

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

DEPARTAMENTO DE RAIOS CÓSMICOS, CRONOLOGIA, ALTAS ENERGIAS E
LÉPTONS

"TRANSFORMAÇÕES ENTRE REGIÕES MINKOWSKIANAS SEPARADAS POR UM
CAPACITOR GRAVITACIONAL"

*Este exemplar corresponde à redação final
da tese defendida pelo aluno Antônio César
da Silva e aprovada pelo comitê julgador.*

Campinas, 04/11/87

Roberto de Andrade Martins

ALUNO: ANTÔNIO CÉSAR DA SILVA

ORIENTADOR: DR. ROBERTO DE ANDRADE MARTINS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO INSTITUTO DE
FÍSICA "GLEB WATAGHIN" DA UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE CAMPINAS COMO PARTE DOS RE-
QUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MES-
TRE EM FÍSICA.

Setembro de 1987

AOS MEUS PAIS, LÍDIA E GABRIEL,

AOS MEUS IRMÃOS E IRMÃS, ÉLVIS, LUÍS CARLOS, GABRIEL,
ADRIANA, MARLI E MÁRI,

AOS MEUS MELHORES AMIGOS, ALTEMIR, ÁLVARO, BLA
KE, VILSON E FREDI (DINA, IVONE, SHYRLEY, LIZETHE E ADELINA),

AS MINHAS MELHORES AMIGAS, MARIA, MARIS-
TELA, BETH E TINA,

AO MEU "CHEFE" MARTINS,

E A MIM,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Por ser a página mais difícil de ser escrita, como diz a Ana Maria, vamos ao que interessa.

Agradeço a professora Carola por confiar em "nós", ao professor Martins por confiar em mim e aos professores Bellandi, Júlio e Cabrera por suas considerações.

Agradeço aos colegas da "sala ao lado": Pedro, Sérgio, Tina, Ana Paula e Ana Maria por todas as oportunidades que tivemos de ficar juntos (porquê nessas oportunidades oque conversamos, ou melhor, oque conversei!).

Agradeço a todo pessoal do departamento pelo ótimo ambiente de trabalho e a Sandra e a Mari pelas tantas "mãozinhas" que me deram na resolução de vários problemas burocráticos.

Agradeço às gurias da secretaria de pós-graduação, Maria Inês e Cidinha, por suas constantes ajudas.

Agradeço a Malú por "esquecer" sua máquina de escrever comigo.

Agradeço ao meu amigo Vilson por todas as discussões e, é claro, a Lizethe por não ficar brava por só conversarmos sobre Física.

Agradeço ao CNPq por me aguentar todo este período.

E para encerrar, agradeço a todas aquelas pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram na minha formação, não só intelectual, mas também humana, porquê ... ora, porquê simplesmente eu me gosto deste jeito.

SUMÁRIO

ABSTRACT	(01)
----------------	------

CAPÍTULO I

1. Introdução	(03)
2. Princípios físicos a serem utilizados	(04)
2.1. "Red Shift" gravitacional	(05)
2.2. Princípio de Equivalência Forte	(05)
2.3. Relatividade Restrita e potenciais uni- formes	(06)
3. Situação em estudo: "Capacitor Gravitacional"	(06)
4. Transformações entre regiões minkowskianas se- paradas por um capacitor gravitacional	(08)
5. Cinemática: método de estudo	(08)
6. Relações temporais entre as regiões separadas pelo capacitor gravitacional	(12)
7. Relações espaciais entre as regiões separadas pelo capacitor gravitacional	(14)
8. Transformações de velocidade e aceleração ..	(17)
9. Dinâmica: considerações preliminares	(26)
10. Transformação de massa	(29)
11. Transformação de momentum, força e energia .	(32)
12. Uma pequena aplicação - pressão de radiação em refletores	(34)
13. Sobre a deflexão ou não de um feixe de luz que incide obliquamente no capacitor gravita- cional	(36)
14. Análise do problema	(37)
15. Solução do problema	(40)
16. Eletromagnetismo	(45)
17. Transformação para a corrente elétrica e o campo magnético	(49)
18. Relações gerais de transformação do Eletromag- netismo	(51)

19. Sobre a invariância da carga elétrica	(52)
20. Construindo o capacitor elétrico entremeado pelo capacitor gravitacional	(52)
21. Forças entre as placas - determinação	(53)

CAPÍTULO II

1. Introdução	(60)
2. Solução da questão para o espaço desprovido de matéria	(62)
3. Solução da questão para o espaço com matéria	(70)

CAPÍTULO III

Considerações finais	(79)
----------------------------	------

APÊNDICE A	(83)
------------------	------

APÊNDICE B	(87)
------------------	------

REFERÊNCIAS	(89)
-------------------	------

ABSTRACT

This work is grounded upon three fundamental physical principles: the strong equivalence principle; the validity of Special Relativity within any region of constant gravitational potential; and the gravitational red shift. The main objective of this research is to provide a deeper understanding of the transformations and main results of General Relativity. The first part of the work analyzes a "gravitational capacitor" built of both positive and negative mass matter, in such a way to create two flat spacetimes separated by a gravitational field. Transformations of kinematic, dynamic and electromagnetic magnitudes are obtained. Among the results of the analysis, the following conclusions were reached: the speed of light, all velocities, mass, energy, momentum and electric charge are invariants for transformations between reference systems at different gravitational potentials. Newton's third law is invalid for electric interaction between charges separated by a gravitational field. The second part of the work proves that there does not exist a set of coordinates (except for the local coordinates) that maintains space isotropy and constant coordinate speed of light throughout space, except for flat solutions.

RESUMO

Este trabalho está baseado sobre três princípios físicos fundamentais: o princípio de equivalência forte; a validade da Relatividade Restrita em qualquer região com potencial gravitacional constante; e o "red shift" gravitacional. Seu objetivo principal é proporcionar uma melhor compreensão das transformações e principais resultados da Relatividade Geral. A primeira parte do trabalho analisa um "capacitor gravitacional" construído a partir de massas gravitacionais positivas e negativas, de tal forma que da origem a duas regiões "chatas" no espaço-tempo separadas por um campo gravitacional. Transforma-

ções de grandezas cinemáticas, dinâmicas e eletromagnéticas são obtidas. Entre os resultados da análise, as seguintes conclusões foram alcançadas: a velocidade da luz, todas as velocidades, massa, energia, momentum e carga elétrica são invariantes para transformações entre sistemas de referência em diferentes potenciais gravitacionais. A terceira lei de Newton não é válida para a interação elétrica entre cargas separadas por um campo gravitacional. A segunda parte do trabalho demonstra que não existe um conjunto de coordenadas (exceto as coordenadas locais) que mantenha a isotropia do espaço e a velocidade coordenada da luz constante por todo o espaço, exceto para soluções "chatas".

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

Se tratarmos a Relatividade Restrita e Geral em termos de suas métricas veremos que a principal diferença entre elas é que na primeira o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é constante e possui a forma de Minkowski $g_{\mu\nu} = g_{\mu\mu} = (+1, -1, -1, -1)$ enquanto que na segunda o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é função das coordenadas de cada ponto do espaço-tempo. A ligação entre as duas é feita através do Princípio de Equivalência, da Relatividade Geral, que nos garante ser sempre possível escolher um sistema de referência localmente inercial, isto é, um referencial no qual os "potenciais" $g_{\mu\nu}$ sejam localmente os de Minkowski(1). No entanto, essa equivalência só é válida, em geral, em um único ponto.

Para que tal ligação fique mais clara uma pequena exposição das condições de uso da Relatividade Restrita se faz necessária. Observemos que além dos postulados do Princípio da Relatividade e Constância da velocidade da luz, o fato de a métrica da Relatividade Restrita ser invariante frente a transformações do grupo de Lorentz, deixa claro que existe uma terceira condição de igual importância: a geometria euclídeana deve ser válida. Toda a cinemática da Relatividade Restrita exige apenas essas três suposições: os dois postulados e a validade da geometria euclídeana. Sempre que essas condições forem satisfeitas, a Relatividade Restrita será válida, e vice-versa.

Sempre que os "potenciais" gravitacionais sejam constantes (iguais em todos os pontos do espaço-tempo) o tensor de Riemann-Christoffel será nulo e o espaço-tempo será "chato", isto é, sem curvatura, podendo através de uma transformação de coordenadas ser transformado em uma métrica de Minkowski. Portanto, sempre que em uma região do espaço-tempo o potencial gravitacional for uniforme, será rigorosamente válida, nessa região, a Relatividade Restrita. A Relatividade Geral faz-se necessária quando o potencial gravitacional varia no espaço-tempo considerado.

A partir daí é possível conceber-se uma situação interme-

diária entre a teoria da Relatividade Restrita e a teoria da Relatividade Geral: situação na qual existam regiões do espaço tempo nas quais o potencial gravitacional é constante, separadas por um campo gravitacional (como exemplo, pode-se citar a região interna de uma esfera oca e a região externa muito afastada de fontes de campo gravitacional, pois tanto no interior de uma casca esférica homogênea isolada quanto na região assintoticamente distante do centro, na solução de Schwarzschild, o potencial é constante).

A importância de um estudo desse tipo de situação é que ele proporciona, em primeiro lugar, uma melhor compreensão da física subjacente às transformações da Relatividade Geral - da influência do campo gravitacional nos processos de medição; e, em segundo lugar, a obtenção de resultados compatíveis com a Relatividade Geral e com outras classes mais abrangentes de teorias gravitacionais.

Note-se que, apesar de aqui estarmos tratando a Relatividade Especial como um caso particular da Relatividade Geral, a sua validade está comprovada experimentalmente e independe da validade da última. Considerando-se que a Relatividade Geral é muito mais questionada atualmente do que a Relatividade Restrita, é interessante poder dispor de alguns resultados que possam ser mantidos em qualquer teoria gravitacional que leve à Relatividade Restrita como caso particular, para potenciais uniformes.

2. PRINCÍPIOS FÍSICOS A SEREM UTILIZADOS

Na análise que será realizada a seguir serão utilizados com frequência três princípios físicos: a existência do "redshift" gravitacional; o princípio de equivalência forte; e a validade da Relatividade Restrita em regiões onde o campo seja nulo (potencial gravitacional uniforme). Os resultados obtidos a seguir serão válidos em qualquer teoria na qual esses princípios sejam obedecidos.

2.1. "RED-SHIFT" GRAVITACIONAL

De acordo com estudos feitos, pela Relatividade Geral, sobre a propagação de raios de luz num campo gravitacional, a frequência da luz, medida localmente, cresce ao mesmo tempo que o valor absoluto do potencial do campo gravitacional, isto é, a luz ao se afastar da fonte do campo gravitacional diminui sua frequência. A este fenômeno dá-se o nome de "Red Shift" gravitacional. Tal fenômeno é empiricamente verificado e por este motivo deve ser válido em qualquer teoria gravitacional. Tomado como princípio, esse fenômeno nos permite estabelecer relações entre relógios padrões dispostos em regiões com diferentes potenciais gravitacionais.

2.2. PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA FORTE (PEF)

O Princípio de Equivalência Forte garante que um sistema de referência não-inercial é equivalente a um campo gravitacional, o que significa garantir, como já foi colocado anteriormente, a escolha de um sistema de referência no qual os $g_{\mu\nu}$ sejam localmente constantes, isto é, um sistema que seja localmente inercial. Esse sistema localmente inercial é um sistema em queda livre, que está portanto atravessando regiões que possuem diferentes potenciais gravitacionais. Se, durante sua queda e conseqüente variação do potencial gravitacional, esse sistema permanece localmente inercial, comportando-se como um sistema sem campo, isso significa que, de acordo com o Princípio de Equivalência Forte, o valor do potencial gravitacional não influi nos fenômenos físicos. Uma conseqüência disso é que, se transportarmos um sistema físico (contendo aparelhos de medição, etc.) de um ponto para outro de um campo gravitacional, nenhuma experiência interna realizada nesse sistema permitirá descobrir se o potencial gravitacional mudou ou não. O Princípio de Equivalência Forte proporciona assim uma base para o estudo de medidas físicas locais (por transporte de aparelhos), como se verá depois.

(i) É esta forma do PEF que usaremos em todo trabalho - o potencial gravitacional não influi em medidas locais.

2.3. RELATIVIDADE RESTRITA E POTENCIAIS UNIFORMES

Um terceiro princípio físico a ser utilizado em nosso trabalho será o fato, já citado anteriormente, de que a Relatividade Restrita deve valer em regiões que possuem potencial gravitacional constante, ou de outra forma, em regiões com campo gravitacional nulo.

3. SITUAÇÃO EM ESTUDO: "CAPACITOR GRAVITACIONAL"

Normalmente, imagina-se que a massa, ao contrário da carga elétrica, deve ser sempre positiva. No entanto, já surgiram muitos trabalhos explorando a idéia de massas negativas. A situação que será analisada no presente trabalho utiliza a idéia de um "capacitor gravitacional", com massas positiva e negativa, como forma de gerar duas regiões do espaço-tempo com potenciais gravitacionais diferentes, porém constantes em cada região. Embora seja uma situação aparentemente impossível, trata-se da situação mais simples em que pode ser feito o tipo de análise que o presente trabalho objetiva, e cujos resultados podem ser estendidos a outras situações mais realistas. Por outro lado, a idéia de massas negativas não é de todo absurda, como se procurará mostrar.

De acordo com a Relatividade Geral todos os corpos que entrarem numa região em que exista um "campo gravitacional positivo" (o corpo fonte do campo possuindo massa gravitacional positiva) devem cair em direção à fonte do campo - ou, em linguagem Newtoniana, serão atraídos por tal corpo. No caso de um "campo gravitacional negativo" (o corpo fonte do campo possuindo massa gravitacional negativa), todos os corpos que entrarem nessa região deverão "cair" para fora, ou, novamente, em linguagem Newtoniana, serão repelidos (ver Apêndice A).

Embora não sejam encontradas na natureza essas massas gravitacionais negativas que encurvam o espaço-tempo de forma contrária ao encurvamento feito por massas gravitacionais positi-

vas (isto é, as curvaturas escalares possuírem sinais contrários), não existe incompatibilidade alguma entre tais massas gravitacionais e a Relatividade Geral, ou seja: trocando-se o sinal da massa na solução de Schwarzschild, obtém-se uma métrica compatível com as equações de campo de Einstein. Também já foram obtidas equações de campo de dipolos gravitacionais, o que mostra que a Relatividade Geral é compatível com a coexistência de massas de sinais opostos(2).

Baseando-nos nessa não incompatibilidade é que imaginamos um dispositivo que pode ser descrito da seguinte forma: duas placas, de grandes dimensões, uma construída com massa positiva e a outra com massa negativa, dispostas paralelamente, com iguais densidades superficiais(em módulo) e sendo a espessura das placas e a distância entre elas desprezíveis em comparação com seus comprimentos. Esse sistema separará duas regiões do

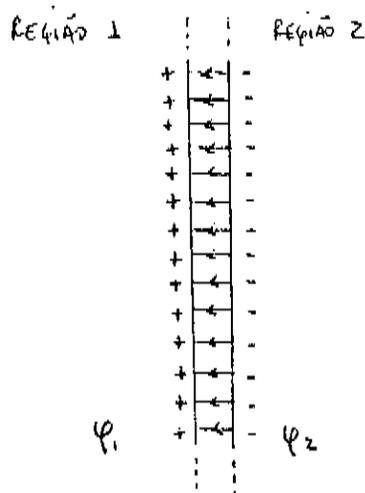


Fig. 3.1- CAPACITOR GRAVITACIONAL - "CG"

espaço-tempo de potenciais gravitacionais constantes diferentes, φ_1 e φ_2 , na região 1 e na região 2, respectivamente, como mostra a figura 1. É óbvio, que na região interna às duas placas deve existir um campo gravitacional não nulo, como no caso de um capacitor eletrostático.

Pode-se alternativamente pensar em duas cascas esféricas concêntricas, com massas de sinais opostos, de tal forma que o campo gravitacional seja não nulo apenas na região entre as cascas (fig. 2). Sendo o raio das esferas muito superior às dimensões da região estudada, as cascas podem ser consideradas

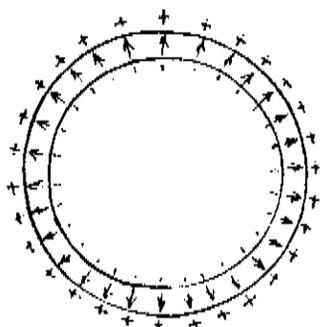


Fig. 3.2

localmente quase planas, como será assumido neste trabalho.

Por serem as características desse dispositivo muito parecidas com as de um capacitor elétrico, chamaremos tal dispositivo de "Capacitor Gravitacional".

A compatibilidade desse modelo com a Relatividade Geral será mostrada durante o trabalho.

4. TRANSFORMAÇÕES ENTRE REGIÕES MINKOWSKIANAS SEPARADAS POR UM CAPACITOR GRAVITACIONAL

Na parte seguinte deste trabalho, desenvolveremos a Mecânica Relativística aplicável à situação do Capacitor Gravitacional e, para tanto, optamos por uma divisão, como normalmente é feito, em (a) Cinemática e (b) Dinâmica. Na primeira delas, a Cinemática, serão em primeiro lugar determinadas as transformações das coordenadas temporal e espaciais que ligam ambas às regiões, isto é, como dois observadores que estão situados cada um numa região externa ao capacitor, vêem um determinado fenômeno e, posteriormente, as leis de transformação da velocidade e aceleração. Na segunda, a Dinâmica, estudaremos algumas propriedades dos quanta de luz, como a energia, e processos de comparação de massas ou medidas de massas, entre as regiões. Feito isto, poderemos encontrar as leis de transformação de momento, força e energia para qualquer tipo de sistema.

5. CINEMÁTICA: Método de Estudo

Em um campo gravitacional, podemos efetuar medidas locais e não-locais de grandezas físicas. As medidas locais são realizadas transportando-se tanto os instrumentos de medidas como os padrões para a região onde o fenômeno estudado está e, assim, efetuando-se sua medição, sem realizarmos depois correção alguma. No caso de medidas não-locais, ou os instrumentos e padrões não são transportados, ou quando são transportados suas medidas devem ser corrigidas.

Como um exemplo: na Relatividade Geral, a coordenada tempo é, em geral, um tempo não-local. O tempo local é dado por $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ (assumindo que g_{00} é positivo). Inversamente, $\sqrt{g_{00}}$ é o fator de correção que aplicado à medida local $d\tau$, forne

ce dt , o tempo não-local.

Observemos que as medidas não-locais garantem a univocidade das medidas (isto é: a cada evento associa-se um único conjunto de coordenadas - o que não ocorre se forem usadas medidas locais), e é possível, com seu uso estabelecer-se uma malha coerente de espaço-tempo, aplicável a todo o espaço.

Está claro que podemos aplicar diferentes sistemas não-locais de medidas a uma dada região. Apesar de na Relatividade Restrita dois sistemas de medidas só diferirem quando estiverem em movimento relativo, no caso mais geral podem existir sistemas de medidas não-locais diferentes correspondendo ao mesmo "referencial".

Por sistema de referência entende-se um conjunto de relógios e malha geométrica distribuídos por todo o espaço-tempo. Seria interessante ver como tal sistema de referência deve se comportar para que a univocidade das medidas seja preservada. Neste sentido, podemos, em primeiro lugar, fazer um estudo do sistema de medida de tempo e, em segundo lugar, da malha geométrica ou sistema de medida de posição (o tratamento de sistemas de medidas de tempo e espaço, separadamente, não supõe o "absolutismo" dos mesmos).

Para o sistema de medida de tempo, consideremos a figura 5.1, onde temos, de acordo com o modelo do Capacitor Gravitacional,

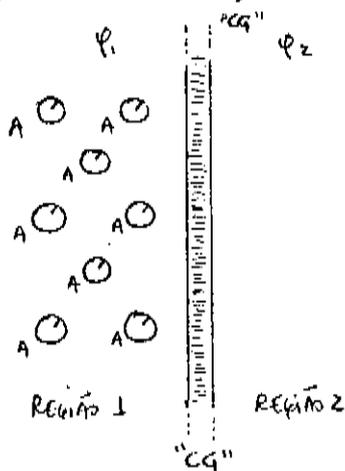


Fig. 5.1

onal, duas regiões com potenciais gravitacionais constantes, ψ_1 e ψ_2 , na região 1 e na região 2, respectivamente. Suponhamos que dispomos de um grande número de relógios exatamente equivalentes, construídos e ajustados da mesma forma, de modo a indicarem o mesmo tempo quando colocados próximos entre si.

Uma parte deles é distribuída pela região 1. Na região 1, consideremos que todos esses relógios, os quais devem medir o tempo do referencial de A (onde A é o observador que está na região 1), são iguais entre si, estão em repouso relativo e sincronizados por raios de luz (sincroniza-

ção de Poincaré-Einstein).

Quando transportamos relógios iguais a esses para a região 2, seus ritmos não se conservam e, embora em repouso em relação a A, começam a se adiantar ou atrasar. Para mantermos um sistema unívoco de medida de tempo, precisamos corrigir os re-

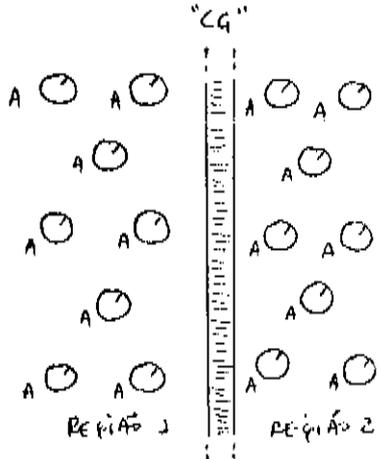


Fig. 5.2 - O tempo de A marcado pelos relógios transportados para a região 2, da região 1, depois da correção.

lógios na região 2, de forma que venham a ter, novamente, o mesmo ritmo. Para a correção dos relógios podemos usar o fato de que uma onda eletromagnética possui frequência constante ao se propagar através de um campo gravitacional, quando sua frequência é medida não-localmente. De um modo simples, pode-se dizer

que os relógios colocados nas regiões 1 e 2 terão sido ajustados para indicar o mesmo tempo quando qualquer observador puder ver que seus períodos são iguais. Além disso, os relógios devem ser sincronizados, bastando para isso sincronizar pelo processo de Poincaré-Einstein em cada região e também através do capacitor (cuja espessura é considerada desprezível). Tais relógios marcarão o tempo do referencial de A, na região 2 (fig. 5.2).

Usando a linguagem de medidas locais e não-locais, podemos dizer que, na região 1, o tempo de A e o tempo local são iguais, enquanto que, na região 2, o tempo de A é não-local.

É óbvio que o mesmo pode ser feito para o referencial de B (B é o observador que está na região 2), onde o tempo de B, na região 2, é o tempo local e, na região 1, é o tempo não-local. A fig. 5.3 mostra como fica o espaço com todos os relógios, de ambos os observadores, distribuídos.

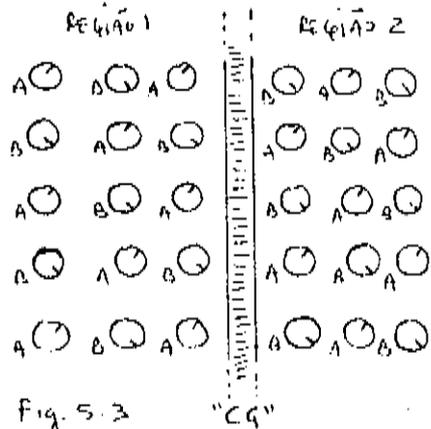


Fig. 5.3

Com relação às medidas de espaço, com réguas iguais, invariáveis, construiremos, na região 1, um retículo cartesiano que nos permita determinar a posição de qualquer fenômeno (fig. 5.4). Suponhamos que a malha básica é construída por meio do metro padrão utilizado

localmente (podendo esse metro padrão ser uma régua metálica ou um padrão óptico).

Ao transportarmos o metro padrão para o outro lado da barreira, ele pode mudar de comprimento. Sem corrigirmos sua medida, teremos a possibilidade de construir o retículo de B, na região 2. Depois de tal processo surge a seguinte questão: os

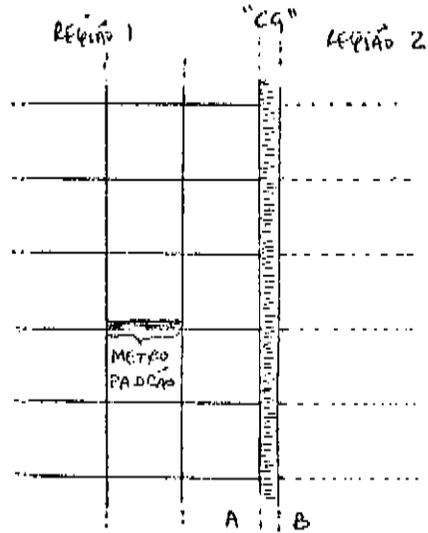


Fig. 5.4 - Retículo Geométrico Construído a Partir do Metro Padrão.

dois retículos são prolongações um do outro ou não? A solução da questão pode ser dada experimentalmente pelo seguinte processo: para construirmos o retículo de A na região 2, prolongaremos sua malha usando raios luminosos perpendiculares ao capacitor (suponhamos que o capacitor gravitacional ou é transparente, ou tem furos por onde pode passar a luz de um lado para o outro, isto é, de uma região para a outra). Por simetria, tais raios luminosos não podem se desviar. Depois, é claro, construiremos do outro lado do capacitor um retículo quadrado.

Se fizermos, agora, com a ajuda do metro padrão de B, a construção de seu retículo cartesiano e, posteriormente, o prolongamento da malha para a região 1, obteremos por fim a malha

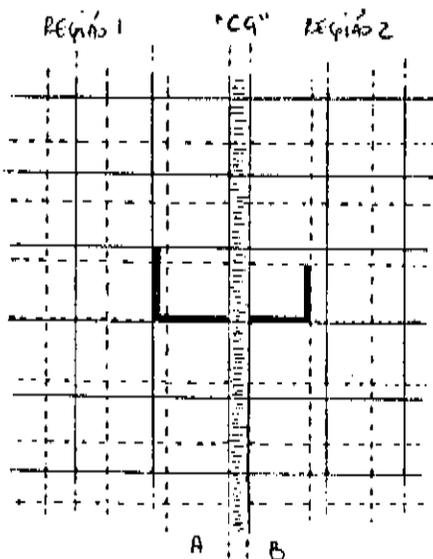


Fig. 5.5

geométrica de B e a malha geométrica de A distribuídas sobre todo o espaço, como mostra a figura ao lado (fig. 5.5).

Seria possível experimentalmente, através desse tipo de construção, determinar se o potencial gravitacional influi ou não sobre o comprimento do metro padrão. Além disso, a própria análise teórica permite determinar essa influência, com o uso dos princípios estabelecidos na seção 2.

6. RELAÇÕES TEMPORAIS ENTRE AS REGIÕES SEPARADAS PELO CAPACITOR GRAVITACIONAL

Agora que foi indicado o processo de construção dos sistemas de referência de A e B, passaremos à etapa de encontrar as relações entre as coordenadas temporal e espaciais de ambas as regiões separadas pelo capacitor.

Em um campo gravitacional constante, a relação entre o tempo local, $d\tau$ (ou tempo próprio), e o tempo não-local, dt (também chamado de tempo universal), é dada pela relação

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt \quad (6.1)$$

oque, na aproximação de campo fraco, fica

$$d\tau = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) dt \quad (6.2)$$

em primeira aproximação, sendo φ o potencial gravitacional no ponto e C a velocidade da luz.

Como os potenciais gravitacionais de ambas as regiões são constantes, a um mesmo intervalo infinitesimal de tempo não-local, dt , corresponde, em cada região, um determinado intervalo de tempo local, $d\tau$. Dessa forma, usando (6.2), temos

$$\frac{d\tau_1}{\left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2}\right)} = \frac{d\tau_2}{\left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2}\right)} = dt \quad (6.3)$$

onde $d\tau_1$ e $d\tau_2$ são os tempos medidos localmente, para um determinado fenômeno, pelos observadores que estão na região 1 e 2, respectivamente e em repouso relativo (Observação: serão utilizados índices inferiores à esquerda para indicar o referencial considerado.). Continuando,

$$d\tau_1 = d\tau_2 \frac{\left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2}\right)} = d\tau_2 \left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right)$$

$$d_A T \approx d_B T \left[1 + \frac{(\psi_1 - \psi_2)}{c^2} \right] = d_B T \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2} \right) \dots \dots \dots (6.4)$$

onde $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$. Portanto, em primeira aproximação, utilizando uma origem temporal comum, obtemos:

$$T_A^0 = T_B^0 \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2} \right) \dots \dots \dots (6.5)$$

Essa transformação indica a relação entre os instantes de um evento, determinados respectivamente pelas redes de relógios de A e de B, qualquer que seja a região na qual se processa o fenômeno.

Para fixar idéias, se o potencial na região 2 é mais elevado do que na região 1, $\Delta\psi$ é maior do que zero e $T_A^0 < T_B^0$, ou seja, o período do relógio diminui quando aumenta o potencial gravitacional.

Embora tenha sido utilizada nessa dedução a aproximação de campo fraco da Relatividade Geral, o resultado obtido independe da validade da Relatividade Geral, podendo ser obtido, como primeira aproximação, a partir do fenômeno de "Red-Shift" gravitacional.

Quando um raio de luz de frequência ν_1 , medida localmente, num ponto de potencial gravitacional ψ_1 , viaja até um outro ponto, de potencial gravitacional ψ_2 , sua frequência, medida localmente, sofrerá um deslocamento dado por

$$\Delta\nu = \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{c^2} \right) \nu_1, \text{ onde } \Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 \dots \dots (6.6)$$

Tal desvio é verificado experimentalmente e se chama "red shift" gravitacional.

Podemos reescrever a equação (6.6) de forma que ν_2 , a frequência do raio, medida localmente, no ponto de potencial gravitacional ψ_2 , seja dada em função de ν_1 , isto é,

$$v_2 = v_1 + v_1 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \right)$$

$$v_2 = v_1 \left[1 - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{c^2} \right) \right] = v_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right), \text{ onde } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \dots\dots (6.7)$$

Como a frequência local do raio de luz é o inverso do tempo local, ou melhor, $v = \frac{k}{T}$ (onde k é o número de ondas), a equação (6.7) fica

$$\frac{k}{T_2} = \frac{k}{T_1} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right) \quad \text{ou}$$

$$T_1 = T_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right). \dots\dots\dots (6.8)$$

Observemos que a equação (6.8) é idêntica a equação (6.5), o que vem a corroborar a afirmação da validade de (6.5) independentemente da validade da Relatividade Geral, apesar de a termos usado para conseguí-la.

7. RELAÇÕES ESPACIAIS ENTRE AS REGIÕES SEPARADAS PELO CAPACITOR

As relações entre medidas temporais em regiões de potenciais diferentes são simples e deduzidas de modo inequívoco, como mostrado acima. No entanto, no caso das medidas de espaço, é um pouco mais difícil estabelecer as transformações desejadas. O problema pode parecer até mesmo indefinido, comportando infinitas soluções diferentes. No entanto, nesse caso particular do capacitor gravitacional, é possível chegar-se a transformações bem definidas, unívocas, por causa de restrições geométricas existentes.

Consideremos os relógios A' e B' , idênticos a A e B , que se movem paralelamente ao eixo y , com velocidades constantes,

de tal forma que a distância entre A' e B' é sempre constante

e eles estão sempre unidos por uma reta perpendicular ao capacitor gravitacional, isto é, estão sempre um diante do outro (fig. 7.1). Experimentalmente, pode-se saber se esta distância é constante enviando-se um sinal luminoso de A' para B' e retornando de B' para A'. Se o sinal demorar sempre o mesmo tempo para ir e voltar, a distância é constante, mesmo que não saibamos qual é o valor da distância. Além disso, a luz que incide perpendicularmente ao capacitor pode atravessá-lo sem ser desviada, e portanto A' vê B' sempre

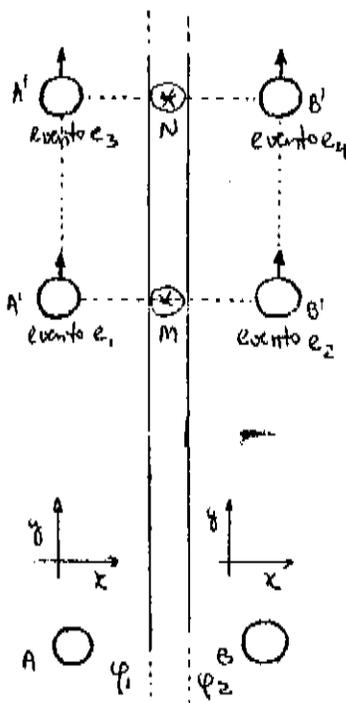


Fig. 7.1

pre "à sua frente", do outro lado do capacitor.

Consideremos os indicadores de posição M e N, colocados na barreira gravitacional. A passagem de A' pelo indicador M é o evento e1 e a passagem de B' por M é o evento e2. Da mesma forma, as passagens de A' e B' por N são os eventos e3 e e4, respectivamente.

Como A' e B' estão se acompanhando ao longo da barreira gravitacional t1 = t2 e t3 = t4, medidos por qualquer relógio (desde que seja sempre o mesmo relógio), isto é:

$${}_A t_1 = {}_A t_2 \quad , \quad {}_A t_3 = {}_A t_4 \quad \dots \dots \dots (7.1)$$

Seja ${}_A \dot{y}_{A'}$ a velocidade de A' em relação a A e ${}_B \dot{y}_{B'}$ a velocidade de B' em relação a B. Entre A e A' e B e B' valem as relações da Relatividade Restrita:

$${}_A (t_3 - t_1) = {}_A (t_2 - t_1) \left(1 - \frac{{}_A \dot{y}_{A'}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad , \quad {}_A \dot{y}_{A'} = \frac{{}_A \Delta y_{A'}}{{}_A \Delta t} \quad \dots \dots \dots (7.2)$$

$${}_B (t_4 - t_2) = {}_B (t_4 - t_2) \left(1 - \frac{{}_B \dot{y}_{B'}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad , \quad {}_B \dot{y}_{B'} = \frac{{}_B \Delta y_{B'}}{{}_B \Delta t} \quad \dots \dots \dots (7.3)$$

Além disso, a partir de (6.5), temos:

$${}_A(t_4 - t_2) = {}_B(t_4 - t_2) \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \quad \dots \dots \dots (7.4)$$

e observando que o movimento comum de A' e B' não pode afetar a relação entre esses relógios, vale entre esses relógios a mesma relação que vale entre A e B (ver Apêndice B), ou seja:

$${}_{A'}(t_4 - t_2) = {}_{B'}(t_4 - t_2) \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right). \quad \dots \dots \dots (7.5)$$

Agora, de (7.1), temos que:

$$t_4 - t_2 = t_3 - t_1 \quad \dots \dots \dots (7.6)$$

para um mesmo observador.

De (7.3) e (7.4) tiramos:

$${}_A(t_4 - t_2) = {}_B(t_4 - t_2) \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\dot{y}_{B'}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \dots \dots (7.7)$$

De (7.2) e (7.6), temos

$${}_A(t_4 - t_2) = {}_{A'}(t_4 - t_2) \left(1 - \frac{\dot{y}_{A'}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \dots \dots \dots (7.8)$$

E se usarmos (7.8) e (7.5), tiramos que

$${}_A(t_4 - t_2) = {}_{B'}(t_4 - t_2) \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\dot{y}_{A'}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \dots \dots (7.9)$$

o que, de (7.7) e (7.9), deduzimos que

$${}_B\dot{y}_{B'} = {}_{A'}\dot{y}_{A'} \quad \dots \dots \dots (7.10)$$

o que significa que a velocidade atribuída por B a B' é igual a velocidade atribuída por A ao relógio A'.

Continuando, pela definição de velocidade

$${}_B\dot{y}_{B'} = \frac{{}_B(y_4 - y_2)}{{}_B(t_4 - t_2)} \quad \dots \dots \dots (7.11)$$

$${}_{A'}\dot{y}_{A'} = \frac{{}_A(y_3 - y_1)}{{}_A(t_3 - t_1)} \quad \dots \dots \dots (7.12)$$

e usando (7.10), ficamos com

$$\frac{{}_B(y_4 - y_2)}{{}_B(t_4 - t_2)} = \frac{{}_A(y_3 - y_1)}{{}_A(t_3 - t_1)} \quad \dots \dots \dots (7.13)$$

e, novamente, de (7.6) e (7.5), tiramos a seguinte relação:

$$\frac{{}_B(y_4 - y_2)}{{}_B(t_4 - t_2)} = \frac{{}_A(y_3 - y_1)}{{}_A(t_4 - t_2)} = \frac{{}_A(y_3 - y_1)}{{}_B(t_4 - t_2) (1 - \Delta\varphi/c^2)}$$

e portanto

$${}_A(y_3 - y_1) = {}_B(y_4 - y_2) (1 - \Delta\varphi/c^2). \quad \dots \quad (7.14)$$

Ou seja: as distâncias atribuídas por A e B ao espaço que separa os indicadores de posição, M e N, são diferentes.

Portanto, ao se transferir o metro padrão da região 1 para a região 2, ele altera seu tamanho. Supondo-se $\varphi_2 > \varphi_1$, então ${}_A\Delta y < {}_B\Delta y$, para uma mesma distância paralela ao capacitor gravitacional, e portanto o metro de A é maior do que o metro de B (o comprimento do metro diminui quando aumenta o potencial gravitacional).

Como o espaço é isotrópico nas regiões 1 e 2, as transformações das coordenadas \underline{x} e \underline{z} serão idênticas às de \underline{y} .

Portanto, as transformações de coordenadas entre os referenciais A e B, parados em relação ao capacitor, são:

$$\left. \begin{aligned} {}_A x &= {}_B x \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A y &= {}_B y \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A z &= {}_B z \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A t &= {}_B t \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7.15)$$

8. TRANSFORMAÇÕES DE VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Já que encontramos as transformações de coordenadas tempo-espaciais entre os referenciais associados às regiões 1 e 2, podemos agora obter as transformações de velocidade e aceleração de um determinado ponto material P, completando dessa forma a parte essencial da cinemática. Para tanto, considere-

mos a fig. 8.1, a qual mostra dois referenciais inerciais, em repouso relativo, com origens nas regiões A e B, respectivamente.

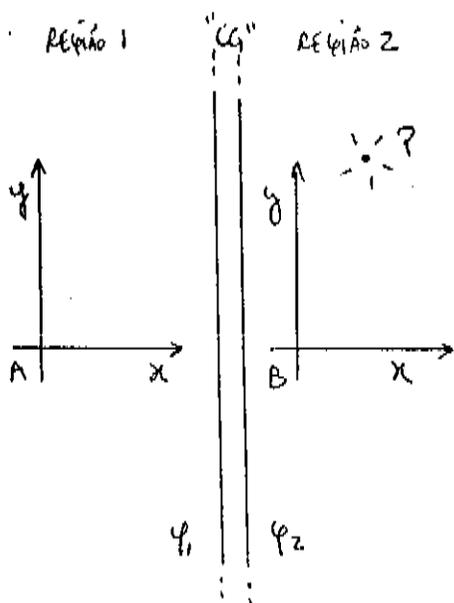


Fig. B.1 - Mostra os referenciais A e B e o ponto material P.

Consideremos um ponto material P, na região 2, visto pelo observador dessa região, de coordenadas ${}_B x_P$, ${}_B y_P$ e ${}_B t_P$. Pelas transformações de coordenadas entre as duas regiões, encontradas anteriormente, as coordenadas do ponto material P, medidas pelo observador que está na região 1, serão ${}_A x_P$, ${}_A y_P$ e ${}_A t_P$, dadas como segue

$$\left. \begin{aligned} {}_A x_P &= {}_B x_P \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A y_P &= {}_B y_P \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A z_P &= {}_B z_P \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \\ {}_A t_P &= {}_B t_P \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.1)$$

Daí obtemos diretamente as transformações de velocidade e aceleração entre os referenciais A e B:

$${}_A \dot{x}_P = \frac{d{}_A x_P}{d{}_A t_P} = \frac{d{}_B x_P (1 - \Delta\varphi/c^2)}{d{}_B t_P (1 - \Delta\varphi/c^2)} = \frac{d{}_B x_P}{d{}_B t_P} = {}_B \dot{x}_P \dots\dots\dots (8.2)$$

e, analogamente,

$$\left. \begin{aligned} {}_A \dot{y}_P &= {}_B \dot{y}_P \\ {}_A \dot{z}_P &= {}_B \dot{z}_P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.3)$$

ou seja: as velocidades são invariantes - os valores da velocidade de um mesmo ponto material, medidos pelos referenciais A e B, são iguais. Daí se deduz, como caso particular, que a velocidade da luz tem sempre o mesmo valor não só quando medida localmente (o que é exigido pelo Princípio de Equivalência Forte de Einstein) mas também tem o mesmo valor quando medida

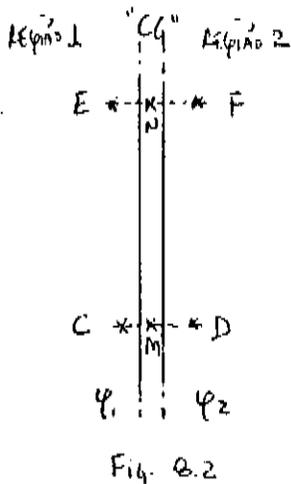


Fig. 8.2

não-localmente. Ou seja: se de dois pontos C e D, nas regiões 1 e 2, próximos ao ponto M do capacitor gravitacional, partem ao mesmo tempo dois sinais luminosos para os pontos E e F (fig. 8.2), próximos ao ponto N, os sinais lá chegarão simultaneamente.

Note-se que, em geral, a velocidade coordenada da luz (velocidade não-local) costuma ser diferente de c e varia de ponto para ponto no campo gravitacional.

A transformação da aceleração também é obtida de modo imediato:

$${}^A \ddot{\chi}_P = \frac{d^2 {}^A \chi_P}{d {}^A t_P^2} = \frac{d {}^A \dot{\chi}_P}{d {}^A t_P} = \frac{d {}^B \dot{\chi}_P}{d {}^A t_P} = \frac{d {}^B \dot{\chi}_P}{d {}^B t_P} \frac{d {}^B t_P}{d {}^A t_P} = {}^B \ddot{\chi}_P \left(1 - \frac{\Delta \psi}{c^2}\right)^{-1} \dots (8.4)$$

e, analogamente,

$$\left. \begin{aligned} {}^A \ddot{y}_P &= {}^B \ddot{y}_P \left(1 - \frac{\Delta \psi}{c^2}\right)^{-1} \\ {}^A \ddot{z}_P &= {}^B \ddot{z}_P \left(1 - \frac{\Delta \psi}{c^2}\right)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (8.5)$$

ou seja: as acelerações não são invariantes.

Todas as relações obtidas até agora aplicam-se a referenciais em repouso relativo, embora seus instrumentos de medida forneçam indicações diferentes. Cabe analisar agora as transformações entre um referencial em repouso em relação ao capacitor gravitacional e um outro referencial em movimento, do outro lado do capacitor.

Consideremos que na região 2 exista um referencial, B',

que se move com velocidade constante ${}^B \dot{\chi}_{B'}$, na direção positiva do eixo ${}^B \chi$ (fig. 8.3), em relação a B. Usando as transformações de Lorentz entre os referenciais B e B', obtemos que as coordenadas de P, em relação ao re

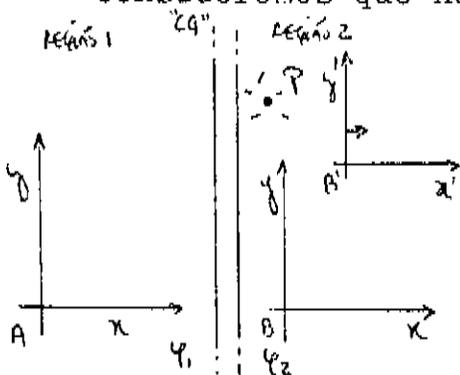


Fig. 8.3

referencial B' serão

$$\left. \begin{aligned} {}_B X_P &= \frac{{}_B X_P - {}_B t_P {}_B \dot{X}_B}{\sqrt{1 - {}_B \dot{X}_B^2 / c^2}} \\ {}_B Y_P &= {}_B Y_P \\ {}_B Z_P &= {}_B Z_P \\ {}_B t_P &= \frac{{}_B t_P - {}_B X_P ({}_B \dot{X}_B / c^2)}{\sqrt{1 - {}_B \dot{X}_B^2 / c^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.6)$$

Da transformação inversa, as coordenadas de P , em relação ao referencial B , a partir de B' , ficam

$$\left. \begin{aligned} {}_B X_P &= \frac{{}_B X_P + {}_B t_P {}_B \dot{X}_B}{\sqrt{1 - {}_B \dot{X}_B^2 / c^2}} \\ {}_B Y_P &= {}_B Y_P \\ {}_B Z_P &= {}_B Z_P \\ {}_B t_P &= \frac{{}_B t_P + {}_B X_P ({}_B \dot{X}_B / c^2)}{\sqrt{1 - {}_B \dot{X}_B^2 / c^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.7)$$

Daqui, vemos que usando (8.1) e (8.7), podemos determinar as coordenadas de P , quando medidas pelo observador A :

$$\left. \begin{aligned} {}_A X_P &= ({}_B X_P + {}_B t_P {}_B \dot{X}_B) \gamma \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right) \\ {}_A Y_P &= {}_B Y_P \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right) \\ {}_A Z_P &= {}_B Z_P \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right) \\ {}_A t_P &= [{}_B t_P + {}_B X_P ({}_B \dot{X}_B / c^2)] \gamma \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.8)$$

onde $\gamma = (1 - {}_B \dot{X}_B^2 / c^2)^{-1/2} = (1 - {}_A \dot{X}_B^2 / c^2)^{-1/2}$

ou, pela transformação inversa, temos

$$\left. \begin{aligned} {}_B X_P &= \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma ({}_A X_P - {}_A t_P {}_B \dot{X}_B) \\ {}_B Y_P &= \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}_A Y_P \\ {}_B Z_P &= \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}_A Z_P \\ {}_B t_P &= \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma [{}_A t_P - {}_A X_P ({}_B \dot{X}_B / c^2)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.9)$$

Seja, agora, ${}_B \dot{x}_P$ a velocidade do ponto material P, na direção \tilde{x} , medida no sistema B'. A questão é: qual é a velocidade de P, quando medida no sistema de referência do observador A? Já que o que queremos calcular é ${}_A \dot{x}_P$, para facilidade de cálculo, podemos escrever

$$\left. \begin{aligned} {}_B x_P &= x' & ; & & {}_B t_P &= t' \\ {}_A x_P &= x & ; & & {}_A t_P &= t \end{aligned} \right\} \text{ e } {}_B \dot{x}_{B'} = v \quad (8.10)$$

Portanto,

$${}_A \dot{x}_P = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{e} \quad {}_B \dot{x}_P = \frac{dx'}{dt'} = \dot{x}'$$

e segue, com a ajuda de (8.8), que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [(x' + vt') \gamma (1 - \Delta\varphi/c^2)]$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \frac{dt'}{dt} [(x' + vt') \gamma (1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2})] \quad (8.11)$$

Observemos, no entanto, que de (8.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma [t - x(v/c^2)] \right] \\ &= \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \frac{d}{dt} [t - x(v/c^2)] \end{aligned}$$

$$\frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \dot{x}\right) \quad (8.12)$$

Então, usando (8.12) em (8.11), ficamos com

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right) \frac{d}{dt'} [(x' + vt') \gamma (1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2})]$$

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \gamma^2 \left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right) (\dot{x}' + v)$$

$$\dot{x} = \gamma^2 \left(1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}\right) (\dot{x}' + v)$$

$$\dot{x} = \gamma^2 (\dot{x}' + v) - \gamma^2 \frac{v\dot{x}}{c^2} (\dot{x}' + v)$$

$$\dot{x} + \gamma^2 \frac{v\dot{x}}{c^2} (\dot{x}' + v) = \gamma^2 (\dot{x}' + v)$$

$$\dot{x} \left[1 + \gamma^2 \frac{v}{c^2} (\dot{x}' + v) \right] = \gamma^2 (\dot{x}' + v)$$

$$\dot{x} = \frac{\gamma^2 (\dot{x}' + v)}{1 + \gamma^2 \frac{v}{c^2} (\dot{x}' + v)}$$

$$\dot{x} = \frac{\gamma^2 (\dot{x}' + v)}{1 + \gamma^2 \frac{v \dot{x}'}{c^2} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\dot{x} = \frac{\cancel{\gamma^2} (\dot{x}' + v)}{\cancel{\gamma^2} \left(\gamma^{-2} + \frac{v \dot{x}'}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{\gamma^{-2} + \frac{v \dot{x}'}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}$$

mas observemos que $\gamma^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, logo

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v \dot{x}'}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{1 + \frac{v \dot{x}'}{c^2}}$$

ou, de (8.10),

$${}^A \dot{x}_P = \frac{{}^{B'} \dot{x}_P + v {}^{B'} \dot{x}_B}{1 + \frac{v {}^{B'} \dot{x}_B}{{}^{B'} \dot{x}_P} / c^2} \quad \dots \quad (8.13)$$

Este resultado é idêntico à transformação de velocidades entre B' e B, já que a velocidade em relação a B é igual à velocidade em relação a A.

De modo análogo, obtemos:

$${}^A \dot{y}_P = {}^{B'} \dot{y}_P \frac{\left(1 - \frac{v \dot{x}_B^2}{c^2} \right)^{1/2}}{1 + \frac{v {}^{B'} \dot{x}_B}{{}^{B'} \dot{y}_P} / c^2} \quad \dots \quad (8.14)$$

valendo uma equação semelhante para componentes de velocidade na direção \tilde{z} .

Supõe-se sempre, nessas deduções, que a velocidade de B' em relação a B e a A é paralela ao eixo \underline{x} . Pode-se escolher tanto \underline{x} perpendicular quanto paralelo às placas do capacitor gravitacional, conforme o caso.

Para calcularmos a aceleração do ponto material P , quando medida por A , considerando em primeiro lugar a componente \underline{x} , seguiremos o mesmo raciocínio e chamaremos ${}_A\ddot{\chi}_P$ a componente \underline{x} da aceleração, quando medida por B' , e, novamente, para facilidade de cálculo, chamaremos

$${}_A\ddot{\chi}_P = \left(\frac{d\dot{\chi}}{dt} \right)_P = \dot{\chi} \quad \text{e} \quad {}_{B'}\ddot{\chi}_P = \left(\frac{d\dot{\chi}'}{dt'} \right)_P = \dot{\chi}' \quad \dots (8.15)$$

Escrevendo (8.13), então

$$\dot{\chi} = \frac{\dot{\chi}' + v}{1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2}} \quad , \quad \text{onde} \quad v = {}_B\dot{\chi}_{B'} \quad \dots (8.16)$$

Chamando de ${}_A\ddot{\chi}_P$ a componente \underline{x} da aceleração, quando medida pelo observador A , e usando (8.10) e (8.15), temos

$${}_A\ddot{\chi}_P = \frac{d\dot{\chi}}{dt} = \ddot{\chi} \quad \text{e agora usando (8.16), fica}$$

$$\ddot{\chi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\chi}' + v}{1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2}} \right)$$

$$\ddot{\chi} = \frac{d}{dt'} \frac{dt'}{dt} \left(\frac{\dot{\chi}' + v}{1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2}} \right) \quad \text{e de (8.12), ficamos com}$$

$$\ddot{\chi} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{\chi}'v}{c^2} \right) \frac{d}{dt'} \left(\frac{\dot{\chi}' + v}{1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2}} \right)$$

$$\ddot{\chi} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{v\dot{\chi}'}{c^2} \right) \left[\frac{(1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2})\ddot{\chi}' - (\dot{\chi}' + v)\ddot{\chi}'\frac{v}{c^2}}{(1 + \frac{\dot{\chi}'v}{c^2})^2} \right]$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{x}v}{c^2}\right) \ddot{x}' \left[\frac{\left(1 + \frac{\dot{x}v}{c^2}\right) - (\dot{x}' + v) \frac{v}{c^2}}{\left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right)^2} \right]$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{x}v}{c^2}\right) \ddot{x}' \frac{\left(1 + \cancel{\dot{x}v/c^2} - \cancel{\dot{x}'v/c^2} - v^2/c^2\right)}{\left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right)^2}$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{x}v}{c^2}\right) \ddot{x}' \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 + \dot{x}'v/c^2\right)^2} \dots \dots \dots (8.17)$$

No entanto, vemos que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\dot{x}v}{c^2}\right) &= \left[1 - \frac{v}{c^2} \left(\frac{\dot{x}' + v}{1 + \dot{x}'v/c^2}\right) \right] \\ &= \left[1 - \frac{v\dot{x}'/c^2 + v^2/c^2}{1 + \dot{x}'v/c^2} \right] \\ &= \left[\frac{1 + \cancel{\dot{x}'v/c^2} - \cancel{\dot{x}'v/c^2} - v^2/c^2}{1 + \dot{x}'v/c^2} \right] = \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 + \dot{x}'v/c^2\right)} \end{aligned}$$

e voltando a (8.17), teremos

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{\left(1 - v^2/c^2\right) \left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right)^2} \ddot{x}'$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right)^3} \ddot{x}'$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}' \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma^{-3} \left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right)^{-3}$$

ou, de (8.15),

$${}_A \ddot{\chi}_P = {}_B \ddot{\chi}_P \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{\left(1 - {}_B \dot{\chi}_{B'}^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1 + {}_B \dot{\chi}_P {}_B \dot{\chi}_{B'}/c^2\right)^3}, \dots \dots \dots (8.18)$$

e para a componente \underline{y} da aceleração, quando medida por A, considerando a seguinte notação

$${}_A \ddot{y}_P = \left(\frac{dy}{dt} \right)_P = \dot{y} \quad \text{e} \quad {}_{B'} \ddot{y}_P = \left(\frac{dy}{dt'} \right)_P = \dot{y}'$$

e escrevendo (8.14) da seguinte forma

$$\dot{y} = \dot{y}' \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{(1 + \dot{x}'v/c^2)} \quad \dots \dots \dots (8.19)$$

e chamando

$${}_A \ddot{y}_P = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} \quad \text{e} \quad {}_{B'} \ddot{y}_P = \frac{d\dot{y}'}{dt'} = \ddot{y}'$$

e voltando a (8.19), encontramos

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} \left[\dot{y}' \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{(1 + \dot{x}'v/c^2)} \right] = \frac{d}{dt'} \frac{dt'}{dt} \left[\dot{y}' \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{(1 + \dot{x}'v/c^2)} \right]$$

O que fica, a partir de (8.12),

$$\ddot{y} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right) \frac{d}{dt'} \left[\dot{y}' \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{(1 + \dot{x}'v/c^2)} \right]$$

$$\ddot{y} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \gamma \left(1 - \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right) \left[\frac{\gamma^{-1} \left(1 + \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right) \ddot{y}' - \dot{y}' \gamma^{-1} \ddot{x}' \frac{v}{c^2}}{(1 + \dot{x}'v/c^2)^2} \right]$$

e como $\left(1 - \frac{\dot{x}'v}{c^2}\right) = \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 + \dot{x}'v/c^2)}$, teremos

$$\ddot{y} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 + \dot{x}'v/c^2)} \left[\ddot{y}' + \frac{v}{c^2} (\dot{x}' \ddot{y}' - \dot{y}' \ddot{x}') \right]$$

ou

$${}_A \ddot{y}_P = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{(1 - \dot{x}'_B \dot{x}'_B/c^2)}{(1 + \dot{x}'_P \dot{x}'_B/c^2)} \left[{}_{B'} \ddot{y}_P + \frac{\dot{x}'_B}{c^2} \left(\dot{x}'_P \ddot{y}_P - \dot{y}'_P \ddot{x}'_P \right) \right]$$

Concluindo, se observarmos as equações (8.13) e (8.14), que dão a transformação de velocidade entre os observadores A e B' (onde A está na região 1 e em repouso relativamente ao capacitor e B', na região 2, em movimento uniforme em relação ao capacitor), notaremos que a mesma é uma grandeza invariante. O mesmo não podendo ser dito da aceleração, onde as equações (8.18) e (8.20) mostram sua não-invariância.

9. DINÂMICA: CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Com relação à construção da Dinâmica, uma certa divisão será feita, onde, numa primeira parte, trataremos da transformação do padrão de massa entre as duas regiões, sendo que na segunda veremos a transformação do momento, força e energia. Algumas considerações sobre fótons serão necessárias para que possamos chegar as relações de transformação para o padrão de massa.

Para se elaborar uma dinâmica relativística compatível com as transformações cinemáticas anteriores, é necessário estabelecer-se a equação de transformação de alguma grandeza dinâmica assumida como fundamental. Ela pode ser energia, massa, momentum, força, etc. Uma vez determinada uma das transformações dinâmicas, as outras são obtidas facilmente.

A fim de estabelecer essas transformações dinâmicas é conveniente partir do estudo de um fenômeno completamente compreendido. Tomaremos como ponto de partida o estudo dinâmico dos fótons. Na verdade, não se trata de utilizar uma relação quântica como base para uma teoria relativística: a relação de proporcionalidade entre a energia e frequência para um trem de ondas eletromagnéticas é uma relação clássica. No entanto, por comodidade, falaremos sempre em fótons.

Consideremos um feixe luminoso monocromático de determinada frequência ν . Os fótons que compõem tal feixe, possuem, todos, um momentum \vec{p}_f , e energia ϵ_f , bem definidos, sen

do que a relação entre as duas quantidades é dada pela equação

$$p_f = \frac{E_f}{c} \quad \text{--- -- -- -- --} \quad (9.1)$$

onde a relação entre a energia cinética do fóton e a frequência da luz é dada por

$$E_f = h\nu \quad \text{--- -- -- -- --} \quad (9.2)$$

sendo h a constante de Planck.

Pode-se associar a cada fóton, além disso, uma massa inercial maupertuisiana, definida a partir da relação $p = m\nu$. Temos, então:

$$m_f = \frac{p_f}{c} = \frac{E_f}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad \text{--- -- -- -- --} \quad (9.3)$$

Na relação (9.2), E_f é a energia cinética do fóton, ou seja, sua energia medida localmente (por exemplo, no efeito fotoelétrico), que pode ser representada por K .

Quando se deduz dinamicamente a equação do "red-shift" gravitacional, assume-se que o fóton tem também uma energia potencial

$$U = m_f \varphi \quad \text{--- -- -- -- --} \quad (9.4)$$

por analogia com partículas clássicas.

Suponhamos (fig. 9.1) que um fóton está inicialmente na região 1, visto por A, com energia cinética ${}_A K_1 = {}_A h_1 \nu_1$ (${}_A h_1$ e ${}_A \nu_1$, sendo a constante de Planck e a frequência do fóton medidos pelo observador A, na região 1. No caso da constante de Planck, a notação evidencia o fato de as constantes universais só possuírem o seu valor determinado quando medidas localmente). Posteriormente, o fóton se encontra na região 2, depois de ter atravessado o capacitor gravitacional. Estando, agora, na região 2, o observador B o percebe com energia cinética ${}_B K_2 = {}_B h_2 \nu_2$ (sendo ${}_B h_2$ e ${}_B \nu_2$, a constante de Planck e a frequência da radiação medidas pelo observador B, na região 2).

A energia total do fóton ${}_A E_1$, na região 1, pode ser escrita por A, como sendo a soma da energia cinética mais a ener

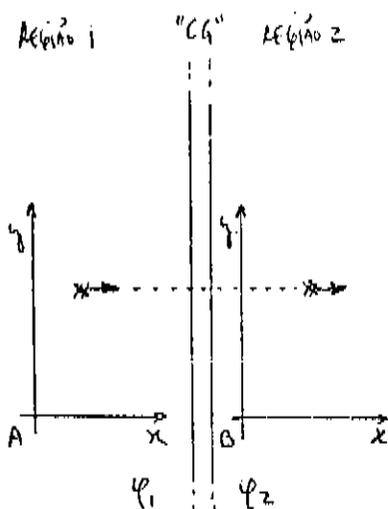


Fig. 9.1 - FÓTON ATUALIZANDO A BARRAGEM DE POTENCIAL.

gia potencial associada à sua massa, isto é, de (9.2), (9.3) e (9.4):

$${}_A E_1 = {}_A K_1 + {}_A U_1$$

$${}_A E_1 = {}_A h_1 \nu_1 + \left(\frac{{}_A h_1 \nu_1^2}{c^2} \right) \psi_1 = {}_A h_1 \nu_1 (1 + \psi_1/c^2) \quad \dots (9.5)$$

e a energia total do fóton, da mesma forma, após passar pela barreira, pode ser escrita por A, como sendo

$${}_A E_2 = {}_A K_2 + {}_A U_2$$

$${}_A E_2 = {}_A h_2 \nu_2 + \left(\frac{{}_A h_2 \nu_2^2}{c^2} \right) \psi_2 = {}_A h_2 \nu_2 (1 + \psi_2/c^2) \quad \dots (9.6)$$

Por conservação de energia, devemos ter

$${}_A E_1 = {}_A E_2 \quad \dots (9.7)$$

e de (9.5) e (9.6) tiramos:

$${}_A h_1 \nu_1 (1 + \psi_1/c^2) = {}_A h_2 \nu_2 (1 + \psi_2/c^2) \dots$$

$$\therefore {}_A h_2 \nu_2 = {}_A h_1 \nu_1 \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2} \right) \quad \dots (9.8)$$

onde $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$.

Sabemos que a frequência do fóton em ambas as regiões, quando observada pelo mesmo observador, deve ser a mesma (isto porque o campo na barreira é constante), isto é

$${}_A \nu_1 = {}_A \nu_2 \quad \dots (9.9) \quad , \text{ portanto de (9.8), obtemos}$$

$${}_A h_2 = {}_A h_1 \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2} \right) \quad \dots (9.10)$$

que é a relação entre as constantes de Planck medidas pelo mesmo observador, A, mas em regiões diferentes. Portanto, embora a velocidade não-local da luz continue sendo igual a c , o valor não-local da constante de Planck não é constante. Somente seria possível considerar -se h como constante mesmo para medidas não-locais se a relação $k = h\nu$ fosse abandonada.

Consideremos agora as medidas realizadas em relação ao referencial B. Como $A^t = \delta^t (1 - \Delta\varphi/c^2)$, a frequência da onda se transformará:

$${}^A\nu_2 = \delta\nu_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (9.11)$$

e, a partir de (9.9), temos

$${}^A\nu_1 = \delta\nu_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (9.12)$$

ou seja, a frequência do fóton, medida localmente, muda após a travessar o capacitor gravitacional.

Quando o fóton está na região 2, sua energia total, medida em relação a B, será

$${}_\delta E_2 = \delta h_2 \delta\nu_2 (1 + \varphi_2/c^2). \quad \dots\dots\dots (9.13)$$

Mas $\delta h_2 = {}_A h_1 = h$ é o valor local da constante de Planck. Daqui,

$${}_\delta E_2 = {}_A h_1 \delta\nu_2 (1 + \varphi_2/c^2) \quad \dots\dots\dots (9.14)$$

e a partir de (9.12) tiramos

$${}_\delta E_2 = {}_A h_1 \delta\nu_2 (1 - \Delta\varphi/c^2) (1 + \varphi_2/c^2) = {}_A h_1 \delta\nu_1 (1 + \varphi_2/c^2) = {}_A E_1. \quad \dots\dots\dots (9.15)$$

Mas a energia total do fóton se conserva tanto em relação a A quanto em relação a B:

$$\left. \begin{array}{l} {}_A E_1 = {}_A E_2 \\ {}_\delta E_1 = {}_\delta E_2 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (9.16)$$

e portanto a partir de (9.16) e (9.15) temos

$$\left. \begin{array}{l} {}_\delta E_2 = {}_A E_2 \\ {}_\delta E_1 = {}_A E_1 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (9.17)$$

ou seja: a energia do fóton, em qualquer região, medida em relação a A e a B dá resultados iguais - portanto, a energia do fóton é um invariante.

10. TRANSFORMAÇÃO DE MASSA

Utilizando as considerações sobre fótons da seção anteri-

or será determinada primeiramente a transformação de massa e, posteriormente, das outras grandezas dinâmicas.

Assim como no caso do tempo e do espaço, podemos supor que, na região 1, são construídos vários padrões de massa equivalentes entre si. Se alguns desses padrões forem transportados, através do capacitor gravitacional, para a região 2, eles permitirão medir localmente a massa na região 2. Pelo princípio de equivalência, temos ${}_A m_1 = {}_B m_2$. A fim de comparar os dois tipos de medidas, é necessário estabelecer se a massa do padrão muda ou não, em relação a um dos referenciais, ao atravessar o capacitor gravitacional.

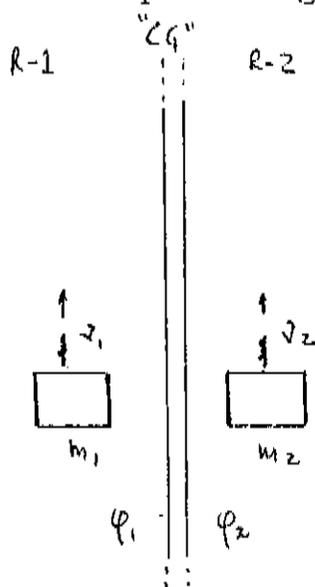


Fig. 10.1

Suponhamos que os padrões de massa são capazes de emitir fótons de mesma frequência local (fig. 10.1)

$${}_A \nu_1 = {}_B \nu_2 \quad \dots \dots \dots (10.1)$$

através de processos idênticos. As alterações de massa dos padrões serão, respectivamente, ${}_A \Delta m_1$ e ${}_A \Delta m_2$, sendo

$$\left. \begin{aligned} {}_A \Delta m_1 &= A h_1 {}_A \nu_1 / c^2 \\ {}_A \Delta m_2 &= A h_2 {}_A \nu_2 / c^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10.2)$$

Como os processos são idênticos, essas variações de massa, comparadas com as massas dos padrões locais, serão iguais:

$${}_A \left(\frac{\Delta m}{m} \right)_1 = {}_A \left(\frac{\Delta m}{m} \right)_2 \quad \dots \dots \dots (10.3)$$

Mas, pelas equações (9.10) e (9.11) temos que

$$A h_2 = A h_1 (1 - \Delta \varphi / c^2) \quad \dots \dots \dots (10.4)$$

$${}_A \nu_2 = {}_B \nu_2 \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (10.5)$$

e, considerando (10.1), temos

$${}_A \nu_2 = {}_A \nu_1 \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (10.6)$$

Portanto, de (10.4), (10.6) e (10.2) temos

$${}_A \Delta M_2 = \frac{A h_2 A \tilde{\nu}_2}{c^2} = \frac{A h_1}{c^2} \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right) A \tilde{\nu}_1 \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} = \frac{A h_1 A \tilde{\nu}_1}{c^2} = {}_A \Delta M_1 \quad \dots \dots (10.7)$$

e, com a ajuda de (10.3), concluimos que

$${}_A M_1 = {}_A M_2$$

Mas como ${}_A M_1 = {}_B M_2$, pelo princípio de equivalência, teremos:

$${}_A M_2 = {}_B M_2 \quad \dots \dots \dots (10.8)$$

ou seja: a massa é um invariante, isto é, seu valor é o mesmo em relação aos dois referenciais A e B.

Note-se que, na dedução acima, utilizamos a relação (10.1) $A \tilde{\nu}_1 = B \tilde{\nu}_2$, que é válida para o caso de fótons emitidos por processos idênticos nas duas regiões. Essa relação não se aplica a um fóton que atravessa a barreira gravitacional.

Suponhamos que fosse considerado um outro raciocínio para cálculo da relação entre os padrões. Suponhamos que do padrão colocado na região 1 é emitido um fóton com frequência $A \tilde{\nu}_1$ que atravessa o capacitor gravitacional e é absorvido pelo segundo padrão (fig. 10.2). Se supusermos, nesse caso, que as variações relativas de massa são iguais,

$$\left| \frac{{}_A \Delta M_1}{{}_A M_1} \right| = \left| \frac{{}_A \Delta M_2}{{}_A M_2} \right| \quad \dots \dots \dots (10.10)$$

obteríamos, ao invés da relação (10.9), a equação

$${}_A M_2 = {}_B M_2 \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \dots (10.11)$$

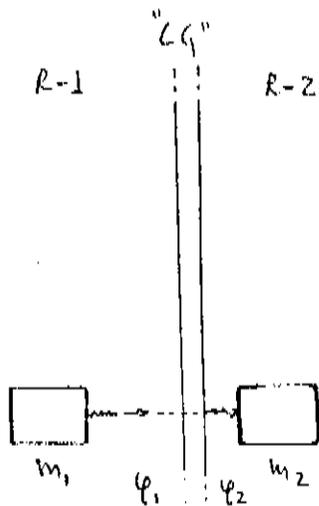


Fig. 10.2

Porém a relação (10.10) é injustificável, já que os processos de emissão e absorção do mesmo fóton, atravessando a barreira, não estão associados

ao mesmo processo (se o átomo emissor for transportado para a região 2, ele não voltará ao estado inicial absorvendo o fóton).

Se fosse possível "desmaterializar" o padrão de massa da região 1, transformando-o em fótons, fazê-los atravessar o capacitor gravitacional e depois "materializar" novamente o padrão de massa na região 2, esse transporte através do campo gravitacional seria realizado com dispêndio da energia dos próprios fótons e poder-se-ia dizer que o padrão foi alterado. Pelo contrário, se o padrão é transportado materialmente através do capacitor gravitacional, ele permanece sempre o mesmo, localmente, mas deve-se fornecer um trabalho externo para seu transporte através do campo. É esse segundo processo que leva à relação (10.9), considerada aqui como correta. O primeiro levaria à relação (10.11).

11. TRANSFORMAÇÕES DE MOMENTUM, FORÇA E ENERGIA

Na seção (8) foram obtidas as transformações de velocidade entre os referenciais A e B, mostrando-se que a velocidade é um invariante. Utilizando-se a invariância da massa, obtida na seção anterior, torna-se agora fácil determinar as outras transformações dinâmicas.

Para isso, deve-se definir os outros conceitos dinâmicos a partir da massa e de conceitos cinemáticos. As definições aqui usadas são as da Relatividade Restrita (e de teoria clássica):

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \dots \dots \dots (11.1)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \dots \dots \dots (11.2)$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{R} \quad \dots \dots \dots (11.3)$$

Consideremos um ponto material P que possui massa própria m_P e velocidade \vec{v}_P em relação ao referencial de A. Sua massa em relação a A será, pela Relatividade Restrita:

$$m_P = m_P \gamma_P \quad \text{onde} \quad \gamma_P = \left(1 - \frac{v_P^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \dots \dots \dots (11.4)$$

e seu momentum é, por definição, o produto da massa pela velo-

cidade:

$${}^A\vec{P}_P = {}^A m_P \vec{A}_P = {}^P m_P \delta_{PA} \vec{U}_P \quad \dots \dots \dots (11.5)$$

que pode ser decomposto:

$$\left. \begin{aligned} {}^A\dot{x}_P &= {}^P m_P \delta_{PA} \dot{x}_P \\ {}^A\dot{y}_P &= {}^P m_P \delta_{PA} \dot{y}_P \\ {}^A\dot{z}_P &= {}^P m_P \delta_{PA} \dot{z}_P \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (11.6)$$

Mantendo-se a definição do momentum, temos:

$${}^B\vec{P}_P = {}^B m_P \vec{B}_P = {}^P m_P \delta_{PB} \vec{U}_P \quad \dots \dots \dots (11.7)$$

mas, como a massa e a velocidade são invariantes, temos:

$${}^B\vec{P}_P = {}^A\vec{P}_P \quad \dots \dots \dots (11.8)$$

ou seja: o momentum é um invariante.

Para a dedução das equações de transformação da força, consideremos a componente x da força atuando sobre o ponto material P. Pela definição de força (11.2), teremos:

$${}^A F_{xP} = \frac{d {}^A \dot{x}_P}{d {}^A t_P} = \frac{d ({}^B \dot{x}_P)}{d {}^A t_P} = \frac{d}{d {}^B t_P} \frac{d {}^B t_P}{d {}^A t_P} ({}^B F_{xP}) \quad \dots \dots \dots (11.9)$$

porém, $\frac{d {}^A t_P}{d {}^B t_P} = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1}$

e portanto

$${}^A F_{xP} = \frac{d {}^A \dot{x}_P}{d {}^A t_P} = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{d ({}^B \dot{x}_P)}{d {}^B t_P} = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}^B F_{xP} \quad \dots \dots \dots (11.10)$$

e fazendo o mesmo para as componentes y e z da força que atua sobre P, teremos

$${}^A F_{yP} = {}^A \left(\frac{d p_y}{d t} \right)_P = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{d p_y}{d t} \right)_P = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}^B F_{yP}, \quad \dots \dots \dots (11.11)$$

$${}^A F_{zP} = {}^A \left(\frac{d p_z}{d t} \right)_P = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{d p_z}{d t} \right)_P = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}^B F_{zP} \quad \dots \dots \dots (11.12)$$

ou

$${}^A \vec{F}_P = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2}\right)^{-1} {}^B \vec{F}_P. \quad \dots \dots \dots (11.13)$$

Ou seja: a força não é um invariante, ela se transforma como a freqüência.

Para calcularmos a transformação de energia, podemos com a ajuda de (11.13) e da transformação de espaço, calcular o

trabalho, pela equação (11.3), realizado pela força que atua sobre P, quando visto por A:

$$\begin{aligned} {}_A dW_P &= {}_A \vec{F}_P \cdot d_A \vec{r}_P \\ &= {}_B F_P \left(1 - \frac{\Delta v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \cdot d_B \vec{r}_P \left(1 - \frac{\Delta v^2}{c^2}\right) \\ &= {}_B \vec{F}_P \cdot d_B \vec{r}_P = {}_B dW_P. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Não só o trabalho mecânico, mas também qualquer outra forma de energia, deve ser também invariante.

12. UMA PEQUENA APLICAÇÃO - PRESSÃO DE RADIAÇÃO EM REFLETORES

Vamos estudar nesta seção um tipo de situação que terá importante aplicação posterior, no estudo do eletromagnetismo. Suponhamos que, de cada lado do capacitor gravitacional, existem duas placas metálicas espelhadas, consideradas aqui como refletores perfeitos de luz e como perfeitamente planas (fig. 12.1). Suponhamos que entre as placas refletoras há um grande número de fótons que se movem de

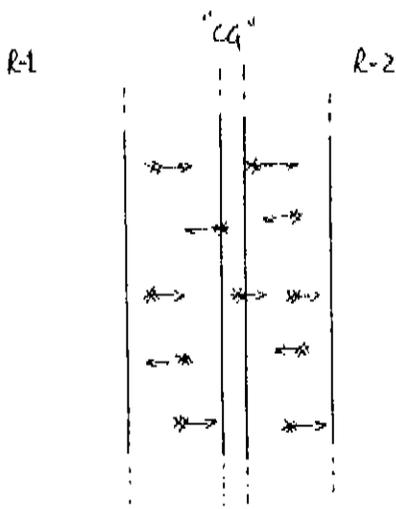


Fig. 12.1

de um lado para o outro, sempre perpendicularmente às placas e ao capacitor gravitacional. Desejamos calcular as forças produzidas pelos fótons nas placas 1 e 2, respectivamente.

Cada fóton, ao colidir com uma das placas, sofre uma variação de momentum igual a seu momentum final menos o momentum inicial (vettorialmente). Como há apenas inversão de sentido do movimento do fóton, sua variação de momentum é (em módulo) o dobro de seu momentum inicial

$$|\Delta p| = 2 |p|. \quad (12.1)$$

Cada fóton demora um tempo Δt entre duas colisões su-

cessivas com a mesma placa (tempo de ida e volta). Nesse tempo Δt , os N fótons colidem uma vez com cada placa e lhes transmitem o momento total $\Delta p'$

$$|\Delta p'| = 2N|p| \quad \dots \dots \dots (12.2)$$

exercendo contra a placa a força média F

$$F = \frac{|\Delta p'|}{\Delta t} = \frac{2N|p|}{\Delta t} \quad \dots \dots \dots (12.3)$$

Portanto, a força que atua sobre a placa da região 1, determinada pelo observador A, será:

$${}_A F_1 = \frac{2N|p_1|}{\Delta t} \quad \dots \dots \dots (12.4)$$

e, na placa 2, será:

$${}_A F_2 = \frac{2N|p_2|}{\Delta t} \quad \dots \dots \dots (12.5)$$

e, portanto, a razão entre as duas forças é:

$$\frac{{}_A F_1}{{}_A F_2} = \frac{|p_1|}{|p_2|} \quad \dots \dots \dots (12.6)$$

Mas os momentos dos fótons são, respectivamente:

$$p_1 = h\nu_1 / c \quad \dots \dots \dots (12.7)$$

$$p_2 = h\nu_2 / c \quad \dots \dots \dots (12.8)$$

e como, ao atravessar o capacitor gravitacional, a frequência da luz não se altera (medida pelo mesmo observador), $\nu_1 = \nu_2$ e, como $h\nu_1 = h\nu_2 (1 - \frac{\Delta\phi}{c^2})^{-1}$, temos:

$$\frac{{}_A F_1}{{}_A F_2} = \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (12.9)$$

ou

$${}_A F_1 = {}_A F_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (12.10)$$

A equação (12.10) dá a relação entre as forças existentes nas duas placas, medidas pelo mesmo observador. A relação entre as forças medidas localmente (isto é, entre ${}_A F_1$ e ${}_A F_2$)

pode ser obtida de (12.10) utilizando-se a relação de transformação de forças (11.13):

$${}_A F_2 = {}_B F_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad (12.11)$$

obtendo-se, por substituição em (12.10):

$${}_A F_1 = {}_B F_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-2} \quad (12.12)$$

Portanto, qualquer que seja o processo de medida, as duas são diferentes uma da outra.

Note-se que as forças que atuam sobre as placas podem ser consideradas como um tipo de "interação repulsiva" entre as mesmas, realizada pelo troca de fótons. Observe-se que, para esse tipo de interação, não vale a lei de ação e reação, pois

$${}_A F_1 \neq {}_A F_2 .$$

13. SOBRE A DEFLEXÃO OU NÃO DE UM FEIXE DE LUZ QUE INCIDE OBLIQUAMENTE NO CAPACITOR GRAVITACIONAL

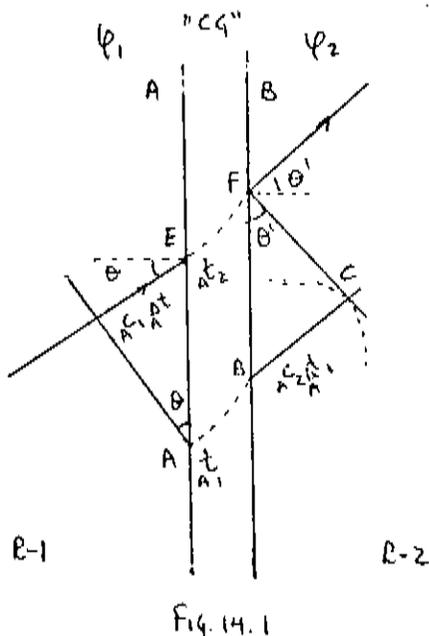
Nesta parte do trabalho faremos o estudo de um feixe de luz que incide sobre o capacitor gravitacional fazendo um ângulo α com a normal à parede do capacitor. Os motivos que nos conduziram ao problema foram dois, principalmente. Citando por ordem, em primeiro lugar (a), temos o fato de que se um feixe de luz que inicialmente estava numa região de índice de refração n_0 incide obliquamente sobre lâmina de faces paralelas e planas, de índice de refração diferente do da região, por exemplo n_1 , e a atravessa, saindo no outro lado da lâmina numa região também de índice de refração igual a n_0 , o feixe não deve sofrer deflexão, apenas deslocamento; portanto, segundo esse raciocínio, poderíamos esperar que um feixe luminoso não sofresse deflexão ao atravessar o capacitor gravitacional, uma vez que a velocidade da luz é c dos dois lados do capacitor; e, em segundo lugar (b), o fato de que, a partir da Mecânica

Clássica, se numa determinada região existe um campo gravitacional, então, nessa região, deve existir também ali uma direção preferencial e uma variação anisotrópica de momento, levando a uma deflexão de uma partícula que atravessa obliquamente esta região; portanto, de acordo com isto, deveríamos esperar que a luz (concebida como um conjunto de fótons) sofresse deflexão ao atravessar o capacitor gravitacional.

O objetivo das seções seguintes será o de esclarecer esses raciocínios e determinar se um feixe luminoso sofre ou não deflexão ao atravessar obliquamente o capacitor gravitacional.

14. ANÁLISE DO PROBLEMA

A fig. 14.1 mostra um feixe de luz que ao incidir sobre o capacitor gravitacional faz um ângulo θ com a normal ao capacitor. O feixe de luz pode ser representado por frentes de ondas. Por facilidade, trabalharemos, apenas, com uma frente de onda que ao incidir sobre o capacitor gravitacional faz um ângulo θ com a parede do capacitor. Para o observador A, vamos supor que no instante t_1 a frente de onda alcançou o ponto A, sobre o capacitor. O ponto A, então, pode ser pensado, usando o Princípio de Huygens, como sendo um centro de ondas secundárias. Escolha-



mos agora um outro ponto D da frente de onda, tal que, enquanto a onda esférica secundária de centro em A vai até o ponto B, gastando para isso um intervalo de tempo ${}_A \Delta t_1$, a luz proveniente do ponto D, nesta mesma frente de onda, viaja uma distância igual a ${}_A C_1 \Delta t_1$ e alcança o ponto E, no instante ${}_A \Delta t_1 + t_1 = t_2$. Agora, enquanto a onda esférica secundária gerada no ponto E vai até o ponto F, no outro lado do capacitor gravitacional, gastando para isso um mesmo intervalo de tempo ${}_A \Delta t_1$,

alcançando-o no instante $t_1 + z_A \Delta t_1 / c$, a onda esférica secundária de centro em B percorre a distância $c z_B \Delta t_1 / c$ e alcança o ponto C, também, no instante $t_1 + z_B \Delta t_1 / c = t_1 + z_A \Delta t_1 / c$. A frente de onda, na região 2, deve ser tangente a onda esférica secundária gerada no ponto B e como o ponto F faz parte da mesma frente de onda, esta mesma frente de onda deve passar por ambos os pontos C e F. Esta frente de onda deve fazer um ângulo θ' com a parede do capacitor gravitacional. Lembrando, agora, que o caminho geométrico usado pelas ondas esféricas secundárias geradas nos pontos A e E para irem até os pontos B e F, respectivamente, devem ser de igual medida e que a velocidade da luz, em ambas as regiões, R-1 e R-2, do capacitor gravitacional, mede c (a velocidade da luz é um invariante), o que conduz a igualdade das distâncias, d_{BC} e d_{DE} , entre os pontos B e C e D e E, respectivamente (pois se $c_1 = c_2 = c$, então $d_{BC} = c_1 \Delta t_1 = c_2 \Delta t_1 = d_{DE}$), e, portanto, teremos que, ao contrário do que mostra a fig. 14.1, os ângulos θ e θ' são iguais. Observamos que como o espaço é isotrópico, a razão entre dois comprimentos quaisquer deve ser constante em qualquer região do espaço-tempo. E, é óbvio, como as funções trigonométricas são dadas como razões entre comprimentos, então ângulos são grandezas invariantes.

Concluindo, num tratamento cinemático do problema, nenhuma deflexão, de um feixe de luz que incide sobre o capacitor gravitacional fazendo um ângulo θ com a normal à parede do capacitor, deve ser observada. É interessante observar, no entanto, que a não deflexão do raio de luz está ligada diretamente ao fato de que a velocidade é uma grandeza cinemática invariante - caso particular, a velocidade da luz é um invariante.

Seria interessante, agora, estudarmos este mesmo fenômeno dinamicamente para compararmos os resultados.

Do ponto de vista da Dinâmica Clássica fica fácil estudar este fenômeno se considerarmos, como mostra a (fig. 14.2), um fóton, quando visto por A, de momentum $p = h\nu/c$, que incide sobre a parede do capacitor gravitacional fazendo um ângulo α com a normal à parede. Fazendo a decomposição do momentum do fóton em suas componentes x e y , teremos, na região 1,

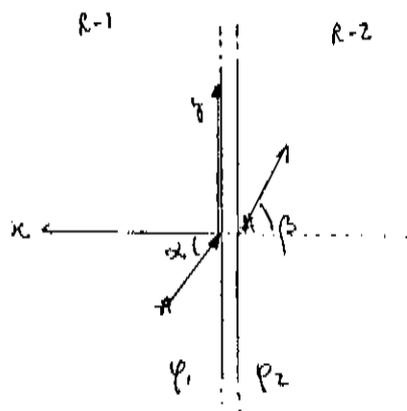


Fig. 14.2

$${}_A(p_x)_1 = A p_1 \cos \alpha = A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_1 \cos \alpha \dots (14.1)$$

e

$${}_A(p_y)_1 = A p_1 \sin \alpha = A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_1 \sin \alpha \dots (14.2)$$

e, na região 2, quando o fóton deixa o capacitor gravitacional fazendo um ângulo β com a normal à parede do capacitor, a mesma decomposição pode ser

escrita como:

$${}_A(p_x)_2 = A p_2 \cos \beta = A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_2 \cos \beta \dots (14.3)$$

e

$${}_A(p_y)_2 = A p_2 \sin \beta = A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_2 \sin \beta \dots (14.4)$$

Como o campo gravitacional dentro do capacitor gravitacional é na direção do eixo x , temos, "classicamente", que a componente x deve variar, mas a componente y do momento, por ser perpendicular ao campo, permanece constante. Usando esta informação podemos escrever, usando (12.3) e (12.1),

$${}_A(p_y)_1 = {}_A(p_y)_2 \dots (14.5)$$

ou

$$A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_1 \sin \alpha = A \left(\frac{h\nu}{c} \right)_2 \sin \beta.$$

Como $AC_1 = AC_2$ e $AV_1 = AV_2$, ficamos com

$$A h_1 \sin \alpha = A h_2 \sin \beta \dots (14.6)$$

Mas de (9.10), temos que $A h_1 = A h_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)^{-1}$ e usando em (14.6), fica

$$A h_2 \sin \alpha \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)^{-1} = A h_2 \sin \beta$$

e, portanto,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right)^{-1} \dots (14.7)$$

onde $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$,

oque nos leva a concluir que quando um raio de luz penetra obliquamente no capacitor gravitacional, o mesmo deve sofrer uma deflexão, sendo que o índice de refração da região 2 em relação a região 1 é $(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2})$.

Como se pode observar, existe uma forte contradição entre as previsões obtidas dos tratamentos dinâmico e cinemático do problema do feixe de luz que incide obliquamente sobre o capacitor gravitacional. É claro que esta situação contraditória não deve resistir frente a uma análise mais detalhada do problema.

15. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Cinematicamente, a não previsão de deflexão do feixe de luz se assenta na invariância da velocidade da luz, como vimos anteriormente. No entanto, se voltarmos as seções relacionadas a Cinemática aplicável ao modelo do capacitor gravitacional não conseguiremos encontrar nada que nos leve a duvidar da invariância da velocidade da luz e, portanto, só o que nos resta, agora, é questionar o tratamento dinâmico do problema. Para tanto, vamos, em primeiro lugar, tentar encontrar a relação entre as medidas de momentum, na região 1 e na região 2, respectivamente, $A p_1$ e $A p_2$, para um fóton que atravessa o capacitor gravitacional, feitas pelo observador A.

A relação entre as medidas da energia cinética de um fóton que estava inicialmente na região 1 e que atravessa o capacitor gravitacional, feitas por A, é dada pela equação (9.8),

$$A (h\nu)_1 = A (h\nu)_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (15.1)$$

Dividindo ambos os lados de (15.1) por c , encontramos

$$A \left(\frac{h\nu}{c}\right)_1 = A \left(\frac{h\nu}{c}\right)_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1}$$

ou

$$A p_1 = A p_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1}, \quad \dots \dots \dots (15.2)$$

que é a relação procurada, isto é, a relação entre as medidas de momentum do fóton, realizadas por A, em ambas as regiões do capacitor gravitacional. É interessante observar que tal relação sempre pode ser escrita e é independente de se o fóton sofre deflexão ou não.

Sabemos também que podemos escrever ${}_A \hat{p}_1$ e ${}_A \hat{p}_2$ da seguinte forma:

$${}_A \hat{p}_1^2 = {}_A (p_x)_1^2 + {}_A (p_y)_1^2 \quad \dots \quad (15.3)$$

e

$${}_A \hat{p}_2^2 = {}_A (p_x)_2^2 + {}_A (p_y)_2^2. \quad \dots \quad (15.4)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados de (15.2) e depois usando (15.3) e (15.4), encontramos

$${}_A (p_x)_1^2 + {}_A (p_y)_1^2 = {}_A (p_x)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} + {}_A (p_y)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} \quad \dots \quad (15.5)$$

E como p_x e p_y podem variar independentemente um do outro, podemos fazer p_x ou p_y tender a zero e obtemos:

$${}_A (p_x)_1 = {}_A (p_x)_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \quad (15.6)$$

e

$${}_A (p_y)_1 = {}_A (p_y)_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \quad (15.7)$$

A questão que surge é: Por que é tão óbvio que se possa escrever as equações (15.6) e (15.7) a partir de (15.5), visto que estas duas últimas equações, claramente, contrariam o senso de que deve existir uma direção preferencial dentro do capacitor gravitacional, a direção do campo gravitacional?

Na verdade, não é tão óbvio assim, mas existem situações muito simples que nos garantem isso. A seguir mostraremos uma destas situações.

Vamos supor que um fóton, de momentum ${}_A \hat{p}_1 = {}_A \left(\frac{h\nu}{c}\right)_1$, e componentes iguais a ${}_A (p_x)_1$ e ${}_A (p_y)_1$, um pouco antes de incidir obliquamente sobre a parede do capacitor gravitacional se decompõe em dois outros fótons de momenta iguais, em módulo, direção e sentido, as componentes \underline{x} e \underline{y} do momentum do fóton que se decompôs. Além disso, vamos supor que depois que o fóton de

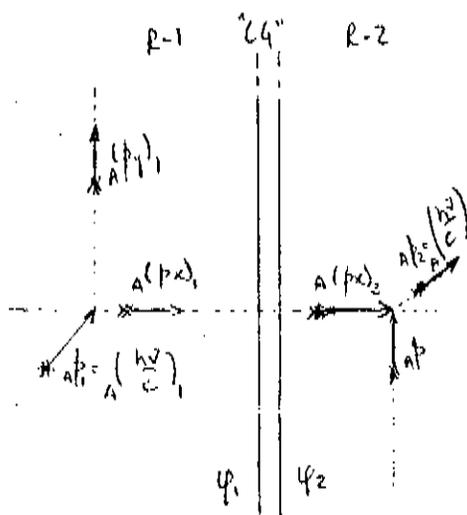


Fig. 15.1

momentum $A(p_x)_1$, atravessou a barreira de potencial ele, novamente, se compõe com outro fóton de momento $A(p)_2$ que está indo na direção positiva do eixo y . Queremos, é claro, que tal composição de fótons tenha como resultado um fóton de momento, quando visto por A , igual a $A(p_x)_2$ (que seria então o mesmo caso do fóton de momento $A(p)_1$ que atravessa a barreira de potencial), figura 15.1.

Sabemos que a relação entre as medidas de momentum para o fóton que atravessa o capacitor gravitacional é dada pela equação (15.2), que fica

$$A(p_x)_1 = A(p_x)_2 \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2}\right)^{-1} \quad (15.8)$$

Agora, a equação (15.2) pode também ser escrita os momentos, antes da decomposição, $A(p)_1$, e, depois da composição, $A(p)_2$ e obtemos

$$A(p)_1 = A(p)_2 \left(1 - \frac{\Delta\psi}{c^2}\right)^{-1} \quad (15.9)$$

A questão que surge é: Levando em conta as equações (15.8) e (15.9), que relação deve existir entre os momentos $A(p_y)_1$ e $A(p)_2$ dos fótons que vão na direção positiva do eixo y , só que na região 1 e na região 2, respectivamente?

Para resolver esta questão, lembremos que de (15.3)

$$A(p)_1^2 = A(p_x)_1^2 + A(p_y)_1^2 \quad (15.10)$$

Vamos supor, agora, que $A(p_y)_1$ não seja igual a $A(p)_2$ como fizemos anteriormente, mas que $A(p_y)_1$ seja diretamente proporcional a $A(p)_2$, ou de outra forma, que

$$A(p_y)_1 = k A(p)_2, \quad (15.11)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que só deve depender do campo.

Usando (15.8) e (15.11) em (15.10), encontramos

$$\begin{aligned} {}_A p_1^2 &= {}_A (p_x)_1^2 + {}_A (p_y)_1^2 \\ &= {}_A (p_x)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} + k^2 {}_A p^2 \end{aligned}$$

que, é claro, deve ser igual a ${}_A p_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2}$, de (15.2), ou

$$= {}_A (p_x)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} + {}_A (p_y)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2},$$

logo

$$k^2 {}_A p^2 = {}_A (p_y)_2^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} \dots \dots \dots (15.12)$$

ou

$$k {}_A p = {}_A (p_y)_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}$$

e sendo ${}_A p$ a componente y do fóton de momento ${}_A p_2$, então

$$k = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}$$

e voltando a (15.11), temos que

$${}_A (p_y)_1 = {}_A (p_y)_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}, \dots \dots \dots (15.13)$$

o que garante o resultado anterior da equação (15.7).

Voltando propriamente ao problema da determinação dinâmica da deflexão ou não de um fóton que incide obliquamente no capacitor gravitacional, a partir da (fig. 14.2) podemos escrever as equações (14.2) e (14.4), a saber:

$${}_A (p_y)_1 = {}_A p_1 \sin \alpha = {}_A \left(\frac{h\nu}{c}\right)_1 \sin \alpha \dots \dots \dots (15.14)$$

e

$${}_A (p_y)_2 = {}_A p_2 \sin \beta = {}_A \left(\frac{h\nu}{c}\right)_2 \sin \beta. \dots \dots \dots (15.15)$$

Temos, também, de (15.7), que

$${}_A (p_y)_1 = {}_A (p_y)_2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \dots \dots \dots (15.16)$$

e substituindo em (15.16) as equações (15.14) e (15.15), encontramos

$${}_A p_1 \sin \alpha = {}_A p_2 \sin \beta \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}$$

mas $A'p_z = A'p_1 \left(1 - \frac{\Delta\phi_z}{c^2}\right)$ e, portanto,

$$A'p_1 \sin \alpha = A'p_1 \sin \beta \left(1 - \frac{\Delta\phi_z}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta\phi_z}{c^2}\right)^{-1}$$

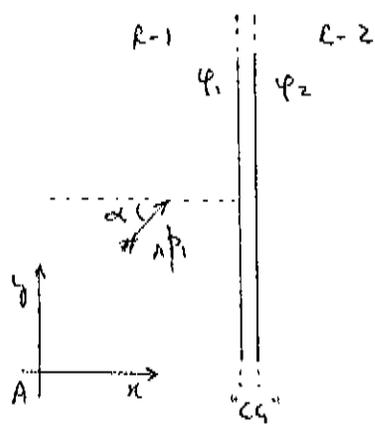
e $\sin \alpha = \sin \beta$

$$\alpha = \beta \dots \dots \dots (15.17)$$

Num tratamento dinâmico do problema, sem a imposição da Mecânica Clássica de que existe, dentro do capacitor gravitacional, uma direção preferencial, a direção do campo gravitacional, e que apenas a componente do momento paralela ao campo se altera, encontramos que nenhuma deflexão do feixe de luz que incide obliquamente sobre o capacitor gravitacional deve ser observada.

Vamos agora analisar uma situação que fortalece todas as conclusões tiradas até agora sobre o problema, isto é, elimina todas as possíveis dúvidas.

Considerando, como mostra a (fig. 15.2), quando visto por



A (lembrando que este observador está em repouso em relação as placas do capacitor gravitacional), um fóton de momentum $A'p_1$, que vai penetrar no capacitor gravitacional fazendo um ângulo α com a normal à parede do capacitor, perguntamos: O observador A verá deflexão na trajetória do fóton ao passar para o outro lado do capacitor gra

Fig. 15.2

vitacional?

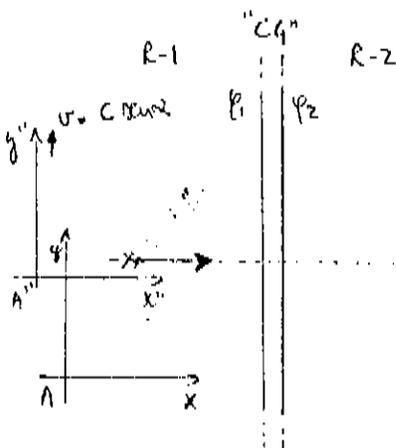


Fig. 15.3

A solução é facilmente obtida se tratarmos o fenômeno de penetração do fóton na barreira de potencial a partir de um outro observador, o observador A'', associado a um referencial inercial que se movimenta com velocidade $v = c \sin \alpha$ paralelamente às paredes do capacitor gravitacional, como mostra a (fig. 15.3). Neste referencial,

o observador A'' verá o fóton penetrar na barreira de potencial perpendicularmente e, é claro, não deve observar deflexão alguma, por razões de simetria. Da mesma forma, o observador A também não deve observar deflexão. Isto é, se antes do fóton incidir sobre a barreira o observador A'' dizia que o fóton se movimentava sobre uma linha reta perpendicular ao capacitor gravitacional, enquanto o observador A dizia que o fóton se movimentava sempre fazendo um ângulo fixo α com a normal ao capacitor e como, apesar de o fóton atravessar a barreira de potencial, a relação entre os observadores A e A'' continua a mesma e o observador A'' continua dizendo que o fóton se movimenta sobre uma linha perpendicular ao capacitor, a componente de velocidade do fóton paralela ao capacitor não mudou; e como sua velocidade total é sempre c , sua direção não pode ter mudado, então o observador A deverá ver sempre o fóton, enquanto se propaga, sobre uma linha que faz um ângulo α com a normal ao capacitor gravitacional.

16. ELETROMAGNETISMO

Na parte deste trabalho relativa à Dinâmica, estabelecemos a equação de transformação de uma grandeza dinâmica, a massa, e, a partir dessa, para todas as outras grandezas dinâmicas foram encontradas as equações de transformação. Da mesma forma, no caso do Eletromagnetismo, tentaremos estabelecer a equação para todas as outras grandezas eletromagnéticas a partir de uma grandeza básica.

Em cada uma das regiões do espaço separadas pelo capacitor gravitacional, o espaço-tempo é "chato" e, portanto, valem as leis usuais do eletromagnetismo. Suporemos que, por simplicidade, os dois observadores A e B aplicam essas equações às duas regiões do espaço.

A força de atração ou repulsão entre duas cargas pontiformes, q_1 e q_2 , separadas pela distância r , como mostra a figura abaixo (fig. 16.1), é dada pela Lei de Coulomb, como segue

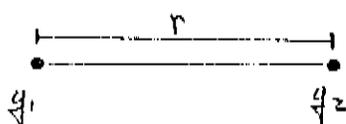


Fig. 16.1

(no MKS):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \dots\dots\dots (16.1)$$

onde ϵ_0 é a constante de permissividade de do vácuo.

A princípio, consideraremos a carga elétrica como uma grandeza eletromagnética invariante (isto é, $A^q_1 = {}_B q_1$) para todos os fenômenos eletromagnéticos que venham a acontecer em qualquer região do capacitor gravitacional. Os argumentos que garantem tal suposição de invariância da carga elétrica serão citados no final desta parte do trabalho.

Consideremos uma situação, (fig. 16.2), onde temos, na região 1, duas cargas, de módulos A^q_1 e A^k_1 , quando vistas pelo observador A, separadas pela distância A^r_1 . Pela Lei de Coulomb, equação (16.1), a força entre elas será, para este observador, dada por:

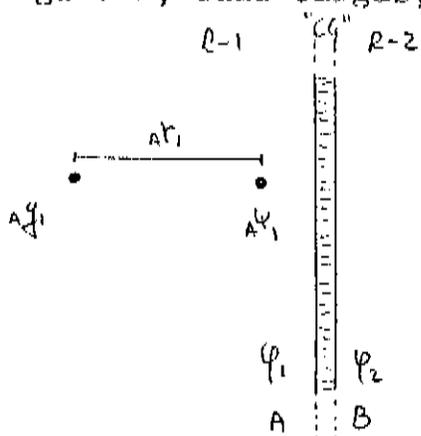


Fig. 16.2

$${}_A F_1 = \frac{1}{4\pi_A \epsilon_{01}} \frac{A^q_1 A^k_1}{A^r_1{}^2}, \dots\dots\dots (16.2)$$

Da mesma forma, o observador B, na região 2, calcula que a força entre tais cargas é:

$${}_B F_1 = \frac{1}{4\pi_B \epsilon_{01}} \frac{{}_B q_1 {}_B k_1}{{}_B r_1{}^2}, \dots\dots\dots (16.3)$$

Pela equação (11.13), a relação entre as forças medidas pelos observadores A e B, é:

$${}_A F_1 = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} {}_B F_1, \text{ onde } \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1,$$

ou, de (16.2) e (16.3),

$$\frac{1}{4\pi_A \epsilon_{01}} \frac{A^q_1 A^k_1}{A^r_1{}^2} = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \frac{1}{4\pi_B \epsilon_{01}} \frac{{}_B q_1 {}_B k_1}{{}_B r_1{}^2}, \dots\dots\dots (16.4)$$

Como supomos que a carga elétrica é um invariante, das equações (16.3) e (8.1), podemos encontrar a relação entre as

constantes de permissividade do vácuo, medidas pelos observadores A e B, ${}_A \tilde{\epsilon}_{01}$ e ${}_B \tilde{\epsilon}_{01}$, respectivamente:

$$\frac{1}{4\pi {}_A \tilde{\epsilon}_{01}} \frac{A^2 \sqrt{1-\beta^2}}{R_1^2} = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \frac{1}{4\pi {}_B \tilde{\epsilon}_{01}} \frac{A^2 \sqrt{1-\beta^2}}{R_1^2}$$

e

$${}_A \tilde{\epsilon}_{01} = {}_B \tilde{\epsilon}_{01} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad (16.5)$$

Agora, pelo Princípio de Equivalência, temos que

$${}_A \tilde{\epsilon}_{01} = {}_B \tilde{\epsilon}_{02} ,$$

e, portanto, fica

$${}_B \tilde{\epsilon}_{02} = {}_B \tilde{\epsilon}_{01} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} ,$$

ou

$${}_B \tilde{\epsilon}_{01} = {}_B \tilde{\epsilon}_{02} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) , \quad (16.7)$$

que pode ser escrito, também, para o observador A, isto é

$${}_A \tilde{\epsilon}_{01} = {}_A \tilde{\epsilon}_{02} \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) . \quad (16.8)$$

A equação (16.5) é a equação de transformação para a constante de permissividade do vácuo e dela podemos ver que a mesma é uma grandeza eletromagnética não-invariante. As equações (16.7) e (16.8) são as relações entre as constantes de permissividade no vácuo, nas duas regiões 1 e 2.

Sabemos do Eletromagnetismo Clássico que o valor da velocidade da luz pode ser calculado a partir de duas grandezas eletromagnéticas, como segue:

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} , \quad (16.9)$$

onde ϵ_0 é a constante de permissividade no vácuo e μ_0 é a constante de permeabilidade no vácuo.

Agora, usando a equação (16.9) juntamente com o fato de a velocidade da luz ser invariante, podemos encontrar a equação de transformação para μ_0 , isto é

$${}_A c_1 = ({}_A \mu_{01} {}_A \tilde{\epsilon}_{01})^{-1/2} = ({}_B \mu_{01} {}_B \tilde{\epsilon}_{01})^{-1/2} = c_1 \quad (16.10)$$

ou

$${}_A\mu_{01} \epsilon_{01} = {}_B\mu_{01} \epsilon_{01}, \quad \dots \dots \dots (16.11)$$

mas, usando (16.5), fica

$$\begin{aligned} {}_A\mu_{01} \epsilon_{01} &= {}_B\mu_{01} \epsilon_{01} \\ &= {}_B\mu_{01} \epsilon_{01} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \end{aligned}$$

e

$${}_A\mu_{01} = {}_B\mu_{01} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right). \quad \dots \dots \dots (16.12)$$

Se tivéssemos usado (16.8), em vez de (16.5), poderíamos ter escrito

$${}_A C_1 = \left({}_A\mu_{01} \epsilon_{01}\right)^{-1/2} = \left({}_B\mu_{02} \epsilon_{02}\right)^{-1/2} = {}_A C_2 \quad \dots \dots \dots (16.13)$$

e obteríamos

$${}_A\mu_{01} \epsilon_{01} = {}_A\mu_{02} \epsilon_{02}. \quad \dots \dots \dots (16.14)$$

$${}_A\mu_{01} \epsilon_{02} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) = {}_A\mu_{02} \epsilon_{02}$$

e

$${}_A\mu_{01} = {}_A\mu_{02} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}. \quad \dots \dots \dots (16.15)$$

Do mesmo jeito escrevendo uma equação para B, fica

$${}_B\mu_{01} = {}_B\mu_{02} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}. \quad \dots \dots \dots (16.16)$$

A equação (16.12), mostra também que a constante de permeabilidade no vácuo não é invariante.

A equação de transformação do campo elétrico é facilmente obtida, já que, por definição,

$$\vec{E} = \vec{F}/q. \quad \dots \dots \dots (16.17)$$

Portanto, se A e B observam uma mesma carga q_1 submetida a um campo elétrico, teremos

$$\frac{{}_A E_1}{{}_B E_1} = \frac{{}_A F_1}{{}_B F_1} \frac{{}_B q_1}{{}_A q_1} = \frac{{}_A F_1}{{}_B F_1} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \dots \dots \dots (16.18)$$

já que a carga é invariante.

Daqui, podemos ver claramente que o campo elétrico se transforma da mesma forma que a força e, portanto, é uma gran-

deza não-invariante.

17. TRANSFORMAÇÃO PARA A CORRENTE ELÉTRICA E O CAMPO MAGNÉTICO

Considerando que num determinado intervalo de tempo Δt , a carga elétrica total que atravessa a seção reta de um condutor seja igual a Δq , então a corrente elétrica (supostamente constante) neste condutor, por definição, é dada por:

$$i = \Delta q / \Delta t \quad (17.1)$$

Para obtermos a equação de transformação da corrente elétrica, entre os observadores A e B, consideremos o seguinte fenômeno: na região 1, o observador A,

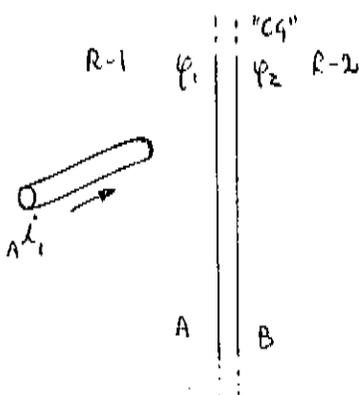


Fig. 17.1

vê um determinado condutor (fig. 17.1) ser atravessado pela corrente i_1 , ou

$$i_1 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t_1} \quad (17.2)$$

Conhecendo as transformações da carga elétrica e da coordenada tempo, a relação existente entre a corrente quando visto por A e por B, é

$$i_1 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta q_1}{\Delta t_1 (1 - \frac{\Delta x_1}{c \Delta t_1})} = \left(1 - \frac{\Delta x_1}{c \Delta t_1}\right)^{-1} i_1$$

$$i_1 = \left(1 - \frac{\Delta x_1}{c \Delta t_1}\right)^{-1} i_1 \quad (17.3)$$

Logo: a corrente elétrica não é invariante.

Agora que conhecemos a equação de transformação para a corrente, podemos facilmente determinar a equação de transformação para o Campo Magnético. Para tanto, observemos que o campo magnético, a uma distância r de um fio, pelo qual passa uma corrente i , é

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \quad (17.4)$$

Se o observador A, da região 1, vê um fio sendo percorrido por uma corrente i_1 , o campo magnético gerado por esta corrente, para ele, será:

$${}_A B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1} \dots \dots \dots (17.5)$$

Mas, de (16.12), (8.1) e (17.3), temos

$${}_A B_1 = \frac{\left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \mu_0 i_1}{2\pi r_1} \frac{\left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} i_1}{\hat{r}_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1}$$

ou

$${}_A B_1 = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} {}_B B_1 \dots \dots \dots (17.6)$$

E de (17.6) vemos, como era de se esperar, que o campo magnético se transforma do mesmo jeito que o campo elétrico, isto é, o campo magnético é não-invariante.

É fácil verificar que, qualquer que seja a equação do eletromagnetismo empregada, obtêm-se resultados coerentes para a transformação das grandezas. Como exemplo disso, consideremos, na região 1, dois condutores, a e b, colocados paralelamente

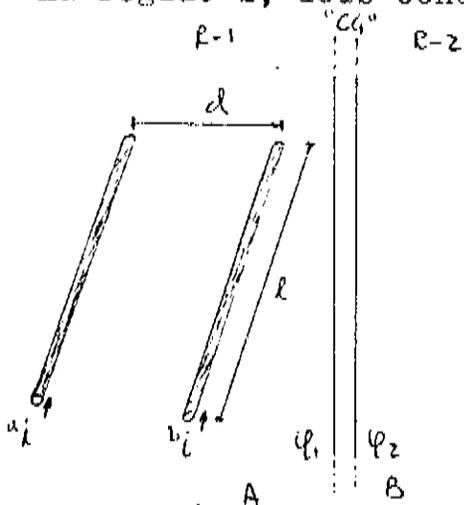


Fig. 17.2

um ao outro, mas separados por uma distância d , percorridos por correntes i^a e i^b , respectivamente, como mostra a fig. 17.2. A força que o fio a exerce sobre um pedaço do fio b, de comprimento l , quando vista pelo observador A, é dada por

$${}_A F_1^b = \left(\frac{\mu_0 l i^a i^b}{2\pi d} \right)_1 \dots \dots \dots (17.7)$$

e quando vista por B, é

$${}_B F_1^b = \left(\frac{\mu_0 l i^a i^b}{2\pi d} \right)_B \dots \dots \dots (17.8)$$

Pela equação de transformação da força, (11.13), temos

$${}_A F_1^b = {}_B F_1^b \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \quad \text{ou}$$

$$A \left(\frac{\mu_0 l i^a i^b}{2\pi d} \right)_1 = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1} B \left(\frac{\mu_0 l i^a i^b}{2\pi d} \right)_1$$

Usando, agora, a equação de transformação da corrente (17.3) e do espaço (8.1), isto é,

$$A i_1 = \beta i_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad A r_1 = \beta r_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right), \quad \text{temos}$$

$$\frac{A \mu_0 l A i_1 A i_1^a A i_1^b}{2\pi A d_1} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1} \frac{A \mu_0 l A i_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1} A i_1^a \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1} A i_1^b \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1}}{2\pi A d_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^{-1}}$$

$$A \mu_0 l \left(\frac{l i^a i^b}{2\pi d} \right)_1 = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right) \beta \mu_0 l \left(\frac{l i^a i^b}{2\pi d} \right)_1,$$

portanto

$$A \mu_0 l = \beta \mu_0 l \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right),$$

que é exatamente igual a equação (16.12). Como já colocado, era de se esperar que isto acontecesse, pois em ambos os casos se usou a carga elétrica como um invariante.

18. RELAÇÕES GERAIS DE TRANSFORMAÇÃO DO ELETROMAGNETISMO

Nas seções anteriores, a partir da suposição de que a carga elétrica é um invariante, foram deduzidas as transformações das outras grandezas eletromagnéticas. Antes de justificar a invariância da carga, vamos verificar como ficariam as transformações no caso em que a carga não fosse invariante.

Suponhamos que, em primeira aproximação, a equação de transformação fosse dada por:

$$A q = \beta q \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right)^n \quad \dots \dots \dots (18.1)$$

com $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ e n qualquer.

Esta equação dá a relação entre as medidas de uma mesma carga elétrica por A e por B.

As relações de transformação para as outras grandezas eletromagnéticas podem ser conseguidas facilmente usando-se as leis do eletromagnetismo anteriormente empregadas. Todas as relações obtidas são da forma geral

$${}_A \alpha = {}_B \alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^\beta \quad \dots \dots \dots (10.2)$$

onde α é a grandeza e β é o expoente do fator $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$. As equações de transformação ficam portanto determinadas, para cada grandeza, pelo valor do expoente. Os resultados obtidos podem ser representados pela tabela abaixo:

α	β	\vec{E}	\vec{B}	ϵ_0	μ_0
$\frac{1}{\beta}$	n	$n-1$	$-n-1$	$2n-1$	$-2n+1$

Os resultados obtidos anteriormente correspondem ao caso em que $n = 0$.

19. SOBRE A INVARIÂNCIA DA CARGA ELÉTRICA

O Eletromagnetismo aplicável à situação do Capacitor Gravitacional foi todo construído considerando-se a carga elétrica como uma grandeza eletromagnética invariante, isto é, considerou-se que o Capacitor Gravitacional (o campo gravitacional) não cria nem aniquila carga eletromagnética.

Tentaremos, nesta parte do trabalho, demonstrar a invariância da carga eletromagnética. Para tanto, usaremos um modelo que considera um capacitor elétrico entremeadado por um capacitor gravitacional.

20. CONSTRUINDO O CAPACITOR ELÉTRICO ENTREMEADO PELO CAPACITOR GRAVITACIONAL

Suponhamos que há, na região B, duas placas carregadas eletricamente e de dimensões muito grandes formando um capacitor elétrico de tal forma que ambas as placas do capacitor fiquem colocadas paralelamente ao capacitor gravitacional, isto é, o capacitor elétrico e o capacitor gravitacional estão paralelos um ao outro, garantimos que as linhas de força do campo

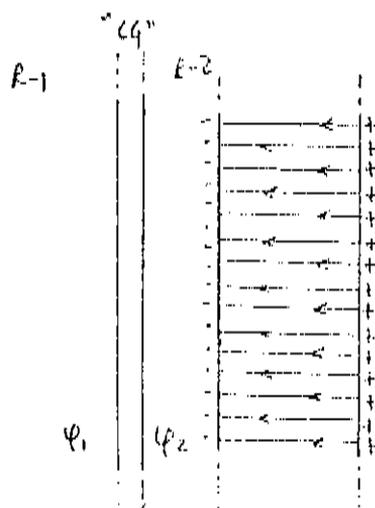


Fig. 20.1

elétrico entre as placas sejam paralelas àquelas linhas da malha geométrica que são perpendiculares ao capacitor gravitacional (fig. 20.1). Suponhamos que a carga total do capacitor elétrico é nula.

Feito isso, transportaremos as cargas negativas para a região A. O transporte realizar-se-á carregando-se as cargas negativas através do capacitor gravitacional de forma que o cami-

nho percorrido no processo de transporte seja paralelo às linhas da malha geométrica perpendiculares ao capacitor gravitacional. Após esse transporte as linhas de força do campo elétrico entre as placas devem continuar paralelas à malha geométrica, por simetria.

21. FORÇAS ENTRE AS PLACAS - DETERMINAÇÃO

Construído o capacitor elétrico, com uma placa em cada uma das regiões do Capacitor Gravitacional, pretendemos, agora, determinar a relação entre as forças que cada uma das placas exerce sobre a outra, isto é, a relação entre a força que a placa 1 exerce sobre a placa 2, F_2 , e a força que a placa 2 exerce sobre a placa 1, F_1 , por exemplo, quando vista pelo observador A, como mostra a (fig. 21.1). A força eletrostática entre as duas placas do capacitor elétrico pode ser pensada como se dando através da troca de fótons virtuais. Lembrando, no entanto, que qualquer relação de transformação entre as forças

encontrada a partir do uso de fótons reais deve valer se usarmos fótons virtuais, podemos aplicar aqui um resultado já obtido anteriormente: se as placas 1 e 2 interagem através de uma troca de fótons reais, as forças entre elas terão a relação:

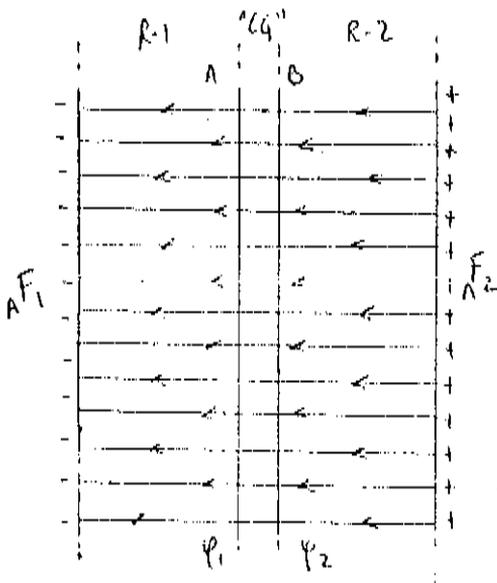


Fig. 2.11

$${}_A F_1 = {}_A F_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1}$$

Da mesma forma, na interação eletrostática entre as duas placas, devemos ter:

$${}_A F_1 = {}_A F_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)^{-1} \quad (2.11)$$

Observemos que esta relação para as forças eletrostáticas é sempre válida, isto é, independe da invariância ou não-invariância da carga elétrica, pois foi obtida a partir de um argumento puramente dinâmico.

Um resultado interessante que é recuperado, a exemplo de trabalhos de outros autores(3), é o fato de que a Terceira Lei de Newton, a lei de ação e reação, não vale para a força entre duas cargas situada a diferentes potenciais gravitacionais, como pode facilmente ser visto da equação anterior. A força que a placa 1 exerce sobre a 2 é diferente, não só em sentido, mas também em módulo, da força que a placa 2 exerce sobre a placa 1.

A partir da teoria eletromagnética, podemos também determinar as forças que atuam sobre as placas 1 e 2, em função da densidade superficial σ de carga da placa e do campo elétrico E que atua sobre elas:

$${}_A (F_1 = E_1 \sigma_1 S_1) \quad (2.12)$$

$${}_A (F_2 = E_2 \sigma_2 S_2), \quad (2.13)$$

onde E , σ e S são o campo elétrico, a densidade superficial de carga da placa e a área da placa, respectivamente. (OBSERVAÇÃO: o índice, 1 ou 2, indica a região da medida). Portanto

to, a razão entre as forças nas placas é:

$$A \left(\frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1 \sigma_1 S_1}{E_2 \sigma_2 S_2} \right)$$

e como ${}_A S_1 = {}_A S_2$ (pois as cargas foram transportadas paralelamente às linhas da malha geométrica), temos que

$$A \left(\frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1 \sigma_1}{E_2 \sigma_2} \right) \dots \dots \dots (21.4)$$

e, como já sabemos pela equação (21.1) que ${}_A (F_1/F_2) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}$, temos:

$$A \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = A \left(\frac{E_1 \sigma_1}{E_2 \sigma_2} \right) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1} \dots \dots \dots (21.5)$$

Obtivemos, portanto, uma relação entre certas grandezas eletromagnéticas.

Para que possamos continuar com a nossa dedução, vamos agora determinar o campo elétrico gerado por uma placa de cargas, de dimensão muito grande, colocada paralelamente ao capacitor gravitacional (vide fig. 21.2). Se circundarmos, agora,

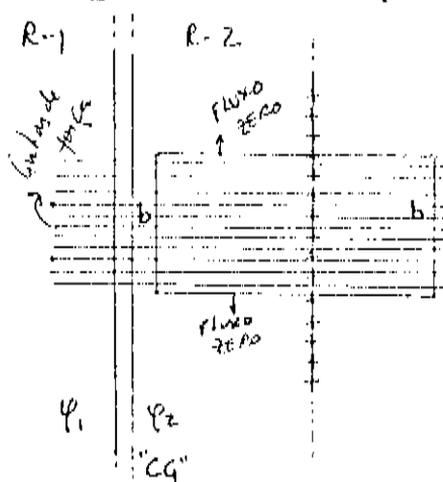


Fig. 21.2

uma porção desta placa com uma superfície de Gauss cilíndrica, podemos, com a ajuda da Lei de Gauss, calcular o fluxo total de campo elétrico através da mesma. Observemos, no entanto, que só haverá fluxo de campo elétrico através das bases b da superfície cilíndrica, já que as linhas de força do campo elétrico são perpendiculares a placa carregada. Portanto, para o ob-

servador A,

$$A \left(z \epsilon_{0z} \int_b \vec{E}_z \cdot d\vec{S}_z = qz \right) \dots \dots \dots (21.6)$$

e

$$A \left(z \epsilon_{0z} E_z b_z = qz \right)$$

e

$$A \left(E_z = \frac{q_z}{2 b_2 \epsilon_{0z}} \right)$$

ou

$$A \left(E_z = \frac{\sigma_z}{2 \epsilon_{0z}} \right) \quad \dots \dots \dots (21.7)$$

onde $\sigma = q/b$ é a densidade superficial de carga da placa.

Prolongando a superfície cilíndrica até a região 1 (vide fig. 21.3) e relembrando que a imposição de que a placa carregada deve estar paralela ao capacitor gravitacional nos garante

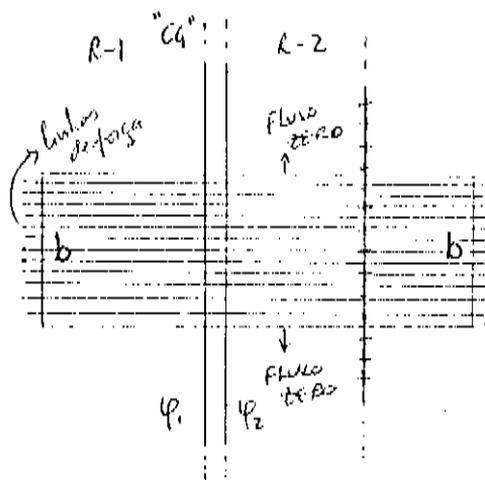


Fig. 21.3

te que as linhas de força do campo elétrico continuam perpendiculares às bases da superfície cilíndrica, isto é, perpendiculares ao capacitor gravitacional, temos, também, que o fluxo de campo elétrico através da lateral do cilindro continua sendo nulo (vide seção 2 - sobre a construção do capacitor) e daqui, seguindo o raciocínio anterior, podemos escrever

$$A \left(\epsilon_{01} \int_b \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_{0z} \int_b \vec{E}_z \cdot d\vec{S}_z = q_z \right) \quad \dots \dots \dots (21.8)$$

ou

$$A \left(\epsilon_{01} E_1 b_1 + \epsilon_{0z} E_z b_2 = q_z \right) \quad \dots \dots \dots (21.9)$$

e

$$A \left(E_1 = \frac{q_z - \epsilon_{0z} E_z b_2}{\epsilon_{01} b_1} \right).$$

Mas, a partir de (21.7), sabemos que

$$A \left(q_z = 2 \epsilon_{0z} E_z b_2 \right)$$

e, portanto,

$$A \left(E_1 = \frac{q_z - q_z/2}{\epsilon_{01} b_1} \right)$$

$$A \left(E_1 = \frac{q_2}{2 \epsilon_{01} b_1} \right) \dots \dots \dots (21.10)$$

Como $A (b_1 = b_2)$, temos que $A \left(\frac{q_2}{b_1} = \frac{q_2}{b_2} = \sigma_2 \right)$ e, logo,

$$A \left(E_1 = \frac{\sigma_2}{2 \epsilon_{01}} \right) \dots \dots \dots (21.11)$$

Voltando, agora, a equação (21.4) com (21.7) e (21.11), obtemos

$$A \left(\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{\sigma_2}{2 \epsilon_{01}} \sigma_1}{\frac{\sigma_2}{2 \epsilon_{02}} \sigma_2} = \frac{\sigma_1 \epsilon_{02}}{\sigma_2 \epsilon_{01}} = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^{-1} \right) \dots \dots (21.12)$$

ou

$$A \left(\frac{\sigma_1 \epsilon_{02}}{\sigma_2 \epsilon_{01}} \right) = \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^{-1} \dots \dots \dots (21.13)$$

Observemos que a equação (21.13) nos dá a relação entre a densidade superficial de carga e a constante de permissividade e esta relação é válida, como argumentado anteriormente, independentemente da invariância ou não da carga elétrica. Em toda a dedução, considerou-se apenas o observador A e, portanto, nenhuma transformação foi usada. Portanto, podemos usá-la para tentar provar a invariância da carga elétrica.

Suponhamos que a carga não seja invariante e que obedeça à relação

$$A q_1 = q_1 \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^n$$

Pela tabela da seção (18), vemos que a relação entre as constantes dielétricas do vácuo serão:

$$A \epsilon_{02} = \epsilon_{02} \left(1 - \frac{\Delta \varphi}{c^2} \right)^{2n-1}$$

Agora, pelo Princípio de Equivalência, $\epsilon_{02} = \epsilon_{01}$ e, então,

$${}_A \mathcal{E}_{02} = {}_A \mathcal{E}_{01} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{2n-1}$$

ou

$${}_A \left(\frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{E}_{01}} \right) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{2n-1} \dots \dots \dots (21.14)$$

Mas

$${}_A q_2 = {}_A q_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^n$$

e, novamente, pelo Princípio de Equivalência, ${}_A q_1 = {}_B q_1$, logo

$${}_A q_2 = {}_A q_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^n \dots \dots \dots (21.15)$$

Como a densidade superficial de carga é escrita como:

$$\sigma = q/b,$$

então

$$\frac{{}_A q_2}{{}_A b_2} = \frac{{}_A q_1}{{}_A b_1} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^n$$

e lembrando que ${}_A b_1 = {}_A b_2$, ficamos com

$${}_A \sigma_2 = \frac{{}_A q_2}{{}_A b_2} = \frac{{}_A q_1}{{}_A b_1} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^n = {}_A \sigma_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^n$$

ou

$${}_A \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-n} \dots \dots \dots (21.16)$$

Multiplicando agora (21.14) por (21.16), obtemos:

$${}_A \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) {}_A \left(\frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{E}_{01}} \right) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{2n-1} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{n-1} \dots \dots \dots (21.17)$$

Mas, por (21.13), temos que ${}_A \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{E}_{01}} \right) = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-1}$ e, por comparação, vemos que a relação entre os expoentes deve ser

$$\eta - 1 = -1 \quad \dots \dots \dots (21.18)$$

o que conduz a $\eta = 0$. Portanto, a carga elétrica é um invariante. Ou de outra forma

$$Aq_1 = Bq_1 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{\eta=0} = Bq_1$$

e, pelo Princípio de Equivalência, $Aq_1 = Bq_2$, fica

$$Aq_1 = Bq_1 = Bq_2 = Aq_2 \quad \dots \dots \dots (21.19)$$

Nessa demonstração da invariância da carga elétrica, além da relação entre as forças sobre as duas placas, tirada da dinâmica, foi essencial o uso da Lei de Gauss. Esta lei pode ser considerada, de certa forma, como uma definição de carga elétrica a partir do fluxo de campo. A suposição de que a lei de Gauss continua válida mesmo quando a superfície gaussiana atravessa o capacitor gravitacional é a suposição eletromagnética fundamental da dedução e equivale a dizer que se supôs que o método de determinação de cargas elétricas continua sendo o mesmo, tanto em regiões "chatas" quanto na presença de campos gravitacionais.

CAPÍTULO II

1. INTRODUÇÃO

Considerando que o campo gravitacional criado por uma distribuição de massa de simetria central arbitrária é completamente determinado pela métrica de Schwarzschild, podemos usá-la para calcular a velocidade coordenada da luz (a velocidade medida não-localmente) em tal campo.

Em coordenadas espaciais esféricas, $(r', \theta'$ e $\varphi')$, e coordenada temporal, t' , a métrica de Schwarzschild é expressa por:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right) dt'^2 - \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right)^{-1} dr'^2 - r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2), \dots (1.1)$$

onde $A_3 = \frac{2km}{c^2}$, sendo k a constante gravitacional Newtoniana, m a massa total da distribuição e c a velocidade local da luz.

Calculando, em primeiro lugar, a velocidade coordenada radial (não-local) da luz, ($\theta' = \varphi' = \text{constante}$ e $d\theta' = d\varphi' = 0$), temos, de (1.1), que

$$ds^2 = 0 = c^2 \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right) dt'^2 - \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right)^{-1} dr'^2 \dots (1.2)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right) dt'^2 = \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right)^{-1} dr'^2$$

e

$$\left(\frac{dr'}{dt'}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right)^2$$

ou

$$\frac{dr'}{dt'} = c \left(1 - \frac{A_3}{r'}\right). \dots (1.3)$$

E, em segundo lugar, calculando a velocidade coordenada (não-local) da luz ao se propagar perpendicularmente ao raio, teremos, novamente de (1.1), ($r' = \text{constante}$)

$$ds^2 = 0 = c^2 \left(1 - \frac{E_s}{r'}\right) dt'^2 - r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2) \quad \dots (1.4)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{E_s}{r'}\right) dt'^2 = r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2)$$

e

$$\frac{r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2)}{dt'^2} = c^2 \left(1 - \frac{E_s}{r'}\right)$$

ou

$$\frac{dl'}{dt'} = \left[\frac{r' (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\varphi'^2)^{1/2}}{dt'} \right] = c \left(1 - \frac{E_s}{r'}\right)^{1/2} \quad \dots (1.5)$$

Observemos que as equações (1.3) e (1.5), não só mostram que a velocidade da luz, quando medida não-localmente, não é igual a \underline{c} , mas que depende da direção de propagação do raio luminoso.

No entanto, na primeira parte do trabalho em que tratamos do modelo do Capacitor Gravitacional, mais especificamente da Cinemática aplicável a tal modelo, encontramos que a velocidade era uma grandeza cinemática invariante, o que, como caso particular, conduzia à invariância da velocidade da luz, isto é, a velocidade da luz medida local e não-localmente conduzia sempre ao mesmo valor constante e igual a \underline{c} .

Motivados por tal fato, levantamos a seguinte questão: existiria uma métrica equivalente à métrica de Schwarzschild, para a qual a velocidade coordenada da luz (a velocidade quando medida não-localmente) em qualquer direção de propagação seja sempre igual a \underline{c} , isto é, uma métrica que tenha a seguinte forma:

$$ds^2 = A \left[c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad \dots (1.6)$$

onde o coeficiente A é função apenas da coordenada radial r , isto é, $A = A(r)$?

Observemos, antes de tentarmos resolver a questão acima colocada, que ao escrevermos uma métrica do tipo de (1.6), exigimos, além do fato de que a velocidade coordenada da luz seja igual a c , que o espaço seja isotrópico, isto é, que o espaço não possua direção preferencial alguma.

2. SOLUÇÃO DA QUESTÃO PARA O ESPAÇO DESPROVIDO DE MATÉRIA

A solução da questão resume-se na solução das Equações de Einstein para uma métrica da forma de (1.6), para uma região desprovida de matéria.

Para o espaço vazio, temos que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é nulo:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

ou, no caso da métrica diagonal,

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

Usando (1.6) para calcular as componentes do tensor de Ricci, temos

$$R_{00} = \frac{c^2}{2A} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{c^2}{rA} \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

$$R_{11} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{3}{2A} \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{1}{rA} \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

$$R_{22} = -\frac{2r}{A} \frac{dA}{dr} - \frac{r^2}{2A} \frac{d^2A}{dr^2} \quad \dots \dots \dots (2.5)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta \left(-\frac{2r}{A} \frac{dA}{dr} \right) - \sin^2\theta \frac{r^2}{2A} \frac{d^2A}{dr^2} \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

Note-se que $R_{33} = R_{22} \sin^2\theta$.

A partir das condições dadas em (2.2), obtemos

$$R_{00} = 0 = \frac{c^2}{2A} \frac{d^2A}{dr^2} + \frac{c^2}{rA} \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

$$R_{11} = 0 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{3}{2A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{rA} \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (2.8)$$

$$R_{22} = 0 = -\frac{2r}{A} \frac{dA}{dr} - \frac{r^2}{2A} \frac{d^2A}{dr^2} \quad \dots \dots \dots (2.9)$$

$$R_{33} = 0 = \sin^2\theta R_{22} \quad \dots \dots \dots (2.10)$$

constituindo um sistema de apenas três equações independentes; simplificando e reescrevendo as equações (2.7), (2.8) e (2.9), encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.11)$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{d^2A}{dr^2} \right] - \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.12)$$

$$2 \frac{dA}{dr} + \frac{r}{2} \frac{d^2A}{dr^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.13)$$

A equação (2.11) pode facilmente ser resolvida se usarmos a seguinte substituição

$$\chi = \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (2.14)$$

então

$$\frac{1}{z} \frac{d\chi}{dr} + \frac{1}{r} \chi = 0$$

$$\frac{1}{z} \frac{d\chi}{dr} = - \frac{\chi}{r}$$

ou

$$\frac{d\chi}{\chi} = -z \frac{dr}{r}$$

$$\ln \chi = -z \ln r + k$$

onde k é uma constante de integração, e, portanto,

$$\chi = c r^{-z},$$

onde $k = \ln c$. Mas, como $\chi = \frac{dA}{dr}$, a partir de (2.14), ficamos com

$$\frac{dA}{dr} = c r^{-z},$$

ou

$$dA = c r^{-z} dr$$

e, integrando,

$$A = k' - c r^{-1} \quad \dots \dots \dots (2.15)$$

onde k' é uma constante de integração.

Usando (2.15) em (2.13), temos que

$$\frac{dA}{dr} = cr^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{d^2A}{dr^2} = -2cr^{-3}$$

e encontramos que

$$z \frac{dA}{dr} + \frac{r}{z} \frac{d^2A}{dr^2} = zcr^{-2} - \frac{r}{z} 2cr^{-3} = cr^{-2}$$

que só será zero, para todo r , se $C = 0$.

Por outro lado, a equação (2.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$-\frac{z}{r} \frac{dA}{dr} - \frac{1}{z} \frac{d^2A}{dr^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.1b)$$

e somada com (2.11), ficamos com

$$-\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = 0,$$

ou

$$A = \text{constante} \quad \dots \dots \dots (2.1c)$$

Daqui, se usarmos a solução (2.15) em (2.12), encontramos que ela só estará satisfeita para $C = 0$, mas, por outro lado, vemos que, observando as equações (2.11), (2.12) e (2.13), estas três equações só possuem solução simultânea quando

$$A = k' = \text{constante} \quad \text{ou} \quad A = 0,$$

isto é, A não pode depender de r .

Para o caso em que A é uma constante, temos que o espaço-tempo é "chato". Esta situação ocorre localmente, em um

referencial em movimento geodésico, (isto nada mais é do que uma consequência do Princípio de Equivalência Forte) ou a uma distância assintótica da distribuição de matéria.

Seria interessante, agora, testar se a métrica do tipo dado por (1.6) poderia ser uma solução das Equações de Einstein com constante cosmológica. Neste caso, temos que

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e λ é constante cosmológica. É importante frisar que continuamos a procurar soluções que descrevam o espaço desprovido de matéria.

Para a métrica citada, $G_{\mu\nu}$ fica

$$G_{00} = \frac{3c^2}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{c^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{2c^2}{Ar} \frac{dA}{dr} \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

$$G_{11} = \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

$$G_{22} = -\frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta.$$

e

Mas, de (2.18), temos

$$\left. \begin{aligned} G_{00} + \lambda g_{00} &= 0 \\ G_{11} + \lambda g_{11} &= 0 \\ G_{22} + \lambda g_{22} &= 0 \\ G_{33} + \lambda g_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

Onde, a partir de (1.6),

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= A c^2 \\ g_{11} &= -A \\ g_{22} &= -r^2 A \\ g_{33} &= -r^2 A \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.23)$$

e, portanto, as equações (2.22), utilizando-se (2.19), (2.20) e (2.21) e com a ajuda de (2.23), ficam:

$$\frac{3c^2}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{c^2}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{c^2}{Ar} \frac{dA}{dr} + \lambda A c^2 = 0 \dots (2.24)$$

$$\frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{3}{Ar} \frac{dA}{dr} - \lambda A = 0 \dots \dots \dots (2.25)$$

$$-\frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} - \lambda A r^2 = 0 \dots (2.26)$$

Simplificando e reescrevendo (2.24) e (2.26), encontramos

$$\frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{3}{Ar} \frac{dA}{dr} + \lambda A = 0 \dots \dots \dots (2.27)$$

$$-\frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} - \lambda A = 0 \dots \dots \dots (2.28)$$

Somando (2.27) e (2.28), obtemos

$$-\frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} = 0$$

ou

$$-\frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} = 0$$

e, daqui, vemos que se A não for infinito, A deve ser uma constante,

$$A = \text{constante}. \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

É fácil ver que as equações (2.24), (2.25) e (2.26) só possuem solução simultânea quando

$$A = \text{constante} \quad \text{e} \quad \lambda = 0, \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

o que corresponde ao caso anterior.

Considerando que ambos os sistemas de equações formados por

$$R_{\mu\nu} = 0$$

e

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0$$

só possuem solução simultânea do tipo (1.6), para A independente da coordenada radial, isto é, $A = \text{constante}$, concluímos então que as coordenadas r , θ , φ e t , as quais foram usadas para escrever (1.6), nada mais são do que as coordenadas locais de um espaço-tempo chato. Com isso, pode-se ver que não existe um conjunto de coordenadas $(\beta, \theta, \phi, \tau)$

para as quais a velocidade coordenada (não-local) da luz seja \underline{c} e, ao mesmo tempo, o espaço seja isotrópico, isto é, não possua direção preferencial, e que seja distinto da métrica de Minkowski. Mas, por outro lado, existe um conjunto de coordenadas que consegue preservar a isotropia do espaço às custas de colocar a velocidade coordenada (não-local) da luz como uma função de r ($c' = c'(r)$). A essas coordenadas se dá o nome de ISOTRÓPICAS (4) e nelas a métrica fica escrita como:

$$ds^2 = A' c^2 dt^2 - B' [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (231)$$

onde A' e B' são funções de r e são dadas por:

$$A' = \left(\frac{1 - \frac{\beta_2}{4r}}{1 + \frac{\beta_2}{4r}} \right)^2 \quad e \quad B' = \left(1 + \frac{\beta_2}{4r} \right)^4.$$

Ou, também, é possível colocar a velocidade coordenada radial (não-local) da luz igual a \underline{c} às custas da perda de isotropia do espaço, como fez Becquerel (5), escrevendo a métrica na forma:

$$ds^2 = A' (c^2 dt^2 - dr^2) - B' r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (232)$$

onde A' e B' são funções de r .

É possível, no entanto, conceber uma solução das equações de campo que consista em duas regiões "chatas", separadas por uma casca esférica onde o espaço-tempo não é chato, tendo essas duas regiões "chatas" diferentes valores de A (constantes, em cada região). Essa solução é semelhante ao Capacitor Gravitacional do Capítulo I, possuindo no entanto simetria esférica.

3. SOLUÇÃO DA QUESTÃO PARA O ESPAÇO COM MATÉRIA

Considerando a análise anterior, somos tentados a questionar se uma métrica do tipo dado por (1.6) não seria solução das equações de Einstein na presença de matéria. Para resolver tal questão, escreveremos as equações de Einstein para o caso em que o tensor de momentum-energia ($T_{\mu\nu}$) é diferente de zero.

Com $T_{\mu\nu} \neq 0$, para uma região com matéria, as equações de Einstein (sem constante cosmológica) ficam

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \text{ onde } \kappa = \text{constante}, \dots (3.1)$$

e $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein.

No caso de um fluido, o tensor de momentum-energia é escrito como

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon u_\mu u_\nu + \frac{P}{c^2} (u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}) \quad \dots (3.2)$$

e, para o caso de um campo com simetria esférica e estático, de (1.6), temos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} Ac^2 & & & 0 \\ & -A & & \\ & & -Ar^2 & \\ 0 & & & -Ar^2 d\Omega^2 \end{pmatrix} \quad \dots (3.3)$$

e, portanto,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon Ac^2 & & & 0 \\ & \frac{P}{c^2} & & \\ & & \frac{PAc^2}{c^2} & \\ 0 & & & \frac{PAr^2 d\Omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \quad \dots (3.4)$$

e, a partir de (3.1) e (3.4), ficamos com

$$\left. \begin{aligned} G_{00} &= K \varepsilon A c^2 \\ G_{11} &= K \frac{r^2}{c^2} \frac{dA}{dr} \\ G_{22} &= K \frac{r^2}{c^2} \frac{dA}{dr} \\ G_{33} &= K \frac{r^2}{c^2} \frac{dA}{dr} \mu_{11}^2 \Theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.5)$$

onde, como já havia sido determinado ((2.19), (2.20), (2.21)),

$$\left. \begin{aligned} G_{00} &= \frac{3c^2}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{c^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{2c^2}{Ar} \frac{dA}{dr} \\ G_{11} &= \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} \\ G_{22} &= -\frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \\ G_{33} &= \mu_{11}^2 \Theta \left[-\frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (3.6)$$

que, substituindo em (3.5), leva a:

$$\frac{3c^2}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{c^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{2c^2}{Ar} \frac{dA}{dr} - K \varepsilon A c^2 \dots \dots \dots (3.7)$$

$$\frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} = \kappa \frac{\rho A}{c^2} \dots \dots \dots (3.8)$$

$$- \frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} = \kappa \frac{\rho A}{c^2} r^2 \dots \dots \dots (3.9)$$

$$\rho \kappa r^2 \theta \left[- \frac{3}{4} \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{r}{A} \frac{dA}{dr} + \frac{r^2}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \right] = \kappa \frac{\rho A}{c^2} r^2 \rho \kappa r^2 \theta \dots \dots \dots (3.10)$$

simplificando e reescrevendo as equações (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), encontramos

$$\kappa \epsilon A = \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} \dots \dots \dots (3.11)$$

$$\kappa \frac{\rho A}{c^2} = \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} \dots \dots \dots (3.12)$$

$$\kappa \frac{\rho A}{c^2} = - \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \dots \dots \dots (3.13)$$

$$\kappa \frac{\rho A}{c^2} = - \frac{3}{4A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{A} \frac{d^2A}{dr^2} \dots \dots \dots (3.14)$$

onde (3.13) e (3.14) são idênticas.

Agora, igualando (3.12) com (3.13), obtemos

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{2}{Ar} \frac{dA}{dr} = - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{A} \frac{d^2A}{dr^2}$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{Ar} \frac{dA}{dr} - \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} = 0. \quad \dots \dots \dots (3.15)$$

Se considerarmos a substituição

$$x = \frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \quad \dots \dots \dots (3.16)$$

então

$$\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dr} \right) = \frac{d}{dr} (A^{-1}) \frac{dA}{dr} + A^{-1} \frac{d^2 A}{dr^2},$$

mas $\frac{d}{dr} (A^{-1}) = -A^{-2} \frac{dA}{dr}$ e, portanto,

$$\frac{dx}{dr} = - \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2}. \quad \dots \dots \dots (3.17)$$

Mas, (3.15) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right) = 0$$

que, a partir de (3.16) e (3.17), ficamos com

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{dx}{dr} + \frac{x}{r} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{x}{r} = \frac{dx}{dr}. \quad \dots \dots \dots (3.18)$$

Para resolvermos esta equação, consideremos a seguinte substituição:

$$y = \frac{x}{r} \quad \text{ou} \quad x = ry \quad \dots \dots \dots (3.19)$$

e portanto

$$\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dr} (ry) = y + r \frac{dy}{dr}.$$

Substituindo, agora, (3.19) em (3.18), encontramos

$$\frac{r^2 y^2}{z} + y = y + r \frac{dy}{dr}$$

ou

$$\frac{r^2 y^2}{z} = r \frac{dy}{dr}$$

e, portanto,

$$\frac{r y^2}{z} = \frac{dy}{dr}$$

ou

$$r dr = z y^{-2} dy,$$

e integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\frac{r^2}{z} + C_0 = -2 y^{-1},$$

onde C_0 é uma constante de integração,

e

$$r^2 + C_1 = -4 y^{-1},$$

com $C_1 = 2C_0,$

ou

$$y = -\frac{4}{r^2 + C_1} \dots \dots \dots (3.20)$$

Substituindo y por seu valor, a partir de (3.19), (3.20) fica

$$\frac{x}{r} = -\frac{4}{r^2 + C_1}$$

ou

$$x = -\frac{4r}{r^2 + C_1} \dots \dots \dots (3.21)$$

Agora, de (3.16), temos que

$$\chi = \frac{1}{A} \frac{dA}{dr}$$

e voltando a (3.21), encontramos

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} = -\frac{4r}{r^2 + C_1}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{4r dr}{(r^2 + C_1)} \quad \dots \dots \dots (3.22)$$

e integrando ambos os lados da equação (3.22),

$$\ln A + C_2 = -4 \int \frac{r dr}{(r^2 + C_1)}$$

onde C_2 é uma constante de integração,

$$\ln A + C_2 = -4 \frac{1}{2} \ln(r^2 + C_1)$$

ou

$$C_3 A = (r^2 + C_1)^{-2}$$

onde $C_2 = \ln C_3$

$$e \quad A = \frac{C_4}{(r^2 + C_1)^2}, \quad \text{onde } C_4 = C_3^{-1}. \quad \dots \dots \dots (3.23)$$

Podemos, agora, usar a equação (3.23) para determinar $\tilde{\rho}(r)$ e $\tilde{\epsilon}(r)$, a partir das equações (3.12) e (3.11), respectivamente.

De (3.12), temos

$$K \frac{PA}{c^2} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{3}{r} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)$$

e sendo $A = c_4 (r^2 + c_1)^{-2}$, encontramos que

$$\frac{dA}{dr} = - \frac{4r c_4}{(r^2 + c_1)^3} \dots \dots \dots (3.24)$$

e

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dA}{dr} \right) = -4c_4 \frac{d}{dr} \left[r(r^2 + c_1)^{-2} \right] = \frac{-4c_4}{(r^2 + c_1)^3} + \frac{24c_4 r^2}{(r^2 + c_1)^4} \dots (3.25)$$

e, portanto,

$$\frac{kPA}{c^2} = \frac{3}{4} \left[- \frac{1}{c_4 (r^2 + c_1)^2} \cdot \frac{4r c_4}{(r^2 + c_1)^3} \right]^2 + \frac{2}{r} \left[\frac{-1}{c_4 (r^2 + c_1)^2} \cdot \frac{4r c_4}{(r^2 + c_1)^3} \right]$$

$$\frac{kPA}{c^2} = \frac{3}{4} \frac{16r^2}{(r^2 + c_1)^2} - \frac{8}{(r^2 + c_1)}$$

$$\frac{kPA}{c^2} = \frac{12r^2}{(r^2 + c_1)^2} - \frac{8}{(r^2 + c_1)}$$

$$\frac{kPA}{c^2} = \frac{12r^2 - 8(r^2 + c_1)}{(r^2 + c_1)^2} = \frac{4r^2 - 8c_1}{(r^2 + c_1)^2}$$

ou

$$\frac{kPA}{c^2} = \frac{4(r^2 - 2c_1)}{(r^2 + c_1)^2}$$

$$P(r) = \frac{c^2}{k c_4} \frac{4}{(r^2 + c_1)^2} \frac{(r^2 - 2c_1)}{(r^2 + c_1)^2}$$

$$P(r) = \frac{4c^2}{k c_4} \frac{(r^2 - 2c_1)}{(r^2 + c_1)^2} \dots \dots \dots (3.26)$$

e, a densidade de energia deve então ficar

$$K \epsilon_A = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{A} \frac{d^2A}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{1}{A} \frac{dA}{dr}$$

ou, de (3.24) e (3.25),

$$kEA = \frac{3}{4} \left[\frac{-1}{c_4(r^2+c_1)^2} \frac{4c_4r}{(r^2+c_1)^3} \right]^2 - \frac{1}{c_4(r^2+c_1)^2} \left[-\frac{4c_4}{(r^2+c_1)^3} + \frac{24c_4r^2}{(r^2+c_1)^4} \right] \\ - \frac{2}{r} \left[\frac{-1}{c_4(r^2+c_1)^2} \frac{4c_4r}{(r^2+c_1)^3} \right]$$

$$kEA = \frac{3}{4} \frac{16r^2}{(r^2+c_1)^2} + \frac{4}{(r^2+c_1)} - \frac{24r^2}{(r^2+c_1)^2} + \frac{8}{(r^2+c_1)}$$

$$kEA = \frac{12r^2}{(r^2+c_1)} - \frac{24r^2}{(r^2+c_1)^2} + \frac{12}{(r^2+c_1)}$$

$$kEA = -\frac{12r^2}{(r^2+c_1)^2} + \frac{12}{(r^2+c_1)}$$

e sendo $A = c_4(r^2+c_1)^{-2}$, temos

$$kE = \frac{-12r^2}{c_4(r^2+c_1)^2 (r^2+c_1)^2} + \frac{12}{c_4(r^2+c_1)^2 (r^2+c_1)}$$

$$kE = -\frac{12r^2}{c_4} + \frac{12}{c_4} (r^2+c_1)$$

$$kE = -\frac{12r^2}{c_4} + \frac{12r^2}{c_4} + \frac{12c_1}{c_4}$$

e

$$E = \frac{12c_1}{kc_4},$$

ou

$$E = \text{constante} \dots \dots \dots (3.27)$$

A princípio, um sistema com densidade de energia, ϵ , constante, como obtemos em (3.27), pode ser pensada como sendo um fluido uniformemente distribuído e incompressível, mas, por outro lado, se considerarmos a equação (3.26) fica difícil, fisicamente, imaginar um sistema que obedeça (3.27) e ao mesmo tempo tenha uma densidade de pressão, $\bar{p}(r)$, que cresce com r^2 . Isto somente poderia ocorrer caso o fluido tivesse propriedades repulsivas.

Portanto, não parece existir nenhuma solução das equações de Einstein em que o espaço seja isotrópico, a velocidade coordenada da luz seja c , e que tenha por fonte uma distribuição de matéria fisicamente plausível.

CAPÍTULO III

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A princípio, no Capítulo I, quando nos propusemos estudar situações intermediárias entre a Relatividade Restrita e a Relatividade Geral, estávamos preocupados, em primeiro lugar, em compreender melhor a física subjacente às transformações da Relatividade Geral e, em segundo lugar, encontrar resultados que fossem compatíveis com a Relatividade Geral e com uma classe mais abrangente de teorias gravitacionais. Para tanto, usamos três princípios físicos, a saber: (a) "Red Shift" gravitacional; (b) Princípio de Equivalência Forte; e (c) a Relatividade Restrita deve valer em regiões que possuem potencial gravitacional constante.

A situação escolhida para estudo foi a do Capacitor Gravitacional - duas regiões do espaço-tempo com potenciais gravitacionais diferentes, mas constantes, separadas por um campo gravitacional (ver Seção 3 - Cap. I). O desenvolvimento da Mecânica aplicável à situação do Capacitor Gravitacional fez-se em duas partes: (a) Cinemática e (b) Dinâmica. Na parte (a), após termos feito uma descrição detalhada da construção dos sistemas de referência associados aos observadores de cada região, encontramos as equações de transformação das coordenadas tempo e espaciais entre esses observadores, e, por fim, determinamos que a grandeza cinemática velocidade é um invariante, isto é, quando fazemos medidas locais e não-locais desta grandeza, obtemos sempre o mesmo resultado - como caso particular, a velocidade da luz é um invariante. Mas, ao contrário da velocidade, encontramos que a aceleração é uma grandeza cinemática não-invariante. Na parte (b), ao fazermos algumas considerações gerais sobre fótons, encontramos um resultado muito interessante sobre a constante de Planck: encontramos que a mesma é uma grandeza não-invariante, isto é, o valor obtido para ela quando medida localmente difere do resultado obtido quando medida não-localmente. Feito isso, usando tais considerações so-

bre fótons, determinamos a equação de transformação para o padrão de massa, a qual mostra que a mesma é uma grandeza dinâmica invariante. Depois disso, com a ajuda de grandezas cinemáticas, definimos todas as outras grandezas dinâmicas e a partir dessas encontramos suas equações de transformação, o que nos levou a concluir que o momentum e a energia são grandezas dinâmicas invariantes, ao contrário da força que é uma grandeza dinâmica não-invariante.

A seguir, como na Cinemática tínhamos encontrado que a velocidade era uma grandeza invariante, imaginamos que quando um feixe de luz incidisse obliquamente sobre o Capacitor Gravitacional, fazendo um ângulo α com a normal à parede do mesmo, ao atravessá-lo não deveria sofrer deflexão alguma, mas, por outro lado, sabíamos de argumentos dinâmicos que, a partir da Mecânica Clássica, devido à presença de campo gravitacional na região interna ao capacitor gravitacional, o índice de refração da região 2 em relação à região 1 era $\left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$, ao invés de 1, como era esperado, já que a velocidade da luz é um invariante. Para que esta situação paradoxal fosse resolvida foi necessário abandonar a condição clássica de que a direção do campo gravitacional era a direção preferencial do espaço interno ao Capacitor Gravitacional. Para tanto, analisamos várias situações físicas que elucidaram totalmente o problema, concluindo-se não haver deflexão da luz, no caso.

A seguir, construímos o Eletromagnetismo aplicável à situação do Capacitor Gravitacional. Considerando a carga elétrica como uma grandeza eletromagnética invariante, definimos todas as outras grandezas eletromagnéticas. Em primeiro lugar, encontramos as equações de transformação para as constantes de permissividade e permeabilidade do vácuo, ϵ_0 e μ_0 , respectivamente, e, a partir delas, pudemos concluir que as mesmas são grandezas eletromagnéticas não-invariantes. Feito isso, determinamos que o Campo Elétrico é também um não-invariante. Definindo corrente como $\Delta q / \Delta t$, determinamos sua equação de transformação e dela concluimos que a mesma é uma grandeza não-invariante. A seguir, mostramos que o Campo Magnético se transforma do mesmo modo que o Campo Elétrico e, portanto, é um não-invariante.

te.

Na Seção (18), supondo que a carga elétrica não fosse um invariante, mas que sua medida dependesse do potencial gravitacional da região, seguindo os mesmos raciocínios das seções anteriores, isto é, do Eletromagnetismo (Seções (16) e (17)), obtivemos uma relação de transformação geral e, posteriormente, a partir desta, construímos uma tabela das grandezas e os expoentes do fator de transformação.

Da Seção (19) até a Seção (21) nos preocupamos em demonstrar a invariância da carga elétrica para qualquer fenômeno eletromagnético na presença de campo gravitacional. Na Seção (20) construímos um Capacitor Elétrico entremeado pelo Capacitor Gravitacional e na Seção (21) determinamos a força que as placas do Capacitor Elétrico exerciam uma sobre a outra. E nesta seção recuperamos um resultado muito interessante sobre a não-validade da Terceira Lei de Newton na presença de Campos Gravitacionais, isto é, encontramos que a lei de ação e reação não vale para a força entre duas cargas elétricas situadas a diferentes potenciais gravitacionais. E, por fim, usando os resultados dessas seções e das seções anteriores, demonstramos que a carga elétrica é uma grandeza eletromagnética invariante.

Com relação ao Capítulo II, usando a métrica de Schwarzschild determina-se que a velocidade da luz não é uma grandeza invariante, isto é, medidas locais e não-locais da velocidade da luz diferem, e, além disso, as medidas não-locais dependem da direção de propagação do feixe luminoso, em contraposição ao resultado obtido na primeira parte (ver Seção (8) - Cap. I). Por isso, na Seção (2) do Cap. II, procuramos soluções para as Equações de Einstein, com e sem constante cosmológica, λ , que sejam proporcionais a métrica de Minkowski, isto é, uma solução do tipo

$$ds^2 = A \left[c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (x_n^2 \theta d\varphi^2 + d\sigma^2) \right], \quad A = A(r).$$

As únicas soluções do vácuo que obedecem à condição acima e ao mesmo tempo às Equações de Einstein são aquelas em que

$$A = \text{constante} \quad e \quad \lambda = 0.$$

Mas, na Seção (3), examinando a hipótese de que poderia haver um espaço com matéria com uma solução do tipo acima, encontramos que o espaço preenchido por um fluido incompressível uniformemente distribuído e com propriedades repulsivas poderiam gerar soluções deste tipo.

APÊNDICE A

Neste apêndice faremos a dedução da aceleração radial de uma partícula no campo gravitacional gerado por uma massa negativa (ver seção 3).

Colocando a velocidade da luz igual a 1, $c = 1$, vamos tomar uma partícula que está inicialmente em repouso num campo gravitacional estático, ou seja

$$v^i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots \quad (A.1)$$

(este é o vetor velocidade no espaço tridimensional).

Temos que

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \left(e \quad v^i = \frac{dx^i}{ds} = 0 \right)$$

Daí

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1$$

mas esta igualdade escreve-se como

$$g_{00} v^0 = 1, \quad \text{pois} \quad g_{i0} = g_{0j} = 0 \quad \text{e} \quad v^i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots \quad (A.2)$$

ou

$$v^0 = (g_{00})^{-1/2}$$

Como por hipótese a partícula não está sujeita à nenhuma força, exceto à da gravidade, então pelos postulados de Einstein, a partícula mover-se-á ao longo de uma geodésica. Temos então pela equação das geodésicas

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu v^\rho v^\sigma = 0.$$

Agora, de (A.1), $\Gamma_{ij}^\mu v^i v^j = 0$. Também temos que

$$\Gamma_{0n}^m = 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_{00}^0 = g^{0k} \Gamma_{k00} = 0.$$

Desta consideração, a equação acima dá

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{00}^i v^{02} = 0,$$

daí

$$\frac{dv^i}{ds} = -\Gamma_{00}^i v^{02} = -g^{ij} \Gamma_{j00} v^{02} \quad \dots \dots \dots (A.3)$$

mas pela definição de Símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{j00} = \frac{1}{2} (\cancel{g_{j0,0}^{>0}} + \cancel{g_{j0,0}^{>0}} - g_{00,j}) = -\frac{1}{2} g_{00,j}$$

e voltando a (A.3), com a equação acima, temos que

$$\frac{dv^i}{ds} = -g^{ij} \left(-\frac{1}{2} g_{00,j}\right) v^{02} = \frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j} v^{02}.$$

Observemos que, agora, pela regra da cadeia, ficamos com

$$\frac{dv^i}{ds} = \frac{dv^i}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dv^i}{dx^0} \frac{dx^0}{ds} + \frac{dv^i}{dx^j} \frac{dx^j}{ds} \quad \text{e}$$

$$\frac{dv^i}{ds} = \frac{dv^i}{dx^0} v^0 \quad \dots \dots \dots (A.4)$$

Usando (A.2) em (A.4) fica

$$\frac{dv^i}{dx^0} = \frac{1}{v^0} \frac{dv^i}{ds} = \frac{1}{v^0} \frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j} v^{02} = \frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j} v^0$$

$$\frac{dv^i}{dx^0} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{00})^{-1/2} g_{00,j} = g^{ij} (g_{00})^{1/2}_{,j} \quad \dots \dots \dots (A.5)$$

Como supomos que o campo gravitacional é estático, os $g_{\mu\nu}$

são independentes de x^0 , podemos baixar o índice i , ou seja, multiplicando (A.5) por g_{ei} , temos

$$g_{ei} \frac{dv^i}{dx^0} = g_{ei} g^{ij} (g_{00})^{1/2}_{,j} = g^j_e (g_{00})^{1/2}_{,j} = (g_{00})^{1/2}_{,e}$$

Daí

$$\frac{dv_e}{dx^0} = (g_{00})^{1/2}_{,e} = \nabla (g_{00})^{1/2} \quad \dots \dots \dots (A.6)$$

oque, como $g_{00} = g_{00}(r)$, pode ser escrito como

$$\frac{dv_e}{dx^0} = (g_{00})^{1/2}_{,1} \quad \dots \dots \dots (A.7)$$

v_1 é um vetor covariante, e normalmente, medimos aceleração com vetores contra-variantes. A relação entre v_1 e v^1 é dada por

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad j = 1, 2, 3,$$

que, para o caso considerado, fica

$$v_1 = g_{11} v^1$$

e portanto

$$\frac{d(g_{11} v^1)}{dx^0} = (g_{00})^{1/2}_{,1}$$

ou

$$g_{11} \frac{dv^1}{dx^0} = (g_{00})^{1/2}_{,1} \quad \text{ou} \quad \frac{dv^1}{dx^0} = g_{11}^{-1} (g_{00})^{1/2}_{,1} \quad \dots \dots \dots (A.8)$$

Para o caso em que a massa gravitacional do corpo gerador do campo é negativa, temos (a partir da métrica de Schwarzschild alterada)

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \quad \text{e} \quad g_{11} = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

e, portanto

$$(g_{00})_{,1}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \left(-\frac{m}{r^2} \right) = -\frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}$$

e voltando a (A.8), fica

$$\frac{dv^r}{dt} = + \left(1 + \frac{2m}{r} \right) \frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} = \frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \quad \dots (A.9)$$

Só para comparar. Caso em que a massa gravitacional do corpo gerador do campo é positiva.

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad \text{e} \quad g_{11} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}$$

$$(g_{00})_{,1}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \left(\frac{2m}{r^2} \right) = \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}$$

e, portanto,

$$\frac{dv^r}{dt} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} = - \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \quad \dots (A.10)$$

Da equação (A.10) vemos que a aceleração radial adquirida pelo corpo de prova num campo gravitacional gerado por um corpo de massa positiva é negativa, isto é, o corpo é acelerado em direção ao corpo gerador do campo, enquanto que de (A.9) vemos que tal partícula de prova num campo gravitacional gerado por um corpo de massa negativa será repelida.

APÊNDICE B

Vamos, neste apêndice, mostrar que a mesma relação que vale entre os observadores A e B deve valer para os observadores A' e B' (Capítulo I - Seção 7). Para tanto, simplesmente o que temos que fazer é mostrar que se a métrica entre os observadores A e B é escrita como segue:

$$ds^2 = c^2 d_B t^2 - d_B l^2 = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} (c^2 d_A t^2 - d_A l^2) \dots\dots (B.1)$$

onde

$${}_A g_{00} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} = -{}_A g_{11} = -{}_A g_{22} = -{}_A g_{33} \dots\dots (B.2)$$

então, entre os observadores A' e B', a métrica deve ser escrita do mesmo jeito, isto é,

$$ds^2 = c^2 d_{B'} t^2 - d_{B'} l^2 = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} (c^2 d_{A'} t^2 - d_{A'} l^2) \dots\dots (B.3)$$

onde

$${}_{A'} g_{00} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)^{-2} = -{}_{A'} g_{11} = -{}_{A'} g_{22} = -{}_{A'} g_{33} \dots\dots (B.4)$$

Isto será fácil de mostrar se lembrarmos que

$${}_A g_{00} = \frac{\partial_A x^\alpha}{\partial_{A'} x^0} \frac{\partial_A x^\beta}{\partial_{A'} x^0} {}_A g_{\alpha\beta} \dots\dots (B.5)$$

Como o tensor fundamental é diagonal, isto é, $g_{\alpha\beta} \neq 0$ só para $\alpha = \beta$, então temos que

$${}_A g_{00} = \left(\frac{\partial_A x^\alpha}{\partial_{A'} x^0}\right)^2 {}_A g_{\alpha\alpha} \dots\dots (B.6)$$

Da relatividade restrita, as transformações de coordenadas entre os observadores A e A' são:

$${}_A x^1 = \gamma ({}_{A'} x^1 - {}_{A'} v^{-1} {}_{A'} x^0 / c^2) \dots\dots (B.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda' x^2 &= \Lambda x^2 \\ \Lambda' x^3 &= \Lambda x^3 \\ \Lambda' x^0 &= c \gamma \left(\Lambda x^0 / c - \Lambda' v^1 \Lambda x^1 / c^2 \right), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8.7)$$

onde

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{\Lambda' v^1}{c}$$

Usando (8.7) em (8.6), teremos

$$\Lambda' g_{00} = \left(\frac{\partial \Lambda x^0}{\partial \Lambda' x^0} \right)^2 \Lambda g_{00} + \left(\frac{\partial \Lambda x^1}{\partial \Lambda' x^0} \right)^2 \Lambda g_{11} \dots \dots \dots (8.8)$$

$$\Lambda' g_{00} = \gamma^2 \Lambda g_{00} + (\beta \gamma)^2 \Lambda g_{11}. \dots \dots \dots (8.9)$$

Como, de (8.2), $\Lambda g_{00} = -\Lambda g_{11}$, então

$$\Lambda' g_{00} = \gamma^2 \Lambda g_{00} - (\beta \gamma)^2 \Lambda g_{00}$$

$$\Lambda' g_{00} = \gamma^2 (1 - \beta^2) \Lambda g_{00}$$

$$\Lambda' g_{00} = \Lambda g_{00} = \left(1 - \frac{\Delta v^2}{c^2} \right)^{-2} \dots \dots \dots (8.10)$$

O mesmo deve valer para Λg_{11} e (8.3) se justifica. É importante também observar que isto sempre valerá se a métrica for do tipo

$$ds^2 = (c^2 dt^2 - dl^2) f(t, r), \dots \dots \dots (8.11)$$

isto é, uma métrica pseudo-minkowskiana.

REFERÊNCIAS

a) GERAIS

EDDINGTON, A. Space, Time and Gravitation. Cambridge, University, 1968.

EINSTEIN, A. O Significado da Relatividade. Coimbra, Armênio Amado, 1958.

FOCK, V. The Theory of Space, Time and Gravitation. Edinburg, Pergamon, 1969.

MØLLER, C. The Theory of Relativity. Oxford, Clarendon, 1972.

PAULI, W. Theory of Relativity. New York, Dover Publications, 1958.

b) ESPECÍFICAS

(1) LANDAU, L e LIFCHITZ, E. Teoria do Campo. São Paulo, Hemus, s.d., p. 298.

(2) BONDI, H. Negative mass in General Relativity. Rev. mod. Phys., 29:423-428, 1957.

(3) BOYER, T. H. Eletrostatic potential energy leading to a gravitational mass change for a system of two point charges.

Am. J. Phys., 47(2):129-131, 1979; e GRIFFITHS, D. J. Eletrostatic levitation of a dipole. Am. J. Phys., 54(8):744, 1986; e ROHRICH, F. The principle of equivalence. Annals of Phys., 22:169-191, 1963.

(4) A solução das equações de Einstein para o vácuo, com a parte espacial isotrópica foi obtida de modo aproximado por Schwarzschild e, posteriormente, por Runge (ver ARZELIÈS, H. Relativité Généralisée. Gravitation, Fasc. II, Paris, Gauthier Villars, 1963, p. 33).

(5) BECQUEREL, J. Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation. Paris, Gauthier-Villars, 1922.