



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física Gleb Wataghin

Dissertação de Mestrado

Geometria dos defeitos topológicos em materiais esméticos sobre superfícies curvas

Iberê Oliveira Kuntz de Souza

Orientador: Ricardo Antonio Mosna

Campinas

2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física Gleb Wataghin

Dissertação de Mestrado

Iberê Oliveira Kuntz de Souza

Geometria dos defeitos topológicos em materiais esméticos sobre superfícies curvas

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Ricardo Antonio Mosna

Coorientador: Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Iberê Oliveira Kuntz de Souza e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna.

A handwritten signature in black ink, reading "Ricardo Antonio Mosna", is positioned above a horizontal line.

Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna

Campinas

2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Valkíria Succi Vicente - CRB 8/5398

So89g Souza, Iberê Oliveira Kuntz de, 1991-
Geometria dos defeitos topológicos em materiais esméticos sobre superfícies curvas / Iberê Oliveira Kuntz de Souza. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Ricardo Antonio Mosna.
Coorientador: Guillermo Gerardo Cabrera Oyarzun.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Defeitos topológicos. 2. Cristal líquido. 3. Fases esméticas. 4. Geometria. 5. Espaços curvos. I. Mosna, Ricardo Antonio, 1974-. II. Cabrera Oyarzun, Guillermo Gerardo, 1948-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Geometry of topological defects in smectic materials over curved surfaces

Palavras-chave em inglês:

Topological defects

Liquid crystal

Smectic phases

Geometry

Curved spaces

Área de concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca examinadora:

Ricardo Antonio Mosna [Orientador]

João Paulo Pitelli Manoel

Rickson Coelho Mesquita

Data de defesa: 04-03-2015

Programa de Pós-Graduação: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE
IBERÊ OLIVEIRA KUNTZ DE SOUZA – R.A. 144597 APRESENTADA E APROVADA
AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS, EM 04 / 03 / 2015.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna
Orientador do Candidato – DMA/IMECC/UNICAMP



Prof. Dr. João Paulo Pitelli Manoel – CMCC/UFABC



Prof. Dr. Rickson Coelho Mesquita – DRCC/IFGW/UNICAMP

Resumo

Nesse trabalho estudamos configurações geométricas de um cristal líquido bidimensional sobre substratos curvos. Em particular, estamos interessados na fase esméctica-A desses materiais, em que as suas moléculas são organizadas em camadas. Isso é interessante pois grande parte das propriedades de um cristal líquido, como as propriedades ópticas e elásticas, é afetada pela curvatura do seu substrato. Diferentemente dos esmécticos no plano euclidiano, em superfícies curvas a presença de curvatura gaussiana dá origem a defeitos topológicos e *grain boundaries* na estrutura dos esmécticos. Mostrarei essa interação entre curvatura e defeitos topológicos em algumas superfícies no limite em que a contribuição à energia devido a compressão das camadas é muito maior do que as contribuições provenientes de outros tipos de deformação. Nesse regime, o estado de menor energia é obtido quando as camadas esmécticas são igualmente espaçadas. Isso faz com que o vetor diretor siga as geodésicas da superfície, o que leva a uma interessante analogia entre esmécticos e óptica geométrica. Além disso, é bem conhecido na comunidade de óptica que lentes planas de índice de refração não-uniformes podem ser tratadas como superfícies curvas, cujas geodésicas se propagam da mesma forma que a luz se propaga na lente. Com isso, pode-se fabricar, em princípio, superfícies com propriedades ópticas específicas e, dessa forma, construir texturas esmécticas com diferentes defeitos e singularidades a partir da extensa literatura conhecida de lentes.

Abstract

We study geometrical configurations of liquid crystals defined on curved bidimensional substrates. We are particularly interested in the smectics-A phase, whose molecules are organized in layers. This is an interesting problem since many of the liquid crystal characteristics, such as its optical and elastic properties, are affected by the curvature of its substrate. Differently from the planar case, in curved surfaces the presence of Gaussian curvature induces topological defects and grain boundaries in the smectic structure. We will illustrate this interplay between curvature and topological defects for different surfaces in the limit where the energy contribution due to the compression of the layers is much larger than the contributions from other types of deformations. At this regime, the ground state is obtained when the smectic layers are uniformly spaced. In this case the normals to the layers follows geodesics of the surface. This leads to an interesting analogy between smectics and geometric optics. Moreover, it is well known in the optics community that flat lenses with nonuniform refractive index can be treated as curved surfaces, where their geodesics propagate in the same way that light propagates in the lens.

Therefore, one can manufacture, in principle, surfaces with specific optical properties and construct smectic textures with different topological defects and singularities by using the extensive literature of known lenses.

Sumário

Lista de Figuras	xvi
Introdução	xx
1 A física dos cristais líquidos	1
2 Defeitos topológicos	8
2.1 Grupos fundamentais	8
2.2 Propriedades do grupo fundamental	10
2.3 Exemplos de grupos fundamentais	11
2.4 Defeitos topológicos em cristais líquidos	13
2.4.1 Cargas topológicas	17
2.4.2 Defeitos no laboratório	21
3 Um pouco sobre geometria	24
3.1 Conceitos básicos	24
3.2 Derivada covariante	30
3.3 Curvaturas de uma superfície	36
3.4 Geodésicas	38
3.4.1 Geometria de camadas	45
3.5 O Teorema de Gauss-Bonnet	47
3.6 Equivalência entre óptica em lentes planas e óptica em superfícies curvas .	48
4 Esméticos sobre superfícies curvas	58
4.1 Analogia com óptica geométrica	59
4.2 Esméticos em algumas superfícies	63
4.2.1 Cone	63
4.2.2 Cone sobre o plano	67

4.2.3	Semiesfera sobre o plano	71
4.2.4	Pseudo-esfera	73
4.3	Optometria esmética	74
5	Conclusão	79
	Referências Bibliográficas	80

“The game of science is, in principle, without end. He who decides one day that scientific statements do not call for any further test, and that they can be regarded as finally verified, retires from the game.”

Karl Popper

Agradecimentos

Esse trabalho é fruto de várias contribuições, tanto intelectuais quanto pessoais, de pessoas que estiveram ao meu lado durante os últimos anos e pelas quais eu sou profundamente grato. Dito isso, gostaria de agradecer à toda minha família pelo seu apoio moral em vários momentos da minha vida. Em particular, gostaria de agradecer à minha mãe por sua postura encorajadora que me fez seguir em frente mesmo quando eu achava que isso não era possível, ao meu pai por plantar e fazer germinar a semente que levou a minha curiosidade científica, à minha irmã e ao meu cunhado pelos bons momentos regados de violão, cerveja e ótimas conversas.

Agradeço a todos os meus amigos pelas excelentes discussões sobre assuntos acadêmicos e, ao mesmo tempo, por me ajudarem a ver que existe vida fora da academia. Em particular, gostaria de agradecer meus amigos Tontos, especialmente o Burca e o Lucas Sala pela excelente amizade, lealdade e por quem carrego grande admiração.

Não consegui me decidir em qual dos parágrafos anteriores meus agradecimentos a minha esposa Jéssica se adequaria melhor; talvez em uma combinação linear deles. Muito obrigado por fazer parte da minha família e, acima de tudo, ser uma excelente amiga. Punho dos brothers pra você.

Jamais me esquecerei dos professores que foram responsáveis em manter a minha paixão pela ciência acesa. Particularmente, sou muito grato ao meu ex-orientador de iniciação científica Leonardo Maia pelos importantes conselhos e ensinamentos de cunho geral, e ao meu orientador de mestrado Ricardo Mosna, pela sua paciência e dedicação em ensinar e com quem tenho aprendido muito. Foi um prazer trabalhar ao lado dessas pessoas.

Por fim, agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração das fases de um material que apresenta a fase de cristal líquido.	1
1.2	Fase nemática.	2
1.3	Fase esmética-A (esquerda) e fase esmética-C (direita).	3
1.4	Texturas schlieren obtidas usando-se luz branca e monocromática.	4
1.5	Os <i>grain boundaries</i> são as linhas que delimitam as regiões do material.	5
1.6	Diferentes tipos de deformações dos nemáticos.	6
2.1	Representação da variedade $\mathbb{R}P^1$ em que os pontos P e P' são identificados.	14
2.2	Laço em torno de um defeito puntual em um cristal líquido (esquerda) e o respectivo laço mapeado no espaço do parâmetro de ordem (direita).	15
2.3	Representação da variedade $\mathbb{R}P^2$ em que os pontos P e P' são identificados.	16
2.4	Diferença na topologia de (a) S^1 e (b) S^2 .	17
2.5	Uma representação da garrafa de Klein imersa em $\mathbb{R}^3$.	18
2.6	Configuração das moléculas dos nemáticos na presença de defeitos topológicos de diferentes cargas s .	19
2.7	Configuração de spins (representados em azul) se houvesse um defeito puntual de carga $+\frac{1}{2}$ na origem.	20
2.8	Partículas coloidais (círculos em cinza) em um material nemático (moléculas em azul) produzindo defeitos de carga $+1$.	21
2.9	Triângulação para o cálculo da característica de Euler.	22
2.10	Exemplos de superfícies com diferentes gêneros.	23
2.11	Textura schlieren de defeitos topológicos de diferentes cargas s .	23
3.1	Superfície parametrizada.	25
3.2	Curva da superfície.	26
3.3	Círculo osculador de raio r no ponto P da curva C .	27
3.4	Ilustração do espaço tangente $T_p S$ no ponto p .	28
3.5	Curvaturas principais.	37

3.6	Da esquerda pra direita: uma superfície de curvatura gaussiana negativa (hiperbolóide), uma superfície de curvatura gaussiana nula (cilindro) e uma superfície de curvatura gaussiana positiva (esfera).	39
3.7	Em linha cheia está representada uma geodésica que minimiza o caminho e em linha interrompida uma geodésica minimiza o caminho apenas localmente.	41
3.8	Superfície de revolução ilustrando o Teorema de Clairaut.	44
3.9	Ilustração da Equação de Jacobi.	45
3.10	Ilustração do Teorema de Gauss-Bonnet para triângulos em superfícies curvas.	49
3.11	Configuração geométrica de uma lente plana não-homogênea de índice de refração $n(r)$	50
3.12	Trajetoória de um raio de luz em um meio esférico.	51
3.13	Geodésicas em uma superfície esfericamente simétrica.	53
3.14	(a) Olho-de-peixe de Maxwell, (b) Lente de Luneburg, (c) Lente de Eaton, (d) Lente de rotação em 90°	57
4.1	Camadas esméticas sobre o <i>bump</i> gaussiano.	60
4.2	Refração da luz em uma lente plana e refração de uma geodésica em uma superfície curva.	61
4.3	Na figura do topo, vemos a ocorrência da cáustica em um xícara de café, após o feixe de luz se refletir na superfície interna da xícara. A figura de baixo ilustra a trajetória dos raios de luz antes e depois da reflexão.	62
4.4	Exemplo da projeção da estrutura esmética sobre o <i>bump</i> gaussiano no plano.	63
4.5	Transformação do cone para o plano através de um corte ao longo do meridiano L	64
4.6	Visão do disco cortado obtido a partir do cone. Do ponto p_0 parte uma geodésica de inclinação ω parametrizada por λ	66
4.7	Configuração esmética sobre o cone na presença de um defeito de carga $+1$ contido no plano xz . As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.	66
4.8	Textura schlieren do cone da Figura 4.7.	68
4.9	Configuração das camadas esméticas sobre a superfície cônica obtida analiticamente a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.	69
4.10	Configuração das camadas esméticas sobre a superfície cônica obtida numericamente a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.	70

4.11	A figura de cima é a projeção das geodésicas (linhas tracejadas) e das camadas esméticas (linhas cheias) do cone suavizado sobre o plano. A figura de baixo é a respectiva textura schlieren.	70
4.12	Configuração das camadas esméticas sobre a superfície esférica sobre o plano sem suavização obtido a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. Na ausência de suavização, algumas regiões do plano não são alcançadas pelas geodésicas e, portanto, não conseguimos construir as camadas esméticas. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.	71
4.13	Configuração das camadas esméticas (linhas pretas) e das geodésicas (linhas brancas) sobre a superfície esférica no plano com suavização obtido a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$	72
4.14	A figura de cima é a projeção das geodésicas (linhas tracejadas) e das camadas esméticas (linhas cheias) da semiesfera no plano suavizado sobre o plano. A figura de baixo é a respectiva textura schlieren.	72
4.15	Estrutura esmética sobre a pseudo-esfera.	74
4.16	Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Maxwell.	75
4.17	Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Eaton.	76
4.18	Trajetória dos raios de luz, partindo da borda, para a lente generalizada de Maxwell com $M = 2$	77
4.19	Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Maxwell generalizada na presença de um defeito topológico de carga $+1$ sobre a borda.	78

Introdução

Ao longo da história da ciência, a física e a matemática foram interlocutoras de uma interessante história. Tudo começou com um ancestral comum, conhecido por filosofia natural, numa época em que não existiam divisões, nem mesmo de cunho pedagógico, entre física, matemática e as demais áreas modernas da ciência. No entanto, com o passar dos anos a matemática foi se tornando cada vez mais abstrata, enquanto a física foi se aproximando de suas aplicações e tecnologias, o que acabou rompendo esse casamento entre as disciplinas. Foi somente então no século passado, com o surgimento da física moderna, que elas se reconciliaram e passaram a oferecer benefícios mútuos.

A matemática, por um lado, serve à física não somente como uma caixa de ferramentas, ela oferece um universo de conceitos e estruturas para a elaboração de teorias físicas. Por outro lado, a natureza tem servido como a principal fonte de inspirações para a criação das teorias matemáticas. Em particular, quando falamos de geometria e física, essa simbiose revela-se ainda mais evidente. De fato, a geometria e a sua irmã do mundo qualitativo, a topologia, fornecem poderosos métodos, muitas vezes acompanhados de apelo visual, que permitem aumentar a nossa compreensão de problemas físicos. Particularmente, noções geométricas têm desempenhado um papel muito importante na física da matéria condensada. Exemplos incluem as fases geométricas, as anomalias quânticas, os isolantes topológicos, os defeitos topológicos etc.

A física da matéria condensada mole [1] é uma subárea da matéria condensada que compreende uma variedade enorme de sistemas físicos que são facilmente deformados por compressão ou flutuações térmicas e inclui colóides, polímeros, espumas, géis, cristais líquidos, etc. Nesses materiais os defeitos topológicos têm recebido notável atenção de físicos e matemáticos. Enquanto os matemáticos desfrutam desses materiais como um *playground* para brincar de geometria e topologia, os físicos conseguem confrontar as teorias de defeitos com a experiência, o que ainda é muito difícil (ou até mesmo impossível) de se fazer considerando defeitos topológicos em teoria quântica de campos, por exemplo. Dessa forma, resultados (teóricos e experimentais) em matéria condensada mole podem ser usados como analogias em outras áreas da física em que defeitos topológicos estejam

presentes.

Isso é particularmente interessante nos cristais líquidos, onde encontram-se os sistemas clássicos que descrevem materiais em estados intermediários entre fluidos e cristais, pois estes compartilham diversas analogias com a gravitação [2–4]. Em [4] vemos, por exemplo, que o estudo das trajetórias da luz ao redor de defeitos topológicos em cristais líquidos levou à previsão de uma família de cordas cósmicas assimétricas. Já em [3] foram realizadas verificações experimentais do mecanismo de Kibble para a formação de cordas cósmicas em cristais líquidos. Isso mostra a forte interação que existe entre cristais líquidos e a teoria da gravitação.

Enfatizei anteriormente que para investigar a física dos esméticos em superfícies curvas é necessário conceitos preliminares tanto da física quanto da matemática. Por esse motivo, organizei o texto de modo a introduzir esses conceitos antes de abordar o problema em si. Dessa forma, o Capítulo 1 fornece uma introdução à física dos esméticos do ponto de vista da teoria da elasticidade. Os defeitos topológicos em matéria condensada são estudados no Capítulo 2 com o auxílio da teoria da homotopia (Seção 2.1-2.3). Veremos que a classificação dos defeitos é feita através do grupo fundamental do espaço do parâmetro de ordem (Seção 2.4). Nos casos em que o grupo fundamental é o grupo aditivo dos inteiros, é possível associar uma carga aos defeitos. Analogamente às cargas elétricas, as cargas topológicas podem decair ou se somar com outras cargas, mas sempre respeitando a conservação da carga topológica total. Em seguida, o Capítulo 3 aborda as principais noções de geometria necessárias para o estudo dos esméticos em superfícies curvas. É aqui que surgirão os conceitos de curvatura gaussiana (Seção 3.3) e de geodésica (Seção 3.4). Talvez o resultado mais notável desse capítulo seja o Teorema de Gauss-Bonnet (Seção 3.5), que relaciona conceitos geométricos com conceitos topológicos e que será de grande importância no Capítulo 4. Por fim, no Capítulo 4 investigarei a configuração de esméticos em diferentes superfícies curvas, a fim de entender a interação que ocorre entre defeitos topológicos e a curvatura gaussiana do substrato. Veremos que nas situações em que a distância entre as camadas esméticas é muito pequena se comparada com as distâncias típicas do sistema, os esméticos são guiados pelas geodésicas da superfície. Isso reduz o problema de encontrar as camadas esméticas em uma superfície curva ao de obter as geodésicas dessa superfície, com determinadas condições de contorno, e então obter a família de curvas ortogonais a ela, as quais representam as camadas esméticas. Isso foi feito tanto analiticamente, no caso de superfícies com um número suficiente de simetrias, quanto numericamente para superfícies mais gerais.

Na Seção 4.2 apresento alguns dos resultados novos que obtivemos nesse trabalho. Veremos que esses resultados mostram que a curvatura gaussiana é capaz de interagir com os esméticos, produzindo defeitos topológicos em sua estrutura. Além disso, o fato de que o vetor diretor segue as geodésicas do substrato leva a uma interessante analogia com óptica

(Seção 4.1), onde as geodésicas desempenham o papel das trajetórias da luz e as camadas esméticas das frentes de onda. Isso nos permite estudar fenômenos em esméticos usando o extenso conhecimento acumulado na literatura de óptica. Ao levar essa analogia um passo à frente, juntando com a equivalência existente entre lentes planas não-homogêneas e superfícies curvas de índice de refração unitário (Seção 3.6), tornou-se possível construir configurações esméticas com propriedades desejadas a partir das soluções de lentes conhecidas. Vale apenas ressaltar que os resultados obtidos nessa seção, incluindo a concepção da idéia de usar soluções de lentes para obter diferentes configurações esméticas em superfícies curvas, são frutos originais desse trabalho. Essa idéia é explorada para diversas lentes e os resultados e discussões são apresentados na Seção 4.3. As conclusões são então feitas no Capítulo 5.

Capítulo 1

A física dos cristais líquidos

Os cristais líquidos, como o próprio nome sugere, são fases da matéria com propriedades intermediárias entre sólidos e líquidos. Eles são caracterizados pelas simetrias do seu estado fundamental [5,6], ou seja, pelo grau de organização neles presente. Dessa forma, um cristal líquido apresenta diversas fases de acordo com o grau de organização das suas moléculas. Naturalmente, as fases menos organizadas possuem propriedades mais evidentes de líquidos e são as primeiras que surgem nas transformações de fase do líquido para o cristal líquido (Figura 1.1).

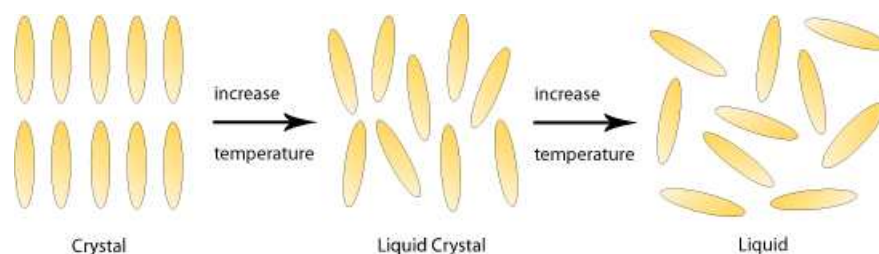


Figura 1.1: Ilustração das fases de um material que apresenta a fase de cristal líquido. Figura retirada de http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/liquid_crystals/printall.php.

A fase nemática (Figura 1.2) é resultado da primeira transição de fase do líquido para o cristal líquido. Nela não há ordem de posição (ou translacional), mas observa-se a presença de ordem direcional, ou seja, suas moléculas tendem a se alinhar a um campo vetorial unitário $\mathbf{N}(\mathbf{r})$, conhecido como vetor diretor, fazendo com que o material se torne anisotrópico. Assim, as moléculas fluem livremente e as posições dos seus centros de massa são distribuídas aleatoriamente como em um líquido, mas sempre mantendo sua

ordem direcional de longo alcance.

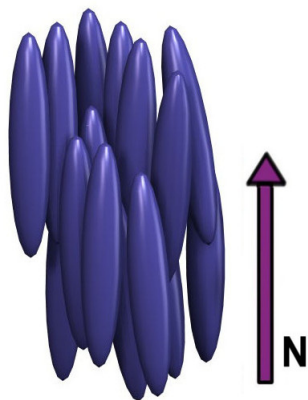


Figura 1.2: Fase nemática. Figura retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_crystal.

Ao continuar resfriando o cristal líquido, ocorre a transição da fase nemática para a fase esmética (Figura 1.3). Nesse caso, a ordem direcional é herdada dos nemáticos e surge também ordem translacional, fazendo com que as moléculas passem a se organizar em camadas, não sendo permitida a passagem de moléculas de uma camada para a outra. Isso faz com que na direção do vetor diretor $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ o material se comporte como um sólido. Por outro lado, na direção perpendicular ao vetor diretor $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ as camadas deslizam umas sobre as outras como em um sabão e dentro de cada camada o material se comporta como um líquido.

Pode-se encontrar vários subtipos de materiais esméticos na natureza. O chamado esmético-A ocorre quando o vetor diretor é perpendicular à camada esmética, enquanto que no esmético-C o vetor diretor faz um ângulo não nulo com a normal à camada. Por outro lado, se cada molécula está, em média, rodeada por seis outras, dispostas nos vértices de um hexágono, e os hexágonos formados pelos vizinhos de cada molécula possuem lados paralelos uns aos outros, teremos o esmético-B. De particular interesse para essa dissertação é a fase esmética-A, que de agora em diante será abreviada simplesmente por esmética.

A presença dos chamados defeitos topológicos nos cristais líquidos, ou seja, de singularidades em seu vetor diretor, altera várias propriedades ópticas e mecânicas do material. Por esse motivo, eles são muito importantes do ponto de vista prático e, portanto, torna-se crucial estudá-los em detalhe. Experimentalmente, uma das maneiras de induzir defeitos no cristal líquido é adicionando impurezas em sua estrutura. Dessa forma, suas moléculas são forçadas a se reorganizar a fim de se adaptar à presença dessas partículas, levando

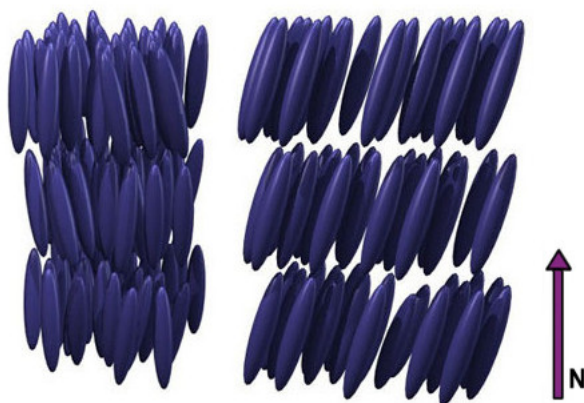


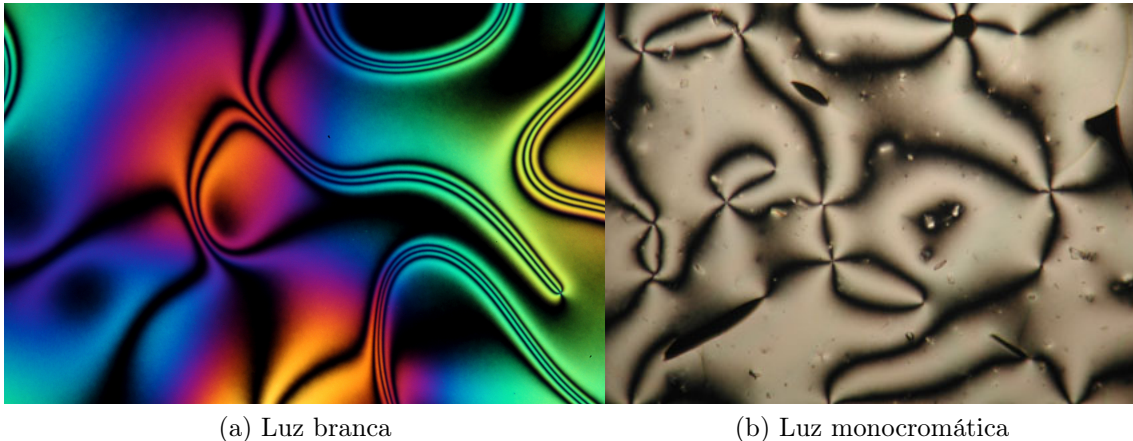
Figura 1.3: Fase esmética-A (esquerda) e fase esmética-C (direita). Figura retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_crystal.

à formação de singularidades e defeitos na estrutura esmética. Em substratos curvos, os esméticos experimentam uma complexa interação entre ordem e curvatura, fazendo com que também apareçam esses defeitos e singularidades até mesmo na ausência de impurezas [7–9]. Como a curvatura e a presença de defeitos alteram muitas das propriedades ópticas e elásticas de um cristal líquido, tal fato se torna muito importante do ponto de vista experimental e tecnológico, pois o crescimento de cristais é realizado sobre superfícies reais.

Para observar esses defeitos no laboratório, os cristais líquidos podem ser analisados colocando-os entre dois polarizadores de eixos cruzados perpendicularmente. O resultado, conhecido como textura schlieren, é caracterizado por manchas claras e escuras (ou coloridas se for usado luz branca) que revelam a orientação molecular da amostra, conforme ilustra a Figura 1.4. Terminações escuras de número par sobre um mesmo ponto são a assinatura da presença de um defeito (mais detalhes no Capítulo 2).

Além dos defeitos, que são singularidades no parâmetro de ordem, os cristais líquidos podem apresentar singularidades na sua própria estrutura molecular. Essas singularidades são fronteiras que dividem regiões com diferentes orientações moleculares e, por esse motivo, são chamadas de *grain boundaries* (do inglês, “fronteira granular”). A Figura 1.5 mostra a imagem de um cristal na presença de *grain boundaries*.

Para os propósitos dessa dissertação utilizarei o formalismo da teoria da elasticidade, em que o cristal líquido é tratado como um *continuum* e todos os seus detalhes atômicos e moleculares são ignorados. Dessa forma, nossa abordagem aqui será baseada na termodinâmica, em que o cristal líquido é modelado de maneira fenomenológica. Para



(a) Luz branca

(b) Luz monocromática

Figura 1.4: Texturas schlieren obtidas usando-se luz branca e monocromática. Figura retirada de http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/liquid_crystals/printall.php.

isso, precisamos de algum potencial termodinâmico que descreva nosso sistema. Como a maioria dos experimentos são executados a temperatura e volume constantes, o potencial termodinâmico adequado é o funcional de energia livre $\mathcal{F}$ [1]. Assim, o equilíbrio termodinâmico corresponde ao mínimo de $\mathcal{F}$.

Uma maneira operacionalmente eficaz de se obter expansões fenomenologicamente corretas para $\mathcal{F}$ é obtida expandindo a densidade de energia livre f em torno de um ponto de equilíbrio e mantendo somente os termos de até segunda ordem que deixam f invariante por transformações de simetria. Com isso, obtemos o funcional de energia livre integrando a densidade f em todo o volume:

$$\mathcal{F} = \int f dV.$$

No caso da fase nemática, esse funcional é dado pela energia livre de Frank [1, 5, 6]

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} [K_1(\nabla \cdot \mathbf{N})^2 + K_2(\mathbf{N} \cdot \nabla \times \mathbf{N})^2 + K_3(\mathbf{N} \times \nabla \times \mathbf{N})^2], \quad (1.1)$$

onde os K_i ($i = 1, 2, 3$) são constantes positivas, com dimensão de força, da ordem de 10^{-11}N . Cada um dos termos da energia de Frank penaliza um tipo de deformação do vetor diretor $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ (Figura 1.6). O primeiro termo penaliza deformações na direção perpendicular de $\mathbf{N}(\mathbf{r})$, também conhecidas como deformações do tipo *splay*. O segundo termo penaliza torção, ou seja, a propriedade da molécula girar em torno do eixo que passa pelo seu centro e é ortogonal à $\mathbf{N}(\mathbf{r})$. Já o terceiro termo penaliza curvatura ao longo de $\mathbf{N}(\mathbf{r})$, também chamada de *bend*.

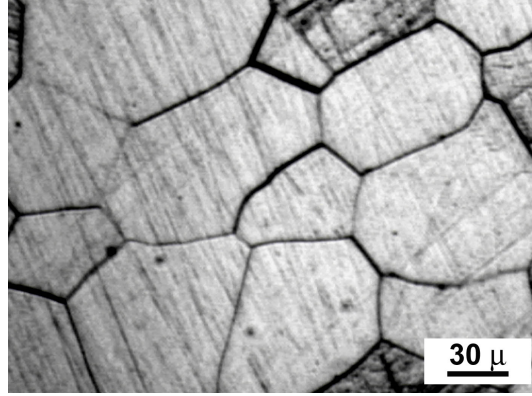


Figura 1.5: Os *grain boundaries* são as linhas que delimitam as regiões do material. Figura retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/Grain_boundary.

Já os esméticos, além do vetor diretor que descreve, na média, a direção das moléculas, também apresentam ordem posicional. Isso pode ser descrito matematicamente pelas superfícies de nível de uma função $\phi(\mathbf{x}) = nd_0$, $n \in \mathbb{Z}$, que modula a densidade

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \rho_1 \cos\left(\frac{2\pi}{d_0}\phi(\mathbf{x})\right), \quad (1.2)$$

onde ρ_0 é a densidade média, ρ_1 é o parâmetro de ordem e d_0 é o espaçamento de equilíbrio entre as camadas. Portanto, na fase esmética temos

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \quad (1.3)$$

Consequentemente,

$$\nabla \times \mathbf{N} = \nabla \left(\frac{1}{\|\nabla\phi\|} \right) \times \nabla\phi. \quad (1.4)$$

Logo, o termo de torção que acompanha K_2 é nulo, já que $\nabla\phi$ está na direção de $\mathbf{N}$. Isso é intuitivo e representa o vínculo geométrico que faz com que as moléculas permaneçam presas na superfície. Do ponto de vista matemático, esse resultado é expresso pelo Teorema de Frobenius [10], o qual afirma que é possível folhear um campo vetorial ortogonalmente se, e somente se,

$$\mathbf{N} \cdot \nabla \times \mathbf{N} = 0.$$

Como já foi dito, a fase esmética também apresenta características de sólido na direção de $\mathbf{N}$ devido à sua organização em camadas. Dessa maneira, no cálculo da energia livre

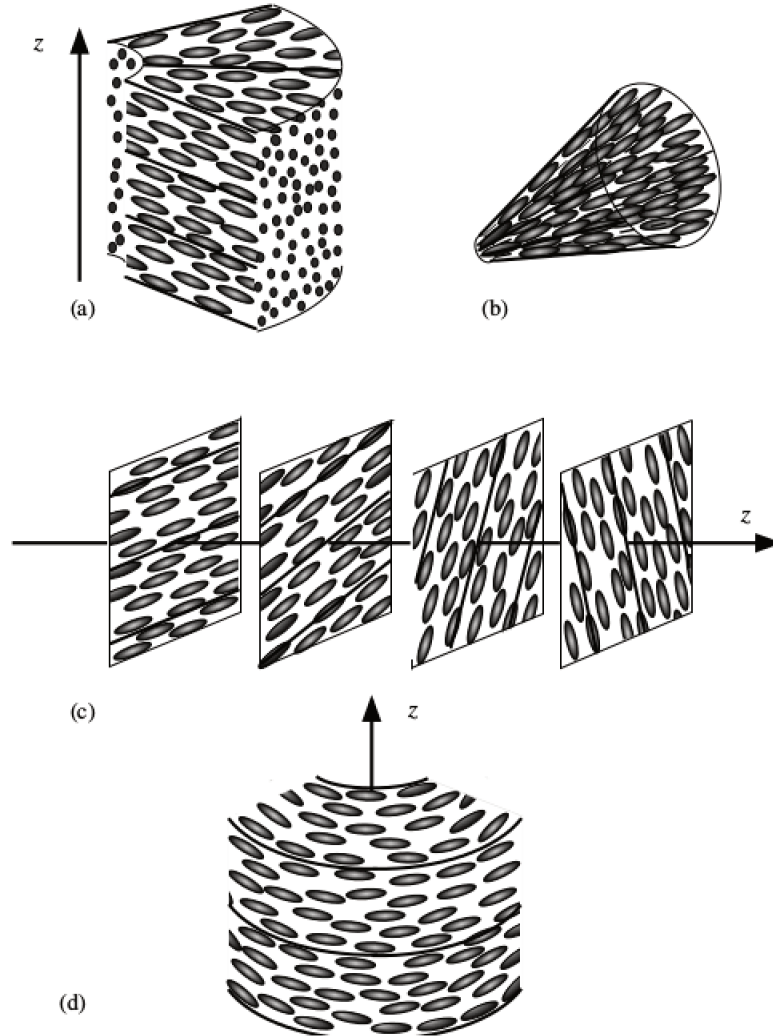


Figura 1.6: Diferentes tipos de deformações dos nemáticos: (a) *splay* em duas dimensões, (b) *splay* em três dimensões, (c) torção e (d) *bend*. Figura retirada de [1].

da fase esmética deve-se adicionar um termo a (1.1) que contabiliza a compressão das camadas esméticas:

$$\mathcal{F}_e = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} [B e^2 + K_1 (\nabla \cdot \mathbf{N})^2 + K_3 (\mathbf{N} \times \nabla \times \mathbf{N})^2], \quad e = \frac{d - d_0}{d_0}, \quad (1.5)$$

onde B é o módulo de Young e d é o espaçamento atual entre as camadas. A rigor,

deveríamos também incluir os termos com divergentes

$$K_{13}\nabla \cdot [(\mathbf{N} \cdot \nabla)\mathbf{N}] - K_{24}\nabla \cdot [\mathbf{N}(\nabla \cdot \mathbf{N}) + \mathbf{N} \times \nabla\mathbf{N}] \quad (1.6)$$

na integral. No entanto, como resultado do Teorema de Gauss, obtemos integrais de superfícies que não influenciam no problema de minimização da energia. Portanto, daqui em diante não faremos mais menção a eles.

O nosso objetivo, então, é encontrar a configuração do estado fundamental de um material esmético bidimensional, cuja altura é muito pequena em relação às demais dimensões (podendo, portanto, ser desprezada), em superfícies curvas. Em particular, também estamos interessados em entender como ocorre a interação entre a curvatura de uma superfície e os defeitos topológicos do material, os quais serão discutidos com mais detalhes no capítulo seguinte.

Capítulo 2

Defeitos topológicos

A presença de impurezas em materiais ordenados faz com que a sua estrutura atômica ou molecular se reorganize a fim de se adaptar à presença dessas partículas (veja a Figura 2.8). Isso leva a singularidades na direção do vetor diretor $\mathbf{N}$ do sistema. A essas singularidades damos o nome de defeitos topológicos.

Matematicamente, a classificação dos defeitos topológicos é realizada com o uso de grupos de homotopia, os quais fazem parte da grande área da matemática conhecida como topologia algébrica, que utiliza a álgebra para estudar problemas de cunho topológico [11].

Dessa forma, antes de discutir a física dos defeitos topológicos em matéria condensada, é preciso introduzir alguns conceitos da teoria de homotopia. Nas Seções 2.1-2.3 farei uma introdução aos conceitos mais importantes dessa teoria. Por fim, na Seção 2.4 aplicarei esses conceitos para estudar defeitos topológicos em cristais líquidos. Para mais detalhes sobre a teoria de homotopia em matéria condensada confira as referências [12–14].

2.1 Grupos fundamentais

Seja $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow X$ uma curva em X tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. A tais curvas damos o nome de laços baseados em x_0 . É possível fornecer ao conjunto destes laços uma estrutura algébrica, da seguinte maneira.

Sejam α e β laços tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos o produto $\alpha\beta$ por:

$$\alpha\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Geometricamente, a curva $\alpha\beta$ corresponde a percorrer a imagem de α e em seguida a de β .

Definimos ainda $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$ para todo $s \in I$, o que corresponde a percorrer o laço α no sentido contrário. Por último, definimos o elemento neutro como $c_x(s) = x$, ou seja, a imagem $c_x(I)$ é um ponto. Essas definições poderiam sugerir que $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = c_x$. No entanto, isso não é verdade. Para de alguma forma obtermos sucesso na construção das operações de grupo, precisamos do conceito de homotopia.

Se existe uma função contínua $h : I \times I \rightarrow X$ tal que:

$$h_0(s) = \alpha(s), \quad h_1(s) = \beta(s), \quad \forall s \in I, \quad (2.1)$$

$$h_t(0) = h_t(1) = x_0, \quad \forall t \in I, \quad (2.2)$$

onde α e β são laços em x_0 , dizemos que existe uma homotopia entre α e β baseada em x_0 , representada por $\alpha \sim \beta$. Nessas condições, α e β são ditas homotópicas e a função h_t é uma homotopia em x_0 . Em outras palavras, dois laços são homotópicos se podem ser deformados continuamente um no outro.

Notavelmente, a relação $\alpha \sim \beta$ é uma relação de equivalência e sua classe de equivalência $[\alpha] = \{\beta | \alpha \sim \beta\}$ é comumente chamada de classe de homotopia de α . De fato, a relação $\sim$ satisfaz as propriedades:

- *Reflexividade*: $\alpha \sim \alpha$. A homotopia pode ser dada por $h_t(s) = \alpha(s)$ para qualquer $t \in I$.

- *Simetria*: Seja $\alpha \sim \beta$ com a homotopia $h_t(s)$ tal que $h_0(s) = \alpha(s)$ e $h_1(s) = \beta(s)$. Então $\beta \sim \alpha$, onde a homotopia é dada por $h_{1-t}(s)$.

- *Transitividade*: Seja $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$. Então $\alpha \sim \gamma$. Se $f_t(s)$ é uma homotopia entre α e β e $g_t(s)$ é uma homotopia entre β e γ , uma homotopia entre α e γ pode ser dada por

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1}(s), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Munido com o conjunto das classes de homotopia dos laços em x , denotado por $\pi_1(X, x)$, e definindo a operação $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$, obtemos o chamado grupo fundamental. O grupo fundamental é um grupo de fato, pois apresenta as seguintes propriedades:

- *Associatividade*: Uma homotopia $f_t(s)$ entre $(\alpha\beta)\gamma$ e $\alpha(\beta\gamma)$ pode ser dada por

$$f_t(s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right), & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4}, \\ \beta(4s-t-1), & \frac{1+t}{4} < s \leq \frac{2+t}{4}, \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), & \frac{2+t}{4} < s \leq 1. \end{cases}$$

Portanto, podemos simplesmente escrever $[\alpha\beta\gamma]$ para denotar $[(\alpha\beta)\gamma]$ ou $[\alpha(\beta\gamma)]$.

- *Elemento neutro*: Definimos a homotopia

$$f_t(s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{1+t}\right), & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ x, & \frac{1+t}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

Obviamente essa é uma homotopia entre αc_x e α . Da mesma forma, uma homotopia entre $c_x \alpha$ e α é dada por

$$f_t(s) = \begin{cases} x, & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}, \\ \alpha\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right), & \frac{1-t}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

Isso mostra que $[\alpha][c_x] = [c_x][\alpha] = [\alpha]$.

- *Inversa*: Definimos uma homotopia $f_t(s)$ por

$$h_t(s) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & \frac{1}{2} < s \leq 1. \end{cases}$$

Naturalmente, $f_0(s) = \alpha\alpha^{-1}$ e $f_1(s) = c_x$ e, portanto,

$$[\alpha\alpha^{-1}] = [\alpha][\alpha^{-1}] = [c_x].$$

Isso mostra que $[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$.

Resumidamente, o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo formado pelas classes de homotopia em x_0 , onde $[c_x]$ é o elemento neutro e, dado α , $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ é seu elemento inverso.

2.2 Propriedades do grupo fundamental

Nessa seção, apresentarei algumas das propriedades mais importantes do grupo fundamental. Vale a pena notar que o grupo fundamental foi construído em condições bastante gerais. No entanto, se admitirmos espaços topológicos mais restritos (mas ainda gerais o suficiente para que tenham grande aplicabilidade) poderemos provar propriedades interessantes.

Nesse sentido, consideremos X um espaço topológico conexo por caminhos (isto é, um espaço em que quaisquer dois pontos $x_0, x_1 \in X$ podem ser ligados por uma curva contínua α tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$). Então, pode-se mostrar que sempre existe um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. A demonstração dessa afirmação pode ser encontrada em qualquer livro sobre homotopia. Com esse resultado, podemos omitir o ponto base da homotopia em espaços conexos por caminho e escrever $\pi_1(X)$.

A homotopia de laços pode ser facilmente generalizada para funções contínuas. Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Se existe uma outra função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, f é dita homotópica a g e denotamos $f \sim g$. A função F é chamada de homotopia entre f e g .

Dois espaços topológicos X e Y são do mesmo tipo de homotopia, denotado por $X \simeq Y$, se existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. A função f é chamada de equivalência homotópica e g é a sua inversa.

Dessa forma, é possível enunciar uma das propriedades mais importantes dessa seção: se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica entre X e Y , $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(Y, f(x_0))$. Como corolário temos que o grupo fundamental é invariante sob homeomorfismos, ou seja, é um invariante topológico.

Nesse sentido, grupos fundamentais classificam espaços topológicos de maneira menos restrita do que homeomorfismos. No entanto, é preciso enfatizar que os grupos de homotopia são mais comumente usados em física para classificar mapas e configurações de campo, não espaços topológicos.

2.3 Exemplos de grupos fundamentais

Embora não exista um procedimento sistemático para calcular o grupo fundamental, é possível obtê-lo em alguns casos específicos a partir de considerações simples.

No caso da circunferência S^1 temos que o seu grupo fundamental é isomorfo aos inteiros; $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Embora a demonstração dessa afirmação não seja exatamente óbvia (veja [11]), o seu conteúdo pode ser facilmente compreendido. Suponha que enrolamos um cilindro com um fio elástico. Se o fio circula o cilindro n vezes, então essa configuração não pode ser continuamente deformada em outra que circula o cilindro $m \neq n$ vezes. Além disso, se o fio circula o cilindro n vezes e depois m vezes, ele circula o cilindro $n + m$ vezes no total.

Outro espaço topológico interessante é a reta projetiva real $\mathbb{R}P^1$ que é o espaço topológico obtido a partir de identificação dos pontos de uma circunferência com suas respectivas antípodas. Esse espaço pode ser pensado como o semicírculo em que os extremos são identificados. Por essa razão, a reta projetiva real $\mathbb{R}P^1$ é topologicamente equivalente à

circunferência S^1 . Assim sendo, o seu grupo fundamental também é isomorfo aos inteiros:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Além de $\mathbb{R}P^1$, existem outros espaços definidos de maneira análoga mas de dimensões superiores. A esses espaços damos o nome de espaço projetivo real e denotamos $\mathbb{R}P^n$. Dessa maneira, $\mathbb{R}P^n$ é o resultado de S^n com os pontos p e $-p$ identificados, $p \in S^n$. No entanto, nesse caso $\mathbb{R}P^n$ não é topologicamente equivalente a S^n . Aliás, o seu grupo fundamental é dado por:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2, \quad n > 1,$$

em que $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ representa o espaço quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de equivalência $x \equiv y \pmod{2}$, ou seja, $\mathbb{Z}_2$ é o conjunto das classes de equivalência

$$\bar{a} = [a] = \{x | x \equiv a \pmod{2}\}.$$

Dessa forma, a operação $x \equiv y \pmod{2}$ divide os inteiros em duas classes: a dos números pares e a dos números ímpares.

Uma classe importante de espaços topológicos é aquela formada pelo produto cartesiano de outros espaços. Nesse casos, temos que se X e Y são espaços topológicos, então

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0), \quad (2.3)$$

onde $\oplus$ representa a soma direta. Para provarmos essa afirmação, definimos as projeções $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$. Se α é um laço em $X \times Y$ no ponto (x_0, y_0) , então $\alpha_1 = p_1(\alpha)$ é um laço em X no ponto x_0 e $\alpha_2 = p_2(\alpha)$ é um laço em Y no ponto y_0 . Reciprocamente, qualquer par de laços α_1 de X em x_0 e α_2 de Y em y_0 determina um único laço $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ de $X \times Y$ em (x_0, y_0) . Definamos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \\ \phi([\alpha]) &\mapsto \phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2]). \end{aligned}$$

Por construção ϕ admite inversa, portanto ϕ é o isomorfismo procurado.

Como aplicação desse resultado, temos que o grupo fundamental do toro $T^2 = S^1 \times S^1$ é:

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Da mesma maneira o cilindro $X = S^1 \times \mathbb{R}$ apresenta o grupo fundamental

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \{e\} \cong \mathbb{Z}.$$

2.4 Defeitos topológicos em cristais líquidos

Diferentemente da física de partículas, que tenta entender a matéria em busca dos seus constituintes fundamentais, a física da matéria condensada busca explicá-la através do comportamento emergente da interação de zilhões de elétrons, átomos e moléculas. Para isso, é preciso olhar para as variáveis e graus de liberdade mais importantes. Essas variáveis são frequentemente reunidas no *parâmetro de ordem*, que é um campo (escalar, vetorial ou tensorial) $\psi : X \rightarrow M$ que mapeia pontos do espaço físico X no espaço abstrato M , denominado espaço do parâmetro de ordem. Em outras palavras, M é definido como o espaço de variação do parâmetro ψ que ocorre sem nenhuma alteração na energia do sistema. É por esse motivo que esse espaço é também chamado de espaço de degenerescência já que todos os pontos nesse espaço possuem a mesma energia.

Para elucidar melhor essa idéia, apresento alguns exemplos a seguir. O parâmetro de ordem de um material ferromagnético bidimensional, por exemplo, é dado pelo campo vetorial de magnitude constante que descreve a direção dos spins no material. O espaço de degenerescência é então uma circunferência em que todo ponto corresponde a uma direção do campo vetorial. Se $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são vetores ortonormais no plano, o parâmetro de ordem pode ser dado por:

$$f(r) = \hat{u} \cos \phi(r) + \hat{v} \sin \phi(r).$$

O mesmo espaço de degenerescência descreve o hélio-4 superfluido, em que o parâmetro de ordem é um campo escalar complexo de magnitude fixa ψ_0 mas de fase $\phi(r)$ arbitrária:

$$\psi(r) = \psi_0 \exp(i\phi(r)).$$

Nesse caso o espaço de degenerescência pode ser pensado como uma circunferência de raio unitário no plano complexo. Já no caso de nemáticos bidimensionais, o parâmetro de ordem é o vetor diretor $\mathbf{N}$ introduzido anteriormente, que toma valores no espaço S^1 . No entanto, o vetor diretor possui simetria de inversão; isso quer dizer que $\mathbf{N}$ e $-\mathbf{N}$ representam o mesmo estado físico. Portanto, o espaço topológico que descreve corretamente os estados da fase nemática é a reta projetiva $\mathbb{R}P^1$, que é o espaço obtido pela identificação dos pontos da circunferência $p \in S^1$ com as suas respectivas antípodas (Figura 2.1).

Quando o espaço M é degenerado, ou seja, formado por apenas um ponto, dizemos que ψ (e portanto o próprio material) é homogêneo. No entanto, o campo $\psi(\mathbf{r})$ em geral varia ponto a ponto, podendo ainda existir regiões do material em que ψ não está definido. Essas regiões singulares são os defeitos. Se esse defeito puder ser eliminado através de transformações contínuas no parâmetro de ordem ψ , de modo que a configuração do campo

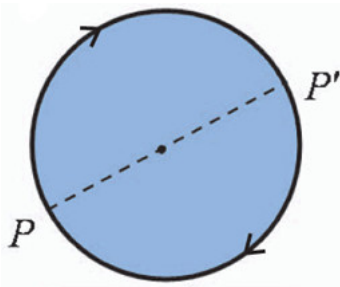


Figura 2.1: Representação da variedade $\mathbb{R}P^1$ em que os pontos P e P' são identificados. Figura retirada de http://ieeexplore.ieee.org/ieee_pilot/articles/06/ttg2009061457/article.html.

ψ seja transformada em uma configuração localmente homogênea, dizemos que o defeito é topologicamente instável. Por outro lado, se o defeito não puder ser eliminado por transformações contínuas no parâmetro de ordem ψ , dizemos que o defeito é topologicamente estável, ou simplesmente o chamamos de *defeito topológico*. Os defeitos topológicos podem ser pontuais (sem dimensão), lineares (unidimensionais) ou superficiais (bidimensionais). Além disso, quando os defeitos topológicos são causados por singularidades na posição das moléculas, dizemos que eles são deslocamentos (do inglês “dislocations”); quando são causados por singularidades na direção das moléculas, eles são chamados de desclinações (do inglês “disclinations”).

Suponhamos que o espaço X esteja preenchido com o cristal líquido bidimensional a ser estudado. Suponhamos também que exista um defeito topológico nesse meio. Por simplicidade, digamos que esse defeito seja puntual. Tracemos um laço α em torno do defeito em X (Figura 2.2). Através do parâmetro de ordem ψ , o laço α é mapeado em um laço $\beta = \psi \circ \alpha$ em M . É a partir dos laços em M , mais precisamente do grupo fundamental de M , que investigamos a topologia de M e, por conseguinte, classificamos os defeitos em X . Se M apresenta buracos ou restrições na deformação de um laço qualquer β , então X possui defeitos. Em outras palavras, o espaço X poderá apresentar defeitos topológicos sempre que existir uma classe de homotopia não-trivial em M . Por outro lado, se todo laço for homeotópico ao laço constante c_x , então o cristal líquido em X pode ser deformado continuamente em uma configuração que não apresente singularidades em ψ . Assim, para cada classe de homotopia não-trivial de M associa-se um defeito topológico. Dessa forma, o grupo fundamental fornece informação suficiente para uma classificação do ponto de vista da topologia para os defeitos em matéria condensada.

Consideremos como exemplo defeitos pontuais em um material nemático bidimensional. Como o seu espaço de degenerescência é $M = \mathbb{R}P^1$, o seu grupo fundamental é

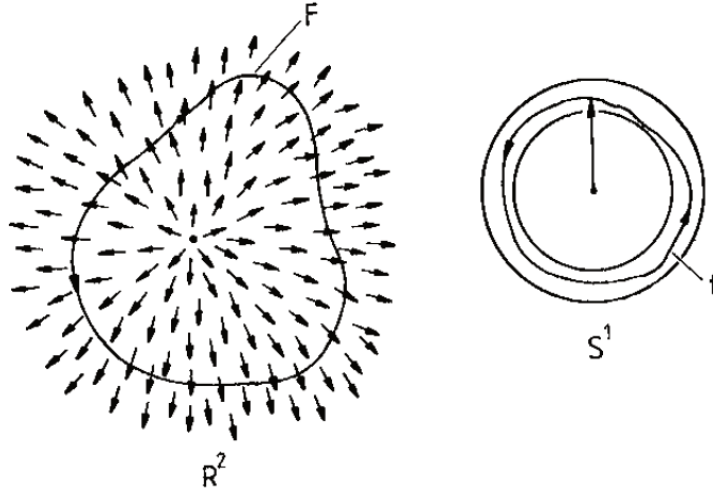


Figura 2.2: Laço em torno de um defeito puntual em um cristal líquido (esquerda) e o respectivo laço mapeado no espaço do parâmetro de ordem (direita). As setas são apenas para fins ilustrativos, pois as moléculas de um cristal líquido não diferenciam suas extremidades. Figura retirada de [13].

$\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ (veja a Seção 2.3). Portanto podemos associar um número inteiro a cada defeito topológico possível na fase nemática em duas dimensões.

Por outro lado, se considerarmos defeitos de linha em um material nemático tridimensional, essa situação muda radicalmente. O espaço de degenerescência passa a ser $\mathbb{R}P^2$, que é o análogo tridimensional de $\mathbb{R}P^1$ (Figura 2.3). O seu grupo fundamental é $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ e, portanto, só existem duas configurações de defeitos possíveis: uma que é possível ser deformada continuamente em uma configuração sem defeitos e outra em que isso não é possível. Portanto, somente a última configuração representa um defeito topológico de fato.

Isso mostra que a classificação dos defeitos topológicos é dependente da dimensionalidade do sistema em questão. De fato, alterar a dimensão do sistema físico também altera a dimensão do espaço de degenerescência M , o que pode levar a uma diferença muito grande em sua topologia. Basta considerar, por exemplo, as topologias de S^1 e S^2 . Faça um laço em volta de S^1 e tente reduzi-lo a um ponto (Figura 2.4). Repita o experimento para S^2 . A dimensão extra em S^2 permite reduzir todo laço a um ponto.

Já no caso de interesse, ou seja, esméticos bidimensionais sobre uma superfície M , o parâmetro de ordem é composto tanto pelo vetor diretor $\mathbf{N} : M \rightarrow \mathbb{R}P^1$ quanto pela densidade $\rho(r) : M \rightarrow S^1$. Obter o seu espaço de degenerescência envolve um procedimento um pouco delicado e complicado, por isso não apresentarei as suas demonstrações que po-

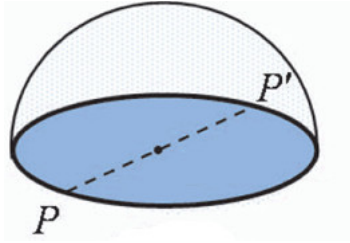


Figura 2.3: Representação da variedade $\mathbb{R}P^2$ em que os pontos P e P' são identificados. Figura retirada de http://ieeexplore.ieee.org/ieee_pilot/articles/06/ttg2009061457/article.html.

derão, no entanto, ser encontradas com mais detalhes em [15, 16]. Utilizarei a regra geral na qual o espaço de degenerescência de um meio ordenado é dado pelo grupo quociente entre o grupo de simetria total do funcional de energia G (grupo de estados desordenados) pelo seu subgrupo H (grupo de estados ordenados), cujas transformações deixam o parâmetro de ordem invariante. Simbolicamente, o espaço de degenerescência é dado pelo grupo G/H . Para o grupo G , podemos escolher o grupo euclidiano E composto por todas translações e rotações do plano. Observemos que os esméticos apresentam simetria contínua ao longo das camadas e simetria discreta na direção do vetor diretor $\mathbf{N}$. Além disso, devido à simetria de suas moléculas ($\mathbf{N} \equiv -\mathbf{N}$), eles também possuem simetria de rotação de ordem 2 (grupo de simetria C_2), ou seja, são invariantes por rotações de π em torno do eixo perpendicular ao plano que os contém. Portanto, o grupo de simetria dos estados ordenados é dado por:

$$H = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes C_2,$$

onde $\times$ e $\rtimes$ denotam os produtos direto e semi-direto, respectivamente. Devido ao isomorfismo entre C_2 e $\mathbb{Z}_2$, podemos escrever

$$H = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

Observe que efetuar uma rotação de π seguida por uma translação por δ é equivalente a uma translação por $-\delta$. Isso faz com que o espaço de degenerescência apresente um formato torcido. De fato, o grupo E/H dos esméticos é isomorfo ao espaço topológico conhecido por garrafa de Klein (veja a Figura 2.5), cujo grupo fundamental é dado por

$$\pi_1(E/H) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Portanto, os defeitos topológicos nos esméticos são descritos pela dupla ordenada de números inteiros (b, k) , onde b caracteriza defeitos na orientação das moléculas (desclinação) e k na posição das moléculas (deslocação).

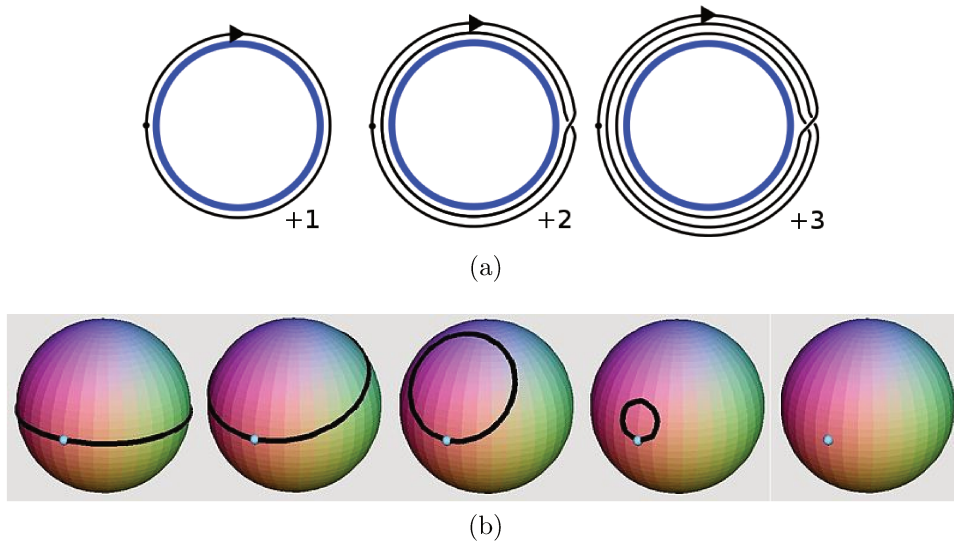


Figura 2.4: Diferença na topologia de (a) S^1 e (b) S^2 . Figuras retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres.

Esse exemplo dos esméticos mostra que a aplicação da teoria da homotopia para a classificação de defeitos topológicos em materiais com ordem translacional apresenta limitações. Parte do problema é que essa teoria prediz a existência de defeitos que não estão presentes no sistema físico. De fato, foi demonstrado em [17] que esméticos não podem apresentar desclinações com carga b maior que $+1$ (veja a próxima seção) e, ainda assim, cargas $b > +1$ são previstas pela teoria da homotopia.

2.4.1 Cargas topológicas

Nos casos em que o grupo fundamental é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, os defeitos compartilham algumas semelhanças com cargas elétricas, já que estas são formadas por múltiplos inteiros da carga fundamental ($e \approx 1,6 \times 10^{-19}C$). Esses defeitos podem ser vórtices em supercondutores, deslocamentos em cristais ou defeitos pontuais em materiais ferromagnéticos isotrópicos, nemáticos e esméticos. Analogamente às cargas elétricas, os defeitos possuem *cargas topológicas*. Matematicamente, a carga topológica é o grau de um mapa ou o índice de Poincaré-Hopf, que é o número de voltas que o parâmetro de ordem $\psi(r)$ executa quando r percorre um circuito fechado em torno do defeito. Desta maneira, as cargas podem ser expressas como funcionais do parâmetro de ordem e, por isso, são denominadas “invariantes topológicos analíticos”.

Como vimos, o parâmetro de ordem da fase nemática pode ser descrito pelo vetor

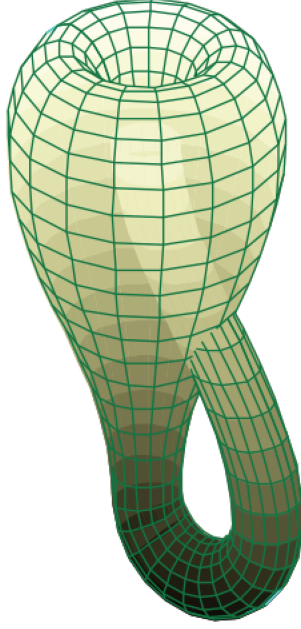


Figura 2.5: Uma representação da garrafa de Klein imersa em $\mathbb{R}^3$.

diretor $\mathbf{N}$. A carga topológica é então definida como [18, 19]:

$$m = \frac{1}{2\pi} \oint (\mathbf{N}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\phi}{ds} ds = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi},$$

onde $\mathbf{V}$ é um campo vetorial unitário qualquer, ϕ é o ângulo entre $\mathbf{N}$ e $\mathbf{V}$ e γ é uma curva definida no intervalo $a \leq s \leq b$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Como em um nemático as moléculas são simétricas pela inversão $\mathbf{N} \mapsto -\mathbf{N}$, os valores possíveis para esta carga topológica são semi-inteiros (veja a Figura 2.6):

$$m \in \frac{\mathbb{Z}}{2} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots\}.$$

No entanto, o conjunto $\mathbb{Z}$ é isomorfo aos semi-inteiros $\frac{\mathbb{Z}}{2}$, pois para todo $n \in \mathbb{Z}$ podemos associar $f(n) = \frac{n}{2}$ cuja inversa é $f^{-1}(n) = 2n$. Assim, também existe um isomorfismo entre o grupo fundamental dos nemáticos bidimensionais $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$, que classifica os defeitos, e os semi-inteiros $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ que rotulam as cargas topológicas. Simbolicamente escrevemos

$$\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \frac{\mathbb{Z}}{2}.$$

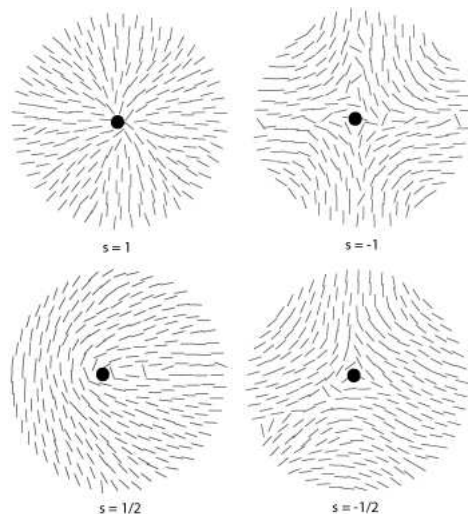


Figura 2.6: Configuração das moléculas dos nemáticos na presença de defeitos topológicos de diferentes cargas s . Figura retirada de http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/liquid_crystals/printall.php.

Isso mostra que podemos associar a cada defeito topológico (ou seja, a cada classe de homotopia) uma carga topológica e, portanto, podemos classificá-los através dessas cargas. Dessa forma, defeitos de cargas diferentes não podem ser transformados um no outro de maneira contínua. Além disso, já que o grupo $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos semi-inteiros, dois defeitos de cargas m_1 e m_2 podem se somar produzindo um único defeito de carga $m = m_1 + m_2$. Analogamente, defeitos de cargas opostas podem se somar aniquilando um ao outro.

Isso também ocorre, em parte, nos materiais esméticos, pois estes herdam o vetor diretor da fase nemática. No entanto, em outros materiais, como os ferromagnéticos por exemplo, que não apresentam essa simetria de inversão (spins em sentidos contrários possuem estados físicos diferentes), apenas valores inteiros para a carga topológica m são permitidos, pois configurações de carga fracionária custariam energia infinita devido à descontinuidade no campo de spins (veja a Figura 2.7).

Experimentalmente, esses defeitos topológicos podem ser induzidos em um cristal líquido através da adição de partículas coloidais, que são partículas que apresentam pelo menos uma de suas dimensões dentro do intervalo 1nm a $1\mu\text{m}$, ao material. Na presença de uma partícula coloidal, as moléculas do material podem se reorganizar paralelamente (alinhamento homogêneo) ou ortogonalmente (alinhamento homeotrópico) a sua superfície, dependendo da natureza dessa partícula e do próprio cristal líquido, fazendo com que

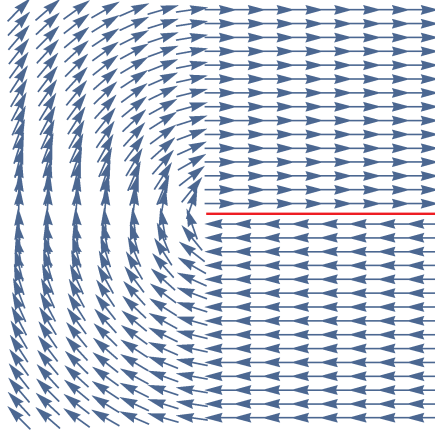


Figura 2.7: Configuração de spins (representados em azul) se houvesse um defeito puntual de carga $+\frac{1}{2}$ na origem. A descontinuidade (representada em vermelho) se estende ao longo de todo o eixo x positivo. Para essa configuração existir, seria necessária uma energia infinita.

apareçam defeitos na estrutura do material [20]. Um defeito de carga $+1$, por exemplo, pode ser obtido colocando-se uma partícula suspensa em um material cujo alinhamento é homeotrópico (veja a Figura 2.8).

Por fim, agora mostrarei que a carga topológica total m é conservada. Para isso, precisarei do conceito de característica de Euler. A característica de Euler χ é um invariante topológico que descreve a forma de um espaço topológico. Para um poliedro, a característica de Euler é dada por

$$\chi = V - A + F,$$

onde V , A e F representam o número de vértices, arestas e faces, respectivamente. Para um poliedro simplesmente conexo $\chi = 2$. Para superfícies (ou variedades) mais gerais, a característica de Euler pode ser obtida através da triângulação da superfície, ou seja, da divisão da superfície em triângulos (cujas arestas são geodésicas). Desse modo, basta contar o número de vértices, arestas e faces de todos os triângulos para calcular a característica de Euler (Figura 2.9). Felizmente, existem teoremas na literatura que facilitam esse cálculo. Um deles afirma que a característica de Euler de uma superfície compacta é dada por:

$$\chi(g) = 2(1 - g),$$

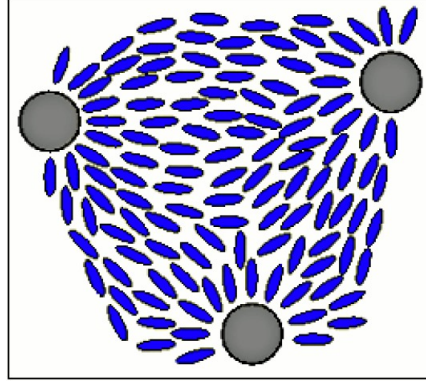


Figura 2.8: Colóides (círculos em cinza) em um material nemático (moléculas em azul) produzindo defeitos de carga $+1$. Figura retirada de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/investiga.php?id=8>.

onde g é o gênero da superfície, ou seja, o número de “buracos” nela presentes. Como exemplo, temos $\chi = 2$ para a esfera, $\chi = 0$ para o toro de gênero $g = 1$ e $\chi = -2$ para o toro de gênero $g = 2$; veja a Figura 2.10.

Com isso, podemos enunciar o Teorema de Poincaré-Hopf que afirma que a somatória dos índices de cada singularidade de um campo vetorial sobre uma superfície compacta S de gênero g é dado por [14, 22]

$$\sum_i m_i = \chi(S). \quad (2.5)$$

No contexto de defeitos topológicos, isso equivale a dizer que a somatória das cargas topológicas é igual a característica de Euler do substrato S . Esse é um resultado notável e que merece atenção. Enquanto que a origem da carga topológica m é puramente analítica, o conceito da característica de Euler $\chi(S)$ é puramente topológico. Elegantemente, o Teorema de Poincaré-Hopf estabelece uma conexão profunda entre áreas da matemática que não são relacionadas à primeira vista. Como resultado temos que a carga topológica total de um sistema depende somente da topologia do substrato em que esse sistema se encontra. Portanto, dado um substrato, a carga topológica total sobre ele é conservada. Isso implica que espaços com diferentes cargas topológicas totais não podem ser continuamente transformados um no outro.

2.4.2 Defeitos no laboratório

Vimos no Capítulo 1 que uma das formas de analisar a configuração de cristais líquidos é através das texturas schlieren. Dessa forma, a partir dos padrões de manchas claras

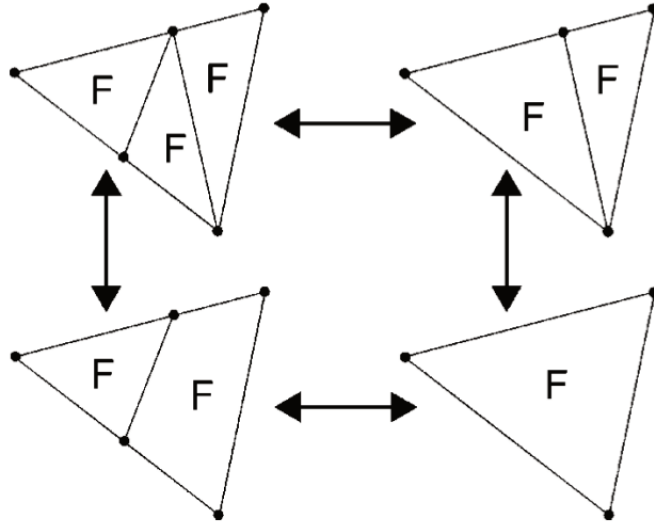


Figura 2.9: Triângulação para o cálculo da característica de Euler. Veja que o valor de χ é o mesmo independentemente da quantidade de triângulos usados. Figura retirada de [21].

e escuras, é possível determinar a existência de defeitos topológicos no material e a sua respectiva carga topológica. A Figura 2.11 mostra como seria a textura schlieren na presença de defeitos de diferentes cargas para cristais líquidos no plano. Observe que nos exemplos da Figura 2.11 as texturas são formadas por terminações escuras de número par sobre o defeito, sendo quatro terminações escuras para os defeitos de carga ± 1 e duas terminações para os defeitos de carga $\pm \frac{1}{2}$. Essa observação é, na realidade, um resultado geral que se estende para defeitos de carga qualquer. Portanto, a existência de terminações escuras de número par sobre um mesmo ponto em uma textura schlieren é a assinatura da presença de defeitos topológicos no material sob investigação.

Outra coisa que também devemos notar na Figura 2.11 é que defeitos cuja a carga tem o mesmo módulo, porém sinais diferentes, apresentam a mesma textura schlieren. Essa degenerescência dificulta a determinação do sinal da carga do defeito a partir dessas informações. Para contornar esse problema, basta girar os polarizadores mantendo o ângulo entre seus eixos constante e igual a 90° . Dessa forma, se as terminações escuras girarem no mesmo sentido que os polarizadores a carga será positiva e se girarem no sentido oposto a carga será negativa.

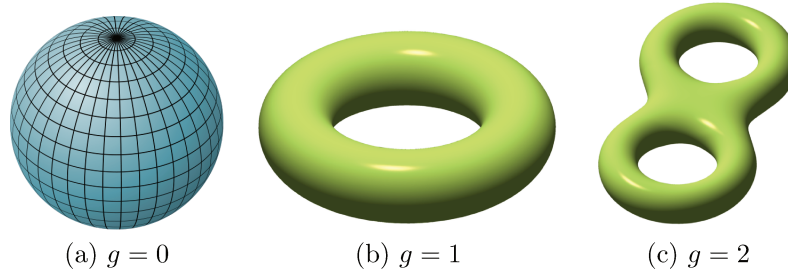


Figura 2.10: Exemplos de superfícies com diferentes gêneros. Figura retirada de [http://en.wikipedia.org/wiki/Genus_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Genus_(mathematics)).

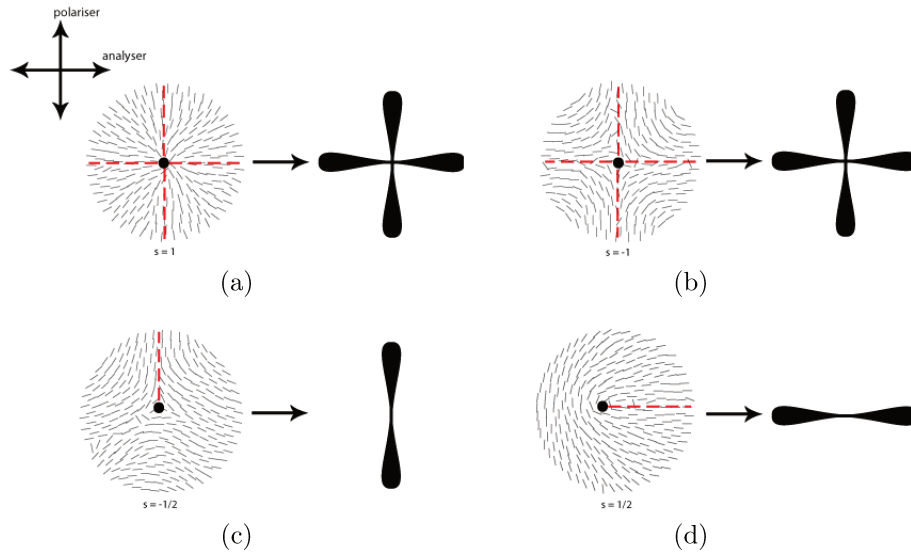


Figura 2.11: Textura schlieren de defeitos topológicos de diferentes cargas s . Figura retirada de http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/liquid_crystals/printall.php.

Capítulo 3

Um pouco sobre geometria

Nesse capítulo, introduzirei algumas ferramentas que serão necessárias para o estudo das configurações de esméticos em substratos curvos, os quais serão estudados no Capítulo 4. Essas ferramentas são partes de uma vasta e elegante área da matemática: a geometria diferencial. Como o meu objetivo aqui não é fazer uma análise completa de toda a sua extensão, tratarei somente dos tópicos que serão de importância adiante. O leitor interessado pode consultar as demonstrações e outros detalhes em [18, 19, 21, 23–25] ou em qualquer livro de introdução à geometria diferencial.

3.1 Conceitos básicos

Quando analisamos amostras de cristais líquidos, estes necessariamente estão vinculados ao substrato no qual se encontram e, portanto, herdam destes muitas características. O processo de formação de defeitos e *grain boundaries*, por exemplo, é completamente dependente da curvatura do substrato. Seja o substrato curvo ou plano, matematicamente ele pode ser descrito por uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Desta forma, é natural começarmos definindo o que é uma superfície.

Uma superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (Figura 3.1), onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que X é diferenciável ($X \in C^\infty$). Além disso, para que o plano tangente à superfície possa existir é preciso que para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, seja injetora. Em outras palavras, um vetor tangente em U é levado em um único vetor tangente de X . Isso proíbe que em um mesmo ponto de aplicação existam diferentes vetores tangentes na mesma direção e garante que a superfície X não apresente bicos. Superfícies com essa propriedade são chamadas de superfícies regulares. Nesse trabalho só serão consideradas superfícies regulares e, por esse

motivo, sempre que for mencionado “superfície” leia-se “superfície regular.”

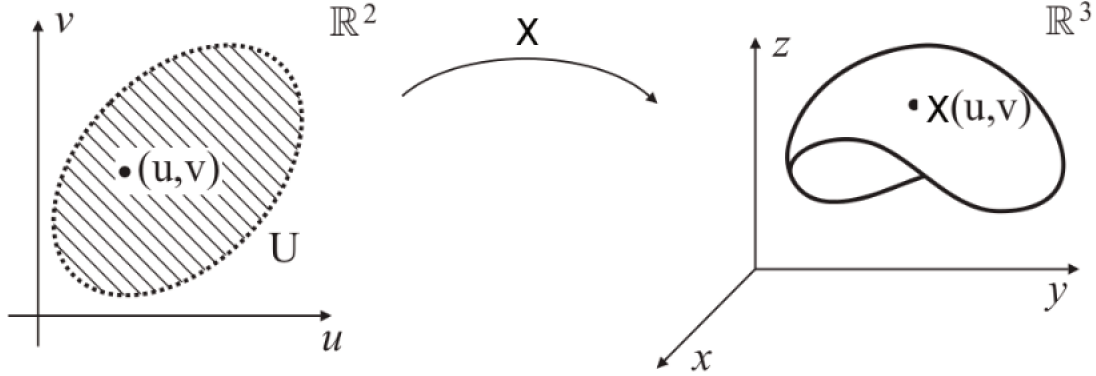


Figura 3.1: Superfície parametrizada.

Esméticos bidimensionais são representados por curvas sobre o substrato (superfície). Para entendermos melhor o significado preciso dessa última sentença, devemos ter em mente o conceito de curvas sobre uma superfície. Uma curva α da superfície X é dada por

$$t \mapsto \alpha(t) = X(u(t), v(t)), \quad (3.1)$$

ou seja, é uma curva obtida pela parametrização dos parâmetros u e v da superfície por um mesmo parâmetro t . Dessa forma, o traço de α está contido sobre a superfície X (Figura 3.2). A curva α é chamada regular se, para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$, o vetor tangente, definido por $\mathbf{t} = \alpha'(t)$, for diferente de zero, ou seja,

$$\mathbf{t}(t) = \alpha'(t) \neq 0.$$

Nesse trabalho só serão consideradas curvas regulares. Como exemplo, as curvas $u_0 \mapsto X(u_0, v)$ e $v_0 \mapsto X(u, v_0)$ obtidas ao fixar um dos parâmetros e variar o outro são, obviamente, curvas regulares da superfície X e são denominadas curvas coordenadas.

Fisicamente, é razoável pensar que as propriedades intrínsecas de uma curva não dependem da maneira como a descrevemos. De fato, pode-se mostrar que a geometria de uma curva não depende de sua parametrização. No entanto, a escolha de uma parametrização adequada pode simplificar significativamente os cálculos. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sempre pode ser parametrizada pelo seu comprimento de arco s :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0.$$

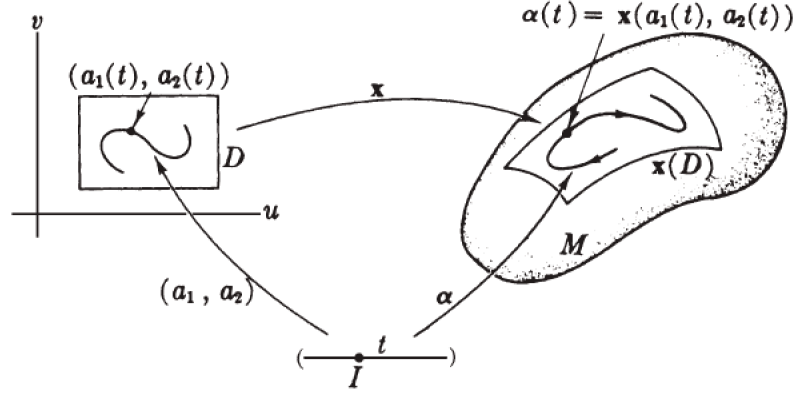


Figura 3.2: Curva da superfície. Figura retirada de [18].

Em outras palavras, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é tal que

$$\|\alpha'(s)\| = 1,$$

já que $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\alpha}{dt}\|$. O uso da parametrização pelo comprimento de arco leva a grandes simplificações na geometria de curvas, conforme veremos ao longo deste capítulo. Por isso, de agora em diante assumirei, sem perda de generalidade, que toda curva está parametrizada pelo comprimento de arco, salvo menção contrária.

A curvatura de uma curva α é definida como

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|. \quad (3.2)$$

Ela mede, de certa forma, o quanto uma curva se diferencia localmente de uma reta, ou seja, o quanto uma curva se curva. O inverso da curvatura $r(s) = \frac{1}{k(s)}$ é chamado de raio de curvatura (Figura 3.3) e ao círculo tangente à curva no ponto $P = \alpha(s)$ e de raio $r(s)$ damos o nome de círculo osculador.

Observe que, como α é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1.$$

Derivando essa equação em relação ao parâmetro s , obtemos que

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Portanto, podemos definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$, ou seja, normal à curva α , para $k(s) \neq 0$, da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}. \quad (3.3)$$

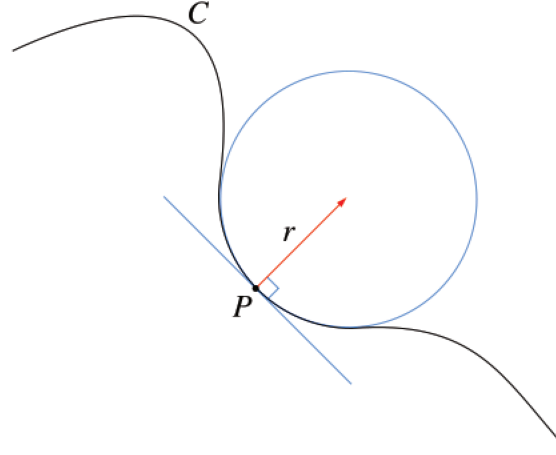


Figura 3.3: Círculo osculador de raio r no ponto P da curva C . Figura retirada de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Curvatura>.

Esse vetor é denominado vetor normal à curva em s . Dessa forma, os vetores tangente e normal, denotados respectivamente por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$, são ortonormais e

$$\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s). \quad (3.4)$$

Essa equação é uma das fórmulas fundamentais da teoria de curvas e pertence às conhecidas fórmulas de Frenet.

Já que as curvas coordenadas são curvas da superfície, as derivadas parciais $X_u(p)$ e $X_v(p)$ (também denotadas como $\partial_u(p)$ e $\partial_v(p)$, respectivamente) são vetores tangentes à superfície X em p . Além disso, o conjunto de vetores $\{X_u(p), X_v(p)\}$ forma uma base vetorial para o espaço tangente T_pX , que é o conjunto de todos os vetores tangentes à superfície X em p (Figura 3.4). Veremos a seguir que esses vetores detêm toda a informação acerca das medidas sobre a superfície X , como o comprimento de uma curva e a área de uma região.

O tensor métrico, ou métrica, é a aplicação $g_p : T_pX \times T_pX \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g_p(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle_p, \quad (3.5)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ representa o produto interno euclidiano no ponto p . Adotando a notação de Einstein, em que índices repetidos aparecendo em um mesmo termo implicam na somatória desse termo ao longo de todo o domínio do índice (podendo, portanto, omitir o sinal de

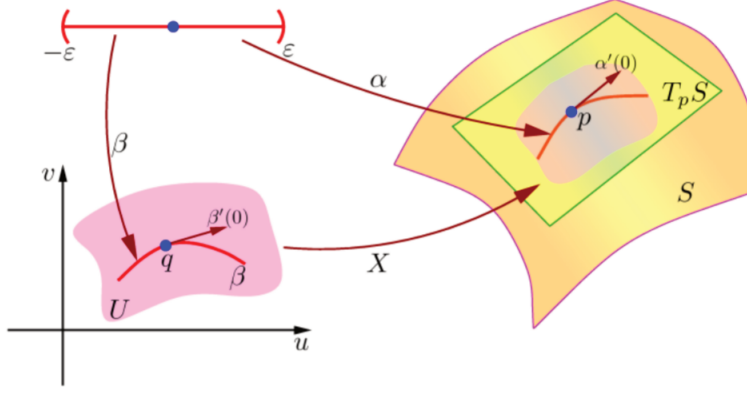


Figura 3.4: Ilustração do espaço tangente $T_p S$ no ponto p . Figura retirada de http://www.professores.uff.br/katia_frensel/.

somatória), escrevemos os vetores tangentes em componentes:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1^i \partial_i, \\ v_2 &= v_2^j \partial_j, \end{aligned}$$

com $i, j = 1, 2$. Assim, decorre da propriedade linear do produto interno que:

$$g_p(v_1, v_2) = v_1^i(p) v_2^j(p) g_{ij}(p), \quad (3.6)$$

onde

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p \quad (3.7)$$

são as componentes do tensor métrico. Além disso, a métrica admite inversa e suas componentes são denotadas por g^{ij} :

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k,$$

onde δ_i^k é a delta de Kronecker. Como a Equação (3.6) vale para todo p , podemos abreviá-la escrevendo:

$$g(v_1, v_2) = v_1^i v_2^j g_{ij}. \quad (3.8)$$

Se $\alpha(t) = X(u^1(t), u^2(t))$ é uma curva sobre a superfície X , a taxa de variação do com-

primento de arco ao longo dessa curva é

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \|\alpha'(t)\| \\ &= \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} \\ &= \sqrt{\frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} g_{ij}}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a expressão formal

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (3.9)$$

que é usada para medir distâncias sobre a superfície X . Além disso, vemos que o comprimento L de uma curva, ou de um segmento de uma curva, definida no intervalo $[a, b]$ não depende da maneira como essa curva é parametrizada. De fato, se $\tau = h(t)$ é uma mudança de parâmetro da curva $\alpha(\tau)$, cuja reparametrização é

$$\beta(t) = \alpha \circ h(t),$$

então

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)| dt \\ &= \int_{h(a)}^{h(b)} \|\alpha'(\tau)\| d\tau.\end{aligned}$$

A área de uma superfície, ou de uma região da superfície, é outra quantidade numérica que deve depender somente da própria superfície e não da maneira como ela é parametrizada. De fato, a área A de uma superfície X definida no domínio $U \subset \mathbb{R}^2$ é dada

por:

$$\begin{aligned}
A &= \int_U \|X_u \times X_v\| \, du \, dv \\
&= \int_U \sqrt{(X_u \times X_v)^2} \, du \, dv \\
&= \int_U \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \, du \, dv \\
&= \int_U \sqrt{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}g_{vu}} \, du \, dv \\
&= \int_U \sqrt{\det(g(\alpha'(t), \alpha'(t)))} \, du \, dv,
\end{aligned}$$

onde $\det(g)$ é o determinante do tensor métrico. Como $\det(g)$ é um invariante algébrico, segue da regra de mudança de variáveis em integrais múltiplas que a área A da superfície X não depende da sua parametrização.

3.2 Derivada covariante

A derivada covariante é parte essencial de toda a geometria. Muitas das noções importantes, como a da curvatura de uma superfície que veremos a seguir, dependem em última instância desse conceito.

Qualquer definição de derivada deve satisfazer a propriedade de linearidade e a regra de Leibnitz (regra do produto). Introduziremos a derivada covariante como um conceito primitivo satisfazendo essas propriedades. Se $\Gamma^\infty(TM)$ é o conjunto de todos os campos vetoriais suaves em uma variedade M , então uma conexão afim ∇ é um mapa

$$\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \rightarrow \Gamma^\infty(TM) \quad (3.10)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y \quad (3.11)$$

que satisfaz as propriedades

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (3.12a)$$

$$\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad (3.12b)$$

$$\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y, \quad (3.12c)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y, \quad (3.12d)$$

onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável arbitrária, $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$ e $X[f]$ representa a derivada direcional de f na direção de X em um ponto p , definida por

$$X[f] = \left. \frac{d}{dt} f(p + tX) \right|_{t=0} = \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} X^i, \quad (3.13)$$

onde a segunda passagem foi obtida da aplicação da regra da cadeia.

Dessa forma, a conexão afim induz a derivada $\nabla_X Y$ com as propriedades acima, chamada de derivada covariante. Intuitivamente, o valor de $\nabla_X Y$ em um ponto $p \in M$ é a taxa de variação de Y na direção do vetor unitário $X(p)$.

Em uma variedade M existem infinitas maneiras de se definir uma conexão que satisfaça as propriedades (3.12). Apesar disso, podemos restringir esse leque de opções se exigirmos que tal objeto obedeça a algumas outras propriedades. Nesse sentido, uma conexão de Levi-Civita é uma conexão tal que, para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$:

$$\nabla_X [g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (3.14)$$

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad (3.15)$$

onde $[X, Y]$ é o colchete de Lie dos campos vetoriais X e Y , definido por:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M).$$

A propriedade (3.14), conhecida como compatibilidade da conexão com a métrica, diz que a métrica é preservada ao longo de qualquer curva sobre M e, portanto, ângulos e áreas também são mantidos constantes. Já a relação (3.15) implica a simetria da conexão e dos coeficientes de Christoffel, conforme veremos adiante, e está ligada à ausência de torção [24]. Salvo menção contrária, nessa dissertação só serão consideradas conexões de Levi-Civita.

A seguir ilustrarei os conceitos acima com alguns exemplos mais concretos. O exemplo mais simples é o de campos vetoriais no espaço euclidiano E^3 . Nesse caso a derivada covariante

$$\bar{\nabla} : \Gamma^\infty(TE^3) \times \Gamma^\infty(TE^3) \rightarrow \Gamma^\infty(TE^3)$$

de $W = W^i \partial_i$ com respeito ao vetor X em um ponto p é definida por

$$\bar{\nabla}_X W = \frac{d}{dt} W(p + tX)(0), \quad (3.16)$$

$$= \frac{d}{dt} W^i(p + tX)(0) \partial_i, \quad (3.17)$$

$$= X[W^i] \partial_i, \quad (3.18)$$

ou seja, a derivada covariante é a derivada direcional do campo vetorial W na direção de v , que é a derivada da Equação (3.13) calculada para cada componente de W . Para mostrar que (3.17) é de fato uma derivada covariante, basta verificar as propriedades (3.12). Para isso basta verificá-las para cada componente da Equação (3.18). Assim, da linearidade da derivada usual, obtemos a propriedade (3.12a):

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(Y^i + Z^i) &= X[Y^i + Z^i] = \frac{d}{dt}(Y^i + Z^i)(p + tX) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [Y^i(p + tX) + Z^i(p + tX)] \Big|_{t=0} \\ &= X[Y^i] + X[Z^i] = \bar{\nabla}_X Y^i + \bar{\nabla}_X Z^i.\end{aligned}$$

Utilizando-se da regra da cadeia, obtemos a propriedade (3.12b):

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X+Y} Z^i &= \frac{d}{dt} Z^i(p + t(X + Y)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} (X^j + Y^j) \\ &= \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} X^j + \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} Y^j \\ &= X[Z^i] + Y[Z^i] = \bar{\nabla}_X Z^i + \bar{\nabla}_Y Z^i.\end{aligned}$$

A relação (3.12c) é obtida pela aplicação direta da regra da cadeia e da regra do produto:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{fX} Y^i &= (fX)[Y^i] = \frac{d}{dt} Y^i(p + tfX) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{d}{dt} (p^j + tfX^j) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \left[f + t \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \dot{x}^k \right) \right] \Big|_{t=0} X^j \\ &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} f X^j \\ &= fX[Y^i] = f\bar{\nabla}_X Y^i.\end{aligned}$$

Por fim, verifica-se a propriedade (3.12d) aplicando novamente a regra do produto:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X fY^i &= X[fY^i] = \frac{d}{dt}(fY^i)(p + tX) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}f(p + tX) \Big|_{t=0} Y^i + f \frac{d}{dt}Y^i(p + tX) \Big|_{t=0} \\ &= X[f]Y^i + fX[Y^i] = X[f]Y^i + f\bar{\nabla}_X Y.\end{aligned}$$

Já a derivada covariante de campos vetoriais definidos em uma superfície S imersa em E^3 é definido pela projeção de (3.17) sobre a superfície S :

$$\nabla : \Gamma^\infty(TS) \times \Gamma^\infty(TS) \rightarrow \Gamma^\infty(TS) \quad (3.19)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N, \quad (3.20)$$

onde

$$N = \frac{\partial_u \times \partial_v}{\|\partial_u \times \partial_v\|}$$

é o campo vetorial normal à superfície, também conhecido como mapa de Gauss, e $\bar{\nabla}_X Y$ representa a derivada covariante do espaço euclidiano definida pela Equação (3.18). Geometricamente, a definição (3.20) mede a taxa de variação de um campo vetorial Y , definido sobre a superfície S , na direção do vetor unitário X , também definido sobre S . Se imaginarmos $\gamma(t)$ como sendo a curva que descreve a posição de uma partícula vinculada à superfície S , então a derivada covariante $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t)$ tem o significado do vetor aceleração da partícula sobre a superfície.

Novamente, para mostrar que (3.20) é uma derivada covariante, precisamos verificar se ela satisfaz as propriedades (3.12). Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y + Z) &= \bar{\nabla}_X(Y + Z) - \langle \bar{\nabla}_X(Y + Z), N \rangle N \\ &= \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z - \langle \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z, N \rangle N \\ &= \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z - \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N - \langle \bar{\nabla}_X Z, N \rangle N \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X+Y}Z &= \bar{\nabla}_{X+Y}Z - \langle \bar{\nabla}_{X+Y}Z, N \rangle N \\
&= \bar{\nabla}_XZ + \bar{\nabla}_YZ - \langle \bar{\nabla}_XZ + \bar{\nabla}_YZ, N \rangle N \\
&= \bar{\nabla}_XZ + \bar{\nabla}_YZ - \langle \bar{\nabla}_XZ, N \rangle N - \langle \bar{\nabla}_YZ, N \rangle N \\
&= \nabla_XZ + \nabla_YZ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX}Y &= \bar{\nabla}_{fX}Y - \langle \bar{\nabla}_{fX}Y, N \rangle N \\
&= f\bar{\nabla}_XY - f\langle \bar{\nabla}_XY, N \rangle N \\
&= f\nabla_XY,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fY) &= \bar{\nabla}_X(fY) - \langle \bar{\nabla}_X(fY), N \rangle N \\
&= X[f]Y + f\bar{\nabla}_XY - \langle X[f]Y + f\bar{\nabla}_XY, N \rangle N \\
&= X[f]Y + f\bar{\nabla}_XY - X[f]\langle Y, N \rangle N - f\langle \bar{\nabla}_XY, N \rangle N \\
&= X[f]Y + f\nabla_XY,
\end{aligned}$$

onde na última passagem usei que $\langle Y, N \rangle = 0$, já que Y e N são campos vetoriais tangente e normal à superfície, respectivamente.

Embora até agora a derivada covariante tenha sido usada de maneira abstrata, sem a necessidade de introduzir um referencial, é útil expressá-la em coordenadas de um sistema referência para facilitar os cálculos. Para isso, suponhamos que $\{\frac{\partial X}{\partial u^i}(p)\}$ seja uma base de T_pM . A derivada covariante de um vetor dessa base em relação a um outro vetor dessa base é novamente um vetor dessa base. Portanto, podemos escrever

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k, \quad (3.21)$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de símbolos de Christoffel. Além disso, da Equação (3.15) encontramos que:

$$\begin{aligned}
[\partial_i, \partial_j] &= \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i \\
&= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k.
\end{aligned}$$

Como $\partial_i\partial_jf = \partial_j\partial_if$, segue que:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (3.22)$$

ou seja, os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores.

Assim, para especificar a derivada covariante de campos vetoriais arbitrários é suficiente especificá-la para cada um dos vetores da base ∂_j em relação a ∂_i . Então, usando a Equação

(3.21) juntamente com as propriedades (3.12), encontramos para vetores genéricos $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^j \partial_j$ que:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) \quad (3.23)$$

$$= X^i \nabla (Y^j \partial_j) \quad (3.24)$$

$$= X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^i \partial_j \nabla_{\partial_i} Y^j \quad (3.25)$$

$$= X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j. \quad (3.26)$$

Como o índice j no último termo é mudo, podemos trocá-lo por k e obtemos

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) X^i \partial_k. \quad (3.27)$$

É possível encontrar os coeficientes de Christoffel Γ_{ij}^k somente em função da métrica e de suas derivadas a partir da compatibilidade com a métrica (veja a Equação (3.14)):

$$0 = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{kl}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m. \quad (3.28)$$

Usando que os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores, pode-se resolver a Equação (3.28) explicitamente para Γ_{ij}^k :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (3.29)$$

Concluirei esse capítulo introduzindo o conceito de gradiente em uma variedade. O gradiente de uma função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é por definição o campo vetorial cujo produto interno com qualquer vetor $\mathbf{v}$ em todo ponto $p \in M$ resulta na derivada direcional de ϕ na direção de $\mathbf{v}$, isto é,

$$\mathbf{v}[\phi] = \langle \nabla \phi, \mathbf{v} \rangle. \quad (3.30)$$

Na linguagem da álgebra linear, dizemos que $\mathbf{v}[\phi]$ é o vetor dual de $\nabla \phi$. Veja que, como essa definição envolve o produto interno, ela deve depender da métrica da variedade M . De fato, para $\nabla \phi = a^i \partial_i$ e $\mathbf{v} = v^j \partial_j$, temos da Equação (3.30):

$$\partial_k \phi v^k = a^i v^j \langle \partial_i, \partial_j \rangle$$

$$\partial_j \phi = g_{ij} a^i$$

$$g^{jk} \partial_j \phi = g_{ij} g^{jk} a^i$$

$$g^{jk} \partial_j \phi = \delta_i^k a^i$$

$$g^{jk} \partial_j \phi = a^k.$$

Portanto, em termos das coordenadas em relação ao espaço tangente, o gradiente é expresso como:

$$\nabla\phi = g^{jk}\partial_j\phi\partial_k. \quad (3.31)$$

Se $M = E^3$, a base do espaço tangente $\{\partial_k\}$ é a base canônica de E^3 e a métrica se resume à delta de Kronecker δ_{jk} . Assim,

$$\nabla\phi = \partial_j\phi\mathbf{e}_j, \quad (\text{espaço euclidiano})$$

que é a fórmula do gradiente de uma função que nos é ensinada nos cursos de cálculo.

Consideremos agora o exemplo da esfera de raio unitário. Uma parametrização possível para essa superfície é

$$X(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad (3.32)$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Com isso, podemos calcular a sua métrica:

$$g_{\theta\phi} = \langle \partial_\theta, \partial_\phi \rangle = 0, \quad (3.33)$$

$$g_{\theta\theta} = \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = 1, \quad (3.34)$$

$$g_{\phi\phi} = \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle = \sin^2\theta. \quad (3.35)$$

Portanto, o gradiente de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fica

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \theta}\partial_\theta + \sin^2\theta \frac{\partial f}{\partial \phi}\partial_\phi.$$

3.3 Curvaturas de uma superfície

Introduzimos na Seção 3.1 a curvatura de uma curva pela taxa de variação de seu vetor tangente. No caso de superfícies, procedemos de maneira análoga. Isso é esperado já que a geometria de uma superfície é localmente caracterizada pelas curvas nela contidas.

Analogamente às curvas em $\mathbb{R}^3$, a taxa de variação do vetor normal a uma superfície é tudo o que precisamos para entender a sua geometria extrínica, ou seja, a sua forma como um objeto imerso $\mathbb{R}^3$. Se p é um ponto de X , então para todo vetor tangente $\mathbf{v}$ a X em p , o operador de forma de X em p é definido como a derivada covariante de $\mathbb{R}^3$ do mapa de Gauss:

$$S(\mathbf{v}) = -\overline{\nabla}_{\mathbf{v}}N. \quad (3.36)$$

Assim, o operador de forma $S(\mathbf{v})$ nos diz como é a taxa de variação do vetor normal N ao longo de um vetor arbitrário $\mathbf{v}$ e, portanto, contém toda a informação sobre como a superfície X se curva em $\mathbb{R}^3$.

A todo vetor unitário $\mathbf{u}$ tangente a $X \subset \mathbb{R}^3$ em um ponto p , podemos associar o número

$$k_n(\mathbf{u}) = \langle S(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle, \quad (3.37)$$

que é chamado de curvatura normal de X na direção de $\mathbf{u}$. Essa grandeza mede a curvatura de uma curva, cujo vetor tangente é $\mathbf{u}$, na direção de N (veja a Equação (3.38) a seguir). Ela também pode ser pensada como a curvatura da curva formada pela intersecção da superfície X com a seção normal (plano que corta a superfície ortogonalmente).

Isso permite decompor a Equação (3.4) em duas componentes:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s) = k_n\mathbf{N} + k_g(\mathbf{t} \times \mathbf{N}). \quad (3.38)$$

O coeficiente k_g é chamado de curvatura geodésica e mede a curvatura sobre o plano tangente, na direção do vetor $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$. Em outras palavras, $k_g \equiv 0$ significa que a aceleração da curva é normal à superfície.

Dentre todas as direções do versor $\mathbf{u}$, existem duas delas para os quais a curvatura normal k_n admite valores máximo e mínimo. A esses valores damos o nome de curvaturas principais de X em p , os quais são denotados por k_1 e k_2 . As direções em que a curvatura normal k_n atinge um extremo são chamadas de direções principais de X em p e os vetores unitários nessas direções são chamados de vetores principais de X em p . A Figura 3.5 ilustra esses conceitos.

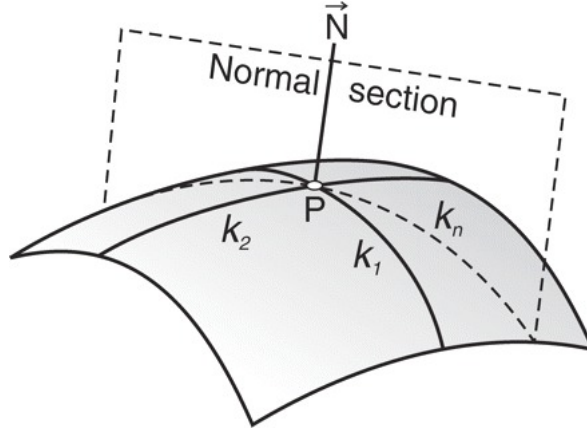


Figura 3.5: Curvaturas principais. Figura retirada de <http://geology.gsapubs.org/content/35/6/519/F1.expansion.html>.

No que segue, veremos que as curvaturas principais são os auto-valores do operador linear S e os vetores principais são os respectivos auto-vetores. Dessa forma, o cálculo da geometria de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ se resume à operação algébrica de diagonalizar o operador S .

Teorema 1. 1) Se p é um ponto tal que $k_1 = k_2$, então o operador de forma S em p é apenas a multiplicação pelo escalar $k = k_1 = k_2$.

2) Se p é um ponto tal que $k_1 \neq k_2$, então existem exatamente dois vetores principais ortogonais entre si. Além disso,

$$S(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1, \quad (3.39)$$

$$S(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2. \quad (3.40)$$

Desse resultado, vemos que os invariantes algébricos possuem uma interessante interpretação geométrica. De fato, eles definem as curvaturas gaussiana e média de $X \subset \mathbb{R}^3$ da seguinte maneira:

$$K = \det S = k_1 k_2, \quad (3.41)$$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} S = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (3.42)$$

respectivamente.

A curvatura gaussiana K será de grande importância no Capítulo 4. Intuitivamente, ela mede a forma geométrica local de uma superfície. Isso pode ser visto quando consideramos o seu sinal. Se $K > 0$, significa que as curvaturas principais tem o mesmo sinal, ou seja, elas se curvam na mesma direção e por isso a superfície apresenta, localmente, a forma de uma esfera (veja a Figura 3.6). Da mesma maneira, quando $K < 0$, as curvaturas principais possuem sinais opostos e, portanto, a superfície possui localmente o formato de uma sela. O caso em que $K = 0$ indica que uma das curvaturas principais é nula e por isso a sua geometria é localmente parecida com um cilindro ou, ainda, um cone.

3.4 Geodésicas

De todas as curvas da superfície, de particular interesse para nós são as geodésicas. Geodésicas são as “retas” de uma superfície, ou seja, são as curvas que minimizam (localmente) o caminho entre dois pontos. Dessa forma, elas capturam de maneira essencial o conceito de reta. Fisicamente, uma geodésica pode ser pensada como sendo a curva descrita por uma partícula sujeita apenas à força de vínculo da superfície. Mais precisamente, uma curva γ sobre $X \subset \mathbb{R}^3$ é uma geodésica da superfície se, e somente se, a sua aceleração γ'' for sempre normal à X . Lembrando da definição de derivada covariante (Equação (3.12)), vemos que matematicamente podemos expressar essa condição como

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0. \quad (3.43)$$

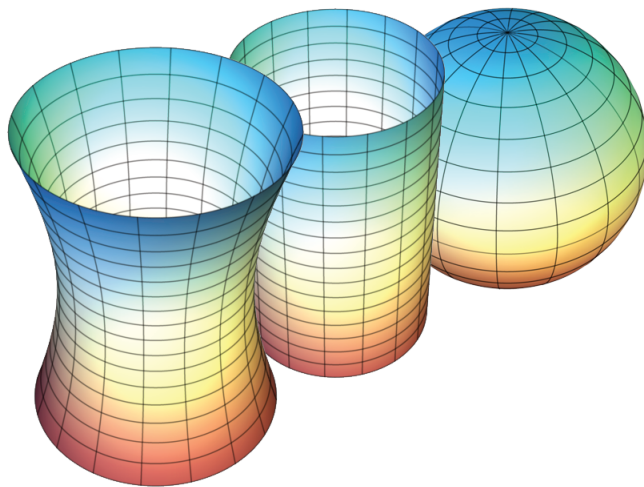


Figura 3.6: Da esquerda pra direita: uma superfície de curvatura gaussiana negativa (hiperbolóide), uma superfície de curvatura gaussiana nula (cilindro) e uma superfície de curvatura gaussiana positiva (esfera). Figura retirada de http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_curvature.

Isso quer dizer que ao percorrer uma geodésica a aceleração só altera o vetor velocidade na direção perpendicular à superfície.

Outra maneira de caracterizar uma geodésica é através da sua curvatura geodésica, que foi introduzida na Equação (3.38). Dessa forma, uma curva γ é uma geodésica se, e somente se, a sua curvatura geodésica é identicamente nula ($k_g \equiv 0$). De fato, vemos da Equação (3.38) que a aceleração de uma certa curva da superfície é ortogonal a superfície se, e somente se, a curvatura geodésica k_g for identicamente nula.

Outra analogia que as geodésicas possuem com as retas do espaço euclidiano é a seguinte. Da mesma forma que as retas são as curvas que minimizam o caminho entre dois pontos no espaço euclidiano, as geodésicas minimizam localmente o caminho entre dois pontos em superfícies curvas. Assim, se γ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em X que conecta os pontos $P = \gamma(s_i)$ e $Q = \gamma(s_f)$, $s_i, s_f \in I \subset \mathbb{R}$, tal que γ é o menor caminho entre P e Q , então γ é uma geodésica. Isso pode ser entendido intuitivamente se imaginarmos uma partícula se movendo sobre a superfície X cuja força resultante sobre ela é somente a força de vínculo, ou seja, a força normal. Para os habitantes da superfície essa força não é percebida e para movimentos sobre a superfície a partícula pode ser tratada como livre.

Observe, no entanto, que a recíproca desse resultado só é verdadeira localmente, isto é, se γ é uma geodésica, a distância entre os pontos P e Q é um mínimo *local*. De fato,

consideremos a esfera de raio unitário parametrizada da mesma forma que na Equação (3.32). Os vetores principais são:

$$\begin{aligned}\partial_\theta &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \partial_\phi &= (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0).\end{aligned}$$

Com isso, calculamos o mapa de Gauss

$$N = \frac{\partial_\theta \times \partial_\phi}{\|\partial_\theta \times \partial_\phi\|} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Consideremos o círculo máximo

$$\gamma(s) = (\sin s, 0, \cos s)$$

sobre a esfera obtido através da parametrização $\theta(s) = s$ e $\phi(s) = 0$. A aceleração dessa curva é dada por

$$\gamma''(s) = (-\sin s, 0, -\cos s).$$

O mapa de Gauss ao longo de γ é

$$N = (\sin s, 0, \cos s).$$

Logo, vemos que

$$\gamma''(s) \propto N$$

e portanto γ é uma geodésica da esfera. Por simetria, podemos concluir que qualquer círculo máximo, ou qualquer arco de um círculo máximo, de uma esfera é uma geodésica. No entanto, como mostra a Figura 3.7, nem todo arco de um círculo máximo minimiza o caminho globalmente.

Uma isometria $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo (ou seja, uma aplicação bijetora diferenciável com inversa diferenciável) entre variedades M e N que preserva o produto interno, isto é,

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$. Se existe uma isometria entre as variedades M e N , então elas são ditas isométricas. Intuitivamente, uma isometria é uma transformação de uma superfície em outra tal que todas as medidas de comprimento são mantidas constantes.

Como consequência imediata dessa definição, temos que a métrica é invariante perante isometrias. Dessa forma, já que os símbolos de Christoffel dependem somente da métrica da variedade (Equação (3.29)), geodésicas de M são levadas em geodésicas de N através de isometrias.

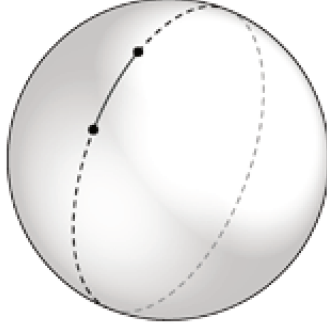


Figura 3.7: Em linha cheia está representada uma geodésica que minimiza o caminho e em linha interrompida uma geodésica que minimiza o caminho apenas localmente. Figura retirada de <http://www2.rdrop.com/~half/Creations/Puzzles/cone.geodesics/>.

Superfícies que são isométricas ao plano simplificam bastante o nosso trabalho, pois é geralmente mais fácil trabalharmos nesse espaço e então realizarmos a transformação inversa de volta para a superfície. Devido a essa isometria, tais superfícies podem ser abertas sobre o plano sem que no entanto ocorra distorção (isto é, sem comprimir nem esticar) e por isso são chamadas de superfícies desenvolvíveis. Isso nos permite obter as geodésicas a partir das retas do espaço euclidiano, o que por sua vez é muito mais simples do que resolver as equações diferenciais que veremos a seguir. Esse resultado será muito útil na hora de encontrar configurações esméticas sobre o cone.

Por outro lado, para obter as geodésicas de superfícies genéricas é preciso resolver a equação diferencial (3.43). Para obter a equação diferencial em termos das coordenadas de γ , basta utilizarmos as propriedades da derivada covariante:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\gamma'} \gamma' &= \nabla_{\gamma'} (\dot{u}^j \partial_j) \\
 &= (\nabla_{\gamma'} \dot{u}^j) \partial_j + \dot{u}^j \nabla_{\gamma'} \partial_j \\
 &= \ddot{u}^j \partial_j + \dot{u}^j \dot{u}^i \nabla_{\partial_i} \partial_j \\
 &= \ddot{u}^j \partial_j + \dot{u}^j \dot{u}^i \Gamma_{ij}^k \partial_k \\
 &= (\ddot{u}^k + \dot{u}^j \dot{u}^i \Gamma_{ij}^k) \partial_k = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.44)$$

Quando a superfície se trata de uma superfície de revolução é possível utilizar uma alternativa mais simples às equações diferenciais da Equação (3.44) através do Teorema de Clairaut, enunciado a seguir.

Teorema 2 (Teorema de Clairaut). *Seja γ uma geodésica em uma superfície de revolução X , r a distância entre um ponto de X e o eixo de rotação e α o ângulo entre γ' e o meridiano de X (Figura 3.8). Então, $A = r \sin \alpha$ é constante ao longo de γ . Além disso, se X estiver parametrizada pelas coordenadas polares (r, ϕ) , então as equações da geodésica serão*

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{A}{r^2}, \quad (3.45)$$

$$\frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'(r)^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}}, \quad (3.46)$$

onde $z = f(r)$ é o perfil da superfície X . Reciprocamente, se $r \sin \alpha$ é constante ao longo de uma curva γ da superfície, e se nenhuma parte de γ é parte de algum paralelo de X , então γ é uma geodésica.

Demonstração. A métrica em coordenadas cilíndricas é dada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (3.47)$$

$$= dr^2 + r^2 d\phi^2 + f'(r) dr^2 \quad (3.48)$$

$$= (1 + f'(r)^2) dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (3.49)$$

Assim o comprimento ao longo de uma geodésica parametrizada por $r = r(t)$ e $\phi = \phi(t)$ é:

$$\int \sqrt{(1 + f'^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2} dt. \quad (3.50)$$

Como estamos procurando as geodésicas de X , precisamos minimizar esse funcional, cuja lagrangeana é

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \sqrt{(1 + f'^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}.$$

Como ϕ é uma variável cíclica, ou seja, $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\phi})$ não depende de ϕ , as equações de Euler-Lagrange fornecem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2 \dot{\phi}}{\sqrt{(1 + f'^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Como toda curva admite parametrização pelo comprimento de arco s , podemos tomar $t = s$, de modo que

$$\sqrt{(1 + f'^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2} = 1.$$

Portanto, obtemos a seguinte lei de conservação:

$$\dot{\phi} = \frac{A}{r^2},$$

onde A é uma constante real ao longo de cada geodésica. Assim a Equação (3.45) é verificada. Além disso, manipulando a Equação (3.49),

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + f'^2) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 &= \frac{1 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2}{1 + f'^2} \\ \Rightarrow \frac{dr}{ds} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2}, \end{aligned}$$

que é a Equação (3.46). O sinal na última igualdade depende se a coordenada $r(s)$ da geodésica cresce ou diminui ao longo do parâmetro de arco s . Irei adotar o sinal negativo (isto é, quando r diminui com s). As Equações (3.45) e (3.46) formam o vetor tangente à geodésica:

$$\gamma'(s) = r'(s)X_r + \phi'(s)X_\phi. \quad (3.51)$$

Para podermos calcular o ângulo entre a geodésica $\gamma(s)$ e o meridiano, também precisamos do vetor tangente ao meridiano. Seja $\beta(s) = X(r(s), \phi(s))$ a curva que descreve um meridiano de X em $\phi(s) = \phi_0 = \text{constante}$. Então o vetor tangente é dado por

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= r'(s)X_r + \phi'(s)X_\phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}X_r. \end{aligned}$$

Como $\gamma'(s)$ e $\beta'(s)$ são unitários, o ângulo ψ entre a geodésica e o meridiano é dado por

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \gamma'(s) \cdot \beta'(s) \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}} X_r + \frac{A}{r^2} X_\phi \right] \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} X_r \right] \\ &= \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1 \implies \sin^2 \psi = \frac{A^2}{r^2} \implies A = r \sin \psi.$$

Com isso concluímos a prova do teorema. $\square$

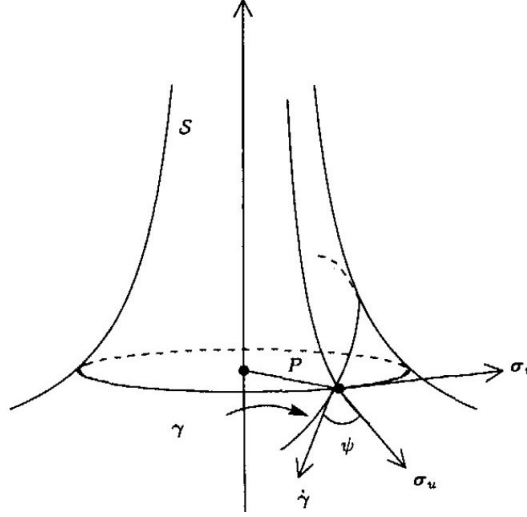


Figura 3.8: Superfície de revolução ilustrando o Teorema de Clairaut. Figura retirada de [19].

O motivo da simplicidade das equações do Teorema 2 em comparação com as Equações (3.44) é que essas são resultado de uma primeira integral fornecida pela constante $A = r \sin \alpha$. Essa constante é consequência do Teorema de Noether devido a simetria de rotação da superfície e fisicamente representa o momento angular de uma partícula de momento linear unitário se movendo livremente sobre a superfície.

Veremos no Capítulo 4 que geodésicas convergentes produzem *grain boundaries* nas camadas esméticas. Do ponto de vista local, isso pode ser introduzindo os campos de Jacobi, os quais são usados para estudar o comportamento de geodésicas na vizinhança de uma dada geodésica γ . Se γ_τ é uma família de geodésicas, sobre uma superfície S , indexadas pelo parâmetro τ , tal que $\gamma_0 = \gamma$, então o campo de Jacobi é definido por:

$$\xi(s) = \left. \frac{\partial \gamma_\tau(s)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$$

e satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = -K\xi, \quad (3.52)$$

onde K é a curvatura gaussiana da superfície S . De certa forma, o campo de Jacobi $\xi(s)$ mede, para todo s , a distância entre duas geodésicas vizinhas (veja Figura 3.9). Portanto, regiões de S em que K é positivo (negativo) produzem geodésicas convergentes (divergentes).



Figura 3.9: Ilustração da Equação de Jacobi.

3.4.1 Geometria de camadas

Nesta subseção, veremos algumas noções rudimentares sobre folheações de superfícies. Isso será usado no Capítulo 4 para descrever as camadas esméticas em superfícies curvas. Do ponto de vista geométrico, modelaremos tais camadas como curvas de nível de uma função $\phi(u, v)$, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

No Capítulo 4 veremos que no nosso contexto as camadas esméticas podem ser consideradas igualmente espaçadas. Matematicamente, isso significa que $\|\nabla\phi\| = \text{constante}$. Intuitivamente, como o gradiente $\nabla\phi$ aponta para a direção de máximo crescimento de ϕ e, além disso, é ortogonal à família de curvas dessa função (camadas), sua magnitude $\|\nabla\phi\|$ mede, essencialmente, o módulo da velocidade das camadas na direção perpendicular a elas. Logo, se $\|\nabla\phi\|$ é constante, segue que as camadas são igualmente espaçadas.

Por simplicidade, adotarei que $\|\nabla\phi\| = 1$, que pode ser obtido através de uma simples renormalização de ϕ . Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 1. *Seja $\gamma_\sigma(s)$ uma família de curvas de uma superfície M , tal que γ_σ é parametrizada pelo comprimento de arco para todo parâmetro fixo σ . Se as curvas de nível de uma função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ forem ortogonais à família de curvas $\gamma_\sigma(s)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- 1) *As camadas de ϕ são igualmente espaçadas;*
- 2) *Fixado σ , a curva $\gamma_\sigma(s)$ é uma geodésica da superfície.*

Demonstração. ($1 \Leftrightarrow 2$) Seja α uma curva arbitrária ligando os pontos $A = \gamma_\sigma(s_A)$ e $B = \gamma_\sigma(s_B)$, para σ fixado. A diferença da função ϕ nesses pontos ao longo da curva α é dada por

$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \nabla\phi(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds \leq \int_A^B \|\nabla\phi(\alpha(s))\| \|\alpha'(s)\| ds.$$

Por hipótese temos que $\|\nabla\phi\| = 1$, então

$$\Delta\phi \leq L(\alpha), \quad (3.53)$$

onde $L(\alpha)$ denota o comprimento da curva α entre os pontos A e B . Por outro lado, como $\nabla\phi$ e $\gamma'_\sigma(s)$ estão na mesma direção e usando novamente que $\|\nabla\phi\| = 1$, obtemos:

$$L(\gamma_\sigma) = \int_A^B \|\gamma'_\sigma(s)\| ds = \int_A^B \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot \gamma'_\sigma(s) ds = \int_A^B \nabla\phi \cdot \gamma'_\sigma(s) ds = \int_A^B d\phi = \Delta\phi. \quad (3.54)$$

Portanto, vemos das Equações (3.53) e (3.54) que:

$$L(\gamma_\sigma) \leq L(\alpha),$$

para toda curva α . Isso significa que o comprimento do caminho é mínimo para a curva γ_σ e, por isso, ela é uma geodésica.

Reciprocamente, definamos a função $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ tal que

$$\gamma_\sigma(s) = F(\sigma, s), \quad \forall \sigma \text{ fixo.}$$

As curvas $c_{s_0}(\sigma) = F(\sigma, s_0)$, obtidas fixando $s = s_0$, são ortogonais às geodésicas $\gamma_\sigma(s)$. De fato, se escolhermos $c_0(\sigma)$ de modo a coincidir com uma dada camada, obtemos que $g(c'_0(\sigma), \gamma'_\sigma(0)) = 0$, por hipótese. Disso, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g(c'_s(\sigma), \gamma'_\sigma(s)) &= g\left(\frac{\partial}{\partial s} c'_s(\sigma), \gamma'_\sigma(s)\right) + g(c'_s(\sigma), \nabla_{\gamma'_\sigma(s)} \gamma'_\sigma(s)) \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \sigma} F(\sigma, s), \gamma'_\sigma(s)\right) \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial s} F(\sigma, s), \frac{\partial}{\partial s} F(\sigma, s)\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} g\left(\frac{\partial}{\partial s} F(\sigma, s), \frac{\partial}{\partial s} F(\sigma, s)\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \|\gamma'_\sigma(s)\|^2 = 0, \end{aligned}$$

onde usei a definição de geodésica ($\nabla_{\gamma'_\sigma} \gamma'_\sigma = 0$) e que $\|\gamma'_\sigma(s)\| = 1$, já que ela é parametrizada pelo comprimento de arco. Isso mostra que as curvas $c_s(\sigma)$ são, de fato, sempre ortogonais às geodésicas para qualquer σ . Logo, elas coincidem com as camadas. Dessa forma, as camadas podem ser rotuladas por s , que é justamente o parâmetro que mede o seu espaçamento. Portanto, tais camadas são igualmente espaçadas. Assim concluímos a demonstração dessa proposição. $\square$

Esse resultado será muito importante do ponto de vista operacional no Capítulo 4. Conforme veremos, o processo de construção da configuração esmética tornar-se-á completamente sistemático graças a ele.

3.5 O Teorema de Gauss-Bonnet

O Teorema de Gauss-Bonnet afirma que integrando a curvatura geodésica k_g em torno de um circuito fechado, podemos calcular a curvatura gaussiana total da superfície delimitada pelo circuito. Mais precisamente, o teorema afirma que:

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi, \quad (3.55)$$

onde ∂M denota a fronteira da região M .

Observe que se aplicarmos o Teorema de Gauss-Bonnet para um circuito muito pequeno centrado em um ponto $x_0 = X(u_0, v_0) \in M$, poderemos calcular a curvatura gaussiana nesse ponto. De fato, digamos que o circuito seja dado por

$$\partial M = \{X(u, v) : (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < \epsilon^2\},$$

onde ϵ é positivo e arbitrário. Dessa forma, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a curvatura gaussiana K se torna aproximadamente constante em M . Já que K é contínua, podemos escrever:

$$\int_M K dA \approx K(u_0, v_0) \int_M dA = K(u_0, v_0)A.$$

Portanto,

$$K(u_0, v_0)A + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \implies K(u_0, v_0) = \frac{2\pi - \int_{\partial M} k_g ds}{A},$$

onde A é a área total da região delimitada por ∂M . Isso é notável já que a curvatura geodésica k_g pode ser medida sem o uso do vetor normal. Em outras palavras, o fato da

curvatura geodésica ser intrínseca implica que a curvatura gaussiana também seja uma quantidade intrínseca.

Podemos generalizar esse resultado a circuitos que apresentam ângulos discretos externos. Nesse caso, não podemos calcular a curvatura geodésica k_g nos pontos singulares, mas podemos integrá-la ao longo das partes suaves de ∂M . Com isso, o Teorema de Gauss-Bonnet fica:

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi - \sum_i \Delta\theta_i, \quad (3.56)$$

onde a integral ao longo de ∂M é realizada ao longo dos seus segmentos suaves e $\Delta\theta_i$ são os ângulos discretos externos.

Se a fronteira for um polígono cujos lados são geodésicas, obtemos:

$$\int_M K dA = 2\pi - \sum_i \Delta\theta_i, \quad (3.57)$$

já que k_g é identicamente nulo para geodésicas. Como a soma dos ângulos externos $\Delta\theta_i$ de um polígono no espaço euclidiano é 2π , a curvatura gaussiana é uma medida do excesso (ou déficit) do ângulo em um polígono. Dessa maneira, se a curvatura gaussiana K é positiva, a soma dos ângulos externos é menor que 2π . Por outro lado, se a curvatura gaussiana K é negativa, a soma dos ângulos externos é maior que 2π (veja a Figura 3.10).

É possível levar a Equação (3.57) ainda mais adiante se usarmos a característica de Euler introduzida na Seção 2.4. Dessa forma, em uma superfície fechada M , o Teorema de Gauss-Bonnet é expresso como:

$$\int_M K dA = 2\pi\chi. \quad (3.58)$$

Isso mostra novamente que, apesar da curvatura gaussiana ser uma propriedade geométrica, quando integrada sobre uma superfície inteira ela se torna um invariante topológico, independente da geometria local.

3.6 Equivalência entre óptica em lentes planas e óptica em superfícies curvas

Nessa seção, aplicarei alguns dos conceitos vistos ao longo do presente capítulo no contexto da óptica. Os resultados aqui obtidos formam, juntamente com a analogia que será descrita na Seção 4.1, um dos pilares dessa dissertação e serão de grande importância

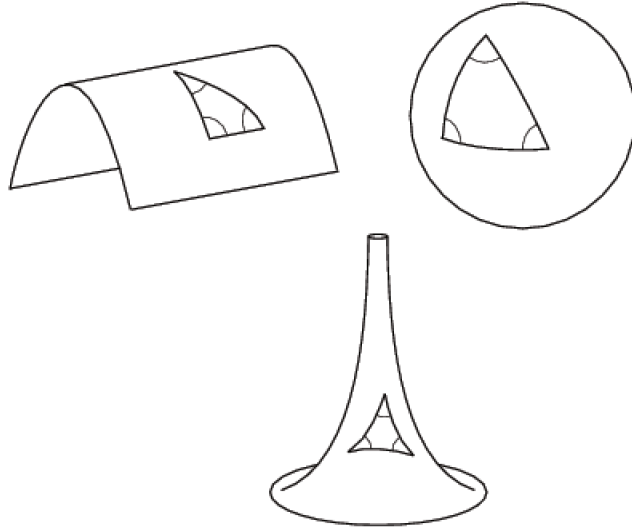


Figura 3.10: Ilustração do Teorema de Gauss-Bonnet para triângulos em superfícies curvas. Figura retirada de http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Miklos_Hoffmann-Topology_and_differential_geometry/ch12s02.html.

para o desenvolvimento do Capítulo 4. Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar as referências [26, 27], nas quais essa seção se baseia fortemente.

Existe uma interessante equivalência, bastante explorada na comunidade de óptica, que diz respeito a lentes planas não-homogêneas com simetria esférica e superfícies curvas com índice de refração unitário [26–31]. Essas superfícies podem ser pensadas como sendo a superfície média de uma guia de onda formada por duas superfícies condutoras paralelas, tal que o espaçamento entre elas seja muito pequeno em relação ao comprimento de onda da luz [31]. Para examinar essa equivalência utilizaremos um dos mais ilustres princípios variacionais da física: o Princípio de Fermat. Esse princípio afirma que a trajetória percorrida pela luz entre dois pontos P_1 e P_2 é tal que o tempo é extremo, isto é, mínimo ou máximo. Isso é equivalente a extremizar o caminho óptico CO , definido por

$$CO = \int_{P_1}^{P_2} n dl,$$

entre esses mesmos pontos. De fato,

$$\tau = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v} = \frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} n dl = \frac{CO}{c},$$

onde $n = \frac{c}{v}$ é o índice de refração do meio em questão e c é a velocidade da luz no vácuo. Logo, minimizar (ou maximizar) o tempo total τ é equivalente a minimizar (ou maximizar) o caminho óptico CO .

Além disso, considerarei, sem perda de generalidade, apenas lentes de raio unitário e com índice de refração dado por:

$$\begin{cases} n(r), & r \leq 1 \\ 1, & r > 1. \end{cases}$$

Suponhamos que a luz é emitida por uma fonte localizada no ponto P_1 e que, após atravessar a lente, ela alcança o ponto P_2 , onde forma-se a imagem (Figura 3.11). Do

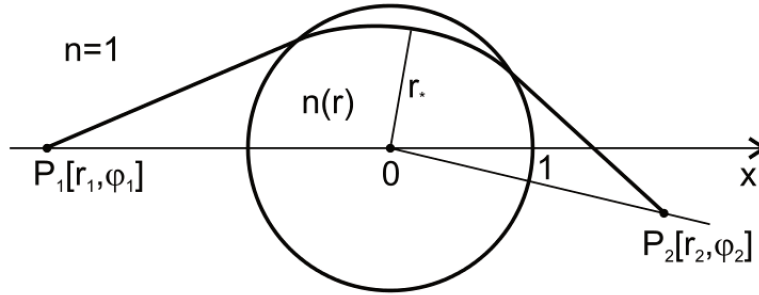


Figura 3.11: Configuração geométrica de uma lente plana não-homogênea de índice de refração $n(r)$. Figura retirada de [26].

Princípio de Fermat, sabemos que a trajetória entre os pontos P_1 e P_2 é tal que o caminho óptico CO , ou o tempo τ , é um extremo. Assim, devemos extremizar o funcional:

$$CO = \int_A^B n(r(s)) \sqrt{\dot{r}(s)^2 + r(s)^2 \dot{\theta}(s)^2} ds. \quad (3.59)$$

A lagrangeana nesse caso é definida por

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = n(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \quad (3.60)$$

e a condição de extremo da Equação (3.59) é dada pela célebre equação de Euler-Lagrange, calculada para cada coordenada generalizada q_i :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.61)$$

Observemos que a coordenada θ é uma coordenada cíclica, o que nos leva a uma lei de conservação:

$$n(r) r^2 \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}} = \text{constante}. \quad (3.62)$$

Já que toda curva admite uma reparametrização por comprimento de arco, podemos assumir sem perda de generalidade que $\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = 1$. Além disso, se $\psi(r)$ é o ângulo entre a normal da interface e a trajetória do raio de luz, podemos escrever (Figura 3.12)

$$\sin(\psi(r)) = r \frac{d\theta}{dr}.$$

Portanto, obtemos a generalização da equação de Snell para meios não-homogêneos:

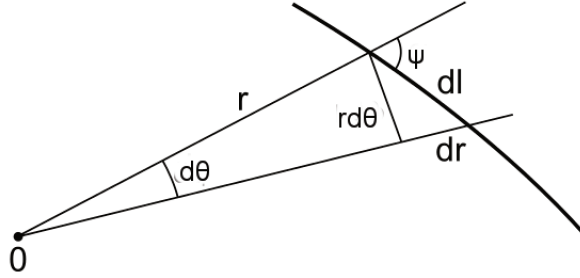


Figura 3.12: Trajetória de um raio de luz em um meio esférico. Figura retirada de [26].

$$L = n(r) r \sin(\psi(r)) = \text{constante}. \quad (3.63)$$

O ponto em que $\psi = \frac{\pi}{2}$ será chamado de ponto de retorno, pois é o ponto em que $\dot{r}(s)$ muda de sinal, e sua respectiva coordenada radial será denotada por r^* .

Com isso é possível obter a equação que descreve a trajetória dos raios de luz da seguinte maneira. O elemento de linha dl da trajetória, exibido na Figura 3.12, pode ser expresso como

$$dl = r \frac{d\theta}{\sin \psi},$$

ou,

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Dessas equações obtemos

$$d\theta = \pm \frac{\sin \psi dr}{r \sqrt{1 - \sin^2 \psi}}.$$

Assim, usando a Equação (3.63), encontramos:

$$d\theta = \pm \frac{L dr}{r \sqrt{r^2 n(r)^2 - L^2}}. \quad (3.64)$$

Integrando essa expressão desde a fonte de luz de coordenadas (r_1, θ_1) até a imagem (r_2, θ_2) e denotando a variação total do ângulo polar por $-M\pi$, com $M > 0$, obtemos:

$$-M\pi = \int_{r_1}^1 \frac{L dr}{r \sqrt{r^2 - L^2}} - 2 \int_{r^*}^1 \frac{L dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - L^2}} - \int_1^{r_2} \frac{L dr}{r \sqrt{r^2 - L^2}}.$$

O primeiro e o terceiro termos do lado direito dessa equação correspondem à propagação do raio fora da lente, onde $n = 1$, enquanto que o segundo termo corresponde à propagação dentro da lente com índice de refração $n(r)$. O primeiro e o terceiro termos podem ser facilmente calculados e então obtemos:

$$\int_{r^*}^1 \frac{L dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - L^2}} = \frac{1}{2} \left(M\pi + \arcsin \frac{L}{r_1} + \arcsin \frac{L}{r_2} - 2 \arcsin L \right). \quad (3.65)$$

Agora consideremos a diferencial de comprimento de arco em uma superfície com simetria esférica

$$ds_1^2 = d\sigma^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (3.66)$$

onde σ é a medida do comprimento ao longo do meridiano e ϕ é o ângulo azimutal (Figura 3.13). A diferencial do caminho óptico no meio não-homogêneo expressa em coordenadas polares é dada por:

$$ds_2^2 = n^2(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (3.67)$$

ou seja, a métrica na lente é dada pela transformação conforme $ds_2 = n(r) ds$, em que ds é a métrica do plano:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Portanto, se exigirmos que a métrica da lente e da superfície sejam iguais, isto é, $ds_1 = ds_2$, obteremos uma outra transformação conforme do plano para a superfície:

$$ds_1 = n(r) ds.$$

Uma escolha natural para que essa exigência seja satisfeita é dada pelas equações:

$$d\theta = d\phi, \quad (3.68a)$$

$$\rho(\sigma) = r n(r), \quad (3.68b)$$

$$d\sigma = n(r) dr. \quad (3.68c)$$

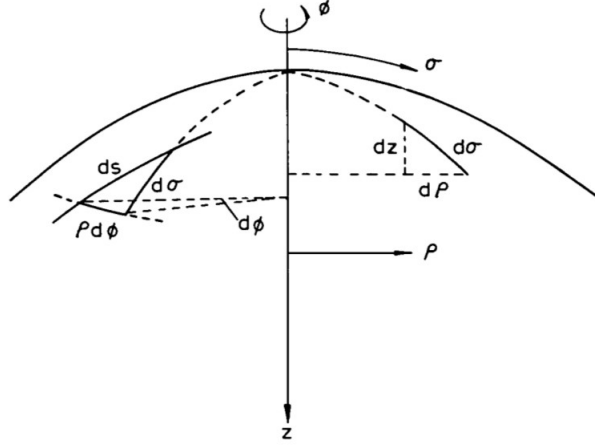


Figura 3.13: Geodésicas em uma superfície esfericamente simétrica. Figura retirada de [29].

Como ambos os sistemas são esfericamente simétricos, podemos assumir que a constante de integração seja nula na Equação (3.68) e, portanto, $\theta = \phi$. Logo, a transformação ocorre apenas entre $n(r)$ e $\sigma(\rho)$.

Com essa transformação é possível converter as soluções de lentes, juntamente com suas propriedades ópticas, em soluções de lentes de índice de refração constante e unitário, mas sobre superfícies curvas. De fato, como as métricas são iguais em ambos os meios, todas as medidas que dependem dela são preservadas, como as distâncias, as áreas e os ângulos entre vetores. Por conseguinte, devido ao Princípio de Fermat, os raios de luz e as frentes de onda nas lentes são levados em geodésicas e em camadas esmétricas sobre a superfície, respectivamente. Por esse motivo, denominarei essa superfície de superfície geodésica. A Figura 3.14 apresenta alguns exemplos.

Como consequência da transformação (3.68), a constante L da Equação (3.63), que caracteriza a trajetória do raio de luz, pode ser escrito como

$$L = \rho \sin \psi.$$

Vemos dessa forma que L é exatamente a constante do Teorema de Clairaut. A constante L também pode ser pensada como sendo o momento angular de uma partícula hipotética de momento linear unitário que percorre uma geodésica sobre a superfície geodésica. Em outras palavras, ao longo de uma geodésica o momento angular se conserva.

Além disso, também podemos reescrever a Equação (3.64) para obter a equação que

descreve a trajetória da geodésica na superfície:

$$d\phi = \pm \frac{L\sigma'(\rho)d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - L^2}}.$$

A Equação (3.65) também se transforma em

$$\int_L^1 \frac{L\sigma'(\rho)d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - L^2}} = \frac{1}{2} \left(M\pi + \arcsin \frac{L}{r_1} + \arcsin \frac{L}{r_2} - 2 \arcsin L \right) \equiv g(L), \quad (3.69)$$

que é uma equação integral para a derivada da função desconhecida $\sigma(\rho)$ que determina a forma da superfície geodésica. Na verdade, a Equação (3.69) é um tipo da equação integral de Abel [29,32]. Para resolvê-la, multiplicamos a Equação (3.69) por $(L^2 - y^2)^{-1/2}$ e integramos em $y < L < 1$:

$$\int_y^1 \int_L^1 \frac{L\sigma'(\rho)d\rho dL}{\rho\sqrt{\rho^2 - L^2}\sqrt{L^2 - y^2}} = \int_y^1 \frac{g(L)dL}{\sqrt{L^2 - y^2}}.$$

Invertendo a ordem de integração na integral dupla e derivando a equação em relação à y , obtemos:

$$\frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{\sigma'(\rho)}{\rho} \left(\int_y^\rho \frac{LdL}{\sqrt{\rho^2 - L^2}\sqrt{L^2 - y^2}} \right) d\rho = \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{g(L)dL}{\sqrt{L^2 - y^2}}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$- \frac{\sigma'(y)}{y} \left(\int_y^\rho \frac{LdL}{\sqrt{\rho^2 - L^2}\sqrt{L^2 - y^2}} \right) d\rho = \frac{d}{dy} \int_y^1 \frac{g(L)dL}{\sqrt{L^2 - y^2}}. \quad (3.70)$$

A integral restante no membro esquerdo pode ser resolvida fazendo a substituição $u = L^2$, seguida da substituição $w = \frac{\rho^2 - u}{\rho^2 - y^2}$. Isso resulta em

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dw}{w^{1/2}(1-w)^{1/2}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

onde

$$B(x, y) = \int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw$$

é a função beta. Assim, substituindo esse resultado na Equação (3.70) e fazendo $y = \rho$, obtemos a solução para a equação integral de Abel (3.69):

$$\sigma'(\rho) = -\frac{2\rho}{\pi} \frac{d}{d\rho} \left(\int_{\rho}^1 \frac{g(L)}{\sqrt{L^2 - \rho^2}} dL \right). \quad (3.71)$$

Por fim, a Equação (3.71) pode ser resolvida através de métodos usuais de integração, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) = & -\frac{1}{\pi} \left[\rho \arcsin \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{r_1^2 - \rho^2}} + \rho \arcsin \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{r_2^2 - \rho^2}} \right. \\ & + r_1 \arcsin \left(\rho \sqrt{\frac{r_1^2 - 1}{r_1^2 - \rho^2}} \right) + r_2 \arcsin \left(\rho \sqrt{\frac{r_2^2 - 1}{r_2^2 - \rho^2}} \right) - \sqrt{r_1^2 - 1} \arcsin \rho \\ & - \sqrt{r_2^2 - 1} \arcsin \rho - \arcsin \frac{1}{r_1} \arcsin \rho - \arcsin \frac{1}{r_2} \arcsin \rho \left. \right] \\ & + (M - 1) \arcsin \rho + \rho. \end{aligned}$$

Essa equação é muito complicada e de difícil análise, o que dificulta a construção da própria superfície geodésica. No entanto, se considerarmos apenas os casos em que a fonte e o foco se localizam no infinito ou sobre a borda da lente, ou seja, quando $r_1, r_2 \in \{1, \infty\}$, temos por inspeção que:

$$\sigma(\rho) = A\rho + B \arcsin(\rho), \quad (3.72)$$

com

$$A = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{r_1^2 - \rho^2}} - \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{r_2^2 - \rho^2}}, \quad (3.73)$$

$$B = (M - 1) + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{r_2}. \quad (3.74)$$

onde os únicos possíveis valores de A são: (i) 0 se tanto a fonte quanto o foco estão localizados sobre a borda da lente, (ii) $\frac{1}{2}$ se um desses pontos está localizado sobre a borda da lente e o outro no infinito e (iii) 1 se ambos estão localizados no infinito. Além disso, vemos que $A + B = M$, já que na situação em que $r \in \{1, \infty\}$ os termos

$$\sqrt{\frac{1 - \rho^2}{r^2 - \rho^2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r}$$

<i>Lente</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>M</i>	<i>n(r)</i>
Maxwell	0	1	1	$\frac{2}{1+r^2}$
Maxwell generalizado	0	<i>M</i>	<i>M</i>	$\frac{2r^{\frac{1}{M}-1}}{1+r^{2/M}}$
Luneburg	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2-r^2}$
Eaton	1	1	2	$\sqrt{\frac{2}{r}-1}$
Rotação de 90°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$rn^4 - 2n + r = 0$
Plano	1	0	1	1

Tabela 3.1: Parâmetros e índices de refração de algumas lentes conhecidas.

são iguais. Mostramos na Tabela 3.1 exemplos de algumas lentes conhecidas e na Figura 3.14 as ilustrações de algumas lentes.

Embora a parametrização do perfil das superfícies por $\sigma(\rho)$ tenha sido eficiente na obtenção dos resultados anteriores, na construção da superfície é mais adequado usar $z(\rho)$. Para tanto, basta fazer:

$$d\sigma^2 = dz^2 + d\rho^2 \quad \Rightarrow \quad dz = \pm \left[\left(A + \frac{B}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} d\rho.$$

Portanto, vemos que a construção da superfície só é possível quando $|A + B| = |M| \geq 1$. Quando $M = 1$ a superfície é chata no topo, pois $dz(0) = 0$. Ademais, toda superfície dessa forma é ortogonal ao plano $z = 0$ em sua fronteira pois $dz \rightarrow \infty$ quando $\rho \rightarrow 1$.

Com isso, terminamos a exposição das ferramentas geométricas essenciais para o nosso trabalho. Veremos agora como esses conceitos geométricos surgem no contexto de cristais líquidos. Em particular, veremos como a equivalência descrita nessa seção poderá ser útil para elaborar configurações esméticas em superfícies curvas.

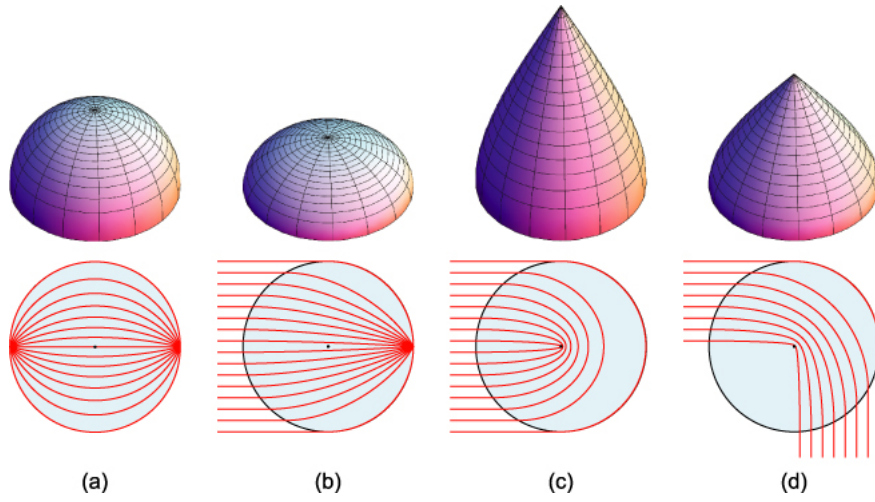


Figura 3.14: As figuras de cima ilustram as superfícies associadas às lentes (figuras de baixo): (a) Olho-de-peixe de Maxwell $\left(n(r) = \frac{2}{1+r^2}\right)$, (b) Lente de Luneburg $\left(n(r) = \sqrt{2-r^2}\right)$, (c) Lente de Eaton $\left(n(r) = \sqrt{\frac{2}{r}-1}\right)$, (d) Lente de rotação em 90° $\left(rn^4 - 2n + r = 0\right)$. Figura retirada de [26].

Capítulo 4

Esméticos sobre superfícies curvas

No Capítulo 1 vimos que existem três diferentes termos que contribuem para o balanço de energia dos esméticos. Para analisar o peso que cada um desses termos exerce na energia total, podemos definir algumas grandezas que dependem da razão dos coeficientes de cada termo. No nosso caso, estamos interessados nos parâmetros $\lambda_i = \sqrt{\frac{K_i}{B}}$, $i = 1, 3$. Eles medem o quanto os termos devido às curvaturas do tipo *splay* (que acompanha o coeficiente K_1) e do tipo *bend* (que acompanha o coeficiente K_3) contribuem para a energia em relação à contribuição do termo de compressão. Tais parâmetros são da ordem do espaçamento entre essas camadas ($\approx 10^{-9}\text{m}$) [1]. Assim, quando λ_i é muito pequeno se comparado com um comprimento L típico do sistema, podemos assumir que a única contribuição importante para a energia livre do cristal líquido é a proveniente da compressão das camadas esméticas. De fato, da Equação (1.5) podemos obter uma aproximação para a razão entre os termos de curvatura e de compressão:

$$\frac{\mathcal{F}_i}{\mathcal{F}_{comp}} \approx \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2, \quad i = 1, 3.$$

Portanto, nesse regime o estado fundamental é obtido, essencialmente, quando a energia de compressão é nula ou, em outras palavras, quando as camadas são uniformemente espaçadas (isto é, $\|\nabla\phi\| = 1$; veja a Subseção 3.4.1) [7, 8, 33–36]. Isso implica que o termo de compressão deve ser nulo sempre que a condição $\|\nabla\phi\| = 1$ for satisfeita. Para tanto, é usual tomar

$$e = \|\nabla\phi(u, v)\| - 1 \tag{4.1}$$

na Equação (1.5). Já que estamos interessados apenas nas propriedades elásticas do cristal líquido e estamos ignorando os detalhes atômicos e moleculares, a forma funcional

da Equação (4.1) não é importante, contanto que e se anule sempre que $\|\nabla\phi(u, v)\| = 1$. Nesse caso, o funcional de energia dos esméticos pode ser aproximado por:

$$\mathcal{F}_e = \frac{B}{2} \int d^3\mathbf{r} (\|\nabla\phi\| - 1)^2. \quad (4.2)$$

Isso significa que sempre que as camadas esméticas forem uniformemente espaçadas a energia livre $\mathcal{F}_e$ será estritamente minimizada. Além disso, vimos na Proposição 1 que quando camadas em uma superfície são igualmente espaçadas, elas são ortogonais a um fluxo geodésico da superfície.

Nesse trabalho, consideraremos somente os casos em que $L \gg \lambda_i$. Assim, para encontrar o estado de menor energia de esméticos em superfícies curvas, basta obter as geodésicas do substrato, sujeitas a determinadas condições de contorno, e então traçar a família de curvas ortogonais a elas. Dessa maneira, é possível investigar a interação entre curvatura do substrato e a configuração dos esméticos sobre estes.

4.1 Analogia com óptica geométrica

Conforme vimos na Seção 3.4, as geodésicas são as curvas de uma superfície que extremizam o comprimento do caminho. Da mesma forma, as trajetórias da luz são tais que o seu caminho óptico CO é minimizado (veja a Seção 3.6). Assim, se fizermos um paralelo entre caminhos em superfícies curvas e caminhos ópticos em sistemas ópticos, poderemos estabelecer uma interessante analogia entre esméticos e óptica geométrica [37], já que a normal de cada camada esmética está contida em geodésicas do substrato (veja a Proposição 1). Dessa maneira, as camadas esméticas são análogas às frentes de onda, enquanto que as suas normais podem ser pensadas como sendo os próprios raios de luz (Figura 4.1).

No entanto, embora as trajetórias da luz possam se cruzar com as trajetórias de outros raios de luz sem nenhum problema, isso não pode acontecer com nossas geodésicas. O motivo é que se diferentes geodésicas se cruzarem, as camadas esméticas ortogonais a elas também se cruzarão. Mas como estas compõem materiais físicos, isso não ocorre. Portanto, ao utilizar o método de construção da configuração esmética da Proposição 1, devemos tomar o cuidado de interromper a trajetória das geodésicas nos seus respectivos pontos de intersecção. Geralmente isso faz com que as camadas esméticas provenientes de regiões com diferentes orientações moleculares se encontrem, levando a formação de *grain boundaries*.

Assim, tomando o devido cuidado, poderemos usar nossa intuição já bem estabelecida de óptica para estudar fenômenos em esméticos através dessa analogia.

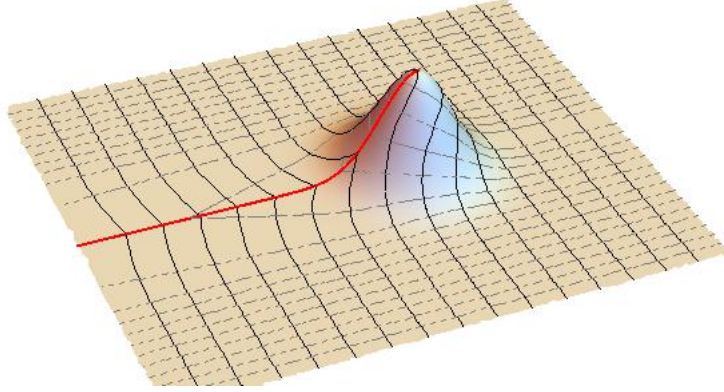


Figura 4.1: Camadas esméticas sobre o *bump* gaussiano. As linhas cheias representam as camadas e as linhas tracejadas as geodésicas. Observe a formação de um *grain boundary* ao longo da linha vermelha.

Começemos descrevendo o fenômeno da refração. Sabemos que quando a luz atinge uma interface que separa meios com diferentes índices de refração, ela é refratada obedecendo a minimização do tempo τ , conforme discutido anteriormente. Da mesma forma, quando uma geodésica (e, por conseguinte, a camada esmética) encontra uma interface que separa duas superfícies com diferentes curvaturas, ela sofre refração, passando de uma superfície para a outra (Figura 4.2). Vemos então que a curvatura do substrato é análoga ao índice de refração do meio em que a luz se propaga. De fato, se compararmos a Equação de Jacobi (3.52) com a equação de Helmholtz para um campo eletromagnético

$$\nabla^2 A = - \left(\frac{\omega n}{c} \right)^2 A,$$

onde A é a amplitude do campo, ω é a sua frequência angular e c a velocidade da luz no vácuo, veremos que a curvatura gaussiana K tem o mesmo efeito em geodésicas que o índice de refração n tem para a luz. No entanto, diferentemente do caso da luz em que o ângulo de refração depende da sua velocidade em ambos os meios através do índice de refração (veja a Equação (3.63)), a refração de uma geodésica é tal que o seu ângulo (sempre medido no plano tangente) de refração é igual ao seu ângulo de incidência, pois a sua velocidade é constante.

Outro fenômeno interessante presente em esméticos é o da cáustica. Quando um feixe de luz converge em uma curva (ou superfície) através da reflexão (ou refração), observa-se

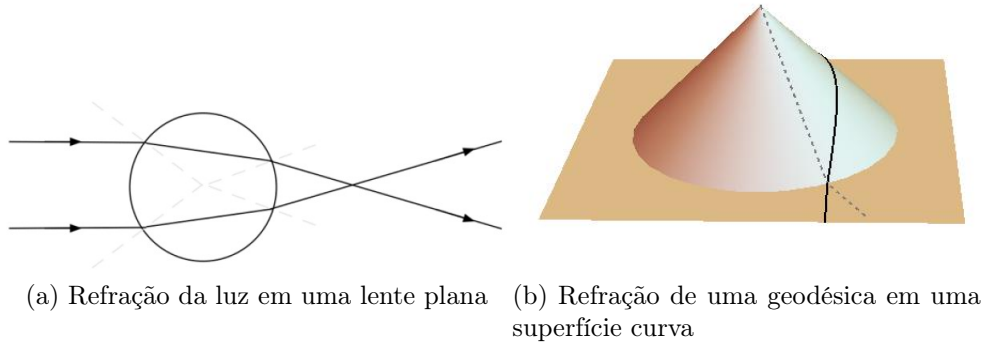


Figura 4.2: Refração da luz em uma lente plana e refração de uma geodésica em uma superfície curva. Na figura (b) a linha cheia representa a geodésica e a linha pontilhada é a normal à interface que separa o plano do cone.

o aparecimento de pontos singulares de curvatura infinita nas frentes de onda, localizados sobre aquela curva, conforme ilustra a Figura 4.3. Como a intensidade da luz é proporcional à curvatura das frentes de onda [39], ou seja

$$I(r) \propto A^2 = k(r), \quad (4.3)$$

ao longo dessa curva observa-se uma intensidade luminosa muito forte. A essa curva damos o nome de *cáustica* (é comum, no entanto, encontrar autores que adotam o termo *cáustica* para o feixe de luz convergente).

Analogamente, vemos a partir da Equação de Jacobi (3.52) que superfícies com curvatura gaussiana K predominantemente positiva geram geodésicas convergentes e, portanto, à formação de *grain boundaries*. Assim vemos que a cáustica em óptica é traduzida em *grain boundaries* no contexto de cristais líquidos. Nessas regiões o valor de ϕ da Equação (1.2) é bem definido, mas $\nabla\phi$ é descontínuo. Embora seja tentador chamar essas singularidades de defeitos, elas não o são. De fato, próximo a um defeito a fase ϕ assume todos os valores possíveis em seu entorno, ou seja, o vetor diretor $\mathbf{N}$ assume infinitas direções em uma vizinhança arbitrária do defeito. Em contraste, os *grain boundaries* possuem valores definidos de ϕ e, além disso, o vetor $\nabla\phi$ não assume todas as direções possíveis em torno dessas singularidades. Na analogia com óptica, diríamos que defeitos são regiões com amplitude nula, enquanto que o *grain boundary* é uma região de amplitude infinita, já que a curvatura das camadas esméticas ao longo dessas regiões é infinita (veja a Equação 4.3).

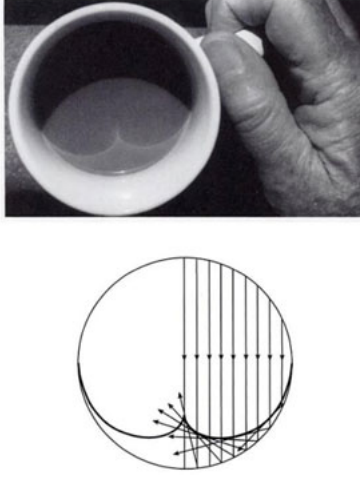


Figura 4.3: Na figura do topo, vemos a ocorrência da cáustica em um xícara de café, após o feixe de luz se refletir na superfície interna da xícara. A figura de baixo ilustra a trajetória dos raios de luz antes e depois da reflexão. Figura retirada de [38].

Entretanto, $K > 0$ não é uma condição suficiente para o aparecimento de *grain boundaries* em superfícies curvas. Mesmo para superfícies com $K < 0$ em que as geodésicas são divergentes (veja a Equação (3.52)), como por exemplo o *bump* gaussiano da Figura 4.1, observa-se a formação de *grain boundaries*. O motivo disso é que a derivada é um operador definido localmente e, portanto, a Equação (3.52) descreve apenas o comportamento local das geodésicas. Globalmente, mesmo quando as geodésicas são localmente divergentes, a presença de curvatura faz com que geodésicas inicialmente paralelas ao eixo x , por exemplo, e simétricas em relação ao plano xz se encontrem, formando os *grain boundaries* (veja a Figura 4.1). Mais precisamente, aplicando o Teorema de Gauss-Bonnet (ver o Capítulo 3) para o circuito composto por geodésicas da Figura 4.4, obtemos:

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\partial\Omega} k_g ds = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int_{\Omega} K dA, \quad (4.4)$$

onde α mede, de certa forma, o quão íngreme é o *grain boundary*. Portanto, mesmo que localmente as geodésicas sejam divergentes, a Equação (4.4) mostra que em geral $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Agora veremos alguns exemplos da aplicação desse formalismo.

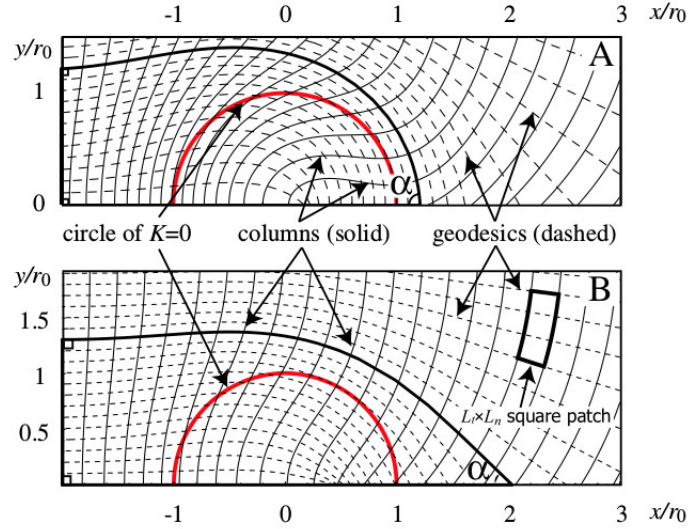


Figura 4.4: Exemplo da projeção da estrutura esmética sobre o *bump* gaussiano no plano. Figura retirada de [34].

4.2 Esméticos em algumas superfícies

Nessa seção apresentarei os primeiros resultados inéditos que obtivemos. Mostrarei a configuração esmética em algumas superfícies simples e de curvatura gaussiana constante, abrangendo os casos de curvatura nula (cone), curvatura positiva (semiesfera) e curvatura negativa (pseudo-esfera). Todos os resultados dessas configurações foram feitos computacionalmente utilizando o programa de álgebra computacional *Mathematica*.

4.2.1 Cone

O cone é um caso importante de se investigar pois se trata de uma superfície desenvolvível (ver Seção 3.4). Com efeito, através de um corte ao longo de um meridiano do cone, podemos transformá-lo no plano sem a necessidade de comprimir nem esticar as suas distâncias. Isso nos permite abordar o problema de maneira inteiramente analítica, melhorando nossa intuição para atacar problemas mais difíceis que exigem cálculos numéricos.

Podemos parametrizar o cone de geratriz R e abertura 2ζ por:

$$\begin{aligned} X(R, \Phi) &= R \cos \Phi \sin \zeta, \\ Y(R, \Phi) &= R \sin \Phi \sin \zeta, \\ Z(R, \Phi) &= -R \cos \zeta, \end{aligned} \tag{4.5}$$

em que (X, Y, Z) são as coordenadas cartesianas no cone. Se realizarmos um corte ao longo da linha meridional L , desde o ápice até a base do cone, e abrirmos essa superfície no plano, obteremos um disco com um setor circular de ângulo δ removido (veja a Figura 4.5). Impondo isometria entre o cone e o disco e lembrando de identificar as retas L no disco,

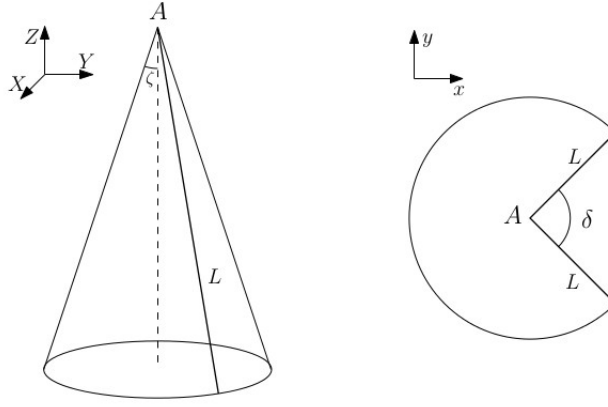


Figura 4.5: Transformação do cone para o plano através de um corte ao longo do meridiano L . Figura retirada de [8].

obtemos a transformação das coordenadas polares no plano (r, ϕ) para as coordenadas do cone (R, Φ) :

$$R = r, \tag{4.6a}$$

$$\Phi = \left(\phi - \frac{\delta}{2} \right) \csc \zeta, \tag{4.6b}$$

onde, em termos das coordenadas cartesianas do plano, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan \phi = \frac{y}{x}$. A Equação (4.6a) é imediata já que uma isometria preserva comprimentos. Para mostrar a Equação (4.6b) basta usar que os arcos de circunferências também são preservados. Assim, o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo ϕ no plano cortado

da Figura 4.5 é

$$l_1 = \left(\phi - \frac{\delta}{2} \right) r.$$

No cone, o comprimento de um arco de uma circunferência em que a geratriz é R é

$$l_2 = \Phi R \sin \zeta.$$

Usando a isometria e a Equação (4.6a), obtemos:

$$l_1 = l_2 \implies \Phi = \left(\phi - \frac{\delta}{2} \right) \csc \zeta.$$

Agora construirei as camadas esméticas considerando a presença de uma partícula coloidal (defeito de carga $+1$) sobre o cone. Vimos no Capítulo 2 que nesse caso as moléculas emanam radialmente a partir do ponto onde está localizada a partícula, da mesma forma que raios de luz são produzidos por uma fonte. Vamos supor que o defeito esteja localizado no ponto $p_0 = (-r_0, 0)$ do plano, correspondente ao ponto P_0 do cone. Assim, as geodésicas que partem de p_0 podem ser parametrizadas por:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= -r_0 + \lambda \cos \omega, \\ y(\lambda) &= \lambda \sin \omega, \end{aligned}$$

onde ω é o ângulo entre o eixo y e a geodésica do plano (veja a Figura 4.6). Então, as camadas esméticas são simplesmente circunferências concêntricas centradas em p_0 . Utilizando as transformações (4.6a) e (4.6b), encontramos as camadas esméticas no cone (Figura 4.7).

Veja que aparece um *grain boundary* mesmo com a curvatura gaussiana sendo nula, conforme discutido anteriormente (Seção 4.1). Além disso, o cone também é capaz de produzir defeitos no material quando o seu ângulo de meia abertura é menor que o da Figura 4.7. No entanto, nesse exemplo eu quis enfatizar o aparecimento de *grain boundaries* na presença de curvatura e por isso usei um ângulo de meia abertura tal que os defeitos não aparecem. Veremos adiante que outras superfícies também são capazes de gerar defeitos topológicos na estrutura esmética.

É ainda possível calcular como seriam as texturas schlieren observadas em um experimento. Sejam $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ e $Z(\lambda)$ as coordenadas das geodésicas no cone. O vetor tangente à geodésica (e, portanto, ortogonal às camadas esméticas) é então dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(\lambda) \\ \dot{Y}(\lambda) \\ \dot{Z}(\lambda) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \psi X + \sin \psi Y \\ -\sin \psi X + \cos \psi Y \\ \cos \psi Z \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

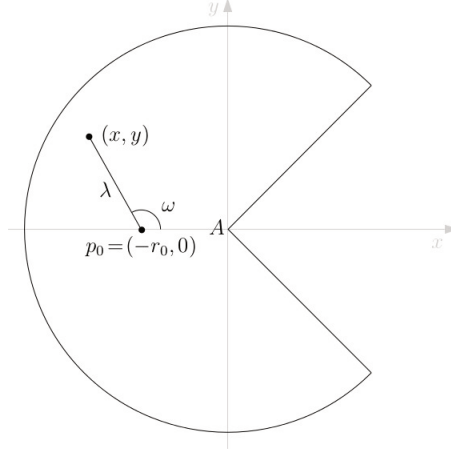


Figura 4.6: Visão do disco cortado obtido a partir do cone. Do ponto p_0 parte uma geodésica de inclinação ω parametrizada por λ . Figura retirada de [8].

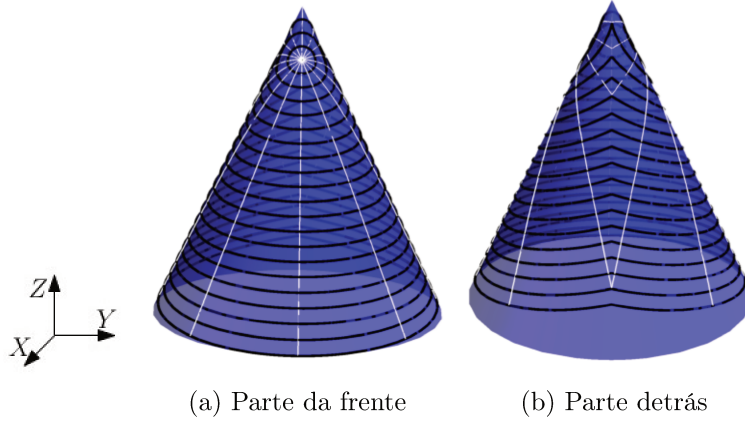


Figura 4.7: Configuração esmética sobre o cone na presença de um defeito de carga $+1$ contido no plano xz . As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

onde

$$k = \frac{\sin^2 \zeta}{X^2 + Y^2} \sqrt{(\lambda - r_0 \cos \omega)^2 + \left(\frac{r_0 \sin \omega}{\sin \zeta} \right)^2},$$

$$\psi = \arctan \left(\frac{r_0 \sin \omega}{(\lambda - r_0 \cos \omega) \sin \zeta} \right).$$

Normalizando a Equação (4.7), obtemos:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \zeta \cos^2 \psi}} \begin{pmatrix} \cos(\Phi - \psi) \\ \sin(\Phi - \psi) \\ -\cos \psi \cot \zeta \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Portanto, a projeção de N no plano XY faz um ângulo $\Phi - \psi$ com o eixo X :

$$N_p = \begin{pmatrix} \cos(\Phi - \psi) \\ \sin(\Phi - \psi) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

As moléculas do material esmético atuam como um terceiro polarizador, absorvendo as componentes do campo eletromagnético na direção paralela à elas e transferindo as componentes na direção do vetor N_p . Então, pela lei de Malus, concluimos que a intensidade da luz após atravessar o segundo polarizador é dada pela expressão

$$I \propto \sin^2(\Phi - \psi). \quad (4.10)$$

O cálculo teórico da textura schlieren, ou seja, o gráfico da intensidade I em função da posição no plano XY está ilustrado na Figura 4.8.

É interessante observar o fato notável que, ao contrário do que vimos no Capítulo 2, a textura da Figura 4.8 apresenta uma região com uma única terminação escura, o que por sua vez viola a regra das terminações pares existente no plano. Isso se deve ao fato de que a projeção N_p de N não é ortogonal às projeções das camadas esméticas no plano XY , ao contrário do vetor N e das camadas esméticos sobre o cone que se cruzam perpendicularmente.

4.2.2 Cone sobre o plano

O substrato da Figura 4.9 é resultado da rotação da função

$$f(x) = \begin{cases} -x \cot \zeta - R \cos \zeta, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

em torno do eixo z . Aqui ζ é a meia abertura do cone e R é a sua geratriz. Veja que para $x \leq 1$, a função $f(x)$ é uma reta de coeficiente angular $a = -\cot \zeta$ e coeficiente linear $b = -R \cos \zeta$, como deveria ser para o cone. Girando $f(x)$ em torno do eixo z por um ângulo ϕ obtemos uma parametrização da superfície:

$$X(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, f(r)).$$

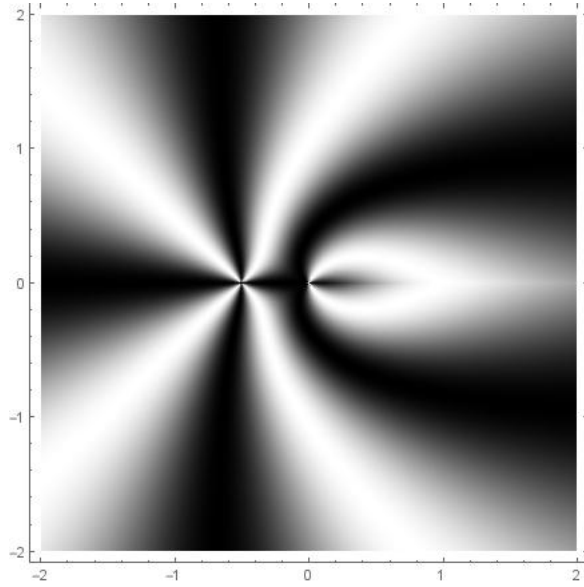


Figura 4.8: Textura schlieren do cone da Figura 4.7.

Tomaremos as condições iniciais um pouco diferentes desta vez: as geodésicas virão paralelas de $x = +\infty$ ao invés de emanarem do ponto P_0 , o que é equivalente a colocar o defeito $+1$ em $(+\infty, 0)$. Isso é equivalente a dizer que as camadas esméticas são paralelas e igualmente espaçadas no infinito, ou seja, a condição inicial é tal que no plano os esméticos estão no estado fundamental. Apesar da diferença em relação às condições iniciais anteriores, o procedimento ainda é o mesmo: basta encontrar as geodésicas no cone sujeitas a essas novas condições de contorno. Na interface, as geodésicas do plano (retas) são transformadas em geodésicas do cone, analogamente à lei de Snell. Nesse ponto, existem duas possibilidades: geodésicas muito próximas do eixo x ficam presas no cone, pois não podem se cruzar com outras geodésicas, enquanto que as geodésicas mais distantes de x retornam ao plano através de outra refração na interface. Como consequência do Teorema de Clairaut (Teorema 2) as geodésicas deixam o cone com um ângulo igual ao ângulo de entrada. Novamente, apesar dos defeitos estarem ausentes, surgem *grain boundaries* na textura esmética; veja a Figura 4.9.

Até agora todas as soluções foram passíveis de serem analisadas analiticamente, pois se tratavam de superfícies simples, cuja curvatura gaussiana era predominantemente nula. A seguir, atacarei o problema do cone sobre o plano, mas desta vez incluirei uma pequena suavização na interface entre essas superfícies. Em outras palavras, o perfil da superfície

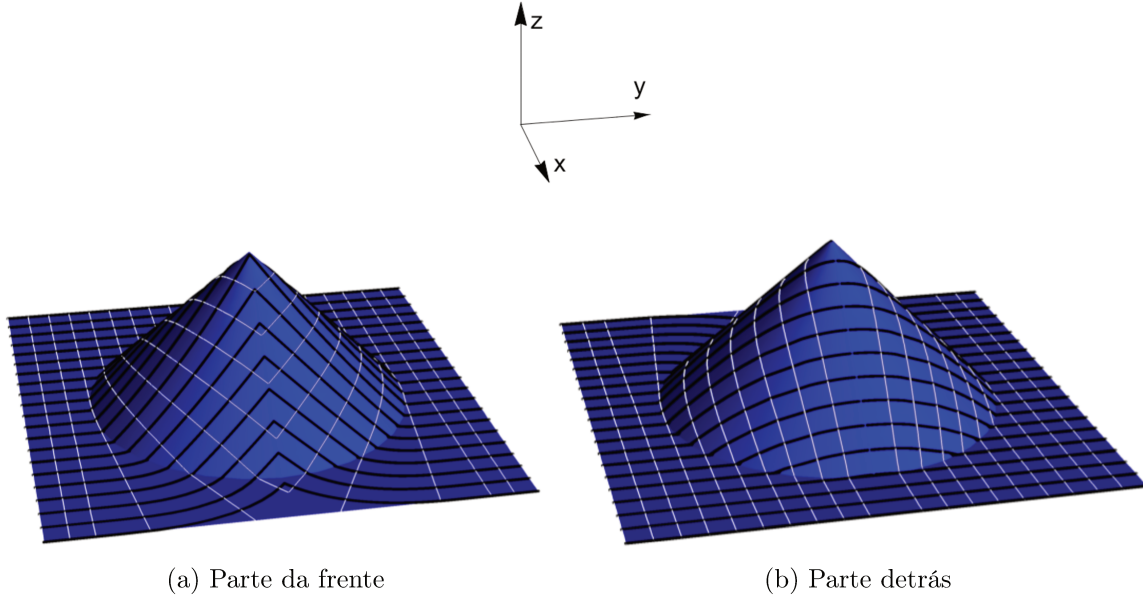


Figura 4.9: Configuração das camadas esméticas sobre a superfície cônica obtida analiticamente a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

resultante será:

$$f(x) = \begin{cases} -x \cot \zeta - R \cos \zeta & \text{se } 0 < x < 1 - \epsilon, \\ g(x) & \text{se } 1 - \epsilon \leq x \leq 1 + \epsilon, \\ 0 & \text{se } 1 + \epsilon < x \leq 1, \end{cases}$$

onde $g(x)$ é uma função arbitrária suave e $0 < \epsilon \ll 1$ é um número real também arbitrário. Para que $f(x)$ seja de classe C^2 , escolhi $g(x)$ como sendo um polinômio de quinto grau, de modo que os coeficientes sejam determinados de maneira que os diferentes ramos de $f(x)$, e suas respectivas derivadas de até segunda ordem, coincidam em $1 - \epsilon$ e $1 + \epsilon$. Embora a metodologia seja a mesma, as soluções da Figura 4.10 são numéricas. Na Figura 4.11 está ilustrada a projeção das camadas e das geodésicas sobre o plano xy juntamente com a correspondente textura schlieren. Como era de se esperar, não houve diferenças notáveis na estrutura esmética em comparação com o caso analítico. De fato, a configuração esmética é consequência da topologia de uma superfície e não deve depender da alteração da sua geometria local.

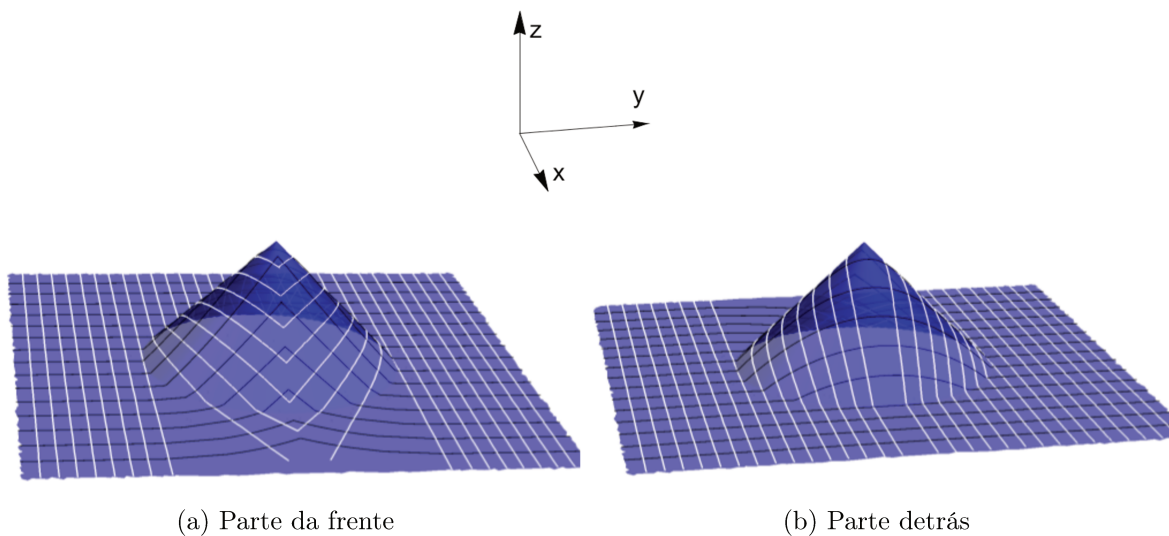


Figura 4.10: Configuração das camadas esméticas sobre a superfície cônica obtida numericamente a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

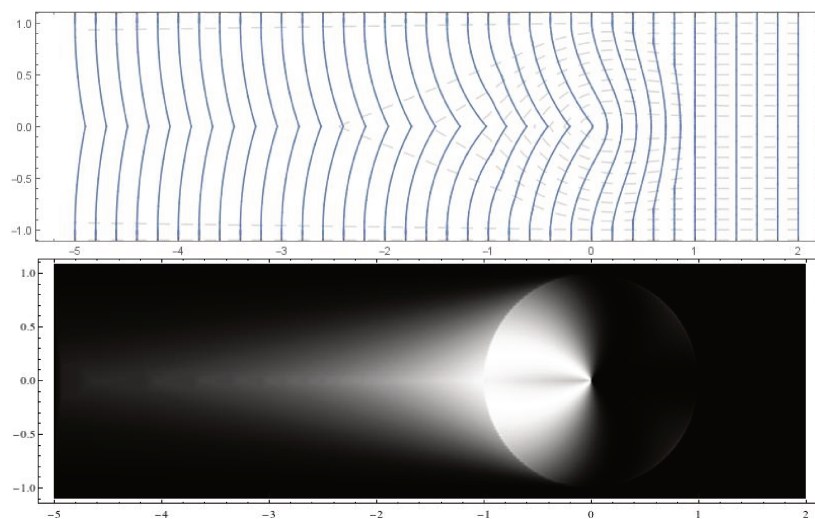


Figura 4.11: A figura de cima é a projeção das geodésicas (linhas tracejadas) e das camadas esméticas (linhas cheias) do cone suavizado sobre o plano. A figura de baixo é a respectiva textura schlieren.

4.2.3 Semiesfera sobre o plano

A semiesfera sobre o plano é a superfície de curvatura gaussiana positiva (exceto nas fronteiras com o plano) obtida pela rotação da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

em torno do eixo z . Aqui R é o raio da semiesfera. As condições iniciais são as mesmas que a do cone sobre o plano.

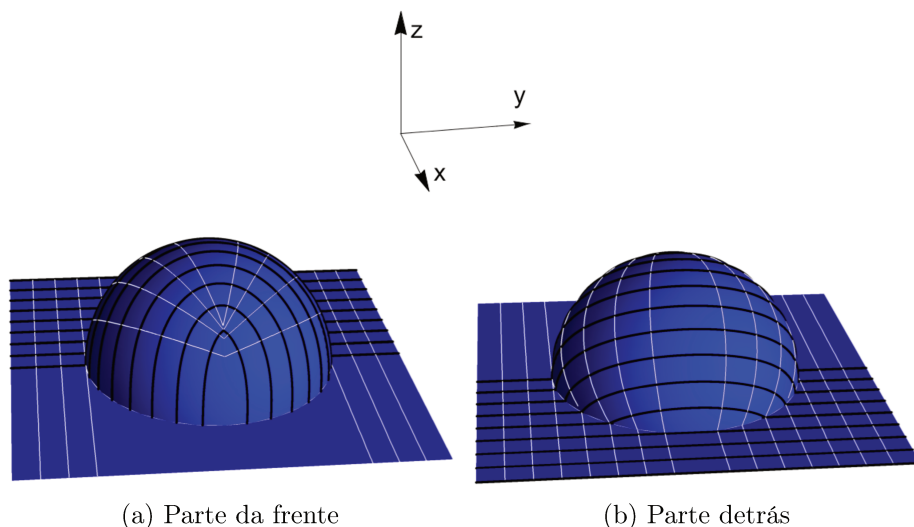


Figura 4.12: Configuração das camadas esméticas sobre a superfície esférica sobre o plano sem suavização obtido a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$. Na ausência de suavização, algumas regiões do plano não são alcançadas pelas geodésicas e, portanto, não conseguimos construir as camadas esméticas. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

Vimos na Seção 3.4 do Capítulo 3 que as geodésicas da esfera são círculos máximos. Na semiesfera sobre o plano, isso implica que o ponto de saída de uma geodésica para o plano é diametralmente oposto ao seu ponto de entrada. Por conseguinte, todas as geodésicas se cruzam com as geodésicas simétricas a elas em relação ao plano xz antes de voltarem para a região plana. Isso impede que as geodésicas sejam levadas de volta para o plano, levando à formação de uma “sombra” e impossibilitando a construção das camadas esméticas nessa região do plano, conforme ilustra a Figura 4.12.

Este problema pode ser resolvido se adicionarmos uma função suave entre as duas superfícies, da mesma maneira que fizemos na Seção 4.2.2. Assim, existirão geodésicas intermediárias entre as geodésicas do plano e as geodésicas da semiesfera que alcançarão a região escura do plano; veja as Figuras 4.13 e 4.14.

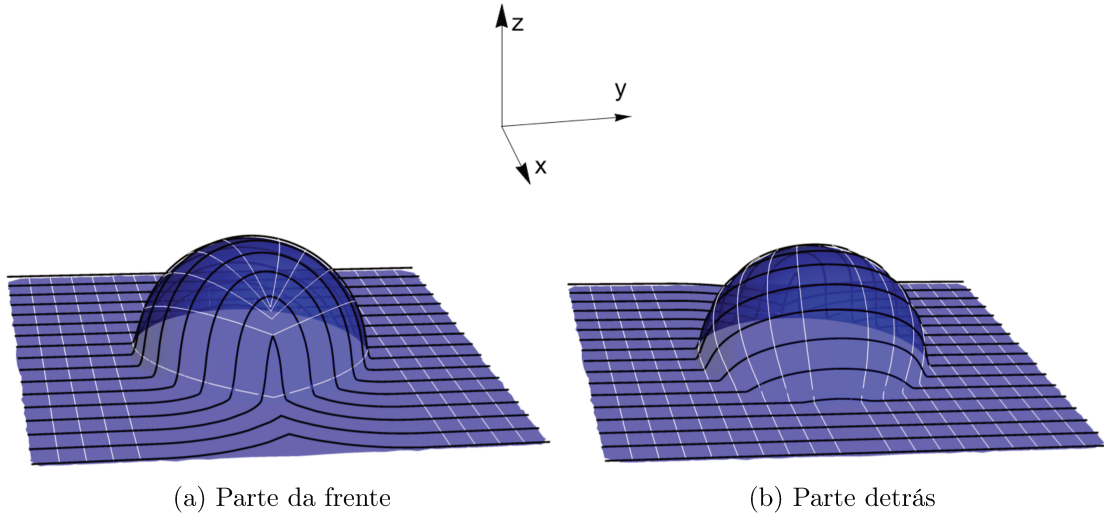


Figura 4.13: Configuração das camadas esméticas (linhas pretas) e das geodésicas (linhas brancas) sobre a superfície esférica no plano com suavização obtido a partir da condição inicial em que as camadas são paralelas ao eixo $\hat{y}$ para $x \rightarrow \infty$.

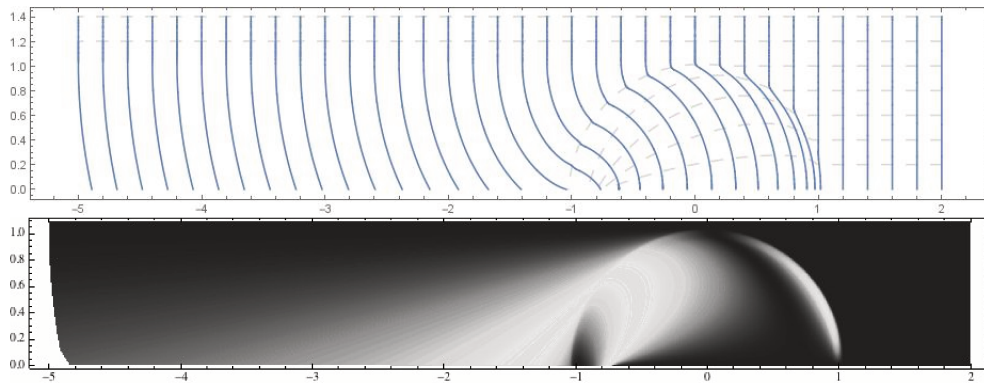


Figura 4.14: A figura de cima é a projeção das geodésicas (linhas tracejadas) e das camadas esméticas (linhas cheias) da semiesfera no plano suavizado sobre o plano. A figura de baixo é a respectiva textura schlieren.

Conforme prevíamos, as camadas esméticas fluem suavemente de volta para o plano, não sofrendo grandes alterações em sua estrutura nesta passagem. Novamente, observamos o aparecimento das cúspides na estrutura esmética devido a presença de curvatura. Isso ilustra o princípio geral de que, no limite onde as camadas são incompressíveis, a presença de curvatura gaussiana leva ao surgimento de singularidades na estrutura esmética. Todavia, nesse caso, a curvatura não foi suficiente para o surgimento de defeitos topológicos.

4.2.4 Pseudo-esfera

Por último, vamos analisar a textura esmética sobre a pseudo-esfera ($K < 0$) cujo perfil é

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

onde $h(x) = -\sqrt{1-x^2} + \text{arcsech } x$ é a famosa curva denominada tratriz [25]. As condições iniciais são as mesmas que as das demais superfícies e o resultado está ilustrado na Figura 4.15.

Mais uma vez vemos o aparecimento de singularidade nas camadas, o qual é resultado da simples presença de curvatura. Mais interessante ainda é o aparecimento de um defeito de carga -1 ao longo do mesmo meridiano que contém o *grain boundary*. O que é notável é que não existe nenhuma partícula localizada onde surge o defeito. O que ocorre é que a curvatura da superfície interage com os esméticos produzindo partículas virtuais¹, ou seja, partículas que não existem mas cujo efeito na estrutura esmética é o mesmo do que se existisse. Nesse caso, o protagonista na produção de defeitos topológicos é a própria curvatura.

Por fim, vale a pena ressaltar que a presença de curvatura gaussiana não implica no aparecimento de defeitos. A semiesfera sobre o plano, por exemplo, apesar de demonstrar *grain boundary*, não apresenta defeitos. Veremos adiante que outras superfícies levam ao surgimento de defeitos com cargas $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, e nem sempre apresentam *grain boundaries*. Isso mostra que o processo de criação de defeitos e *grain boundaries* tem origens diferentes, apesar de ambos estarem relacionados à curvatura do substrato. Por um lado, sabemos que a presença de curvatura leva ao surgimento das cúspides nas camadas esméticas devido à Equação 4.4. Por outro lado, no entanto, ainda que a curvatura esteja presente, ela não é a única condição necessária para o aparecimento de defeitos topológicos.

¹Chamamos tais objetos de partículas virtuais já que seu efeito é semelhante ao de uma partícula real. Veja, no entanto, que esse conceito não compartilha nenhuma semelhança com as partículas virtuais que surgem no contexto da física de altas energias.

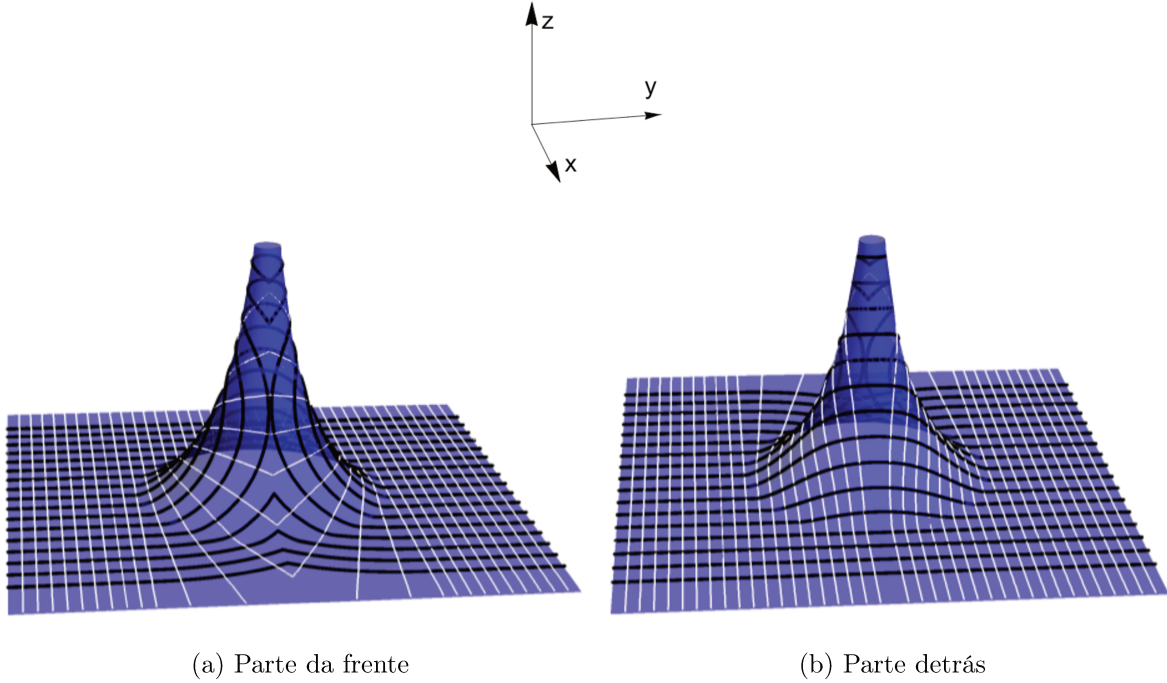


Figura 4.15: Estrutura esmética sobre a pseudo-esfera. As linhas pretas são as camadas esméticas e as linhas brancas são as geodésicas. Observe que, apesar da curvatura gaussiana ser negativa, ocorre a formação de *grain boundary*. Além disso, vemos que surge um defeito topológico de carga -1 no material.

4.3 Optometria esmética

Nesta seção, abordarei uma maneira inédita de se obter configurações esméticas em superfícies curvas. O que faremos é, essencialmente, unir a analogia entre óptica e esméticos, apresentada na Seção 4.1, com a equivalência entre lentes planas e superfícies curvas da Seção 3.6, de modo que se torna possível obter configurações esméticas desejadas através de soluções de lentes conhecidas.

O olho-de-peixe de Maxwell, por exemplo, é uma lente de índice de refração

$$n(r) = \frac{2}{1 + r^2},$$

tal que se a fonte de luz for colocada sobre o círculo unitário, a imagem se formará sobre o círculo unitário no ponto diametralmente oposto ao da fonte (Figura 3.14a). Da Equação (3.72) e da Tabela 3.1, obtemos que a superfície equivalente é a semi-esfera.

Dessa maneira, colocar no plano da lente duas fontes de luz, uma sobre a imagem da outra, é equivalente a colocar duas partículas coloidais (defeitos de carga $+1$) nas posições correspondentes da semi-esfera, ou seja, nas posições $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, expressas em coordenadas cartesianas. A Figura 4.16 ilustra os esméticos construídos dessa forma. Observe que nessas condições surgem dois outros defeitos de carga $-\frac{1}{2}$ localizados na

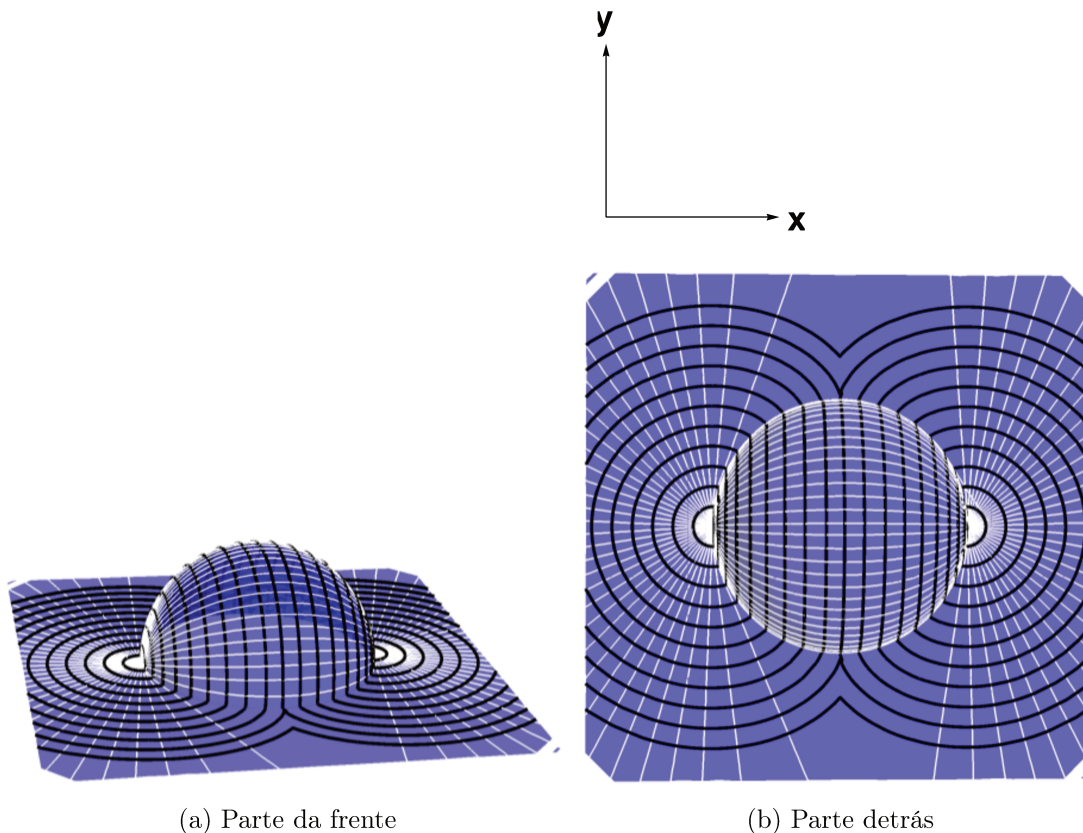


Figura 4.16: Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Maxwell. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

borda da lente e ao longo do eixo y , resultando em uma carga topológica total de $+1$. De fato, se olharmos para as camadas esméticas localizadas no infinito, veremos que estas são círculos concêntricos centrados na origem, como deveria ser dado que a carga topológica total é conservada. Novamente, é importante frisar que não existem partículas no local onde foram criados os defeitos de carga $-\frac{1}{2}$. Ao invés disso, a curvatura faz com que surjam partículas virtuais no material, que por sua vez, produzem esses defeitos. Em

adição, vemos que também surgem *grain boundaries* ao longo do eixo y em $|y| > 1$.

A lente da Figura 3.14c, denominada lente de Eaton, apresenta índice de refração

$$n(r) = \sqrt{\frac{2}{r} - 1}.$$

Tal lente leva os raios paralelos provenientes do infinito de volta para o infinito através de uma rotação de π . Observe que isso faz com que exista um defeito de carga $+\frac{1}{2}$ no ápice da superfície associada. A estrutura esmética correspondente está ilustrada na Figura 4.17. É interessante notar que neste caso não são formados *grain boundaries*, pois para

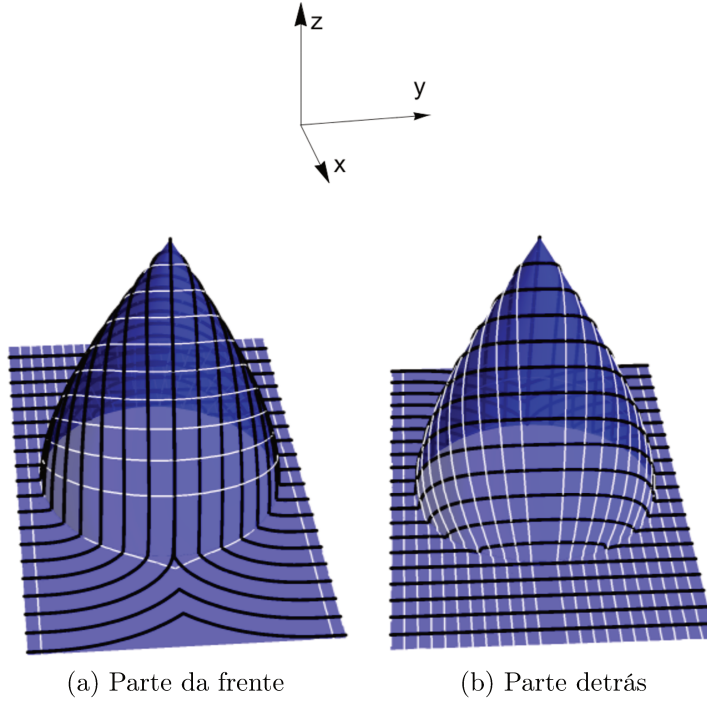


Figura 4.17: Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Eaton. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

toda geodésica temos da Equação (4.4) que:

$$\alpha = \int_{\Omega} K dA = \frac{\pi}{2}.$$

Por conta disso, o custo de energia para essa configuração é muito menor do que nos outros casos em que *grain boundaries* estão presentes.

Outra lente bastante conhecida é o olho-de-peixe de Maxwell generalizado, cujo índice de refração é

$$n_M(r) = \frac{2r^{\frac{1}{M}-1}}{1 + r^{2/M}},$$

onde $M = A + B$. Observamos que, embora o M seja arbitrário para as soluções na lente, ele não o é para as soluções na superfície. De fato, vimos no final da Seção 3.6 que $|M| \geq 1$, caso contrário a superfície não pode ser mergulhada no espaço euclidiano.

Essa lente faz com que se formem $\frac{2}{M} - 1$ focos equidistantes da fonte. Vemos que para $M = 1$ o índice de refração se reduz ao do olho-de-peixe de Maxwell usual. Para $M = 2$, a imagem de um objeto localizado sobre a borda da lente é formada sobre o próprio objeto (Figura 4.18). Então, ao colocarmos uma partícula coloidal sobre a borda da superfície

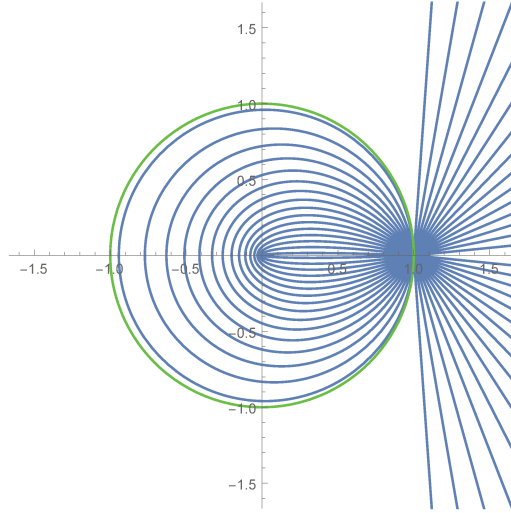


Figura 4.18: Trajetória dos raios de luz, partindo da borda, para a lente generalizada de Maxwell com $M = 2$.

correspondente à

$$n_2(r) = \frac{2}{\sqrt{r}(1+r)},$$

observamos o aparecimento de um defeito de carga $+\frac{1}{2}$ (Figura 4.19). Diferentemente da lente de Eaton, onde o defeito $+\frac{1}{2}$ é resultado dos raios vindo paralelamente do infinito, neste caso o defeito é consequência da presença do colóide na borda da superfície.

Outra classe de superfícies possíveis pode ser obtida através da justaposição das superfícies apresentadas ao longo dessa seção. Isso permitiria a criação de configurações esméticas ainda mais complexas, no entanto isso será deixado para trabalhos futuros.

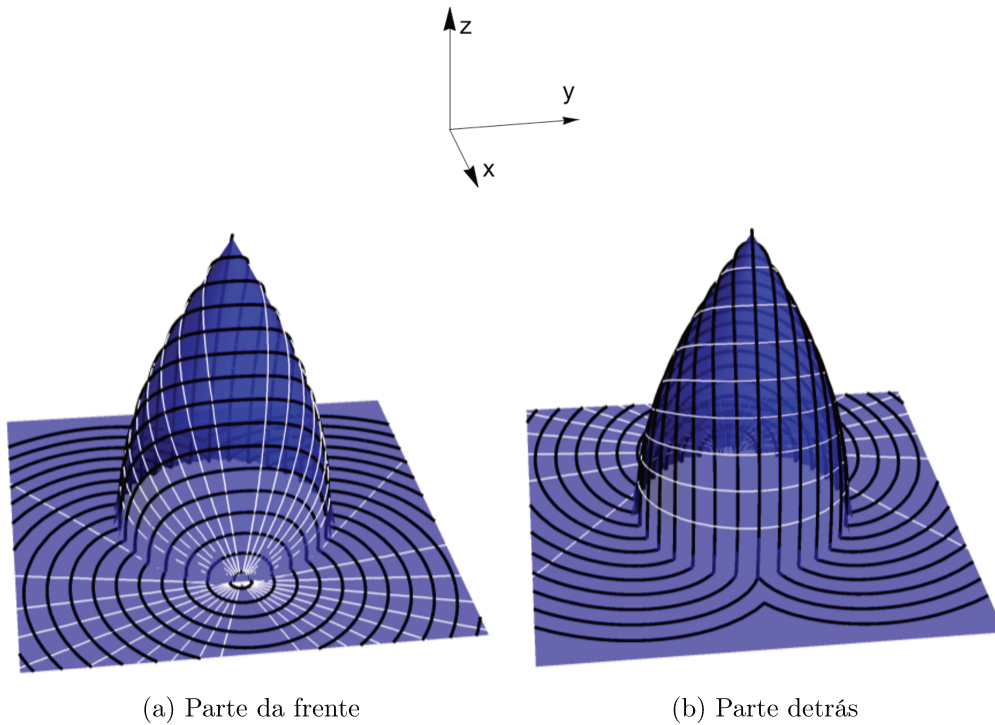


Figura 4.19: Ilustrações da configuração esmética sobre a superfície equivalente à lente de Maxwell generalizada na presença de um defeito topológico de carga $+1$ sobre a borda. As linhas brancas representam as geodésicas e as linhas pretas as camadas esméticas.

Por fim, concluímos dessa seção que, da mesma forma que é possível projetar lentes específicas afim de manipular uma imagem, é possível construir uma superfície cuja geometria leva a texturas esméticas desejadas. Portanto, da mesma maneira que a optometria vem demonstrando tamanha importância nas aplicações práticas, acredito que a optometria esmética poderá alcançar resultados práticos de grande interesse para a ciência e tecnologia em geral.

Capítulo 5

Conclusão

A análise das estruturas esmélicas de espaçamento uniforme em algumas superfícies curvas revelou a existência de defeitos e *grain boundaries*, os quais não são observados em esmélicos, nessas mesmas condições, no plano. Mesmo na ausência de colóides, é possível observar o aparecimento de defeitos topológicos devido, única e exclusivamente, à presença de curvatura. De certa forma, a curvatura interage com o material esmélico produzindo partículas virtuais, cujo efeito é o mesmo de uma partícula real (colóide). Isso nos leva a crer na existência de um princípio geral que afirma que sempre que houver curvatura, singularidades estarão presentes na estrutura do material esmélico. Além disso, os resultados também mostraram que as regras para as texturas schlieren no plano não permanecem válidas em substratos curvos, pois as projeções das camadas esmélicas no plano não são ortogonais às projeções das geodésicas. Isso produz manchas escuras com um número de terminações ímpar, ao contrário do que se é observado no plano. Dessa maneira, sem saber de antemão qual é a geometria do substrato, torna-se possível deduzir se ele é curvo a partir da observação da textura schlieren.

Nas condições de incompressibilidade, vimos que os esmélicos são guiados pelas geodésicas do substrato, compartilhando dessa forma várias analogias com a óptica geométrica, justificada pelo Princípio de Fermat. Quando levamos essa analogia adiante e juntamos com a equivalência entre lentes planas e espaços curvos com índice de refração unitário, conseguimos elaborar materiais esmélicos com propriedades ópticas desejadas. Assim, partindo de soluções de lentes conhecidas, podemos manufaturar superfícies que produzirão esmélicos com defeitos de diversas cargas topológicas. Como esses defeitos têm grande influência nas propriedades mecânica e óptica de cristais líquidos, esse resultado pode ter grande interesse prático.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Kleman and O. D. Lavrentovich, *Soft Matter Physics: An Introduction*. Partially Ordered Systems, New York, NY: Springer New York, 2004.
- [2] G. P. Alexander, R. D. Kamien, and R. A. Mosna, “Conformal smectics and their many metrics,” *Physical Review E*, vol. 85, p. 050701, May 2012.
- [3] M. Bowick, L. Chandar, E. Schiff, and A. Srivastava, “The cosmological Kibble mechanism in the laboratory: String formation in liquid crystals,” *Science*, 1994.
- [4] A. Carvalho, C. Sátiro, and F. Moraes, “Aharonov-Bohm-like effect for light propagating in nematics with disclinations,” *EPL (Europhysics Letters)*, p. 6, Sept. 2007.
- [5] P. Chaikin and T. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] P. D. Gennes and J. Prost, *The physics of liquid crystals*. Oxford University Press, 1993.
- [7] C. Santangelo and R. Kamien, “Curvature and topology in smectic-A liquid crystals,” *Proc. R. Soc.*, vol. 461, pp. 2911–2921, Sept. 2005.
- [8] R. Mosna, D. Beller, and R. Kamien, “Breaking the rules for topological defects: Smectic order on conical substrates,” *Physical Review E*, pp. 1–7, 2012.
- [9] X. Xing, “Topology and Geometry of Smectic Order on Compact Curved Substrates,” *Journal of Statistical Physics*, p. 56, June 2008.
- [10] S. Sternberg, *Curvature in mathematics and physics*. Dover Publications, 2012.
- [11] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.

- [12] N. Mermin, “The topological theory of defects in ordered media,” *Reviews of Modern Physics*, no. 3, 1979.
- [13] H. Trebin, “The topology of non-uniform media in condensed matter physics,” *Advances in Physics*, 1982.
- [14] M. Kurik and O. Lavrentovich, “Defects in liquid crystals: homotopy theory and experimental studies,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 196, 1988.
- [15] M. Kleman and J. Friedel, “Disclinations, dislocations and continuous defects: a reappraisal,” *Reviews of Modern Physics*, p. 72, Apr. 2007.
- [16] D. Ruppel and E. Sackmann, “On defects in different phases of two-dimensional lipid bilayers,” *Journal de Physique*, 1983.
- [17] V. Poénaru, “Some aspects of the theory of defects of ordered media and gauge fields related to foliations,” *Communications in mathematical physics*, vol. 136, pp. 127–136, 1981.
- [18] B. O’neill, *Elementary differential geometry*. Elsevier, 2 ed., 2006.
- [19] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2010.
- [20] M. Cavallaro Jr, M. a. Gharbi, D. a. Beller, S. Čopar, Z. Shi, R. D. Kamien, S. Yang, T. Baumgart, and K. J. Stebe, “Ring around the colloid,” *Soft Matter*, vol. 9, no. 38, p. 9099, 2013.
- [21] R. Kamien, “The geometry of soft materials: a primer,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. October, 2002.
- [22] V. Koning and V. Vitelli, “Crystals and liquid crystals confined to curved geometries,” *arXiv preprint arXiv:1401.4957*, pp. 1–30, 2014.
- [23] R. S. Millman and G. D. Parker, *Elements of Differential Geometry*. Pearson, 1977.
- [24] M. Carmo, *Riemmanian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [25] M. D. Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Pearson, 1976.
- [26] M. Šarbot and T. Tyc, “Spherical media and geodesic lenses in geometrical optics,” *Journal of Optics*, vol. 14, p. 075705, July 2012.

- [27] M. Šarbot and T. Tyc, “Multi-focal spherical media and geodesic lenses in geometrical optics,” *Journal of Optics*, vol. 15, p. 125716, Dec. 2013.
- [28] S. Sottini, V. Russo, and G. Righini, “General solution of the problem of perfect geodesic lenses for integrated optics,” *JOSA*, vol. 69, p. 1248, Sept. 1979.
- [29] S. Cornbleet and P. Rinous, “Generalised formulas for equivalent geodesic and nonuniform refractive lenses,” *IEE Proceedings H (Microwaves, Optics and Antennas)*, vol. 128, no. 2, pp. 95–101, 1981.
- [30] S. Cornbleet and M. Jones, “Transformation of spherical nonuniform lenses,” *IEE Proceedings H (Microwaves, Optics and Antennas)*, vol. 129, no. 6, pp. 321–324, 1982.
- [31] K. S. Kunz, “Propagation of microwaves between a parallel pair of doubly curved conducting surfaces,” *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 5, p. 642, 2004.
- [32] A. Carter, “A class of inverse problems in physics,” *American Journal of Physics*, no. November 1999, pp. 698–703, 2000.
- [33] R. R. D. Kamien and C. C. D. Santangelo, “Smectic Liquid Crystals: Materials with One-Dimensional, Periodic Order,” *Geometriae Dedicata*, vol. 1, no. 1, pp. 1–16, 2008.
- [34] C. Santangelo, V. Vitelli, R. Kamien, and D. Nelson, “Geometric theory of columnar phases on curved substrates,” *Physical review letters*, vol. 99, p. 017801, July 2007.
- [35] B. Chen, G. P. Alexander, and R. D. Kamien, “Symmetry breaking in smectics and surface models of their singularities,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 106, no. 37, pp. 15577–15582, 2009.
- [36] G. Alexander, R. Kamien, and C. Santangelo, “Developed smectics: when exact solutions agree,” *Physical Review Letters*, vol. 108, Jan. 2012.
- [37] R. Kamien, D. Nelson, C. Santangelo, and V. Vitelli, “Extrinsic curvature, geometric optics, and lamellar order on curved substrates,” *Physical Review E*, vol. 80, p. 051703, Nov. 2009.
- [38] J. F. Nye, *Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations*. CRC Press, 1999.

- [39] J. Arnold, “Geometrical theories of wave propagation: a contemporary review,” *IEE Proceedings J (Optoelectronics)*, vol. 133, no. 2, 1986.
- [40] A. Bausch, M. Bowick, and A. Cacciuto, “Grain boundary scars and spherical crystallography,” *Science*, vol. 299, pp. 1716–8, Mar. 2003.
- [41] D. Beller, M. Gharbi, A. Honglawan, and K. Stebe, “Focal Conic Flower Textures at Curved Interfaces,” *Physical Review X*, vol. 3, p. 041026, Dec. 2013.
- [42] C. Blanc and M. Kleman, “The confinement of smectics with a strong anchoring,” *The European Physical Journal E*, vol. 251, pp. 241–251, 2001.
- [43] S. Cornbleet, “Geometrical optics reviewed: A new light on an old subject,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 71, no. 4, 1983.
- [44] L. Michel, “Symmetry defects and broken symmetry. Configurations hidden symmetry,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 52, no. 3, 1980.
- [45] V. Vitelli, J. Lucks, and D. Nelson, “Crystallography on curved surfaces,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 103, pp. 12323–8, Aug. 2006.
- [46] C. Sátiro and F. Moraes, “A liquid crystal analogue of the cosmic string,” *Modern Physics Letters A*, vol. 20, no. 33, pp. 2561–2565, 2005.