

Interação de neutrinos com campos magnéticos rotantes

Pedro Cunha de Holanda

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Física “Gleb Wataghin” como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Mestre em Física.

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
orientador: Marcelo Moraes Guzzo

Universidade Estadual de Campinas, julho de 1997



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

PARECER DE APROVAÇÃO
DEFESA DE TESE DE MESTRADO
PEDRO CUNHA DE HOLANDA

DATA: 31.07.97

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. MARCELO MORAES GUZZO (Orientador)

- Prof. Dr. FELICE PISANO

- Prof. Dr. JOSÉ BELLANDI FILHO

A meus pais

Agradecimentos

Agradeço a todos que de uma forma ou de outra me ajudaram a concluir esta tese.

À Mariana, pelo apoio constante, em todas as fases deste trabalho.

Ao Marcelo Moraes Guzzo, pelo profissionalismo e respeito.

Aos amigos

-Eduardo, Joana, Everardo e Leda.

Aos professores Carola, Norma e Bellandi, pelas contribuições e pela disponibilidade que sempre demonstraram.

Aos funcionários e funcionárias do DRCC.

Aos funcionários e funcionárias da biblioteca do IFGW.

Aos meus colegas de trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução	1
1 Evolução dos Neutrinos	8
2 O Cálculo de $P(\nu_L \rightarrow \nu_R)$:	15
2.1 Parâmetros Constantes	16
2.2 Parâmetros variáveis	18
2.2.1 Expansionais	19
2.2.2 Fase estacionária	21
2.2.3 Probabilidade de conversão	22
2.2.4 Probabilidade de permanência	24
3 Condições de Validade dos Resultados:	26
4 O Parâmetro de Adiabaticidade:	30
5 Parametrizando nossas condições	37
6 Tratamento Numérico	46
6.1 Longe da ressonância	48
6.2 Largura da Ressonância	51
6.3 Experimento ideal	53
Conclusão	56
Bibliografia	59

Resumo

Investigamos a possibilidade de melhorar os limites experimentais do momento magnético do neutrino através de experimentos controlados de conversão de quiralidade. Como neutrinos de quiralidade “right” não interagem com a matéria, a detecção de uma supressão em relação ao fluxo inicial de neutrinos poderia nos dar um valor para o seu momento magnético, ou caso tal supressão não fosse detectada, novos limites experimentais poderiam ser estabelecidos.

Ressonâncias na conversão de quiralidade podem ser obtidas através da interação diferenciada de neutrinos com campos magnéticos rotantes. Dado um valor para o momento magnético do neutrino e uma parametrização das grandezas físicas envolvidas no problema, tais como o valor do campo magnético e sua variação angular, estudamos em que situações estas ressonâncias podem produzir uma situação ótima para a realização de experimentos deste tipo.

Abstract

We investigate the possibility of obtaining neutrino magnetic moment experimental limits through controlled experiments of chirality conversion. Because right-handed neutrinos do not interact with matter, a suppression detection related to the initial neutrino flux could give us a value to its magnetic moment, or in the absence of such suppression, new experimental limits could be established.

Resonances in the chirality conversion can be obtained through the neutrino interaction with rotating magnetic fields. Given a value of the neutrino magnetic moment and a parametrization choice of the relevant physical quantities, like the magnetic field magnitude and its angular velocity, we study in which situations these resonances could produce the best situation to the realization of this kind of experiments.

INTRODUÇÃO

No modelo eletro-fraco padrão [1]-[3] para a física de partículas elementares o neutrino é uma partícula de massa zero e momento magnético zero, ângulo de mixing no vácuo zero, não tem carga elétrica e tem spin $\frac{1}{2}$. Todos os neutrinos são criados “left-handed” e os anti-neutrinos, “right-handed”. Devido ao momento magnético também ser zero, não há a possibilidade de conversão de quiralidade por interação com campos magnéticos, o que nos leva à conclusão de que, se as suposições do modelo padrão estiverem corretas, não existem neutrinos de quiralidade “right” ou antineutrinos de quiralidade “left”.

Porém, os valores para a massa e momento magnético do neutrino não são consequência de nenhuma lei fundamental da física. Existem, sim, limites experimentais [4] para essas grandezas, e seus valores foram incorporados ao

modelo padrão como sendo nulos por conveniência. Paralelo a isso, temos uma rica fenomenologia associada a uma massa e momento magnético não nulos, e problemas físicos podem ter uma abordagem inteiramente nova com estas suposições, como é o caso do problema do neutrino solar, que indica uma discrepância entre o fluxo medido de neutrinos solares [5]- [8] e seu valor calculado teoricamente [9]-[11]. Com a introdução de massa e ângulo de mixing no vácuo há a possibilidade de oscilação entre sabores, o que caracteriza o efeito MSW [12] [13] quando aplicado à resolução do problema do neutrino solar. Se supomos um momento magnético não nulo, a interação dos neutrinos com os campos magnéticos solares poderia promover também a conversão de quiralidade, levando um neutrino interagente a um estéril, o que poderia contribuir para a supressão do fluxo de neutrinos solares que chegam à Terra [14]-[16]. Uma completa revisão sobre oscilações de neutrinos e neutrinos solares pode ser encontrada nas referências [17]-[21].

Uma extensão mínima do modelo padrão que incorpore neutrinos estéreis “right-handed” possibilita um momento magnético da ordem de $\mu_{\nu_e} \sim 10^{-18} \mu_B$ [22]. Porém, para campos magnéticos da ordem de alguns

teslas, e distâncias inferiores a $10^{14} m$, este valor é muito baixo para implicar em grandes consequências fenomenológicas (a grandeza relevante no caso é $\mu_\nu \cdot B \cdot x$, como veremos adiante). Outras extensões possibilitam um valor maior para o momento magnético do neutrino, como ocorre em modelos como SUSY [23] e GUT.

Portanto, uma rica fenomenologia, aliada à possibilidade de se incorporar neutrinos massivos e de quiralidade “right” em modelos teóricos, resulta em um campo interessante para a pesquisa científica.

Atualmente, temos para os limites experimentais da massa e momento magnético dos neutrinos [4]:

$$m_{\nu_e} < O(15eV), \quad m_{\nu_\mu} < 0.17MeV, \quad m_{\nu_\tau} < 24MeV, \quad (0.1)$$

$$\mu_{\nu_e} < 1.8 \times 10^{-10} \mu_B,$$

$$\mu_{\nu_\mu} < 7.4 \times 10^{-10} \mu_B,$$

$$\mu_{\nu_\tau} < 5.4 \times 10^{-7} \mu_B. \quad (0.2)$$

Convém aqui acrescentar uma breve discussão sobre a posição atual destes valores. Atualmente as experiências que dão um limite para a massa do neu-

trino eletrônico estão sofrendo um problema de interpretação. O valor de $m_{\nu_e}^2$ é obtido através da análise do espectro de decaimento beta do Trítio próximo ao “endpoint”. Vários experimentos estão dando um valor significativamente negativo, possivelmente associado a efeitos não conhecidos que estão causando um acúmulo de eventos próximos ao “endpoint”, levando a uma distorção no ajuste da curva do espectro [24][25]. Um limite astrofísico “conservador” obtido através da análise da SN1987 dá um valor $m_{\nu_e} < 23eV$ [26].

Os momentos magnéticos são obtidos através da análise da reação $\bar{\nu}_l l \rightarrow \bar{\nu}_l l$, onde $l = e, \mu, \tau$. Limites astrofísicos são mais restritivos, porém há uma certa controvérsia quanto à validade destes limites, pois partem de suposições físicas quanto ao comportamento do sistema astrofísico considerado.

Neste trabalho supomos que os neutrinos são partículas de Dirac e possuem um momento magnético não nulo, o que possibilita a conversão de quiralidade por interação com campos magnéticos [27]. Pretendemos nesta tese analisar a factibilidade experimental de uma grande conversão de qui-

ralidade de neutrinos quando dispomos de um campo magnético intenso que se estende por um espaço relativamente pequeno. Estudamos como uma ressonância na conversão de quiralidade pode contribuir para minimizar o espaço necessário para tal conversão [28]. Um resultado positivo seria de grande utilidade na investigação do limite do momento magnético do neutrino, pois revelaria a possibilidade de se realizar um experimento onde a produção, a conversão de quiralidade e a detecção de neutrinos seriam realizados em laboratório. A possível detecção de uma supressão do fluxo inicial resultaria em um valor para o momento magnético, e a não detecção desta supressão resultaria em um novo valor para o seu limite.

No capítulo 1 apresentamos a matriz de evolução com a qual trabalharemos, mostrando resumidamente a relação de cada termo desta matriz com as interações com a matéria e com o campo magnético.

No capítulo 2 resolvemos a equação de evolução dos neutrinos apresentada no capítulo 1. Primeiramente, apresentamos a solução exata para o caso onde todos os parâmetros são constantes. Em seguida obtemos uma solução aproximada para o caso onde os parâmetros, agora variando com o

tempo, produzem uma ressonância na conversão de quiralidade. Este método produz como resultado o valor da probabilidade assintótica de conversão de quiralidade, estando restrito à aplicabilidade de algumas condições, como a distância necessária para se tomar a probabilidade assintótica, que são analisadas no capítulo 3.

No capítulo 4 fazemos um estudo da adiabaticidade do sistema, relacionando o resultado para a probabilidade assintótica de conversão com o parâmetro de adiabaticidade, que é calculado aqui.

No capítulo 5 buscamos uma parametrização de nosso sistema de tal modo que, obedecendo às condições apresentadas no capítulo 4, uma ressonância seja produzida. Escolhida a parametrização, usamos a condição que se refere ao espaço mínimo necessário para a evolução do sistema, e definimos uma largura de ressonância.

No capítulo 6 usamos métodos numéricos para resolver a equação de evolução inicial, e destacamos o sucesso das previsões iniciais para a probabilidade assintótica de conversão. Analisamos também regiões de nossos parâmetros onde nossa aproximação não é mais válida.

Concluimos finalmente que a conversão controlada de quiralidade está fortemente limitada pelo baixo valor do momento magnético do neutrino. Possíveis sucessos experimentais desta natureza podem ainda ser obtidos para melhorar o limite do momento magnético do ν_τ , necessitando mesmo assim de um espaço demasiado grande para a sua evolução.

Capítulo 1

Evolução dos Neutrinos

A evolução dos neutrinos pode ser descrita por uma hamiltoniana onde estejam presentes os termos de interação com a matéria e com o campo magnético (supondo um momento magnético diferente de zero). Apresentamos aqui a derivação desta hamiltoniana para o caso dos neutrinos serem partículas de Dirac (para partículas de Majorana, ver referência [16]).

A hamiltoniana no vácuo (ausência de matéria e campo magnético) é diagonal, tendo a forma:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_R(t) \\ \nu_L(t) \end{pmatrix} = H_{vac} \cdot \begin{pmatrix} \nu_R(t) \\ \nu_L(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

onde:

$$H_{vac} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Adotaremos o tratamento usual que se dá às oscilações de neutrinos [29]. Assumimos que os neutrinos têm um momento $|\vec{p}|$ bem definido, comum a todos os auto-estados de massa. Assim, a função de onda que descreve o neutrino é descrita como a superposição de ondas planas que correspondem a estes auto-estados. Além disso, vamos supor que $m_\nu \ll p$, o que consiste em considerar os neutrinos como ultra-relativísticos. Podemos portanto aproximar a energia referente a cada auto-estado de massa da forma:

$$E_\alpha = \sqrt{p^2 + m_\alpha^2} \simeq |p| + \frac{m_\alpha^2}{2|p|}. \quad (1.3)$$

Fizemos aqui suposições que não são completamente verdadeiras. Não há porque supor que todos os auto-estados físicos tenham o mesmo momento e diferentes energias. Além disso, mesmo supondo momentos distintos para os auto-estados físicos, é óbvio que não podemos ter momentos bem definidos, o que nos daria incerteza completa de suas localizações. O tratamento completo deve supor pacotes de onda localizados para os auto-estados físicos, onde a incerteza no momento e na energia de cada auto-estado estão relacionadas com as reações que originaram tais neutrinos. Tal tratamento traz como consequência um comprimento de coerência, além do qual a detecção não



Figura 1.1: Diagramas de interação do neutrino com a matéria.

sentirá mais os efeitos da oscilação. Contudo, no limite ultra-relativístico o tratamento usual que faremos nos dá os mesmos resultados para cálculo de probabilidade que o tratamento completo com pacotes de onda [30].

O termo de interação com a matéria é derivado a partir dos diagramas de Feynman para interação fraca. A figura 1.1 mostra tais diagramas para corrente carregada e neutra, sendo que somente os neutrinos “left” estão envolvidos em tais diagramas.

Desconsiderando a dependência dos propagadores das partículas W^- e Z com o momento, supondo que a temperatura onde tais processos se dão não é suficiente para a produção de múons ou taus (e portanto estes não

participam da corrente carregada) e supondo que temos um meio neutro, os termos de interação com a matéria tomam a seguinte forma na lagrangeana que descreve o sistema:

$$L_{eff} = - \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \cdot \gamma_0 \cdot V_l \cdot \nu_{lL}, \quad (1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} V_{\nu_e} &= \sqrt{2} G_F (N_e - \frac{1}{2} N_n) \\ V_{\nu_\mu} &= V_{\nu_\tau} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ν_L e $\bar{\nu}_L$ são estados de quiralidade. G_F é a constante de Fermi, cujo valor é $G_F = 1.166 \times 10^{-5} GeV^{-2}$ e N_n e N_e são as densidades de neutrons e elétrons no meio.

Como somente os neutrinos “left” participam da interação com a matéria, não há termos de interação para neutrinos “right”. O termo de interação é adicionado à energia do sistema na hamiltoniana, resultando em (onde já substituímos a relação (1.3)):

$$H = H_{vac} + H_{int} = |p| + \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2|p|} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2|p|} + V \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

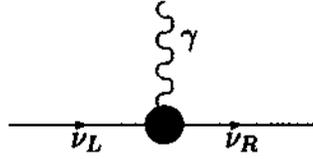


Figura 1.2: Diagrama de interação do neutrino com campo magnético

A interação com campo magnético resulta de um acoplamento com o fóton através do momento magnético, representado na figura 1.2.

O termo correspondente na lagrangeana relaciona diferentes quiralidades, e se reflete em um termo de módulo $\mu_\nu B(t)$ nos elementos não diagonais da hamiltoniana, onde identificamos μ_ν como sendo o momento magnético do neutrino e B como a componente transversal do campo magnético em relação à direção de propagação.

Como termos proporcionais à unidade na hamiltoniana não têm relevância física no tratamento da evolução do sistema, podemos rearranjar nossa equação de evolução, e incorporando o termo de interação com campo magnético, temos:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_{ef.} + \frac{\Delta m^2}{4E} & \mu_\nu B(t) e^{+i\phi(t)} \\ \mu_\nu B(t) e^{-i\phi(t)} & +\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_{ef.} - \frac{\Delta m^2}{4E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_R \\ \nu_L \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

onde:

- B : módulo da componente do campo magnético perpendicular ao eixo de propagação.
- μ_ν : momento magnético do neutrino
- ϕ : ângulo relativo à direção da componente do campo magnético no plano perpendicular ao eixo de propagação (fig. 1.3)
- G_F : constante de Fermi
- N_{ef} : densidade efetiva de matéria sentida pelo neutrino.
- Δm^2 : diferença dos quadrados das massas dos auto-estados físicos
[$\Delta m^2 = m^2(\nu_1) - m^2(\nu_2)$]
- E : energia dos neutrinos

Tomaremos neste modelo neutrinos de Dirac, o que implica que, sem a introdução de transição de sabor, o termo de diferença de massa entre os auto-estados físicos é nulo.

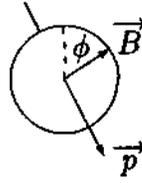


Figura 1.3: ângulo ϕ referente direção da componente perpendicular de B .

Para o caso de os neutrinos serem uma partícula de Majorana, algumas diferenças aparecem na derivação de uma matriz de evolução equivalente à apresentada aqui. Como o único momento magnético não nulo para partículas de Majorana é o de transição, interessa-nos usar uma matriz que relacione neutrinos eletrônicos de quiralidade “left” com antineutrinos do múon (ou do tau) de quiralidade “right”. E nesse caso, os termos de interação com a matéria tomam uma forma diferente da apresentada em (1.5). Como resultado final, temos uma matriz como a de (1.7), se fizermos a seguinte relação:

$$\nu_R \rightarrow \bar{\nu}_{\mu R} \quad (\bar{\nu}_{\tau R})$$

$$\nu_L \rightarrow \nu_{eL}$$

$$N_{eff} = \frac{1}{2}(N_e - N_n)$$

Capítulo 2

O Cálculo de $P(\nu_L \rightarrow \nu_R)$:

Dado um neutrino no estado ν_L no instante $t = 0$ (e esse vai ser sempre o caso, uma vez que os neutrinos são criados sempre no estado “left”), queremos calcular a probabilidade de, decorrido um certo tempo t , encontrá-lo no estado ν_R , após interagir com a matéria e campo magnético da maneira descrita pela equação (1.7):

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = |\langle \nu_R(t) | \nu_L(t = 0) \rangle|^2 . \quad (2.1)$$

Vamos primeiramente calcular esta probabilidade quando os parâmetros da hamiltoniana são constantes (a exceção da fase do campo magnético, onde tomaremos sua derivada temporal constante, pois a fase constante não acrescenta nenhum elemento novo ao sistema). Em seguida mudamos para a

situação com parâmetros que variam temporalmente, sob algumas condições que serão expostas a seguir.

2.1 Parâmetros Constantes

Para o cálculo de probabilidade que vamos fazer convém trabalhar em uma nova base, onde os termos da matriz de evolução são reais. Faremos então a seguinte mudança de base:

$$\nu'_S = U(t) \cdot \nu_S, \quad (2.2)$$

onde ν_S é o vetor coluna (ν_R, ν_L) e:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-i\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{+i\phi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Substituindo essa relação na equação (1.7) pode-se ver que nessa nova base, a equação de evolução se dá em função somente de termos reais:

$$i \frac{d}{dt} \nu'_S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e + \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} & \mu B \\ \mu B & +\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e - \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} \end{pmatrix} \nu'_S, \quad (2.4)$$

que pode ser escrito da forma:

$$i \frac{d}{dt} \nu'_S = \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e + \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \sigma_3 + \mu B \cdot \sigma_1 \right) \nu'_S, \quad (2.5)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli usuais. Se todos os termos em (2.5) são constantes, sua solução se escreve:

$$\nu'_S(x) = \left[\cos \Omega.x - \frac{i}{\Omega} \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e + \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \sigma_3 + \mu B . \sigma_1 \right] \sin \Omega.x \right] \nu'_S(0), \quad (2.6)$$

onde:

$$\Omega^2 = (\mu B)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e + \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} \right)^2. \quad (2.7)$$

A probabilidade de conversão pode então ser obtida, resultando em:

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = \left(\frac{\mu B}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \Omega.x. \quad (2.8)$$

Uma situação particular interessante ocorre quando o segundo termo em (2.7) se anula. Temos então uma forma simples para a solução da equação de evolução:

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda}} x \right) \quad (2.9)$$

onde

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\mu B} \quad (2.10)$$

é o que chamaremos a partir daqui de comprimento de oscilação característico. Esta grandeza será particularmente útil na análise dos resultados

do capítulo 6.

2.2 Parâmetros variáveis

Não faremos agora nenhuma suposição sobre a dependência temporal dos elementos da matriz de evolução, e buscamos uma solução formal para a equação de evolução (eq. (1.7)). O processo de transição de quiralidade fica mais claro se trabalharmos em outra base, que se relaciona com a base original através da relação:

$$\bar{\nu}_S = \begin{pmatrix} \exp[-i \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e(t') dt'] & 0 \\ 0 & \exp[+i \int_0^t \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e(t') dt'] \end{pmatrix} \cdot \nu_S. \quad (2.11)$$

Nessa nova base, a amplitude de probabilidade de transição difere da mesma amplitude na base original simplesmente por uma fase. Portanto, para o efeito de cálculo de probabilidades, as duas bases são equivalentes. Além disso, temos que $\bar{\nu}_S \rightarrow \nu_S$ se $t \rightarrow 0$, o que nos dá as mesmas condições iniciais em ambas as bases.

Substituindo essa nova base na equação de evolução, temos:

$$i \frac{d \bar{\nu}_S}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ u^*(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{\nu}_S, \quad (2.12)$$

onde:

$$u(t) = \mu_\nu B(t) \exp[+ih(t)] \quad (2.13)$$

$$h(t) = -\sqrt{2}G_F \int_0^t N_e(t')dt' + \phi(t). \quad (2.14)$$

2.2.1 Expansionais

Uma solução formal da equação (2.12) pode ser obtida através do método dos Expansionais [33], onde a solução se dá em termos de múltiplas integrais da matriz de evolução. Dada a equação:

$$i \frac{d}{dt} G(t) = U(t)G(t), \quad (2.15)$$

sua solução se escreve:

$$G(t) = I + (-i) \int_0^t U(t')dt' + (-i)^2 \int_0^t U(t')dt' \int_0^{t'} U(t'')dt'' + \dots \quad (2.16)$$

Aplicando esse método para o cálculo da amplitude de transição, fazemos a seguinte correspondência (daqui em diante suprimimos o \sim que caracteriza a nova base, simplificando nossa notação):

$$\begin{aligned} G(t) &= \begin{pmatrix} \nu_R(t) \\ \nu_L(t) \end{pmatrix}, \\ U(t) &= \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ u^*(t) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Temos portanto:

$$\begin{pmatrix} \nu_R(t) \\ \nu_L(t) \end{pmatrix} = \left[I - i \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & u(t') \\ u^*(t') & 0 \end{pmatrix} dt' - \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & u(t') \\ u^*(t') & 0 \end{pmatrix} \cdot \int_0^{t'} \begin{pmatrix} 0 & u(t'') \\ u^*(t'') & 0 \end{pmatrix} dt'' dt' + \dots \right] \cdot \begin{pmatrix} \nu_R(0) \\ \nu_L(0) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

o que nos leva a:

$$\begin{pmatrix} \nu_R(t) \\ \nu_L(t) \end{pmatrix} = \left[I - i \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & u(t') \\ u^*(t') & 0 \end{pmatrix} dt' - \int_0^t \int_0^{t'} \begin{pmatrix} u(t') \cdot u^*(t'') & 0 \\ 0 & u^*(t') u(t'') \end{pmatrix} dt'' dt' + i \int_0^t \int_0^{t'} \int_0^{t''} \begin{pmatrix} 0 & u(t') u^*(t'') u(t''') \\ u^*(t') u(t'') u^*(t''') & 0 \end{pmatrix} dt''' dt'' dt' + \dots \right] \times \begin{pmatrix} \nu_R(0) \\ \nu_L(0) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

O termo não diagonal do Expansional nos dará a amplitude de transição left-right, que fica dada pela seguinte série:

$$\begin{aligned} \langle \nu_R(t) | \nu_L(t=0) \rangle &= -i \int_0^t u(t') dt' + \\ &+ i \int_0^t u(t') \int_0^{t'} u^*(t'') \int_0^{t''} u(t''') dt''' dt'' dt' - \dots, \end{aligned} \quad (2.20)$$

e o termo diagonal nos dará a amplitude de permanência:

$$\langle \nu_L(t) | \nu_L(t=0) \rangle = 1 - \int_0^t u(t') \int_0^{t'} u^*(t'') dt'' dt' + \dots \quad (2.21)$$

$$+ \int_0^t u(t') \int_0^{t'} u^*(t'') \int_0^{t''} u(t''') \int_0^{t'''} u^*(t''') dt'' dt''' dt'' dt' .$$

2.2.2 Fase estacionária

Como $u(t)$ em (2.13) é uma função oscilante, podemos aplicar o método da fase estacionária para chegar em um resultado aproximado de sua integral em t . Esse método consiste em considerar que a maior contribuição ao valor da integral é dada pela região ao redor de um ponto de fase estacionária, desde que a oscilação devido à fase seja mais rápida que a variação global da função. O resultado geral apresentado por Erdélyi [32] é:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixh(t)} dt = \\
 &\sim \begin{cases} \left[\frac{2}{+xh''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) \exp\left[+ixh(\tau) + \frac{i\pi}{4}\right] & \text{quando } \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ h''(\tau) > 0 \end{cases} \\ \left[\frac{2}{-xh''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) \exp\left[-ixh(\tau) - \frac{i\pi}{4}\right] & \text{quando } \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ h''(\tau) < 0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

onde τ representa o ponto de fase estacionária, definido por:

$$h'(\tau) = \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = 0. \tag{2.23}$$

Se um dos limite de integração for o ponto de fase estacionária τ , digamos o limite inferior, então temos:

$$f(x) = \int_{\tau}^{\beta} g(t)e^{ixh(t)} dt \sim \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)e^{ixh(t)} dt \quad , \text{onde} \quad \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ h''(\tau) > 0 \\ \alpha < \tau < \beta \end{cases} . \quad (2.24)$$

2.2.3 Probabilidade de conversão

Aplicando o teorema da fase estacionária ao nosso caso, chegamos ao seguinte resultado [31]:

$$\begin{aligned} \int_0^t u(t') dt' &= \theta(t - \tau) \cdot \left(\frac{2\pi}{h''(\tau)} \right)^{1/2} \mu B(\tau) \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2\xi \cdot \theta(t - \tau) \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] , \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde:

$$\xi = \left[\frac{\pi}{2|h''(\tau)|} \right]^{1/2} \mu B(\tau) , \quad (2.26)$$

e τ é o ponto onde a fase é estacionária. O sinal da fase em (2.25) é determinado pelo sinal de $h''(\tau)$.

Da mesma forma,

$$\int_{\tau}^t u(t') dt' = \xi \cdot \theta(t - \tau) \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] ,$$

$$\int_{\tau}^t u^*(t') dt' = \xi \cdot \theta(t - \tau) \exp \left[\mp i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.27)$$

O termo $\theta(t - \tau)$ aparece para garantir que a integral é nula se a região da integração não engloba a região de fase estacionária, e será fundamental para o cálculo completo da amplitude de transição. Calculando o segundo termo dessa amplitude:

$$\begin{aligned} I_3 &= i \int_0^t u(t') \int_0^{t'} u^*(t'') \int_0^{t''} u(t''') dt''' dt'' dt' \\ &= 2i\xi \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \int_0^t u(t') \int_0^{t'} u^*(t'') \cdot \theta(t'' - \tau) dt'' dt' \\ &= 2i\xi \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \int_0^t u(t') \int_{\tau}^{t'} u^*(t'') dt'' dt' \\ &= 2i\xi^2 \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp \left[\mp i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \int_0^t u(t') \theta(t' - \tau) dt' \\ &= 2i\xi^2 \int_{\tau}^t u(t') dt' \\ &= 2i\xi^3 \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \theta(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.28)$$

De maneira similar podemos calcular os próximos termos, e as múltiplas integrais do expansional reduzem-se à seguinte série de potências:

$$\langle \nu_R(t) | \nu_L(t = 0) \rangle = -i2\xi(1 - \xi^2 + \xi^4 - \dots) \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Se $\xi < 1$ então a série converge e o resultado é simplesmente dado por[31]:

$$\langle \nu_R(t) | \nu_L(t=0) \rangle = -i \frac{2\xi}{1+\xi^2} \exp \left[\pm i \left(h''(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Portanto temos para a probabilidade de transição de quiralidade:

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = |\langle \nu_R(t) | \nu_L(t=0) \rangle|^2 = 4 \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} \right)^2. \quad (2.31)$$

2.2.4 Probabilidade de permanência

Podemos através do mesmo método utilizado anteriormente, calcular a probabilidade de permanência na quiralidade ν_L . Um teste de consistência do método seria então verificar se $P(\nu_L \rightarrow \nu_L) + P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = 1$, o que é feito aqui.

Partindo da equação (2.21) e aplicando o teorema da fase estacionária, chegamos à seguinte série de potência para a amplitude de permanência:

$$\langle \nu_L(t) | \nu_L(t=0) \rangle = 1 - 2\xi^2 + 2\xi^4 - 2\xi^6 + \dots \quad (2.32)$$

Se $\xi < 1$, então a série converge ao seguinte resultado:

$$\langle \nu_L(t) | \nu_L(t=0) \rangle = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}, \quad (2.33)$$

o que nos dá para a probabilidade de permanência na quiralidade “left”:

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L) = \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2. \quad (2.34)$$

Somando-se esse resultado com o resultado de (2.31), temos então:

$$P(\nu_L \rightarrow \nu_L) + P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = 1, \quad (2.35)$$

como é esperado.

Capítulo 3

Condições de Validade dos Resultados:

Nesta seção vamos analisar as condições que devem ser satisfeitas pelos parâmetros do sistema para que os resultados obtidos analiticamente reflitam o comportamento real do sistema. Começamos por analisar as limitações matemáticas provenientes do método que usamos para chegar a uma solução analítica para a probabilidade de conversão (equação (2.31)). Ressaltamos que essas condições não são condições físicas necessárias para transição de quiralidade, mas somente limites de validade para os resultados que obtivemos com a aproximação por fase estacionária.

Em primeiro lugar é necessário que haja um ponto na evolução dos neutrinos onde a fase seja estacionária, um ponto $t = \tau$ entre a criação e a detecção

onde:

$$h'(\tau) = -\sqrt{2}G_F N_e(\tau) + \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = 0. \quad (3.1)$$

Em segundo lugar, o termo $u(t)$ deve oscilar suficientemente entre o ponto de criação e o ponto de fase estacionária, e entre este ponto e a detecção, de modo que podemos desconsiderar a integral nessas regiões, ficando somente com o valor dado pela fase estacionária. Na fórmula (2.22) esta condição está representada pelo termo $x \rightarrow \infty$. Vamos supor, por ora, que uma oscilação entre tais pontos seja suficiente.

$$|h(\tau) - h(0)| = \left| -\int_0^\tau \sqrt{2}G_F N_e(t') dt' + [\phi(\tau) - \phi(0)] \right| \geq 2\pi, \quad (3.2)$$

$$|h(t) - h(\tau)| = \left| -\int_\tau^t \sqrt{2}G_F N_e(t') dt' + [\phi(t) - \phi(\tau)] \right| \geq 2\pi. \quad (3.3)$$

Agora, além dessas limitações para nossos parâmetros, temos também uma condição física a ser satisfeita. Como um dos objetivos de nossos cálculos é verificar a factibilidade de uma transição controlada da quiralidade de neutrinos, com criação e detecção realizáveis em laboratório, é conveniente que ajustemos nossos parâmetros de modo que o maior número possível de neutrinos “left” sejam convertidos em neutrinos “right”, no menor espaço possível.

Vamos então começar o ajuste de nossos parâmetros de modo a obter um alto valor para $P(\nu_L \rightarrow \nu_R)$. Nota-se que o valor máximo dessa probabilidade se dá quando $|\xi| = 1$, o que nos leva a uma transição completa de quiralidade [$P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = 1$]. Temos então, como condição para que o efeito da transição de quiralidade seja observável:

$$\xi = \left[\frac{\pi}{2 |h''(\tau)|} \right]^{1/2} \mu B(\tau) \lesssim 1. \quad (3.4)$$

Na expressão acima, enquanto o sinal $<$ é também uma limitação proveniente do método usado (necessária para convergência da série em (2.29)), o sinal \sim é uma condição física de nosso problema, que assegura que haja transição apreciável de quiralidade, embora tal condição esteja atrelada às limitações matemáticas expostas ($\xi < 1$).

Temos portanto duas condições a serem satisfeitas para que o resultado que encontramos para a probabilidade de transição de quiralidade refita o que deve ocorrer na natureza, ou seja, são condições que se referem à aplicabilidade da fase estacionária. Além disso, temos uma condição que se refere à mensurabilidade da transição de quiralidade. São essas as condições que precisamos trabalhar, parametrizando-as em termos das grandezas físicas

do problema, para obter uma proposta de experiência de transição controlada de quiralidade, seguida de sua detecção.

Capítulo 4

O Parâmetro de Adiabaticidade:

Antes de avançarmos em nossos cálculos, há um aspecto interessante neste problema que merece ser ressaltado, que se refere à relação existente entre conversão de quiralidade (ou em termos mais gerais, oscilação) e a adiabaticidade do sistema. Veremos que a probabilidade de conversão calculada pelo nosso método se dá em termos do parâmetro de adiabaticidade como definido em [17], de modo que a máxima conversão se dará em uma situação onde a evolução não é completamente adiabática, mas tampouco o fator não adiabático predomina no sistema.

Vamos calcular então o parâmetro de adiabaticidade, que se dá pela comparação dos termos não diagonais da matriz de evolução com a diferença

entre os termos diagonais (como a evolução de nosso sistema é indiferente a termos proporcionais à matriz unidade, a grandeza relevante nos termos diagonais da matriz de evolução é a sua diferença), no auto-estado de massa. Tais termos não diagonais permanecem mesmo após a diagonalização do sistema devido à dependência temporal do ângulo de mixing entre esta base e a base de quiralidade, como veremos a seguir.

Para proceder tal diagonalização em termos de um ângulo de mixing, devemos partir de uma matriz de evolução real. Voltamos a trabalhar então na base usada na seção 2.1, que nos dá a seguinte matriz de evolução:

$$i \frac{d}{dt} \nu'_S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e + \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} & \mu B \\ \mu B & +\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e - \frac{1}{2} \frac{d\phi(t)}{dt} \end{pmatrix} \nu'_S. \quad (4.1)$$

Agora, a partir desta base se faz a diagonalização através de uma matriz de mixing usual, cujo processo é esquematizado abaixo:

$$\nu_p = V \cdot \nu'_S, \quad (4.2)$$

onde:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Substituindo essa transformação novamente na equação de evolução (1.7), teremos para essa nova base:

$$i \frac{d\nu_p}{dt} = \widetilde{H}(t) \cdot \nu_p, \quad (4.4)$$

onde:

$$\widetilde{H}(t) = V^\dagger H V - i V^\dagger \frac{dV}{dt}. \quad (4.5)$$

O primeiro termo à direita da expressão acima corresponde à diagonalização do hamiltoniano, ou seja, na ausência do termo que envolve a derivada temporal, o sistema está na base física. A predominância do primeiro termo sobre os termos não diagonais é que caracteriza uma transição adiabática. Retomando o sentido de adiabaticidade da termodinâmica, neste caso os parâmetros do sistema mudam tão lentamente, e conseqüentemente as derivadas temporais envolvidas são tão pequenas, que não há mudança no estado físico do sistema. É facilmente verificável que o primeiro termo conduz à seguinte expressão:

$$V^\dagger H V = \begin{pmatrix} \sqrt{\left(\frac{\hbar'(\dot{t})}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\left(\frac{\hbar'(\dot{t})}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde substituímos a expressão para $h(t)$ usada em (2.14) e fizemos:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\mu B}{h'(t)}, \quad (4.7)$$

de modo a zerar os termos não diagonais em (4.6).

O segundo termo à direita em (4.5) nos dará a parte não diagonal da matriz de evolução, e se a predominância for deste termo, então a principal característica da evolução do sistema é a troca de auto-estado físico, caracterizando uma transição não-adiabática:

$$-iV^\dagger \frac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{d\alpha}{dt} \\ -i\frac{d\alpha}{dt} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Reunindo então esses dois cálculos na expressão para o hamiltoniano,

$$\widetilde{H}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} & i\frac{d\alpha}{dt} \\ -i\frac{d\alpha}{dt} & -\sqrt{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Portanto, o parâmetro de adiabaticidade será dado pela razão da diferença entre os termos diagonais e os termos não diagonais:

$$\gamma = \frac{|\widetilde{H}_{11} - \widetilde{H}_{22}|}{|\widetilde{H}_{12}|} = \quad (4.10)$$

$$= \frac{2\sqrt{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}{\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|}. \quad (4.11)$$

Temos então que $\gamma \ll 1$ representa uma transição extremamente não adiabática, enquanto $\gamma \gg 1$ representa uma transição adiabática. Calculando agora o termo $\frac{d\alpha}{dt}$ usando (4.7):

$$\frac{d}{dt} \tan 2\alpha = 2 \left(1 + \tan^2 2\alpha\right) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\mu B}{(h'(t))^2} h''(t).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\mu B}{(h'(t))^2} h''(t) \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mu B}{h'(t)}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\mu B}{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} h''(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo em (4.11):

$$\gamma = \frac{2\sqrt{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}{\frac{1}{4} \frac{\mu B}{\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} h''(t)} = \frac{8 \left[\left(\frac{h'(t)}{2}\right)^2 + (\mu B)^2\right]^{3/2}}{\mu B h''(t)}. \quad (4.13)$$

Se calculamos esse parâmetro no ponto de ressonância $t = \tau$, temos $h'(t) = 0$ e a expressão acima se simplifica em:

$$\gamma_R = \frac{8(\mu B)^2}{|h''(\tau)|}, \quad (4.14)$$

onde o índice R indica o parâmetro calculado no ponto de ressonância. É

interessante observar que nesta situação, o sistema está o mais não-adiabático possível.

Porém essa expressão se relaciona com o quadrado do módulo de ξ (equação (2.26)):

$$|\xi|^2 = \frac{\pi}{16} \gamma_R ,$$

de forma que podemos escrever a probabilidade total de transição de quiralidade em termos do parâmetro de adiabaticidade, encontrando:

$$P = 4 \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_R}{\left(1 + \frac{\pi}{16} \gamma_R \right)^2} . \quad (4.15)$$

Dessa expressão vemos que a máxima transição de quiralidade se dá em um meio termo de adiabaticidade (no nosso caso, com $\gamma \simeq 5, 1$), se anulando para transições extremamente não adiabáticas ($\gamma \ll 1$). Para transições totalmente adiabáticas ($\gamma \gg 1$), embora o resultado (4.15) nos dê também uma probabilidade nula, lembramos que tal resultado só é válido para $\xi < 1$ (equação (3.4)), e portanto, $\gamma < 5, 1$. Podemos ter altas probabilidades de conversão em situações adiabáticas, pois nessas condições nossos resultados não se aplicam. Essa relação entre adiabaticidade e probabilidade de os-

cilação já tinha sido destacada qualitativamente por Smirnov em [34], mas aqui se chega a uma expressão quantitativa para essa relação. É claro que não chegamos em uma expressão geral para qualquer tipo de evolução, mas é interessante destacar a relação entre adiabaticidade e oscilação entre auto-estados “left-right” em nosso caso particular.

Capítulo 5

Parametrizando nossas condições

Neste capítulo pretendemos encontrar uma parametrização adequada das grandezas físicas do problema, usando os resultados da seção anterior, de modo a propor uma possível montagem experimental para a transição controlada de quiralidade de neutrinos e discutir sua factibilidade.

Reexpressando numericamente as condições encontradas em (3.2)-(3.4) para que haja transição controlada de quiralidade, temos:

$$0.2 < \xi < 1 , \tag{5.1}$$

$$h'(\tau) = 0 . \tag{5.2}$$

Aqui o limite inferior de 0.2 para ξ representa uma probabilidade de transição $P = 0.15$, e $\xi = 1$ nos dá uma probabilidade $P = 1$.

Para encontrarmos valores numéricos que reflitam tais condições, começamos por fixar o valor do módulo do campo magnético. Como o principal efeito na transição decorre da fase do campo, não limitamos muito nossas possibilidades de parametrização com essa escolha. A condição (5.1) nos fixará então uma região numérica para $|h''(\tau)|$. Agora, devido ao baixo valor numérico do limite experimental do momento magnético do neutrino, a condição que encontraremos para $|h''(\tau)|$ será bastante rígida. Um modo de minimizar esse efeito é tomar o limite superior do momento magnético do neutrino eletrônico e do valor do campo magnético obtenível em laboratório na expressão (3.4). Substituiremos então $\mu_{\nu_e} = 10^{-10} \mu_B$ e $B = 10T$ nesta expressão, obtendo:

$$9.8 \times 10^{-25} eV^2 > |h''(\tau)| > 0.4 \times 10^{-27} eV^2 . \quad (5.3)$$

Um modo simples de parametrizar as condições (5.2) e (5.3) é tomar $h''(t)$ e $\phi'(t)$ constantes, o que significa tomar tanto a densidade de matéria quanto

a fase do campo magnético variando linearmente no espaço:

$$\begin{aligned} h''(t) &= -a \\ \phi'(t) &= c, \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde a e c são constantes. Essa escolha, além da simplicidade no tratamento, traz também outra vantagem. Uma vez que, rigorosamente, o neutrino sente a ressonância como uma região, e não como um ponto, o nosso resultado analítico será mais preciso se as condições que queremos válidas no ponto de ressonância o sejam em uma região em torno deste ponto. Ou seja, se queremos que nossa expressão para a probabilidade de conversão (eq. (2.26)) seja adequada, devemos fazer a grandeza $\frac{\mu B(t)}{\sqrt{|h''(t)|}}$ constante na região de ressonância. E a parametrização apresentada nos garante isto.

Substituindo as expressões para $h''(t)$ a partir de (2.14), temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}G_F N_e(t)' &= a \\ \sqrt{2}G_F N_e(t) &= at + b, \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde b é uma constante de integração, caracterizando a densidade de matéria inicial ($t = 0$).

Se lembrarmos agora a condição de ressonância (equação (5.2)), temos que no ponto de fase estacionária:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}G_F N_e(\tau) &= \phi'(\tau) , \\ a\tau + b &= c .\end{aligned}\tag{5.6}$$

Com esses parametros, a densidade de matéria tem um valor inicial que difere do seu valor na ressonância por uma quantidade que denominaremos por ε . Ou seja:

$$\sqrt{2}G_F N_e(\tau) - \sqrt{2}G_F N_e(0) = c - b = \varepsilon.\tag{5.7}$$

Se agora essa densidade de matéria cresce (ou decresce) a uma razão dada por a , teríamos que quando $t = \tau$ atingiríamos uma ressonância, ou um ponto de fase estacionária. Temos então que τ é dado por:

$$\tau = \frac{c - b}{a} = \frac{\varepsilon}{a} .\tag{5.8}$$

Vamos analisar agora os limites que as condições (3.2) e (3.3) impõem aos

nossos parâmetros. Reescrevendo tais condições, e substituindo a parametrização escolhida:

$$\left| - \int_0^\tau \sqrt{2} G_F N_e(t') dt' + [\phi(\tau) - \phi(0)] \right| \geq 2\pi$$

$$\left| - \left(\frac{at^2}{2} + bt \right)_0^\tau + c\tau \right| > 2\pi. \quad (5.9)$$

Substituindo a relação (5.8), temos:

$$|\varepsilon| > 2\sqrt{\pi a}. \quad (5.10)$$

Portanto, como fizemos c constante, podemos variar a e b , desde que a relação (5.10) seja satisfeita.

Tal equilíbrio entre as condições pode ser melhor visualizado graficamente. Na figura 6.1, fixamos $\phi'(t)$, e fazemos $\sqrt{2}G_F N_e(t)$ variar linearmente. Podemos identificar o ponto de ressonância em $t = \tau$. A aplicabilidade da fase estacionária (eq. (3.2) e (3.3)) se reflete graficamente, impondo-se que as áreas hachuradas, tanto antes como depois de $t = \tau$ e independentemente, devem ser numericamente maiores que 2π . Simultaneamente, o coeficiente angular de $\sqrt{2}G_F N_e(t = \tau)$ não pode ser arbitrariamente grande, o que

diminuiria a região necessária para satisfazer a condição de fase estacionária, mas comprometeria a probabilidade de transição (condição (5.3)).

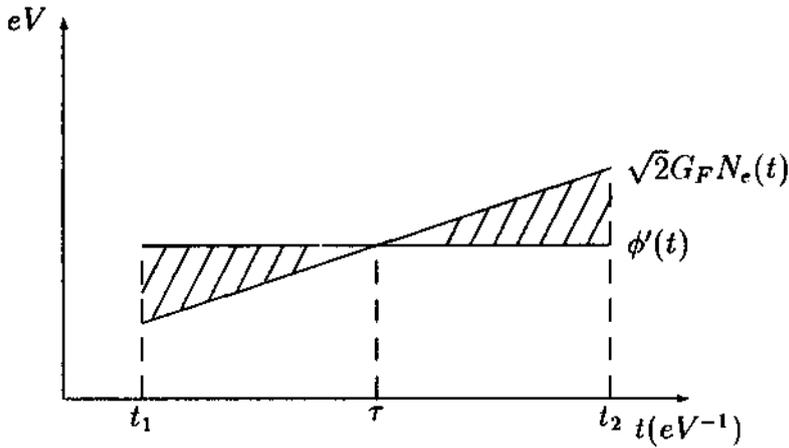


Figura 6.1: Condições necessárias expostas graficamente.

Para visualizar melhor o problema, vamos substituir alguns valores numéricos nas equações. Primeiramente, fixamos $h''(t)$ e $\phi'(t)$ com os seguintes valores:

$$\phi'(t) = \frac{1^\circ}{100m} = 3.5 \times 10^{-11} eV, \quad (5.11)$$

$$a = h''(t) = \sqrt{2}G_F N_e'(t) = 0.5 \times 10^{-30} eV^2. \quad (5.12)$$

Esse valor de $\phi'(t)$ corresponde a aproximadamente uma variação de 1° em $100m$, taxa onde teríamos um certo controle no caso da montagem de um aparato experimental. O valor escolhido para a praticamente maximiza a probabilidade de transição de quiralidade ($P(\nu_L \rightarrow \nu_R) = 1$ em (2.31)).

Precisamos agora escolher um valor inicial para a densidade de matéria. Tomando o limite inferior para ε (equação (5.10)) com a dado por (5.12) ($\varepsilon \simeq 1 \times 10^{-15}$), temos:

$$\sqrt{2}G_F N_e(t=0) = \sqrt{2}G_F N_e(t=\tau) - \varepsilon = 3.4999 \times 10^{-11} eV. \quad (5.13)$$

Como ε o ponto de ressonância estão relacionados (5.8), a precisão de quatro casas decimais em (5.13) é absolutamente necessária para se minimizar a distância entre este ponto e o ponto de criação. Agora, aumentando a densidade de matéria à taxa constante dada por a , levaríamos para atingir o valor de $\sqrt{2}G_F N_e(t) = 3.5001 \times 10^{-11} eV$ (valor que nos garantiria que o sistema passou pelo ponto de ressonância) uma distância de:

$$x = \frac{\Delta N_e}{N'(t)} = \frac{2\varepsilon}{a} = \frac{0.0002 \times 10^{-11} eV}{0.5 \times 10^{-30} eV^2} = 4 \times 10^{+15} eV^{-1} = 8 \times 10^8 m. \quad (5.14)$$

Portanto nessas condições teríamos que controlar a densidade de elétrons por

uma distância superior a distância da Terra à Lua.

Esses números expressam a dificuldade de realização de um experimento do tipo que estamos discutindo. Poderíamos procurar outra parametrização mais adequada para o problema, mas esta que fizemos já nos permite discutir os principais pontos em questão, que são válidos independente da parametrização escolhida.

Primeiramente, para que tenhamos uma grande conversão de quiralidade, limitamos a região numérica para o parâmetro $\xi(\tau)$. Mas como vimos que esse parâmetro está intimamente ligado com o parâmetro de adiabaticidade de nosso sistema, temos também uma limitação para a taxa de variação de nossas grandezas em torno do ponto de ressonância. Essas duas considerações são independentes da parametrização escolhida, de modo que, em qualquer parametrização, o mesmo problema de adequação se apresentará: fazer com que nossos parâmetros produzam um ponto de ressonância, com baixas taxas de variação, o que solicitará uma grande região para a evolução de sistema.

Como essas considerações são válidas para a região em torno do ponto de ressonância, fora dessa região temos liberdade para variar nossos parâmetros

como quisermos. Porém, as condições (3.2) e (3.3) dizem respeito exatamente à largura dessa ressonância, e o que estamos concluindo é que na melhor das hipóteses, esta largura é da ordem de $10^8 m$. E o comprimento mínimo de nosso possível aparato experimental se dará pela largura da ressonância.

Para finalizar este capítulo, vamos chegar a uma expressão analítica para a largura da ressonância, nos baseando nas condições (3.2) e (3.3):

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{\tau} \sqrt{2} G_F N_c(t') dt' - [\phi(\tau) - \phi(t_1)] \right| &= 2\pi \\ \left| \int_{\tau}^{t_2} \sqrt{2} G_F N_c(t') dt' - [\phi(t_2) - \phi(\tau)] \right| &= 2\pi \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$t_2 - t_1 = \Delta R, \quad (5.16)$$

onde ΔR : largura da ressonância.

Substituindo os parâmetros utilizados, é fácil verificar que:

$$\Delta R = 4\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (5.17)$$

Portanto, se quisermos diminuir a largura de ressonância de nosso problema, devemos aumentar a , o que acarreta uma menor probabilidade de conversão de quiralidade.

Capítulo 6

Tratamento Numérico

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

Além do tratamento analítico que estamos fazendo, convém também tratar o

problema através de métodos numéricos, o que nos será útil em dois sentidos.

vai ser fundamental para nos indicar quanto podemos aproximar o ponto de criação dos neutrinos da ressonância, mantendo os resultados analíticos obtidos anteriormente.

Escolhemos a equação (2.4) para resolver numericamente, pois a não inclusão de termos imaginários nos elementos da matriz de evolução simplifica o tratamento. Além disso, não precisamos aqui atribuir arbitrariamente um valor inicial para a fase do campo magnético, o que seria necessário se partíssemos da equação (1.7), embora o resultado numérico necessariamente independeria deste valor.

Dividindo cada equação em sua parte real e imaginária, ficamos com um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem, que foi resolvido numericamente utilizando o pacote de integração DODE para a linguagem Fortran. Como condição inicial tomamos sempre o valor da parte real da componente “left” igual à unidade, e as demais componentes nulas.

Em todo tratamento numérico, usamos a parametrização apresentada anteriormente, com:

- $\phi'(t) = 3.5 \times 10^{-11} eV$

- $\mu_\nu = 10^{-10} \mu_B$
- $B = 10T$

Variamos a distância do ponto de criação ao ponto de ressonância e o valor do parâmetro a , que representa a derivada espacial da densidade efetiva de matéria. Apresentamos agora os resultados numéricos obtidos. Em todos os gráficos, apresentamos a probabilidade de conversão pela razão entre a distância e o comprimento de oscilação característico (eq. (2.10)) $(x/\bar{\lambda})$, pois tal apresentação nos será particularmente útil para uma análise posterior. Em nosso caso, temos:

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\mu B} \sim 2.5 \times 10^7 m, \quad (6.1)$$

6.1 Longe da ressonância

Em primeiro lugar, plotamos através de métodos numéricos a probabilidade de transição de quiralidade pela distância, com o ponto de criação de neutrinos longe o suficiente do ponto de ressonância. Este ponto de ressonância foi fixado em $t = 0$, e a figura 6.1 mostra o resultado para três valores do

parâmetro a . Nosso método analítico nos dá para o valor da probabilidade de transição para esses parâmetros:

$$a = 1 \times 10^{-25} eV^2 \longrightarrow P_{\nu_L \nu_L} = 0.157$$

$$a = 2 \times 10^{-26} eV^2 \longrightarrow P_{\nu_L \nu_L} = 0.549$$

$$a = 4 \times 10^{-27} eV^2 \longrightarrow P_{\nu_L \nu_L} = 1.000 . \quad (6.2)$$

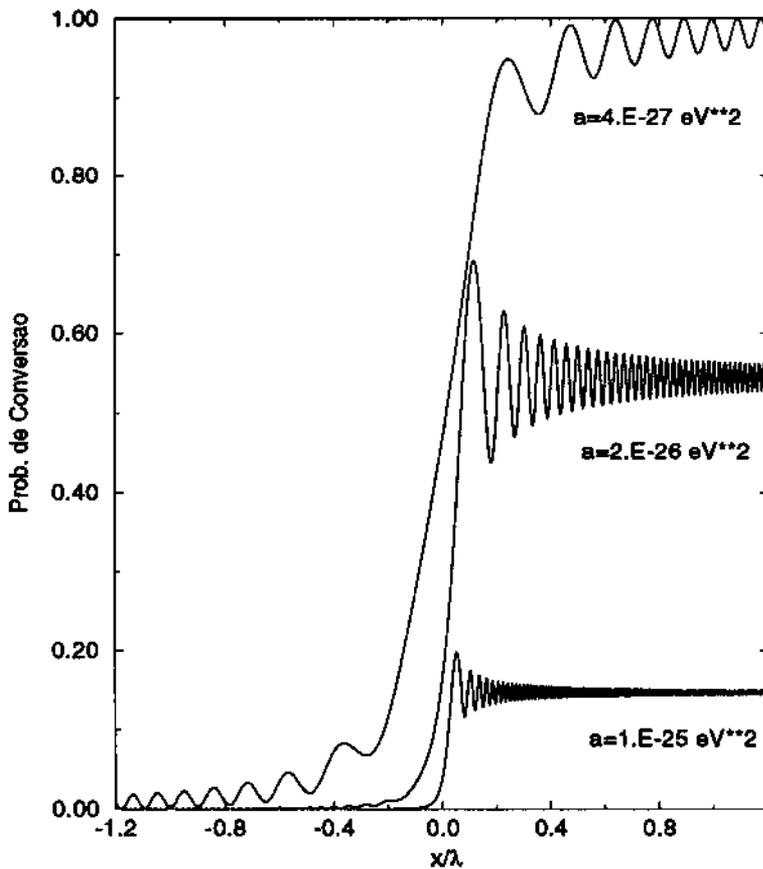


Figura 6.1: Probabilidades de transição quando toda a ressonância é sentida

A figura 6.1 nos permite concluir que nosso método analítico funciona com grande precisão para o cálculo da probabilidade assintótica, quando a detecção, como a criação, se faz longe do ponto de ressonância. Também nos permite ter uma idéia da largura da ressonância, que nitidamente cresce com a diminuição de a , o que também foi predito pelo método analítico (equação (5.17)). Nota-se claramente neste gráfico uma característica que nosso resultado analítico não aborda, que é a oscilação natural do sistema. Nossa previsão se refere somente ao valor assintótico da probabilidade de conversão. Convém ressaltar contudo que tais oscilações estão qualitativamente de acordo com os resultados apresentados na seção 2.1, com um comprimento de oscilação $2\pi/\Omega$ dependendo dos parâmetros envolvidos, da seguinte forma (eq. (2.7)):

$$\Omega^2 = (\mu B)^2 + \left(\frac{1}{2}h'(t)\right)^2.$$

Nota-se na figura 6.1 uma diminuição do comprimento de oscilação ao nos afastarmos da ressonância, o que caracteriza uma anti-correlação deste comprimento com $(h'(t))^2$, como é previsto em (2.7). O momento de criação não se fez em $x = -30 \times 10^3 \text{ km}$, mas em um tempo bem anterior a esse, de modo

a garantir que toda a ressonância foi sentida pelos neutrinos.

6.2 Largura da Ressonância

Um método numérico para evidenciar a largura da ressonância consiste em, mantendo o ponto de detecção longe da ressonância, aproximar gradativamente o ponto de criação, e verificar como muda a probabilidade assintótica.

É neste sentido que continuamos o tratamento numérico, resultando na figura 6.2, produzido com os mesmos parâmetros que a figura 6.1.

Estes resultados evidenciam que a probabilidade assintótica, quando o ponto de criação está próximo à ressonância, depende fortemente da distância entre esses dois pontos, ou expondo de outra forma, depende das condições iniciais dos neutrinos.

Podemos estimar as larguras de ressonâncias através da figura 6.2, encontrando:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \times 10^{-25} eV^2 \longrightarrow \Delta R \sim 3 \times 10^6 m \\
 a &= 2 \times 10^{-26} eV^2 \longrightarrow \Delta R \sim 5 \times 10^6 m \\
 a &= 4 \times 10^{-27} eV^2 \longrightarrow \Delta R \sim 20 \times 10^6 m , \qquad (6.3)
 \end{aligned}$$

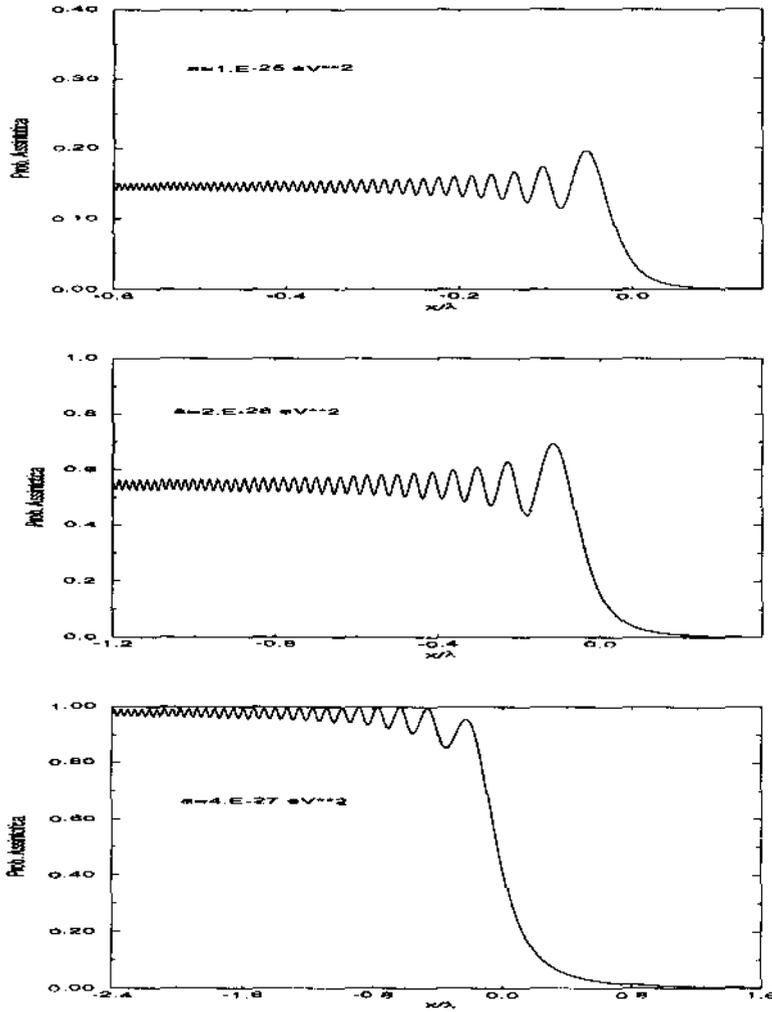


Figura 6.2: Probabilidade assintótica de transição pela distância entre o ponto de criação e a ressonância

o que está razoavelmente em acordo com nossa estimativa (5.17), que nos dá:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \times 10^{-25} eV^2 \longrightarrow \Delta R_{est.} \sim 4.5 \times 10^6 m \\
 a &= 2 \times 10^{-26} eV^2 \longrightarrow \Delta R_{est.} \sim 1.0 \times 10^7 m \\
 a &= 4 \times 10^{-27} eV^2 \longrightarrow \Delta R_{est.} \sim 2.2 \times 10^7 m .
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Porém esses resultados devem ser analisados qualitativamente, pois tanto nossa estimativa teórica da largura da ressonância quanto sua observação gráfica foram realizados sem um critério preciso para a grandeza “largura da ressonância”.

6.3 Experimento ideal

Voltamos agora à pergunta de qual o experimento ideal para a criação, conversão controlada de quiralidade e detecção de neutrinos. A primeira conclusão óbvia é que os resultados assintóticos que obtivemos não são satisfatórios para uma suposta experiência, pois a largura da ressonância sendo da ordem de $10^7 m$ torna inviável a montagem de um aparato experimental. Para nossos parâmetros, portanto, a melhor experiência realizável teria que usar os resultados numéricos para a probabilidade de conversão com a criação

próxima à ressonância. Mas, neste caso, a melhor situação possível se daria quando os termos diagonais da hamiltoniana de evolução fossem nulos, o que representaria a maior taxa de crescimento com o espaço da probabilidade de conversão (e portanto um menor espaço necessário para o experimento). Nesta situação, a condição de ressonância é sempre válida, mas não há uma largura de ressonância definida. Analiticamente, temos uma solução senoidal, de comprimento de oscilação característico e probabilidade de conversão:

$$P_{conv} = \sin^2(kx) , \quad (6.5)$$

onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Na figura 6.3 pusemos o ponto de criação à mínima distância do ponto de ressonância tal que, para $a = 1 \times 10^{-25} eV^2$, toda a ressonância é sentida (este ponto corresponde a $d/\bar{\lambda} \simeq -0.039$, podendo-se observar que para este valor a probabilidade assintótica calculada numericamente está em acordo com as previsões analíticas). Nestas condições, se fazemos $a = 4 \times 10^{-27} eV^2$ temos como probabilidade assintótica um resultado inferior ao calculado analiticamente, pois a ressonância não é toda sentida pelo neutrino. Mesmo assim, o crescimento inicial da probabilidade de conversão é maior que para

o primeiro parâmetro. Finalmente, para a solução senoidal dada por (6.5), temos o maior crescimento possível, e portanto a menor distância necessária para se atingir qualquer probabilidade de conversão desejada.

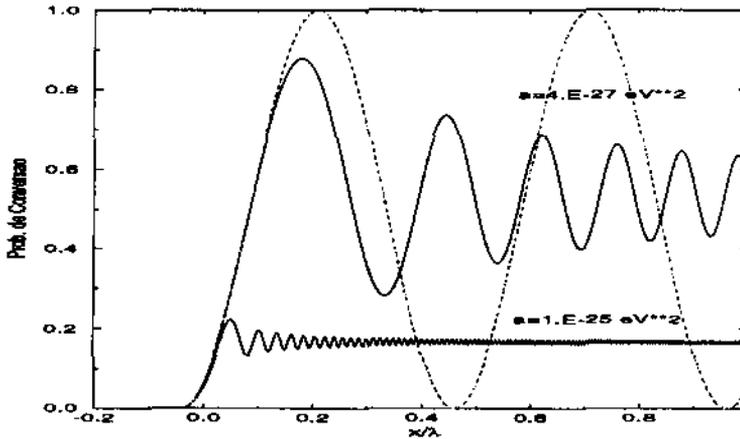


Figura 6.3: Probabilidade de transição com ponto de criação fixo, próximo à ressonância, em função da distância à ressonância.

Esta situação é idêntica àquela onde temos campos magnéticos fixos, e densidade de matéria nula. A introdução de campos magnéticos rotantes seria útil no sentido que poderíamos ter uma densidade de matéria não nula no percurso dos neutrinos, uma vez que a variação da fase ϕ do campo magnético poderia compensar esta densidade de matéria, mantendo nulo o termo diagonal na matriz de evolução.

CONCLUSÃO

Os resultados das seções anteriores nos levaram a definir um comprimento de oscilação característico (eq. 6.1) que depende somente de μB . Quando tomamos como referência o limite do momento magnético do neutrino eletrônico ($\mu_{\nu_e} \sim 1.0 \times 10^{-10} \mu_B$) e campos magnéticos de $10T$, esta quantidade era da ordem de $10^7 m$. Qualquer experimento teria então que considerar espaços bem menores que este comprimento de oscilação, e nesse caso, a solução senoidal nos daria uma situação onde, dada uma probabilidade de conversão desejada, a distância necessária para se atingi-la seria a menor possível (figura 6.3). Nosso problema fica assim rigorosamente limitado por causa do baixo valor numérico de μB .

Porém, o que aconteceria se este comprimento de oscilação fosse da ordem de até alguns quilômetros? Neste caso seria possível montar um expe-

rimento onde o neutrino evoluísse por uma distância superior a esse comprimento de oscilação característico, e conseqüentemente seria mais conveniente tomar como resultado para a probabilidade de conversão uma média sobre oscilações. Para a solução senoidal teríamos então $P_{conv} \simeq 0.5$. Mas neste caso, poderíamos obter através da criação de uma ressonância uma probabilidade assintótica maior, em um espaço consideravelmente menor que uma oscilação característica.

Para ilustrar esta discussão, peguemos o limite superior para o momento magnético do neutrino do tau [4]:

$$\mu_{\nu\tau} \sim 10^{-7} \mu_B.$$

Neste caso teríamos um comprimento de oscilação característico dado por

$$\bar{\lambda} \sim 30 \text{ km}.$$

Se ajustássemos agora nossos parâmetros para obtermos uma ressonância, e para que a probabilidade de conversão assintótica seja máxima ($\xi \sim 1$ em (2.31)), teríamos uma largura de ressonância da ordem de $\Delta R \sim 20 \text{ km}$, além da qual poderíamos tomar a probabilidade assintótica calculada pelo método

analítico como resultado previsto para a detecção da conversão de quiralidade. Temos então uma situação onde conseguimos uma maior conversão de quiralidade ($P_{conv} \simeq 1$) em um espaço menor, quando comparado com o resultado obtido anulando-se o termo diagonal da matriz de evolução. Essa discussão pode ser igualmente visualizada nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3. Um aumento do valor do momento magnético do neutrino com o qual trabalhamos se reflete em uma diminuição do comprimento de oscilação característico, mudando apenas a escala do gráfico, e não sua forma (razão pela qual apresentamos a distância em valores de $\bar{\lambda}$).

Concluimos que o limite do momento magnético do neutrino do tau ainda pode ser explorado através de experimentos controlados de conversão de quiralidade. Porém, mesmo para o neutrino do tau, as distâncias características deste experimento são grandes demais para incentivar uma montagem experimental deste tipo.

Bibliografia

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961), 579.

- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.

- [3] A. Salam, em *Nobel Symposium*, No. 8, ed. N. Swartholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm (1968).

- [4] Particle Data Group, Phys. Rev. **D 54** (1996).

- [5] Homestake Collaboration, R. Davis *et al.*, Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994), 13; B.T. Cleveland *et al.*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl. **38** (1995), 47.

- [6] Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 1683.

- [7] GALLEX Collaboration, P. Anselmann *et al.*, Phys. Lett. **375B** (1995), 237.
- [8] SAGE Collaboration, J.N. Abdurashitov *et al.*, Phys. Lett. **328B** (1994), 234.
- [9] S. Turck-Chièze, S. Cahen, M. Cassé and C. Doom, Astrophys. J. **335** (1998), 415.
- [10] J.N. Bahcall e R.K. Ulrich, Rev. Mod. Phys. **64** (1988), 297.
- [11] J.N. Bahcall e M.H. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. **64** (1992), 885.
- [12] L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17** (1976), 2369; D **20** (1979), 2634.
- [13] S.P. Mikheyev e A. Yu. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985), 913;
Nuovo Cimento **C9** (1986), 17.
- [14] A. Cisneros, Astro. and Space Sci.. **10** (1971), 87.
- [15] M.B. Voloshin, M. Vysotskii e L. Okun, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986), 440.

- [16] J. Pulido, *Phys. Rep.* **211** (1992) 167.
- [17] P.B. Pal, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, (1992) 5387.
- [18] R.N. Mohapatra e P.B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific, 1991).
- [19] J. Bahcall, R. Davis, P. Parker, A. Smirnov and R. Ulrich, *Solar Neutrinos, the First Thirty Years* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [20] T.J. Bowles e V.N. Gavrin, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993), 117.
- [21] S.M. Bilenki e S.T. Petcov, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987), 671.
- [22] K. Fujikawa and R. E. Shrock, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980), 963.
- [23] R. Barbieri, M. M. Guzzo, A. Masiero and D. Tommasini, *Phys. Lett. B* **252** (1990), 251.
- [24] A.I. Belesev, *Phys. Rev. B* **350** (1995), 263.
- [25] W. Stoeffl *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), 3237.

- [26] Loredano and Lamb, *Annals of the New York Academy of Sciences* (1989), 571.
- [27] Para uma aplicação deste fenômeno, ver: J. Bellandi, M.M. Guzzo e P.C. Holanda, *Anais do XVI ENFPC* (1995), 292.
- [28] M.M. Guzzo e P.C. Holanda, *Anais do XVII ENFPC* (1996), 374.
- [29] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Phys. Rep.* **41** (1978), 225.
- [30] B. Kayser, *Phys. Rev. D* **24**, (1981)110.
- [31] J. Bellandi and M. M. Guzzo, *Phys. Lett. B* **317** (1993), 130.
- [32] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions* (Dover Pub. Inc., NY, 1956).
- [33] J. Bellandi, *Notas de física, IFGW; Funções de Green* (Setor de Publicações do IFGW, 1992).
- [34] A. Yu. Smirnov, *Phys. Lett. B* **260** (1991), 161.