

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

USO DE FORMAS NORMAIS NO
ESTUDO DE DINÂMICA CAÓTICA EM
SISTEMAS HAMILTONIANOS

*Este exemplar corresponde à redação final da Tese
defendida pelo aluno Werner Martins Vieira e aprovada
pela Comissão Julgadora.*

*2/12/94
Alfredo M. Ozorio de Almeida*

Tese submetida ao
Instituto de Física "Gleb Wataghin",
sob a orientação do Prof. Dr. Alfredo Miguel Ozorio de Almeida,
para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Werner Martins Vieira

07 de janeiro de 1994

DEDICATÓRIA:

Dedico este trabalho à minha esposa Eliane, aos meus filhos Matheus e Felipe, e aos meus pais João e Milce.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço ao Prof. Alfredo a orientação frutífera que redundou neste trabalho; agradeço ao grupo dos “caóticos” a disposição de colaboração sempre presente nas nossas atividades.

Agradeço aos meus avós Salvino e Leda, e meus tios Eunice, Salviano e Rosa, o constante apoio nos estudos, desde os tempos da escola primária.

Agradeço aos amigos André Assis, Paulo Magno e Ruy Farias, o apoio fraterno que sempre caracterizou nossa amizade.

Agradeço ao CNPq o suporte financeiro desta pesquisa.

Sumário

Fazemos a apresentação e desenvolvimento da teoria de formas normais num contexto de estudo do comportamento caótico de sistemas dinâmicos hamiltonianos. Em particular, tratamos de hamiltonianos autônomos de dois graus de liberdade, em torno de pontos de sela. Este é um dos casos em que Moser demonstra a convergência da forma normal. Além disso, mostramos que a forma normal em torno de pontos de sela explicita naturalmente a geometria cilíndrica do fluxo na vizinhança destes pontos. Por outro lado, a existência de uma topologia cilíndrica numa região extensa em torno do ponto de sela é a assinatura, no próprio fluxo, do comportamento caótico. Esta combinação permite um cálculo semi-analítico preciso, diretamente no espaço de fases de quatro dimensões, daquelas estruturas do fluxo que, numa seção de Poincaré conveniente, se projetam na célebre figura homoclínica. Aplicamos o método à hamiltoniana de Hénon-Heiles. Em particular, pudemos computar com precisão, e pela primeira vez, as órbitas periódicas instáveis vizinhas do ponto de sela, as órbitas homoclínicas associadas a estas últimas e as órbitas periódicas de período longo que se acumulam nas homoclínicas. Qualitativamente, foi possível obter indícios numéricos de que a região de convergência da forma normal, inicialmente estabelecida por Moser, pode ser estendida de algum modo numa vizinhança ao longo das variedades estável e instável que emanam do ponto de sela. Finalmente, apresentamos as perspectivas de continuação do presente trabalho.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Formas Normais	5
2.1	Introdução	5
2.2	Formas Normais Convergentes	6
2.3	Relações de Recorrência para a Forma Normal	14
3	Topologia Cilíndrica em Fluxos Hamiltonianos	24
3.1	Introdução	24
3.2	Fluxos Não-Lineares	27
3.3	Topologia Cilíndrica e Dinâmica Caótica	28
4	Aplicação à Hamiltoniana de Hénon-Heiles	33
4.1	Introdução	33
4.2	Preparação do Sistema de Hénon-Heiles	36
4.3	Resultados	38
5	Conclusões	101
A	O Teorema de Moser	104
	Bibliografia	106

Capítulo 1

Introdução

As técnicas que envolvem o uso das formas normais, são de fato versões específicas de um único objetivo: reescrever um dado sistema dinâmico, que é em geral complexo, de modo a torná-lo mais transparente ao entendimento, sem que com isso se percam suas propriedades essenciais. Para isso, são usadas transformações de coordenadas adequadas, satisfazendo uma ou mais exigências de construção, de modo que nas novas coordenadas o sistema se apresente simplificado em algum sentido.

Estas transformações de coordenadas podem ou não ser localmente analíticas, sendo que a não-analiticidade não elimina necessariamente as suas possibilidades de uso. Um exemplo claro disso são as formas normais, construídas em torno de pontos de equilíbrio estáveis do fluxo, gerado pelo sistema dinâmico. Pelo fato de ser em torno destes pontos, que órbitas podem ser aprisionadas por um longo tempo e, ainda mais, pela idéia subjacente de que seja mais interessante estudar situações de estabilidade, este é historicamente um dos casos mais disseminados de uso das formas normais. No entanto, sabe-se que estas transformações de coordenadas em geral não convergem, sofrendo de deficiências ligadas aos chamados pequenos denominadores e às ressonâncias. Tais defeitos não impedem, porém, que o uso destas transformações, como séries convenientemente truncadas, seja bem-sucedido no tratamento numérico aproximado, e mesmo qualitativo em alguns casos, do sistema original.

Ocorre que, em geral, é inevitável a existência de pontos de equilíbrio

instáveis no fluxo gerado por um sistema dinâmico. De fato, é essa existência que torna possível e, por que também não dizer, inevitável, a própria existência do comportamento caótico em sistemas dinâmicos. É justamente num contexto “caótico” que faremos nosso estudo das formas normais. Devemos ressaltar em particular que, em alguns destes casos, as transformações de coordenadas que levam ao sistema normalizado, ou simplificado, são convergentes, o que foi demonstrado por Moser em 1956 e 1958, ao contrário do que ocorre em geral nos casos em torno de equilíbrios estáveis.

No Capítulo 2 apresentamos a técnica das formas normais, para o caso de um sistema hamiltoniano autônomo, de dois graus de liberdade, estudado em torno de pontos de sela (instáveis) da hamiltoniana. Este é um dos casos abarcados pela demonstração de convergência de Moser: existe uma transformação de coordenadas polinomial localmente analítica que liga o sistema hamiltoniano original ao sistema hamiltoniano normalizado. A seguir, mostramos que o sistema normalizado pode ser reescrito, de modo a explicitar naturalmente a existência de uma geometria cilíndrica para o fluxo hamiltoniano, na vizinhança do ponto de sela. Esta última propriedade formal da forma normal, aliada à sua convergência, é crucial em nosso trabalho e será retomada no Capítulo 3. Ainda no Capítulo 2, desenvolvemos as relações de recorrência entre os coeficientes das transformações, de modo a possibilitar a construção de um algoritmo para o cômputo geral dos mesmos.

No Capítulo 3 apresentamos e discutimos o fato de que a topologia de um fluxo hamiltoniano caótico, numa região extensa em torno do ponto de sela, é cilíndrica, em contraste à topologia toroidal mais familiar, existente quando o sistema é totalmente integrável. A persistência da topologia cilíndrica numa região extensa e para além da vizinhança do ponto de sela, é justamente a assinatura topológica do comportamento caótico, no próprio espaço de fases de quatro dimensões do fluxo hamiltoniano. Portanto, num regime caótico, quase todas as órbitas nesta região repousam sobre cilindros, os quais se propagam e se entrecruzam entre si de um modo complexo. Esse fluxo cilíndrico se projeta, numa seção de Poincaré apropriada, justamente na figura homoclínica.

Dada a capacidade da forma normal de descrever a estrutura cilíndrica do fluxo, mais o caráter analítico local das transformações de coordenadas, é possível propagar com precisão a topologia cilíndrica no sistema original. Podemos, portanto, estudar diretamente no fluxo em quatro dimensões — e pela primeira vez —, as estruturas subjacentes à figura homoclínica: as órbitas

periódicas instáveis vizinhas do ponto de sela, as órbitas homoclínicas associadas a estas órbitas instáveis e as órbitas periódicas de período longo que se acumulam nas homoclínicas. Em suma, será possível tentar caracterizar diretamente no fluxo hamiltoniano a assinatura do comportamento caótico.

No Capítulo 4, fazemos uma aplicação numérica da teoria apresentada a uma hamiltoniana específica, a hamiltoniana de Hénon–Heiles.

Finalmente, no Capítulo 5 sumarizamos os resultados de nosso estudo.

Capítulo 2

Formas Normais

2.1 Introdução

A técnica das formas normais está entre os métodos analítico-numéricos bem sucedidos no estudo do comportamento local de sistemas dinâmicos. Sua ampla utilização advém da sua simplicidade conceitual aliada à conhecida eficiência numérica: trata-se de obter via uma transformação polinomial de coordenadas, a simplificação (com eventual linearização) da série de Taylor do campo vetorial de um sistema dinâmico na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou órbita periódica, ou mesmo a simplificação de uma série perturbativa em torno de um sistema dinâmico linear. Denominamos o sistema dinâmico resultante de sistema normalizado, o campo vetorial resultante de forma normal e suas coordenadas de coordenadas normais.

Assim, esta técnica pode ser formulada tanto para sistemas gerais incluindo aplicações no plano [1] quanto para sistemas hamiltonianos [2] e aplicações conservativas [3]. Além disso, mesmo quando a forma normal não converge, tanto pela ocorrência de pequenos denominadores quanto de ressonâncias exatas, ela é de utilidade formal e numérica. Este é o caso quando a forma normal é obtida em torno de um ponto de equilíbrio ou órbita periódica estáveis. Apesar da não-convergência, esta é talvez a situação mais explorada na literatura, tendo em vista a possibilidade de acompanhamento do movimento, por períodos longos de tempo, usando-se a série truncada. Mencionaremos a título de ilustração dois exemplos adicionais de uso das formas normais divergentes.

Seja um sistema hamiltoniano na vizinhança de uma órbita periódica estável não-degenerada (isolada na superfície de energia que a contém). Se a órbita possuir frequência irracional, a forma normal truncada pode ser útil na descrição aproximada do movimento nessa região. Se a frequência for racional teremos uma ressonância exata e a forma normal não se aplica. Entretanto, os números racionais são densos no conjunto dos reais, de modo que qualquer órbita periódica irracional é “quase-ressonante” em alguma ordem suficientemente elevada, isto é, é sempre possível escolher os inteiros r e s com s suficientemente grande de modo que a frequência ω da órbita periódica seja dada por

$$\omega = \frac{r}{s} + \epsilon$$

onde ϵ é um irracional tão pequeno quanto se queira. Nesse caso, o uso da forma normal permite estudar localmente a passagem pelas ressonâncias da família (contínua no parâmetro ϵ) de órbitas periódicas, revelando o fenômeno da bifurcação local de órbitas periódicas com multiplicação de período. Para uma hamiltoniana genérica, isto ocorre segundo um padrão universal que só depende do inteiro s [4].

Podemos usar também as formas normais na obtenção de integrais formais de movimento. Isto foi primeiro feito em [5], descrevendo bem situações assintoticamente integráveis mas falhando em regimes crescentemente caóticos. As indicações de divergência são claras [6], tanto numéricas quanto teóricas (a teoria prevê a convergência como uma exceção à regra), o que não impede a obtenção de bons resultados numéricos em situações específicas.

2.2 Formas Normais Convergentes

O presente trabalho diz respeito ao uso de formas normais convergentes. Enquanto Birkhoff desenvolveu formalmente a teoria das formas normais para sistemas conservativos [3, 2], Moser demonstrou nesses casos que a convergência se dá em torno de pontos de equilíbrio instáveis, tanto para aplicações [7] quanto para sistemas hamiltonianos [8].

Será que a utilização de formas normais convergentes permite caracterizar o movimento onde a dinâmica é caótica? Neste contexto, se destacam como elementos importantes a serem descritos as variedades estável e instável que emanam de pontos de equilíbrio e/ou de órbitas periódicas instáveis (caso

contínuo), as órbitas homoclínicas e também as órbitas periódicas de períodos longos que se acumulam assintoticamente nas homoclínicas. Todos estes elementos são básicos em um regime caótico e se projetam numa aplicação ou seção de Poincaré segundo a clássica figura homoclínica [9, 10].

Estudos para o caso de aplicações em torno de pontos fixos hiperbólicos foram realizados por Ozorio de Almeida e colaboradores . Usando o mapa de Hénon modificado [11], que é a aplicação quadrática conservativa mais geral com um ponto fixo instável na origem, foi possível obter resultados numéricos muito bons na computação das variedades estável e instável e suas interseções — as órbitas homoclínicas. Em seguida, Ritter e outros [12] mostraram que a região em que a forma normal assim obtida efetivamente converge, inclui uma estreita região ao longo das variedades, cuja largura tende assintoticamente a zero com o afastamento do ponto fixo. Isto permitiu uma computação precisa de órbitas periódicas de período longo, cujas famílias têm as órbitas homoclínicas como pontos de acumulação. Além disso, Matos e Ozorio de Almeida [13] verificaram que a adição de uma perturbação dissipativa não é obstáculo a uma boa aplicação numérica do método.

O uso das formas normais convergentes no caso de sistemas hamiltonianos, permite estudar diretamente no tempo o fluxo contínuo de sistemas dinâmicos de interesse físico. Já as aplicações conservativas são uma redução apropriada — são “fotografias estroboscópicas” — na vizinhança de um ponto de equilíbrio, de sistemas hamiltonianos de um grau de liberdade periódicos no tempo, estes últimos, por sua vez, sendo uma redução de sistemas hamiltonianos autônomos de dois graus de liberdade, em torno de uma órbita periódica.

Embora a prova de Moser de 1958 [8] trate de sistemas hamiltonianos autônomos de dois ou mais graus de liberdade, consideraremos aqui apenas a primeira possibilidade. Neste trabalho, Moser demonstra que existe uma transformação de coordenadas polinomial convergente que transforma um sistema hamiltoniano inicial num sistema normalizado localmente integrável. Uma particularidade da demonstração é que ela exige que se parta de um sistema hamiltoniano, leva a um sistema normalizado que também é hamiltoniano, mas deixa em aberto se a transformação de coordenadas convergente, que leva de um a outro, pode ser feita canônica (em geral não o é). Portanto, este método lida diretamente com as equações de movimento para o estabelecimento da convergência. Outro fato a ser mencionado é que a convergência foi demonstrada em torno de pontos de equilíbrio cuja linearização

produza uma quádrupla de autovalores independentes sobre os reais. Isto ocorre em dois casos: i) quando um deles é imaginário não-nulo e outro é real não-nulo e ii) quando um deles é complexo com ambas as partes real e imaginária não-nulas. Em ambos os casos o ponto de equilíbrio é instável, sendo que no caso i) ele é frequentemente chamado de ponto de sela. [Para uma exposição do teorema de Moser completo, vide Apêndice A.]

Quanto à questão deixada aberta por Moser da possível canonicidade das transformações de coordenadas convergentes, é digno de nota que surgiram problemas em tentativas preliminares de Ozorio de Almeida, Yokoyama e Giorgilli [14] de obter estas transformações via funções geratrizes. De qualquer modo, não existe ainda, tanto quanto sabemos, uma resposta conclusiva a esta importante questão.

A aplicação de formas normais convergentes em fluxos hamiltonianos tem sido previamente considerada na literatura [15]. Neste trabalho os autores implementam, num fluxo específico, tanto a forma de Poincaré–Moser convergente na vizinhança de um ponto de equilíbrio instável, quanto a forma de Birkhoff–Gustavson em torno de um ponto de equilíbrio estável (ambos os tipos de pontos estão presentes no fluxo mas são obviamente distintos). Em seguida, fazem uma comparação numérica de ambas as formas na vizinhança do ponto instável, o que confirma a precisão da primeira bem como revela a deficiência da segunda na descrição do movimento instável exato. Além disso, o trabalho antecipa uma abordagem que considera ambas as formas normais — de um modo alternado conveniente entre seus respectivos pontos de expansão — no estudo do comportamento caótico [16].

No presente trabalho, utilizamos apenas as formas normais convergentes em torno de pontos de sela de uma hamiltoniana autônoma de dois graus de liberdade. Vamos mostrar que podemos caracterizar a dinâmica caótica do fluxo exclusivamente em termos do uso destas formas normais, evitando assim a necessidade de considerar formas alternativas de expansão em torno de outros pontos de equilíbrio. Deste modo, conseguimos obter diretamente no fluxo hamiltoniano contínuo de quatro dimensões, subjacente às seções de Poincaré de duas dimensões, algumas das estruturas básicas que emergem na figura homoclínica. Isto é possível pela conjugação deste formalismo a uma constatação crucial: fluxos hamiltonianos caóticos possuem uma topologia cilíndrica na vizinhança de pontos de sela [17]. Veremos que a forma normal convergente desempenha naturalmente um papel privilegiado na revelação desta topologia. Isto será visto na sequência no presente capítulo. Já no

capítulo seguinte, apresentaremos a relação entre a topologia cilíndrica e o comportamento caótico.

Para a implementação do método de Poincaré–Moser, é fundamental que a hamiltoniana inicial esteja na forma:

$$h(x_1, x_3, x_2, x_4) = \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 + \sum_{|\ell|=3}^{\infty} H(\ell) \underline{x}^{\ell} \quad . \quad (2.1)$$

Aqui, e sempre que for conveniente no futuro, usaremos a seguinte notação: $\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4)$, $\underline{x} = (x_1, x_3, x_2, x_4)$, $|\underline{\ell}| = \ell_1 + \ell_3 + \ell_2 + \ell_4$ e $\underline{x}^{\ell} = x_1^{\ell_1} x_3^{\ell_3} x_2^{\ell_2} x_4^{\ell_4}$. As variáveis x_1 e x_2 são as coordenadas do sistema e x_3 e x_4 são os seus momentos canonicamente conjugados, respectivamente. $\lambda_1 = i\omega$ e $\lambda_2 = -\lambda$ com ω e λ reais, são os autovalores geradores da quádrupla correspondente à parte linear do sistema e $H(\underline{\ell})$ é o coeficiente do monômio \underline{x}^{ℓ} na expansão (2.1). Denominaremos, por óbvia razão, o número $|\ell|$ de ordem do coeficiente $H(\underline{\ell})$.

A forma usual não-complexificada que a parte quadrática da hamiltoniana (2.1) assume em torno do ponto de sela é

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\lambda}{2}(p_2^2 - q_2^2) + \frac{\omega}{2}(p_1^2 + q_1^2) \quad . \quad (2.2)$$

As formas (2.1) e (2.2) estão ligadas pela transformação simplética

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_3) \\ p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix_1 + x_3) \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_4) \\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_2 + x_4) \end{array} \right. \quad . \quad (2.3)$$

As equações de Hamilton para o hamiltoniano dado por (2.1) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \sum_{|\underline{\ell}|=3}^{\infty} \ell_3 H(\underline{\ell}) x_1^{\ell_1} x_3^{\ell_3-1} x_2^{\ell_2} x_4^{\ell_4} \\ \dot{x}_3 = -\lambda_1 x_3 - \sum_{|\underline{\ell}|=3}^{\infty} \ell_1 H(\underline{\ell}) x_1^{\ell_1-1} x_3^{\ell_3} x_2^{\ell_2} x_4^{\ell_4} \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + \sum_{|\underline{\ell}|=3}^{\infty} \ell_4 H(\underline{\ell}) x_1^{\ell_1} x_3^{\ell_3} x_2^{\ell_2} x_4^{\ell_4-1} \\ \dot{x}_4 = -\lambda_2 x_4 - \sum_{|\underline{\ell}|=3}^{\infty} \ell_2 H(\underline{\ell}) x_1^{\ell_1} x_3^{\ell_3} x_2^{\ell_2-1} x_4^{\ell_4} \end{array} \right. . \quad (2.4)$$

Pelo teorema de Moser, existe uma transformação de coordenadas polinomial convergente numa certa vizinhança do ponto de equilíbrio,

$$x_i = y_i + \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{\infty} X(i, \underline{\ell}) \underline{y}^{\underline{\ell}} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad , \quad (2.5)$$

tal que o sistema (2.4) assume a seguinte forma normalizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = F(y_1 y_3, y_2 y_4) y_1 \\ \dot{y}_3 = -F(y_1 y_3, y_2 y_4) y_3 \\ \dot{y}_2 = G(y_1 y_3, y_2 y_4) y_2 \\ \dot{y}_4 = -G(y_1 y_3, y_2 y_4) y_4 \end{array} \right. , \quad (2.6)$$

onde F e G são funções apenas dos produtos $y_1 y_3$ e $y_2 y_4$ e devem ser determinadas juntamente com os coeficientes das transformações (2.5). Para

que (2.6) tenha a estrutura particular apresentada, é necessário partir de um sistema que já seja hamiltoniano.

Por outro lado, o sistema normalizado (2.6) também é hamiltoniano, cuja função de Hamilton $k(\underline{y})$ é dada por

$$k(y_1, y_3, y_2, y_4) = \lambda_1 y_1 y_3 + \lambda_2 y_2 y_4 + \sum_{|\underline{m}|=2}^{\infty} K(2\underline{m}) (y_1 y_3)^{m_1} (y_2 y_4)^{m_2} \quad . \quad (2.7)$$

Isto pode ser visto por substituição direta de (2.7) nas equações de Hamilton, o que leva ao sistema (2.6). $K(2\underline{m}) = K(2m_1, 2m_2)$ é o coeficiente do monômio $(y_1 y_3)^{m_1} (y_2 y_4)^{m_2}$ e o fator 2 é para indicar que os monômios de ordem ímpar não aparecem na expansão (2.7). Como já mencionado, permanece aberta a questão de saber se (2.5), ligando os dois sistemas hamiltonianos, pode ser feita uma transformação canônica.

O sistema (2.6) pode ser imediatamente integrado, sua solução sendo

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \exp(t F) \\ y_3(t) = y_3(0) \exp(-t F) \\ y_2(t) = y_2(0) \exp(t G) \\ y_4(t) = y_4(0) \exp(-t G) \end{cases} \quad . \quad (2.8)$$

É imediato que as duas constantes de movimento são

$$y_1 y_3 = c t e_1 \quad , \quad (2.9)$$

$$y_2 y_4 = c t e_2 \quad . \quad (2.10)$$

F e G podem ser escritas em função dos $K(2\underline{m})$ e das constantes de movimento como

$$\begin{cases} F(y_1 y_3, y_2 y_4) = \lambda_1 + \sum_{|m|=2}^{\infty} m_1 K(2m) (y_1 y_3)^{m_1-1} (y_2 y_4)^{m_2} \\ G(y_1 y_3, y_2 y_4) = \lambda_2 + \sum_{|m|=2}^{\infty} m_2 K(2m) (y_1 y_3)^{m_1} (y_2 y_4)^{m_2-1} \end{cases} \quad (2.11)$$

Os coeficientes a serem determinados são então os $X(i, \ell)$ e os $K(2m)$.

Podemos explicitar ainda mais a dinâmica do sistema normalizado. Levando em conta que o espaço de fases original (q_1, q_2, p_1, p_2) é real, vemos de (2.3) que as variáveis x_2 e x_4 são reais e x_1 e x_3 são complexas, existindo entre estas últimas a relação

$$x_3 = -i x_1^* \quad , \quad (2.12)$$

com o asterisco indicando a operação de conjugação complexa. Por outro lado, o truncamento já em primeira ordem das transformações (2.5) revela uma identidade de natureza (quanto a ser real ou complexa) entre as respectivas coordenadas \underline{x} e \underline{y} , o que faz com que as conclusões acima para \underline{x} se estendam automaticamente para \underline{y} . Portanto, segue que y_2 e y_4 devem ser reais e y_1 e y_3 devem ser complexas satisfazendo entre si uma relação idêntica a (2.12):

$$y_3 = -i y_1^* \quad , \quad |y_1| = |y_3| \equiv \rho \quad , \quad (2.13)$$

$$y_1 y_3 = -i \rho^2 \quad , \quad (2.14)$$

sendo ρ uma constante de movimento. Tomando o módulo das duas primeiras equações de (2.8) vemos então que F deve ser imaginário puro. Além disso, G deve ser real pois y_2 e y_4 são reais. Definimos então (lembrando que $\lambda_1 = i\omega$ e $\lambda_2 = -\lambda$)

$$\begin{cases} \Omega \equiv \frac{F}{i} = \omega + \delta\omega \\ \Lambda \equiv G = \lambda + \delta\lambda \end{cases} \quad , \quad (2.15)$$

e portanto, de (2.11) e (2.14),

$$\begin{cases} \delta\omega \equiv -i \sum_{|\underline{m}|=2}^{\infty} m_1 K(2\underline{m}) (-i\rho^2)^{m_1-1} (\epsilon)^{m_2} \\ \delta\lambda \equiv \sum_{|\underline{m}|=2}^{\infty} m_2 K(2\underline{m}) (-i\rho^2)^{m_1} (\epsilon)^{m_2-1} \end{cases}, \quad (2.16)$$

onde denotamos por ϵ a segunda constante de movimento. Evidentemente, se $\epsilon, \rho \ll 1$ decorre que $\delta\omega, \delta\lambda \ll 1$. Com isto, podemos reescrever (2.8) de modo que a estrutura cilíndrica do fluxo normalizado se torne evidente:

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho \exp [i(\theta_0 + \Omega t)] \\ y_3(t) = \rho \exp [-i(\theta_0 + \frac{\pi}{2} + \Omega t)] \\ y_2(t) = y_{20} \exp [\Lambda t] \\ y_4(t) = y_{40} \exp [-\Lambda t] \end{cases}, \quad y_2 y_4 = \epsilon. \quad (2.17)$$

Um cilindro no sistema normalizado consiste então da composição direta de dois movimentos: um circular de raio ρ no plano conjugado (y_1, y_3) e um hiperbólico no plano conjugado (y_2, y_4) com parâmetro de hipérbole ϵ . A fase θ_0 caracteriza uma órbita particular sobre um cilindro. $\delta\omega$ e $\delta\lambda$ introduzem a dependência das velocidades das órbitas em relação ao cilindro sobre o qual elas se propagam, o que é uma correção ao fluxo cilíndrico meramente linear para o qual as velocidades são todas degeneradas, independentes do cilindro, com $\delta\omega = \delta\lambda = 0$. É claro que qualquer um desses cilindros tem sua topologia preservada quando reescrito nas coordenadas originais.

No capítulo seguinte, estabeleceremos a ligação desta topologia cilíndrica com o comportamento caótico da dinâmica.

2.3 Relações de Recorrência para a Forma Normal

Vamos agora obter os coeficientes $X(i, \underline{\ell})$ e $K(2\underline{m})$ apresentados na seção anterior, os quais juntamente com as constantes de movimento (2.9) e (2.10), determinam a dinâmica da forma normal e sua relação com a dinâmica original.

O que temos a fazer é substituir as eqs. (2.5) no sistema (2.4) e em seguida aplicar ao resultado as eqs. (2.6) e (2.8). Obtemos então relações de recorrência para os coeficientes de modo que os $X(i, \underline{\ell})$ e $K(2\underline{m})$ de ordem $|\underline{\ell}|$ e $|2\underline{m}|$ respectivamente, são obtidos em função dos coeficientes de ordens mais baixas. Apresentamos a seguir estas relações em sua forma inicial:

$$\begin{aligned}
 A(1, \underline{n}) X(1, \underline{n}) + B(1, \underline{n}) K(2n_1, 2n_2) = \\
 (n_3 + 1) H(n_1, n_3 + 1, n_2, n_4) + \\
 \Theta(|\underline{n}| - 3) \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_3 + 1) H(\ell_1, \ell_3 + 1, \ell_2, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}} - \\
 \Theta(|\underline{n}| - 4) \sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{1, \underline{n}}^{\underline{m}} \quad , \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(3, \underline{n}) X(3, \underline{n}) + B(3, \underline{n}) K(2n_3, 2n_2) = \\
 -(n_1 + 1) H(n_1 + 1, n_3, n_2, n_4) - \\
 \Theta(|\underline{n}| - 3) \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_1 + 1) H(\ell_1 + 1, \ell_3, \ell_2, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}} - \\
 \Theta(|\underline{n}| - 4) \sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{3, \underline{n}}^{\underline{m}} \quad , \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(2, \underline{n}) X(2, \underline{n}) + B(2, \underline{n}) K(2n_1, 2n_2) = \\
(n_4 + 1) H(n_1, n_3, n_2, n_4 + 1) + \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) \sum_{\substack{|\ell|=2 \\ |\ell|=2}}^{|\underline{n}|-1} (\ell_4 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4 + 1) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) \sum_{|m|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2m) W_{2, \underline{n}}^m, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(4, \underline{n}) X(4, \underline{n}) + B(4, \underline{n}) K(2n_1, 2n_4) = \\
-(n_2 + 1) H(n_1, n_3, n_2 + 1, n_4) - \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) \sum_{\substack{|\ell|=2 \\ |\ell|=2}}^{|\underline{n}|-1} (\ell_2 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2 + 1, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) \sum_{|m|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2m) W_{4, \underline{n}}^m. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

As definições envolvidas aqui são as seguintes:

$$\begin{aligned}
INT(x) &= \text{parte inteira de } x, \\
\Theta(x) &= 1 \text{ se } x \geq 0 \text{ ou } 0 \text{ se } x < 0, \\
\left\{ \begin{array}{l} A(1, \underline{n}) = \lambda_1(n_1 - n_3 - 1) + \lambda_2(n_2 - n_4) \\ A(3, \underline{n}) = \lambda_1(n_1 - n_3 + 1) + \lambda_2(n_2 - n_4) \\ A(2, \underline{n}) = \lambda_1(n_1 - n_3) + \lambda_2(n_2 - n_4 - 1) \\ A(4, \underline{n}) = \lambda_1(n_1 - n_3) + \lambda_2(n_2 - n_4 + 1) \end{array} \right. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(1, \underline{n}) = n_1 \delta_{n_3}^{n_1-1} \delta_{n_4}^{n_2} \\ B(3, \underline{n}) = -n_3 \delta_{n_3}^{n_1+1} \delta_{n_4}^{n_2} \\ B(2, \underline{n}) = n_2 \delta_{n_3}^{n_1} \delta_{n_4}^{n_2-1} \\ B(4, \underline{n}) = -n_4 \delta_{n_3}^{n_1} \delta_{n_4}^{n_2+1} \end{array} \right. , \quad (2.23)$$

$$\delta_j^i = 1 \text{ se } i = j \text{ ou } 0 \text{ se } i \neq j \quad ,$$

$$\begin{aligned} W_{i, \underline{n}}^{\underline{m}} &= m_1(n_1 - n_3) X(i, n_1 - m_1 + 1, n_3 - m_1 + 1, n_2 - m_2, n_4 - m_2) \times \\ &\quad \times \Theta(n_1 - m_1 + 1) \Theta(n_3 - m_1 + 1) \Theta(n_2 - m_2) \Theta(n_4 - m_2) + \\ &\quad m_2(n_2 - n_4) X(i, n_1 - m_1, n_3 - m_1, n_2 - m_2 + 1, n_4 - m_2 + 1) \times \\ &\quad \times \Theta(n_1 - m_1) \Theta(n_3 - m_1) \Theta(n_2 - m_2 + 1) \Theta(n_4 - m_2 + 1) \quad . \quad (2.24) \end{aligned}$$

Dados \underline{n} e \underline{m} , os $W_{i, \underline{n}}^{\underline{m}}$ só dependem dos $X(i, \underline{k})$ de ordem $|\underline{k}| = |\underline{n}| - 2|\underline{m}| + 2$. Como o valor mínimo de $|\underline{m}|$ é 2, segue que $|\underline{k}| \leq |\underline{n}| - 2$ e portanto $|\underline{k}| < |\underline{n}|$. Como o valor máximo de \underline{m} é $INT(|\underline{n}|/2)$ resulta que $|\underline{k}| \geq 2$.

Resta mostrar o que são os coeficientes $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$: Eles são os coeficientes que surgem da expansão do monômio $\underline{x}^{\underline{\ell}}$ nas coordenadas normais \underline{y} :

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\underline{\ell}} &= [x_1(\underline{y})]^{\ell_1} [x_3(\underline{y})]^{\ell_3} [x_2(\underline{y})]^{\ell_2} [x_4(\underline{y})]^{\ell_4} \\ &= [y_1 + \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{\infty} X(1, \underline{\ell}) \underline{y}^{\underline{\ell}}]^{\ell_1} [y_3 + \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{\infty} X(3, \underline{\ell}) \underline{y}^{\underline{\ell}}]^{\ell_3} \times \\ &\quad \times [y_2 + \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{\infty} X(2, \underline{\ell}) \underline{y}^{\underline{\ell}}]^{\ell_2} [y_4 + \sum_{|\underline{\ell}|=2}^{\infty} X(4, \underline{\ell}) \underline{y}^{\underline{\ell}}]^{\ell_4} \\ &\equiv \underline{y}^{\underline{\ell}} + \sum_{|\underline{n}|=|\underline{\ell}|+1}^{\infty} Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}} \underline{y}^{\underline{n}} \quad . \quad (2.25) \end{aligned}$$

A obtenção dos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ não é trivial e foi feita através de um algoritmo numérico de longo tempo computacional. Embora os $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ de ordem $|\underline{n}|$ só dependam de um dado $\underline{\ell}$ e dos $X(i, \underline{k})$ de ordem mais baixa ($|\underline{k}| < |\underline{n}|$), não foi possível obter uma forma fechada para a recorrência entre eles. A dificuldade para isto pode ser facilmente vista a partir da igualdade intermediária de (2.25): dado um certo $\underline{\ell}$, para obtermos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ até a ordem $|\underline{n}| = N$ necessitamos das somas dentro dos colchetes truncadas até uma ordem mínima que depende de N . Para se ir até a ordem $N + 1$, o truncamento das séries muda, o que acarreta a alteração de vários dos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ calculados no estágio anterior. Apesar disso, deve-se ter em mente que no limite $N \rightarrow \infty$ o processo converge na série dada pela última igualdade de (2.25).

Uma característica dos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ é que se o seu vetor \underline{n} de índices é de um certo tipo quanto aos n_1, \dots, n_4 que comparecem identicamente nulos, então os correspondentes $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ só dependem dos $X(i, \underline{l})$ do mesmo tipo em \underline{l} . Isto é imediato a partir da sua definição em (2.25). A computação apenas de um certo sub-tipo entre os $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ é tanto mais rápida quanto maior for a quantidade de índices identicamente nulos que caracteriza o sub-tipo. Isto é de importância pois a obtenção dos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ se constitui no maior limitante de todo o processo computacional de obtenção da forma normal.

Voltando às relações (2.18) a (2.21) vê-se que seus primeiros membros são lineares nos coeficientes $X(i, \underline{n})$ e $K(2\underline{m})$. Seus segundos membros dependem do hamiltoniano inicial, que é em princípio conhecido, dos $X(i, \underline{k})$ — que entram através dos $Z_{\underline{n}}^{\underline{\ell}}$ e $W_{i, \underline{n}}^{\underline{m}}$ — e também dos $K(2\underline{m})$. As ordens com que os $X(i, \underline{k})$ e os $K(2\underline{m})$ entram nos segundos membros é sempre menor que as suas ordens requeridas nos primeiros membros. Além disso, uma inspeção de (2.22) e (2.23) revela a seguinte propriedade: se $A(i, \underline{n}) \neq 0$ então $B(i, \underline{n}) = 0$ e vice-versa. Isto está garantido pelo fato de os autovalores λ_1 e λ_2 serem por hipótese independentes sobre os reais (no caso de interesse aqui um é real não-nulo e o outro é imaginário não-nulo). Em vista disso, as referidas relações se subdividem em dois casos distintos: no primeiro, $A(i, \underline{n}) \neq 0$ e $B(i, \underline{n}) = 0$ e as eqs. (2.18) a (2.21) se reduzem a:

$$\begin{aligned}
A(1, \underline{n}) X(1, \underline{n}) &= (n_3 + 1) H(n_1, n_3 + 1, n_2, n_4) + \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) &\sum_{|\ell|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_3 + 1) H(\ell_1, \ell_3 + 1, \ell_2, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) &\sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{1, \underline{n}}^m, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(3, \underline{n}) X(3, \underline{n}) &= -(n_1 + 1) H(n_1 + 1, n_3, n_2, n_4) - \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) &\sum_{|\ell|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_1 + 1) H(\ell_1 + 1, \ell_3, \ell_2, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) &\sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{3, \underline{n}}^m, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(2, \underline{n}) X(2, \underline{n}) &= (n_4 + 1) H(n_1, n_3, n_2, n_4 + 1) + \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) &\sum_{|\ell|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_4 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4 + 1) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) &\sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{2, \underline{n}}^m, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(4, \underline{n}) X(4, \underline{n}) &= -(n_2 + 1) H(n_1, n_3, n_2 + 1, n_4) - \\
\Theta(|\underline{n}| - 3) &\sum_{|\ell|=2}^{|\underline{n}|-1} (\ell_2 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2 + 1, \ell_4) Z_{\underline{n}}^{\ell} - \\
\Theta(|\underline{n}| - 4) &\sum_{|\underline{m}|=2}^{INT(|\underline{n}|/2)} K(2\underline{m}) W_{4, \underline{n}}^m. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

No segundo caso, quando $A(i, \underline{n}) = 0$ e $B(i, \underline{n}) \neq 0$, as eqs. (2.22) e (2.23) mostram que isto só é possível quando $|\underline{n}|$ é ímpar. Neste caso, os

$X(i, \underline{n})$ correspondentes aos $A(i, \underline{n})$ nulos em (2.18) a (2.21) ficam indeterminados. Esses coeficientes são do seguinte tipo: $X(1, k_1 + 1, k_1, k_2, k_2)$, $X(3, k_1, k_1 + 1, k_2, k_2)$, $X(2, k_1, k_1, k_2 + 1, k_2)$ e $X(4, k_1, k_1, k_2, k_2 + 1)$ com $k_1 + k_2 = 1, 2, 3, \dots$. De fato, eles não podem ser totalmente arbitrários se se quer garantir a convergência do método. Moser, em sua demonstração da convergência, impõe a seguinte condição de normalização para os coeficientes indeterminados: eles devem ser tais que as quatro séries abaixo sejam convergentes:

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{|\underline{k}|=1}^{\infty} X(1, k_1 + 1, k_1, k_2, k_2)(y_1 y_3)^{k_1} (y_2 y_4)^{k_2} \quad , \\
& 1 + \sum_{|\underline{k}|=1}^{\infty} X(3, k_1, k_1 + 1, k_2, k_2)(y_1 y_3)^{k_1} (y_2 y_4)^{k_2} \quad , \\
& 1 + \sum_{|\underline{k}|=1}^{\infty} X(2, k_1, k_1, k_2 + 1, k_2)(y_1 y_3)^{k_1} (y_2 y_4)^{k_2} \quad , \\
& 1 + \sum_{|\underline{k}|=1}^{\infty} X(4, k_1, k_1, k_2, k_2 + 1)(y_1 y_3)^{k_1} (y_2 y_4)^{k_2} \quad .
\end{aligned}$$

Obviamente, a normalização mais simples a ser feita compatível com esta exigência é torná-los todos identicamente nulos, o que será feito neste trabalho.

Devemos também levar em conta que as equações (2.18) a (2.21) são redundantes para a obtenção dos $K(2\underline{m})$; é necessário utilizar apenas (2.18) e (2.20) ou alternativamente (2.19) e (2.21). Fazendo a primeira escolha e tomando ordens ímpares para \underline{n} chegamos às seguintes relações para os $K(2\underline{m})$ quando $A(i, \underline{n}) = 0$ e $B(i, \underline{n}) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
m_1 K(2\underline{m}) &= m_1 H(m_1, m_1, m_2, m_2) + \\
&\Theta(|\underline{m}| - 2) \sum_{|\ell|=2}^{2|\underline{m}|-2} (\ell_3 + 1) H(\ell_1, \ell_3 + 1, \ell_2, \ell_4) \bar{Z}_{1,\underline{m}}^\ell - \\
&\Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|p|=2}^{|\underline{m}|-1} K(2\underline{p}) \bar{W}_{1,\underline{m}}^p \quad , \tag{2.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 K(2\underline{m}) &= m_2 H(m_1, m_1, m_2, m_2) + \\
&\Theta(|\underline{m}| - 2) \sum_{|\ell|=2}^{2|\underline{m}|-2} (\ell_4 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4 + 1) \bar{Z}_{2,\underline{m}}^\ell - \\
&\Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|p|=2}^{|\underline{m}|-1} K(2\underline{p}) \bar{W}_{2,\underline{m}}^p \quad . \tag{2.31}
\end{aligned}$$

As novas definições envolvidas são:

$$\bar{Z}_{1,\underline{m}}^\ell = Z_{(m_1, m_1-1, m_2, m_2)}^\ell \quad , \tag{2.32}$$

$$\bar{Z}_{2,\underline{m}}^\ell = Z_{(m_1, m_1, m_2, m_2-1)}^\ell \quad , \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{1,\underline{m}}^p &= p_1 \Theta(m_1 - p_1 + 1) \Theta(m_1 - p_1) \Theta(m_2 - p_2) \times \\
&\times X(1, m_1 - p_1 + 1, m_1 - p_1, m_2 - p_2, m_2 - p_2) \quad , \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{2,\underline{m}}^p &= p_2 \Theta(m_1 - p_1) \Theta(m_2 - p_2 + 1) \Theta(m_2 - p_2) \times \\
&\times X(2, m_1 - p_1, m_1 - p_1, m_2 - p_2 + 1, m_2 - p_2) \quad . \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Se $m_2 = 0$ usamos (2.30); se $m_1 = 0$, usamos (2.31) e se m_1 e m_2 são

ambos não-nulos, pode-se usar quaisquer destas equações na determinação dos $K(2m)$. Para uma dada ordem $|n|$ ímpar, a ordem $|m|$ requerida nestas equações é dada por $2|m| = |n| + 1$.

Agora podemos apreciar a consistência das eqs. (2.26) a (2.31). Em primeiro lugar, vê-se que para todo n de ordem par os coeficientes $\Lambda(i, n)$ são não-nulos. Tomemos o caso inicial, $|n| = 2$; nesta ordem, os segundos membros de (2.26) a (2.29) se resumem aos primeiros termos, que só dependem da hamiltoniana inicial. Obtemos então todos os $X(i, n)$ de ordem 2. Quanto aos $K(2m)$, eles só existem para as ordens ímpares de n , como vimos acima.

A seguir, tomemos $|n| = 3$. Nesta ordem os segundos membros de (2.26) a (2.29) contêm os primeiros termos como na ordem 2 e adicionalmente os segundos termos, os quais colocam em cena os Z_n^ℓ , que só dependem dos $X(i, n)$ de ordem 2 já calculados. Como estamos numa ordem ímpar de n , certos coeficientes $\Lambda(i, n)$ se anulam, o que deixa indeterminados seus respectivos $X(i, n)$. Definimos estes como identicamente nulos conforme a normalização já indicada, de modo que todos os $X(i, n)$ de ordem 3 são determinados. Podemos agora computar os $K(2m)$ de ordem $2|m| = |n| + 1 = 4$. Neste caso, só os dois primeiros termos dos segundos membros de (2.30) e (2.31) existem, os quais só dependem da hamiltoniana inicial e dos $X(i, n)$ de ordem 2 através dos $\bar{Z}_{i,m}^\ell$. Com isso calculamos todos os $K(2m)$ de ordem 4.

Vejamos a ordem $|n| = 4$. Agora estarão presentes nos segundos membros de (2.26) a (2.29) todos os termos lá indicados. Os últimos termos, que só a partir desta ordem geram contribuições, dependem aqui dos $K(2m)$ de ordem 4 e dos $X(i, n)$ de ordem 2, já calculados. Não há novos $K(2m)$ a calcular nesta ordem pois ela é par.

Finalmente, na ordem $|n| = 5$ entram em cena os últimos termos dos segundos membros das eqs. (2.30) e (2.31). Aqui, $|m| = 3$ de modo que estes termos só dependem dos $K(2m)$ de ordem 4 e dos $X(i, n)$ de ordem 3 já calculados. Obtemos então os $X(i, n)$ de ordem 5 e os $K(2m)$ de ordem 6. A computação das ordens seguintes não apresenta qualquer novo aspecto quanto à recorrência acima apresentada.

Mesmo sem especificar a hamiltoniana particular a ser considerada, podemos buscar nas relações gerais de recorrência apresentadas casos particulares de interesse. Vemos assim que no sistema normalizado (2.17) dois tipos par-

ticulares de órbitas se evidenciam naturalmente na vizinhança do ponto de sela: o primeiro tipo se caracteriza por $y_1 = y_3 = 0$ (i.e. $\rho = 0$) e apresenta dois casos, $\epsilon = 0$ ou $\epsilon \neq 0$. Estas órbitas estão confinadas ao plano conjugado (y_2, y_4) . Se $\epsilon = 0$ temos os próprios eixos coordenados $y_2 = 0$ ou $y_4 = 0$ se constituindo nas variedades estável e instável que emanam do ponto de sela, enquanto que se $\epsilon \neq 0$, temos as órbitas constituídas pelas hipérbolas $y_2 y_4 = \epsilon$ vizinhas aos eixos.

O segundo tipo de órbitas especiais é dado pela escolha $y_2 = y_4 = 0$. Se $\rho = 0$ estamos trivialmente sobre o ponto de sela, enquanto que se $\rho \neq 0$ temos uma família de órbitas (circulares) periódicas instáveis vizinhas da origem, inteiramente contidas no plano conjugado (y_1, y_3) .

Uma vez que em quaisquer das duas situações acima apontadas temos que duas dentre as quatro coordenadas \underline{y} são identicamente nulas, averiguamos a possibilidade de simplificação das relações de recorrência anteriormente apresentadas, uma vez que os coeficientes $X(i, \underline{n})$ necessários à computação dessas órbitas se reduzem aos tipos $X(i, 0, 0, n_2, n_4)$ no caso $y_1 = y_3 = 0$ e $X(i, n_1, n_3, 0, 0)$ no caso $y_2 = y_4 = 0$. A vantagem dessa simplificação já foi apontada e se deve ao fato da facilidade de computação dos $Z_{\underline{n}}^{\ell}$ ser enormemente aumentada, à medida que um número crescente de índices de \underline{n} sejam identicamente nulos.

Infelizmente, uma inspeção dessas duas situações mais simples leva à conclusão de que os coeficientes da forma $X(i, 0, 0, n_2, n_4)$ e $X(i, n_1, n_3, 0, 0)$ dependem em geral, embora indiretamente, dos demais coeficientes $X(i, \underline{n})$: esta dependência vem através dos $K(2\underline{m})$ presentes no último termo dos segundos membros de (2.26) a (2.29), os quais, ao serem obtidos de (2.30) e (2.31), dependem em geral dos demais coeficientes.

A única situação passível de simplificação é aquela em que apenas um dos índices \underline{n} seja não-nulo e nesse caso só é de interesse obter os $X(i, 0, 0, n_2, 0)$ e $X(i, 0, 0, 0, n_4)$, os quais podem ser usados na obtenção das variedades estável e instável que emanam do ponto de sela. Neste caso particular, os coeficientes do tipo acima não dependem dos $K(2\underline{m})$, nem explicitamente dos coeficientes $X(i, \underline{n})$ de outros tipos. Portanto, neste caso não necessitamos das relações (2.30) a (2.35) e as relações (2.26) a (2.29) se reduzem a (com $\underline{m} \equiv (m_1, m_2)$):

$$\begin{aligned} \bar{A}(1, \underline{m}) X(1, 0, 0, \underline{m}) &= H(0, 1, \underline{m}) + \\ \Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|\ell|=2}^{|\underline{m}|-1} (\ell_3 + 1) H(\ell_1, \ell_3 + 1, \ell_2, \ell_4) Z_{(0,0,\underline{m})}^\ell &, \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}(3, \underline{m}) X(3, 0, 0, \underline{m}) &= -H(1, 0, \underline{m}) + \\ \Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|\ell|=2}^{|\underline{m}|-1} (\ell_1 + 1) H(\ell_1 + 1, \ell_3, \ell_2, \ell_4) Z_{(0,0,\underline{m})}^\ell &, \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}(2, \underline{m}) X(2, 0, 0, \underline{m}) &= (m_2 + 1) H(0, 0, m_1, m_2 + 1) + \\ \Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|\ell|=2}^{|\underline{m}|-1} (\ell_4 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4 + 1) Z_{(0,0,\underline{m})}^\ell &, \quad (2.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}(4, \underline{m}) X(4, 0, 0, \underline{m}) &= -(m_1 + 1) H(0, 0, m_1 + 1, m_2) + \\ \Theta(|\underline{m}| - 3) \sum_{|\ell|=2}^{|\underline{m}|-1} (\ell_2 + 1) H(\ell_1, \ell_3, \ell_2 + 1, \ell_4) Z_{(0,0,\underline{m})}^\ell &, \quad (2.39) \end{aligned}$$

onde definimos os $\bar{A}(i, \underline{m})$ a partir de (2.22) como

$$\bar{A}(i, \underline{m}) = A(i, 0, 0, \underline{m}) \quad . \quad (2.40)$$

As relações (2.36) a (2.40) são válidas apenas nos casos $\underline{m} = (m_1, 0)$ ou $\underline{m} = (0, m_2)$. Note-se também que os $\bar{A}(i, \underline{m})$ acima nunca se anulam. Veremos no Capítulo 4 que este caso reduzido permite uma computação numérica dos coeficientes até uma ordem muito mais elevada que no caso da obtenção dos coeficientes gerais, o que obviamente já é de se esperar.

Capítulo 3

Topologia Cilíndrica em Fluxos Hamiltonianos

3.1 Introdução

O teorema de Liouville–Arnold [18] estabelece as condições de integrabilidade para um sistema hamiltoniano. Se estas condições forem satisfeitas — o que inclui a exigência de a superfície de energia ser compacta e conexa —, o fluxo resultante estará quase todo confinado em toros imersos na superfície de energia. Entretanto, este é um caso especial, embora mais familiar, de um teorema mais geral que permite que a superfície de energia seja uma variedade não-compacta. Se este for o caso, ao invés de uma topologia toroidal para o fluxo de órbitas teremos uma topologia em geral cilíndrica [19, Cap.4]. Evidentemente, os casos de interesse físico mais frequente são os sistemas hamiltonianos cujas superfícies de energia são variedades compactas. Faremos a seguir uma apresentação simplificada do assunto, o qual está exposto em detalhe na referência [17] para o caso de fluxos cilíndricos.

Um exemplo de sistema cujo fluxo está (quase-todo) confinado em cilindros imersos em uma superfície de energia não-limitada, é dado pela linearização de um sistema hamiltoniano autônomo em torno de um ponto de sela. Embora globalmente não-realista, uma hamiltoniana quadrática h_2 com ponto de sela na origem propicia um contexto didático adequado à introdução da topologia cilíndrica. Neste caso, a hamiltoniana pode ser colocada na forma

$$h_2(z) = \frac{\lambda}{2}(z_4^2 - z_2^2) + \frac{\omega}{2}(z_3^2 + z_1^2) \quad . \quad (3.1)$$

Aqui, z_1 e z_2 são as coordenadas e z_3 e z_4 são os momentos canonicamente conjugados a z_1 e z_2 , respectivamente. $-\lambda$ real e $i\omega$ imaginário são os auto-valores geradores da quádrupla de auto-valores do sistema linear associado a h_2 . A origem do espaço de fases está colocado no próprio ponto de sela. Como h_2 é separável, seu movimento é completamente integrável, com as duas constantes de movimento sendo dadas pelas energias parciais:

$$E_1 = \frac{\omega}{2}(z_3^2 + z_1^2) = cte_1 \quad , \quad (3.2)$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2}(z_4^2 - z_2^2) = cte_2 \quad , \quad (3.3)$$

$$h_2(z) = E_1(z_1, z_3) + E_2(z_2, z_4) \quad . \quad (3.4)$$

Temos aqui um espaço de fases de quatro dimensões, foliado pelas superfícies tridimensionais de energia $h_2 = \text{constante}$ e duas constantes de movimento independentes e em involução. Como as superfícies de energia são não-limitadas, quase todo o fluxo repousa sobre cilindros (ao invés de toros!) bidimensionais imersos nessas superfícies. Para visualizarmos a dinâmica determinada por este sistema simples, fixemos a superfície de energia: $h_2 = E_1 + E_2 = E$. Obviamente, para $E_1 = E_2 = 0$ as únicas possibilidades de movimento são o equilíbrio instável no ponto de sela ou o movimento assintótico sobre as variedades estável e instável que dele emanam, contidas no plano (z_2, z_4) .

No caso em que $E > 0$ (Figura 3.1), teremos alguns tipos de movimentos possíveis: se $E_1 = 0$ haverá uma única órbita hiperbólica confinada ao plano (z_2, z_4) (Figura 3.1 (b)). Se $E_2 = 0$, teremos duas possibilidades: primeiro, podemos ter $z_2 = z_4 = 0$ e o movimento será uma órbita periódica instável confinada ao plano (z_1, z_3) (Figura 3.1 (a)) — pertencente a uma família

de órbitas periódicas, contínua no parâmetro E_1 . Designemos por τ uma dessas órbitas periódicas. Como $E_2 = 0$, podemos ter também $z_2 = \pm z_4$ e nesse caso estaremos sobre uma das variedades estáveis (S_1 ou S_2) ou instáveis (U_1 ou U_2) que emanam de $z_2 = z_4 = 0$ no plano (z_2, z_4) . Então, o produto direto de τ com estas variedades geram cilindros semi-infinitos que coalescem na própria órbita τ . A energia de qualquer órbita nesses semi-cilindros é a mesma de τ , bem como a área simplética ou ação de τ é idêntica, pelo teorema de Poincaré-Cartan, à ação de qualquer circuito irreduzível sobre qualquer um desses semi-cilindros. É digno de nota que a única interseção desses cilindros entre si é a própria órbita τ , o que é possível por estarmos num espaço de quatro dimensões. Uma órbita sobre um semi-cilindro estável (gerado por S_1 ou S_2) tende a τ para tempos $\rightarrow +\infty$ e uma sobre um semi-cilindro instável (gerado por U_1 ou U_2) tende a τ para tempos $\rightarrow -\infty$.

Finalmente, quase todas as órbitas do fluxo recaem no caso geral $E_1 \neq 0$ e $E_2 \neq 0$; elas estão confinadas a cilindros infinitos resultantes do produto direto $S^1 \times \mathbb{R}^1$ das correspondente curvas de nível nos dois planos conjugados.

Se fizermos uma seção de Poincaré na superfície de energia $h_2 = E$ que seja transversal à órbita τ (por exemplo a seção dada por $z_1 = 0$), τ aparecerá nessa seção como um ponto fixo central, do qual emana uma estrutura hiperbólica análoga à da Figura 3.1 (b). Isto significa que estamos fazendo um corte “longitudinal” na estrutura cilíndrica do fluxo. Se abstrairmos da Figura 3.1 todas as curvas exceto τ e um pequeno segmento de linha de alguma das variedades que emanam de τ , e imaginarmos ao longo de τ uma sucessão contínua de seções de Poincaré transversais a τ , visualizaremos a faixa cilíndrica gerada pelo segmento escolhido.

Por outro lado, podemos fazer uma seção de Poincaré em que a órbita τ esteja situada completamente de um dos lados da superfície de seção (por exemplo a seção dada por $z_2 = cte > 0$). Veremos nela uma curva fechada análoga à da Figura 3.1 (a) (uma para $z_4 > 0$ ou uma para $z_4 < 0$), a qual é um circuito irreduzível sobre um dos cilindros, típica de um corte “transversal” na estrutura cilíndrica do fluxo.

Há ainda um terceiro tipo possível para a estrutura que pode surgir numa seção de fluxos cilíndricos: são segmentos de linha abertos e finitos. Estes surgem quando a superfície de seção intersecta os cilindros em curvas fechadas redutíveis sobre os mesmos. Como toda seção de Poincaré prescreve apenas um único sentido válido de travessia da superfície de seção pelas órbitas, de

fato só comparecerá na seção a “metade” de qualquer curva fechada redutível, na forma de um segmento do tipo aludido acima. Evidentemente, no caso de um fluxo cilíndrico linear como o que estamos considerando, esta possibilidade só existe se a superfície de seção for não-usual, isto é, não-plana.

3.2 Fluxos Não-Lineares

A questão agora é se a topologia cilíndrica descrita na seção anterior pode sobreviver, e nesse caso como sobrevive, em situações mais realistas onde as superfícies de energia são compactas. Seja $h(z)$ uma hamiltoniana analítica cujas superfícies de nível são compactas e identifiquemos a hamiltoniana $h_2(z)$ dada por (3.1) como a parte quadrática da expansão de $h(z)$ na vizinhança de um ponto de sela:

$$h(z) = h_2(z) + \sum_{n=3}^{\infty} h_n(z) \quad . \quad (3.5)$$

$h_n(z)$ é um polinômio homogêneo de grau n em z .

Apesar da inclusão em (3.5) de termos cúbicos e além, se $h(z)$ for ainda separável, podendo ser reescrita na forma

$$h(z) = \bar{h}(z_1, z_3) + \tilde{h}(z_2, z_4) \quad , \quad (3.6)$$

teremos um sistema não-linear globalmente integrável só que agora em geral do tipo prescrito pelo teorema de Liouville–Arnold. Então, o fluxo estará quase todo confinado em toros e conseqüentemente a topologia cilíndrica é substituída pela topologia toroidal. Porém, na vizinhança do ponto de sela a geometria local ainda é aquela descrita na seção anterior; em particular, a descrição lá feita na qual os semi-cilindros estáveis e instáveis emanam da órbita periódica instável τ , permanece localmente válida e não é afetada pela presença dos termos não-quadráticos na hamiltoniana (3.5). O que ocorre agora é que, à medida que esses tubos se afastam de τ , a ação das não-linearidades ou, o que dá no mesmo, o caráter compacto da superfície de energia, os forçam a se curvarem e se fecharem suavemente aos pares em “pseudo-toros”, chamados por alguns autores de toros homoclínicos [17].

Esses toros homoclínicos coalescem aos pares em τ e são constituídos pelo produto direto entre τ e as variedades que emanam de τ . A Figura 3.1 dará lugar a uma descrição do tipo esquematicamente mostrado na Figura 3.2.

Vejamos rapidamente os movimentos possíveis sobre a superfície de energia $h(\underline{z}) = E$. Para $\bar{h}(z_1, z_3) = E$ o movimento estará ou sobre τ ou sobre as superfícies assintóticas que coalescem em τ — os toros homoclínicos. Qualquer órbita sobre essa superfície é uma órbita homoclínica, isto é, tenderá a τ para tempos $\rightarrow \pm\infty$.

Para $\check{h}(z_2, z_4) = E$ o movimento estará confinado ao plano (z_2, z_4) (Figura 3.2 (b)) e as variedades estável e instável que emanam do ponto de sela são as separatrizes do movimento. Se $E < 0$, teremos uma órbita periódica interior às separatrizes e se $E > 0$, teremos uma órbita periódica exterior a elas. O período dessas órbitas cresce indefinidamente com a proximidade das separatrizes. Essas órbitas periódicas são estáveis, o que as distingue essencialmente das órbitas τ .

Finalmente, a maioria das órbitas recaem no caso geral em que $\bar{h}(z_1, z_3) = E_1 \neq 0$ e $\check{h}(z_2, z_4) = E_2 \neq 0$; elas estarão sobre os toros resultantes do produto $S^1 \times S^1$ das curvas de nível correspondentes nos dois planos conjugados. Os toros com $E_2 < 0$ estão separados daqueles com $E_2 > 0$ pelos toros homoclínicos no caso de dois graus de liberdade.

3.3 Topologia Cilíndrica e Dinâmica Caótica

Acabamos de ver que se o fluxo não-linear é totalmente integrável temos apenas toros homoclínicos ligados às órbitas τ . Por outro lado, podemos intuitivamente prever que se for possível existirem cilindros infinitos imersos numa superfície compacta, eles acabarão por se intersectarem de algum modo.

Sabemos que as não-linearidades presentes na hamiltoniana (3.5) em geral quebram a separabilidade do movimento e mais, tornam o sistema tipicamente não-integrável (quase-integrável). Como a perda da integrabilidade se revela na vizinhança do ponto de sela? Se a vizinhança for suficientemente pequena, a integrabilidade continua localmente assegurada pelo teorema de Moser [8] apresentado no Capítulo 2. Entretanto, os semi-cilindros estável e instável que emanam da órbita periódica τ , que no caso ainda integrável se constituíam nos toros homoclínicos associados a τ , deixam de se pro-

longar suavemente uns nos outros fora dessa vizinhança. Com a perda da integrabilidade, cada um dos tubos passa a se propagar a partir de τ de um modo intrincado e distinto na superfície de energia, ocorrendo interseções transversais entre eles à medida em que se afastam de τ . Obviamente, nenhum desses cilindros pode intersectar a si mesmo, o que violaria o caráter hamiltoniano do fluxo. No caso separável não-linear, toda órbita sobre os toros homoclínicos era uma órbita homoclínica, que retornava a τ para tempos $\rightarrow \pm\infty$; no caso não-integrável, os semi-cilindros estável e instável se intersectam em órbitas homoclínicas isoladas.

Sempre haverá uma superfície de seção apropriada (do tipo transversal aos cilindros) para a qual a seção de Poincaré exiba ao menos um par de curvas fechadas intersectantes, sendo cada uma dessas curvas um circuito irredutível sobre um dos cilindros e cada ponto da interseção entre elas correspondendo a uma órbita homoclínica pertencente a ambos os cilindros. Por outro lado, também haverá sempre uma superfície de seção transversal à órbita τ (do tipo longitudinal aos cilindros), tendo a órbita τ como ponto fixo [10],[9, Cap.3], para a qual a seção de Poincaré exibirá a clássica figura homoclínica. Em geral, esta última superfície não será plana.

O surgimento de interseções transversais entre os cilindros estáveis e instáveis que emanam de τ gera consequências nas suas vizinhanças. Voltemos à Figura 3.2, onde ainda temos um fluxo (não-linear) integrável. Neste caso, existem toros arbitrariamente próximos dos toros homoclínicos. Com a perda da integrabilidade do fluxo, a interrupção da continuação suave dos cilindros instáveis nos cilindros estáveis (a quebra dos toros homoclínicos em cilindros) se propaga por continuidade aos toros vizinhos. Portanto, estes também se tornam cilindros, as auto-interseções sendo agora, por argumentos de continuidade, inevitáveis. As órbitas nas auto-interseções eventualmente se constituem em órbitas periódicas isoladas, o que de resto é consistente com o teorema dos pontos fixos de Poincaré-Birkhoff acerca das órbitas periódicas que restam após a destruição de um toro por perturbações não-integráveis. Os períodos destas órbitas periódicas crescem com a sua proximidade das órbitas homoclínicas e de fato as primeiras têm estas últimas como pontos de acumulação.

Tendo em mente a apresentação feita até agora e o formalismo do Capítulo 2, torna-se fácil visualizar o que ocorre com a dinâmica do fluxo hamiltoniano quando passamos do sistema original ao sistema normalizado. Tipicamente, um fluxo não-linear como o da Figura 3.2 (nas coordenadas originais) é le-

vado de volta a um fluxo separável como o da Figura 3.1 (nas coordenadas normais). Portanto, ele recupera localmente a geometria separável cilíndrica que possuía antes da inclusão das não-linearidades. Em compensação, ao contrário do que ocorre com um fluxo cilíndrico linear, as frequências angulares das coordenadas periódicas (z_1, z_3) das órbitas sobre os cilindros não são mais degeneradas e iguais a ω , do mesmo modo que as velocidades das coordenadas hiperbólicas (z_2, z_4) não são mais degeneradas e iguais a λ — vide equações (1.15) a (1.17). Em resumo, a velocidade das órbitas passa a depender do cilindro sobre o qual elas estão (o que não ocorre em um fluxo linear), mas a geometria cilíndrica mesma do fluxo linear é mantida. Podemos dizer que o processo de normalização atua como um “retificador” do fluxo por assim dizer.

Do mesmo modo que a figura homoclínica se constitui na “assinatura” do regime caótico na seção de Poincaré, no fluxo hamiltoniano mesmo, subjacente a estas seções, este papel cabe às estruturas cilíndricas intersectantes acima apresentadas.

É um objetivo do presente trabalho utilizar a técnica das formas normais, apresentada no Capítulo 2, no estudo desses cilindros em regimes caóticos. Os bons resultados obtidos por essa técnica no estudo da figura homoclínica em aplicações conservativas do plano — e mesmo dissipativas —, ao mesmo tempo que a existência de convergência da forma normal em torno de um ponto de sela para sistemas hamiltonianos, são as principais motivações para esse trabalho. As transformações de coordenadas que normalizam o sistema original são dadas por séries convergentes nas coordenadas normais. Podemos truncar tais séries até uma ordem arbitrária e fazer um tratamento semi-analítico das aproximações polinomiais resultantes. No próximo capítulo vamos utilizar esta possibilidade para estudar, em um caso específico, a topologia cilíndrica frente a perturbações não-integráveis do fluxo linear.

Figura 3.1: Fluxo linear esquematizado, gerado por uma hamiltoniana quadrática separável em torno de um ponto de sela. As linhas cheias são elas mesmas órbitas contidas em um dos planos; as linhas tracejadas compõem órbitas sobre cilindros.

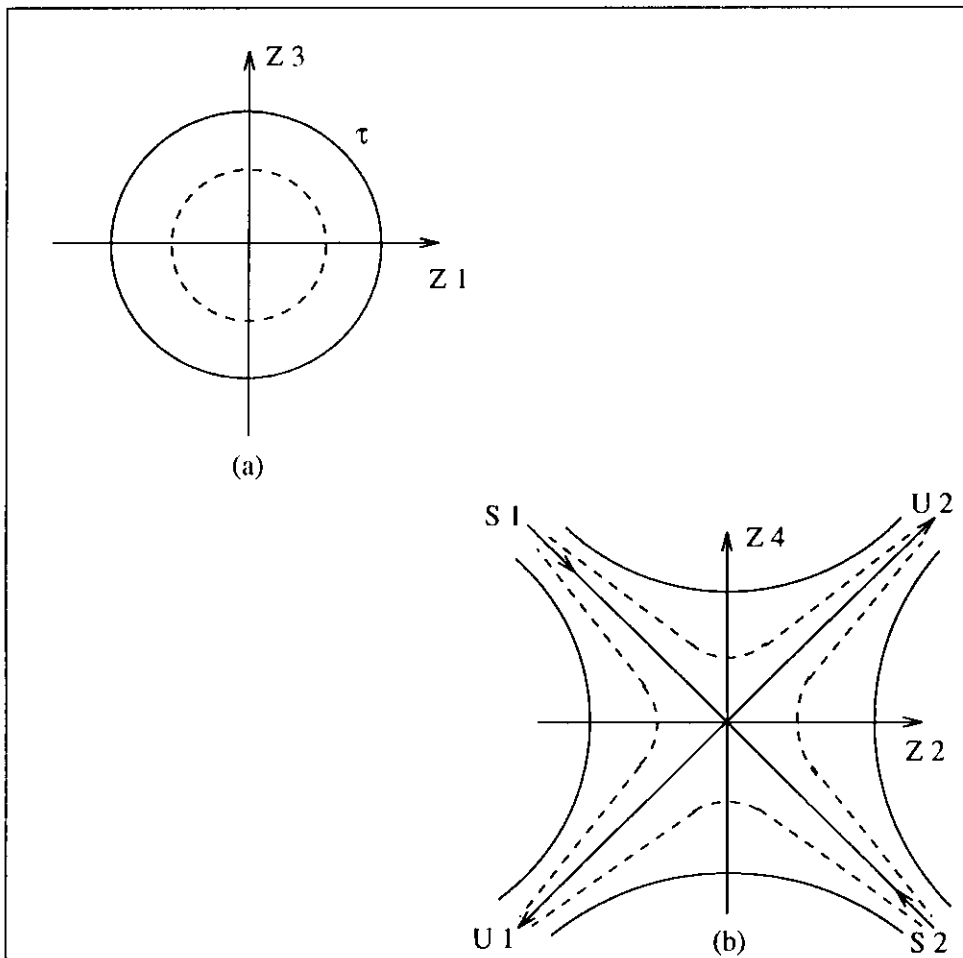
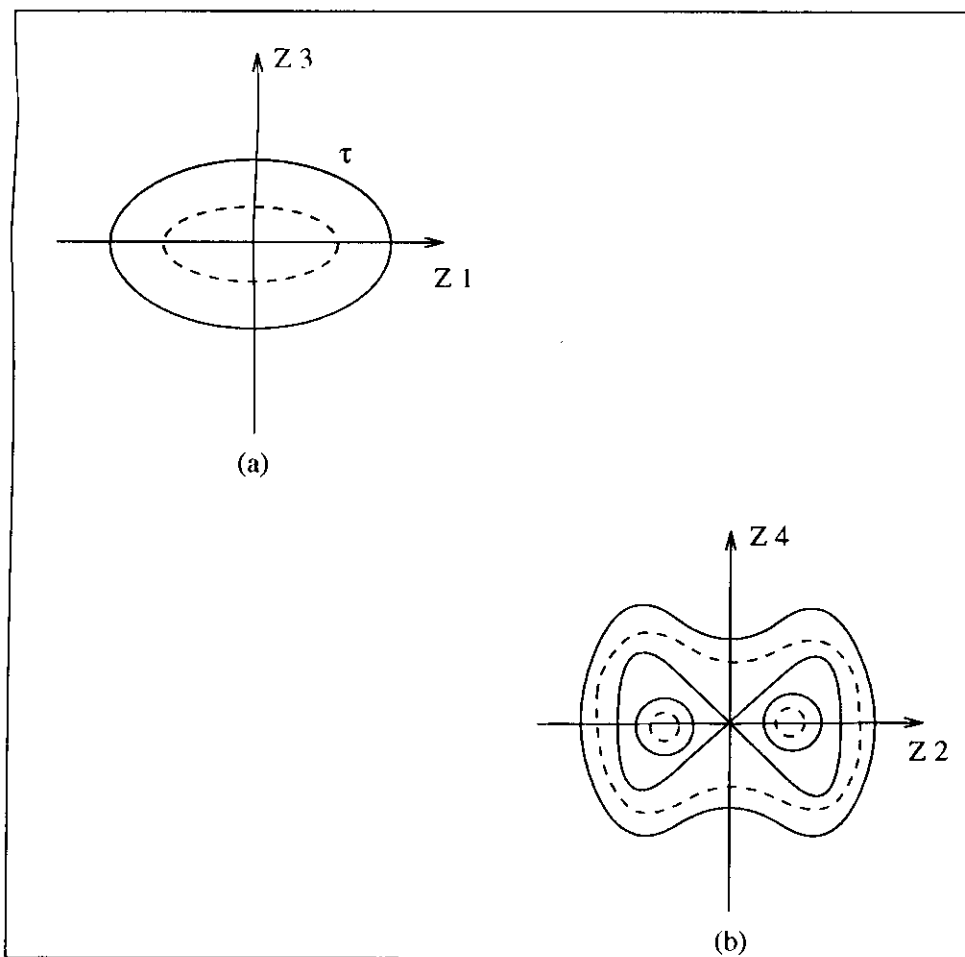


Figura 3.2: Fluxo não-linear esquematizado, gerado por uma hamiltoniana ainda separável. As linhas cheias são elas mesmas órbitas contidas em um dos planos; as linhas tracejadas compõem órbitas sobre toros.



Capítulo 4

Aplicação à Hamiltoniana de Hénon–Heiles

4.1 Introdução

Vamos agora aplicar o desenvolvimento dos capítulos anteriores ao caso da hamiltoniana de Hénon–Heiles [20]:

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2) \quad , \quad (4.1)$$

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2q_2 - \frac{2}{3}q_2^3) \quad . \quad (4.2)$$

Aqui, q_1 e q_2 são as coordenadas e p_1 e p_2 são seus respectivos momentos canonicamente conjugados.

Embora a hamiltoniana (4.1) tenha tido uma motivação inicial no campo da astronomia, na simulação do movimento de uma estrela sujeita a um

campo gravitacional galático com simetria axial, ela adquiriu relevância por si mesma, tornando-se uma das hamiltonianas mais exploradas na literatura [10, 5, 21, 15]. Isto se deveu tanto à sua simplicidade — é a hamiltoniana de um oscilador harmônico isotrópico bidimensional, perturbado por termos cúbicos nas coordenadas —, quanto à riqueza dinâmica por ela gerada: para energias $h \equiv E$ suficientemente pequenas, a perturbação se torna desprezível e o movimento praticamente integrável, enquanto que para energias crescentes a dinâmica se torna progressivamente caótica. Além disso, a hamiltoniana de Hénon–Heiles também resulta do truncamento, até a ordem cúbica, da hamiltoniana de Toda, que modela a dinâmica de três partículas confinadas a um percurso circular plano e sujeitas a forças de interação exponenciais. Embora a hamiltoniana de Toda gere uma dinâmica completamente integrável em qualquer energia, o mesmo não ocorre com a de Hénon–Heiles [10].

Representamos esquematicamente na Figura 4.1 as curvas equipotenciais do potencial de Hénon–Heiles $U(q_1, q_2)$ dado em (4.2), o qual exibe uma evidente simetria triangular. A região I, interna ao triângulo equilátero delimitado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 , se caracteriza por $0 \leq U < \frac{1}{6}$. Sobre as linhas que unem P_1, P_2 e P_3 , ocorre $U = \frac{1}{6}$. Nas regiões II, externas ao triângulo central, ocorre $U > \frac{1}{6}$ e nas regiões III, também externas, ocorre $U < \frac{1}{6}$.

O sistema hamiltoniano obtido a partir de (4.1) é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1q_2 \\ \dot{p}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (4.3) são os próprios pontos P_0, P_1, P_2 e P_3 da Figura 4.1, só que imersos no espaço de fases. Suas coordenadas são (q_1, p_1, q_2, p_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \equiv (0, 0, 0, 0) \\ P_1 \equiv (0, 0, 1, 0) \\ P_2 \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ P_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

A linearização de (4.3) em torno destes pontos fornece os seguintes autovalores:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \rightarrow \{\pm i\} \\ P_1, P_2, P_3 \rightarrow \{\pm i\sqrt{3}, \pm 1\} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Então, vemos que P_0 é um ponto de equilíbrio elítico (estável) e P_1, P_2 e P_3 são pontos de sela (instáveis), conforme o esperado a partir da Figura 4.1.

O sistema de Hénon-Heiles possui a origem das coordenadas (q_1, p_1, q_2, p_2) coincidente com o ponto elítico P_0 . Como queremos estudá-lo na vizinhança dos pontos de sela P_1, P_2 e P_3 , devemos realizar uma translação preliminar da origem para estes últimos pontos. Após isso, a hamiltoniana (4.1) ainda deve ser colocada na forma dada em (2.1), preparação indispensável à aplicação do método.

Temos três pontos de sela, portanto há em princípio uma forma normal para cada um deles. Contudo, a simetria triangular do potencial de Hénon-Heiles torna os três pontos de sela dinamicamente equivalentes entre si, o que em particular resulta na igualdade das suas formas normais. Obviamente, a transformação preliminar que liga as coordenadas originais (q_1, p_1, q_2, p_2) , em que está escrita (4.1), às coordenadas “preparadas” (x_1, x_3, x_2, x_4) , em que está escrita (2.1), é peculiar a cada um dos pontos P_1, P_2 e P_3 .

4.2 Preparação do Sistema de Hénon–Heiles

A preparação das coordenadas para quaisquer dos pontos P_j , $j = 1, 2, 3$, é feita pela série de transformações abaixo, impostas sobre as coordenadas originais (q_1, p_1, q_2, p_2) :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} + (P_j) \quad , \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.8)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad . \quad (4.9)$$

Em (4.6), (P_j) é o vetor transposto obtido de (4.4) para cada ponto P_j . Em (4.7), a matriz A_j é dada por

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

se o ponto for P_1 ; ou por

$$\underline{A}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \operatorname{sen}\theta_j & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_j & \cos\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_j & \operatorname{sen}\theta_j \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \quad (4.11)$$

se o ponto for P_2 ou P_3 , com $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ e $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$. Todas as transformações acima, exceto obviamente a translação, são simpléticas.

Se aplicarmos (4.6) a (4.8) à hamiltoniana (4.1), chegamos à mesma forma abaixo, nas coordenadas \underline{z} , qualquer que seja o ponto de sela escolhido:

$$h(\underline{z}) = \frac{1}{2}(z_4^2 - z_2^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(z_3^2 + z_1^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1^2z_2 - \frac{1}{3}z_2^3 + \frac{1}{6}. \quad (4.12)$$

A energia de dissociação $E = \frac{1}{6}$ surge explicitamente em (4.12). Embora seja um sistema intermediário de coordenadas, é nele que a parte quadrática da hamiltoniana assume a forma usual em torno do ponto de sela, apresentada no Capítulo 3. Devido a isso, os resultados da seção seguinte serão exibidos neste sistema de coordenadas.

A transformação (4.9) sobre (4.12), leva finalmente à forma adequada para a obtenção da forma normal:

pondentes aos próprios eixos coordenados y_2 e y_4 do sistema normalizado, onde os mesmos são caracterizados por $\rho = \epsilon = 0$ (ver equação (2.17)). Elas são mostradas na Figura 4.2, onde usamos (e usaremos sempre, conforme foi adiantado na seção anterior) as coordenadas z . Esta figura é obtida do seguinte modo: primeiramente tomamos, próximo da origem, no sistema normalizado, uma condição inicial (convertida depois às coordenadas z originais) sobre cada um dos eixos coordenados normais y_2 e y_4 . Em virtude da convergência da forma normal aí, estas são, por construção, condições iniciais precisas sobre as variedades em questão. Tais condições iniciais foram então propagadas no fluxo original (exato) via um método numérico do tipo Runge-Kutta de quarta ordem com ajuste de passo otimizado [22], obtendo-se assim, com precisão, as curvas procuradas. Toda a propagação numérica referida nesta seção foi feita usando-se este código. Nos casos onde se fez seções de Poincaré, implementamos adicionalmente um método simples devido a Hénon [23], o qual evita a aproximação iterativa da seção de Poincaré procurada, através de uma elegante integração final (exata) de passo único. Isto pode redundar em um ganho eventualmente expressivo de precisão numérica e/ou tempo computacional.

Constata-se, a partir da Figura 4.2, e do fato de que ocorre $z_1 = z_3 = 0$ durante toda a integração, que as variedades estável e instável, que emanam do ponto de sela, prolongam-se suavemente uma na outra, constituindo-se numa única órbita homoclínica associada ao equilíbrio instável (o que não era “a priori” necessário). Portanto, esta órbita reside inteiramente no plano (z_2, z_4) . Na verdade, isto está de acordo com uma característica particular do sistema estudado: uma partícula inicialmente colocada em qualquer ponto deste plano, isto é, em $z_1 = z_3 = 0$, sofre apenas forças tangenciais ao próprio plano quando submetida ao potencial de Hénon-Heiles. Isto revela a existência de uma família inteira de órbitas confinadas ao plano (z_2, z_4) , da qual faz parte a órbita homoclínica acima mencionada. Na Figura 4.3 exibimos algumas destas órbitas. Esta família corresponde às curvas que no sistema normalizado são caracterizadas por $\rho = 0$.

Apesar da integração numérica ter sido necessária aqui, o uso analítico da forma normal convergente é crucial na obtenção destas figuras, uma vez que só no fluxo normalizado podemos localizar as estruturas que estamos estudando. Portanto, esta dependência do método em relação à forma normal empresta a ele um caráter semi-analítico, um fato que estará em crescente evidência ao longo desta seção.

Fazemos também a propagação direta no fluxo normalizado — a qual é inteiramente analítica, ver (2.17) — das mesmas boas condições iniciais que geraram a Figura 4.2. [Obviamente, escrevemos os resultados de cada passo da integração nas coordenadas z]. Fazemos isso para várias ordens pares da forma normal truncada. O resultado está exposto na Figura 4.4, onde superpomos, para efeito de comparação, a órbita exata da Figura 4.2.

A Figura 4.4 revela um resultado significativo: a órbita homoclínica obtida com a forma normal acompanha com precisão, e cada vez mais longe, a homoclínica exata, à medida que aumentamos a ordem de truncamento da forma normal. Tal precisão no acompanhamento ocorre nitidamente fora de um raio de convergência “microscópico” em torno da origem, como é aquele do tipo estabelecido na prova de Moser. Temos então uma forte indicação de que a convergência da forma normal se estende de algum modo para além da região estabelecida inicialmente por Moser. Embora isto não esteja tratado aqui, é sem dúvida um dos principais desdobramentos do presente trabalho e já está sendo por nós considerado. Também é digno de nota o modo abrupto com que a forma normal deixa de convergir, quando ela assim o faz.

Na Figura 4.5 procedemos do mesmo modo que na Figura 4.4, só que agora o truncamento da forma normal é feito em ordens ímpares. Os comentários acima feitos sobre a convergência da forma normal se mantêm aqui. A única diferença entre as Figuras 4.4 e 4.5 é o modo de propagação da forma normal a partir de onde a perda da convergência se dá.

Além disso, as Figuras 4.2 a 4.5 evidenciam o plano $z_4 = 0$ como um plano de simetria tanto para o fluxo exato quanto para a forma normal. Esta simetria será aproveitada adiante ao estudarmos a topologia cilíndrica do fluxo.

Em ordem crescente de complexidade, o próximo tipo importante de órbitas a serem consideradas é a família de órbitas periódicas instáveis vizinhas do ponto de sela. Elas estão contidas inteiramente no plano (y_1, y_3) do fluxo normalizado e são caracterizadas por $y_2 = y_4 = 0$ e $\rho \neq 0$ (ver a equação (2.17)). Conforme discutido no final do Capítulo 2, já neste caso ocorre a necessidade do cômputo geral dos coeficientes $X(i, \underline{n})$ e $K(2m)$, contrariamente à expectativa inicial de que seriam necessários apenas os $X(i, n_1, n_3, 0, 0)$.

Os coeficientes gerais $X(i, \underline{n})$ e $K(2m)$ foram computados até a ordem 16 numa DEC Station 5000/125 da Digital, com 16 Mbytes de memória RAM (mais 50 Mbytes de Suap), num tempo computacional real de uma

semana. O cômputo até esta ordem revelou-se suficiente para o estudo a seguir apresentado, embora tenha ficado bem abaixo da ordem 50, conseguida para o sub-grupo dos $X(i, 0, 0, m_1, 0)$ e $X(i, 0, 0, 0, m_2)$, conforme já esperávamos. A construção de um código eficiente para esta computação passou criticamente pela obtenção dos coeficientes intermediários Z_n^ℓ , como já foi mencionado no Capítulo 3. De fato, grande parte da fase inicial da pesquisa foi dedicada ao desenvolvimento e otimização desse código.

Apresentamos nas Figuras 4.6 e 4.7 as projeções nos planos (z_2, z_4) e (z_1, z_3) , respectivamente, de algumas órbitas periódicas instáveis τ próximas do ponto de sela (especificadas pelo seu valor de $\rho \neq 0$). Devido ao caráter permanente dessa proximidade, estaremos sempre na região de convergência da forma normal e portanto podemos obtê-las de um modo inteiramente analítico, isto é, sem a necessidade de qualquer propagação via o fluxo original exato. Apesar disso, superpomos nestas figuras, para efeito de comparação, as órbitas propagadas tanto no fluxo normalizado quanto no exato. A convergência da forma normal torna praticamente indistinguíveis ambos os tipos de curvas, obtidas em cada caso. Uma particularidade das órbitas mostradas nestas figuras é que elas percorrem duas voltas completas na projeção em (z_2, z_4) enquanto realizam apenas uma volta na projeção em (z_1, z_3) . Também nota-se que a projeção em (z_2, z_4) é “residual” em relação àquela em (z_1, z_3) , sendo aproximadamente três ordens de grandeza menor (na distância típica) que esta última.

Conforme foi visto no Capítulo 3, de cada uma das órbitas periódicas instáveis mostradas nas Figuras 4.6 e 4.7, emanam dois pares de semi-cilindros estável e instável. No fluxo normalizado, estes cilindros são caracterizados por $\rho \neq 0$ e $\epsilon = 0$. Em um fluxo original ainda integrável, esses tubos se curvariam e, prolongando-se suavemente uns nos outros aos pares, dariam origem a um par de toros homoclínicos que coalescem na respectiva órbita τ . No caso presente, a dinâmica é caótica, de modo que os quatro semi-cilindros propagam-se a partir de τ como estruturas independentes entre si, embora ocorrendo intersecções transversais entre eles. Nessas intersecções, encontramos as órbitas homoclínicas associadas à correspondente órbita τ , as primeiras tendendo a esta última para tempos $\rightarrow \pm\infty$. Passemos agora à busca destas estruturas.

Uma vez que a geometria cilíndrica mesma do fluxo está garantida pela formulação apresentada nos capítulos precedentes, o interessante é poder usá-la diretamente na observação das intersecções cilíndricas transversais, o que

permitirá, pela primeira vez, a computação direta das órbitas homoclínicas. As Figuras 4.2 a 4.5 sugerem que, pelo menos longe da origem, uma seção de Poincaré adequada a esse fim, isto é, do tipo transversal à estrutura cilíndrica (ver Capítulo 3), é a que é dada pela condição $z_4 = 0$.

Construímos a passagem do fluxo cilíndrico pela referida seção por três métodos: o primeiro deles se apóia no fato de que os semi-cilindros já estão dados nas coordenadas normais, bastando apenas reescrever nestas coordenadas a condição $z_4 = 0$. Senão vejamos: $\rho \neq 0$ é fixo, de modo que variando-se a fase total $\Theta \equiv \theta_0 + \Omega t$ no intervalo $[0, 2\pi]$ em (2.17), obtemos as coordenadas y_1 e y_3 de todas as órbitas que atravessam uma dada seção reta (circular) do cilindro:

$$\begin{cases} y_1 = \rho \exp[i\Theta] \\ y_3 = -i\rho \exp[-i\Theta] \end{cases}, \rho \text{ fixo, } \Theta \in [0, 2\pi] \quad . \quad (4.14)$$

Como, para um dado cilindro, temos sempre $y_2 = 0$ ou $y_4 = 0$ (pois $\epsilon = 0$ aqui), isto faz com que a altura da seção reta cilíndrica, a partir da órbita periódica τ , seja fixada pelo valor de y_4 ou y_2 , respectivamente. Devido ao caráter liso do fluxo, o problema se reduz a determinar, para cada fase Θ no intervalo $[0, 2\pi]$ (o que fixa automaticamente os valores de y_1 e y_3), a que altura y_4 ou y_2 (para os cilindros com $y_2 = 0$ ou $y_4 = 0$, respectivamente), satisfaremos a condição $z_4 = 0$. Já esta última condição, levando em conta (2.5) e (4.9), pode ser reescrita nas coordenadas normais como

$$y_2^{N+1} + \sum_{|n|=2}^N [X(2, n_1, n_3, n_2, 0) - X(4, n_1, n_3, n_2, 0)] y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_2^{N+n_2} = 0 \quad , \quad (4.15)$$

para o caso do cilindro com $y_4 = 0$, ou como

$$y_4^{N+1} + \sum_{|n|=2}^N [X(2, n_1, n_3, 0, n_4) - X(4, n_1, n_3, 0, n_4)] y_1^{n_1} y_3^{n_3} y_4^{N+n_4} = 0 \quad , \quad (4.16)$$

para o caso do cilindro com $y_2 = 0$. Como dissemos, as coordenadas y_1 e y_3 já estão numericamente determinadas por (4.14), de modo que as soluções y_2 de (4.15) ou y_4 de (4.16), são raízes de polinômios de grau $2N$ nestas mesmas coordenadas, onde N é a ordem da série normal truncada, que é 16 no caso presente. Evidentemente, de todas as $2N$ raízes complexas da condição polinomial envolvida para cada Θ , apenas aquelas que são reais são significativas (lembrar que y_2 e y_4 devem ser reais); e, dentre estas, apenas aquela que satisfaz $z_2 < 0$ é a raiz procurada. Este último critério de seleção tem por base o fato de que a condição $z_4 = 0$ também fornece seções na região onde $z_2 > 0$. Isto pode ser visto a partir da Figura 4.6, que é a projeção das órbitas τ no plano (z_2, z_4) e sabendo-se que os semi-cilindros emanam destas últimas. Mas, fica claro (inclusive numericamente) que estas seções próximas das órbitas τ são do tipo longitudinal à estrutura cilíndrica (ver Capítulo 3) e portanto inadequadas aos nossos propósitos. A expectativa de que em cada caso a raiz selecionada pelo critério acima (e portanto a seção do tipo transversal aos cilindros buscada) fosse única, foi confirmada em todos os casos estudados. A computação de raízes de polinômios foi feita pelo método de Laguerre otimizado, via rotinas descritas em [22].

Após o cálculo acima para todas as fases Θ e para ambos os cilindros, voltamos às coordenadas z e obtemos as intersecções dos semi-cilindros com o plano $z_4 = 0$ em $z_2 < 0$, as quais, quando projetadas no plano (z_1, z_3) , constituem a seção de Poincaré do tipo transversal aos cilindros, procurada. Esperamos ver nesta seção duas curvas fechadas intersectantes, cada qual correspondendo a um dos semi-cilindros, estável ou instável. O fato destas curvas serem intersectantes constitui justamente a evidência de que vemos uma intersecção transversal, isto é, não-suave dos dois cilindros. A construção das intersecções cilíndricas por este método analítico está mostrada nas Figuras 4.8 e 4.9 para dois valores do parâmetro ρ e são típicas de todos os valores de ρ estudados. Nos pontos de intersecção das curvas mostradas estão as órbitas homoclínicas primárias de nosso interesse.

A simetria entre as curvas intersectantes, evidenciada nas Figuras 4.8 e 4.9 é um fato marcante e sempre presente em todas as figuras deste tipo, independentemente do valor do parâmetro ρ . Em particular, as órbitas homoclínicas estarão sempre sobre os eixos coordenados z_1 e z_3 nestas figuras. Esta disposição altamente simétrica da figura deve ser creditada ao sistema hamiltoniano específico (Hénon-Heiles) de que estamos tratando.

O segundo método de busca das órbitas homoclínicas é essencialmente equivalente ao primeiro acima descrito. Ele consistiu na propagação temporal, no próprio fluxo normalizado, e até a verificação da condição $z_4 = 0$, de todas as órbitas de uma dada seção reta cilíndrica inicial, vizinha da correspondente órbita τ . As alturas em que foram feitas tais seções iniciais foram $y_2 = 1,0 \times 10^{-2}$ ou $y_4 = 1,0 \times 10^{-2}$ conforme o cilindro. Estas alturas devem ser pequenas para se estar na região de convergência da forma normal. Por outro lado, se elas forem suficientemente grandes, partiremos de condições iniciais já na região $z_2 < 0$, evitando assim problemas numéricos relacionados ao tangenciamento do plano $z_4 = 0$ na região $z_2 > 0$, que ocorre no caso de algumas órbitas. No primeiro método acima só havíamos necessitado dos $X(i, n)$ uma vez que lá esteve em jogo apenas a geometria cilíndrica do fluxo normal. Mas aqui, embora a integração do fluxo via (2.17) seja trivial, o método envolve a própria dinâmica desse fluxo e necessitamos adicionalmente dos coeficientes $K(2m)$. Portanto, a comparação dos dois métodos se torna um importante teste de consistência para todos os coeficientes computados.

Os resultados do segundo método estão apresentados nas Figuras 4.10 e 4.11, enquanto que nas Figuras 4.12 e 4.13 superpomos, para comparação, os resultados de ambos os métodos para os correspondentes valores do parâmetro ρ . Vemos então que tais resultados são praticamente indistinguíveis, o que confirma indiretamente a consistência do algoritmo usado na obtenção numérica dos coeficientes gerais. Tal concordância ocorreu para todos os outros valores de ρ considerados.

O terceiro método consistiu na propagação, no fluxo original exato, das mesmas condições iniciais (analiticamente dadas) usadas no segundo método acima, obviamente depois de convertidas às coordenadas \underline{z} . Utilizando-se valores apropriadamente pequenos para ρ e dado que y_2 e y_4 são também pequenos, a convergência da forma normal mais uma vez garante que partimos de boas condições iniciais, no sentido de que iniciamos o fluxo com precisão sobre um dado semi cilindro. O resultado deste método na obtenção do “cruzamento” transversal primário em $z_4 = 0$ e $z_2 < 0$ dos

cilindros que emanam de τ , está mostrado nas Figuras 4.14 e 4.15 para os mesmos dois valores de ρ usados nas figuras anteriores. Nas Figuras 4.16 e 4.17 superpomos, para comparação, os resultados do primeiro e do terceiro métodos para os valores correspondentes de ρ . Nas Figuras 4.18 e 4.19 mostramos, a título de ilustração, a evolução pelo fluxo exato de uma órbita típica sobre o semi-cilindro estável, com parâmetro $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$ ($\epsilon = 0$), desde a seção reta cilíndrica inicial até que atinja a condição $z_1 = 0$. Já nas Figuras 4.20 e 4.21, mostramos o mesmo para uma órbita típica sobre o semi-cilindro instável correspondente. Estas trajetórias são típicas também para os demais valores de ρ estudados.

A partir da comparação dos três métodos, feita nas Figuras 4.16 e 4.17, podemos concluir o seguinte: a construção quantitativa inteiramente analítica da topologia cilíndrica a partir da forma normal (os dois primeiros métodos), embora tenha sucesso garantido na vizinhança do ponto de sela, não é suficiente, até a ordem 16 computada, para garantir uma concordância quantitativa completa com o fluxo exato fora dessa vizinhança (terceiro método). Entretanto, deve-se reconhecer que os resultados apresentados já são muito bons se analisados no contexto do teorema de Moser, levando em conta que estamos nestas figuras realmente muito longe do ponto de sela. Quanto aos aspectos qualitativos, o método analítico se revela inteiramente fiel à dinâmica exata (existência de cruzamentos homoclínicos, com a preservação das simetrias exatas), o que ressalta das figuras apresentadas. Voltando às Figuras 4.4 e 4.5, e ao que lá comentamos acerca dos fortes indícios de uma possível extensão da região de convergência da forma normal, vemos que os resultados acima não desencorajam tal hipótese. Na verdade, eles indicam que seria interessante buscar evidências numéricas adicionais dessa possibilidade. Neste sentido, poderíamos posteriormente continuar os esforços de cômputo da forma normal até ordens mais altas que a ordem 16 aqui alcançada, possivelmente usando recursos de supercomputação. A constatação de uma concordância quantitativa entre os três métodos, crescente com a ordem computada, nos moldes das Figuras 4.16 e 4.17 (sobretudo para valores de ρ assintoticamente pequenos), seguramente completaria os indícios numéricos de tal hipótese.

Por outro lado, o terceiro método possui “per se” duas virtudes importantes: é preciso e semi-analítico, sendo que ambas as qualidades se devem crucialmente à existência da forma normal convergente e à sua capacidade de descrever analiticamente a topologia cilíndrica em torno do ponto de sela.

Este método permite o estudo preciso desta topologia, numa região mais extensa que aquela onde a convergência está garantida, via uma integração numérica complementar. Podemos por exemplo, a partir das Figuras 4.16 e 4.17, localizar e computar diretamente no espaço de fases de quatro dimensões, as órbitas homoclínicas primárias encontradas, bem como as órbitas periódicas de período longo vizinhas. Faremos isso adiante, após o término do estudo numérico da topologia cilíndrica como um todo.

Consideremos agora o caso dos cilindros ($\rho \neq 0$) para os quais $\epsilon \neq 0$. Segundo o Capítulo 3, um cilindro desses seria o que restaria de um toro vizinho aos toros homoclínicos, após uma perturbação não-integrável de um sistema originalmente integrável (nesta imagem, vimos que os toros homoclínicos em si teriam dado lugar aos semi-cilindros estável e instável associados às órbitas τ , os quais acabamos de estudar).

Todos os três métodos anteriormente descritos e aplicados ao caso $\rho \neq 0$, $\epsilon = 0$, podem ser imediatamente estendidos ao caso $\epsilon \neq 0$. A única diferença é que agora y_2 e y_4 estão sobre a hipérbole $y_2 y_4 = \epsilon$ e temos um único cilindro auto-intersectante em $z_4 = 0$. Esta última condição pode ser escrita nas coordenadas normais y como

$$y_2^{N+1} - \epsilon y_2^{N-1} + \sum_{|n|=2}^N [X(2, n) - X(4, n)] y_1^{n_1} y_3^{n_3} \epsilon^{n_4} y_2^{N+n_2-n_4} = 0 \quad , \quad (4.17)$$

onde y_1 e y_3 continuam dados por (4.14) e y_4 passa a ser dado em função de y_2 por $y_4 = \epsilon/y_2$. Já y_2 é obtido como a raiz real da condição polinomial (4.17) para a qual ocorre $z_2 < 0$.

Os resultados obtidos com os três métodos para os valores de $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$ estão mostrados nas Figuras 4.22 a 4.28: a Figura 4.22 é a seção de Poincaré por $z_4 = 0$, obtida pelo primeiro método analítico (o das raízes polinomiais), de ambos os ramos do cilindro (único) auto-intersectante; a Figura 4.23 descreve os resultados da aplicação do segundo método analítico (o da integração no sistema normalizado) e a Figura 4.24 superpõe os resultados de ambos os métodos, confirmando como antes a esperada equivalência dos mesmos. A Figura 4.25 descreve a aplicação do terceiro método (o semi-analítico), que propaga no fluxo original exato, boas seções cilíndricas transversais iniciais, preparadas a partir da forma normal. A Figura 4.26

compara o primeiro e o terceiro métodos de construção da seção procurada, estendendo para o caso $\epsilon \neq 0$ tanto os bons resultados dos dois métodos analíticos na descrição qualitativa da dinâmica caótica, quanto a perspectiva de boa descrição numérica através deles, para ordens de truncamento da forma normal maiores que 16. Finalmente, nas Figuras 4.27 e 4.28 projetamos nos planos conjugados a evolução de uma órbita típica desde a seção cilíndrica transversal inicial, até a seção de Poincaré por $z_4 = 0$ (ambas em $z_2 < 0$), após uma integração em ambos os sentidos no tempo.

Apesar das semelhanças gerais, apresentadas pelas figuras no estudo acima, há uma grande diferença qualitativa entre os resultados obtidos nos casos $\epsilon = 0$ e $\epsilon \neq 0$, no que concerne ao que se observa nas intersecções cilíndricas transversais. No primeiro caso, já vimos que tais intersecções consistem (necessariamente) de órbitas homoclínicas associadas às órbitas τ , enquanto que para $\epsilon \neq 0$ temos (candidatas a) órbitas periódicas vizinhas às homoclínicas. Conforme vimos no Capítulo 3, neste último caso temos cilindros únicos auto-intersectantes que, embora vizinhos dos semi-cilindros que coalescem em τ , são independentes de τ . O fato de serem cilindros contínuos na vizinhança de τ faz com que as órbitas nas auto-intersecções, estejam precisamente saindo do ramo cilíndrico que as retira da vizinhança de τ e reentrando no ramo cilíndrico que as traz novamente a essa vizinhança.

Dados $\rho, \epsilon \neq 0$, sejam as órbitas que estejam na primeira auto-intersecção do cilindro único. Estas órbitas não são necessariamente periódicas pois pode ocorrer de estarmos vendo apenas um trecho de uma trajetória mais complexa sobre o cilindro, envolvendo ou não uma ou mais auto-intersecções adicionais; e ainda que fossem periódicas, poderia ocorrer de elas só se fecharem após um certo número dessas auto-intersecções adicionais. Por outro lado, consideramos no caso $\epsilon = 0$ apenas as órbitas homoclínicas primárias, advindas da primeira intersecção transversal dos semi-cilindros. Como estamos interessados na acumulação de órbitas periódicas de período longo, nas órbitas homoclínicas, vamos nos ater no caso $\epsilon \neq 0$ às órbitas periódicas também primárias, isto é, aquelas que se fecham sobre si mesmas já na primeira auto-intersecção cilíndrica transversal.

O fato de que as órbitas da primeira auto-intersecção de um dado cilindro, não são em geral periódicas primárias, pode ser facilmente constatado propagando-as no tempo. Contudo, fixemos por exemplo o valor de ρ e variemos o valor de ϵ , obtendo para cada valor atribuído a este último as auto-intersecções primárias e propagando-as no tempo. Veremos que para

alguns valores bem determinados e isolados do parâmetro ϵ , estas órbitas voltam-se sobre si mesmas exatamente, constituindo-se em órbitas periódicas primárias.

O processo acima descrito foi utilizado com sucesso tanto na obtenção de órbitas periódicas primárias quanto na evidência do seu acúmulo nas órbitas homoclínicas primárias correspondentes, à medida que os períodos aumentavam. É isto que passaremos a mostrar nas figuras seguintes.

Inicialmente, exibimos nas Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 as projeções de uma órbita homoclínica primária ($\epsilon = 0$), associada à órbita τ para a qual $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$. A homoclínica apresentada na figura (note-se que temos quatro delas associadas a τ) é aquela que, na seção correspondente à da Figura 4.14 ou 4.15, para o valor de ρ aqui escolhido, está na intersecção das duas curvas e sobre o ramo negativo do eixo coordenado z_1 . A própria órbita τ para este caso, já se encontra projetada nas Figuras 4.6 e 4.7, possuindo período $T = 3,628$ e energia $E = 0,166678375339$. Nas Figuras 4.32 e 4.33 superpomos a órbita homoclínica à órbita τ correspondente, para a qual a homoclínica tende para tempos $\rightarrow \pm\infty$. A órbita homoclínica numericamente estabelecida nestas figuras foi integrada por um tempo total de 83,795, que é muito maior que o próprio período de τ . Sua energia se manteve idêntica à de τ nesta integração, dentro da precisão acima apresentada.

Aplicando o método de busca de órbitas periódicas primárias acima delineado, encontramos um número delas, o suficiente para que o processo de sua acumulação na correspondente homoclínica ficasse claramente evidenciado. Mantivemos o parâmetro ρ fixo em $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$, bem como ativevmo-nos àquelas órbitas candidatas que, na seção correspondente à Figura 4.25 para o valor de ρ escolhido, estavam na intersecção das duas curvas também sobre o ramo negativo do eixo coordenado z_1 .

Nas Figuras 4.34 e 4.35 mostramos a órbita periódica primária para a qual $\epsilon = 5,836022 \times 10^{-5}$. O período encontrado foi $T = 14,026$ e sua energia, computada pelo hamiltoniano original, a partir da condição inicial nas coordenadas normais y e convertida às coordenadas z , manteve-se constante em $E = 0,1666200153$. Deve ser lembrado aqui que a precisão no estabelecimento da energia é tanto maior quanto menores forem ρ e ϵ , sendo dada exatamente apenas no ponto de sela. Uma vez que a dinâmica é caótica, é óbvio que toda a precisão aqui exibida nos parâmetros das órbitas computadas, se perde com rapidez exponencial no tempo, se as integramos em

intervalos temporais desnecessariamente mais longos que os apresentados. O que queremos com tantas casas decimais é apenas enfatizar a esperada convergência dos valores de energia àquela de τ , à medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Nas Figuras 4.36, 4.37 e 4.38 mostramos a órbita periódica primária para a qual $\epsilon = 4,1216 \times 10^{-8}$. O período e a energia desta órbita são $T = 21,381$ e $E = 0,166678334123$, respectivamente.

Nas Figuras 4.39, 4.40 e 4.41 mostramos a órbita periódica primária para a qual $\epsilon = 2,9118 \times 10^{-11}$. O período e a energia desta órbita são $T = 28,536$ e $E = 0,166678375310$, respectivamente.

Finalmente, nas Figuras 4.42, 4.43 e 4.44 mostramos a órbita periódica primária para a qual $\epsilon = 2,057124 \times 10^{-14}$. O período e a energia desta órbita são $T = 35,791$ e $E = 0,166678375339$, respectivamente.

A rigor, devemos estudar a acumulação das órbitas numa mesma superfície de energia, no caso, na superfície que contém a própria órbita τ considerada. Entretanto, deve ser notado que os valores de energia das órbitas acima vão rapidamente convergindo para o valor correspondente a esta última, à medida que o valor de ϵ diminui. Nota-se também que todos os períodos encontrados são aproximadamente múltiplos do período de τ , o que também é consistente.

Por fim, superpomos nas Figuras 4.45, 4.46 e 4.47 a órbita homoclínica mesma e as órbitas periódicas encontradas. O processo de acumulação das últimas na primeira, à medida que o período cresce, é evidenciado de modo notável aqui, principalmente porque ele pode ser acompanhado não só no plano (z_1, z_3) e na região macroscópica do plano (z_2, z_4) , onde a quase-identificação com a homoclínica é rapidamente alcançada (com o crescimento do período), mas também na região microscópica próxima da origem do plano (z_2, z_4) . Embora esta última região tenha distâncias típicas de cerca de três ordens de grandeza menores que as da região macroscópica, é nela que persistem as maiores diferenciações entre as órbitas vizinhas.

Foi feito um teste final e independente, com o objetivo de assegurar-se que o método acima está computando com precisão órbitas periódicas existentes no fluxo hamiltoniano exato. Obviamente, isto não é necessário em princípio, dado que a convergência da forma normal — e o ter-se à mão um código de integração numérica confiável — são suficientes para garantir isso. Entretanto, pode-se questionar se o truncamento da série normal na ordem 16, aqui realizada, é suficiente para garantir a precisão numérica dos resultados apresentados e, ainda mais, se o procedimento todo não está

comprometido por possíveis erros sistemáticos.

Para esse fim, utilizamos um código divulgado na literatura [24] para o cálculo de órbitas periódicas em fluxos hamiltonianos de dois graus de liberdade. Partindo de uma órbita (aproximadamente) periódica dada, este código utiliza um método linear do tipo Newton–Raphson para o sistema diferencial, de modo a obter uma órbita periódica exata, vizinha da órbita postulada. A principal característica do método é a rapidez com que a convergência é alcançada, o que resulta de se reescrevê-lo em termos da matriz de monodromia da órbita procurada.

No presente caso, introduzimos no referido código, como órbitas periódicas postuladas, justamente aquelas que obtivemos nas figuras anteriores. A seguir, procedemos em cada caso à computação da órbita periódica exata de mesma energia e período. O resultado foi que, em todos os casos, incluindo o da própria órbita instável τ , o código convergiu para órbitas periódicas praticamente indistinguíveis daquelas que já havíamos obtido através da forma normal. Para efeito de comparação, mostramos nas Figuras 4.48, 4.49 e 4.50 a superposição de uma órbita periódica inicial, a de parâmetros $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$, $\epsilon = 2,057124 \times 10^{-14}$, $T = 35,791$ e $E = 0,166678375339$, já mostrada nas Figuras 4.42, 4.43 e 4.44, com aquela para a qual o referido código convergiu a partir desta órbita inicial. A concordância entre as órbitas, exibida nestas figuras, é típica de todos os demais casos computados, o que confirma a suficiência do truncamento da série normal, por nós considerado, na ordem 16.

Figura 4.1: Curvas de nível do potencial de Hénon-Heiles $U(q_1, q_2)$, dado pela equação (4.2).

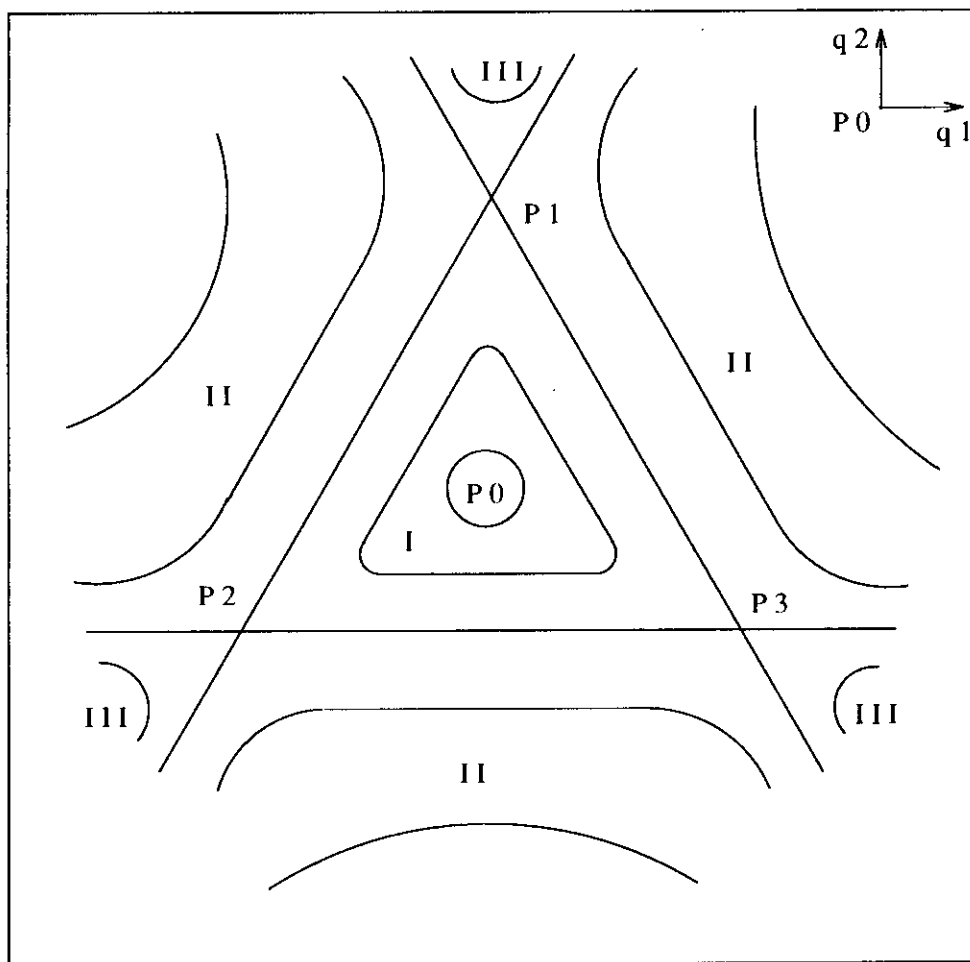


Figura 4.2: Obtenção semi-analítica precisa das variedades estável e instável que emanam do ponto de sela ($\rho = \epsilon = 0$). No sistema de Hénon–Heiles elas constituem uma única órbita homoclínica, totalmente contida no plano (z_2, z_4) .

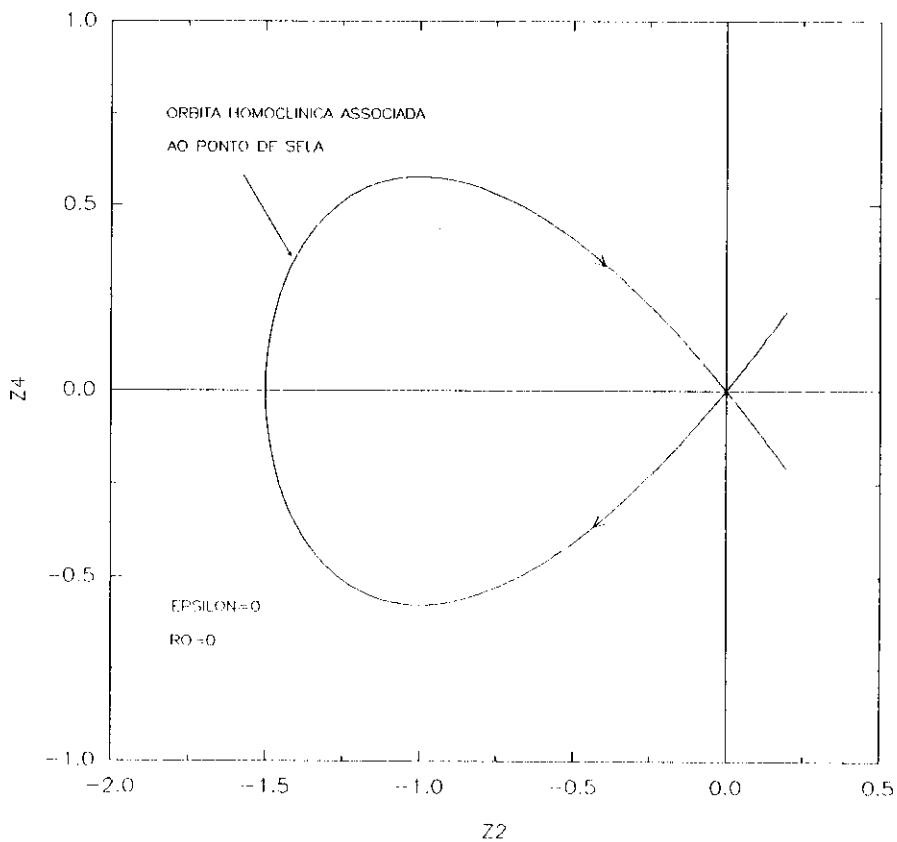


Figura 4.3: Família de órbitas do plano (z_2, z_4) , à qual pertence a órbita homoclínica associada ao ponto de sela.

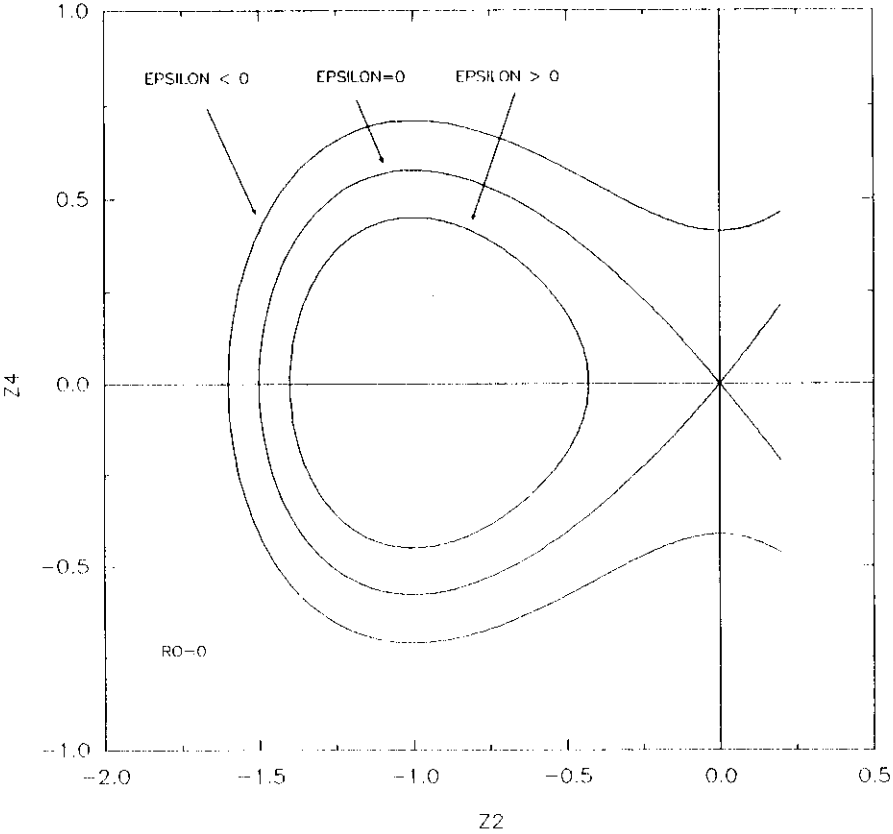


Figura 4.5: Idem à Figura 4.4, com a forma normal truncada nas ordens (ímpares): 3, 5, 11, 21, 31, 41 e 49, respectivamente.

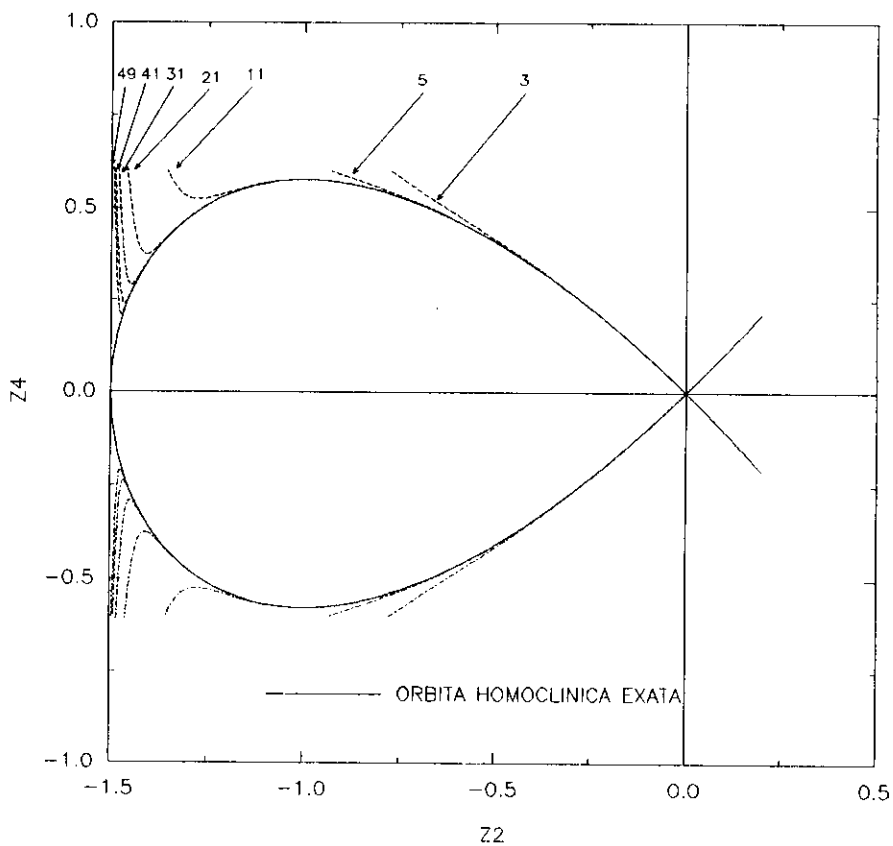


Figura 4.6: Obtenção analítica de órbitas periódicas instáveis vizinhas do ponto de sela (projeção no plano (z_2, z_4)). Aqui, usamos a forma normal até a ordem 16, para três órbitas ($c = 0$): $\rho = 1,6; 2,6$ e $3,6 \times 10^{-3}$, respectivamente. Apresentamos também a integração semi-analítica precisa para efeito de comparação.

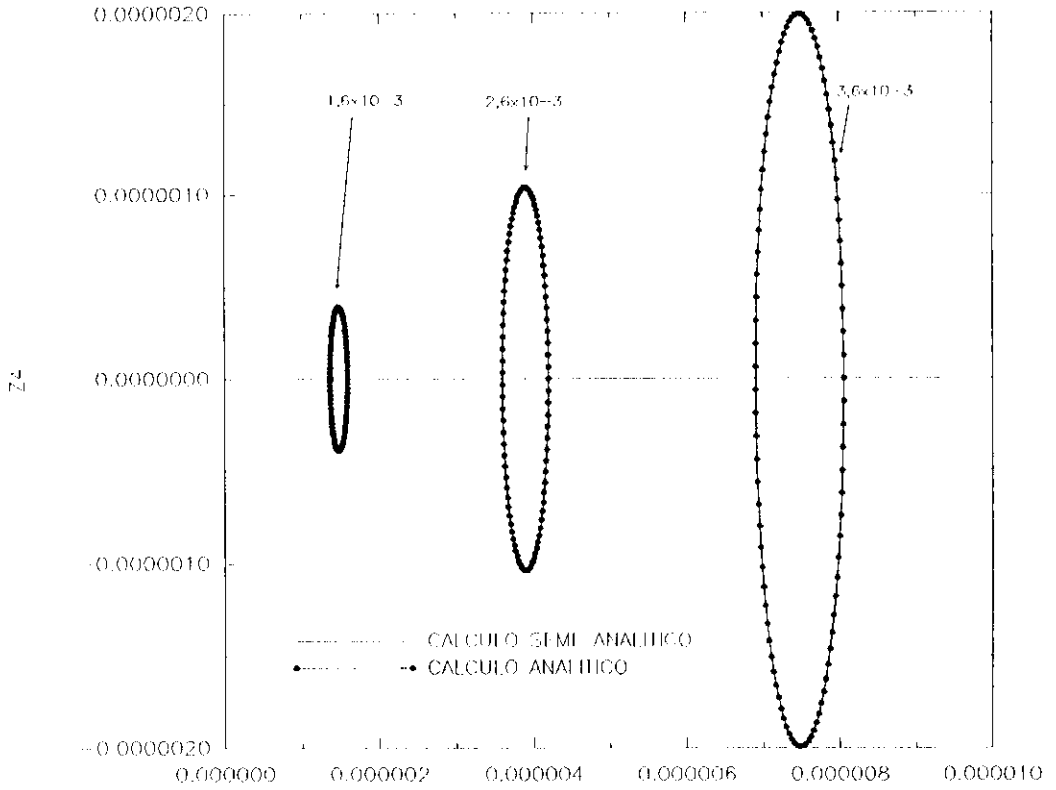


Figura 4.7: Projeção no plano (z_1, z_3) das órbitas periódicas instáveis da Figura 4.6.

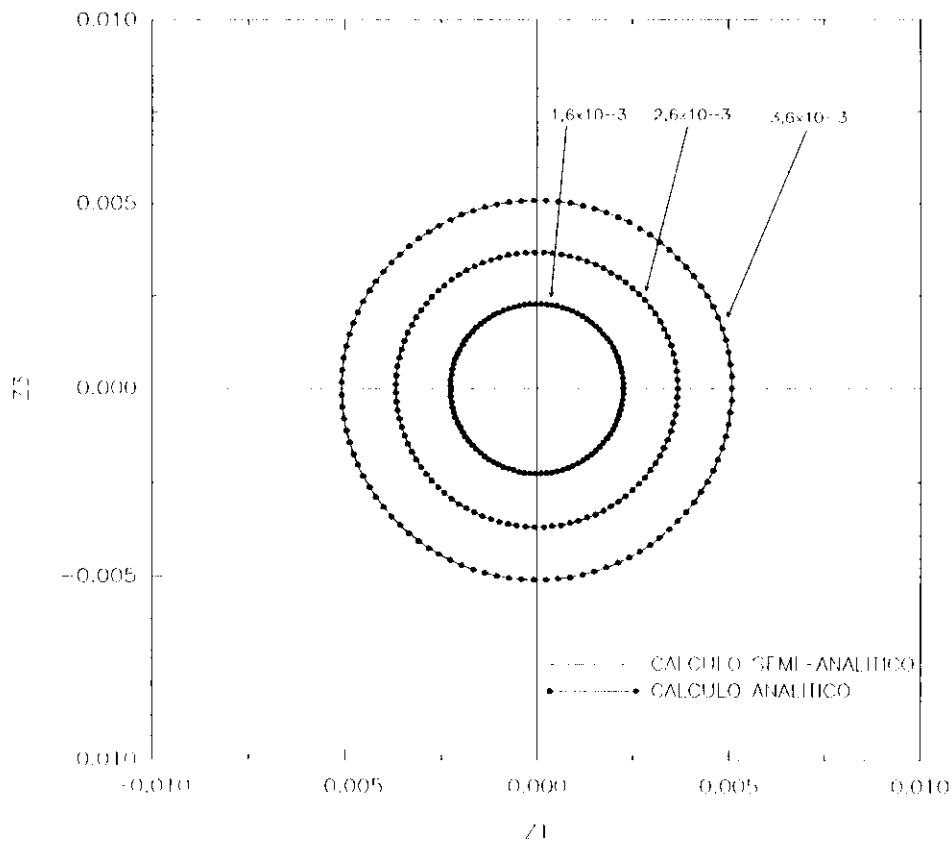


Figura 4.8: Obtenção analítica pelo Primeiro Método (zeros de polinômios), da seção de Poincaré por $z_4 = 0$, das estruturas cilíndricas que emanam da órbita τ , para $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$ ($\epsilon = 0$). As intersecções da figura consistem de órbitas homoclínicas e revelam a existência das intersecções cilíndricas transversais.

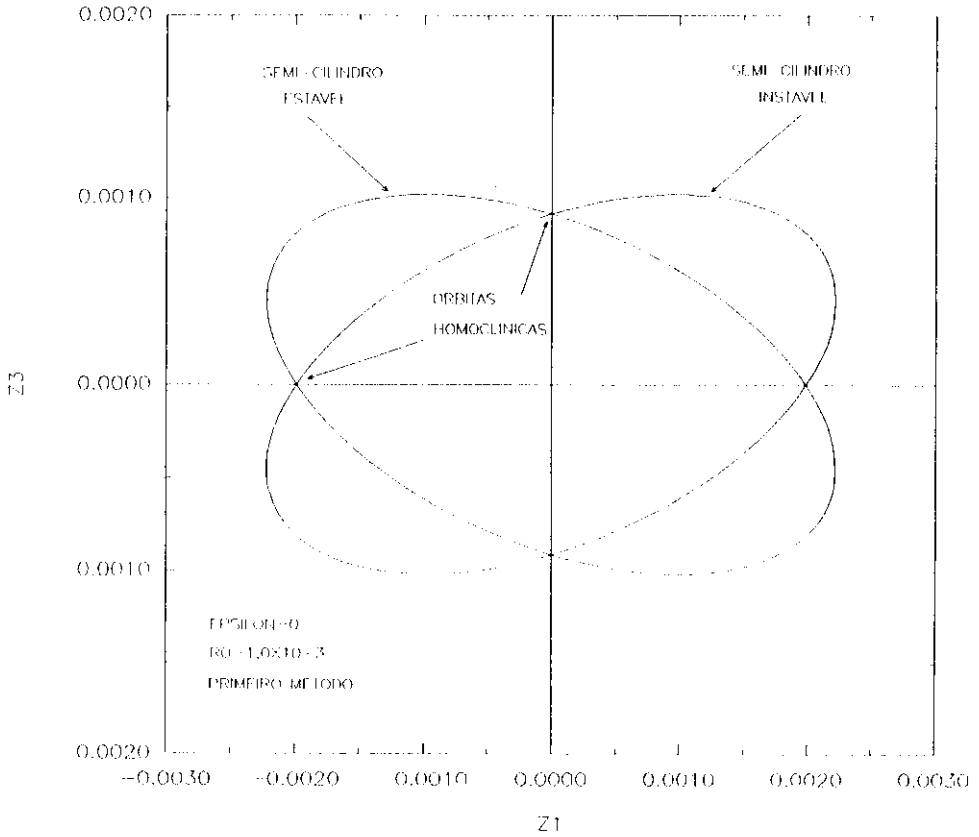


Figura 4.9: Idem à Figura 4.8 pelo Primeiro Método, só que agora para $\rho = 1,0 \times 10^{-10}$.

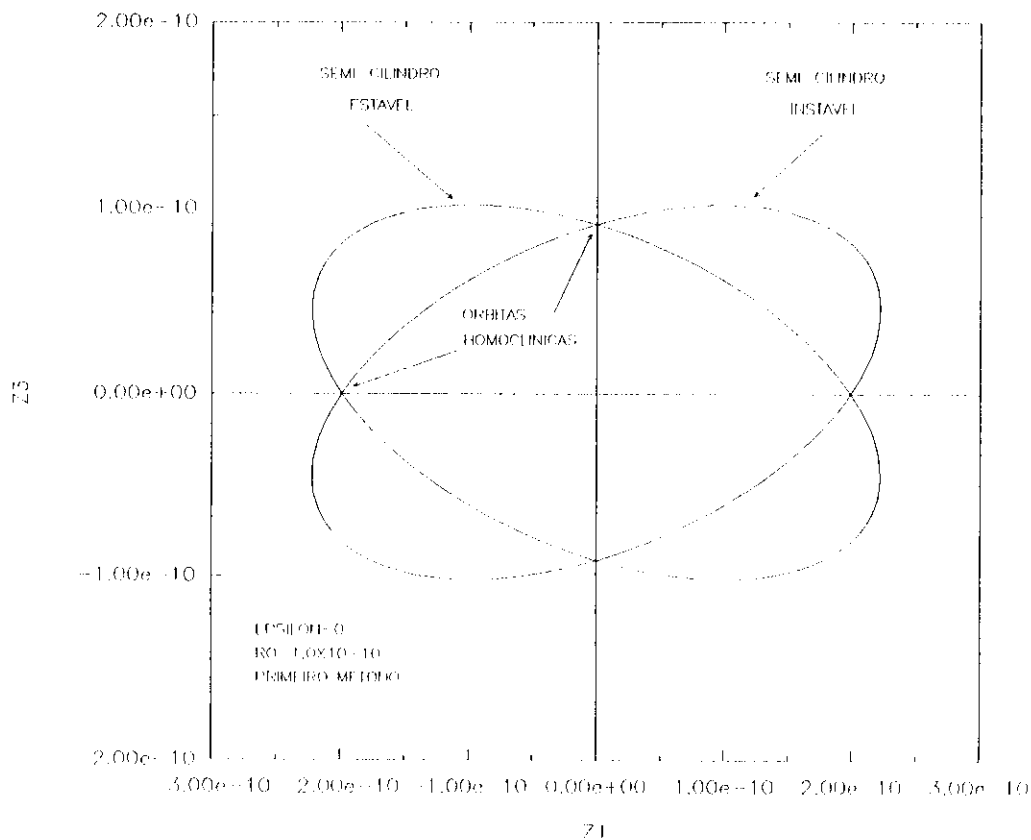


Figura 4.10: Obtenção analítica pelo Segundo Método (pelo fluxo normalizado), da seção de Poincaré por $z_4 = 0$, das estruturas cilíndricas que emanam da órbita τ , para $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$ ($\epsilon = 0$). As intersecções da figura consistem de órbitas homoclínicas e do mesmo modo revelam a existência das intersecções cilíndricas transversais.

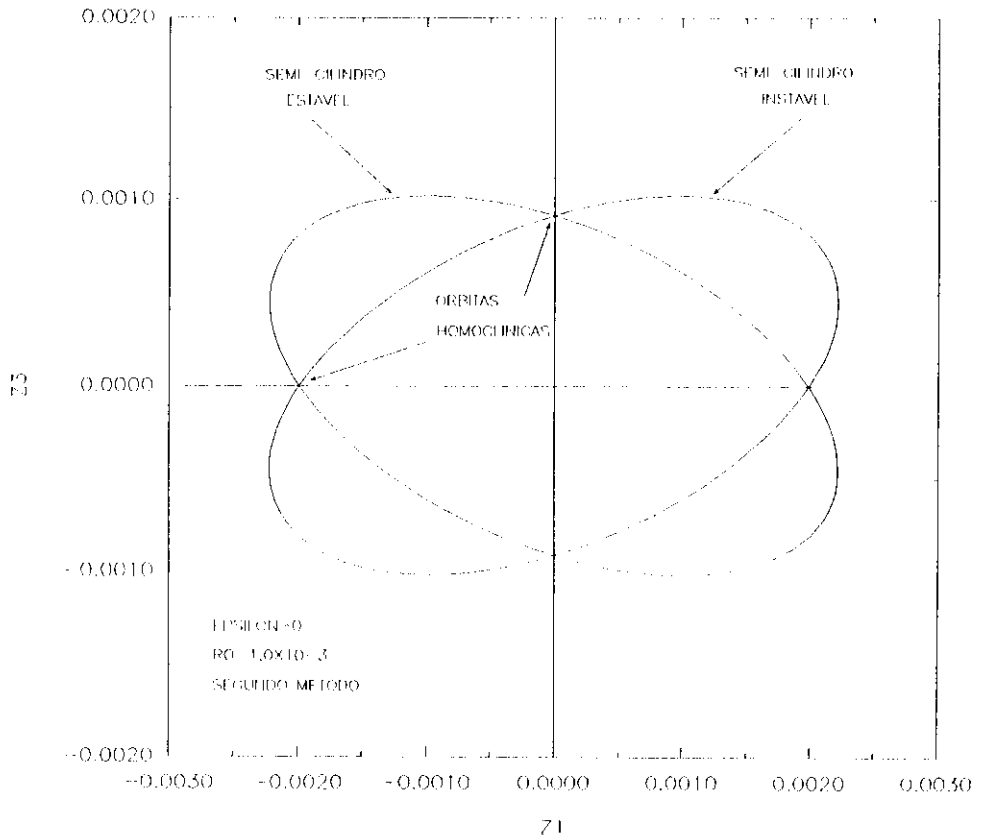


Figura 4.11: Idem à Figura 4.10 para o Segundo Método, só que agora $\rho = 1,0 \times 10^{-10}$.

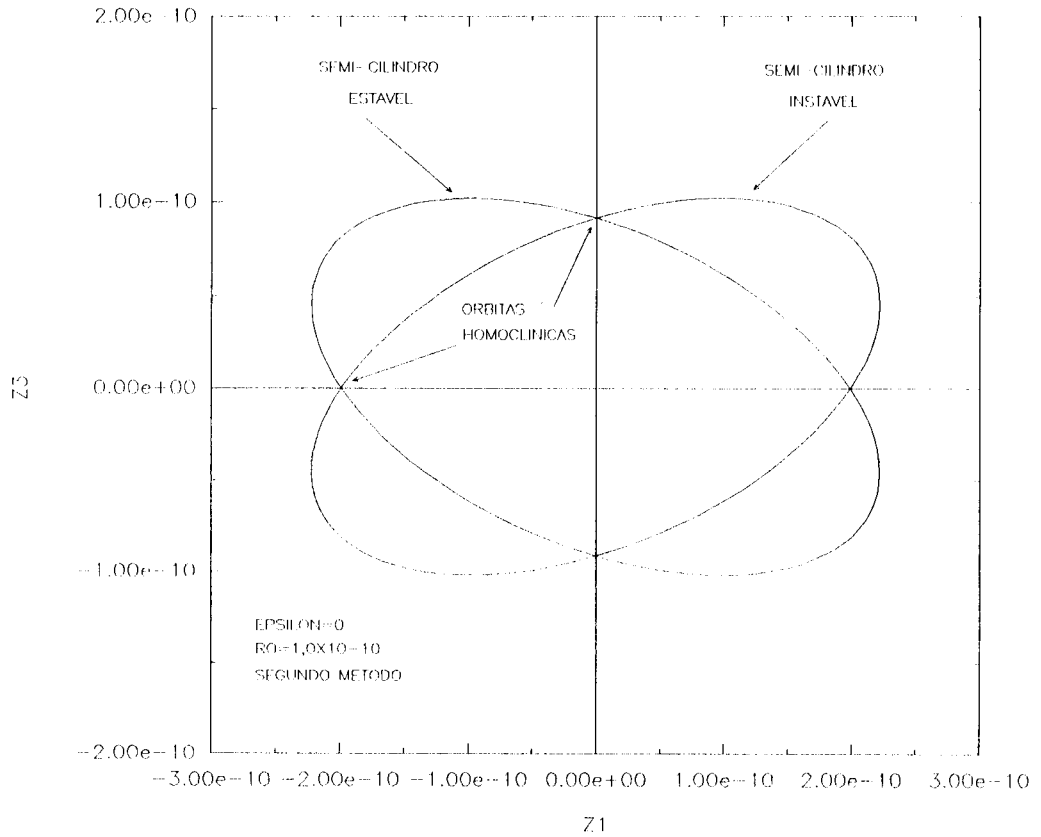


Figura 4.12: Superposição das Figuras 4.8 e 4.10, para efeito de comparação dos dois métodos analíticos. Aqui, usamos $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$. A concordância é quase completa, o que confirma a consistência numérica da obtenção dos coeficientes gerais $X(i, \underline{n})$ e $K(2\underline{m})$.

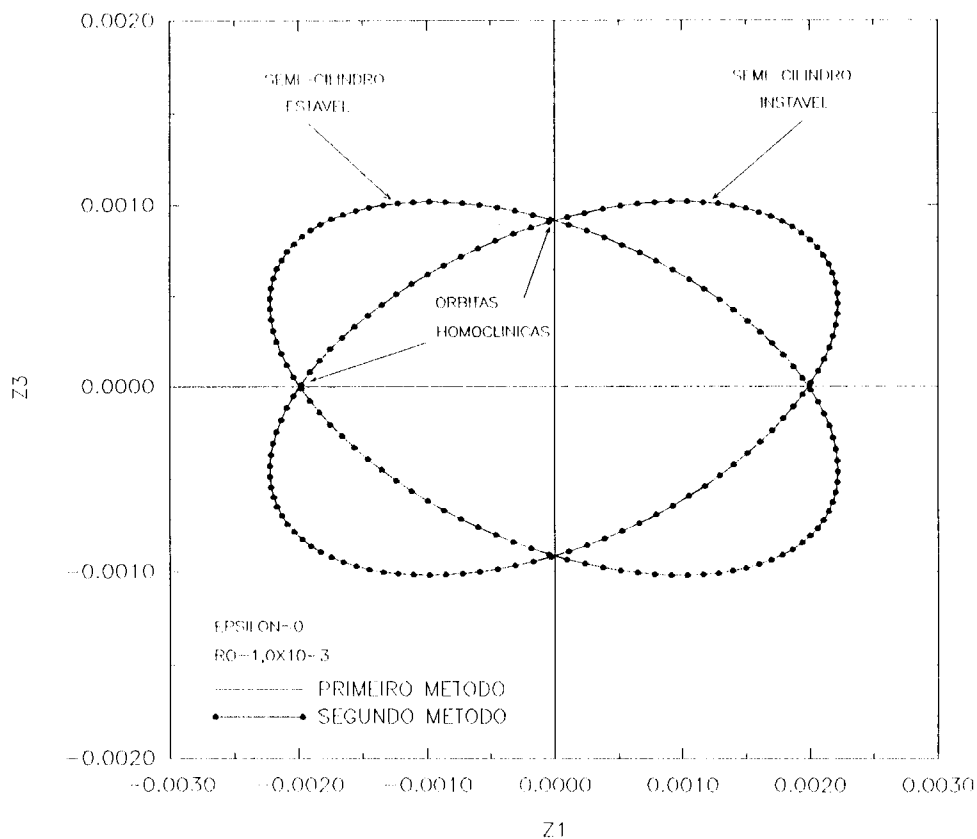


Figura 4.13: Superposição das Figuras 4.9 e 4.11, para efeito de comparação dos dois métodos analíticos. Aqui, usamos $\rho = 1,0 \times 10^{-10}$, com conclusão idêntica à da Figura 4.12.

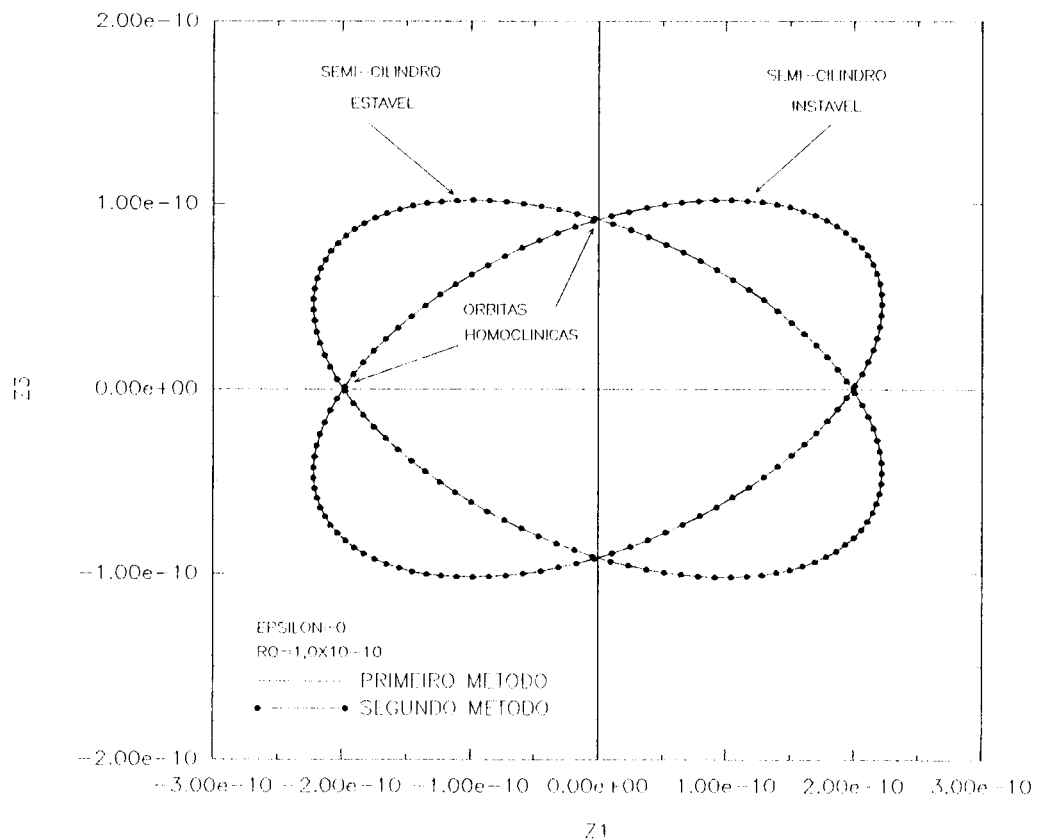


Figura 4.14: Obtenção semi-analítica precisa pelo Terceiro Método (pelo fluxo exato), da seção de Poincaré por $z_4 = 0$, das estruturas cilíndricas que emanam da órbita τ , para $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$ ($\epsilon = 0$).

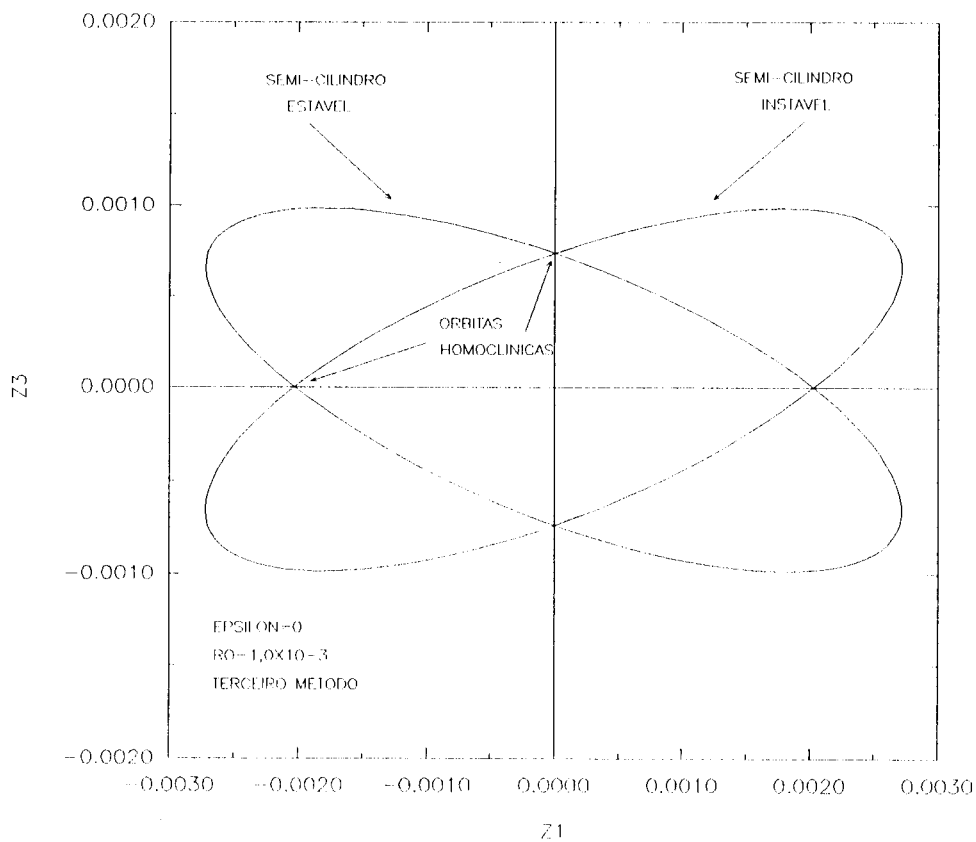


Figura 4.15: Idem à Figura 4.14 pelo Terceiro Método, só que agora para $\rho = 1,0 \times 10^{-10}$.

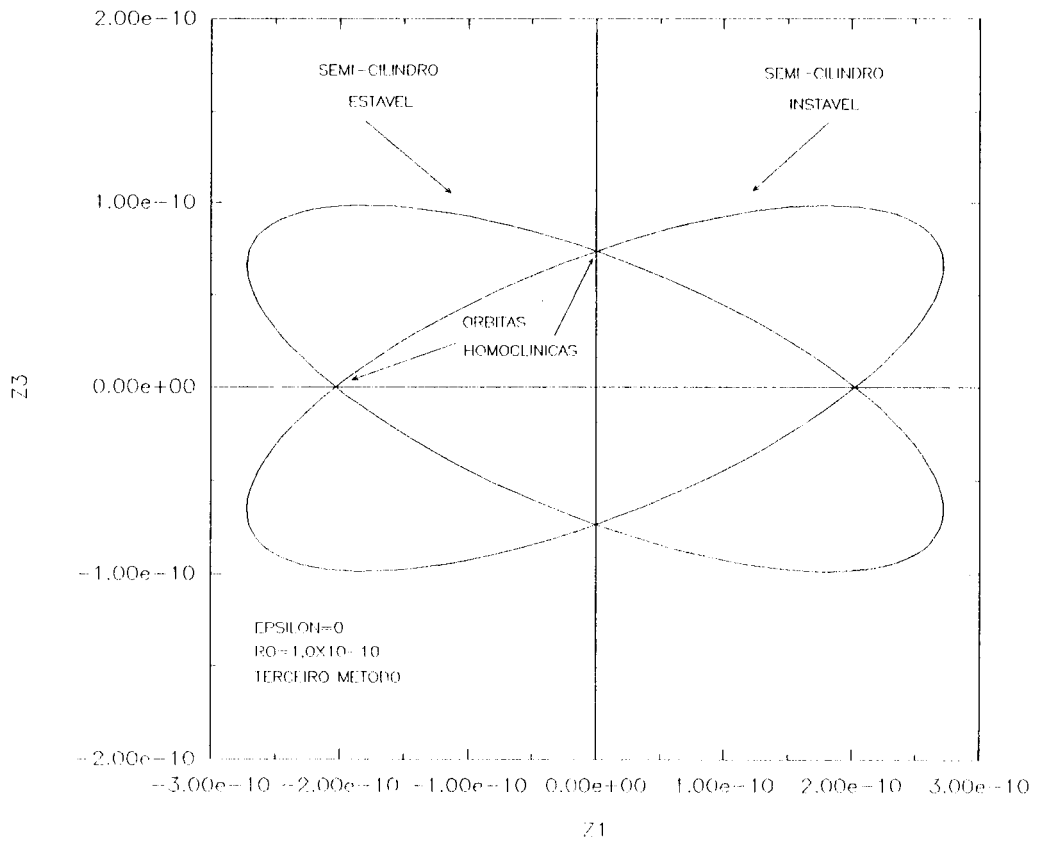


Figura 4.16: Superposição das Figuras 4.8 e 4.14, para efeito de comparação do Primeiro (analítico) e do Terceiro (semi-analítico) métodos. Aqui, $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$. Os métodos inteiramente analíticos descrevem os aspectos qualitativos da dinâmica caótica, com a perspectiva de levar também a bons resultados numéricos, para ordens > 16 da forma normal.

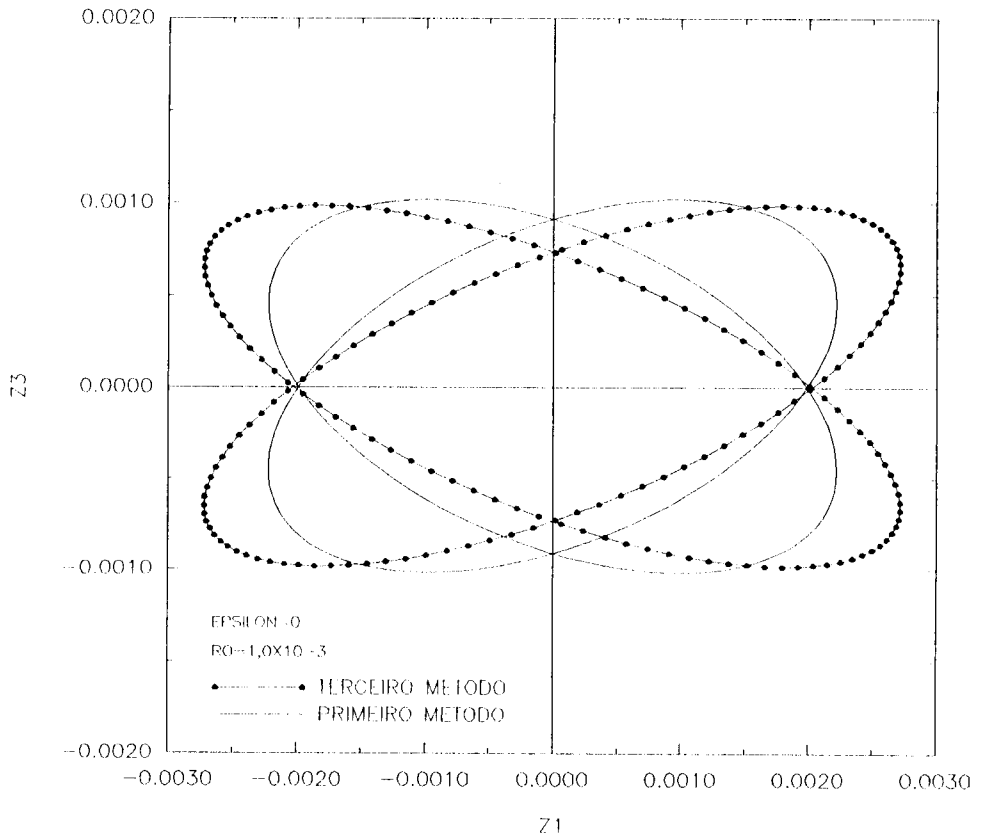


Figura 4.17: Idem à Figura 4.16, que compara os dois tipos de métodos, só que aqui isto é feito para $\rho = 1,0 \times 10^{-10}$, com idênticas conclusões.

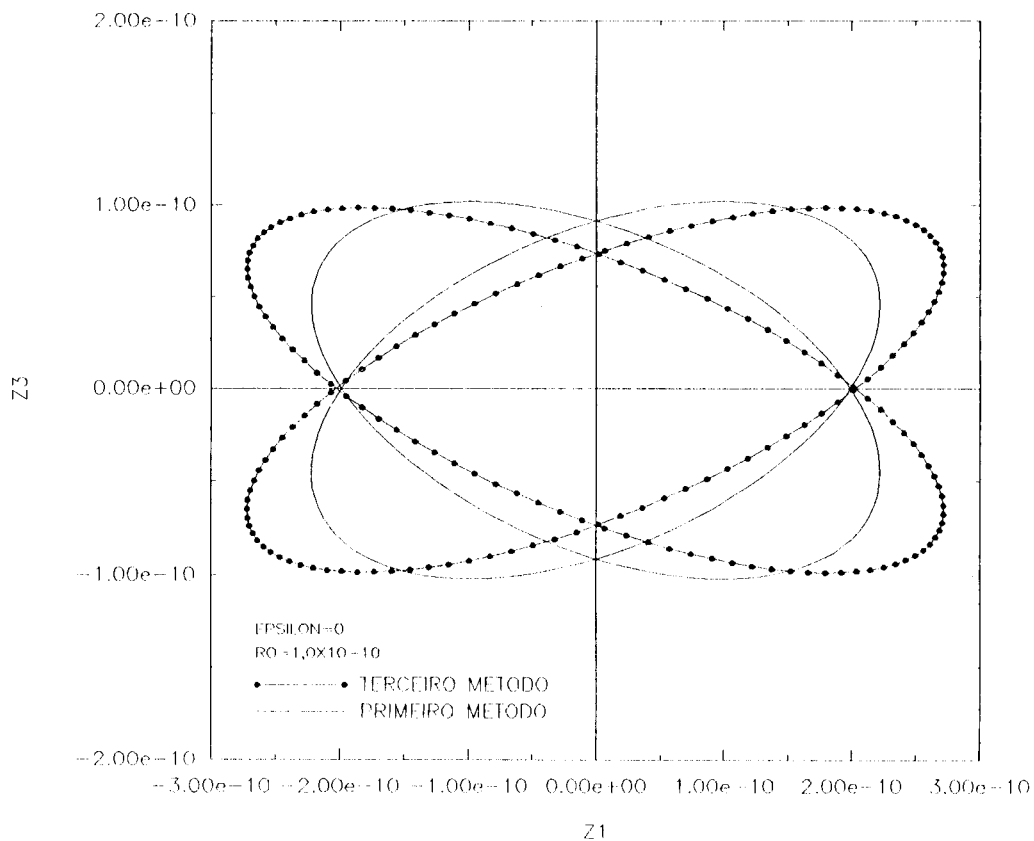


Figura 4.18: Evolução no plano (z_2, z_4) de uma órbita típica sobre o semi-cilindro estável com $\rho = 1,0 \times 10^{-3}$ ($\epsilon = 0$), desde uma condição inicial em $z_2 < 0$ até atingir o plano $z_4 = 0$ (mediante inversão temporal).

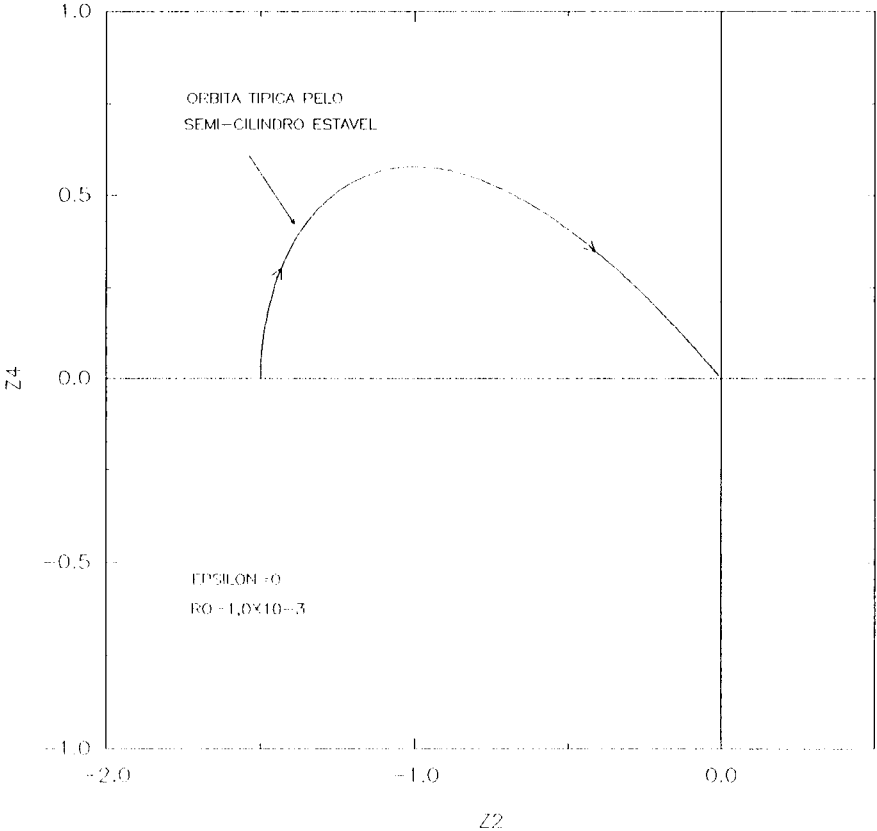


Figura 4.19: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita mostrada na Figura 4.18.

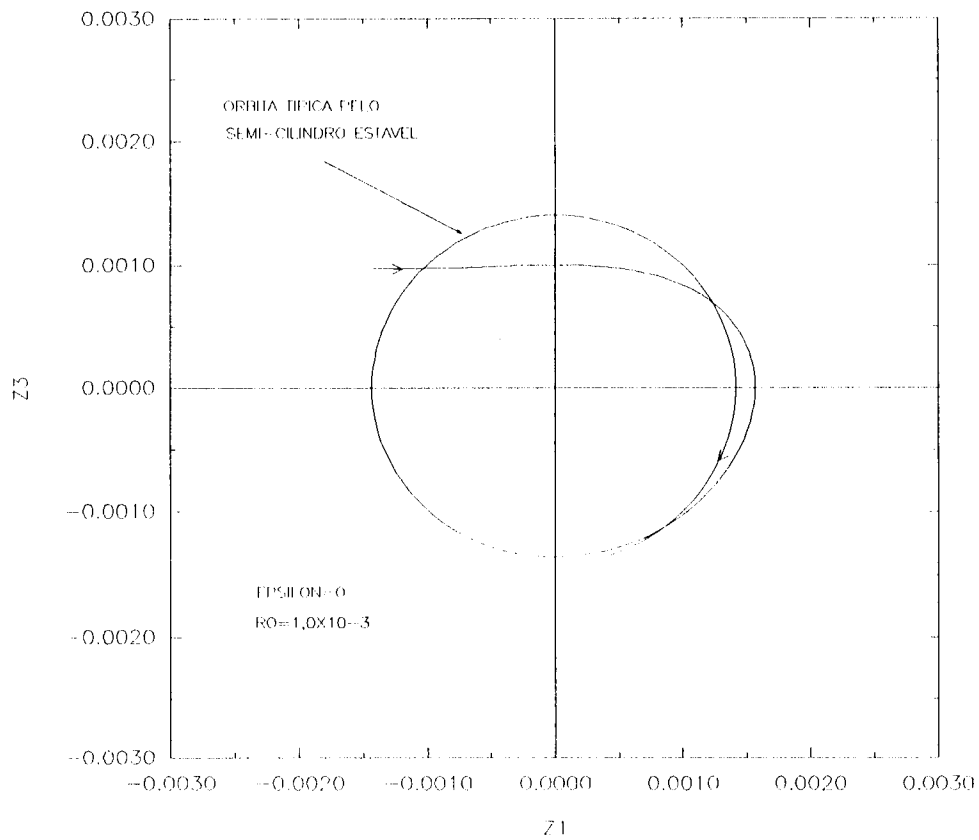


Figura 4.20: Idem à Figura 4.18, só que agora para uma órbita típica sobre o semi-cilindro instável correspondente.

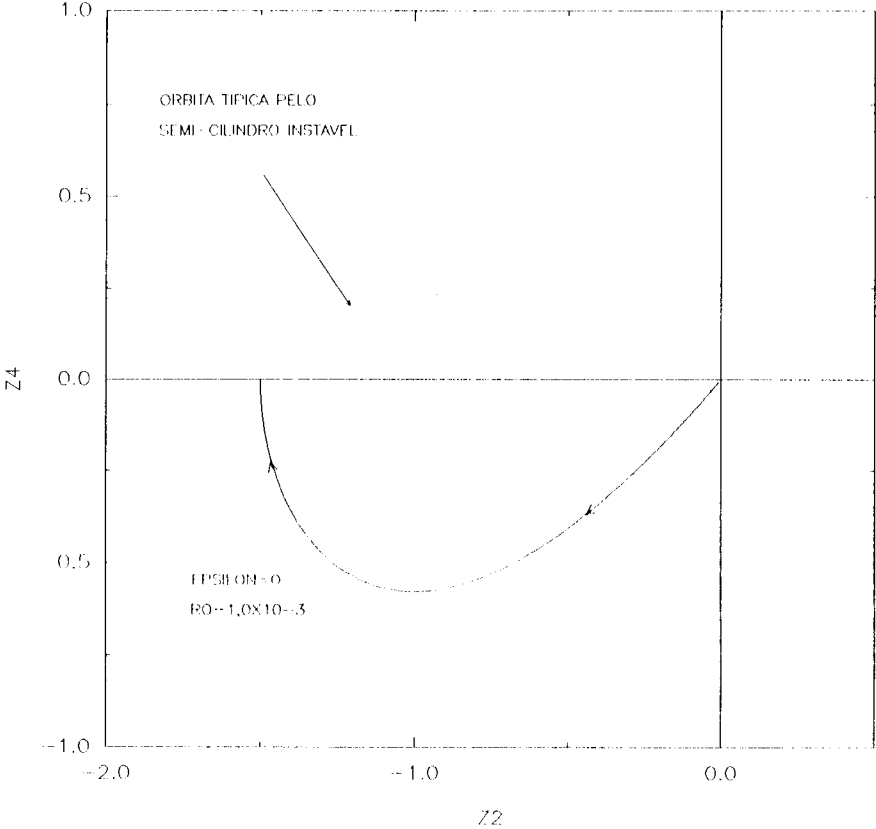


Figura 4.21: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita mostrada na Figura 4.20.

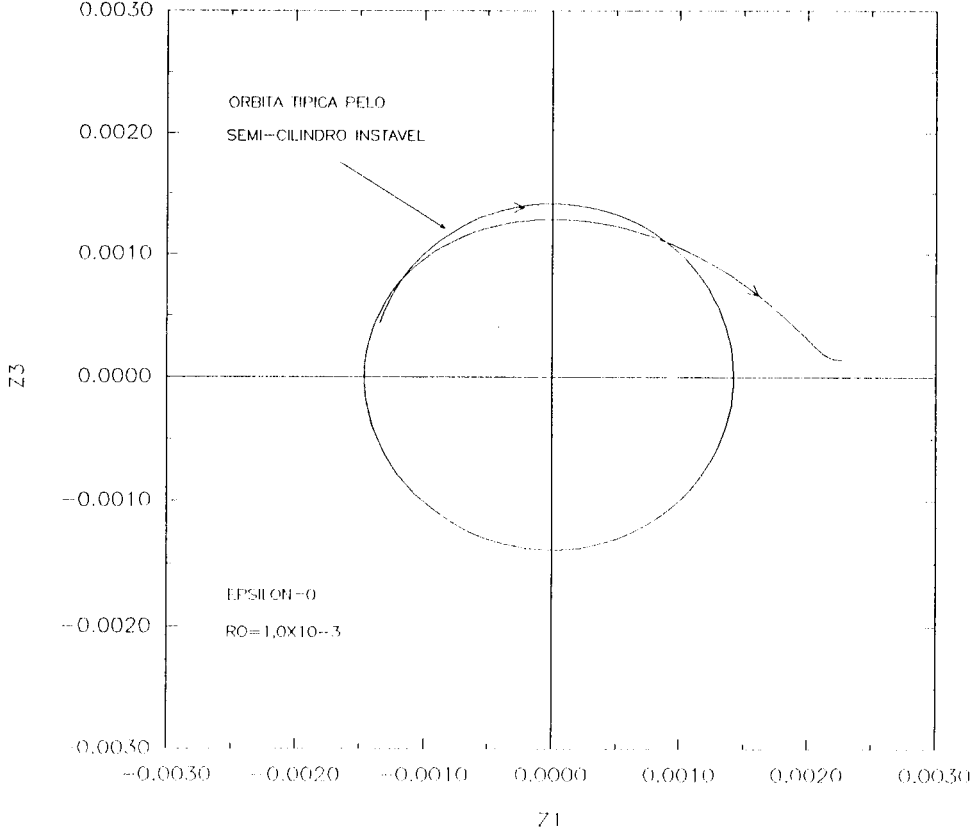


Figura 4.22: Obtenção analítica pelo Primeiro Método (zeros de polinômios), da seção de Poincaré por $z_1 = 0$, do cilindro para o qual $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$. As intersecções da figura consistem de candidatas a órbitas periódicas e também revelam a existência das intersecções cilíndricas transversais.

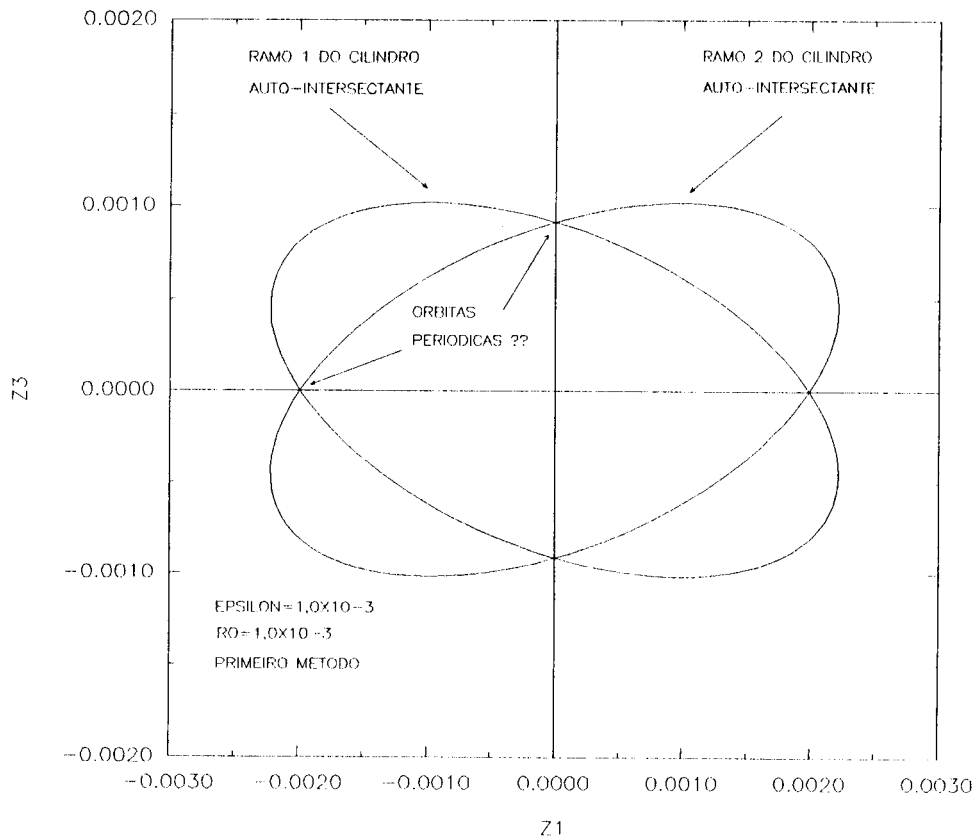


Figura 4.23: Obtenção analítica pelo Segundo Método (pelo fluxo normalizado), da seção de Poincaré por $z_4 = 0$, do cilindro para o qual $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$. Do mesmo modo, as intersecções da figura consistem de candidatas a órbitas periódicas e revelam a existência das intersecções cilíndricas transversais.

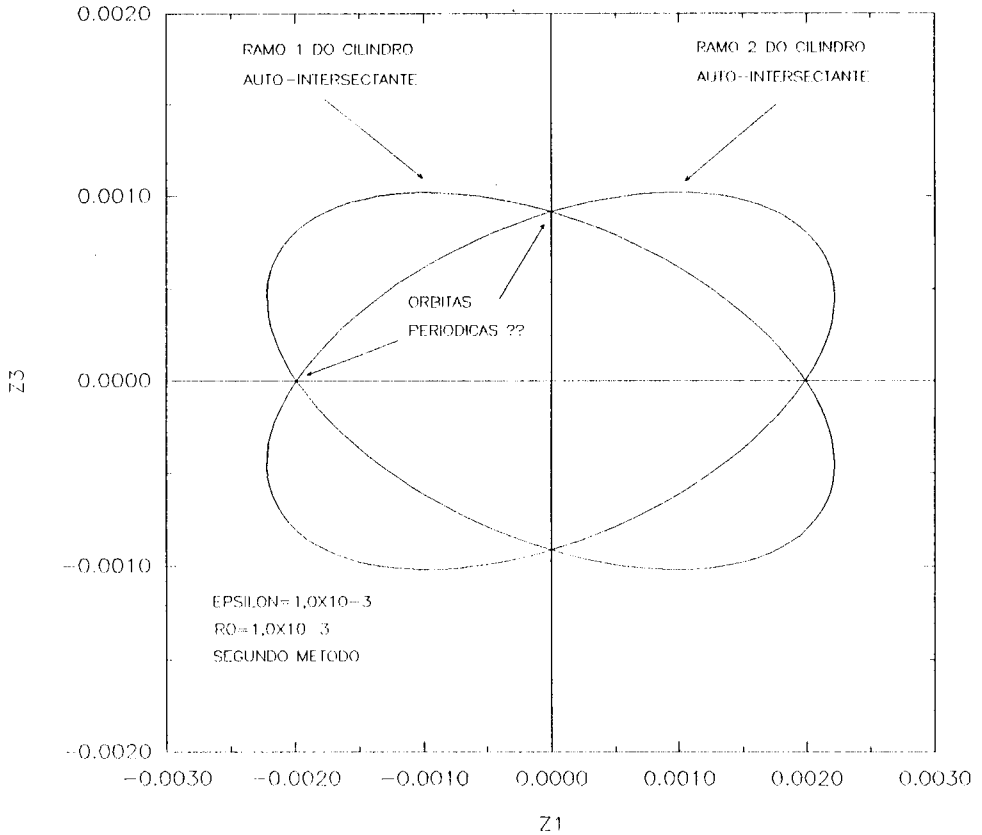


Figura 4.24: Superposição das Figuras 4.22 e 4.23, para efeito de comparação dos dois métodos analíticos, para $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$. Também nesse caso ($\epsilon \neq 0$) a concordância é quase completa, o que mais uma vez confirma a consistência numérica da obtenção dos coeficientes gerais $X(i, \underline{n})$ e $K(2\underline{m})$.

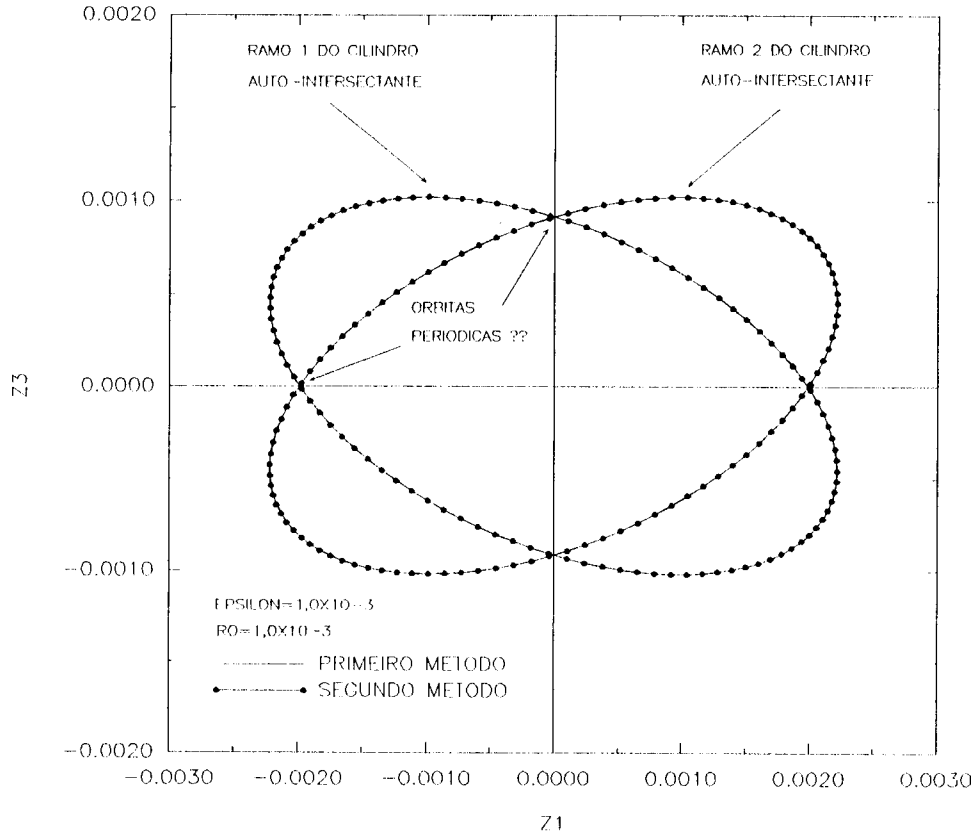


Figura 4.25: Obtenção semi-analítica precisa pelo Terceiro Método (pelo fluxo exato), da seção de Poincaré por $z_4 = 0$, do cilindro para o qual $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$.

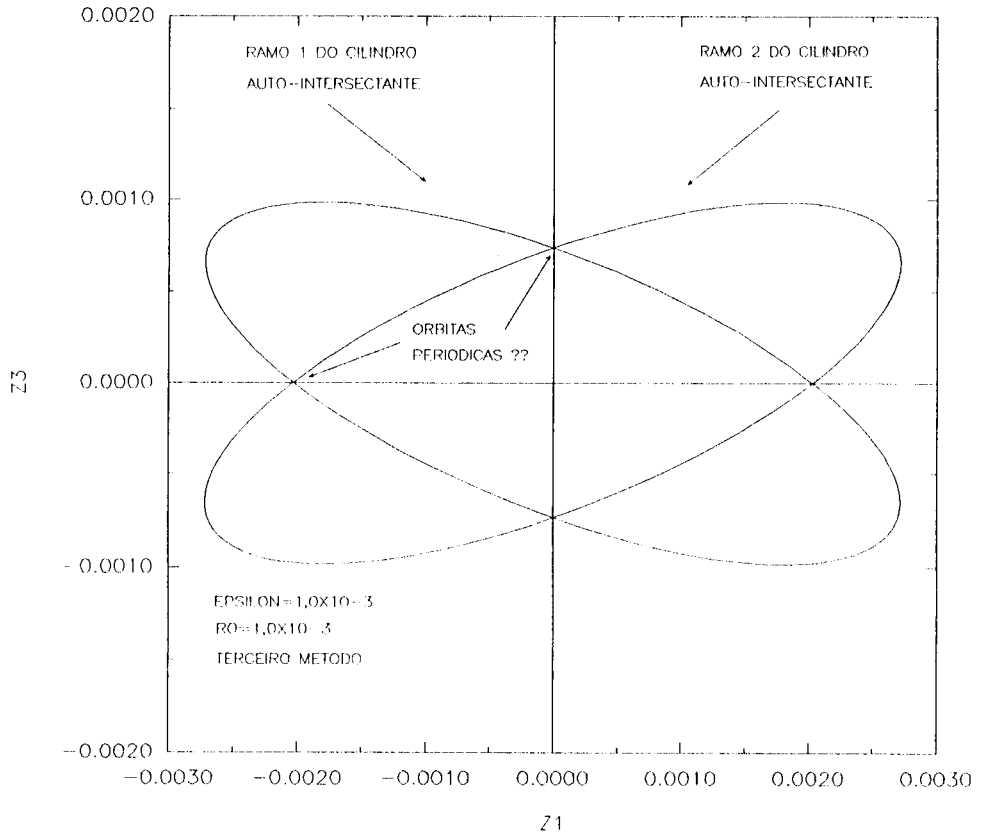


Figura 4.26: Superposição das Figuras 4.22 e 4.25, para comparação do Primeiro (analítico) e do Terceiro (semi-analítico) métodos. Aqui, $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$ e confirmamos os bons resultados dos métodos analíticos na descrição qualitativa da dinâmica caótica, além da perspectiva de bons resultados numéricos destes para ordens > 16 da forma normal.

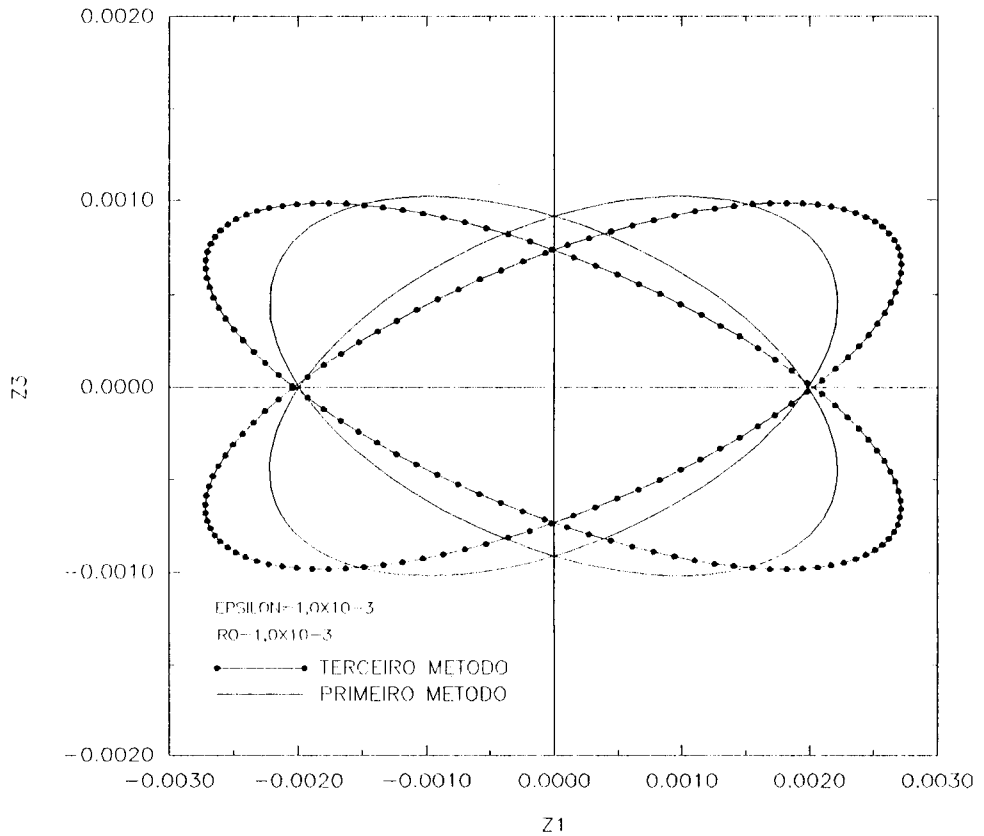


Figura 4.27: Evolução no plano (z_2, z_4) de uma órbita típica sobre o cilindro com $\rho = \epsilon = 1,0 \times 10^{-3}$, desde uma condição inicial em $z_2 < 0$ até atingir o plano $z_4 = 0$ via uma integração em ambos os sentidos no tempo.

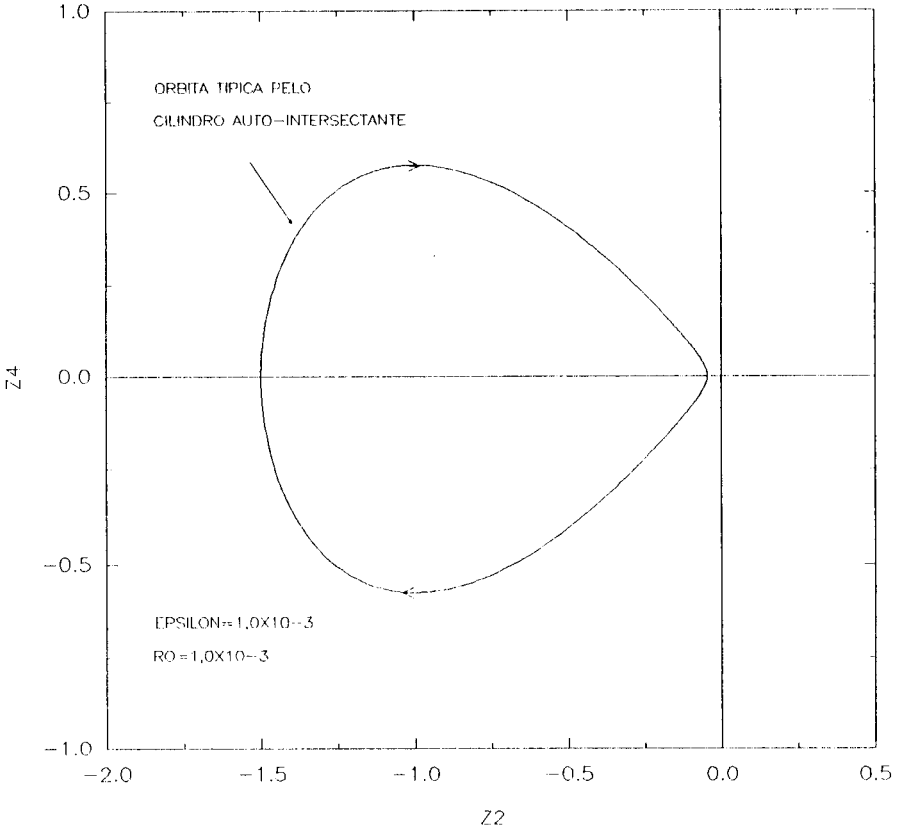


Figura 4.28: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita mostrada na Figura 4.27.

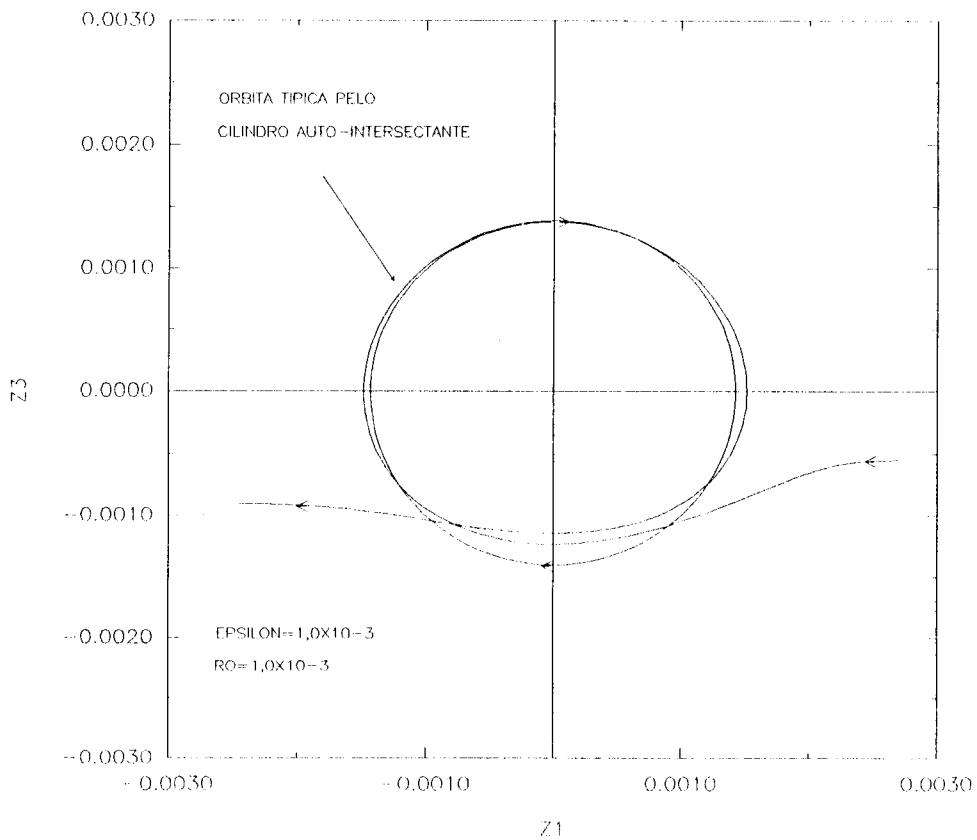


Figura 4.29: Evolução no plano (z_2, z_4) da órbita homoclínica ($\epsilon = 0$) indicada no texto, para a qual $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$. O tempo de propagação total utilizado foi de 83,795, muito maior que o período $T = 3,628$ da órbita τ correspondente. Sua energia, idêntica à de τ , é $E = 0,166678375339$.

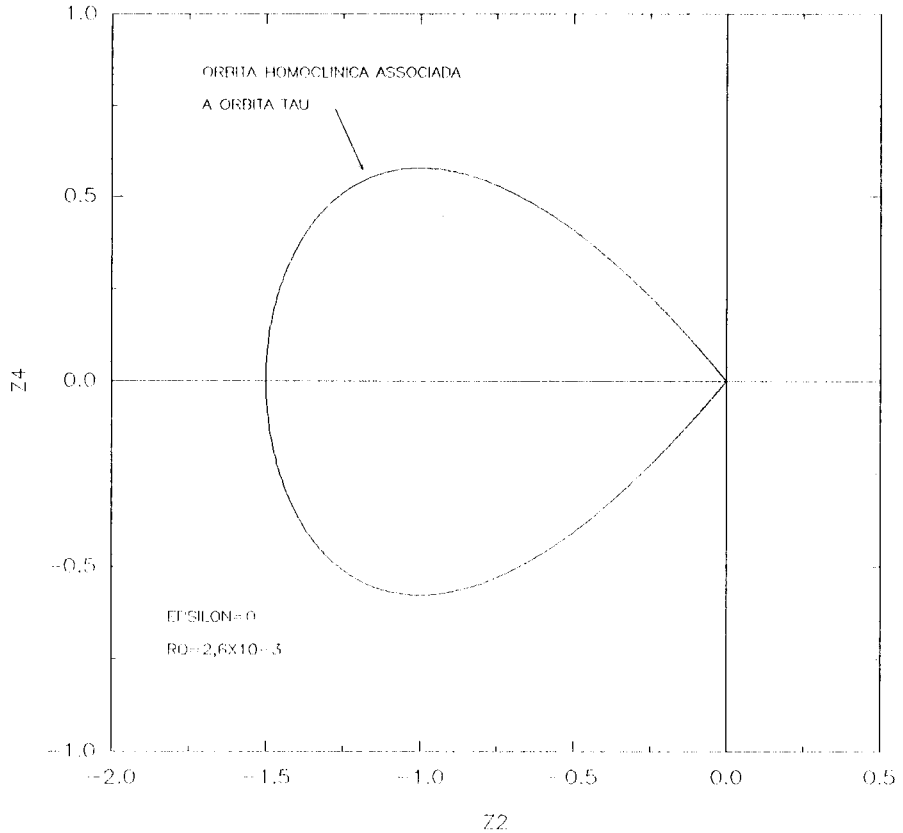


Figura 4.30: Ampliação em torno da origem, no plano (z_2, z_4) , da Figura 4.29, revelando a existência de uma micro-estrutura para a órbita homoclínica nessa região.

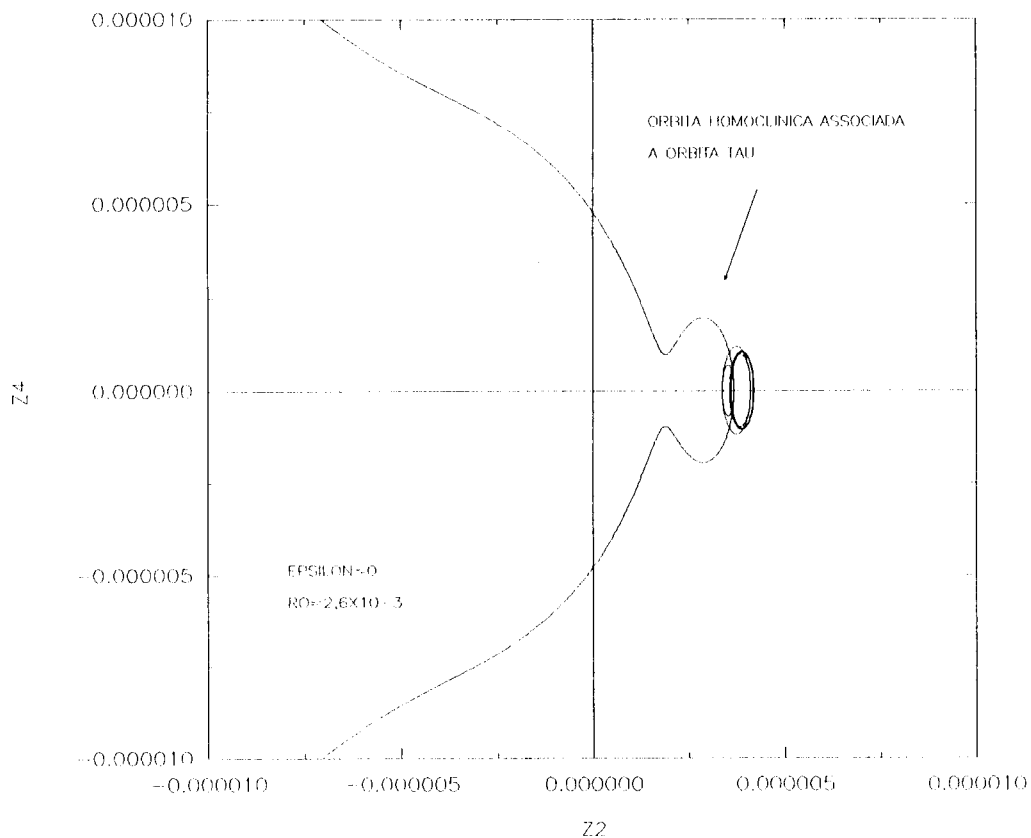


Figura 4.31: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita homoclínica mostrada na Figura 4.29.

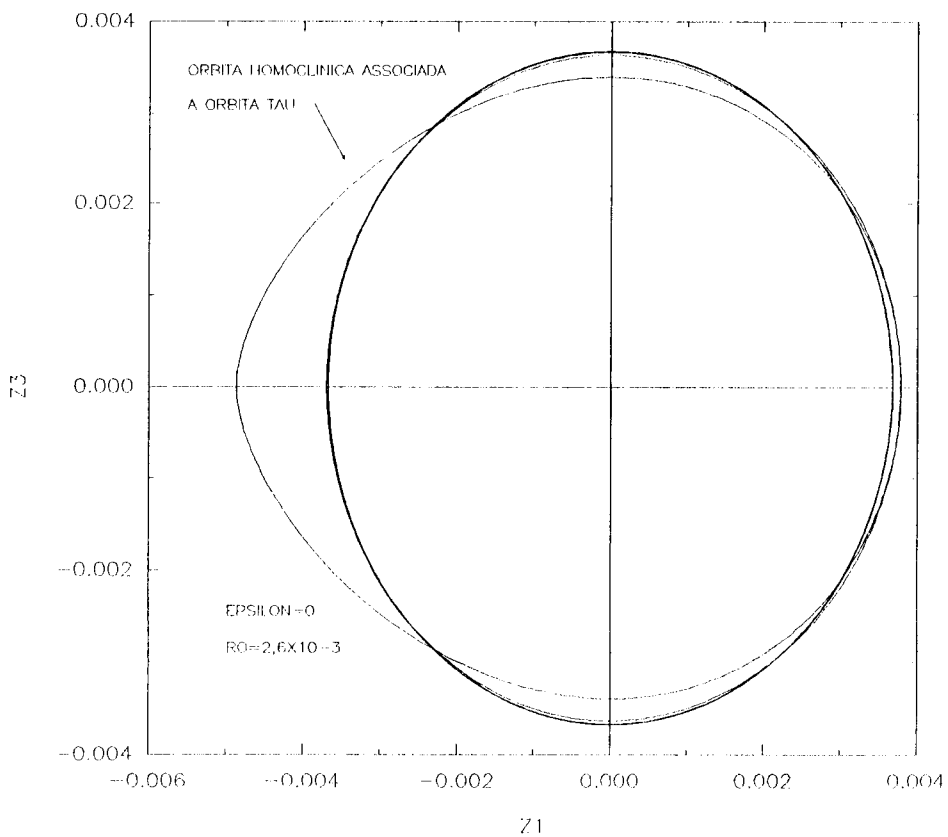


Figura 4.32: Idem à Figura 4.30 no plano (z_2, z_4) onde, além da órbita homoclínica, agora se inclui, para comparação, a órbita periódica τ correspondente, para a qual ela tende para tempos $\rightarrow \pm\infty$.

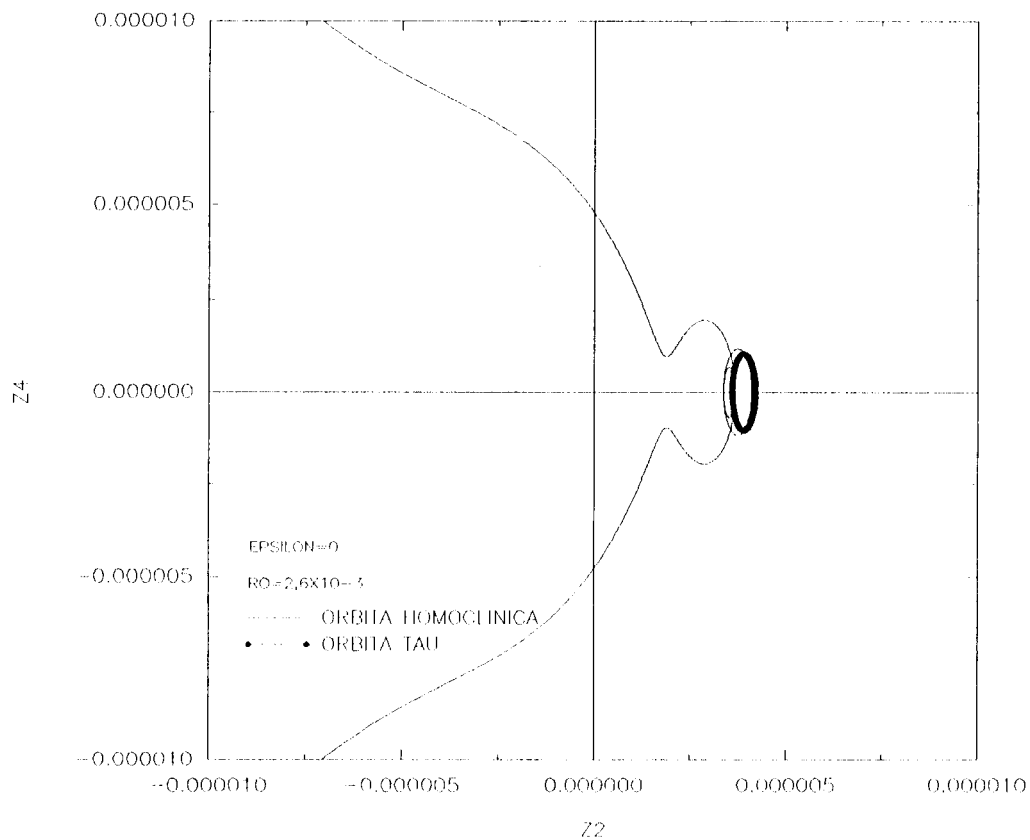


Figura 4.33: Superposição, no plano (z_1, z_3) , da órbita homoclínica e da órbita τ correspondente.

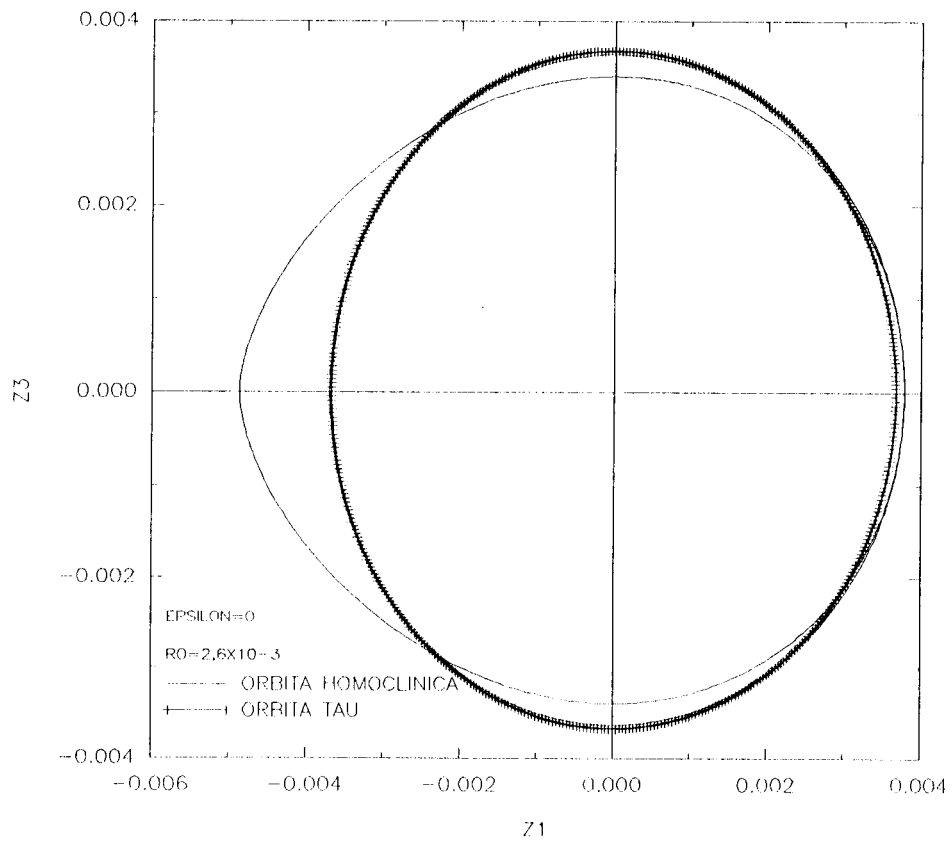


Figura 4.34: Evolução no plano (z_2, z_4) da órbita periódica para a qual $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$ e $\epsilon = 5,836022 \times 10^{-5}$. Seu período é $T = 14,026$ e sua energia é $E = 0,1666200153$.

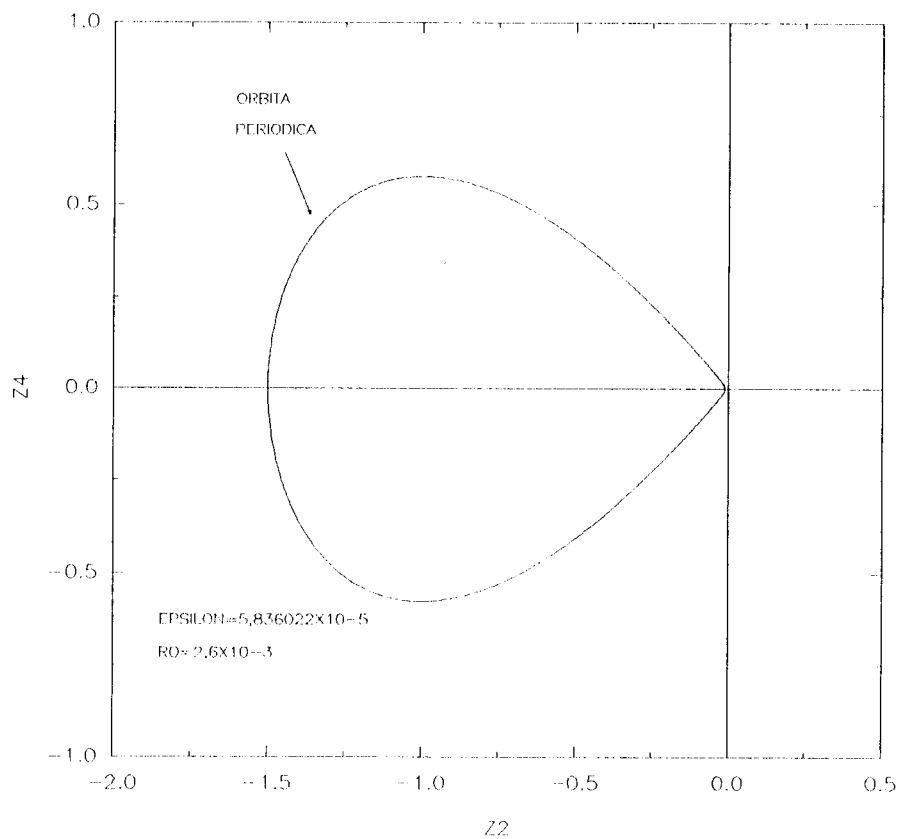


Figura 4.35: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita periódica mostrada na Figura 4.34.

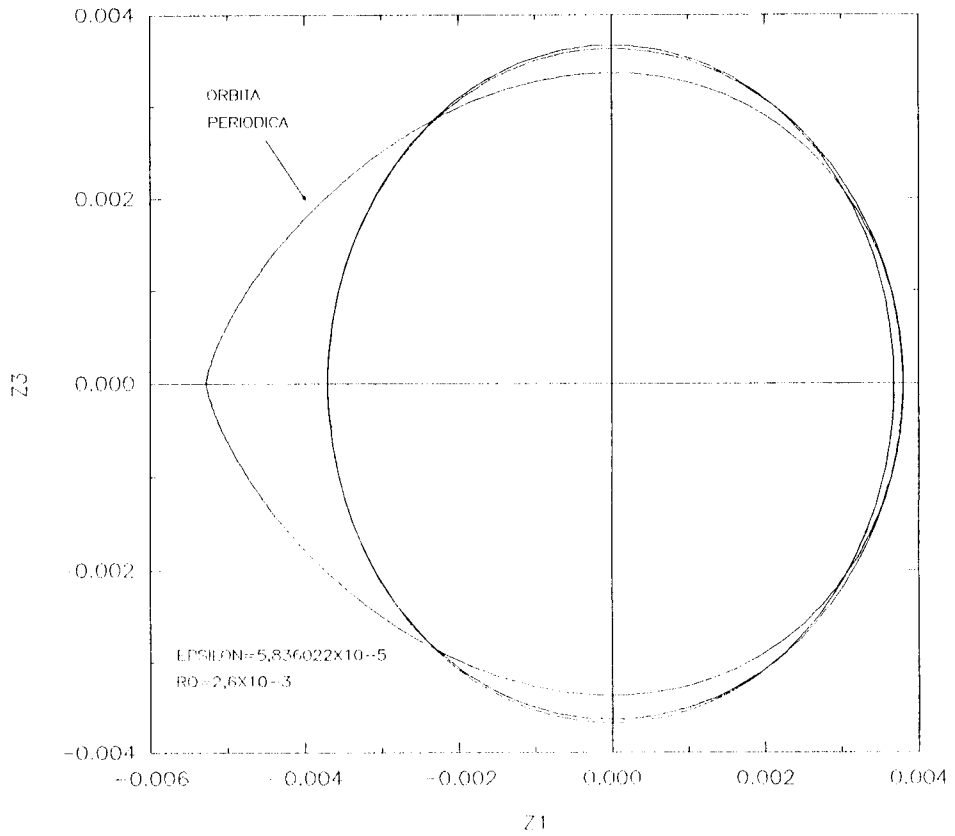


Figura 4.36: Evolução no plano (z_2, z_4) da órbita periódica para a qual $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$ e $\epsilon = 4,1216 \times 10^{-8}$. Seu período é $T = 21,381$ e sua energia é $E = 0,166678334123$.

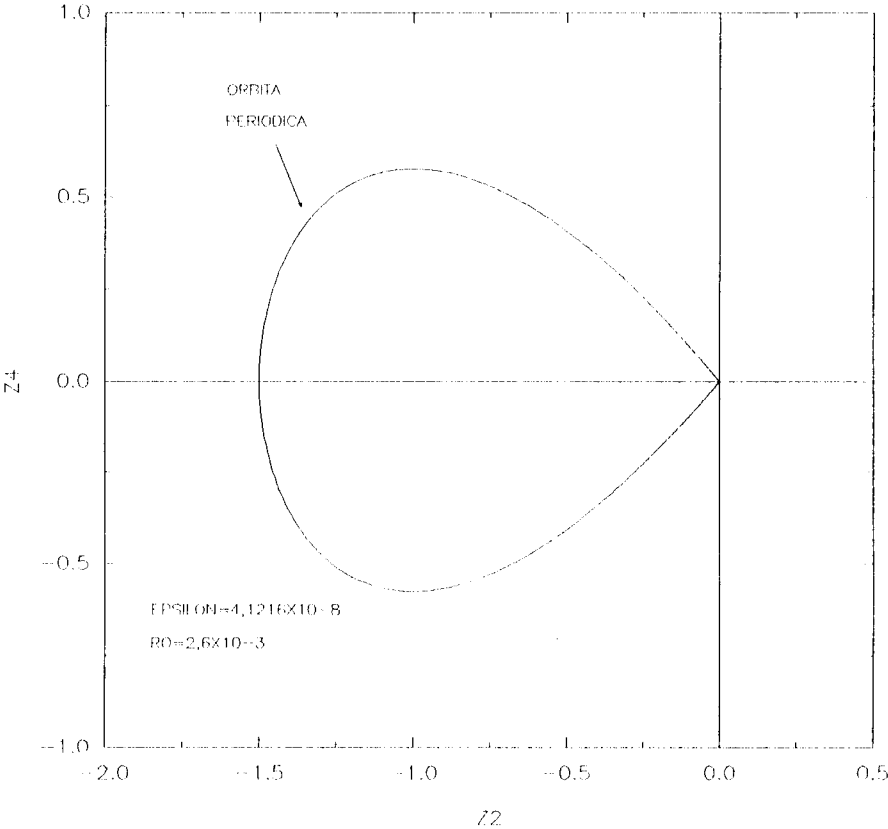


Figura 4.37: Ampliação em torno da origem, no plano (z_2, z_4) , da órbita periódica mostrada na Figura 4.36.

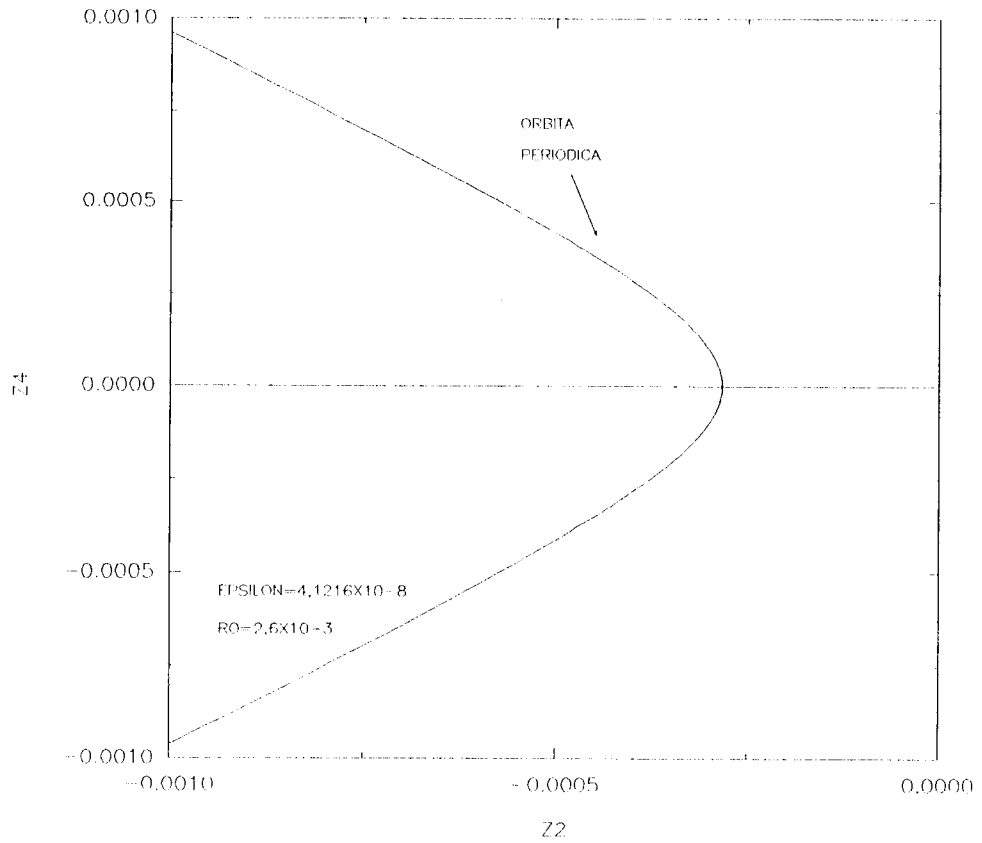


Figura 4.38: Evolução no plano (z_1, z_3) da órbita periódica mostrada na Figura 4.36.

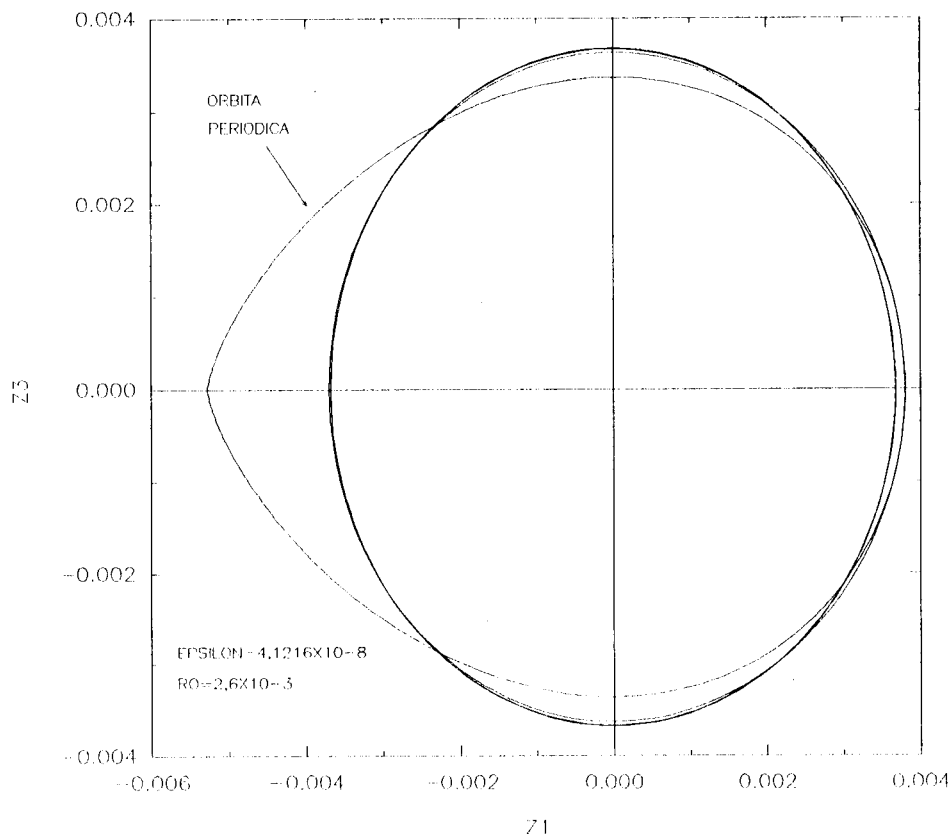


Figura 4.39: Evolução no plano (z_2, z_4) da órbita periódica para a qual $\rho = 2,6 \times 10^{-3}$ e $\epsilon = 2,9118 \times 10^{-11}$. Seu período é $T = 28,536$ e sua energia é $E = 0,16667835310$.

