

O DESENVOLVIMENTO DAS MECÂNICAS NÃO-EUCLIDIANAS DURANTE O SÉCULO XIX

Ana Paula Bispo da Silva

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins

Tese apresentada ao
Instituto de Física Gleb Wataghin- UNICAMP
para obtenção do grau de Doutor em Ciências

Campinas, dezembro de 2006

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pela aluna Ana Paula Bispo da Silva e aprovada pela comissão julgadora. Campinas, 18/12/2006.



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Silva, Ana Paula Bispo da
Si38d O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas
durante o século XIX / Ana Paula Bispo da Silva. –
Campinas, SP : [s.n.], 2006.

Orientador: Roberto de Andrade Martins.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Geometria não-euclidiana. 2. Física – História.
3. Mecânica. I. Martins, Roberto de Andrade.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". III. Título.

- **Título em inglês:** The development of non-Euclidean mechanics during 19th century
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Non-Euclidean geometry
 - 2. Physics – History
 - 3. Mechanics
- **Área de concentração:** Física Geral
- **Titulação:** Doutora em Ciências
- **Banca examinadora:**
 - Prof. Roberto de Andrade Martins
 - Prof. José Luiz Goldfarb
 - Prof. Nelson Studart Filho
 - Prof. Marcio José Menon
 - Prof^a Carola Dobrigkeit Chinellato
- **Data da defesa:** 18/12/2006
- **Programa de Pós Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **ANA PAULA BISPO DA SILVA – RA 910105** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 18 / 12 / 2006.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins (Orientador da Candidata) –
DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. José Luiz Goldfarb – CCET-PUC-SP

Prof. Dr. Nelson Studart Filho – DF/UFSCar

Prof. Dr. Marcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP

Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato – DRCC/IFGW/UNICAMP

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Roberto Martins pela compreensão e dedicação.
Aos funcionários da CPG pela ajuda sempre que necessária.
À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo: O objetivo deste trabalho é estudar como a mecânica foi influenciada pelo desenvolvimento da geometria não-euclidiana durante o século XIX. Este estudo parte das primeiras teorias das geometrias não-euclidianas, até o formalismo desenvolvido com a introdução da geometria diferencial não-euclidiana, e a geometrização da mecânica. Nesse contexto, estudamos como princípio de mínima ação, na mecânica, e o estudo das geodésicas, na geometria diferencial não-euclidiana, se mostraram relacionados, e de que forma esses dois conceitos formaram a base da mecânica não-euclidiana e, posteriormente, da relatividade.

Abstract: The aim of this work is to study how mechanics was influenced by the development of the non-Euclidean geometry during nineteenth century. This study starts from the first non-Euclidean geometries, and then studies the formalism developed by the non-Euclidean differential geometry, and the geometrization of the mechanics. In this context, we study how the mechanical principle of least action, and the study of geodesics, in non-Euclidean differential geometry, are related, and how these concepts made the basis of the non-Euclidean mechanics, and, afterwards, of the general relativity.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA	4
2.1	QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES.....	5
2.2	AS PRIMEIRAS TENTATIVAS E OS TRABALHOS ÁRABES	7
2.3	TRIÂNGULO DE SACCHERI.....	9
2.4	TAURINUS, UM DESCONHECIDO	12
2.5	BOLYAI E LOBAČEVSKIĬ.....	15
3	GEOMETRIA DIFERENCIAL.....	24
3.1	A GEOMETRIA INTRÍNSECA DE GAUSS.....	26
3.1.1	A natureza da superfície curva	27
3.1.2	A curvatura da superfície.....	30
3.1.3	A soma dos ângulos do triângulo.....	34
3.2	A MULTIPLICIDADE DE RIEMANN.....	39
3.2.1	Definição de uma multiplicidade n -dimensional	40
3.2.2	Relações métricas numa multiplicidade n -dimensional.....	41
3.2.3	Aplicações ao espaço.....	45
3.3	REPERCUSSÃO E APLICAÇÃO DAS NOVAS GEOMETRIAS	46
3.4	FORMAS QUADRÁTICAS E PARÂMETROS DIFERENCIAIS.....	48
4	RELAÇÃO ENTRE GEODÉSICAS E PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO.....	57
4.1	O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO DE MAUPERTUIS	58
4.2	MÁXIMOS E MÍNIMOS NA OBRA DE EULER	64
4.3	A MECÂNICA DE LAGRANGE.....	71
4.4	POISSON E A RELAÇÃO ENTRE GEODÉSICAS E O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO	83
4.5	O PRINCÍPIO DE HAMILTON.....	87
4.6	A REFORMULAÇÃO DE JACOBI DO PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO	95
4.7	A MECÂNICA DE LIOUVILLE E A EQUAÇÃO DO ELIPSÓIDE.....	98
4.8	A INTERPRETAÇÃO DE THOMSON E TAIT	101
5	MECÂNICA DO ESPAÇO N -DIMENSIONAL	104
5.1	AS CONTRIBUIÇÕES DE LIPSCHITZ	104
5.2	ESTUDO DE DARBOUX	107
5.3	TRABALHO DE CHRISTOFFEL	110
5.4	AS TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA	111
5.5	RICCI E LEVI-CIVITA	113
6	CONCLUSÃO	117
7	BIBLIOGRAFIA.....	123
8	APÊNDICE.....	131

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Como é bem conhecido, a geometria diferencial não-euclidiana é o formalismo matemático básico utilizado na teoria da relatividade geral. No entanto, antes do desenvolvimento dessa teoria, já existiam várias tentativas de aplicar às ciências físicas alguns resultados da geometria não-euclidiana.

Até o início do século XIX, acreditava-se que a geometria apresentada nos *Elementos* de Euclides e desenvolvida pelos matemáticos posteriores era a única geometria possível. Acreditava-se também que essa geometria era *verdadeira*, no sentido de corresponder à realidade.

Embora não se colocasse em dúvida a validade dessa geometria, havia certa insatisfação com seus fundamentos, por causa do caráter não intuitivo do postulado das paralelas. Desde a Antigüidade, diversos autores (como Proclus) tentaram substituir o postulado das paralelas por outro mais intuitivo, ou demonstrá-lo a partir dos demais postulados, com a finalidade de tornar a geometria mais bem fundamentada.

Para espanto dos matemáticos, como resultado dessas tentativas de prova do postulado das paralelas foram criadas as primeiras geometrias não-euclidianas no século XIX, a partir do trabalho de Lobačevskiĭ, Bolyai e Gauss, seguido por desenvolvimentos importantes como a criação da geometria diferencial não-euclidiana e o estudo de espaços com mais de três dimensões. O desenvolvimento dessas geometrias levou gradualmente à compreensão de que a geometria euclidiana era apenas *uma* de várias geometrias possíveis (não contraditórias), e que todas elas eram igualmente válidas, nenhuma delas sendo mais *verdadeira* do que a outra.

O surgimento das geometrias não-euclidianas teve forte repercussão na física, por dois motivos. Primeiramente, porque até o início do século XIX muitos autores acreditavam que a mecânica newtoniana era uma teoria verdadeira *a priori* – como a geometria – e que seus princípios básicos podiam ser provados a partir de postulados ou axiomas intuitivos. Essa concepção caiu por terra, juntamente com a visão análoga a respeito da geometria. A alternativa mais simples, para os físicos, era a de que a mecânica seria um conhecimento empírico, mas parecia existir alguma diferença importante entre a mecânica (que era descrita, até o final do século XVIII, como uma área da matemática) e outras disciplinas como o estudo da eletricidade ou do calor (que eram aceitos como estudos empíricos). Aos poucos, começou a surgir a suspeita de que poderiam existir várias mecânicas diferentes.

Paralelamente, a existência de diferentes geometrias tinha uma consequência imediata na física, pois muitas teorias físicas utilizam a geometria (juntamente com pressupostos físicos) em suas deduções. Mesmo se os princípios básicos da física (incluindo os da mecânica) fossem mantidos, a existência de diferentes geometrias abria a possibilidade de teorias físicas alternativas, que levassem à novas consequências, pelo uso dessas geometrias alternativas.

Dentro da mecânica um princípio em particular foi assunto de controvérsias durante o século XIX e depois acabou sendo diretamente influenciado, e também influenciando, as diferentes geometrias que surgiram. O princípio da mínima ação teve origens metafísicas, com Leibniz e Maupertuis, mas com a introdução do cálculo variacional de Euler, foi formulado matematicamente e possibilitou a determinação das equações do movimento.

No entanto, a expressão encontrada por Euler, não estava diretamente associada à ação. Lagrange, por sua vez, definiu o que chamou de *princípio de mínima ação* e determinou as equações do movimento a partir da condição de extremo, onde a variação era nula. O modo como

Lagrange deduziu o princípio de mínima ação permitia encontrar as equações de movimento, muito semelhante ao que temos hoje, mas não fornecia diretamente a equação da trajetória.

A relação entre o princípio de mínima ação e a equação da trajetória apareceu no trabalho de Poisson. Ele encontra uma condição em que o princípio de mínima ação, na forma dada por Lagrange, poderia ser interpretado como a equação da geodésica. Porém, a forma que Poisson deu ao princípio não considerava as forças dependentes da posição, o que tornava seu resultado restrito.

Outra forma de obter as equações de movimento vem da relação que Hamilton faz entre a ótica e a mecânica. Mas a teoria de Hamilton também não permitia encontrar diretamente as equações da trajetória e não mencionava, explicitamente, uma relação com o princípio de mínima ação. A relação final, que geometrizou a mecânica, só apareceu com Jacobi, que reescreveu o princípio de mínima ação eliminando a variável tempo, e então encontrando diretamente informações sobre a trajetória de um corpo sujeito à ação de forças dependentes da posição. A geometrização que Jacobi faz da mecânica permite uma nova interpretação da mecânica newtoniana, pois nessa nova formulação é possível encontrar a equação da trajetória sem considerar conceitos como velocidade, aceleração, etc.

A partir de metade do século XIX, a geometria diferencial passou a ser a linguagem adotada na descrição das teorias do calor e da elasticidade, o que Lamé faz usando os parâmetros diferenciais. No mesmo período, surgiam soluções para problemas com n graus de liberdade na mecânica, que levaram à geometria diferencial n -dimensional.

A interpretação de Jacobi para o princípio de mínima ação dependia exclusivamente de uma forma quadrática, o que levou a relação entre esse princípio e a determinação da equação da geodésica. Após a publicação do trabalho de Riemann em 1867, a métrica passou a ser a principal característica do espaço, determinando suas propriedades. Isso fez com que o princípio de mínima ação tivesse outras interpretações num espaço n -dimensional.

Essa relação entre o princípio de mínima ação e a geometria não-euclidiana, ou seja, a determinação da geodésica num espaço n -dimensional qualquer, aparece claramente nos trabalhos de Darboux e Lipschitz, que tratam da mecânica n -dimensional. Porém o formalismo matemático que permitiu interpretar essa relação da forma que foi usada na teoria da relatividade foi o cálculo diferencial absoluto, que surgiu no final do século XIX.

Ainda que tenhamos nos restringido ao século XIX na parte principal do trabalho, foi muitas vezes necessário retornar a autores anteriores para que pudéssemos compreender a seqüência dos fatos. Principalmente quanto ao princípio de mínima ação, o trabalho ficaria incompleto se não voltássemos aos séculos XVII e XVIII para entender a definição dada por Leibniz e Euler, pois não encontramos literatura secundária que pudesse esclarecer as diferenças com relação ao princípio como o conhecemos hoje, ou mesmo a diferença entre o princípio de Lagrange e de Hamilton.

A inexistência de trabalhos que apontassem as diferenças nesse princípio e sua relação direta com a métrica do espaço, nos levou a questionamentos que tentamos responder ao longo do trabalho. Como se deu a geometrização da mecânica e como esse fato estava relacionado com um princípio de origem metafísica, como o de mínima ação? Como foi feita a interpretação desse princípio no caso n -dimensional? Quais as conseqüências, perante a comunidade científica, do surgimento de uma geometria diferente da euclidiana? Quando essa geometria passou a ser aplicada nas ciências físicas? Estas são algumas questões que conduziram o trabalho.

Como parte da metodologia de pesquisa adotada em um trabalho sobre história da ciência, a pesquisa teve como ponto de partida um texto secundário que mostrava uma idéia geral sobre o assunto principal da tese. A relação entre geodésicas e a geometria não-euclidiana já era bem conhecida da teoria da relatividade, mas não havia trabalhos que aprofundavam como se deu o início dessa relação, quais as hipóteses iniciais, etc.

Com relação à geometria não-euclidiana, partimos do livro do Bonola (1955) que apresenta aspectos gerais do desenvolvimento desta geometria desde o século XVI até as teorias de Lobačevskiĭ e Bolyai. Esse texto também forneceu as primeiras referências bibliográficas, tanto primárias quanto secundárias, diretamente relacionadas com o assunto. Também foi necessária a consulta aos principais tratados de geometria euclidiana utilizados durante o período pesquisado, bem como consulta à tradução da obra de Euclides.

Na parte referente à mecânica, iniciamos com o estudo de parte da obra do Dugas (1988), que mostrava as principais linhas de estudo da mecânica durante o século XIX e que forneceu a bibliografia inicial sobre o assunto.

Quanto ao principal ponto da tese, ou seja, a geometrização da mecânica n -dimensional partindo do princípio de mínima ação, encontramos trabalhos em que o assunto era apenas apresentado vagamente, porém sem discussões ou mesmo aprofundamento. O número de pesquisadores que se dedicaram ao estudo das consequências, para a física, de uma geometria não-euclidiana foi pequeno, e os estudos sobre possíveis mecânicas não-euclidianas não chegaram a se tornar uma linha de pesquisa popular, durante o século XIX.

Quando a teoria da relatividade geral foi formulada, na segunda década do século XIX, ela utilizou os trabalhos matemáticos sobre geometria diferencial e cálculo tensorial, mas não fez uso desses estudos sobre mecânicas não-euclidianas. Assim, esses desenvolvimentos anteriores foram gradualmente esquecidos e não foram ainda objeto de estudos históricos mais profundos.

Feita a pesquisa bibliográfica inicial, foi necessário buscarmos as fontes primárias, o que, devido ao período a que se referem, não são de fácil localização, fisicamente ou virtualmente. Outro ponto a ser destacado quanto à pesquisa bibliográfica é a variedade de idiomas em que os trabalhos foram encontrados. Foram encontrados, e lidos, trabalhos em italiano, francês, inglês, latim e alemão, sendo que muitas vezes as referências que esses trabalhos traziam não obedeciam a um padrão e eram incompletas, dificultando a pesquisa. Considerando a quase total ausência de estudos historiográficos sobre o assunto, o presente trabalho poderá constituir uma contribuição relevante sobre o tema.

Este trabalho é composto de seis Capítulos, incluindo essa Introdução. No Capítulo 2 discutimos a origem da geometria não-euclidiana, restrita a três dimensões. Mostramos as diferentes tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides, até a concepção de uma geometria imaginária por Lobačevskiĭ e Bolyai.

No Capítulo 3, discutimos a geometria diferencial, formulada para o estudo de superfícies. Detalhamos o trabalho de Gauss, o trabalho de Riemann em que são definidas as multiplicidades n -dimensionais e a interpretação das formas quadráticas e dos parâmetros diferenciais.

No Capítulo 4 mostramos como o princípio de mínima ação assumiu diferentes formas desde a definição de Leibniz até a formulação de Jacobi. Também mostramos como a definição do princípio de mínima ação usando uma forma quadrática permite relacioná-lo com a geodésica sobre uma superfície.

No Capítulo 5 mostramos como a relação entre as geodésicas e o princípio de mínima ação foi generalizada para o caso de n -dimensões, até a construção do cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita.

No Capítulo 6 expomos uma conclusão de cada capítulo relacionando-os com o objetivo geral da tese.

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANA

Atualmente é possível distinguir geometria euclidiana e não-euclidiana porque ambas são conhecidas e têm suas diferenças claras quando comparadas. Mas é evidente que, quando apenas a geometria de Euclides era conhecida, não havia por que caracterizá-la como “geometria euclidiana”, pois era a única. Desta forma, o nome “geometria não-euclidiana” só passou a ser popularizado quando se percebe a possibilidade de construção de geometrias diferentes da antiga e que violam o postulado de Euclides. A conscientização de que a nova geometria seria uma geometria não-euclidiana só aconteceu algum tempo depois das primeiras propostas. Só após essa conscientização é que faz sentido falar em geometria euclidiana e não-euclidiana¹.

A geometria não-euclidiana tem como origem os postulados de Euclides, ou seja, as bases da geometria euclidiana. Os *Elementos* de Euclides são a base para o desenvolvimento de uma geometria axiomática, fundamentada sobre definições e postulados que serviram, e servem, como referência para o estudo da geometria plana.

Porém, um dos postulados de Euclides, o quinto postulado, conhecido também como *postulado das paralelas*, despertou dúvidas que levaram a uma geometria que pode ser construída como a de Euclides, sem apresentar contradições, mas que leva a teoremas diferentes. Durante séculos, ou mais precisamente, desde a primeira tentativa de prova de que se tem conhecimento, feita por Geminus no século 1 a.C., vários estudiosos tentaram demonstrar o quinto postulado de Euclides, sem resultados, mas as diversas hipóteses acabaram servindo como ponto de partida para as geometrias de Lobačevskiĭ e Bolyai, estabelecidas no século XIX.

Entre esses 20 séculos, a geometria passou por períodos de pouco e grande interesse. Com a tradução do livro de Euclides para diferentes idiomas, o quinto postulado foi objeto de estudo entre os árabes e depois entre os europeus, que fizeram novas tentativas de demonstração.

A tentativa de demonstração por absurdo de Saccheri, em 1733, pode ser considerada a primeira a mostrar a possibilidade de construir uma nova geometria coerente e diferente daquela postulada por Euclides, embora o próprio Saccheri não tenha visto isso.

A introdução de uma nova geometria só veio mesmo a acontecer com os trabalhos de Lobačevskiĭ (1829) e Bolyai (1832). Ainda assim, essas descobertas não foram suficientes durante uma geração para convencer que uma geometria diferente da de Euclides seria possível. Somente nos anos 60 a comunidade matemática começou a aceitar a nova geometria (GRAY, 1987, p.37).

Há um outro desenvolvimento na geometria que ocorre paralelamente ao surgimento desses trabalhos, que estuda superfícies curvas, e que não está tentando alterar a geometria euclidiana. Dentro dessa linha de pesquisa, o trabalho de Gauss de geometria diferencial em 1827 mostra a possibilidade de analisar superfícies usando propriedades intrínsecas. A conexão entre o trabalho de Gauss e a existência de uma nova geometria só pôde ser percebida após o trabalho de Riemann, em 1854 (publicado apenas em 1867), mas a relação entre essa nova geometria e o quinto postulado demorou a acontecer, pois a geometria diferencial apresentava uma outra forma de estudar o espaço.

Os trabalhos de Lobačevskiĭ e Bolyai são contemporâneos ao trabalho de Gauss sobre superfícies curvas e são complementares. Enquanto os primeiros desenvolviam de modo axiomático uma nova geometria, Gauss explorava a geometria euclidiana e a trigonometria

¹ O primeiro a empregar o termo “geometria não-euclidiana” foi Taurinos em 1825, com a criação da geometria logarítmica-esférica, mas não obteve muita atenção (BONOLA, p. 81, 1955).

esférica para descrever superfícies com um formalismo que dependia apenas das propriedades intrínsecas destas. Com o trabalho de Riemann, a métrica e a curvatura do espaço passaram a ser a principal maneira de descrever o espaço n -dimensional, e a geometria de Euclides era o limite para o caso tridimensional.

Considerando-se essas diferentes abordagens, pode-se ter dois tipos de geometrias não-euclidianas: as que estão limitadas ao espaço tridimensional, porém com propriedades não-euclidianas, como é o caso de Lobačevskiĭ e Bolyai; e aquelas que abordam um espaço com dimensão maior que três.

Neste capítulo, abordaremos desde o início dos questionamentos sobre o postulado das paralelas, até a geometria desenvolvida por Lobačevskiĭ e Bolyai, limitando-nos ao primeiro tipo de geometria não-euclidiana. Não discutiremos em detalhes as provas matemáticas de cada demonstração, pois não faz parte do objetivo desse trabalho e podem ser encontradas no trabalho de Bonola e Gray (BONOLA, 1955; GRAY, 1989).

2.1 QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

Os Elementos de Euclides são formados por 13 livros, na versão que conhecemos, que contêm as bases da geometria e da aritmética. Tanto a história dos livros, como a do próprio Euclides (~325a.C.-~265 a.C.) é cheia de contradições e especulações que surgiram das muitas traduções que eles tiveram no decorrer dos séculos². Nesse trabalho vamos nos dedicar apenas ao livro I, com os comentários feitos por Proclus (410-485).

Nessa versão, o livro I possui 23 definições, 5 postulados, 5 noções comuns (axiomas) e 48 proposições (teoremas). As definições e os axiomas não têm demonstração, sendo que as noções comuns são princípios gerais não geométricos. Assim como os axiomas, os postulados não possuem demonstração e devem ser admitidos. As proposições, ou teoremas, são provadas a partir das definições, postulados, noções comuns e teoremas anteriores, através do método dedutivo.

No início do livro 1, Euclides fornece algumas definições, das quais vamos destacar três de maior interesse para o trabalho, que são assumidas como verdadeiras e que definem conceitos que farão parte dos postulados. Ele define linha reta e paralelas como segue (EUCLIDES, vol. 1, 1956, pp. 153-154):

2. Uma linha é um comprimento sem largura.
4. Uma linha reta é uma linha que tem os pontos sobre ela colocados regularmente.
23. Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambas direções, não se encontram em qualquer direção.

Os postulados determinam o modo e possibilidade de construção, ou seja, o que é possível construir a partir das definições iniciais. Os postulados nessa versão do livro I são (EUCLIDES, vol. 1, 1956, p. 155):

1. [É possível] traçar uma linha entre dois pontos quaisquer.
2. [É possível] prolongar uma reta finita continuamente em uma reta.
3. [É possível] traçar-se uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

² Os capítulos de I a VIII da tradução de Thomas Heath (EUCLIDES, vol. 1, 1956) são dedicados à história dos livros de Euclides e às suas traduções.

5. Se uma linha reta que corta duas outras linhas retas forma ângulos interiores do mesmo lado cuja soma é menor que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontrarão no lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.

Ou seja, sejam r e s retas coplanares, cortadas por uma terceira reta t . Se a soma dos ângulos interiores α e β , do mesmo lado, for inferior a 180° , então as duas retas r e s irão se encontrar quando prolongadas para esse lado (veja a figura 2.1).

Em algumas apresentações do trabalho de Euclides, o modo de colocar os postulados e axiomas é diferente, e aquilo que se costuma chamar de quinto postulado aparece como Axioma XI³.

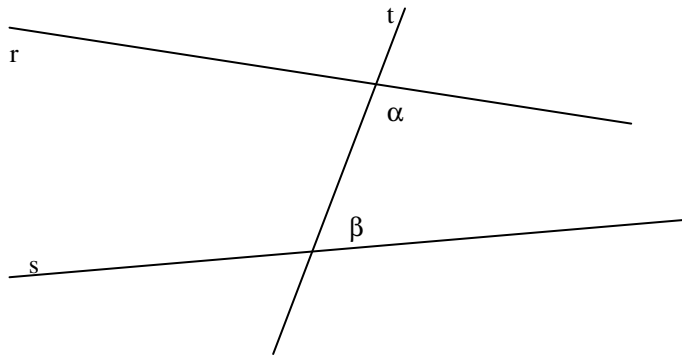


Figura 2.1: Segundo o quinto postulado, as retas r e s se encontram do lado em que os ângulos interiores α e β somam menos que 180°

A partir das definições e dos quatro primeiros postulados, Euclides demonstra as primeiras 28 proposições e começa utilizar o quinto postulado a partir da proposição 29. Há várias proposições importantes que só podem ser demonstradas utilizando o quinto postulado, como (EUCLIDES, vol. 1, 1956, pp. 311-322)⁴:

Proposição 29: Uma linha reta cortando duas linhas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo exterior igual ao ângulo interno oposto, e os ângulos internos de um mesmo lado iguais a dois ângulos retos.

Proposição 30: Linhas retas paralelas a uma mesma linha reta são paralelas entre si.

Proposição 31: Através de um dado ponto passa uma linha reta paralela a uma dada linha reta.

Proposição 32: Em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo externo é igual aos dois ângulos internos e opostos, e os três ângulos internos do triângulo são iguais a dois ângulos retos.

Proposição 33: Linhas retas unindo linhas retas iguais e paralelas (nas suas extremidades) nas mesmas direções (respectivamente) são também iguais e paralelas.

O quinto postulado é usado também para estabelecer as propriedades de figuras semelhantes (BONOLA, 1955, p. 2).

³ Em 1795, John Playfair propôs o seguinte axioma: dada uma linha e um ponto fora dela, uma e somente uma paralela à linha dada passa por esse ponto. O axioma de Playfair é interpretado como uma nova forma do quinto postulado que, nesse formato passou a ser chamado de axioma XI.

⁴ As proposições 29 e 32 consideram, implicitamente, a soma dos ângulos internos.

Embora as pessoas não duvidassem de que a geometria apresentada nos *Elementos* fosse correta, eles consideravam que o quinto postulado não era intuitivo e era muito mais complicado que os demais. Surgiram então tentativas de demonstração do quinto postulado, de forma que ele passaria a ser uma proposição, ou deveria ser substituído por outro postulado mais simples.

Para se tentar demonstrar o quinto postulado, outras definições foram dadas para “linhas paralelas” durante a Antiguidade. A definição dada por Posidonius de Rhodes (135-51 a.C.), como cita Proclus em seus comentários, é baseada na distância entre as linhas e as perpendiculares que podem ser traçadas:

Linhas paralelas são aquelas que, estando num plano, não convergem nem divergem, mas têm todas as perpendiculares que são traçadas de um ponto de uma das linhas para a outra, iguais. (EUCLIDES, vol. 1, 1956, p. 190)

Porém não é possível afirmar que, se duas linhas retas, supostas paralelas, são cortadas por uma terceira, fazendo um ângulo reto com uma das linhas paralelas, necessariamente faz um ângulo reto com a outra paralela. Essa afirmação só é possível se considerarmos o quinto postulado. Desta forma, essa definição de paralelas supunha como verdadeiro o quinto postulado, o que gerava uma contradição. Geminus (século 1 a.C.) usou a definição de paralelas de Posidonius para tentar demonstrar o quinto postulado, mas terminou por usar a proposição, o que invalidou sua demonstração, assim como também ocorreu com Claudius Ptolomeu (século 2 d.C) (EUCLIDES, vol 1, p. 297).

O quinto postulado foi objeto de estudo durante muitos séculos, em períodos distintos da história. Desde a tentativa de Ptolomeu até John Wallis (1616-1703), os *Elementos* de Euclides foram conhecidos por vários povos e o quinto postulado foi objeto de tentativas de demonstrações que utilizaram a teoria da equidistância, da semelhança de figuras, etc.⁵, que de modo geral apenas determinavam uma outra forma de enunciá-lo (BONOLA, 1955, pp. 1-21).

2.2 AS PRIMEIRAS TENTATIVAS E OS TRABALHOS ÁRABES

Durante a Idade Média, nos séculos IX e X, o postulado foi mais estudado pelos árabes do que na Europa. Com as traduções dos livros de Euclides entre os árabes, alguns trabalhos tentavam demonstrar o quinto postulado.

Entre os árabes, destacam-se os trabalhos de Al-Gauhari, Thabit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, Omar Khayyam e Nasir Eddin al-Tusi⁶. Vamos nos restringir ao segundo e ao último desses autores citados e que apresentam hipóteses mais interessantes nas tentativas de demonstração do postulado.

No seu segundo tratado sobre a geometria de Euclides, Thabit ibn Qurra (836-910), estabeleceu inicialmente que um segmento de linha poderia se mover sem ter seu comprimento alterado, pois considerava que a ausência de deformação das figuras geométricas quando há movimento, não era óbvia (GRAY, 1989, p. 43).

A introdução do movimento para a medição da magnitude era uma idéia que havia sido contestada por Aristóteles⁷ e Ibn Qurra argumentou que o próprio Euclides o havia utilizado ao

⁵ A tradução de Heath (EUCLIDES, vol. 1, 1956) também apresenta várias demonstrações, com suas conseqüências e contradições.

⁶ Jeremy Gray (1989, pp. 41-54) e Rosenfeld (1988, pp. 42-89) fazem uma descrição detalhada dos trabalhos de cada um desses autores.

⁷ A relação entre geometria e movimento voltará a ser discutida com Poincaré e seu modelo de geometria não-euclidiana, como veremos no próximo capítulo.

demonstrar a proposição 4⁸ do livro 1 (ROSENFELD, 1988, p. 52). Na demonstração da proposição 4, Euclides considera que um dos triângulos pode ser movido e colocado sobre o segundo para fazer sua análise. Ibn Qurra introduz uma figura que será muito utilizada nas tentativas de demonstração do quinto postulado: um quadrilátero com dois lados iguais e opostos fazendo o mesmo ângulo com a base, como na figura 2.2, onde os lados DA e CB são iguais, e os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ são iguais⁹.

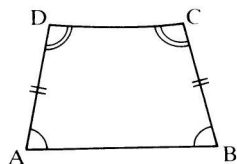


Figura 2.2: Ibn Qurra considerou um quadrilátero com ângulos iguais na base e lados AD e BC iguais.

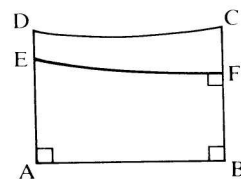


Figura 2.3: Os ângulos da base são retos e EF é igual a AB .

Segundo essa hipótese, em um quadrilátero no qual os ângulos da base são ângulos retos, como na figura 2.3, e considerando EF igual a AB , pois essa linha seria o deslocamento da base e portanto manteria o comprimento, então o quarto ângulo, $A\hat{E}F$, também seria reto. Usando essa hipótese, Ibn Qurra tentou provar o quinto postulado usando a figura 2.4.

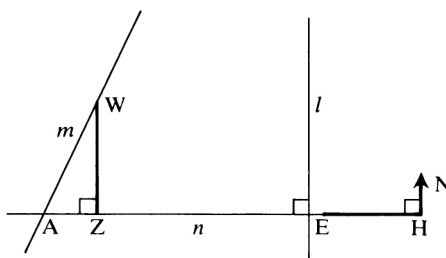


Figura 2.4: Construção de Ibn Qurra para tentar demonstrar o quinto postulado.

Na figura, as linhas l e m cortam uma terceira linha n , sendo que l e n são perpendiculares (hipótese). Então ele tomou um ponto W sobre m e traçou a perpendicular WZ até n . Se AZ é menor que AE , então algum múltiplo dele, AH excede AE , e pode formar o triângulo retângulo AHN , onde N está sobre m . Segundo a hipótese do quadrilátero, NH não encontra l , pois se encontrasse, não formaria o quadrilátero que ele introduziu inicialmente (figura 2.2). Então l deve encontrar m e o quinto postulado está provado, ou seja, as linhas l e m se encontram do lado em que a soma dos ângulos (os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$) somam menos que dois ângulos retos.

No entanto, em sua demonstração Ibn Qurra teve que assumir uma das proposições que utilizavam o quinto postulado na demonstração¹⁰, o que invalidou sua demonstração (GRAY, 1989, p. 44).

Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274) também utilizou o quadrilátero com pelo menos dois ângulos retos e um raciocínio semelhante ao de Ibn Qurra para fazer sua demonstração do quinto postulado (ROSENFELD, 1988, pp. 74-85). Porém, ele falhou ao supor que linhas que pareciam

⁸ Proposição 4: Se dois triângulos têm dois lados iguais, respectivamente, e têm ângulos iguais entre linhas retas iguais, eles também terão as bases iguais, o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes respectivamente, isto é aqueles que subentendem lados iguais (EUCLIDES, vol. 1, 1956, p.247).

⁹ As figuras foram retiradas do livro do Gray (1989, p. 43)

¹⁰ A proposição considerada é a 33, sobre linhas que unem paralelas.

convergir de um lado efetivamente iriam se encontrar. Sua demonstração foi a que causou maior interesse na Europa, quando publicada em Roma em 1594 (GRAY, 1989, p. 51) e é a única que aparece na maioria dos livros sobre o postulado, como Bonola (1955).

Outros matemáticos fizeram diferentes hipóteses nas tentativas de demonstração, mas sem sucesso, e as críticas ao quinto postulado apareceram com mais frequência nas traduções do livro durante o século XVI (ROSENFELD, 1988, pp. 92-107).

2.3 TRIÂNGULO DE SACCHERI

Entre as tentativas de demonstrações, a que mais se aproximou de uma solução para o quinto postulado foi a de Gerolamo Saccheri (1667-1733), ainda que o autor não tenha observado que, a partir de seus resultados, poderia ser construída uma nova geometria sem contradições.

Ele dedicou grande parte do seu trabalho de 1733 a provar o quinto postulado por redução ao absurdo. Na prova por absurdo ele assume a hipótese de que a proposição a ser provada é falsa, chegando à conclusão, por contradição, de que é verdadeira. Ele assumiu todas as primeiras 28 proposições de Euclides como válidas e a hipótese de que o quinto postulado fosse falso, e procurou chegar a uma proposição que entrasse em contradição com as demais.

Ele partiu de um quadrilátero $ABCD$ com dois ângulos retos em A e B , e dois lados iguais AD e BC (figura 2.5), e provou o seguinte Lema:

Se um quadrilátero $ABCD$ tem os ângulos consecutivos A e B retos, e os lados AD e BC iguais, então o ângulo C é igual ao ângulo D ; mas se os lados AD e BC são desiguais, dos dois ângulos C, D , é maior o que é adjacente ao menor lado, e vice-versa. (BONOLA, 1955, p.23).

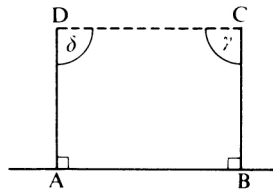


Figura 2.5: Quadrilátero de Saccheri, com ângulos retos em A e B e lados AD e BC iguais.

Na hipótese de Euclides, os outros dois ângulos, C e D , também serão retos, e para provar essa igualdade é necessário usar o quinto postulado. Assumindo como hipótese inicial que ambos são obtusos ou agudos, o quinto postulado está sendo negado.

Saccheri assume então três hipóteses:

- 1ª - hipótese do ângulo reto [$\sphericalangle C = \sphericalangle D = \text{ângulo reto}$], então $AB = CD$
- 2ª - hipótese do ângulo obtuso [$\sphericalangle C = \sphericalangle D > \text{ângulo reto}$], então $AB > CD$
- 3ª - hipótese do ângulo agudo [$\sphericalangle C = \sphericalangle D < \text{ângulo reto}$], então $AB < CD$

As hipóteses 2 e 3 também levariam a uma conclusão sobre a soma dos ângulos de um triângulo diferente da euclidiana:

Conforme as hipóteses do ângulo reto, a hipótese do ângulo obtuso, ou a hipótese do ângulo agudo, sejam consideradas verdadeiras, a soma dos ângulos de um triângulo será

respectivamente igual, maior que, ou menor que dois ângulos retos (SACCHERI, *apud* BONOLA, 1955, p. 28)

Antes de demonstrar a veracidade ou não das hipóteses, Saccheri demonstrou que, se cada uma das hipóteses fosse válida para um quadrilátero, então ela seria válida para todos os outros quadriláteros. Isso também valeria para a soma dos ângulos de um triângulo, que sendo menor ou maior que dois ângulos retos para um triângulo, também seria para todos os outros, já que um quadrilátero sempre pode ser dividido em triângulos.

Para provar que a segunda hipótese (ângulo obtuso) leva a uma contradição, Saccheri considerou um triângulo retângulo (figura 2.6) onde M é o ponto médio de AC e MN é uma perpendicular de M até AB .

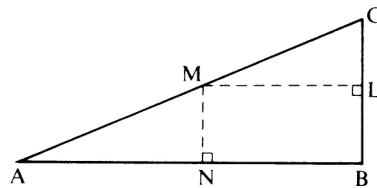


Figura 2.6: Triângulo retângulo usado por Saccheri na demonstração da hipótese do ângulo obtuso. Considerando a hipótese como verdadeira, $NB > NA$.

Se vale a hipótese do ângulo obtuso no quadrilátero $NBCM$, então a soma dos ângulos $\hat{M}\hat{C}B + \hat{C}\hat{B}N + \hat{B}\hat{N}M + \hat{N}\hat{M}C > 360^\circ$ então os ângulos $\hat{M}\hat{C}B + \hat{N}\hat{M}C > 180^\circ$, já que ABC é um triângulo retângulo em B . Mas $\hat{A}\hat{M}N + \hat{N}\hat{M}C = 180^\circ$ pois são ângulos suplementares; e então $\hat{M}\hat{C}B > \hat{A}\hat{M}N$. Traçando a perpendicular ML , de M até BC , temos os triângulos AMN e MCL com hipotenusas iguais. A soma anterior leva a concluir que $ML > AN$, pois oposto ao maior ângulo, está o maior lado. No quadrilátero $LBNM$, o ângulo $\hat{N}\hat{M}L > 90^\circ$ e então $NB > ML$ e $NB > AN$, se vale a hipótese do ângulo obtuso.

Então, se considerarmos intervalos iguais ao longo da linha AC , suas projeções verticais levarão a intervalos crescentes na linha horizontal AB . Esse resultado leva Saccheri a concluir que a hipótese do ângulo obtuso leva a uma contradição e, portanto sua negação, ou seja, o quinto postulado, seria válido.

A hipótese do ângulo obtuso é completamente falsa porque ela destrói a si mesma. (SACCHERI, *apud* ROSENFELD, 1988, p.98).

Saccheri usou o mesmo raciocínio para provar a não validade da terceira hipótese (hipótese do ângulo agudo), mas não conseguiu chegar a uma conclusão. Se a terceira hipótese fosse válida, teríamos o seguinte (GRAY, 1987, p. 41):

Dada uma linha l e um ponto P fora de l (Figura 2.7), as linhas que passam por P estão divididas em três famílias:

- uma família infinita de linhas que se encontram com l ;
- uma família infinita de linhas que nunca se encontram com l ;
- duas linhas que são assintóticas a l e que separam as duas primeiras famílias.

Apesar dessas condições parecerem absurdas do nosso ponto de vista euclidiano, elas são impossíveis de se negar logicamente. Consciente disso, Saccheri usou como argumento para negar a hipótese do ângulo agudo que ela seria “*contrária à natureza da linha reta...*” (SACCHERI, *apud* BONOLA, 1955, p. 43).

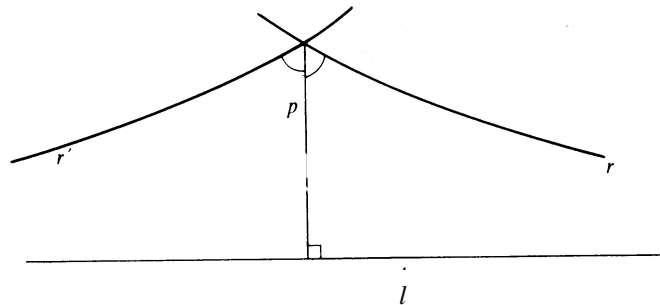


Figura 2.7: Se a hipótese do ângulo agudo fosse válida, partindo do ponto P seria possível traçar uma infinidade de linhas que nunca se encontram com l e uma infinidade de linhas que sempre se encontram com l .

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) considerou hipóteses parecidas com as de Saccheri, variando o quarto ângulo de um quadrilátero com três ângulos retos. Ele também rejeita a hipótese do ângulo obtuso mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares a uma mesma linha deveriam se encontrar. Se a hipótese do ângulo obtuso fosse válida, então as propriedades das figuras seriam como aquelas quando as figuras são traçadas sobre uma esfera, e nesse caso as linhas retas seriam como os círculos máximos. Porém, como os círculos máximos se encontram em mais de um ponto, não possuem as propriedades das linhas retas, o que permite refutar a hipótese do ângulo obtuso (ROSENFELD, 1988, p. 100).

Lambert obtém que sendo válidas as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo, o defeito¹¹ na soma dos ângulos de um triângulo seria proporcional à área deste triângulo.

No caso do quadrilátero com o terceiro ângulo agudo (terceira hipótese), Lambert concluiu que quanto mais agudo fosse o ângulo, maior seria o quadrilátero. A hipótese do ângulo agudo impunha que a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser inferior a dois ângulos retos.

Voltamos a terceira hipótese. Como vimos, sob esta hipótese a soma dos três ângulos de um triângulo é menor que 180 graus, ou dois ângulos retos. Mas a diferença até 180 graus aumenta com a área do triângulo; isto pode ser expressado assim: se um dos dois triângulos tem uma área maior que o outro então o primeiro tem uma soma dos ângulos menor que o segundo... (LAMBERT, *apud* ROSENFELD, 1988, p. 101)

Para a hipótese do ângulo agudo, Lambert concluiu que, se comparada à hipótese do ângulo obtuso, poderia ocorrer no caso de uma “esfera imaginária”.

Eu acho extraordinário que a segunda hipótese vale se ao invés de um triângulo plano consideramos um triângulo esférico, para o qual a soma dos ângulos é maior que 180 graus e o excesso também é proporcional à área do triângulo.

O que me ocorre que ainda mais extraordinário é que o que eu disse aqui sobre triângulos esféricos pode ser provado independentemente das dificuldades impostas pelas linhas

¹¹ O defeito de um triângulo corresponde ao excesso sobre 180° ou ao déficit sobre 180° na soma de seus ângulos na trigonometria esférica.

paralelas e assumindo somente o axioma que todo plano através do centro de uma esfera a divide em duas partes iguais.

Disto eu quase deveria concluir que a terceira hipótese vale sobre alguma esfera imaginária. (LAMBERT, *apud* ROSENFELD, 1988, p. 101).

Considere um triângulo com ângulos α, β, γ sobre uma esfera de raio r . A área desse triângulo é dada por $S=r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. Se consideramos a esfera com raio imaginário, tal que $r=i$, então a área é dada por $S'=i^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, que coincide com a fórmula encontrada por Lambert para a soma dos ângulos de triângulo no caso da terceira hipótese, e o que o levou a considerar a hipótese da esfera de raio imaginário (INGLIS, 2003, p. 24).

Na obra publicada após sua morte (*Teoria das paralelas*), Lambert também discutiu sobre “medidas absolutas” para ângulos e comprimentos associando-os à idéia anterior entre o defeito na soma dos ângulos do triângulo e a área deste (GRAY, 1989, pp. 72-74).

Um dos mais importantes trabalhos sobre geometria do final do século XVIII, *Éléments de géométrie* (1794), de Adrien-Marie Legendre (1752-1833) fazia parte de um movimento que pretendia revitalizar a obra de Euclides. A obra trata a geometria do ponto de vista cartesiano e assume o quinto postulado como um teorema, demonstrando-o através da hipótese de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Porém essa hipótese é um dos teoremas demonstrados a partir do quinto postulado, o que invalida sua demonstração.

Durante o século XVIII, vários geômetras tentaram de diferentes maneiras, demonstrar o quinto postulado e também outras perspectivas surgiram para a geometria, que deixou de ocupar um lugar de destaque, sendo substituída pela análise (GRAY, 1989, p. 86).

2.4 TAURINUS, UM DESCONHECIDO

Carl (ou Karl) Friedrich Gauss (1777-1855) foi um brilhante matemático, que deu contribuições nas áreas de teoria de números, teoria de funções, probabilidade, geometria, etc. Por alguns historiadores, é considerado um dos fundadores da geometria não-euclidiana, pois a partir de várias de suas cartas pode-se inferir que realizava pesquisas nessa área. No entanto, apesar de ter escrito na carta¹² a Wolfgang Bolyai que “*pensava no assunto há 40 anos*”, Gauss não publicou nenhum trabalho em que discutia a possibilidade da existência de uma geometria diferente da euclidiana (GRAY, 1989, pp. 86-87).

Durante o século XVIII, a geometria tinha como base dois caminhos diferentes: a trigonometria esférica, que era utilizada nos estudos astronômicos; e uma geometria, no plano, que se baseava nos argumentos de Euclides. Foi baseado na trigonometria esférica, que Lambert propôs que a hipótese do ângulo agudo poderia ser associada a uma esfera de raio imaginário. Já eram conhecidas as funções seno e cosseno no formato dado por Euler¹³, e com isso Lambert associou as propriedades de uma esfera de raio imaginário ao seno e cosseno hiperbólico (GRAY, 1987, p. 46).

No mesmo período em que Gauss pesquisava o postulado das paralelas, mas independentemente deste, Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) publicava um trabalho sobre esse mesmo assunto usando trigonometria esférica. Em 1807 ele publicou *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie*, no qual desenvolveu o quinto postulado baseado na idéia do paralelogramo, sem conseguir prová-lo (ROSENFELD, 1988, p. 218). Mas, em uma carta escrita para Gauss em 1818, descreveu uma geometria que não seria baseada nas hipóteses de Euclides, à qual deu o nome de *geometria astral*.

¹² Trata-se da carta em que Gauss comenta o artigo de Janos Bolyai, *Teoria absoluta do espaço*, escrita em 1829.

¹³ Euler havia publicado em 1748 as expressões $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ e $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

A geometria astral é construída partindo-se da propriedade de que a soma dos três ângulos de um triângulo não é igual a dois ângulos retos, ou seja, pode ser associada à hipótese do ângulo agudo:

Isto sendo assumido, podemos provar rigorosamente que:

- a) a soma dos três ângulos de um triângulo é menor que dois ângulos retos;
- b) a soma se torna menor quanto maior for a área do triângulo;
- c) que a altitude de um triângulo retângulo isósceles aumenta continuamente, assim como aumentam os lados, mas ela não pode nunca se tornar maior que um certo comprimento, o qual chamo a *Constante*. (SCHWEIKART, *apud* BONOLA, 1955, p. 76)

A geometria de Euclides valeria no caso em que essa Constante é infinita. Schweikart é claramente influenciado por Saccheri e Lambert, uma vez que a geometria astral possui as características da hipótese do ângulo agudo do primeiro e da relação entre área e valor do ângulo do segundo (BONOLA, 1955, p. 77). Isso também justifica que ele tenha partido diretamente da hipótese do ângulo agudo, sem considerar a hipótese do ângulo obtuso, já que Saccheri e Lambert já haviam rejeitado esta hipótese.

Num triângulo de Schweikart (figura 2.8), em que os três pares de lados são assintóticos entre si, a área é dada por $\frac{\pi C^2}{\{\log(1 + \sqrt{2})\}^2}$, onde C é a Constante da geometria astral.

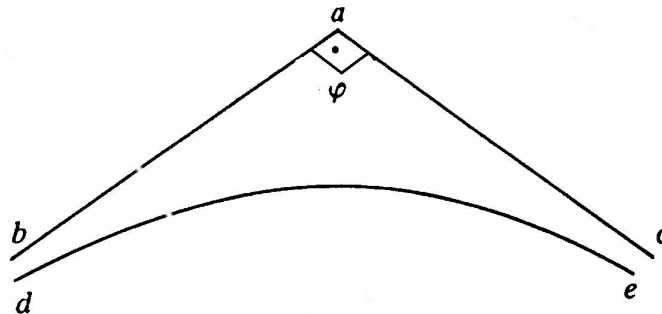


Figura 2.8: Triângulo de Schweikart, onde ab e ac são assintóticos ao lado de .

Apesar de ter recebido uma resposta positiva sobre sua teoria da parte de Gauss, Schweikart não continuou seu trabalho sobre o assunto, convencendo seu sobrinho, Franz Adolf Taurinus (1794-1874), que era matemático, a fazer investigações sobre a geometria astral.

Assumindo uma posição diferente de seu tio, Taurinus publicou dois trabalhos em que desenvolveu a geometria astral¹⁴: *Theorie der Parallelinien* (1825) e *Geometriae Prima Elementa* (1826), tendo sempre o quinto postulado como uma verdade absoluta. No primeiro deles, Taurinus rejeitou a hipótese do ângulo obtuso, influenciado pelos trabalhos de Saccheri e Lambert, e rejeitou a hipótese do ângulo agudo, pois a validade desta levaria à existência de infinitos parâmetros (o parâmetro de Taurinus corresponde à Constante de Schweikart). A existência de infinitos parâmetros de Taurinus levaria à inexistência de uma medida absoluta de comprimento, o que contrariava sua concepção de espaço (BONOLA, 1955, p. 78).

Porém, em seu segundo trabalho, Taurinus não assume mais o quinto postulado como verdadeiro e desenvolveu a hipótese do ângulo agudo, concluindo que ela seria equivalente a uma trigonometria esférica em que o raio é um número imaginário. Ele atribuiu o nome de *geometria*

¹⁴ Os trabalhos de Taurinus podem ser encontrados em alemão na obra de Engel (1895).

logarítmica-esférica à sua teoria e determinou suas propriedades substituindo o raio na trigonometria esférica (k) por um número imaginário (ik). Considerando a fórmula fundamental da trigonometria esférica, descrita pela figura 2.9, dada por

$$\cos \frac{\alpha}{k} = \cos \frac{\beta}{k} \cos \frac{\gamma}{k} + \sin \frac{\beta}{k} \sin \frac{\gamma}{k} \cos A,$$

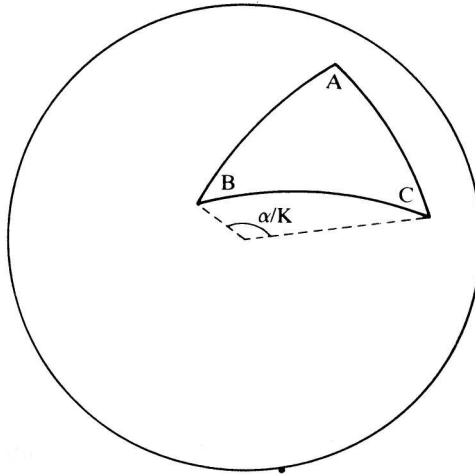


Figura 2.9: Representação do triângulo esférico sobre uma esfera de raio k .

onde β é o ângulo em B, γ é o ângulo em C e α é o ângulo sólido. Substituindo o raio k por um raio imaginário ik , podemos rescrevê-la usando funções hiperbólicas, como

$$\cosh \frac{\alpha}{k} = \cosh \frac{\beta}{k} \cosh \frac{\gamma}{k} + \sinh \frac{\beta}{k} \sinh \frac{\gamma}{k} \cos A. \quad (2.1)$$

No limite quando $k \rightarrow \infty$, (usando a forma exponencial das funções hiperbólicas) esta equação fica: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$, que é a fórmula fundamental da trigonometria euclidiana plana (lei dos cossenos)¹⁵.

Usando outra fórmula da trigonometria esférica que envolve os ângulos de um triângulo, dada por

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \frac{\alpha}{k},$$

e substituindo pelo raio imaginário, usando funções hiperbólicas, fica

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cosh \frac{\alpha}{k}. \quad (2.2)$$

¹⁵ A demonstração pode ser encontrada no livro do Gray (1989, pp. 102-103).

No caso especial quando $\hat{A} = 0$ e $\hat{C} = 90^\circ$, temos

$$\cosh \frac{\alpha}{k} = \frac{1}{\sin \hat{B}}. \quad (2.3)$$

A Eq. 2.3 descreve o triângulo em que um ângulo é igual a zero e os dois lados que contêm esse ângulo seriam infinitos e paralelos (assintóticos), dado pela figura 2.10, onde os lados AC e AB são paralelos, considerando que duas paralelas não são retas euclidianas.

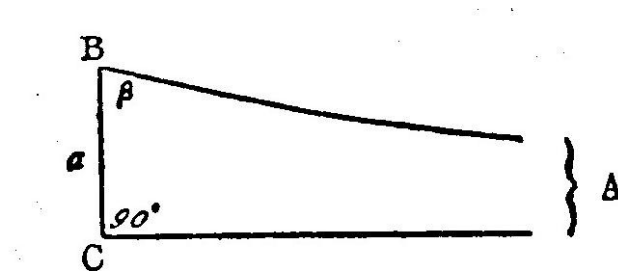


Figura 2.10: Triângulo de Taurinus, onde os lados AB e AC são infinitos e assintóticos.

Outra propriedade que pode ser obtida da trigonometria esférica considerando o raio imaginário, é a relação entre a área de um triângulo e seu defeito, como previsto por Lambert (BONOLA, 1955, p. 81). Ainda que tenha obtido uma resposta para o problema da soma dos ângulos do triângulo, a Eq. 2.1 assume uma esfera de raio imaginário que não possui significado geometricamente, e responde apenas à hipótese do ângulo agudo. No caso da hipótese do ângulo obtuso, a geometria esférica não tem um raio imaginário, mas deveria ter definições diferentes das que Euclides utiliza na geometria plana. A obra de Taurinus pode ser considerada como a primeira a tratar de uma geometria não-euclidiana (HOUZEL, 1992, p. 7).

2.5 BOLYAI E LOBAČEVSKIĬ

Durante o período em que Gauss publicava seu trabalho sobre geometria diferencial, dois matemáticos desenvolviam, independentemente um do outro, suas teorias envolvendo o postulado das paralelas, seguindo o modelo axiomático de Euclides: Janos Bolyai e Nikolai Lobačevskiĭ.

Janos (ou Johann) Bolyai (1802-1860), húngaro, era filho de Wolfgang (ou Farkas) Bolyai (1775-1856), amigo de Gauss. Wolfgang havia tentado provar o quinto postulado em dois trabalhos, mas o que fez foi encontrar formas semelhantes do mesmo (BONOLA, 1955, p.60).

A demonstração de Wolfgang chamou a atenção de seu filho, Janos, que construiu o que chamou de *Teoria Absoluta do Espaço*. Inicialmente, Janos pretendia seguir o mesmo caminho que Saccheri e Lambert, mas, devido aos erros de seu pai, acabou por seguir o método axiomático dos gregos, sem decidir, *a priori*, sobre a validade ou não do quinto postulado. Com a colaboração de Szász, seu amigo na *Escola Real de Engenharia*, Janos teve as primeiras idéias com relação ao paralelismo (BONOLA, 1955, p. 97). Tanto Janos como Lobačevskiĭ começaram

suas teorias a partir da idéia de que *mais de uma paralela a uma dada linha reta poderia passar pelo mesmo ponto*, o que contraria uma das conseqüências do quinto postulado de Euclides.

Em um manuscrito enviado a seu pai em 1823, Janos escreveu que estava prestes a terminar um trabalho sobre a teoria das paralelas em que havia feito grandes descobertas.

Em 1829, Janos enviou o trabalho final para seu pai, que o publicou como apêndice de seu livro em 1832 (*Tentamen*). No trabalho¹⁶, Janos fornece uma nova definição para paralela, que depende do “ângulo de paralelismo”:

Se o raio AM não é cortado pelo raio BN, situado no mesmo plano, mas é cortado por qualquer outro raio BP compreendido no ângulo ABN, chamaremos o raio BN *paralelo* ao raio AM; isto é designado por $BN \parallel AM$.” (BOLYAI, [1832] 1955, p. 5)

Se observarmos a figura 2.11, veremos que a definição de paralelas usada por Janos Bolyai não implica equidistância entre os raios paralelos, e portanto podemos imaginar o raio BN como sendo assintótico a AM, sem deixar de ser paralelo.

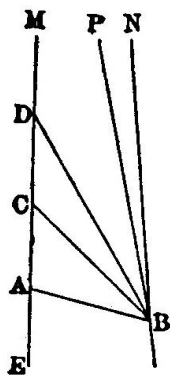


Figura 2.11: Segundo a definição de Bolyai, o raio BN é paralelo ao raio AM.

Baseando-se nas propriedades das paralelas como definidas por ele, Bolyai provou uma série de teoremas para a “nova” geometria, todos independentes do quinto postulado. Um deles é o que se refere aos lados de um triângulo:

Em qualquer triângulo esférico, os senos dos lados são como os senos dos ângulos opostos (BOLYAI, [1832] 1955, p. 21).

Alguns dos resultados mais importantes encontrados por Bolyai na construção da *Teoria absoluta do espaço* foram a definição de paralelas e de suas propriedades independentemente do postulado de Euclides, e a dedução de uma geometria independente do quinto postulado, onde aparece um parâmetro i , que ele chama de *unidade absoluta de comprimento*. Quando i tende a infinito, a geometria se aproxima da euclidiana.

Ainda que não tenha partido da mesma hipótese inicial de Taurinus, ou seja, a hipótese do ângulo agudo, Bolyai desenvolve uma teoria muito semelhante, que parte das fórmulas da trigonometria plana para construir uma outra trigonometria que depende de um parâmetro, que no caso de Taurinus correspondia a uma geometria imaginária.

¹⁶ O título do apêndice é *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.*

No mesmo período em que Janos pesquisava o postulado das paralelas, Nikolai Ivanovitsch Lobačevskiĭ (1793-1856) fazia, sem conhecimento do trabalho de Bolyai, investigações sobre o quinto postulado na Universidade de Kazan. O primeiro trabalho de Lobačevskiĭ sobre o quinto postulado foi publicado em 1829 e continha os princípios básicos de uma nova geometria (chamada de *Geometria Imaginária* ou *Pangeometria*), em que mais de uma paralela a uma dada linha pode passar através de um ponto, o que contradizia o postulado euclidiano e era a mesma hipótese de Bolyai. Ele publicou sua teoria antes de Bolyai (em 1829). Lobačevskiĭ publicou seu trabalho, *Sobre os princípios da geometria*,¹⁷ numa revista da *Universidade de Kazan*, em russo, o que não o tornou conhecido (GRAY, 1989, p. 106). No período de 1835 a 1840, Lobačevskiĭ publicou 5 trabalhos, em outros idiomas, em que discutia os princípios e aplicações da geometria imaginária e sua relação com o postulado das paralelas.

Diferentemente de Bolyai, que se mantém indiferente ao quinto postulado e assim desenvolveu sua teoria, Lobačevskiĭ tem a impossibilidade de demonstração desse postulado como principal motivo para desenvolver sua teoria, como está mencionado na introdução do trabalho *Pesquisas Geométricas sobre a Teoria das Paralelas*:

Em geometria encontro certas imperfeições as quais acredito serem a razão porque esta ciência, além da transição para a análise, pode ainda não ter feito avanços do estado em que se encontrava desde Euclides. Fazendo parte dessas imperfeições, considero a obscuridade nos conceitos fundamentais de magnitudes geométricas, e finalmente a importantíssima lacuna na teoria das paralelas, no preenchimento da qual todos os esforços dos matemáticos têm sido em vão. (LOBAČEVSKIĬ, [1840] 1955, p. 11)

Lobačevskiĭ constrói uma nova geometria baseado em definições diferentes da geometria euclidiana, e atribui propriedades diferentes para linhas retas, como (LOBAČEVSKIĬ, [1840] 1955, pp.12-13):

1. Uma linha reta ajusta-se sobre si mesma em todas as posições. Com isto quero dizer que durante a rotação de uma superfície que a contém, a linha reta não muda seu lugar se ela passa por dois pontos fixos na superfície (com isso quero dizer que se giramos a superfície contendo a reta por dois pontos da linha, a linha não se move).
2. Duas linhas retas não podem se interceptar em dois pontos.
3. Se uma reta está num plano limitado por uma fronteira, então essa reta quando for suficientemente prolongada para os dois lados, deve ultrapassar a fronteira e assim dividir o plano em duas partes.
4. Duas linhas retas perpendiculares a um terceira nunca se cortam, não importa o quanto são prolongadas.

A definição que Lobačevskiĭ dá para linhas retas deixa claro que ele não está pensando em curvas, mostrando que sua proposta é de uma nova geometria em que as retas têm propriedades diferentes daquelas da geometria euclidiana. Entre outras definições que Lobačevskiĭ fornece, ele inclui a de retas paralelas como (LOBAČEVSKIĬ, [1840] 1955, p.13):

16. Todas as linhas retas que em um plano partem de um mesmo ponto podem, com relação a uma dada linha reta no mesmo plano, ser divididas em duas classes: as *secantes* e *não-secantes*. As *linhas fronteiriças*¹⁸ desta e daquela classe de linhas serão chamadas de *paralelas à linha dada*.

¹⁷ O título em russo é *O načal' geometrii* (ROSENFELD, 1988, p. 206).

¹⁸ Linha fronteira seria a tradução para *boundary line*.

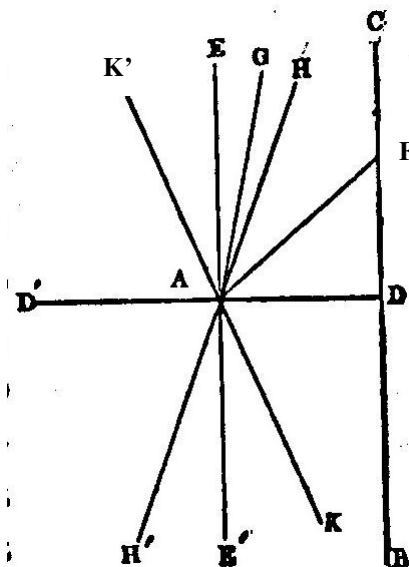


Figura 2.12: Na definição de paralelas de Lobačevskiĭ, AF é secante à linha DC , AG é não-secante à linha DC e AH é paralela à linha DC .

Seja AD perpendicular a BC e AE (figura 2.12). Algumas retas que partem do ângulo reto EAD encontram a linha DC , como por exemplo AF ; outras não encontram a linha DC , como a perpendicular AE . Assuma a possibilidade de que exista outras retas que não cortam DC , como AG , por mais que sejam prolongadas. Entre as linhas secantes, como AF , e as linhas não-secantes, como AG , existem linhas como AH , paralelas a DC , que são linhas fronteiriças, já que de um lado de AH , todas as linhas cortam DC , como AF ; e do outro lado de AH , todas as linhas não cortam DC , como AG . O ângulo HAD entre a paralela AH e a perpendicular AD é chamado de *ângulo de paralelismo*, denominado por $\Pi(p)$, onde p é a distância AD .

Se $\Pi(p) = \pi/2$, AE pode ser prolongada, obtendo AE' , que também será paralela à prolongação da linha DC , que é DB . Este caso corresponde à geometria euclidiana, que Lobačevskiĭ chama de ordinária, onde a distância entre as paralelas é constante. Mas se o ângulo de paralelismo for menor que $\pi/2$, temos duas linhas paralelas: AH paralela à DC e a linha AK , paralela à prolongação DB da linha DC , o que define dois lados de paralelismo: o lado em que está AH e o lado em que está AK .

Com essa definição de paralelas, Lobačevskiĭ estabeleceu novas proposições, tais como (LOBAČEVSKIĭ, [1840] 1955, pp. 17-45):

18. Duas linhas são sempre mutuamente paralelas¹⁹.
19. Em um triângulo retilíneo a soma dos três ângulos não pode ser maior que dois ângulos retos.
24. Quanto mais duas linhas paralelas são prolongadas do lado do paralelismo, mais elas se aproximam uma da outra²⁰.
31. Chamamos de linha fronteiriça (horocírculo) a curva sobre um plano para a qual todas as perpendiculares erguidas nos pontos médios das cordas são paralelas entre si. Na

¹⁹ Podemos entender essa proposição como: se duas linhas, AB e CD , prolongadas, satisfazem a definição de paralelas de Lobačevskiĭ, então em qualquer ponto delas, elas serão paralelas.

²⁰ Ou seja, do lado do paralelismo, a distância entre duas linhas paralelas diminui ao serem prolongadas.

figura 2.13, a linha ACH é o horocírculo, o segmento AC é a corda, da qual, no ponto médio, D , sai a perpendicular DE , que será paralela à linha FG , que é perpendicular ao ponto médio da corda AH .

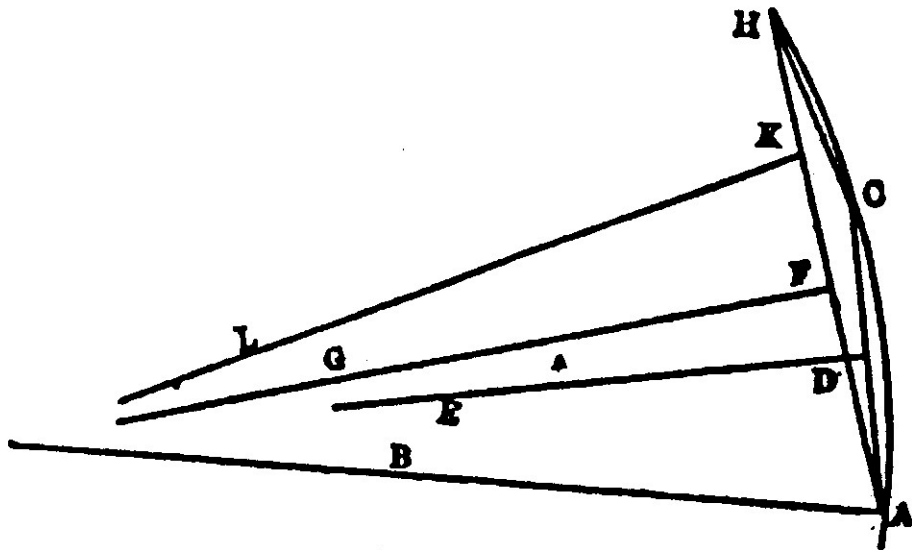


Figura 2.13: O arco AH forma o horocírculo, onde as linhas KL , FG , AB e DE são paralelas.

34. Superfície fronteira²¹ (horoesfera) é a superfície que se forma a partir da revolução das linhas fronteiriças ao redor de um dos eixos. Na figura 2.14, Ω representa a horoesfera.

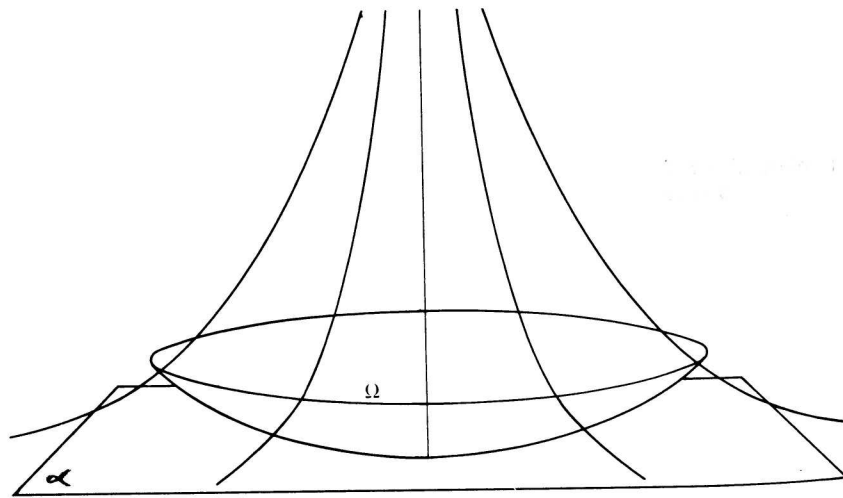


Figura 2.14: Ω representa a horoesfera.

Lobačevskiĭ também conseguiu encontrar, no caso do triângulo esférico, a relação entre o defeito na soma dos ângulos do triângulo e a área dele sobre a esfera (LOBAČEVSKIĭ, [1840] 1955, pp. 24-25).

²¹ Superfície fronteira seria a tradução adotada para *boundary surface*.

A pangeometria é então fundada sobre uma série de proposições e a negação do quinto postulado, onde paralelas não são equidistantes mas assintóticas, e permite a Lobačevskiĭ construir uma fórmula trigonométrica usando o ângulo de paralelismo, para determinar a relação entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Nesse caso, sejam a, b e c , os lados do triângulo e A, B e C os ângulos opostos aos respectivos lados. Assim, Lobačevskiĭ deduz as equações que relacionam esses ângulos e lados como (LOBAČEVSKIĭ, [1840] 1955, pp. 41-44)

$$\begin{aligned}
 \text{sen } A \tan \Pi(a) &= \text{sen } B \tan \Pi(b), \\
 \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\text{sen } \Pi(b) \text{sen } \Pi(c)}{\text{sen } \Pi(a)} &= 1, \\
 \cot A \text{sen } C \text{sen } \Pi(b) + \cos C &= \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\
 \cos A + \cos B \cos C &= \frac{\text{sen } B \text{sen } C}{\text{sen } \Pi(a)}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Supondo os lados do triângulo como muito pequenos e usando uma das proposições de Lobačevskiĭ que relaciona os ângulos e os lados de um triângulo retângulo²² (LOBAČEVSKIĭ, [1840] 1955, p. 39), as equações 2.4 são as equações da geometria euclidiana que permitem encontrar que a soma dos ângulos do triângulo pode ser menor que dois ângulos retos na pangeometria.

As Eqs. 2.4 são muito semelhantes à encontrada por Taurinus, e podem ser escritas, usando a notação de funções trigonométricas hiperbólicas (ou seja, supondo os lados como $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$ e $c\sqrt{-1}$ de um triângulo esférico), como

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{sen } A}{\text{senh } a} &= \frac{\text{sen } B}{\text{senh } b}, \\
 \cos A \tanh b \tan c + \frac{\cosh a}{\cosh b \cosh c} &= 1,
 \end{aligned}$$

que pode ser reduzidas a

$$\cos A \text{senh } b \text{sen } c + \cosh a = \cosh b \cosh c. \tag{2.5}$$

Podemos ver que a Eq. 2.5 é muito semelhante à Eq. 2.1, fazendo-se a mudança adequada de parâmetros, porém não há indícios de que Lobačevskiĭ ou Bolyai tivessem conhecimento do trabalho de Taurinus (GRAY, 1989, p. 117).

Os trabalhos de Lobačevskiĭ e Bolyai são iguais em muitos pontos. Um deles é a definição de retas paralelas a partir de um feixe de retas, que serve para estabelecer e provar vários teoremas.

Um ponto que difere nos trabalhos é o objetivo estabelecido. Para Bolyai, a geometria poderia ficar restrita apenas a um “exercício mental” enquanto que para Lobačevskiĭ existe a

²² Trata-se da proposição 36 (LOBAČEVSKIĭ, p. 39).

necessidade de testar empiricamente a validade da nova geometria (CICENIA, 1994, p. 13). Além disso, ele também acreditava que conceitos não existem, mas são “sentidos”, posição que será a mesma adotada por Poincaré e Helmholtz, como veremos no próximo capítulo.

Superfícies, linhas e pontos, como definidos em geometria, existem somente em nossa representação; visto que realmente medimos superfícies e linhas através de nossos corpos.[...] De fato, não conhecemos nada na natureza além de movimento, sem o qual nossas impressões são impossíveis. Conseqüentemente todos os outros conceitos, por exemplo conceitos geométricos, são gerados artificialmente pela nossa compreensão, a qual deriva das propriedades do movimento; isto é porque o espaço em si mesmo e por si mesmo não existe para nós (LOBAČEVSKIĬ, *apud* TORRETTI, 1984, p.65-82).

Além de contradizerem a concepção de espaço aceita até então, com propriedades diferentes para “linhas retas”, a existência de uma nova geometria questionava também a concepção da geometria como uma ciência empírica. Podemos falar de um espaço matemático abstrato, onde as propriedades são definidas a partir de um conjunto de teoremas e axiomas; e um espaço físico que tem suas propriedades admitidas a partir de observações e medições. A geometria como ciência empírica implicava sua aplicação no espaço físico, além de sua formulação para o espaço matemático.

Vários autores, exceto Lobačevskiĭ, estavam preocupados apenas com o espaço matemático. O espaço proposto pela teoria de Newton e pela filosofia de Kant, era basicamente Euclidiano e eqüivaleria também ao espaço físico (JAMMER, 1970, pp. 118-147). Lobačevskiĭ acreditava que o espaço físico poderia ser representado por um espaço matemático em que seria válida a geometria não-Euclidiana.

A futilidade de todos esses esforços dos últimos dois mil anos desde o tempo de Euclides, me fazem supor que em geometria os próprios conceitos não implicam na verdade cuja prova buscamos e cuja justificativa, como as justificativas de outras leis naturais, podem ser alcançadas através da experiência, como por exemplo por observações astronômicas (LOBAČEVSKIĬ, *apud* JAMMER, 1970, p. 149).

Portanto, a geometria de Lobačevskiĭ poderia possuir exemplos em que era a única possibilidade de explicação, o que ele supôs que aconteceria em experimentos de larga escala, como medidas astronômicas. Somente com medidas astronômicas havia esperanças de se aplicar a pangeometria na explicação do espaço físico.

Portanto a geometria imaginária se transforma na ordinária, quando supomos que os lados de um triângulo retângulo são muito pequenos.

Tenho, nos boletins científicos da Universidade de Kazan, publicado algumas pesquisas com relação à medida de linhas curvas, de figuras planas, das superfícies e volumes dos sólidos, bem como em relação à aplicação da geometria imaginária à análise.

As equações 8 [2.4] têm nelas mesmas fundamentos suficientes para considerar a hipótese da geometria imaginária como possível. Assim, não há outros meios além das observações astronômicas, para julgar com exatidão os cálculos que pertencem à geometria imaginária. (LOBAČEVSKIĬ, [1840] 1955, p. 44).

Lobačevskiĭ pretendia, através da análise de dados astronômicos, determinar se, nesse caso, a teoria da geometria imaginária se aplicaria. Para isso ele aplicou a teoria da pangeometria para determinar a paralaxe de uma estrela e comparar este valor com o encontrado empiricamente. Ele discutiu o caso de uma estrela fixa C com paralaxe $2p$, localizada exatamente

sobre um ponto A da órbita terrestre (em relação ao plano da órbita). No ponto B oposto da órbita, cuja distância $AB=a$, a paralela AC faria um ângulo de paralelismo $\Pi(a)$ (figura 2.15).

Se a linha BC é paralela à linha AC , então $\Pi(a) \geq (\pi/2) - 2p$. Do cálculo do ângulo de paralelismo, ele encontrou que $a < \tan 2p$. Considerando a menor paralaxe que já havia sido encontrada (correspondente à estrela Sirius, que era de $1.24''$) e estimou que $a < 6,012 \cdot 10^6$, onde a tem dimensão igual a 1. Lobačevskiĭ também calculou o defeito em um triângulo do sistema solar formado por uma base e uma altura aproximadamente iguais ao diâmetro da órbita da terra, encontrando o valor de $0'',000003727$ (LOBAČEVSKIĭ, 1898, pp. 19-24).

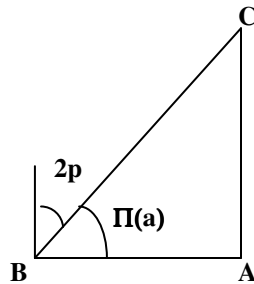


Figura 2.15: AB é o diâmetro da Terra e C é a posição da estrela fixa com paralaxe $2p$.

Outra diferença entre os trabalhos de Lobačevskiĭ e Bolyai foi o uso da Pangeometria para o cálculo de integrais definidas, o que mostra que ele estava interessado na aplicação da geometria não-euclidiana e não apenas na sua axiomatização²³:

Do que foi visto pode-se deduzir duas expressões do valor da área de um polígono fechado, uma expressa por uma integral definida, a outra dependente somente da medida do ângulo de um polígono. Os dois valores calculados devem ser iguais. Deste modo obtém-se um novo método de encontrar o valor de muitas integrais definidas, valores que seriam difíceis de solucionar de outro modo (LOBAČEVSKIĭ, 1867, p. 314).

O defeito angular de um triângulo ou de um polígono é proporcional à sua área na pangeometria, e como é possível obter os ângulos de um triângulo na pangeometria usando relações trigonométricas que envolvem o ângulo de paralelismo (Eqs. 2.4), também é possível obter a área de um polígono usando as relações trigonométricas entre seus ângulos. Portanto, é possível obter a área de um triângulo, ou de um polígono, sem calcular uma integral. Lobačevskiĭ também propôs algumas aplicações para a mecânica, relacionando velocidade e distância com ângulos e linhas mas que não tiveram muita divulgação (DANIELS, 1975, p. 80).

Os trabalhos de Lobačevskiĭ e Bolyai não foram muito bem recebidos de início e permaneceram praticamente isolados durante muito tempo. Enquanto Bolyai publicou apenas o apêndice na obra de seu pai, Lobačevskiĭ publicou vários trabalhos sobre o assunto, traduzidos também para francês e alemão, como: *Geometria Imaginária*, com tradução também para o francês em 1836; *Pesquisas geométricas sobre a teoria das paralelas*, em alemão em 1840; *Pangeometria*, com tradução também para o francês em 1856; além de mais dois trabalhos escritos apenas em russo, publicados em uma revista da *Universidade de Kazan*.

As diferentes concepções de espaço que surgiram desde Platão até o conceito atual tiveram grande influência na aceitação da geometria não-euclidiana. Espaço finito ou infinito,

²³ Para Cícenia (1994, pp. 22-26), Lobačevskiĭ teria sido influenciado por L. Carnot, ao adotar o mesmo conceito de continuidade e de interpretação física dos conceitos matemáticos.

natureza do espaço, espaço n -dimensional, etc, são várias questões que durante anos serviram como base, bem como ajudaram a esclarecer as propriedades da geometria não-euclidiana e sua aplicação na mecânica, mas não fazem parte do objetivo principal deste trabalho²⁴.

²⁴ Para um resumo das posições acerca da natureza e filosofia do espaço, veja ROSENFELD, 1988, pp. 181-205 e RICHARDS, 1979.

CAPÍTULO 3

GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo iremos tratar de outra abordagem da geometria, que é a geometria diferencial, e como ela permite analisar diferentes geometrias não-euclidianas, e também iremos incluir a geometria num espaço com dimensão maior que 3.

A teoria de máximos e mínimos de Leibniz, em 1684, introduziu a notação dos diferenciais, que permitiam descrever variações infinitesimais, ou melhor, pequenas dimensões (STRUİK, 1933a, p.96). Este conceito aplicado na geometria permite encontrar a medida integral de uma linha ou superfície, partindo de seu comprimento infinitesimal.

O uso de diferenciais na geometria permite, partindo de pequenas dimensões, descrever uma figura sobre uma superfície qualquer. Porém, quando a superfície não é um plano, a curvatura influencia na sua descrição, alterando a variação da coordenada ao longo das diferentes direções.

Durante o século XVIII, os trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783) e Alexis Claude Clairaut (1713-1765) se destacaram no desenvolvimento de uma nova forma de análise de superfícies curvas usando o cálculo diferencial e integral (STRUİK, 1933a, p. 100). Neste trabalho iremos nos concentrar na contribuição de Euler, uma vez que, além da influência que teve sobre o desenvolvimento da geometria diferencial, sua análise dos problemas de isoperimétricos foi de fundamental importância para a análise do movimento²⁵.

Euler usava a notação da geometria diferencial para descrever a variação das coordenadas ao longo dos eixos. Por exemplo, a expressão $dz = p dx + q dy$, onde $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ e

$q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ representava a variação da coordenada z ao longo dos eixos x e y (EULER, [1728]

1732, p. 112). Porém, ao estudar uma superfície curva, a variação da coordenada deveria levar em consideração a curvatura da superfície. Para Euler, a curvatura da superfície poderia ser determinada pelo raio osculador, o qual, no caso das superfícies era determinado usando-se seções normais. Uma seção normal corresponde ao plano que corta a superfície ao longo da normal ao ponto onde se quer determinar a curvatura (figura 3.1). Em cada ponto é possível traçar várias seções normais, sendo a seção principal aquela em que o raio osculador é máximo.

No conceito dado por Euler (EULER, 1767, p. 142) o raio osculador da superfície (r), dependia dos raios máximo f e mínimo g em cada ponto, sendo que os raios máximo e mínimo eram determinados pelos planos que cortavam a superfície no ponto em que se pretendia determinar a curvatura.

²⁵ No Capítulo 4 fazemos uma exposição detalhada da relação entre o problema de isoperimétricos e as equações do movimento.

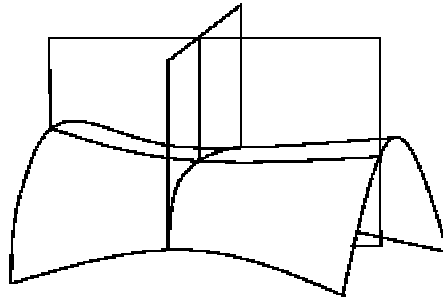


Figura 3.1: O raio de curvatura de Euler é determinado através das seções normais, que fornecem os raios máximo e mínimo em cada ponto da superfície curva.

Sendo φ o ângulo entre as seções normais que definem os raios osculador máximo e mínimo f e g , a expressão para o raio osculador da superfície é dado por

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi}. \quad (3.1)$$

Além de estudar a curvatura de uma superfície em função dos raios máximo e mínimo e do ângulo entre as seções normais, Euler também investigou o desenvolvimento de superfícies durante os anos 70 do século XVIII. Para isso ele representou as coordenadas x, y, z de um ponto sobre uma superfície como funções de duas variáveis t e u como (EULER, 1772, pp. 3-7)

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dt^2 + du^2, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \\ dx &= ldt + \lambda du, \quad dy = mdt + \nu du, \quad dz = ndt + \nu du, \end{aligned}$$

onde l, m, n são os cossenos dos ângulos que a direção das coordenadas t e u faz com os eixos das coordenadas x, y, z .

Através dessa representação Euler obtinha a descrição de uma figura sobre uma superfície curva qualquer, tendo como referência eixos de coordenadas cartesianas exteriores à superfície. Ou seja, as coordenadas das figuras sobre a superfície curva são projetadas sobre os eixos cartesianos x, y, z .

Euler também apresentou vários trabalhos em trigonometria esférica (ROSENFELD, 1988, pp. 31-34) e, em 1779, apresentou um trabalho em que associava esse dois assuntos para escrever a equação da linha geodésica sobre uma superfície. Lagrange, em sua *Mécanique Analytique* (1788) também influenciou a geometria diferencial ao parametrizar as equações do movimento²⁶ e da estática (LAGRANGE, 1788).

Sob a influência de Lagrange e de Euler, o trabalho de 1827 de Gauss permitiu determinar a curvatura de uma superfície curva qualquer, em função apenas das suas propriedades intrínsecas. Mas Gauss estava limitado ao espaço tridimensional euclidiano e foi para esse espaço

²⁶ O trabalho de Lagrange será discutido no Capítulo 4 desta tese.

que determinou a relação entre o defeito na soma dos ângulos de um triângulo e a área deste triângulo sobre uma superfície qualquer.

Apenas em 1854, Riemann, em sua tese de livre docência, apresentou uma forma de extensão das idéias de Gauss para um espaço n -dimensional, e que, algum tempo depois, em 1868, foi associado por Beltrami à geometria de Lobačevskiĭ.

O que discutiremos neste capítulo são os pontos principais na obra de Gauss e Riemann, e como Beltrami e Lamé utilizaram a nova geometria para determinar outras propriedades de curvas e espaço que foram de fundamental importância no desenvolvimento da mecânica não-euclidiana.

3.1 A GEOMETRIA INTRÍNSECA DE GAUSS

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) desenvolveu trabalhos em várias áreas, envolvendo astronomia, matemática, física, etc. No período de 1818 a 1825, realizou uma série medidas de campo para o rei de Hannover (figura 3.2). Este fato aumentou seu interesse pelo estudo das geodésicas que vinha do estudo do mapeamento da superfície terrestre sobre uma esfera e um plano, em 1816 (MAY, 1981, p. 298).

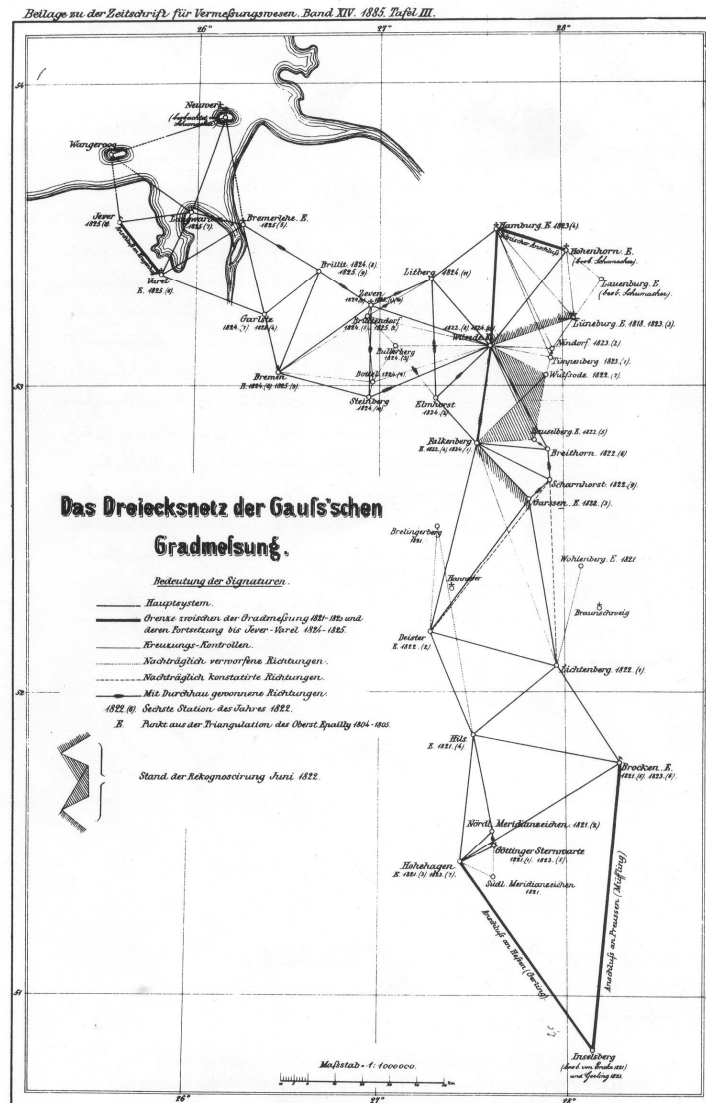


Figura 3.2: Mapa da triangulação feita por Gauss, de uma região da Alemanha.

Com o fim das medidas de campo, Gauss dedicou-se aos cálculos e análise dos resultados e paralelamente, em outubro de 1827, apresentou à Sociedade Real de Göttingen o trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que se tornou seu trabalho fundamental introduzindo a geometria diferencial em superfícies curvas quaisquer. Nele, Gauss tratou da curvatura de uma superfície curva de modo diferente do que era conhecido desde Euler. Além de relacioná-la com a área correspondente sobre uma esfera auxiliar, Gauss encontrou equações para a curvatura que dependiam das coordenadas intrínsecas à superfície, o que lhe permitiu definir seu *Theorema Egregium*, e construir uma linguagem em geometria diferencial que servirá como base para o desenvolvimento posterior de uma geometria não-euclidiana por Riemann (1854).

3.1.1 A natureza da superfície curva

Gauss inicia o seu trabalho definindo uma esfera auxiliar para o estudo de uma superfície curva qualquer. A esfera auxiliar tem raio unitário, sem unidade dimensional. Gauss utiliza a esfera auxiliar para descrever direções de retas e planos. A direção de uma reta qualquer pode ser associada a um raio da esfera, paralelo à mesma (figura 3.3); e esse raio pode ser representado pelo ponto em que ele toca a superfície da esfera. Assim, a direção de uma reta pode ser representada por um ponto na superfície da esfera (GAUSS, 1827, seções 1 e 2). Na figura 3.3, a direção da reta r é dada pelo ponto P sobre a esfera auxiliar.

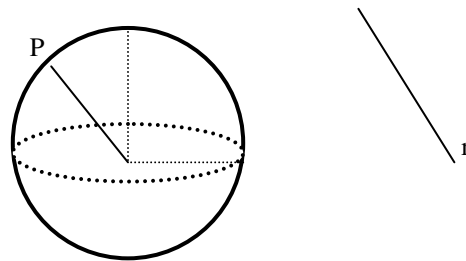


Figura 3.3: O ponto P sobre a esfera auxiliar representa a direção da reta r , paralela ao raio da esfera auxiliar.

Note-se que, a rigor, temos na esfera sempre *dois* raios opostos, paralelos a qualquer reta. Gauss considera sempre retas *orientadas*, o que elimina a indeterminação dessa correspondência.

Consideremos uma superfície curva diferenciável: é possível traçar um plano tangente em cada ponto da superfície e, sobre este ponto, uma normal ao plano tangente. A normal, ou o que poderíamos descrever como um vetor normal, tem sua direção definida por um raio correspondente (paralelo) na esfera auxiliar e por um ponto na superfície da esfera. Dessa forma, a cada ponto da superfície curva fica associado um ponto na superfície da esfera de referência. Como sobre a superfície curva as normais em diferentes pontos podem ter a mesma direção, os raios correspondentes podem ser sobrepor. Do mesmo modo, uma figura sobre a superfície curva tem vários raios associados na esfera auxiliar e desse modo forma uma figura também sobre a esfera auxiliar.

A normal a um ponto $P=(x,y,z)$ da superfície curva é representada pelo ponto P' sobre a superfície da esfera de referência, que tem coordenadas X, Y, Z . Como o raio da esfera de referência é unitário, as coordenadas desse ponto são os cossenos dos ângulos formados pela normal com as direções x, y, z .

A direção de um plano pode ser caracterizada também utilizando a esfera de referência. Consideremos um plano qualquer, e um plano paralelo a ele que passe pelo centro da esfera e que a corta em um círculo máximo. Esse círculo máximo representa a direção do primeiro plano

(figura 3.4). Porém, a direção do plano pode ser também representada através da direção de sua normal. Como a normal ao plano pode ser representada por um ponto na esfera de referência, então a direção do plano pode ser descrita por esse ponto.

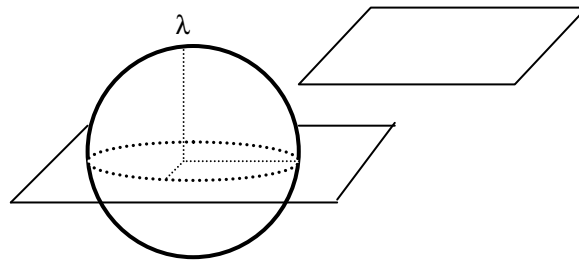


Figura 3.4: O ponto λ sobre a esfera auxiliar representa a direção do plano, paralelo ao plano que corta a esfera formando um grande círculo..

Com a associação de qualquer reta, plano e ângulos a pontos sobre a superfície da esfera auxiliar, o estudo de qualquer superfície curva, a qual se pode sempre determinar ponto a ponto através de planos tangentes, e normais a esses planos, passa a ser feito através da trigonometria esférica, que no início do século XIX já era bem conhecida.

Definida a esfera auxiliar, é possível estudar a natureza da superfície curva através da análise da normal ao plano tangente em cada ponto da superfície curva, utilizando para isso as coordenadas de cada ponto e seu correspondente na esfera auxiliar. Para este fim, Gauss adota três métodos de descrição da superfície, supondo sempre que se trata de uma curvatura “suave e contínua”, ou seja, em linguagem atual, em que as derivadas de primeira e segunda ordem não se anulam (GAUSS, 1827, seções 3, 4 e 5).

O primeiro método consiste em definir uma função que descreve a superfície como $W=f(x,y,z)=0$, onde x , y , z são as coordenadas cartesianas de cada ponto sobre a superfície. A forma diferencial dessa relação é escrita por Gauss como $dW=Pdx+Qdy+Rdz$, onde os coeficientes P , Q , R são evidentemente as derivadas parciais de W em relação a cada uma das coordenadas. Neste e em outros pontos, a notação utilizada por Gauss é diferente da atual, o que dificulta um pouco a compreensão de seu raciocínio.

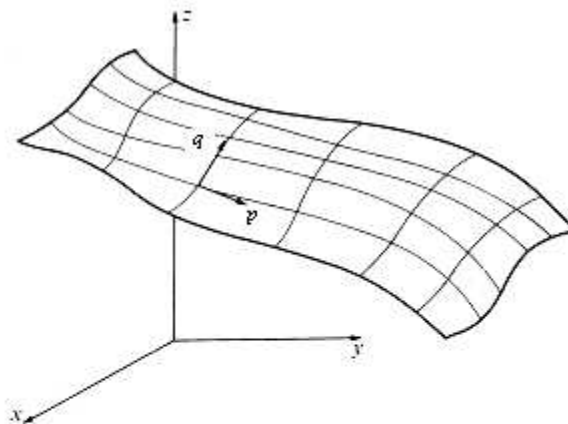


Figura 3.5: As coordenadas p e q estão sobre a superfície curva.

O segundo método assume um sistema de coordenadas p, q sobre a superfície curva, sendo que $x=x(p,q)$; $y=y(p,q)$; $z=z(p,q)$, onde x,y,z são as coordenadas cartesianas do ponto sobre a superfície (figura 3.5). A forma diferencial dessas relações é apresentada por Gauss como $dx=adp+a'dq$; $dy=bdp+b'dq$; $dz=cdp+c'dq$.

O terceiro método utiliza coordenadas cartesianas como o primeiro método, mas assume que a terceira coordenada z é uma função das outras duas, ou seja, $z=z(x,y)$. Sob forma diferencial, $dz=tdx+udy$, onde t e u não são coordenadas como p e q , mas sim parâmetros que correspondem à variação das coordenadas x e y em relação a z .

Fazendo uma análise geométrica e utilizando considerações de proporcionalidade, Gauss determina a relação entre as coordenadas X, Y, Z na esfera auxiliar (ou seja, a direção da normal à superfície) e as derivadas das coordenadas na superfície curva (ou seja, os coeficientes das relações acima descritas).

Para os três métodos anteriores temos, respectivamente:

Primeiro método

$$X = \pm \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; Y = \pm \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; Z = \pm \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad (3.2)$$

onde o sinal deve ser escolhido de tal forma que a normal esteja dirigida para o lado do plano tangente que não contém a superfície, naquele ponto.

Segundo método

$$X = \pm \frac{bc'-cb'}{\Delta}; Y = \pm \frac{ca'-ac'}{\Delta}; Z = \pm \frac{ab'-ba'}{\Delta} \quad (3.3)$$

onde Δ representa

$$\Delta = \sqrt{(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2}.$$

Terceiro método

$$X = \pm \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}; Y = \pm \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}; Z = \pm \frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}. \quad (3.4)$$

Assim, a partir da função que descreve a superfície curva, em cada um dos três métodos, pode-se determinar a direção da normal a cada ponto da superfície. Esse é o ponto de partida da análise que Gauss desenvolve para a curvatura da superfície.

3.1.2 A curvatura da superfície

A correspondência entre pontos da superfície e da esfera é feita através da direção da normal, porém não de forma biunívoca. Portanto, quando essa comparação é feita com uma linha ou uma figura, as duas figuras podem ter formas semelhantes ou diferentes.

Assim como a cada ponto definido sobre a superfície curva é feito corresponder um ponto definido sobre a esfera, pela direção da normal à superfície curva que é transferida para a superfície da esfera, da mesma forma também qualquer linha, qualquer figura, sobre a superfície curva será representada pela correspondente linha ou figura sobre a superfície da esfera. Na comparação de duas figuras correspondentes entre si deste modo, uma das quais será o mapeamento da outra, dois pontos importantes devem ser considerados: um quando apenas a quantidade é considerada; o outro quando, desprezando relações quantitativas, apenas a posição é considerada (Gauss, 1827, seção 6).

As quantidades a que se refere Gauss correspondem às áreas das figuras; enquanto que as considerações de posição se referem à direção adotada para a normal. Quando todas as normais têm o mesmo sentido, elas podem formar sobre esfera auxiliar figuras semelhantes à que está sobre a superfície curva (figura 3.6). Evidentemente, essas duas figuras podem ter formas completamente distintas se as normais tiverem sentidos opostos.

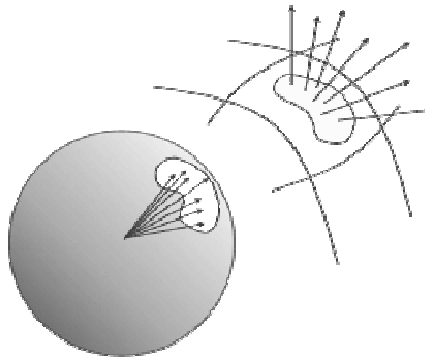


Figura 3.6: As normais ao plano tangente a cada ponto da figura sobre a superfície curva são representadas por pontos sobre a esfera auxiliar, formando uma figura semelhante.

A correspondência entre a figura sobre a superfície curva e a figura sobre a esfera auxiliar permitiu a Gauss estabelecer um novo conceito de medida da curvatura e determinar esta constante em função das coordenadas da superfície curva através dos métodos anteriores (GAUSS, 1827, seção 6).

Gauss define a curvatura pela razão entre as áreas da figura sobre a esfera auxiliar e sobre a superfície curva. Sendo o raio da esfera auxiliar sem unidade dimensional, a área da figura sobre a esfera também não tem unidade dimensional. Como a área da figura sobre a superfície curva tem dimensão de comprimento ao quadrado, a curvatura terá dimensão do inverso de comprimento ao quadrado.

Assim, a cada parte de uma superfície curva encerrada com limites definidos associamos uma *curvatura total* ou *integral*, que é representada pela área da figura sobre a esfera que lhe é correspondente. Desta curvatura integral deve ser distinguida uma curvatura mais específica que chamaremos *medida da curvatura*. Esta última se refere a um ponto da

superfície, e deverá denotar o quociente obtido quando a curvatura integral do elemento de superfície ao redor de um ponto é dividida pela área do próprio elemento; e, portanto ele denota a razão de áreas infinitamente pequenas correspondentes uma à outra sobre a superfície curva e a esfera (GAUSS, 1827, seção 6).

O raio de curvatura de Euler, como foi mostrado no início deste Capítulo (ver Eq. 3.1), só pode ser definido em cada ponto, utilizando-se as seções normais. Pelo contrário, o conceito introduzido por Gauss pode ser aplicado em um ponto (utilizando-se figuras infinitesimais), mas também pode ser aplicado a uma região finita da superfície. O valor da medida de curvatura obtido pelo método de Gauss é igual ao valor do raio de curvatura de Euler, apesar de obtido por um método diferente. Na seção 8, Gauss utiliza uma escolha adequada de eixos e compara seu resultado ao que já havia sido obtido por Euler, estabelecendo o seguinte teorema, que corresponde à definição de raio de curvatura de Euler:

A medida de curvatura em qualquer ponto da superfície é igual a uma fração cujo numerador é a unidade, e cujo denominador é o produto dos raios de curvatura extremos das seções normais planas (GAUSS, 1827, seção 8).

A medida de curvatura corresponde à curvatura em cada ponto da superfície e, integrada, fornece a curvatura para toda a superfície curva. Dependendo do sentido adotado para a normal como positivo, a medida de curvatura pode ser positiva ou negativa, o que deve ser levado em consideração na integração, para determinar a curvatura final. Com isso, alguns pontos se sobrepõem e outros se anulam na integração total (Gauss, 1827, seções 6 a 11).

Para calcular a razão entre as duas áreas (na superfície e na esfera auxiliar) correspondentes a um pequeno triângulo, Gauss utilizou um recurso interessante: dois triângulos, um sobre a superfície curva e outro sobre a esfera auxiliar. Os dois triângulos possuem a mesma normal e pertencem a planos paralelos; por isso, as áreas de suas projeções no plano xy mantêm a mesma proporção que as áreas dos triângulos. Basta, portanto, considerar as projeções desses dois triângulos para calcular a curvatura da superfície.

Considerando um pequeno triângulo ABC sobre a superfície curva, como na figura 3.7, as coordenadas dos vértices do triângulo podem ser escritas em função da coordenada de um dos vértices. Seja $A=(x,y)$ o vértice a partir do qual as outras coordenadas serão descritas. Em relação ao vértice A , o vértice B possui incrementos na direção do eixo x e na direção do eixo y , que denotaremos por δ .

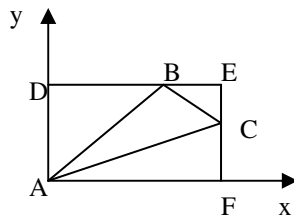


Figura 3.7: A relação entre as áreas sobre a superfície curva e sobre a esfera auxiliar, do triângulo ABC , fornece a medida de curvatura.

Um incremento diferente daquele do vértice B será denotado por d . Desta forma, o vértice C possui um incremento dx na direção do eixo x , e dy na direção do eixo y . O vértice D do retângulo que contém o triângulo ABC , possui o mesmo incremento que o vértice B do triângulo, na direção y , portanto δy . Desta forma, podemos escrever as coordenadas dos vértices como

$$\begin{array}{lll} A=(x,y), & B=(x+\delta x, y+\delta y), & C=(x+dx, y+dy), \\ D=(x, y+\delta y), & E=(x+dx, y+\delta y), & F=(x+dx, y). \end{array}$$

Assumindo $x=0, y=0$ para facilitar, a área do triângulo ABC será igual à área do quadrado $ADEF$ subtraída da soma das áreas dos triângulos ADB, BEC, AFC , o que fornece o resultado $dx\delta y - \delta x dy$, ou $\delta x dy - dx\delta y$, de acordo com a posição do ponto B em relação ao ponto C.

Para o triângulo correspondente sobre a esfera auxiliar, usando agora as coordenadas como X e Y , pode ser obtida uma expressão semelhante para a área. Deste modo, a medida de curvatura, que é a relação entre a área do triângulo sobre a superfície curva e a área do triângulo correspondente sobre a esfera auxiliar, pode ser dada por (GAUSS, 1827, seção 7)

$$k = \frac{dX\delta Y - dY\delta X}{dx\delta y - dy\delta x}, \quad (3.6)$$

onde o numerador corresponde à projeção no plano xy da área do triângulo sobre a esfera auxiliar e o denominador corresponde à projeção no plano xy da área do triângulo sobre a superfície curva.

Usando os três métodos anteriormente apresentados que descrevem a natureza da superfície curva, a medida de curvatura k em um ponto pode ser escrita em função dos coeficientes diferenciais que descrevem as coordenadas da própria superfície, ficando, para os três métodos, da seguinte forma:

1º método (Gauss, 1827, seção 9)

$$k(P^2+Q^2+R^2)^2 = P^2(Q'R'-P''^2) + Q^2(P'R'-Q''^2) + R^2(P'Q'-R''^2) + 2QR(Q''R''-P'P'') + 2PR(P''R''-Q'Q'') + 2PQ(P''Q''-R'R''), \quad (3.7)$$

onde P' , Q' e R' são as derivadas primeiras dos coeficientes diferenciais P , Q , R em relação às respectivas coordenadas, e P'' , Q'' e R'' são as derivadas segundas correspondentes.

3º método (Gauss, 1827, seção 7)

$$k = Z^6 (TV - U^2) (1 + t^2 + u^2) = Z^4 (TV - U^2) = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}, \quad (3.8)$$

onde, em notação atual, $t=\partial z/\partial x$, $u=\partial z/\partial y$, $T=\partial^2 z/\partial x^2$, $U=\partial^2 z/\partial x\partial y$, $V=\partial^2 z/\partial y^2$, $Z^2=1/(1+t^2+u^2)$.

2º método (Gauss, 1827, seção 10)

$$k = \frac{DD''-D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} \quad (3.9)$$

onde $A=bc'-cb'$, $B=ca'-ac'$, $C=ab'-ba'$, $D=A(\partial^2 x/\partial p^2)+B(\partial^2 y/\partial p^2)+C(\partial^2 z/\partial p^2)$, $D'=A(\partial^2 x/\partial p\partial q)+B(\partial^2 y/\partial p\partial q)+C(\partial^2 z/\partial p\partial q)$, $D''=A(\partial^2 x/\partial q^2)+B(\partial^2 y/\partial q^2)+C(\partial^2 z/\partial q^2)$.

O segundo método tem a vantagem de trabalhar com quaisquer coordenadas p, q sobre a própria superfície curva. Assim, os métodos utilizados por Gauss até a Eq. 3.8, faziam uso de coordenadas extrínsecas, ou seja, partiam da projeção da superfície sobre os eixos cartesianos. No entanto, na Eq. 3.9, aparecem as derivadas das coordenadas cartesianas em relação a essas coordenadas intrínsecas, p, q , o que permite Gauss rescrever o resultado obtido de um modo que envolve as derivadas das coordenadas na própria superfície curva, obtendo

$$4(EG-F^2)^2 k = E \left(\frac{\partial E \partial G}{\partial q \partial q} - 2 \frac{\partial F \partial G}{\partial p \partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)^2 \right) + F \left(\frac{\partial E \partial G}{\partial p \partial q} - \frac{\partial E \partial G}{\partial q \partial p} - 2 \frac{\partial E \partial F}{\partial q \partial q} + \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial F \partial F}{\partial p \partial q} - 2 \frac{\partial F \partial G}{\partial p \partial p} \right) + \\ + G \left(\frac{\partial E \partial G}{\partial p \partial p} - 2 \frac{\partial E \partial F}{\partial p \partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q} \right)^2 \right) - 2(EG-F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right), \quad (3.10)$$

onde $E=a^2+b^2+c^2$, $F=aa'+bb'+cc'$, $G=a'^2+b'^2+c'^2$, sendo a, b e c definidos como no 2º método de descrição da natureza da superfície.

Os parâmetros E, F, G possuem um significado importante. Se utilizarmos a relação para um elemento de linha como: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ e substituirmos os diferenciais das coordenadas cartesianas em função dos diferenciais das coordenadas intrínsecas à superfície, utilizando $dx=adp+a'dq$, $dy=bdp+b'dq$ e $dz=cdp+c'dq$, substituindo depois os coeficientes E, F, G , encontramos, para o elemento de linha nas coordenadas intrínsecas da superfície, a expressão (GAUSS, 1827, seção12)

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fd dp dq + Gdq^2. \quad (3.11)$$

Podemos portanto considerar que E, F, G são as funções das coordenadas intrínsecas p, q que permitem calcular o elemento de linha. Dessa forma, fica eliminada toda relação com as coordenadas cartesianas. As expressões encontradas para a curvatura e elemento de linha não dependem das coordenadas cartesianas x, y, z , apenas das coordenadas p, q , sobre a superfície curva.

Como os coeficientes E, F, G dependem apenas de p, q e das derivadas dessas coordenadas em relação à projeção sobre a esfera auxiliar, é possível “varrer” toda a superfície curva, fazendo uso de coordenadas intrínsecas. Como a curvatura é a integração da medida de curvatura, fica possível obtê-la apenas com as coordenadas sobre a própria superfície curva.

Sendo a curvatura em cada ponto determinada a partir de E, F e G , que são os coeficientes do elemento de linha, segue-se que duas superfícies nas quais os elementos de linha sejam descritos por fórmulas semelhantes, em pontos correspondentes, terão a mesma curvatura. Ou, dito de outro modo: se forem iguais as medidas elementares de distância em todas as direções, a partir de pontos correspondentes de duas superfícies, então as curvaturas dessas superfícies serão iguais nos pontos correspondentes.

Gauss apresentou essa propriedade da seguinte forma: se a distância entre todos os pares de pontos não se altera quando uma superfície é desenvolvida sobre outra (entendendo-se desenvolvimento como se pudéssemos “cobrir” uma superfície com a outra), então os coeficientes do elemento de linha permanecem inalterados, o que leva ao *Theorema Egregium* de Gauss:

Se uma superfície é desenvolvida sobre qualquer outra superfície, a medida de curvatura em cada ponto permanece inalterada (Gauss, 1827, seção 12).

Uma superfície que pode ser desenvolvida sobre um plano, como um cone ou um cilindro, possui curvatura igual a zero. Um plano não pode ser desenvolvido sobre a superfície de uma esfera, por isso não possuem a mesma curvatura. Podemos comparar isso com o que se pode fazer manipulando materiais, como o que se faz com uma folha de papel. Se tomamos uma folha de papel plana e a enrolamos, transformando-a em um cilindro ou cone, sem que as distâncias entre pontos próximos se altere, ou seja, sem deformação elástica, isso significa que a curvatura do cilindro ou cone é igual à curvatura do plano. Mas não podemos transformar uma folha de papel em uma esfera, sem que haja deformação elástica, então a curvatura da esfera é diferente da curvatura do plano.

O conceito de desenvolvimento de uma superfície sobre outra pode ser entendido através da analogia com uma rede flexível e inextensível, tal que a distância entre os “nós” permanece a mesma quando esta rede envolve duas superfícies diferentes. Ou seja, se uma esfera é envolta nesta rede e então esta rede é levada a envolver outra superfície curva, sem sofrer qualquer alteração de distância entre os nós, então a curvatura desta superfície curva é a mesma da esfera. Esse conceito será muito importante quando a geodésica numa superfície for associada à trajetória do sistema. Nesse caso, superfícies que podem ser “desenvolvidas” implicarão em sistemas mecânicos semelhantes, como veremos no Capítulo 5.

3.1.3 A soma dos ângulos do triângulo

O passo seguinte no trabalho de Gauss é a aplicação deste resultado para o triângulo geodésico de tamanho finito. Para encontrar a curvatura para essa figura, inicialmente Gauss estabelece uma série de propriedades para as “linhas mais curtas”²⁷ (Gauss, 1827, seções 14 a 16). Utilizando as definições dadas nas primeiras páginas do trabalho, que relacionam a geometria na superfície curva e na esfera auxiliar, Gauss estabelece dois teoremas que serão importantes posteriormente, na relação entre geometria não-euclidiana e mecânica:

TEOREMA: Se sobre uma superfície curva um número infinito de linhas mais curtas de igual comprimento saem de um mesmo ponto inicial, a linha unindo suas extremidades será normal a cada uma das linhas. (GAUSS, 1827, seção 15).

TEOREMA: Se sobre uma superfície curva imaginamos qualquer linha que seja, a partir da qual sai, em ângulo reto, de diferentes pontos, um número infinito de linhas mais curtas e de mesmo comprimento, e que estão do mesmo lado, a curva que une suas extremidades cortará cada uma das linhas em ângulo reto. (GAUSS, 1827, seção 16).

²⁷ Gauss não usa o termo “geodésica”, e se refere sempre a “linhas mais curtas”.

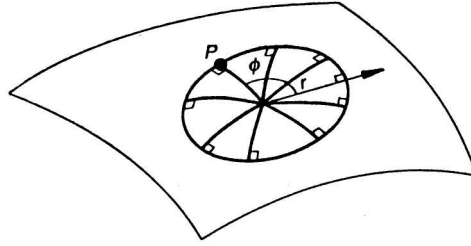


Figura 3.8: As linhas mais curtas que saem do mesmo ponto central são normais à linha que une suas extremidades, passando por P .

Usando o segundo teorema, ele associa aos coeficientes E, F, G um significado geométrico no sistema de coordenadas p, q , considerando-se o crescimento de cada uma das coordenadas separadamente, e mantendo-se a outra constante. Uma das possibilidades de representação dessas coordenadas intrínsecas é utilizar como uma das coordenadas a constância até um ponto determinado e a outra coordenada como sendo um ângulo, e então transformar as coordenadas p, q para coordenadas polares.

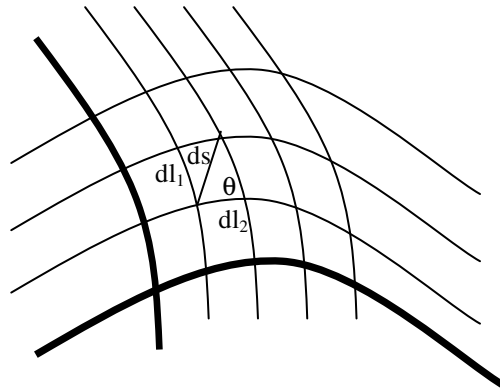


Figura 3.9: Sobre a superfície curva, o sistema de coordenadas pode ser representado, de modo que o elemento de linha dl_2 faz um ângulo θ com o elemento de linha ds .

Os elementos de linha dl_1 e dl_2 (figura 3.9) podem ser escritos em função do ângulo θ , e, aproximando-se o triângulo infinitesimal da figura 3.9 por um triângulo plano, pode-se aplicar as propriedades da trigonometria plana para encontrar o elemento de linha ds . Nesse caso, com uma escolha adequada de unidades, $E=1$ e $F=0$, obtém-se a seguinte equação para a medida de curvatura (Gauss, 1827, seções 17 a 20)

$$k = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial p^2} \quad \text{onde} \quad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial p} dq \quad \text{sendo} \quad m = \sqrt{G}. \quad (3.12)$$

A adoção do sistema de coordenadas da figura 3.9 e os teoremas anteriores permitem escrever a equação da geodésica em coordenadas polares (LUTZEN, 1995, p. 5).

A seqüência de desenvolvimentos feitos por Gauss nas seções anteriores tem como objetivo encontrar a soma dos ângulos de um triângulo sobre uma superfície qualquer, portanto, o passo seguinte é o cálculo da medida de curvatura para o triângulo retângulo geodésico.

Calculado a integral da medida de curvatura para um triângulo finito formado por “linhas mais curtas” (geodésicas), Gauss encontra a relação entre o excesso ou déficit (comparado com 180°) da soma dos ângulos do triângulo e a área do triângulo correspondente sobre a esfera auxiliar:

O excesso sobre 180° da soma dos ângulos de um triângulo formado por linhas mais curtas sobre uma superfície côncava-côncava, ou o déficit de 180° da soma dos ângulos de um triângulo formado por linhas mais curtas sobre uma superfície côncava-convexa, é medido pela área da parte da esfera a qual corresponde, através das direções das normais aquele triângulo, se a superfície total da esfera é tomada igual a 720 graus²⁸. (Gauss, 1827, seção 20)

O resultado pode ser generalizado para qualquer polígono de n lados que possa ser subdividido em triângulos.

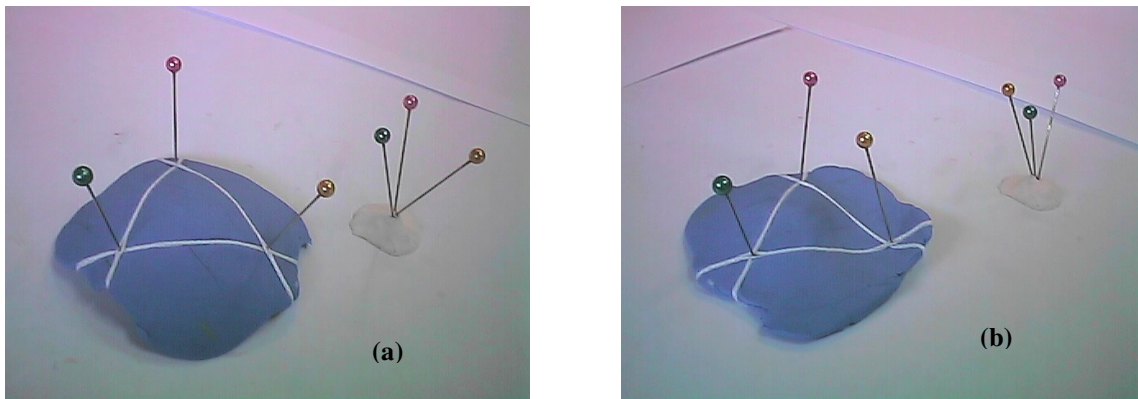


Figura 3.10: O déficit ou excesso, sobre 180° , na soma dos ângulos do triângulo sobre a superfície curva (em azul) é proporcional à área do triângulo sobre a esfera auxiliar (ao lado). Em (a) temos uma superfície com curvatura positiva; em (b) temos uma superfície com curvatura negativa.

A relação entre a soma dos ângulos e a área já era conhecida para um triângulo esférico (Legendre, 1817, p. 426); o resultado de Gauss generaliza essa relação para um triângulo sobre qualquer superfície curva (Gauss, 1827, seções 21 a 27).

No caso de um triângulo finito, onde a curvatura pode ser diferente em cada um dos vértices, Gauss analisou a diferença angular em cada um dos vértices do triângulo formado por linhas geodésicas (figura 3.11).

Consideremos um triângulo de ângulos A, B, C , lados opostos aos ângulos respectivamente iguais a a, b, c , sobre uma superfície curva de raio médio de curvatura constante R^2 , cuja área é σ , e outro triângulo retilíneo geodésico, de ângulos A^*, B^*, C^* . Para uma superfície com curvatura constante, a soma dos ângulos do triângulo é $A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{R^2}$. Se compararmos com um triângulo no plano, onde $A^* + B^* + C^* = \pi$, temos $A^* + B^* + C^* = A + B + C - \frac{\sigma}{R^2}$.

²⁸ Note-se que Gauss utiliza graus como medida de ângulo sólido, neste ponto.

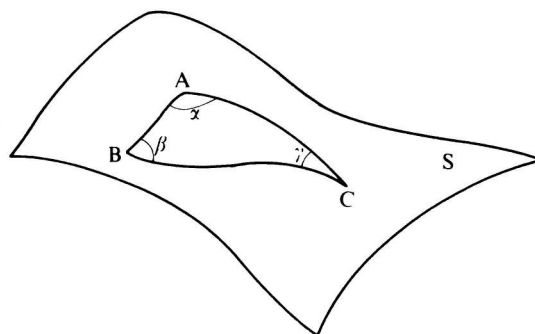


Figura 3.11: ABC representa um triângulo geodésico com lados a, b, c sobre a superfície curva S .

Se a curvatura não é constante, o termo $\frac{\sigma}{R^2}$ varia em cada um dos vértices. Nesse caso, cada um dos ângulos deve ter uma correção devida a essa curvatura, o que pode ser feito através da expansão em série dos três ângulos do triângulo. Feita a expansão, o resultado geral para um triângulo qualquer que relaciona os ângulos e a área, é dado por

$$\begin{aligned} A^* &= A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(b^2 + c^2 - 2a^2), \\ B^* &= B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + c^2 - 2b^2), \\ C^* &= C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + b^2 - 2c^2), \end{aligned}$$

lembrando que a, b, c são os lados do triângulo. É curioso que, depois de dezenas de páginas de complexas deduções gerais, Gauss utilizou esse resultado ao problema prático de medidas da superfície da Terra. Desprezando os termos de quarta ordem em relação ao lados dos triângulos, Gauss aplicou essa relação ao caso do triângulo entre as cidades de Hohehagen, Brocken e Inselberg (Gauss, 1827, seção 28):

Então para os ângulos A, B, C sobre uma superfície não-esférica, devem ser aplicadas reduções desiguais, tais que os senos dos ângulos alterados se tornem proporcionais aos lados opostos. A desigualdade, geralmente falando, será de terceira ordem; mas se a superfície diferir pouco de uma esfera, a desigualdade será de ordem mais alta. Mesmo nos maiores triângulos sobre a superfície da terra, cujos ângulos são possíveis de se medir, a diferença sempre pode ser considerada como insensível. Assim, por exemplo, no maior dos triângulos que pudemos medir nos anos recentes, ou seja, aquele entre os pontos Hohehagen, Brocken, Inselberg, onde o excesso da soma dos ângulos foi $14''85348$, o cálculo deu as seguintes reduções a serem aplicadas aos ângulos:

Hohehagen. $-4''.95113$
 Brocken. $-4''.95104$
 Inselberg. $-4''.95131$.

O triângulo formado por essas três cidades não é equilátero²⁹, e a curvatura está variando de um ponto para outro, pois o triângulo está sobre a superfície da Terra. Para esse triângulo, aplicando a teoria desenvolvida, Gauss obteve os valores acima. A medição feita por Gauss fornece uma diferença entre as correções dos três ângulos na casa do décimo de milésimo de segundo de arco, o que é desprezível tendo em vista a precisão permitida pelos aparelhos utilizados na época. Com instrumentos modernos, a precisão nas medidas fica entre 3 e 6 segundos de arco para cada observação e mesmo repetindo as observações, os erros ficariam entre 1 e 2 segundos de arco, em boas condições de observação (BREITENBERGER, 1984, p. 279).

Apesar de não ter sido útil na aplicação prática, a teoria desenvolvida por Gauss permitiu encontrar as propriedades de qualquer superfície curva utilizando suas coordenadas intrínsecas.

Lobačevskiĭ e Bolyai estão estudando um espaço tridimensional que não é igual ao da geometria euclidiana, diferentemente de Gauss. Quando Lobačevskiĭ procura comparar essa geometria com as observações astronômicas, ele não está estudando as propriedades de uma superfície, mas de um espaço tridimensional, enquanto que Gauss está estudando uma superfície sobre o espaço euclidiano. Ou seja, Gauss não está colocando em dúvida que o espaço é euclidiano.

Houve algumas aplicações do trabalho de Gauss no mapeamento de superfícies (relação entre curvatura e elemento de linha) e para determinar geodésicas sobre um elipsóide, como o trabalho de Jacobi (1804-1851) em 1838. Mas além de aplicações, a geometria diferencial durante a década seguinte não recebeu muitas contribuições. A geometria algébrica apresentava novos resultados tanto na França quanto na Alemanha, países onde estavam os matemáticos mais reconhecidos do período, e recebia mais atenção do que a geometria diferencial.

Durante a década seguinte, as questões relacionando a teoria diferencial e sua aplicação na mecânica e na óptica foram o centro das atenções. Os trabalhos de Gabriel Lamé, envolvendo elasticidade, faziam uso da descrição da superfície usando o método de Gauss, e influenciaram Beltrami na análise das geodésicas, como veremos posteriormente. Outros como Liouville, Serret, Poisson, entre outros na França, mostravam como os trabalhos de Gauss e Jacobi eram importantes para as leis do movimento no espaço Euclidiano³⁰ (STRUİK, 1933b, pp.167-172), principalmente por seu caráter invariante.

Outro aspecto da geometria desenvolvido durante a década de quarenta foi sua extensão para o caso de mais de três variáveis, como os trabalhos de Arthur Cayley (1843) e Hermann Grassmann (1844), em que o número de variáveis usado na teoria algébrica se confunde com número de graus ou dimensões, mas não é associado à geometria. Cayley introduz o termo “geometria de n -dimensões”, mas apenas desenvolve uma teoria algébrica com n variáveis. Grassmann fala de entes geométricos com mais de 3 dimensões, mas não relaciona com a realidade, mantendo dimensões superiores apenas para a álgebra. Schläfli em 1851, publica um trabalho sobre geometria euclidiana multidimensional, como um caso especial de geometria analítica de n dimensões, em que a geometria do plano e do espaço é um caso especial quando $n=2$ e $n=3$ (ROSENFELD, 1988, pp. 247-257). Para o conceito de espaço aceito, a geometria diferencial era uma geometria descritiva, de posição, portanto somente aplicável no caso do espaço de três dimensões. A união entre a geometria diferencial e a geometria de n -dimensões, com a conseqüente mudança no conceito de espaço, foi feita no trabalho apresentado por Riemann em 1854, publicado em 1867.

²⁹ As distâncias são: Hohehagen-Brocken=70km; Inselberg-Hohehagen=82 km; Brocken-Inselberg=105km.

³⁰ A aplicação da geometria diferencial na mecânica será explorada no próximo capítulo desta tese.

3.2 A MULTIPLICIDADE DE RIEMANN

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nasceu em Hannover em 1826, sendo o segundo de seis filhos. Teve o pai como mestre até os 10 anos de idade, e sob sua influência ingressou na Universidade de Göttingen em 1846 no curso de teologia, mudando o curso para filosofia depois de se interessar por matemática. Em 1847 mudou-se para a Universidade de Berlim para estudar com Steiner, Jacobi, Dirichlet e Eisenstein, retornando para Göttingen em 1849 onde se formou e teve sua tese de livre docência, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*³¹, apresentada em 1854 (FREUDENTHAL, 1981, p. 456). Riemann não possui uma grande quantidade de trabalhos, mas os que produziu influenciaram tanto a matemática quanto a física, principalmente a teoria da relatividade de Einstein.

Neste trabalho, é feita a introdução ao conceito de multiplicidade n -dimensional e generalização do conceito de curvatura dado por Gauss em *Disquisitiones generales circa superficies* para uma superfície n -dimensional. Além da introdução de novos conceitos matemáticos, há também a introdução de uma nova idéia sobre o conceito do espaço em si. Diferente da posição da maioria dos matemáticos e filósofos da época, que admitiam a estrutura métrica como fixa e independente do fenômeno físico a que está associada, Riemann considera que o espaço é destituído de forma, e a adquire somente através do material que o preenche e determina suas relações métricas. Posteriormente, a concepção de que o espaço pode ter sua métrica variável e “influenciável” pelos fenômenos levou alguns autores a associar a métrica a um *campo métrico*, analogamente ao campo elétrico, campo magnético, etc., onde as propriedades métricas alterariam os fenômenos (SCRIMIERI, 1992, pp. 155-156).

O espaço para Riemann é diferente do espaço euclidiano. Ao espaço euclidiano é associada a geometria fundamentada nos *Elementos*. Espaço para Riemann é passível de qualquer relação métrica, do qual o espaço euclidiano é um dos casos em que a dimensão é igual a 3, e que tem suas propriedades estabelecidas pela experiência³² (TORRETI, 1984, p. 84).

Sobre as hipóteses... teve pouca repercussão e só obteve reações importantes de outros matemáticos após a morte de Riemann. A primeira publicação do seu trabalho aconteceu apenas em 1867, em alemão, quando Dedekind publicou as obras completas de Riemann. A primeira tradução para o inglês conhecida foi feita por Clifford e publicada em 1873. Interessado no trabalho de Riemann e responsável por editar suas memórias, junto com Weber, Dedekind escreveu um trabalho em que investiga inteiramente a tese de Riemann³³.

Beltrami, que vinha trabalhando com geometria diferencial, principalmente com geodésicas, após conhecer o trabalho de Riemann, começa a aplicá-lo na teoria de parâmetros diferenciais de Lamé, o que foi o ponto de partida para Ricci e Levi-Civita desenvolverem as ferramentas matemáticas do cálculo diferencial absoluto.

Seguindo o trabalho *Sobre as hipóteses...*, de Riemann, nos próximos tópicos apresentaremos a definição de multiplicidade, as propriedades métricas da multiplicidade e como se dá a aplicação desse novo conceito no espaço.

³¹ Na tradução para o português: *Sobre as hipóteses que servem de fundamento à geometria*. Para abreviar usaremos apenas *Sobre as hipóteses...*

³² A teoria de Riemann para o espaço é diferente da de Kant e mostra-se mais influenciada por Herbart, que considerava espaço topologicamente (LAUGWITZ, 1999, p. 222).

³³ O trabalho é intitulado “Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann’s Abhandlungen Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen” e uma tradução para o francês do original pode ser encontrada em Sinaceur (1990).

3.2.1 Definição de uma multiplicidade n -dimensional

Para Riemann, a geometria desenvolvida desde Euclides até Legendre não esclarecia certos axiomas pois não assumia a existência de uma *Mannigfaltigkeit*. O termo introduzido por Riemann tem diferentes traduções. Na tradução para o inglês, *manifoldness*; e na tradução para o português, é mais comum encontrar como *variedade*. Porém, optamos por utilizar a tradução literal da palavra em alemão, ou seja, *multiplicidade*.

Ele não menciona explicitamente o quinto postulado, mas considerando que o trabalho de Legendre, *Éléments de géométrie*, era largamente conhecido na época, podemos supor que era a esse postulado que ele se referia, já que trabalho de Legendre contém um teorema sobre a soma dos ângulos do triângulo que não depende do postulado das paralelas.

Uma multiplicidade é definida como uma extensão contendo pontos ou elementos, podendo no primeiro caso ser contínua, e no segundo caso, discreta. Uma multiplicidade seria então um “ente” matemático, formado por pontos ou elementos, que pode ter n -dimensões. Riemann chama os constituintes da multiplicidade de “especializações” (RIEMANN, 1959, p. 413)³⁴. O modo mais simples de se pensar em uma multiplicidade é associá-la à geometria, mas outras formas podem ser multiplicidades.

O espaço euclidiano é um espaço onde seus pontos formam uma multiplicidade tridimensional. O conjunto de todas as elipses que podem ser determinadas, individualmente, a partir de seus semi-eixos maior e menor, forma uma multiplicidade bidimensional. As possíveis posições de um sistema mecânico com n graus de liberdade constituem, em geral, uma multiplicidade n -dimensional, pois são fornecidas através de n equações (WEYL, 1952, p. 84). De um modo geral, a característica de uma multiplicidade n -dimensional é a de que cada ponto ou elemento que a forma pode ser determinado usando-se n parâmetros, onde n pode ser um número finito, mas pode ser também infinito de vários tipos.

Há multiplicidades nas quais a determinação da posição requer não um número finito, mas sim uma série infinita ou uma multiplicidade contínua de determinações de quantidade. Tais multiplicidades são, por exemplo, as possíveis determinações de uma função para uma dada região, as possíveis formas de uma figura sólida, etc. (RIEMANN, 1929, p. 415).

O que define a dimensão de uma multiplicidade é o número de parâmetros necessários para identificar cada ponto ou cada elemento sobre a multiplicidade, seja ela discreta ou contínua. Se em uma multiplicidade há dois pontos em que o modo de ir de um ao outro é único, então esse modo define uma multiplicidade linearmente estendida, ou seja, unidimensional, pois apenas com um parâmetro é possível localizar um ponto sobre a multiplicidade. Se há duas linhas, então são necessários dois parâmetros para localizar o ponto, pois ele pode estar em qualquer uma das linhas. Se são necessários dois parâmetros, então duas linhas definem uma multiplicidade duplamente estendida, ou seja, bidimensional; e assim sucessivamente para as outras dimensões, seja a multiplicidade discreta ou contínua (RIEMANN, 1959, p. 414).

Se um conjunto de especializações, ou seja, de pontos e elementos, forma regiões na multiplicidade, que são definidas por uma marca ou contorno, então esse conjunto é chamado Quantum. A comparação entre os quanta e a multiplicidade é determinada através de um processo de contagem (quantos quanta existem na multiplicidade), se a multiplicidade for discreta; ou através de um processo de medida, que pode ser feito utilizando-se um padrão, ou através de comparação com o todo, se a multiplicidade for contínua (RIEMANN, 1959, p. 413). Formado o

³⁴ Usamos a tradução para o inglês de Henry White [1929] 1959.

conceito de uma multiplicidade n -dimensional, o conceito de determinação de lugar é reduzido ao conceito de determinação de quantidade, ou seja, a determinação de um ponto numa multiplicidade a partir da determinação de quantas regiões há entre este ponto e um origem determinada.

Com as definições acima Riemann caracterizou uma multiplicidade, seus elementos e sua transformação e o modo de localização de um ponto sobre ela através de uma quantidade e não pela posição, ou seja, quantas coordenadas determinam a localização do ponto. Esta última condição pode ser considerada a primeira hipótese de Riemann, ou seja, a de que um elemento da multiplicidade é determinado por n grandezas contínuas independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ e, de modo recíproco, n grandezas determinam um único elemento da multiplicidade (FERNANDES, 1989, p. 97).

3.2.2 Relações métricas numa multiplicidade n -dimensional

As relações de medida em uma multiplicidade têm como fundamento a obra de Gauss, *Disquisitiones circa superficies curvas*, como o próprio Riemann observa, e possuem o caráter geométrico.

Determinações de medidas requerem que a quantidade seja independente da posição, o que pode acontecer de vários modos. A hipótese que apresentamos primeiro, é que o comprimento da linha é independente da sua posição, e conseqüentemente, toda linha é medida por qualquer outra linha (RIEMANN, 1959, p.415).

Este método de medição “relativo” permite estabelecer apenas quanto uma linha é menor ou maior que outra dentro da mesma região medida, mas não seu comprimento exato. Esta é a segunda hipótese de Riemann, ou seja, da independência da linha com a posição.

Estabelecida a independência da linha com a posição, deve-se ter as seguintes restrições e suposições: 1) as razões entre as variações infinitesimais das várias coordenadas x_i , (dx_i/dx_j) , variam de forma contínua, ou seja, está considerando apenas curvas suaves, contínuas; 2) as linhas podem ser divididas em partes de modo que as razões entre os dx_i são constantes; 3) o elemento de linha ds varia na mesma razão que as variações infinitesimais.

Com estas suposições, o elemento de linha pode ser escrito como uma função homogênea de 1º grau em dx_i , já que varia linearmente com dx_i , sendo que as constantes arbitrárias são funções contínuas das quantidades x_i .

Para procurar os casos mais simples, procurarei primeiro uma expressão para multiplicidades de $n-1$ dimensões que são em todo lugar eqüidistantes da origem do elemento linear; ou seja, procurarei uma função contínua da posição cujos valores distinguem um do outro. Partindo da origem, esta deve crescer em todas as direções ou decrescer em todas as direções; eu assumo que ela cresce em todas as direções, e portanto tem um mínimo naquele ponto. Se, então, o primeiro e o segundo coeficientes diferenciais desta função são finitos, sua diferencial primeira deve se anular, e a segunda diferencial não pode se tornar negativa; eu assumo que ela é sempre positiva. Esta expressão diferencial de segunda ordem permanece constante quando ds permanece constante, e aumenta na razão dupla quando o dx , e portanto também ds , aumenta na mesma razão; ela deve ser portanto ds^2 multiplicado por uma constante, e conseqüentemente ds é a raiz quadrada de uma função de segunda ordem integral homogênea sempre positiva das quantidades dx , na qual os coeficientes são funções contínuas das quantidades x (RIEMANN, 1959, p. 416).

Para o caso mais simples, considere esferas concêntricas ao longo de s , com centro na origem do elemento de linha ds , e seja f uma função de posição cujos valores sempre aumentam em todas as direções e para a qual a origem é um ponto de mínimo. Assumindo que os coeficientes da primeira e segunda derivadas são finitos, então a primeira derivada se anulará na origem (ponto de mínimo) e a segunda será sempre positiva. A função, desenvolvida em torno da origem, fornece $f=Cds^2$, onde f é sempre positiva e C são funções contínuas das quantidades x .

Embora Riemann não escreva a forma geral do elemento de linha, podemos tirar da análise que ele faz o seguinte: como f é sempre positiva, da suposição anterior entre ds e dx , encontramos que a expressão para o elemento de linha ds é da forma

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dx_i dx_j, \quad (3.13)$$

onde os $g_{ij}=g_{ji}$ são funções das variáveis x_i , utilizando linguagem atual.

A condição de que a derivada segunda não é negativa, permite estabelecer o elemento de linha para uma função de grau superior, desde que ela tenha um mínimo, como o caso da função de grau quatro:

O próximo caso na simplicidade incluiria aquelas multiplicidades nas quais o elemento de linha pode ser expresso como a raiz quarta de uma expressão diferencial quártica. A investigação deste tipo mais geral não requereria princípios diferentes, mas levaria um tempo considerável e traria pouca luz sobre a teoria do espaço, especialmente porque os resultados não podem ser expressos geometricamente (RIEMANN, 1959, p. 417).

Por se tratar de uma apresentação sem muitos cálculos, o raciocínio de Riemann é muitas vezes tido como “intuitivo” (PORTNOY, 1982, p. 4), mas se considerarmos que seu objetivo era encontrar uma definição para multiplicidade que dependesse apenas de “quantidades”, é compreensível que o caminho adotado seja através de suposições e construído direcionado para os resultados já conhecidos, como o elemento de linha de Gauss.

A seguir, Riemann considera o espaço tridimensional, em coordenadas retilíneas, para o qual a expressão para o elemento de linha é $ds = \sqrt{(\sum dx)^2}$, como sendo o caso mais simples e ao qual ele dá o nome de *chato*.

Para determinar a forma quadrática do elemento de linha, com coeficientes dependentes apenas das coordenadas intrínsecas da superfície curva, Gauss parametrizou a superfície curva³⁵. A equação do elemento de linha para Gauss depende das derivadas parciais das coordenadas x,y,z em função do sistema de coordenadas p,q adotado sobre a superfície curva. O caminho adotado por Riemann para determinar a expressão do elemento de linha não utiliza uma relação entre as coordenadas da multiplicidade e coordenadas cartesianas no espaço especial. Utiliza apenas coordenadas quaisquer que definem a posição dos pontos, e que por serem em número igual ao número de dimensões da multiplicidade, podem ser consideradas como coordenadas intrínsecas.

Na seção seguinte, Riemann introduz coordenadas geodésicas normais e estabelece um triângulo geodésico que seria a generalização do triângulo usado por Gauss para n dimensões. A métrica, ds^2 , pode ser representada, em primeira aproximação, por $\sum dx^2$ para valores

³⁵ O formalismo de Gauss pode ser encontrado no item 3.1 desta tese.

infinitesimais de x , mas existe um termo seguinte, que é uma função homogênea de segunda ordem de expressões do tipo $x_i dx_j - x_j dx_i$. Dividindo esses termos de ordem superior, que são infinitesimais de quarta ordem, pelo quadrado da área do triângulo geodésico de vértices $(0,0,0,...)$, $(x_1, x_2, x_3, ...)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, ...)$ fornece uma quantidade finita (chamemos de Q). Essa quantidade Q depende das geodésicas escolhidas, portanto depende do ponto inicial e da direção formada, e se mantém constante se o triângulo for escolhido numa mesma superfície. Quando a multiplicidade é plana, Q é zero, pois o elemento de linha é reduzido a $\sum dx^2$, e portanto, Q fornece o quanto a multiplicidade está se distanciando de uma multiplicidade plana. Riemann vai estabelecer uma relação entre Q e a curvatura de Gauss seria $\left(-\frac{3}{4}\right)Q$, já que é determinada apenas com relação à esfera auxiliar.

A análise feita por Gauss parte de um triângulo e seu correspondente sobre a esfera auxiliar, obtendo a relação entre as áreas, o que apresenta uma semelhança distante com o que é feito por Riemann, pois este define uma multiplicidade apenas pelas relações de medida.

Riemann argumenta que em uma multiplicidade plana, as relações métricas são expressas por uma função diferencial de 2ª ordem, independentemente das variáveis escolhidas, o que mostra que localmente a multiplicidade pode ser tratada como um espaço euclidiano, onde as geodésicas são retas. A curvatura em um espaço euclidiano n -dimensional, como um caso especial de um espaço riemanniano de curvatura constante, é igual a zero em todos os pontos.

Na demonstração do triângulo, inicialmente é estabelecido que uma geodésica é completamente determinada a partir de sua direção inicial. Cada triângulo escolhido a partir de um determinado ponto pode ser considerado como pertencendo a uma superfície formada por geodésicas que passam por esse ponto. Para cada uma dessas superfícies pode-se encontrar uma curvatura característica. Riemann então estende o teorema de Gauss sobre mapeamento de superfícies, para o caso n -dimensional.

Na idéia de superfícies, junto com suas relações de medidas intrínsecas nas quais somente o comprimento das linhas sobre as superfícies é considerado, está sempre misturada com a posição de pontos que estão fora da superfície. Podemos, entretanto, abstrair das relações externas se considerarmos deformações tais que deixam inalterados os comprimentos das linhas, ou seja, se consideramos a superfície como revirada de qualquer modo sem se esticar, e tratarmos todas as superfícies assim relacionadas entre si como equivalentes. Então, por exemplo, qualquer superfície cônica ou cilíndrica é considerada como equivalente a um plano, uma vez que podem ser transformadas neste apenas dobrando, e assim as relações de medidas intrínsecas permanecem, e todos os teoremas sobre um plano- toda a planimetria – mantém sua validade. Por outro lado elas são totalmente diferentes da esfera, a qual não pode se transformar em um plano sem se esticar. (RIEMANN, 1959, p.419)

As relações métricas de uma superfície bidimensional são caracterizadas pela curvatura total. Como interpretações geométricas dessas caracterizações, Riemann argumenta que a curvatura total, multiplicada pela área de um pequeno triângulo geodésico fornece o excesso esférico do mesmo, ou seja, a área do triângulo é proporcional ao excesso esférico. Este teorema nada mais é que o teorema de Gauss sobre o excesso esférico de um triângulo (GAUSS, 1827, seção 20) em uma superfície, generalizado para um espaço n -dimensional.

A curvatura definida por Riemann depende da localização do ponto onde a curvatura será determinada e da direção da superfície que contém o triângulo analisado nesse ponto. No caso de multiplicidades em que a curvatura é constante para todas as direções que a geodésica assume, as

relações métricas passam a depender apenas do elemento de linha, que é um invariante, e da curvatura, assumindo a expressão

$$ds^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\alpha \sum x^2} \sum dx^2, \quad (3.14)$$

onde α é o valor da curvatura (RIEMANN, 1959, p. 421)³⁶. Um caso particular de multiplicidade com curvatura constante é aquele que possui curvatura total nula em todos os pontos e em todas as direções, ou seja, o espaço euclidiano. Riemann utiliza como ilustração dessas idéias a análise de superfícies curvas e indica que nas superfícies de curvatura constante as figuras podem girar e se deslocar sem deformação.

A idéia de figuras, ou corpos, se deslocando sobre uma superfície, tendo sua forma condicionada apenas à curvatura, independente das coordenadas, foi utilizada posteriormente por Helmholtz na teoria de grupos (SCRIMIERI, 1992, p. 129) e também nas tentativas de divulgação da geometria não-euclidiana, como faz Poincaré, e que detalharemos posteriormente.

Superfícies com curvatura positiva constante podem ser caracterizadas por uma esfera com raio R e com curvatura $\alpha = 1/R^2$, o que é semelhante à expressão encontrada por Gauss no espaço euclidiano. A curvatura será maior quanto menor for o raio R da esfera que pode ser associada. Podem ser representados diferentes tipos de curvaturas por superfícies que sejam tangentes à esfera no equador, como na figura 3.12. Um cilindro apresenta curvatura nula. Um anel que tangencie a esfera no equador, e que é indicado pelos círculos tangentes, tem curvatura negativa nessa região. Um elipsóide que tangencie a esfera por dentro, e que esteja contido na esfera, teria uma curvatura positiva maior que a da esfera no ponto de tangência.

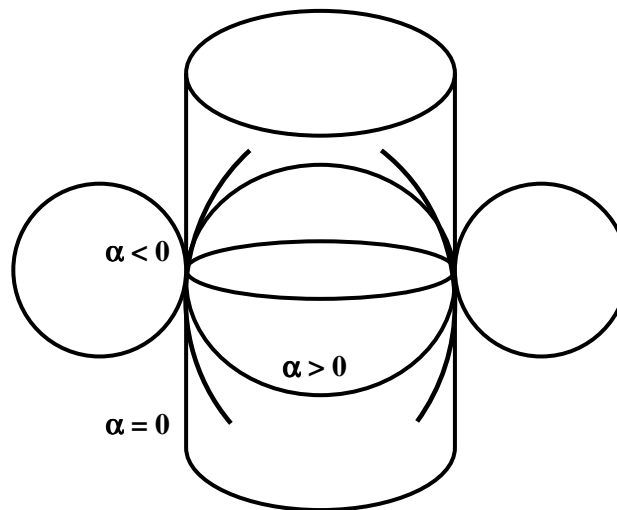


Figura 3.12: Em torno da esfera central, de curvatura positiva, é possível representar uma superfície com curvatura nula (cilindro) e uma superfície com curvatura negativa (anel em torno do cilindro, cuja seções normais são os círculos externos ao cilindro).

³⁶ A demonstração da expressão encontrada por Riemann pode ser obtida usando-se símbolos de Christoffel, como faz Scrimieri (1992, pp. 142-148).

A distinção entre superfícies com curvatura positiva e aquelas com curvatura negativa é feita através do conceito de *regiões de superfície*. As regiões de superfície corresponderiam a partes da superfície que podem se deslocar pela superfície.

Se consideramos estas superfícies como *locus in quo* para regiões de superfícies se movendo nelas, assim como Espaço é o *locus in quo* para os corpos, as regiões de superfícies podem se mover em todas estas superfícies sem deformações³⁷. As superfícies com curvatura positiva podem sempre ser de tal modo construídas que regiões de superfícies podem ser movidas arbitrariamente sobre elas sem deformações [...] (RIEMANN, 1959, pp. 421-422).

Para exemplificar, considere uma região circular numa esfera: ela pode se mover ao longo de toda esfera sem que seu formato seja alterado. A diferenciação entre curvatura positiva e negativa de Riemann difere da de Gauss, uma vez que não leva em consideração a direção da normal e, portanto, não é uma propriedade intrínseca da superfície, mas que só pode ser observada externamente. Para uma superfície com curvatura nula haveria também uma independência quanto à direção, ou seja, a direção de um vetor tangente à região de superfície permaneceria a mesma ao longo de toda a superfície plana. No entanto, esta afirmação só pode ser considerada se tomamos como superfície de curvatura nula apenas o plano, já que em um cilindro ou em um cone a direção do vetor pode se alterar, dependendo da direção inicial adotada.

Considerando-se a independência do comprimento de uma linha com a posição e as demais relações métricas em uma multiplicidade, podemos estabelecer três condições para que uma multiplicidade riemanniana seja considerada euclidiana, infinitesimalmente:

- 1- A curvatura deve ser igual a zero em todos os pontos e em todas as direções, sendo que as propriedades métricas serão determinadas se a soma dos ângulos do triângulo é sempre igual a dois ângulos retos, ou seja vale o teorema de Pitágoras: o quadrado da distância entre dois pontos é uma forma quadrática das coordenadas relativas dos dois pontos.
- 2- Se a curvatura é constante em todo lugar, e as linhas são independentes da posição, as figuras podem se mover sem deformação, o que equivale a dizer que, se a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, a soma dos ângulos de qualquer outro triângulo também será igual a dois ângulos retos.
- 3- Se além do comprimento da linha ser independente da posição e da direção, ou seja, ao mover um objeto numa multiplicidade, o comprimento não se altera; também a direção seja independente da posição, ou seja em qualquer lugar da multiplicidade a direção é a mesma, então a posição pode ser expressa por três unidades independentes³⁸.

3.2.3 Aplicações ao espaço

No final do artigo, Riemann irá discutir o quanto do que foi falado é comprovado empiricamente. Neste caso, deve haver uma distinção entre relações de extensão (para multiplicidades descontínuas) e relações métricas (para multiplicidades contínuas):

Para as primeiras, onde os possíveis casos formam uma multiplicidade discreta, a experiência, ainda que não seja totalmente certa, não é inexata, uma vez que o processo é

³⁷ Riemann está se referindo à superfícies com curvatura constante.

³⁸ As três unidades seriam o comprimento, a direção e a posição, todas independentes entre si.

de contagem; enquanto que para as relações métricas, onde os possíveis casos formam uma multiplicidade contínua, toda determinação da experiência permanece inexata. Discutir a experiência em termos de extensão e métrica é importante porque quando se trata do infinitamente pequeno, menores medidas tornam mais impreciso o resultado; enquanto que para o infinitamente grande, a imprecisão está além dos limites de observação operacionais. As relações métricas ou de extensão determinam como deve ser o espaço (RIEMANN, 1959, pp. 422-423).

Segundo Riemann, o espaço pode ser ilimitado mesmo sendo finito. A ilimitação está vinculada a relações de extensão enquanto a infinitude está vinculada a relações métricas. O melhor exemplo disto é uma esfera que é ilimitada, ou seja, um objeto pode ser deslocado por toda a esfera sem encontrar uma barreira ou um ponto que não pode ser ultrapassado (sem fronteiras); porém é finita, pois por mais que dê voltas em torno da esfera o objeto sempre volta ao mesmo lugar. Ao infinitamente pequeno ele relaciona os experimentos com átomos, e ao infinitamente grande, os experimentos astronômicos.

As relações de extensão, as relações métricas e as hipóteses sobre uma curvatura diferente de zero, ou seja, uma geometria não-euclidiana, podem ser provadas e estão ligadas a outra ciência, a física, que Riemann alega não fazer parte da atual discussão. Merece ser destacada a observação de Riemann de que “*as relações métricas ou de extensão determinam como deve ser o espaço*”.

As idéias de Riemann eram muito diferentes da proposta da geometria diferencial e da geometria de n -dimensões, e sua apresentação, como na maioria de seus trabalhos, estava muito mais direcionada para os aspectos filosóficos da nova visão da geometria do que com cálculos ou aplicações. A aplicação da teoria apresentada foi parcialmente feita apenas em 1861, em um trabalho em que analisa a condução do calor³⁹.

Ainda que Riemann também discuta superfícies, ele vai além do que Gauss fez, pois ao tratar do espaço tridimensional, ou com mais dimensões, ele generaliza as idéias para um espaço genérico curvo, enquanto Gauss permanece restrito ao espaço euclidiano. Apesar de tratar de um espaço diferente, a forma de abordagem de Riemann é completamente diferente daquela de Lobačevskiĭ e Bolyai. Riemann não está preocupado com a questão das paralelas ou com a validade de postulados (geometria axiomática), mas com a definição e descrição das propriedades de um novo espaço, baseado nas relações métricas, que são estudadas usando a geometria diferencial.

3.3 REPERCUSSÃO E APLICAÇÃO DAS NOVAS GEOMETRIAS

O trabalho de Riemann só passou a ser discutido após sua publicação por Dedekind em 1867, e apresentava uma nova forma de entender o espaço e a geometria que causou diferentes reações na comunidade científica. Em 1870, Willian Clifford (1845–1879) propôs a *teoria*

³⁹ O trabalho apresentado à Academia Parisiense em 1861, faz uma análise da condução de calor como resposta a um problema proposto pela academia. Está dividido em duas partes: na primeira, Riemann faz uma análise geral e na segunda aplica especificamente o resultado para o problema proposto. Ainda que faça uso de transformação de coordenadas e utilize um pouco da linguagem do tema da apresentação, o trabalho apresenta poucos aspectos geométricos. Para Farwell (1990), a idéia que se tem de que o “*Commentatio*” foi uma aplicação de “*Sobre as hipóteses.*” é um engano, já que Riemann não utiliza os conceitos mais importantes da apresentação, como a multiplicidade e geodésicas em um espaço n -dimensional; porém para Klein, Rosenfeld, Portnoy e outros, é clara a utilização dos conceitos introduzidos na apresentação.

espaço-matéria, em que desenvolvia as idéias de Riemann sobre a variação da curvatura do espaço e sua implicação nas teorias físicas e que teve influência na concepção do tempo como uma quarta dimensão (TORRETI, 1984, p. 105).

A concepção de espaço de Riemann teve grande influência de Johann Friedrich Herbart (1776-1841), que possuía uma visão de espaço associada às percepções, diferente da concepção kantiana, que possuía uma visão empírica do espaço (TORRETI, 1984, pp. 107-109). Essa concepção influenciou em grande parte as discussões que ocorreram durante a segunda metade do século 19 sobre a origem e os fins da geometria no estudo do espaço. Discutia-se também a validade da geometria axiomática de Euclides na definição de espaço e interpretação dos espaços com curvatura diferente de zero.

Ao mesmo tempo em que a geometria de Riemann passava a ser conhecida, a geometria de Lobačevskiĭ e Bolyai, 40 anos após seus primeiros trabalhos, também começava a ser divulgada, como nos trabalhos de Beltrami, Poincaré, etc., o que permitiu a construção de uma geometria não-euclidiana n -dimensional.

Herman von Helmholtz (1821-1894) publicou três artigos entre 1866 e 1870 em que discutia os aspectos filosóficos da geometria e da concepção do espaço. Devido à sua formação de médico, Helmholtz propôs uma interpretação do espaço baseada mais em sensações do que em axiomas. Em 1870 ele publicou *Sobre a origem e o significado dos axiomas geométricos* em que estabelece suas conclusões finais sobre o espaço. Nesse trabalho ele propõe a construção de um mundo no interior de um espelho convexo em analogia ao espaço não-euclidiano. Como os conceitos geométricos estão baseados na percepção que se tem em relação às medidas, os habitantes do espelho não perceberiam que seu mundo não é euclidiano, já que eles só teriam a percepção do que ocorre dentro do espelho (HELMHOLTZ, 1876, p. 316).

Helmholtz também apresentou várias deduções sobre as multiplicidades de Riemann e o formato do espaço considerando a geometria não-euclidiana em n -dimensões (TORRETI, 1984, pp. 153-170) que influenciaram a teoria de grupos e a obra de Hilbert sobre os fundamentos da geometria, mas que não fazem parte do objetivo principal dessa tese e não serão discutidos aqui.

Henri Poincaré (1854-1912) também contribuiu para a disseminação das idéias de Riemann e da geometria de Lobačevskiĭ e Bolyai no final do século XIX e começo do século XX. Além de trabalhos matemáticos relacionados com a geometria não-euclidiana, Poincaré apresentou trabalhos em filosofia em que discutia o caráter empírico da geometria, no sentido de Kant, e a interpretação de um espaço diferente do euclidiano.

Nas obras sobre filosofia que escreveu (*Ciência e hipótese*, *O valor da ciência*, *Ciência e método*, *Últimos pensamentos*), Poincaré discutiu a concepção do espaço a partir do deslocamento dos corpos, como havia proposto Lobačevskiĭ. Ele estabeleceu um “dicionário” de correspondência entre termos da geometria não-euclidiana e termos da geometria de Euclides, que permitia a “tradução” de uma geometria na outra, mostrando que ambas eram consistentes (POINCARÉ, 1946, p. 59). Deste modo, não seria possível afirmar qual geometria era válida, pois ambas poderiam ser corretas. Várias geometrias poderiam existir, todas corretas e consistentes. Poderiam ser desenvolvidas teorias físicas válidas utilizando tanto a geometria euclidiana quanto a não-euclidiana, pois a geometria adotada dependeria da “conveniência”.

Poincaré acreditava que a geometria é construída através do estudo das leis pelas quais um sólido invariável se move. Para exemplificar, ele propôs um mundo no interior de uma esfera, no qual a temperatura interior variava de acordo com a lei $T=k(R^2-r^2)$, onde R é o raio da esfera e r é qualquer distância entre o centro e a superfície da esfera e conclui sobre a geometria válida nesse mundo (POINCARÉ, 1902, p. 87).

Na forma como foi apresentada inicialmente, a geometria proposta por Riemann não desenvolvia um formalismo matemático, apesar de conter uma equação semelhante ao elemento de linha de Gauss. Somente após os trabalhos de Beltrami e de Lamé, ela foi associada ao

formalismo dos parâmetros diferenciais e a toda a geometria diferencial de Gauss, e passou a ser uma geometria diferencial não-euclidiana. Foi Beltrami também que viu na geometria de Riemann uma associação com a geometria de Lobačevskiĭ e Bolyai, como discutiremos na próxima seção.

3.4 FORMAS QUADRÁTICAS E PARÂMETROS DIFERENCIAIS

Gabriel Lamé (1795-1870) graduou-se na Escola Politécnica em 1817 e na Escola de Minas, como engenheiro, em 1820. Durante o período compreendido entre 1820 e 1832, acompanhou Clayperon à Rússia, onde trabalhou no planejamento e construção de estradas e pontes na cidade de São Petersburgo. Logo após voltar a Paris, abandonou a firma de engenharia que havia feito com Clayperon, para assumir a cadeira de física na Escola Politécnica, continuando carreira tanto como professor, como consultor na área de engenharia de estradas e trens (GREITZER, 1981, p. 601).

Lamé sempre desenvolveu sua obra tendo em vista a aplicação da teoria, como pode ser observado em seus trabalhos sobre termodinâmica e teoria da elasticidade, o que o tornou teórico demais entre os engenheiros e aplicado demais entre os matemáticos.

As obras de Lamé abrangem teoria da elasticidade e teoria de coordenadas curvilíneas, além do estudo da teoria do calor. Em *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, de 1859, Lamé desenvolveu idéias que já tinha apresentado em trabalhos anteriores, como o conceito de função de ponto e o conceito de parâmetros diferenciais, associando-os a conceitos físicos, envolvendo teoria do calor e potencial. Como o próprio Lamé menciona na introdução do trabalho, ele está preocupado com famílias de superfícies caracterizadas por uma propriedade comum, mais propriamente propriedades de elasticidade e hidrostática, que podem ser estudadas usando geometria, num espaço tridimensional.

De acordo com a lei de atração universal, se, para qualquer ponto do espaço, considera-se a soma das massas de todas as moléculas materiais do universo, respectivamente divididas por suas distâncias a esse ponto, obtém-se a função a que se dá o nome de *potencial*, e da qual a derivada parcial, seguindo uma direção qualquer, fornece a componente, seguindo essa mesma direção, da resultante das atrações exercidas sobre o ponto considerado. O potencial tem o mesmo valor para todos os pontos de uma certa superfície, que se chama também superfície de nível e que também tem a propriedade deste de ser normal à resultante das atrações. O espaço é o lugar geométrico de uma infinidade de superfícies da mesma natureza, as quais compõem uma família de superfícies de igual potencial, e cuja consideração esclarece singularmente o enunciado e a solução de um grande número de problemas da mecânica celeste (LAMÉ, 1859, p. vi).

Lamé também usa o espaço como lugar geométrico da família de superfícies equipotenciais no caso do calor, caso em que as superfícies corresponderiam às isotermas. Ele associa o estudo das famílias de superfícies isotermas como uma extensão dos trabalhos em geometria diferencial de Gauss, Monge e Liouville.

A integração de equações com diferenciais parciais de funções de duas variáveis apenas, é o estudo de superfícies individuais, ou a análise aplicada de Monge, completada pelos trabalhos numerosos, de Gauss, de Liouville, e de outros geômetras. Enfim, a integração de equações com diferenciais parciais de funções de três variáveis, corresponde ao estudo, que será objeto desse curso, de superfícies reunidas em famílias, de superfícies isotermas,

de superfícies de nível, de superfícies de ondas, de superfícies de isostáticas ou ortogonais. (LAMÉ, 1859, p. xi)

Enquanto Gauss, Monge e Liouville restringem sua geometria diferencial a uma curva sobre uma superfície, ou uma linha sobre uma esfera, ou uma curva sobre o elipsóide, como é o caso de Liouville, Lamé pretende estudar funções de três variáveis, ou seja, *superfícies curvas* que se sobrepõem e que possuem as mesmas propriedades. Para Lamé, seria possível usar do mesmo método para o estudo de funções com mais de três variáveis, mas isso seria apenas geometria analítica, sem uma possível visualização. Como seu objetivo direto é a aplicação dos novos métodos da geometria diferencial na física, principalmente nas equações de calor, ele se restringe a 3 dimensões. No caso da mecânica, o uso de três dimensões descreve completamente toda a estática, enquanto que a dinâmica é explicada pela variação dessas famílias de superfícies em instantes seguintes (LAMÉ, 1859, pp. xii - xiii).

É pouco provável que Lamé tivesse conhecimento do trabalho de Riemann em 1859, já que este ainda não havia sido publicado, mas a definição de famílias de superfícies pode ser comparada às multiplicidades de Riemann.

Em qualquer sistema ortogonal, além dos três parâmetros das superfícies conjugadas, que são as três coordenadas curvilíneas, introduzirei mais três outras quantidades, ou coeficientes, cuja consideração é necessária para a completa definição do sistema. Isolamos uma das famílias, duas de suas superfícies infinitamente vizinhas, e o valor do parâmetro que pertence a uma delas. Geralmente, essas duas superfícies não são em toda parte igualmente distantes, e a espessura da camada, entre elas, varia de uma normal a uma outra. Se, portanto, dividimos o acréscimo constante do parâmetro, por essa espessura, a relação será variável, não somente de uma camada à outra, mas também por todo o comprimento de uma mesma camada. (LAMÉ, 1859, p. xv).

Seja F uma função de posição, entendendo como função de posição toda quantidade que possui um valor determinado e particular, e que pode ser escrita como uma função do sistema de quaisquer coordenadas, retilíneas ou curvilíneas. Lamé dá o nome de *parâmetro diferencial* à propriedade de diferenciação da função de posição (LAMÉ, 1859, pp. 5-6), sendo que

$$\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2},$$

corresponde ao parâmetro diferencial de primeira ordem ($\Delta_1 F$). O parâmetro diferencial de segunda ordem ($\Delta_2 F$) é dado por

$$\left(\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2}\right).$$

Os parâmetros diferenciais de primeira e segunda ordem são invariantes com relação ao sistema de coordenadas ortogonais. Assim, usando ρ_i como coordenadas ortogonais gerais, funções de x, y, z :

$$\rho = f(x_1, x_2, x_3), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \rho_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

os parâmetros diferenciais da função F podem ser escritos em função dessas novas coordenadas como (LAMÉ, 1859, pp 17-23)

$$\Delta_1 F = \sqrt{\sum h_i^2 \left(\frac{dF}{d\rho} \right)^2} \quad (3.16)$$

$$\Delta_2 F = h h_1 h_2 \left[\frac{d \left(\frac{h}{h_1 h_2} \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)}{d\rho} + \frac{d \left(\frac{h_1}{h_2 h} \frac{dF}{d\rho_1} \right)}{d\rho_1} + \frac{d \left(\frac{h_2}{h_1 h} \frac{dF}{d\rho_2} \right)}{d\rho_2} \right], \quad (3.17)$$

onde h_i são também parâmetros diferenciais de primeira ordem das coordenadas generalizadas ρ_i (LAMÉ, 1859, p.9). Neste trabalho de Lamé, nota-se a preocupação em procurar invariantes e trabalhar com coordenadas generalizadas que é característica que será utilizada posteriormente na geometria diferencial de Ricci e Levi-Civita, como veremos no Capítulo 5. É interessante observar que, se usarmos a notação de derivadas parciais, o parâmetro diferencial de primeira ordem corresponde ao módulo do gradiente e o parâmetro de segunda ordem corresponde ao laplaciano, que utilizamos atualmente.

Esse não foi o primeiro trabalho em que Lamé estudou as propriedades dos parâmetros diferenciais. Em 1852, em *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Lamé já havia relacionado o parâmetro diferencial de segunda ordem nulo à dilatação de corpos em equilíbrio elástico, corpos à temperatura de equilíbrio, etc., (LAMÉ, 1852, p. 69), o que correspondia à equação de Laplace; enquanto o parâmetro diferencial de primeira ordem determinaria a força H devida à presença de um potencial dado por F , ou seja, $H = \Delta_1 F$ (LAMÉ, 1859, p. 29).

Ainda que tenha sido fundamental para o desenvolvimento do cálculo tensorial (TAZZIOLI, 1997, p. 25) os parâmetros diferenciais de Lamé não tiveram relação com a geometria não-euclidiana até serem estudados por Eugenio Beltrami (1835-1900). Nos trabalhos de Lamé essas definições ficaram restritas ao estudo da teoria do calor e da elasticidade, sempre associadas a uma visualização geométrica, porém limitadas ao espaço euclidiano tridimensional.

Antes de 1872, os trabalhos de Beltrami envolviam principalmente geometria diferencial de curvas e superfícies, sob influência de Gauss e Lamé. Nesses trabalhos, Beltrami está restrito a um espaço tridimensional e, ainda que tivesse conhecimento dos trabalhos de Lobačevskii, não associou diretamente as equações da geometria diferencial a uma geometria que não fosse a euclidiana. Após conhecer o trabalho de Riemann, em 1868, Beltrami passou a desenvolver a geometria diferencial em um espaço que poderia ter dimensão maior que três e adotar o elemento de linha no formato deduzido por Riemann. Depois de 1872, seus trabalhos envolviam matemática aplicada nas teorias da elasticidade, eletromagnetismo e outras áreas da física (STRUİK, 1981, p. 599).

Beltrami também aplicou a geometria diferencial no caso das linhas geodésicas e deduziu equações que relacionavam a geometria diferencial com a mecânica, utilizando a integral de ação para determinar a equação da geodésica, como será visto no próximo capítulo.

Nos trabalhos em que apresenta um estudo da geometria num espaço tridimensional, fica evidente a influência que Beltrami recebeu de Gauss e Jacobi. O primeiro desses, com relação ao elemento de linha na forma quadrática e nas coordenadas intrínsecas da superfície; o segundo autor influenciou na interpretação diretamente relacionada às equações de movimento da mecânica, principalmente no que se refere às equações de isoperimétricos (BELTRAMI, 1868b, pp. 708-718).

Em *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Beltrami determina as propriedades de linhas geodésicas em superfícies com curvatura constante negativa e demonstra que a geometria de Lobačevskiĭ-Bolyai pode ser aproximada por uma pseudoesfera⁴⁰ (ver figura 3.13) (BELTRAMI, 1868a, pp. 384-385).

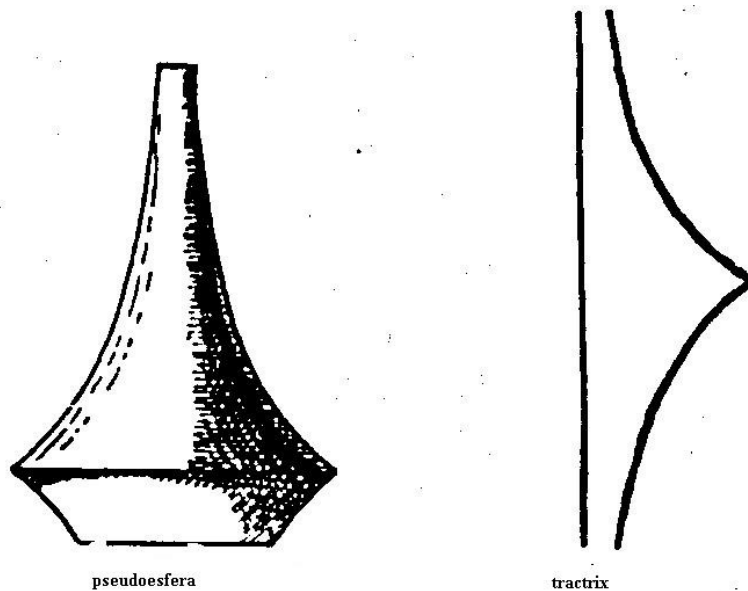


Figura 3.13: Para Beltrami, a pseudoesfera corresponderia à geometria de Lobačevskiĭ-Bolyai. A pseudoesfera corresponde à revolução do tractrix em torno do eixo reto.

Inicialmente, ao estudar a geometria de Lobačevskiĭ, Beltrami imaginou que ela só poderia ser válida em *superfícies especiais*, e não que esta geometria estaria associada a um *espaço* diferente do euclidiano.

Beltrami pretendia estabelecer um fundamento para a geometria de Lobačevskiĭ a partir de uma “substância real”, que seria a geometria euclidiana e isso poderia ser feito através da “planimetria” da geometria de Lobačevskiĭ. Ele parte de dois critérios de demonstração: a superposição de figuras iguais e a linha reta como o elemento fundamental de construção na geometria elementar. Porém, tanto para o critério da superposição de figuras, quanto o da linha reta, é preciso considerar a curvatura da superfície, como fez Gauss. Para eliminar o problema da curvatura da superfície, o que faria que uma reta não “obedecesse” à sua definição elementar, Beltrami resolve aplicar, na analogia entre a geometria euclidiana e a geometria de Lobačevskiĭ planificada, a linha geodésica.

⁴⁰ A pseudoesfera é a revolução da tractrix. A tractrix é uma curva eqüitangencial, estudada por Huygens em 1692.

Uma linha geodésica sobre qualquer superfície possui a propriedade de ser (geralmente falando) determinada sem ambigüidade por apenas dois de seus pontos. Mas para a superfície de curvatura constante, e só para esta, mantém integralmente a propriedade análoga àquela da reta no plano, que é: se temos duas superfícies, nas quais a curvatura seja constante em todos os pontos, e igual em ambas, e se sobre cada uma existe uma linha geodésica, fazendo encaixar a duas superfícies de modo que as geodésicas se sobreponham nos dois pontos, essa sobreposição se mantém ao longo de toda extensão (BELTRAMI, 1868a, p.376).

Porém, o argumento de Beltrami não é correto porque se compararmos um cilindro ou um cone, com o plano, que possui a mesma curvatura, podemos ter geodésicas que coincidam em dois pontos para o plano e o cilindro, e que não coincidam no cone. Beltrami não reconhece esta falha da analogia, apenas a existente quando é considerada uma esfera (curvatura constante positiva). Nesse caso, pode haver mais de uma geodésica passando pelos mesmos dois pontos opostos da esfera. A seguir, Beltrami pretende mostrar o que acontece no caso de uma superfície de curvatura negativa, que ele chama de pseudoesfera. Ele não deduz, mas para conjunto de coordenadas u, v , numa superfícies com curvatura igual a $(-1/R^2)$, apresenta a forma do elemento de linha como (BELTRAMI, 1868a, p. 377)

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (a^2 - u^2)dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}, \quad (3.18)$$

onde a é uma constante.

Implícito ao argumento de Beltrami, está o fato de que as geometrias euclidiana e não-euclidiana têm que ser autoconsistentes, ou seja, um prova de inconsistência da geometria não-euclidiana levaria a uma inconsistência na geometria euclidiana também (GRAY, 1989, p.150).

Na projeção de superfícies com curvatura constante negativa sobre um plano, as linhas geodésicas são representadas por cordas do círculo que se forma no centro da figura e que tem raio a ⁴¹. Nesse caso, Beltrami encontra que uma linha geodésica é unicamente determinada por dois pontos. Ele mostra em detalhes que a geometria de Lobačevskiĭ é satisfeita na pseudoesfera se o que for reta para Lobačevskiĭ for identificado com linhas geodésicas. A singularidade presente na pseudoesfera, não é discutida por Beltrami, e foi estudada por David Hilbert em 1901 (TORRETI, 1984, pp. 135-136).

Em *Sulla teoria delle linee geodetiche* (BELTRAMI, 1868b), Beltrami utiliza as equações de Euler-Lagrange, nas condições de máximo e mínimo, e o elemento de linha nas coordenadas intrínsecas na forma dada por Gauss, para determinar as relações métricas e isoperimétricas em uma superfície com curvatura negativa. Desta forma também ele consegue encontrar a condição para a geodésica numa superfície com curvatura negativa, onde o elemento de linha é dado pela Eq. 3.18. Nesse trabalho, Beltrami ainda está restrito ao espaço tridimensional, aplicando a teoria de Lobačevskiĭ para superfícies especiais; as geodésicas para o espaço n -dimensional só serão estudadas após o conhecimento do trabalho de Riemann, em *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (1868c).

Nesse trabalho, Beltrami associa dois conceitos que até então haviam sido estudados separadamente: os parâmetros diferenciais de Lamé e a forma quadrática na descrição do elemento de linha de um espaço n -dimensional.

⁴¹ Beltrami chama de “círculo limite”.

Ao introduzir os parâmetros diferenciais, Lamé estava restrito à coordenadas curvilíneas ortogonais, como vimos no início desta seção. Jacobi em um trabalho de 1836, mostra a restrição presente no trabalho de Lamé, esclarecendo-a. Porém, ao explicar a restrição de Lamé, Jacobi restringe seu próprio trabalho ao caso em que o elemento de linha deve estar reduzido à forma $ds^2 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ (BELTRAMI, 1868c, pp. 74-75).

Beltrami pretende mostrar que a teoria do parâmetro diferencial é válida independentemente da forma do elemento de linha, desde que seja quadrática, e do número de variáveis. Apesar de usar uma notação comum à geometria, o número de variáveis maior que três não permite uma visualização, como no caso da geometria tridimensional.

Antes de entrar no assunto, peço licença por algumas vezes usar a linguagem geométrica, não obstante o número de variáveis ser maior do que três (BELTRAMI, 1868c, p. 77).

Beltrami considera que qualquer função que possa ser escrita sob a forma quadrática⁴²

$$ds^2 = \sum a_{rs} dx_r dx_s, \quad (3.19)$$

pode satisfazer a equação para os parâmetros diferenciais na forma dada por Lamé.

Assumindo a condição de positividade para o elemento de linha e dx e δx como variações infinitesimais em direções diferentes, Beltrami encontra duas condições que lhe permitem escrever a equação da geodésica.

Primeiro, que $\frac{\sum a_{rs} dx_r \delta x_s}{ds \delta s} < 1$, sempre, podendo ser associado a um ângulo θ , tal que $\sum a_{rs} dx_r \delta x_s = \cos \theta ds \delta s$ ⁴³. Isso o leva a concluir que:

a possibilidade de satisfazer a equação acima com um valor real de θ , de tal modo que é satisfeita a condição inicial pela qual a expressão diferencial quadrática se mantém positiva para qualquer sistema de valores de dx , conduz à importante consequência de que se pode considerar o ds dado como um elemento linear, análogo àquele que possui este nome na teoria de superfície e na geometria analítica do espaço (BELTRAMI, 1868c, p.86)

A associação com um ângulo, permite que Beltrami utilize a equação para construir um triângulo, de lados dx e δx , baseado na relação entre seus lados e o ângulo entre eles. Isto leva à segunda condição, que é a da ortogonalidade, ou seja, quando $\sum a_{rs} dx_r \delta x_s = 0$, é possível determinar a equação de uma linha introduzindo uma variável independente t :

Quando a expressão quadrática $[ds^2 = \sum a_{rs} dx_r dx_s]$ se mantém constantemente positiva, constituindo uma determinada dependência das n variáveis x_i da única variável independente t , define-se uma série, geralmente contínua, de um sistema de valores de n

⁴²Beltrami demonstra que qualquer função escrita nessa forma é passível de transformação para qualquer sistema de coordenadas, mantendo as mesmas propriedades (BELTRAMI, 1868c, pp. 77-83).

⁴³ Isto é o que se utiliza em geometria diferencial para representar o produto escalar em coordenadas quaisquer.

variáveis, série que pode ser concebida como uma *linha* da qual ds é o arco elementar (BELTRAMI, 1868c, pp. 87-88).

Fazendo $s' = \frac{ds}{dt}$ e $x' = \frac{dx}{dt}$, sendo $s' = \sqrt{\sum a_{rs} x'_r x'_s}$, a equação para a linha mínima, é dada por

$$\frac{\partial s'}{\partial x_r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s'}{\partial x'_r} \right), \quad (3.20)$$

Esse ponto no trabalho de Beltrami é muito importante para o que será discutido no capítulo seguinte, pois ele utilizou uma relação de mínimo conhecida na mecânica para determinar a equação da geodésica, supondo-a uma função quadrática. Ou seja, Beltrami está aplicando para uma função quadrática a condição de mínimo das equações de Euler-Lagrange, embora não seja desta maneira que utilizamos na mecânica.

As equações de Euler-Lagrange, como conhecemos atualmente, são dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

obtidas a partir da variação $\delta \int_a^b L dt = 0$, que é uma condição de mínimo. Porém, $L = T - U$, que não é uma função quadrática. Essa é a principal questão para o próximo capítulo da tese.

Escolhendo para uma das variáveis a distância entre dois corpos e o coeficiente $a_{11}=1$, o que significa adotar a primeira variável como radial e utilizando a Eq. 3.20 e a forma da Eq. 3.19 para o elemento de linha, Beltrami encontra a forma generalizada do elemento de linha como (BELTRAMI, 1868c, p. 89):

$$ds^2 = dx_0^2 + \sum a_{rs} dx_r dx_s. \quad (3.21)$$

A Eq. 3.21, considerando apenas duas variáveis, é uma generalização para coordenadas esféricas e corresponde à simplificação do elemento de linha de Gauss (Eq. 3.12). Beltrami também pretende generalizar os parâmetros diferenciais de Lamé para o caso de mais de três variáveis, pois eles corresponderiam à descrição da variação do elemento de linha ao longo das n variáveis. Supondo uma função qualquer U , que corresponde à função de ponto de Lamé, Beltrami encontra a expressão para o parâmetro diferencial de primeira ordem como (BELTRAMI, 1868c, p. 91)

$$\Delta_1 U = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s}, \quad (3.22)$$

sendo os coeficientes A_{rs} recíprocos a a_{rs} . A Eq. 3.22 corresponde à uma forma generalizada do parâmetro diferencial de Lamé e é independente das coordenadas. No caso em que o elemento de linha ds é normal à função de posição U , então a Eq. 3.22 corresponde ao módulo do gradiente, e Beltrami a escreve como

$$\Delta_1 U = \left(\frac{dU}{ds} \right)^2. \quad (3.23)$$

Esta fórmula [Eq. 3.22] exprime que o parâmetro diferencial de primeira ordem da função U é igual ao quadrado da relação entre o incremento dU devido a uma variação ds normal a $U=const.$, dividido pela variação dessa normal ds . Ora, esta propriedade concorda exatamente com aquela que é característica do parâmetro considerado por Lamé no espaço ordinário de três dimensões. (BELTRAMI, 1868c, p. 92).

Beltrami também encontra a expressão para o parâmetro diferencial misto, que dependeria de duas funções U e V , dada por (BELTRAMI, 1868c, p. 93):

$$\Delta_1 UV = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} = \frac{dU dV}{ds^2} \quad (3.24)$$

Como a condição $U=const.$ e $V=const.$ em três dimensões determina superfícies ortogonais, $\Delta_1 UV = 0$ representa que os dois gradientes são perpendiculares. O parâmetro diferencial de segunda ordem é dado por Beltrami como (BELTRAMI, 1868c, p. 98)

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum \frac{\partial (U_r \sqrt{a})}{\partial x_r}, \quad (3.25)$$

onde $\sqrt{a}$ é o determinante da matriz formada pelos a_{rs} (BELTRAMI, 1868c, p. 78). A Eq. 3.25 é igual à expressão determinada por Jacobi para o parâmetro diferencial de segunda ordem de Lamé para uma superfície no espaço euclidiano. Como já vimos, $\Delta_2 U$ representa o laplaciano, agora para o caso de um espaço n -dimensional onde o elemento de linha possui forma quadrática, independente das coordenadas⁴⁴.

Beltrami também encontra uma expressão que relaciona os raios de curvatura máximo e mínimo de uma superfície ($n=2$) aos parâmetros diferenciais de primeira e segunda ordem, obtendo (BELTRAMI, 1868c, p. 101)

⁴⁴ Beltrami aplica o parâmetro diferencial de segunda ordem na teoria de potencial, em artigos que publicou após 1880 (TAZZIOLI, 1993, p. 5).

$$\frac{\Delta_2 U}{\sqrt{\Delta_1 U}} - \frac{d\sqrt{\Delta_1 U}}{dU} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (3.26)$$

onde $U=const.$ é a equação que define a superfície. Essa relação já havia sido obtida por Lamé (LAMÉ, 1859, p.42), porém restrita ao espaço tridimensional e coordenadas curvilíneas ortogonais.

O resultado encontrado (já obtido por Lamé), revela uma perfeita analogia entre a *curvatura tangencial* (ou geodésica) de uma linha traçada sobre uma superfície e a *soma das curvaturas principais* de uma superfície existente no espaço, sendo que uma e outra quantidade é representada (exceção feita ao número de variáveis) por uma só e mesma expressão analítica. Esta analogia é a verdadeira origem de duas propriedades conhecidas há algum tempo, ou seja, que a soma das curvaturas principais é constante para a superfície cuja área, para um dado volume contido, é mínima, e é nula para aquela cuja área, entre dados limites, é um mínimo absoluto. (BELTRAMI, 1868c, p. 102).

Beltrami publicou outros trabalhos em que relacionava a teoria de Riemann com a sua pseudoesfera, expandindo-a para o caso de um espaço com mais de três dimensões, e no final do século XIX desenvolveu trabalhos em que procurava aplicar a teoria dos parâmetros diferenciais em espaços n -dimensionais à teoria do éter e da elasticidade (TAZZIOLI, 1993). Porém destaca-se sua tentativa de descrever os parâmetros diferenciais (que caracterizam, de modo geral, propriedades físicas, como propunha Lamé), usando apenas as propriedades intrínsecas das superfícies (TAZZIOLI, 1997, p. 36).

A equação encontrada para o parâmetro diferencial de primeira ordem (Eq. 3.23) é invariante e não depende das coordenadas nem utiliza o espaço euclidiano ou coordenadas cartesianas. A idéia de encontrar invariantes para um espaço n -dimensional, como faz Beltrami, foi o ponto de partida para a construção do cálculo diferencial absoluto.

Também foi importante para o desenvolvimento do trabalho de Beltrami e da mecânica não-euclidiana, o conceito de *geodésicas* ao longo do século XIX, como veremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

RELAÇÃO ENTRE GEODÉSICAS E PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Em 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) propôs o problema da braquistócrona, que pretendia determinar a equação da curva entre dois pontos num plano vertical, com alturas diferentes, para a qual o tempo da partícula, partindo do repouso de um ponto superior e indo para um ponto inferior, seja mínimo (figura 4.1). Esse problema foi resolvido em 1697 pelo irmão de Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, l'Hopital, Newton e Leibniz (SUSSMANN; WILLEMS, 1997, p. 33).

Se são dados dois pontos A e B em um plano vertical, então é necessário especificar a trajetória AMB do ponto móvel M, ao longo da qual, partindo de A, e sob a influência de seu próprio peso, ele chega em B no tempo mais curto. Aqueles que estão interessados em resolver este problema, é bom saber que ele não é, como parece, apenas especulativo e sem interesse prático. Ainda que não pareça, e isto pode ser difícil de acreditar, ele também é útil para outros ramos da ciência além da mecânica. Para evitar uma conclusão apressada, deve ser lembrado que a linha reta é a distância mais curta entre A e B, mas ela não é a que leva menos tempo. Entretanto, a curva AMB – que eu divulgarei no final deste ano se ninguém mais a encontrar – é muito bem conhecida entre os geômetras. (BERNOULLI, *apud* SUSSMANN; WILLEMS, 1997, p. 33)

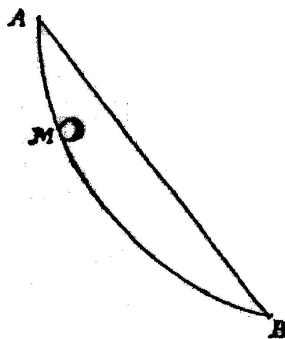


Figura 4.1: O problema da braquistócrona pretendia encontrar a equação da trajetória AMB que o corpo levaria o menor tempo possível para descrever, sob a influência de seu próprio peso.

A melhor solução para o problema da braquistócrona, segundo Mach (MACH, 1942, p. 522), foi a dada pelo próprio Johann Bernoulli e que partia do problema da luz (como proposto por Fermat) em um meio em que a velocidade obedecia a mesma lei dos corpos em queda livre, encontrando a equação da cicloide. A solução de Johann foi criticada por seu irmão, Jacob Bernoulli (1654-1705) e depois Euler apontou que tal argumento só seria válido se o meio não oferecesse resistência.

Esse problema serve como ponto de partida para algumas questões. Uma delas é quanto ao problema dos isoperimétricos⁴⁵: qual a sua influência sobre a mecânica? Como os problemas de mínimo se aplicam ao movimento? O movimento se dá tendo como objetivo o menor tempo, a

⁴⁵ O problema dos isoperimétricos consiste em encontrar a figura que tem a maior área, para um dado perímetro; ou o maior volume, para uma dada superfície. Depois esse nome foi generalizado para quaisquer problemas de máximos e mínimos.

menor energia, a menor distância, ou a menor ação? Como o conceito de geodésicas evoluiu durante os séculos XVII a XIX? Neste capítulo tentaremos responder a essas questões, limitados ao espaço euclidiano tridimensional, e no próximo capítulo será tratada a questão de um espaço mais genérico.

Durante os séculos XVII e XVIII, o problema dos isoperimétricos também atraía muita atenção, juntamente com o cálculo de máximos e mínimos, destacando-se os trabalhos de Leibniz, Euler e Lagrange, que tratavam do assunto de forma analítica, vinculando-o ao movimento dos corpos (STRUIK, 1933a, pp. 95-109).

O termo *geodésicas* apareceu vinculado à física, pela primeira vez, num tratado de Laplace de 1799 (NABONNAND, 1995, p.160)⁴⁶. Geodésicas, isoperimétricos e braquistócrona são conceitos interrelacionados e que vinculam a geometria diferencial e a mecânica.

Como foi visto no item 3.3, Beltrami deduziu a equação da geodésica num espaço n -dimensional partindo de uma equação de mínimo semelhante à equação de Lagrange para o princípio de mínima ação. Essa relação levou-nos a questionar a relação entre o princípio de mínima ação, a forma quadrática do elemento de linha e a relação com o conceito do lagrangiano que é utilizado atualmente.

A teoria das geodésicas passa por teoria de superfícies, geometria diferencial e cálculo de variações na mecânica. Estes três assuntos também sofreram várias modificações com o surgimento de uma geometria não-euclidiana, o que levou a uma nova interpretação da mecânica, baseada na nova geometria, ou seja, os diferentes tipos de espaços e o movimento dos corpos nesses espaços, o formalismo adotado no cálculo tensorial e, no século XX, o tempo considerado como uma coordenada.

De um modo geral, uma geodésica implica na minimização do elemento de linha ds^2 . Durante o século XVI, com os trabalhos de Leibniz, a minimização do caminho implicava a minimização da ação, e esta idéia era interpretada de forma metafísica. Depois de Leibniz, vieram os trabalhos de Euler, com rigor matemático e o início do cálculo variacional, e os argumentos de Maupertuis.

Na mecânica analítica de Euler e Lagrange, o princípio de mínima ação e a minimização do elemento de linha deixaram a visão metafísica e passaram a ter uma relação direta com as equações de movimento.

Se a geometria diferencial pode ser generalizada para o caso de um espaço n -dimensional qualquer, o mesmo poderia ser feito com as equações de movimento de um corpo e com o princípio de mínima ação.

Neste capítulo veremos as diferentes interpretações do princípio de mínima ação, desde o século XVII até as obras de Hamilton e Jacobi e como as diferentes teorias sobre a mínima ação se relacionam com a teoria das geodésicas no espaço euclidiano tridimensional.

4.1 O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO DE MAUPERTUIS

No século XVIII, o princípio de mínima ação começa a ser desenvolvido a partir dos trabalhos de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) e Leonhard Euler (1707-1783). Maupertuis partiu do princípio óptico do mínimo tempo de Fermat de 1662, adaptou-o à teoria corpuscular da luz (Newtoniana) e o aplicou a muitos problemas mecânicos, usando o conceito de

⁴⁶ Em *Traité de mécanique céleste* de Laplace: “Assim, todas as linhas traçadas pelas medidas geodésicas têm a propriedade de serem as mais curtas que se pode medir sobre a superfície do esferóide, entre dois quaisquer de seus pontos; [...] elas serão descritas por um móvel se movendo uniformemente sobre a superfície da esfera [...] designaremos estas linhas sob o nome de linha geodésica” (NABONNAND, 1995, p. 160).

ação de Leibniz (JOURDAIN, 1913, pp. 2-6; DUGAS, 1988, pp. 260-268). A *ação* para Leibniz era proporcional ao produto da massa pela velocidade e pelo deslocamento, ou ao produto da força viva pelo tempo, como veremos no final desta seção.

De acordo com Maupertuis, luz ou partículas seguem o caminho no qual a quantidade de ação é a mínima. Ele apresentou o princípio em palavras e não o escreveu na forma de uma equação. Suas primeiras publicações sobre este princípio, em 1744 e 1746, não estavam muito claras e seu uso do princípio de mínima ação era completamente diferente do corrente, como ele aplicou o princípio ao estudo da alavanca e colisões – objetos que não estão incluídos em nosso uso atual do princípio de mínima ação.

Membro da Academia de Ciências de Paris, Maupertuis foi convidado por Frederico, o Grande, sob a recomendação de Voltaire, para ser presidente da Academia de Ciências de Berlim, cargo que assumiu em 1746, ano em que apresentou à Academia seu trabalho aplicando o princípio da mínima quantidade de ação à mecânica (publicado em 1748).

Antes desse trabalho, Maupertuis havia escrito dois trabalhos em que aplicava a condição de mínimo na estática, em 1740 e 1744.

No trabalho de 1740, *Loi du repos des corps*, Maupertuis fez uma análise das condições de repouso de um sistema de corpos pesados, partindo de idéias iniciais que não têm demonstração, ou seja, fazem parte dos princípios da natureza.

O conceito de extremo, ou seja máximo ou mínimo, de um produto entre massa e distância a uma potência qualquer, aparece inicialmente na análise de decomposição de forças num sistema de três corpos. O máximo, ou o mínimo, corresponde à posição do centro de gravidade num conjunto de corpos pesados sustentados por uma alavanca e sujeitos a apenas uma força central.

Maupertuis encontrou a equação que dá as condições de equilíbrio em função das distâncias dos corpos ao ponto de apoio e da força aplicada em relação ao centro da alavanca. A condição de equilíbrio neste caso é aquela em que a soma dos produtos entre a distância e a força para todos os corpos do sistema é um valor máximo ou mínimo, e esse valor determina a posição do centro de gravidade. Apesar de ser uma lei baseada nos princípios da estática, Maupertuis argumentou que o resultado poderia ser aplicado à “mecânica ordinária”, mas não forneceu um exemplo (MAUPERTUIS, 1740, pp. 173-176). Embora neste trabalho Maupertuis não use a palavra *ação*, ele foi considerado posteriormente por Euler como o início do princípio de mínima ação, como veremos ainda nesta seção.

A interpretação metafísica do princípio de mínima quantidade de ação aplicado à mecânica tem seu início no artigo escrito em 1744, *Accord de différentes loix de la Nature*⁴⁷. Nele, Maupertuis discutiu três maneiras de se analisar o comportamento dos raios luminosos ao passar de um meio para o outro, utilizando o modelo corpuscular da luz.

A primeira dessas maneiras, aquela que é seguida por Descartes, supõe que a luz age como uma bola que atravessa uma superfície, e nesse caso, a luz andaria mais rápido num meio mais denso do que num meio mais rarefeito. A segunda das maneiras de se analisar a refração e reflexão da luz, é a de Newton, em que a relação seria de atração entre o raio e o meio, e também nesse caso a velocidade seria maior no meio mais denso. A terceira maneira, corresponde, nas palavras de Maupertuis, ao princípio metafísico em que a Natureza, por ser originada de um Ser divino, faz as coisas sempre da maneira mais simples.

A terceira classe enfim compreende as explicações que são extraídas de princípios metafísicos, daquelas leis em que a Natureza, por estar sujeita a uma inteligência superior,

⁴⁷ Este trabalho foi publicado somente em 1748.

na produção de seus efeitos, o faz sempre procedendo da maneira mais simples (MAUPERTUIS, 1744, p. 419).

Um século antes, Fermat já tinha aplicado uma idéia semelhante para a refração da luz, supondo que a luz ao ser refratada percorre o caminho no qual o tempo é mínimo. Porém, na sua análise, Fermat concluía que a luz deve caminhar mais lentamente no meio menos denso, o que entrava em conflito com a óptica de Descartes e depois com a de Newton. O que Maupertuis vai tentar fazer neste trabalho é conciliar uma idéia de mínimo ou de simplicidade com a óptica Newtoniana.

Levando em consideração o fato conhecido na época (nas palavras do próprio Maupertuis) de que a luz anda sempre em linha reta em um meio homogêneo, Maupertuis questiona se a luz “escolhe” tal caminho por ser o mais curto ou por ser o mais rápido. E concluiu que o caminho que a luz segue é aquele em que a *quantidade de ação* é mínima, sendo que esta grandeza é definida como segue:

A quantidade de ação é tanto maior quanto maior é a velocidade do corpo, e quanto maior é o caminho percorrido, ela é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre (MAUPERTUIS, 1744, p. 423).

A quantidade de ação é dada apenas pela definição anterior, sem o uso de uma expressão ou mesmo uma dedução matemática. Para aplicar o princípio de que a quantidade de ação é mínima na refração/reflexão da luz, Maupertuis utilizou o exemplo de um raio que vai de um meio para o outro, mudando de velocidade na refração (figura 4.2).

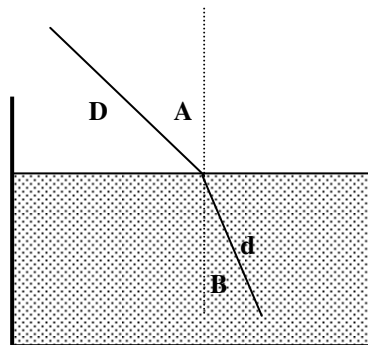


Figura 4.2: Maupertuis aplicou o princípio de mínima quantidade de ação no caso de um raio de luz que vai do meio A para o meio B, percorrendo as distâncias D e d em cada meio, respectivamente.

Aplicando o mesmo formalismo que usou nas alavancas, Maupertuis mostrou que, se vale a condição de mínima quantidade de ação, então se encontra a relação entre os senos dos ângulos de incidência e refração (MAUPERTUIS, 1744, p. 424). Neste caso então, a luz não percorre o caminho mais curto, pois não é uma reta; nem no menor tempo, pois está supondo a teoria Newtoniana para a luz – o tempo só seria o mais curto na teoria ondulatória - mas percorre o caminho no qual a *quantidade de ação* é mínima.

Maupertuis reconhece o princípio de mínima quantidade de ação como uma “causa final” aplicada à física, pois é válido quando o movimento completo é realizado. O princípio só pode ser aplicado se conhecidos os pontos inicial e final, ou do contrário, a luz poderia seguir qualquer caminho, o que foi uma crítica feita ao trabalho de Fermat. Se o princípio é aplicado no caso em que sabe-se que a luz sai de um ponto e vai para outro determinado ponto, então ele é válido.

O caráter de “causa final” do princípio só é justificado, na opinião de Maupertuis, se ele foi criado por um Ser supremo, que, com toda sua sabedoria e poder, é capaz de determinar as condições para que o movimento aconteça.

Os trabalhos de 1740 e 1744, apesar de tratarem de assuntos diferentes como alavancas e luz, apresentam o mesmo formalismo, sendo que o primeiro trata da condição de mínimo para a soma dos produtos de distância por força; e o segundo trata da condição de mínimo para a soma dos produtos de distância por velocidade.

Quase simultaneamente à publicação do trabalho de Maupertuis, Euler publica, em 1744, um trabalho em que aplica o princípio de mínima ação (sem utilizar esse nome), para o movimento de um corpo num meio sem resistência, como será discutido mais adiante.

Em 1746, Maupertuis escreveu *Les loix du mouvement et du repos déduites d'un Principe Metaphysique*, também publicado em 1748, em que fez referência ao trabalho de Euler de 1744. Maupertuis afirma que o princípio de mínimo dado por Euler é a aplicação do seu próprio princípio para o movimento dos planetas. No primeiro capítulo do trabalho, Maupertuis se dedica a mostrar como tanto o movimento dos planetas proposto por Newton, quanto a formação que algumas espécies possuem (e para isso dá o exemplo da “dura pele do rinoceronte”) são obras de um Ser⁴⁸ superior.

Ele também pretendia, através do movimento das partes da Natureza, mostrar que existe esse Ser. Maupertuis argumenta que a causa externa que inicia o movimento ou o interrompe, é proveniente desse Ser superior, que Aristóteles comparava a Deus. Esse Ser também explica o que acontece quando dois corpos colidem e o equilíbrio das alavancas.

O estudo da colisão entre corpos duros e elásticos é o que leva Maupertuis a aplicar o princípio de mínima ação. Segundo ele, os corpos, duros ou elásticos, são formados por corpos primitivos, que são duros, inflexíveis e inalteráveis. Os corpos elásticos possuiriam intervalos entre os corpos primitivos, permitindo uma flexibilidade; enquanto os duros não possuiriam esses intervalos. O movimento que ocorre após o choque entre dois corpos tinha sido explicado através de duas leis de conservação: a *conservação da quantidade de movimento*, estabelecida por Descartes; e a *conservação da força viva*, estabelecida após Descartes.

A primeira lei, segundo Maupertuis, não é válida em alguns casos; a segunda lei só é válida para corpos elásticos, o que levaria a concluir que só existem corpos elásticos. Portanto essas leis não formam um princípio universal do qual se poderia deduzir a lei geral de movimento dos corpos. Para Descartes, a quantidade de movimento é uma grandeza escalar e, nessa condição não se conserva em alguns casos. A *força viva* (ou *vis viva*) corresponde ao conceito de energia cinética e só se conserva para choque elástico.

O princípio que é válido para o movimento dos corpos duros, para o movimento dos corpos elásticos e se estende para a lei de repouso, portanto universal, segundo Maupertuis, é o *princípio da mínima quantidade de ação*.

No choque dos corpos, o Movimento se distribui de modo que a quantidade de ação, que supõe a ocorrência da mudança, é a menor possível. No repouso, os corpos que se mantêm em equilíbrio, devem estar situados numa posição tal que para qualquer pequeno movimento, a quantidade de ação seja a menor (MAUPERTUIS, 1746, p. 286).

Esse caráter de mínimo da ação e sua universalidade, o tornam digno de ser criado por um Ser supremo. Portanto, se esse princípio é válido, e ele só pode ter sido criado por um Ser supremo, esse Ser supremo existe. Ou seja, Deus existe. E Maupertuis tentou mostrar sua existência através desse princípio metafísico que é o de mínima quantidade de ação.

⁴⁸ Maupertuis recorre sempre à letra maiúscula para se referir a um ser onipresente e onipotente.

Provada a existência de Deus, Maupertuis usou o princípio de mínima ação como o princípio geral na análise de três problemas e o definiu como:

Princípio geral
quando ocorre qualquer mudança que haja na Natureza, a quantidade de ação, necessária para a mudança, é a menor possível (MAUPERTUIS, 1746, p. 290).

onde a *quantidade de ação* é definida como o produto da massa dos corpos por sua velocidade e pelo espaço percorrido. Note-se que no trabalho de 1744, quando falava sobre luz, ele não usava a idéia de massa das partículas. Maupertuis aplicou o princípio da mínima quantidade de ação no problema de choque entre dois corpos e encontrou as velocidades finais adquiridas pelos corpos após o choque.

O primeiro caso é o de dois corpos duros (não elásticos) que se movem no mesmo sentido com velocidades diferentes. Então seja o corpo com massa A e velocidade a , percorrendo um espaço a (considerando um tempo unitário); e seja o corpo com massa B e com velocidade b , percorrendo um espaço b . Eles se movem no mesmo sentido, mas a é maior que b , de modo que os corpos se chocam. Após o choque eles passarão a ter uma velocidade $b < x < a$. Esse movimento também pode ser visto como se A se movesse com uma velocidade $(a-x)$ quando analisado de um outro referencial (o que Maupertuis chama de “plano imaterial”) e percorresse um espaço $(a-x)$. Nesse referencial, o corpo B teria uma velocidade $(b-x)$ e percorreria um espaço $(b-x)$. A quantidade de ação é dada por $A(a-x)^2$ e $B(b-x)^2$ e a soma deve ser um mínimo. Portanto

$$Aaa-2Aax+Axx+Bxx-2Bbx+Bbb=\text{mínimo},$$

que, diferenciando em relação a x , pode ser escrita como

$$-2Aadx+2Axdx+2Bxdx-2Bbdx=0, \quad (4.1)$$

de onde se pode obter a velocidade x como

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Um raciocínio semelhante é feito para o choque de corpos duros se movendo em sentidos contrários e para corpos elásticos. Para o caso da lei de repouso (equilíbrio das alavancas), a quantidade mínima de ação é analisada supondo que os corpos que estão nos dois extremos têm um pequeno movimento em torno do ponto de equilíbrio, e que a soma das ações dos dois corpos é mínima (MAUPERTUIS, 1746, p. 292-294).

A quantidade de ação, como analisada na colisão por Maupertuis, não apresenta um “caminho” pelo qual acontece o movimento, ou seja, não são consideradas as posições inicial e final e o modo como é percorrido esse “caminho”, sendo portanto completamente diferente do modo como se aplica atualmente o princípio de mínima ação.

O princípio de mínima quantidade de ação e sua relação com o poder e a sabedoria do Ser divino que criou o Universo volta a aparecer em *Essai de Cosmologie* (MAUPERTUIS, 1750, p. 40), mas Maupertuis ainda o manteve restrito ao caso dos choques entre corpos duros ou elásticos.

Não está claro na argumentação de Maupertuis a que quantidade de ação ele está se referindo. Se esta quantidade de ação corresponde à quantidade total de ação, então a equação de conservação da diferença das velocidades obtida por Maupertuis nada mais é que a combinação da conservação da quantidade de movimento com a conservação da força viva (BACHELARD, 1975, p. 105).

No caso da refração da luz Maupertuis calculou a ação da luz antes da refração e depois da refração, somou as duas e impôs a condição de que essa soma fosse mínima. Se usasse, como esperado, o mesmo raciocínio para o problema da colisão, então teria que calcular o valor da quantidade de ação antes da colisão e o valor da quantidade de ação depois da colisão, somar as duas ações e impor a condição de que essa soma fosse mínima, ou seja

$$Aa^2+Bb^2+Ax^2+Bx^2=\text{mínimo},$$

Diferenciando esta equação em relação a x fica

$$2Ax+2Bx=0,$$

e portanto

$$x=0,$$

o que vai levar a uma conclusão errada. Na verdade ele utiliza uma idéia de ação mínima que é obscura, pois não está somando as ações antes e depois, mas está calculando uma ação que leva em consideração tanto a velocidade inicial quanto a final, e que no final dá certo. A Eq. 4.1 pode ser escrita como $Ax+Bx=Aa+Bb$, que representa a conservação da quantidade de movimento. No caso do choque entre corpos elásticos, o resultado que ele obtém é equivalente a usar tanto a conservação da quantidade de movimento quanto a conservação da *força viva*.

O conceito de ação já tinha sido utilizado por Leibniz em *Essai de Dynamique* para analisar colisões de corpos, sem usar a idéia de ação mínima, mas usando um conceito de *conservação da ação*, onde ele tenta mostrar, de maneira confusa, que, quando o tempo considerado é unitário, então a conservação da quantidade de ação equivale à conservação da “força”. Neste mesmo trabalho, Leibniz fala, às vezes, de uma “força total absoluta”; outras vezes, de “força viva absoluta”. Em todos os casos, cremos que ele está se referindo à *vis viva* (o dobro da nossa energia cinética), diferenciando-a da *vis mortua*, aplicada no caso da estática (BACHELARD, 1975, p. 106; LEIBNIZ, 1971, v. 6, p. 225).

O trabalho de 1746 de Maupertuis teve várias contestações na época. Algumas delas, como a de D’Arcy se referem às demonstrações que Maupertuis fez para encontrar a mínima quantidade de ação. D’Arcy resolveu usar a ação num sentido diferente do de Maupertuis e semelhante ao que chamamos de momento angular para fazer deduções relativas tanto a colisões quanto ao equilíbrio de alavancas (D’ARCY, 1753), e também na refração da luz (D’ARCY, 1756). Para ele, a ação tem a definição de d’Alembert:

[...] a ação é o movimento que um corpo produz ou tende a produzir sobre um outro (D’ARCY, 1753, p. 536).

Considerando esse conceito de ação, é possível fazer cálculos diferentes para a colisão, de modo que, se fosse usado o princípio de mínima ação, então teria sido necessário calcular a ação antes e depois do choque, depois considerar a soma ou a diferença das ações como mínima, levando a um resultado errado, como já mostramos. A discussão com D’Arcy rendeu vários

trabalhos publicados na Academia de Berlim e de Paris, a favor ou contra a argumentação de Maupertuis (JOURDAIN, 1913, pp. 32-43).

Outras contestações estavam relacionadas com a autoria do princípio geral. Segundo Samuel König, que reproduziu na *Acta Eruditorum* de Leipzig em 1751 uma carta escrita por Leibniz a Hermann em 1707, o princípio da mínima quantidade de ação no movimento dos corpos já havia sido estudado por Leibniz. Leibniz também defendia a utilidade das causas finais na física e propunha um “princípio da razão suficiente” ao qual estava relacionado o “princípio da perfeição”. Na física, segundo Leibniz, o princípio da perfeição determina o movimento atual entre todos os movimentos possíveis, de modo a haver uma quantidade que seja máxima ou mínima e que leva à idéia de “o melhor de todos os mundos possíveis” (HOFMANN, 1981, p.156). A idéia do melhor caminho possível e da quantidade que deveria ser máxima ou mínima leva a associar os argumentos de Leibniz aos de Maupertuis, pois ambos possuem fundamentos metafísicos e foram usados para justificar a existência do Ser superior na criação do Universo, confirmando uma associação entre teologia e mecânica que apareceu em diferentes períodos da história (MACH, 1942, p. 542).

Em seu estudo da obra de Leibniz, Gueroult observa que a ação aparece em Leibniz como *ação motriz* e tem a mesma definição que Maupertuis usou para o caso do choque dos corpos, mas é objeto de um princípio de *conservação* e não de mínimo (GUEROULT, 1934, p. 217). Porém a definição de ação motriz de Leibniz não está clara e confunde-se com a própria conservação da força viva, entendida como o produto da massa pela velocidade ao quadrado (LEIBNIZ, 1971, v. 6, p. 221). A idéia de Leibniz não teve influência pois não foi publicada e não era conhecida. Apenas seu conceito de ação é que foi utilizado por Maupertuis.

A ação, em sua definição como dada por Leibniz e válida na época, envolve o tempo. No caso do choque entre corpos, a mudança a que Maupertuis se refere ocorreu em um instante, um tempo indivisível, e portanto nulo. Assim, a ação também seria nula. No caso da refração da luz, a mudança na quantidade de ação ocorre entre dois pontos diferentes. A simples análise diferenciada para os dois casos já mostra que o princípio não tem a universalidade defendida por Maupertuis para sobrepô-lo ao princípio de conservação da *vis viva* e da quantidade de movimento (GUEROULT, 1934, p. 221).

A discussão com König envolveu Euler e outros membros da Academia de Berlim, e acabou levando à expulsão de König da Academia (DUGAS, 1988, p. 270).

4.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS NA OBRA DE EULER

O método de máximos e mínimos era objeto de estudo de vários matemáticos e filósofos durante o século XVIII, entre eles Leonhard Euler. Como apêndice à sua obra geométrica sobre máximos e mínimos, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Euler publicou uma análise do movimento de projéteis (em meios sem resistência) e movimento devido a forças centrais, determinado pelo método de máximos e mínimos: *Additamentum II. De motu projectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando* (EULER, 1744, pp. 309-320).

Nesse apêndice, Euler começa assumindo que existe alguma lei de máximo ou mínimo que rege o movimento curvo descrito pelos projéteis e se propõe encontrar qual a propriedade que obedece a essa lei. A apresentação de seu raciocínio é um pouco obscura porque ele representa a velocidade pela raiz quadrada de v , que representa por $\sqrt{v}$.

Seja a massa do corpo projetado = M , que se desloca um pequeno espaço = ds , com a altura associada à velocidade⁴⁹ = v ; a quantidade de movimento do corpo neste lugar será = $M \sqrt{v}$; a qual, multiplicada por esse pequeno espaço ds fornece $M.ds.\sqrt{v}$ que é o movimento coletivo do corpo pelo espaço ds . Digo então que a linha que é descrita pelo corpo é aquela na qual, de todas as outras linhas que têm as mesmas extremidades, $\int M.ds\sqrt{v}$ (ou, sendo M constante, $\int ds\sqrt{v}$) seja mínima (EULER, 1744, pp. 311-312).

Euler não justifica nem tenta justificar esse princípio e sim estudar suas conseqüências. Ele parece assumir que, se as conseqüências estão corretas, isso justifica o princípio. Euler não dá nenhum nome para a grandeza que está integrando e não utiliza a palavra ação neste trabalho. Euler assume que é possível representar a velocidade do projétil em função de sua posição, utilizando a lei das forças vivas (o equivalente à nossa lei da conservação da energia). Substituindo ds por $dr\sqrt{v}$, Euler conclui que $\int v.dr$ deve ser um mínimo e que ele descreve dizendo que na curva descrita pelo corpo projetado, a soma de todas as forças vivas que o corpo possui nos momentos individuais de tempo é mínima. A força viva é o produto da massa pelo quadrado da velocidade; Euler está desprezando a massa (que é sempre a mesma, no problema estudado por ele) e por isso está considerando que v representa a força viva (EULER, 1744, p. 312).

O primeiro caso em que Euler analisa as conseqüências desse princípio é o caso de um corpo que não está submetido a nenhuma força (EULER, 1744, p. 312). Nesse caso sua força viva é constante. Representando-a por b , o princípio de Euler afirma que $\int ds\sqrt{b}$ deve ser um mínimo – ou, como b é constante, $\int ds$ deve ser um mínimo, entre todas as trajetórias que possuem as mesmas extremidades. Portanto, o projétil deve descrever uma trajetória retilínea.

Note-se que Euler pensou, aqui, em um corpo livre, no espaço. Se o corpo estiver preso a uma superfície, sua trajetória não será uma reta, evidentemente. Euler já havia estudado, no capítulo 4 do volume 2 de sua *Mechanica* de 1736, o movimento de corpos presos a superfícies. O primeiro caso que ele estudou foi o de corpos que não estão sujeitos a nenhuma força (exceto a força que os prende à superfície). Nesse caso, o corpo descreve sobre a superfície uma “linha mais curta” – o nome que era dado, na época, às geodésicas (EULER, 1736, vol. 2, p. 464; cf. *ibid.*, p. 24). No mesmo capítulo, Euler mostrou que a trajetória também será uma geodésica se houver apenas forças normais à superfície, ou se houver atrito, ou se houver qualquer outra força na direção do movimento do corpo (como resistência do ar).

Voltando ao trabalho de 1744, o segundo caso estudado por ele é o de gravidade uniforme, com uma aceleração vertical constante g (EULER, 1744, pp. 312-313). Na figura 4.2, seja AM a curva descrita pelo corpo, que corta no ponto A a reta vertical CAP . Em um dado momento, o projétil está no ponto M , e sua altura (contada a partir do ponto A) é $AP=x$, sendo a distância horizontal percorrida por ele $PM=y$. O elemento da curva Mm é ds . Pelo princípio das forças vivas, a variação de Mv (onde v é o quadrado da velocidade) é igual ao trabalho realizado pela força, ou seja, $Mg.dx$. Portanto, $dv=g.dx$ e $v=a+gx$, onde a é uma constante de integração. A rigor, a variação da força viva dividida por 2, ou seja, o que chamamos de nossa energia cinética, é que corresponde ao trabalho realizado pela força. Haveria então um fator numérico 2 nas relações que Euler desenvolve, mas que ele despreza pois não afeta a propriedade de máximo ou mínimo da integral.

⁴⁹ Euler utilizou aqui a expressão técnica “altura associada à velocidade” (*celeritas debita altitudini*) que ele havia definido em seu livro *Mechanica*, de 1736, capítulo 3, definição 15: é a altura da qual um corpo deve cair, a partir do repouso, na superfície da Terra, para adquirir uma certa velocidade. Representando a velocidade (*celeritas*) pela letra c e a altura correspondente à velocidade por v , Euler indicou que v é proporcional a c^2 e que, por comodidade (pensando na velocidade como um espaço percorrido em certo tempo), podia ser utilizada a relação $v=c^2$ ou $c=\sqrt{v}$ (EULER, 1736, vol. 1, p. 80). Assim, para Euler, a letra v não representa a velocidade e sim o quadrado da velocidade.

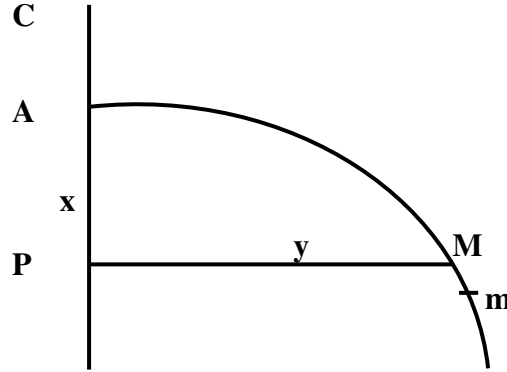


Figura 4.2: AM é a curva descrita pelo projétil sob a ação apenas da gravidade, e que corta a reta vertical CAP no ponto A.

Assim, o problema se transforma em encontrar a curva para a qual a integral $\int dt.(a+gx)$ ou $\int ds.\sqrt{a+gx}$ é um mínimo (ou, em notação moderna, $\int (a+gx)^{1/2} ds$ deve ser um mínimo). Agora, todas as grandezas que aparecem na integral são geométricas. Euler representa então dy/dx pela letra p , substituindo ds por $dx\sqrt{1+p^2}$ – ou, em notação moderna, $ds=(1+p^2)^{1/2}dx$. A integral que deve ser mínima se torna então (utilizando a notação de Euler) $\int dx.\sqrt{a+gx}(1+p^2)$ ou, em notação moderna, $\int [(a+gx)(1+p^2)]^{1/2}.dx$.

Euler compara então a equação obtida com a fórmula geral do problema de mínimos, que representa por $\int Z.dx$, onde Z é uma função de x , y e de $dy/dx=p$. A função Z , neste caso, é portanto $[(a+gx)(1+p^2)]^{1/2}$.

Para encontrar a trajetória, Euler utiliza um método que equívale ao uso daquilo que chamamos de “equação de Euler”. Antes de mostrar o modo pelo qual Euler resolve o problema, vamos indicar como ele seria solucionado atualmente, por notação moderna. A condição de mínimo da integral $\int Z.dx$ (ou, mais exatamente, condição de variação primeira nula) é satisfeita se

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial Z}{\partial y'} = 0,$$

onde $y'=dy/dx$. Nessa época, não existiam os símbolos de derivada parcial. Por isso, Euler utiliza uma outra forma de exprimir a mesma relação. Ele representa a diferencial total dZ da função Z por $dZ=Mdx+Ndy+Pdp$. Traduzido em notação moderna, $M=\partial Z/\partial x$, $N=\partial Z/\partial y$, $P=\partial Z/\partial p=\partial Z/\partial y'$. Para satisfazer a condição de mínimo da integral, devemos portanto ter $N-dP/dx=0$.

No caso que está sendo estudado, $Z=[(a+gx)(1+p^2)]^{1/2}$ e, portanto, $N=0$ e $P=p[(a+gx)(1+p^2)]^{-1/2}$. Logo, $N-dP/dx=0$ se reduz a $dP/dx=0$ e P deve ser uma constante, que Euler representou por $\sqrt{C}$. Resolvendo a equação diferencial, Euler obteve o resultado

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{C(a - C + gx)}.$$

Euler comenta então que essa é a equação de uma parábola, e escolhendo o vértice da parábola como o ponto onde x e y valem zero, obtém $C=a$ e a equação se reduz a

$$y = 2\sqrt{\frac{ax}{g}},$$

onde a pode ser interpretado como o quadrado da velocidade no vértice da parábola (EULER, 1744, pp. 312-313).

Antes de prosseguir a análise do trabalho de Euler, é importante fazer um comentário. Atualmente utilizamos o princípio de ação mínima sob a forma

$$\delta S = \delta \int L dt = 0.$$

O Lagrangeano L é a diferença entre a energia cinética K e a energia potencial V . Portanto, no problema estudado por Euler, o modo atual de resolver o problema seria diferente do utilizado por ele. A integral que deve ser mínima é $\int (Mv^2/2 + Mgx) dt$ (utilizando x com o mesmo significado empregado por Euler, ou seja, a distância medida de cima para baixo a partir do ponto mais alto do movimento). Eliminando a massa M , que é constante, e multiplicando por um fator numérico 2, teríamos $\delta \int (v^2 + 2gx) dt = \delta \int [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + 2gx] dt = 0$ e a solução do problema é obtida através da equação de Lagrange. Se chamarmos o integrando $[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + 2gx]$ de L' , devemos ter:

$$\frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 0 \text{ e } \frac{\partial L'}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} = 0,$$

onde $\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$. Como $\partial L'/\partial x = 2g$ e $\partial L'/\partial \dot{x} = 2\dot{x}$, obtemos $\ddot{x} = g$ (aceleração vertical constante). Como $\partial L'/\partial y = 0$ e $\partial L'/\partial \dot{y} = 2\dot{y}$, obtemos $\ddot{y} = 0$, ou seja, velocidade horizontal constante. É fácil mostrar que a trajetória é uma parábola, concordando com o resultado obtido por Euler. No entanto, o procedimento é completamente diferente; e Euler obtém diretamente a equação da trajetória, enquanto pelo procedimento atual obtemos as equações do movimento para cada componente.

Há outro ponto a ser discutido. O princípio proposto por Euler é representado pela afirmação de que $\int v \cdot dt$ deve ser um mínimo (onde v para Euler é o quadrado da velocidade). Poderíamos dizer, portanto, que o princípio exposto por Euler corresponde a $\delta \int K \cdot dt = 0$ e não, como aceitamos atualmente, $\delta \int L \cdot dt = \delta \int (K - V) \cdot dt = 0$. Portanto, de acordo com a abordagem atual da mecânica analítica, o princípio utilizado por Euler *está errado*. É difícil entender como Euler consegue chegar a resultados corretos. Esse ponto será discutido mais adiante.

Depois de estudar o movimento de projéteis com aceleração gravitacional constante, Euler estuda o caso de uma força variável na direção x (vertical). A aceleração X é uma função da coordenada x (EULER, 1744, pp. 313-314). Chamando, como antes, a coordenada horizontal de y , e substituindo, como no caso anterior, $dv = X \cdot dx$ (e, portanto, $v = A + \int X dx$) e $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$, a integral que deve ser mínima seria $\int dx \sqrt{(A + \int X dx)(1 + pp)}$. Chamando o integrando de Z , como no caso anterior, temos que $\partial Z / \partial p$ deve ser constante. Chamando essa constante de $\sqrt{C}$, Euler obtém o resultado

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A - C + \int Xdx}}.$$

Assim, a trajetória do corpo pode ser obtida pela integral

$$y = \int \frac{\sqrt{C}dx}{\sqrt{A - C + \int Xdx}}.$$

No caso seguinte estudado por Euler o corpo está sujeito a forças tanto na direção x quanto na direção y , e ele supõe que as acelerações correspondentes X e Y são funções apenas das coordenadas respectivas (EULER, 1744, pp. 314-315). Esse é um caso particular, em que a solução pode ser obtida por separação de variáveis sob a forma:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B + \int Ydy}} = \int \frac{dx}{\sqrt{C + \int Xdx}}.$$

Como casos particulares, Euler indica que, quando $\int Xdx$ e $\int Ydy$ são potências de mesmo grau de x e y , a trajetória pode ser obtida sob forma algébrica; dois casos especiais são quando essas integrais são proporcionais à primeira potência das coordenadas (trajetória parabólica) ou à segunda potência das coordenadas (trajetória elíptica). As integrais são proporcionais à primeira potência das coordenadas quando as acelerações forem constantes nas direções x e y , o que corresponde à queda livre quando a aceleração é considerada numa direção inclinada em relação a x e y . Já o caso em que a integral é proporcional à segunda potência da coordenada é quando a força é proporcional à primeira potência das coordenadas, ou seja, uma força central, proporcional à distância à origem.

A quinta situação analisada por Euler é a de forças centrais, ou seja, quando o corpo de massa M é impelido sempre na direção de um ponto fixo C , com uma aceleração T que depende apenas da distância t entre M e C (EULER, 1744, pp. 316-317). Euler apresenta a solução geral trabalhando com coordenadas cartesianas e depois prova que o resultado contém a lei das áreas (*ibid.*, p. 317). Depois, Euler analisa o mesmo problema utilizando um método equivalente ao uso de coordenadas polares no plano, ou seja, utilizando como variáveis a distância MC e um ângulo que determina a direção dessa reta. Obtém um resultado concordante com o primeiro (*ibid.* pp. 317-318).

Após resolver todos esses casos, Euler comentou que em todos eles obteve resultados corretos, partindo do princípio de mínimo que havia proposto; e que seria possível estudar também casos mais complexos. Porém, ele esclarece que há duas situações diferentes a serem consideradas: (1) aquela em que a velocidade de um corpo tem sempre o mesmo valor quando ele retorna ao mesmo ponto; e (2) aquela em que a velocidade do corpo não depende apenas de sua posição. Essa segunda situação ocorre ou quando o corpo se move em um meio resistente, ou quando os centros de força que agem sobre ele estão em movimento (EULER, 1744, p. 318). No primeiro caso, o princípio pode ser aplicado, mesmo se o corpo estiver submetido a várias forças

simultaneamente. Ou seja: em nossa linguagem moderna, Euler estava dizendo que o seu princípio de mínimo era válido para forças conservativas.

No final do apêndice, Euler generaliza o seu princípio para o caso de muitos corpos: se muitos corpos se movem atuando uns sobre os outros (mas com forças conservativas), “a soma de todos os seus movimentos é mínima” (EULER, 1744, p. 320) – o que provavelmente queria dizer que a integral em relação ao tempo das somas de Mv (força viva, sendo v o quadrado da velocidade) para todos os corpos deve ser mínima. Por fim, Euler comenta que esse princípio provavelmente poderia ser justificado pela metafísica⁵⁰ – mas não desenvolve essa idéia.

Em nenhum ponto do seu trabalho Euler utilizou o nome “ação”, nem se referiu a Leibniz, nem a Maupertuis. É possível que Euler tenha desenvolvido seu trabalho de forma totalmente independente de Maupertuis. A própria linguagem com a qual ele apresenta o princípio mostra que ele o propõe na primeira pessoa do singular, “digo”:

Digo então que a linha que é descrita pelo corpo é aquela na qual, de todas as outras linhas que têm as mesmas extremidades, $\int M.ds\sqrt{v}$ (ou, sendo M constante, $\int ds\sqrt{v}$) seja mínima. (EULER, 1744, pp. 311-312)

Pela correspondência de Euler fica claro que ele já havia chegado no início de 1743 ao seu princípio de que a integral de $\int ds\sqrt{v}$ deveria ser um mínimo. De fato, há uma carta de Daniel Bernoulli a Euler, datada de 23 de abril de 1743 (FUSS, 1843, pp. 522-528)⁵¹, na qual Bernoulli tece comentários sobre o rascunho que havia recebido do tratado dos isoperímetros e faz considerações específicas sobre o princípio mecânico proposto por Euler: “Eu considero muito bela e de grande importância a observação de que, nas trajetórias, $\int ds\sqrt{v}$ deve ser um máximo ou um mínimo; mas eu não vejo a demonstração desses princípios” (BERNOULLI, *apud* FUSS, 1843, p. 524). Assim, pode-se afirmar que não foi o artigo de Maupertuis de 1744 que inspirou a pesquisa de Euler, mas que se trata de trabalhos independentes, apesar de, como vimos, Maupertuis ter afirmado que o trabalho de Euler era uma aplicação do seu trabalho de 1744.

É relevante que, embora Euler apresente seu princípio sob várias formas, tais como o princípio de mínimo da integral $\int v.dt$ ou da integral $\int ds\sqrt{v}$, é sob esta última forma que ele o utiliza, representando v como uma função das coordenadas. O tempo, de fato, não tem qualquer papel nas análises que Euler realiza; e seu objetivo principal é sempre obter resultados geométricos, ou seja, a trajetória da partícula. Além disso, deve-se notar que a velocidade da partícula é sempre obtida a partir do princípio das forças vivas e que, em notação moderna, a integral utilizada por Euler poderia ser expressa por

$$\int \sqrt{2(E - V)/M} ds,$$

onde E é uma constante (energia total) e V a energia potencial (uma função das coordenadas). Como ds é também uma função das coordenadas e de suas derivadas (por exemplo, $ds = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} dx$, como utilizado por Euler para a análise em duas dimensões), o problema acaba sendo reduzido a uma forma geométrica.

⁵⁰ Logo no início do apêndice, Euler havia também afirmado que esse princípio poderia ser justificado metafisicamente, mas que a metafísica não permitiria descobrir *qual* a propriedade que obedece ao princípio de mínimo. Também indicou, no mesmo ponto, que esse princípio de mínimo podia ser considerado como uma lei baseada em *causas finais* (EULER, 1744, p. 309).

⁵¹ Herman Goldstine cita essa correspondência de forma equivocada, atribuindo-lhe a data de 15 de abril de 1743 (GOLDSTINE, 1980, p. 67).

Em um trabalho escrito em 1748⁵², Euler comparou seu trabalho ao de Maupertuis, a quem ele concedeu a prioridade para a mínima ação. Nesse trabalho, Euler mostra que é sempre possível encontrar um máximo ou um mínimo em diferentes problemas, como o que ele estuda no artigo (fio flexível), e a essa função que assume o valor mínimo ele dá o nome de quantidade de ação. Deste modo pode haver uma função que é mínima no caso da estática, que será chamada quantidade de ação; para qualquer outro problema, seja na estática ou na mecânica, em que é possível encontrar uma função que será mínima, essa função, com diferentes grandezas, será denominada quantidade de ação. No caso em que a função que pode que é mínima é dada por⁵³ $\int v.ds$, então a *quantidade de ação* é aquela a que Maupertuis de refere (EULER, 1750, p. 150).

Apesar das idéias de Euler serem mais claras que as de Maupertuis, vamos dar o nome de “princípio de Maupertuis-Euler” à seguinte forma do princípio de mínima ação:

$$\int mv.ds = \int mv^2.dt \text{ é um mínimo,} \quad (4.2)$$

adicionando a condição de que *as velocidades são uma função da posição da partícula*. Para evitar uma leitura completamente anacrônica de Euler, porém, é relevante dizer que ele aceitou o uso de Maupertuis do princípio de mínima ação para colisões e para estática.

Em outros dois trabalhos, publicados pela Academia de Ciências de Berlim em 1753, Euler atribuiu explicitamente a Maupertuis a descoberta de dois princípios gerais, um para o estado de repouso ou equilíbrio (ou seja, o trabalho de Maupertuis de 1740), e outro para o estado de movimento, que, apesar de parecerem diferentes, estão baseados no mesmo fundamento, que é o da simplicidade da natureza. Para Euler, os princípios de Maupertuis para o equilíbrio ou repouso e para o movimento estão relacionados pois possuem a mesma base que é a “economia” da Natureza, e feita a demonstração para um dos casos, o outro já estaria provado.

Partindo do caso estático, Euler define *esforço* (*effort*), representado pelo símbolo Φ , como a integral do produto da massa pela força e pela distância. No equilíbrio, a soma de todos os esforços é máxima ou mínima, ou seja $\Phi = M \int Vdv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \dots = \max \text{ ou } \min$, onde V, V', V'' corresponde às forças centrais a que o corpo está sujeito, e v, v', v'' corresponde às distâncias (EULER, 1753a, p. 174)⁵⁴,

Tendo estabelecido este princípio para o repouso, ou equilíbrio, o que haveria de mais natural do que manter que este mesmo princípio também ocorra no movimento dos corpos, sujeitos pelas mesmas forças? Pois se a intenção da Natureza é economizar o máximo que é possível na soma dos esforços, é necessário também que ela se estenda também ao movimento, desde que se tomem os esforços, não apenas como eles subsistem num instante, mas em todos os instantes juntos, que dure o movimento (EULER, 1753a, p. 175).

No movimento, então, a integral $\int \Phi dt$ seria mínima. Esta integral pode ser escrita como $\int Muudt$, onde udt exprime o elemento de espaço que o corpo percorre num tempo dt , ou seja,

⁵² Trata-se de *Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces*, publicado em 1750.

⁵³ Na notação utilizada por Euler, corresponderia a $\sqrt{v}$.

⁵⁴ Trata-se do artífo *Harmonie entre les principes generaux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis*, escrito em 1752 e publicado em 1753.

ds , e desta forma a condição de mínimo para o esforço, ao longo de todos os instantes do movimento, corresponde à condição de mínimo da integral $\int Mu^2 dt$, o que corresponde ao princípio de Maupertuis de mínima quantidade de ação (EULER, 1753a, pp. 175-176). A expressão que é mínima para Euler ($\int Mu^2 dt$) leva em consideração uma integração em relação ao tempo, e não como Maupertuis, em que o tempo é unitário em todos os exemplos que analisa.

Euler também aplica o princípio de mínimo esforço no caso de alavancas, para provar que no caso do equilíbrio a base da condição de mínimo é a mesma que no movimento. O esforço passa a ser representado pelo produto da força pela distância ao ponto de apoio, contrariando a definição que ele próprio havia dado quando deduziu o conceito de esforço (EULER, 1753a, p. 190). Depois, apresentando o caso de equilíbrio para diferentes tipos de alavancas, Euler associa o caso de equilíbrio em torno de um ponto às características que descrevem uma curva elástica, o que já havia sido feito por Bernoulli ao tratar das catenárias⁵⁵. É clara a concordância de Euler com o princípio de mínima ação como dado por Maupertuis, tanto para o caso das alavancas como para o caso das colisões.

Em *Sur le principe de la moindre action*, escrito e publicado em 1753, Euler defendeu o trabalho de Maupertuis dos ataques de König e o relacionou com a grandeza que antes era denominado *esforço*, e agora denominada *eficácia*, que determinaria o movimento a cada instante (EULER, 1753b, p. 216). A integral da eficácia pelo tempo é $\int Muds$, como no caso do esforço no movimento. Embora queira dizer que é um único princípio, são na verdade dois: para a estática, onde a soma de todas as eficácias (eficácia total) é mínima no equilíbrio; e no caso da dinâmica, onde a integral da eficácia em relação ao tempo é mínima e corresponde ao princípio de Maupertuis.

Euler também possui uma interpretação para o princípio de mínima ação como uma “causa final” no sentido teológico da expressão:

Como a construção do Universo é a mais perfeita possível, sendo o trabalhador o Sábio, nada pode ser encontrado no mundo no qual uma propriedade de máximo ou mínimo não exista. Não há, conseqüentemente, dúvidas, de que todos os efeitos do mundo podem ser derivados pelo método de máxima e mínimo de suas causas finais, bem como de sua eficiência. (EULER, *apud* MACH, 1942, p. 551)

Fica claro que Euler, apesar de considerar o caráter de “causa final” ao princípio de mínima ação, procurou formular uma expressão analítica para o mesmo, enquanto Maupertuis realmente não tinha um princípio, propriamente falando, mas somente uma fórmula vaga, que era forçada a servir como a expressão de diferentes fenômenos familiares.

Alguns historiadores argumentam que a forma com que Euler re-interpretou o princípio de Maupertuis tinha o objetivo de ser livre de preocupações teológicas, e estava baseado na tentativa de unificar a mecânica por meio de um formalismo matemático universal, característica do período em que Euler vivia, a “idade das luzes” (PANZA, p. 488, 1995).

4.3 A MECÂNICA DE LAGRANGE

⁵⁵ No artigo de 1748, publicado em 1750, Euler já tinha aplicado em diferentes problemas envolvendo fios flexíveis, o princípio de mínimo no caso de equilíbrio para diferentes pontos de aplicação de forças nesses fios. Ou seja, Euler reforça a posição de Maupertuis sobre a aplicação da mínima quantidade de ação num caso estático.

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) teve seus interesses voltados para a determinação de máximos e mínimos de funções a partir de 1759 quando publicou seu primeiro trabalho na *Miscellanea Taurinensia (Recherches sur la methode. De maximis et minimis)*.

Este primeiro trabalho de Lagrange pretendia mostrar as condições em que existe um máximo ou um mínimo na análise de uma função dependente de uma ou mais variáveis. Para isso, diferentemente do que fará posteriormente, Lagrange utilizou a geometria e estudou o caso em que a função da qual se quer determinar os máximos ou mínimos é a terceira coordenada no espaço. No entanto, ainda que não faça uso do cálculo variacional, Lagrange já menciona que em um próximo trabalho deduzirá as condições de máximo e mínimo para vários tipos de corpos, sólidos ou fluidos, usando o princípio de mínima ação (LAGRANGE, 1759, p. 15).

A primeira aplicação que Lagrange fez da teoria desenvolvida para máximos e mínimos neste trabalho segue a mesma linha de Maupertuis, analisando o choque entre corpos. Conhecendo as massas do primeiro e do último corpo, e supondo que a velocidade do último é a máxima possível, ele prova que as massas dos corpos intermediários formam uma progressão geométrica. Segundo Lagrange, este problema já havia sido demonstrado por Huyghens, sem usar a condição de máximo ou mínimo, mas ele não menciona em que trabalho (LAGRANGE, 1759, p. 18).

O próximo passo de Lagrange foi desenvolver um outro método puramente analítico para determinar máximos e mínimos de integrais indefinidas, de que trata o trabalho *Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima*. Seguindo o trabalho de Euler, Lagrange introduz uma nova “variação”, simbolizada por δ que, segundo ele, representa uma nova forma de variar, diferente de d (LAGRANGE, 1760-1761a, p. 336). De um modo geral, o método desenvolvido por Lagrange propõe que a integral indefinida $\int Z$ assume um valor máximo ou mínimo se

$$\delta \int Z = 0 \Leftrightarrow \int \delta Z = 0,$$

onde Z pode ser qualquer função, desde que a diferencial dZ seja definida. A nova diferenciação δ , apesar de ter um significado diferente da diferenciação já conhecida, segundo Lagrange, pode simplesmente substituir a antiga. Desse modo $dZ=mdx$ pode ser escrita também como $\delta Z=m\delta x$ e também vale (LAGRANGE, 1760-1761a, p. 335-337):

$$\delta dx = d\delta x \text{ e } \delta d^2 x = d^2 \delta x. \quad (4.3)$$

O novo método de Lagrange, além de apresentar resultados iguais aos de Euler no caso da braquistócrona, permite encontrar a menor superfície entre aquelas que possuem o mesmo perímetro:

Sr Euler já tinha apresentada fórmulas gerais para encontrar curvas nas quais a função integral dada é maior ou mínima, mas as fórmulas desse autor são menos gerais que as nossas: 1º porque ele só pode variar y da expressão Z ; 2º porque ele supõe que o primeiro e o último ponto da curva são fixos (LAGRANGE, 1760-1761a, p. 345).

A fórmula obtida por Euler não serve se a função Z depender da coordenada e de sua variação, ou seja, se $Z(y, \dot{y})$; por outro lado, vemos que, diferentemente de Euler, o método de Lagrange inicialmente não supõe que os extremos são fixos.

Em *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique* Lagrange é estimulado pelo trabalho de Euler:

Sr. Euler, no apêndice de sua excelente obra que tem por título: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes: sive solution problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, demonstrou que, nas trajetórias que os corpos descrevem por forças centrais, a integral da velocidade, multiplicada pelo elemento da curva, faz sempre um máximo ou um mínimo. Eu me proponho a generalizar este mesmo princípio, e mostrar que seu uso permite resolver com facilidade todas as questões da Dinâmica (LAGRANGE, 1760-1761b, p.365)⁵⁶.

Podemos ver que o princípio não está se referindo a uma *ação*, mas apenas à integral do produto da velocidade pelo elemento de curva (a massa é constante, portanto está fora da integral). Lagrange parte deste princípio para aplicar o método demonstrado no trabalho anterior a corpos sujeitos a forças centrais, dependentes da distância, e obter os mesmos resultados de Euler para as trajetórias. Ele adotou, para desenvolver a variação da integral, uma relação entre a velocidade dos corpos e forças centrais dependentes das distâncias, dada por (LAGRANGE, 1760-1761b, p. 366)

$$\frac{u^2}{2} = \text{const.} - \int (Pdp + Qdq + Rdr + \dots), \quad (4.4)$$

onde P, Q, R são forças atrativas sobre o corpo m , dirigidas para um centro fixo; e p, q, r são as distâncias do corpo até o centro de forças. Lagrange não está considerando a massa do corpo, e considera que a integral é positiva, enquanto que na notação atual a integral seria negativa. Esta igualdade não foi citada como a conservação da *vis viva*, mas é entendida como conhecida (“*comme tous les Géomètres le savent*”⁵⁷).

Ele parte da equação $\delta(M \int uds) = 0$, onde considera os limites da integral constante, o que lhe permite colocar a variação dentro da integral. Ou seja, essa equação, dividindo pela massa, pode ser escrita $\delta(\int uds) = \int \delta(uds) = 0$. Desenvolvendo o termo no interior dessa integral, temos $\delta(uds) = u\delta ds + \delta uds$. Substituindo o termo da integral, ficamos com

$$\int (u\delta ds + \delta uds) = 0. \quad (4.5)$$

A variação (diferenciação) da Eq. 4.4, permite escrever

⁵⁶ Note que Lagrange não se refere ao trabalho de Maupertuis neste trabalho, ou nos anteriores, baseando-se apenas em Euler.

⁵⁷ “como todos os geometras sabem”

$$u\delta u = -\delta \int (Pdp + Qdq + Rdr + \dots),$$

que, passando a variação para dentro da integral, pode ser escrita como

$$u\delta u = -\int (\delta Pdp + P\delta dp + \delta Qdq + Q\delta dq + \delta Rdr + R\delta dr + \dots).$$

Mudando δdp em $d\delta p$ e integrando por partes os termos $Pd\delta p$, fica

$$u\delta u = -P\delta p - Q\delta q - R\delta r + \int (\delta Pdp - dP\delta p + \delta Q - dQ\delta q + \delta Rdr - dR\delta r + \dots).$$

Supondo que as forças são funções das distâncias, então pode-se escrever $\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}$, e assim igualmente para as outras forças Q e R . Por essa hipótese, $\delta Pdp - dP\delta p = 0$. Usando esse resultado e sabendo que $\frac{ds}{u} = dt$, obtemos o segundo termo da integral da Eq. 4.5, ou seja (LAGRANGE, 1760-1761b, p. 366-367)

$$\delta u ds = -Pdt\delta p - Qdt\delta q - Rdt\delta r - \dots,$$

e portanto

$$\delta \left(M \int u ds \right) = 0 \Leftrightarrow \int (u\delta ds - Pdt\delta p - Qdt\delta q - Rdt\delta r - \dots) = 0. \quad (4.6)$$

É interessante notar que Lagrange obtém a equação de mínimo (ou a integral de variação nula) partindo apenas de uma relação equivalente ao princípio de conservação de energia, e não do que chamamos de *equações de Euler-Lagrange*, como fazemos atualmente. Ele usa novamente a relação $\frac{ds}{u} = dt$ para fazer desaparecer o tempo, fazendo apenas uma análise geométrica (trajetória).

Lagrange mostrou que as equações com a solução do problema são obtidas para quaisquer coordenadas adotadas e também aplica o método das variações em casos estáticos, em que os corpos estão presos a fios (extensíveis ou não; elásticos ou não) como Euler havia feito no trabalho de 1748 em que reforçava a tese de Maupertuis; e também no caso dos fluidos, obtendo um resultado semelhante ao de d'Alembert (LAGRANGE, 1760-1761b, p. 446).

Durante algum tempo Lagrange esperou que este princípio trouxesse uma nova luz sobre a dinâmica. Entretanto, em torno de 1764, ele perdeu muito de seu interesse nesse assunto, pois notou que era equivalente ao princípio de d'Alembert, o qual era mais fácil de usar do que o primeiro (JOURDAIN, 1913, pp. 1, 53).

O principal trabalho de Lagrange foi *Mécanique analytique*, publicado primeiro em 1788 e reimpresso várias vezes. Sem figuras, o livro pretende demonstrar apenas analiticamente, sem utilizar geometria, todas as leis da estática e da dinâmica, seguindo uma corrente diferente do que havia feito Newton. O próprio Lagrange faz esta observação na introdução:

Não se encontrará figuras nesta obra. Os métodos que exponho não pedem construções, nem raciocínios geométricos ou mecânicos, mas somente operações algébricas, sujeitas a uma seqüência regular e uniforme (LAGRANGE, 1788, p. 1).

Nas várias edições de *Mécanique analytique*, Lagrange mudou a seqüência de apresentação dos tópicos e a notação utilizada em algumas equações. Neste Capítulo, inicialmente trabalhamos com a primeira edição e depois comparamos a notação que foi utilizada na terceira edição⁵⁸.

Na primeira edição, após o estudo da estática dos corpos, Lagrange deu início ao estudo da dinâmica dos corpos e argumentou que os princípios primitivos desta são quatro: princípio da conservação da força viva; conservação do movimento do centro de gravidade; conservação dos momentos de rotação ou princípio das áreas⁵⁹ e princípio da mínima quantidade de ação.

Lagrange atribuiu cada um dos princípios a “seus fundadores”, sendo que o princípio da mínima quantidade de ação é atribuído a Maupertuis, mas Lagrange o criticou por ter proposto o princípio sem o provar.

Chegamos enfim ao quarto Princípio que chamo de *mínima ação*, por analogia àquele ao qual o Sr. de Maupertuis já deu essa denominação, e que mais autores ilustres tornaram tão famoso (LAGRANGE, 1788, p. 188).

Lagrange apresentou vários argumentos para discordar do princípio de mínima ação como era entendido até então. Para ele, os exemplos que Maupertuis usou na demonstração do princípio são demasiadamente particulares (“trop particulières”) para estabelecer a veracidade de um princípio geral (LAGRANGE, 1788, p.188).

Ele comentou que Euler tinha atribuído uma maneira mais rigorosa de mostrar que, no caso de uma partícula se movendo sob a ação de forças centrais, a integral da velocidade multiplicada pelo elemento da curva será sempre um máximo ou um mínimo. Lagrange então apresentou um “novo princípio geral”, aplicando as idéias de Maupertuis e Euler a um *sistema de partículas*:

[...] a soma dos produtos das massas com as integrais das velocidades, cada uma multiplicada pelo elemento da distância percorrida, é invariavelmente um *máximo* ou um *mínimo* (LAGRANGE, 1788, pp. 188-189).

Lagrange manteve o mesmo nome, *princípio da mínima ação*, lembrando entretanto que o nome não era adequado e que ele o tinha mantido como uma consequência das leis da mecânica e não como um princípio metafísico – como Euler e Maupertuis pensavam⁶⁰.

O princípio de mínima ação aparece no principal trabalho de Lagrange como uma solução geral para o problema em que um sistema de corpos é submetido a forças dependendo somente de suas posições relativas. É diferente do trabalho de 1760 pois naquele estava preocupado em obter apenas as trajetórias; enquanto que neste trabalho, ele está preocupado em obter as equações do movimento em função do tempo.

⁵⁸ A terceira edição não difere da segunda edição na seqüência de tópicos ou na notação utilizada. Optamos por trabalhar com a terceira edição reeditada em 1853, com os comentários de J. Bertrand.

⁵⁹ Lagrange admite D’Arcy como o fundador do princípio das áreas, se referindo ao trabalho em que D’Arcy criticava Maupertuis (ver item 4.1 deste Capítulo).

⁶⁰ D’Arcy havia proposto este princípio sem usar o nome *ação*, mas depois, ao criticar o trabalho de Maupertuis, ele chamou de ação outra grandeza (aquela que chamamos de momento angular) e determinou que se tratava de uma *conservação* e não de *mínimo*.

O problema inicial supõe que os corpos estão sob a ação das “forças aceleradoras”, sendo que estas forças são as responsáveis por imprimir a qualquer instante uma velocidade infinitamente pequena e igual a todas as partículas (LAGRANGE, 1788, p. 190). Estas forças, que Lagrange nomeia como P, Q, R , etc., podem ser entendidas como apenas a “aceleração” a da notação atual. Ou seja, para Lagrange Pdt (e $Qdt, Rdt, \dots$) representa a velocidade que a “força” P imprime (ou tende a imprimir) ao corpo m na mesma direção da “força” (LAGRANGE, 1788, p. 192-193). No trabalho de 1760, embora não explique melhor o significado de P, Q, R , provavelmente ele estava usando a mesma idéia. Lagrange descreve de duas maneiras as velocidades e suas variações: por um lado, ele usa coordenadas retangulares x, y, z que descrevem as posições absolutas dos corpos em relação ao eixo de referência; e por outro lado ele usa também as variáveis p, q, r que são distâncias em relação ao centro de força, e portanto têm direções variantes.

Lagrange define *momento de uma força* como o produto da força pelo deslocamento infinitesimal. Ele utiliza o princípio de d’Alembert, o qual diz que, se um sistema está em equilíbrio, a soma dos produtos das forças pelos deslocamentos virtuais é nula. Se o sistema não está em equilíbrio, a soma de todos os momentos das forças é igual ao produto da massa de cada corpo pela sua aceleração pelo seu deslocamento. Ou seja, para as componentes retangulares, sendo a aceleração dada por $\frac{d^2x}{dt^2}$, a soma dos *momentos das forças* será dada por $m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + m \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + m \frac{d^2z}{dt^2} \delta z$. Da mesma forma, para as forças P, Q, R , a soma dos momentos será dada por $mP \delta p + mQ \delta q + mR \delta r$.

Assim, a fórmula geral da dinâmica, que determina o movimento de um sistema de corpos sujeitos a forças quaisquer, é estabelecida como a “a soma dos momentos das forças nessas duas direções”. Atualmente, é descrita como uma representação das relações de trabalho (LAGRANGE, 1788, p. 195)⁶¹

$$\sum \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) m + \Sigma (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) m = 0. \quad (4.7)$$

A primeira soma (aplicada a todas as partículas) representa o produto das forças resultantes atuando sobre cada partícula (dada como o produto da massa pela aceleração) pelos seus deslocamentos. A segunda soma representa o trabalho feito pelas forças dirigidas a cada centro de forças fixos ($P, Q, R, \dots$), quando as distâncias aos centro de força ($p, q, r, \dots$) mudam.

Neste ponto, Lagrange apresenta a diferença entre δ e d . Apesar das duas variações possuírem as mesmas regras, a letra δ representaria as *variações* relativas a mudanças arbitrárias que são introduzidas na posição instantânea dos corpos, ou seja, para as variações, o tempo é considerando constante; enquanto que a letra d será sempre uma diferenciação relativa ao tempo (LAGRANGE, 1788, pp. 195-198).

Os diferenciais dx, dy, dz representam o deslocamento efetivamente realizado pela partícula; enquanto $\delta x, \delta y, \delta z$ representam um deslocamento geral. Um caso particular da relação geral que ele está apresentando é obtido substituindo os deslocamentos gerais pelos efetivos.

⁶¹ A forma da equação original de Lagrange era um pouco diferente. No lugar do símbolo Σ ele usou a letra S . Sua representação das derivadas também era um pouco diferente.

Em geral, de qualquer maneira que os diferentes corpos do sistema sejam dispostos ou ligados entre si, desde que esta disposição seja independente do tempo, digamos, que as equações de condição entre as coordenadas não contêm a variável t ; é claro que sempre se poderá, na fórmula geral do movimento, supor que as variações δx , δy , δz , iguais às diferenciais dx , dy , dz , que representam os espaços efetivamente percorridos pelos corpos no instante dt , enquanto que as variações das quais falamos devem representar os espaços quaisquer, que os corpos poderiam percorrer no mesmo instante, tendo em conta sua disposição mútua. (LAGRANGE, 1788, p. 207).

Com a substituição, a Eq. 4.7 fica

$$\sum \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) m + \sum (Pdp + Qdq + Rdr + \dots) m = 0, \quad (4.8)$$

onde a primeira parte da somatória é a integral obtida pelo princípio das forças vivas.

No caso particular em que $(Pdp + Qdq + Rdr + \dots)$ é uma diferencial exata, ela pode ser trocada por $d\Pi$, e integrando a Eq.4.8 Lagrange obteve:

$$\sum \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + \Pi \right\} m = F. \quad (4.9)$$

Lagrange chamou Π a *função de força*, e destacou que a constante de integração F deveria ser computada levando-se em conta os valores das quantidades do lado esquerdo da equação a qualquer tempo escolhido (LAGRANGE, 1788, p. 208). A função de força Π será integrável sempre que as forças aceleradoras P , Q , R , etc. tenderem a centros fixos e forem proporcionais a qualquer função da distância a estes centros.

Lagrange observou que esta era uma forma da lei de *conservação das forças vivas*. Para entender melhor, $\sum \Pi m$ é a energia potencial total do sistema, e F é o que atualmente chamamos de energia mecânica total do sistema.

Ele também a escreveu sob uma outra forma

$$\sum \left(\frac{u^2}{2} + \Pi \right) m = F. \quad (4.10)$$

Nesta equação, u é a velocidade de cada partícula. É curioso que nas edições posteriores de *Mécanique Analytique* Lagrange tenha usado a letra H no lugar de F (LAGRANGE, 1811, pp. 268, 270, 273-274, 277). Parece que isto foi a origem do uso por Hamilton da mesma letra para esta quantidade, e mais tarde do uso de H para a função Hamiltoniana.

Lagrange então introduziu *variações* das posições das partículas, e *variações* correspondentes das suas distâncias, (LAGRANGE, 1788, pp. 195, 208-209), obtendo

$$\sum (u\delta u + \delta \Pi) m = 0,$$

$$\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots$$

Substituindo a segunda dessas equações na primeira, obtemos

$$\Sigma(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots)_m = -\Sigma m(u\delta u). \quad (4.11)$$

Lagrange substitui a Eq. 4.11 na Eq. 4.7, obtendo

$$\Sigma \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z - u\delta u \right)_m = 0. \quad (4.12)$$

A dedução de Lagrange parece muito confusa pois a Eq. 4.7 foi o ponto de partida para se obter a Eq. 4.11. Como as características δ e d são independentes, valem as relações das Eqs. 4.3, demonstradas no trabalho anterior, e é possível escrever

$$\begin{aligned} d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z &= d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) + \\ &- \frac{1}{2} \delta(dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Considerando o elemento de espaço nas coordenadas x,y,z como $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e $dt = \frac{ds}{u}$,

Lagrange rescreve a Eq. 4.12 como

$$\Sigma \left(\frac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{u^2\delta ds}{ds} - u\delta u \right)_m = 0. \quad (4.14)$$

Diferente do que entendemos atualmente, Lagrange multiplica todos os termos por dt para eliminar a variação da velocidade. No conceito atual que fazemos de diferenciação, dt não poderia ser usado como um elemento de multiplicação, mas sim de diferenciação. Usando a relação $u\delta ds + ds\delta u = \delta(uds)$, ele obteve (LAGRANGE, 1788, p. 210)

$$\Sigma \left(\frac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt} - \delta(uds) \right)_m = 0. \quad (4.15)$$

Integrando a Eq.4.15, e lembrando que a somatória é independente da variação, ele obteve:

$$\frac{\sum (dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt} - \int \delta \sum m u ds = \text{const.},$$

ou

$$\delta \int \sum m u ds = \frac{\sum (dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt} - \text{const.}.$$

Quando $\delta x=0$, $\delta y=0$ e $\delta z=0$, a expressão $\frac{\sum (dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)m}{dt}$ se anula, e nos limites de integração de $\delta \int \sum m u ds$, as variações $\delta x, \delta y, \delta z$ também são nulas. Tendo concluído que a constante era nula, Lagrange reescreve a Eq. 4.15 como (LAGRANGE, 1788, p. 211)

$$\delta \cdot \sum m \int u ds = \sum \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) m. \quad (4.16)$$

Assumindo que $\delta x, \delta y$, e δz são nulos nos pontos inicial e final (os limites da integração), Lagrange concluiu que o lado esquerdo da equação era nulo

$$\delta \cdot \sum m \int u ds = 0. \quad (4.17)$$

Então, a variação de $\sum m \int u ds$ é nula, e portanto esta integral será um máximo ou um mínimo. Este é o princípio de mínima ação de Lagrange, aplicado a uma sistema de partículas, e deduzido de princípios mecânicos gerais.

Note que, como oposto ao princípio de Euler, a formulação de Lagrange tem uma representação variacional explícita. Lagrange claramente estabeleceu as condições de validade desta derivação: os pontos final e inicial de cada trajetória devem ser entendidos como dados, e as variações das coordenadas daqueles pontos são nulas; Euler não havia estabelecido essas condições.

A dedução assumiu o princípio das forças vivas, como foi mostrado acima; e em outro ponto de sua dedução, Lagrange também estabeleceu que ele estava estudando somente os casos em que existe a função de força Π , e quando não existe qualquer dependência entre as partículas (LAGRANGE, 1788, p. 209). Ao estabelecer a condição de mínimo para a integral do produto da velocidade pelo deslocamento, Euler apenas indicou a velocidade como uma função da posição, sem explicitar a validade do princípio das forças vivas.

Deste modo, fica clara a diferença que existe entre a formulação do princípio de mínima quantidade de ação para Lagrange e Euler. Apesar de possuir uma formulação mais rigorosa que a de Maupertuis para o princípio, Euler ainda mantém a característica de “causa final” do princípio, e não o apresenta a partir da conservação das forças vivas como faz Lagrange. Euler

também não mostra o princípio como uma integral de caminho, onde a variação nos pontos inicial e final deve ser nula.

Além de desconsiderar os aspectos metafísicos do problema, Lagrange é o primeiro a deduzir o princípio de mínima quantidade de ação, usando o princípio das forças vivas e o princípio de d'Alembert; Euler leva em conta o princípio das forças vivas para encontrar que as velocidades devem ser funções das posições, mas não deduz o princípio de mínima quantidade de ação, apenas mostra que é válido.

É relevante observar que Lagrange não introduziu a chamada função Lagrangiana (cinética menos energia potencial). A forma utilizada atualmente é mais parecida com o que foi proposto por Hamilton, como veremos neste Capítulo. Seu ponto de partida foi o princípio de mínima ação de Euler, e Lagrange apresentou-o em uma nova forma, aplicado a um sistema de partículas, e deduziu dele as leis fundamentais da mecânica. Ele também mostrou que era possível deduzir as equações que ele havia assumido no início do princípio de mínima ação.

Portanto, além de conter uma propriedade muito importante do movimento dos corpos, este teorema pode ser usado para determinar tal movimento. De fato, uma vez que a fórmula $\delta \int m u ds$ deve ser um *máximo* ou um *mínimo*, é suficiente buscar pelo método das *variações* as condições que podem produzir este resultado; e usando a equação geral de conservação da força viva, pode-se sempre encontrar todas as equações que são necessárias para o conhecimento do movimento de cada corpo; pois para um *máximo* ou *mínimo*, é necessário que a variação seja nula, e conseqüentemente $\delta \int m u ds = 0$; e a partir disto, repetindo em ordem inversa as operações que foram apresentadas antes, será encontrada a mesma fórmula geral que foi o ponto de partida (LAGRANGE, 1788, p. 212).

Para mostrar como o princípio de mínima ação determina as equações do movimento, Lagrange considera novamente que os extremos da integração são constantes, e o rescreveu como

$$\delta \cdot \sum m \int u ds = 0 \Leftrightarrow \sum m \int \delta(u ds) = 0.$$

Usando a relação $u \delta ds + ds \delta u = \delta(u ds)$

$$\sum m \int (ds \delta u + u \delta ds) = 0. \quad (4.18)$$

Na primeira parte desta integral ele substituiu ds por $u dt$ e inverteu a ordem da integral com a somatória, encontrando

$$\sum m \int (ds \delta u) = \int dt \sum m u \delta u. \quad (4.19)$$

A equação geral do princípio das forças vivas, dada pela Eq. 4.11, permite escrever

$$m \sum u \delta u = - \sum (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) m. \quad (4.20)$$

O somatório da integral da Eq. 4.19 é igual a Eq. 4.20. Para a outra parte da Eq. 4.18, Lagrange substitui ds por seu valor em coordenadas retangulares, ou seja, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, que

é mais conveniente do que torná-lo a substituir por udt . Fazendo a variação de ds , e usando a independência entre d e δ , para invertê-las, Lagrange obteve (ver Eq. 4.13)

$$\delta ds = \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}. \quad (4.21)$$

Lembrando que $dt = \frac{ds}{u}$, e integrando a equação, Lagrange obteve a expressão

$$\int u \delta ds = \int \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{dt}. \quad (4.22)$$

Usando integral por partes, Lagrange eliminou as variações, pois considerou que as variações δx , δy , e δz são nulas nos pontos inicial e final. Assim (LAGRANGE, 1788, p. 213)

$$\int \frac{dx d\delta x}{dt} = - \int \delta x d \frac{dx}{dt}.$$

O mesmo vale para as coordenadas y e z . Substituindo o resultado acima no segundo termo da Eq. 4.18, e substituindo o primeiro termo da mesma equação pela 4.20, obtemos

$$\int \left(dt \sum (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots)_m + \sum \left(\delta x d \frac{dx}{dt} + \delta y d \frac{dy}{dt} + \delta z d \frac{dz}{dt} \right)_m \right) = 0. \quad (4.23)$$

Lagrange argumentou que, como essa relação vale para todas as variações possíveis, era necessário que a quantidade integrada seja nula a qualquer instante, o que significa que o integrando é nulo e portanto

$$dt \sum (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots)_m + \sum \left(\delta x d \frac{dx}{dt} + \delta y d \frac{dy}{dt} + \delta z d \frac{dz}{dt} \right)_m = 0. \quad (4.24)$$

A Eq. 4.24 corresponde exatamente à Eq. 4.7, se considerarmos que a característica d na segunda parte da expressão é uma diferencial em relação ao tempo.

Lagrange também generalizou seus resultados substituindo o elemento de linha em coordenadas polares na Eq. 4.20 e obteve uma forma mais geral da Eq. 4.23.

As deduções de Lagrange não eram claras e rigorosas, pelos padrões atuais. Além disso, é interessante notar que Lagrange obteve uma relação final (Eq. 4.23) que inclui a função de força e a velocidade a partir de uma expressão que possui apenas a velocidade. Incluir ou retirar a função de força depende apenas das manipulações matemáticas, sem levar em consideração o problema inicial, dos corpos sujeitos a forças de atração. Por introduzir e retirar a função de força

é que ele chega a resultados que se conhece atualmente, partindo inicialmente de uma expressão que possui apenas a energia cinética.

Note-se também que Lagrange não deduziu as chamadas “equações de Lagrange” a partir do princípio de mínima ação, como fazemos atualmente. Pelo contrário, ele deduziu do princípio uma equação equivalente à Eq. 4.7 (LAGRANGE, 1788, p. 214).

Somente depois, deixando de lado o princípio de mínima ação, Lagrange deduz as “equações de Lagrange” usando coordenadas generalizadas (LAGRANGE, 1788, pp. 216-226). Para isso, ele estabeleceu as coordenadas x, y, z como função de outras variáveis, ou seja $dx = A d\xi + B d\psi + C d\phi + \dots$; $dy = A' d\xi + B' d\psi + C' d\phi + \dots$ e $dz = A'' d\xi + B'' d\psi + C'' d\phi + \dots$, onde os coeficientes $A, A', A'', B, B', \dots$ são funções conhecidas das variáveis ξ, ψ, ϕ . Fazendo as variações e diferenciações das novas coordenadas, Lagrange obteve a fórmula geral do movimento (Eq. 4.7) como

$$\Xi \delta \xi + \Psi \delta \psi + \Phi \delta \phi + \dots = 0,$$

onde

$$d \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \Xi. \quad (4.25)$$

A Eq. 4.25 parece com uma forma especial das equações de Lagrange, sem a “função Lagrangiana” como a conhecemos atualmente. Aqui ele usou T como uma função correspondente à metade do valor da força viva (nossa energia cinética), usando coordenadas gerais; e V é uma função que representa o valor de $\Sigma \Pi m$ (nossa energia potencial), também usando as mesmas coordenadas gerais.

Quando as coordenadas são independentes entre si, o lado direito da Eq. 4.25 é nulo (LAGRANGE, 1788, p. 226)⁶². Uma vez que V não depende das velocidades das partículas, a Eq. 4.25 é equivalente à nossa fórmula moderna

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q} = 0. \quad (4.26)$$

O princípio de mínima ação de Lagrange, como apresentado na primeira edição de *Méchanique Analytique* (Eq. 4.17) contém somente velocidades e coordenadas – não o tempo. Entretanto, na segunda edição de seu livro (dois volumes, publicados em 1811-1815) ele observa que o princípio também poderia ser transformado em

$$\int dt \sum m u^2 = \max \quad \text{ou} \quad \min, \quad (4.27)$$

onde a somatória exprime a força viva de todo o sistema num instante qualquer.

Assim o princípio se reduz propriamente a que a soma das forças vivas instantâneas de todos os corpos, entre dois pontos dados, é um máximo ou um mínimo (LAGRANGE, 1811, p. 281).

⁶² Quando não são independentes entre si, o lado direito da Eq. 4.25 corresponde àquilo que atualmente chamamos de multiplicadores de Lagrange.

Esta formulação utilizando a força viva forneceria outra vantagem do princípio, que passaria a ser geral também para o equilíbrio, já que “a força viva de um sistema é sempre a maior ou a menor na situação de equilíbrio” (LAGRANGE, 1811, p. 281).

Lembremos que Euler já havia apresentado o princípio de mínima ação sob uma forma similar. Claro, é muito fácil transformar a Eq. 4.17 na Eq. 4.27 pois

$$\Sigma m \int u \, ds = \Sigma m \int u \, (u \, dt) = \int \Sigma m u^2 \, dt = \int 2T \, dt.$$

Observe, entretanto, que o cálculo variacional é um tanto “escorregadio”, e que a igualdade de duas integrais definidas não significa que suas variações são iguais. Isto não foi percebido por Lagrange, mas em 1816, logo depois da publicação da nova edição do livro, o problema foi discutido por um jovem estudante da *École Normale*, Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851).

Olinde Rodrigues mostrou que quando a Eq. 4.17 é desenvolvida, é necessário assumir que o *tempo* deve variar (JOURDAIN, 1913, p. 54). Neste caso, a variação da integral de ação pode ser escrita como

$$\delta A = \delta \int 2T \, dt = 2 \left(\int \delta T \, dt + \int T \delta \, dt \right) \quad (4.28)$$

A variação $2\delta T$ é equivalente a $m \, d\delta u$ e a solução da integral pode ser obtida eliminando os $m \, d\delta u$ pelo uso da equação da *vis viva* e introduzindo o termo constante $T-V$ (usando a notação de Lagrange), que equivale à nossa energia total.

A integral original de Lagrange (Eq. 4.17) era uma integral *espacial*; quando a forma da integral é alterada e o tempo é introduzido como uma variável, então o tempo deve ser entendido como variável dependente do espaço, se o significado da variação da integral é mantido. Se a variável tempo é entendida como uma variável independente, o significado da variação da integral não é o mesmo de antes. Isto mostra o quanto é “escorregadio” trabalhar com cálculo variacional⁶³.

A contribuição de Olinde Rodrigues foi publicada em um jornal obscuro (*Correspondance de l'École Polytechnique de Paris*) e não é muito clara, permanecendo negligenciada por um longo tempo.

4.4 POISSON E A RELAÇÃO ENTRE GEODÉSICAS E O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Antes do desenvolvimento da geometria diferencial, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) discutiu a relação entre geodésicas e o princípio da mínima ação. Poisson foi influenciado pela obra de Lacroix⁶⁴ na determinação de máximos e mínimos, e por Lagrange no uso da característica δ para a variação dos caminhos e d para um incremento no mesmo caminho. Esta contribuição apareceu no livro *Traité de Mécanique* (1811), no mesmo ano em que Lagrange publicou a segunda edição de seu trabalho. Em seu livro, Poisson analisou vários casos de movimento de corpos em linha reta, ou em curvas, sob a ação ou não de forças, incluindo a força

⁶³Veja algumas observações sobre este assunto em JOURDAIN, 1913, pp. 54-55.

⁶⁴ Poisson cita *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral* de Lacroix na primeira parte do livro, onde apresenta a estática dos corpos.

centrífuga e a força gravitacional. Ele provou que a trajetória de uma partícula material se movendo sobre qualquer superfície, mas não submetida a forças (exceto as de interação com a superfície), é uma geodésica daquela superfície. Este foi um importante passo, e por essa razão ele dedicou uma apresentação detalhada⁶⁵.

O problema aparece na solução das equações de movimento para um corpo se movendo em curva sobre uma superfície, utilizando na análise o plano osculatório à curva. A força normal que prende o corpo à superfície é a força centrípeta, e depende do quadrado da velocidade e do raio de curvatura no ponto em que o corpo material está. O corpo também está sujeito a uma força dependente das coordenadas, perpendicular à trajetória, de modo que as forças a que o corpo está sujeito não alteram o valor, mas apenas a direção da velocidade, mantendo-o na curva. Poisson estabelece as componentes das forças que agem tangencialmente à trajetória em função dos ângulos entre as coordenadas do movimento e as coordenadas da curva. Quando o corpo não possui nenhuma outra força que imprima a este uma mudança no valor da velocidade (força aceleradora), o plano osculatório da trajetória será sempre perpendicular à superfície onde ocorre o movimento.

A análise de Poisson pode ser apresentada de um modo muito simples, diferentemente de sua própria exposição (POISSON, 1811, vol. 1, pp. 457-460). Suponha um ponto material movendo-se sobre uma superfície curva. O caminho da partícula pode ser uma curva altamente complexa. Vamos supor que a força que a superfície produz sobre a partícula é, em cada ponto, perpendicular à superfície naquele ponto (ou seja, não há forças de fricção ou qualquer outra força com componente com direção tangencial). Esta é a única força sobre a partícula, por hipótese. Portanto, a aceleração da partícula será paralela a esta força, ou seja, será perpendicular à superfície, em cada ponto. A velocidade da partícula será constante, e portanto sua aceleração produzirá alterações somente na direção do movimento. Em cada ponto, a curva descrita pela partícula tem um plano osculante e pode ser aproximada por um arco circular com um raio de curvatura γ que pode ser diferente em cada ponto⁶⁶. A aceleração da partícula será igual a v^2/γ e sua direção será aquela do raio do círculo osculante. Agora, desde que a aceleração deve ter a direção da força atuante sobre a partícula, e esta força é perpendicular à superfície, então o plano osculante da curva descrita pela partícula é também perpendicular à superfície, em cada ponto.

Já era conhecido que esta é uma propriedade que pertence às geodésicas da superfície. Portanto, o caminho que a partícula segue, em cada ponto, é uma geodésica da superfície curva e a partícula segue o caminho mais curto para ir de um ponto a outro daquela superfície (POISSON, 1811, vol. 1, p. 460).

Até este ponto, o argumento de Poisson não fez uso do princípio de mínima ação. Após obter a conclusão anterior, entretanto, ele observa:

Esta propriedade da trajetória de um ponto se movendo [sobre uma superfície] que não está submetido a forças⁶⁷ aceleradoras é apenas um caso particular de uma propriedade mais geral, que foi inicialmente reconhecida sob um ponto de vista metafísico, e à qual foi dado o nome impróprio de *princípio de mínima ação*. [...] O princípio de mínima ação estabelece que a partícula, se ela se move livremente, escolherá entre todas as curvas que podem ser feitas entre os pontos *A* e *B*, a curva tal que a integral $\int u ds$ é um *mínimo*; e se está restrita a se mover sobre uma dada superfície, ela escolherá a curva correspondente ao

⁶⁵ Jesper Lützen apenas mencionou que Poisson apresentou esta conexão entre geodésicas e o princípio de mínima ação (LÜTZEN, 1995, p. 20), mas não analisou esta contribuição.

⁶⁶ Isto é verdade no caso de superfícies “bem comportadas”. Poisson não discutiu os casos em que aquelas condições não são satisfeitas.

⁶⁷ Poisson assume que não há aceleração no sentido de mudança do módulo da velocidade.

mínimo desta integral, entre todas as curvas feitas sobre esta superfície que passa pelos pontos A e B. (POISSON, 1811, vol. 1, pp. 460-461)

Poisson então apresentou uma demonstração do princípio de mínima ação semelhante à de Lagrange (aplicado apenas a uma partícula), mas sem utilizar a força viva ou uma função de força. Ele partiu da integral $\int u ds$, e considerou que ela seria um mínimo se sua variação fosse nula, supondo que os dois extremos da curva fossem fixos. Usando as regras do cálculo de variações, a variação da integral pode ser escrita como $\delta \int u ds = \int \delta u ds$; e sabendo que $\delta u ds = \delta u \cdot ds + u \delta ds$, a primeira parte desta equação pode ser substituída por $\delta u \cdot ds = \frac{dt}{2} \cdot \delta u^2$, já que $ds = u dt$. Poisson usou um resultado anterior (POISSON, 1811, vol. 1, p. 454) que permitiu escrever

$$\frac{1}{2} \delta u^2 = (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z), \quad (4.29)$$

onde X, Y, Z são as componentes das acelerações que agem sobre o corpo e $X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$ é a variação de uma função de posição que mantém o corpo preso à trajetória. Esta função pode ser entendida como a função potencial, na notação atual (desprezando a massa), pois depende apenas das coordenadas do ponto onde o corpo está. Quando o corpo se move livremente, a variação desta função pode ser escrita como

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z. \quad (4.30)$$

A Eq. 4.30 é substituída na Eq. 4.29, fornecendo o primeiro termo da variação. O segundo termo da variação, usando $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, pode ser rescrito como

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z. \quad (4.31)$$

Usando novamente $ds = u dt$, Poisson transforma a Eq. 4.31 numa diferencial em relação ao tempo

$$u \delta ds = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z. \quad (4.32)$$

Podemos resumir essa sequência, escrevendo a equação inicial como

$$\int \delta u ds = \int \left(\frac{dt}{2} \delta u^2 + u \delta ds \right) = \int \left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt + \left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right) \right].$$

O termo entre colchetes corresponde ao resultado de uma derivação do produto. Portanto, podemos rescrever a equação anterior como

$$\int \delta u ds = \int d \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) = \frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z. \quad (4.33)$$

A Eq. 4.33 será nula entre os extremos A e B , já que as variações δx , δy , δz são nulas nesses pontos; portanto a integral $\int u ds$ é um mínimo. Este resultado é igual à Eq. 4.16 no trabalho de Lagrange, porém obtido de considerações diferentes. Poisson então conclui:

Quando o corpo em movimento não está submetido a forças aceleradoras, sabemos que sua velocidade é constante; portanto o integral definida $\int u ds$ se torna o produto us , e portanto é a curva s descrita pelo corpo se movendo, do ponto A ao ponto B , aquela que será um *mínimo*, como foi visto anteriormente. (POISSON, 1811, vol. 1, p. 465)

O argumento de Poisson pode ser posto em uma forma muito simples: se a velocidade da partícula é constante, $\delta \int u ds = 0$ (o princípio de mínima ação) é equivalente a $\delta \int ds = 0$ (a equação que descreve uma curva geodésica). É claro, este argumento é muito mais simples que o primeiro, usando considerações geométricas. Entretanto, o primeiro argumento pode ser aplicado a diferentes situações: Poisson observa que se existe qualquer fricção entre a partícula e a superfície, ou se existe qualquer outra força na direção da velocidade instantânea do corpo que se move, ele também descreverá uma linha geodésica sobre a superfície, porque esta força (sendo paralela à velocidade) não mudará a direção de seu movimento (POISSON, 1811, vol. 1, p. 460). Porém, o princípio de mínima ação não pode ser aplicado a estes casos. Como já mostramos, Euler tinha associado o movimento de uma partícula com uma geodésica (EULER, 1744), porém não o tinha relacionado com o princípio de mínima ação.

Poisson citou, como principal aplicação do princípio de mínima ação, a reflexão e refração da luz, entre dois meios diferentes. (POISSON, 1811, vol. 1, pp. 466-468).

No segundo volume de seu tratado, Poisson discute o princípio de mínima ação no caso de um sistema de partículas (POISSON, 1811, vol. 2, pp. 304-306). As principais linhas de sua dedução foram similares àsquelas de Lagrange, mas sua apresentação era muito mais simples.

Desta vez, Poisson parte do princípio de conservação de forças vivas para encontrar a condição de máximo ou mínimo do movimento. Como premissa, Poisson mostrou, antes do princípio de mínima ação, que a conservação das forças vivas só é válida para meios não resistentes. O enunciado do “teorema geral” da mínima ação para o sistema de corpos é:

Dado o movimento de um sistema de corpos, para o qual o princípio das forças vivas vale, se é feito o produto da velocidade de qualquer móvel, por sua massa e pelo elemento de sua trajetória, se é tomada a soma de todos esses produtos, para todos os móveis, e se

integra em seguida esta soma, de uma posição dada a outra posição dada: o valor desta integral será um mínimo. (POISSON, 1811, vol.2, p. 304).

Para provar que a variação da integral $\int \Sigma m u ds$ é nula, ele usou as relações encontradas no volume 1 da obra e encontrou

$$\delta \int \Sigma m u ds = \int \Sigma m \cdot \delta u ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right). \quad (4.34)$$

Esta equação corresponde à Eq. 4.33 para muitos corpos, mas, diferentemente da outra, foi obtida usando a conservação das forças vivas. Poisson estabeleceu que a última parte da Eq. 4.33 é nula nos limites inferior e superior da integral e, portanto, $\delta \int \Sigma m u ds$ é nula. Então concluiu que o princípio também poderia ser descrito usando a integral $\int \Sigma m u^2 dt$:

$\int \Sigma m u^2 dt$ é o mesmo que a soma das forças vivas de todos os pontos do sistema, durante o mesmo tempo: o princípio de mínima ação estabelece entretanto que a soma das forças vivas de um sistema, durante o tempo que ele leva para passar de uma dada posição para outra posição também dada, é um *mínimo*.

Quando o corpo que se move não está submetido a qualquer força aceleradora⁶⁸, a soma das forças vivas é constante, em cada instante; a soma das forças vivas, durante qualquer intervalo de tempo, é portanto proporcional àquele tempo; segue que o sistema passa de uma posição para outra no menor tempo. (POISSON, 1811, vol. 2, p. 506)

O argumento é completamente análogo ao que ele usou para provar a relação entre o princípio de mínima ação e geodésicas: se as velocidades das partículas são constantes, $\delta \int \Sigma m u^2 dt = 0$ (o princípio de mínima ação) é equivalente a $\delta \int dt = 0$. Porém, o menor tempo possível é zero; e portanto concluir-se-ia a partir deste argumento que as partículas se movem instantaneamente da posição inicial para a final. Claro que a conclusão está errada. O argumento induz ao erro porque ele assume dt como uma variável independente. Se consideramos que $dt = (1/u) ds$, então concluiríamos que $\delta \int dt = \delta \int (1/u) ds = 0$, e como u é constante, isto é equivalente a $\delta \int ds = 0$ (a condição de geodésica). Esta seria a conclusão correta.

Podemos concluir que o cálculo variacional apresenta detalhes que tornam muito relevante a análise no caso do movimento. A consideração do tempo como variável dependente ou independente também foi a causa da conclusão de Lagrange para escrever o princípio de mínima ação também como $\delta \int \Sigma m u^2 dt = 0$ na segunda edição de sua obra. A relação entre o princípio de mínima ação e a conservação das forças vivas parece ser uma idéia recorrente que vem desde Leibniz e só terá um esclarecimento final na obra de Jacobi, como veremos na seção 4.6 deste Capítulo.

4.5 O PRINCÍPIO DE HAMILTON

Em 1834 e 1835 William Rowan Hamilton (1788-1856) publicou dois trabalhos altamente influentes sobre dinâmica. O interesse de Hamilton no princípio da mínima ação veio de seu recente interesse em óptica e no princípio de Fermat (DUGAS, 1988, pp. 390-394), porém este

⁶⁸ Para Poisson, força aceleradora tem o mesmo sentido que usamos para aceleração. A expressão força aceleradora era usada por Newton.

aspecto da sua contribuição não será discutido aqui. Sua primeira aplicação do princípio de mínima ação a problemas de mecânica foi feita provavelmente em 1833 (DUGAS, 1988, p. 394), e no ano seguinte ele publicou seu trabalho fundamental sobre princípios gerais de mecânica.

O objetivo de Hamilton não era a discussão do princípio de mínima ação, mas a proposta de novos métodos para lidar com problemas dinâmicos. A princípio, todos os problemas de dinâmica podem ser solucionados partindo de uma equação que já tinha sido usada por Lagrange (Eq. 4.7)

$$\sum m (x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \delta U \quad (4.35)$$

Nesta fórmula, Hamilton chama de $U = -m\Pi$ de *função de força*, onde Π é a função de força de Lagrange, que depende das posições e propriedades das partículas (HAMILTON, 1834, p. 249), e portanto U corresponde a menos nossa energia potencial. Os símbolos x'' , y'' e z'' representam os componentes retangulares das acelerações de cada partícula do sistema. Segundo Hamilton, esta equação contém todas as equações diferenciais de movimento de um sistema de pontos livres que se atraem ou se repelem. É interessante notar que Hamilton já não usa mais o termo “força aceleradora”, mas sim “aceleração”, para a variação da velocidade com o tempo.

A variação das coordenadas é definida como “um deslocamento infinitesimal que o ponto pode receber nas mesmas direções retangulares” e δU é a “variação infinitesimal correspondente de uma função U que depende das massas e das suas distâncias mútuas” na forma $U = \sum m_i f(r)$ ⁶⁹.

Se a função de força é conhecida, o movimento de cada partícula do sistema pode ser obtida de $3n$ equações diferenciais tais como

$$m_1 x_1'' = \delta U / \delta x_1 \quad (4.36)$$

Essas equações diferenciais são equivalentes a nossas equações $m\ddot{x} = -\partial U^* / \partial x$, onde U^* é nossa energia potencial. Observe que Hamilton usou a notação $\delta U / \delta x$ para derivadas parciais, onde nós usamos $\partial U^* / \partial x$. Hamilton comentou que é geralmente muito difícil integrar essas equações de segunda ordem, e por essa razão ele estava procurando outros métodos. Seguindo Lagrange, Hamilton representou metade da força viva (nossa energia cinética) por T , e apresentou a lei de força viva sob a forma:

$$T = U + H. \quad (4.37)$$

Autores anteriores tinham sempre entendido H como uma constante. Hamilton entendeu, entretanto, que H é uma constante durante qualquer movimento específico, mas que H pode sofrer alterações quando se considera *condições iniciais diferentes* do mesmo sistema mecânico, movendo-se sob o mesmo conjunto de forças. Nesse caso, a variação de H está relacionada às variações de T e U :

$$\delta T = \delta U + \delta H. \quad (4.38)$$

Utilizando as definições de T e U , podemos escrever as expressões para δT e δU , que multiplicadas por dt e integradas, fornecem

⁶⁹ Hamilton está tomando inicialmente como exemplo uma força gravitacional, depois utiliza uma forma mais geral de U .

$$\int \sum m(dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z') = \int \sum m(dx'\delta x + dy'\delta y + dz'\delta z) + \int \delta H dt. \quad (4.39)$$

Hamilton então introduziu uma nova função, a ação V do sistema, que ele considerou como uma função das coordenadas inicial e final e da quantidade H , dada pela expressão

$$V = \int \sum m(x'dx + y'dy + z'dz) = \int_0^t 2T dt. \quad (4.40)$$

A variação de V é dada pela Eq. 4.39. A segunda parte da Eq.4.39 integrada no tempo e considerando as coordenadas finais como x,y,z e as iniciais como a,b,c , fornece (HAMILTON, 1834, p. 251)

$$\delta V = \sum m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \sum m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) + t\delta H. \quad (4.41)$$

Ele provou que, se V fosse conhecida, seria possível descrever o movimento das partículas usando equações diferenciais de primeira ordem (ao invés de equações de segunda ordem como Eq.4.36), tais como (HAMILTON, 1834, p. 251)

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} = m_1 x'_1. \quad (4.42)$$

Hamilton considerou a função V como altamente importante e deu a ela o nome de ‘função característica’ do sistema. A integral da Eq. 4.40 representava a força viva acumulada, que também era chamada *ação* do sistema, da sua posição inicial à posição final. Observe, porém que Hamilton não estabeleceu que V era uma mínimo, ou que a variação de V era nula. Entretanto, δV não é zero *quando as condições iniciais do sistema são variadas*, e essa foi a hipótese de Hamilton.

Para salientar a diferença entre sua própria abordagem e aquelas de outros autores, Hamilton deu o nome de ‘lei da ação variante’ à fórmula representando o valor de δV (HAMILTON, 1834, p. 252). Ele considerou essa lei como muito mais útil do que o princípio da mínima ação⁷⁰ o qual, segundo ele, servia somente para obter as equações de segunda ordem do movimento, que podem ser facilmente obtidas de outro modo.

Mas quando esta bem conhecida lei de mínimo, ou como deveria ser melhor denominada, de *ação estacionária*, é aplicada para determinar o movimento atual de um sistema, ela serve somente para formar, pelas regras do cálculo de variações, as equações diferenciais do movimento de segunda ordem, que podem ser sempre encontradas de outro modo (HAMILTON, 1834, p. 252).

⁷⁰ Hamilton deu ao princípio de mínima ação o nome “lei da ação estacionária”, para enfatizar que era necessário somente aceitar que a variação da ação era nula, sem assumir que ela era um máximo. (HAMILTON, 1834, p. 252).

Hamilton mostrou então que, partindo da lei da ação variante, seria possível chegar às condições iniciais do problema. Usando as equações diferenciais para a função característica dadas como na Eq. 4.42 para as coordenadas finais (x,y,z) e iniciais (a,b,c) , e combinando com a Eq. 4.37, obteve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m} \left\{ \left(\frac{\delta V}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z} \right)^2 \right\} &= U + H, \\ \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m} \left\{ \left(\frac{\delta V}{\delta a} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta b} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta c} \right)^2 \right\} &= U_0 + H. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aparentemente o significado do primeiro termo da Eq. 4.43 é a energia cinética nos pontos inicial e final da trajetória, mas não Hamilton está derivando em relação a essas coordenadas inicial e final. Diferenciando a Eq. 4.42 e usando o resultado da Eq. 4.43, Hamilton encontra a Eq. 4.36, o que mostra a validade da Eq. 4.40 na determinação das equações de movimento, quando V é conhecida.

É fácil perceber, no primeiro trabalho de Hamilton sobre os princípios da dinâmica, que ele considerou o princípio de mínima ação como de importância secundária, e que ele estava buscando por diferentes métodos, usando a nova função característica, que permitissem a ele obter equações diferenciais de primeira ordem do movimento⁷¹. Entretanto, *en passant*, ele mostrou que a variação de $V=\int 2Tdt$ poderia ter muitos significados e usos, e que autores anteriores não se deram conta dessas circunstâncias.

Hamilton também mostrou como a função característica poderia ser empregada no caso de coordenadas polares e na composição de movimento, considerando o movimento do centro de gravidade e dos corpos ao redor dele.

No fim de seu trabalho de 1834, talvez como uma reflexão, Hamilton introduziu uma nova função S , pela relação (HAMILTON, 1834, p. 307)

$$V = tH + S. \quad (4.44)$$

Esta nova função S também poderia ser escrita como

$$S = \int_0^t (T + U) dt. \quad (4.45)$$

Note que $T+U$, na integral anterior, corresponde à nossa função Lagrangiana, uma vez que T é metade da *vis viva*, e U é a função de força, ou seja, menos nossa energia potencial. A função S de Hamilton é o que atualmente chamamos de ação integral associada ao movimento da partícula (DUGAS, 1988, p. 397). Contudo, Hamilton não introduziu esta função para apresentar uma nova forma da lei de ação variante.

⁷¹ É curioso que Hamilton não deu o nome de “equações canônicas” às equações diferenciais de primeira ordem que obteve, mas sim descreveu as equações de Lagrange como “as elegantes formas canônicas na *Mécanique Analytique* de Lagrange” (HAMILTON, 1834, p. 261).

A motivação de Hamilton é simples. Partindo de sua função característica V (definida na Eq. 4.40) ele obteve a variação da função característica em função de todas as coordenadas e do tempo, sendo que tanto as coordenadas iniciais (a,b,c) , quanto finais (x,y,z) , e o tempo podem variar. A partir da Eq. 4.41 obtém-se diretamente as derivadas parciais de V relativas a todas aquelas coordenadas, e também a relação nada usual $\partial V/\partial H=t$. Por exemplo (HAMILTON, 1834, p. 251)

$$\begin{aligned}\frac{\delta V}{\delta x_1} &= m_1 x'_1, & \frac{\delta V}{\delta y_1} &= m_1 y'_1, & \frac{\delta V}{\delta z_1} &= m_1 z'_1, \\ \frac{\delta V}{\delta a_1} &= m_1 a'_1, & \frac{\delta V}{\delta b_1} &= m_1 b'_1, & \frac{\delta V}{\delta c_1} &= m_1 c'_1, \\ & & \frac{\delta V}{\delta H} &= m_1 t.\end{aligned}$$

Seria mais útil obter $\partial V/\partial t$ ao invés de $\partial V/\partial H$. Isso requereria, entretanto, a presença de $H\delta t$ ao invés de $t\delta H$, na Eq. 4.41.

A introdução da função S foi a chave para substituir a Eq. 4.41 por outra fórmula onde haveria $H\delta t$ no lugar de $t\delta H$. O truque é muito simples. Ele equivale a trocar V por outra função $S=V-tH$. A variação de S é $\delta S=\delta V-H\delta t-t\delta H$. O último termo de δS cancelará com o último termo de δV no lado direito da Eq. 4.41, e Hamilton obteve o que ele queria (HAMILTON, 1834, p. 307)

$$\delta S = \Sigma m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \Sigma m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) - H\delta t. \quad (4.46)$$

Isto explica porque Hamilton introduziu a nova função, definida como $S=V-tH$. Agora, usando a Eq. 4.40 (a definição de $V=\int 2Tdt$) e trocando H por $T-U$, obtemos

$$S = V - tH = \int_0^t 2Tdt - \int_0^t Hdt = \int_0^t 2Tdt - \int_0^t (T - U)dt = \int_0^t (T + U)dt. \quad (4.47)$$

Esta parece a explicação mais coerente para a introdução da nova função de ação S e a associação relacionada com $(T+U)$ que atualmente chamamos de função Lagrangiana.

No trabalho de 1834, Hamilton teve sua atenção voltada para o uso da função característica V , como destaca o título *On a general method of dynamics: by which the study of the motion of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function*. Poucos meses depois, ele apresentou um novo trabalho à Royal Society, onde a função característica tinha perdido toda sua importância, sendo trocada pela nova função S , que Hamilton chamou de “Função Principal”, com letras maiúsculas (HAMILTON, 1835, p. 95).

Hamilton partiu do mesmo problema inicial do trabalho de 1834, ou seja, um sistema de pontos livres se atraindo ou repelindo, em que a função de força U depende da distância entre os corpos. Ele utilizou a mesma definição dada anteriormente para a função de força e partiu das

equações propostas por Lagrange (ver Eq. 4.25) em função da força viva e das coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \eta'_i} - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} = \frac{\delta U}{\delta \eta_i}, \quad (4.48)$$

onde η_i expressam as posições e η'_i representam as velocidades generalizadas. A variação de T pode ser escrita, em função das coordenadas generalizadas, como⁷²

$$\delta T = \sum \left(\eta'_i \delta \frac{\delta T}{\delta \eta'_i} - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right).$$

Deste ponto em diante, Hamilton foi direto a algumas inovações do seu método. Ele introduziu o momento generalizado ϖ_i associado a cada coordenada generalizada η_i pela relação $\varpi_i = \delta T / \delta \dot{\eta}_i$ (usando a notação do próprio Hamilton) e substituiu todas as velocidades na expressão de T por aqueles momentos, obtendo uma nova função F , que representa metade da força viva, em função das coordenadas e momentos generalizados, de modo que (HAMILTON, 1835, p. 98)

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \varpi_1} &= \eta'_1; \quad \frac{\delta F}{\delta \varpi_2} = \eta'_2; \dots; \quad \frac{\delta F}{\delta \varpi_{3n}} = \eta'_{3n}; \\ \frac{\delta F}{\delta \eta_1} &= -\frac{\delta T}{\delta \eta_1}; \quad \frac{\delta F}{\delta \eta_2} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_2}; \dots; \quad \frac{\delta F}{\delta \eta_{3n}} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_{3n}}. \end{aligned}$$

Ele então expressou a função H como $H=F-U$, ao invés de $H=T-U$, para reforçar que as velocidades não entram em H . Este foi o surgimento da função de Hamilton. Depois ele obteve muito facilmente as chamadas equações de Hamilton de primeira ordem (HAMILTON, 1835, p. 98), ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \varpi_1}; \\ \frac{d\varpi_1}{dt} &= -\frac{\delta H}{\delta \eta_1}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

As Eqs. 4.49 são muito semelhantes ao formalismo que usamos atualmente para as “equações de movimento de Hamilton” (MARION, 1995, p. 271) se adotamos a notação de variação de Hamilton (δ) como a notação atual de derivação parcial

⁷² Nesta e em outras equações adicionamos os índices, pois Hamilton não os indicou.

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dot{p}_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}\tag{4.50}$$

Hamilton deu uma nova forma à função principal, neste trabalho. Ao invés da Eq. 4.47, $S = \int_0^t (T + U)dt$, ele usou a seguinte expressão (HAMILTON, 1835, p. 98):

$$S = \int_0^t \left(\sum \varpi \frac{\delta H}{\delta \varpi} - H \right) dt.\tag{4.51}$$

Hamilton já tinha provado que $\sum \eta'(\delta T / \delta \eta') = 2T$, e ele obviamente assumiu que $\sum \varpi(\delta F / \delta \varpi) = 2F$. Desde que U , a função de força, não depende dos momentos generalizados, também temos $\sum \varpi(\delta H / \delta \varpi) = 2F$. Portanto, o integrando da Eq. 4.51 é equivalente a $2F - H = F + U$. Ela não corresponde ao nosso familiar Lagrangiano, porque não contém as velocidades generalizadas. Da variação da Eq. 4.51 Hamilton obteve um novo conjunto de equações de movimento de *ordem zero*, que são as integrais do movimento (HAMILTON, 1835, p. 99).

Em ambos os trabalhos, Hamilton usou muitas integrais diferentes que davam as dimensões de ação. Ele fez uso freqüente de métodos variacionais, mas sua ênfase não foi o desenvolvimento de diferentes formas do princípio de mínima ação. Podemos inferir que este princípio foi um componente secundário em seu trabalho. A discussão de Hamilton do princípio de mínima ação, no segundo trabalho, é muito curta:

Esta função S foi introduzida no primeiro Ensaio sob a forma

$$S = \int_0^t (T + U)dt,$$

os símbolos T e U tendo nesta forma seus significados recentes; e é importante observar, que quando S é expresso por esta integral definida, as condições para sua variação valendo (se as coordenadas inicial e final e o tempo são dadas) são precisamente as equações diferenciais do movimento [...] sob a forma dada por Lagrange. A variação desta integral definida S tem portanto a dupla propriedade, de fornecer as equações diferenciais do movimento para quaisquer coordenadas transformadas quando as posições extremas são tomadas como fixas, e de fornecer as integrais daquelas equações diferenciais quando as posições extremas são tratadas como variáveis. (HAMILTON, 1835, p. 99)

Não há outro comentário sobre este princípio, neste trabalho. Observe que Hamilton não usou os nomes “princípio de mínima ação” ou “lei da ação estacionária”, no segundo trabalho. Porém, podemos entender a variação da Eq. 4.45 como a forma do princípio de mínima ação de Hamilton, ou seja

$$\delta S = \delta \int_0^t (T + U) dt = 0. \quad (4.52)$$

Claro que o princípio de Hamilton não é equivalente às formas de Euler e Lagrange do princípio de mínima ação. Quando se usa $\delta \int \Sigma m u ds = 0$ ou $\delta \int 2T dt = 0$ é possível obter os resultados corretos se o princípio das forças vivas é usado e considerando as variações das quantidades corretas. No caso de $\delta \int (T + U) dt = 0$ não é necessário introduzir o princípio das forças vivas, porque já está contido no princípio de Hamilton.

Hamilton volta a mencionar a função característica em outra parte do trabalho, apenas relacionando-a com a função principal, de modo que S e V estão conectadas entre si e uma pode ser deduzida a partir da outra.

A maioria dos tratados de mecânica do século XIX não esclarece as condições de uso e as diferenças dessas formas do princípio de mínima ação. Essas questões não são geralmente descritas nos livros-texto atuais sobre mecânica analítica também, mas é possível encontrar uma discussão cuidadosa no clássico tratado de Arnold Sommerfeld (SOMMERFELD, 1942, capítulo 4).

Ainda que o princípio de Hamilton (na forma moderna $\delta \int L dt = 0$) seja a forma mais usada do princípio de mínima ação atualmente, ele não foi a formulação que levou à forte relação entre mecânica e geometria. Como mostrado anteriormente, Poisson chegou à sua relação entre geodésicas e princípio de mínima ação usando $\delta \int m u ds = 0$, que se reduz a $\delta \int ds = 0$ no caso de velocidade constante. O princípio de Hamilton $\delta \int (T + U) dt = 0$ não leva a qualquer comparação fácil com a equação de geodésica $\delta \int ds = 0$, porque ele contém velocidades (em T) e tempo (a variável independente). O mesmo problema ocorre no caso de $\delta \int 2T dt = 0$.

Sommerfeld comentou que o significado que deve ser atribuído a este princípio depende do modo como se entende a variável tempo. Se esta quantidade não sofre variação, então o princípio deveria ser interpretado como da “chegada mais rápida” das partículas; se o tempo sofre variações, então o princípio descreve o “caminho mais curto” (ver figuras 4.3 e 4.4). A associação entre mínima ação e geodésica deve partir da última interpretação (SOMMERFELD, 1942, p. 207).

No princípio de Hamilton, o tempo não varia entre os diferentes caminhos que o sistema pode percorrer ao ir de um ponto para o outro. Neste caso $\delta t = 0$ e podemos escrever $\frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$. Usando esta hipótese, é possível encontrar o princípio de Hamilton na forma conhecida atualmente, e que não permite tirar conclusões diretas acerca da geodésica (SOMMERFELD, 1942, p. 182-184).

Para o princípio de mínima ação dado por Lagrange, o tempo deve variar entre os caminhos. Neste caso, o que não varia entre os diferentes caminhos é a energia total, e é possível escrever a integral da ação como a integral de uma função quadrática, que pode ser associada ao comprimento do caminho, e portanto à geodésica, como fez Poisson. Este será o próximo passo dado por Jacobi. Nós não estamos dizendo que aqueles cientistas estavam *procurando por tal relação*. Estamos apenas estabelecendo algumas condições (conhecidas *a posteriori*) da possibilidade de estabelecer tal relação.

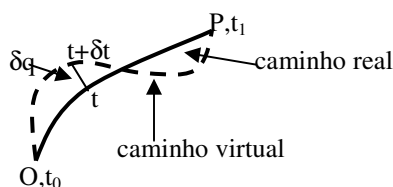


Figura 4.3 – Princípio de mínima ação de Lagrange, onde o tempo varia e a energia total deve ser considerada constante.

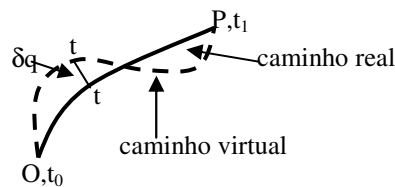


Figura 4.4– Princípio de Hamilton, onde o tempo é constante.

4.6 A REFORMULAÇÃO DE JACOBI DO PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) dedicou grande parte de sua vida como matemático ao estudo das funções elípticas, em que foi influenciado pelo trabalho de Legendre. Ele analisou estas funções não só com teoria dos números como também com a teoria de integração e que está relacionada diretamente com a teoria de equações diferenciais (SCRIBA, 1981, p. 54). Na busca de novos métodos para a resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordens, Jacobi utilizou e apresentou métodos relacionados com a mecânica, principalmente com o princípio de conservação da *vis viva* e com o princípio de mínima ação.

A relação entre o cálculo de variações e a teoria das equações diferenciais é o objeto de estudo numa carta de Jacobi de 1836 (JACOBI, [1836]) em que aparece o princípio de mínima ação. Jacobi argumenta que a determinação de máximos e mínimos é um problema que apresenta uma lacuna na teoria de variações. Ele propõe um novo método para a solução de equações diferenciais de segunda ordem de forma a obter um conjunto de condições que permitiria determinar com exatidão o máximo ou mínimo da função. Na resolução de uma função f qualquer, dependente de $x, y, \frac{dy}{dx}$, mas não dependente de t , Jacobi conclui que pode haver várias curvas que satisfazem as mesmas condições e possuem as mesmas equações diferenciais e cita como exemplo o princípio de mínima ação aplicado ao movimento elíptico dos planetas, criticando Lagrange:

A integral a ser considerada no princípio de mínima ação não pode jamais ser um máximo, como crê Lagrange; contudo ela não é sempre um mínimo; é necessário para isto que certas condições, dadas pela regra precedente⁷³, sejam aplicadas aos limites, sem as quais ela não será nem um máximo nem um mínimo (JACOBI, [1836], p. 51).

Quando se toma uma distância finita entre os pontos inicial e final do movimento, então a ação no caminho efetivamente percorrido pelo móvel pode não produzir um mínimo, mas sim um máximo ou, em geral, um caminho no qual a variação da ação é zero. Em certos casos, dados os pontos inicial e final, pode existir mais de um caminho para o qual a variação da ação é nula⁷⁴.

⁷³ Jacobi está se referindo à exposição que faz no início do trabalho, em que demonstra as condições para que uma função, cuja variação é nula, possa ter um valor máximo ou mínimo.

⁷⁴ Esta é uma crítica que já havia aparecido nos trabalhos em que se aplicava o princípio de mínimo na óptica, como o de Fermat, que citamos no item 4.1 deste Capítulo.

A aplicação das condições dadas ao movimento de um planeta entre o afélio e o periélio leva Jacobi a concluir que a curva entre os dois limites dados na qual a integral $\int v ds$ é mínima não é uma elipse (JACOBI, [1836], p. 51). No final da carta, Jacobi discute o método apresentado por Hamilton para a solução das equações diferenciais, mas não se aprofunda na relação entre o princípio de mínima ação e a geometria.

Em 1837 Jacobi publicou dois trabalhos diretamente relacionados com o princípio de Hamilton e o princípio de mínima ação. No segundo trabalho de 1837, *Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique*, Jacobi critica o trabalho de Hamilton sob muitos aspectos. O que nos interessa particularmente é o princípio de mínima ação. Jacobi entendeu a introdução do tempo na integral de ação como uma deficiência da equação $\delta \sum \int \mu u^2 dt = 0$, e mostrou como é possível eliminá-lo (JACOBI, [1837] 1886, pp. 133-134). É interessante notar que o método que Euler tinha utilizado em seu trabalho de 1744 já pretendia eliminar o tempo da equação envolvendo a força viva, deixando apenas grandezas geométricas para determinar a equação da trajetória, como vimos no item 4.2 deste capítulo.

Jacobi partiu da equação de ação para um sistema de partículas

$$\int \sum m_i v_i ds_i = \int \sum m_i \frac{ds_i}{dt} ds_i. \quad (4.53)$$

A equação da *vis viva* pode ser escrita

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt} \right)^2 = U + h. \quad (4.54)$$

Aqui, U é a função de força e h é a constante associada ao princípio de forças vivas (como H no formalismo Lagrangiano). Da Eq. 4.54 é possível obter o valor de dt (JACOBI, 1869, p. 45-51)

$$dt = \left(\frac{\sum m_i ds_i^2}{2(h + U)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.55)$$

Substituindo Eq. 4.54 na Eq. 4.53, Jacobi obteve

$$\int \sum m_i v_i ds_i = \int_1^2 \sqrt{2(h + U)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2}. \quad (4.56)$$

Assim, é possível escrever o princípio de mínima ação da seguinte forma

$$\delta \int_1^2 \sqrt{2(h+U)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2} = 0. \quad (4.57)$$

Jacobi criticou a observação inicial de Lagrange, de que tal variação da integral poderia ser um máximo ou um mínimo, e citou um trabalho seu em que provou que essa integral é um mínimo somente se obedecer certos limites⁷⁵. Ele também observou que, se Euler aceitasse que tal variação também poderia ser um máximo, seria como reconhecer que “a natureza se faz agir sempre com a maior ou a menor sabedoria” (JACOBI, [1837] 1886, p. 133), o que contrariaria sua posição a favor da providência divina⁷⁶.

O integrando na Eq. 4.57 contém somente quantidades dependentes das coordenadas. As velocidades e o tempo desapareceram no princípio de mínima ação de Jacobi. Ainda que ele tenha sido derivado do princípio de mínima ação de Euler, seu significado é novo. Euler havia utilizado em seu trabalho de 1744 a integral $\int M ds \sqrt{v}$ para obter diretamente a trajetória das partículas. No entanto, posteriormente, até Hamilton, o princípio passou a ser usado para obter as equações do movimento. Do princípio de Jacobi é impossível obter as equações de movimento, porque as quantidades cinemáticas (tempo e velocidade) foram eliminadas. Do princípio de Jacobi é possível obter somente a *relação entre as coordenadas da partícula* – ou seja, seu caminho.

Jacobi não esclareceu a razão porque queria excluir o tempo do princípio de mínima ação. Também não é claro se ele notou ou não a semelhança de sua formulação do princípio de mínima ação e a condição de geodésica. Ele estudou linhas geodésicas sobre um elipsóide nos anos seguintes, mas não houve uma conexão explícita entre suas investigações geométricas e mecânicas, nos artigos publicados. Em seu curso de mecânica, entretanto, que foi publicado postumamente, ele revelou que tinha obtido as geodésicas do elipsóide interpretando-as como as trajetórias de uma partícula livre⁷⁷ (LÜTZEN, 1995, pp. 20-21). Porém, ele não usou a Eq. 4.57 para relacionar o movimento de uma partícula em um campo conservativo a geodésicas.

Nos trabalhos subsequentes, a abordagem de Jacobi foi uma ferramenta fundamental para associar o caminho de uma partícula se movendo sob forças conservativas e linhas geodésicas.

No entanto a relação entre o princípio de mínima ação na teoria de Jacobi e a geometria na mecânica é motivo de controvérsia entre os historiadores. Para Dugas (DUGAS, 1988, p. 407), Jacobi “geometrizou” o princípio de mínima ação ao relacioná-lo com a equação das geodésicas. Para Lützen (LÜTZEN, 1995, p. 22), Jacobi explicitamente negou a origem geométrica dos princípios de mínimo que usa para descrever analiticamente a mecânica. O que podemos notar é que Jacobi está preocupado com máximos e mínimos de funções sem associar diretamente a uma equação de geodésicas e à geometria do problema. A aplicação do princípio de mínima ação ao movimento elíptico dos planetas e seus trabalhos posteriores sobre linhas geodésicas sobre elipsóides não foram diretamente relacionados por Jacobi, mas sua interpretação matemática da mecânica foi alterada (PULTE, 1997).

Com relação ao princípio de mínima ação é possível distinguir três caminhos diferentes da influência deste no desenvolvimento da mecânica. Um deles está relacionado com o problema de extremos. Nos trabalhos de Euler e Serret pode-se notar uma preocupação em estabelecer se a

⁷⁵ Jacobi apenas cita a data de apresentação desse trabalho como sendo 29 novembro de 1836, o que coincide com o trabalho *Sur le calcul des variations et sur la théorie des équations différentielles*.

⁷⁶ Na verdade, como vimos no item 4.2, apesar do que Jacobi diz, Euler tinha falado sobre a possibilidade de que a integral do princípio de mínima ação pudesse ser um máximo ou um mínimo.

⁷⁷ Usamos a frase “partícula livre” para descrever uma partícula que é obrigada a se mover sobre uma dada superfície, mas tem uma velocidade constante, sendo que está submetida apenas às forças de confinamento.

variação nula da ação determina, ou não, um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois. O trabalho de Serret de 1873 é dedicado apenas ao estudo da variação de segunda ordem da função V , que possui a mesma forma que a função característica de Hamilton. Euler também procura relacionar o princípio de mínima ação ao cálculo de isoperimétricos, ou seja, estabelecer a condição de mínimo.

Outro caminho é o adotado por Lagrange, que está basicamente preocupado em encontrar as equações gerais do movimento. Já Hamilton e Jacobi, apesar de fazerem uma análise do princípio próxima à de Lagrange, estão mais preocupados com as constantes arbitrárias que determinam as equações do movimento, e que dependem apenas do princípio de conservação da *vis viva*.

4.7 A MECÂNICA DE LIOUVILLE E A EQUAÇÃO DO ELIPSÓIDE

Encontramos no trabalho de Joseph Liouville (1809-1882) um passo decisivo na união de dois elementos centrais discutidos aqui – o princípio de mínima ação e o estudo de geodésicas.

Em 1844, Liouville publicou um artigo onde discutiu as geodésicas sobre um elipsóide (LIOUVILLE, 1844). Ele assumiu como um teorema conhecido que a linha descrita por uma partícula livre sobre uma superfície qualquer é uma linha geodésica⁷⁸.

Tenho por ponto de partida o teorema conhecido (ou se quisermos, esta definição)⁷⁹, que a linha geodésica sobre uma superfície é aquela que descreve, sem qualquer impulso, um móvel sujeito a residir sobre a superfície e do qual o movimento não será alterado por qualquer força aceleradora (LIOUVILLE, 1844, p. 401).

Ele usou coordenadas elípticas para descrever a superfície do elipsóide, e então usou a equação de Lagrange para encontrar o caminho da partícula sobre a superfície. As coordenadas elípticas são ρ, μ, ν , determinadas pela interseção de três superfícies (uma elipsoidal e duas hiperbólicas, de uma e duas folhas) num ponto de coordenadas x, y, z . Liouville adota o elemento de linha como formado por dois elementos de linha $ds' = \sqrt{p} d\mu$ e $ds'' = \sqrt{q} d\nu$, que correspondem ao comprimento ao longo das duas coordenadas μ e ν , respectivamente. Os coeficientes p, q dependem das coordenadas elípticas

$$p = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad q = \frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}, \quad (4.58)$$

onde b, c são os parâmetros do elipsóide. Usando essas coordenadas, o quadrado da velocidade do móvel sobre o elipsóide será dada por

⁷⁸ Como vimos no início deste capítulo, Euler já havia demonstrado esse teorema em seu trabalho de 1744 e Poisson também já havia estudado essa questão.

⁷⁹ Não nos parece correto dizer que essa propriedade mecânica é uma definição de geodésica, pois a geodésica possui uma definição geométrica.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 = p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \quad (4.59)$$

Liouville usa as equações do movimento dadas por Lagrange e a conservação da força viva nas coordenadas generalizadas μ, v e obtém

$$\frac{d.p \frac{d\mu}{dt}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp}{d\mu} \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dq}{d\mu} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2, \quad (4.60)$$

$$\frac{d.q \frac{dv}{dt}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp}{d\mu} \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dq}{d\mu} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

$$p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \text{constante } C.$$

As equações em 4.60 permitem, após uma série de manipulações (LIOUVILLE, 1844, pp. 404-406), encontrar a integral que determina s sobre o elipsóide e , conseqüentemente, a equação da geodésica. Este trabalho é muito semelhante ao de Jacobi, porém parece um desenvolvimento independente. Liouville não usou o princípio de mínima ação como um meio de minimizar o comprimento do caminho percorrido pelo móvel e associá-lo a uma geodésica, mas apenas o princípio de conservação da força viva. O principal ponto a ser observado nesse trabalho de Liouville é que ele escreveu a superfície através de coordenadas ortogonais que se tornam variáveis separáveis na equação da trajetória (LÜTZEN, 1995, p. 26).

Pouco depois, em 1846, Liouville introduziu um novo método. Ele comparou o movimento da partícula sobre uma superfície curva ao movimento de uma partícula submetido a forças (portanto com velocidade variável) se movendo sobre um plano. Para esta partícula, o princípio das forças vivas vale e é dado pela equação

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2U + C, \quad (4.61)$$

sendo U a função de forças e C uma constante. Liouville expressa o elemento de linha em função de duas variáveis α, β , chamadas de *coordenadas isotérmicas ortogonais*⁸⁰, ou seja $s=f(\alpha, \beta)$ de modo que a Eq. 4.61 pode ser escrita em função dessas novas coordenadas também, ficando:

$$ds^2 = \lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}(2U + C). \quad (4.62)$$

Essa é uma forma de ds^2 que segue o trabalho de Gauss, onde o elemento de linha, $ds^2 = Edp^2 + Fdpdq + Gdq^2$ (Eq.3.11), depende apenas das coordenadas intrínsecas, sendo que os coeficientes E, F e G são funções das coordenadas p, q . Na seqüência, ele utilizou novamente as equações de movimento de Lagrange, como fez nas Eqs. 4.60, incluindo agora a derivada da função U em relação às novas coordenadas. Após uma série de manipulações e substituições (LIOUVILLE, 1846, pp. 347-350), Liouville encontra que a condição de $U=0$ permite encontrar $\delta s=0$, para o elemento de linha dado em função de α, β . Ele também fornece exemplos no caso em que $U \neq 0$, usando o elemento de linha da Eq. 4.62 para encontrar as trajetórias (LIOUVILLE, 1846, pp. 351-359).

É recorrente no trabalho de Liouville o conceito de *superfície desenvolvida sobre outra superfície*, que foi utilizado por Gauss para demonstrar que, nesse caso, o elemento de linha não se altera e a curvatura é a mesma. Este era um assunto que estava tendo muita atenção por parte do estudiosos da geometria diferencial, principalmente na França e na Alemanha (STRUICK, 1933b, p.179).

O problema constava em conhecer quando duas superfícies são aplicáveis, ou seja, duas superfícies que tenham o mesmo elemento de linha ds^2 , sem que haja deformação. No caso aplicado à mecânica de Liouville, significava descrever o caminho que a partícula percorreria sobre a superfície, usando as mesmas coordenadas isotérmicas ortogonais, no formato da Eq. 4.62. Feito isso, encontrar a equação da trajetória depende da substituição desse novo elemento de linha nas equações de movimento de Lagrange.

A influência de Gauss sobre Liouville é clara no trabalho de 1847, *Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface*. Nele, Liouville mostra que o resultado encontrado por Gauss para a curvatura pode ser obtido considerando-se o elemento de linha da superfície em função das coordenadas isotérmicas ortogonais α, β , como na Eq. 4.62 (LIOUVILLE, 1847a, pp. 295-300).

A associação entre o elemento de linha da trajetória da partícula sobre uma superfície qualquer e aquele com as coordenadas isotérmicas ortogonais aparece nos trabalhos de 1846 e 1847. Neles, Liouville não faz uso do princípio de mínima ação, ou de qualquer outra hipótese do cálculo variacional para estudar a trajetória da partícula. Ele parte da hipótese inicial de que um corpo não sujeito a uma força aceleradora irá percorrer uma geodésica e encontra a equação da trajetória usando as equações de movimento de Lagrange e a conservação da força viva.

O princípio de mínima ação aparece de maneira explícita no artigo de 1856, onde Liouville faz um procedimento semelhante ao de Jacobi, ao excluir o tempo da equação da força viva, e depois faz outras considerações.

⁸⁰ Coordenadas isotérmicas ortogonais são coordenadas que se comportam como coordenadas cartesianas normais, mas o elemento de linha é multiplicado por uma função da posição, como o usado por Liouville, e localmente o elemento de linha é cartesiano.

Liouville parte da hipótese inicial de que o princípio de mínima ação só é aplicável nos sistemas em que vale o princípio das forças vivas. Seja esse sistema de pontos materiais de massas $m, m', m'' \dots$ com velocidades $v, v', v'' \dots$ a integral das forças vivas é escrita como⁸¹

$$\sum mv^2 = 2(U + K), \quad (4.63)$$

sendo U a função de forças (ou seja, menos nossa energia potencial) e K uma constante que depende da força viva inicial (ou seja, nossa energia total). O elemento de tempo dt pode ser escrito em função da Eq. 4.63, como fez Jacobi, como:

$$dt = \sqrt{\frac{\sum m ds^2}{2(U + K)}}. \quad (4.64)$$

A quantidade que Liouville considera no princípio de mínima ação é a integral, da posição (1) à posição (2), da soma dos produtos $mvds$, da quantidade de movimento de cada ponto material pelo elemento ds , que descreve, em qualquer instante dt , a trajetória. Substituindo as Eqs. 4.63 e 4.64, a integral a ação é (LIOUVILLE, 1856, p. 298):

$$\int_1^2 \sqrt{2(U + K)} \sqrt{\sum m ds^2}. \quad (4.65)$$

Segundo Liouville, o princípio da mínima ação consiste em comparar o valor que a integral da Eq. 4.65 assume para levar o sistema da posição (1) à posição (2) através de um “movimento real” e um “movimento fictício”. Comparando-se as integrais do “movimento real” com as do “movimento fictício” seria possível obter as equações das trajetórias das partículas.

Ainda que no artigo de 1856 ele não se refira à comparação entre movimento num plano sob a ação de forças e o movimento livre sobre uma superfície curva, a Eq. 4.65 é sem dúvida a relação geral que estava por trás dos artigos de 1846 e 1847. Utilizando as coordenadas isotérmicas ortogonais, é possível comparar a Eq. 4.65 à Eq. 4.62 e assim obter a equação da trajetória.

O trabalho de Liouville continha a relação fundamental entre linhas geodésicas e movimento sob forças conservativas, mas era restrito a duas dimensões. Neste ponto de nossa história, era impossível avançar mais, pois a descrição diferencial de um espaço curvo tridimensional ainda não existia.

4.8 A INTERPRETAÇÃO DE THOMSON E TAIT

Ainda considerando-se o espaço tridimensional euclidiano, Willian Thomson e Peter Guthrie Tait apresentaram o princípio de mínima ação e suas aplicações envolvendo o conceito

⁸¹ Nesta equação, K não é a energia cinética. Liouville usou a letra K no lugar de H para representar a constante no princípio da *vis viva*.

de conservação de energia no sentido que conhecemos atualmente. No tratado sobre filosofia natural de 1879, eles diferenciam o princípio de mínima ação em dois tipos: um a que eles chamaram de “least action” e outro a que deram o nome de “minimum action”.

O primeiro tipo está associado ao conceito de Maupertuis e Euler, porém agora apresenta uma definição envolvendo a energia cinética. Neste caso, a ação está definida como a integral (THOMSON; TAIT, [1879] 1923, pp. 337-338):

$$A = 2 \int_0^t T d\tau \quad \text{ou} \quad A = \int \sum m(\dot{x}dx + \dot{y}dy + \dot{z}dz), \quad (4.66)$$

ou seja, a ação é o dobro da integral temporal da energia cinética, de um instante 0 até um instante t. A expressão para a ação em termos da energia é igual à função característica V de Hamilton (Eq. 4.40), mas seu significado é diferente. Baseados na definição da Eq. 4.66, o princípio de mínima ação é entendido como:

De todos os diferentes conjuntos de caminhos ao longo dos quais um sistema conservativo pode ser levado a se mover de uma configuração para outra, com a soma de suas energias potencial e cinética igual a uma dada constante, aquele para o qual a ação é a mínima é tal que o sistema precisará apenas começar com as velocidades adequadas, para se mover ao longo dele naturalmente (THOMSON; TAIT, [1879] 1923, p. 338).

O objetivo dessa aplicação para Thomson e Tait é descobrir quais são as velocidades iniciais que levarão o sistema de uma configuração para outra configuração. O princípio de mínima ação com a definição anterior, em conjunto com a conservação da energia, permitem que se encontre as equações de Lagrange no formato apresentado no *Mécanique Analytique*, de um modo muito semelhante ao que se faz nos livros atuais (THOMSON; TAIT, [1879] 1923, pp. 340-341).

A associação da equação da geodésica com o princípio de mínima ação só apareceu para a outra interpretação do princípio, ou seja, *minimum action*. Neste caso, a análise feita pelos autores é totalmente diferente do que foi visto até agora. No caso óptico, os raios de luz, (luz como partícula) se concentram nos focos das lentes. Fazendo uma analogia com o caso óptico, uma perturbação no movimento de um sistema levaria à existência de *focos cinéticos*.

Se, a partir de qualquer configuração, dois caminhos diferindo infinitamente pouco um do outro têm novamente a mesma configuração em comum, esta segunda configuração será chamada de *foco cinético* relativamente ao primeiro: ou (por causa da reversibilidade do movimento) estas duas configurações serão chamadas *focos cinéticos conjugados* (THOMSON; TAIT, [1879] 1923, p. 428).

A ação é mínima no caso em que o movimento do sistema entre dois focos cinéticos conjugados, partindo de uma configuração dada, se dá pelo caminho natural, e vice-versa. Nesse caso então pode ser associada a esse caminho uma geodésica. A explicação é bastante confusa e está mais voltada para a análise de pontos extremos e variações de segundo grau, como fez Euler e Serret, agora considerando-se a energia do sistema.

Um ponto importante no trabalho de Thomson e Tait está relacionado com as trajetórias ao longo das normais a uma superfície:

Se, de todos os pontos de uma superfície arbitrária, partículas que não se influenciam mutuamente são projetadas com velocidade apropriadas na direção das normais, os pontos que elas alcançam com iguais ações formam uma superfície cortando os caminhos com ângulos retos. A espessura infinitamente pequena do espaço entre duas quaisquer dessas superfícies, correspondentes a quantidades de ação diferindo por qualquer quantidade infinitamente pequena, é inversamente proporcional à velocidade da partícula que a atravessa, sendo igual à diferença infinitamente pequena da ação dividida pelo momentum total da partícula (THOMSON; TAIT, [1879] 1923, p. 353).

Se usarmos linhas no lugar das superfícies, este teorema pode ser comparado ao teorema de Gauss, a linha que corta, formando ângulo reto, um conjunto de linhas mais curtas que partem de um mesmo ponto, é também uma linha mais curta (GAUSS, 1827, seção 15). Isto permite fazer uma associação entre geodésicas (linhas mais curtas) e a ação, pois para que as superfícies sejam paralelas, a ação, que é distância entre as superfícies tem que ser mínima, ou seja, coincide com uma geodésica (figura 4.5).

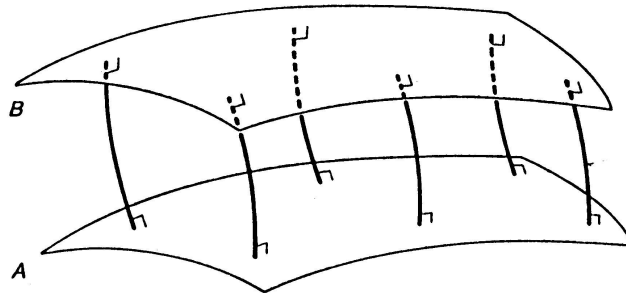


Figura 4.5: Partículas projetadas da superfície A, com velocidades ao longo das normais, que possuem a mesma ação, cortam, em ângulos retos, a superfície B.

Porém, Thomson e Tait não fazem essa relação direta entre a ação, como a distância entre as superfícies, e as geodésicas, como as linhas que unem as superfícies perpendicularmente. Esta relação entre linhas unindo superfícies, ação e geodésicas, será reforçada com a mecânica de Darboux e Lipschitz. Nesse caso, não serão apenas superfícies bidimensionais imersas num espaço euclidiano tridimensional, mas as multiplicidades de Riemann, num espaço n -dimensional.

CAPÍTULO 5

MECÂNICA DO ESPAÇO N-DIMENSIONAL

Não é possível estabelecer um marco onde o estudo da geometria não-euclidiana e a mecânica se juntam, pois fica claro com o que foi visto até agora, que são inseparáveis os progressos feitos em ambos os campos após a introdução do cálculo diferencial.

Se era possível a descrição de uma superfície usando suas propriedades intrínsecas, também poderia ser descrito o movimento de uma partícula livre sobre essa superfície usando o mesmo recurso do elemento de linha. A extensão para n partículas deveria levar em consideração a interação entre elas e ações que modifiquem o movimento do centro de massa, mas ainda assim ficaria restrito ao movimento sobre uma superfície bidimensional, imersa no espaço euclidiano.

Com a generalização da geometria diferencial para n variáveis, a mecânica num espaço com mais de três dimensões passou a ser previsível, ainda que não fosse possível sua visualização ou a comprovação através de experimentos. O desenvolvimento do formalismo que descreveria o movimento passou a ser a diferença entre os estudiosos da época.

Ao mesmo tempo, Lipschitz e Christoffel desenvolveram dois métodos diferentes para a análise do movimento: o primeiro de forma mais aplicada ao problema da mecânica; o segundo de maneira mais analítica; mas nenhum deles estava preocupado com o princípio de mínima ação e sua relação com geodésicas. Essa relação só foi aparecer nos trabalhos de Darboux, e de maneira mais compreensível do que nos outros dois autores.

Depois do trabalho de Darboux, a mecânica voltou a ser construída apenas através de métodos formais, o que se deu com a introdução do cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita. O cálculo diferencial absoluto teve suas origens nos parâmetros diferenciais de Lamé, que por sua vez estavam relacionados ao elemento de linha descrito com as propriedades intrínsecas das superfícies e diretamente relacionado, desde Euler, com a descrição da geodésica e maximização e minimização de funções quadráticas.

Neste capítulo mostraremos como se deu a extensão do princípio de mínima ação no caso das multiplicidades de Riemann e as interpretações posteriores para a relação entre geodésicas e mínima ação.

5.1 AS CONTRIBUIÇÕES DE LIPSCHITZ

Com o trabalho de Riemann e a introdução das multiplicidades, a extensão da mecânica implicava na generalização dos métodos de Hamilton e Jacobi para o movimento de um sistema em um espaço n -dimensional.

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) investigou muitas áreas da matemática, como geometria, cálculo, teoria de números, etc, mas é seu trabalho apresentado após a publicação da tese de Riemann que merece mais destaque aqui. Influenciado pela teoria de Riemann das multiplicidades n -dimensionais, Lipschitz relacionou tais multiplicidades aos problemas de cálculo variacional, geometria e mecânica (SCHONEBERG, 1981, p. 389).

A primeira relação entre o trabalho de Riemann, de 1854 (publicado em 1867), e as equações da mecânica foi proposta por Lipschitz em 1869, coincidindo com o trabalho de Christoffel, publicado no mesmo jornal e ano. Em seus trabalhos, tanto Christoffel quanto Lipschitz estavam preocupados em encontrar as condições para as quais o elemento de linha inspirado na análise de Riemann (Eq. 3.13) mantivesse uma curvatura constante através de uma

transformação de coordenadas. Enquanto Christoffel estava interessado apenas nos aspectos analíticos do problema, Lipschitz relacionou-o às equações da mecânica para encontrar a solução (TAZZIOLI, 1994, p. 114).

Lipschitz considerou o caso para um elemento de linha $f(dx)$ dependente das diferenciais das coordenadas $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ de grau $p \geq 2$, diferente de Riemann que havia considerado, como possibilidade, apenas até o grau 4. Lipschitz obteve uma transformação de coordenadas de duas funções $f(dx)=g(dy)$ que, no caso de $p=2$, era o *Teorema egregium* de Gauss, ou seja, a transformação do primeiro elemento de linha ($f(dx)$) para o segundo ($g(dy)$) levava em conta a curvatura e o desenvolvimento de uma multiplicidade sobre outra (LIPSCHITZ, 1869, pp. 74-79). O novo conceito de elemento de linha foi aplicado em outros trabalhos e, associado às propriedades mecânicas de um sistema de pontos preso a uma superfície, não influenciados por outras forças, levou Lipschitz a determinar a relação entre uma certa “pressão” e a curvatura de uma superfície (LUTZEN, 1995, p. 36).

Em 1872 ele tentou generalizar a mecânica para multiplicidades n -dimensionais arbitrárias. Sua análise era tão geral que ele até ignorou a condição de Riemann de que o elemento de linha deveria ser uma forma quadrática como a dada pela Eq. 3.13 e considerou a possibilidade de lidar com elementos de linha de diferentes graus (LUTZEN, 1995, pp. 34-35). Assim, ele generalizou o conceito de energia cinética, o qual não precisava ser uma forma quadrática também, mas deveria ser uma função homogênea das velocidades generalizadas, e das coordenadas.

Lipschitz partiu da forma de Hamilton para o princípio de mínima ação (Eq. 4.45), e no caso em que $p=2$, reescreveu o teorema das forças vivas como $T=U+h$, sendo h uma constante que corresponde à energia total. Com essa forma para o teorema das forças vivas, a ação⁸² de Lipschitz é dada pela integral (LIPSCHITZ, 1872, pp. 123- 126)

$$\Theta = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(U + h)2T} dt. \quad (5.1)$$

Para eliminar o elemento de tempo da Eq. 5.1, Lipschitz usou a expressão adotada para o elemento de linha geral, ou seja, $f(dx)$, de modo que $\sqrt{T}.dt = \sqrt{f(dx')}.dt = \sqrt{f(dx)}$. A variação da ação fica dada por

$$\delta\Theta = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(U + h)2f(dx)} = 0. \quad (5.2)$$

Lipschitz então introduz uma nova função F , dada por $F(dx)=2(U+h)2f(dx)$, o que permite rescrever a variação da ação, no caso em que $p=2$, como

$$\delta\Theta = \delta \int_{t_1}^{t_2} (F(dx))^{\frac{1}{p}} = \delta \int_{t_1}^{t_2} F(dx')^{\frac{1}{p}} dt = 0.$$

⁸² Lipschitz chamou a ação de Θ .

Para um p arbitrário, Lipschitz mostrou que o teorema das forças vivas poderia ser escrito como

$$(p-1)f(x') - U = H. \quad (5.3)$$

Usando a Eq. 5.3 para escrever a ação, a função F generalizada para qualquer p assume a forma

$$F(dx) = \left(\frac{p(U+H)^{p-1}}{p-1} \right) pf(dx). \quad (5.4)$$

Para este novo valor da função F , o princípio de mínima ação assumiria a forma geral:

$$\delta \int_{t_0}^t \left[F\left(\frac{dx}{dt} \right) \right]^{1/p} dt. \quad (5.5)$$

Ao desenvolver sua mecânica geral, Lipschitz notou a forte semelhança entre os resultados que ele obteve no caso de um elemento de linha quadrático e os resultados geométricos obtidos por Gauss para as superfícies curvas e obteve a equação para a geodésica no formato em que Gauss havia encontrado (LIPSCHITZ, 1872, p. 129). Usando a nova forma da equação da geodésica, agora levando-se em consideração a curvatura da superfície, Lipschitz generalizou seus resultados. Assim, ele encontrou as relações entre movimento livre sobre uma superfície, e movimento sobre um plano sob uma força conservativa, para uma multiplicidade n -dimensional.

A influência de Gauss e Beltrami no trabalho de Lipschitz foi essencial para a geometrização que ele fez da mecânica no caso das multiplicidades, para um espaço n -dimensional. Usando a definição geral para a ação, num caso n -dimensional, Lipschitz generalizou o teorema de Thomson e Tait para superfícies.

Ou seja, considerando duas multiplicidades com dimensão $(n-1)$, a variação ao longo da normal de uma multiplicidade à outra, necessariamente cortará a segunda multiplicidade num ângulo de 90° , se ao longo de todos os caminhos perpendiculares a ação for a mesma (LUTZEN, 1995, pp. 43-44). Como já foi mencionado, este teorema tem como origem o trabalho de Gauss⁸³ sobre superfícies curvas e sua interpretação com os problemas da mecânica para um espaço n -dimensional é feita pelo próprio Lipschitz:

No lugar de uma geodésica sobre uma dada superfície vem uma solução do problema mecânico; no lugar do contorno do ponto inicial está uma equação para os valores iniciais das variáveis; no lugar da condição que a geodésica e o contorno dos pontos iniciais sejam perpendiculares vem a condição sobre os valores iniciais das variáveis; e no lugar do comprimento final das geodésicas um valor fixo da integral de mínima ação (LIPSCHITZ, 1872, p. 120).

⁸³ Item 3.1.3 do Capítulo 3.

Lipschitz aplicou seus resultados generalizados no caso do problema de planetas em um espaço n -dimensional (CAYLEY, 1873) e na associação entre mecânica em um espaço n -dimensional não-euclidiano e as propriedades de curvatura da multiplicidade (TAZZIOLI, 1994, pp. 123-124).

5.2 ESTUDO DE DARBOUX

O trabalho de Lipschitz é muito difícil de entender, principalmente porque ele sempre tentou alcançar resultados completamente gerais. O resultado mais acessível da relação entre o princípio da mínima ação e geodésicas apareceu logo depois, em um tratado geométrico publicado em 1889 por Darboux.

Jean-Gaston Darboux (1842–1917) começou sua carreira ensinando na escola secundária, após sua formação na Escola Normal. Devido à fama que adquiriu com seus trabalhos publicados durante esse período, assumiu uma posição na Escola Normal em 1872. Darboux era um geômetra, mas tinha habilidades para usar os métodos sintético e analítico na teoria de equações diferenciais e a combinação dessas duas qualidades o levou a fazer descobertas em análise e mecânica racional (STRUICK, 1981, p. 559).

Durante o tempo em que lecionou na Escola Normal, Darboux escreveu *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, em que faz uma análise completa da teoria das equações diferenciais e sua aplicação na mecânica. Nos capítulos 4 e 5 do livro 5, Darboux estudou as propriedades das linhas geodésicas de superfícies curvas e aplicou a teoria desenvolvida ao movimento.

Darboux usa coordenadas especiais ortogonais θ, θ_1, σ , medidas sobre geodésicas, de modo que o elemento de linha tem a forma $ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2$. Para determinar como variam as novas coordenadas em função das coordenadas cartesianas, Darboux iguala esse elemento de linha ao de Gauss⁸⁴ ($ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$), encontrando a expressão que os coeficientes devem ter, ou seja (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, pp. 438-439)

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \sigma^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Com as novas coordenadas, Darboux forneceu um significado geométrico ao parâmetro diferencial de primeira ordem ($\Delta\theta$) de Lamé, relacionando-o com a teoria das geodésicas. A determinação da equação para o parâmetro diferencial permite relacionar a teoria das geodésicas com a mecânica analítica (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, pp. 438-443). A expressão para o parâmetro é dada por

⁸⁴ Gauss usou as letras p e q para as coordenadas intrínsecas. Darboux usa as letras u e v .

$$\Delta\theta = \frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}. \quad (5.7)$$

Darboux demonstra que a equação da geodésica e a curvatura da superfície podem ser obtidas considerando-se $\Delta\theta = 1$ (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 439-450). Essa é condição também para relacionar a teoria das geodésicas com a mecânica de Hamilton e Jacobi:

Uma vez obtida a equação

$$\Delta\theta = 1$$

podemos tratar o problema das linhas geodésicas como qualquer outro problema de mecânica e a ele aplicar, sem nenhuma modificação, os métodos de Hamilton e Jacobi. Encontrar-se-ão assim todos os resultados precedentes. (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 450).

As geodésicas então poderiam ser interpretadas como as trajetórias de uma partícula “livre” limitada à superfície. Nos próximos capítulos ele discutiu o movimento de partículas submetidas a forças, sendo que o primeiro caso apresentado por Darboux (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 452) foi aquele de uma partícula se movendo sobre uma superfície plana e submetida a forças descritas por uma função de forças (ou seja, um campo conservativo). Partindo das equações:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad e \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2(U + h), \quad (5.8)$$

onde U é a função das forças (nossa energia potencial com sinal trocado) e da equação das forças vivas, Darboux estuda como obter as equações das trajetórias.

O movimento da partícula no plano pode ser tirado do princípio de mínima ação, ou seja (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 464):

Entre todos os movimentos que conduzem um móvel de um ponto A a um ponto M, a velocidade de qualquer trajetória é regida pela equação:

$$v^2 = 2(U + h),$$

o movimento natural é aquele para o qual a ação, ou seja, a integral:

$$\int_A^M \sqrt{2(U + h)} ds = \int_A^M v ds \quad \text{é um mínimo.}$$

O integrando $\sqrt{2(U + h)} ds$ pode ser interpretado como um ds' , e portanto a variação da integral da ação pode ser escrita como: $\delta \int_A^M ds' = 0$ e portanto pode ser interpretado como a equação de uma geodésica.

Não vamos nos alongar mais sobre os princípios precedentes e observaremos, assim para terminarmos, que a demonstração do princípio da mínima ação pode ser diretamente correlacionada à teoria das linhas geodésicas da seguinte maneira:

x e y sendo as coordenadas retangulares de um ponto sobre um plano, U sendo a função de força e h sendo a constante das forças vivas, vamos considerar a superfície cujo elemento de linha é dado pela fórmula

$$ds^2 = 2(U+h)(dx^2+dy^2).$$

Esta superfície é representada sobre a superfície plana com *conservação dos ângulos*; além disso, a correspondência é tal que a *toda trajetória do corpo que se move no plano corresponde uma linha geodésica sobre a superfície*, e vice-versa. (DARBOUX, 1915, vol. 2, pp. 466-467).

O princípio de mínima ação e a relação entre as trajetórias do móvel e as linhas geodésicas também foram analisados para o movimento no espaço (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, 478-495), o que permitiu encontrar o teorema de Thomson e Tait em um novo formato.

Em outro capítulo de seu livro, Darboux estendeu este resultado para o caso geral, referindo-se explicitamente a Jacobi, Liouville, Beltrami e Lipschitz. Ele estudou um sistema com n graus de liberdade, seu movimento sendo descrito por n quantidades independentes q_i . A força viva é uma função quadrática das velocidades q'_i (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 496)

$$2T = \sum_i \sum_k a_{ik} q'_i q'_k. \quad (5.9)$$

Partindo do princípio de mínima ação, a integral $\int 2T dt$ é um mínimo. Generalizando o método de Jacobi, Darboux elimina o elemento de tempo e reescreve essa integral como (DARBOUX, 1915, vol. 2, pp. 508)

$$\int_1^2 \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum_i \sum_k a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (5.10)$$

Esta integral será um mínimo. A Eq. 5.10 não está tratando de uma partícula no espaço tridimensional, mas de um sistema de n partículas num espaço qualquer, ou seja, o resultado agora é genérico para n graus de liberdade. Com a eliminação do elemento de tempo, Darboux pôde interpretar o integrando

$$ds^2 = 2(U+h) \sum_i \sum_k a_{ik} dq_i dq_k \quad (5.11)$$

e observar (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, p. 516):

ds indicará o que chamamos de *ação elementar*, e vemos que a solução do problema geral de Mecânica é reduzida à busca do máximo ou mínimo da integral

$$\int_{p_0}^{p_1} ds,$$

onde ds^2 é uma forma quadrática obedecendo a única condição de ser *definida positiva*. Este é o significado da mínima ação; e imediatamente se reconhecerá, graças a este

princípio, que o problema geral da Mecânica é apenas uma extensão para número qualquer de variáveis do problema de investigação das linhas geodésicas.

O nome “linha geodésica” foi dado inicialmente para as linhas mais curtas que podem ser feitas *sobre uma dada superfície*. Darboux generalizou o significado de “linha geodésica” interpretando-as como as linhas que obedecem a condição de mínimo da integral $\int ds$. Portanto, a equação que descreve o movimento de qualquer sistema mecânico conservativo (com n graus de liberdade) pode ser interpretado como equivalente à equação de uma linha geodésica em uma multiplicidade n -dimensional com um elemento de linha conveniente, sendo os coeficientes da métrica influenciados pela função de força do sistema (DARBOUX, [1889] 1915, vol. 2, pp. 523-526).

5.3 TRABALHO DE CHRISTOFFEL

Como já foi dito, no mesmo ano em que Lipschitz publicou seu trabalho, Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) publicava um trabalho em que relacionava as equações da mecânica com a teoria das multiplicidades n -dimensionais de Riemann, considerando o problema analiticamente (TAZZIOLI, 1994, p. 114).

Christoffel introduziu símbolos que representavam geometricamente uma superfície num espaço tridimensional e que pretendiam resolver a equivalência entre formas diferenciais quadráticas como um problema de equivalência para sistema de formas algébricas (BUTZER, 1981, p. 255). Ele também deu início à teoria de invariantes e de derivação covariante. Ou seja, seu objetivo era encontrar uma transformação para uma função diferencial que fosse independente das variáveis adotadas.

O trabalho de Christoffel foi um primeiro passo num longo caminho que vai resultar nos conceitos de grandezas invariantes, covariantes e contravariantes, e também equações cuja forma é invariante, ou seja, equações que permanecem válidas para qualquer transformação de coordenadas que seja feita.

Uma grandeza é invariante se seu valor permanece inalterado após uma transformação de coordenadas. Uma grandeza vetorial é contravariante se as suas componentes se transformam do mesmo modo que as diferenciais das coordenadas e correspondem, geometricamente, a achar as componentes do vetor projetando-o paralelamente aos eixos de referência locais. As componentes covariante do vetor podem ser interpretadas geometricamente como projeções ortogonais aos eixos locais. Os vetores covariantes se transformam da mesma forma que os vetores de base locais. Tensores covariantes e contravariantes são definidos, por analogia com os vetores covariantes e contravariantes, a partir das propriedades das componentes. Com as grandezas covariantes ou contravariantes podemos escrever equações cuja forma se mantém qualquer que seja a transformação de coordenadas utilizada. Esses conceitos serão de extrema importância posteriormente, no desenvolvimento do cálculo diferencial absoluto e sua aplicação na relatividade e no eletromagnetismo.

O estudo dos invariantes surgiu como consequência da linguagem dada por Gauss em seu trabalho sobre superfícies curvas. O trabalho de Gauss mostra algumas propriedades da superfície que se mantêm invariáveis no desenvolvimento dessa superfícies sobre outra, como o elemento de linha, a curvatura e o ângulo entre duas direções na superfície. Seguindo uma linha diferente da geometria de Gauss, Lamé estudou os parâmetros diferenciais, que também possuíam a propriedade da invariância. Ambos possuíam objetivos similares, mas em campos de pesquisa diferentes, quais sejam: geometria intrínseca para Gauss e equações diferenciais aplicadas à teoria de calor e elasticidade para Lamé. Esses objetivos só convergiram para um mesmo formalismo após o trabalho de Riemann (DELL’AGLIO, 1996, p. 219).

O trabalho de Christoffel permitiu encontrar uma expressão para os elementos invariantes de Gauss, enquanto o trabalho de Lamé recebeu uma nova interpretação geométrica com o cálculo diferencial absoluto, agora ambos aplicados à multiplicidades n -dimensionais.

Os símbolos de primeiro e segundo tipo, atualmente chamados de símbolos de Christoffel, são dados, respectivamente, por (CHRISTOFFEL, 1869, pp. 48-53)

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial \omega_{gh}}{\partial x_k} \right] = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\sum_r \omega_{ik} \begin{Bmatrix} gh \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

onde ω_{ik} são os coeficientes de uma forma quadrática que pode ser interpretada geometricamente ou não. Ele vai generalizar um conceito de diferencial que independa do sistema de coordenadas. O trabalho de Christoffel segue uma linha diferente da de Lipschitz pois não envolve cálculo integral e variacional, mas sim de uma forma quadrática que é interpretada de modo geral.

Os resultados do trabalho de Christoffel de 1869⁸⁵, junto com o trabalho de Lipschitz, foram a base para o desenvolvimento do cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita pois permitiram formular uma teoria em que o sistema de variáveis adotado não importava.

5.4 AS TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA

Após o trabalho de Darboux, em que o princípio de mínima ação e a equação da geodésica foram relacionados para um sistema com n graus de liberdade, a preocupação nos trabalhos posteriores parece ter mudado. Trabalhos como os de Appel e Painlevé, que influenciaram Levi-Civita na interpretação da dinâmica através do cálculo diferencial absoluto, estavam interessados em encontrar a equivalência entre dois sistemas diferentes com relação à força viva e à função de força.

Em 1892, Paul Appel (1855-1930) estudou o problema de dois sistemas cujos vínculos sejam independentes do tempo, com n graus de liberdade cada, em que um deles estava sob a ação de uma força dependente da posição e da velocidade e o outro estava sob a ação de uma força qualquer. Ele encontrou uma transformação das coordenadas e do tempo que permitia estabelecer a correspondência entre os movimentos dos dois sistemas, usando a força viva como uma forma quadrática, semelhante à Eq. 5.9. Ele vai mostrar que se a transformação existe, ela faz com que o movimento do primeiro sistema, quando não existe nenhuma força, corresponda a um movimento análogo do segundo sistema, e que nesse caso os dois movimentos são geodésicos, e portanto, um movimento geodésico se transforma em outro (APPEL, 1892, pp. 37-40).

Pode-se, por exemplo, transformar o movimento sobre uma esfera projetando esse movimento sobre um plano, através de projeção central, e desde que sejam satisfeitas certas condições, pode-se transformar o movimento de um ponto sobre uma superfície qualquer em um

⁸⁵ Em 1882 Christoffel publicou outro trabalho em que aprimorava os resultados de 1869.

movimento sobre outra superfície não aplicável, desde que as linhas geodésicas se correspondam nessas duas superfícies (APPEL, 1892, pp. 40-41).

Paul Painlevé (1863–1933) também estudou as transformações das equações da dinâmica do mesmo ponto de vista que Appel, porém de modo mais detalhado. O estudo de Painlevé não se restringe aos casos em que as forças derivam de um potencial. Ele procura obter equivalência entre movimentos em dois sistemas diferentes, quaisquer que sejam as forças agindo sobre o sistema. Painlevé e Appel não usaram cálculo diferencial no seu formalismo, mas uma notação confusa e muito complicada.

A transformação das equações como mostrada nos trabalhos acima estabelece o seguinte problema. Se existem duas maneiras diferentes de descrever o mesmo sistema, apenas com manipulação matemática, os dois sistemas formados possuem a mesma trajetória. Se o problema diz respeito a dois sistemas diferentes onde, por exemplo, um está submetido a forças dependentes da velocidade e o outro está submetido a forças quaisquer, a equivalência das trajetórias também pode ser demonstrada pelas transformações das equações de uma forma apropriada, o que corresponde a encontrar uma forma quadrática cuja integral corresponda às trajetórias. Dessa forma, se para qualquer configuração do sistema é possível obter outro sistema, cuja trajetória é a mesma, perde-se informação sobre o movimento, pois não se está levando em conta a relação entre posição e tempo, nem as velocidades, mas apenas a forma geométrica do deslocamento.

No método de resolução atual, o princípio de mínima ação é usado calculando-se a variação da integral do lagrangiano, que não é uma forma quadrática, para encontrar as equações do movimento, isto é, obter informações sobre o movimento. O princípio de mínima ação pode ser formulado também com a equação de uma geodésica, ou seja, uma forma quadrática. Quando se faz isso não se pode mais obter as equações de Lagrange, obtendo-se apenas a trajetória do movimento, e portanto nesse caso, o princípio não fornece todas as informações sobre o movimento. Isso independe do número de dimensões do sistema.

Euler já havia demonstrado que uma partícula não submetida a forças descreve uma geodésica. Ou seja, ele associou uma forma quadrática ao movimento da partícula. Com qualquer configuração de sistema, com forças ou sem forças, é possível “construir” uma forma quadrática que é integrada para encontrar a equação da trajetória. A parte mais importante é uma parametrização do tempo, de modo a excluí-lo da integral, como foi feito por Jacobi, Liouville, Darboux e outros. Assim, a integral da forma quadrática sempre pode ser associada a uma trajetória geodésica.

As transformações de Appel e Painlevé mostram o processo inverso, ou seja, dada uma trajetória, é sempre possível encontrar dois sistemas diferentes que a sigam. Essa trajetória, que é determinada pela forma quadrática, é o invariante. Como veremos no próximo item, em seu trabalho de 1896 e no artigo final sobre o cálculo diferencial absoluto, o que Levi-Civita faz é simplesmente escrever a mesma transformação discutida por Painlevé, Appel e Roger Liouville, usando a notação do cálculo diferencial absoluto. Ele não menciona o princípio de mínima ação e apenas utiliza a forma quadrática, que é invariante, para obter a trajetória comum entre sistemas com configurações diferentes.

Desde 1892, o que consideramos como o primeiro trabalho sobre as transformações, até atualmente, foram encontrados poucos trabalhos que mostram as consequências das análises de Painlevé e Appel⁸⁶.

No livro de 1915, Levi-Civita relaciona essas transformações e sua interpretação geométrica fornecida pela nova notação, com a relatividade de Einstein.

⁸⁶ Veja THOMAS (1946) e LICHNEROWICZ (1952).

5.5 RICCI E LEVI-CIVITA

Gregorio Ricci (ou Ricci-Curbastro) (1835-1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1941) desenvolveram o cálculo diferencial absoluto, posteriormente chamado de cálculo tensorial e aplicado na teoria da relatividade.

No cálculo diferencial absoluto as fórmulas independem do sistema de variáveis usado. O principal requisito para que seja válida essa propriedade é a introdução de um elemento invariante (também chamado de “absoluto”), ou seja, que também pode ser usado ao lidar com outros sistemas. Esse elemento para Ricci é a forma diferencial quadrática, que pode ser interpretada, geometricamente, como a distância elementar entre dois pontos.

O trabalho de Ricci sobre cálculo diferencial absoluto começa por volta de 1880, incluindo os principais conceitos e o início de uma teoria sistemática. No início, entre 1884 e 1886, estava diretamente ligado às formas quadráticas diferenciais e parâmetros diferenciais e criticava o uso do cálculo de variações no estudo dos parâmetros diferenciais, o que estava contra a teoria vigente na época. Influenciado por Casorati (1835-1890) e Christoffel, Ricci encontra expressões para as leis de transformação de várias grandezas matemáticas seguindo o raciocínio desse último, e introduz, em 1888, os termos “covariante” e “contravariante” (DELL’AGLIO, 1996).

Em seu trabalho de 1884, Ricci inicia a teoria do cálculo diferencial absoluto, usando os símbolos de Christoffel para reduzir uma forma quadrática de dimensão n , dada por

$$\varphi = \sum_{rs}^n a_{rs} dx_r dx_s, \text{ para uma de dimensão } n-1, \text{ dada por } \varphi = \sum_l^{n-1} b_{lm} du_l du_m, \text{ o que significa,}$$

geometricamente, a descrição de um subespaço de $(n-1)$ -dimensões por coordenadas intrínsecas. O trabalho apresenta uma interpretação geométrica para o invariante encontrado, que é a forma quadrática, utilizando um número de variáveis igual à dimensão do supespaço. No caso de $n=3$, a partir dessa forma quadrática é possível encontrar a curvatura da superfície como dada por Gauss (RICCI, 1884, pp. 164-165). Ricci mostra-se influenciado pelo trabalho de Christoffel, Gauss e por Beez (do qual não se encontram referências), e também por Beltrami e Lamé, discutindo detalhadamente a validade dos parâmetros diferenciais de primeira e segunda ordens com relação à forma quadrática invariante (RICCI, 1886).

Ricci introduz uma nova notação para representar grandezas covariantes e contravariantes e analisa suas transformações, além de aplicar aos parâmetros diferenciais para definir a derivação covariante das grandezas. Os trabalhos que se seguem mostram aplicações diferentes na relação entre geodésicas e as equações da dinâmica.

Em 1894, a Academia de Ciências de Paris propôs o estudo das integrais algébricas das equações da dinâmica e das integrais quadráticas, como objeto de prêmio. Em resposta ao problema proposto, Roger Liouville escreveu um trabalho em que mostrava que as equações de movimento de Lagrange, para m graus de liberdade, poderiam ser associadas a um sistema de equações diferenciais lineares, cuja solução tinha como condição a existência da integral de uma forma quadrática. Ele estudou duas hipóteses: a primeira, em que o sistema material estava sujeito a uma força nula; e a segunda, em que o sistema estava sujeito a um potencial dependente da posição.

O objetivo é a transformação das equações de movimento, e para isso ele faz considerações importantes, pressupondo a equivalência entre o estudo de um problema dinâmico e a obtenção de *geodésicas generalizadas*. Ele vai utilizar coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_m$ para representar o movimento do sistema num espaço generalizado no qual o movimento é uma geodésica e cuja métrica é $ds^2 = \sum_{ik} e_{ik} dx_i dx_k$. Como $ds^2 = 2T dt^2$, considerando $m=1$, e como nesse espaço, onde está sendo estudada a geodésica generalizada, as forças desapareceram, então as equações de

movimento são de uma partícula que não está submetida a nenhum potencial, que são (LIOUVILLE, 1895, p. 256)

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad (5.14)$$

as quais, desenvolvidas, fornecem:

$$\sum_k e_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{h,h'} \left(\frac{\partial e_{ih'}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{de_{h,h'}}{\partial x_i} \right) \frac{dx_h}{dt} \frac{dx_{h'}}{dt} = 0. \quad (5.15)$$

Essa solução leva Liouville a associar o problema da dinâmica em que é válida a integral das forças vivas (e não há forças atuantes sobre o sistema) ao problema das geodésicas, com a integral de uma forma quadrática, e aplicar essa associação para obter transformações entre sistemas dinâmicos.

O trabalho de Liouville influenciou Levi-Civita a escrever, em 1896, um trabalho em que discutia as transformações das equações da dinâmica. Nesse trabalho, Levi-Civita aplica a teoria de Liouville para concluir que a toda integral algébrica do movimento de um sistema, sob a ação de forças dadas, corresponde uma integral para o movimento do mesmo sistema, sem a atuação de forças. Isso permitia encontrar a integral para a forma quadrática de um sistema sob a atuação de forças com base na mesma integral sem a atuação das forças.

Levi-Civita também discutiu a chamada “conservação das geodésicas”. Dado um sistema dinâmico em que a força depende da velocidade, é possível encontrar um sistema dinâmico correspondente a esse em que a força não dependa da velocidade e que tenha a mesma trajetória que o sistema original. Geometricamente, esse problema, no caso em que não há forças, corresponde a encontrar todas as multiplicidades ψ representáveis sobre uma multiplicidade ϕ , de modo que a uma geodésica de ψ corresponda uma geodésica de ϕ , cujo elemento de linha seja dado por $ds = dt\sqrt{2T}$ (TOSCANO, 2001, pp. 327-328).

Pode-se observar que, para que seja válida a conservação das geodésicas, como proposto por Levi-Civita, a forma quadrática do elemento de linha já não possui a força dependente da posição, ou o potencial, como chamamos hoje. Rescrevendo a Eq 5.11, o elemento de linha de Darboux teria a forma

$$ds = \sqrt{2(U + h)} dt \sqrt{2T}. \quad (5.16)$$

A Eq. 5.16 possui a força dependente da posição, dada pelas funções U e h , diferentemente da forma proposta por Levi-Civita na conservação das geodésicas, ou seja, $ds = dt\sqrt{2T}$, o que leva ao mesmo questionamento que existiu entre os trabalhos de Hamilton e Lagrange. Esta equação, se voltarmos ao que foi discutido no início do capítulo, estava associada a uma geodésica também. Isso mostra como a relação entre geodésicas e princípio de mínima ação, conceitos expressos através de formas quadráticas, é confusa ao longo da história.

A primeira publicação dos métodos do cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita, em 1901, não teve reconhecimento por parte dos outros matemáticos. De um modo geral, o artigo procura apenas descrever com a nova notação de covariantes, contravariantes e derivadas covariante e contravariante, a teoria já existente para a transformação de coordenadas numa multiplicidade n -dimensional. Como resultado importante para a mecânica, ele apresenta a relação entre a forma quadrática invariante, a métrica e a expressão que a força viva pode assumir em qualquer multiplicidade.

No capítulo 5 eles propõem aplicações à mecânica, considerando um sistema material, com n graus de liberdade, com vínculos independentes do tempo. A força viva do sistema assume a expressão (RICCI; LEVI-CIVITA, 1901, pp. 178-179)

$$2T = \sum_1^n a_{rs} x'_r x'_s,$$

ou seja:

$$2T dt^2 = \sum_1^n a_{rs} dx_r dx_s. \quad (5.17)$$

A Eq. 5.17 é usada nas equações de Lagrange de um sistema sob a ação de forças, dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_h} = X_h, \quad (5.18)$$

onde X_h determina as forças aplicadas. Os autores argumentam que X_h se transforma por covariância, o que permite encontrar um sistema recíproco, o que leva às transformações da dinâmica já discutidas aqui. Baseado na covariância dos parâmetros e na existência do sistema recíproco, concluem que:

É bem conhecido que a toda integral algébrica (com relação a x') do movimento de um sistema, sob a ação de forças dadas, corresponde uma integral homogênea (sempre com relação a x') para o movimento do mesmo sistema, sem forças.

Este estudo de caso adquire uma importância toda particular. Sob forma geométrica ele corresponde às integrais homogêneas das geodésicas, porque as trajetórias do movimento na ausência de forças não são outras que as geodésicas da variedade V_n , onde $2T dt^2$ é a expressão de ds^2 (RICCI; LEVI-CIVITA, 1901, p. 179).

Se a forma quadrática, ou seja, o elemento de linha, é um invariante, então a integral deste elemento deve fornecer a equação da trajetória para qualquer função das coordenadas em qualquer sistema, para qualquer número de graus de liberdade. Se a força viva, escrita como na equação de Darboux pode ser associada a uma forma quadrática, ela pode ser associada à métrica em qualquer variedade ou multiplicidade e portanto apresenta uma relação com a curvatura da

multiplicidade. Ela também pode ser associada com o elemento de linha de Riemann e a sua integral com relação ao tempo descreve a trajetória na multiplicidade considerada.

No entanto, o objetivo principal do trabalho era a divulgação do novo método e não havia a preocupação de “explicar”, mas apenas de “aplicar” ou “rescrever” os resultados já conhecidos com a nova notação (TOSCANO, 2001, pp. 325-326). Com o formalismo do cálculo diferencial absoluto, fica imediata a transformação das equações da dinâmica, o que nos mostra sua importância.

Além da influência de Christoffel, o cálculo diferencial absoluto também foi influenciado por Lamé e Beltrami, com a teoria dos parâmetros diferenciais. Isto fica muito claro num trabalho anterior de Levi-Civita, publicado em 1899, em que ele os emprega no estudo de potenciais.

Em 1911, Ricci e Levi-Civita publicaram novamente o trabalho, agora no *Bulletin des Sciences Mathématiques*, mas também não houve reconhecimento. Os matemáticos da época discutiam sua relevância uma vez que ele não apresenta novos resultados e, nas aplicações possíveis até então, ele parecia mais complicado do que os outros algoritmos existentes. Ele só passou a ser relacionado à métrica quadridimensional do artigo sobre relatividade de Einstein quando Grossmann tomou conhecimento do método (SPEZIALI, 1981, p. 410).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Nesta tese estudamos como se deu o desenvolvimento da mecânica não-euclidiana durante o século XIX.

Nesse período, a geometria não-euclidiana seguiu por um caminho diferente da geometria diferencial, que passaram a ser interrelacionadas apenas após o trabalho de Riemann. Desde as tentativas de demonstração do quinto postulado, que ocorreram durante o século XVIII, com Saccheri, até as demonstrações de Bolyai e Lobačevskiĭ, a geometria não-euclidiana estava voltada mais para a construção de uma nova teoria de forma axiomática.

Ainda que as teorias de Bolyai e Lobačevskiĭ se aproximassem muito, principalmente na nova definição de paralelas (a qual supunha que mais de uma paralela a uma reta passaria pelo mesmo ponto) e tivessem sido construídas ambas de forma axiomática, elas tinham objetivos diferentes. Bolyai deduziu sua nova teoria preocupado com a demonstração do quinto postulado, ficando a existência de uma nova geometria restrita a exercícios mentais. A geometria imaginária de Lobačevskiĭ também foi construída de forma axiomática, mas a possibilidade de aplicação da teoria era uma de suas preocupações, tanto que ele tentou aplicá-la para encontrar desvios da geometria euclidiana usando dados da paralaxe das estrelas.

A existência de uma geometria onde a soma dos ângulos de um triângulo poderia ser maior ou menor que dois ângulos retos implicava em um novo conceito de espaço. Um espaço que poderia existir apenas como ente matemático, mas que também poderia existir fisicamente, como propunha Lobačevskiĭ através da sua aplicação. Isso fez com que as teorias de Lobačevskiĭ e Bolyai não fossem bem aceitas na época e permanecessem na obscuridade durante um longo tempo, até poderem ser associadas com as novas teorias que surgiram.

É interessante notar que o desenvolvimento de uma nova geometria tenha partido de uma dúvida, como foi o caso do quinto postulado. Existia dúvida sobre se ele era um postulado que não precisava de demonstração, ou se deveria ser um teorema, deduzido a partir de definições e outros postulados. Esta dúvida foi fundamental para a criação de uma nova teoria, que mostrava que poderiam existir outras geometrias diferentes que não eram contraditórias.

O outro caminho que levou à geometria não-euclidiana teve início com o estudo de superfícies. Apesar de se restringir apenas ao espaço euclidiano no início, foi a possibilidade de determinação das propriedades de uma superfície usando apenas suas coordenadas intrínsecas o que tornou a geometria diferencial importante na expansão da geometria não-euclidiana. A geometria diferencial teve as primeiras contribuições com os trabalhos de Euler e Clairaut, mas foi o trabalho de Gauss em 1827 que definiu as principais características que seriam seguidas no estudo de superfícies.

Enquanto Euler descrevia a superfície projetando-a sobre coordenadas cartesianas, Gauss construiu um sistema de coordenadas na própria superfície, que permitia obter sua curvatura. As expressões para a curvatura e para o elemento de linha eram dependentes apenas das propriedades intrínsecas da superfície euclidiana.

Dentro do espaço tridimensional euclidiano a que se restringia, a teoria de superfícies de Gauss permitiu a determinação de equações das geodésicas para diferentes superfícies, como o elipsóide, feita por Jacobi.

No mesmo período em que a geometria passava da abordagem axiomática para a descrição diferencial, a mecânica passava da interpretação metafísica para a descrição analítica e racional do movimento.

No final do século XVII, as equações do movimento eram determinadas pelas equações de Newton. Leibniz apresentava uma visão mais metafísica, tratando o movimento sob influência divina. Por esse caminho também seguiu Maupertuis durante o século 18, associando a perfeição divina à causa do movimento.

Com uma visão voltada para a geometria do movimento, Euler usava o cálculo diferencial e variacional para descrever uma mecânica racional. Ainda que declarasse em alguns trabalhos a influência de Maupertuis, Euler manteve a mecânica restrita a demonstrações geométricas e cálculos diferenciais e variacionais, sem explicá-la através da metafísica.

Durante o século XVIII, o livro de Lagrange, *Mécanique Analytique*, passou a descrever a mecânica apenas de forma analítica, sem se preocupar com a geometria do problema, e influenciou no caminho que a mecânica passaria a ter a partir dali.

Tanto na interpretação metafísica da mecânica, quanto na analítica, o princípio de mínima ação aparecia como a forma mais simples de explicar o movimento. Para Leibniz, ele se confundia com o princípio de conservação da força viva e era justificado pela perfeição Divina, que estabelece o movimento a partir de sua finalidade, que é sempre a de despendar a menor quantidade de energia possível.

Em Maupertuis, o princípio de mínima ação ainda aparecia como consequência dos desígnios divinos, porém era aplicado também ao caso de choques e equilíbrio de alavancas.

Euler nesse período estava envolvido com a determinação de máximos e mínimos e isoperimétricos. Para ele deveria haver uma lei de máximo ou mínimo que regesse o movimento dos corpos. Supondo corpos sob a ação de forças conservativas, Euler encontrou que a condição de mínimo da integral ao longo do percurso, do produto da massa pela velocidade, levava à trajetória descrita pelo móvel, o que, no caso do corpo em queda livre, levaria à equação de uma reta.

Lagrange determinou a condição de mínimo usando cálculo variacional. Ou seja, uma variação nula implica numa condição de extremo, que, no caso da ação, é um mínimo. Usando essa condição de mínimo, ele obteve as equações do movimento, para corpos sujeitos a forças conservativas, sem ter imposto condições para a variação do tempo.

A integral da força viva também pode ser escrita como uma integral de ds , após algumas transformações. A condição de mínimo desta forma quadrática leva à equação da geodésica. No entanto, o trabalho de Lagrange não tinha como objetivo tratar a geometria do problema, e ele não fez considerações sobre o tipo de trajetória que seria consequência da condição de mínimo.

A relação entre geodésica e a condição de mínima ação é tratada por Poisson, que analisa o princípio de mínima ação para o caso de um corpo isolado e um sistema de corpos. Poisson estabelece explicitamente que o princípio de mínima ação leva à mínima trajetória entre dois pontos, no caso em que o módulo da velocidade é constante. Porém Poisson, como Lagrange, assume o tempo como variável independente e chega a uma conclusão errada quanto à equação que deve ser minimizada.

Após o trabalho de Lagrange, Hamilton e Jacobi voltaram a usar o princípio de mínima ação para obter as equações de movimento do corpo. No entanto, esse não foi o ponto mais importante em seus trabalhos.

Hamilton, influenciado pelo trabalho de óptica de Fermat, pretendia encontrar novos métodos de se analisar problemas mecânicos. Seu objetivo era estabelecer o menor número possível de variáveis e equações diferenciais que permitissem determinar a evolução do movimento.

Ele introduziu a *função característica* (V) do sistema, que era obtida pela integral, ao longo do tempo, da força viva, e determinou as equações do movimento em função dela. Apesar de ter a mesma forma que a ação de Lagrange, Hamilton não estabeleceu nenhuma condição de extremo para a *função característica*. Ele apenas usou essa função para construir outra, chamada

de *função principal* (S), que dependia da força viva (T) e da função de força (U), e que era equivalente à nossa função lagrangiana.

Hamilton não usou a função principal S no princípio de mínima ação, mas de suas deduções é possível estabelecer que a variação de S seria nula. Nesse caso, a condição de mínimo não é mais determinada por uma função quadrática, e sim por uma função semelhante ao lagrangiano que conhecemos atualmente. A esse princípio de mínimo, chamamos de princípio de Hamilton. Partindo do princípio de Hamilton, não é possível determinar diretamente a equação da geodésica, pois a função a ser integrada não é mais uma forma quadrática.

Tanto o princípio de mínima ação de Lagrange, quanto o princípio de Hamilton, permitem chegar às equações de movimento, porém são diferentes no modo como fazem a variação das funções. No princípio de mínima ação de Lagrange, o tempo, variável independente, também varia entre os diferentes caminhos que podem ser seguidos entre duas configurações do sistema no movimento. O que se mantém constante para Lagrange é a energia total do sistema, como pôde ser determinado posteriormente na análise feita por Sommerfeld, enquanto que no princípio de Hamilton, para se encontrar a condição de mínimo, o tempo deve ser mantido constante na variação.

Hamilton também não estava preocupado em estabelecer a geometria do problema, ou seja, associar sua *função principal* a um determinado tipo de trajetória.

Jacobi tinha os mesmos objetivos que Hamilton na determinação do menor número possível de equações que determinassem o movimento. Porém, em um de seus trabalhos, influenciado pelo princípio de mínimo de Euler, ele obteve um princípio de mínima ação (Eq. 4.57) em que a função a ser integrada dependia apenas das coordenadas, o que permitia determinar diretamente a trajetória do sistema.

Porém Jacobi não obteve relações entre seu princípio de mínima ação e a equação da geodésica, ainda que o integrando contivesse uma forma quadrática. Ao obter a equação da geodésica sobre um elipsóide, Jacobi fez uso do elemento de linha proposto por Gauss, mas não relacionou com o movimento de um corpo sobre esse elipsóide.

Essa relação aparece em Liouville, que determina a equação da geodésica partindo das equações de movimento de um corpo sem a ação de forças. Ele parte da hipótese inicial de que nessas condições, o corpo necessariamente descreveria uma geodésica, como já havia sido demonstrado por Euler. O princípio de mínima ação aplicado ao movimento do corpo sobre o elipsóide permite encontrar a correspondente equação da geodésica.

Quando Liouville publicou seu trabalho, a geometria diferencial estava voltada para as aplicações na mecânica e na óptica. Nessa época, Lamé começou a desenvolver sua teoria de parâmetros diferenciais diretamente voltada para a aplicação na teoria do calor e da elasticidade. A análise de Cayley e Grassmann, que utilizava n variáveis na mecânica, surgia como as primeiras idéias para uma geometria n -dimensional.

Com o trabalho de Riemann, associando a geometria diferencial intrínseca de Gauss com as multiplicidades n -dimensionais, uma nova visão do espaço surgiu também para a mecânica. As duas teorias forneciam as ferramentas para se descrever o movimento sobre qualquer superfície, em qualquer espaço. O espaço passava a ser determinado por suas propriedades métricas, que eram fornecidas pelo elemento de linha ds^2 .

Beltrami percebeu a relação que havia entre as equações de movimento da mecânica aplicadas numa multiplicidade e as propriedades da métrica, e encontrou, usando o princípio de mínima ação na forma adotada por Jacobi, a equação da geodésica numa multiplicidade n -dimensional. Ele também generalizou os parâmetros diferenciais de Lamé.

A possibilidade de descrever qualquer espaço físico baseando-se nas propriedades da métrica levou Beltrami a associar a geometria de Lobačevskiĭ-Bolyai a um tipo especial de

geometria, em que poderiam valer relações diferentes, assim como valiam relações diferentes na geometria de multiplicidades de Riemann.

A associação que passou a existir entre geodésicas e ação levou a interpretações físicas de teoremas válidos para geodésicas. É o que fazem Thomson e Tait ao estabelecer que pontos que possuem a mesma quantidade de ação, ao partirem perpendicularmente de uma superfície, formarão outra superfície, perpendicular aos seus caminhos.

Esse teorema aplicado num espaço n -dimensional relaciona multiplicidades n -dimensionais, cuja distância entre elas, ao longo da normal, corresponde à ação, como generalizam Lipschitz e Darboux. Partindo do trabalho de Jacobi, Darboux vai fazer uma generalização para um espaço n -dimensional, e mostrar claramente a relação entre o cálculo de geodésicas e o princípio de mínima ação num espaço geral n -dimensional.

Darboux seguiu o caminho inverso de Beltrami. Ao invés de utilizar as propriedades da mecânica num espaço n -dimensional para encontrar resultados matemáticos nesse espaço, Darboux preferiu usar os recursos da geometria diferencial em n dimensões para generalizar os resultados da mecânica que eram válidos para o espaço tridimensional.

Nos trabalhos de Appel e Painlevé havia a tentativa de encontrar a correspondência entre duas descrições diferentes do movimento de um sistema, mas não havia ainda métodos matemáticos para trabalhar isso de forma geral. Mas eles procuram encontrar correlações entre o movimento de sistemas submetidos, ou não submetidos a forças, empregando, em alguns pontos a relação entre geodésicas e princípio de mínima ação. Tentativas desse tipo parecem ter sido a origem do cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita. Eles pretendiam construir um algoritmo que permitisse resolver todos os problemas da mecânica n -dimensional baseando-se em transformadas covariantes e contravariantes. Porém, ao estabelecer o novo formalismo, Ricci e Levi-Civita não citam a origem da relação entre geodésicas e princípio de mínima ação que permeou o desenvolvimento da mecânica não-euclidiana durante o século XIX.

Parece, ao chegarmos nesse ponto, que a geometria construída por Lobačevskiĭ e Bolyai não teve influência no desenvolvimento da mecânica, e que esse desenvolvimento se baseou apenas na extensão da geometria diferencial para o caso n -dimensional. Porém, existe outra vertente da mecânica não-euclidiana desenvolvida no século XIX que não foi possível abordar, objeto de estudos de Genocchi e Jules Andrade, entre outros, que se desenvolveu independentemente da geometria diferencial (MARTINS, 1995).

É também de fundamental importância lembrarmos que na teoria proposta por Riemann uma das características que determinarão a métrica vigente é a curvatura da multiplicidade. A curvatura negativa descreve a geometria imaginária de Lobačevskiĭ e pressupõe propriedades de feixe de paralelas como suposto por Bolyai. Assim a geometria diferencial em n -dimensões forneceu as ferramentas para a descrição da geometria não-euclidiana.

Embora alguns autores cujos trabalhos foram estudados nesta tese fossem conhecidos, como Gauss, Euler, Jacobi, etc., vários outros (menos conhecidos) colaboraram no desenvolvimento da geometria não-euclidiana, tanto a que possuía uma abordagem axiomática quanto a seguiu a notação da geometria diferencial. Não existia separação entre física e matemática, e a relação entre essas duas ciências foi fundamental para a associação entre o princípio de mínima ação e o princípio das geodésicas.

Entre as ferramentas da geometria diferencial, o elemento de linha nas coordenadas intrínsecas possibilitou a determinação das geodésicas em qualquer espaço, e sua forma quadrática, junto com a conservação das forças vivas, permitiu a associação entre métrica e movimento na mecânica.

Essa relação entre a métrica do espaço, dada pelo elemento de linha nas coordenadas intrínsecas de qualquer espaço n -dimensional, e o movimento, teve origem na relação entre

formas quadráticas e princípio de mínima ação, e é a base da construção da relatividade de Einstein.

Em 1906, Max Planck apresentou a dinâmica relativística de uma maneira simplificada, em que fez um uso do princípio de Hamilton usando grandezas relativísticas. Usando transformações de Lorentz e transformações das grandezas eletromagnéticas, ele obteve a equação fundamental da dinâmica relativística

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} \right] = X,$$

onde m é a massa de repouso, X é a componente x da força que age sobre o corpo, $\dot{x}$ é a projeção de sua velocidade na direção x , e q é o módulo da velocidade do corpo, ou seja, $q = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Chamando de H o lagrangeano do sistema, Planck comparou essa equação fundamental com a equação de Lagrange, e obteve

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}.$$

Ele deduziu que o lagrangeano seria expresso por

$$H = -mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} + \text{const.}$$

O princípio de Hamilton, na forma como o usamos atualmente, para uma partícula livre⁸⁷ seria dado por

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} \right) dt = 0. \quad (6.1)$$

Partindo da Eq. 6.1 é possível obter toda a dinâmica relativística, porém Planck não fez nenhuma relação entre essa equação e a equação da geodésica.

Em 1911, Sommerfeld escreveu a Eq. 6.1 (desprezando um fator $i = \sqrt{-1}$), como

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} \right) dt = \delta \left(mc \int_{t_0}^{t_1} ds \right) = 0,$$

⁸⁷ No caso da partícula livre, Planck considerou que a variação da função dependente das forças de vínculo se anulava.

onde ds é o elemento do intervalo relativístico, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. Portanto, conclui Sommerfeld, o princípio de mínima ação da relatividade especial pode ser reduzido ao princípio de que a partícula descreve uma geodésica no espaço-tempo. Note-se, no entanto, que no caso da relatividade especial é necessário introduzir as forças que agem sobre a partícula, ao analisar o movimento. Na expressão obtida por Planck, $H = -mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} + \text{const}$, ele só poderia concluir que além de $-mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2}$, o lagrangeano só poderia conter funções que não dependessem das componentes da velocidade (mas que poderiam depender da posição). Portanto, a rigor, o lagrangeano da relatividade especial deveria ser escrito $L = -mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} + U$. Porém, nesse caso, já não se pode mais passar diretamente de $\delta \int L dt = 0$ para $\delta \int ds = 0$, a não ser no caso em que *não existam forças agindo sobre a partícula*, ou seja, quando $U=0$ ou $U=\text{cte}$.

A conclusão de Sommerfeld vinha de um raciocínio recorrente na física e na matemática que é o de generalização. Inicialmente, tanto a geometria quanto a mecânica estavam restritas ao espaço euclidiano tridimensional. Com os estudos que surgiram, a geometria e a mecânica sofreram um processo de generalização, agora considerando um espaço qualquer n -dimensional. A análise de Sommerfeld generalizava a relação que havia sido encontrada no início do século XIX para o caso do espaço-tempo relativístico.

Não encontramos nenhum outro trabalho sobre relatividade especial antes desse, em que aparecesse a relação entre o princípio de mínima ação e o princípio das geodésicas. É relevante assinalar que um ano antes do Conselho Solvay, Sommerfeld já havia publicado um trabalho (SOMMERFELD, 1910) no qual apresentava o formalismo quadridimensional da teoria da relatividade, baseando-se na abordagem de Minkowski. No entanto, nesse trabalho não havia tratado do princípio de ação mínima, nem discutido a questão das geodésicas. Portanto, foi provavelmente em 1911, no Conselho de Solvay, a primeira vez que Sommerfeld apresentou essa análise como de sua autoria. Como Einstein estava presente nesse congresso, é provável que tenha sido a partir da exposição de Sommerfeld que ele tomou conhecimento da relação entre geodésicas e o princípio de ação mínima que iria utilizar depois na relatividade geral.

Uma parte da presente tese (capítulos 2 e 3), que descreve o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, não contém resultados originais significativos. A maior contribuição historiográfica desta tese está nos capítulos seguintes. Como mostramos ao longo deste trabalho, o princípio das geodésicas e sua relação com o movimento de uma partícula teve início no século XIX e está vinculado ao desenvolvimento da geometria não-euclidiana e ao princípio de mínima ação. A forma como tal relação foi construída ao longo da história é uma contribuição importante dada por este trabalho. Os estudos anteriores que encontramos não discutem, de forma detalhada, quais as diferenças entre o princípio de Maupertuis-Euler, o princípio de mínima ação de Lagrange e o princípio de Hamilton, e nem de que forma foi possível chegar à notação utilizada atualmente para as equações de Lagrange. A discussão aqui apresentada das diferenças entre esses princípios é fundamental para entender como são atribuídas a pesquisadores isolados, “descobertas” que na verdade foram construídas através da colaboração de muitos autores. Além disso, este trabalho mostra em detalhes como a geometrização da mecânica e a busca por invariantes foram fundamentais na construção do formalismo da relatividade geral e seus princípios básicos, o que não é encontrado nas diversas referências utilizadas.

BIBLIOGRAFIA

- APPEL, Paul. Sur des transformations de mouvements. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **110**: 37-41, 1892.
- BACHELARD, Suzanne. Maupertuis et le principe de moindre action. Pp. 99-112, in: *Actes de la journée Maupertuis*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1975.
- BELTRAMI, Eugenio. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, [série II], **2**: 232-255, 1868-69.
- . Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematica*, **6**: 284-312, 1868a.
- . Sulla teoria delle linee geodetiche. *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, [série II], **1**: 708-718, 1868b.
- . Sulla teoria generale dei parametri differenziali. *Memorie dell'Accademia della Scienza dell'Istituto di Bologna*, [série II], **8**: 532-590, 1868c.
- . *Opere matematiche*. Milano: Ulrico Hoepli, 1902. 3vols.
- BOLYAI, Janos. The science of absolute space [1832]. Pp: 1-71, in: BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.
- BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.
- BORK, Alfred M. The fourth dimension in nineteenth-century physics. *Isis*, **55**: 326-338, 1964.
- BREITENBERGER, Ernst. Gauss's geodesy and the axiom of parallels. *Archive for History of Exact Sciences*, **31** (3): 273-289, 1984.
- BUTZER, Paul L. An outline of the life and work of E. B. Christoffel. *Historia Mathematica*, **8**: 243-276, 1981.
- CARDOSO DIAS, P. M. Euler's "harmony" between the principles of "rest" and "least action": the conceptual making of analytical mechanics. *Archive for History of Exact Sciences*. **54**: 67-86, 1999.
- CAYLEY, A. Report on the recent progress of theoretical dynamics. *Report of the British Association for the Advancement of Science*: 1-42, 1857.
- . Note in illustration of certain general theorems obtained by Dr. Lipschitz. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **12**: 346-349, 1873a.
- . Extension of the planet-problem to a space of n-dimensions and constant integral curvature, by Dr. R. Lipschitz. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **12**: 349-370, 1873b.
- CHRISTOFFEL, E. B. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **70**: 46-70, 1869.
- . Bemerkungen zur Invariantentheorie. *Mathematische Annalen*, **19**: 280-290, 1882.
- CICENIA, Salvatore. I problemi fondazionali della geometria in N. I. Lobacevskij. *Epistemologia*, **27**: 13-34, 1994.
- DARBOUX, Gaston. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. [1889] New York: Chelsea, 1972.
- D'ARCY, Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis. *Histoire de l'Académie Royal des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Registres de cette Académie*, 531-538, 1749.

- DELL'AGLIO, Luca. On the genesis of the concept of covariant differentiation. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, **2**: 215-264, 1996.
- DUHAMEL, Jean Marie Constant. *Des méthodes dans les sciences des raisonnements*. Paris: Gauthier-Villars, 1865-1873.
- DUGAS, René. Sur la pensée dynamique d'Hamilton: origines optiques et prolongements modernes. *Revue Scientifique* **79**: 15-23, 1941.
- . *A history of mechanics*. Translated by J. R. Maddox. New York: Dover, 1988.
- EHLERS, Jürgen. Christoffel's work on the equivalence problem for Riemannian spaces and its importance for modern field theories of physics. Pp. 538-542, in: BUTZER, P.; FEHÉR, F. (eds.). *E. B. Christoffel*. Basel: Aachen Birkhäuser Verlag, 1981.
- ENGEL, Friedrich; STÄCKEL, Paul. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. [1895] Leipzig: Johnson Reprint Corporation, 1968.
- EUCLIDES, *The thirteen books of Euclid's Elements*. Trad. Sir Thomas L. Heath. 2.ed. New York: Dover, 1956. 3 vols.
- EULER, Leonhard. De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. [1728] **8**: 110-124, 1732.
- . *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Petropoli. Ex Typographia Academiae Scientiarum, 1736. 2 vols.
- . *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne & Genève: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1744.
- . Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces. [1748] *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. **4**: 149-188, 1750.
- . Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis. [1752] *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. **7**: 169-198, 1753a.
- . Sur le principe de la moindre action. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **7**: 199-218, 1753b.
- . Recherches sur la courbure des surfaces [1760]. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **16**: 119-143, 1767.
- . De solidis quorum superficiem in planum explicare licet. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* **16**: 3-34, 1772.
- FARWELL, Ruth; KNEE, Christopher. The end of the absolute: a nineteenth-century contribution to general relativity. *Studies in History and Philosophy of Science* **21** (1): 91-121, 1990.
- . The missing link: Riemann's "Commentatio", differential geometry and tensor analysis. *Historia Mathematica* **17**: 223-255, 1990.
- FERNANDES, Normando Celso. Algumas reflexões sobre as hipóteses da geometria de Riemann. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* [série 2] **1**, (1): 89-107, 1989.
- FOURCY, Lefebure de. *Éléments de trigonométrie*. 3^a ed. Paris: Libraire de l'École Polytechnique, 1836.
- FRASER, Craig J. L. Lagrange's early contributions to the principle and methods of mechanics. *Archive for History of Exact Sciences* **28** [3]: 197-241, 1983.
- . The origin of Euler's variational calculus. *Archive for History of Exact Sciences* **47** [2]: 103-141, 1994.
- . Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange. *Historia Mathematica* **19** [1]: 4-23, 1992.
- FRAUNBERGER, F. Siméon Denis Poisson. Vol. 15, pp. 480-491, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.

- FREUDENTHAL, H. Georg F. Benhard Riemann. Vol. 11, pp. 456-459, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- FUSS, Paul Henri (ed.). *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*. Précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits et publiée sous les auspices de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg. St-Petersbourg: Académie Impériale des Sciences, 1843⁸⁸. 2 vols.
- GAUSS, Karl Friedrich. *General investigations of curved surfaces* [1827]. Trad. Adam Hiltebeitel and James Morehead. New York: Raven Press Hewlett, 1965.
- . *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Pp. 217-258, in: *Werke*, vol. 4. Göttingen : Dieterich, 1863.
- . *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Trad. M.A.. Paris: Bachelier, 1852.
- GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- GLASS, Bentley. Pierre Louis Moreau Maupertuis. Vol. 9, pp: 186-189, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- GLIOZZI, Mario. Tullio Levi-Civita. Vol. 8, p. 284, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- GOLDSTEIN, Herbert. *Classical mechanics*. (2^a ed.). California: Addison-Wesley, 1980.
- GOLDSTINE, Herman Heine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. New York: Springer Verlag, 1980.
- GRAY, Jeremy. The discovery of non-Euclidean geometry. Pp. 37-60, in: PHILIPS, Esther R. (ed.). *Studies in the History of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America, 1987.
- . *Ideas of space – Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*. 2^a ed. Oxford: Clarendon Press, 1989.
- GUEROULT, M. *Dynamique et métaphysique Leibniziennes*. Paris: Les Belles Lettres, 1934.
- HAMILTON, William R. On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function. *Dublin University Review*, 795-826, 1833
- . On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling point is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **124**: [parte II], 247-308, 1834.
- . Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. **125**: 247-308, 1835.
- . *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton*. CONWAY, A. W.; SYNGE, J. L.; McCONNEL, J. (eds.) Cambridge: Cambridge University Press, 1931-1940.
- HANKINS, Thomas L. William R. Hamilton. Vol. 6, pp: 85-93, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- HELMHOLTZ, H. The origin and meaning of geometrical axioms. [1870] *Mind* [1] **3**: 301-321, 1876.
- . The origin and meaning of geometrical axioms. *Mind* [3] **10**: 212-225, 1878.
- HINTON, C. H. *Scientific romances*. London: Swan Sonnenschein, Lowrey & Co., 1886.

⁸⁸ Reimpresso em New York: Johnson Reprint Corp., 1968.

- HOFMANN, Joseph E. Gottfried Wilhelm von Leibniz. Vol. 8, pp: 149-166, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- HOUZEL, Christian. The birth of non-Euclidean geometry. Pp. 3-21, in: BOI, L.; FLAMENT, D.; SALANSKIS, J.-M. (eds.). *(1830-1930) A century of geometry: epistemology, history and mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- INGLIS, M. Three worlds and the imaginary sphere. *For the Learning of Mathematics*. **23** (3): 24-27, 2003.
- ITARD, Jean. Joseph Louis Lagrange. Vol. 7, pp: 559-573, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- JACOBI, C. G. J. Sur le calcul des variations et sur la théorie des équations différentielles [1836]. *Journal de Mathématique Pures et Appliquées*, **3**: 44-59, 1838.
- . Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **5**: 61-67, 1838. Reproduzido em: *Werke*, **4**: 131-137. New York: Chelsea, 1886.
- . *Vorlesungen über Dynamik*. [1842-1843]. Editado por A. Clebsch. New York: Chelsea, 1869.
- JAMMER, Max. *Concepts of space: the history of theories of space in physics*. 2ª ed. Cambridge: Harvard University Press, 1970.
- JOUGUET, E. *Lectures de mécanique: la mécanique enseignée par les auteurs originaux*. Paris: Gauthier-Villars, 1909.
- JOURDAIN, Philip E. B. The principle of least action [1913]. Pp: 1-83, in: COHEN, Bernard (ed.). *The conservation of energy and the principle of least action*. New York: Arno Press, 1981.
- KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.
- LAGRANGE, J.-L. Recherches sur la méthode, De maximis et minimis [1759]. Vol. 1, pp. 3-20, in: *Oeuvres*. Paris: Gauthier-Villars, 1867. 14 vols.
- . Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima [1760-1761]. Vol. 1, pp. 335-362, in: *Oeuvres*. Paris: Gauthier-Villars, 1867. 14 vols.
- . Application de la méthode exposée dans la mémoire précédent a la solution de différents problèmes de dynamique [1760-1761]. Vol. 1, pp. 365-468, in: *Oeuvres*. Paris: Gauthier-Villars, 1867. 14 vols.
- . *Mécanique analytique*. [1788] 3ª ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1853.
- LAMÉ, Gabriel. *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*. [1852]. Paris: Mallet-Bachelier, 1859.
- . *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*. Paris: Mallet-Bachelier, 1861.
- LANCZOS, Cornelius. *The variational principles of mechanics* [1949]. 4ª ed. New York: Dover, 1970.
- LAND, J. P. N. Kant's space and modern mathematics. *Mind*, [2] **5**: 38-46, 1877.
- LAPLACE, Pierre S. *Oeuvres complètes de Laplace*. Paris: Gauthier-Villars, 1878.
- LAUGWITZ, Detlef. *Bernhard Riemann 1826-1866 – Turning points in the conception of mathematics*. Trad. Abe Shenitzer. New York: Birkhäuser Boston, 1999.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Mathematische Schriften*. Org. C. I. Gerhardt. 7 vols. New York: Georg Olms, 1971.
- . *Die philosophischen Schriften*. Org. C. I. Gerhardt. 7 vols. New York: Georg Olms, 1978.
- LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie*. 11ª ed. Paris: Firmin Didot, 1817.

- LEVI-CIVITA, Tullio; RICCI, Gregorio. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen* **54**: 125-201, 1901.
- LEVI-CIVITA, Tullio. *The absolute differential calculus: calculus of tensors*. [1926]. New York: Dover, 1977.
- LICHNEROWICZ, André; AUFENKAMP, Don. The general problem of the transformation of the equations of dynamics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **1** (4): 499-520, 1952.
- LIOUVILLE, Joseph. De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **9**: 401-408, 1844.
- . Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. Premier mémoire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **11**: 345-378, 1846.
- . Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **12**: 291-304, 1847a.
- . Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. Second mémoire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **12**: 410-444, 1847b.
- . Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels a liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* [2^a série] **1**: 297-304, 1856.
- LIOUVILLE, Roger. Sur les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* **19**: 251-283, 1895.
- LIPSCHITZ, Rudolf. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70**: 71-102, 1869.
- . Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **74**: 116-149, 1872.
- LOBAČEVSKIĬ, Nicolai. Theory of Parallels [1840]. Pp: 1-45, in: BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.
- . Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiana* **5**: 273-336, 1867.
- . *Zwei geometrische Abhandlungen*. Trad. Friedrich Engel. Leipzig: Teubner, 1898.
- LÜTZEN, Jesper. Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences* **49** (1): 1-72, 1995.
- . The geometrization of analytical mechanics: a pioneering contribution by Joseph Liouville (ca. 1850). Vol. 2, pp. 77-97, in: ROWE, David E.; McCLEARY, John (eds.). *The history of modern mathematics*. California: Academic Press, 1989.
- . *Joseph Liouville 1809-1882: a master of pure and applied mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- MACH, Ernst. *The science of mechanics*. 4^a edição. Illinois: Open Court, 1942.
- MARION, Jerry B.; THORNTON, Stephen T. *Classical dynamics of particles and systems*. 4^a edição. Flórida: Harcourt Brace, 1995.
- MARTINS, Roberto. A influência das geometrias não-euclidianas no pensamento físico do século XIX. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência* **13**: 67-80, 1995.
- MATHIEU, Émile. *Dynamique analytique*. Paris: Gauthier-Villars, 1878.

- MAUPERTUIS, Pierre Louis Moreau. Loi du repos des corps. *Histoire de l'Académie Royal des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Resgistres de cette Academie*, 170-176, 1740.
- . . Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. *Histoire de l'Académie Royal des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Resgistres de cette Academie*, 417-426, 1744.
- . . Les loix du mouvement et du repos déduits d'un Principe Metaphysique. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, 267-294, 1746.
- . *Essai de cosmologie* [1750]. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1984.
- MAY, Kenneth O. Carl Friedrich Gauss. Vol. 5, pp. 298-315, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- MOREIRA, Ildeu de Castro. Maupertuis (1698-1759) e o princípio de mínima ação. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **21** (1): 172-186, 1999.
- NABONNAND, Philippe. Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIX^e siècle. *Revue d'Histoire des Mathématiques* **1**: 159-200, 1995.
- PAINLEVÉ, Paul. Mémoire sur la transformation des équations de la dynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **10**: 5-92, 1894.
- PANZA, Marco. De la nature épagnante aux forces généreuses: le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique, Maupertuis et Euler, 1740-1751. *Revue d'Histoire des Sciences* **4**: 435-520, 1995.
- PLANCK, Max. Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik. *Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **8**: 136-141, 1906.
- . Zur Dynamik bewegter Systeme. *Annalen der Physik* [série 2] **26**: 1-34, 1908.
- POINCARÉ, Henry. *La science et l'hypothèse*. Paris: La Bohème, 1902.
- . *The foundations of science*. Trad. George Bruce Halsted. Lancaster: The Science Press, 1946.
- . *Últimos pensamentos*. Trad. G. L. B. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, 1924
- . Principles of mathematical physics. [1917]. *The Scientific Monthly*. [82] **4**:165-175, 1956.
- POISSON, Siméon Denis. *Traité de mécanique*. Paris: Courcier, 1811. 2 vols.
- PORTNOY, Esther. Riemann's contribution to differential geometry. *Historia Mathematica* **9**: 1-18, 1982.
- PULTE, Helmut. After 150 years: news from Jacobi about Lagrange's analytical mechanics. *Mathematical Intelligencer* **19** [3]: 48-54, 1997.
- . Jacobi's criticism of Lagrange: the changing role of mathematics in the foundation of classical mechanics. *Historia Mathematica* **25**: 154-184, 1998.
- RICCI, Gregorio. Principii di una teoria delle forma differenziali quadratiche. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* [série II] **12**: 135-167, 1884.
- . Sui parametri e gli invarianti delle forma quadratiche differenziali. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* [série II] **14**: 1-11, 1886.
- . Sulla teoria degli iperspazi. *Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei. Rediconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* **4**: 232-237, 1895.
- RICHARDS, Joan L. The reception of a mathematical theory: non-Euclidean geometry in England, 1868-1883. Pp: 143-166, in: BARNES, Barry; SHAPIN, Steven (orgs.). *Natural order: historical studies of scientific culture*. Beverly Hills: Sage, 1979.
- RIEMANN, Bernhard. On the hypotheses which lie at the bases of geometry. Trad. William Kingdon Clifford. *Nature* **8** (183): 14-17, (184):36- 37, 1873
- . Sobre as hipóteses que servem de fundamento à geometria. Trad. Normando Celso Fernandes. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* [série 2] **1** (1): 109-123, 1989.

- . Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **13**, 1867.
- . Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. Trad. L. Laugel. Pp. 280-299, in: *Oeuvres mathématiques de Riemann*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1898.
- . On the hypotheses which lie at the foundations of geometry. [1929]. Trad. Henry S. White. Pp. 404-425, in: SMITH, David Eugene (org.). *A source book in mathematics*. Dover: New York, 1959.
- RODRIGUES, B. O. De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes. *Correspondance sur l'École Polytechnique* **3**: 159-162, 1816.
- ROSENFELD, B. A. *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space*. Trad. Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.
- SALNEUVE, J. –F. *Cours de topographie et de géodésie*. Paris: Librairie Militaire de Gauthier-Laguionie, 1841.
- SCHLEGEL, V. Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions. *L'Enseignement Mathématique* **11**: 77-115, 1900.
- SCHOENEBERG, Bruno. Rudolf Lipschitz. Vol. 8, pp. 388-390, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 16 vols, 1981.
- SCRIBA, Christoph J. Jacobi, Carl Gustav Jacob. Vol. 7, pp. 50-55, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 16 vols, 1981.
- SCRIMIERY, Giorgio. *Fondazione della geometria: da Bernhard Riemann a Hermann Weyl*. Galatina: Congedo, 1992. (Collana di Filosofia Saggi 3).
- SERRET, J.-A. Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un point matériel. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **26**: 605-610, 1848a.
- . Sur l'intégration des équations générales de la Dynamique. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **26**: 639-643, 1848b.
- . Mémoire sur le principe de la moindre action. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France* **38**: 151-184, 1873.
- . *Traité de trigonométrie* 6^a ed. Paris: Gauthier-Villars, 1880.
- SINACEUR, Mohammed-Allal. Dedeking et le programme de Riemann. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications* **43**: 221-296, 1990.
- SOMMERFELD, Arnold. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* [série 4] **32**: 749-776, 1910.
- . Application de la théorie de l'élément d'action aux phénomènes moléculaires non périodiques. Pp: 311-372, in: LANGEVIN, Paul; BROGLIE, Maurice. *Théorie du Rayonnement et les quanta*. Paris: Gauthier-Villars, 1912.
- . *Mechanics: lectures on theoretical physics, vol. 1*. [1942]. 5^a ed. New York: Academic Press, 1970.
- SPEZIALI, Pierre. Gregorio Ricci. Vol. 11, pp. 406-411, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 16 vols, 1981.
- STRIJK, D. J. Outline of a history of differential geometry I. *Isis* **19** (1): 92-120, 1933a.
- . Outline of a history of differential geometry II. *Isis* **20** (1): 161-191, 1933b.
- . Schouten, Levi-Civita, and the emergence of tensor calculus. Vol. 2, pp: 99-105, in: ROWE, David E.; McCLEARY, John (eds.). *The history of modern mathematics*. California: Academic Press, 1989.

- . Eugenio Beltrami. Vol. 1, pp. 599-600, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- . Gaston Darboux. Vol. 3, pp. 559-560, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- . Elwin Christoffel. Vol. 3, p. 263, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- SUSSMANN, Hector J.; WILLEMS, Jan C. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems Magazine* **17**: 32-44, 1997.
- TATON, René. Joseph Liouville. Vol. 8, pp. 381-387, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.
- TAZZIOLI, Rossana. Ether and theory of elasticity in Beltrami's work. *Archive for History of Exact Sciences* **46** (1): 1-37, 1993.
- . Rudolf Lipschitz's work on differential geometry and mechanics. Vol. 3, pp. 113-138, in: KNOBLOCH, Eberhard; ROWE, David E. (eds.). *The history of modern mathematics*. California: Academic Press, 1994.
- . The role of differential parameters in Beltrami's work. *Historia Mathematica* **24**: 25-45, 1997.
- . Per una storia della fisica matematica italiana (1860-1880). Pp: 97-108, in: *Atti del XIX Congresso Nazionale di Storia della Fisica e della Astronomia*. Milano: Università degli Studi di Milano, 1999.
- THOMAS, T. Y. The transformation of dynamical systems of two degrees of freedom. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **32** (4): 106-111, 1946.
- THOMSON, William; TAIT, Peter Guthrie. *Treatise on natural philosophy* [1879]. 8^a ed. Cambridge: University Press, 1923.
- TODHUNTER, I. *A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century*. London: Macmillan, 1861.
- TORRETTI, Roberto. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrech: D. Reidel Publishing Company, 1984.
- TOSCANO, Fabio. Analisi e riflessioni su due lavori giovanili di Levi-Civita riguardanti questioni fisico-matematiche di fine ottocento. Pp: 325-335, in: *Atti del XXI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia*. Milano: Università degli Studi di Milano, 2001.
- TURC, Albert. *Introduction élémentaire a la géométrie Lobatschwskienne* [1847]. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1967.
- VICENSI, P. Differential geometry in the nineteenth century. *Scientia* **107** (7-8): 661-696, 1972.
- WEYL, Hermann. *Space-time-matter*. Trad. Henry L. Brose. 4^a ed New York: Dover, 1952.
- WOODHOUSE, Robert. *A history of the calculus of variations in the eighteenth century* [1810]. New York: Chelsea, 1964.
- YAGLOM, I. M. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Trad. Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1979.
- YOURGRAU, Wolfgang; MANDELSTAM, Stanley. *Variational principles in dynamics and quantum theory*. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1952.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. Leonhard Euler. Vol. 4, pp: 467-484, in: GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.

APÊNDICE

Trabalhos apresentados em congressos:

O estudo de superfícies curvas por Gauss

I Colóquio Brasileiro de História da Matemática e IV Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Natal/RN. 2004

Gauss e a origem da geometria diferencial

VI Seminário Nacional de História da Matemática, Brasília/DF. 2005.

From Gauss's differential geometry to Liouville's mechanics: the relation between geodesics and the principle of minimum action

British Society for the History of Science Annual Conference, Leeds/UK. 2005.

Teaching multidimensional spaces by analogies: limits in conceiving and explaining ideas

8th International History, Philosophy, Sociology & Science teaching Conference, Leeds/UK. 2005

Trabalhos publicados:

BISPO, Ana Paula; MARTINS, Roberto de Andrade. Gauss e a origem da geometria diferencial. pp. 177-182. In: *Anais do VI Seminário Nacional de História da Matemática*. SAD, Ligia Arantes (ed.). Brasília: Editora da UnB, 2005.

Trabalhos submetidos:

MARTINS, Roberto de Andrade; SILVA, Ana Paula Bispo. Maupertuis, d'Arcy, d'Alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 2006.