

Maurílio Ferreira Salgado

Fenomenologia de Medidas Diretas de Massa de Neutrino

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, que foi defendida por Maurílio Ferreira Salgado e aprovada pela comissão julgadora em 05/07/2010.



Prof. Dr.: Orlando Luis Goulart Peres
Orientador

IFGW - DRCC - UNICAMP

Julho de 2010

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

Sa32f Salgado, Maurílio Ferreira
Fenomenologia de medidas diretas de massa de neutrino /
Maurílio Ferreira Salgado. -- Campinas, SP : [s.n.], 2010.

Orientador: Orlando Luis Goulart Peres.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Massa de neutrinos. 2. Fenomenologia. 3. Medidas
diretas de massa. 4. KATRIN. I. Peres, Orlando Luis Goulart.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb
Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Neutrino mass direct measurement phenomenology
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Neutrino mass
 2. Phenomenology
 3. Direct mass measurements
 4. KATRIN
- **Área de Concentração:** Física das Partículas Elementares e Campos
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca Examinadora:**
Prof. Orlando Luis Goulart Peres
Prof. Pedro Cunha de Holanda
Prof. Celso Chikahiro Nishi
- **Data da Defesa:** 05-07-2010
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **MAURÍLIO FERREIRA SALGADO – RA 034806** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 05 / 07 / 2010.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres - Orientador do Candidato
DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Celso Chikahiro Nishi – UFABC-Santo André-SP

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – DRCC/IFGW/UNICAMP

"Os homens estão totalmente enterrados na sepultura dos costumes. Alguns têm apenas o topo da cabeça acima da terra. Aqueles que estão fisicamente mortos passam bem melhor, pois apodrecem mais intensamente."

Henry Thoreau

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Vera e José (*in memoriam*), por terem dado a mim a vida, educação e carinho. À minha mãe agradeço especialmente por ter me sustentado e apoiado durante a graduação, e pelo imenso amor e dedicação.

Aos meus tios e tias que me incentivaram e deram auxílio financeiro.

À minha família pelo carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres que sempre me incentivou a superar limites e estimulou-me a fazer cursos que foram muito produtivos, pela sua dedicação e paciência.

Ao meu colega Diego pela sua pronta ajuda sempre que solicitada e ao Fernando por me ajudar com programação.

Aos meus queridos amigos que fiz em Campinas: Bruno, Daniel, Eduardo, Eric, Murilo, Raphael, Ronaldo, e Vítor.

À velha guarda varginhense: Daniel e Luis.

Aos inesquecíveis companheiros de kit e de casa: Daniela, Pedro, Pri, Rafael, Reis, Renata.

À Marília, minha amadíssima namorada.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

A massa é um dos objetos de estudo mais importantes em física de neutrinos, talvez o mais importante. Nesta dissertação discutimos como se dá a geração de massa no Modelo Padrão, que é capaz de explicar de maneira compacta grande parte da diversidade dos fenômenos observados em física de partículas. Nele o neutrino é previsto como uma partícula sem massa. Na sequência discutimos sobre a oscilação, atualmente quase unânime na comunidade científica, e como a hipótese de oscilação de neutrinos implica a existência da massa do neutrino (divergindo do Modelo Padrão) e estudamos as possibilidades de o neutrino ser uma partícula de Dirac ou Majorana. Por fim, dedicamos atenção ao fenômeno de duplo decaimento beta, que é uma tentativa de identificar qual tipo de partícula é o neutrino, e especialmente ao KATRIN (Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment) que visa à determinação da escala absoluta de massa dos neutrinos através do espectro do elétron no decaimento beta do trítio. Nesse reproduzimos a sensibilidade esperada (0.2eV) por um método independente e testamos, para quatro neutrinos misturados e massivos, como o espectro se modifica e se o experimento conseguiria discriminar esse caso, o que se mostrou inviável.

Abstract

The mass is one of the most important study subjects in neutrino physics, if not the most important. In this dissertation we discuss how mass is generated in the Standard Model, which explains in a compact way almost all of the observed phenomena diversity in particle physics. It forecasts a massless neutrino. Following we expatiate on neutrino oscillations, almost unanimous in the scientific community nowadays, and argue how the neutrino oscillation hypothesis implies the existence of neutrino mass (diverging of Standard Model) and study the possibilities that the neutrino could be a Dirac or Majorana particle. Lastly, we devote attention to the double beta decay experiment, which is a trial in identifying which particle the neutrino is, and specially to KATRIN (Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment) which aims the determination of the neutrino mass scale using the electron spectra in tritium beta decay. In this one we reproduce the expected sensitivity (0.2eV) by an independent method and test, for four mixed and massive neutrinos, how the spectrum modifies and if the experiment could differentiate this case, which proved impracticable.

Sumário

Introdução	2
1 O Modelo Padrão	5
1.1 Lagrangeana Eletrofraca	6
1.2 Interações Eletrofracas	9
1.3 Três Gerações	13
1.4 O Mecanismo de Higgs	15
1.5 A Massa dos Léptons	18
2 As Massas dos Neutrinos	21
2.1 Oscilação de Neutrinos	22
2.2 Violação de CP	24
2.3 Massa de Dirac	27
2.4 Massa de Majorana	29
3 Medidas Diretas das Massas dos Neutrinos	33
3.1 Duplo Decaimento Beta	34
3.2 Decaimento Beta Relativístico	41
3.3 O Experimento KATRIN	47
4 Conclusões	57

Introdução

A história das interações fracas tem início em 1896 com a descoberta da radioatividade do urânio. Três anos depois, Rutherford descobriu que existiam dois produtos diferentes, α e β , sendo γ descoberto mais tarde. Em 1914 foi mostrado que o espectro β era contínuo, em contraste com os outros dois que são únicos em energia. Essa característica do espectro β carecia de explicação [1].

A existência de uma partícula neutra e fracamente interagente foi proposta por W. Pauli no dia 4 de dezembro de 1930 em uma carta pública numa conferência em Tubingen como uma maneira de solucionar o problema do espectro contínuo do decaimento beta. Ele chamou este férmion de neutrino, com a massa da mesma ordem da do elétron [2].

Após a descoberta do neutrino por J. Chadwick em 1932 [3] a partícula de Pauli foi rebatizada de neutrino. Em 1934 Fermi formulou sua teoria do decaimento beta [4, 5]. Com a descoberta do múon em 1937 o horizonte das interações fracas havia aumentado. As observações do decaimento do múon levaram B. Pontecorvo a propor em 1947 [6] a universalidade das interações de Fermi de elétrons e múons.

Apesar do sucesso da teoria de Fermi ter deixado poucos em dúvida sobre a existência dos neutrinos foi só em 1956 que F. Reines e C.L. Cowan publicaram o artigo [7] que confirmava a detecção do neutrino pela primeira vez. Neste primeiro experimento de antineutrinos de reator, os mesmos eram gerados pelo reator (decaimento beta) e atirados contra prótons em um alvo, produzindo neutrons e pósitrons (decaimento beta inverso), que por sua vez poderiam ser e foram detectados se tornando uma evidência indireta da existência dos neutrinos.

Na mesma época, alguns começaram a questionar a validade da conservação da paridade nas interações fracas, mas foram T.D. Lee e C.N. Yang [8] que notaram e propuseram testes para observar a violação de paridade, a qual foi confirmada no decaimento beta do cobalto polarizado [9].

Outro evento de suma importância na física de partículas foi a formulação do Modelo Padrão(MP) [10, 11], em 1967, que incorporava o mecanismo de Higgs [12, 13, 14] no modelo do Glashow [15]. A prova de sua renormalizabilidade por G. 't Hooft [16, 17, 18] elevou o status do modelo. A consagração veio enfim com a confirmação da corrente neutra pelo experimento Gargamelle no CERN em 1973 [19, 20, 21].

Até hoje nenhum experimento realizado obteve desvios conclusivos do MP, exceto oscilação de neutrinos, que mostrou que os neutrinos são massivos e misturados. No Modelo Padrão os neutrinos possuem massa zero. Essa diferença fez do MP uma teoria efetiva de uma teoria ainda desconhecida e deu ao neutrino um novo papel no cenário das partículas elementares, como o mensageiro de uma nova física além do MP.

O conceito de oscilação de neutrinos foi primeiramente proposto por Pontecorvo [22, 23] motivado pela oscilação dos káons onde o número quântico estranheza oscila. O análogo pos-

sível na época era a oscilação neutrino-antineutrino sendo eles partículas de Majorana. Vários experimentos de oscilação foram realizados usando neutrinos atmosféricos, vindos de reatores ou do sol. A quantidade de informação adquirida e o sucesso da hipótese de oscilação no ajuste dos dados colocou em terra firme o fenômeno.

Outra questão de importância fundamental e que ainda está em aberto é quanto à natureza dos neutrinos, se são partículas de Dirac ou de Majorana. Os experimentos de duplo decaimento beta sem neutrino são considerados a melhor forma de responder essa pergunta [24].

Recentemente, foi aprendido que os neutrinos possuem um papel importante na história do Universo de diversas maneiras. Por exemplo, o número de espécies de neutrinos afeta a nucleossíntese primordial, que conseqüentemente determina a composição dos elementos no Universo. Os neutrinos relíquia, que desacoplaram do resto do plasma primordial quando o Universo tinha aproximadamente um segundo de vida, são a segunda partícula mais abundante no Universo, com uma densidade de número menor que do fóton por um fator de 3/11 para cada família [25]. A detecção direta de neutrinos relíquia continua como um dos grandes desafios científicos do século vinte e um, devido à sua fraquíssima interação.

Nesta dissertação apresentaremos no primeiro capítulo o formalismo do Modelo Padrão para as interações eletrofracas, e como se dá a geração de massa via mecanismo de Higgs. No segundo olhamos com mais detalhe o caso dos neutrinos, discutindo a oscilação e suas implicações na massa, e quais os tipos possíveis para a massa do neutrino (Dirac, Majorana e Dirac-Majorana). Neste capítulo também visitamos o fenômeno de violação de CP e como isto pode afetar alguns experimentos. Por fim, no terceiro capítulo tratamos do duplo decaimento beta e do decaimento beta, com o foco no último em que analisamos com detalhe o experimento KATRIN que tem por objetivo medir a massa do neutrino do elétron. Reproduzimos a sensibilidade esperada do referido experimento e fizemos um teste para ver como a mistura de quatro neutrinos afeta o espectro beta e se o experimento conseguiria distinguir essa situação.

Nesta dissertação utilizamos unidades naturais de medida, $\hbar = c = 1$. Também usamos a convenção de escrever vetores em negrito. Há, no entanto, casos em que usamos negrito para distinção de outras quantidades, mas o contexto deixa claro quando é vetor e quando não.

Capítulo 1

O Modelo Padrão

O Modelo Padrão (MP) descreve as interações fortes, fracas e eletromagnéticas das partículas elementares. É uma teoria de gauge baseada no grupo de simetria local $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ onde os subíndices C, L e Y denotam, respectivamente, cor, isospin e hipercarga fraca. O grupo de gauge determina unicamente as interações e o número de bósons vetoriais que correspondem aos geradores do grupo (ou combinações lineares dos geradores). São eles, oito glúons correspondendo aos oito geradores do grupo $SU(3)_C$ das interações fortes; quatro bósons de gauge intermediadores das interações eletrofracas, dos quais três são massivos ((W^\pm) e Z) e um não (γ , o fóton), correspondendo aos três geradores de $SU(2)_L$ e ao gerador de $U(1)_Y$. Como as interações eletrofracas podem ser estudadas separadamente no MP pois a simetria de cor não é quebrada e não há mistura entre os setores $SU(3)_C$ e $SU(2)_L \times U(1)_Y$, restringir-me-ei a elas nesta seção devido ao claro interesse de estudar os neutrinos.

Como em todas teorias de gauge, o grupo de simetria fixa a interação. Por exemplo, o número e as propriedades dos bósons de gauge vetoriais com apenas três parâmetros independentes desconhecidos, que são as três constantes de acoplamento de cada grupo e que devem ser todas determinadas através de experimentos. Por outro lado o número de propriedades dos bósons escalares e dos férmions não possuem restrição, exceto pelo fato de que devem se transformar de forma definida sob o grupo de simetria. Por exemplo, devem pertencer às representações do grupo de simetria e as representações fermiônicas devem levar ao cancelamento das anomalias quânticas. No MP os bósons escalares são escolhidos para obter a quebra espontânea de simetria correta para a geração de massas, enquanto que o número e as propriedades dos férmions são determinadas pelos experimentos.

Uma característica inexplicada da Natureza é a existência de três gerações de férmions elementares com propriedades iguais, exceto por diferentes massas. Eles são divididos em duas categorias: quarks e léptons. Eles são distinguíveis pelo fato de que os primeiros participam em todas as interações enquanto que os segundos participam em todas exceto, as interações fortes.

Os quarks são componentes elementares dos hádrons, mas não existem como partículas livres. Isto quer dizer que as suas massas não possuem o significado clássico e seus valores dependem de como as massas são definidas. O setor fermiônico puro do MP depende de 13 parâmetros independentes: 6 massas de quarks, 3 massas de léptons carregados (assumem-se neutrinos não-massivos no MP), três ângulos de mistura de quarks e uma fase. Os valores desses parâmetros devem ser determinados através de medidas experimentais.

Adicionando-se aos treze parâmetros as três constantes de acoplamento (uma para cada

grupo de simetria), um parâmetro da QCD relacionado com o problema CP [26] e os dois outros parâmetros do setor de Higgs escalar (massa de Higgs e outra constante de acoplamento) temos no total 19 parâmetros independentes. O grande número de parâmetros e a inexplicável existência de três gerações, junto do fato de que o MP não inclui interações gravitacionais são aspectos insatisfatórios do MP. Isto justifica a opinião de que o MP não é a teoria final das partículas elementares, mas deve ser uma teoria efetiva no limite de baixas energias.

O MP é um sucesso fenomenológico e até agora foi capaz de descrever todos os fenômenos conhecidos, exceto por indicações a favor das oscilações de neutrino. Em particular, as interações dos neutrinos do MP foram verificadas experimentalmente com alta precisão e são universalmente usadas para análise de dados em experimentos de neutrinos.

1.1 Lagrangeana Eletrofraca

O grupo de simetria $SU(2)_L$ é chamado de *isospin fraco*. O subíndice L indica que os elementos do grupo agem de maneira não trivial apenas nas componentes quirais de mão-esquerda dos campos fermiônicos (as componentes quirais de mão-direita são singletos sob as transformações deste grupo). O grupo possui três geradores, para os quais usaremos a notação

$$I_a \quad (a = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

eles satisfazem as relações de comutação do momento angular

$$[I_a, I_b] = i\epsilon_{abc}I^c. \quad (1.2)$$

Na equação acima ϵ_{abc} é o tensor totalmente antisimétrico com três índices. É importante notar que o caráter não-abeliano do grupo de isospin fraco implica que para cada representação do grupo a escala de geradores está fixa. Por exemplo, no caso da representação bidimensional os geradores são $I_a = \tau_a/2$ onde τ_1, τ_2, τ_3 são as três matrizes de Pauli. Esta impossibilidade de mudar a escala dos geradores significa que a ação deles em cada representação é única.

O grupo de simetria $U(1)_Y$ é chamado *hipercarga*. É gerado pelo operador de hipercarga Y, que é conectado com I_3 e o operador Q (carga elétrica) pela relação de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.3)$$

Esta relação além de necessária para fixar a ação do operador Y nos campos fermiônicos, que não é restrita pela teoria porque $U(1)_Y$ é abeliano, também implica a unificação das interações fraca e eletromagnética.

De forma a preservar a invariância local de gauge, deve-se introduzir três campos de bósons vetoriais A_a^μ ($a = 1, 2, 3$) associados com os três geradores de $SU(2)_L$, e um campo de bóson vetorial B^μ associado com o gerador do grupo $U(1)_Y$. A derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (1.4)$$

onde introduzimos a notação

$$\underline{A}^\mu \equiv (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu), \quad \underline{I} \equiv (I_1, I_2, I_3) \quad (1.5)$$

com o produto escalar

$$\underline{A}^\mu \cdot \underline{I} \equiv \sum_{a=1}^3 A_a^\mu I_a. \quad (1.6)$$

A derivada covariante contém duas constantes de acoplamento: g associada com o grupo $SU(2)_L$ e g' associada com o grupo $U(1)_Y$.

O próximo passo é escolher as representações dos campos fermiônicos. Historicamente esta escolha foi guiada pelo conhecimento prévio, em particular a teoria $V - A$ das interações fracas e a teoria de duas componentes do neutrino. Assumindo a escolha de representações dos campos fermiônicos que levam à correta fenomenologia temos que as componentes quirais de mão-esquerda dos campos fermiônicos são agrupadas em dubletos de isospin fraco. Considerando, por hora, apenas a primeira geração de quarks e léptons

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Da escolha acima os geradores do grupo $SU(2)_L$ ficam fixados e são $I_a = \tau_a/2$. Assim a ação do operador hipercarga fica fixada através da relação de Gell-Mann-Nishijima em (1.3)

$$Y L_L = -L_L, \quad Y Q_L = \frac{1}{3} Q_L \quad (1.8)$$

portanto os dubletos de quarks e léptons de mão-esquerda possuem hipercarga $\frac{1}{3}$ e -1 , respectivamente.

Parametrizamos os elementos g do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de transformações locais com um conjunto de $3 + 1$ parâmetros $(\underline{\theta}(x), \eta(x))$, que dependem do ponto x no espaço-tempo:

$$g(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \in SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (1.9)$$

com representação unitária no espaço vetorial dos campos

$$U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{i\underline{\theta}(x) \cdot \underline{I} + \eta(x) \frac{Y}{2}} = U(\underline{\theta}(x)) U(\eta(x)) \quad (1.10)$$

onde

$$U(\underline{\theta}(x)) = e^{i\underline{\theta}(x) \cdot \underline{I}}, \quad U(\eta(x)) = e^{\eta(x) \frac{Y}{2}}. \quad (1.11)$$

A transformação dos dubletos fermiônicos sob $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ é dada por

$$L_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} L'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) L_L = U_L^l(\underline{\theta}(x), \eta(x)) L_L \quad (1.12)$$

$$Q_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} Q'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) Q_L = U_L^q(\underline{\theta}(x), \eta(x)) Q_L \quad (1.13)$$

onde

$$U_L^l(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{\frac{i}{2} \underline{\theta}(x) \cdot \underline{\tau} - \frac{i}{2} \eta(x)} \quad U_L^q(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{\frac{i}{2} \underline{\theta}(x) \cdot \underline{\tau} + \frac{i}{6} \eta(x)} \quad (1.14)$$

No MP é assumido que os campos de neutrinos têm apenas a componente de mão-esquerda (e um dubleto de Higgs), implicando que os neutrinos não possuem massa. As componentes de mão-direita dos outros férmions

$$e_R, \quad u_R, \quad d_R, \quad (1.15)$$

são assumidas como singletos sob o grupo de transformações de isospin fraco:

$$\underline{I} f_R = 0 \quad (f = e, u, d) \quad (1.16)$$

Da relação de Gell-Mann-Nishijima em (1.3) obtemos:

$$Y e_R = -2e_R, \quad Y u_R = \frac{4}{3}u_R, \quad Y d_R = -\frac{2}{3}d_R. \quad (1.17)$$

assim a transformação dos campos fermiônicos de mão-direita fica

$$f_R \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} f'_R = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) f_R = U_R^f(\eta(x)) f_R \quad (f = e, u, d) \quad (1.18)$$

onde

$$U_R^e(\eta(x)) = e^{-\eta(x)}, \quad U_R^u(\eta(x)) = e^{\frac{2}{3}\eta(x)}, \quad U_R^d(\eta(x)) = e^{-\frac{1}{3}\eta(x)}. \quad (1.19)$$

A lagrangeana eletrofraca do MP é a mais geral renormalizável e invariante sob o grupo de simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ escrita em termos de campos fermiônicos, campos de bósons de gauge, e um dubleto de Higgs $\Phi(x)$ (de forma a reproduzir corretamente a fenomenologia), que analisaremos melhor adiante. Para a primeira geração de léptons e quarks temos

$$\begin{aligned} L = & \quad i \overline{L}_L D_\mu \gamma^\mu L_L + i \overline{Q}_L D_\mu \gamma^\mu Q_L + \sum_{f=e,u,d} i \overline{f}_R D_\mu \gamma^\mu f_R \\ & - \frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \underline{B}_{\mu\nu} \underline{B}^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ & - y^e (\overline{L}_L \Phi e_R + \overline{e}_R \Phi^\dagger L_L) \\ & - y^d (\overline{Q}_L \Phi d_R + \overline{d}_R \Phi^\dagger Q_L) - y^u (\overline{Q}_L \Phi u_R + \overline{u}_R \Phi^\dagger Q_L). \end{aligned} \quad (1.20)$$

A segunda linha contém os termos cinéticos e os autoacoplamentos dos bósons de gauge, a terceira linha é a lagrangeana do campo de Higgs que gera a quebra espontânea de simetria, a quarta e a quinta linha descrevem os acoplamentos do tipo Yukawa Higgs-fermion que geram as massas dos léptons, onde y^e , y^d , y^u são as constantes de acoplamento de Yukawa. Isso será discutido nas próximas seções.

Por enquanto vamos considerar apenas a primeira linha da equação (1.20). Como sob a transformação (1.9) os campos leptônicos e fermiônicos se transformam de acordo com equações (1.12), (1.13) e (1.18). A fim de satisfazer a invariância de gauge, a derivada covariante deve se transformar como

$$D_\mu \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} D'_\mu = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) f_R = U_R^f(\eta(x)) D_\mu U^{-1}(\underline{\theta}(x), \eta(x)) f_R. \quad (1.21)$$

Isto significa que os bósons de gauge se transformam como

$$\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} \underline{A}'_\mu \cdot \underline{I} = U(\underline{\theta}(x)) \left[\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} - \frac{i}{g} \partial_\mu \right] U^{-1}(\underline{\theta}(x)) \quad (1.22)$$

$$B_\mu \frac{Y}{2} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} B'_\mu \frac{Y}{2} = U(\eta(x)) \left[B_\mu \frac{Y}{2} - \frac{i}{g'} \partial_\mu \right] U^{-1}(\eta(x)) \quad (1.23)$$

É importante notar que as componentes de mão-direita e mão-esquerda dos campos fermiônicos se transformam de diferentes maneiras sob as transformações do grupo de gauge, implicando que a presença de termos de massa proporcionais a

$$\bar{f}f = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L \quad (f = e, u, d) \quad (1.24)$$

na lagrangeana é proibida pela simetria pois esses não são invariantes. Como veremos adiante a geração das massas fermiônicas é feita através da quebra espontânea de simetria pelo do mecanismo de Higgs.

1.2 Interações Eletrofracas

Nesta seção derivaremos as interações entre os férmions e os bósons de gauge físicos.

Expandindo as derivadas covariantes na primeira linha da equação (1.20) e omitindo os termos cinéticos, obtemos a lagrangeana de interação que descreve o acoplamento dos férmions com os bósons de gauge:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2}\overline{L}_L (g\mathcal{A} \cdot \tau - g'\mathcal{B}) L_L - \frac{1}{2}\overline{Q}_L \left(g\mathcal{A} \cdot \tau + \frac{1}{3}g'\mathcal{B} \right) Q_L \\ & g'\overline{e}_R \mathcal{B} e_R - \frac{2}{3}g'\overline{u}_R \mathcal{B} u_R + \frac{1}{3}g'\overline{d}_R \mathcal{B} d_R \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde

$$\mathcal{A} = A_\mu \gamma^\mu \quad (1.26)$$

A fim de derivar explicitamente os termos de interação dos férmions, primeiro vamos considerar apenas os léptons:

$$L_{I,L} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu}_{eL} & \overline{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} & g(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2) \\ g(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2) & -g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + g'\overline{e}_R \mathcal{B} e_R \quad (1.27)$$

Vamos separar a lagrangeana acima em uma lagrangeana de corrente carregada (CC)

$$L_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{2} (\overline{\nu}_{eL}(\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2)e_L + \overline{e}_L(\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2)\nu_{eL}) \quad (1.28)$$

que é dada pelos termos fora da diagonal na equação (1.27), e uma de corrente neutra (NC)

$$L_{I,L}^{(NC)} = -\frac{1}{2} \{ \overline{\nu}_{eL}(g\mathcal{A}_3 - g'\mathcal{B})\nu_{eL} - \overline{e}_L(g\mathcal{A}_3 + g'\mathcal{B})e_L - 2g'\overline{e}_R \mathcal{B} e_R \} \quad (1.29)$$

dada pelos termos diagonais na equação (1.27). Agora vamos considerar primeiro a lagrangeana de corrente carregada. Definindo um campo

$$W^\mu \equiv \frac{A_1^\mu - iA_2^\mu}{\sqrt{2}} \quad (1.30)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
L_{I,L}^{(CC)} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\nu}_{eL} \not{W} e_L + \bar{e}_L \not{W}^\dagger \nu_{eL} \right\} \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu + H.c. \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,L}^\mu W_\mu + H.c.,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

onde $j_{W,L}^\mu$ é a corrente leptônica carregada

$$j_{W,L}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e = 2\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L. \tag{1.32}$$

Agora consideraremos a lagrangeana de corrente neutra. A teoria deve incluir as interações eletromagnéticas descritas pela lagrangeana da eletrodinâmica quântica (QED)

$$L_{I,L}^{(\gamma)} = -e j_{\gamma,L}^\mu A_\mu, \tag{1.33}$$

onde e é a carga eletromagnética elementar, A^μ é o campo eletromagnético, e $j_{\gamma,L}^\mu$ é a corrente eletromagnética leptônica

$$j_{\gamma,L}^\mu = -\bar{e} \gamma^\mu e. \tag{1.34}$$

O sinal de menos é devido à carga negativa do elétron. A lagrangeana da QED pode ser obtida como parte da lagrangeana da corrente neutra expressando o campo A^μ como uma combinação linear dos campos A_3^μ e B^μ . Escreveremos esta combinação linear e a ortogonal a ela, que define o campo bosônico A^μ , fazendo uma rotação no plano dos campos A_3^μ , B^μ através de um ângulo θ_W :

$$A^\mu = A_3^\mu \sin \theta_W + B^\mu \cos \theta_W, \tag{1.35}$$

$$Z^\mu = A_3^\mu \cos \theta_W - B^\mu \sin \theta_W. \tag{1.36}$$

O ângulo é chamado de *ângulo de mistura fraco* ou *ângulo de Weinberg*, embora tenha sido introduzido pela primeira vez por Glashow em 1961 [15]. O ângulo de mistura fraco é escolhido de forma a obter a lagrangeana da QED para o acoplamento do campo eletromagnético e os campos fermiônicos. Inserindo as expressões (1.35) e (1.36) nas equações da lagrangeana de corrente neutra na equação (1.29), obtemos

$$\begin{aligned}
L_{I,L}^{(NC)} &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_{eL} [(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) \not{Z} + (g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W) \not{A}] \nu_{eL} \\
&\quad -\frac{1}{2} \bar{e}_L [(g \cos \theta_W - g' \sin \theta_W) \not{Z} + (g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W) \not{A}] e_L \\
&\quad - g' \bar{e}_R [-\sin \theta_W \not{Z} + \cos \theta_W \not{A}] e_R
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Como os neutrinos são partículas neutras, eles não possuem acoplamento com o campo eletromagnético. Fazendo o coeficiente do termo correspondente na equação (1.37) ser zero, obtemos

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \implies \tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \tag{1.38}$$

Esta é uma relação importante, que conecta as constantes de acoplamento g e g' do MP com o ângulo de mistura fraco θ_W .

Substituindo a equação (1.38) na equação (1.37), obtemos

$$L_{I,L}^{(NC)} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \{ \bar{\nu}_{eL} \not{Z} \nu_{eL} - (1 - 2 \sin^2 \theta_W) \bar{e}_L \not{Z} e_L + 2 \sin^2 \theta_W \bar{e}_R \not{Z} e_R \} + g \sin \theta_W \bar{e} \not{A} e. \quad (1.39)$$

Como o último termo dá o acoplamento do campo do elétron com o campo eletromagnético, devemos coincidir a lagrangeana de interação da QED na equação (1.33) e assim encontramos

$$g \sin \theta_W = e \quad (1.40)$$

usando a relação (1.38) obtemos

$$g' \cos \theta_W = e. \quad (1.41)$$

As relações acima são importantes porque conectam as constantes de acoplamento g e g' e a carga elementar eletromagnética e . As duas relações acima podem ser combinadas de forma que

$$g^2 + g'^2 = e^2. \quad (1.42)$$

a lagrangeana de corrente neutra pode ser escrita como

$$L_{I,L}^{(NC)} = L_{I,L}^{(Z)} + L_{I,L}^{(\gamma)} \quad (1.43)$$

onde $L_{I,L}^{(\gamma)}$ é a lagrangeana da QED na equação e $L_{I,L}^{(Z)}$ é a lagrangeana fraca de corrente neutra dada por

$$L_{I,L}^{(Z)} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} j_{Z,L}^\mu Z_\mu, \quad (1.44)$$

com a corrente neutra leptônica fraca

$$j_{Z,L}^\mu = 2g_L^\nu \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} + 2g_L^l \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2g_R^l \bar{e}_R \gamma^\mu e_R. \quad (1.45)$$

Aqui, introduzimos os coeficientes g_L^ν , g_L^l e g_R^l (o índice l indica um lépton carregado) cujos valores, obtidos da equação (1.39), são dados na Tabela 1.1. Em geral, os valores dos coeficientes g_L^l e g_R^l para um campo fermiônico f são dados por

$$g_L^f = I_3^f - q_f \sin^2 \theta_W, \quad (1.46)$$

$$g_R^f = -q_f \sin^2 \theta_W, \quad (1.47)$$

onde I_3^f é o valor da terceira componente do isospin fraco e q_f é a carga elétrica do férmion em unidades da carga elementar e .

Devido à mistura dos campos de gauge A_3^μ e B^μ nas equações (1.35) e (1.36), pode-se ver que as interações fracas de corrente neutra de campos fermiônicos carregados envolvem não apenas as suas componentes de mão-esquerda, mas também as de mão-direita, com uma força proporcional à carga elétrica e ao $\sin^2 \theta_W$.

A corrente neutra fraca leptônica na equação (1.45) pode ser escrita também como

$$j_{Z,L}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma^5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) e \quad (1.48)$$

Tabela 1.1: Valores dos coeficientes g_L, g_R, g_V, g_A para os campos fermiônicos. Os índices ν, l, U e D , indicam, respectivamente, um neutrino genérico, lépton carregado, quark tipo up e quark tipo down. Definimos $s_W \equiv \sin\theta_W$.

férmions	g_L	g_R	g_V	g_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$g_L^\nu = \frac{1}{2}$	$g_R^\nu = 0$	$g_V^\nu = \frac{1}{2}$	$g_A^\nu = \frac{1}{2}$
e, μ, τ	$g_L^l = -\frac{1}{2} + s_W^2$	$g_R^l = s_W^2$	$g_V^l = -\frac{1}{2} + 2s_W^2$	$g_A^l = -\frac{1}{2}$
u, c, t	$g_L^U = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}s_W^2$	$g_R^U = -\frac{2}{3}s_W^2$	$g_V^U = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}s_W^2$	$g_A^U = \frac{1}{2}$
d, s, b	$g_L^D = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}s_W^2$	$g_R^D = +\frac{1}{3}s_W^2$	$g_V^D = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}s_W^2$	$g_A^D = -\frac{1}{2}$

onde introduzimos os acoplamentos vetoriais $g_V^{\nu,L}$ e $g_A^{\nu,L}$ axiais para neutrinos e léptons carregados, cujos valores são dados na Tabela 1.1. Em geral, os valores de g_V^f e g_A^f para um campo fermiônico f são dados por

$$g_V^f = g_L^f + g_R^f = I_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W \quad (1.49)$$

$$g_A^f = g_L^f - g_R^f = I_3^f \quad (1.50)$$

Voltando à parte dos quarks da lagrangeana de interação obtemos explicitamente

$$L_{I,Q} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gA_3 + \frac{1}{3}g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 + \frac{1}{3}g'B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} - \frac{2}{3}g'\bar{u}_R B u_R + \frac{1}{3}g'\bar{d}_R B d_R \quad (1.51)$$

Seguindo o mesmo procedimento que no caso dos léptons, encontramos a lagrangeana de corrente carregada

$$L_{I,Q}^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,Q}^\mu W_\mu + H.c., \quad (1.52)$$

onde $j_{W,Q}^\mu$ é a corrente de quarks carregada

$$j_{W,Q}^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)d = 2\bar{u}_L\gamma^\mu d_L. \quad (1.53)$$

a lagrangeana de interação de corrente neutra de quarks pode ser separada em suas partes fraca e eletromagnética como no caso leptônico

$$L_{I,Q}^{(NC)} = L_{I,Q}^{(Z)} + L_{I,Q}^{(\gamma)} \quad (1.54)$$

com

$$L_{I,Q}^{(\gamma)} = -e j_{\gamma,Q}^\mu A_\mu, \quad (1.55)$$

$$L_{I,Q}^{(Z)} = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_{Z,Q}^\mu Z_\mu. \quad (1.56)$$

A corrente eletromagnética dos quarks $j_{\gamma,Q}^\mu$ é dada por

$$j_{\gamma,Q}^\mu = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d, \quad (1.57)$$

e a corrente neutra $j_{Z,Q}^\mu$ é dada por

$$\begin{aligned} j_{Z,Q}^\mu &= 2g_L^U \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + 2g_L^D \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + 2g_R^U \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + 2g_R^D \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \\ &= \bar{u} \gamma^\mu (g_V^U - g_A^U \gamma^5) u + \bar{d} \gamma^\mu (g_V^D - g_A^D \gamma^5) d. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Os coeficientes $g_L^{U,D}$, $g_R^{U,D}$, $g_V^{U,D}$ e $g_A^{U,D}$ são listados na Tabela 1.1.

1.3 Três Gerações

Nesta seção generalizaremos as expressões para as lagrangeanos de interação fracas de corrente carregada e corrente neutra para o caso de três gerações de léptons e quarks que são realizados na natureza. Definindo as três gerações de dupletos de mão-esquerda de isospin

$$L'_{eL} = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'_L \end{pmatrix}, \quad L'_{\mu L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu'_L \end{pmatrix}, \quad L'_{\tau L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

$$Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{2L} = \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{3L} = \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad (1.60)$$

e os singletos

$$l'_{eR} = e'_R, \quad l'_{\mu R} = \mu'_R, \quad l'_{\tau R} = \tau'_R, \quad (1.61)$$

$$q'_{uR} = u'_R, \quad q'_{cR} = c'_R, \quad q'_{tR} = t'_R, \quad (1.62)$$

$$q'_{dR} = d'_R, \quad q'_{sR} = s'_R, \quad q'_{bR} = b'_R. \quad (1.63)$$

As linhas nos campos fermiônicos são necessárias pois, como veremos adiante, os campos definidos nas equações (1.59)-(1.63) não possuem em geral massas definidas, mas são combinações lineares de campos com massa definida. Os números quânticos dos campos nas equações (1.59)-(1.63) são os mesmos que os correspondentes no caso da primeira geração.

A versão em três gerações da lagrangeana eletrofraca do Modelo Padrão é

$$\begin{aligned} L &= i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} \not{D} L'_{\alpha L} + i \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha L} \not{D} Q'_{\alpha L} \\ &+ i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}'_{\alpha R} \not{D} l'_{\alpha R} + i \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_{\alpha R} \not{D} q'_{\alpha R} + i \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_{\alpha R} \not{D} q'_{\alpha R} \\ &- \frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &+ (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &- \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} (Y_{\alpha\beta}^l \bar{L}'_{\alpha L} \Phi l'_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{l*} \bar{l}'_{\beta R} \Phi^\dagger L'_{\alpha L}) \\ &- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} \left(Y_{\alpha\beta}^{D'} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{D'*} \bar{q}'_{\beta R} \Phi^\dagger Q'_{\alpha L} \right) \\ &- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} \left(Y_{\alpha\beta}^{U'} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q'_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{U'*} \bar{q}'_{\beta R} \tilde{\Phi}^\dagger Q'_{\alpha L} \right) \end{aligned} \quad (1.64)$$

As últimas três linhas contém os acoplamentos de Yukawa que geram as massas fermiônicas e a mistura de quarks com os correspondentes acoplamentos de Yukawa $Y_{\alpha\beta}^I, Y_{\alpha\beta}^{ID}, Y_{\alpha\beta}^{IU}$. A lagrangeana de interação eletromagnética obtida das duas primeiras linhas da equação (1.64) é

$$L_I^{(\gamma)} = -e j_\gamma^\rho A_\rho, \quad (1.65)$$

com a corrente eletromagnética

$$j_\gamma^\rho = j_{\gamma,L}^\rho + j_{\gamma,Q}^\rho. \quad (1.66)$$

Aqui $j_{\gamma,L}^\rho$ e $j_{\gamma,Q}^\rho$ são as correntes eletromagnéticas dos léptons e quarks dadas por

$$j_{\gamma,Q}^\rho = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{l}'_\alpha \gamma^\rho l'_\alpha, \quad (1.67)$$

$$j_{\gamma,L}^\rho = \frac{2}{3} \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_\alpha \gamma^\rho q'_\alpha - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_\alpha \gamma^\rho q'_\alpha \quad (1.68)$$

a lagrangeana de interação fraca de corrente carregada é obtida da primeira linha da equação (1.64) é

$$L_I^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^\rho W_\rho + H.c., \quad (1.69)$$

onde a corrente carregada fermiônica j_W^ρ é a soma das correntes carregadas dos léptons e dos quarks

$$j_W^\rho = j_{W,L}^\rho + j_{W,Q}^\rho, \quad (1.70)$$

dadas por

$$j_{W,L}^\rho = 2 (\bar{\nu}'_{eL} \gamma^\rho e'_L + \bar{\nu}'_{\mu L} \gamma^\rho \mu'_L + \bar{\nu}'_{\tau L} \gamma^\rho e\tau'_L), \quad (1.71)$$

$$j_{W,Q}^\rho = 2 (\bar{u}'_L \gamma^\rho d'_L + \bar{c}'_L \gamma^\rho s'_L + \bar{t}'_L \gamma^\rho b'_L) \quad (1.72)$$

A corrente carregada leptônica pode ser escrita compactamente como

$$j_{W,L}^\rho = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \nu'_{\alpha L} \gamma^\rho l'_{\alpha L}, \quad (1.73)$$

com

$$l'_{eL} = e'_L, \quad l'_{\mu L} = \mu'_L, \quad l'_{\tau L} = \tau'_L. \quad (1.74)$$

É útil definir os operadores escada de isospin fraco I_\pm como

$$I_\pm = I_1 \pm iI_2, \quad (1.75)$$

para os quais temos, das relações de comutação na equação (1.2)

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm \implies I_3 I_\pm = I_\pm (I_3 \pm 1). \quad (1.76)$$

Então, se $|i, i_3\rangle$ é um autoestado de I e I_3 com autovalores i e i_3 , $I_\pm |i, i_3\rangle$ é um autoestado de I e I_3 com autovalores i e $i_3 \pm 1$:

$$I_3 |i, i_3\rangle = i_3 |i, i_3\rangle \implies I_3 I_\pm |i, i_3\rangle = (i \pm 1) I_\pm |i, i_3\rangle. \quad (1.77)$$

Isto é claro a partir da forma matricial explícita dos operadores I_{\pm} na representação de dubletos:

$$I_+ \xrightarrow{\text{dublete}} \frac{\tau_+}{2} = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_- \xrightarrow{\text{dublete}} \frac{\tau_-}{2} = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Pode-se ver que I_+ aumenta a componente inferior do dublete, aumentando o autovalor de I_3 em uma unidade, e I_- abaixa a componente superior, diminuindo o autovalor de I_3 de uma unidade.

As correntes fermiônicas carregadas podem ser escritas de maneira compacta usando os operadores escada I_{\pm} :

$$j_{W,L}^{\rho} = -2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{L'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_+ L'_{\alpha L}, \quad (1.79)$$

$$j_{W,Q}^{\rho} = -2 \sum_{\alpha=1,2,3} \overline{Q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_+ Q'_{\alpha L}, \quad (1.80)$$

a lagrangeana de interação fraca de corrente neutra obtida das duas primeiras linhas de (1.64) é

$$L_I^{(Z)} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} j_Z^{\rho} Z_{\rho}, \quad (1.81)$$

com a corrente neutra

$$j_Z^{\rho} = j_{Z,L}^{\rho} + j_{Z,Q}^{\rho} \quad (1.82)$$

onde $j_{Z,L}^{\rho}$ e $j_{Z,Q}^{\rho}$ são as correntes neutras dos léptons e dos quarks dadas por

$$j_{Z,L}^{\rho} = 2g_L^{\nu} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} \nu'_{\alpha L} + 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left(g_L^l \overline{l'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} \nu'_{\alpha L} + g_R^l \overline{l'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} \nu'_{\alpha R} \right), \quad (1.83)$$

$$j_{Z,Q}^{\rho} = 2 \sum_{\alpha=u,c,t} \left(g_L^U \overline{q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha L} + g_R^U \overline{q'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha R} \right) + 2 \sum_{\alpha=d,s,b} \left(g_L^D \overline{q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha L} + g_R^D \overline{q'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha R} \right), \quad (1.84)$$

com

$$q_{uL}^{\prime U} = u'_L, \quad q_{cL}^{\prime U} = c'_L, \quad q_{tL}^{\prime U} = t'_L, \quad (1.85)$$

$$q_{dL}^{\prime D} = d'_L, \quad q_{sL}^{\prime D} = s'_L, \quad q_{bL}^{\prime D} = b'_L. \quad (1.86)$$

Os valores dos coeficientes $g_L^{\nu,l,U,D}$ e $g_R^{\nu,l,U,D}$, dados pelas equações (1.46) e (1.47), estão listados na Tabela 1.1.

1.4 O Mecanismo de Higgs

No Modelo Padrão as massas dos bósons de Gauge W e Z, assim como as dos férmions, são geradas pelo Mecanismo de Higgs, implementadas pelo dublete de Higgs (veja tabela(1.2)) onde $\phi^+(x)$ é um campo complexo escalar carregado e $\phi^0(x)$ é neutro.

Tabela 1.2: Auto-valores do isospin fraco I , de sua terceira componente I_3 , da hipercarga Y e da carga Q do dubleto de Higgs.

Dubleto de Higgs	I_3	Y	Q
$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	1	1
	$-\frac{1}{2}$	1	0

A parte da lagrangeana de Higgs é:

$$L_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - (\mu)^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.87)$$

de onde extraímos o potencial:

$$V(\Phi) = (\mu)^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (1.88)$$

Podemos reescrever o potencial, a menos de uma constante irrelevante, da seguinte forma

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (1.89)$$

onde

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.90)$$

Se $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$, tal potencial tem um mínimo para:

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}, \quad (1.91)$$

que corresponde ao vácuo. Apenas o campo neutro escalar pode possuir valor esperado de vácuo (VEV) diferente de zero (para preservar a invariância da natureza sob rotação espacial e a neutralidade do vácuo), de forma que o VEV $\langle \Phi \rangle$ se deve apenas a ϕ^0 :

$$\langle \Phi(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

A simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ é espontaneamente quebrada pelo VEV $\langle \Phi \rangle$:

$$I_1 \langle \Phi(x) \rangle = \frac{\tau_1}{2} \langle \Phi(x) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.93)$$

$$I_2 \langle \Phi(x) \rangle = \frac{\tau_2}{2} \langle \Phi(x) \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.94)$$

$$I_3 \langle \Phi(x) \rangle = \frac{\tau_3}{2} \langle \Phi(x) \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.95)$$

$$Y \langle \Phi(x) \rangle = \langle \Phi(x) \rangle \neq 0, \quad (1.96)$$

mas

$$Q \langle \Phi(x) \rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi(x) \rangle = 0. \quad (1.97)$$

Portanto o vácuo é invariante sob as transformações que pertencem ao grupo $U(1)_Q$ do tipo:

$$e^{i\theta Q} \langle \Phi(x) \rangle = \langle \Phi(x) \rangle \quad (1.98)$$

Essa invariância garante a existência de um bóson de gauge não massivo associado com o grupo de simetria $U(1)_Q$, o qual é identificado com o fóton. De forma a derivar as propriedades físicas das partículas resultantes da quebra espontânea de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ em $U(1)_Q$, é conveniente escrever o dubleto de Higgs como:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{2v} \underline{\epsilon}(x) \cdot \underline{\tau}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

onde $\underline{\epsilon}(x) = (\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \epsilon_3(x))$ e $H(x)$ são os quatro campos escalares reais. O campo $H(x)$ descreve o bóson de Higgs físico obtido por excitações do campo de Higgs neutro acima do vácuo. Já os campos $\underline{\epsilon}(x)$ não são físicos pois podem ser eliminados por uma rotação. Essa transformação define o chamado gauge unitário de forma que o dubleto de Higgs neste gauge fica:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Neste Gauge a lagrangeana de Higgs fica:

$$\begin{aligned} L_{Higgs} = & \frac{1}{2} \partial H^\mu \partial H_\mu + \frac{g^2}{4} (v + H)^2 W_\mu^\dagger W^\mu \\ & + \frac{g^2}{8 \cos^2(\theta_W)} (v + H)^2 Z_\mu^\dagger Z^\mu - \frac{\lambda}{4} (H^2 + 2vH)^2, \end{aligned} \quad (1.101)$$

expandindo temos

$$\begin{aligned} L_{Higgs} = & \frac{1}{2} \partial H^\mu \partial H_\mu - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ & + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2(\theta_W)} Z_\mu^\dagger Z^\mu \\ & + \frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4 \cos^2(\theta_W)} Z_\mu^\dagger Z^\mu H \\ & + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2(\theta_W)} Z_\mu^\dagger Z^\mu H^2. \end{aligned} \quad (1.102)$$

O primeiro termo do lado direito é o termo cinético do bóson de Higgs. O segundo é o termo de massa, a qual é dada por

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (1.103)$$

Como μ^2 é um parâmetro negativo (vindo do setor de Higgs) introduzido especificamente no MP, seu valor não é conectado a outras quantidades já medidas. Portanto, o MP não dá uma predição para o valor da massa de Higgs que deve ser determinada experimentalmente.

O terceiro e o quarto termos geram autoacoplamentos dos bósons de Higgs. O quinto e o sexto termos são de importância fundamental, pois são os termos de massa dos bósons de gauge W e Z . Podemos então escrever suas massas como:

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos(\theta_W)}. \quad (1.104)$$

O parâmetro ρ definido por

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2(\theta_W)}, \quad (1.105)$$

tem valor

$$\rho = 1, \quad (1.106)$$

no MP. O valor experimental de ρ [27] é

$$\rho = 0,9998^{+0,0008}_{-0,0005} \quad (1.107)$$

em perfeita concordância com a equação (1.106).

1.5 A Massa dos Léptons

No MP as massas dos férmions surgem como um resultado do mecanismo de Higgs pela presença de acoplamentos de Yukawa dos campos fermiônicos com o dubleto de Higgs.

Como estou interessado apenas na interação fraca, limitar-me-ei a obter apenas as massas dos léptons. Para tal, primeiramente farei uma digressão sobre quiralidade e massa. É sempre possível separar um campo espinorial genérico ψ em duas componentes, nominalmente, mão-direita ψ_R e mão-esquerda ψ_L :

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (1.108)$$

com

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad (1.109)$$

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi. \quad (1.110)$$

Definindo as matrizes de projeção quirais como

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (1.111)$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (1.112)$$

que satisfazem as propriedades

$$P_R + P_L = 1, \quad (1.113)$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (1.114)$$

$$(P_L)^2 = P_L, \quad (1.115)$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (1.116)$$

Considerando a lagrangeana de Dirac decomposta nos campo quirais temos

$$L = (\overline{\psi_R} + \overline{\psi_L}) \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m \right) (\psi_R + \psi_L). \quad (1.117)$$

Usando o fato que $\overline{\psi}_R = \overline{\psi}P_L$ e $\overline{\psi}_L = \overline{\psi}P_R$ temos que:

$$i\overline{\psi}_R \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi_L = i\overline{\psi}P_L \overleftrightarrow{\not{\partial}} P_L\psi = i\overline{\psi} \overleftrightarrow{\not{\partial}} P_R P_L\psi = 0, \quad (1.118)$$

$$i\overline{\psi}_L \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi_R = 0, \quad (1.119)$$

$$m\overline{\psi}_R\psi_R = m\overline{\psi}P_L P_R\psi = 0, \quad (1.120)$$

$$m\overline{\psi}_L\psi_L = 0. \quad (1.121)$$

$$(1.122)$$

A lagrangeana de Dirac em termos dos campos quirais se reduz a

$$L = \frac{1}{2} \left(\overline{\psi}_R i \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi_R + \overline{\psi}_L i \overleftrightarrow{\not{\partial}} \psi_L \right) - m(\overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R). \quad (1.123)$$

Percebe-se que os campos quirais ψ_R e ψ_L têm termos cinéticos independentes, mas são acoplados pelo termo de massa. Da lagrangeana acima podemos derivar as equações de movimento

$$i\not{\partial}\psi_R = m\psi_L \quad (1.124)$$

$$i\not{\partial}\psi_L = m\psi_R \quad (1.125)$$

que demonstram que a massa m relaciona a evolução espaço-temporal dos campos quirais. Os campos ψ_R e ψ_L são chamados espinores de Weyl.

Como visto, os termos de massa envolvem o acoplamento de campos de mão-direita e mão-esquerda, fato que torna claro que no MP os neutrinos não possuem massa, pois não possuem a componente de mão-direita. Considerando os léptons carregados, temos que a lagrangeana Higgs-lépton é:

$$L_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\prime l} \overline{L}_{\alpha L}^{\prime} \Phi l_{\beta R}^{\prime} + H.c., \quad (1.126)$$

a matriz $Y^{\prime l}$ dos acoplamentos de Yukawa é, em geral, uma matriz complexa 3×3 . No gauge unitário o dubleto de Higgs tem a expressão da equação (1.100) e a lagrangeana acima fica:

$$L_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\prime l} \overline{l}_{\alpha L}^{\prime} l_{\beta R}^{\prime} + H.c.. \quad (1.127)$$

Matricialmente podemos escrever

$$L_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \overline{\mathbf{l}}_L^{\prime} Y^{\prime l} \mathbf{l}_R^{\prime} + H.c., \quad (1.128)$$

onde

$$\mathbf{l}_L^{\prime} = \begin{pmatrix} e_L^{\prime} \\ \mu_L^{\prime} \\ \tau_L^{\prime} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_R^{\prime} = \begin{pmatrix} e_R^{\prime} \\ \mu_R^{\prime} \\ \tau_R^{\prime} \end{pmatrix}. \quad (1.129)$$

A matriz $Y^{\prime l}$ pode ser diagonalizada através de uma transformação biunitária:

$$V_L^{\prime l\dagger} Y^{\prime l} V_R^{\prime l} = Y^l \quad \text{com} \quad Y_{\alpha\beta}^l = y_{\alpha}^l \delta_{\alpha\beta} \quad (1.130)$$

fazendo

$$\mathbf{l}_L = V_L^{l\dagger} \mathbf{l}'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_R = V_R^{l\dagger} \mathbf{l}'_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}. \quad (1.131)$$

Finalmente escrevemos

$$L_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l H}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha \quad (1.132)$$

onde

$$l_\alpha = l_{\alpha L} + l_{\alpha R} \quad (1.133)$$

são os campos dos léptons carregados com massa definida:

$$l_e \equiv e, \quad l_\mu \equiv \mu, \quad l_\tau \equiv \tau. \quad (1.134)$$

O primeiro termo na equação (1.132) é o termo de massa para os léptons carregados, cuja massa é dada por

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (1.135)$$

Como os coeficientes são parâmetros desconhecidos do MP, as massas dos léptons carregados não podem ser previstas e devem ser determinadas experimentalmente. Uma propriedade interessante que vem do segundo termo do lado direito da equação (1.132) é que esse acoplamento entre o bóson de Higgs e os léptons carregados são proporcionais às massas dos léptons carregados. De fato, aquele termo pode ser escrito como

$$- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{m_\alpha}{v} \bar{l}_\alpha l_\alpha H. \quad (1.136)$$

Por outro lado, os neutrinos por não serem massivos no MP não possuem acoplamento com o bóson de Higgs.

Capítulo 2

As Massas dos Neutrinos

A massa dos neutrinos é de longe o objeto de estudo mais importante no estudo de física de neutrinos. Como dito anteriormente, a evidência da existência da massa do neutrino fornecida pelo fenômeno de oscilação coloca essa partícula na posição de indicadora de nova física [25].

A origem da ínfima massa do neutrino ainda é um mistério. Acredita-se que as massas dos neutrinos são uma manifestação de baixa energia de física além do MP e sua pequenez é devido a uma supressão gerada por uma nova escala de altas-energias, talvez relacionada com a unificação das forças. Isso é implementado pelo mecanismo see-saw [28, 29, 30, 31]. Embora este assunto seja importante não tratarei aqui.

Sabemos que o campo quiral ν_L existe pois está presente no MP e entra na Lagrangeana fraca de corrente carregada. Se apenas ele existir a Lagrangeana de massa do neutrino só pode conter o termo de massa de Majorana (está expresso o termo de massa de um único neutrino).

$$L_{massa}^L = -\frac{1}{2}m_L\overline{\nu_L^C}\nu_L + H.c. \quad (2.1)$$

e o neutrino seria uma partícula de Majorana, que definiremos adiante.

Não sabemos se o campo quiral ν_R existe, mas é permitido pelas simetrias do MP. No caso de existir, se abrem duas possibilidades. A primeira é um termo de massa de Dirac

$$L_{massa}^D = -m_D\overline{\nu_R}\nu_L + H.c. \quad (2.2)$$

e a segunda seria outro termo de massa de Majorana

$$L_{massa}^R = -\frac{1}{2}m_R\overline{\nu_R^C}\nu_R + H.c. \quad (2.3)$$

para ν_R . Portanto é possível obter o termo de massa Dirac-Majorana

$$L_{massa}^{D+M} = L_{massa}^D + L_{massa}^L + L_{massa}^R \quad (2.4)$$

Dentre todas as partículas elementares conhecidas o neutrino é o único que pode ter os termos de massa L_{massa}^L e L_{massa}^R , veremos isso neste capítulo. É importante notar que o termo de massa de Majorana (2.1) não é permitido pelo MP pois não é invariante sob as transformações de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, enquanto o termo de massa de Majorana (2.3) é, pois ν_R é um singlete sob as simetrias do MP.

Nas seções seguintes discutiremos o fenômeno de oscilação, trataremos também das fases de mistura e sua relação com a violação de CP. Por fim derivaremos L_{massa}^D e L_{massa}^L .

2.1 Oscilação de Neutrinos

A oscilação de neutrinos foi primeiramente proposta por Pontecorvo [22, 23] em 1957 em analogia à oscilação dos kaons onde o número quântico estranheza oscila. Na época a proposta de oscilação era entre ν e $\bar{\nu}$, mas posteriormente outro caso foi considerado [32], a oscilação de sabor (transições $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ por exemplo).

Em 1967 Pontecorvo [33] predisse o problema do neutrino solar (um déficit no fluxo de ν_e) como consequência de transições entre o neutrino eletrônico ν_e e o neutrino muônico ν_μ (ou transições entre ν_e e o neutrino estéril ν_s , onde o neutrino estéril é aquele que não participa das interações do MP) antes da primeira medida do fluxo solar de neutrinos eletrônicos no experimento de Homestake [34]. A teoria de oscilação de neutrinos foi finalmente desenvolvida em 1975-1976 por S. Eliezer e A.R. Swift [35], H. Fritzsch e P. Minkowski [36], S.M. Bilenky e B. Pontecorvo [37].

Os experimentos com neutrinos solares iniciaram primeiro, mas também diversos experimentos foram realizados com neutrinos atmosféricos, de reatores e aceleradores. Recentemente os resultados dessa variedade de experimentos confirmaram a hipótese de oscilação dos neutrinos (ver [38, 39, 40, 41]).

O sucesso dessa hipótese implica que há uma mistura entre os autoestados de sabor e os autoestados de massa. Outra consequência é que pelo menos dois autovalores de massa são diferentes de zero, portanto os neutrinos são massivos. Isto também diverge do Modelo Padrão, pois nele o neutrino não possui massa.

Para entender mais qualitativamente a questão apresentaremos de maneira sucinta o formalismo de oscilação. Um neutrino de sabor α criado pela absorção de um lépton carregado l_α^- no vértice fraco ou emitido juntamente com um antilépton carregado l_α^+ é descrito pelo autoestado de sabor:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad \text{para } (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (2.5)$$

Temos que $U_{\alpha k}^*$ representam os elementos da matriz que mistura $|\nu_\alpha\rangle$ com os estados $|\nu_k\rangle$.

Os estados $|\nu_k\rangle$ são autoestados da Hamiltoniana

$$H|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle \quad \text{onde } E_k = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_k^2} \quad (2.6)$$

a equação de Schrödinger implica que os estados massivos evoluem no tempo como ondas planas

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.7)$$

Podemos obter assim a evolução temporal do autoestado de sabor $|\nu_\alpha(t)\rangle$

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle, \quad \text{tal que } |\nu_\alpha(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.8)$$

Usando a unitariedade da matriz de mistura

$$U^\dagger U = 1 \Leftrightarrow \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.9)$$

escrevemos os estados massivos em termos dos estados de sabor

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.10)$$

Substituindo a equação acima em (2.8)

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle. \quad (2.11)$$

Assim a superposição de neutrinos massivos $|\nu_\alpha(0)\rangle$ que é o estado puro de sabor em $t = 0$ se torna uma superposição de diferentes estados de sabor em $t > 0$ se a matriz U não é diagonal (os neutrinos são misturados).

Supondo que um neutrino de sabor α é criado em $t = 0$, podemos perguntar qual a probabilidade de em um dado tempo $t > 0$ encontrar um neutrino de sabor $\beta \neq \alpha$. Sabemos que a amplitude de transição para tal processo é

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}, \quad (2.12)$$

de forma que a probabilidade é

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}, \quad (2.13)$$

Para neutrinos ultrarelativísticos a relação de dispersão em (2.6) pode ser aproximada por:

$$E_k \approx E + \frac{m_k^2}{2E} \quad (2.14)$$

Assim

$$E_k - E_j \approx \frac{m_k^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \quad (2.15)$$

onde

$$E = |\mathbf{p}| \quad (2.16)$$

é a energia do neutrino sem a contribuição da massa.

Considerando que em experimentos de oscilação não se mede o tempo t de propagação mas sim a distância L da fonte ao detector podemos usar o fato de os neutrinos ultrarelativísticos viajarem quase à velocidade da luz e assumir assim $t = L$. Escrevemos a probabilidade então como

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L}. \quad (2.17)$$

As fases de oscilação $\phi_{kj} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L$ são determinadas pela distância L entre a fonte e o detector, pela energia E e pela diferença quadrada de massa Δm_{kj}^2 . Esta última evidencia que não há informação a respeito da escala absoluta de massas, exceto que m_k^2 ou m_j^2 deve ser maior que $|\Delta m_{kj}^2|$. Isso implica que se o neutrino oscila ele tem massa. A amplitude de oscilação depende apenas dos elementos da matriz de mistura U que será melhor abordada à frente. Apesar de não estar explícito, a probabilidade acima é uma quantidade real.

Como vimos, a matriz de mistura recebe o nome pois relaciona autoestados de massa com autoestados de sabor. Cabe acrescentar que no MP isso se dá pois ao diagonalizar a matriz de Yukawa no caso dos quarks, as matrizes utilizadas permanecem em forma de produto na Lagrangeana de interação fraca. No MP isso não ocorre para os léptons pois como o neutrino não possui massa é possível escolher livremente a matriz de diagonalização de forma que é eleita justamente aquela que anula o efeito da matriz dos léptons carregados na interação fraca.

2.2 Violação de CP

Como as interações fracas violam maximalmente as simetrias de paridade e carga, suas propriedades sob estas transformações são de grande interesse. Particularmente nesta seção estamos interessados no comportamento da Lagrangeana fraca sob transformações de CP, que nada mais são do que uma transformação de paridade P seguida por uma conjugação de carga C. Experimentalmente a violação de CP foi observada para os sistemas de mesons neutros K [42] e B [43, 44]. Os dados experimentais são compatíveis com a hipótese de que a violação de CP é gerada pela fase física na matriz de mistura dos quarks. Os criadores da matriz de mistura [45], Maskawa e Kobayashi receberam cada, um quarto do prêmio nobel de 2008.

Para uma melhor exposição começo tratando da paridade. Sob tal transformação temos

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{P} x_P^\mu = (x^0, -\mathbf{x}) = x_\mu, \quad (2.18)$$

os espinores se transformam como

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi^P(x_P) = \epsilon_P \gamma^0 \psi(x) \quad (2.19)$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}^P(x_P) = \epsilon_P^* \bar{\psi}(x) \gamma^0 \quad (2.20)$$

Os valores das paridades intrínsecas ϵ_P são restritos pela condição que sob duas transformações sucessivas trazem o sistema de volta à condição original:

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \epsilon_P \gamma^0 \psi(x) \xrightarrow{P} \epsilon_P^2 \psi(x) \quad (2.21)$$

Como o sinal de um férmion não possui significado físico pois só muda com uma rotação de 2π , $\epsilon_P^2 = \pm 1$. De forma que

$$\epsilon_P = \pm 1, \pm i. \quad (2.22)$$

As paridades intrínsecas não possuem significado físico em si [25], mas apenas os valores relativos das paridades de diferentes partículas que fazem parte de uma interação que conserva paridade.

As correntes vetoriais e axiais se transformam, respectivamente

$$V_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{P} (V_{ab}^\mu)^P = \epsilon_P^{a*} \epsilon_P^b V_{ab}^\mu, \quad (2.23)$$

$$A_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^5 \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{P} (A_{ab}^\mu)^P = -\epsilon_P^{a*} \epsilon_P^b A_{ab}^\mu, \quad (2.24)$$

e o bóson W_μ

$$W_\mu \xrightarrow{P} \epsilon_P^w W^\mu. \quad (2.25)$$

É importante notar que a Lagrangeana de corrente carregada fraca viola maximalmente a simetria da paridade pois

$$L_I^{(W)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} (V_{ab}^\mu - A_{ab}^\mu) W_\mu + H.c. \xrightarrow{P} -\frac{g}{2\sqrt{2}} (-\epsilon_P^{a*} \epsilon_P^b \epsilon_P^w) (V_{ab}^\mu + A_{ab}^\mu) W^\mu + H.c. \quad (2.26)$$

de forma que não há escolha possível das paridades ϵ_P^{a*} , ϵ_P^b e ϵ_P^w que mantenha a estrutura $V - A$ da corrente carregada.

Quanto à conjugação de carga os férmions se transformam da seguinte maneira

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \psi^C(x) = \epsilon_c C \bar{\psi}^T \quad (2.27)$$

onde ϵ_c é uma fase denominada paridade de carga e T denota transposição. Como a conjugação da conjugação deve levar o campo $\psi(x)$ nele mesmo, obtemos

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \epsilon_c C \bar{\psi}^T \xrightarrow{C} |\epsilon_c|^2 \psi(x) \Rightarrow |\epsilon_c|^2 = 1, \quad (2.28)$$

assim

$$\psi(x) = \epsilon_c C \bar{\psi}^{CT}(x). \quad (2.29)$$

As correntes vetoriais e axiais se transformam, respectivamente

$$V_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{C} -\epsilon_c^{a*} \epsilon_c^b V_{ba}^\mu, \quad (2.30)$$

$$A_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^5 \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{C} \epsilon_c^{a*} \epsilon_c^b A_{ba}^\mu, \quad (2.31)$$

e o bóson W_μ

$$W_\mu \xrightarrow{C} \epsilon_c^w W_\mu^\dagger. \quad (2.32)$$

Assim, a Lagrangeana fraca de corrente carregada se transforma como

$$L_I^{(W)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}(V_{ab}^\mu - A_{ab}^\mu)W_\mu + H.c. \xrightarrow{C} -\frac{g}{2\sqrt{2}}(-\epsilon_c^{a*} \epsilon_c^b \epsilon_c^w)(V_{ba}^\mu + A_{ba}^\mu)W_\mu^\dagger + H.c. \quad (2.33)$$

Também não é possível uma escolha das paridades de carga que deixa invariante a conjugação da Lagrangeana de interação de corrente carregada $V - A$ violando maximalmente a simetria. Se os campos ψ_a , ψ_b e W_μ não fazem parte em outras interações que são invariantes por conjugação de carga, as suas paridades de carga são arbitrárias e não têm sentido físico.

Como dito previamente a transformação de CP é uma transformação de paridade seguida por uma conjugação de carga. Dizemos que há conservação de CP se para

$$L(x) \xrightarrow{CP} L^{CP}(x_P) \quad (2.34)$$

temos

$$L(x_P) = L^{CP}(x_P). \quad (2.35)$$

Um detalhe importante da referida transformação é que no caso de violação da simetria pela Lagrangeana podemos classificar o seu efeito sobre algum observável físico de duas formas[46]. Se para um observável Γ que se transforma

$$\Gamma \xrightarrow{CP} \Gamma^{CP} \quad (2.36)$$

temos

$$\Gamma = \Gamma^{CP} \text{ dizemos que a violação é par,} \quad (2.37)$$

$$\Gamma \neq \Gamma^{CP} \text{ dizemos que a violação é ímpar.} \quad (2.38)$$

Um exemplo de uma violação par é o caso do duplo decaimento beta; no caso de uma violação ímpar temos a oscilação neutrino-antineutrino.

Por fidelidade histórica vamos tratar do assunto em relação aos quarks, sendo que a discussão no caso dos neutrinos será feita nas seções seguintes. Sob CP temos

$$\overline{q_L^U} \xrightarrow{CP} -q_L^{UT} C^{-1} \gamma^0 D^\dagger(\epsilon_U) \quad (2.39)$$

$$\overline{q_L^D} \xrightarrow{CP} D(\epsilon_D) \gamma^0 C \overline{q_L^D T} \quad (2.40)$$

onde D representa uma matriz diagonal e $\epsilon_U = (\epsilon_u^U, \epsilon_c^U, \epsilon_t^U), \epsilon_D = (\epsilon_d^D, \epsilon_s^D, \epsilon_b^D)$ são as fases de CP.

A corrente carregada

$$J_{W,Q}^\mu = 2\overline{q_L^U} \gamma^\mu V q_L^D \quad (2.41)$$

se transforma como

$$\begin{aligned} J_{W,Q}^\mu &\xrightarrow{CP} -2q_L^{UT} C^{-1} \gamma^{\mu\dagger} C D^\dagger(\epsilon_U) V D(\epsilon_D) \overline{q_L^D T} \\ &= 2q_L^{UT} \gamma^{\mu*} D^\dagger(\epsilon_U) V D(\epsilon_D) \overline{q_L^D T} \\ &= -2\overline{q_L^D} \gamma^{\mu\dagger} D(\epsilon_D) V^T D^\dagger(\epsilon_U) q_L^U \\ &= -2\overline{q_L^D} D(\epsilon_D) V^T D^\dagger(\epsilon_U) \gamma_\mu q_L^U \end{aligned} \quad (2.42)$$

Já o bóson W se transforma sob CP como

$$W_\mu \xrightarrow{CP} e^{i\epsilon_W} W^{\mu T} \quad \text{onde } \epsilon_W \text{ é uma fase indeterminada de CP,} \quad (2.43)$$

portanto

$$J_{W,Q}^\mu W_\mu \xrightarrow{CP} -2e^{i\epsilon_W} \overline{q_L^D} D(\epsilon_D) V^T D^\dagger(\epsilon_U) \gamma_\mu W^{\mu T} q_L^U. \quad (2.44)$$

A expressão acima tem estrutura similar ao hermitiano conjugado de $J_{W,Q}^\mu W_\mu$,

$$(J_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger = 2\overline{q_L^D} \gamma_\mu V^\dagger W^{\mu T} q_L^U. \quad (2.45)$$

Portanto a Lagrangeana é invariante sob CP se

$$J_{W,Q}^\mu W_\mu \xrightarrow{CP} (J_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger \quad (2.46)$$

Mais especificamente

$$-e^{i\epsilon_W} D(\epsilon_D) V^T D^\dagger(\epsilon_U) = V^\dagger \quad (2.47)$$

Escolhendo $\epsilon_W = \pi$, transpondo a equação (2.46) e usando a unitariedade das matrizes D obtemos

$$D^{-1}(\epsilon_U) V D(\epsilon_D) = V^* \leftrightarrow e^{-i\epsilon_\alpha^U} V_{\alpha k} e^{i\epsilon_k^D} = V_{\alpha k}^*. \quad (2.48)$$

Esta condição é satisfeita se

$$V = D^{1/2}(\epsilon_U) O D^{-1/2*}(\epsilon_D) \leftrightarrow V_{\alpha k} = e^{i\epsilon_\alpha^U/2} O_{\alpha k} e^{-i\epsilon_k^D/2} \quad (2.49)$$

onde O é uma matriz real e ortogonal.

Sabe-se que uma matriz unitária $N \times N$ depende de N^2 parâmetros reais independentes, sendo

$$\frac{N(N-1)}{2} \quad \text{ângulos de mistura,} \quad (2.50)$$

$$\frac{N(N+1)}{2} \quad \text{fases,} \quad (2.51)$$

de forma que para uma matriz 3×3 temos 3 ângulos de mistura e 6 fases. No entanto na matriz de mistura dos quarks nem todas as fases são físicas pois a Lagrangeana de corrente carregada (o único em que a matriz de mistura aparece) é invariante sob transformações de gauge globais, o que permite a fatorização de 5 das 6 fases, restando apenas uma com significado físico. De modo geral, o número de fases que sobrevivem é igual a $\frac{(N-2)(N-1)}{2}$ e isso é válido tanto para os quarks quanto para os neutrinos de Dirac. Veremos que para os neutrinos de Majorana o número de fases que sobrevivem é maior, no caso geral $\frac{(N)(N-1)}{2}$.

Como uma fase não pode ser fatorada, não é possível satisfazer a condição em (2.48). Em outras palavras, a conservação de CP exige que V seja real ($V = V^*$). Sumariamente, se a fase física é diferente de zero a Lagrangeana fraca de corrente carregada viola CP, se a fase é $0, \pi$ a Lagrangeana conserva CP.

2.3 Massa de Dirac

A massa de Dirac do neutrino pode ser gerada pelo mesmo mecanismo de Higgs que leva às massas dos quarks e dos léptons carregados no MP. A única extensão do MP que é necessária é a introdução de componentes de mão-direita dos campos de neutrinos.

Deve-se lembrar que, no entanto, os campos de neutrinos de mão-direita são fundamentalmente diferentes dos campos dos outros férmions elementares pois são invariantes sob as simetrias do MP, ou seja, são singletos de $SU(3)_C \times SU(2)_L$ e possuem hipercarga $Y = 0$. Os neutrinos de mão-direita são chamados estéreis pois não participam nas interações fracas (nem nas fortes e nas eletromagnéticas); A sua única interação é gravitacional. Por outro lado, os campos normais de mão-esquerda são chamados de ativos, pois interagem através da interação fraca.

Também é importante notar que a presença dos neutrinos estéreis de mão-direita é irrelevante para o cancelamento da anomalias quânticas [47, 48], que restringem as propriedades dos outros férmions elementares [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]. Como consequência, o número de neutrinos estéreis não é limitado no MP.

No MP estendido para três neutrinos de mão-direita, a Lagrangeana Higgs-lépton ganha o seguinte termo

$$L_{H,\nu} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'_{\alpha\beta} \overline{L'_{\alpha L}} \tilde{\Phi} \nu'_{\beta R} + H.c.. \quad (2.52)$$

De forma a manter os termos acima invariantes é preciso que o dubleto de Higgs tenha hipercarga $Y = -1$, para tanto faz-se a seguinte transformação $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$. Assim no gauge unitário

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

de modo que substituindo o dubleto acima em (2.52) a Lagrangeana Higgs-neutrino fica:

$$L_{H,\nu} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \overline{\nu}'_L Y'^{\nu} \nu'_R + H.c. \quad (2.54)$$

Agora, é feito o mesmo procedimento realizado com os léptons. A matriz Y'^{ν} pode ser diagonalizada:

$$V_L^{\nu\dagger} Y'^{\nu} V_R^{\nu} = Y^{\nu} \quad \text{com} \quad Y_{\alpha\beta}^{\nu} = y_{\alpha\beta}^{\nu} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.55)$$

Definindo

$$\mathbf{n}_L = V_L^{\nu\dagger} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_R = V_R^{\nu\dagger} \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Finalmente escrevemos

$$L_{H,\nu} = - \sum_{k=1,2,3} \frac{y_k^{\nu} v}{\sqrt{2}} \overline{\nu}_k \nu_k - \sum_{k=1,2,3} \frac{y_k^l H}{\sqrt{2}} \overline{\nu}_k \nu_k \quad \text{onde} \quad \nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR}. \quad (2.57)$$

A massa dos neutrinos é $m_k = \frac{y_k^{\nu} v}{\sqrt{2}}$. Assim o acoplamento dos neutrinos com o bóson de Higgs é proporcional à massa

$$- \sum_k \frac{m_k}{v} \overline{\nu}_k \nu_k H. \quad (2.58)$$

A mistura dos neutrinos de Dirac é similar à mistura dos quarks. A corrente leptônica fraca carregada pode ser escrita como

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{\nu}'_L \gamma^{\rho} \mathbf{l}'_L = 2 \overline{\mathbf{n}}_L V_L^{\nu\dagger} V_L^l \gamma^{\rho} \mathbf{l}_L, \quad (2.59)$$

e depende do produto

$$U^D = V_L^{l\dagger} V_L^{\nu} \quad (2.60)$$

que é a matriz de mistura, chamada de PMNS. Seguindo a analogia para a violação de CP no caso dos quarks, temos que a matriz de mistura dos neutrinos também deve ser real para haver conservação de CP.

Escrevendo a corrente em termos da matriz de mistura temos

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{\mathbf{n}}_L U^{D\dagger} \gamma^{\rho} \mathbf{l}_L. \quad (2.61)$$

Definindo os campos de sabor de neutrinos de mão-esquerda

$$\nu_L = U^D \mathbf{n}_L = V_L^{l\dagger} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

escrevemos a corrente leptônica fraca carregada como:

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{\nu}_L \gamma^{\rho} \mathbf{l}_L = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu}_{\alpha L} \gamma^{\rho} l_{\alpha L} \quad (2.63)$$

2.4 Massa de Majorana

Como foi visto antes, as equações de movimento para um férmion podem ser escritas como

$$i\cancel{\partial}\psi_R = m\psi_L, \quad (2.64)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_L = m\psi_R, \quad (2.65)$$

e para um férmion não massivo

$$i\cancel{\partial}\psi_R = 0, \quad i\cancel{\partial}\psi_L = 0. \quad (2.66)$$

As expressões acima indicam que um férmion sem massa pode ser descrito por um único campo quirais, com apenas duas componentes independentes. O que Majorana percebeu foi que no caso de terem massa - em que se acreditava ser necessário um espinor com 4 componentes para descrever a partícula - isso não era sempre verdade [59].

Se admitimos que ψ_L e ψ_R não são independentes e possuem a seguinte relação de dependência:

$$\psi_R = C\overline{\psi_L}^T, \quad (2.67)$$

o que nos leva a escrever:

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + C\overline{\psi_L}^T. \quad (2.68)$$

Ao compararmos a relação de dependência dos campos quirais com a equação (2.29) e usando a liberdade de identificar $\epsilon_c = 1$, finalmente escrevemos

$$\psi = \psi_L + \psi_L^C = \psi^C, \quad (2.69)$$

ou seja, a condição assumida implica que o campo fermiônico é sua própria antipartícula. Portanto o que define um neutrino de Majorana é ele ser seu próprio antineutrino e são necessárias apenas duas componentes para a sua descrição.

Considerando a equação de Dirac para um férmion com carga q acoplado ao campo eletromagnético temos:

$$(i\cancel{\partial} - qA - m)\psi = 0 \quad (\text{partícula}), \quad (2.70)$$

$$(i\cancel{\partial} + qA - m)\psi^C = 0 \quad (\text{antipartícula}). \quad (2.71)$$

Vemos daí que ψ e ψ^C não obedecem à mesma equação de forma que apenas um férmion neutro ($q = 0$) pode ser uma partícula de majorana.

Para se escrever o termo de massa de Majorana usando ν_L apenas, deve-se encontrar uma função de mão direita de ν_L . Esta função é precisamente:

$$\psi_L^C = C\overline{\psi_L}^T. \quad (2.72)$$

O termo de massa de Majorana é escrito como

$$L_{massa}^M = -\frac{1}{2}m\nu_L^C\nu_L + H.c. \quad (2.73)$$

o fator $\frac{1}{2}$ é para evitar contagem dupla posto que ν_L^C e $\bar{\nu}_L$ não são independentes. Considerando os termos cinéticos escrevemos a Lagrangeana de Majorana completo

$$L^M = \frac{1}{2} \left[\bar{\nu}_L i \not{\partial} \nu_L + \bar{\nu}_L^C i \not{\partial} \nu_L^C - m(\bar{\nu}_L^C \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^C) \right] \quad (2.74)$$

O termo de massa de Majorana não é invariante sob transformações de gauge global $U(1)$ de forma que não é possível eliminar duas de três fases que poderiam ser fatorizadas no lado direito da matriz de mistura no caso de três campos ν_L . Isso implica que a matriz de mistura depende de 6 parâmetros, 3 ângulos de mistura e 3 fases. Essa matriz pode ser escrita da seguinte forma

$$U = U^D D^M, \quad (2.75)$$

onde U^D é similar à matriz de mistura no caso do neutrino de Dirac com uma fase física (chamada de fase de Dirac), e D^M é uma matriz diagonal com as duas outras fases (chamadas de fase de Majorana).

Numa parametrização conveniente as matrizes acima podem assumir as seguintes formas:

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

e

$$D^M = \text{diag}(e^{-i\lambda_1}, e^{-i\lambda_2}, e^{-i\lambda_3}), \quad \text{com } \lambda_1 = 0. \quad (2.77)$$

Agora vamos analisar as condições para conservação de CP no caso de Majorana. Temos que o neutrino se transforma como

$$\nu_L(x) \xrightarrow{CP} \epsilon_\nu^{CP} \gamma^0 \nu_L^C(x_P) \quad (2.78)$$

e

$$\nu_L^C(x) \xrightarrow{CP} -\epsilon_\nu^{CP*} \gamma^0 \nu_L(x_P) \quad (2.79)$$

de forma que

$$\bar{\nu}_L(x) \xrightarrow{CP} \epsilon_\nu^{CP*} \bar{\nu}_L^C(x_P) \gamma^0 \quad (2.80)$$

$$\bar{\nu}_L^C(x) \xrightarrow{CP} -\epsilon_\nu^{CP} \bar{\nu}_L(x_P) \gamma^0 \quad (2.81)$$

O termo cinético

$$L_{cin}^M = \frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L i \not{\partial} \nu_L + \bar{\nu}_L^C i \not{\partial} \nu_L^C \right) \quad (2.82)$$

é invariante para qualquer valor da fase ϵ_ν^{CP}

$$\begin{aligned} L_{cin}^M(x) &\xrightarrow{CP} \frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L^C(x_P) \gamma^0 i \not{\partial} \gamma^0 \nu_L^C(x_P) + \bar{\nu}_L(x_P) \gamma^0 i \not{\partial} \gamma^0 \nu_L(x_P) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L^C(x_P) i \not{\partial}^P \nu_L^C(x_P) + \bar{\nu}_L(x_P) i \not{\partial}^P \nu_L(x_P) \right) \\ &= L_{cin}(x_P) \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde $\partial_\mu^P = \frac{\partial}{\partial x_\mu^P}$. Por outro lado o termo de massa de Majorana

$$L_{massa}^M = -\frac{1}{2}m \left(\overline{\nu_L^C} \nu_L + \overline{\nu_L} \nu_L^C \right), \quad (2.84)$$

se transforma como

$$L_{massa}^M \xrightarrow{CP} -\frac{1}{2}m \left(-(\epsilon_\nu^{CP})^2 \overline{\nu_L^C} \nu_L - (\epsilon_\nu^{CP*})^2 \overline{\nu_L} \nu_L \right), \quad (2.85)$$

Portanto obtemos que

$$\epsilon_\nu^{CP} = \pm i. \quad (2.86)$$

Como dito anteriormente, o termo de massa de Majorana não é invariante sob transformações de gauge globais $U(1)$

$$\nu_{kL} \rightarrow e^{i\phi_k} \nu_{kL} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.87)$$

e os campos não podem ser redefinidos para eliminar duas fases. Sabemos que

$$\nu_{kL}(x) \xrightarrow{CP} \eta_k i \gamma^0 C \overline{\nu_{kL}}^T(x_p) \quad \text{onde} \quad \eta_k = \pm 1 \quad (2.88)$$

e que

$$l_\alpha \xrightarrow{CP} \epsilon_{l_\alpha}^{CP} \gamma^0 C \overline{l_\alpha}^T, \quad (2.89)$$

$$W_\mu \xrightarrow{CP} e^{i\epsilon_W} W^{\mu T}. \quad (2.90)$$

Novamente escolhendo $\epsilon_W = \pi$ temos que a lagrangeana leptônica fraca de corrente carregada

$$L_{W,L}^{CC} = -\frac{g}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \left(U_{\alpha k}^* \overline{\nu_{kL}} \gamma^\rho l_{\alpha L} W_\rho + U_{\alpha k} \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho \nu_{kL} W_\rho^\dagger \right) \quad (2.91)$$

sob transformação de CP

$$L_{W,L}^{CC} \xrightarrow{CP} -\frac{g}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \left(-U_{\alpha k}^* \eta_k i \epsilon_{l_\alpha}^{CP} \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho \nu_{kL} W_\rho^\dagger + U_{\alpha k} \eta_k i \epsilon_{l_\alpha}^{CP*} \overline{\nu_{kL}} \gamma^\rho l_{\alpha L} W_\rho \right) \quad (2.92)$$

Comparando as Lagrangeanas acima vemos que CP é conservada se

$$U_{\alpha k} \eta_k i \epsilon_{l_\alpha}^{CP*} = U_{\alpha k}^*. \quad (2.93)$$

Mas como dito anteriormente, a matriz de mistura pode ser escrita como um produto de forma que seus elementos de matriz são

$$U_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k}. \quad (2.94)$$

assim podemos reescrever a condição (2.93) como

$$U_{\alpha k}^D e^{2i\lambda_k} \eta_k i \epsilon_{l_\alpha}^{CP*} = U_{\alpha k}^{D*}. \quad (2.95)$$

Tabela 2.1: Correspondência entre a fase de CP $\eta_k i$ de ν_k , a fase de Majorana λ_k e o coeficiente $e^{i\lambda_k}$ da matriz diagonal em (2.77).

η_k	λ_k	$e^{i\lambda_k}$
1	$0, \pi$	± 1
-1	$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\pm i$

A matriz de mistura U^D é parametrizada por três ângulos de mistura e uma fase, a qual não pode ser eliminada por uma transformação de gauge $U(1)$. Portanto a fase em U^D não pode ser propriamente eliminada por uma escolha apropriada das fases $\epsilon_{l_\alpha}^{CP*}$ e $\eta_k i$. Isso significa, como no caso de Dirac, que a matriz U^D deve ser real. Portanto, na parametrização em (2.76) CP é conservado se:

$$\delta_{13} = 0, \pi. \quad (2.96)$$

No entanto isso não é suficiente para a conservação de CP, devido à presença das fases de Majorana. Se a condição acima é satisfeita a equação em (2.95) se reduz a

$$\eta_k = -i\epsilon_{l_\alpha}^{CP} e^{-2i\lambda_k}, \quad (2.97)$$

com $\eta_k = \pm 1$. Escolhendo a fase de CP dos léptons carregados igual à i , obtemos

$$\eta_k = e^{-2i\lambda_k}. \quad (2.98)$$

Temos finalmente quatro valores possíveis para $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$ expostos na tabela(2.1).

É importante deixar claro que os valores das paridades não têm significado físico por si só, apenas relativamente (por exemplo: se $\epsilon_{l_\alpha}^{CP} = -i$ corresponde a $\eta_k \rightarrow -\eta_k$).

Capítulo 3

Medidas Diretas das Massas dos Neutrinos

Determinar a escala absoluta de massa dos neutrinos é uma tarefa que não pode ser cumprida pelos experimentos de oscilação, pois como mostrado anteriormente, estes são sensíveis apenas a diferenças quadradas de massa.

A forma conhecida mais eficiente para a medida da massa do neutrino é o estudo do final do espectro de energia do elétron no decaimento beta do trítio. O decaimento beta consiste na transição de um núcleo $N(A, Z)$ para um núcleo $N(A, Z + 1)$ com a emissão de um elétron e um antineutrino. A e Z denotam respectivamente número de massa e número de prótons. Tal processo pode ser representado por

$$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (3.1)$$

Na aproximação não-relativística temos que o valor- Q da reação é dado por:

$$Q_\beta = M - M' - m_e. \quad (3.2)$$

Em que M e M' são as massas do núcleo pai e do núcleo filho respectivamente, e m_e é a massa do elétron. Se o neutrino não tem massa Q_β é a energia cinética máxima que o elétron pode ter, porém se o neutrino é massivo a energia cinética máxima do elétron fica:

$$E_e^{\text{máx}} = Q_\beta - m_\nu. \quad (3.3)$$

Isso significa que há um deslocamento do final do espectro de energia do elétron do tamanho da massa do neutrino, de modo que o final do espectro do elétron se comporta como [25]:

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} \propto (Q - E_e) \sqrt{(Q - E_e)^2 - m_\nu^2}. \quad (3.4)$$

A fig. (3.1) ilustra bem a situação.

Outra incógnita relevante, além da escala absoluta de massas, é se o neutrino é uma partícula de Dirac ou Majorana. Neste capítulo discutirei primeiramente o duplo decaimento beta e sua relevância na distinção entre o neutrino de Dirac e o de Majorana, mas também como alternativa de medida direta da massa. Em seguida, derivarei a taxa de decaimento beta diferencial para o caso relativístico. Por fim analisarei o experimento KATRIN [60] reproduzindo a sensibilidade esperada de 0.2eV e farei um teste de ansatz de quatro neutrinos massivos e misturados.

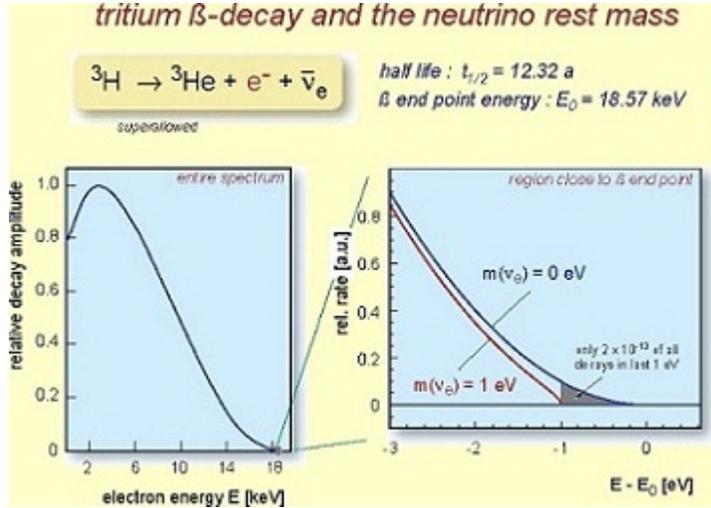


Figura 3.1: Final do espectro do elétron no decaimento beta do trítio. [60]

3.1 Duplo Decaimento Beta

Existem três motivos principais pelos quais se procura o duplo decaimento beta sem neutrinos [24]:

- é o mais promissor método conhecido capaz de determinar se o neutrino é uma partícula de Dirac ou de Majorana;
- é um teste para a simetria (acidental) de conservação do número leptônico no Modelo Padrão;
- é uma técnica para a determinação da escala absoluta de massa dos neutrinos, complementar a outras técnicas.

Nesta seção estudaremos as condições para que o processo ocorra, sua relação com o neutrino de Majorana e violação de CP e veremos algumas considerações experimentais.

O duplo decaimento beta (fig. 3.2) pode ser entendido como o decaimento beta simultâneo de dois nêutrons ($2\beta_{2\nu}^-$) ou prótons ($2\beta_{2\nu}^+$).

$$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (2\beta_{2\nu}^-), \quad (3.5)$$

$$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z - 2) + 2e^+ + 2\nu_e \quad (2\beta_{2\nu}^+), \quad (3.6)$$

enquanto o duplo decaimento beta sem neutrino (fig. 3.3) seria

$$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z + 2) + 2e^- \quad (2\beta_{0\nu}^-), \quad (3.7)$$

$$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z - 2) + 2e^+ \quad (2\beta_{0\nu}^+). \quad (3.8)$$

O processo acima é proibido no M.P., mas veremos que ele é possível caso o neutrino seja uma partícula de Majorana. Nesse caso um núcleo que decai via $2\beta_{2\nu}^-$ também decai via $2\beta_{0\nu}^-$ mas com um tempo de vida diferente. Como os decaimentos $2\beta_{2\nu}$ tem um estado final de quatro

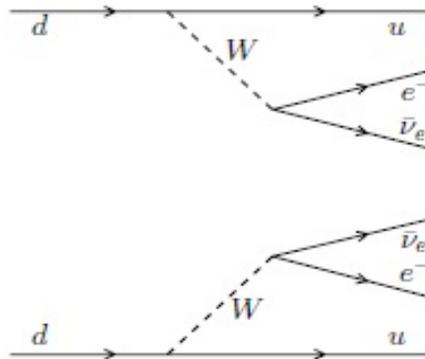


Figura 3.2: Diagrama para o duplo decaimento beta. obs: não é rigorosamente um diagrama de Feynman, pois neste as setas representam o sentido do tempo. [25]

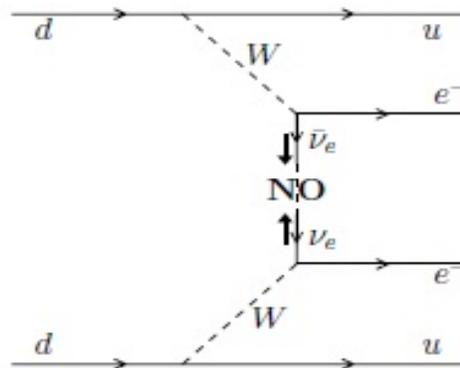


Figura 3.3: Diagrama para o duplo decaimento beta sem neutrino proibido no M.P.. [25] As setas sobre as linhas representam o momento enquanto as setas ao lado representam a projeção do spin na direção do momento.

léptons as somas das energias dos elétrons emitidos tem um espectro contínuo de zero ao valor da energia Q do processo (a energia de recuo do núcleo é desprezível), a qual é dada por

$$Q = M_i - M_f - 2m_e \quad (3.9)$$

onde M_i e M_f são, respectivamente, as massas dos núcleos inicial e final. Observa-se o fato de que se o núcleo final está excitado é necessário adicionar a energia de excitação à M_f . Por outro lado, a soma das energias cinéticas dos elétrons emitidos no $2\beta_{0\nu}$ deve ser igual à Q .

Se núcleos podem decair tanto via processos β e 2β , na prática os processos 2β (que são proporcionais a G_F^4) não são observáveis porque os tempos de vida dos decaimentos β (que são proporcionais a G_F^2) são muito menores que os dos duplos decaimentos. Por exemplo, o trítio tem uma meia-vida da ordem de 12.3anos [25] enquanto a do ^{48}Ca é da ordem de 4.2×10^{19} anos [25]. Portanto, um núcleo que decai via 2β só é observável se o seu decaimento β for energeticamente proibido ou fortemente suprimido. O decaimento beta é energeticamente proibido se a energia do estado fundamental de um núcleo $N(A, Z)$ é menor do que a energia do estado fundamental de um núcleo $N(A, Z + 1)$ mais a massa do elétron.

A fim de saber para quais núcleos o duplo decaimento é passível de observação cabe olhar a meia-vida dos processos de decaimento beta (que varia muito de núcleo para núcleo, podendo ser de alguns segundos a milhares e milhares de anos). Num gráfico $Z \times N$ o conjunto de núcleos beta estáveis reproduz o contorno de uma linha, que é chamada linha de estabilidade beta.

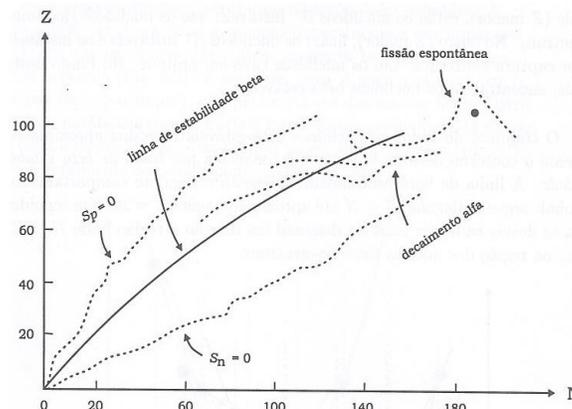
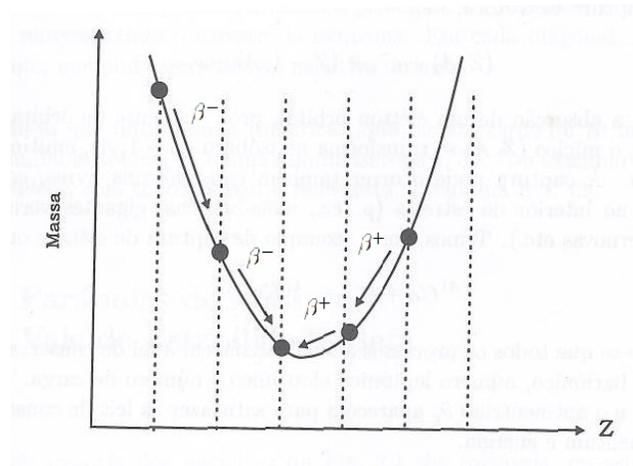
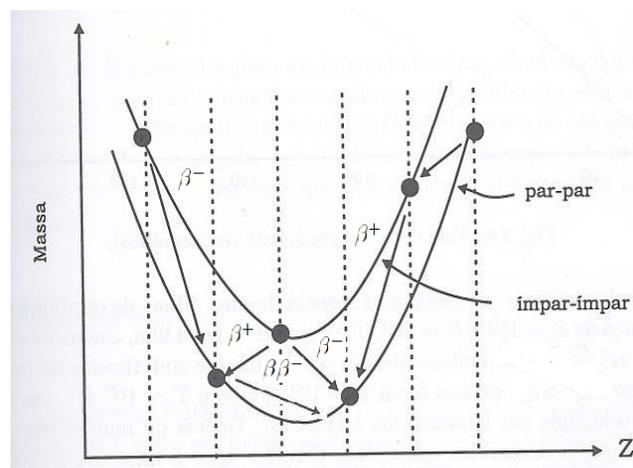


Figura 3.4: Vale de estabilidade beta(esquemático). [61]

Empiricamente, ao se graficar para um dado A , a massa dos nuclídeos contra Z são obtidas parábolas. Para A ímpar as massas se situam em apenas uma parábola; para A par elas se situam em duas parábolas, uma para o caso de A ímpar-ímpar que fica acima da outra formada pelos núcleos par-par. As parábolas estão ilustradas nas figuras 3.5 e 3.6.

Um núcleo tende a decair para um vizinho isóbaro de menor massa via decaimento beta, se decair da esquerda para a direita é β^- se o inverso β^+ . Os núcleos que têm a menor massa em cada família isobárica permanecem no fundo das parábolas e são, portanto, beta estáveis.

Nota-se também, no caso de A ímpar, que para um nuclídeo $N(A, Z)$ decair via duplo decaimento em outro $N(A, Z+2)$ (que está no fundo da parábola), é permitido que haja também

Figura 3.5: Parábola típica para A ímpar. [61]Figura 3.6: Parábola típica para A par. [61]

o decaimento beta de $N(A, Z)$ em $N(A, Z + 1)$ invalidando a candidatura destes núclídeos para pssuírem um duplo decaimento beta observável.

Pelo mesmo motivo, no caso de núclídeos ím-par-ím-par, é impraticável a observação do 2β , restando apenas os par-par como elegíveis. A figura 3.6 torna a explicação mais clara.

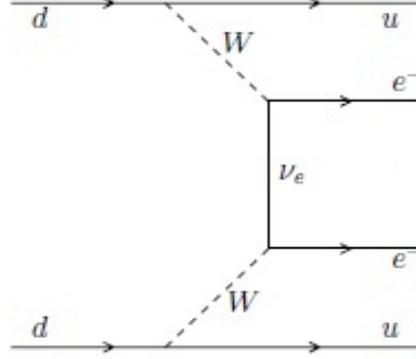


Figura 3.7: Diagrama para o duplo decaimento beta sem neutrino. Adaptada de [25].

O $2\beta_{0\nu}$ é proibido no M.P. pois enquanto neste há conservação do número leptônico, naquele não. Ao olharmos para o diagrama na fig 3.3 fica mais fácil entender o que falta no M.P. para que o processo $2\beta_{0\nu}$ seja possível. Como nenhum antineutrino é emitido, podemos unir as duas linhas dos antineutrinos no diagrama 3.2 para o processo $2\beta_{2\nu}$ a fim de formar uma linha de neutrino virtual (fig. 3.7) que se propaga entre os dois vértices leptônicos da interação fraca. No M.P. isso não é possível por duas razões ilustradas na fig 3.3:

- Um $\bar{\nu}_e$ emitido no vértice leptônico de cima não pode ser absorvido no deabaixo pois só é capaz de absorver um ν_e .
- A helicidade do lépton neutro emitido no vértice superior é positiva e o inferior só pode absorver um neutrino com helicidade negativa.

Portanto existem duas condições necessárias para haver ocorrência do $2\beta_{0\nu}$:

- $\nu_e = \bar{\nu}_e$. O neutrino eletrônico deve ser uma partícula de Majorana (número leptônico não se conserva).
- $m_\nu \neq 0$. Nesse caso o vértice leptônico superior pode emitir um neutrino com helicidade negativa com a amplitude suprimida pelo fator $\frac{m_{\nu e}}{2E_{\nu e}}$ (isso será explicado a seguir).

Sabemos que as soluções da equação de Dirac para um campo massivo na representação chiral das matrizes γ é dada por [25]:

$$u^h(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E+h|\mathbf{p}|}\chi^h(\mathbf{p}) \\ \sqrt{E-h|\mathbf{p}|}\chi^h(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$v^h(p) = -h \begin{pmatrix} \sqrt{E-h|\mathbf{p}|}\chi^{-h}(\mathbf{p}) \\ \sqrt{E+h|\mathbf{p}|}\chi^{-h}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

onde h é a helicidade e para $\mathbf{p} = (0, 0, |\mathbf{p}|)$, temos $\chi^+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\chi^-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

No limite ultra-relativístico $m \ll E$, aproximamos $\sqrt{E + |\mathbf{p}|} \approx \sqrt{2E}$ e fazemos a identificação $\sqrt{E + |\mathbf{p}|}\sqrt{E - |\mathbf{p}|} = m$ para obter:

$$u^+(p) \approx -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^+ \\ -\frac{m}{2E}\chi^+ \end{pmatrix}, \quad u^-(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{m}{2E}\chi^- \\ \chi^- \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$v^+(p) \approx -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{m}{2E}\chi^- \\ \chi^- \end{pmatrix}, \quad v^-(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \frac{m}{2E}\chi^+ \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Considerando a corrente leptônica $j_{W,L}^{\mu\dagger} = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$ (cria antineutrinos no caso de Dirac), no caso de Majorana projetamos $\langle \nu(p, h) | \nu_L(x) | 0 \rangle = v_L^h(p) e^{ip \cdot x}$ e obtemos explicitamente

$$\langle \nu^+(p) | \nu_L(x) | 0 \rangle = -2\sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^- \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} \quad (3.14)$$

$$\langle \nu^-(p) | \nu_L(x) | 0 \rangle = -2\sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m}{2E}\chi^+ \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} \quad (3.15)$$

Vemos que a componente de helicidade negativa é suprimida pelo fator $\frac{m}{2E}$.

A linha interna do neutrino na fig. 3.7 é descrita pelo seguinte propagador

$$G(x_1 - x_2) = \langle 0 | T[\nu_e(x_1) \bar{\nu}_e(x_2)] | 0 \rangle. \quad (3.16)$$

Considerando a mistura dos neutrinos reescrevemos

$$G(x_1 - x_2) = \sum_k U_{ek}^2 \langle 0 | T[\nu_k(x_1) \bar{\nu}_k(x_2)] | 0 \rangle. \quad (3.17)$$

Substituindo pelo propagador fermiônico conhecido obtemos

$$G(x_1 - x_2) = -i \sum_k U_{ek}^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m_k + \not{p}}{p^2 - m_k^2} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (3.18)$$

Mas como o neutrino é emitido e absorvido via interação fraca temos

$$\frac{(1 - \gamma^5)}{2} (-i \sum_k U_{ek}^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m_k + \not{p}}{p^2 - m_k^2} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}) \frac{(1 - \gamma^5)}{2}, \quad (3.19)$$

obtemos então

$$G(x_1 - x_2) = -i \sum_k U_{ek}^2 m_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m_k^2} \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \quad (3.20)$$

Portanto, a amplitude é proporcional à massa efetiva de Majorana

$$m_{2\beta} = \sum_k U_{ek}^2 m_k. \quad (3.21)$$

Notamos que fases de violação de CP de Dirac e Majorana aparecem na massa efetiva. Segundo a parametrização usada no capítulo anterior temos

$$m_{2\beta} = |U_{e1}^2| m_1 + |U_{e2}^2| e^{i\alpha_2} m_2 + |U_{e3}^2| e^{i\alpha_3} m_3 \quad (3.22)$$

onde $\alpha_2 = 2\lambda_2$ $\alpha_3 = 2(\lambda_3 - \delta_{13})$.

Considerando os casos de conservação de CP temos $\delta_{13} = 0, \pi$ e $\lambda_{2,3} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$; portanto

$$\alpha_k = 0, \pi; \quad e^{i\alpha_k} = \pm 1. \quad (3.23)$$

Temos assim quatro possibilidades: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$. Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $(++)$ então $m_{2\beta}$ é máximo. O mínimo se dá em um dos outros três casos, dependendo dos valores das massas e ângulos de mistura. O máximo e mínimo ocorrem em casos de conservação de CP. Cabe também comentar que o duplo decaimento beta é processo CP-par, como explicado na seção de Violação de CP.

Também é possível que, devido à presença das fases de violação de CP na massa efetiva, haja o cancelamento dos termos.

$$m_{2\beta} = |U_{e1}^2| m_1 + |U_{e2}^2| e^{i\alpha_2} m_2 + |U_{e3}^2| e^{i\alpha_3} m_3 \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

Isto resultaria numa amplitude nula para o processo mesmo que exista o neutrino de Majorana.

A taxa de decaimento é dada por

$$\Gamma^{0\nu} = G_{0\nu}^N |M_{0\nu}^N|^2 \frac{|m_{2\beta}|^2}{m_e^2}. \quad (3.25)$$

Onde $G_{0\nu}^N$ é o fator espaço de fase resultado da integração dos elementos de matriz leptônicos, que pode ser calculado com precisão. Já $|M_{0\nu}^N|^2$ se refere aos elementos nucleares de matriz, que não podem ser calculados facilmente pois necessitam de um modelo nuclear preciso [25].

Os métodos experimentais consistem na medida da energia dos elétrons emitidos ou a soma dela, pois só assim se distingue o $2\beta_{0\nu}$ do $2\beta_{2\nu}$. Como as taxas de decaimento são extremamente lentas ($\approx 10^{-36} \text{s}^{-1}$) [24] e considerando que

$$N_{eventos} \propto \text{massa da fonte} \cdot \text{tempo} \quad (3.26)$$

é preciso ter grande quantidade de massa do elemento fonte. Para tal geralmente usa-se o mesmo elemento como fonte e como detector. Também é preciso ter alta resolução em energia, para discriminar o $2\beta_{0\nu}$ do $2\beta_{2\nu}$ e ter ruído diminuto: materiais com nível de radioimpurezas menor que $\mu\text{Bq/Kg}$ e a capacidade de discriminar ruído de sinal [24].

Existem vários experimentos, em particular dois apresentaram resultados divergentes. O mais antigo deles foi o de HEIDELBERG-MOSCOW, realizado com detectores semicondutores de ^{76}Ge , sendo o ^{76}Ge também a fonte. Um subgrupo da colaboração publicou uma evidência do duplo decaimento beta [62] com a massa efetiva entre:

$$|m_{2\beta}| = 0.2 - 0.6 \text{eV} \quad (99.73\% C.L.) \quad (3.27)$$

onde a incerteza vem dos elementos nucleares de matriz.

Um segundo experimento, CUORICINO que consiste de um conjunto de bolômetros criogênicos contendo ^{130}Te foi realizado a fim de conferir o resultado de HEIDELBERG-MOSCOW. A fonte neste experimento também serve como detector. O melhor limite para a massa efetiva de Majorana vem do referido experimento [63], com o valor:

$$|m_{2\beta}| < 0.19 - 0.68 \text{eV} \quad (90\% C.L.) \quad (3.28)$$

A incerteza vem dos elementos nucleares de matriz, devido a ela não é possível refutar os resultados de HEIDELBERG-MOSCOW.

Existe um crescente número de experimentos, em sua grande maioria baseados no conceito de fonte como detector, que almejam chegar a uma sensibilidade de 50meV. É necessário verificar a proclamada evidência para o ^{76}Ge e para tal é importante diminuir as incertezas nos elementos nucleares de matriz. A falta de evidências não descarta a possibilidade do neutrino ser uma partícula de Majorana, devido ao possível cancelamento da amplitude.

3.2 Decaimento Beta Relativístico

Usualmente obtem-se o espectro diferencial de energia do elétron para o decaimento beta através de uma aproximação não-relativística. Nesta seção reproduzimos o espectro diferencial relativístico obtido em [64] e avaliamos como o mesmo se comporta.

Para o decaimento beta do trítio temos

$${}^3\text{H}(0, M) \rightarrow {}^3\text{He}^+(\mathbf{p}', E') + e^-(\mathbf{p}_e, E_e) + \bar{\nu}_e(\mathbf{p}_\nu, E_\nu) \quad (3.29)$$

Para fazer uma descrição relativística usamos a conservação dos momentos para derivar

$$(p_{inicial} - p_e)^2 = (p' + p_\nu)^2 \quad (3.30)$$

expandindo

$$M^2 + m_e^2 - 2ME_e = (p' + p_\nu)^2 \quad (3.31)$$

a máxima energia do elétron é portanto

$$E_e^{max} = \frac{1}{2M} [M^2 + m_e^2 - (m_\nu + M')^2], \quad (3.32)$$

onde M' , m_e e m_ν são, respectivamente, as massas do hélio ionizado, do elétron e do antineutrino. A expressão relativística fornece um valor de 3,4eV a menos do que a aproximação

$$E_e^{max} = M - M' - m_\nu \quad (3.33)$$

usualmente usada para a energia máxima do elétron.

De forma a obter a taxa de decaimento em repouso usamos a fórmula para o decaimento em três corpos

$$\Gamma = \frac{1}{2^9 \pi^5 M} \int \frac{d^3 p_e d^3 p_\nu d^3 p'}{E_e E_\nu E'} |M|^2 \delta^4(p_{inicial} - p' - p_e - p_\nu), \quad (3.34)$$

onde $|M|^2$ é a amplitude invariante de Lorentz somada nos spins. Escrevendo a amplitude usando termos que são invariantes de Lorentz obtemos a expressão mais geral até segunda ordem nos momentos

$$|M|^2 = A + B p_e \cdot p_\nu + C p' \cdot p_{inicial} + \dots \quad (3.35)$$

onde A , B e C são constantes. Cabe observar que como o decaimento beta do trítio é uma transição entre dois estados nucleares com $J^P = 0^+$, não é possível uma mudança de paridade, por

isso os termos que violam paridade não serão considerados. Restringindo aos termos indicados podemos reescrever a relação acima como

$$|M|^2 = A + B(E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + C(ME') \quad (3.36)$$

usando o fato que

$$\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu = -\frac{1}{2}(-m_e^2 - m_\nu^2 - 2E_e E_\nu + M^2 + M'^2 - 2ME') \quad (3.37)$$

pela delta de energia temos que $E' = M - E_e - E_\nu$ e então

$$\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu = \frac{1}{2}(M^2 - M'^2 + m_e^2 + m_\nu^2 + 2E_\nu(E_e - M) - 2ME_e) \quad (3.38)$$

e

$$|M|^2 = A + B(E_e E_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu) + CM(M - E_e - E_\nu) \quad (3.39)$$

Fazendo a integral em d^3p' usando $\delta^3(-\mathbf{p}' - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu)$ obtemos

$$\Gamma = \frac{1}{2^9 \pi^5 M} \int \frac{|\mathbf{p}_e|^2 d|\mathbf{p}_e| d\Omega_e |\mathbf{p}_\nu|^2 d|\mathbf{p}_\nu| d\cos(\theta) d\phi}{E_e E_\nu E'} |M|^2 \delta(E' - M + E_e + E_\nu), \quad (3.40)$$

agora usando as relações

$$|\mathbf{p}_e| d|\mathbf{p}_e| = E_e d|E_e|, \quad (3.41)$$

$$|\mathbf{p}_e| |\mathbf{p}_\nu| d\cos(\theta) = E' d|E'|, \quad (3.42)$$

obtemos

$$\Gamma = \frac{1}{2^9 \pi^5 M} \int dE_e dE_\nu dE' d\Omega_e d\phi |M|^2 \delta(E' - M + E_e + E_\nu), \quad (3.43)$$

a qual se reduz a

$$\Gamma = \frac{1}{2^6 \pi^3 M} \int dE_e dE_\nu |M|^2 \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{1}{2^6 \pi^3 M} \int_{E_\nu^{min}}^{E_\nu^{max}} dE_\nu |M|^2. \quad (3.44)$$

As quantidades E_ν^{max} e E_ν^{min} são determinadas cineticamente, conforme iremos mostrar adiante. Ao substituir 3.38 em 3.39, realizamos a integral acima e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE_e} = & \frac{1}{2^6 \pi^3 M} [(E_\nu^{max} - E_\nu^{min}) \{ (A \\ & - B \frac{1}{2} (M^2 - M'^2 + m_e^2 + m_\nu^2 - 2ME_e) + CM(M - E_e) \} \\ & + \left(\frac{(E_\nu^{max})^2 - (E_\nu^{min})^2}{2} \right) M(B - C)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Usando o fato que

$$\frac{M^2 + m_e^2 - (m_\nu + M')^2 - 2ME_e}{2M} = E_e^{max} - E_e = y, \quad (3.46)$$

escrevemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE_e} = & \frac{1}{2^6\pi^3 M} (E_\nu^{max} - E_\nu^{min}) \left\{ (A \right. \\ & - BM(y + \frac{m_\nu(m_\nu + M')}{M}) + CM(M - E_e) \\ & \left. + (E_\nu^{max} + E_\nu^{min}) \frac{M(B - C)}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para determinar as energias máxima e mínima do neutrino definimos $p_{ij} = p_i + p_j$ e $m_{ij}^2 = p_{ij}^2$, onde os índices i e j vão de 1 a 3 e se referem a cada um dos produtos do decaimento. Neste caso associamos 1 ao neutrino, 2 ao hélio e 3 ao elétron. Representando o momento do trítio por p e usando a conservação do momento podemos escrever:

$$m_{12}^2 = (p - p_3)^2 = M^2 + m_e^2 - 2ME_e, \quad (3.48)$$

$$m_{23}^2 = (p - p_1)^2 = M^2 + m_\nu^2 - 2ME_\nu. \quad (3.49)$$

a energia do neutrino é então dada por

$$E_\nu = \frac{M^2 + m_\nu^2 - m_{23}^2}{2M} \quad (3.50)$$

de onde finalmente obtemos

$$E_\nu^{max} - E_\nu^{min} = \frac{m_{23}^2(max) - m_{23}^2(min)}{2M} \quad (3.51)$$

$$E_\nu^{max} + E_\nu^{min} = \frac{2M^2 + 2m_\nu^2 - m_{23}^2(max) - m_{23}^2(min)}{2M} \quad (3.52)$$

mas para um dado valor de m_{12}^2 , o domínio de m_{23}^2 é determinado pelos valores quando \mathbf{p}_2 é paralelo ou antiparalelo a \mathbf{p}_3 :

$$m_{23}^2(max) = (E'^* + E_e^*)^2 - (\sqrt{(E'^*)^2 - M'^2} - \sqrt{(E_e^*)^2 - m_e^2})^2 \quad (3.53)$$

$$m_{23}^2(min) = (E'^* + E_e^*)^2 - (\sqrt{(E'^*)^2 - M'^2} + \sqrt{(E_e^*)^2 - m_e^2})^2 \quad (3.54)$$

onde o asterisco indica que são os valores vistos no referencial de repouso de m_{12}^2 .

Começando por $E_\nu^{max} - E_\nu^{min}$ obtemos

$$E_\nu^{max} - E_\nu^{min} = \frac{4\sqrt{E'^{*2} - M'^2}\sqrt{E_e^{*2} - m_e^2}}{2M} \quad (3.55)$$

mas como

$$E'^* = \frac{m_{12}^2 - m_\nu^2 + M'^2}{2m_{12}} \quad \text{e} \quad \sqrt{E_e^{*2} - m_e^2} = |\mathbf{p}_e^*| \quad (3.56)$$

obtemos

$$E_\nu^{max} - E_\nu^{min} = \frac{4|\mathbf{p}_e^*|}{2M} \sqrt{\frac{(m_{12}^2 - m_\nu^2 + M'^2)^2 - 4m_{12}^2 M'^2}{4m_{12}^2}} \quad (3.57)$$

depois de alguma algebra chegamos a

$$E_\nu^{max} - E_\nu^{min} = \frac{2|\mathbf{p}_e^*|}{m_{12}} \sqrt{\frac{[m_{12}^2 - (m_\nu + M')^2]}{2M} \cdot \frac{[m_{12}^2 - (m_\nu + M')^2 + 4m_\nu M']}{2M}}. \quad (3.58)$$

Identificando

$$\frac{m_{12}^2 - (m_\nu + M')^2}{2M} = y \quad \text{e} \quad |\mathbf{p}_e^*| = \frac{|\mathbf{p}_e| M}{m_{12}}, \quad (3.59)$$

podemos escrever por fim

$$E_\nu^{max} - E_\nu^{min} = \frac{2M|\mathbf{p}_e|}{m_{12}^2} \sqrt{y(y + \frac{2m_\nu M'}{M})}. \quad (3.60)$$

Para $E_\nu^{max} + E_\nu^{min}$ temos

$$E_\nu^{max} + E_\nu^{min} = \frac{2(M^2 + m_\nu^2 - M'^2 - m_e^2) - 4E'^* E_e^*}{2M} \quad (3.61)$$

mas

$$E'^* = \frac{m_{12}^2 - m_\nu^2 + M'^2}{2m_{12}} \quad \text{e} \quad E_e^* = \frac{M^2 - m_{12}^2 - m_e^2}{2m_{12}} \quad (3.62)$$

Substituindo e abrindo os termos obtemos

$$E_\nu^{max} + E_\nu^{min} = \frac{1}{2Mm_{12}^2} [m_{12}^4 + m_{12}^2((M^2 + m_\nu^2 - M'^2 - m_e^2) + k)] \quad (3.63)$$

onde

$$k = M'^2 m_e^2 + M^2 m_\nu^2 - M^2 M'^2 - m_e^2 m_\nu^2 \quad (3.64)$$

substituindo m_{12}^2 pelo seu valor em (3.48) obtemos

$$E_\nu^{max} + E_\nu^{min} = \frac{1}{m_{12}^2} [2ME_e^2 - E_e(3M^2 + m_\nu^2 - M'^2 + m_e^2) + k'] \quad (3.65)$$

onde

$$k' = 2M(M^2 + m_\nu^2 - M'^2 + m_e^2) \quad (3.66)$$

Resolvendo a equação do segundo grau para E_e podemos escrever

$$\begin{aligned} E_\nu^{max} + E_\nu^{min} &= \frac{2M}{m_{12}^2} (m - E_e) \left(\frac{M^2 + m_\nu^2 - M'^2 + m_e^2 - 2ME_e}{2M} \right) \\ &= \frac{2M}{m_{12}^2} (m - E_e) \left(y + \frac{m_\nu(m_\nu + M')}{M} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

A importância da fatorização que foi feita é que torna mais claro o comportamento no fim do espectro, onde $E_e = E_e^{max}$. Transcrevendo o resultado relativístico exato,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE_e} &= \frac{|\mathbf{p}_e|}{(2\pi)^3 4m_{12}^2} \sqrt{y(y + \frac{2m_\nu M'}{M})} \left\{ (A + CM(M - E_e)) \right. \\ &\quad \left. + BM \frac{ME_e - m_e^2}{m_{12}^2} \left(y + \frac{m_\nu(m_\nu + M')}{M} \right) \right. \\ &\quad \left. - C \frac{M^2}{m_{12}^2} (M - E_e) \left(y + \frac{m_\nu(m_\nu + M')}{M} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Vamos agora examinar a soma de spin para uma interação de 4 férmions. Assumimos que a energia liberada na reação é pequena comparada com a energia de repouso do núcleo. Desta forma usamos spinores não relativísticos para os núcleons e assim apenas γ^μ com $\mu = 0$ contribui [65]. Por fim, assumimos que a contribuição nuclear é constante $cte = D$, levando a uma amplitude quadrada que se apresenta como um termo de Lorentz não invariante:

$$\begin{aligned}
|M|^2 &= D \sum_{spins} |\bar{u}\gamma^0(1 - \gamma^5)v|^2 \\
&= DT r(\not{p}_u\gamma^0(1 - \gamma^5)\not{p}_v(1 + \gamma^5)\gamma^0) \\
&= 2DT r(\not{p}_u\gamma^0\not{p}_v(1 + \gamma^5)\gamma^0) \\
&= 8D(E_u E_v + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v) \\
&= 8DE_u E_v(1 + \cos\theta).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

onde D é uma constante, u e v são as funções de onda dos léptons, p_u e p_v seus quadrimomentos e $E_{u,v}$ as energias. Também usamos a relação $|\mathbf{p}_{u,v}| = v_{u,v}E_{u,v}$ onde $v_{u,v} \approx 1$ são as velocidades.

Veremos que isto é muito bem aproximado deste modelo relativístico se

$$A = C = 0, \quad B \neq 0. \tag{3.70}$$

pois assim obtemos

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{|\mathbf{p}_e| MB}{(2\pi)^3 4m_{12}^4} (ME_e - m_e^2) \sqrt{y(y + \frac{2m_\nu M'}{M})} (y + \frac{m_\nu(m_\nu + M')}{M}). \tag{3.71}$$

Se fosse usada a forma não relativística dada em (3.69) o resultado seria a troca de um fator geral na equação acima, qual seja

$$(ME_e - m_e^2) \rightarrow (ME_e - E_e^2) \tag{3.72}$$

Perto do fim do espectro apenas os dois fatores mais a direita variam apreciavelmente. Se fizermos as seguintes aproximações $\frac{M'}{M} \rightarrow 1$ e $\frac{M'+m_\nu}{M} \rightarrow 1$, a forma do fim do espectro é bem descrita por

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} \propto (y + m_\nu) \sqrt{y(y + 2m_\nu)}. \tag{3.73}$$

Agora comparando com a fórmula usual

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} \propto (Q - E) \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2}. \tag{3.74}$$

que concorda com a aproximação anterior se identificarmos

$$Q - E = y + m_\nu, \tag{3.75}$$

onde $Q = M - M' - m_e - \delta E_e^{max}$ e $E = E_e - m_e$ é a energia cinética relativística. δE_e^{max} é definido por

$$\delta E_e^{max} = M - M' - m_\nu - E_e^{max}, \tag{3.76}$$

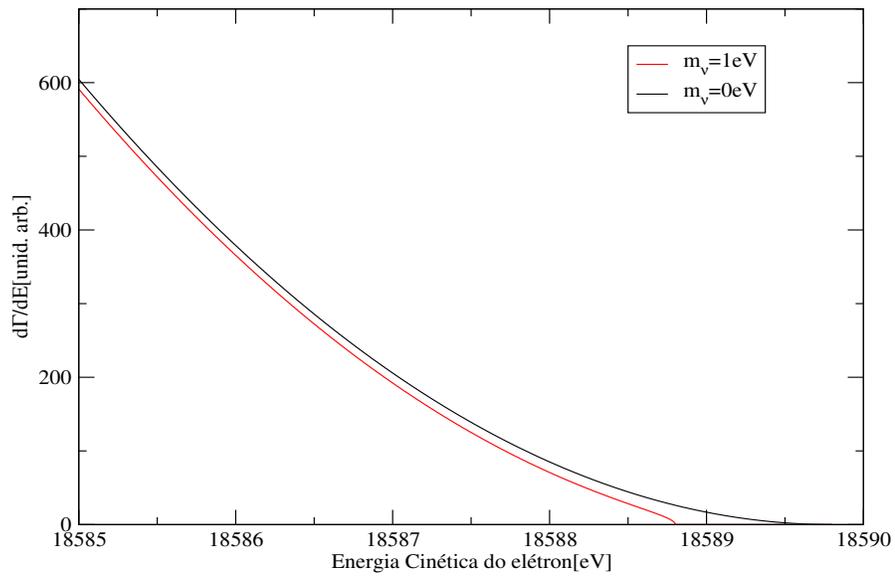


Figura 3.8: O fim do espectro diferencial para massas $m_\nu = 0\text{eV}$ e $m_\nu = 1\text{eV}$.

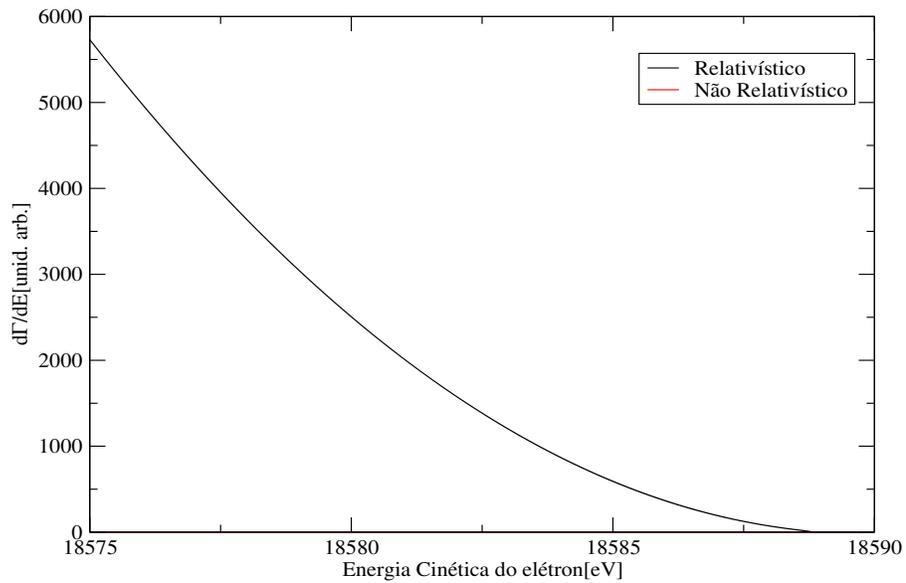


Figura 3.9: Comparação entre o espectro relativístico e não relativístico.

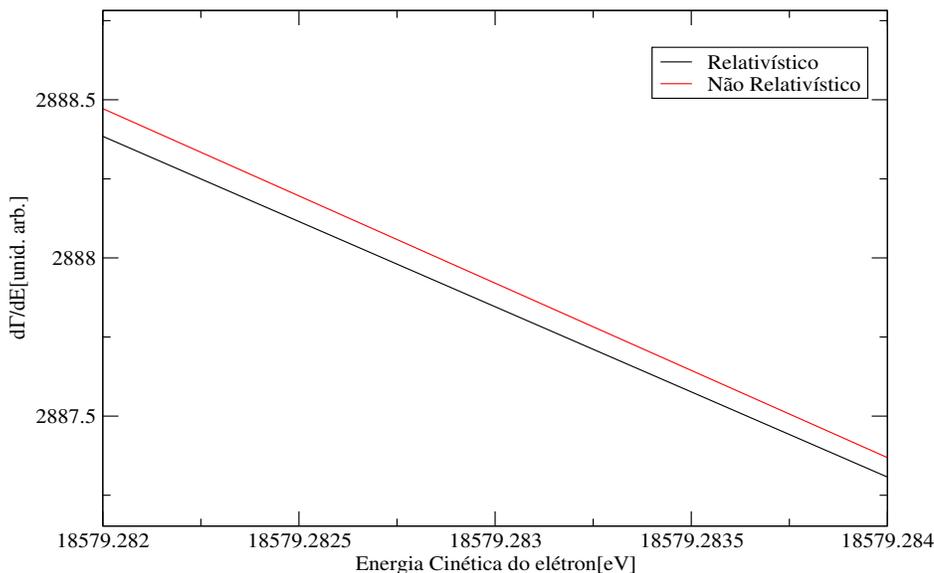


Figura 3.10: Zoom.

o que mostra que a estrutura relativística do fim do espectro pode ser bem aproximada pela forma usual.

Apresentamos alguns gráficos para tornar o estudo mais ilustrativo. No primeiro (fig 3.8) deles eu utilizo o espectro relativístico derivado para ver como o espectro no caso do neutrino ter $m_\nu = 0eV$ se modifica para $m_\nu = 1eV$. No segundo (fig 3.9) comparo o espectro relativístico com a forma não relativística dada pela transição (3.72) em 3.71) para $m_\nu = 1eV$. Como na escala escolhida não é possível distinguir os gráficos eles aparacem como um único, por isso fiz o terceiro (fig 3.10), que não passa de um “zoom” do segundo. Percebemos que a diferença é da ordem de $1/10000$.

3.3 O Experimento KATRIN

O objetivo do que se segue é reproduzir o valor da sensibilidade esperada ($0.2eV$) do experimento KATRIN [60] para o caso em que não há sinal da massa do neutrino. Na sequência testaremos como o espectro se altera no caso de quatro neutrinos misturados e massivos.

A informação mais restrigente na massa do neutrino foi obtida pelos experimentos de Mainz [66] e Troitzk [67]:

- $m_{\nu_k} \leq 2.3eV$ (95%CL) ($k = 1, 2, 3$) (Mainz)
- $m_{\nu_k} \leq 2.5eV$ (95%CL) ($k = 1, 2, 3$) (Troitzk)

Ambos foram baseados no decaimento beta do trítio. O KATRIN é o experimento de nova geração, que será capaz de melhorar esses limites em uma ordem de grandeza.

O experimento, como dito anteriormente, se baseia no decaimento beta do trítio. Será usada uma fonte que consiste num longo tubo preenchido com trítio molecular gasoso de alta pureza ($\approx 95\%$) o qual é constantemente bombeado para fora nas extremidades do tubo, e injetado no meio do tubo. O tubo será colocado dentro de uma cadeia de solenoides supercondutores que estarão gerando um campo magnético homogêneo $B_S = 3,6T$.

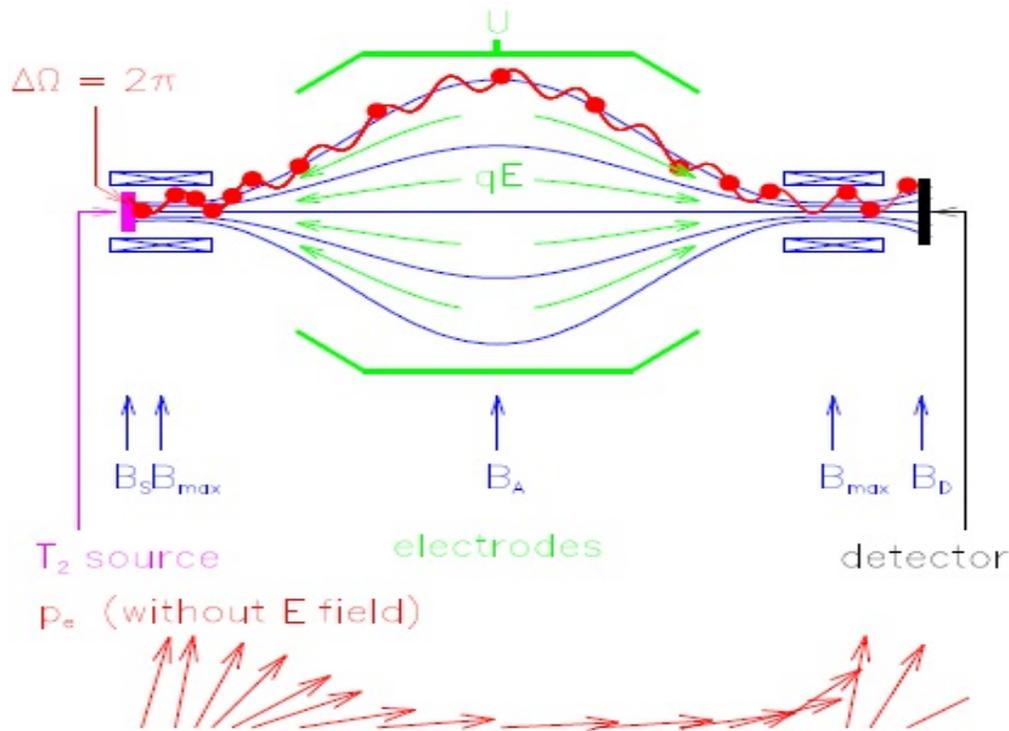


Figura 3.11: Princípio do MAC-E-Filter. Acima temos o arranjo experimental e abaixo a transformação do momento devido a invariância adiabática do momento μ . [60]

Os elétrons são então guiados para um pré-espectrômetro e em seguida para o espectrômetro principal. Os espectrômetros, chamados de MAC-E-Filter consistem de dois magnetos supercondutores colocados nos dois lados de sistema de eletrodos cilíndrico em cascata. Os elétrons que vêm da fonte são guiados pelas linhas do campo magnético no espectrômetro. Então o campo diminui de intensidade em várias ordens de grandeza, o que transforma a maior parte da energia transversal do elétron E_{\perp} em movimento longitudinal. A distância entre os solenoides e o plano central de análise do espectrômetro é escolhido de tal forma que o campo magnético B varia devagar, de maneira que o momento magnético μ permanece constante

$$\mu = \frac{E_{\perp}}{B} = \text{const.} \quad (3.77)$$

Esses elétrons voam contra um potencial eletrostático formado pelo sistema de eletrodos cilíndricos. Aqueles elétrons que conseguem passar a barreira são guiados para o detector enquanto o restante é refletido. Isto forma um filtro que permite passagem apenas aos elétrons com altas energias.

O campo magnético na fonte é escolhido de forma a eliminar elétrons que possuem um caminho muito grande na mesma. Como o campo magnético na entrada do espectrômetro é

máximo, pela conservação de energia e pela relação (3.77) podemos derivar, respectivamente

$$E = E'_{\perp} + E'_{\parallel} \quad e \quad E'_{\perp} = E_{\perp} \frac{B_{max}}{B_S} \quad (3.78)$$

onde E denota a energia cinética inicial do elétron e E' é a energia num momento posterior.

Substituindo a segunda relação na primeira, obtemos

$$E = E_{\perp} \frac{B_{max}}{B_S} + E'_{\parallel}. \quad (3.79)$$

O elétron não conseguirá entrar no espectrômetro quando não houver mais movimento longitudinal, portanto fazendo $E'_{\parallel} = 0$ obtemos o ângulo máximo de saída do elétron que permite a sua entrada no espectrômetro principal:

$$\frac{E_{\perp}}{E} \leq \text{sen}^2(\theta_{max}) = \frac{B_S}{B_{max}}. \quad (3.80)$$

O campo magnético, que é máximo na entrada tem seu mínimo no plano de análise no centro do espectrômetro. Durante o percurso o elétron vai ganhando momento longitudinal de forma que no centro do espectrômetro a energia transversal residual é

$$E''_{\perp} = E \text{sen}^2(\theta) \frac{B_A}{B_S} \quad (3.81)$$

onde B_A é o campo no plano de análise e θ é o ângulo inicial do elétron na fonte. De maneira a vencer a barreira eletrostática T o elétron deve preencher

$$E - E''_{\perp} > T \quad (3.82)$$

assim

$$\text{sen}^2(\theta) < \frac{E - T}{E} \frac{B_S}{B_A} \quad (3.83)$$

assumindo um decaimento beta isotrópico, a função transmissão do espectrômetro pode ser escrita como

$$R(E, T) = \frac{1 - \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta_{max})}. \quad (3.84)$$

denotando ΔE como a energia residual máxima

$$\Delta E = E \text{sen}^2(\theta_{max}) \frac{B_A}{B_S} = E \frac{B_A}{B_{max}} \quad (3.85)$$

assim podemos escrever a função transmissão como

$$R(E, T) = \begin{cases} 0 & E - T < 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{E-T}{E} \frac{B_S}{B_A}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta E}{E} \frac{B_S}{B_A}}} & 0 \leq E - T \leq \Delta E \\ 1 & E - T > \Delta E \end{cases} \quad (3.86)$$

Espectro do Elétron em KATRIN

O espectro diferencial, para o caso de um neutrino massivo não misturado, é dado por [68]:

$$\begin{aligned} \beta(Q, E, m_\nu) &= N_S F(E, Z) \sqrt{(E(E + 2m_e))(E + m_e)} \times \\ &\times \sum_i w_i (Q - W_i - E) \sqrt{(Q - W_i - E)^2 - m_\nu^2} \times \\ &\times \Theta(Q - W_i - E - m_\nu) \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde N_S é a norma do espectro, Θ é a função degrau de Heaviside (para garantir a conservação de energia), W_i é a i -ésima energia rotacional-vibracional da molécula de hélio e w_i a probabilidade de transição para este nível, por fim $F(E, Z)$ é função de Fermi que trata dos efeitos da interação Coulombiana imediata entre o elétron do decaimento e o núcleo de hélio ionizado. A função de Fermi é dada por

$$F(Z, E) = \frac{x}{1 - \exp(-x)} (a_0 + a_1 v_e) \quad x = \frac{2\pi Z\alpha}{v_e}, \quad (3.88)$$

$$a_0 = 1.002037, \quad a_1 = -0.0014437, \quad Z = 2. \quad (3.89)$$

onde α é a constante de acoplamento eletromagnética, v_e é a velocidade do elétron. Os fatores a_0 e a_1 correspondem às correções devido à distribuição finita de carga e às correções radiativas.

Mas o que é medido no experimento é o espectro integrado

$$S(Q, T, m_\nu) = \int_0^\infty \beta(Q, E, m_\nu) R'(E, T) dE \quad (3.90)$$

onde $\beta(Q, E, m_\nu)$ é o referido espectro beta diferencial. $R'(E, T)$ é a função transmissão corrigida pela perda de energia por espalhamento na fonte.

Como a fonte de trítio está repleta de moléculas de trítio, o elétron emitido pode sofrer espalhamentos no caminho até o detector, então fazemos uma correção na função transmissão:

$$R'(E, T) = \int_0^{E-T} R(E - \epsilon, T) \times (P_0 \delta(\epsilon) + P_1 f(\epsilon) + P_2 f \otimes f(\epsilon) + \dots) d\epsilon \quad (3.91)$$

onde $R(E, T)$ é a função transmissão teórica previamente calculada e $f(\epsilon)$ define a função de perda de energia do elétron no trítio gasoso e P_i é a probabilidade de um elétron ser espalhado i vezes. O símbolo \otimes denota convolução.

O produto de convolução é dado por

$$f \otimes f(\epsilon) = \int_0^{E-T} f(\epsilon') f(\epsilon - \epsilon') d\epsilon' \quad (3.92)$$

A função de perda de energia é aproximada por

$$f(\epsilon) = \begin{cases} A_1 \exp\left(-\frac{2(\epsilon - \epsilon_1)^2}{w_1^2}\right) & \text{para } \epsilon < \epsilon_c \\ A_2 \frac{w_2^2}{w_2^2 + 4(\epsilon - \epsilon_2)^2} & \text{para } \epsilon \geq \epsilon_c \end{cases} \quad (3.93)$$

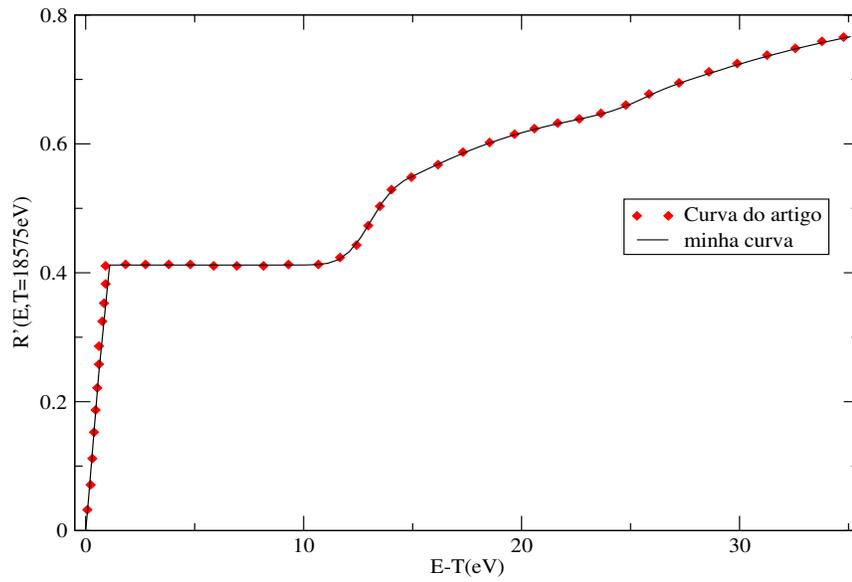


Figura 3.12: Função transmissão corrigida comparada com a referência [68].

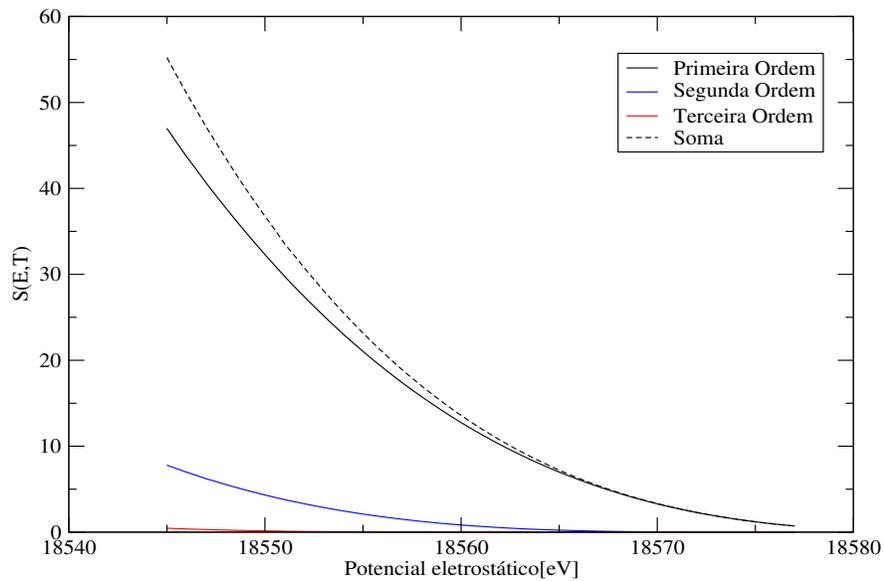


Figura 3.13: Espectro integrado para $Q = 18589.8 \text{ eV}$ [69] e $m_\nu = 1 \text{ eV}$.

onde os parâmetros $A_{1,2}$, $\epsilon_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ descrevem uma amplitude, um valor médio e o desvio de uma Gaussiana e uma Lorentziana, respectivamente. O ponto ϵ_c é escolhido de forma que as funções sejam contínuas.

Comparei o cálculo realizado por mim com o da tese [68], a qual é apresentada na fig 3.12. Também foi feito um gráfico (fig 3.13) para o espectro integrado onde separei as contribuições de cada ordem de correção da função transmissão. Para tal fixei $Q = 18589.8\text{eV}$ e $m_\nu = 1\text{eV}$. Para ambos os cálculos foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros [68]:

$$\begin{aligned}
B_S &= 3,6T \\
B_A &= 3 \times 10^{-4}T \\
B_{max} &= 6,0T \\
N_s &= 8,87 \times 10^{-14} s^{-1} \text{eV}^{-5} \\
P_0 &= 0,412 \\
P_1 &= 0,293 \\
P_2 &= 0,168
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Para a função $f(\epsilon)$ usamos os parâmetros fornecidos em [70]:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0,204\text{eV}^{-1} & A_2 &= 0,0556\text{eV}^{-1} \\
w_1 &= 1,85\text{eV} & w_2 &= 12,5\text{eV} \\
\epsilon_1 &= 12,6\text{eV} & \epsilon_2 &= 14,30\text{eV}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Cálculo Numérico da Sensibilidade da Massa em KATRIN

O passo seguinte é a análise do espectro experimental. A pergunta que queremos responder é qual a sensibilidade no caso de não haver sinal da massa do neutrino. Para tanto construiremos uma função χ^2 comparando o espectro experimental com o teórico:

$$\chi^2(R_s, R_b, Q, m_\nu) = \sum_i \left(\frac{N_{exp}(T_i) - N_{th}(T_i, R_s, R_b, Q, m_\nu)}{\sigma_{exp}(T_i)} \right)^2, \tag{3.96}$$

onde os quatro parâmetros são R_s a norma relativa do espectro integrado, R_b a norma relativa do ruído, Q a energia do final do espectro e m_ν a massa do neutrino. N_{exp} é o número de eventos experimental, que aproximaremos por

$$N_{exp}(T_i, Q, m_\nu) = t(S_{exp}(Q, T_i, m_\nu) + N_b) \tag{3.97}$$

onde fixamos $Q = 18589.8$ que é o valor central da melhor medida experimental deste parâmetro $Q = 18589.8 \pm 1.2\text{eV}$ [69]. Para obtermos a sensibilidade do experimento KATRIN em relação à massa, iremos fazer agora a hipótese que o espectro experimental é o de **neutrino com massa zero**. Ao compararmos diferentes espectros teóricos com massas de neutrinos diferentes de zero obteremos desvios desta hipótese de entrada.

N_{th} é o número de eventos teórico dado por

$$N_{th}(T_i, R_s, R_b, Q, m_\nu) = t(R_s S_{th}(Q, T_i, m_\nu) + R_b N_b) \tag{3.98}$$

onde N_b é a amplitude do ruído fixada em $0,01s^{-1}$. Nas duas expressões T_i e t representam, respectivamente, o potencial eletrostático de retardamento e o tempo de medida. O potencial eletrostático é iniciado a uma distância de $30.5eV$ de Q e é variado progressivamente em passos de $0.5eV$ totalizando sessenta passos. O tempo de medida é de três anos, sendo que para cada valor do potencial eletrostático o tempo de medida é de três anos dividido pelo número total de passos. Se colocarmos a massa do neutrino igual a zero no espectro teórico obtemos uma função χ^2 igual a zero, quando aumentamos a massa, χ^2 aumenta.

Por fim o erro experimental $\sigma_{exp}(T_i)$ é dado por

$$\sigma_{exp}(T_i) = \sqrt{(S_{exp} + N_b)t}. \quad (3.99)$$

Neste ponto, a análise que faremos é divergente da tese [68]. Enquanto lá é utilizado o método das elipses, nós faremos uma minimização analítica nos parâmetros lineares de N_{th} e numérica nos parâmetros Q e m_ν^2 . Ao minimizarmos χ^2 em relação aos parâmetros R_s e R_b obtemos

$$R_s = \frac{bd - ce}{ab - c^2} \quad R_b = \frac{ae - cd}{ab - c^2} \quad (3.100)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \sum_i \frac{S_{th}^2(T_i)}{S_{exp} + N_b} & b &= \sum_i \frac{N_b^2}{S_{exp} + N_b} \\ c &= \sum_i \frac{N_b S_{th}(T_i)}{S_{exp} + N_b} & d &= \sum_i S_{th}(T_i) & e &= \sum_i N_b \end{aligned} \quad (3.101)$$

De forma a evitar derivadas divergentes, que é o caso quando se tenta minimizar analiticamente em relação a Q ou m_ν^2 , variei os parâmetros m_ν^2 e Q e calculei χ^2 numericamente. Para calcular o espectro integrado numericamente utilizei a rotina Vegas.h [71] inserida em um programa que variava os parâmetros de interesse. De posse dos resultados prosseguiu o cálculo de χ^2 para cada par m_ν^2 e Q . Por fim fizemos uma interpolação dos dados e graficamos para obter fig. 3.14. O limite para a massa será colocado a 90 (95)% de confiança se χ^2 é igual a 2.41 (4.61), onde os valores de 2.41 e 4.61 vêm do fato de estarmos usando χ^2 em função de dois parâmetros, Q e m_ν .

O limite encontrado para a massa do neutrino foi

$$\sqrt{|m_\nu^2|} = \sqrt{0.04} = 0.2eV \quad (90\%C.L.). \quad (3.102)$$

Portanto conseguimos reproduzir a sensibilidade esperada do experimento KATRIN a partir de um método de análise independente de [68], baseado no cálculo numérico de χ^2 .

Mistura de Quatro Neutrinos Massivos

Adicionar um neutrino estéril é uma das formas mais simples de se criar uma terceira diferença quadrada de massa. Uma das motivações para isso foi explicar os dados do experimento LSND [72], mas os dados de LSND não foram confirmados pelo experimento MiniBooNE [73]. No entanto, é interessante saber se poderíamos ter sinais de 4 neutrinos, e portanto de neutrinos estéreis, e discriminar isto de 3 neutrinos em KATRIN.

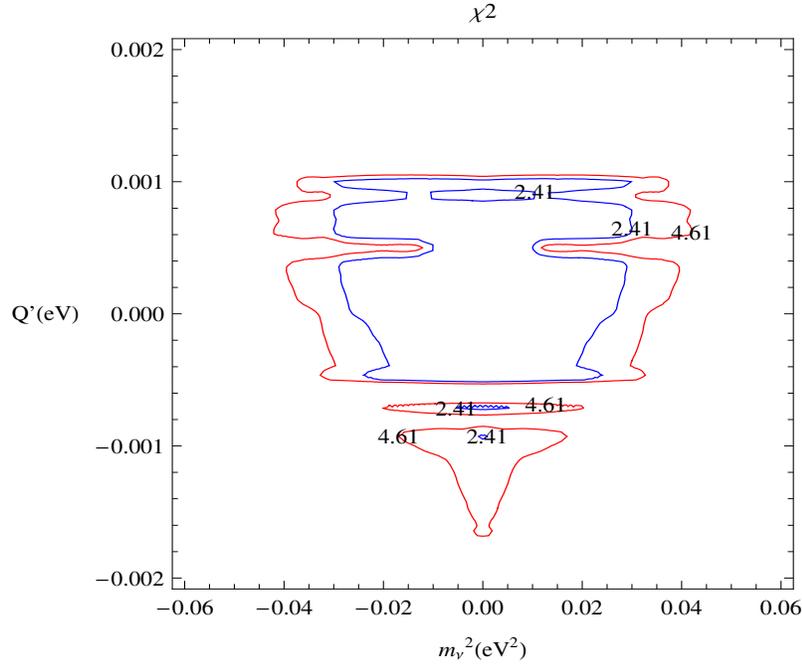


Figura 3.14: χ^2 numérico variando os parâmetros m_ν^2 e Q . O gráfico está em função de $Q' = Q - 18589.8$.

Tendo isso em vista, foi feito também um teste de ansatz para a mistura de 4 neutrinos sendo o quarto estéril. A distorção no espectro do elétron pela mistura de 4 neutrinos massivos é dada por:

$$\beta(T, Q, m_{\nu_e}) = \sum_{i=1}^{i=4} |U_{ei}|^2 \beta(T, Q, m_{\nu_i}) \quad (3.103)$$

onde usamos os diferentes esquemas para 4 neutrinos [74] que estão representados na fig. 3.15.

Usando os parâmetros típicos para o experimento KATRIN (3.95) nas expressões anteriores, calculamos a taxa de decaimento diferencial para cada um dos esquemas na fig. 3.15. e os esquemas 3+1-A e 2+2 são os que mais afetam o espectro. Restringindo o estudo ao esquema 3+1-A, pois as diferenças práticas entre os dois esquemas são mínimas, variamos a massa m_4 e o parâmetro Δm_{41}^2 . O gráfico da fig. 3.16 traz um exemplo para $m_4 = 2.5\text{eV}$ e para $\Delta m_{41}^2 = 5\text{eV}^2$. Os valores dos quadrados dos elementos da matriz de mistura foram modificados de [64] para inserir a mistura com o quarto neutrino.

Quando há mistura de neutrinos massivos, a maior massa deixa de contribuir primeiro para a energia cinética do elétron deformando o espectro. A essa deformação dá-se o nome de “joelho”. Estas massas podem ter uma grande ou pequena mistura. Se a mistura for pequena teremos um joelho suave e se for grande teremos um joelho mais acentuado. A curva magenta na fig. 3.16 é um exemplo deste fato.

Verificamos que o joelho característico da mistura de neutrinos desaparece quando consideramos as energias vibracionais e rotacionais da molécula de trítio, pois para cada nível de energia o ponto final do espectro se altera de forma que ao somar sobre todas as energias possíveis o efeito fica diluído. Assim, o efeito das energias vibracionais e rotacionais é diluir o sinal de neutrinos misturados, mimetizando a massa de um único neutrino. Dessas considerações

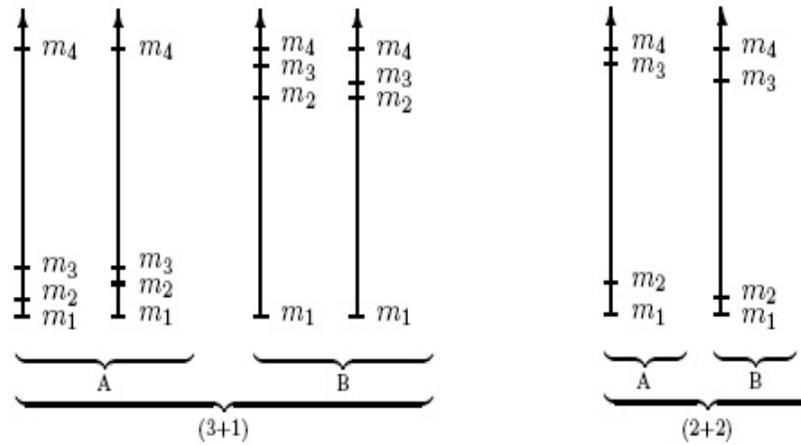


Figura 3.15: Os seis tipos de espectro de massa para 4 neutrinos. As diferentes distâncias entre as massas representam as diferentes escalas de diferença de massa quadrada requeridas para explicar os dados solares e atmosféricos, mais uma escala extra para o quarto neutrino. [74]

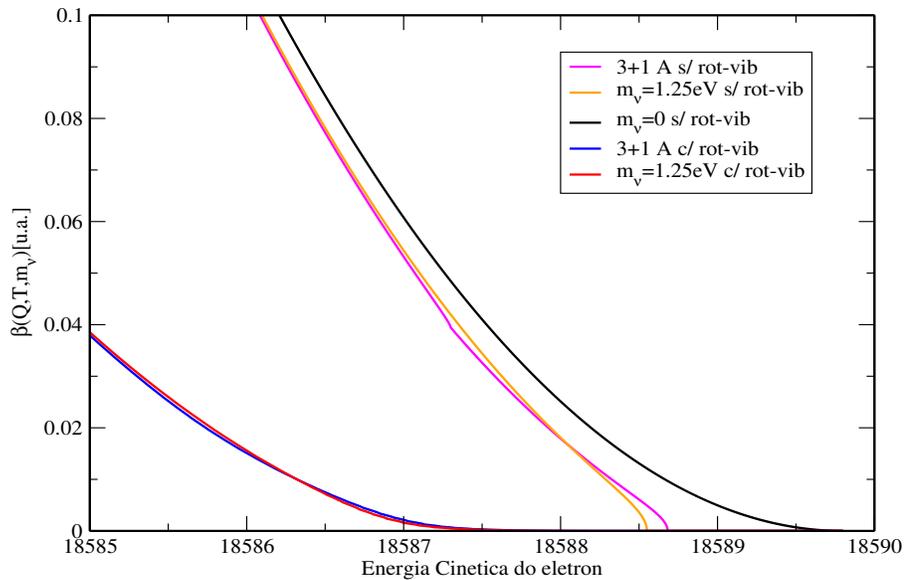


Figura 3.16: Taxa de decaimento diferencial para o elétron considerando a energia rotacional e vibracional (rot-vib) da molécula de trítio (curvas azul e vermelha) e sem considerar (curvas preta, laranja e magenta). Para a mistura usamos $|U_{e1}|^2 = 0.64$, $|U_{e2}|^2 = 0.26$, $|U_{e3}|^2 = 0.01$ e $|U_{e4}|^2 = 0.09$. Para as curvas sem mistura foi usada $m_{\nu_e} = \sum_i |U_{ei}|^2 m_i = 1.25\text{eV}$.

vê-se que mesmo no caso de três neutrinos o sinal de mistura fica escondido.

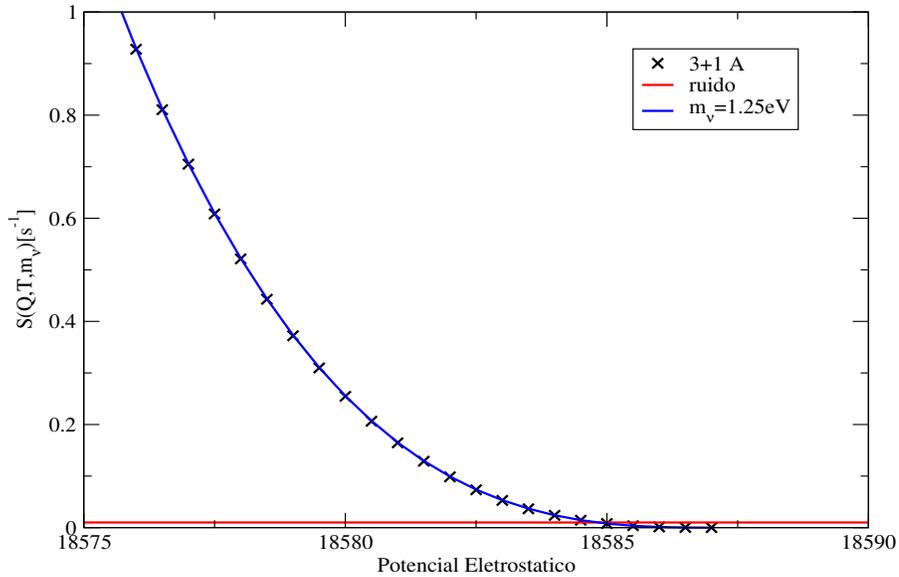


Figura 3.17: Espectro integrado para 4 neutrinos (3+1-A) e para um neutrino $m_{\nu_e} = 1.25 \text{ eV}$. Incluído o ruído constante.

Além disso, o experimento mede o espectro dado pela equação (3.90). O fato de o espectro medido ser integrado também elimina detalhes do espectro diferencial, o que está ilustrado na fig. 3.17. Portanto, devido às razões mencionadas concluímos que o experimento KATRIN não conseguirá distinguir efeitos de mistura de 4 neutrinos [75].

Capítulo 4

Conclusões

No M.P. as massas das partículas tem origem no seu acoplamento com o bóson de Higgs e nesse modelo os neutrinos não são massivos. Os neutrinos, por outro lado, devido ao fenômeno de oscilação experimentalmente confirmado e com a implicação que ele deve ter massa, se torna um candidato singular para indicação de nova física além do M.P..

A possibilidade dessa partícula ser de Majorana também a coloca distoante do M.P. e resolver este impasse quanto à sua natureza é de interesse geral. Os experimentos de duplo decaimento beta almejam chegar a uma sensibilidade de 50meV, o que ainda é impraticável. É prioridade nesses experimentos verificar a proclamada evidência no experimento de HEIDELBERG-MOSCOW.

O atual status do decaimento beta do trítio como a melhor forma de medir a massa do neutrino continua, sendo o experimento KATRIN o depositário das esperanças de se chegar a ver um sinal positivo, ou em caso negativo obter um limite da ordem de 0.2eV, diminuindo em uma ordem de grandeza o limite anterior.

Comparamos, de maneira independente, a forma do espectro de um neutrino de massa zero com a de um neutrino de massa não nula através do cálculo numérico de χ^2 . Usamos os valores típicos do experimento KATRIN e obtivemos com 90% de confiança a sensibilidade de 0.2 eV, cujo valor coincide com o esperado pela colaboração do experimento.

Testamos se podíamos discriminar entre um cenário com 3 neutrinos, e um cenário com 4 neutrinos usando os dados do experimento KATRIN. Para isto, usamos as hierarquias estudadas na literatura, e com os limites sobre os ângulos de mistura conhecidos mostramos que os efeitos gerados pelos níveis rotacionais e vibracionais da molécula de trítio fazem com que as deformações do espectro características da mistura sejam eliminadas mimetizando uma massa efetiva de um único neutrino. O espectro integrado, que é medido no experimento KATRIN, termina por eliminar os detalhes da forma do espectro destruindo quaisquer diferenças entre os espectros de 3 neutrinos e de 4 neutrinos e tornando quase impossível discriminar os dois casos.

Referências Bibliográficas

- [1] Chadwick, J. *Verh. Phys. Gesell.* **16**, 383–391 (1914).
- [2] Pauli, W. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **14**, 1–22 (2000).
- [3] Chadwick, J. *Nature* **129**, 312 (1932).
- [4] Fermi, E. *Z. Phys.* **88**, 161–177 (1934).
- [5] Fermi, E. *Nuovo Cim.* **11**, 1–19 (1934).
- [6] Pontecorvo, B. *Phys. Rev.* **72**, 246 (1947).
- [7] Reines, F., Cowan, C. L., Harrison, F. B., McGuire, A. D., and Kruse, H. W. *Phys. Rev.* **117**, 159–173 (1960).
- [8] Lee, T. D. and Yang, C.-N. *Phys. Rev.* **104**, 254–258 (1956).
- [9] Wu, C. S., Ambler, E., Hayward, R. W., Hoppes, D. D., and Hudson, R. P. *Phys. Rev.* **105**, 1413–1414 (1957).
- [10] Salam, A. Originally printed in “Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden”, Stockholm 1968, 367-377, (1969).
- [11] Weinberg, S. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264–1266 (1967).
- [12] Higgs, P. W. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508–509 (1964).
- [13] Higgs, P. W. *Phys. Lett.* **12**, 132–133 (1964).
- [14] Higgs, P. W. *Phys. Rev.* **145**.
- [15] Glashow, S. L. *Nucl. Phys.* **22**, 579–588 (1961).
- [16] ’t Hooft, G. *Nucl. Phys.* **B35**, 167–188 (1971).
- [17] ’t Hooft, G. *Nucl. Phys.* **B33**, 173–199 (1971).
- [18] ’t Hooft, G. and Veltman, M. J. G. *Nucl. Phys.* **B44**, 189–213 (1972).
- [19] Hasert, F. J. et al. *Phys. Lett.* **B46**, 138–140 (1973).

- [20] Hasert, F. J. et al. *Phys. Lett.* **B46**, 121–124 (1973).
- [21] Hasert, F. J. et al. *Nucl. Phys.* **B73**, 1–22 (1974).
- [22] Pontecorvo, B. *Sov. Phys. JETP* **6**, 429 (1957).
- [23] Pontecorvo, B. *Sov. Phys. JETP* **7**, 172–173 (1958).
- [24] Primakoff, H. “*Neutrinoless Double-Beta Decay*”. Lecture at April APS Meeting, (2007).
www.aps.org/meetings/multimedia/april2007/upload/T4_3.pdf.
- [25] Giunti, C. and Kim, C. W. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University press, (2007).
- [26] Leader, E. and Predazzi, E. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **4**, 1–431 (1996).
- [27] Eidelman, S. et al. *Phys. Lett.* **B592**, 1 (2004).
- [28] Minkowski, P. *Phys. Lett.* **B67**, 421 (1977).
- [29] Yanagida, T. In Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, (1979).
- [30] Gell-Mann, M., Ramond, P., and Slansky, R. In “Supergravity“, p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam., (1979).
- [31] Mohapatra, R. N. and Senjanović, G. *Phys. Rev. Lett.* **44**, 912–915 (1980).
- [32] Maki, Z., Nakagawa, M., and Sakata, S. *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870–880 (1962).
- [33] Pontecorvo, B. *Sov. Phys. JETP* **26**, 984–988 (1968).
- [34] Cleveland, B. T. et al. *Astrophys. J.* **496**, 505–526 (1998).
- [35] Eliezer, S. and Swift, A. R. *Nucl. Phys.* **B105**, 45 (1976).
- [36] Fritzsche, H. and Minkowski, P. *Phys. Lett.* **B62**, 72 (1976).
- [37] Bilenky, S. M. and Pontecorvo, B. *Nuovo Cim. Lett.* **17**, 569 (1976).
- [38] Fukuda, Y. et al. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562–1567 (1998).
- [39] Ahmad, Q. R. et al. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002).
- [40] Eguchi, K. et al. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 021802 (2003).
- [41] Ashie, Y. et al. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 101801 (2004).
- [42] Christenson, J. H., Cronin, J. W., Fitch, V. L., and Turlay, R. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 138–140 (1964).

- [43] Aubert, B. et al. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091801 (2001).
- [44] Abe, K. et al. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 091802 (2001).
- [45] Kobayashi, M. and Maskawa, T. *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652–657 (1973).
- [46] de Gouvea, A., Kayser, B., and Mohapatra, R. N. *Phys. Rev.* **D67**, 053004 (2003).
- [47] Adler, S. L. *Phys. Rev.* **177**, 2426–2438 (1969).
- [48] Bell, J. S. and Jackiw, R. *Nuovo Cim.* **A60**, 47–61 (1969).
- [49] Bouchiat, C., Iliopoulos, J., and Meyer, P. *Phys. Lett.* **B38**, 519–523 (1972).
- [50] Gross, D. J. and Jackiw, R. *Phys. Rev. D* **6**.
- [51] Georgi, H. and Glashow, S. L. *Phys. Rev. D* **6**.
- [52] Geng, C. Q. and Marshak, R. E. *Phys. Rev. D* **39**.
- [53] He, X. G., Joshi, G. C., and Volkas, R. R. *Phys. Rev.* **D41**, 278–280 (1990).
- [54] Minahan, J. A., Ramond, P., and Warner, R. C. *Phys. Rev. D* **41**.
- [55] Rudaz, S. *Phys. Rev.* **D41**, 2619–2621 (1990).
- [56] Golowich, E. and Pal, P. B. *Phys. Rev.* **D41**, 3537–3540 (1990).
- [57] Frampton, P. H. and Mohapatra, R. N. *Phys. Rev.* **D50**, 3569–3571 (1994).
- [58] Kong, O. C. W. *Phys. Rev.* **D55**, 383–396 (1997).
- [59] Majorana, E. *Nuovo Cim.* **14**, 171–184 (1937).
- [60] Angrik, J. et al. . FZKA-7090 (KATRIN design report 2004)
<http://www-ik.fzk.de/~katrin/publications/index.html>.
- [61] Aguilar, A. et al. *Phys. Rev.* **D64**, 112007 (2001).
- [62] Klapdor-Kleingrothaus, H. V., Dietz, A., Krivosheina, I. V., and Chkvorets, O. *Nucl. Instrum. Meth.* **A522**, 371–406 (2004).
- [63] Arnaboldi, C. et al. *Phys. Rev.* **C78**, 035502 (2008).
- [64] Masood, S. S. et al. *Phys. Rev.* **C76**, 045501 (2007).
- [65] Halzen, F. and Martin, A. D. *Quarks and Leptons: An Introductory Courses in Modern Particle Physics*. JOHN WILEY & SONS.
- [66] Kraus, C. et al. *Eur. Phys. J.* **C40**, 447–468 (2005).
- [67] Lobashev, V. M. et al. *Phys. Lett.* **B460**, 227–235 (1999).

- [68] Kaspar, J. *Influence of Energy Scale Imperfection on Neutrino Mass Sensitivity in the Katrin Experiment*. Diploma thesis <http://www-ik.fzk.de/~katrin/publications/index.html>.
- [69] Bergström, I. et al. *Hyperfine Interactions* **173**, 73–83 (2006).
- [70] Aseev, V. et al. *Eur. Phys. J. D* **10**, 39–52 (2000).
- [71] Flannery Brian, P. et al. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, third edition, (2007).
- [72] Aguilar, A. et al. *Phys. Rev.* **D64**, 112007 (2001).
- [73] Aguilar-Arevalo, A. A. et al. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231801 (2007).
- [74] Gonzalez-Garcia, M. C. and Maltoni, M. *Phys. Rept.* **460**, 1–129 (2008).
- [75] Salgado, M. Poster apresentado no “XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos”, Passa Quatro-MG, Brasil, (2009).