Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Expansão de Campos Eletromagnéticos Arbitrários em Termos de Funções de Onda Vetoriais

Tese de Doutorado

Wendel Lopes Moreira
Orientador: Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pelo aluno Wendel Lopes Moreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de janeiro de 2011

Carlos Lenz Cesar.

Campinas, 21 de março de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW – UNICAMP

Moreira, Wendel Lopes
M813e Expansão de campos eletromagnéticos arbitrários em termos de funções de onda vetoriais / Wendel Lopes Moreira. – Campinas, SP:[s.n], 2010.

Orientador: Carlos Lenz Cesar.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Expansão em multipolos. 2. Expansão em ondas parciais. 3. Expansão em funções de onda vetoriais esféricas. 4. Mie, Teoria de. 5. Mie, Espalhamento de. I. Cesar, Carlos Lenz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Expansion of arbitrary electromagnetic fields in terms of vector spherical wave functions
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
1. Multipole expansion
2. Partial wave expansion
3. Spherical vector wave expansion
4. Mie theory
5. Mie scattering
- **Área de Concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca Examinadora:**
Prof. Carlos Lenz Cesar
Prof. Antonio Vidiella Barranco
Prof. Gilberto Fernandes de Sá
Prof. José Antonio Roversi
Prof. Josué Mendes Filho
- **Data da Defesa: 12-11-2010**
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **WENDEL LOPES MOREIRA – RA982297,** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 12/11/2010.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Josué Mendes Filho – DF/UFC

Prof. Dr. Gilberto Fernandes de Sá – DQF/UFPE

A Maria Eduarda e Maria Luiza. . .

Agradecimentos

ao Professor Carlos Lenz Cesar pela oportunidade e confiança;

à Aline pelo apoio incondicional;

ao CNPq, pelo suporte financeiro

ao Adriano e à Petrobras pelo apoio

e aos muitos amigos aos quais pedi favores...

.

E aquilo que nesse momento se revelará aos povos
Surpreenderá a todos, não por ser exótico
Mas pelo fato de poder ter sempre estado oculto
Quando terá sido o óbvio

Caetano Veloso - Um Índio

Resumo

Desde 1908, quando Mie apresentou expressões analíticas para os campos espalhados por uma partícula esférica sob incidência de uma onda eletromagnética plana, generalizações para esta expansão têm se mostrado incompletas. Isto se deve à presença de certos termos com dependência radial nos coeficientes de forma do feixe quando expandido em termos de funções de onda esféricas vetoriais. Aqui mostramos pela primeira como cancelar estes termos, permitindo expressões analíticas para os coeficientes para um campo eletromagnético completamente arbitrário. Damos também vários exemplos deste novo método, que também é muito apropriado para cálculos numéricos. Obtemos deste modo, expressões analíticas para feixes de Bessel e para os modos de guias de onda metálicos retangulares e cilíndricos. Estes resultados são extremamente relevantes para o incremento na velocidade de cálculo das forças de radiação atuando sobre uma partícula esférica, colocada em um campo eletromagnético arbitrário, com por exemplo, em pinças ópticas.

Abstract

Since 1908, when Mie reported analytical expressions for the fields scattered by a spherical particle upon incidence of an electromagnetic plane-wave, generalizing his analysis to the case of an arbitrary incident wave has proved elusive. This is due to the presence of certain radially-dependent terms in the equation for the beam-shape coefficients of the expansion of the electromagnetic fields in terms of vector spherical wave functions. Here we show for the first time how these terms can be canceled out, allowing analytical expressions for the beam shape coefficients to be found for a completely arbitrary incident field. We give several examples of how this new method, which is well suited to numerical calculation, can be used. Analytical expressions are found for Bessel beams and the modes of rectangular and cylindrical metallic waveguides. The results are highly relevant for speeding up calculation of the radiation forces acting on spherical particles placed in an arbitrary electromagnetic field, such as in optical tweezers.

Sumário

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A cor azul do céu representou um desafio não resolvido mesmo pelas mentes mais brilhantes por muitos séculos até a teoria do espalhamento de Rayleigh em 1871, que mostrou a dependência com r^6/λ^4. Essa teoria, entretanto, só era válida para partículas muito pequenas comparadas ao comprimentos de onda da luz espalhada $r/\lambda << 1$ – pela qual é conhecida hoje como regime de espalhamento de Rayleigh – e para o caso de partículas muito maiores do que o comprimento de onda $r/\lambda >> 1$ – conhecida como o regime da óptica geométrica, visto que pode ser explicada pela lei de refração de Snell de 1621. O que faltava era uma teoria mais geral do espalhamento por partículas esféricas de qualquer tamanho, da qual os dois regimes, de Rayleigh e da óptica geométrica, fossem obtidos como dois casos limites de r/λ.

O desenvolvimento moderno dessa teoria coube ao físico alemão Gustav Mie em 1908, em seus esforços para entender as várias cores na absorção e espalhamento por partículas coloidais de ouro suspensas em água. O nome de Lorenz foi incorporado na teoria a partir da década de 1980 (quando passa a se chamar Teoria de Lorenz-Mie) em reconhecimento pelo trabalho publicado em 1890 em que ele resolve o problema do espalhamento por esferas dielétricas, chegando até a relação de Rayleigh r^6/λ^4 no limite de pequenas partículas[1]. Esse trabalho foi largamente ignorado porque foi publicado em dinamarquês e porque não se baseou na teoria eletromagnética de Maxwell já desenvolvida desde 1864[2]. Os trabalhos de Debye sobre a pressão de radiação exercida sobre uma pequena partícula no espaço de 1909 chegaram a sugerir a mudança do título da teoria do espalhamento por microesferas para Teoria de Lorenz-Mie-Debye, mas sem grande aceitação por parte da comunidade envolvida. A Teoria de Lorenz-Mie, entretanto, só se aplica ao problema eletromagnético do espalhamento de ondas planas. Ela precisou ser generalizada para o caso do espalhamento de feixes focalizados, principalmente após o aparecimento dos lasers, quando foi finalmente denominada Teoria Generalizada de Lorenz-Mie ("*Generalized Lorenz-Mie Theory*" – GLMT). Gustav Mie, em seu famoso artigo de 1908[3], usou funções de onda esféricas vetoriais ("*vector spherical wave functions*" – VSWF), também chamada de expansão em ondas parciais (“*partial wave expansion*” – PWE), de uma onda plana linear polarizada para generalizar as teorias de espalhamento para partículas esféricas de qualquer tamanho, da onda plana ao regime de Rayleigh, e assim foi capaz de explicar muitos fenômenos, por exemplo em física atmosférica. Ele obteve expressões analíticas para os coeficientes da expansão baseado em identidades matemáticas especiais relativas a ondas planas. Esta expansão foi necessária para aplicar as condições de contorno à interface esférica. Desde então, com o surgimento dos lasers e dos guias de onda ópticos, a diversidade e complexidade dos possíveis campos incidentes se tornou enorme de modo que a restrição a uma onda plana se tornou irrealista.

A maior dificuldade matemática da teoria geral de Lorenz-Mie advém da expansão em ondas parciais dos feixes incidentes, visto que até hoje não se conhecia um método eficaz de cálculo dos coeficientes de expansão dos feixes. Como este problema foi inicialmente proposto para resolver a questão do espalhamento eletromagnético por esferas, as funções-base ou ondas parciais devem ter simetria esférica, e são dadas em função da solução da equação de Helmholtz em coordenadas esféricas, dada por $\phi_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$, em que $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ é um harmônico esférico e $j_l(kr)$ uma função esférica de Bessel, escolhida de acordo com as condições de contorno do problema (neste caso, a onda incidente sobre a esfera). A expansão em funções de onda esféricas vetoriais dos campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{H}$ é dada por[4]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{lm} \begin{bmatrix} a_{lm} \\ b_{lm} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{l(l+1)}}\phi_{lm}(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -b_{lm} \\ a_{lm} \end{bmatrix} \frac{-i\nabla\times\mathbf{L}}{k\sqrt{l(l+1)}}\phi_{lm}(\mathbf{r}), \tag{1.1}$$

em que $\mathbf{L}$ é o operador de momento angular. Como este operador não tem componentes na direção $\hat{\mathbf{r}}$, e os harmônicos esféricos formam uma base ortonormal e sabendo que $\mathbf{r}\cdot\nabla\times\mathbf{L} = iL^2$ obtém-se que

$$\begin{bmatrix} kr\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E} \\ kr\hat{\mathbf{r}}\cdot Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = E_0 \sum_{lm} \begin{bmatrix} -b_{lm} \\ a_{lm} \end{bmatrix} \sqrt{l(l+1)}j_l(kr)Y_{lm}. \tag{1.2}$$

Multiplicando a equação acima por Y_{pq}^* e integrando sobre o ângulo sólido e usando a ortogonalidade dos harmônicos esféricos obtemos

$$E_0 j_l(kr) \begin{bmatrix} b_{lm} \\ a_{lm} \end{bmatrix} = \frac{kr}{\sqrt{l(l+1)}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{r}}\cdot Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) acima é o cerne da expansão em ondas parciais, neste caso, funções de onda vetoriais esféricas e os coeficientes a_{lm} e b_{lm} são conhecidos como coeficientes de forma dos feixes (“Beam Shape Coefficients-- BSC). Entretanto esta equação nos mostra que o problema da expansão em ondas parciais é um problema no mínimo incompleto. Isto se deve ao fato do lado esquerdo conter um termo radial – $j_l(kr)$ – que deve se anular com a componente radial de $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$, o que a teoria não mostra. O pressuposto inicial é de que as quantidades a_{lm} e b_{lm} sejam constantes, o que implica que a equação (1.3) deve valer em todos os pontos do espaço. Ainda, para um caso hipotético de se calcular numericamente a_{lm} e b_{lm}, temos que escolher arbitrariamente um valor para r, baseado em algum critério desconhecido, e o fato de que a função esférica de Bessel possui várias raízes leva a singularidades no problema.

Mie utilizou algumas propriedades matemáticas das funções esféricas de Bessel e dos polinômios de Legendre para obter uma solução analítica para os coeficientes da expansão de uma onda plana, cujos campos eletromagnéticos são dados por: $\mathbf{E} = E_0 e^{ik_z z}\hat{\mathbf{x}}$ e $Z\mathbf{E} = E_0 e^{ik_z z}\hat{\mathbf{y}}$. Os livros clássicos de van de Hulst[5] e Bohren & Huffman[6] trazem o cálculo da expansão da onda plana, ao modo de Mie, que faremos a seguir. Estes autores utilizam funções especiais, com paridade, definidas como combinações lineares de harmônicos esféricos, definidos como*

$$Y_n^m = (-1)^m\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{1.4}$$

$$Y_n^{-m} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)e^{-im\phi}. \tag{1.5}$$

Deste modo, são definidas as funções

$$\psi_{enm} = P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi = (-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}\Big(Y_n^m + (-1)^m Y_n^{-m}\Big), \tag{1.6}$$

$$\psi_{onm} = P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi = -i(-i)^m\sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}\Big(Y_n^m - (-1)^m Y_n^{-m}\Big), \tag{1.7}$$

cuja característica principal é ter as mesmas propriedades de ortogonalidade dos harmônicos esféricos. Os subíndices e (*even* – par) e o (*odd* – ímpar) denotam a paridade das funções. Neste caso, o superíndice varia na forma $0 \leq m \leq n$. Com isto, definem-se também os vetores harmônicos esféricos $\mathbf{M}$ em que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{enm} \\ \mathbf{M}_{onm} \end{bmatrix} = -iu_n(kr)\mathbf{L}\begin{bmatrix} \psi_{emn} \\ \psi_{omn} \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

em que $\mathbf{L}$ é o operador de momento angular. Deste modo, segundo a definição de operador de momento angular $\mathbf{L} = -i\mathbf{r}\times\nabla$, temos que $\mathbf{r}\cdot\mathbf{M} = 0$. Em princípio poderíamos utilizar qualquer

*Estas definições foram utilizadas na tese de doutorado da Adriana Fontes[7] e correspondem à notação utilizada nos livros de van de Hulst[5] e Bohren & Huffman[6] e só valem para este caso. Nesta tese entretanto, a convenção padrão é a mesma seguida pelos livros do Jackson[4] e do Arfken[8], mostradas nas equações (2.26) e (2.27), em que a fase de Condon-Shortley $(-1)^m$ aparece dentro da definição dos polinômios associados de Legendre.

uma das funções esféricas de Bessel, já que todas são soluções da parte radial da equação de Helmholtz. Entretanto, como estamos interessados no campo incidente que deve ser finito na origem, a solução que satisfaz este critério é $u_n(kr) = j_n(kr)$. Temos também os vetores harmônicos esféricos $\mathbf{N} = k^{-1}\nabla \times \mathbf{M}$ dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{enm} \\ \mathbf{N}_{onm} \end{bmatrix} = \frac{-i}{k}\nabla \times \begin{bmatrix} j_n(kr)\mathbf{L}\psi_{emn} \\ j_n(kr)\mathbf{L}\psi_{emn} \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Para encontrar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ vamos então expandí-los em termos dos vetores $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$, segundo a forma[†]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ iZ\mathbf{H} \end{bmatrix} = E_0 \sum_{p=e,o} \sum_{nm} \begin{bmatrix} A_{pnm} \\ B_{pnm} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{pmn} + \begin{bmatrix} B_{pnm} \\ A_{pnm} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{pmn}, \tag{1.10}$$

em que temos quatro constantes, duas de paridade par e e duas de paridade ímpar o. Para encontrarmos os coeficientes usaremos as relações de ortogonalidade dos harmônicos esféricos e as seguintes relações:

$$\frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} \mathbf{r}\cdot\mathbf{E} \\ i\mathbf{r}\cdot Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{onm} \\ A_{onm} \end{bmatrix} \mathbf{r}\cdot\mathbf{N}_{omn} + \begin{bmatrix} B_{enm} \\ A_{enm} \end{bmatrix} \mathbf{r}\cdot\mathbf{N}_{emn}, \tag{1.11}$$

que nos dão as quatro constantes referidas. Multiplicando ambas as equações acima por $\psi_{p'n'm'}$, $p' = o, e$, integrando no ângulo sólido e utilizando as definições de $\psi_{p'n'm'}$ e as propriedades de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, vamos obter

$$\begin{bmatrix} A_{onm} \\ B_{onm} \\ A_{enm} \\ B_{enm} \end{bmatrix} E_0 j_n(kr) = \frac{k}{2\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int d\Omega \begin{bmatrix} i\psi^*_{onm}\mathbf{r}\cdot Z\mathbf{H} \\ \psi^*_{onm}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} \\ i\psi^*_{enm}\mathbf{r}\cdot Z\mathbf{H} \\ \psi^*_{enm}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Por outro lado, temos que $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$, e, a partir da definição de $\mathbf{E} = E_0 e^{ik_z z}\hat{\mathbf{x}}$ e $Z\mathbf{E} = E_0 e^{ik_z z}\hat{\mathbf{y}}$, e o fato de que $z = r\cos\theta$, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}\cdot\mathbf{E} \\ \mathbf{r}\cdot Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} e^{ikr\cos\theta} r\sin\theta = E_0 \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial\theta} e^{ikr\cos\theta}. \tag{1.13}$$

[†]Sabendo que a impedância do meio é dada por $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ e o módulo do vetor de onda $k = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega$, eliminamos das expressões a permeabilidade magnética μ e a permissividade elétrica ε de modo a termos uma notação mais clara e eficiente, uma vez que sempre expressaremos o campo magnético em unidades de campo elétrico, ou seja, $Z\mathbf{H}$.

Substituindo (1.13) em (1.12) obtemos

$$\begin{bmatrix} A_{onm} \\ B_{onm} \\ A_{enm} \\ B_{enm} \end{bmatrix} j_n(kr) = \frac{i}{2\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int d\Omega \begin{bmatrix} i\psi^*_{onm}\sin\phi \\ \psi^*_{onm}\cos\phi \\ i\psi^*_{enm}\sin\phi \\ \psi^*_{enm}\cos\phi \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}e^{ikr\cos\theta}. \quad (1.14)$$

Explicitando os termos da integral obtemos

$$\int d\Omega \begin{bmatrix} \psi^*_{onm}\sin\phi \\ \psi^*_{onm}\cos\phi \\ \psi^*_{enm}\sin\phi \\ \psi^*_{enm}\cos\phi \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}e^{ikr\cos\theta} = \int d\theta \ \sin\theta P_n^m(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}e^{ikr\cos\theta}\int d\phi \begin{bmatrix} \sin m\phi\sin\phi \\ \sin m\phi\cos\phi \\ \cos m\phi\sin\phi \\ \cos m\phi\cos\phi \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Calculando as integrais em $d\phi$ obtemos para $\int_0^{2\pi} d\phi \ \sin m\phi\sin\phi = \delta_{m,1}\pi$, $\int_0^{2\pi} d\phi \ \sin m\phi\cos\phi = 0$, $\int_0^{2\pi} d\phi \ \cos m\phi\sin\phi = 0$ e $\int_0^{2\pi} d\phi \ \cos m\phi\cos\phi = \delta_{m,1}\pi$. Deste modo temos

$$\begin{bmatrix} A_{on1} \\ B_{on1} \\ A_{en1} \\ B_{en1} \end{bmatrix} j_n(kr) = \frac{i}{2}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\int d\theta \ \sin\theta P_n^1(\cos\theta) \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}e^{ikr\cos\theta}. \quad (1.16)$$

Obtivemos de antemão dois termos iguais a zero, B_{on1} e A_{en1}, e também obtivemos a paridade das ondas parciais, devido aos outros dois termos possuírem paridade definida. Integrando por partes, e deixando apenas os termos desconhecidos temos

$$\begin{bmatrix} A_{on1} \\ B_{en1} \end{bmatrix} j_n(kr) = \frac{i}{2}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\int d\theta \ e^{ikr\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta P_n^1(\cos\theta)\Big). \quad (1.17)$$

Agora vamos usar a definição dos polinômios associados de Legendre

$$P_n^1(\cos\theta) = -\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta), \quad (1.18)$$

a equação diferencial dos polinômios de Legendre

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)\right) = -n(n+1)\sin\theta P_n(\cos\theta), \quad (1.19)$$

e ainda observando que $(n-1)!/(n+1)! = 1/n(n+1)$ e multiplicando os números complexos, obtemos finalmente

$$\left[\begin{array}{c} A_{on1} \\ B_{en1} \end{array}\right] j_n(kr) = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right]\int d\theta\ e^{ikr\cos\theta}\sin\theta P_n(\cos\theta). \tag{1.20}$$

A última integral pode ser resolvida por[8]

$$\int d\theta\ e^{ikr\cos\theta}\sin\theta P_n(\cos\theta) = 2i^n j_n(kr), \tag{1.21}$$

conhecida como generalização de Gegenbauer para a integral de Poisson[9]. Assim finalmente obtemos

$$\left[\begin{array}{c} A_{on1} \\ B_{en1} \end{array}\right] = i^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right], \tag{1.22}$$

de modo que a expansão da onda plana é totalmente conhecida.

Além da onda plana, alguns casos isolados foram obtidos[10,11], mas não havia até agora uma demonstração de que é possível se encontrar soluções (quando não analíticas, numéricas) para quaisquer casos devido ao fato de haver uma dependência radial nas expressões dos coeficientes da expansão. Diferentes experimentos, indo da levitação e aprisionamento de partículas[12,13], às cavidades de ultra alto Q usados em experimentos de eletrodinâmica quântica (QED)[14,15], utilizam diferentes feixes. Por exemplo, em pinças ópticas e microscopia confocal são usados feixes de abertura numérica muito alta[16–18], campos evanescentes em microscopia de campo próximo[19,20], e os modos de uma fibra óptica são empregados para acoplar luz aos modos de galeria de microcavidades esféricas[21]. Forças ópticas, absorção, espalhamento Raman e fluorescências podem ser fortemente amplificadas usando-se cavidades esféricas e ressonâncias de Mie[22–25]. Feixes de Laguerre-Gauss, Hermite-Gauss e de Bessel[26,27], e os campos eletromagnéticos dentro de fibras de cristal fotônico[28,29], são usados para aprisionar e transportar partículas. O entendimento de todos estes fenômenos requer um conhecimento preciso dos coeficientes das expansões em funções de onda esféricas vetoriais do feixe incidente. A teoria generalizada de Lorenz-Mie foi desenvolvida para lidar com os mais variados feixes além das clássicas ondas planas, e os coeficientes destas expansões são conhecidos com coeficientes de forma dos feixes ("*beam shape coefficients*" – BSC)[30,31]. Além disso, devido ao fato destas funções de onda formarem uma base ortonormal completa, elas podem ser utilizadas para o estudo do espalhamento e de forças[32] em partículas não esféricas, e são o ponto de partida dos poderosos métodos "T-matrix"[33].

O cálculo dos coeficientes de forma dos feixes para um feixe arbitrário tem sido uma tarefa complicada, requerendo um esforço significativo. Ainda mais que há um problema fundamental com estes cálculos: a expansão de uma função em alguma base é completa somente quando os coeficientes da expansão podem ser escritos em termos de produtos escalares, ou integrais, com valores numéricos definidos. Esta tarefa de fato nunca foi realizada para as funções de onda esféricas vetoriais de um feixe arbitrário, porque a integral sobre o ângulo sólido não elimina explicitamente a dependência radial. Até onde sabemos, a literatura nos deve uma prova matemática de que a função que aparece após a integração sobre o ângulo sólido para qualquer tipo de feixe que satisfaça as equações de Maxwell cancela a função esférica de Bessel que aparece do outro lado da equação dos coeficientes de forma. Se isto não for verdade, então os coeficientes de forma não podem ser constantes independentes da coordenada radial, como requer uma expansão de sucesso.

Esta independência radial dos coeficientes de forma foram mostradas para o caso de ondas planas e para um feixe gaussiano focalizado com alta abertura numérica[10]. Trabalhando com um modo eletromagnético dentro de um guia de onda cilíndrico, também obtivemos com sucesso expressões analíticas para os fatores de forma dependentes apenas da posição do sistema de referência. Isto nos levou a uma pergunta fundamental: seria possível provar que a função esférica de Bessel emergiria naturalmente da integral no ângulo sólido para qualquer tipo de feixe? O que mostraremos ao longo deste trabalho é que isto é possível. Mostraremos como este método pode ser usado para calcular os coeficientes de forma para ondas planas, modos de guias de onda cilíndrico e retangular e para feixes de Bessel.

Este trabalho decorre diretamente dos trabalhos anteriores em pinças ópticas, principalmente as teses de Doutorado de Adriana Fontes[7] e de Antônio Neves[34]. No caso das pinças ópticas o tamanho das partículas é usualmente da mesma ordem ou maior do que o comprimento de onda da luz, ou seja, diretamente no regime de Mie. Podemos, por meio do Tensor de *Stress* de Maxwell, calcular a força que atua sobre a partícula em função dos coeficientes de forma dos feixes. Entretanto, a expressão da força depende diretamente dos coeficientes de forma dos feixes incidentes. Em seu trabalho de doutorado, Antônio Neves conseguiu calcular expressões semi-analíticas para os coeficientes de forma de um feixe focalizado por um objetiva de abertura numérica muito alta. Como este feixe depende da abertura da objetiva, os coeficientes dependem de uma integral sobre as coordenadas da abertura da objetiva, e que, neste caso, é numérica. Entretanto o trabalho do Antônio demonstrou que é possível eliminar a dependência radial dos fatores de forma. O resultado do Antônio foi possível graças a uma identidade pouco conhecida, que o Antônio resolveu por meios próprios:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta P_p^q(\cos\theta) J_p(kr\sin\xi\sin\theta) e^{ikr\cos\xi\cos\theta} = 2i^{p-q} P_p^q(\cos\xi) j_p(kr). \tag{1.23}$$

O Professor Lenz, usando a equação (1.3), conseguiu calcular os coeficientes da expansão dos campos no interior de um guia de onda cilíndrico, novamente incorrendo na integral (1.23), obtendo assim coeficientes totalmente analíticos. O próximo passo foi tentar encontrar os coeficientes da expansão para os campos no interior de guias de onda retangulares. Novamente incorremos na integral (1.23), e obtivemos também coeficientes totalmente analíticos. Entretanto, as características dos guias de onda retangulares nos levaram a pensar em calcular os coeficientes no espaço de Fourier. Com isto, obtivemos uma expressão para o cálculo dos coeficientes de qualquer campo em um guia de onda de qualquer forma (expressão geral). Do mesmo modo que obtivemos uma expressão geral para os guias de onda, fomos em busca da expressão geral para campos quaisquer, chegando em termos dependentes do operador de momento angular nas coordenadas do espaço de Fourier. Demonstramos em seguida que o operador momento angular nas coordenadas do espaço de Fourier está relacionado à transformada de Fourier do próprio operador momento angular nas coordenadas do espaço direto, na forma

$$\mathcal{F}\Big\{\mathbf{L}\psi(\mathbf{r})\Big\} = \mathcal{F}\Big\{\mathbf{L}\Big\}\mathcal{F}\Big\{\psi(\mathbf{r})\Big\} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k}), \tag{1.24}$$

em que $\mathbf{L}$ é o operador momento angular no espaço direto e $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ é o operador momento angular no espaço recíproco. Deste modo, reescrevemos todo o problema partindo do começo, ou seja, da própria equação da expansão, e refizemos tudo no espaço de Fourier. Dessa forma a independência radial surgiu naturalmente.

O Capítulo 2 mostra o problema da expansão em funções de onda vetoriais, desde as equações de Maxwell até a antiga e tradicional forma de expressão dos coeficientes, com o problema da dependência radial. Apresentamos o formalismo dos Multipolos e Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen, as principais definições matemáticas. No Capítulo 3 colocamos o cálculo dos coeficientes pelo que chamamos de método da "Força Bruta", que foi como primeiramente obtivemos a nova expressão para os coeficientes de forma. Conhecida a nova expressão para os coeficientes, refizemos os cálculos de um modo mais elegante. Este modo elegante é mostrado no Capítulo 4, que constitui o principal capítulo desta tese. Obtida a expressão para os coeficientes com independência radial, tecemos algumas considerações sobre a expansão e recalculamos a expressão para a onda plana. Nos capítulos seguintes, partimos para aplicações do resultado obtido. No Capítulo 5 mostramos as soluções para os campos no interior de guias de onda, tanto para o caso geral, quanto para dois casos específicos, o dos guias de onda cilíndricos e o dos guias de onda retangulares. No Capítulo 6 tratamos dos feixes de Davis, obtidos a partir do potencial vetor e do *gauge* de Lorenz, e calculamos os coeficientes para o feixe de Bessel. Estes três capítulos são os resultados que obtivemos ao longo do trabalho de Doutorado. No Capítulo 7 mostramos a Teoria de Mie, importantíssima para toda a área de espalhamento e também no cálculo da Força Óptica.

Capítulo 2

Expansão em funções de onda vetoriais

Neste capítulo trataremos da expansão em ondas parciais vetoriais esféricas, que é a base da Teoria Generalizada de Lorenz-Mie, que é uma técnica ligada ao espalhamento. Entretanto pode-se utilizar expansão em ondas parciais vetoriais esféricas em qualquer problema que lide com simetria esférica, independende de haver uma partícula espalhadora ou não. Iniciaremos mostrando as soluções das Equações de Maxwell e das equações de onda vetoriais pelos Multipolos de Hansen e também apresentaremos os harmônicos esféricos vetorias (Harmônicos de Hansen) e mostraremos a questão da componente radial, deixando o terreno preparado para a solução, que mostraremos nos Capítulos 3 e 4.

2.1 Equações de Maxwell e de onda

Os campos eletromagnéticos devem satisfazer em todos os pontos as equações de Maxwell harmônicas[4]:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, && (2.1)\\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, && (2.2)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= ikZ\mathbf{H}, && (2.3)\\
\nabla \times Z\mathbf{H} &= -ik\mathbf{E}, && (2.4)
\end{aligned}$$

em que $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ é a impedância do meio (portanto ε e μ devem ser contínuos) e k é o módulo do vetor de onda. Os vetores $\mathbf{E}$ e $Z\mathbf{H}$ possuem a mesma dimensão de campo elétrico e devem ser tratados do mesmo modo. Dado um deles o outro é obtido através do rotacional

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ Z\mathbf{H} \end{bmatrix} = -\frac{i}{k}\nabla \times \begin{bmatrix} -Z\mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}. \qquad (2.5)$$

Aplicando o rotacional nas equações (2.3) e (2.4) temos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = ik\nabla \times Z\mathbf{H} = k^2\mathbf{E}, \tag{2.6}$$
$$\nabla \times \nabla \times Z\mathbf{H} = -ik\nabla \times \mathbf{E} = k^2 Z\mathbf{H}, \tag{2.7}$$

e sabendo que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \tag{2.8}$$

obtemos

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \tag{2.9}$$
$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0, \tag{2.10}$$

que nos diz que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ satisfazem a equação de onda vetorial. Logo, qualquer campo vetorial com divergência nula que satisfaz a equação de onda vetorial será um campo eletromagnético admissível.

2.2 Solução vetorial da equação de onda

Supondo que conheçamos a solução escalar ψ da equação de onda, podemos escrever a equação de onda como um operador $\mathbb{W}$,

$$\mathbb{W} = \nabla^2 + k^2, \tag{2.11}$$

de modo que $\mathbb{W}\psi = 0$. Entretanto estamos interessados em determinar a solução vetorial $\mathbb{W}\mathbf{F} = 0$. Suponhamos que descobrimos um operador vetorial $\mathbb{V}$ que comute com $\mathbb{W}$, ou seja, $[\mathbb{W}, \mathbb{V}] = \mathbb{W}\mathbb{V} - \mathbb{V}\mathbb{W} = 0$. Então podemos mostrar que $\mathbf{F} = \mathbb{V}\psi$ é uma solução da equação de onda vetorial, pois $\mathbb{W}\mathbf{F} = \mathbb{W}\mathbb{V}\psi = \mathbb{V}\mathbb{W}\psi = 0$. Neste caso se percebe que o problema de encontrar uma solução vetorial é reduzido ao problema de encontrar uma solução escalar, sobre a qual o operador $\mathbb{V}$ vai atuar. Entretanto não basta encontrar um operador vetorial que comute com o operador $\mathbb{W}$ da equação de onda, pois as ondas eletromagnéticas devem ser transversais, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Neste caso, buscamos operadores solenoidais que comutem com $\mathbb{W}$.

2.2.1 O operador de momento angular e suas propriedades

Conforme afirmamos na introdução o operador de momento angular $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ é um operador vetorial que comuta com o operador $\mathbb{W}$ da equação de onda e, portanto, é um bom candidato para gerar a solução vetorial da equação de onda dos campos eletromagnéticos. Para isso precisamos mostrar que $\mathbf{L}$ comuta com $\mathbb{W}$ e que $\nabla \cdot \mathbf{L} = 0$. Mais forte ainda, se $\mathbf{F} = \mathbf{L}\psi$ representa um dos campos eletromagnéticos o outro deve ser proporcional a $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{L}\psi$, o que significa que $\nabla \times \mathbf{L}\psi$ tem que ser, também, um operador vetorial solenoidal que comuta com $\mathbb{W}$. Matematicamente deve-se mostrar, portanto, que $[\mathbf{L}, \mathbb{W}]$ e $[\nabla \times \mathbf{L}, \mathbb{W}]$ ao mesmo tempo em que $\nabla \cdot \mathbf{L}$ e $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{L}$.

Utilizando a notação de Einstein de que índices repetidos significam somatória nos mesmos e o tensor ε_{ijk} antisimétrico de Levi-Civita* pode-se mostrar a comutatividade do operador momento angular fazendo

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{L} &= \partial_m\partial_m(-i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k) = -i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}\big(\partial_m\delta_{mj}\partial_k + \partial_m(x_j\partial_m\partial_k)\big) && (2.12)\\ &= -i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}(2\partial_j\partial_k + x_j\partial_k\partial_m\partial_m). && (2.13)\end{aligned}$$

Agora usamos o fato de que a contração de um tensor simétrico S_{ij} com um antisimétrico A_{ij}, $S_{ij}A_{ij} =$, é sempre nula† para anular o termo $\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k$ que contrai o tensor ε_{ijk} antisimétrico com o tensor $\partial_j\partial_k$ simétrico. Neste caso:

$$\nabla^2\mathbf{L} = -i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k\partial_m\partial_m = \mathbf{L}\nabla^2. \tag{2.14}$$

Para demonstrar a comutatividade de $\nabla \times \mathbf{L}$ podemos usar a propriedade‡

$$-i\nabla \times \mathbf{L} = 2\nabla - \mathbf{r}\nabla^2 + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla, \tag{2.15}$$

da qual se mostra que

$$\begin{aligned} i\nabla^2\nabla \times \mathbf{L} &= \partial_m\partial_m(2\hat{\mathbf{x}}_i\partial_i - \hat{\mathbf{x}}_i x_i\partial_j\partial_j + x_i\partial_i\hat{\mathbf{x}}_j\partial_j) && (2.16)\\ &= (2\hat{\mathbf{x}}_i\partial_i - \hat{\mathbf{x}}_i x_i\partial_j\partial_j + x_i\partial_i\hat{\mathbf{x}}_j\partial_j)\partial_m\partial_m + (-\hat{\mathbf{x}}_i\partial_i\partial_j\partial_j + \hat{\mathbf{x}}_i\partial_j\partial_j\partial_i) && (2.17)\\ &= i\nabla \times \mathbf{L}\nabla^2. && (2.18)\end{aligned}$$

---

*$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j2} & \delta_{k3} \\ \delta_{i1} & \delta_{j2} & \delta_{k3} \\ \delta_{i1} & \delta_{j2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$ em que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

†Podemos ver que $S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji}$ por simples troca de letras. Mas $S_{ij} = S_{ji}$ enquanto $A_{ij} = -A_{ji}$, logo $S_{ij}A_{ij} = -S_{ij}A_{ij} = 0$ ou $2S_{ij}A_{ij} = 0$. Esta propriedade será extensivamente utilizada nesta tese.

‡$-i\nabla \times \mathbf{L} = -i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j L_k = -\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j(x_l\partial_m) = -\hat{\mathbf{x}}_i(x_i\partial_j\partial_j + \delta_{ij}\partial_j - \delta_{jj}\partial_i - x_j\partial_j\partial_i) = 2\hat{\mathbf{x}}_i\partial_i - \hat{\mathbf{x}}_i x_i\partial_j\partial_j + x_j\partial_j\hat{\mathbf{x}}_i\partial_i = 2\nabla - \mathbf{r}\nabla^2 + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla$, lembrando apenas que $\delta_{jj} = 3$.

A ausência da divergência $\nabla\cdot\mathbf{L} = -i\varepsilon_{ijk}\partial_i x_j \partial_k = -i\varepsilon_{ijk}x_j\partial_i\partial_k = 0$ é devida às contrações de tensores simétricos com antisimétricos. Pela mesma razão $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{L}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j L_k = 0$. Dessa forma se mostra que os operadores $\mathbf{L}$ e $\nabla\times\mathbf{L}$ comutam com $\mathbb{W}$ e são campos solenoidais, ou seja, $\nabla\cdot\mathbf{L} = 0$ e $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{L}$. O gradiente ∇ é outro operador que claramente comuta com $\mathbb{W}$. Mas o gradiente não faz parte do conjunto de soluções do nosso sistema porque não é solenoidal, uma vez que $\nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi = -k^2\psi \neq 0$. Note-se que, entretanto, esse operador geraria soluções vetoriais em ondas acústicas, que podem ser longitudinais. Os campos gerados pelo operador $\mathbf{L} = -i\mathbf{r}\times\nabla$ são transversais pois $\mathbf{r}\cdot\mathbf{L} = -i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\times\nabla) = 0$. Neste caso a escolha $\mathbf{E} = \mathbf{L}\psi$ gera campos transversais elétricos, TE, enquanto a escolha $\mathbf{H} = \mathbf{L}\psi$ gera campos transversais magnéticos, TM. Os campos magnéticos e elétricos associados aos campos TE e TM possuem componentes radiais. Usando o fato de que $\mathbf{r}\cdot\nabla\times\mathbf{F} = x_i\varepsilon_{ijk}\partial_j F_k = -\varepsilon_{jik}x_i\partial_j F_k = i\mathbf{L}\cdot\mathbf{F}$, percebe-se que $\mathbf{r}\cdot\nabla\times\mathbf{F} = i\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = iL^2 \neq 0$. A solução dos campos TE é dada por $\mathbf{E} = \mathbf{L}\psi$ e $ikZ\mathbf{H}\nabla\times\mathbf{L}\psi$, enquanto a solução dos campos TM é dada por $\mathbf{H} = \mathbf{L}\psi$ e $-ikZ\mathbf{E}\nabla\times\mathbf{L}\psi$.

2.3 Solução escalar da equação de onda

Na seção anterior estabelecemos que é necessário primeiro encontrar a solução escalar da equação de onda para depois encontrar a solução vetorial, ou seja, encontrar o campo escalar $\psi(\mathbf{k},\mathbf{r})$ que satisfaça a equação de onda $\mathbb{W}\psi = (\nabla^2 + k^2)\psi = 0$. Uma propriedade do operador de momento angular que simplifica essa equação de onda em coordenadas esféricas é que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{r}\cdot\nabla + (\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 - r^2\nabla^2$ ou

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2}. \tag{2.19}$$

Isto pode ser demonstrado usando

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} &= -\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k(\varepsilon_{ilm}x_l\partial_m) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}x_j(\partial_k x_l\partial_m + x_l\partial_k\partial_m) && (2.20)\\
&= (\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{km})x_j(\delta_{kl}\partial_m + x_l\partial_k\partial_m) = x_j(3\partial_j + x_k\partial_k\partial_j - \partial_j - x_j\partial_k\partial_k) && (2.21)\\
&= 2x_j\partial_j + x_k x_j\partial_k\partial_j + x_j x_j\partial_k\partial_k = \mathbf{r}\cdot\nabla - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})(\nabla\cdot\nabla) + x_k x_j\partial_k\partial_j. && (2.22)
\end{aligned}$$

Agora $(x_k\partial_k)(x_j\partial_j) = x_k\delta_{jk}\partial_j + x_k x_j\partial_k\partial_j = x_k\partial_k + x_k x_j\partial_k\partial_j$ o que significa que $x_k x_j\partial_k\partial_j = (\mathbf{r}\cdot\nabla)(\mathbf{r}\cdot\nabla) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)$, o que leva a

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{r}\cdot\nabla + (\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 - r^2\nabla^2. \tag{2.23}$$

Usando propriedade acima a equação de Helmholtz pode ser escrita como

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\left(\frac{L^2}{r^2}-k^2\right)\psi=0, \tag{2.24}$$

que pode ser resolvida via separação de variáveis, fazendo

$$\psi(\mathbf{r})=u_l(r)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{2.25}$$

Aqui, como dissemos no Capítulo 1, utilizamos a definição de harmônico esférico como sendo

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{2.26}$$

em que $P_l^m(x)$ são os polinômios associados de Legendre, definidos como

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x), \tag{2.27}$$

em que $P_l(x)$ são os polinômios de Legendre. Os harmônicos esféricos satisfazem a equação de auto-valor

$$L^2Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})=l(l+1)Y_{nm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{2.28}$$

A função de onda radial obedece a equação diferencial[§]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_l(kr)}{\partial r}\right)-\left(\frac{l(l+1)}{r^2}-k^2\right)u_l(kr)=0, \tag{2.29}$$

cujas soluções são combinações das funções esféricas de Bessel – $j_l(kr)$ – e Neumann – $y_l(kr)$ – ou das funções de Hankel – $h_l^{(1,2)}=j_l(kr)\pm iy_l(kr)$. A escolha das funções radiais dependerá das condições de contorno. As funções $y_l(kr)$, $h_l^{(1)}(kr)$ e $h_l^{(2)}(kr)$ divergem para $r\to 0$. Portanto, as soluções para o interior de uma esfera só podem ser do tipo $j_l(kr)$. Por outro lado o comportamento assimptótico de $h_l^{(1)}(kr\to\infty)\to e^{ikr}/r$ é típico de uma onda esférica que se afasta da origem (*outgoing wave*), e $h_l^{(2)}(kr\to\infty)\to e^{-ikr}/r$ é o comportamento de onda que se aproxima da origem (*incoming wave*).

[§]Ou, para $x=kr$ temos que $u_l''+\frac{2}{x}u_l'-\left(\frac{l(l+1)}{x^2}-1\right)u_l=0$ ou ainda $x^2u_l''+2xu_l'-[l(l+1-x^2]u_l=0$.

2.4 Vetores de onda esféricos

Os vetores de onda esféricos dados por $\mathbf{X}_{lm} = \mathbf{L}Y_{lm}/\sqrt{l(l+1)}$ formam uma base ortornormal devido ao fato de que $\mathbf{L}$ é um operador Hermitiano, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int d\Omega\ \mathbf{X}^*_{l'm'} \cdot \mathbf{X}_{l''m''} &= \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}}\frac{1}{\sqrt{l''(l''+1)}}\int d\Omega\ (\mathbf{L}Y_{l'm'})^* \cdot \mathbf{L}Y_{l''m''} && (2.30)\\
&= \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}}\frac{1}{\sqrt{l''(l''+1)}}\int d\Omega\ Y^*_{l'm'}\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}Y_{l''m''} && (2.31)\\
&= \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}}\frac{1}{\sqrt{l''(l''+1)}}\int d\Omega\ Y^*_{l'm'}L^2 Y_{l''m''} && (2.32)\\
&= \frac{1}{\sqrt{l'(l'+1)}}\frac{l''(l''+1)}{\sqrt{l''(l''+1)}}\int d\Omega\ Y^*_{l'm'}Y_{l''m''} && (2.33)\\
&= \sqrt{\frac{l''(l''+1)}{l'(l'+1)}}\delta_{l',l''}\delta_{m',m''} && (2.34)\\
&= \delta_{l',l''}\delta_{m',m''}. && (2.35)
\end{aligned}$$

Se o campo elétrico normalizado é dado por $\mathbf{E}/E_0 = u_l(kr)\mathbf{X}_{lm}$ o campo magnético normalizado será dado por $ikZ\mathbf{H}/E_0 = \nabla \times (u_l(kr)\mathbf{X}_{lm})$. Usando a propriedade $-i\nabla \times \mathbf{L} = (2 + \mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla - \mathbf{r}\nabla^2$ podemos calcular esse vetor, sabendo que $\nabla^2(u_l Y_{lm}) = -k^2(u_l Y_{lm})$ e definindo $\sqrt{l(l+1)} = 1/\alpha$:

$$\begin{aligned}
\alpha\nabla \times \mathbf{L}(u_l Y_{lm}) &= i\alpha(2 + \mathbf{r} \cdot \nabla)\nabla(u_l Y_{lm}) - i\alpha\mathbf{r}\nabla^2(u_l Y_{lm}) && (2.36)\\
&= i(2 + r\partial_r)\alpha\nabla(u_l Y_{lm}) + i\alpha\mathbf{r}k^2(u_l Y_{lm}). && (2.37)
\end{aligned}$$

Agora utilizamos a propriedade¶ $\nabla = \hat{\mathbf{r}}\partial_r - (i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})/r$ para obter

$$\alpha\nabla(u_l Y_{lm}) = \alpha k u_l'\hat{\mathbf{r}}Y_{lm} - \frac{u_l}{r}i\alpha\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}Y_{lm} = \alpha k u_l'\hat{\mathbf{r}}Y_{lm} - \frac{u_l}{r}i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}. \quad (2.38)$$

O operador $r\partial_r$ só atua nas funções de r portanto:

$$\begin{aligned}
\alpha\nabla \times \mathbf{L}u_l Y_{lm} &= i(2 + r\partial_r)\left(\alpha k\hat{\mathbf{r}}u_l' Y_{lm} - \frac{u_l}{r}i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}\right) + i\alpha\mathbf{r}k^2 u_l Y_{lm} && (2.39)\\
&= i\alpha(k^2 r u_l'' + 2k u_l' + k^2 r u_l)\hat{\mathbf{r}}Y_{lm} + \left(k u_l' + \frac{u_l}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}. && (2.40)
\end{aligned}$$

¶ $\mathbf{r} \times \mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \nabla) = -i\hat{\mathbf{x}}_i\varepsilon_{ijk}x_j\varepsilon_{klm}x_l\partial_m = i\hat{\mathbf{x}}_i(\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm})x_j x_l\partial_m = i\hat{\mathbf{x}}_i x_j(x_j\partial_i - x_i\partial_j) = ir^2\nabla - i\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \nabla)$

Multiplicando tudo por $-i/k$ obtemos

$$-\frac{i}{k}\alpha\nabla\times\mathbf{L}u_lY_{lm} \;=\; \alpha kr(u_l''+2\frac{u_l'}{kr}+u_l)\hat{\mathbf{r}}Y_{lm}-i\left(u_l'+\frac{u_l}{kr}\right)\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{lm}. \qquad (2.41)$$

Usando a equação diferencial para u_l dada por

$$u_l''+2\frac{u_l'}{x}+u_l=\frac{l(l+1)}{x}u_l \qquad (2.42)$$

obtém-se que

$$-\frac{i}{k}\nabla\times(u_l\mathbf{X}_{lm}) \;=\; \frac{u_l}{\alpha kr}\hat{\mathbf{r}}Y_{lm}-i\left(u_l'+\frac{u_l}{kr}\right)\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{lm}. \qquad (2.43)$$

Finalmente chega-se a

$$-\frac{i}{k}\nabla\times(u_l\mathbf{X}_{lm})=\sqrt{l(l+1)}\frac{u_l}{kr}\hat{\mathbf{r}}Y_{lm}+\left(u_l'+\frac{u_l}{kr}\right)(-i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{lm}). \qquad (2.44)$$

Vale a pena notar que $-ik^{-1}\nabla\times\mathbf{X}_{lm}$ contém dois termos perpendiculares entre si e perpendiculares ao próprio $\mathbf{X}_{lm}$ pois $\mathbf{r}\cdot\mathbf{X}_{lm}=0$, $\mathbf{X}_{lm}^*\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{X}_{lm})=0$ e $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{X}_{lm})=0$. São três vetores perpendiculares entre si sugerindo a formação de uma base. São conhecidos como os Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen os seguintes vetores harmônicos esféricos:

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \;=\; \frac{\mathbf{L}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}}, \qquad (2.45)$$

$$\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \;=\; \hat{\mathbf{r}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \qquad (2.46)$$

$$\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \;=\; -i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{lm}. \qquad (2.47)$$

Além de perpendiculares entre si eles formam uma base ortonormal. Já mostramos que

$$\int d\Omega\;\mathbf{X}_{l'm'}^*\cdot\mathbf{X}_{l''m''}=\delta_{l'l''}\delta_{m'm''}, \qquad (2.48)$$

e sabemos que

$$\int d\Omega\;\mathbf{Y}_{l'm'}^*\cdot\mathbf{Y}_{l''m''}=\int d\Omega\;\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}Y_{l'm'}^*Y_{l''m''}=\int d\Omega\;Y_{l'm'}^*Y_{l''m''}=\delta_{l'l''}\delta_{m'm''}. \qquad (2.49)$$

. Para os $\mathbf{V}_{lm}$ usamos a rotação do produto misto e a identidade $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ para mostrar que $\mathbf{V}_{l'm'}^*\cdot\mathbf{V}_{l''m''}=(i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{l'm'}^*)\cdot(-i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{l''m''})=(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{l'm'}^*)\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{l''m''})=\hat{\mathbf{r}}\cdot\Big(\mathbf{X}_{l''m''}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{l'm'}^*)\Big)=\hat{\mathbf{r}}\cdot\Big(\hat{\mathbf{r}}\big(\mathbf{X}_{l''m''}\cdot\mathbf{X}_{l'm'}^*\big)-\mathbf{X}_{l'm'}^*\big(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{X}_{l''m''}\big)\Big)$, portanto $\mathbf{V}_{l'm'}^*\cdot\mathbf{V}_{l''m''}=\mathbf{X}_{l'm'}^*\cdot\mathbf{X}_{l''m''}$. Esses três vetores formam uma base ortonormal completa sobre uma superfície esférica, de modo que

$$\int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ \mathbf{A}_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}})\mathbf{B}_{l''m''}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}\delta_{l'l''}\delta_{m'm''}, \tag{2.50}$$

$$\sum_{\mathbf{A},l,m} \mathbf{A}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}')\mathbf{A}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}'') = \mathbf{1}\delta(\hat{\mathbf{r}}' - \hat{\mathbf{r}}''). \tag{2.51}$$

2.5 Multipolos de Hansen

Nas seções anteriores buscamos soluções vetoriais para as equações de Maxwell e da onda, baseadas na solução escalar $\psi_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = u_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ da equação de onda. Estas soluções são conhecidas como Multipolos de Hansen[35] e são dadas por

$$\mathbf{L}_{lm}(\mathbf{r}) = \alpha_{\mathbf{L}}\frac{-i}{k}\nabla\psi_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{r}), \tag{2.52}$$

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) = \alpha_{\mathbf{M}}\mathbf{L}\psi_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{r}), \tag{2.53}$$

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \alpha_{\mathbf{N}}\frac{-i}{k}\nabla\times\mathbf{L}\psi_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{r}), \tag{2.54}$$

sendo que apenas $\mathbf{M}_{lm}$ e $\mathbf{N}_{lm}$ satisfazem as equações de Maxwell‖. As constantes α serão utilizadas para a normalização sobre a superfície esférica $\Omega(\hat{\mathbf{r}})$ ortogonal ao versor $\hat{\mathbf{r}}$. Explicitamente, como mostrado em (2.38) e (2.44), e fazendo $u_l(kr) = j_l(kr)$, temos que

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.55}$$

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \left(j_l'(kr) + \frac{j_l(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.56}$$

$$\mathbf{L}_{lm}(\mathbf{r}) = -i\left(\sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(kr)}{kr}\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) + j_l'(kr)\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\right), \tag{2.57}$$

em que introduzimos os chamados Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen, dados por

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{L}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}}, \tag{2.58}$$

$$\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.59}$$

$$\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = -i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.60}$$

‖A expansão de Hansen se dá em função de $\psi_{lm}(\mathbf{k},\mathbf{r})$, com $\mathbf{A}_{1lm} = (l(l+1))^{1/2}\nabla\psi_{lm}$, $\mathbf{A}_{2lm} = k\nabla\times(\mathbf{r}\psi_{lm}) = (-1/k)\nabla\times\mathbf{A}_{3lm}$ e $\mathbf{A}_{3lm} = (-1/k)\nabla\times\mathbf{A}_{2lm}$, de modo que o campo elétrico é dado por $\mathbf{E} = E_0\sum_{lm} a_{2lm}\mathbf{A}_{2lm} + a_{3lm}\mathbf{A}_{3lm}$ e o campo magnético por $Z\mathbf{H} = iE_0\sum_{lm} a_{2lm}\mathbf{A}_{2lm} + a_{3lm}\mathbf{A}_{3lm}$, o que nos dá facilmente que $\int d\Omega\ \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S} = \sum\left(|a_{2lm}|^2 + |a_{3lm}|^2\right)$. Tomando a expressão $\mathbf{A}_{2lm} = k\nabla\times(\mathbf{r}\psi_{lm}) = k\nabla\psi_{lm}\times\mathbf{r} + k\psi_{lm}\nabla\times\mathbf{r} = -k\mathbf{r}\times\nabla\psi_{lm}$. Este termo é equivalente à nossa definição de $\mathbf{M}_{lm}$, desconsiderando-se as constantes.

Os harmônicos esféricos vetoriais de Hansen podem ainda ser expressos na forma da identidades

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{-r^2\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{V}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{r\nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (2.63)$$

Os vetores solenoidais $\mathbf{M}_{lm}$ e $\mathbf{N}_{lm}$ formam uma base completa para os campos tangenciais. O vetor irrotacional $\mathbf{L}_{lm}$ não satisfaz a condição de divergência zero.

2.6 Problema da expansão em ondas parciais

De posse dos Multipolos de Hansen, podemos escrever agora a expressão para a expansão em ondas parciais, sendo que as ondas parciais são os multipolos $\mathbf{M}_{lm}$ e $\mathbf{N}_{lm}$, uma vez que $\mathbf{L}_{lm}$ tem divergente diferente de zero, como requer as equações de Maxwell para os meios livres. Deste modo, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{pq} \begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}), \quad (2.64)$$

em que, como já mostramos

$$\mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) = j_p(kr)\mathbf{X}_{pq}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.65)$$

$$\mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) = \Big(j_l'(kr) + \frac{j_p(kr)}{kr}\Big)\mathbf{V}_{pq}(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{p(p+1)}\frac{j_p(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{pq}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.66)$$

Para calcular as constantes $G^{TE/TM}$ podemos utilizar as propriedades de ortogonalidade dos Harmônicos Esféricos Vetorias de Hansen. Multiplicando a equação (2.64) por $\mathbf{Y}_{p'q'}$ ou por $\mathbf{X}_{p'q'}$ e integrar sobre uma esfera podemos obter diretamente os coeficientes da expansão. A expansão em ondas parciais tradicional[4] utiliza a ortogonalidade dos harmônicos esféricos vetoriais para obter as constantes $G^{TE/TM}$ multiplicando ambos os lados da equação (2.64) por $\mathbf{Y}^*_{p'q'}(\hat{\mathbf{r}})$ e integrando no ângulo sólido. Isto nos dá diretamente que

$$E_0 j_p(kr) \begin{bmatrix} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = \frac{kr}{\sqrt{p(p+1)}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ \mathbf{Y}^*_{pq}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Preferimos no entanto escrever os coeficientes de forma

$$E_0 j_p(kr) \left[\begin{array}{c} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{array} \right] = \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ \mathbf{X}_{pq}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{array} \right], \tag{2.68}$$

também nos valendo das relações de ortogonalidade, em que multiplicando ambos os lados da equação (2.64) por $\mathbf{X}_{p'q'}^*(\hat{\mathbf{r}})$ e integrando no ângulo sólido, obtemos a equação (2.68). Podemos também obter a equação (2.68) a partir da equação (2.67) observando as equações de Maxwell harmônicas

$$k\mathbf{r} \cdot Z\mathbf{H} = -i\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}, \tag{2.69}$$

$$-k\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -i\mathbf{r} \cdot (\nabla \times Z\mathbf{H}) = \mathbf{L} \cdot Z\mathbf{H}, \tag{2.70}$$

e a identidade vetorial**

$$-i\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}. \tag{2.71}$$

As expressões (2.68) e (2.67) entretanto não representam o problema inteiramente resolvido. Em ambas as equações, o lado esquerdo possui uma função radial que não encontra equivalente no lado direito. Não tínhamos uma demonstração contundente de que do lado direito surgiria uma função esférica de Bessel para anular a que se encontra do lado esquerdo. Por outro lado, uma função esférica de Bessel, para um cálculo numérico é outro grande problema, por que além de altamente oscilante, possui diversas raízes que causam singularidades. Além disso, existe o problema de selecionar um valor arbitrário para r. Este trabalho vem ao encontro destas questões, mostrando como eliminar a depência radial das expressões (2.68) e (2.67) e completando o problema da expansão em funções de onda vetoriais esféricas. Nossa técnica consistirá em levar a equação (2.64) para o espaço de Fourier, onde mostraremos que a questão radial será definitivamente resolvida.

** $-i\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = -i(\hat{\mathbf{x}}_l x_l) \cdot (\varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{x}}_i \partial_j F_k) = -i\varepsilon_{ijk} x_i \partial_j F_k = -i(\varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{x}}_k x_i \partial_j)(\hat{\mathbf{x}}_k F_k) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}$.

Capítulo 3

O método da "força bruta"

Neste capítulo vamos obter o cálculo dos coeficientes pelo método que utilizamos inicialmente, que estamos designando de método da "força bruta",uma vez que na evolução do trabalho descobrimos uma forma muito mais simples, elegante e sintética que será apresentada no Capítulo 4. Esse trabalho evoluiu no contexto de uma continuidade do trabalho das teses da Adriana Fontes[7] e do Antônio Neves[34]. Na tese do Antônio Neves mostrou-se como efetuar a expansão em vetores esféricos harmônicos sem qualquer aproximação de feixes altamente focalizados. A chave para o sucesso no cancelamento das funções esféricas de Bessel foi a utilização da identidade

$$\int d\theta \ \sin\theta P_p^q(\cos\theta) J_p(kr\sin\xi\sin\theta) e^{ikr\cos\xi\cos\theta} = 2i^{p-q} P_p^q(\cos\xi) j_p(kr). \tag{3.1}$$

Conseguimos generalizar o resultado da Tese do Antônio para qualquer feixe através do cálculo direto dos coeficientes. Com os resultados obtidos notamos o aparecimento de um operador momento angular no espaço k, que nos levou a procurar um método mais simples de obter os mesmos resultados. Este capítulo faz a ligação entre os trabalhos anteriores do Antônio Neves[10] e os nossos resultados. Estamos de fato interessados em calcular

$$\begin{aligned} E_0 j_p(kr') G_{pq}^{TE} &= \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}}') \ \mathbf{X}_{pq}^*(\hat{\mathbf{r}}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \int d\Omega' \ Y_{pq}^*(\hat{\mathbf{r}}') \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') & (3.2) \\ &= \frac{K^{pq}}{\sqrt{4\pi}} \int d\theta' \ \sin\theta' P_p^q(\cos\theta') \int d\phi' \ e^{-iq\phi'} \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & (3.3) \end{aligned}$$

em que $z'/r' = \cos\theta'$ e $\rho'/r' = \sin\theta'$, $k_z'/k' = \cos\xi$, $\gamma'/k' = \sin\xi$ e

$$K^{pq} = \sqrt{\frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{(p-q)!}{(p+q)!}}. \tag{3.4}$$

Utilizamos a transformada de Fourier na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \; \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}. \tag{3.5}$$

Vamos utilizar o operador momento angular em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{L} = \left(y'\frac{\partial}{\partial z'} - z'\frac{\partial}{\partial y'} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(z'\frac{\partial}{\partial x'} - x'\frac{\partial}{\partial z'} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(x'\frac{\partial}{\partial y'} - y'\frac{\partial}{\partial x'} \right) \hat{\mathbf{z}} \tag{3.6}$$

operando sobre o campo

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{E} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \; \Big(\mathcal{E}_x (y'k'_z - z'k'_y) + \mathcal{E}_y (z'k'_x - x'k'_z) + \mathcal{E}_z (x'k'_y - y'k'_x) \Big) e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}. \tag{3.7}$$

Em coordenadas cilíndricas teremos

$$\begin{aligned} y'k'_z - z'k'_y &= k'_z\rho'\sin\phi' - z'\gamma'\sin\zeta', && (3.8)\\ z'k'_x - x'k'_z &= z'\gamma'\cos\zeta' - k'_z\rho'\cos\phi', && (3.9)\\ x'k'_y - y'k'_x &= \gamma'\rho'\sin(\phi' - \zeta'), && (3.10) \end{aligned}$$

o que nos permite integrar em $d\phi$ obtendo-se

$$\begin{aligned} \int d\phi' \; e^{-iq\phi'} \mathbf{L}\cdot\mathbf{E} \;&=\; \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \; \mathcal{E}_x (k'_z\rho' I_- - z'\gamma'\sin\zeta' I_0) + \\ &+\; \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \; \mathcal{E}_y (z'\gamma'\cos\zeta' I_0 - k'_z\rho' I_+) + \\ &-\; \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \; \mathcal{E}_z \gamma'\rho' I_s, \end{aligned} \tag{3.11}$$

em que

$$\begin{aligned} I_0 &= \int d\phi \; e^{-iq\phi} e^{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} = 2\pi i^q e^{-iq\zeta} J_q(\gamma\rho), && (3.12)\\ I_+ &= \int d\phi \; e^{-iq\phi} e^{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} \cos\phi = -i\pi i^q e^{-iq\zeta} \Big(J_{q-1}(\gamma\rho) e^{i\zeta} - J_{q+1}(\gamma\rho) e^{-i\zeta} \Big), && (3.13)\\ I_- &= \int d\phi \; e^{-iq\phi} e^{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} \sin\phi = -\pi i^q e^{-iq\zeta} \Big(J_{q-1}(\gamma\rho) e^{i\zeta} + J_{q+1}(\gamma\rho) e^{-i\zeta} \Big), && (3.14)\\ I_c &= \int d\phi \; e^{-iq\phi} e^{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} \cos(\phi - \zeta) = -2i\pi i^q e^{-iq\zeta} J'_q(\gamma\rho), && (3.15)\\ I_s &= \int d\phi \; e^{-iq\phi} e^{i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}} \sin(\phi - \zeta) = -2\pi i^q e^{-iq\zeta} \frac{q J_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho}. && (3.16) \end{aligned}$$

Temos também que

$$
\begin{aligned}
J_{q-1}(\gamma\rho) - J_{q+1}(\gamma\rho) &= 2J'_q(\gamma\rho), && (3.17)\\
J_{q-1}(\gamma\rho) + J_{q+1}(\gamma\rho) &= 2\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho}, && (3.18)
\end{aligned}
$$

o que vai nos dar

$$
\begin{aligned}
J_{q-1}(\gamma\rho) &= \frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} + J'_q(\gamma\rho), && (3.19)\\
J_{q+1}(\gamma\rho) &= \frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} - J'_q(\gamma\rho), && (3.20)
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$
\begin{aligned}
J_{q-1}(\gamma\rho)e^{i\zeta} - J_{q+1}(\gamma\rho)e^{-i\zeta} &= 2i\sin\zeta\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} + 2\cos\zeta J'_q(\gamma\rho), && (3.21)\\
J_{q-1}(\gamma\rho)e^{i\zeta} + J_{q+1}(\gamma\rho)e^{-i\zeta} &= 2\cos\zeta\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} + 2i\sin\zeta J'_q(\gamma\rho). && (3.22)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_0 &= 2\pi i^q e^{-iq\zeta} J_q(\gamma\rho), && (3.23)\\
I_+ &= -2\pi i^q e^{-iq\zeta} i\Big(i\sin\zeta\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} + \cos\zeta J'_q(\gamma\rho)\Big), && (3.24)\\
I_- &= -2\pi i^q e^{-iq\zeta}\Big(\cos\zeta\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho} + i\sin\zeta J'_q(\gamma\rho)\Big), && (3.25)\\
I_s &= -2\pi i^q e^{-iq\zeta}\frac{qJ_q(\gamma\rho)}{\gamma\rho}. && (3.26)
\end{aligned}
$$

Tomando

$$
\begin{aligned}
I_0 &= 2\pi i^q e^{-iq\zeta} J_q(\gamma\rho), && (3.27)\\
\gamma\rho I_+ &= 2\pi i^q e^{-iq\zeta}\Big(\sin\zeta q J_q(\gamma\rho) - i\cos\zeta\gamma\rho J'_q(\gamma\rho)\Big), && (3.28)\\
\gamma\rho I_- &= 2\pi i^q e^{-iq\zeta}\Big(-\cos\zeta q J_q(\gamma\rho) - i\sin\zeta\gamma\rho J'_q(\gamma\rho)\Big). && (3.29)
\end{aligned}
$$

Precisamos saber quanto vale

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{k_z}{\gamma}(\gamma\rho I_-) - z\gamma\sin\zeta I_0, && (3.30)\\
c_2 &= z\gamma\cos\zeta I_0 - \frac{k_z}{\gamma}(\gamma\rho I_+), && (3.31)
\end{aligned}
$$

que nos dá

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{k_z}{\gamma}\cos\zeta q J_q(\gamma\rho) - i\sin\zeta\Big(k_z\rho J_q'(\gamma\rho) - iz\gamma J_q(\gamma\rho)\Big), && (3.32)\\ c_2 &= -\frac{k_z}{\gamma}\sin\zeta q J_q(\gamma\rho) + i\cos\zeta\Big(k_z\rho J_q'(\gamma\rho) - iz\gamma J_q(\gamma\rho)\Big). && (3.33)\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_z}{\partial\xi} &= -\gamma, && (3.34)\\ \frac{\partial\gamma}{\partial\xi} &= k_z, && (3.35)\end{aligned}$$

e que sendo

$$\begin{aligned} U &= J_q(\gamma\rho)e^{ik_z z}, && (3.36)\\ \frac{\partial}{\partial\xi}U &= \big(k_z\rho J_q'(\gamma\rho) - iz\gamma J_q(\gamma\rho)\big)e^{ik_z z}, && (3.37)\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} c_1 e^{ik_z z} &= 2\pi i^q i\left(-\frac{k_z}{\gamma}\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \sin\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)Ue^{-iq\zeta} = -2\pi i^q\mathcal{L}_x U e^{-iq\zeta}, && (3.38)\\ c_2 e^{ik_z z} &= 2\pi i^q i\left(-\frac{k_z}{\gamma}\sin\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} + \cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)Ue^{-iq\zeta} = -2\pi i^q\mathcal{L}_y U e^{-iq\zeta}. && (3.39)\end{aligned}$$

Além disso temos também que

$$-\gamma\rho I_s = -2\pi i^q\mathcal{L}_z U e^{-iq\zeta}, \tag{3.40}$$

em que reconhecemos $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_y$ e $\mathcal{L}_z$ como as componentes do operador momento angular no espaço de recíproco (de Fourier). Deste modo

$$\int d\phi'\ e^{-iq\phi'}\mathbf{L}\cdot\mathbf{E} = -\frac{i^q}{\sqrt{2\pi}}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}e^{-iq\zeta'}U, \tag{3.41}$$

que pode ser integrado em $d\theta$ diretamente[34,36] usando

$$\begin{aligned} \int d\theta\sin\theta P_p^q(\cos\theta)U &= \int d\theta\sin\theta P_p^q(\cos\theta)J_p(\gamma\rho)e^{ik_z z} && (3.42)\\ &= \int d\theta\sin\theta P_p^q(\cos\theta)J_p(kr\sin\xi\sin\theta)e^{ikr\cos\xi\cos\theta} && (3.43)\\ &= 2i^{p-q}P_p^q(\cos\xi)j_p(kr). && (3.44)\end{aligned}$$

A integral acima foi a peça chave do sucesso dos trabalhos do Antônio Neves[10,22,34], muito embora já fosse uma integral conhecida[36,37] a mesma não consta das principais tabelas de integrais. O Antônio teve que resolver esta integral por si mesmo[34], e como se pode ver aqui, ela é fundamental para a solução do problema que nos propusemos, como também foi no caso dele.

De posse dos resultados acima, podemos relembrar as etapas como sendo 1) abrir os termos da integral

$$E_0 j_p(kr')G^{TE}_{pq} = \int d\Omega\ \mathbf{X}^*_{pq}\cdot\mathbf{E} = \frac{K^{pq}}{\sqrt{4\pi}}\int d\theta \sin\theta P^q_p(\cos\theta)\int d\phi\ e^{-iq\phi}\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}, \tag{3.45}$$

2) fazer as integrais em ϕ primeiramente, de onde se pode obter 3) a integral em θ

$$E_0 j_p(kr')G^{TE}_{pq} = \frac{-i^q}{\sqrt{2\pi}}\frac{K^{pq}}{\sqrt{4\pi}}\int d^3k'\ \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}e^{-iq\zeta'}\int d\theta' \sin\theta' P^q_p(\cos\theta')U, \tag{3.46}$$

que 4) resolvida nos dá

$$E_0 j_p(kr')G^{TE}_{pq} = -\frac{i^q}{\sqrt{2\pi}}\frac{K^{pq}}{\sqrt{4\pi}}\int d^3k'\ \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}2i^{p-q}j_p(k'r')P^q_p(\cos\xi')e^{-iq\zeta'}. \tag{3.47}$$

5) Reescrevendo os termos da expressão acima vamos então obter

$$E_0 j_p(kr')G^{TE}_{pq} = -\frac{i^p}{\sqrt{p(p+1)}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d^3k'\ j_p(k'r')\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}Y^*_{pq}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{3.48}$$

Neste ponto é preciso ressaltar que $\boldsymbol{\mathcal{L}}^* = -\boldsymbol{\mathcal{L}}$, o que nos diz que $-\boldsymbol{\mathcal{L}}Y^*_{pq} = (\boldsymbol{\mathcal{L}}Y_{pq})^*$ – isto pode ser verificado diretamente nas equações (3.38), (3.39) e (3.40) – 6) o que nos permite fazer

$$E_0 j_p(kr')G^{TE}_{pq} \;=\; i^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d^3k\ j_p(k'r')\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq}(\hat{\mathbf{k}}')\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'). \tag{3.49}$$

7) O passo definitivo consiste em notar que estamos tratando equações harmônicas*, ou seja,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') = \frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{3.50}$$

o que 8) elimina a integral em k, deixando apenas a parte direcional, ou seja

$$\int d\Omega(\hat{\mathbf{r}}')\ \mathbf{X}^*_{pq}(\hat{\mathbf{r}}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}') = i^p j_p(kr')\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq}(\hat{\mathbf{k}}')\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{3.51}$$

*A justificativa matemática será mostrada no próximo capítulo

9) o que nos fornece

$$E_0 G_{pq}^{TE} = i^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}') \; \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{3.52}$$

Para o campo magnético e o cálculo de G^{TM} o resultado é idêntico bastando trocar $\mathbf{E}$ por $Z\mathbf{H}$. A partir deste resultado fomos verificar a atuação do operador momento angular no espaço de recíproco (de Fourier) e reescrevemos a solução a partir de um *status* de "quem sabe a resposta". Muito embora surja naturalmente este operador momento angular nas coordenadas do espaço recíproco, não conhecíamos sua relação com o operador momento angular nas coordenadas do espaço direto. No Capítulo 4 mostraremo a relação entre estes dois operadores, e de que forma passamos de uma representação para outra.

É importante notar também os vetores harmônicos esféricos nas coordenadas do espaço recíproco, definidos como

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') = \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}} Y_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}')}{\sqrt{p(p+1)}}, \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') = -i\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{3.54}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') = \hat{\mathbf{k}}' Y_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{3.55}$$

Utilizamos a notação caligráfica para ressaltar que estes vetores harmônicos esféricos dependem das coordenadas do espaço recíproco, mas de fato, se explicitarmos o argumento das funções esta convenção não é necessária.

Capítulo 4

O Método Elegante

4.1 Definições matemáticas

A eliminação da função radial depende passar a equação (2.64) para o espaço de Fourier. Temos portanto que fazer algumas definições antes de prosseguir. Utilizaremos sistemas de coordenadas sobrepostos para o espaço direto, ou seja, os sistemas cartesiano (x, y, z), cilíndrico (ρ, ϕ, z) e esférico (r, θ, ϕ) não são rotacionados nem transladados, de modo que as coordenadas obedecem às relações tradicionais, explicitadas na Tabela A.1 do Apêndice A. Além do mais, para uma melhor clareza da notação utilizaremos o versor direcional $\hat{\mathbf{r}}$ para indicar dependência nas variáveis angulares, ou seja, $f(\hat{\mathbf{r}}) = f(\theta, \phi)$, e ainda temos a diferencial de ângulo sólido $d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) = \sin\theta d\theta d\phi$. Do mesmo modo, temos sistemas equivalentes para o espaço recíproco (de Fourier), também sobrepostos, ou seja, os sistemas cartesiano (k_x, k_y, k_z), cilíndrico (γ, ζ, k_z) e esférico (k, ξ, ζ). O versor direcional $\hat{\mathbf{k}}$ para indicar dependência nas variáveis angulares, ou seja, $f(\hat{\mathbf{k}}) = f(\xi, \zeta)$, e ainda temos a diferencial de ângulo sólido $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = \sin\xi d\xi d\zeta$.

Ainda vamos contar com o sistema de coordenadas complexo, definido em termos de $\hat{\mathbf{e}}_\pm = (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$, muito útil na avaliação das componentes de momento angular. Neste caso, este sistema é escrito como $(\hat{\mathbf{e}}_+, \hat{\mathbf{e}}_-, \hat{\mathbf{e}}_z)$, em que $\mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{z}}$. As propriedades deste sistema de coordenadas (que é fixo e não muda do espaço direto para o espaço recíproco) estão detalhadas no Apêndice A. Este sistema também pode ser escrito como sendo $(\mathbf{e}_1^{-1}, \mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_1^1)$, em que $\mathbf{e}_1^{-1} = \hat{\mathbf{e}}_-$, $\mathbf{e}_1^0 = \hat{\mathbf{e}}_z$ e $\mathbf{e}_1^1 = -\hat{\mathbf{e}}_+$, ou seja, $\mathbf{e}_1^{\pm 1} = \mp\hat{\mathbf{e}}_\pm$. Este último sistema é usado teoria dos Harmônicos Esféricos Vetoriais.

4.1.1 Transformadas de Fourier

Utilizaremos as transformadas de Fourier definidas como se segue

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\Big\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\Big\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\ \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{4.2}$$

de modo que vamos ter

$$\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\ e^{\pm i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}}. \tag{4.3}$$

Em muitos casos vamos usar a chamada expansão de Rayleigh para ondas planas, dada por

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr)\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}). \tag{4.4}$$

em que o complexo conjugado pode estar em qualquer um dos harmônicos esféricos. Esta função é muito importante porque nos permite escrever a transformada de Fourier em coordenadas esféricas, ou seja, substituindo (4.4) em (4.5) obtemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\Big\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty} i^l \sum_{m=-l}^{l}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})j_l(kr)Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\Big\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l \sum_{m=-l}^{l}\int d^3r\ \mathbf{E}(\mathbf{r})j_l(kr)Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}). \tag{4.6}$$

Por outro lado, temos ainda a chamada transformada em harmônicos esféricos ("*Spherical Harmonic Transform*" – SHT), dada por

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{l=0}\sum_{m=-l}^{l} C^{l,m}Y_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.7}$$

$$C^{l,m} = \int d\Omega\ f(\hat{\mathbf{r}})Y^*_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.8}$$

em que são válidas as identidades

$$\int d\Omega\ Y_{l',m'}(\hat{\mathbf{r}})Y^*_{l'',m''}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{l',l''}\delta_{m',m''}. \tag{4.9}$$

Outra transformada associada é a transformada de Bessel esférica de ordem l, também conhecida como Fourier-Bessel ou de Hankel, dada por

$$g_l(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dk\; k^2 G_l(k) j_l(kr), \tag{4.10}$$

$$G_l(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dr\; r^2 g_l(r) j_l(kr), \tag{4.11}$$

em que temos a identidade

$$\int_0^\infty dr\; r^2 j_l(k'r) j_l(kr) = \frac{\pi}{2}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}. \tag{4.12}$$

Conhecendo-se estas duas transformadas correlatas, caso tenhamos uma função separável do tipo

$$f(\mathbf{r}) = f_r(r) f_\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.13}$$

vamos ter para a transformada de Fourier

$$F(\mathbf{k}') = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}')\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\; r^2 f_r(r) j_l(k'r)\int d\Omega\; Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) f_\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \tag{4.14}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l F_l^r(k)\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') C_\Omega^{lm}, \tag{4.15}$$

ou seja, vamos obter a dependência em transformadas de harmônicos esféricos e esféricas de Bessel.

Em nosso caso, estamos interessados em calcular a transformada de Fourier da função

$$\phi_{pq}(\mathbf{k};\mathbf{r}') = j_p(kr') Y_{p,q}(\hat{\mathbf{r}}'), \tag{4.16}$$

uma vez que esta função é a base dos Multipolos de Hansen, e possui teoremas de adição próprios. Vamos calcular a transformada em harmônicos esféricos harmônicos da parte angular

$$C_\Omega^{lm} = \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}}')\; Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{pq}(\hat{\mathbf{r}}') = \delta_{l,p}\delta_{m,q}, \tag{4.17}$$

o que por sua vez nos possibilita fazer a transformada de Bessel da parte radial (já que equipara os índices das funções esféricas de Bessel),

$$F_p^r(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int dr\; r^2 j_p(k'r) j_p(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}. \tag{4.18}$$

Com tudo isto temos que

$$\Phi_{pq}(\mathbf{k};\mathbf{k}') = \mathcal{F}\Big\{\phi_{pq}(\mathbf{k};\mathbf{r}')\Big\} = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}Y_{pq}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{4.19}$$

Conhecendo-se esta transformada, poderemos calcular as transformadas de Fourier dos Multipolos de Hansen e consequentemente a transformada de Fourier da equação (2.64). Os Multipolos de Hansen são dados por

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{l(l+1)}}\phi_{lm}(\mathbf{k};\mathbf{r}'), \tag{4.20}$$

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla\times\mathbf{M}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.21}$$

$$\mathbf{L}_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla\phi_{lm}(\mathbf{k};\mathbf{r}'). \tag{4.22}$$

Vamos utilizar as definições das transformadas de Fourier dadas em (4.5). Fazendo, por exemplo

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\cdot\nabla e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\cdot i\mathbf{k}'e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}. \tag{4.23}$$

$$\tag{4.24}$$

Fazendo então a transformada de Fourier vamos obter

$$\mathcal{F}\Big\{\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\Big\} = i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'). \tag{4.25}$$

Do mesmo modo temos

$$\mathcal{F}\Big\{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')\Big\} = i\mathbf{k}'\times\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'). \tag{4.26}$$

Com isto obtemos diretamente as transformadas de

$$\mathcal{F}\Big\{\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}')\Big\} = \boldsymbol{\mathcal{N}}_{lm}(\mathbf{k}') = \frac{\mathbf{k}'}{k}\times\boldsymbol{\mathcal{M}}_{lm}(\mathbf{k}'), \tag{4.27}$$

$$\mathcal{F}\Big\{\mathbf{L}_{lm}(\mathbf{r}')\Big\} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{lm}(\mathbf{k}') = \frac{\mathbf{k}'}{k}\Phi_{lm}(\mathbf{k};\mathbf{r}'). \tag{4.28}$$

Substituindo $\Phi_{lm}(\mathbf{k};\mathbf{r}')$ e simplificando a delta de Dirac,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^l\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{4.29}$$

Deste modo, precisamos então calcular a transformada de Fourier de $\mathbf{M}_{lm}$, ou seja

$$\mathcal{F}\Big\{\mathbf{L}\phi_{lm}(\mathbf{k};\mathbf{r}')\Big\}. \tag{4.30}$$

4.1.2 Operador momento angular

A transformada de Fourier é a peça chave em nosso trabalho. Vimos no capítulo anterior que no desenvolvimento da expansão surgem termos dependentes de um "operador momento angular" nas coordenadas do espaço recíproco. Precisamos saber que relações este operador no espaço recíproco mantém com o operador momento angular no espaço direto. Escrevemos o operador

$$\mathbf{L} \;=\; -i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}, \tag{4.31}$$

em que

$$\frac{d}{d\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4.32}$$

é o gradiente nas coordenadas do espaço direto. Temos também que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} \;=\; -i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}, \tag{4.33}$$

em que

$$\frac{d}{d\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial k_x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial k_y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial k_z} \tag{4.34}$$

é o gradiente nas coordenadas do espaço recíproco. Do mesmo modo que fizemos para o gradiente e para o rotacional, faremos

$$\mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{L}\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})\mathbf{L}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{4.35}$$

Vamos então observar a atuação do operador momento angular sobre a exponencial complexa,

$$\mathbf{L}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(-i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(-i\mathbf{r}\times i\mathbf{k}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(i\mathbf{k}\times i\mathbf{r}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{4.36}$$

Substituindo este termo na expressão (4.35) podemos expandir o produto vetorial

$$I = \int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})\left(i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\varepsilon_{lmn}\hat{\mathbf{e}}_l\int dk_x\int dk_y\int dk_z\ \Psi k_m\partial_{k_n}e^{ik_xx}e^{ik_yy}e^{ik_zz}. \tag{4.37}$$

Tomando por exemplo os índices $l = x$, $m = y$ e $n = z$, vamos obter

$$I = i\hat{\mathbf{e}}_x \int dk_x \ e^{ik_x x} \int dk_y \ k_y e^{ik_y y} \int dk_z \ \Psi \partial_{k_z} e^{ik_z z}. \tag{4.38}$$

O último termo da integral acima pode ser integrado por partes. Usando o fato de que as funções que têm transformada de Fourier pertencem a um espaço de Hilbert (ou seja, são quadraticamente integráveis, o que significa que vão a zero para $r \to \infty$) obtemos

$$I = -i\hat{\mathbf{e}}_x \int dk_x \ e^{ik_x x} \int dk_y \ k_y e^{ik_y y} \int dk_z \ e^{ik_z z} \partial_{k_z} \Psi. \tag{4.39}$$

Com isto retiramos a derivada que agia sobre a exponencial e a colocamos para agir sobre a função de $\Psi(\mathbf{k})$. Reagrupando todos os termos, obtemos

$$\mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(-i\mathbf{k} \times \frac{d}{d\mathbf{k}} \right) \Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\mathcal{L}} \Psi(\mathbf{k}). \tag{4.40}$$

Deste modo, fazendo a transformada de Fourier do operador momento angular obtemos,

$$\mathcal{F}\Big\{ \mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) \Big\} = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathcal{F}\Big\{ \psi(\mathbf{r}) \Big\} = \boldsymbol{\mathcal{L}} \Psi(\mathbf{k}). \tag{4.41}$$

Uma outra demonstração desta propriedade está no Apendice C, junto a outras propriedades do operador momento angular mais conhecidas[4,8,38]. Esta expressão, como veremos será o passo fundamental para fazermos a transformada de Fourier dos Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen e assim obter os coeficientes da expansão em funções de onda vetoriais esféricas.

4.2 Solução da expansão em ondas parciais

Como vimos, a transformada de Fourier dos Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen são dadas por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{lm}(\mathbf{k}') &= \frac{\mathbf{k}'}{k} \times \boldsymbol{\mathcal{M}}_{lm}(\mathbf{k}'), & (4.42) \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{lm}(\mathbf{k}') &= (-i)^p \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(k'-k)}{k'^2} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). & (4.43) \end{aligned}$$

Precisamos deste modo, calcular a transformada de

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{l(l+1)}} \phi_{pq}(\mathbf{k}; \mathbf{r}'), \tag{4.44}$$

ou mais precisamente

$$\mathcal{F}\Big\{\mathbf{L}\phi_{pq}(\mathbf{k};\mathbf{r}')\Big\} = \boldsymbol{\mathcal{L}}\Phi_{pq}(\mathbf{k};\mathbf{k}') = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{L}}Y_{pq}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{4.45}$$

Obtemos assim a transformada de $\mathbf{M}_{lm}$, dada como

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{4.46}$$

e consequentemente, substituindo (4.46) em (4.42) e usando a propriedade da delta de Dirac obtemos

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}i\Big(-i\hat{\mathbf{k}}'\times\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}')\Big) = i^{p-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{4.47}$$

Podemos resumir as transformadas de Fourier dos Multipolos de Hansen como funções dos Harmônicos Esféricos Vetoriais de Hansen no espaço recíproco (ou de Fourier):

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{4.48}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^p\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{4.49}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{lm}(\mathbf{k}') = (-i)^{p-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{V}}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}'). \tag{4.50}$$

O último passo para obtermos a transformada de Fourier da expansão em funções de onda vetoriais esféricas é exatamente a transformada dos campos eletromagnéticos. Sabemos que os campos eletromagnéticos obedecem às equações de onda

$$\nabla^2\begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{k}')\\ \mathbf{H}(\mathbf{k}')\end{bmatrix} = -k^2\begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{k}')\\ \mathbf{H}(\mathbf{k}')\end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

Um fato importante a ser observado é que, aplicando-se a transformada de Fourier de ambos os lados das equações acima obtemos

$$k'^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{k}')\end{bmatrix} = -k^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{k}')\end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

$$\tag{4.53}$$

o que nos diz que os campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ não podem conter dependência em k, apenas direcional $(\hat{\mathbf{k}})$, ou seja

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{k}') \end{bmatrix} = \frac{\delta(k'-k)}{k'^2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

Analisando (4.54), (4.49) e (4.50) já vemos claramente que todas contêm uma delta de Dirac na componente radial do espaço recíproco. Em outras palavras, estas deltas tendem a se anularem quando for feita a transformada da expansão

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{pq} \begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}), \tag{4.55}$$

que vai nos dar

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{k}') \end{bmatrix} = E_0 \sum_{pq} \begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{M}}_{pq}(\mathbf{k}') + \begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{pq}(\mathbf{k}'), \tag{4.56}$$

Desta forma, substituindo (4.54), (4.49) e (4.50) em (4.56) e eliminando a delta de Dirac obtemos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\mathbf{k}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\mathbf{k}') \end{bmatrix} = E_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{pq} (-i)^p \begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}(\hat{\mathbf{k}}') + (-i)^{p-1} \begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{V}}_{pq}(\hat{\mathbf{k}}'), \tag{4.57}$$

A equação (4.57) nos permite obter as constantes $G^{TE/TM}$ diretamente, do mesmo modo que havíamos obtido anteriormente, ou seja, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos vetores harmônicos esféricos de Hansen. Com isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} = i^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}, \tag{4.58}$$

ou uma outra forma equivalente

$$\begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = i^{p-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{V}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

que demonstra a independência nas variáveis radiais. Este resultado é de fato o principal resultado deste trabalho, porque completa a teoria da expansão em ondas parciais, mostrando que os coeficientes da expansão não dependem da posição $\mathbf{r}$, um resultado que até então não havia sido demonstrado, há mais de cem anos.

4.2.1 O potencial vetor

Já que estamos trabalhando com os campos no espaço recíproco, nos ocorreu a idéia de trabalhar com as transformas de Fourier diretamente dos potenciais, em lugar das transformadas diretas dos campos. No *gauge* de Lorenz (em unidades SI) temos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{4.60}$$

Os campos elétricos e magnéticos são obtidos dos potenciais via

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, & (4.61) \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. & (4.62) \end{aligned}$$

Tudo pode ser expresso em termos do potencial vetor se o potencial escalar for extraído do potencial vetor através da condição de Lorenz. Considerando ondas harmônicas com dependência temporal na forma $e^{-i\omega t}$, de modo que $\partial\Phi/\partial t = -ikc\Phi$, e $\partial\mathbf{A}/\partial t = -ikc\mathbf{A}$ a condição de Lorenz se torna

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -i\frac{k}{c}\Phi, \tag{4.63}$$

o que leva a

$$-\nabla\Phi = \frac{ic}{k}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}). \tag{4.64}$$

O campo elétrico vai ser dado então por

$$\mathbf{E} = ikc\left(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})\right). \tag{4.65}$$

Como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = ikc\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{k^2}\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{A})\right) = 0, \tag{4.66}$$

assumindo $\psi = \nabla \cdot \mathbf{A}$, vamos ter que

$$\nabla^2\psi = -k^2\psi, \tag{4.67}$$

que é a solução escalar da equação de onda. Dimensionalmente vamos ter que $ZH_0 = E_0 = kcA_0$. Temos ainda que $B_0 = kA_0$, ou seja, $H_0 = kA_0/\mu$. Fazendo $E_0/H_0 = (kcA_0)\mu/(kA_0) = c\mu =$

Z.

4.2.2 Expansão em ondas parciais

Para o cálculo dos coeficientes da expansão usaremos as expressões

$$G_{pq}^{TM} = i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega \; \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}, \tag{4.68}$$

$$G_{pq}^{TE} = i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega \; \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}. \tag{4.69}$$

Temos que os campos eletromagnéticos são dados por

$$\mathbf{E} = ikc\left(\mathbf{A} + \frac{1}{k^2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})\right), \tag{4.70}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{4.71}$$

que no espaço de Fourier se tornam

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = ikc\left(\boldsymbol{\mathcal{A}} + \frac{1}{k^2}\mathbf{k}'(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}})\right), \tag{4.72}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = i\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\mathcal{A}}. \tag{4.73}$$

Por outro lado, sabemos também que o potencial vetor obedece à equação de onda e do mesmo modo que fizemos para os campos eletromagnéticos, podemos fazer

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}})\frac{\delta(k'-k)}{k'^2}, \tag{4.74}$$

de onde obtemos as expressões para os campos

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}} = iE_0\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}} + \hat{\mathbf{k}}'(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}})\right), \tag{4.75}$$

$$Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}} = iE_0\hat{\mathbf{k}}' \times \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}. \tag{4.76}$$

Como o momento angular não tem componentes na direção $\hat{\mathbf{k}}$, temos então que os coeficientes de forma podem ser escritos (ajustando-se a dimensionalidade das constantes A_0 e E_0) como

$$G_{pq}^{TM} = i^{p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\right), \tag{4.77}$$

$$= i^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{V}}_{pq}^{*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}, \tag{4.78}$$

$$G_{pq}^{TE} = i^{p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}. \tag{4.79}$$

A grande vantagem deste método é que agora só é necessário encontrar uma transformada de Fourier, do potencial vetor, em lugar das transformadas de dois campos vetoriais, o elétrico e o magnético. Precisamos unicamente saber se o potencial vetor escolhido tem transformada de Fourier e integrar o potencial transformado sobre uma esfera no espaço-k.

4.2.3 Onda plana

O único resultado obtido por Mie é a expansão da onda plana[4]. Uma onda plana pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{r}')\\ \mathbf{H}(\mathbf{r}')\end{bmatrix} = E_0\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}, \tag{4.80}$$

que no espaço de Fourier vai nos dar

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}')\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}')\end{bmatrix} = E_0\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix}\delta(\hat{\mathbf{k}}'-\hat{\mathbf{k}}). \tag{4.81}$$

Substituindo na expressão dos coeficientes temos

$$\begin{bmatrix}G_{pq}^{TE}\\ G_{pq}^{TM}\end{bmatrix} = i^{p}4\pi\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}(\hat{\mathbf{k}})\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix}. \tag{4.82}$$

Para o caso em que $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}$ (sem normalizar) temos, pelas propriedades dos harmônicos esféricos,

$$\begin{bmatrix}G_{pq}^{TE}\\ G_{pq}^{TM}\end{bmatrix} = i^{p}\sqrt{4\pi(2p+1)}\delta_{q,\pm1}\begin{bmatrix}1\\ \mp i\end{bmatrix}, \tag{4.83}$$

como mostrado no livro do Jackson[4].

4.2.4 Deslocamento da origem

Vamos agora verificar o que ocorre com o deslocamento da origem. Suponhamos que estejamos interessados na expansão para os campos elétrico e magnético deslocados para a posição $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$. Pelas propriedades das transformadas de Fourier temos que

$$\mathcal{F}\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{r}}'') \\ \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}'') \end{bmatrix} = e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_0}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}, \tag{4.84}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = i^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_0}\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq}(\hat{\mathbf{k}}')\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}. \tag{4.85}$$

Esta expressão pode ser expandida em termos de somatórios de coeficientes de Clebsh-Gordon ou 3J de Wigner e de expansões em harmônicos esféricos obtendo assim expressões genéricas[39–46]. Entretanto, outra possibilidade é fazer a mudança de coordenada antes da transformada de Fourier e fazer o cálculo direto. Esta abordagem foi a que utilizamos nos casos que analisamos, como pode-se ver nos capítulos seguintes. Outra opção se deve ao fato dos multipolos de Hansen também possuírem teoremas de adição, novamente em função de coeficientes de Clebsh-Gordon. Os métodos "T-Matrix"são baseados nas propriedades de translação destes multipolos[39].

4.2.5 Expansão em outros Harmônicos Esféricos Vetoriais

Na literatura é muito comum encontrarmos outros harmônicos esféricos vetoriais que não os de Hansen. Em Teoria de Grupos é muito comum o uso dos Harmônicos Esféricos Vetoriais de Blatt e Weisskopf[47], que formam uma base de autovetores de J^2, J_z e L^2, em que $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, $\mathbf{J}$ é o operador momento angular total, $\mathbf{L}$ é o operador momento angular orbital e $\mathbf{S}$ o operador de momento angular de *spin*. A equivalência entre estes dois grupos é dada por $\mathbf{Y}_{ll}^m = \mathbf{X}_{lm}$ e ainda[48]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{lm} \\ \mathbf{V}_{lm} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{bmatrix} \sqrt{l} & -\sqrt{l+1} \\ \sqrt{l+1} & \sqrt{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{l,l-1}^m \\ \mathbf{Y}_{l,l+1}^m \end{bmatrix}, \tag{4.86}$$

em que $\mathbf{Y}_{l,(\mu),j}^m$ são os Harmônicos Esféricos Vetoriais de Blatt e Weisskopf, e $\mu = 1$ e é omitido e $j = l-1, l, l+1$. A relação inversa pode ser facilmente obtida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{l,l-1}^m \\ \mathbf{Y}_{l,l+1}^m \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{bmatrix} \sqrt{l} & \sqrt{l+1} \\ -\sqrt{l+1} & \sqrt{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{lm} \\ \mathbf{V}_{lm} \end{bmatrix}. \tag{4.87}$$

Estas relações nos permitem comparar as expressões para as componentes dos harmônicos esféricos vetoriais, ou, em se conhecendo um conjunto, obter o outro. Deste modo, temos

$$\mathbf{M}_{lm}(\mathbf{r}) = j_l(kr)\mathbf{Y}_{l,l}^{m}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.88}$$

$$\mathbf{N}_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}j_{l-1}(kr)\mathbf{Y}_{l,l-1}^{m}(\hat{\mathbf{r}}) - \sqrt{\frac{l}{2l+1}}j_{l+1}(kr)\mathbf{Y}_{l,l+1}^{m}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.89}$$

$$\mathbf{L}_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{l}{2l+1}}j_{l-1}(kr)\mathbf{Y}_{l,l-1}^{m}(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}j_{l+1}(kr)\mathbf{Y}_{l,l+1}^{m}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{4.90}$$

As expressões acima têm a vantagem de dependerem de apenas de funções esféricas de Bessel, não tendo nem derivadas $j_l'(x)$ nem razões $j_l(x)/x$, o que facilita o cálculo numérico. Estes harmônicos esféricos vetoriais também só dependem de um harmônico esférico escalar por componente[48], como mostrado no Apêndice D. Além disso, na literatura encontramos casos de expansão em ondas parciais com três termos[49], ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{r}}'') \\ \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}'') \end{bmatrix} = \sum_{l,m} \sum_{j=-1,0,1} \begin{bmatrix} \alpha_{l,l+j}^{m} \\ \beta_{l,l+j}^{m} \end{bmatrix} j_{l+j}(kr)\mathbf{Y}_{l,l+j}^{m}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{4.91}$$

mas como podemos ver, esta situação é equivalente a encontrar os termos da expansão em dois termos. No Apêndice D faremos uma explanação mais abrangente das relações entre os Harmônicos Esféricos Vetoriais. Outra expansão muito comum é a expansão em quatro termos de paridade definida mostrados no Capítulo 1. Novamente, trabalhando com as funções e com as constantes, pode-se reduzir as quatro constantes a combinações de duas constantes que sabemos calcular.

Capítulo 5

Campos no interior de guias de onda

A partir do capítulo 4 nosso objetivo é mostrar como o resultado fundamental lá obtido pode ser utilizado para obter os coeficientes de forma de diversos tipos de feixes incidentes. Neste capítulo estamos interessados na expansão em ondas parciais para campos no interior de guias de onda vazados. Estes campos são geralmente divididos em campos transversais elétricos e transversais magnéticos, dados por [4]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM} \\ Z\mathbf{H}^{TE} \end{bmatrix} = \frac{k_z}{k}\hat{\mathbf{z}} \times \begin{bmatrix} -Z\mathbf{H}^{TM} \\ \mathbf{E}^{TE} \end{bmatrix} = E_0 \left[\hat{\mathbf{z}} + i\frac{k_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right] g(\mathbf{r}), \tag{5.1}$$

em que k_z é o vetor de onda na direção z, $k^2 = k_z^2 + \gamma^2$, γ é o módulo do vetor de onda transverso e

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.2}$$

é o gradiente transversal. Multiplicando ambos os lados por $-\hat{\mathbf{z}}\times$ obtemos

$$-\hat{\mathbf{z}} \times \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{TM} \\ Z\mathbf{H}^{TE} \end{bmatrix} = -\frac{k_z}{k}\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \begin{bmatrix} -Z\mathbf{H}^{TM} \\ \mathbf{E}^{TE} \end{bmatrix} = -E_0\hat{\mathbf{z}} \times \left[\hat{\mathbf{z}} + i\frac{k_z}{\gamma^2}\frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right] g(\mathbf{r}), \tag{5.3}$$

que nos permite obter

$$\begin{bmatrix} -Z\mathbf{H}^{TM} \\ \mathbf{E}^{TE} \end{bmatrix} = E_0\frac{k}{\gamma^2}\left[-i\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{d\boldsymbol{\rho}}\right] g(\mathbf{r}). \tag{5.4}$$

Estes mesmos campos, no espaço de Fourier são dados por (lembrando que os valores sem linha são dados de entrada do problema, e as variáveis com linha são da descrição do problema)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TM}(\mathbf{k}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TE}(\mathbf{k}') \end{bmatrix} = E_0 G(\mathbf{k}') \left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z \gamma'}{\gamma^2} \hat{\boldsymbol{\gamma}}' \right], \tag{5.5}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{TE}(\mathbf{k}') \\ -Z\boldsymbol{\mathcal{H}}^{TM}(\mathbf{k}') \end{bmatrix} = E_0 \frac{k\gamma'}{\gamma^2} G(\mathbf{k}') \hat{\boldsymbol{\zeta}}'. \tag{5.6}$$

Por outro lado, sabemos que a função de onda é dada por

$$g(\mathbf{r}') = g_\rho(\boldsymbol{\rho}') e^{ik_z' z'}. \tag{5.7}$$

Deste modo, temos

$$\mathcal{F}\Big\{ g(\mathbf{r}') \Big\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r' \; g_\rho(\boldsymbol{\rho}') e^{ik_z' z'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{2\pi}\delta(k_z' - k_z) G_\rho(\boldsymbol{\gamma}'), \tag{5.8}$$

em que

$$G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = \mathcal{F}\Big\{ g_\rho(\boldsymbol{\rho}') \Big\} = \frac{1}{2\pi} \int d^2r' \; g_\rho(\boldsymbol{\rho}') e^{-i\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{\gamma}'} \tag{5.9}$$

é a transformada de Fourier no plano xy da função $g_\rho(\mathbf{r}')$. Entretanto, como sabemos, a função $g_\rho(\mathbf{r}')$ obedece à equação de onda em duas dimensões

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{\rho}^2} g_\rho(\boldsymbol{\rho}') = -\gamma^2 g_\rho(\boldsymbol{\rho}'). \tag{5.10}$$

No espaço de Fourier esta equação se torna

$$-(\gamma'^2 - \gamma^2) G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = 0, \tag{5.11}$$

o que nos diz que $G_\rho(\boldsymbol{\gamma}')$ a equação de onda em duas dimensões é obedecida para todos os pontos se e somente se

$$G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma}. \tag{5.12}$$

Deste modo, vamos ter que

$$G(\mathbf{k}') = \sqrt{2\pi} G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\gamma} \delta(k_z' - k_z) = \sqrt{2\pi} G_\gamma(\zeta') \frac{\delta(k' - k)}{k'^2} \frac{\delta(\xi' - \xi)}{\sin \xi}. \tag{5.13}$$

Substituindo, usando as propriedades das deltas de Dirac, vamos obter para os campos eletromagnéticos

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}^{TM}(\hat{\mathbf{k}}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}^{TE}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix} = \sqrt{2\pi}E_0 G_\gamma(\zeta')\frac{\delta(\xi'-\xi)}{\sin\xi}\left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma}\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\right], \tag{5.14}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}^{TE}(\hat{\mathbf{k}}') \\ -Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}^{TM}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix} = \sqrt{2\pi}E_0 \frac{k}{\gamma} G_\gamma(\zeta')\frac{\delta(\xi'-\xi)}{\sin\xi}\hat{\boldsymbol{\zeta}}', \tag{5.15}$$

uma vez que a delta de Dirac em coordenadas cilíndricas e esféricas compartilham da relação

$$\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) = \frac{\delta(\gamma'-\gamma)}{\gamma}\delta(k_z'-k_z)\delta(\zeta'-\zeta) = \frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\frac{\delta(\xi'-\xi)}{\sin\xi'}\delta(\zeta'-\zeta). \tag{5.16}$$

Deste modo, podemos inserir os campos calculados na expressão dos coeficientes de forma

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} = \frac{i^p}{E_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}')\cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Veja que o superíndice TE/TM é relativo à expansão em ondas parciais, e não ao modo propagante do guia de onda. Deste modo, escreveremos $G^{TE/TM}[TE/TM]$, em que o superíndice se refere ao modo da expansão em ondas parciais, e termo entre colchetes ao modo propagante no guia de onda.

Sabendo que os harmônicos esféricos são dados por

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(k_z/k)e^{im\zeta} = \sqrt{\frac{l(l+1)}{4\pi}}K^{lm}P_l^m(k_z/k)e^{im\zeta}, \tag{5.18}$$

em que $k_z/k = \cos\xi$, e por questão de conveniência definimos

$$K^{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}. \tag{5.19}$$

Substituindo tudo isto, vamos obter para os coeficientes, observando apenas que as componentes do operador de momento angular mantém a relação

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{k_z}{\gamma}\mathcal{L}_z, \tag{5.20}$$

de modo que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\cdot\left[\hat{\mathbf{z}} - \frac{k_z}{\gamma}\hat{\boldsymbol{\gamma}}'\right] = \left(\mathcal{L}_z - \frac{k_z}{\gamma}\mathcal{L}_\gamma\right) = \left(1+\frac{k_z^2}{\gamma^2}\right)\mathcal{L}_z = \frac{k^2}{\gamma^2}\mathcal{L}_z, \tag{5.21}$$

e que $\mathcal{L}_z Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = m Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}')$. A outra componente é dada por

$$\mathcal{L}_\zeta = -i\left(k_z \frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial k_z}\right), \tag{5.22}$$

de modo que a primeira componente não nos interessa, e como

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') \propto P_l^m(k_z/k), \tag{5.23}$$

então podemos fazer

$$\mathcal{L}_\zeta = i\frac{\gamma}{k}\frac{\partial}{\partial(k_z/k)}. \tag{5.24}$$

Obtemos assim

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TE}[TM] \\ G_{pq}^{TM}[TE] \end{bmatrix} = \frac{i^p}{\sqrt{\pi}} q \frac{k^2}{\gamma^2} K^{pq} P_p^q\left(\frac{k_z}{k}\right) G_\gamma^q, \tag{5.25}$$

$$\begin{bmatrix} -G_{pq}^{TM}[TM] \\ G_{pq}^{TE}[TE] \end{bmatrix} = \frac{i^{p+1}}{\sqrt{\pi}} K^{pq} P_p^{q\prime}\left(\frac{k_z}{k}\right) G_\gamma^q, \tag{5.26}$$

em que $P_p^{q\prime}(x)$ é a derivada de $P_p^q(x)$ e

$$G_\gamma^q = \int d\zeta' \; G_\gamma(\zeta') e^{-iq\zeta'}. \tag{5.27}$$

Da equação acima vemos que G_γ^q corresponde aos coeficientes da expansão em série de Fourier de $G_\gamma(\zeta')$. Vamos em seguida, analisar os casos dos guias de onda retangular e cilíndrico. Esta expressão generaliza a expansão em ondas parciais para qualquer guia de onda, de modo que os termos da expansão dependem apenas de uma coordenada no espaço de Fourier, o que faz todo o sentido já que o comprimento de onda (e conseqüentemente k) é definido de antemão (onda monocromática), e γ é definido pela geometria do guia de onda, ou seja, há uma escolha em quais são os campos que se propagam no interior do guia. A única variável livre passa a ser então a inclinação ζ do vetor de onda $\mathbf{k}$ em relação ao eixo x, e de como a amplitude do espectro varia com ζ, ou seja, $G_\gamma(\zeta)$.

Analisando com cuidado a expressão dos coeficientes de forma, pode-se perceber que eles têm uma estrutura de transformada que leva o problema de variáveis contínuas (k_x, k_y, k_z) para variáveis discretas (p, q). No caso dos guias de onda, esta transformada é uma série de Fourier. No caso mais geral, as transformadas em harmônicos esféricos (que são uma generalização da transformada de Fourier).

5.1 Guia de onda retangular

O guia de onda retangular[4], de lado maior a na direção x e lado menor b na direção y depende das componentes de vetor de onda $k_a^m = m\pi/a$ e $k_b^n = n\pi/b$, o que nos dá as constantes $\gamma_{mn}^2 = k_a^{m\,2} + k_b^{n\,2}$ e $\zeta_{mn} = \arctan k_b^n/k_a^m$, com m e n inteiros positivos, e com o canto esquerdo inferior na origem. Neste sistema de referência temos dois modos característicos, expressos pelas funções

$$\begin{aligned} g_\rho^{TE}(\boldsymbol{\rho}) &= \cos(k_a^m x)\cos(k_b^n y) \qquad (5.28)\\ g_\rho^{TM}(\boldsymbol{\rho}) &= \sin(k_a^m x)\sin(k_b^n y) \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Entretanto, como já dissemos, não estamos interessados na expansão em ondas parciais na origem do guia de onda, mas em um ponto arbitrário dentro do guia de onda, de modo que a expansão se dê em torno de um ponto $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$. Deste modo, escrevendo as funções acima como exponenciais, teremos

$$\begin{aligned} 4g_\rho^{TE}(\boldsymbol{\rho}) &= e^{i(k_a^m x + k_b^n y)} + e^{-i(k_a^m x + k_b^n y)} + e^{i(k_a^m x - k_b^n y)} + e^{-i(k_a^m x - k_b^n y)}, \qquad (5.30)\\ -4g_\rho^{TM}(\boldsymbol{\rho}) &= e^{i(k_a^m x + k_b^n y)} + e^{-i(k_a^m x + k_b^n y)} - e^{i(k_a^m x - k_b^n y)} - e^{-i(k_a^m x - k_b^n y)}. \qquad (5.31)\end{aligned}$$

No espaço de Fourier essas funções geram quatro deltas de Dirac, posicionadas nos pontos

$$\begin{aligned} (k_a^m, k_b^n) &\to (\gamma_{mn}, \zeta_{mn}), \qquad (5.32)\\ (k_a^m, -k_b^n) &\to (\gamma_{mn}, -\zeta_{mn}), \qquad (5.33)\\ (-k_a^m, k_b^n) &\to (\gamma_{mn}, -\zeta_{mn} \pm \pi), \qquad (5.34)\\ (-k_a^m, -k_b^n) &\to (\gamma_{mn}, \zeta_{mn} \pm \pi), \qquad (5.35)\end{aligned}$$

sendo que o lado direito nos dá os pontos em coordenadas cilíndricas $(k_x, k_y) \to (\gamma, \zeta)$, em que tanto faz usar $+\pi$ ou $-\pi$ para localizar o ponto. Deste modo, fazendo a mudança de coordenadas e colocando as deltas de Dirac (multiplicadas por 2π, sendo $4\pi^2$, 2π para a delta em cada coordenada, dividido por 2π da definição da transformada de Fourier no plano xy), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2G_\gamma^{TE}(\zeta')}{\pi} &= e^{i(k_a^m x_0 + k_b^n y_0)}\delta(\zeta' - \zeta_{mn}) + e^{-i(k_a^m x_0 + k_b^n y_0)}\delta(\zeta' - \zeta_{mn} + \pi) + \\ &+ e^{i(k_a^m x_0 - k_b^n y_0)}\delta(\zeta' + \zeta_{mn}) + e^{-i(k_a^m x_0 - k_b^n y_0)}\delta(\zeta' + \zeta_{mn} + \pi), \qquad (5.36)\\ -\frac{2G_\gamma^{TM}(\zeta')}{\pi} &= e^{i(k_a^m x_0 + k_b^n y_0)}\delta(\zeta' - \zeta_{mn}) + e^{-i(k_a^m x_0 + k_b^n y_0)}\delta(\zeta' - \zeta_{mn} + \pi) + \\ &- e^{i(k_a^m x_0 - k_b^n y_0)}\delta(\zeta' + \zeta_{mn}) - e^{-i(k_a^m x_0 - k_b^n y_0)}\delta(\zeta' + \zeta_{mn} + \pi). \qquad (5.37)\end{aligned}$$

Calculando então os termos de Fourier G^q_γ, obtemos

$$\begin{aligned}\pm\frac{2G^q_\gamma[TE/TM]}{\pi} &= \left(e^{i(k_a^m x_0+k_b^n y_0)}+(-1)^q e^{-i(k_a^m x_0+k_b^n y_0)}\right)e^{-iq\zeta_{mn}}+\\ &\pm \left(e^{i(k_a^m x_0-k_b^n y_0)}+(-1)^q e^{-i(k_a^m x_0-k_b^n y_0)}\right)e^{iq\zeta_{mn}},\end{aligned} \tag{5.38}$$

em que o sinal $+$ corresponde ao termo TE e o sinal $-$ ao termo TM. Podemos ainda fazer

$$\begin{aligned}\pm\frac{2G^q_\gamma[TE/TM]}{\pi} &= i^{-q}\left(i^q e^{i(k_a^m x_0+k_b^n y_0)}+(-i)^q e^{-i(k_a^m x_0+k_b^n y_0)}\right)e^{-iq\zeta_{mn}}+\\ &\pm i^{-q}\left(i^q e^{i(k_a^m x_0-k_b^n y_0)}+(-i)^q e^{-i(k_a^m x_0-k_b^n y_0)}\right)e^{iq\zeta_{mn}},\end{aligned} \tag{5.39}$$

que pode ser reescrito como

$$G^q_\gamma[TE/TM]=\pi i^{-q}\left(\mathfrak{Re}\left\{i^q e^{i(k_a^m x_0-k_b^n y_0)}\right\}e^{iq\zeta_{mn}}\pm\mathfrak{Re}\left\{i^q e^{i(k_a^m x_0+k_b^n y_0)}\right\}e^{-iq\zeta_{mn}}\right) \tag{5.40}$$

Adicionando este resultado às equações gerais dos termos para os guias de onda dadas em (5.25) e (5.26) obtemos, com relativa facilidade, os coeficientes da expansão em ondas parciais para o guia de onda retangular. Devido á simetria retangular, os coeficientes no espaço de Fourier se tornam deltas de Dirac, o que nos diz que devemos somar muitas ondas parciais para a reconstrução correta do campo. Entretanto, essa soma não é infinita, uma vez que os guias de onda, ao menos em sua seção transversal, são limitados, e como as funções esféricas de Bessel $j_n(x)$ de alta ordem vão tendendo a zero a partir de um certo valor x proporcional á ordem n da função $j_n(x)$, somar muitos termos vai significar somar zeros. Já na direção longitudinal, há uma simetria de translação que pode ser explorada, o que torna a expansão realizável.

5.2 Guia de onda cilíndrico

A soluções escalares para os campos eletromagnéticos em termos de coordenadas cilíndricas com origem no eixo para os guias de onda metálicos são dadas por $g_\rho(\boldsymbol{\rho}) = J_m(\gamma_{mn}\rho)e^{\pm im\phi}$, sendo que o modo TE é dado por $\gamma_{mn} = \xi_{mn}/R$, em que ξ_{mn} é a n-ésima raiz de $J_m(x)$, e o modo TM por $\gamma_{mn} = \xi'_{mn}/R$, em que ξ'_{mn} é a n-ésima raiz da derivada $J'_m(x)$ de $J_m(x)$.

Definimos então a função

$$\psi_m(\mathbf{k};\mathbf{r}) = J_m(\gamma\rho)e^{\pm im\phi}e^{ik_z z} \tag{5.41}$$

A razão de definirmos a função ψ_m vem do fato de que a usaremos várias vezes ao longo do trabalho, mas principalmente pelo que se segue. Como no caso do guia de onda retangular, estamos interessados na expansão em um ponto arbitrário dentro do guia de onda, não necessariamente na origem. Deste modo, vamos calcular a expansão em um ponto $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$, de modo que a mudança de coordenada para a função ψ_m pode ser escrita como uma convolução[50]:

$$\psi_m(\mathbf{k};\mathbf{r}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0)\psi_j(\mathbf{k};\mathbf{r}') \tag{5.42}$$

Vamos então calcular a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{\psi_m(\mathbf{k};\mathbf{r}')\} = \Psi_m(\mathbf{k};\mathbf{k}')$ ou seja,

$$\Psi_m(\mathbf{k};\mathbf{k}') = \sqrt{2\pi}\delta(k_z' - k_z)G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') \tag{5.43}$$

Escrevendo a transformada de Fourier no plano xy em coordenadas esféricas obtemos

$$G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = \frac{1}{2\pi}\int d\rho'\ \rho' J_m(\gamma\rho')\int d\phi'\ e^{-i\gamma'\rho'\cos(\phi'-\zeta')}e^{\pm im\phi'}, \tag{5.44}$$

que resolvendo em $d\phi'$ nos dá

$$G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = (\pm i)^m e^{-im\zeta'}\int d\rho'\ \rho' J_m(\gamma\rho')J_m(\gamma'\rho'). \tag{5.45}$$

Integrando em $d\rho'$ obtemos a delta de Dirac

$$G_\rho(\boldsymbol{\gamma}') = (\pm i)^m e^{-im\zeta'}\frac{\delta(\gamma'-\gamma)}{\gamma'}, \tag{5.46}$$

conforme era esperado. Substituindo o resultado acima na equação (5.42) obtemos a expressão para o caso mais geral, ou seja,

$$G_\gamma(\zeta') = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-i)^j e^{\pm ij\zeta'}\psi_{m-j}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0), \tag{5.47}$$

cujos termos da série de Fourier são dados por

$$G_\gamma^q = 2\pi(-i)^{\pm q}\psi_{m\mp q}(\mathbf{k};\mathbf{r}_0). \tag{5.48}$$

Para o caso especial em $\mathbf{r}_0 = 0$ temos que $J_{m-q}(x) = \delta_{m,q}$, o que faz com que

$$G_\gamma^q \;=\; 2\pi(-i)^{\pm m}e^{\pm im\zeta'}\delta_{m,\pm q} \tag{5.49}$$

o que nos diz que a expansão em ondas parciais não depende mais da somatória em q, o que faz todo o sentido já que temos total simetria ao longo do eixo. Os coeficientes da expansão são então dados substituindo (5.48) ou (5.49) em (5.25) e (5.26). O caso do guia de onda cilíndrico é de certo modo inverso ao do guia de onda retangular, já que obtemos deltas nas transformadas. Deste modo, poderíamos com bem menos termos que no guia de onda retangular, descrever um problema de grandezas semelhantes (basicamente dimensões do guia de onda e comprimento de onda propagante). Interessante notar que, para qualquer outro problema, este deverá ser um caso intermediário entre o guia de onda cilíndrico e o retangular no que se refere ao número de ondas parciais a somar, já que estes dois casos são extremos, um com deltas de Dirac no espaço de Fourier, o que implicaria teoricamente infinitas ondas parciais (o que na prática não acontece, como já discutimos), e outro com deltas de Kronecker no espaço da transformada em harmônico esférico vetorial, o que implica em algumas (ou uma única) ondas parciais.

Capítulo 6

Solucão completa dos feixes tipo Davis

6.1 Feixes de Davis

A denominação de feixe tipo Davis se refere ao método de Davis[51] que busca soluções para o potencial vetor $\mathbf{A}$ que tenham apenas uma componente. Um exemplo de feixe de Davis são os feixes de Bessel. Para se deduzir todas as componentes dos campos elétrico e magnético de um feixe de Bessel que satisfaça à equação de Maxwell a partir de uma função de onda escalar, deve-se seguir a sugestão de Davis[51] e procurar soluções para o potencial vetor $\mathbf{A}$ que tenham uma única componente. É claro, deve-se lembrar que somente em coordenadas retangulares as componentes de um potencial vetor que obedeçam à equação de onda vetorial também satisfazem a equação de onda escalar.

O método de Davis[51] consiste em tomar uma função escalar que obedeça à equação de onda como sendo a única componente do vetor de onda, ou seja, fazer $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{u}}$ em que $\hat{\mathbf{u}}$ é uma direção arbitrária. Devemos então calcular a transformada de Fourier de $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{u}}$, em que $\hat{\mathbf{u}}$ representa uma direção qualquer.

Caso especial I – campos do tipo TE/TM

Para um caso genérico de $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ temos que calcular $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}}$, ou seja

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\gamma}{k}\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{k_z}{k}\hat{\mathbf{z}}\right) \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\gamma}{k}\hat{\boldsymbol{\zeta}}. \tag{6.1}$$

Deste modo, estamos interessados nos componentes de momento angular na direção $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$, dada por

$$\mathcal{L}_\zeta = -i\left(k_z\frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial k_z}\right), \tag{6.2}$$

de modo que a primeira componente não nos interessa, e como

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') = Y_{lm}(k_z/k, \zeta) = \sqrt{\frac{l(l+1)}{4\pi}} K^{lm} P_l^m(k_z/k) e^{im\zeta}, \tag{6.3}$$

então podemos fazer

$$\mathcal{L}_\zeta = i\frac{\gamma}{k}\frac{\partial}{\partial(k_z/k)}, \tag{6.4}$$

e daí

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}}\right) = -\frac{\gamma}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} = -\frac{\gamma}{k}\left(\frac{\mathcal{L}_\zeta Y_{pq}}{\sqrt{p(p+1)}}\right)^*, \tag{6.5}$$

o que vai nos dar

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{z}}\right) = \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\frac{\gamma^2}{k^2} K^{pq} P_p^{q\prime}(k_z/k) e^{-iq\zeta}. \tag{6.6}$$

Com este resultado, resta-nos integrar sobre a superfície esférica para obtermos G^{TM}. Outra forma de verificar este resultado é observar que

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = -i\frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ - e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}}, \tag{6.7}$$

de modo que

$$-\frac{\gamma}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} = i\frac{\gamma}{k}\frac{e^{-i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_+ - e^{i\zeta}\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\mathcal{L}_-\hat{\mathbf{e}}_+ + \mathcal{L}_+\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2l(l+1)}} Y_{pq}\right)^* \tag{6.8}$$

$$= i\frac{\gamma}{k}\frac{c_-^{pq} e^{-i\zeta} Y^*_{p,q-1} - c_+^{pq} e^{i\zeta} Y^*_{p,q+1}}{2\sqrt{l(l+1)}}, \tag{6.9}$$

e abrindo os termos dos harmônicos esféricos

$$-\frac{\gamma}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{i}{2\sqrt{4\pi}}\frac{\gamma}{k}\Big(c_-^{pq} K^{p,q-1} P_p^{q-1}(k_z/k) - c_+^{pq} K^{p,q+1} P_p^{q+1}(k_z/k)\Big) e^{-iq\zeta}. \tag{6.10}$$

Este resultado ainda nos dá uma relação de recorrência para os Polinômios Associados de Legendre, como sendo

$$2\frac{\gamma}{k} K^{pq} P_p^{q\prime}(k_z/k) = c_-^{pq} K^{p,q-1} P_p^{q-1}(k_z/k) - c_+^{pq} K^{p,q+1} P_p^{q+1}(k_z/k). \tag{6.11}$$

Para o caso em que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ o resultado ainda é mais simples, uma vez que

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{iq}{\sqrt{4\pi}} K^{pq} P_p^q(k_z/k) e^{-iq\zeta}. \tag{6.12}$$

Caso especial II – campos circularmente polarizados

Outro caso importante é aquele em que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_\pm$. Para o o caso G^{TE}, novamente obtemos um resultado simples, ou seja,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm = \left(\frac{\mathcal{L}_\mp Y_{pq}}{\sqrt{2l(l+1)}} \right)^* = \frac{c_\mp^{pq} Y^*_{pq\mp1}}{\sqrt{2l(l+1)}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} c_\mp^{pq} K^{p,q\mp1} P_p^{q\mp1}(k_z/k) e^{-i(q\mp1)\zeta}. \tag{6.13}$$

Para o caso G^{TM} precisamos da identidade

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_\pm = \mp i \left(\frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{e}}_\pm - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{k} e^{\pm i\zeta} \hat{\mathbf{z}} \right), \tag{6.14}$$

com a qual obtemos

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_\pm \right) = \mp i \left(\frac{k_z}{k} \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{k} e^{\pm i\zeta} \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right). \tag{6.15}$$

Todos os termos do lado direito da equação (6.15) já foram calculados anteriormente, seja no caso especial I ou no caso especial II.

6.2 O feixe de Bessel

Um feixe de Bessel é um campo eletromagnético, acústico ou mesmo gravitacional, descrito por uma função de Bessel do primeiro tipo[52,53]. É importante ressaltar que o feixe de Bessel de ordem zero tem seu máximo de amplitude na origem, ao passo que os de ordem superiores possuem uma singularidade de fase axial transversa à origem, em que a amplitude se anula como esperado pela descrição matemática das funções de Bessel de alta ordem. Um feixe de Bessel verdadeiro é não-difrativo, ou seja, ao se propagar ele não difrata nem espalha, o que é fora do comum se compararmos com o comportamento ordinário da luz, ou do som, que se espalham após serem focalizados em um ponto pequeno.

Como no caso da onda plana, um feixe de Bessel não pode ser criado, já que o mesmo não é limitado e requeriria uma quantidade infinita de energia. Entretanto, aproximações razoáveis podem ser feitas, e são muito importantes em muitas aplicações ópticas devido ao fato de exibirem pouca ou nenhuma difração em uma distância limitada. Além disso, são ainda auto-recuperáveis, de modo que o feixe pode ser parcialmente obstruído em um ponto mas se reconstruirá em um ponto logo a seguir no eixo do feixe.

Um feixe de Bessel tem amplitude considerável apenas para distâncias da ordem $\rho \leq 1/\gamma$, e mantém o mesmo perfil radial a uma distância arbitrariamente longa. Este comportamento contradiz o senso comum de que um feixe de extensão transversal mínima a difrata para preencher um cone de ângulo $1/a$. Deste modo, o feixe de Bessel é conhecido como sem difração (“*diffraction free*”). Aproximações de um feixe de Bessel são feitas na prática, focalizando-se um feixe gaussiano com uma lente tipo axicon que gera o feixe chamado de Gauss-Bessel

6.2.1 Soluções para o Potencial Vetor

Buscamos soluções da equação de onda do potencial vetor

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0. \tag{6.16}$$

Sabe-se que, em coordenadas cilíndricas o operador laplaciano escalar é dado por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \tag{6.17}$$

e o operador laplaciano vetorial por,

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\rho = \nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2}\left(A_\rho + 2\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right), \tag{6.18}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{\rho^2}\left(A_\phi - 2\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right), \tag{6.19}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_z = \nabla^2 A_z. \tag{6.20}$$

O feixe de Bessel é obtido tomando funções de onda escalares na forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\rho) e^{i(k_z z \pm m\phi)}, \tag{6.21}$$

em que $m \geq 0$. Temos ainda que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \pm i m \psi, \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i k_z \psi, \tag{6.23}$$

o que leva à equação

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + k_z^2\right)\psi. \tag{6.24}$$

Pelo método de Davis, podemos escolher arbitrariamente o potencial vetor em uma direção arbitrária $\hat{\mathbf{u}}$. Como já mostramos anteriormente, existem dois casos particulares interessantes. O primeiro caso em que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$, o que vai fazer com que $\mathbf{H}$ não tenha componentes em $\hat{\mathbf{z}}$, o que define um caso transversal magnético TM. Correspondente a cada solução TM das equações de Maxwell no espaço livre, existe um campo transversal elétrico TE obtido por meio das transformações duais $\mathbf{E}^{TE} \to Z\mathbf{H}^{TM}$ e $Z\mathbf{H}^{TE} \to -\mathbf{E}^{TM}$. O segundo caso em que $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_\pm$ corresponde ao feixe circularmente polarizado, talvez o caso fisicamente mais interessante.

Vamos então resolver a equação de onda

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0, \tag{6.25}$$

para dois casos, o caso $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{z}}$ e o caso $\mathbf{A} = \psi(\hat{\boldsymbol{\rho}} \pm i\hat{\boldsymbol{\phi}})$.

Para $\mathbf{A} = \psi\hat{\mathbf{z}}$ teremos

$$\nabla^2\mathbf{A}\Big|_\rho = 0, \tag{6.26}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}\Big|_\phi = 0, \tag{6.27}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}\Big|_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + k_z^2\right)\psi, \tag{6.28}$$

o que nos leva a seguinte equação para ψ, sendo que $k^2 - k_z^2 = \gamma^2$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)\psi = 0, \tag{6.29}$$

cuja solução é

$$\psi(\mathbf{r},t) = J_m(\gamma\rho)e^{i(k_z z \pm m\phi)}. \tag{6.30}$$

Para $\mathbf{A} = \psi(\hat{\boldsymbol{\rho}} \pm i\hat{\boldsymbol{\phi}})$ temos que $A_\rho = \psi$ e $A_\phi = \pm i\psi$

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\rho = \nabla^2\psi - \frac{1-2m}{\rho^2}\psi, \tag{6.31}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\phi = \pm i\left(\nabla^2\psi - \frac{1-2m}{\rho^2}\psi\right), \tag{6.32}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_z = 0. \tag{6.33}$$

Substituindo na equação de onda obtemos a equação diferencial para ψ,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \left(\gamma^2 - \frac{(m-1)^2}{\rho^2}\right)\psi = 0. \tag{6.34}$$

cuja solução é

$$\psi(\mathbf{r}, t) = J_{m-1}(\gamma\rho)e^{i(k_z z \pm m\phi)}. \tag{6.35}$$

Por outro lado, temos que $\hat{\boldsymbol{\rho}} \pm i\hat{\boldsymbol{\phi}} = e^{\mp i\phi}\hat{\mathbf{e}}_\pm$ e deste modo

$$\mathbf{A} = J_{m-1}(\gamma\rho)e^{i(k_z z \pm (m-1)\phi)}\hat{\mathbf{e}}_\pm. \tag{6.36}$$

Podemos então escrever as soluções em função de

$$\psi_m = J_m(\gamma\rho)e^{i(k_z z \pm m\phi)}, \tag{6.37}$$

o que leva a duas soluções para o feixe de Bessel

$$\mathbf{A}_I = \psi_m \hat{\mathbf{z}}, \tag{6.38}$$

$$\mathbf{A}_{II} = \psi_{m-1}\hat{\mathbf{e}}_\pm, \tag{6.39}$$

sendo que a primeira $\mathbf{A}_I$ é um tipo TM/TE, e a segunda $\mathbf{A}_{II}$ um tipo circularmente polarizada. Note que a solução $\mathbf{A}_I$ acima é TM.

Uma vez que as funções de Bessel são reais, superfícies de fase constante (num tempo fixo) das funções de onda não são planos de z constante, mas "roscas". O vetor de onda $\mathbf{k} = \nabla(k_z z \pm m\phi) = k_z\hat{\mathbf{z}} \pm \frac{m}{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ que é perpendicular às superfícies de fase constante tem linhas que formam hélices de raio constante ρ. O vetor de onda $\mathbf{k}$ faz um ângulo $\theta_\mathbf{k}$ com $\hat{\mathbf{z}}$ dado por

$$\tan\theta_\mathbf{k} = \pm\frac{m}{k_z\rho}. \tag{6.40}$$

Vamos utilizar o referencial da esfera, de modo que o feixe agora se encontra deslocado de sua posição original para uma posição $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$. Deste modo, usando o teorema da adição vamos temos

$$\psi_m(\mathbf{k}, \mathbf{r}'') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0)\psi_j(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \tag{6.41}$$

ou seja,

$$\Psi_m(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0)\Psi_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \tag{6.42}$$

Entretanto, esta função já é conhecida do guia de onda cilíndrico, mostrada na seção 5.2, de modo que o potencial vetor é dado por

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}} = \sqrt{2\pi}\frac{\delta(\xi' - \xi)}{\sin\xi'} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0)\Big((-i)^j e^{\pm ij\zeta'}\Big)\hat{\mathbf{u}}. \tag{6.43}$$

Os coeficientes da expansão são, então, dados por

$$\begin{aligned} G_{pq}^{TM} &= i^{p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\Big(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}\Big), &(6.44)\\ G_{pq}^{TE} &= i^{p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\Omega\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{k}}, &(6.45)\end{aligned}$$

que podem ser escritos como

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = 2i^{p+1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_{m-j}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0)(-i)^j\int d\zeta\ e^{\pm ij\zeta'}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\Big(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{u}}\Big) \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

Os termos entre colchetes do lado direito já foram calculados na seção 6.1. Substituindo esses resultados na equação dos coeficientes obtem-se, para o caso I,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\Big(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{z}}\Big) &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\frac{\gamma^2}{k^2}K^{pq}P_p^{q\prime}(k_z/k)e^{-iq\zeta}, &(6.47)\\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^{*}\cdot\hat{\mathbf{z}} &= \frac{iq}{\sqrt{4\pi}}K^{pq}P_p^{q}(k_z/k)e^{-iq\zeta}, &(6.48)\end{aligned}$$

que leva ao resultado final

$$\left[\begin{array}{c} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{array}\right]_I = -\frac{i^p K^{pq}}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-j}(\mathbf{k},\mathbf{r}_0)(-i)^j \left[\begin{array}{c} \frac{\gamma^2}{k^2} P_p^{q\prime}(k_z/k) \\ q P_p^q(k_z/k) \end{array}\right] \int d\zeta \; e^{\pm i(j\mp q)\zeta'}. \quad (6.49)$$

que finalmente nos dá

$$\left[\begin{array}{c} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{array}\right]_I = -i^{p\mp q}\sqrt{4\pi}\psi_{m\mp q}(\mathbf{k},\mathbf{r}_0) K^{pq} \left[\begin{array}{c} \frac{\gamma^2}{k^2} P_p^{q\prime}(k_z/k) \\ q P_p^q(k_z/k) \end{array}\right]. \quad (6.50)$$

Para o caso II temos,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} c_\mp^{pq} K^{p,q\mp 1} P_p^{q\mp 1}(k_z/k) e^{-i(q\mp 1)\zeta}, \quad (6.51)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^* \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_\pm\right) \pm i\frac{k_z}{k}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{8\pi}} q\frac{\gamma}{k} K^{pq} P_p^q(k_z/k) e^{-i(q\mp 1)\zeta}, \quad (6.52)$$

considerando apenas o caso positivo de ψ_m (para não confundir com $\pm$ da orientação do potencial vetor), temos

$$\left[\begin{array}{c} G_{pq}^{TM} \pm i\frac{k_z}{k} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TE} \end{array}\right]_{II} = \frac{-i^p}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{m-1-j}(\mathbf{k},\mathbf{r}_0) i^{-j} \left[\begin{array}{c} \mp q\frac{\gamma}{k} K^{pq} P_p^q(k_z/k) \\ c_\mp^{pq} K^{p,q\mp 1} P_p^{q\mp 1}(k_z/k) \end{array}\right] \times$$
$$\times \int d\zeta \; e^{i(j-q\pm 1)\zeta'}, \quad (6.53)$$

o que finalmente fornece

$$\left[\begin{array}{c} G_{pq}^{TM} \pm i\frac{k_z}{k} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TE} \end{array}\right]_{II} = -\sqrt{2\pi} i^{p-q\mp 1} \psi_{m-1-q\mp 1}(\mathbf{k},\mathbf{r}_0) \left[\begin{array}{c} \mp q\frac{\gamma}{k} K^{pq} P_p^q(k_z/k) \\ c_\mp^{pq} K^{p,q\mp 1} P_p^{q\mp 1}(k_z/k) \end{array}\right]. \quad (6.54)$$

Deste modo obtivemos os coeficientes para a expansão de dois tipos de feixes de Bessel. Entretanto, este método pode ser estendido para qualquer feixe de Davis, obtendo-se funções analíticas. Se a transformada de Fourier da função escalar for analítica, os coeficientes também serão analíticos.

Capítulo 7

Teoria Generalizada de Lorenz-Mie para o Espalhamento

Mie resolveu o problema do espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esféra dielétrica expandindo o campo incidente na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} G_{nm}^{TM} \\ G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -G_{nm}^{TE} \\ G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^i(\mathbf{r}), \tag{7.1}$$

em que

$$\mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}) = j_p(kr)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{7.2}$$

$$\mathbf{N}_{nm}^i(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{nm}^i(\mathbf{r}). \tag{7.3}$$

O campo espalhado é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} b_n G_{nm}^{TM} \\ a_n G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -a_n G_{nm}^{TE} \\ b_n G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^s(\mathbf{r}), \tag{7.4}$$

em que

$$\mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}) = h_p^{(kr)}(kr)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{7.5}$$

$$\mathbf{N}_{nm}^s(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{nm}^s(\mathbf{r}), \tag{7.6}$$

e o campo no interior da esfera por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_w(\mathbf{r}) \\ Z'\mathbf{H}_w(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_0 \sum_{nm} \begin{bmatrix} d_n G_{nm}^{TM} \\ c_n G_{nm}^{TE} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{nm}^w(\mathbf{r}) + \begin{bmatrix} -c_n G_{nm}^{TE} \\ d_n G_{nm}^{TM} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{nm}^w(\mathbf{r}), \tag{7.7}$$

em que

$$\mathbf{M}^w_{nm}(\mathbf{r}) = j_p(k'r)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{7.8}$$

$$\mathbf{N}^w_{nm}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{k}\nabla\times\mathbf{M}^w_{nm}(\mathbf{r}). \tag{7.9}$$

Aqui $M = n_s/n_0$, n_s é o índice de refração da esfera, n_0 o índice de refração do meio externo, k é número de onda do meio externo e k' o do meio interno, Z é a impedância do meio externo e Z' a impedância do meio interno (esfera), e $k' = Mk$ e $Zk/Z'k' = \mu/\mu'$.

Os campos eletromagnéticos devem satisfazer as equações de Maxwell em pontos onde ε e μ sejam contínuos, e, nas interfaces, às seguintes condições de contorno:

$$\hat{\mathbf{r}}\times\left(\mathbf{E}_{\text{in}} - \mathbf{E}_{\text{out}}\right) = 0, \tag{7.10}$$

$$\hat{\mathbf{r}}\times\left(\mathbf{H}_{\text{in}} - \mathbf{H}_{\text{out}}\right) = 0, \tag{7.11}$$

em que $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_w$, $\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_{\text{in}} = \mathbf{H}_w$ e $\mathbf{H}_{\text{out}} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$. Mas devemos nos lembrar de que

$$-i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{X}_{nm} = \mathbf{V}_{nm}, \tag{7.12}$$

$$-i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{V}_{nm} = \mathbf{X}_{nm}, \tag{7.13}$$

e como

$$\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{r}) = \left(j'_p(kr) + \frac{j_p(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{p(p+1)}\frac{j_p(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{7.14}$$

então

$$\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{nm}(\mathbf{r}) = iu_p(kr)\mathbf{V}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{7.15}$$

$$\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{r}) = i\left(u'_p(kr) + \frac{u_p(kr)}{kr}\right)\mathbf{X}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{7.16}$$

Aqui convém introduzir as funções de Ricatti-Bessel $v_n(x) = xu_n(x)$ em que $u_n(x)$ são funções esféricas de Bessel, dadas por

$$\psi_n(x) = xj_n(x), \tag{7.17}$$

$$\xi_n(x) = xh^{(1)}_n(x). \tag{7.18}$$

As derivadas das funções de Ricatti-Bessel são dadas por $v_n'(x) = xu_n'(x) + u_n(x)$, de modo que

$$\frac{v_n'(x)}{x} = u_n'(x) + \frac{u_n(x)}{x}. \tag{7.19}$$

Da equação acima pode-se perceber que estas funções aparecerão junto ao termo $\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}_{nm}$. As funções de Ricatti-Bessel por sua vez aparecerão quando multiplicarmos a equação dos termos de $\mathbf{M}_{nm}$. Juntando-se todas estas informações, vamos obter para uma esfera de raio a:

$$\begin{bmatrix} \xi_n(x) & -\frac{1}{M}\psi_n(Mx) \\ \xi_n'(x) & -\frac{\mu}{\mu'}\psi_n'(Mx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

para o caso TE, isto é, os índices que acompanham $\mathbf{M}$, e

$$\begin{bmatrix} \xi_n(x) & -\frac{\mu}{\mu'}\psi_n(Mx) \\ \xi_n'(x) & -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

para o caso TM, isto é, os índices que acompanham $\mathbf{N}$. Para simplificar fazemos $x = ka$, também conhecido como fator de tamanho. As soluções desses dois sistemas de equações são simples. Para o caso em que $\mu' \approx \mu$ temos

$$\begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TE}} \begin{bmatrix} -\psi_n'(Mx) & -\frac{1}{M}\psi_n(Mx) \\ -\xi_n'(x) & \xi_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

para o caso TE e para o caso TM

$$\begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^{TM}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{M}\psi_n'(Mx) & \psi_n(Mx) \\ -\xi_n'(x) & \xi_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) \end{bmatrix}. \tag{7.23}$$

Nestes casos $\Delta^{TE/TM}$ são os determinantes das respectivas matrizes. Estas equações características são independentes do feixe incidente. Os coeficientes dos campos espalhados e dos campos dentro da partícula são independentes do índice m devido à simetria esférica do espalhador. Caso a esfera fosse deformada os modos azimutais não seriam mais degenerados. Se o índice de refração relativo M for igual a um não existe o espalhador e os coeficientes de espalhamentos são nulos como esperado. Embora os determinantes Δ não admitam raízes reais, eles podem se tornar muito pequenos para determinados valores do fator de forma x, ocasionando uma ressonância de Mie. Em geral, o campo é espalhado em uma superposição de modos normais. Essas ressonâncias são chamadas de MDR – *morphology dependent resonances* ou de freqüências naturais de uma esfera, são complexas e os modos associados são denominados virtuais. Se as partes imaginárias destas freqüências complexas forem pequenas quando comparadas as partes reais, a freqüência natural corresponde aproximadamente à freqüência real da onda EM incidente que excita os vários modos EM.

As equações (7.22) e (7.23) em função de x para um dado M fixo possuem várias características: uma série de máximos e mínimos regularmente espaçados chamados de estrutura de interferência e uma estrutura de ondulações com picos irregularmente espaçados representando os modos eletromagnéticos normais de uma esfera. Este último também é conhecido como *morphology dependent resonance* – MDR – ou por *whispering gallery mode* – WGM (a nomeclatura MDR é mais apropriada).

As equações (7.22) e (7.23) implicam que podemos determinar os campos espalhados se conhecermos os coeficientes $G^{TE/TM}$ do campo incidente. O *calcanhar de Aquiles* deste método, portanto, se encontra no cálculo desses coeficientes, até então dados por

$$E_0 j_p(kr) \begin{bmatrix} G_{pq}^{TE} \\ G_{pq}^{TM} \end{bmatrix} = \int d\Omega(\hat{\mathbf{r}})\ \mathbf{X}_{pq}^*(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \tag{7.24}$$

que apresentam o problema já citado da função radial do lado esquerdo não cancelada na integração angular do lado direito. Com o resultado deste trabalho,

$$\begin{bmatrix} G_{pq}^{TM} \\ G_{pq}^{TE} \end{bmatrix} = i^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}')\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}^*(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}}(\hat{\mathbf{k}}') \end{bmatrix}, \tag{7.25}$$

essas dificuldades desaparecem. Deste modo, podemos agora conhecer o problema por inteiro em termos de ondas parciais, ou seja, o campo incidente, o campo interno e os campos espalhados.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Este trabalho representa um grande passo na teoria da expansão em ondas parciais ou também chamada expansão em funções de onda vetoriais esféricas sobre dois pontos de vista: o primeiro no sentido de que, o problema como apresentado até então, não estava completo já que deixava os termos da expansão com uma função radial não cancelada do lado esquerdo. Nunca fora mostrado que do lado direito surgiria uma função de Bessel esférica para anular a do lado esquerdo, independente do campo incidente. Além disso função esférica de Bessel possui raízes, o que levaria o sistema a uma singularidade. Neste sentido, demostramos que não há singularidade, e que a expansão é válida para todo o espaço, ou seja, os coeficientes são de fato constantes. Estes podem ser calculados através das transformadas de Fourier dos campos elétrico e magnético, ou apenas através da transformada de Fourier do Potencial vetor.

Além da expansão no domínio de Fourier demonstrar que as funções esféricas de Bessel se cancelam, completando o problema apresentado, as expressões obtidas para os coeficientes permitiram a obtenção de resultados analíticos em diversas situações, como nos casos dos guias de onda retangular e cilindrico e dos feixes de Bessel. O resultado para o caso geral de um guia de onda depende apenas da transformada de Fourier de uma função escalar g. Estes resultados demonstram o potencial do método, que permite obter com relativa facilidade os coeficientes da expansão para diversos tipos de feixe.

As perspectivas deste trabalho são muito grandes, uma vez que a metodologia introduzida permite expandir os horizontes em muitas áreas em que se usam ondas parciais esféricas. Mesmo para os feixes cujas integrais não tenham uma solução analítica, o simples fato de eliminarmos a função esférica de Bessel nos permite um cálculo numérico confiável. Vale lembrar que as oscilações rápidas das funções esféricas de Bessel trazem grandes problemas para o cálculo numérico das integrais, exigindo metodolgia especial para garantir a precisão numérica. Além disso, nosso formalismo transforma um problema de três dimensões em um problema de duas dimensões, ou mesmo uma, como no caso dos guias de onda e dos feixes de Bessel. Finalmente, mesmo que o resultado final seja numérico, a integral a ser obtida numericamente é realizada sobre uma superfície esférica finita, na qual as funções são bem comportadas. Considerando que existem muito grupos dedicados ao cálculo dessas expansões de funções de onda vetoriais esféricas, ainda hoje uma agenda importante em muitas áreas, do estudo da atmosfera a acoplamento em cavidades de altos Q utilizadas em óptica quântica, acreditamos que a contribuição deste trabalho será de grande utilidade.

Apêndice A

Sistemas de coordenadas

Utilizaremos um sistema de coordenadas sobreposto, ou seja, os sistemas cartesiano (x, y, z) cilíndrico (ρ, ϕ, z) e esférico $(r, \hat{\mathbf{r}})$ não são rotacionados, de modo que as coordenadas obedecem às seguintes relações:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \tag{A.1}$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \tag{A.2}$$

O ângulo θ pode ser definido por

$$\rho = r \sin\theta, \tag{A.3}$$

$$z = r \cos\theta, \tag{A.4}$$

e o ângulo ϕ por

$$x = \rho \cos\phi, \tag{A.5}$$

$$y = \rho \sin\phi, \tag{A.6}$$

de modo a podermos livremente passar de um sistema de coordenadas para outro. Temos ainda os vetores unitários

$$\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}, \tag{A.7}$$

$$\rho\hat{\boldsymbol{\phi}} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}, \tag{A.8}$$

e ainda

$$\begin{aligned} r\hat{\mathbf{r}} &= \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}, && \text{(A.9)} \\ r\hat{\boldsymbol{\theta}} &= -z\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\hat{\mathbf{z}}. && \text{(A.10)} \end{aligned}$$

Com as relações acima definimos os conjuntos de vetores unitários para os dois sistemas móveis de coordenadas, baseados nas coordenadas fixas $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, de modo que

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} = A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\mathbf{z}} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{A.11}$$

Além disso, temos o sistema de coordenas fixo circular-complexo, dado por

$$\hat{\mathbf{e}}_\pm = \frac{\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}, \tag{A.12}$$

que tem uma álgebra um pouco mais diferenciada, mas que

$$\mathbf{A} = A_-\hat{\mathbf{e}}_+ + A_+\hat{\mathbf{e}}_- + A_z\hat{\mathbf{z}}, \tag{A.13}$$

sendo que os termos

$$A_\pm = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm = \frac{A_x \pm iA_y}{\sqrt{2}}, \tag{A.14}$$

e ainda os produtos escalares são dados por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\pm \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mp &= 1, && \text{(A.15)} \\ \hat{\mathbf{e}}_\pm \cdot \hat{\mathbf{e}}_\pm &= 0. && \text{(A.16)} \end{aligned}$$

Uma excessão à regra é operador de momento angular, que é definido como

$$\mathbf{L} = \frac{L_-\hat{\mathbf{e}}_+ + L_+\hat{\mathbf{e}}_-}{\sqrt{2}} + L_z\hat{\mathbf{z}} \tag{A.17}$$

devido às características particulares dos operadores escada $L_\pm = L_x \pm L_y$.

Temos até agora dois sistemas de coordenadas fixos (cartesiano e circular-complexo) e dois sistemas móveis (cilíndrico e esférico). Entretanto, como vamos trabalhar em boa parte do tempo no espaço de Fourier, teremos também coordenadas móveis no espaço de Fourier. A melhor forma de se passar do espaço de coordenadas (direto) para o espaço de Fourier (recíproco), é transformar o sistema de coordenadas móveis do espaço direto para coordenadas fixas, e das coordenadas fixas para coordenadas móveis do espaço recíproco. No espaço recíproco definimos as correspondências

$$
\begin{aligned}
1 &: x \to k_x,\ y \to k_y,\ z \to k_z, && \text{(A.18)}\\
2 &: \rho \to \gamma,\ \phi \to \zeta, && \text{(A.19)}\\
3 &: r \to k,\ \theta \to \xi, && \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

de modo que as relações entre as coordenadas sejam semelhantes nos dois sistemas, bastando apenas fazer a conversão acima nas equações (A.1–A.9). A ressalva é que

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}_x &= \hat{\mathbf{x}}, && \text{(A.21)}\\
\hat{\mathbf{k}}_y &= \hat{\mathbf{y}}, && \text{(A.22)}\\
\hat{\mathbf{k}}_z &= \hat{\mathbf{z}}, && \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

que como já havíamos dito anteriormente, definem os sistemas de coordenadas fixos. Com isso, temos o sistema cartesiano (k_x, k_y, k_z) – $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, cilíndrico (γ, ζ, k_z) – $(\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\mathbf{z}})$ e esférico $(k, \hat{\mathbf{k}})$ – $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$, do espaço recíproco. Além disso, temos o ângulo sólido que passa de $\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \to \Omega(\hat{\mathbf{k}})$ de modo que

$$
\begin{aligned}
\int d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) &= \int d\phi \int d\theta\ \sin\theta, && \text{(A.24)}\\
\int d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) &= \int d\zeta \int d\xi\ \sin\xi, && \text{(A.25)}
\end{aligned}
$$

De uma maneira geral, a Tabela A.1 resume as informações acima. As relações entre os

Tabela A.1: Sistema de Unidades utilizado

Entidade	Real	Reciproco
Vetor	$\mathbf{r}$	$\mathbf{k}$
Coordenadas Cartesianas	(x, y, z)	(k_x, k_y, k_z)
Coordenadas Cilíndricas	(ρ, ϕ, z)	(γ, ζ, k_z)
	(r_+, r_-, r_z)	(k_+, k_-, k_z)
Coordenadas Esféricas	$(r, \hat{\mathbf{r}})$	$(k, \hat{\mathbf{k}})$
	(r, θ, ϕ)	(k, ξ, ζ)

sistemas são dadas por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} = r\hat{\mathbf{r}} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}} && \text{(A.26)}\\
\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} && \text{(A.27)}
\end{aligned}
$$

Um conjunto de relações equivalentes para o espaço recíproco pode ser obtido, fazendo as substituições descritas em (A.18)-(A.20).

A.1 Transformações diversas

Podemos precisar de transformar variáveis que não têm relação direta, como as coordenadas cilíndricas e circulares, para tanto descrevemos em forma matricial as transformações, o que facilita enormemente o trabalho.

A.1.1 Cilíndricas

A relação entre as coordenadas planares é dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \tag{A.28}$$

e a relação inversa é dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix}. \tag{A.29}$$

Temos também as relações entre os vetores complexos, dadas por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

e a relação inversa é dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{pmatrix}, \tag{A.31}$$

o que nos permite obter diretamente

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

e a relação inversa é dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & e^{i\phi} \\ -ie^{-i\phi} & ie^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ \\ \hat{\mathbf{e}}_- \end{pmatrix}. \tag{A.33}$$

A.1.2 Esféricas

As coordenadas esféricas, no plano ρz seguem uma lógica semelhante, dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

cuja inversa é facilmente obtida

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix}. \tag{A.35}$$

A.1.3 Derivadas

As derivadas em ϕ são dadas por

$$\frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ -\hat{\boldsymbol{\rho}} \end{pmatrix}, \tag{A.36}$$

e para o caso da derivada em θ

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ -\hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix}. \tag{A.37}$$

Todas as outras relações de derivadas são obtidas a partir destas duas. Vale lembrar que relações idênticas valem para as coordenadas no espaço de Fourier, em que a equivalência $\rho \to \gamma$, $\phi \to \zeta$, $r \to k$ e $\theta \to \xi$ deve ser usada nas relações acima. Devemos ressaltar ainda que não há equivalência entre coordenadas móveis de um espaço para outro, sendo que os resultados no espaço direto/recíproco devem ser passadas para coordenadas fixas e depois reescritas no espaço recíproco/direto.

Apêndice B

Vetores Complexos

Em complemento ao Apêndice A, precisamos saber como funciona a álgebra dos espaços de bases complexas, ou seja, dos vetores complexos.

B.1 Base circular tradicional

Vamos estabelecer a base de vetores complexos circulares mais comuns dados por

$$\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \frac{\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}, \tag{B.1}$$

$$\tag{B.2}$$

o que nos dá ainda que $\hat{\mathbf{e}}_{+}^{*} = \hat{\mathbf{e}}_{-}$. Vamos ter com isto que

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j^{*} = \delta_{ij}, \tag{B.3}$$

ou numa forma mais clara

$$\hat{\mathbf{e}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mp} = 1, \tag{B.4}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\pm} = 0. \tag{B.5}$$

Um vetor qualquer $\mathbf{A}$ pode ser expandido fazendo-se

$$\mathbf{A} = A_{-}\hat{\mathbf{e}}_{+} + A_{+}\hat{\mathbf{e}}_{-} + A_z\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{B.6}$$

em que

$$A_\pm = \hat{\mathbf{e}}_\pm \cdot \mathbf{A} = \frac{A_x \pm iA_y}{\sqrt{2}}, \tag{B.7}$$

$$\tag{B.8}$$

do qual obtemos

$$A_x = \frac{A_+ + A_-}{\sqrt{2}}, \tag{B.9}$$

$$A_y = \frac{A_+ - A_-}{\sqrt{2}i}. \tag{B.10}$$

Tomando então

$$\mathbf{B} = B_-\hat{\mathbf{e}}_+ + B_+\hat{\mathbf{e}}_- + B_z\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{B.11}$$

obtemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_-B_+ + A_+B_- + A_zB_z. \tag{B.12}$$

O caso mais comum refere-se ao operador momento angular $\mathbf{L}$ e aos operadores $L_\pm$. Neste caso, vamos ter que o operador momento angular é dado por

$$\mathbf{L} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_+L_- + \hat{\mathbf{e}}_-L_+}{\sqrt{2}} + L_z\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{B.13}$$

em que $L_\pm$ tem valores especiais, ou seja, são os operadores escada. Sendo assim,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = \frac{L_-F_+ + L_+F_-}{\sqrt{2}} + L_zF_z. \tag{B.14}$$

B.2 Bases modificadas

Uma base complexa semelhante à base anterior é definida como $\mathbf{e}_1^{\pm 1} = \mp\hat{\mathbf{e}}_\pm$ e $\mathbf{e}_1^0 = \hat{\mathbf{e}}_z$, tal que

$$\mathbf{e}_1^i \cdot \mathbf{e}_1^{j*} = \delta_{ij}. \tag{B.15}$$

Deste modo, define-se o operador diádico

$$\mathbf{1} = \sum_{i=-1,0,1} \mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_1^{i*}, \tag{B.16}$$

e também a relação de ortogonalidade

$$\mathbf{e}_1^i \cdot \mathbf{e}_1^{j*} = \delta_{ij}. \tag{B.17}$$

O uso desta base será justificado no Apêndice D, neste caso, através de um operador de *spin* dado por

$$S_j \mathbf{A} = i\hat{\mathbf{e}}_j \times \mathbf{A}. \tag{B.18}$$

em que $j = x, y, z$. Outra base equivalente a esta, usada por R. G. Newton[54], definida como

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \hat{\mathbf{e}}_-, \tag{B.19}$$

$$\boldsymbol{\chi}_0 = i\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{B.20}$$

$$\boldsymbol{\chi}_{-1} = \hat{\mathbf{e}}_+. \tag{B.21}$$

em que temos o operador unitário diádico

$$\mathbf{1} = \sum_{i=-1,0,1} \boldsymbol{\chi}_i \boldsymbol{\chi}_i^* \tag{B.22}$$

e

$$\boldsymbol{\chi}_i \cdot \boldsymbol{\chi}_j^* = \delta_{ij}. \tag{B.23}$$

de modo que, definido-se o operador de *spin* como

$$S_j \mathbf{A} = i\boldsymbol{\chi}_j \times \mathbf{A} \tag{B.24}$$

No contexto desta tese essas bases são utilizadas apenas na teoria dos harmônicos esféricos vetoriais, uma vez que a decomposição em componentes das mesmas incorre em termos que não têm simetria de notação, como no caso da base circular tradicional $\hat{\mathbf{e}}_i$, e só serão utilizadas no contexto do tema abordado.

B.3 Produtos vetoriais

Para a base $(\hat{\mathbf{e}}_+, \hat{\mathbf{e}}_-, \hat{\mathbf{e}}_z)$ temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_+ \times \hat{\mathbf{e}}_- &= -i\hat{\mathbf{e}}_z, && \text{(B.25)} \\ \hat{\mathbf{e}}_- \times \hat{\mathbf{z}} &= -i\hat{\mathbf{e}}_-, && \text{(B.26)} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_+ &= -i\hat{\mathbf{e}}_+. && \text{(B.27)} \end{aligned}$$

o que leva a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ & \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z \\ A_+ & A_- & A_z \\ B_+ & B_- & B_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ & \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_+ & \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_- & \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_+ & \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_- & \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_z \end{vmatrix}. \tag{B.28}$$

Ressaltamos uma inversão na posição dos termos já que os termos que acompanham o vetor $\mathbf{a} = a_-\hat{\mathbf{e}}_+ + a_+\hat{\mathbf{e}}_- + a_z\hat{\mathbf{z}}$ estão invertidos, ou seja a_+ é o termo que acompanha $\hat{\mathbf{e}}_- = \hat{\mathbf{e}}_+^*$. A grande confusão ocorre quando queremos calcular o produto vetorial com algum dos vetores unitários, por exemplo, para $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_+$,

$$\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{e}}_+ = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ & \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_+ & \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_- & \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}}_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_+ & \hat{\mathbf{e}}_- & \hat{\mathbf{e}}_z \\ A_+ & A_- & A_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{B.29}$$

ou seja, o termo não-nulo aparece em baixo do vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_-$. De modo que, o melhor a fazer é utilizar a convenção de fazer os produtos escalares com os vetores unitários da coluna.

B.4 Vetores especiais

Como vetor especial definimos os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ e seu equivalente no espaço recíproco $\hat{\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{r}_x\hat{\mathbf{x}} + \hat{r}_x\hat{\mathbf{y}} + \hat{r}_x\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{r}_-\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{r}_+\hat{\mathbf{e}}_- + \hat{r}_z\hat{\mathbf{e}}_z, && \text{(B.30)} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \hat{k}_x\hat{\mathbf{x}} + \hat{k}_x\hat{\mathbf{y}} + \hat{k}_x\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{k}_-\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{k}_+\hat{\mathbf{e}}_- + \hat{k}_z\hat{\mathbf{e}}_z, && \text{(B.31)} \end{aligned}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \hat{r}_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, && \text{(B.32)} \\ \hat{r}_z &= \cos\theta, && \text{(B.33)} \end{aligned}$$

o que nos dá diretamente um correspondência com os harmônicos esféricos

$$\hat{r}_{\pm} = \mp\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,\pm 1}, \tag{B.34}$$

$$\hat{r}_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}. \tag{B.35}$$

Podemos construir uma tabela de operação do momento angular sobre os componentes do vetor unitários, mostrados na Tabela B.1. Podemos também escrever o vetor unitário $\mathbf{\hat{r}}$ como

Tabela B.1: Operadores de momento angular sobre as componentes do versor $\mathbf{\hat{r}}$

	$\hat{r}_-$	$\hat{r}_z$	$\hat{r}_+$
L_-	0	$\sqrt{2}\hat{r}_-$	$-\sqrt{2}\hat{r}_z$
L_z	$-\hat{r}_-$	0	$\hat{r}_+$
L_+	$\sqrt{2}\hat{r}_z$	$-\sqrt{2}\hat{r}_+$	0

$$\mathbf{\hat{r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Big(Y_{1,-1}\mathbf{\hat{e}}_+ - Y_{1,1}\mathbf{\hat{e}}_- + Y_{1,0}\mathbf{\hat{e}}_z\Big). \tag{B.36}$$

Para o vetor unitário $\mathbf{\hat{k}}$ temos relações idênticas, bastando apenas mudar os nomes das variáveis.

Apêndice C

O Operador Momento Angular

O operador momento angular (clássico) é definido como sendo

$$\mathbf{L} \;=\; -i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}. \tag{C.1}$$

C.1 Em Coordenadas Cartesianas

Em coordenadas cartesianas (x, y, z) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= L_x\hat{\mathbf{x}} + L_y\hat{\mathbf{y}} + L_z\hat{\mathbf{z}}, && \text{(C.2)}\\
L_x &= -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), && \text{(C.3)}\\
L_y &= -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), && \text{(C.4)}\\
L_z &= -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). && \text{(C.5)}
\end{aligned}$$

C.2 Em Coordenadas Esfericas

Em coordenadas esféricas $(r, \hat{\mathbf{r}})$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= L_r\hat{\mathbf{r}} + L_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + L_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}, && \text{(C.6)}\\
\mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}}, && \text{(C.7)}\\
\frac{d}{d\mathbf{r}} &= \frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}. && \text{(C.8)}
\end{aligned}$$

sendo que

$$\begin{aligned} L_r &= 0, & \text{(C.9)} \\ L_\theta &= -i\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), & \text{(C.10)} \\ L_\phi &= -i\frac{\partial}{\partial\theta}. & \text{(C.11)} \end{aligned}$$

É comum também usarmos

$$\begin{aligned} L_x &= -i\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), & \text{(C.12)} \\ L_y &= -i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), & \text{(C.13)} \\ L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}. & \text{(C.14)} \end{aligned}$$

Além disso os operadores de adição e subtração são dados por

$$L_\pm = e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \tag{C.15}$$

C.3 Em Coordenadas Cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= L_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + L_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + L_z\hat{\mathbf{z}}, & \text{(C.16)} \\ \mathbf{r} &= \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}, & \text{(C.17)} \\ \frac{d}{d\mathbf{r}} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. & \text{(C.18)} \end{aligned}$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned} L_\rho &= -i\left(-\frac{z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), & \text{(C.19)} \\ L_\phi &= -i\left(z\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial}{\partial z}\right), & \text{(C.20)} \\ L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}. & \text{(C.21)} \end{aligned}$$

C.4 Transformada de Fourier do Operador Momento Angular

C.4.1 Demonstração I

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}, && \text{(C.22)}\\
\frac{d}{d\mathbf{r}} &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}, && \text{(C.23)}\\
\frac{d}{d\mathbf{k}} &= \frac{\partial}{\partial k_x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial k_y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial k_z}\hat{\mathbf{z}}, && \text{(C.24)}
\end{aligned}$$

e deste modo

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) &= \mathbf{L}\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})\mathbf{L}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} && \text{(C.25)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})\left(-i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}\right)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} && \text{(C.26)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ \Psi(\mathbf{k})\left(i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. && \text{(C.27)}
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o fato de que as funções que têm transformada de Fourier pertencem a um espaço de Hilbert (ou seja, são quadraticamente integráveis, o que significa que vão a zero para $r\to\infty$), obtemos

$$\mathbf{L}\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left(-i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}\right)\Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k}). \quad \text{(C.28)}$$

Fazendo então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\mathbf{L}\psi(\mathbf{r})\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r\ \mathbf{L}\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\ e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\int d^3k\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k}) && \text{(C.29)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k})\int d^3r\ e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \int d^3k\ \boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') && \text{(C.30)}\\
&= \boldsymbol{\mathcal{L}}\Psi(\mathbf{k}), && \text{(C.31)}
\end{aligned}$$

o que nos diz que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}, \quad \text{(C.32)}$$

ou seja, mantém a mesma "forma" que o seu correspondente no espaço de coordenadas, ou seja, no espaço de coordenadas temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -i\mathbf{r}\times\frac{d}{d\mathbf{r}}, &\text{(C.33)}\\
L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}, &\text{(C.34)}\\
L_\pm &= e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), &\text{(C.35)}
\end{aligned}$$

e no espaço de Fourier temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}} &= -i\mathbf{k}\times\frac{d}{d\mathbf{k}}, &\text{(C.36)}\\
\mathcal{L}_{k_z} &= -i\frac{\partial}{\partial\zeta}, &\text{(C.37)}\\
\mathcal{L}_\pm &= e^{\pm i\zeta}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\xi}+i\cot\xi\frac{\partial}{\partial\zeta}\right). &\text{(C.38)}
\end{aligned}$$

C.4.2 Demonstração II

Transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k'\; e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'), &\text{(C.39)}\\
\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r'\; e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\mathbf{E}(\mathbf{r}'). &\text{(C.40)}
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier do operador momento angular é

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k'\left(\mathbf{L}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\right)\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'). \tag{C.41}$$

Isso nos diz que temos que fazer

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} &= 4\pi\sum_{lm} i^l j_l(k'r')Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}')\mathbf{L}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') &\text{(C.42)}\\
&= 4\pi\sum_{lm} i^l j_l(k'r')Y^*_{lm}\left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_-L_+Y_{lm}+\hat{\mathbf{e}}_+L_-Y_{lm}}{\sqrt{2}}+\hat{\mathbf{z}}L_zY_{lm}\right) &\text{(C.43)}\\
&= 4\pi\sum_{l} i^l j_l(k'r')\sum_m Y^*_{lm}\left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_-c_+^{lm}Y_{l,m+1}+\hat{\mathbf{e}}_+c_-^{lm}Y_{l,m-1}}{\sqrt{2}}+\hat{\mathbf{z}}mY_{l,m}\right). &\text{(C.44)}
\end{aligned}$$

Estamos de fato interessados na soma

$$S = \sum_m Y_{lm}^* \Big(\hat{\mathbf{e}}_- c_+^{lm} Y_{l,m+1} + \hat{\mathbf{e}}_+ c_-^{lm} Y_{l,m-1} \Big), \tag{C.45}$$

em que $c_\pm^{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$. Temos ainda o fato de que $c_\pm^{l,m} = c_\mp^{l,m\pm1}$. Deste modo, vamos reorganizar a soma da seguinte forma

$$S = \hat{\mathbf{e}}_- \sum_{m=-l}^{l-1} c_+^{lm} Y_{lm}^* Y_{l,m+1} + \hat{\mathbf{e}}_+ \sum_{m=-(l-1)}^{l} c_-^{lm} Y_{lm}^* Y_{l,m-1}. \tag{C.46}$$

Fazendo, na primeira parte da soma $s \to m+1$ e na segunda $s \to m-1$, temos

$$S = \hat{\mathbf{e}}_- \sum_{s=-(l-1)}^{l} c_+^{l,s-1} Y_{l,s-1}^* Y_{l,s} + \hat{\mathbf{e}}_+ \sum_{s=-l}^{l-1} c_-^{l,s+1} Y_{l,s+1}^* Y_{l,s}, \tag{C.47}$$

e agora usando $c_-^{l,s+1} = c_+^{l,s}$ e $c_+^{l,s-1} = c_-^{l,s}$ obtemos

$$S = \hat{\mathbf{e}}_- \sum_{s=-(l-1)}^{l} c_-^{l,s} Y_{l,s-1}^* Y_{l,s} + \hat{\mathbf{e}}_+ \sum_{s=-l}^{l-1} c_+^{l,s} Y_{l,s+1}^* Y_{l,s}. \tag{C.48}$$

Podemos então definir um operador momento angular $\mathcal{L}$, no espaço de Fourier, com as mesmas propriedades do operador momento angular no espaço de coordenadas, de modo que

$$S = \hat{\mathbf{e}}_- \sum_s \big(\mathcal{L}_- Y_{l,s}\big)^* Y_{l,s} + \hat{\mathbf{e}}_+ \sum_s \big(\mathcal{L}_+ Y_{l,s}\big)^* Y_{l,s}, \tag{C.49}$$

e como $\mathcal{L}_+^* = \mathcal{L}_-$ ou ainda $\hat{\mathbf{e}}_\pm = \hat{\mathbf{e}}_\mp^*$, demonstramos que

$$\mathbf{L} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(k'r') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \Big(\boldsymbol{\mathcal{L}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}') \Big)^* = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(k'r') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') \boldsymbol{\mathcal{L}} \tag{C.50}$$

$$= e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \boldsymbol{\mathcal{L}}. \tag{C.51}$$

Isso significa que a transformada de Fourier do operador momento angular é dada por

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \left(\mathbf{L} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \; e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}'). \tag{C.52}$$

C.5 Harmônicos esféricos escalares

Os harmônicos esféricos são as autofunções do operador momento angular.

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \tag{C.53}$$

$$L_z Y_{lm} = m Y_{lm}, \tag{C.54}$$

$$L_\pm Y_{lm} = c_\pm(l,m) Y_{l,m\pm 1}, \tag{C.55}$$

em que

$$c_\pm^{l,m} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}. \tag{C.56}$$

Em muitos casos ainda é útil saber que

$$c_\pm^{l,m} = c_\mp^{l,m\pm 1}. \tag{C.57}$$

Abaixo temos algumas propriedades importantes dos esféricos harmônicos

$$Y_{l0}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{l0}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta), \tag{C.58}$$

$$Y_{lm}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,0}, \tag{C.59}$$

$$Y_{lm}(\pi, \phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,0}. \tag{C.60}$$

Apêndice D

Harmônicos esféricos vetoriais

Existem várias definições de harmônicos esféricos vetoriais, mas podemos classificar em três básicas, que no fundo acoplam os momentos angulares orbital e de *spin*. Este acoplamento pode ser feito por meio das funções base de alguns "observáveis". Deste modo, tendo as autofunções dos operadores de momento angular de rotação – $\mathbf{L}$, de *spin* – $\mathbf{S}$ – e total – $\mathbf{J}$, utilizamos dois destes operadores para construir a nossa base, resultando assim em três principais harmônicos esféricos vetorias, sendo[55]:

- autofunções de L_z, S_z e L^2;
- autofunções de J_z, J^2 e L^2;
- combinações lineares dos anteriores, para obter modos TE/TM.

Os dois primeiros casos são bem conhecidos da mecânica quântica. No eletromagnetismo tem-se o equivalente do "acoplamento *spin*-órbita" dos livros texto de mecânica quântica[38] (singletos e tripletos). Os harmônicos esféricos vetoriais são autofunções semelhantes aos singletos e tripletos, que em vez de acoplarem meia unidade de momento angular de *spin*, $(m = \pm 1/2)$ acoplam uma unidade de momento angular de *spin* $(m = -1, 0, 1)$.

Vamos definir o operador momento angular de *spin* como sendo

$$\mathbf{S} = i\mathbf{I}\times \tag{D.1}$$

em que $\mathbf{I}$ é uma identidade diádica definida como

$$\mathbf{I} = \sum_{i=x,y,z} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i^*. \tag{D.2}$$

Essas identidades em notação vetorial

$$\mathbf{I}_i = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{I}_i = \hat{\mathbf{e}}_i \tag{D.3}$$

são equivalentes a

$$\mathbf{I} = \sum_i |i\rangle \langle i| \,. \tag{D.4}$$

na notação de Dirac

Deste modo, o operador $\mathbf{S}$ possui um conjunto de autofunções dado por

$$\mathbf{e}_1^1 = |1\rangle = -\frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \tag{D.5}$$

$$\mathbf{e}_1^0 = |0\rangle = \hat{\mathbf{z}} \tag{D.6}$$

$$\mathbf{e}_1^{-1} = |-1\rangle = \frac{\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \tag{D.7}$$

o que faz com que, para $s = 1$ e $m_s = -1, 0, 1$, se tenha

$$S_z \mathbf{e}_s^{m_s} = m_s \mathbf{e}_s^{m_s} \tag{D.8}$$

$$S^2 \mathbf{e}_s^{m_s} = s(s+1) \mathbf{e}_s^{m_s} \tag{D.9}$$

Finalmente é possível mostrar que

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i\mathbf{S} \tag{D.10}$$

o que torna $\mathbf{S}$ um operador momento angular de rotação autêntico.

D.1 Harmônicos esféricos vetoriais desacoplados

Neste caso fazemos

$$\boldsymbol{Y}_{lm\mu} = Y_{lm} \mathbf{e}_1^{\mu} \tag{D.11}$$

ou ainda, persistindo na notação de Dirac,

$$|lm\mu\rangle = |lm\rangle \otimes |\mu\rangle \,. \tag{D.12}$$

É possível mostrar que esses vetores são autofunções de L_z, S_z e L^2. Obtemos assim nosso primeiro conjunto de harmônicos esféricos vetoriais. Neste caso específico, temos que $s = 1$, mas se tivéssemos um valor diferente de s poderiamos escrever

$$\boldsymbol{Y}_{lm;s\mu} = Y_{lm}\mathbf{e}_s^{\mu}. \tag{D.13}$$

Ambos estes casos são equivalentes ao caso quântico

$$|lm; s\mu\rangle = |lm\rangle \otimes |s\mu\rangle. \tag{D.14}$$

D.2 Harmônicos esféricos vetoriais acoplados

Neste caso, como na mecânica quântica, lançamos mão dos coeficientes de Clebsh-Gordon para construir a nova base de autofunções do operador momento angular total

$$|JM\rangle = \sum_{m,\mu} |lm; s\mu\rangle\langle lm; s\mu|JM\rangle \tag{D.15}$$

No nosso caso temos

$$\boldsymbol{Y}_{Jl}^{M} = \sum_{m,\mu} C_{m\mu M}^{lsJ}\boldsymbol{Y}_{lm;s\mu}, \tag{D.16}$$

ou na notação compacta para $s = 1$,

$$\boldsymbol{Y}_{Jl}^{M} = \sum_{m,\mu} C_{m\mu M}^{l1J}\boldsymbol{Y}_{lm\mu}. \tag{D.17}$$

Deste modo, os harmônicos esféricos vetorias são autofunções de L^2, J_z e J^2, ou seja, do momento angular total, onde $C_{m\mu M}^{lsJ} = \langle lm; s\mu|JM\rangle$ são os coeficientes de Clebsh-Gordon. Este modo pode ser utilizado para o cálculo explícito dos harmônicos esféricos vetoriais.

D.3 Cálculo dos harmônicos esféricos vetoriais acoplados

Podemos utilizar a expressão da equação (D.17) para obter os harmônicos esféricos vetoriais em uma forma explícita. Entretanto, mostraremos um outro modo de se obter expressões explícitas para os harmônicos esféricos vetoriais, que os liga diretamente aos harmônicos esféricos vetorias transversais e longitudinais.

Para tanto, devemos encontrar uma representação que seja

1. uma função vetorial de suas coordenadas;
2. autofunção de J^2, L^2 e J_z simultaneamente;
3. possua certas propriedades que derivaremos a seguir.

Usando os operadores

$$J^2 = J_xJ_x + J_yJ_y + J_zJ_z \tag{D.18}$$
$$J_z = L_z + S_z \tag{D.19}$$
$$L^2 = L_xL_x + L_yL_y + L_zL_z \tag{D.20}$$

temos que

$$J^2 = L^2 + 2 + 2i\mathbf{L}\times \tag{D.21}$$

O resultado acima se deve ao fato de que

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}) \tag{D.22}$$
$$= L^2 + S^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \tag{D.23}$$

e esta segunda parte, da definição de $\mathbf{S}$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z \tag{D.24}$$
$$= L_x(i\hat{\mathbf{x}}\times) + L_y(i\hat{\mathbf{y}}\times) + L_z(i\hat{\mathbf{z}}\times) \tag{D.25}$$
$$= i\mathbf{L} \times . \tag{D.26}$$

Sendo assim definimos os Harmônicos Esféricos Vetoriais $\boldsymbol{Y}_{jl}^m$ tais que

$$J^2\mathbf{Y}_{jl}^m = j(j+1)\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.27}$$
$$L^2\mathbf{Y}_{jl}^m = l(l+1)\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.28}$$
$$J^z\mathbf{Y}_{jl}^m = m\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.29}$$

de tal forma que podemos esperar que os harmônicos esféricos vetoriais sejam somas de produtos de harmônicos esféricos e de autovetores do operador S_z. Além disso, estes vetores devem ser normalizados,

$$\int d\Omega \; \mathbf{Y}_{jl}^{m*} \cdot \mathbf{Y}_{j'l'}^{m'} = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{D.30}$$

de modo que possamos usá-los para construir projeções. Vamos agora verificar as propriedades destas funções, começando com o cálculo da ação de J^2 sobre $\mathbf{Y}_{jl}^m$, ou seja

$$J^2\mathbf{Y}_{jl}^m = (L^2 + S^2 + 2i\mathbf{L}\times)\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.31}$$

que vai nos dar, fazendo $x = j(j+1) - l(l+1)$, a principal expressão de nossa teoria

$$2i\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m = \big(x-2\big)\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.32}$$

Tomando $\mathbf{L}\cdot$ de ambos os lados, usando a identidade vetorial entre $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ e lembrando que $\mathbf{L}\times\mathbf{L} = i\mathbf{L}$ obtemos facilmente que

$$x\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m = 0 \tag{D.33}$$

Do mesmo modo, tomando $\mathbf{L}\times$ de ambos os lados de (D.32) vamos obter

$$2i\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m = (x-2)\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m \tag{D.34}$$

e fazendo

$$\mathbf{L}\times\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m = \mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m) + i\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m - L^2\mathbf{Y}_{jl}^m, \tag{D.35}$$

$$= \mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m) + i\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m - l(l+1)\mathbf{Y}_{jl}^m. \tag{D.36}$$

Eliminando $\mathbf{L}\times\mathbf{Y}_{jl}^m$ por meio de (D.32) obtemos

$$x(x-2)\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m = 4l(l+1)\mathbf{Y}_{jl}^m - 4\mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m) \tag{D.37}$$

Juntando os termos

$$\big[x(x-2) - 4l(l+1)\big]\mathbf{Y}_{jl}^m = -4\mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}_{jl}^m) \tag{D.38}$$

Multiplicando ambos os lados por x, e usando a equação (D.33), obtemos a equação característica que dita as restrições a j e l,

$$x\big[x^2 - 2x - 4l(l+1)\big] = 0 \tag{D.39}$$

As soluções desta equação são $j = l, l+1, l-1, -l-1, -l-2, -l$. Vamos considerar apenas as soluções com j positivo, o que nos dá os casos $j = l$ e $j = l\pm 1$.

Soluções com $j = l$

Neste caso $x = 0$ e

$$l(l+1)\boldsymbol{Y}_{jl}^m = \mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m) \tag{D.40}$$

Aplicando $\mathbf{L}\cdot$ em ambos os lados

$$l(l+1)\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m = L^2(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m) \tag{D.41}$$

o que nos diz que $\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m \propto Y_{l,m}$, ou seja, $\boldsymbol{Y}_{jl}^m = \alpha\mathbf{L}Y_{l,m}$. Aplicando a condição de normalização obtemos diretamente que

$$\boldsymbol{Y}_{jj}^m = \frac{\mathbf{L}Y_{jm}}{\sqrt{j(j+1)}} \tag{D.42}$$

Soluções com $j \neq l$

Se $j \neq l$, temos da equação (D.32) que $\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m = 0$. Para prosseguirmos, voltamos à equação (D.32) e multiplicamos ambos os lados por $\hat{\mathbf{r}}\cdot$ e $\hat{\mathbf{r}}\times$, obtendo

$$2i\hat{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{L}\times\boldsymbol{Y}_{jl}^m) = \big(x-2\big)\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m \tag{D.43}$$

$$2i\hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{L}\times\boldsymbol{Y}_{jl}^m) = \big(x-2\big)\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{Y}_{jl}^m \tag{D.44}$$

e usando as identidades

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{A}) \;=\; 2i\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{L}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{A}) \tag{D.45}$$

$$\hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{L}\times\mathbf{A}) \;=\; \mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) + i\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{A} \tag{D.46}$$

o que nos dá

$$(x+2)\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m \;=\; -2i\mathbf{L}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{Y}_{jl}^m) \tag{D.47}$$

$$x\hat{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{Y}_{jl}^m \;=\; 2i\mathbf{L}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m) \tag{D.48}$$

Eliminando o produto vetorial obtemos

$$x(x+2)\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m \;=\; 4L^2(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m) \tag{D.49}$$

o que nos diz que $\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{Y}_{jl}^m \propto Y_{km}$, ou seja,

$$x(x+2) = 4k(k+1) \tag{D.50}$$

o que nos diz que $k = x/2$ e $k = x/2 - 1$ são soluções. Uma vez que já sabemos que $j = l \pm 1$, podemos investigar estes dois casos explicitamente. As soluções positivas são $k = j$, o que nos dá a solução completa. Sabendo que

$$\mathbf{Y}_{jl}^{m} = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Y}_{jl}^{m}) - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Y}_{jl}^{m}) \tag{D.51}$$

que é uma identidade relacionada à decomposição em simétrico e antisimétrico, e que já mostramos que

$$x\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Y}_{jl}^{m} = 2i\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Y}_{jl}^{m}) \tag{D.52}$$

com $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Y}_{jl}^{m} = \alpha Y_{lm}$, em que α é uma constante, obtemos

$$\mathbf{Y}_{jl}^{m} = \alpha \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{2i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{x} \right) Y_{lm} \tag{D.53}$$

que normalizado gera

$$\mathbf{Y}_{j,j-1}^{m} = \frac{j\hat{\mathbf{r}} - i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{\sqrt{j(2j+1)}} Y_{lm} \tag{D.54}$$

$$\mathbf{Y}_{j,j+1}^{m} = -\frac{(j+1)\hat{\mathbf{r}} + i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{\sqrt{(j+1)(2j+1)}} Y_{lm} \tag{D.55}$$

A ação do rotacional sobre o rotacional mistura os harmônicos esféricos vetoriais. De fato, ele atua elevando j em uma unidade em qualquer direção permitida.

D.4 Harmônicos esféricos vetoriais transversais e longitudinais

Podemos obter combinações de harmônicos esféricos vetoriais, de modo que definimos

$$\mathbf{Y}_{lm} = \hat{\mathbf{r}} Y_{lm} \tag{D.56}$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} \tag{D.57}$$

$$\mathbf{V}_{lm} = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm} \tag{D.58}$$

e ainda pode-se facilmente mostrar que

$$\mathbf{X}_{lm} = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{V}_{lm}, \tag{D.59}$$

$$\mathbf{V}_{lm} = -i\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{lm}. \tag{D.60}$$

Esta forma é vantajosa uma vez que trabalhamos com as autofunções do operador momento angular. Além disso, tem-se que $\mathbf{Y}_{lm}$ tem somente a componente na direção $\hat{\mathbf{r}}$, e que $\mathbf{V}_{lm}$ e $\mathbf{X}_{lm}$ não possuem componentes nessa direção. Observando as expressões explícitas dos harmônicos esféricos vetorias $\mathbf{Y}_{j,l}^m$, podemos ver claramente que

$$\mathbf{Y}_{j,j-1}^m = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}_{jm} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{V}_{jm} \tag{D.61}$$

$$\mathbf{Y}_{j,j}^m = \mathbf{X}_{jm} \tag{D.62}$$

$$\mathbf{Y}_{j,j+1}^m = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}_{jm} + \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{V}_{jm} \tag{D.63}$$

Estas expressões podem ser facilmente invertidas, de onde podemos tirar

$$\mathbf{Y}_{jm} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}_{j,j-1}^m + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}_{j,j+1}^m \tag{D.64}$$

$$\mathbf{X}_{jm} = \mathbf{Y}_{j,j}^m \tag{D.65}$$

$$\mathbf{V}_{jm} = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\mathbf{Y}_{j,j-1}^m - \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\mathbf{Y}_{j,j+1}^m \tag{D.66}$$

D.5 Multipolos de Hansen

Os multipolos de Hansen são definidos como se segue

$$\mathbf{M}_{lm} = u_l(kr)\mathbf{X}_{lm} \tag{D.67}$$

$$\mathbf{N}_{lm} = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{lm} \tag{D.68}$$

$$\mathbf{L}_{lm} = -\frac{i}{k}\nabla\big(u_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\big) \tag{D.69}$$

A grande virtude destes multipolos é que eles são ótimos para decompor campos que são mutuamente rotacionais (como requer as leis de Faraday e Ampére) ou divergentes (como requer a lei de Gauss):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{M}_{lm} &= 0 && \text{(D.70)}\\
\nabla \cdot \mathbf{N}_{lm} &= 0 && \text{(D.71)}\\
\nabla \cdot \mathbf{L}_{lm} &= iku_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) && \text{(D.72)}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{M}_{lm} &= ik\mathbf{N}_{lm} && \text{(D.73)}\\
\nabla \times \mathbf{N}_{lm} &= ik\mathbf{M}_{lm} && \text{(D.74)}\\
\nabla \times \mathbf{L}_{lm} &= 0 && \text{(D.75)}
\end{aligned}$$

o que mostra como $\mathbf{M}_{lm}$ e $\mathbf{N}_{lm}$ são ideais para descrever em multipolos os campos elétrico e magnético, ligados pelas leis de Ampère e de Faraday.

Vamos então expandir as definições e verificar as formas explícitas destes multipolos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{lm} &= f_l(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l} && \text{(D.76)}\\
\mathbf{N}_{lm} &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}f_{l-1}(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l-1} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}}f_{l+1}(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l+1} && \text{(D.77)}\\
\mathbf{L}_{lm} &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}}f_{l-1}(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l-1} + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}f_{l+1}(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l+1} && \text{(D.78)}
\end{aligned}$$

ou na forma diferencial

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{lm} &= f_l(kr)\mathbf{Y}^M_{l,l} && \text{(D.79)}\\
\mathbf{N}_{lm} &= -\left(f_l'(kr) + \frac{f_l(kr)}{kr}\right)\mathbf{V}_{lm} - \sqrt{l(l+1)}f_l(kr)\mathbf{Y}_{lm} && \text{(D.80)}\\
\mathbf{L}_{lm} &= -\sqrt{l(l+1)}\frac{f_l(kr)}{kr}\mathbf{V}_{lm} - f_l'(kr)\mathbf{Y}_{lm} && \text{(D.81)}
\end{aligned}$$

Como podemos ver, estas relações nos permitem construir soluções completamente gerais para as equações dos campos eletromagnéticos de uma maneira que é intuitiva, razoável, matematicamente e numericamente tratável, de modo que poderemos daqui em diante usar identidades e relações entre os harmônicos esféricos vetorias e/ou as equações de Bessel, Neumann e Hankel.

D.6 Propriedades

Seguem algumas propriedades dos harmonicos esféricos vetoriais tranversais

Simetria

Os Harmônicos Esféricos Vetoriais obedecem às propriedades de simetria dos Harmônicos esféricos escalares, ou seja

$$\mathbf{Y}_{l,-m} = (-1)^m \mathbf{Y}^*_{l,m} \tag{D.82}$$
$$\mathbf{V}_{l,-m} = (-1)^m \mathbf{V}^*_{l,m} \tag{D.83}$$
$$\mathbf{X}_{l,-m} = (-1)^m \mathbf{X}^*_{l,m} \tag{D.84}$$

e também

$$\mathbf{V}_{l,m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{J+1} \mathbf{V}_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{D.85}$$
$$\mathbf{X}_{l,m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{J} \mathbf{X}_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{D.86}$$
$$\mathbf{Y}_{l,m}(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^{J+1} \mathbf{Y}_{l,m}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{D.87}$$

Forma diferencial

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\partial_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\partial_\phi \tag{D.88}$$
$$\mathbf{L} = i\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{r}{\rho}\partial_\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}\partial_\theta\right) \tag{D.89}$$

o que leva a

$$\mathbf{Y}_{lm} = \hat{\mathbf{r}} Y_{lm} \tag{D.90}$$
$$\mathbf{X}_{lm} = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{r}{\rho}\partial_\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}\partial_\theta\right) Y_{lm} \tag{D.91}$$
$$\mathbf{V}_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\partial_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{r}{\rho}\partial_\phi\right) Y_{lm} \tag{D.92}$$

Isso nos permite calcular as seguintes quantidades, quando $\phi = \phi(r)$. **Gradiente de um campo escalar**

$$\nabla\Big(\phi Y_{lm}\Big) = \phi' \mathbf{Y}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}\frac{\phi}{r}\mathbf{V}_{lm} \tag{D.93}$$

Divergente

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \Big(\phi \mathbf{Y}_{lm}\Big) &= \left(\frac{\phi'}{r^2} + \frac{2}{r}\phi\right) Y_{lm} && \text{(D.94)} \\
\nabla \cdot \Big(\phi \mathbf{V}_{lm}\Big) &= -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}\phi Y_{lm} && \text{(D.95)} \\
\nabla \cdot \Big(\phi \mathbf{X}_{lm}\Big) &= 0 && \text{(D.96)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{l,l-1}\Big) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left((l-1)\frac{\phi}{r} - \phi'\right) Y_{lm} && \text{(D.97)} \\
\nabla \cdot \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{l,l+1}\Big) &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left((l+2)\frac{\phi}{r} - \phi'\right) Y_{lm} && \text{(D.98)} \\
\nabla \cdot \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{ll}\Big) &= 0 && \text{(D.99)}
\end{aligned}$$

Rotacional

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\phi \mathbf{Y}_{lm}) &= -i\sqrt{l(l+1)}\frac{\phi}{r}\mathbf{X}_{lm} && \text{(D.100)} \\
\nabla \times (\phi \mathbf{V}_{lm}) &= \left(\phi' + \frac{\phi}{r}\right)\mathbf{X}_{lm} && \text{(D.101)} \\
\nabla \times (\phi \mathbf{X}_{lm}) &= i\sqrt{l(l+1)}\frac{\phi}{r}\mathbf{Y}_{lm} + i\left(\phi' + \frac{\phi}{r}\right)\mathbf{V}_{lm} && \text{(D.102)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{l,l-1}\Big) &= -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left((l-1)\frac{\phi}{r} - \phi'\right)\boldsymbol{Y}^m_{ll} && \text{(D.103)} \\
\nabla \times \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{l,l+1}\Big) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left((l+2)\frac{\phi}{r} - \phi'\right) Y_{lm}\boldsymbol{Y}^m_{ll} && \text{(D.104)} \\
\nabla \times \Big(\phi \boldsymbol{Y}^m_{ll}\Big) &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left((l-1)\frac{\phi}{r} + \phi'\right)\boldsymbol{Y}^m_{l,l-1} + \\
&- \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left(l\frac{\phi}{r} - \phi'\right) Y_{lm}\boldsymbol{Y}^m_{l,l+1} && \text{(D.105)}
\end{aligned}$$

Laplaciano escalar

$$\nabla^2\Big(\phi Y_{lm}\Big) = \left(\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{l(l+1)}{r^2}\phi\right) Y_{lm} \qquad \text{(D.106)}$$

D.7 Expansão em ondas parciais no espaço direto

A expansão em ondas parciais é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}/E_0 &= \sum_{pq} \Big(G^{TE}_{pq} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) + G^{TM}_{pq} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) \Big) && \text{(D.107)} \\ Z\mathbf{H}/E_0 &= \sum_{pq} \Big(G^{TM}_{pq} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) - G^{TE}_{pq} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) \Big) && \text{(D.108)} \end{aligned}$$

em que $\mathbf{M}_{pq}$ e $\mathbf{N}_{pq}$ são os multipolos de Hansen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) &= j_p(kr)\mathbf{X}_{pq}(\hat{\mathbf{r}}) && \text{(D.109)} \\ \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) && \text{(D.110)} \end{aligned}$$

Pelas proprieadades dos Harmonicos Esféricos Vetoriais, podemos calcular diretamente

$$\mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) = -\sqrt{l(l+1)}\frac{j_l(kr)}{kr}\mathbf{Y}_{lm} - \left(j_l'(kr) + \frac{j_l(kr)}{kr} \right) \mathbf{V}_{lm} \qquad \text{(D.111)}$$

Isto nos diz claramente que $\mathbf{M}_{pq} \cdot \mathbf{N}_{pq} = 0$.

D.8 Expansão em ondas parciais no espaço recíproco

Sabendo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) &= \mathcal{F}\Big\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big\} && \text{(D.112)} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) &= \mathcal{F}\Big\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \Big\} && \text{(D.113)} \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}/E_0 &= \frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{E}}_k(\hat{\mathbf{k}}') && \text{(D.114)} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}/E_0 &= \frac{\delta(k'-k)}{k'^2}\boldsymbol{\mathcal{H}}_k(\hat{\mathbf{k}}') && \text{(D.115)} \end{aligned}$$

no domínio de Fourier temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{k}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{pq} (-i)^p \left(G^{TE}_{pq} \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} + i G^{TM}_{pq} \boldsymbol{\mathcal{V}}^*_{pq} \right) && \text{(D.116)} \\ Z\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{k}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{pq} (-i)^p \left(G^{TM}_{pq} \boldsymbol{\mathcal{X}}^*_{pq} - i G^{TE}_{pq} \boldsymbol{\mathcal{V}}^*_{pq} \right) && \text{(D.117)} \end{aligned}$$

e as funções $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{pq}$ e $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{pq}$ já foram calculadas para o caso do espaço direto. Como no espaço recíproco estamos sempre calculando sobre a esfera, reduzimos o problema de três dimensões para duas.

D.9 Formas explícitas dos Harmônicos Esféricos Vetoriais

Temos que

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta \tag{D.118}$$

$$= \frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_{+} + \frac{\sin\theta e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_{-} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}} \tag{D.119}$$

e

$$\mathbf{L} = \frac{L_{-}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_{+} + \frac{L_{+}}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_{-} + L_z\hat{\mathbf{z}} \tag{D.120}$$

Sabendo que

$$K_{+,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l+m)(l+q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{D.121}$$

$$K_{-,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l-m)(l-q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{D.122}$$

$$K_{0,l}^{m,q} = \sqrt{\frac{(l-m)(l+q)}{(2l-1)(2l+1)}} \tag{D.123}$$

obtemos[8]

$$\cos\theta\; Y_l^m = K_{0,l+1}^{m,m} Y_{l+1}^m + K_{0,l}^{m,m} Y_{l-1}^m, \tag{D.124}$$

$$\sin\theta e^{i\phi}\; Y_l^m = K_{-,l}^{m,m+1} Y_{l-1}^{m+1} - K_{+,l+1}^{m,m+1} Y_{l+1}^{m+1}, \tag{D.125}$$

$$\sin\theta e^{-i\phi}\; Y_l^m = K_{-,l+1}^{m,m-1} Y_{l+1}^{m-1} - K_{+,l}^{m,m-1} Y_{l-1}^{m-1}. \tag{D.126}$$

Expressando qualquer vetor em termos de suas componentes na forma

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{-}\cdot\mathbf{U} \\ \hat{\mathbf{e}}_{+}\cdot\mathbf{U} \\ \hat{\mathbf{e}}_{z}\cdot\mathbf{U} \end{bmatrix} \tag{D.127}$$

temos

$$\mathbf{V}_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\begin{bmatrix} -(p+1)K^{q,q-1}_{+,p}Y^{q-1}_{p-1}/\sqrt{2} - pK^{q,q-1}_{-,p+1}Y^{q-1}_{p+1}/\sqrt{2} \\ (p+1)K^{q,q+1}_{-,p}Y^{q+1}_{p-1}/\sqrt{2} + pK^{q,q+1}_{+,p+1}Y^{q+1}_{p+1}/\sqrt{2} \\ (p+1)K^{q,q}_{0,p}Y^{q}_{p-1} - pK^{q,q}_{0,p+1}Y^{q}_{p+1} \end{bmatrix} \tag{D.128}$$

$$\mathbf{Y}_{p,q} = \begin{bmatrix} K^{q,q+1}_{-,p}Y^{q+1}_{p-1}/\sqrt{2} - K^{q,q+1}_{+,p+1}Y^{q+1}_{p+1}/\sqrt{2} \\ -K^{q,q-1}_{+,p}Y^{q-1}_{p-1}/\sqrt{2} + K^{q,q-1}_{-,p+1}Y^{q-1}_{p+1}/\sqrt{2} \\ K^{q,q}_{0,p+1}Y^{q}_{p+1} + K^{q,q}_{0,p}Y^{q}_{p-1} \end{bmatrix} \tag{D.129}$$

$$\mathbf{X}_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}}\begin{bmatrix} c^{p,q}_{-}Y^{q-1}_{p} \\ c^{p,q}_{+}Y^{q+1}_{p} \\ qY^{q}_{p} \end{bmatrix} \tag{D.130}$$

Os outros harmônicos esféricos vetoriais são dados por[48]

$$\mathbf{Y}^{m}_{l,l-1} = \begin{bmatrix} \frac{c^{l-1,m}_{-}}{\sqrt{2l(2l-1)}}Y_{l-1,m-1} \\ \frac{c^{l-1,m}_{+}}{\sqrt{2l(2l-1)}}Y_{l-1,m+1} \\ \frac{m}{\sqrt{l(2l-1)}}Y_{l-1,m} \end{bmatrix} \tag{D.131}$$

$$\mathbf{Y}^{m}_{l,l} = \begin{bmatrix} \frac{c^{lm}_{-}}{\sqrt{2l(l+1)}}Y_{l,m-1} \\ \frac{c^{lm}_{+}}{\sqrt{2l(l+1)}}Y_{l,m+1} \\ \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}Y_{l,m} \end{bmatrix} \tag{D.132}$$

$$\mathbf{Y}^{m}_{l,l+1} = \begin{bmatrix} \frac{c^{l+1,m}_{-}}{\sqrt{2(l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m-1} \\ \frac{c^{l+1,m}_{+}}{\sqrt{2(l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m+1} \\ \frac{+1,m}{\sqrt{(l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m} \end{bmatrix} \tag{D.133}$$

Referências Bibliográficas

[1] M. Kerker, *The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1969).

[2] P. Lilienfeld, Opt. Pho. News **6**, 32 (2004).

[3] G. Mie, Ann. Phys. **330**, 377 (1908).

[4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1999).

[5] H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, 2nd ed. (Dover, New York, 1981).

[6] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley, New York, 1983).

[7] A. Fontes, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

[8] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, international ed. (Elsevier, San Diego, 2005).

[9] G. N. Watson, *A Treatise on the Theoy of the Bessel Functions.* (Cambridge U. P., Cambridge, 1958).

[10] A. A. R. Neves *et al.*, Opt. Lett. **31**, 2477 (2006).

[11] J. Chen, J. Ng, P. Wang, and Z. Lin, Opt. Lett. **35**, 1674 (2010).

[12] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **24**, 156 (1970).

[13] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane, Nature **330**, 769 (1987).

[14] L. Collot *et al.*, Europhys. Lett. **23**, 327 (1993).

[15] D. W. Vernooy *et al.*, Phys. Rev. A **57**, R2293 (1998).

[16] K. Svoboda and S. M. Block, Ann. Rev. Biophys. Biomol. Struct. **23**, 247 (1994).

[17] S. Hell, G. Reiner, C. Cremer, and E. H. K. Stelzer, J. Microsc. **169**, 391 (1993).

[18] G. J. Brakenhoff, P. Blom, and P. Barends, J. Microsc. **117**, 219 (1979).

[19] E. Betzig and J. K. Trautman, Science **257**, 189 (1992).

[20] E. J. Sanchez, L. Novotny, and X. S. Xie, Phys. Rev. Lett. **82**, 4014 (1999).

[21] M. Cai, O. Painter, and K. J. Vahala, Phys. Rev. Lett. **85**, 74 (2000).

[22] A. A. R. Neves *et al.*, Opt. Express **14**, 13101 (2006).

[23] F. Vollmer *et al.*, Appl. Phys. Lett. **80**, 4057 (2002).

[24] S. M. Spillane, T. J. Kippenberg, and K. J. Vahala, Nature **415**, 621 (2002).

[25] J. Ng, C. Chan, P. Sheng, and Z. Lin, Optics Letters **30**, 1956 (2005).

[26] J. Arlt and K. Dholakia, Opt. Comm. **177**, 297 (2000).

[27] L. Novotny, E. J. Sanchez, and X. S. Xie, Ultramicroscopy **71**, 21 (1998).

[28] P. S. J. Russell, Science **299**, 358 (2003).

[29] T. G. Euser, M. K. Garbos, J. S. Y. Chen, and P. S. J. Russell, Opt. Lett. **34**, 3674 (2009).

[30] G. Gouesbet, B. Maheu, and G. Grehan, JOSA-A **5**, 1427 (1988).

[31] G. Gouesbet, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **110**, 1223 (2009).

[32] T. A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop, and N. R. Heckenberg, J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer **70**, 627 (2001).

[33] M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and D. W. Mackowski, J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer **55**, 535 (1996).

[34] A. A. R. Neves, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

[35] W. W. Hansen, Phys. Rev. **47**, 139 (1935).

[36] P. J. Cregg and P. Svendlindh, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 14029 (2007).

[37] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, revisited ed. (McGraw-Hill, New York, 1941).

[38] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, revised ed. (Addison Wesley, New York, 1994).

[39] B. He and W. C. Chew, *Modeling and Computations in Electromagnetics* (Springer Berlin Heidelberg, ADDRESS, 2008).

[40] B. Friedman and J. Russek, Quart. Appl. Math. **12**, 13 (1954).

[41] M. Danos and L. Maximon, J. Math. Phys. **6**, 766 (1965).

[42] S. Stein, Quart. Appl. Math. **19**, 15 (1961).

[43] O. R. Cruzan, Quart. Appl. Math. **20**, 33 (1962).

[44] F. Borghese, P. Denti, G. Toscano, and O. I. Sindoni, J. Math. Phys. **21**, 2754 (1980).

[45] B. U. Felderhof and R. B. Jones, J. Math. Phys. **28**, 836 (1987).

[46] R. C. Wittmann, IEEE Trans. Antennas Propagat. **36**, 1078 (1988).

[47] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (Wiley, New York, 1952).

[48] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, in *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application.*, edited by E. of Mathematics and its Applications (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1981), Vol. 8, p. 716.

[49] C. D. Cantrell, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 2158 (1991).

[50] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 9th ed. (Dover, New York, 1970).

[51] L. W. Davis, Phys. Rev. A **19**, 1177 (1979).

[52] K. T. McDonald, Bessel Beams.

[53] K. T. McDonald, http://puhep1.princeton.edu/ mcdonald/examples/bessel.pdf (unpublished).

[54] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed. (Dover, New York, 2002).

[55] R. G. Brown, http://www.phy.duke.edu/rgb/Class/phy319.php (unpublished).