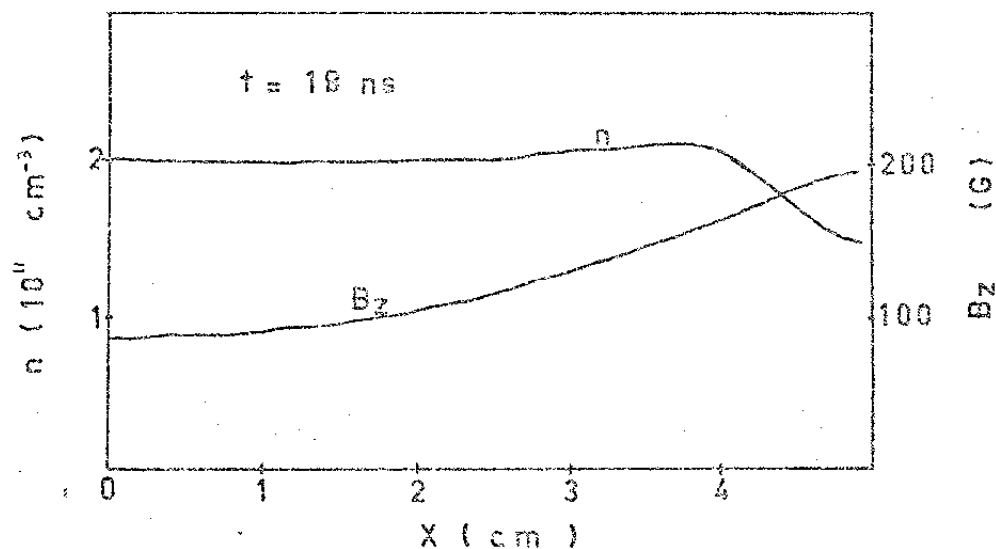


18.b

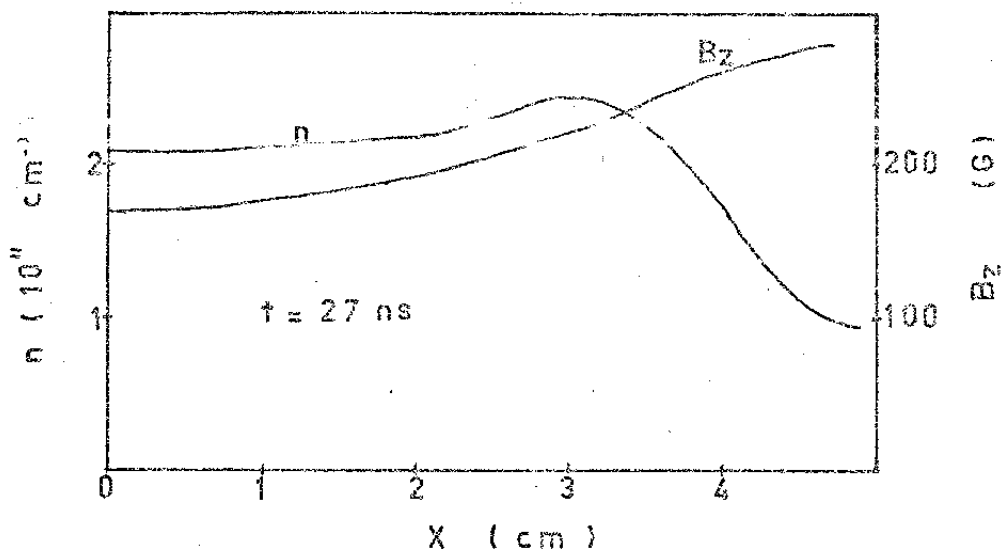


18.c

# FIGURA 19

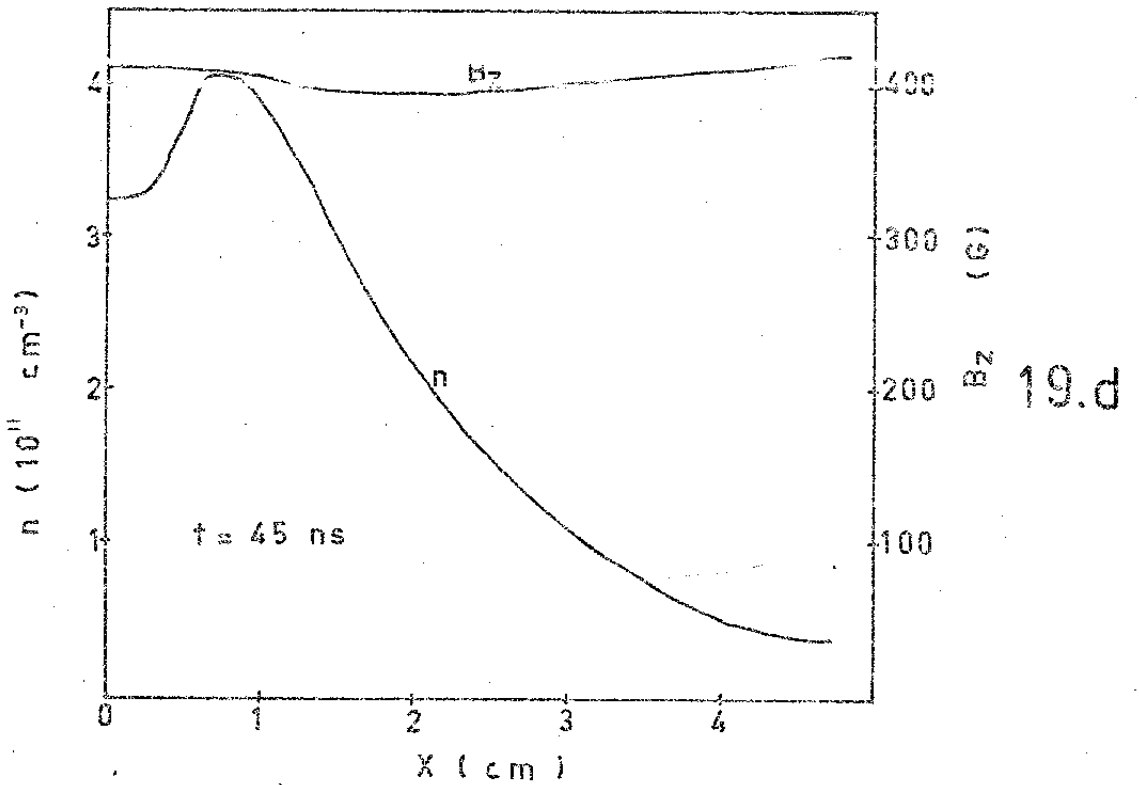
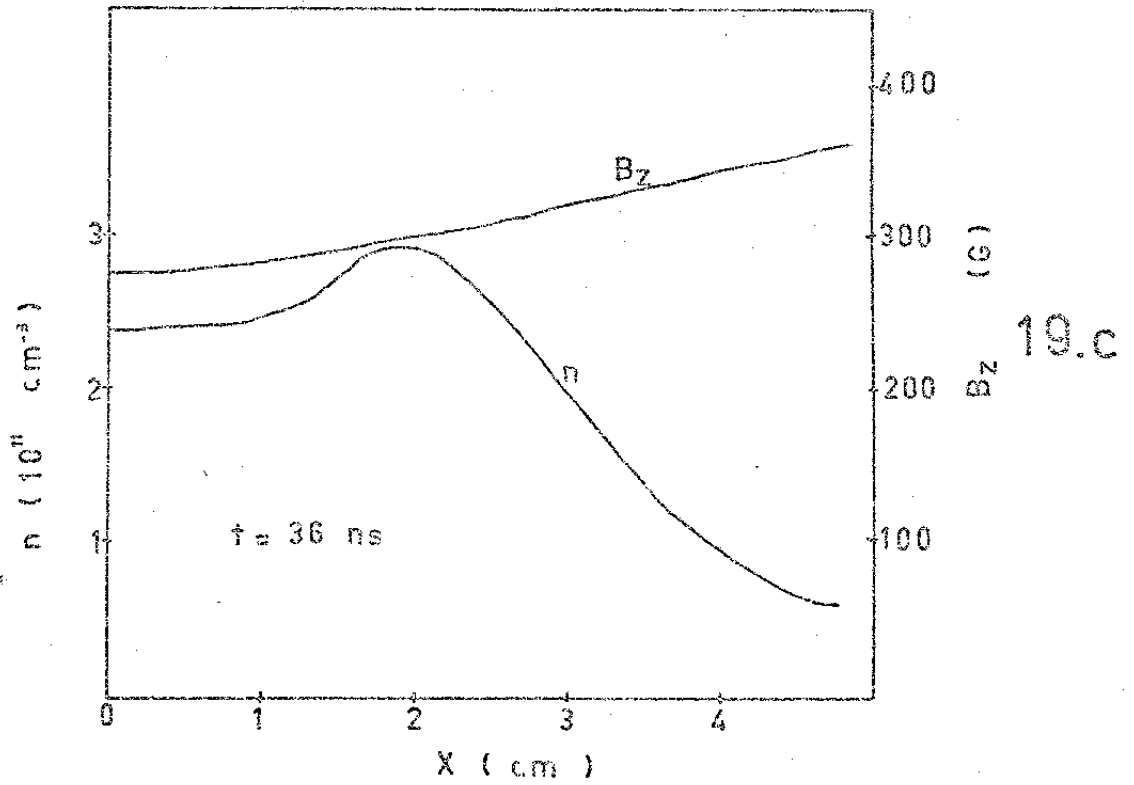


19.a



19.b

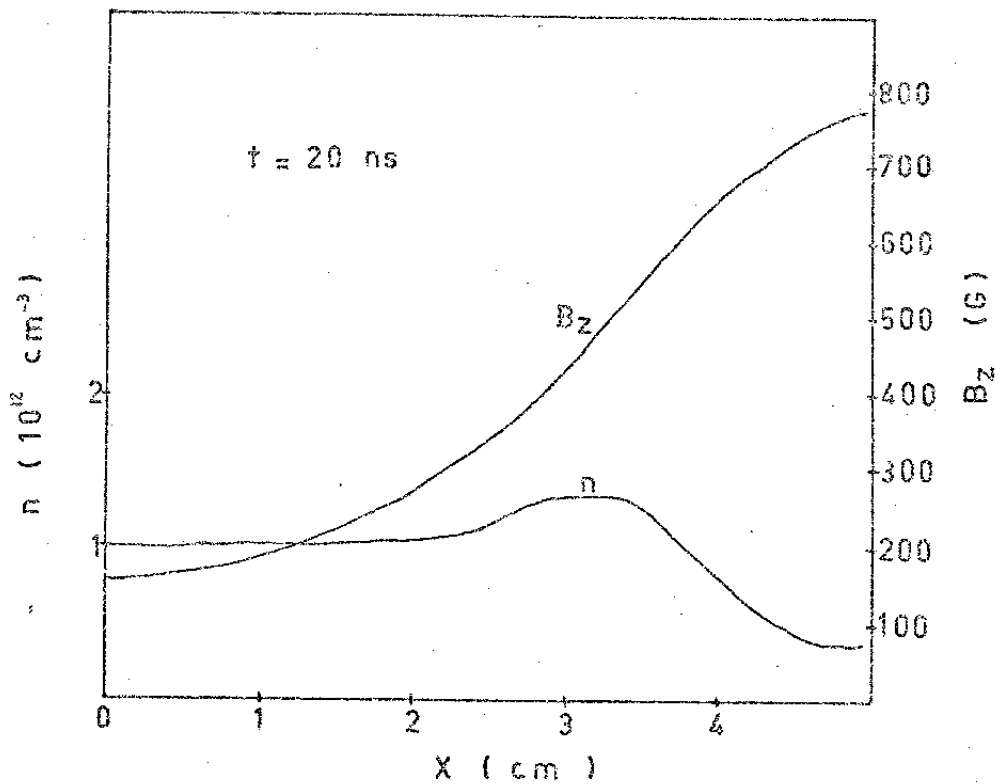
Esta figure corresponde a simulação com frequência de colisão  $\omega_{pi}$ . Neste caso a densidade é de  $0.2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , ou seja um quinto da densidade utilizada nas simulações anteriores.



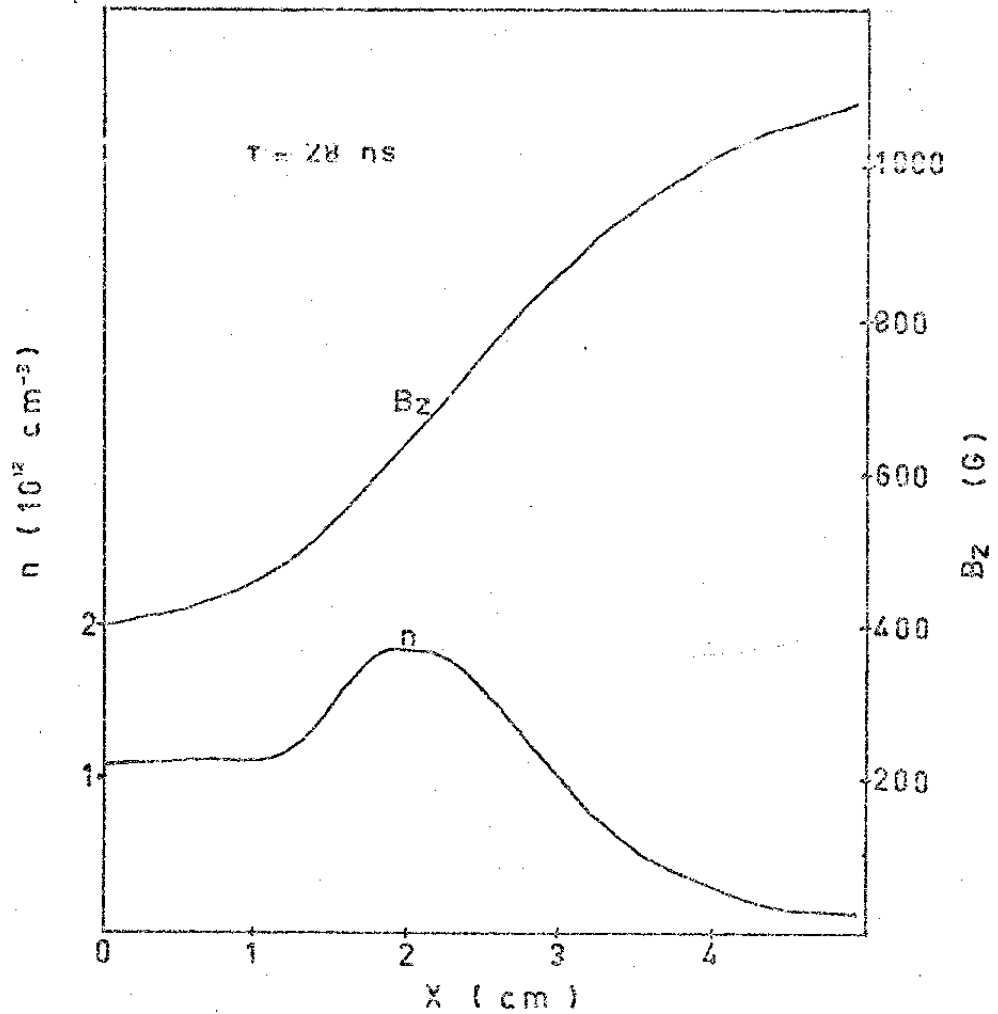
Nota-se que para o mesmo valor do campo magnético máximo, o tempo de "pinch" neste caso é bem menor que os anteriores.



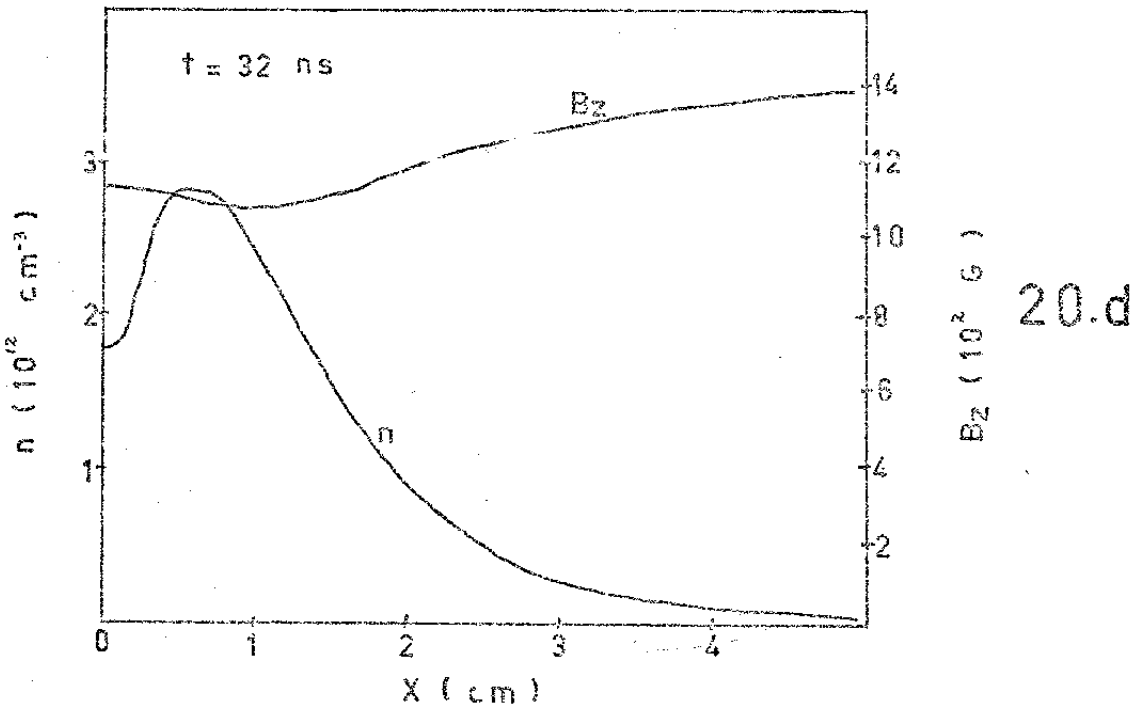
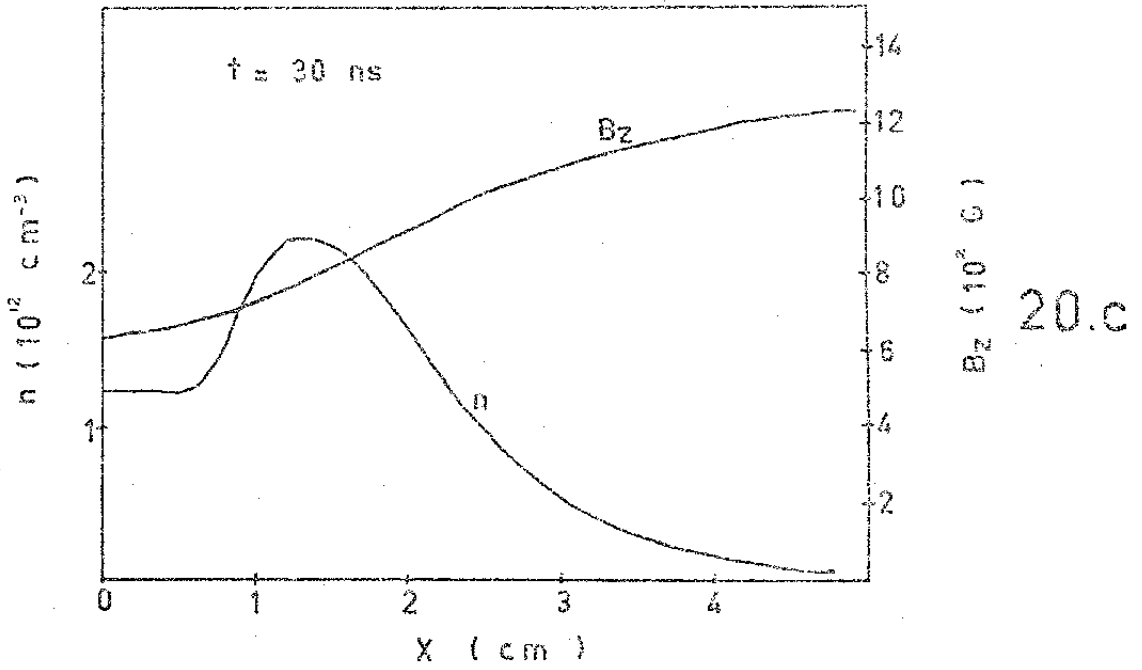
# FIGURA 20



20.a



20.b



Esta figura corresponde a simulação com frequência de colisão  $\omega_{pi}$ . A densidade é de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , porém o campo magnético agora vai a 22 kG em 1 microssegundo. O tempo de "pinch" é menor ainda que o da figura 19.

## CAPÍTULO V - CONCLUSÃO

Em síntese, foi possível estudar o comportamento do plasma em função da variação de certos parâmetros como: frequência de colisão, densidade e campo magnético. Obteve-se perfis de várias grandezas físicas, em diferentes instantes de tempo, o que permitiu observar a evolução temporal das mesmas.

Os resultados obtidos foram bons e mostram que o modelo é confiável, e dentro de certas limitações poderá servir para prever resultados experimentais. Os perfis de densidade e campo magnético foram os previstos, bem como seu deslocamento. Ao aumentar a frequência de colisões, os perfis de grandezas como densidade e campo magnético tornaram-se menos abruptos, e o pistão magnético deslocou-se mais rapidamente em direção ao centro do cilindro.

A temperatura dos elétrons aumentou bastante nos casos de frequência de colisão mais alta, e esta elevação da temperatura dos elétrons é devida basicamente ao efeito Joule. Isto permite concluir que o "pinch" em si, pelo menos nesta fase inicial da implosão, não contribui significativamente quer para a temperatura de íons, quer para a temperatura de elétrons. E assim, é explicável a baixa temperatura iônica alcançada, uma vez que para o aumento da temperatura de íons somente contribuiu o "pinch" pois, estes praticamente não participam da condução de corrente no plasma, e além disto como o sistema de coordenadas utilizado é cartesiano, a compressão é menor do que aquela que ocorreria se fossem utilizadas coordenadas cilíndricas, como foi discutido no capítulo II.

Ao diminuir a densidade conclui-se que o tempo de "pinch" diminui, embora não tenha sido possível estabelecer uma lei de dependência do tempo de "pinch" com a densidade, em razão da impossibilidade de trabalhar num intervalo mais amplo de densidades. Relativamente ao campo magnético, conclui-se que ao aumentá-lo, o tempo de "pinch" diminua.

Como resultado da análise de alguns perfis do campo elétrico radial, conclui-se que as ondas observadas nestes perfis - devem ser ondas de plasma e não, ondas devidas a efeitos numéricos, já que o campo elétrico médio obtido a partir da simulação, concorda com a condição de quase neutralidade. Além disso conclui-se que a condição de quase neutralidade, é satisfeita nesta fase inicial da implosão. Assim é possível remover a forte imposição, ou melhor restrição, imposta ao valor de  $\Delta t$ , e consequentemente da densidade, em razão do campo elétrico radial ser obtido mediante integração da equação de Poisson. Pode-se partir já de início, da condição de quase neutralidade e passar à simulação de " $\theta$ -pinches" com densidades mais elevadas.

Antes de encerrar faz-se mister discutir dois pontos - que representam obstáculos, que deverão ser sobrepujados em outros trabalhos visando aperfeiçoar os resultados obtidos.

O primeiro aspecto que deve merecer atenção é a necessidade de um modelo auto consistente, para a chamada resistividade anômala, que neste trabalho foi levada em conta apenas mediante uma frequência de colisão constante, correspondente a um valor médio da frequência de colisão associada a resistividade anômala. É possível, mediante a utilização da teoria quase-linear, tentar

obter tal abordagem auto consistente para os termos de resistividade anômala. Note-se que as instabilidades ocorrem em um plano transversal, não podendo ser observadas por este modelo que considera somente uma dimensão.

O outro aspecto a ser discutido, é o fato do modelo de dois fluidos em si, já ter alguns problemas em virtude dos íons, não se comportarem exatamente como um fluido. A baixa temperatura obtida para íons é um dos aspectos deste problema. Para os elétrons o modelo de fluido é razoável, mas os íons são tratados de maneira mais adequada ao serem considerados como partículas, pois entre outros aspectos alguns deles sofrem reflexão, ao chocarem-se com o pistão magnético, passando a ter o dobro da velocidade deste, que é a velocidade obtida pelo modelo de fluido. O que se faz, muitas vezes, é partir para um modelo híbrido em que os elétrons são tratados como um fluido e os íons como partículas, porém este tipo de formulação tem o inconveniente de, ao passar a sua resolução numérica, demandar uma grande capacidade de memória do computador utilizado, o que não é disponível em nosso caso específico. Portanto deve-se procurar a introdução de termos corretivos neste modelo de dois fluidos que é bastante simples.

Levando em conta os resultados positivos já obtidos e todos os fatores restritivos mencionados, pode-se tentar elaborar um modelo mais aperfeiçoado para estudar o " $\theta$ -pinch", e obter resultados passíveis de comparação, com os do Tupã, " $\theta$ -pinch" em implantação pelo grupo de plasma da UNICAMP, que trabalhará numa faixa de densidade superior a estudada nesta simulação.

REFERÊNCIAS

- ( 1 ) - Montgomery, D.C.; Tidman, D.A.: Plasma Kinetic Theory -  
Mc Graw-Hill Book Company (1964) - Cap.4.
  
- ( 2 ) - Krall, N.A.; Trivelpiece, A.W.: Principles of Plasma -  
Physics - Mc Graw-Hill Book Company (1973) - p.87.
  
- ( 3 ) - Braginskii, S.I.: Reviews of Plasma Physics -  
Consultants Bureau, New York (1965) - Vol.1, p.205.
  
- ( 4 ) - Book, D.L.; Boris J.P.: Journal of Computational Physics  
11, 38 (1973).
  
- ( 5 ) - Book, D.L.; Boris J.P.; Hain K.: Journal of  
Computational Physics 18, 248 (1975).
  
- ( 6 ) - Potter, D.: Computational Physics - John Wiley & Sons -  
(1973) - p.88.
  
- ( 7 ) - Liewer, P.C.: Theoretical and Numerical Approaches to -  
Turbulent Dominated Theta Pinches - University of -  
Maryland, College Park (1972) - p.110.
  
- ( 8 ) - Artsimovich, L.A.: Controlled Thermonuclear Reactions -  
Gordon and Breach Science Publishers New York (1964) -  
p.154.

- ( 9 ) - Hui, B.H.; Hamasaki, S.; Davidson, R.C.: Nuclear Fusion  
16, 73 (1976).
- ( 10 ) - Liewer, P.C.; Krall, N.A.: The Physics of Fluids 16, -  
1953 (1973).
- ( 11 ) - Sgro, A.G.; Nielson, C.W.: The Physics of Fluids 19, 126  
(1976).