

Dissertação de Mestrado

CONVERSÃO DE MATÉRIA ESCURA NÃO-RELATIVÍSTICA
EM RELATIVÍSTICA

ALUNA: MARIELE KATHERINE FARIA MOTTA

ORIENTADOR: PEDRO CUNHA DE HOLANDA

DEPARTAMENTO DE RAIOS CÓSMICOS E CRONOLOGIA

INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação de Mestrado defendida pela aluna
Mariele Katherine Faria Motta e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas 16 de outubro de 2009



Pedro Cunha de Holanda (orientador)

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

M856c	<p>Motta, Mariele Katherine Faria Conversão de matéria escura não-relativística em relativística / Mariele Katherine Faria Motta. – Campinas, SP : [s.n.], 2009.</p> <p style="text-align: center;">Orientador: Pedro Cunha de Holanda. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”.</p> <p>1 1. Cosmologia. 2. Matéria escura (Astronomia). 2 3. Formação de estruturas. 4. Neutrinos. I. Holanda, 3 Pedro Cunha de. II. Universidade Estadual de Campinas. 4 Instituto de Física “Gleb Wataghin”. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">5 (vsv/ifgw)</p>
-------	--

- **Título em inglês:** Conversion of non relativistic dark matter into relativistic matter
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 1. Cosmology
 2. Dark matter (Astronomy)
 3. Structure formation
 4. Neutrinos
- **Área de Concentração:** Cosmologia
- **Titulação:** Mestre em Física
- **Banca examinadora:**

Prof. Pedro Cunha de Holanda
 Prof. Carlos Ourivio Escobar
 Prof. Luiz Vitor de Sousa Filho
- **Data da Defesa:** 17/08/2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE MESTRADO DE **MARIELE KATHERINE FARIA MOTTA – RA 024627** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 17 / 08 / 2009.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda - Presidente da Comissão Julgadora
DRCC/IFGW/UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Vitor de Souza Filho – IFSC/USP

Prof. Dr. Carlos Ourivio Escobar - DRCC/IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que fizeram a minha vida mais feliz e mais fácil e que, por isso, contribuíram a essa dissertação: meus pais Edimar e Silvia; meus segundos pais Cleverton e Beth; meus irmãos Edimar, Ellen, Michele e Monique; muitos amigos queridos e professores que estimo e admiro; meu orientador Pedro, que sempre esteve disponível e estimulou meu amadurecimento e independência.

Resumo

A formação das estruturas ao longo da história do universo depende crucialmente da competição entre efeitos de matéria não-relativística e relativística. Sabemos que existem mecanismos que convertem os conteúdos de uma em outra. Em particular, a explosão de uma supernova tipo colapso do núcleo converte uma energia correspondente a 99% da energia de ligação da estrela de nêutrons remanescente em neutrinos relativísticos. Nos baseamos neste processo para construir um modelo de conversão de matéria escura em matéria relativística que evolui com a história do universo e avaliamos os efeitos dessa conversão sobre a formação de estruturas em grandes escalas.

Abstract

The structure formation through the history of the universe crucially depends on the competition between non-relativistic and relativistic matter effects. We know that there are mechanisms which convert the contents of one into the other. Particularly the explosion of a core-collapse supernova converts an energy corresponding to 99% of the gravitational binding energy of the remnant neutron star into relativistic neutrinos. Based on this process we have built a conversion model of dark matter into relativistic matter that evolves throughout the history of the universe and we evaluate the effects of this conversion over the large scale structure formation.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Estrelas	6
1.1 Nascimento	6
1.2 Tempo de Vida	8
1.2.1 Estrelas de pequenas massas	8
1.2.2 Estrelas de grandes massas	9
1.3 Modelo de taxa de supernovas	10
2 Densidades de Energia	13
2.1 Ω_\star - Densidade de Energia na forma de Estrelas	13
2.2 Função de Massa Inicial	14
2.3 Estimando Ω_\star	17
2.4 Densidade de Energia de Neutrinos	18
2.5 Matéria Escura Relativística	22

3	Teoria de Perturbações Lineares	24
3.1	Inomogeneidades	24
3.2	Métrica e Energia: Equação de Einstein	25
4	Formação de Estruturas	32
4.1	Instabilidade Gravitacional	32
4.2	Evolução das perturbações	34
4.3	Supressão pela radiação	38
4.4	Escalas fora do horizonte	41
4.5	Escalas dentro do horizonte	43
4.5.1	Era da radiação	43
4.5.2	Era da matéria	44
4.6	O espectro de potência	45
5	Efeitos da conversão $\Omega_m \rightarrow \Omega_r$	50
5.1	Limites para a conversão	56
6	Discussão dos resultados e perspectivas	59
A	Horizonte e Raio de Hubble	61
B	Linearidade do Espectro de Potência	66
	Referências Bibliográficas	68

Introdução

Mesmo com os importantes avanços das observações cosmológicas, desde que Hubble notou o afastamento entre as galáxias [1] até recentes medidas das anisotropias da radiação cósmica de fundo [2], a cosmologia permanece uma área da física com muitas questões em aberto. Estamos longes de uma compreensão sólida sobre todos os processos que afetam as grandes escalas do universo e ainda há espaço para contribuições e alterações significativas do modelo padrão cosmológico. Questões importantes como o alinhamento das anisotropias da radiação cósmica de fundo [3]; a natureza da matéria escura e da energia escura; o período inflacionário e a abundância de galáxias satélites ainda não foram completamente esclarecidas.

Nesse contexto voltamos nossa atenção à teoria de formação de estruturas em grandes escalas. A formação de estruturas no universo está intimamente ligada à questão da natureza da matéria escura. De fato, em cosmologia, talvez mais do que em outros ramos da física, não faz sentido olharmos para um problema separadamente, e quando tentamos resolver uma das “questões importantes” mencionadas acima, notamos que ela está relacionada a outra. Essa conexão entre “desconhecimentos” pode ser usada de forma produtiva, e é isso que tentamos fazer nessa dissertação.

Temos indícios de que a matéria ordinária, bárions, fótons, entre outras partículas, compõe apenas 5% do total energético presente no universo. De acordo com o modelo padrão cosmológico as galáxias e as estrelas que observamos estão envolvidas por quantidades 5 vezes maiores de uma matéria invisível e que interage fracamente,

até onde sabemos, apenas por campos gravitacionais: a matéria escura. Acredita-se que a disposição da matéria escura determina a distribuição do conteúdo bariônico, sendo a grande responsável pela formação das estruturas no universo.

No cenário do modelo padrão, a distribuição dos conteúdos energéticos é de aproximadamente 25% na forma de matéria escura não-relativística, 5% na forma de matéria bariônica não-relativística, resultando em um total não-relativístico $\Omega_{nr} \simeq 0.3$. Uma pequena parte, $10^{-3}\%$ está na forma de fótons e outras partículas relativísticas, como neutrinos, resultando em $\Omega_r \simeq 10^{-5}$. Os 70% restantes seriam contribuição da energia escura, na forma de uma constante cosmológica Λ , $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$, responsável pela expansão acelerada do universo atual.

As observações cosmológicas indicam que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, distâncias superiores a $100Mpc$ [4]. A métrica que descreve esse universo com curvatura zero, ou seja, o caso em que a soma das densidades de energia é igual a 1, ($\Sigma\Omega_i = 1$, para $i = nr, r, \Lambda$) é a métrica de Friedmann-Robertston-Walker, daqui por diante, métrica FRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

Sendo a o fator de escala, que parametriza a distância entre as coordenadas, de modo que a tende a zero quando nos aproximamos de $t = 0$ e o seu valor atual é igual a 1.

O crescimento do fator de escala é determinado pela equação de Friedmann:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3} \left[\frac{\Omega_{nr}}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (2)$$

$H(t)$ é o parâmetro de Hubble, associado a velocidade de expansão do universo. E seu valor atual $H_0 = H(a = 1) = \sqrt{8\pi G/3}$, definindo a densidade crítica:

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88h^2 \times 10^{-29} g \text{ cm}^{-3} \quad (3)$$

onde h é dado por $h = H_0/100$. Medidas atuais da constante de Hubble apontam para um valor de H_0 entre $65 - 80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [4].

A equação de Friedmann revela a dependência entre a expansão do universo e os seus conteúdos energéticos dados por

$$\frac{\rho_{nr}}{\rho_{cr}} = \frac{\Omega_{nr}}{a^3}; \quad (4)$$

$$\frac{\rho_r}{\rho_{cr}} = \frac{\Omega_r}{a^4}; \quad (5)$$

$$\frac{\rho_\lambda}{\rho_{cr}} = \Omega_\lambda. \quad (6)$$

E vemos que cada um dos termos de densidade de energia contribui de forma diferente, pois dependem de difentes potências do fator de escala.

A diferença entre a natureza das componentes do universo não se resume a sua evolução com o fator de escala. No cenário de crescimento das estruturas, essa diferença é crucial. A matéria não-relativística, por exemplo, tende a se aglomerar devido à atração gravitacional, enquanto a pressão de radiação contraria o efeito gravitacional suprimindo o crescimento de uma estrutura.

Um dos primeiros modelos de universo composto por matéria escura propôs que esta seria formada por neutrinos massivos. Entretanto, logo se constatou que as grandes velocidades dos neutrinos não permitiriam a formação de estruturas em pequenas escalas. Foi adotado, então, um modelo no extremo oposto, considerando que toda a matéria escura seria “fria”, ou não-relativística. Nos seus primeiros anos, este modelo descreveu com sucesso os padrões observados das estruturas do universo em grandes escalas (até a escalas de galáxias). Mais tarde foram notados problemas do modelo com respeito a escalas menores e a função de correlação das galáxias [5].

Uma das importantes tentativas de solucionar os problemas com o modelo de matéria escura fria consiste em considerar modelo mistos de matéria escura fria

+ quente, onde quente significa relativística. Nos inspiramos nessa abordagem para avaliar os efeitos cosmológicos de uma conversão de matéria escura não-relativística em relativística.

Como na matéria ordinária, composta por bárions, fótons, léptons, existem mecanismos que convertem componentes não-relativísticas em relativísticas, nos basearemos em um desses mecanismos para contruir um modelo de conversão: as explosões das estrelas.

A explosão de uma supernova do tipo colapso do núcleo (SNCN daqui por diante) converte parte da energia de ligação da estrela progenitora em neutrinos relativísticos. Queremos contabilizar todos os eventos desse tipo ao longo da história do universo, saber qual o perfil dessa conversão em função de z (o desvio para o vermelho) e qual o valor atual da densidade de energia desses neutrinos.

Existem poucos eventos supernovas detectados a grandes distâncias e a maior parte dos dados de supernovas para $z > 1$ por está no infra-vermelho, extremamente afetado por efeitos de extinção ¹. Precisamos descrever a ocorrência desses eventos desde de tempos mais remotos. A idéia é contruir um modelo de supernovas a partir de um modelo de formação de estrelas.

A inferência de eventos supernovas pelo nascimento das estrelas progenitoras tem limitações relacionadas a massa e ao tempo de vida das estrelas consideradas. No capítulo 1 faremos uma discussão sobre a relação entre a massa e o tempo de vida de uma estrela e estabeleceremos os limites para que uma estrela seja a progenitora de um colapso. Ao final do capítulo apresentaremos o modelo de formação de estrelas que escolhemos para construir o modelo de supernovas.

No capítulo 2 mostraremos como inferimos a ocorrência de uma supernova a partir do nascimento de uma estrela. Para isso, introduziremos a Função de Massa Inicial, uma função de distribuição do número de estrelas em função das massas. Como

¹A poeira difusa no meio interestelar absorve e emite radiação infra-vermelha

teste de consistência calcularemos a densidade de energia na forma de estrelas. Finalmente obteremos a densidade de energia na forma de neutrinos relativísticos gerados em supernovas através do modelo que construímos e apresentaremos como se dá o acréscimo da densidade de energia de neutrinos em função de z . Nas últimas considerações avaliaremos se os resultados da conversão para neutrinos produzem efeitos significativos na cosmologia.

O capítulo 3 introduz o formalismo que descreve a formação de estruturas, a teoria de perturbações lineares. Apresentaremos as equações que governam a evolução das perturbações e plotaremos os gráficos correspondentes às soluções numéricas dessas equações que obtivemos através de um código em Fortran.

Como estamos interessados nas perturbações de matéria, no capítulo 4 mostraremos como essas perturbações evoluem em diferentes épocas do universo. Esclareceremos o que significa a escala de uma perturbação e quais as distâncias (ou tempos) relevantes para que uma perturbação em uma certa escala evolua. No final do capítulo apresentaremos o espectro de potência da matéria como forma de "medir" a formação de estruturas em função da escala.

No capítulo 5 finalmente incluiremos a conversão de matéria escura. Construímos um espectro de potência através do software CAMB [6] considerando neutrinos sem massa e outro espectro em que a soma das massas dos neutrinos é $0.67eV$ (limite gerado pelo WMAP5 [2]). Avaliamos a supressão causada pela massa do neutrino e usamos como limite para a supressão decorrente da conversão de matéria do nosso modelo. A comparação entre os efeitos do nosso modelo e da massa do neutrino no CAM será feita a partir da maior escala em que existem dados experimentais. Ao final do capítulo discutiremos os resultados e comentaremos as possíveis perspectivas de aplicação e refinamento do modelo.

Capítulo 1

Estrelas

1.1 Nascimento

A maioria das estrelas nasce em aglomerados de poeira e gás chamados nuvens moleculares gigantes. Nestes ambientes a atração gravitacional, momento angular, turbulência e campos magnéticos participam de mecanismos complexos que resultam na formação de objetos pré-combustão nuclear chamados proto-estrelas. De modo simplificado a evolução dessa proto-estrela é controlada pela escala de tempo de Kelvin-Helmholtz, ou seja, a taxa em que a proto-estrela se ajusta termicamente ao colapso do material da nuvem molecular [7].

Tradicionalmente a distinção entre estrelas de grande e pequena massa é feita comparando seu tempo de formação t_f com a escala de Kelvin-Helmholtz, sendo $t_f > t_{KH}$ para as primeiras e $t_f < t_{KH}$ para as segundas [8]. Essa classificação não é plenamente satisfatória, pois proto-estrelas com taxas de acreção altas o suficiente seriam consideradas de pequena massa. A maioria das referências marca a divisão entre grandes e pequenas massas em $8M_{\odot}$ com base nas luminosidades das estrelas: Proto-estrelas que originam estrelas com massas significativamente menores que $8M_{\odot}$ possuem luminosidades dominadas por acreção e se formam a partir de núcleos com massas da

ordem da massa de Jeans¹. Proto-estrelas acima dessa massa possuem luminosidades dominadas por combustão nuclear a menos que a taxa de acreção seja muito alta, e se formam a partir de núcleos moleculares que possuem massa significativamente superiores a massa térmica de Jeans [7].

Apesar das incertezas, este limite entre “pequenas” e “grandes” massas é razoável para a precisão dos modelos que usaremos. E se as últimas demoram mais para se formar que as primeiras, veremos que o seu tempo de vida tem relação contrária.

¹Massa de Jeans é a massa necessária para um objeto estar ligado gravitacionalmente contra sua resistência térmica.

1.2 Tempo de Vida

A auto-gravitação de uma estrela favorece reações termonucleares em seu núcleo: quanto maior a massa, maior a energia térmica por nucleon e a formação de núcleos mais pesados será mais favorável. Existem muitas particularidades sobre os produtos dessas reações dependendo da massa e do ambiente em que estas estrelas se formam, faremos uma abordagem geral de acordo com a distinção tradicional entre estrelas de grande e pequena massa. A eficiência das reações nucleares cresce com a massa das estrelas e isso afeta o seu tempo de vida. É esta relação entre a massa e a duração de uma estrela que nos interessa.

1.2.1 Estrelas de pequenas massas

Estrelas de pequena massa possuem baixa energia térmica por partícula e encerram a sua combustão com a formação de Carbono e Oxigênio no núcleo. Sem conseguir formar núcleos mais pesados e deixando de resistir à pressão gravitacional ela esfria e se contrai. O balanço é restabelecido pela pressão do gás degenerado de elétrons que se forma: a alta densidade do núcleo aproxima os elétrons à distância da ordem do comprimento de onda de de Broglie e o princípio da exclusão de Pauli impede maior aproximação destes elétrons constituindo a pressão que resiste ao colapso gravitacional. Estas estrelas com massas iniciais entre 3 e 8 M_{\odot} perdem grande parte de seu conteúdo material durante sua vida até formarem um núcleo degenerado de C-O coberto por um fino envelope de Hidrogênio e Hélio de massa próxima a $1M_{\odot}$. São as anãs-brancas.

As anãs-brancas são progenitoras de supernovas tipo Ia. O equilíbrio entre gravidade e pressão de degenerescência faz com que elas sejam objetos estáveis e não possuam energia para gerar ignição. Somente formando um sistema binário e sendo acrescida de material de uma companheira (que pode ser outra anã-branca ou uma

gigante vermelha) é que a progenitora atingirá o limite de massa de Chandrasekhar ² ocasionando explosão [9].

Muitas anãs-brancas não formam sistemas binários, de fato, estima-se uma eficiência de ocorrência de supernovas tipo Ia entre 5 e 10% . E embora estas estrelas se formem mais rapidamente que estrelas mais massivas, os processos de formação de sistemas binários e tempo de acreção de massa até o limite de Chandrasekhar fazem com que a progenitora de uma supernova tipo Ia viva por 0.1-10 bilhões de anos [10],[11].

1.2.2 Estrelas de grandes massas

As progenitoras de Supernovas tipo Colapso do Núcleo (SNCN) são estrelas com massa entre 8 e 50 M_{\odot} . A grande massa faz com que as reações de fusão nuclear sejam muito mais eficientes e avancem além do Carbono e do Oxigênio das anãs-brancas. Nestes casos, a pressão gravitacional proporciona energia suficiente para que se forme um núcleo composto de Ferro ³. Quando este núcleo atinge o limite de Chandrasekar, inicia-se o colapso. Acredita-se que massas entre 8 e 50 M_{\odot} sejam grandes o suficiente para assumirmos uma eficiência de 100% de explosão das progenitoras. Além disso as taxas de fusão nuclear são altas e por isso o tempo de vida dessas estrelas é da ordem de alguns milhares de anos, um valor baixo comparado a progenitoras de SNIa.

Estamos interessados nos neutrinos que são emitidos durante a explosão de uma supernova. O surto de neutrinos está relacionado aos produtos do colapso que dependem fortemente da massa da progenitora. Por isso devemos levar em conta as incertezas do limite superior de 50 M_{\odot} .

A energia do surto de neutrinos E_{ν} de uma SNCN decorre principalmente do processo de formação de uma estrela de nêutrons. Existem casos em que a estrela sofre

²Valor máximo da massa do centro estelar que pode ser sustentada pela pressão de um gás degenerado: $M_{Ch} = 1.4 M_{\odot}$

³O Ferro é o elemento com maior energia de ligação por nucleon, elementos mais pesados se formam apenas endotermicamente

um segundo colapso formando um buraco-negro e interrompendo o fluxo de neutrinos. Também ocorrem colapsos que formam um buraco negro diretamente resultando em um fluxo ainda mais reduzido [12], [13]. O remanescente de uma estrela massiva é determinado por sua massa de nascimento e pela perda de massa durante sua evolução. Acredita-se que a perda de massa seja crucialmente afetada pela metalicidade inicial da estrela, pois a taxa de perda por ventos estelares é sensível à opacidade luminosa, que é determinada pela metalicidade. Estrelas com grande metalicidade inicial perdem mais massa e, portanto, possuem menores núcleos de Hélio e envelopes de Hidrogênio. O colapso dessas estrelas tende a formar uma estrela de nêutrons. Acima de $25M_{\odot}$, espera-se formação de buracos negros diretamente ou depois da formação de uma estrela de neutrons. Para uma massa de $40M_{\odot}$ estrelas com menor metalicidade tendem a formar buracos-negros diretamente pois possuem núcleo mais pesado devido a menor perda de massa [14].

Apesar das incertezas sobre os remanescentes de supernovas, o limite superior de $50M_{\odot}$ não será uma grande fonte de erros para nosso trabalho. Como veremos na seção 2.2, estrelas de grandes massas são muitíssimo menos numerosas que estrelas de pequena massa e isso reduz o peso dos erros dessa classificação.

1.3 Modelo de taxa de supernovas

Vimos que o tempo de vida de estrelas massivas (que originam SNCN) é curto em relação as escalas cosmológicas e por isso podemos aproximar que elas nascem e morrem em um mesmo desvio para o vermelho z . Tal aproximação não seria razoável para progenitoras de SNIa, dado seu tempo de vida da ordem de bilhões de anos, mas como acredita-se que elas constituem cerca 10% do eventos, negligenciamos sua contribuição. Com essas considerações, pode-se construir um modelo de taxa de supernovas (TSN)

análogo a um modelo de taxa de formação de estrelas (TFE):

$$TSN(z) = \alpha TFE(z) \quad (1.1)$$

Em 1998 Madau et al [15] construíram um modelo de taxa de formação de estrelas com bom ajuste de dados de luminosidade UV e $H\alpha$. Em 2001 Porciani e Madau [16] ajustaram esse modelo para o cenário Λ CDM ⁴, amplamente usado como referência ⁵.

$$TFE(z) = \frac{d\rho_\star}{dt} = h \, 0.3 \frac{e^{3.4z}}{e^{3.8z} + 45} [M_\odot \cdot yr^{-1} Mpc^{-3}] \quad (1.2)$$

onde ρ_\star é a densidade de energia na forma de estrelas em $[M_\odot Mpc^{-3}]$.

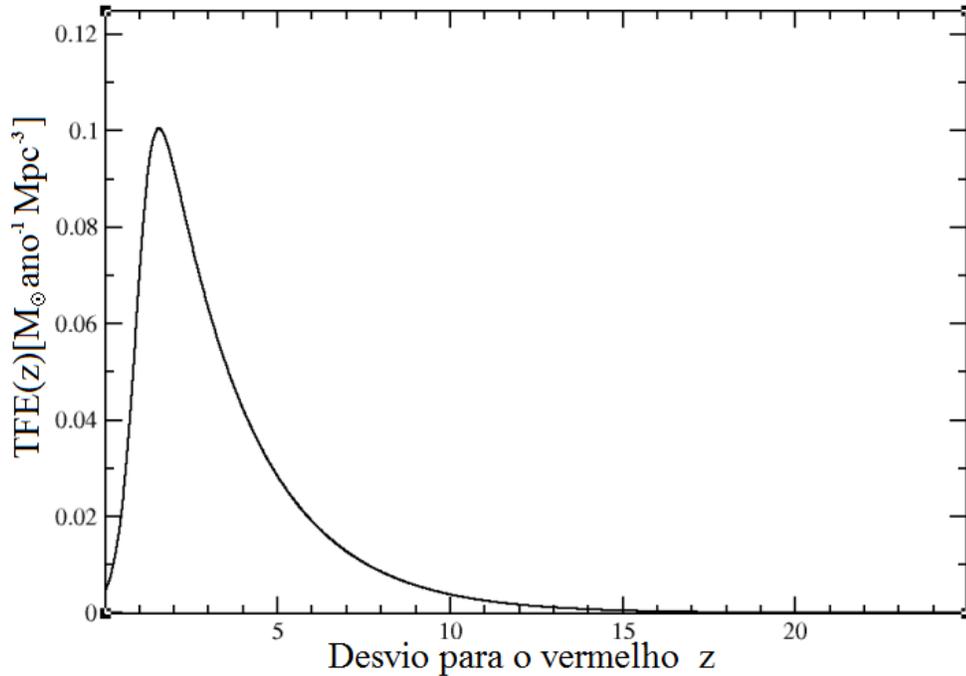


Figura 1.1: Taxa de Formação de Estrelas - $TFE(z) [M_\odot \cdot yr^{-1} Mpc^{-3}]$ - Porciani e Madau (2001).

⁴O modelo original se baseava na cosmologia de Einstein-de Sitter $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$, $h = 0.5$

⁵Por exemplo em trabalhos que usamos como referências sobre modelos e taxas de supernovas [17],[18],[19].

Uma vantagem deste modelo é que ele é facilmente integrável por ser uma função analítica, e sua extensão a todos os valores de redshift contorna o problema dos dados imprecisos de supernovas para grande z . De acordo com o gráfico (1.1), o pico da formação de estrelas se encontra em $z \simeq 2$, para termos uma intuição melhor sobre este tempo cosmológico, plotamos o gráfico do desvio para o vermelho em função do tempo em bilhões de anos.

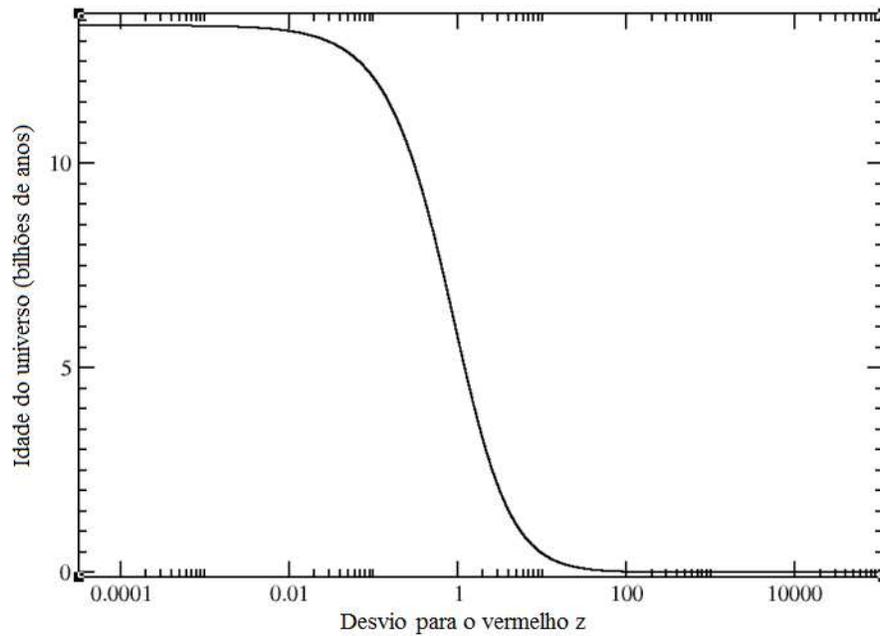


Figura 1.2: Relação entre o desvio para o vermelho z e o tempo cosmológico em bilhões de anos. A maior parte das observações diretas de supernovas está em $z < 1$, ~ 8 bilhões de anos. A época de maior taxa de formação de estrelas se encontra em $z = 2$, ~ 10 bilhões de anos

Capítulo 2

Densidades de Energia

2.1 Ω_{\star} - Densidade de Energia na forma de Estrelas

Uma forma de avaliar a consistência do modelo TFE(z) é calculando sua previsão para a densidade de matéria bariônica que compõe as estrelas. Através do modelo TFE(z) de Madau et al. e de uma função de distribuição de estrelas, a função de massa inicial (FMI), construiremos um modelo de taxa de supernovas e estimaremos a densidade de energia na forma de estrelas e na forma de neutrinos de SNCN.

Estima-se que 10% do conteúdo bariônico total esteja “preso” na forma de estrelas. Temos em mãos o modelo TFE que fornece a taxa de formação de estrelas, mais precisamente, a taxa de formação de massa de estrelas. Em princípio, bastaria integrarmos a equação (1.2) desde a época de nascimento das estrelas em $z = 20$ até o momento atual, $z = 0$. Assim estaríamos ignorando processos de reciclagem que ocorrem nas estrelas, que podem ocasionar grandes perdas do seu conteúdo de volta para o espaço interestelar. Ignoraríamos também as perdas por ocorrência de supernovas, que espalham material bariônico no espaço e convertem grande parte da energia da progenitora em radiação e neutrinos.

Contudo, se tivermos um modelo de ocorrência de supernovas, poderíamos incluir as perdas geradas por esses eventos. Na seção (1.2.2) vimos que $\sim 100\%$ das estrelas com massa entre 8 e $50M_{\odot}$ terminam suas vidas como uma SNCN e correspondem a $\sim 90\%$ de todos os eventos supernovas. Então, se soubermos em que proporção as estrelas neste intervalo de massa estão em relação ao total, esta será, aproximadamente, a proporção de supernovas.

2.2 Função de Massa Inicial

Para calcularmos em que proporção as progenitoras de SNCN estão em relação ao total de estrelas usaremos uma função de distribuição: a Função de Massa Inicial. A FMI é uma função de distribuição do número de estrelas em função das suas massas em um certo volume do universo.

O primeiro modelo de FMI é o de Salpeter (1955) [20]: $\phi_S(m) \propto m^{-2.35}$, que funciona bem até o limite inferior de $1M_{\odot}$. Abaixo deste valor o número de estrelas seria superestimado pelo modelo.

O modelo TFE é construído a partir de medidas de luminosidade e considera estrelas de até $0.1M_{\odot}$, o limite inferior para estrelas visíveis excluindo anãs marrons. Por isso combinamos ao de Salpeter o modelo de Gould [[21], [22]] entre $0.1M_{\odot}$ e $1M_{\odot}$: $\phi_G(m) \propto m^{-2.33-1.82\log(m)}$.

Chamaremos a FMI combinada simplesmente de $\phi(m)$ daqui por diante.

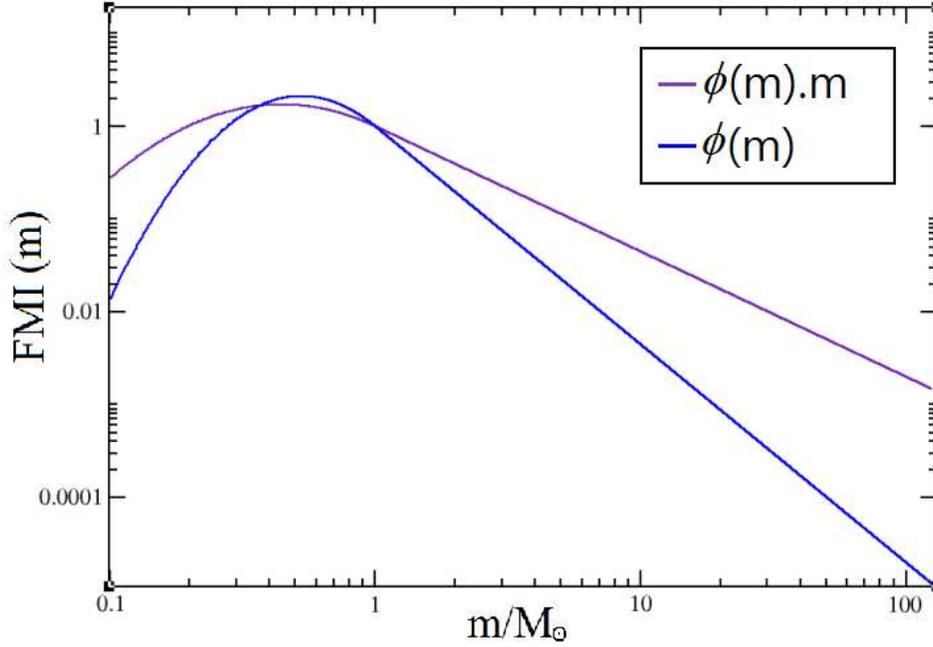


Figura 2.1: $\phi(m)$ e $\phi(m)m$ - Funções de Massa Inicial de distribuição de estrelas e da massa das estrelas respectivamente - FMI combinada de Salpeter e Gould

A integral da FMI combinada de Salpeter e Gould $\phi(m)$ em um intervalo $[M_1, M_2]$ nos fornece o número de estrelas que possuem massa entre $[M_1, M_2]$ em um volume de $1pc^3$ do universo. Trabalharemos apenas com razões dessas integrais, de modo que não importa a constante de proporcionalidade de $\phi(m)$. Também estamos considerando uma distribuição homogênea das estrelas no universo, portanto o volume de $1pc^3$ desaparecerá sem grandes problemas nas nossas considerações. Em outras palavras, não é importante que façamos nenhum tipo de normalização.

Deste modo, a proporção do *número* de progenitoras de SNCN em relação ao *número* total de estrelas é dada por:

$$\alpha_{SNCN} = \frac{\int_{8M_{\odot}}^{50M_{\odot}} \varphi(m)dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} \varphi(m)dm} = 0.0204 \quad (2.1)$$

Ou seja, 2% das estrelas se tornam uma supernova tipo SNCN.

Este número é três vezes maior para estrelas que possuem massa entre 3 e $8M_{\odot}$:

$$\alpha = \frac{\int_{3M_{\odot}}^{8M_{\odot}} \varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} \varphi(m) dm} = 0.0614 \quad (2.2)$$

Entretanto, ele não corresponde ao número de supernovas do tipo Ia. Como dito na seção (1.2.1), a eficiência da formação de uma supernova desse tipo é muito baixa (menos de 10%), por isso estamos justificados em negligenciá-las.

Como o modelo para taxa de formação de estrelas é um modelo de formação de *massa*, é conveniente sabermos em que proporção as massas das estrelas estão distribuídas. Para isso, multiplicamos a função pela massa m e integramos:

$$\alpha_M = \frac{\int_{8M_{\odot}}^{50M_{\odot}} m\varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} m\varphi(m) dm} = 0.1845 \quad (2.3)$$

E vemos que 19% da massa das estrelas está concentrada em progenitoras de supernovas tipo colapso do núcleo. Este número é o número que procuramos se queremos saber quanto da *massa* das estrelas se perde por ocorrência de explosões.

Mas existem considerações implícitas ao elegermos nosso modelo de supernovas simplesmente como:

$$TSN(z) = \alpha_M TFE(z) \quad (2.4)$$

A primeira delas é que estamos considerando que as condições que permitem uma estrela evoluir para um estágio supernova não mudam entre $z=0$ e $z=20$. Vimos no capítulo 1 as condições para que se formem progenitoras dos tipos Ia e CN, e principalmente sua relação com o tempo de vida dessas estrelas. Aqui fica claro um

dos motivos para considerarmos apenas supernovas tipo CN, pois possuem um tempo de vida curto e portanto supomos que em um mesmo z a estrela nasce e morre. Isso torna mais importante a seguinte consideração sobre a função de massa inicial: ela deveria ser a mesma em todo desvio para o vermelho considerado. Isso não é verdade e pode constituir uma fonte considerável de erros na inferência de uma taxa de supernovas por uma taxa de formação de estrelas. A função de massa inicial pode ter sido muito diferente para as primeiras gerações de estrelas e no universo atual também pode variar consideravelmente em ambientes distintos [23]. Por simplicidade assumimos a não dependência da FMI com o desvio para o vermelho nos permitindo simplesmente multiplicar TFE por um fator de proporção e dizer que o modelo que temos para a taxa de supernovas tem comportamento análogo ao de formação de estrelas.

2.3 Estimando Ω_*

A equação (2.4) de TSN(z) nos dá uma taxa de *perda* da matéria bariônica que compõe estrelas.

Se integrarmos TFE(z) - TSN(z) desde a época de surgimento de estrelas ($z = 20$) até hoje ($z = 0$), obteremos a densidade atual de matéria bariônica na forma de estrelas:

$$\rho_* = \int_{z=0}^{z=20} TFE(z) - TSN(z) dt \quad (2.5)$$

$$= (1 - \alpha_M) \int_{z=0}^{z=20} TFE(z) dt \quad (2.6)$$

$$= 0.816 \int_{z=0}^{z=20} h 0.3 \frac{e^{3.4z}}{e^{3.8z} + 45} dt \quad (2.7)$$

Como $a = 1/(1+z)$, a equação de Friedmann (2) fornece a relação entre tempo e o desvio para o vermelho:

$$dt = \frac{dz}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^5 + \Omega_r(1+z)^6}} \quad (2.8)$$

A integral a ser calculada é:

$$0.816 \int_{z=0}^{z=20} h \, 0.3 \frac{e^{3.4z}}{e^{3.8z} + 45} \frac{dz}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^5 + \Omega_r(1+z)^6}} \quad (2.9)$$

Lembrando que a taxa TFE tem unidades de $M_\odot yr^{-1} Mpc^{-3}$.

Substituindo $H_0^{-1} = \frac{0.98 \times 10^{10}}{h} yr$, realizamos numericamente a integral até $z=20$. O resultado obtido é a densidade (em $[M_\odot Mpc^{-3}]$) de estrelas no universo atual sem considerar processos de reciclagem.

$$\rho_\star = 4.53 \times 10^8 [M_\odot Mpc^{-3}] \quad (2.10)$$

Dividindo pela densidade crítica $\rho_{cr} = 1.88h^2 \times 10^{-29} g \, cm^{-3}$, obtemos a densidade de energia:

$$\Omega_\star = \frac{\rho_\star}{\rho_{cr}} = 0.0032 = 2.27 \times 10^{-3} h^{-1} \quad (2.11)$$

Que tem boa concordância com os valores obtidos por simulações numéricas e observações [24], [25], [26].

2.4 Densidade de Energia de Neutrinos

Com algumas modificações sobre os cálculos anteriores, podemos determinar a densidade de energia dos neutrinos originados em supernovas.

Sabemos que o surto de neutrinos de uma SNCN se deve principalmente à formação de uma estrela de nêutrons durante o colapso. A energia liberada na forma de neutrinos é cerca de 99% da energia de ligação gravitacional dessa estrela. Em 80% [12] dos casos, este é o remanescente do colapso. A energia de ligação gravitacional de um corpo de massa M e raio R é dada por

$$E_g = 3GM^2/5R \quad (2.12)$$

Este valor corresponde a cerca de 10% da energia de massa, mc^2 do objeto.

O valor da massa de uma estrela de nêutrons é sempre próximo da massa de Chandrasekhar. O raio da estrela também será sempre da ordem de alguns quilômetros, visto que a densidade da estrela é da ordem da densidade nuclear ¹.

Sabemos que 99% da energia de ligação gravitacional da progenitora é liberada através de neutrinos relativísticos. Para uma estrela com os valores estimados acima, essa energia é de $\simeq 3 \times 10^{53}$ erg [13].

Tendo a informação da energia liberada na forma de neutrinos por cada evento supernova, convém encontrarmos uma taxa de ocorrência do número de supernovas. Mas o modelo em que nos baseamos fornece uma taxa de $M_\odot yr^{-1} Mpc^{-3}$, e por isso precisaremos de uma constante de proporcionalidade com unidades de m^{-1} convenientemente expressa em massa solar M_\odot :

$$\alpha_N = \frac{\alpha}{\langle M \rangle} \quad (2.13)$$

onde $\langle M \rangle$ é uma massa média que pode ser escrita como:

$$\langle M \rangle = \frac{\int_{0.1M_\odot}^{125M_\odot} m\varphi(m)dm}{\int_{0.1M_\odot}^{125M_\odot} \varphi(m)dm} \quad (2.14)$$

¹ $\rho = 10^{17} \frac{kg}{m^3} \simeq \frac{M_\odot}{r^3} \simeq \frac{10^{30}kg}{r^3} \longrightarrow r \simeq 1km$

E lembrando a proporção entre o número de estrelas

$$\alpha = \frac{\int_{8M_{\odot}}^{50M_{\odot}} \varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} \varphi(m) dm} \quad (2.15)$$

$$\alpha_N = \frac{\int_{8M_{\odot}}^{50M_{\odot}} \varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} \varphi(m) dm} \times \frac{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} \varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} m\varphi(m) dm} \quad (2.16)$$

Cancelam-se o primeiro denominador e o segundo numerador e

$$\alpha_N = \frac{\int_{8M_{\odot}}^{50M_{\odot}} \varphi(m) dm}{\int_{0.1M_{\odot}}^{125M_{\odot}} m\varphi(m) dm} = 0.0116 [M_{\odot}^{-1}] \quad (2.17)$$

Com as unidades apropriadas, podemos escrever uma taxa de número de supernovas:

$$TSN(z) = 0.0116 TFE(z) [yr^{-1} Mpc^{-3}] \quad (2.18)$$

Para contabilizar a densidade de energia produzida na forma de neutrinos até hoje, devemos lembrar que a energia dos neutrinos sofre um desvio para o vermelho com a expansão do universo. Podemos ver como isso ocorre de forma bem clara para um neutrino sem massa:

$$\varepsilon_{\nu} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.19)$$

neste caso distingua este h , a constante de Planck, de $h = H_0/100$ de Hubble.

Com a expansão do universo, parametrizada pelo fator de escala a , o comprimento de onda comóvel λa aumenta fazendo com que a energia diminua.

$$\varepsilon_{\nu} \propto \frac{1}{a} = 1 + z \quad (2.20)$$

Então, se a energia de um neutrino em um certo momento da expansão é

$$\varepsilon_\nu = \frac{hc}{a\lambda} = \frac{hc(1+z)}{\lambda} \quad (2.21)$$

Hoje, $a = 1$, $z = 0$ a energia será de:

$$\varepsilon_{\nu_0} = \frac{hc}{\lambda} = a\varepsilon_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{(1+z)} \quad (2.22)$$

Assumindo que a energia do surto de neutrinos gerado em cada evento é de $E_\nu = 3 \times 10^{53}$ erg, a densidade de energia atual na forma de neutrinos de supernovas será dada por:

$$\rho_\nu = \int_{z=0}^{z=20} \frac{3 \times 10^{53}}{1+z} TSN(z) dt \quad (2.23)$$

Substituindo (2.18) e (2).

$$\rho_\nu = cte \int_{z=0}^{z=20} \frac{e^{3.4z}}{(1+z)(e^{3.8z} + 45)} \frac{dz}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^5 + \Omega_r(1+z)^6}} \quad (2.24)$$

Onde $cte = h \times 0.3 \times 0.0116 \times 3 \times 10^{53}$ e a integral resulta

$$\rho_\nu = 8.5 \times 10^{59} [erg/Mpc^3] \quad (2.25)$$

Dividindo pela densidade crítica:

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_{cr}} = 3.3 \times 10^{-6} = 2.37 \times 10^{-6} h^{-1} \quad (2.26)$$

Plotamos a evolução da densidade Ω_ν em função do desvio para o vermelho para ilustrar a história da conversão de matéria não-relativística em relativística de acordo com nosso modelo.

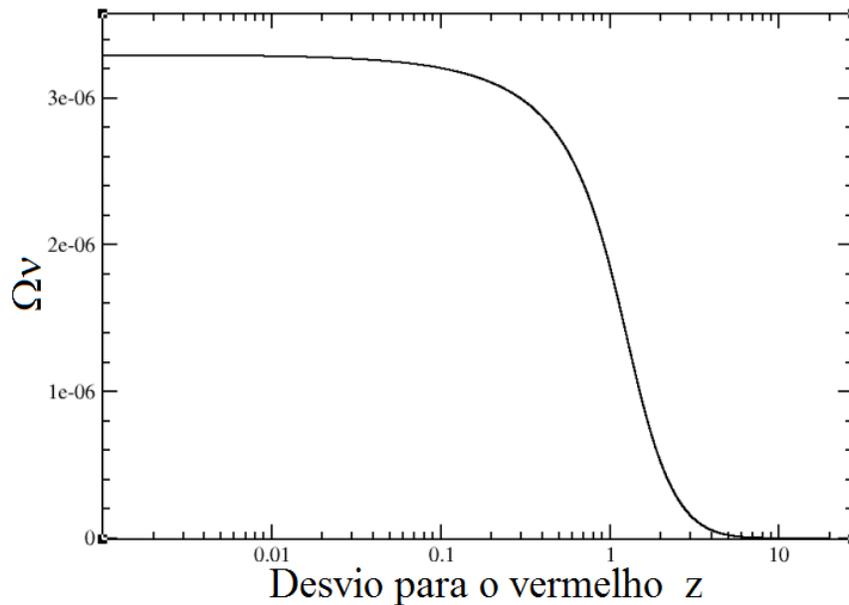


Figura 2.2: Densidade de Energia de Neutrinos de Supernovas

2.5 Matéria Escura Relativística

Como vimos nos capítulos anteriores, existem mecanismos no universo que convertem matéria não-relativística em relativística. O nosso modelo fenomenológico da geração de neutrinos em supernovas contabiliza parte da conversão $\Omega_{nr} \rightarrow \Omega_r$. Podemos avaliar qual o impacto dessa conversão na cosmologia. Lembremos a equação de Friedmann que parametriza a evolução do fator de escala em função das densidades de energia:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\Omega_{nr}}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.27)$$

Vemos que a variação das densidades de energia afeta, por exemplo, a velocidade em que se expande o universo. É claro que para o valor encontrado $\Omega_\nu = 3.3 \times 10^{-6}$

o efeito é desprezível:

$$\frac{\Omega_\nu}{\Omega_r} = 3.9 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\Omega_\nu}{\Omega_{nr}} = 1.2 \times 10^{-5}$$

No capítulo (4) veremos que a formação de estruturas no universo depende fortemente das densidades de energia que o compõem. Já temos indícios de que a geração de matéria relativística em supernovas é muito pequena e não deve alterar significativamente a história da formação de estruturas. Mas se houvesse uma conversão $\Omega_{nr} \rightarrow \Omega_r$ mais acentuada?

De modo análogo à matéria bariônica que forma as estrelas, podemos pensar que também existe um processo que transforma matéria escura fria em matéria escura relativística. O desconhecimento sobre a natureza da matéria escura é tal que há espaço para fazermos suposições sobre seu comportamento e avaliarmos que consequências trazem. Já existem muitos trabalhos que consideram um universo composto por matéria escura relativística, os modelos de “*hot dark matter*” [28]. Neste cenário, a matéria escura é composta por neutrinos massivos relativísticos, sendo os melhores resultados obtidos com modelos mistos de matéria escura fria e quente.

Baseados no nosso modelo fenomenológico para matéria bariônica, construiremos um modelo similar para matéria escura. Suporemos que existe uma taxa de conversão de matéria escura fria em matéria relativística e, como no caso bariônico, essa taxa depende do tempo, avaliado pelo desvio para o vermelho. A melhor forma de avaliar o nosso modelo é observando os seus efeitos sobre a formação de estruturas no universo. Faremos uma introdução ao processo de formação de estruturas de acordo com o modelo padrão nos capítulos 3 e 4 a seguir e posteriormente incluiremos as nossas alterações no capítulo 5.

Capítulo 3

Teoria de Perturbações Lineares

3.1 Inomogeneidades

Podemos descrever nosso universo, em princípio, como um universo homogêneo e isotrópico. A matéria se encontra distribuída uniformemente e não existe uma direção preferencial de observação, ou seja, não existe um ponto “privilegiado” no universo. Essa descrição funciona muito bem como uma primeira aproximação. Medidas da Radiação Cósmica de Fundo evidenciam que o universo em grandes escalas, distâncias superiores a 100 Mpc é mesmo homogêneo e isotrópico. Entretanto sabemos que o universo possui, em certas escalas, regiões de densidade muito maior que a média, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias. Essas regiões constituem desvios da homogeneidade.

Em 1933 Lemaître apontou para estes desvios supondo que no passado remoto a matéria do universo se encontrava uniformemente distribuída, mas que instabilidades gravitacionais provocaram o crescimento de regiões mais densas. Partindo dessa suposição é desenvolvido o formalismo que descreve o crescimento das inomogeneidades do universo. Desde que as perturbações sobre a densidade sejam pequenas, podemos descrevê-las por teoria de perturbações lineares.

A seguir, apresentaremos o conjunto de equações que governa a evolução das perturbações de densidade. São cinco equações diferenciais acopladas que não possuem solução analítica. Ao final, mostraremos os resultados numéricos que nos importam mais: a evolução das perturbações de matéria e do potencial gravitacional.

3.2 Métrica e Energia: Equação de Einstein

A equação de Einstein relaciona a métrica do espaço-tempo, representada pelo tensor de Einstein (G_{ν}^{μ}) com o seu conteúdo energético, representado pelo tensor energia-momento (T_{ν}^{μ}):

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G\delta T_{\nu}^{\mu} \quad (3.1)$$

onde G é a constante de Newton.

Consideramos a métrica perturbada:

$$g_{\nu}^{\mu}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} -1 - 2\Psi(\vec{x}, t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1 + 2\Phi(\vec{x}, t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(1 + 2\Phi(\vec{x}, t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(1 + 2\Phi(\vec{x}, t)) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Onde Ψ corresponde ao potencial Newtoniano e Φ à perturbação à curvatura espacial. Vemos que quando $\Phi = \Psi = 0$, recuperamos a métrica FRW da cosmologia em ordem zero, plana e homogênea.

A escolha dessa métrica perturbada corresponde a escolha de um *gauge*, o *gauge* newtoniano conforme. Uma das vantagens deste *gauge* é que Φ faz o papel do potencial gravitacional no limite newtoniano e por isso tem uma interpretação física mais simples e direta.¹

¹Livros-texto que são referências importantes como The Large Scale Structure of the Universe [27] e Principles of Physical Cosmology [1], ambos de P.J.E. Peebles, usam *gauge síncrono*. Apesar de ser largamente usado, este *gauge* não fixa completamente os graus de liberdade e isso se manifesta

Usaremos a aproximação em que $\Phi = -\Psi$, válida se desconsiderarmos os momentos de quadrupolo, que são nulos para matéria e muito pequenos para radiação e neutrinos.

Consideraremos perturbações sobre o tensor energia-momento de um fluido isotrópico perfeito:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Só serão relevantes as perturbações da densidade ρ . Os termos espaço-espaço (pressão P) estão associados aos momentos de quadrupolo que, como dito anteriormente, podem ser desconsiderados ². Os termos tempo-espaço da equação de Einstein são redundantes, fornecem as mesmas informações que os termos tempo-tempo[30], e por isso podemos trabalhar apenas com a componente tempo-tempo perturbada em primeira-ordem:

$$\delta G_0^0 = 8\pi G \delta T_0^0 \quad (3.4)$$

Apenas com trabalho algébrico ³ e assumindo a métrica perturbada (3.2), pode-se obter a seguinte forma para a componente tempo-tempo das perturbações da métrica em primeira ordem:

nas soluções das equações de perturbações de densidades. Em especial, as soluções fora do horizonte dessas equações apresentam um crescimento espúreo que é simplesmente um efeito de coordenadas. Veja uma discussão sobre gauges newtoniano e síncrono em “Cosmological perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges”, Chung-Pei Ma & Edmund Bertschinger [28] e “Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: A General Study And Its Application To The Texture Scenario Of Structure Formation”, R. Durrer [29].

²Essa componente do tensor energia-momento é chamada stress anisotrópico e tem contribuição apenas de partículas relativísticas

³Em detalhes: Modern Cosmology, Dodelson, S. (2002) [30]

$$\delta G_0^0 = -6\dot{\Phi}\frac{\dot{a}}{a^3} - 6\Phi\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\Phi\frac{k^2}{a^2} \quad (3.5)$$

Sendo a o fator de escala; Φ o potencial newtoniano; k o vetor de onda associado à perturbação ⁴; e os pontos correspondem a derivadas em relação ao tempo conforme η [Apêndice A].

A componente tempo-tempo do tensor energia-momento corresponde à soma das densidades de energia de todas as espécies.

$$T_0^0 = \sum -\rho \quad (3.6)$$

Sendo ρ de cada espécie calculada a partir da equação de Boltzmann da sua função de distribuição. Vejamos como são as densidades de energia perturbadas em primeira ordem para cada espécie:

Matéria bariônica e matéria-escura:

Estamos considerando o regime linear de perturbações: o contraste da densidade, ou seja, o desvio do valor médio da densidade de matéria é muito pequeno $\delta = \delta\rho/\rho \ll 1$.

Somamos este contraste à ordem-zero de energia.

$$\rho_m = [1 + \delta]\rho_{m,0} \quad (3.7)$$

$$T_{m0}^0 + \delta T_{m0}^0 = -\rho_{m,0}[1 + \delta] \quad (3.8)$$

Fótons e neutrinos:

⁴ k aparece pois todas as equações são escritas no espaço de Fourier, mais fácil de trabalhar.

Consideramos neutrinos sem massa, portanto o tratamento é idêntico ao de fótons.

$$T_{r,0}^0 + \delta T_{r,0}^0 = -\rho_{r,0}[1 + 4\Theta_0] \quad (3.9)$$

O fator 4 pode ser visto facilmente lembrando que $\rho \propto T^4$, então $\delta\rho/\rho = 4\delta T/T$. O cálculo preciso de $\delta T_{r,0}^0$ é obtido introduzindo uma perturbação Θ , correspondente a uma mudança fracional da temperatura $\delta T/T$, à função de distribuição de fótons.

As equações (3.5), (3.8) e (3.9) de volta na equação de Einstein (3.4), resultam na chamada equação de Einstein-Boltzmann :

$$3\dot{\Phi}\frac{\dot{a}}{a} + 3\Phi\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + k^2\Phi = 4\pi G a^2[\rho_m\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}] \quad (3.10)$$

Onde agrupamos matéria bariônica e matéria escura em apenas um termo de massa, e o mesmo foi feito para fótons e neutrinos em um único termo de radiação:

$$\begin{aligned} \rho_m\delta &= \rho_b\delta_b + \rho_{dm}\delta_{dm} \\ \rho_r\Theta_0 &= \rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\Theta_{\nu 0} \end{aligned}$$

A equação de Einstein-Boltzmann é muito importante pois relaciona as perturbações da métrica às perturbações da matéria e da radiação.

Até aqui mostramos como as densidades de energia e suas perturbações afetam as perturbações da métrica Φ através da equação de Einstein. Em contrapartida, as perturbações das densidades evoluem com o tempo de maneira dependente da métrica.

As equações de evolução das perturbações são:

$$\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi} \quad (3.11)$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = ik\Phi \quad (3.12)$$

$$\dot{\Theta}_{r,0} + k\Theta_{r,1} = -\dot{\Phi} \quad (3.13)$$

$$\dot{\Theta}_{r,1} - \frac{k}{3}\Theta_{r,0} = -\frac{k}{3}\dot{\Phi} \quad (3.14)$$

Obtidas através da equação de Boltzmann para cada espécie, sendo v e $\Theta_{r,1}$ os momentos de ordem 1 do contraste de densidade de matéria e radiação respectivamente. A derivação dessas equações é longa e pode ser vista em mais detalhes em S. Dodelson, *Modern Cosmology* (2002) [30]. Omitiremos os cálculos mantendo o nosso enfoque apenas nos resultados que eles fornecem. O mais importante ao olhar essas equações é reconhecer que na equação de Boltzmann:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = C \quad (3.15)$$

Onde f é a função de distribuição da espécie e C o termo de colisão, p , x e \hat{p} são quadrivetores calculados a partir da métrica perturbada e por isso a dependência das equações (3.11)-(3.14) com o potencial newtoniano.

Vemos que (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) constituem um conjunto de cinco equações diferenciais acopladas que governam a evolução das perturbações das densidades de matéria, radiação (incluindo neutrinos) e da perturbação da métrica: o potencial Φ . Lembramos neste ponto que estamos interessados nas perturbações de matéria, como elas evoluem e quais os efeitos na cosmologia. Resolvemos numericamente as equações acopladas e plotamos os resultados mais relevantes para o nosso trabalho, a evolução de δ e Φ para diferentes modos.

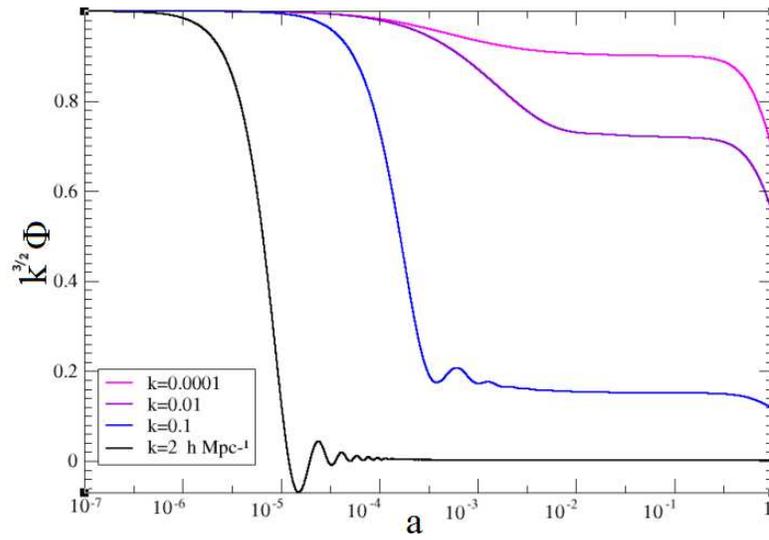


Figura 3.1: Potencial Newtoniano

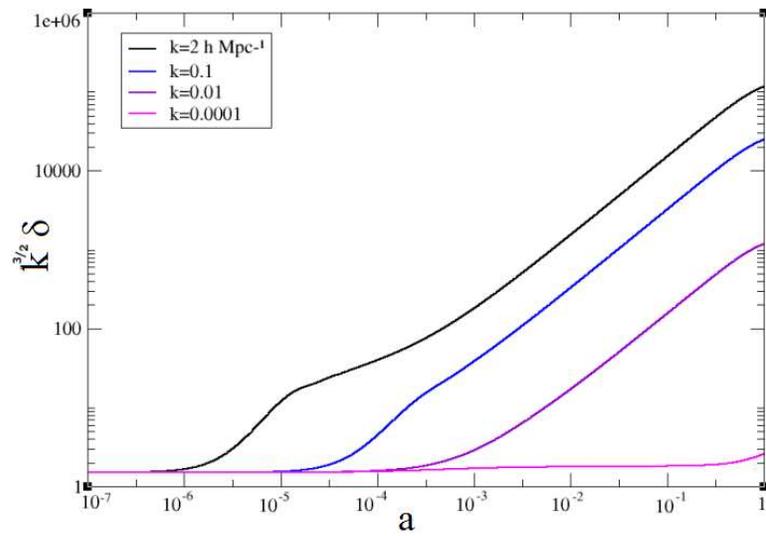


Figura 3.2: Perturbações da Matéria

Para entender os mecanismos físicos que determinam o comportamento de δ e Φ e a importância da escala k da perturbação, discutiremos um pouco a teoria de formação de estruturas no capítulo a seguir.

Capítulo 4

Formação de Estruturas

4.1 Instabilidade Gravitacional

A evolução da perturbação de matéria ocorre sob a disputa de duas forças que descrevemos simplificadaamente através da equação:

$$\ddot{\delta} + [Press\tilde{a}o - Gravidade]\delta = 0 \tag{4.1}$$

Se a força mais forte for a gravitacional, o contraste cresce exponencialmente, se for a pressão de radiação, temos uma solução oscilante.

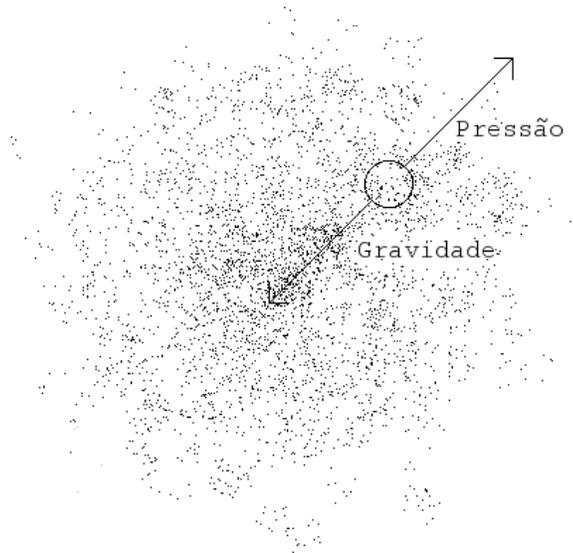


Figura 4.1: Instabilidade Gravitacional. A gravidade tende a acumular matéria e a pressão de radiação contraria o colapso suprimindo a formação de uma estrutura.

A atração gravitacional entre as partículas que em um universo primordial estavam uniformemente distribuídas cria regiões de densidade superior à média, os *contrastos de densidade*. Assumimos que uma *instabilidade gravitacional* provoca o surgimento do contraste e não nos importamos com o mecanismo que causa a instabilidade. Sabemos que a radiação exerce pressão e contraria o acúmulo de matéria. O efeito de supressão é grande para bárions, pois estão acoplados aos fótons eletromagneticamente.

No nosso cenário desprezaremos a matéria bariônica e consideramos todo o conteúdo de matéria na forma de matéria escura. Os efeitos da interação da radiação com a matéria escura são um pouco mais sutis, pois até onde sabemos ela interage apenas gravitacionalmente. O mecanismo é indireto, as perturbações na densidade de

radiação estão acopladas ao potencial newtoniano e este está acoplado as perturbações da matéria.

4.2 Evolução das perturbações

Já mencionamos que a dependência das nossas equações com os modos k ocorre porque estamos trabalhando no espaço de Fourier. Os cálculos com perturbações lineares assumem que existem apenas desvios mínimos da homogeneidade em grandes escalas, mesmo havendo grandes concentrações de massa em pequenas escalas. Ainda assim usamos perturbações lineares para descrever o comportamento de irregularidades na densidade em grandes escalas do universo, isso porque a conservação de momento diz que os movimentos fortemente não-lineares se equilibram dentro do aglomerado, o seu centro de massa respondendo apenas a atração gravitacional de aglomerados vizinhos: não há acoplamento forte entre modos substancialmente diferentes mesmo quando o acúmulo de matéria é não-linear [27]. Isso quer dizer que podemos tratar cada modo independentemente.

Fisicamente, estes modos estão associados às escalas do universo. Considerando pequenos contrastes de densidade excluimos todos os termos de ordem maior que 1 da equação de Einstein, isso corresponde a uma linearização da equação. As soluções da equação linear para o caso de um universo plano $\Omega = 1$ podem ser escritas em termos de ondas planas [31]. A cada onda plana está associado um comprimento de onda (portanto, um k no espaço de Fourier) que é a escala da perturbação.

Então, a escala de uma perturbação é a distância em que se observa um contraste de densidade. O comprimento de onda da perturbação fornece o valor dessa escala, e a amplitude está associada ao tamanho do contraste. Perturbações em maiores escalas possuem menores amplitudes, por isso o valor do contraste de densidade é menor.

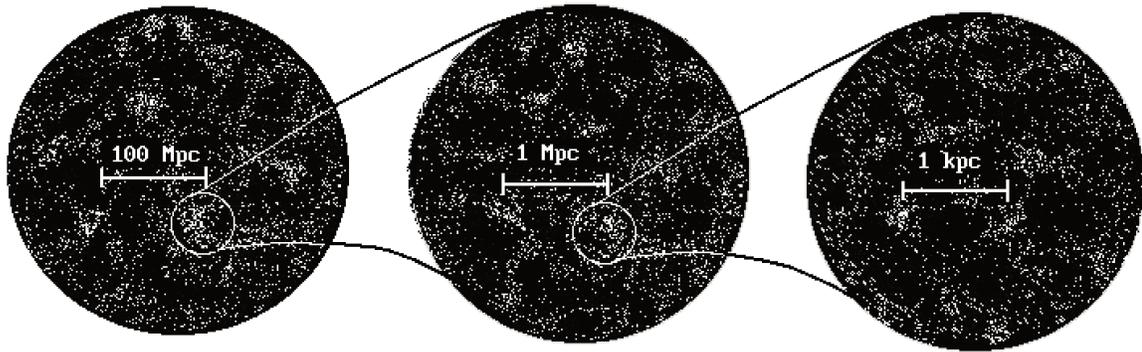


Figura 4.2: Da esquerda para direita: distâncias típicas entre aglomerados de galáxias, galáxia e estrelas. Estas distâncias são os tamanhos das escalas das perturbações que geram cada uma das estruturas.

Perturbações em grandes escalas, da ordem de $100Mpc$ formarão aglomerados de galáxias, enquanto perturbações em escalas menores $\sim 1Mpc$ estão associadas a formação de galáxias. A amplitude da perturbação corresponde a quanto a densidade local é superior a densidade média do universo, ou seja, a densidade média de um aglomerado é menor do que a de uma galáxia.

Isso nos dá uma idéia sobre a chamada hierarquia de aglomerados (clusters). Se o acúmulo de matéria se torna grande o suficiente, a região da perturbação pára de se expandir e forma um sistema estável que evolui independentemente se o resto do universo for homogêneo e isotrópico (teorema de Birkhoff). Flutuações em pequenas escalas que tiveram amplitudes iniciais maiores pararam de se expandir mais cedo para formar subsistemas mais densos. Por isso, a formação de estruturas é classificada como *bottom-up* (de baixo para cima), ao contrário do que se pensaria “intuitivamente”.

Causalidade

É importante ter em mente que a formação de estruturas no universo depende da interação de matéria e radiação, através de campos gravitacionais e eletromagnéticos. A comunicação entre partes do universo ocorre, então, com velocidade finita e se faz necessário avaliar quais distâncias, ou escalas, interagem em um intervalo de tempo.

O universo está se expandindo a uma velocidade dada pelo parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} \quad (4.2)$$

Essa velocidade define o chamado raio de Hubble H^{-1} . Usamos os sistema de unidades naturais em que $c = 1$, e o raio de Hubble é a região em que a velocidade de expansão do universo é, no máximo, igual a da luz. O raio de Hubble é também a distância na qual efeitos de relatividade geral se tornam importantes. Para $L \ll H^{-1}$, a aproximação newtoniana costuma ser adequada.

Outra distância física importante é o horizonte comóvel, também chamado de tempo conforme, definido por:

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a} \quad (4.3)$$

O horizonte comóvel é a distância que um fóton percorre desde $t = 0$ até um momento t posterior. Duas regiões separadas por uma distância maior do que o horizonte nunca se comunicaram. É preciso notar que o raio de Hubble é uma quantidade local e seu valor em t é ditado essencialmente pelo valor de $a(t)$ naquele instante. Por outro lado, o horizonte depende de toda a história do universo, em especial, do comportamento de $a(t)$ próximo de zero, algo sobre o qual nada sabemos.

Frequentemente encontramos na literatura menções ao momento em que a escala de uma perturbação entra no horizonte como o momento em que as distâncias compreendidas por essa escala interagem causalmente. Este é um ponto que tem gerado controvérsia. Nos períodos pós-inflacionários de domínio da radiação e de domínio da matéria, o raio de Hubble e o horizonte têm valores muito próximos. Apesar dessa

semelhança, deveríamos ser capazes de distinguir qual deles seria o mais apropriado para medir efeitos de causalidade. Fazemos uma pequena discussão sobre isso no apêndice A. Vamos nos apoiar em algumas referências {Ma, [29], [31] que alegam ser o raio de Hubble a distância em que existe contato causal *efetivo*, visto que em teoria de formação de estruturas devemos nos preocupar com medidas locais.

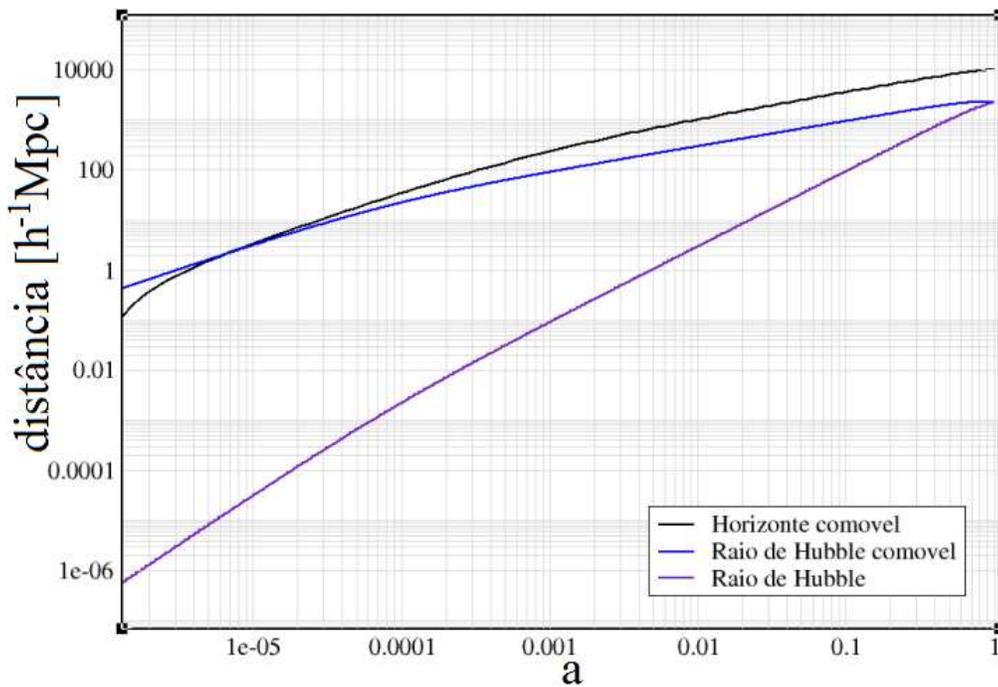


Figura 4.3: Um fóton produzido em $t = 0$ percorre a distância de $\eta = 240h^{-1}Mpc$ em $a = 0.001$. Mas um fóton produzido em $a = 0.001$ só alcança, no máximo, uma distancia da ordem de $H^{-1} = 0.1h^{-1}Mpc$.

4.3 Supressão pela radiação

Com estes esclarecimentos, finalmente podemos avaliar como escalas diferentes possuem uma evolução distinta na história do universo simplesmente por terem entrado no raio de Hubble em momentos diferentes.

As densidades de energia de radiação e matéria dependem de forma diferente do fator de escala. E mesmo Ω_m sendo mais de 1000 vezes maior que Ω_r , houve um período, nos tempos mais remotos, de domínio da radiação.

$$\frac{\Omega_r}{a^4} > \frac{\Omega_m}{a^3}, a \ll 1 \quad (4.4)$$

O fim deste período, ou seja, a época de igualdade entre radiação e matéria acontece em

$$a_{eq} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \simeq 3 \times 10^{-4} \quad (4.5)$$

Repare no gráfico (3.1) que o potencial associado ao modo $k = 0.1hMpc^{-1}$ começa a decair em $a \simeq 10^{-5}$, bem antes do momento de igualdade.

A escala associada a este modo é $\lambda \sim 1/k = 10 h^{-1}Mpc$, sendo este o seu valor atual ($a_0 = 1$). No momento em questão λ é dado por ¹

$$\lambda \frac{a(t)}{a_0} \simeq 10^{-4} \quad (4.6)$$

Se verificarmos o gráfico (4.3), veremos que este valor coincide com H^{-1} em $a \simeq 10^{-5}$. Isso é compatível com o efeito que esperávamos avaliando superficialmente a competição entre radiação e gravidade na figura (4.1).

Mas os efeitos da radiação devem ser analisados com mais cuidado, afinal são as perturbações Θ da radiação que agem indiretamente sobre a matéria escura através do potencial gravitacional.

¹Avaliar o tamanho da escala λa em relação ao raio de Hubble H^{-1} é o mesmo que avaliar λ em relação ao raio de Hubble comóvel $(aH)^{-1}$, usaremos essa relação daqui por diante

Plotamos o gráfico do potencial junto com as perturbações da radiação para o modo $k = 2 \text{ hMpc}^{-1}$:

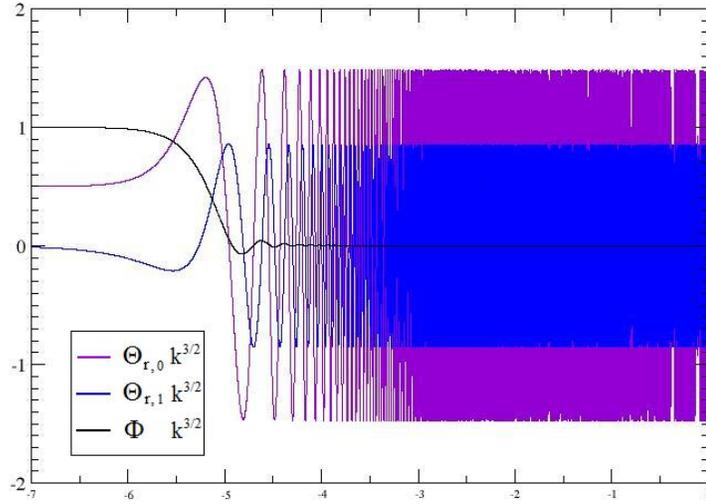


Figura 4.4: O potencial newtoniano e as perturbações $\Theta_{r,0}$ e $\Theta_{r,1}$ da radiação.

Sem derivar, apresentamos uma equação algébrica para o potencial [30] em termos das densidades e perturbações:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \left[\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k} (i\rho_m v + 4\rho_r \Theta_{r,1}) \right] \quad (4.7)$$

No domínio da radiação, ignoramos os termos de matéria em 4.7 e aproximamos $H^2 = 8\pi G \rho_r/3$.

$$\Phi = \frac{6a^2 H^2}{k^2} \left[\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k} \Theta_{r,1} \right] \quad (4.8)$$

Como $\rho_r \propto 1/a^4$, então $H \propto 1/a^2$ e

$$\Phi \propto \left[\frac{6\Theta_{r,0}}{a^2 k^2} + \frac{18\Theta_{r,1}}{a^3 k^3} \right] \quad (4.9)$$

Observe em graf.4.4 que a amplitude de $\Theta_{r,0}$ é maior que de $\Theta_{r,1}$ e que ambas estão fora de fase. Para $a \ll 1$, a contribuição de $\Theta_{r,1}$ é maior e o potencial diminui. A medida que a aumenta, a contribuição de $\Theta_{r,0}$ se torna mais relevante e o potencial acompanha suas oscilações, com amplitude diminuindo com a^{-3} . A frequência das oscilações aumenta e se elas se cancelam até que o potencial para de oscilar.

Vejamos agora o crescimento do contraste da densidade.

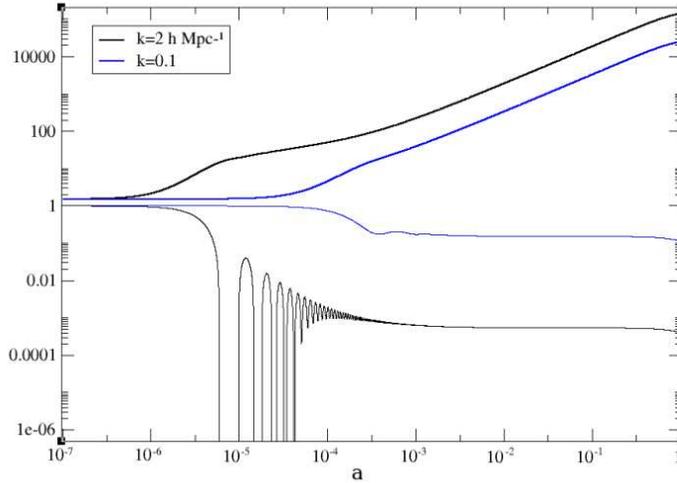


Figura 4.5: Potencial newtoniano e perturbações da matéria para os modos $k = 0.1hMpc^{-1}$ e $k = 2hMpc^{-1}$. Note que a maior supressão ocorre para $k = 2hMpc^{-1}$, pois este modo corresponde a uma escala menor e, portanto, entra no horizonte antes na era da radiação.

As perturbações da densidade começam a crescer quando as escalas entram em contato causal, quando $\lambda a \simeq H^{-1}$. No período de domínio da radiação as perturbações

de matéria ainda crescem, mas sofrem uma supressão devido a diminuição do potencial que acompanha as oscilações das perturbações da radiação. $a \simeq 10^{-5}$.

4.4 Escalas fora do horizonte

Voltemos às equações 3.13 e 3.11

$$\dot{\Theta}_{r,0} = -\dot{\Phi} - k\Theta_{r,1} \quad (4.10)$$

$$\dot{\delta} = -ikv - 3\dot{\Phi} \quad (4.11)$$

Lembrando que as derivadas são em relação ao tempo conforme η e

$$\frac{d}{d\eta} = a^2 H \frac{d}{da} \quad (4.12)$$

No período do domínio da radiação, $H \propto \frac{1}{a^2}$, por isso as derivadas com respeito a η ou a possuem mesmo significado. Para modos fora do raio de Hubble $k \ll aH$ reduzimos as equações (4.10) e (4.11) a

$$\dot{\Theta}_{r,0} = -\dot{\Phi} \quad (4.13)$$

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} \quad (4.14)$$

Para resolvermos a equação (4.14), precisamos determinar as suas condições iniciais. Onde o *início* é o momento em que a escala sai do horizonte no período inflacionário. Não discutiremos modelos inflacionários e os mecanismos de geração de perturbações, assumiremos apenas que elas são geradas com a seguinte característica:

$$\dot{\Phi}_i = 0 \quad (4.15)$$

Substituímos a condição $k \ll aH$ na equação de Einstein-Boltzmann (3.10)

$$3\dot{\Phi}aH + 3\Phi(aH)^2 = 2(aH)^2\Theta_{r,0} \quad (4.16)$$

Onde usamos que $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r$ no domínio da radiação.

$$\dot{\Phi} = -\Phi aH + 2aH\Theta_{r,0} \quad (4.17)$$

$$aH = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\Omega_r} \quad (4.18)$$

Por (4.13) $\Theta_{r,0} = -\Phi + cte$, então temos uma equação do tipo

$$\frac{d\Phi}{da} \propto = \frac{-3\Phi + cte}{a} \quad (4.19)$$

Cuja solução é do tipo $B/a + C$. E a condição inicial $\dot{\Phi}_i = 0$ assegura que o potencial será constante. Substituindo a condição diretamente em (4.17) encontramos.

$$\Phi = 2\Theta_{r,0} \quad (4.20)$$

Portanto, as condições para as perturbações da matéria são:

$$\delta = 3\Theta_{r,0} + cte \quad (4.21)$$

Assumimos perturbações adiabáticas, ou isentrópicas (a entropia por partícula é conservada) [27], isso significa que a razão entre as densidades de matéria e radiação são conservadas:

$$\frac{n_m}{n_r} = \frac{n_m^0}{n_r^0} \left[\frac{1 + \delta}{1 + 3\Theta_{r,0}} \right] \quad (4.22)$$

E portanto

$$\delta = 3\Theta_{r,0} \quad (4.23)$$

Partindo de um potencial constante, chegamos a um contraste de densidade constante, o que seria esperado diretamente da equação (4.11) para escalas fora do raio de Hubble. As condições adiabáticas mencionadas se mantêm enquanto $k < aH$ durante o período de domínio da radiação ²[32].

4.5 Escalas dentro do horizonte

4.5.1 Era da radiação

Diferenciando novamente a equação (4.11) encontramos

$$\ddot{\delta}_{r,0} = -ik\dot{v} - 3\ddot{\Phi} \quad (4.24)$$

Usamos 3.12 para eliminar \dot{v}

$$\ddot{\delta} + ik\left(-\frac{\dot{a}}{a}v + ik\Phi\right) = -3\ddot{\Phi} \quad (4.25)$$

E (3.12) para eliminar v

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{\delta}}{\eta} = S(k, \eta) \quad (4.26)$$

Onde chamamos $S(k, 0)$ o termo de fonte

$$S(k, \eta) = -3\ddot{\Phi} + k^2\Phi - 3\frac{\dot{\Phi}}{\eta} \quad (4.27)$$

A solução para a equação homogênea ($S(k, \eta) = 0$) é do tipo $A + B \ln(a)$. Onde A e B são constantes. Essa solução deve ser compatível com as soluções fora e dentro do raio de Hubble na era da radiação. De fato, $\delta = \text{constante}$ descreve o contraste antes de a escala entrar no raio de Hubble.

²As condições adiabáticas dependem das perturbações da pressão, que são desprezíveis na era da radiação para escalas fora do raio de Hubble, assegurando a conservação do potencial e da perturbação de curvatura.

A solução da equação não-homogênea pode ser construída a partir de $A + B \ln(a)$ avaliando condições de contorno antes e depois da escala entrar no raio de Hubble. Vemos pelo gráfico (3.1) que o potencial é suprimido quando a escala entra no raio de Hubble, isso faz com que o termo de fonte vá para zero e no período da radiação a evolução do contraste é logarítmica, do tipo: $A \Phi_P \ln(Bka)$. Onde Φ_P é o potencial primordial gerado pela inflação. Veja um método para encontrar as constantes A e B em [33].

4.5.2 Era da matéria

Já obtivemos a equação de Einstein-Boltzmann (3.10).

$$3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} + 3\Phi \frac{\dot{a}^2}{a^2} + k^2 \Phi = 4\pi G a^2 [\rho_m \delta + 4\rho_r \Theta_{r,0}] \quad (4.28)$$

Na era de domínio da matéria, negligenciamos os termos de radiação. Para escalas dentro do raio de Hubble, $k \gg aH = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\begin{aligned} k^2 \Phi &= 4\pi G a^2 [\rho_m \delta] \\ &= \frac{3}{2} (aH)^2 \delta \end{aligned} \quad (4.29)$$

Pelo gráfico (3.1), vemos que o potencial fica constante em tempos mais recentes. Vamos fazer uma aproximação e usar este resultado na equação 4.11.

$$\dot{\delta} = -ikv \quad (4.30)$$

$$\ddot{\delta} = -ik\dot{v} \quad (4.31)$$

Usando 3.12 novamente

$$\ddot{\delta} = -ik \left(ik\Phi - \frac{\dot{a}}{a} v \right) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta} &= k^2\Phi + \frac{\dot{a}}{a}ikv \\
&= k^2\Phi - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

Substituímos (4.29) na equação acima e obtemos

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{\delta}}{\eta} - 6\frac{\delta}{\eta^2} = 0
\tag{4.34}$$

Onde usamos que $aH = \frac{\dot{a}}{a}$ e que, no período do domínio da matéria $a \propto \eta^2$, então $\frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{2}{\eta}$.

A solução geral para equação é do tipo $A\eta^2 + B\eta^{-3}$. Sobrevive o termo crescente $A\eta^2$ e concluímos que o contraste de densidade cresce com o fator de escala no período de domínio da matéria.

$$\delta \propto \eta^2 \propto a
\tag{4.35}$$

4.6 O espectro de potência

Vimos que os contrastes de densidade de matéria gerados por instabilidade gravitacional crescem com a evolução do universo e que diferentes escalas evoluem independentemente. Esperamos que o crescimento dos contrastes gerem um padrão nas inhomogeneidades do universo que possa ser observado. Uma forma de avaliar a distribuição de matéria no universo atual é através do espectro de potência. Sabemos que em grandes escalas, a perturbação da densidade δ é homogênea e isotrópica e isso sugere que as propriedades estatísticas de δ também devem ser homogêneas, mesmo sendo uma quantidade que mede inhomogeneidades [34].

Introduzimos a função de auto-correlação entre os contrastes de densidade de duas regiões do espaço

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (4.36)$$

Os brackets indicam uma média sobre um volume de normalização V .

Já mencionamos que a cada perturbação em uma certa escala está associada uma onda plana que é solução da equação de Einstein em um universo plano. Podemos então fazer uma expansão de Fourier do contraste de densidade considerando que este é periódico em uma caixa de lado L . A expansão será uma soma sobre modos:

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.37)$$

A periodicidade restringe os valores de k a condições harmônicas de contorno

$$k_x = n \frac{2\pi}{L} \quad (4.38)$$

Substituindo a expressão (4.37) na função de auto-correlação

$$\xi = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'}^* e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.39)$$

Onde $\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}$ pois δ é real. Pelas condições periódicas de contorno, os termos cruzados $k \neq k'$ são zerados. Para uma caixa infinita, as somatórias se tornam integrais e chegamos a transformada de Fourier:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{V}{2\pi^3} \int \langle |\delta_{\mathbf{k}}^2| \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (4.40)$$

A quantidade $\langle |\delta_{\mathbf{k}}^2| \rangle$ é definida como espectro de potência

$$P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}^2| \rangle \quad (4.41)$$

E vemos que o espectro de potência é uma medida das inhomogeneidades em uma certa escala λ representada no espaço de Fourier pelo modo k .

Para extrairmos o significado do espectro de potência hoje e confrontarmos suas características com as observações, assumimos que os desvios de homogeneidade no universo são grandes apenas em escalas pequenas comparadas com o comprimento de Hubble atual ($k \ll H_0$) e crescem apenas devido aos efeitos da gravidade, com excessão de pequenas flutuações iniciais. Em um comprimento de onda comóvel $\frac{2\pi}{k}$ grande comparado ao tamanho de aglomerações de massa, as amplitudes de Fourier estão em um regime linear [Apêndice B] e portanto, variam no tempo como deduzimos em eq.(4.35) [1]. Assim, podemos usar novamente a equação do potencial eq.(4.29)

$$\Phi = \frac{4\pi G a^2 \rho_m \delta}{k^2} \quad (4.42)$$

Plotamos o espectro de potência da matéria no universo atual, $a = 1$.

$$P(k) \propto \delta^2 \propto \Phi^2 \quad (4.43)$$

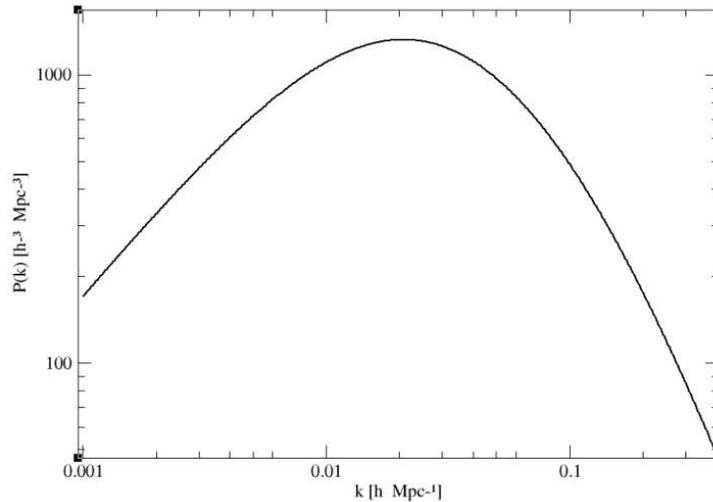


Figura 4.6: Espectro de potência em função dos modos k

Não abordaremos a questão da normalização de $P(k)$. Nos restringimos apenas a cuidar para que todos os gráficos tendam ao mesmo comportamento para grandes escalas, já que as flutuações de densidade são mais bem conhecidas e concordam com o espectro de Harrison-Zel'dovich-Peebles gerado pela inflação $P(k) \propto k$.

Note que o espectro de potência é uma função crescente de k em grandes escalas até $k \simeq 0.02$, a partir de onde começa a sofrer uma supressão. Sabemos que o crescimento de uma perturbação depende do momento em que sua escala se torna menor que o comprimento de Hubble. Dessa forma, escalas menores começam a crescer antes e podemos visualizar o gráfico 4.6 lembrando que o sentido crescente de k é o sentido decrescente do tempo (o momento em que a escala entra no “horizonte”). Plotamos o gráfico em função de $\lambda \propto \frac{1}{k}$ para avaliarmos melhor a sua relação com o tempo.

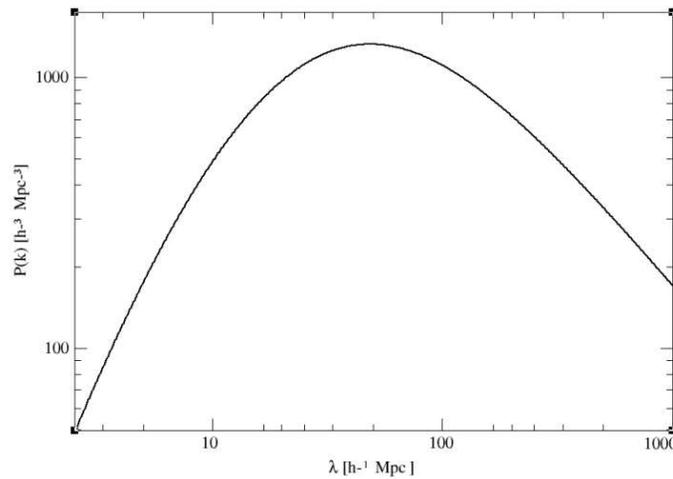


Figura 4.7: Espectro de potencia em função do tamanho λ da escala

O ponto $k \simeq 0.02$ corresponde a $\lambda \simeq 50$. No gráfico (4.2), vemos que essa escala entra no raio de Hubble em $a \simeq 4 \times 10^{-4}$, justamente o momento de igualdade

entre matéria e radiação.

Uma escala que entra no raio de Hubble em $a \ll a_{eq}$ sofre supressão pois o universo é dominado por radiação. A medida que o tempo passa, o universo caminha para o domínio da matéria e a supressão diminui, ou seja, na era da radiação, as escalas que entram no horizonte mais tarde crescem mais do que as que entram antes e o espectro é uma função crescente de λ .

Quando chegamos ao domínio da matéria o crescimento passa de logarítmico para linear e as perturbações crescem mais rapidamente. Como não existe o efeito de supressão da radiação, uma escala que entra no raio de Hubble neste período começa a crescer “livremente” e quanto mais cedo a escala entrar no raio de Hubble, maior será o contraste de densidade hoje. Por isso, escalas maiores, que entraram mais tarde em contato causal, ainda não tiveram muito tempo para evoluir e o espectro é uma função decrescente de λ .

Outra escala importante que devemos considerar é a escala abaixo da qual não podemos mais fazer um tratamento linear de perturbações. Como mencionamos, escalas menores estão associadas a amplitudes, ou contrastes, maiores. A teoria de perturbações lineares só pode ser aplicada quando $\delta < 1$, que corresponde a uma escala $k \simeq 0.2hMpc^{-1}$.**

Capítulo 5

Efeitos da conversão $\Omega_m \rightarrow \Omega_r$

Agora que já temos uma noção sobre como se comportam as perturbações da matéria em diferentes épocas do universo, vamos avaliar que consequências trazem a conversão de parte da matéria escura em matéria relativística.

Voltemos ao modelo de conversão de matéria bariônica em neutrinos, a eq. 2.24 desta vez integrada desde $z = 20$, quando começa a conversão, até um z qualquer:

$$\rho_\nu = cte \int_z^{z=20} \frac{e^{3.4z}}{(1+z)(e^{3.8z} + 45)} \frac{dz}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^5 + \Omega_r(1+z)^6}} \quad (5.1)$$

Vemos que ela descreve a forma como ocorre o acréscimo de matéria relativística na cosmologia em função do desvio para o vermelho.

Consideramos que o modelo de conversão para matéria escura relativística (ρ_{mer}) é um múltiplo do modelo para neutrinos, ou seja, só diferem de uma constante de proporcionalidade.

$$\rho_{mer} = cte \rho_\nu \quad (5.2)$$

De outra forma

$$\Omega_{mer} = cte \Omega_\nu \quad (5.3)$$

pois $\Omega_i = \rho_i / \rho_{cr}$.

O valor total da conversão para neutrinos de supernovas é de $\Omega_\nu = 3.3 \times 10^{-6}$. Os efeitos dessa conversão na evolução de δ e Φ são insignificantes e não provocam mudanças visíveis nos gráficos (3.2) e (3.1).

Estabeleceremos um limite para a conversão total de matéria escura Ω_{mer} e, portanto, a constante de proporcionalidade entre os dois modelos. Antes disso, vejamos os efeitos de diversos valores de conversão de matéria escura em matéria escura relativística Ω_{mer} sobre a perturbação de densidade δ e o potencial newtoniano Φ através dos gráficos.

Plotamos gráficos para vários valores de densidade de energia para o modo $k = 2hMpc^{-1}$.

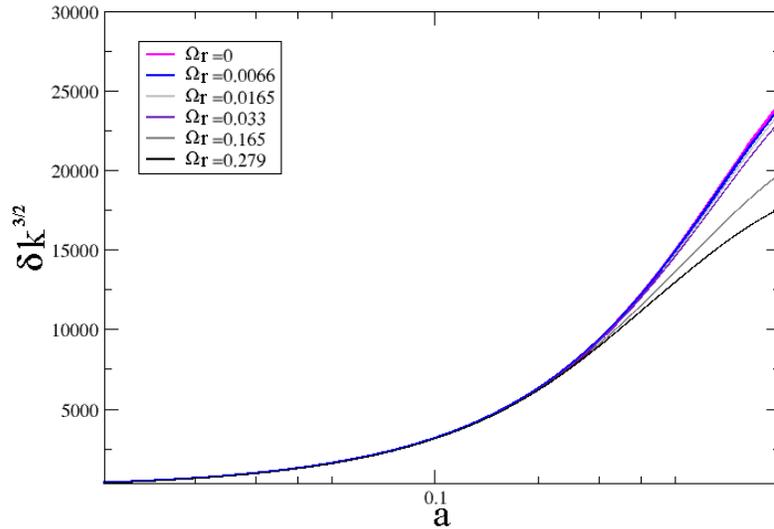


Figura 5.1: δ com conversão de vários valores de densidade de energia

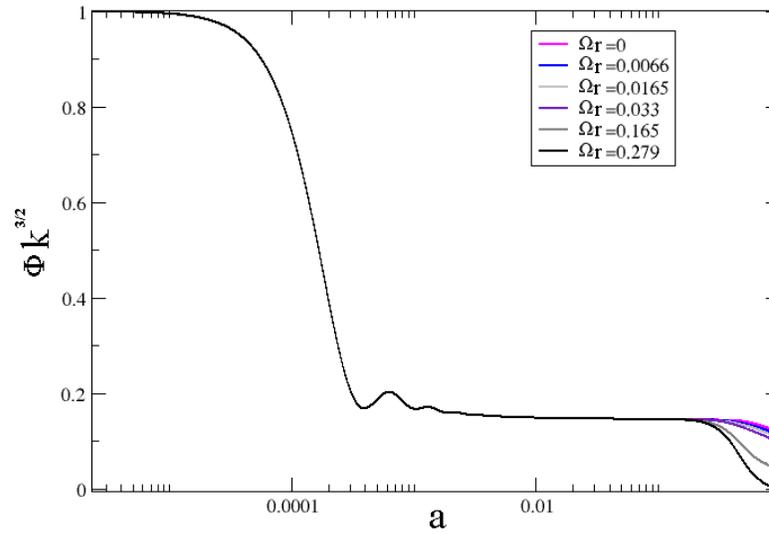


Figura 5.2: Φ com conversão de vários valores de densidade de energia

Os desvios em relação aos gráficos sem conversão aparecem em $a \simeq 0.047$, que corresponde a $z \simeq 20$, justamente onde começam os efeitos do nosso modelo (veja gráfico (1.1)).

Vejamos também como se comportam diferentes escalas para uma conversão máxima de $\Omega_r = 0.04$, 14% de matéria escura convertida..

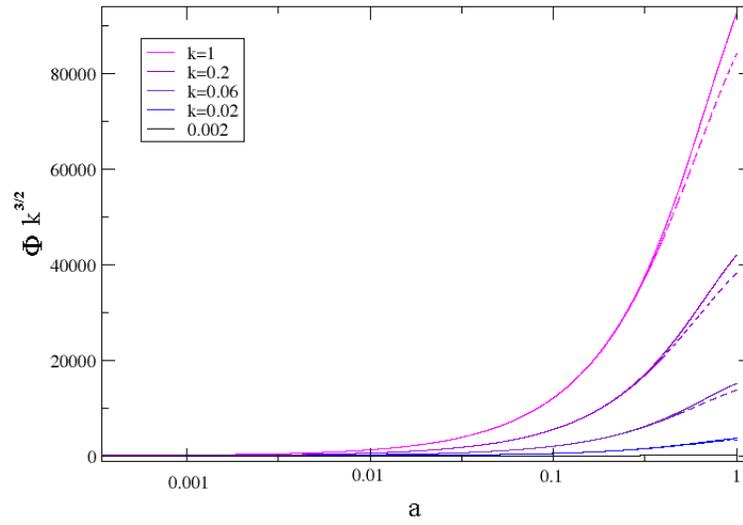


Figura 5.3: δ de varias escalas para mesma densidade de energia

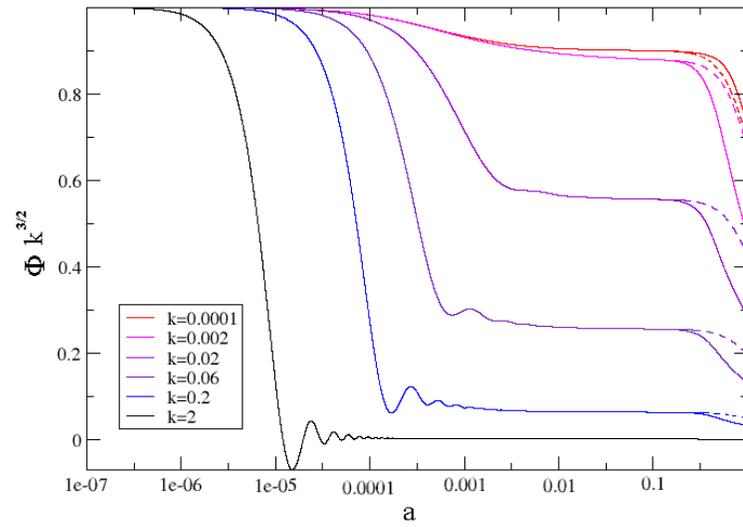


Figura 5.4: Φ de varias escalas para mesma densidade de energia

Os efeitos ficam mais evidentes quando plotamos as curvas das supressões, definidas como

$$S_\delta = \frac{\delta_0 - \delta_r}{\delta_0} \quad (5.4)$$

$$S_\Phi = \frac{\Phi_0 - \Phi_r}{\Phi_0} \quad (5.5)$$

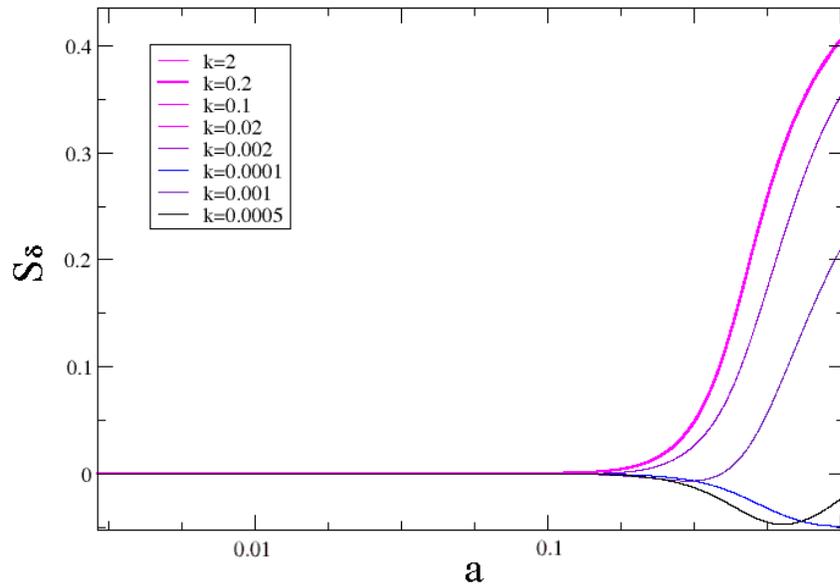


Figura 5.5: Supressão S_δ para várias escalas

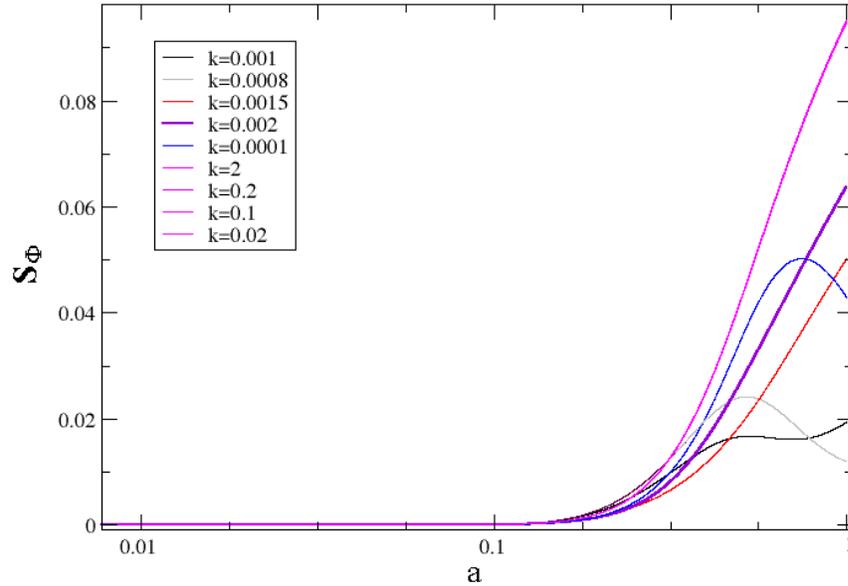


Figura 5.6: Supressões S_Φ para várias escalas

Os gráficos evidenciam que a supressão em uma escala nem sempre diminui para escalas menores. Note também que a supressão para escala maiores que $k = 0.01hMpc^{-1}$ é mesma para a escala de visualização do gráfico. Já para escalas menores que essa a supressão varia com o tempo e de forma diferente para cada modo.

A conversão se inicia em $a \simeq 0.047$, observe no gráfico 4.2 que a escala "entra" no horizonte neste momento (o valor corresponde ao raio de Hubble comóvel) tem tamanho $\lambda \simeq 650h^{-1}Mpc$. como $k = 2\pi/\lambda$, isso é aproximadamente $0.01hMpc^{-1}$. Todas as escalas menores que essa, portanto maiores k , já entraram no horizonte antes do início da conversão. E vemos que as escalas maiores, menores k , são afetadas de maneira menos "linear", pois começam a entrar no horizonte quando já existe a transformação de parte do conteúdo de material em matéria relativística de acordo com o modelo.

5.1 Limites para a conversão

Como muitos modelos para matéria escura “quente” consideram que ela é composta por neutrinos massivos, vamos limitar o máximo de conversão do nosso modelo baseados nos limites impostos pela massa do neutrino.

Através do software CAMB [6], plotamos a curva para o espectro de potência da matéria em $a = 1$, considerando os limites de massa gerados pelo WMAP 5 [2] $\Sigma m_\nu < 0.67 eV$ (95% CL).

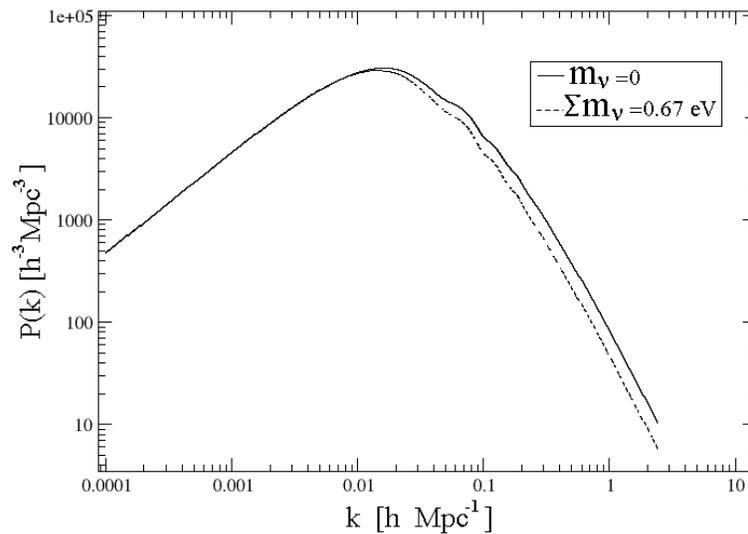


Figura 5.7: camb com e sem neutrinos

O software CAMB gera um espectro de potência que considera matéria bariônica além de matéria escura. Devido ao acoplamento entre bárions e fótons até o período de desacoplamento, o espectro de potência mostra uma supressão ainda maior para pequenas escalas e também o efeito de oscilação acústica bariônica.

Notamos que a introdução de neutrinos provoca uma supressão do espectro em

pequenas escalas. Os neutrinos massivos se movem a velocidades muito altas e podem escapar das regiões de alta densidade levando a potência de perturbações em escalas menores que a escala de *free-streaming*.

Como não consideramos os bárions no nosso espectro de potência ele será diferente do espectro gerado pelo CAMB. Assim, para avaliarmos os resultados da conversão de matéria escura não-relativística em relativística, compararemos os gráficos das *diferenças* provocadas pela introdução de

- i) matéria escura relativística no nosso espectro de potência
- ii) neutrinos massivos de $\Sigma m_\nu < 0.67 \text{ eV}$ no espectro de potência do CAMB.

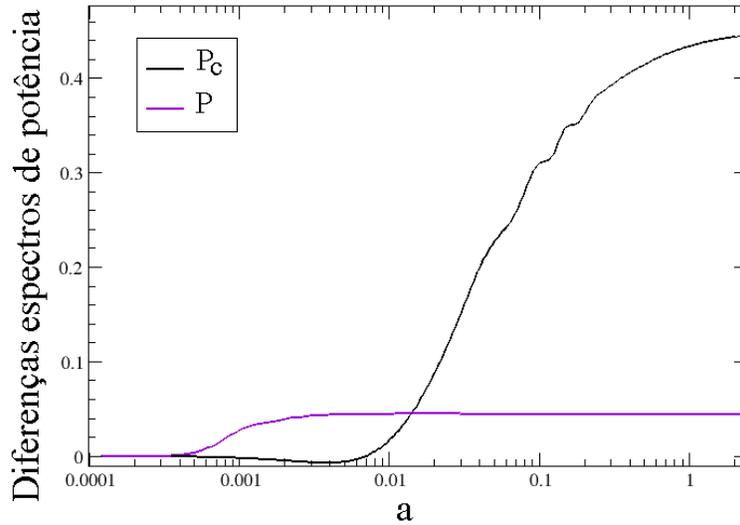


Figura 5.8: A curva $P = \frac{P_0 - P_r}{P_0}$ representa a diferença entre o espectro de potência sem (P_0) e com (P_r) conversão de matéria escura fria em relativística. Estamos comparando P com a curva $P_C = \frac{P_{C_0} - P_{C\nu}}{P_0}$ da diferença entre o espectro gerado pelo CAMB sem (P_{C_0}) e com ($P_{C\nu}$) neutrinos massivos.

Queremos comparar os nossos resultados com a supressão gerada pelo CAMB em escalas para as quais existem dados experimentais. Peacock & Dodds (1993) [35]

fizeram um tratamento de resultados experimentais gerando valores do espectro de potência para $k[0.014, 0.447] hMpc^{-1}$.

Estabelecemos o limite da conversão comparando as curvas P e P_C fixando o valor máximo de conversão como sendo o que gera a maior supressão possível *abaixo* da gerada por neutrinos massivos em $k = 0.014$. Consideramos a maior escala possível, visto que as observações são melhores e mais condizentes com a teoria para maiores escalas.

O valor que maximiza a supressão dentro dos limites estabelecidos é de $1180 \times \Omega_\nu$, uma densidade de energia de $\Omega = 0.0039$, ou seja, 1.4% da matéria escura é convertida em matéria relativística.

Capítulo 6

Discussão dos resultados e perspectivas

Nessa dissertação construímos um modelo de conversão de matéria-escura em matéria relativística que tem um perfil semelhante ao de conversão de matéria bariônica. Para isso avaliamos primeiro o caso bariônico e construímos um modelo dependente do tempo de geração de neutrinos relativísticos por supernovas. As limitações do modelos se devem principalmente a Função de Massa Inicial e ao fato de que ela deveria ser a mesma em qualquer momento, ou lugar do universo, para inferirmos uma taxa de supernovas diretamente de uma taxa de formação de estrelas.

Fizemos um estudo da formação de estruturas e avaliamos como a disputa entre os efeitos opostos da matéria não-relativística e relativística determina a evolução das perturbações em cada escala. Argumentamos que as grandes escalas não são afetadas pelas não-linearidades das escalas menores por conservação de momento interna das estruturas não-lineares e que por isso os modos evoluem independentemente.

Devido a muitas controvérsias relacionadas ao que define o contato causal entre duas regiões do universo fizemos uma comparação entre o horizonte comóvel e o raio de Hubble. Apesar de ambos terem valores muito próximos nos períodos que estudamos,

consideramos que o raio de Hubble é a distância a ser considerada visto que no contexto de contato entre galáxias o correto é avaliar medidas locais.

Apresentamos o espectro de potência e mostramos que ele fornece informações sobre as inomogeneidades da matéria em função das escalas. Mostramos também que o espectro de potência é linear mesmo quando existem aglomerações muito grandes de matéria, concordando com o argumento sobre a evolução independente dos modos.

Aplicamos o nosso modelo de conversão e limitamos a supressão que ele poderia causar no espectro de potência. O efeito deveria ser menor que a supressão causada pela inclusão de massa no neutrino. Obtivemos um limite superior de 1.4% da matéria escura sendo convertida. Como sabemos que a supressão do espectro de potência em pequenas escalas não deve ser muito grande, o pequeno valor encontrado não parece incompatível com os cenários sugeridos pelas observações.

A formação de estruturas no modelo padrão cosmológico considerando toda matéria escura como sendo não-relativística prevê uma densidade muito alta no núcleo de halos (chamado problema de *cuspy core*), tal perfil de densidade é desfavorecido pelas observações. Uma possibilidade é avaliar a aplicação do nosso modelo nesses casos e, em analogia com modelos de aniquilamento de matéria escura, avaliar a seção de choque que poderíamos obter para partículas de matéria escura.

Apêndice A

Horizonte e Raio de Hubble

Para compreendermos o que significa contato causal entre certas regiões do universo, precisamos diferenciar conceitos muito semelhantes que geram muita confusão sobre seu significado físico.

Uma das primeiras questões que aparecem quando estudamos cosmologias é: Quanto do universo pode ser observado em um evento P? No caso de um modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker podemos perguntar quais observadores isotrópicos (por exemplo, uma galáxia) poderiam enviar um sinal que alcançaria um outro observador isotrópico no evento P.

O limite entre as linhas de mundo que podem e não podem ser vistas em P é chamado de horizonte da partícula em P. É de se esperar que, se o tamanho do universo se aproxima de zero próximo do Big Bang, todos os observadores isotrópicos puderam se comunicar neste momento. Veremos que isso não ocorre para um modelo tipo FRW.

Considere a métrica do modelo em questão para o caso de um universo plano:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{A.1})$$

Fazendo a seguinte transformação de coordenadas $t \rightarrow \eta$

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (\text{A.2})$$

Podemos reescrever a equação (A.1) como

$$ds^2 = a(t)^2(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{A.3})$$

Compare (A.3) com a métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.4})$$

Vemos que (A.1) é um múltiplo da métrica plana de Minkowski. A transformação $t \rightarrow \eta$ é dita uma transformação *conforme* e chamamos η de *tempo conforme*. A métrica definida por (A.3) é chamada métrica conformalmente plana. E um vetor será tipo tempo, nulo, ou espaço em (A.3) se e somente se tiver a mesma propriedade em (A.4).

Só é possível enviar um sinal entre dois eventos se eles estão unidos por uma curva tipo tempo ou tipo luz (nulo). Portanto, um observador em um evento P receberá informação de todos os outros observadores isotrópicos se e somente se a integral (A.2) divergir quando nos aproximamos da singularidade $t \rightarrow 0$ no big bang, não havendo um horizonte. No domínio da radiação, $a \propto t^{1/2}$ e no domínio da matéria $a \propto t^{2/3}$ e a integral converge para ambos os casos definindo um horizonte.

O tempo conforme η , também chamado de horizonte comóvel, delimita as distâncias máximas que podem ter interagido, mas não diz nada sobre que regiões podem interagir de maneira *significativa*.

Considere uma situação em que a geometria do espaço-tempo é muito próxima de homogênea e isotrópica espacialmente. Quais são os limites causais realmente relevantes para seu conteúdo de matéria? Se a matéria contida for um fluido perfeito, podemos usar a velocidade do som para estimar esse limite.

$$v_s = c^2 dp/d\mu \quad (\text{A.5})$$

Em tempos recentes, $v_s = 0$, enquanto em tempos remotos (i.e. no domínio da radiação) $v_s = c/\sqrt{3}$. Durante o período inflacionário o significado dessa quantidade é

incerto, pois $dp/d\mu = -1$. Devemos ter muito cuidado ao considerar a causalidade de influências sobre a matéria. A velocidade de transmissão de informação está sujeita às condições do “ambiente“ considerado ¹ e, muitas vezes, é menor do que a velocidade da luz.

No período inflacionário, é importante levar em conta que as equações de matéria podem introduzir limitações causais relacionadas a velocidade do som, mas (ao menos no caso linear) isso não é resultado de uma ação gravitacional. Este tipo de efeito gravitacional tem como características, não linhas de mundo nulas, mas linhas de mundo de matéria. Limites causais impostos pela velocidade da luz são irrelevantes.

Isso parece estranho. Mas o ponto é que os modos da perturbação que viajam a velocidade da luz são os modos de ondas gravitacionais que (em teoria linear) estão desacoplados das perturbações de matéria. Regiões distantes poderiam interferir com condições locais por meio de radiação gravitacional intensa, mas na maior parte dos casos Robertson-Walker considerados, isso não acontece. É por isso que as condições locais são basicamente determinadas pelo que acontece bem próximo da linha de mundo do passado do evento considerado e não por condições de cones de luz distantes. Esta é a mesma razão pela qual podemos fazer previsões sobre o futuro como onde a lua estará amanhã. Como só podemos observar o nosso cone de luz do passado, em princípio, não poderíamos obter os dados para fazer esta previsão. Mas na prática podemos, pois regiões distantes em um universo quase-FLRW não interferem com as previsões que fazemos através dos dados que estão disponíveis. Fazemos previsões em direções tipo tempo e não tipo luz ([36] e referências deste).

Um dos grandes enganos cometidos quando se pretende estabelecer um limite para distâncias que permitem comunicação entre eventos no universo envolve o raio de Hubble. A lei de Hubble diz que dois objetos a uma distância d se afastam com

¹Veja alguns exemplos de situações em que devem ser consideradas diferentes velocidades de transmissão de informação e mais detalhes sobre causalidade física em Horizons in inflationary universes, G.F.R. Ellis & W. Stoeger [36]

velocidade $v = Hd = \frac{\dot{a}}{a}d$. Então, se $H > 1$, os objetos se afastariam a uma velocidade supraluminal (violando a relatividade especial) e não poderiam se comunicar. Isso é esclarecido se considerarmos que as medidas de velocidade são realizadas por observadores *locais* em um mesmo evento no espaço-tempo. Não é possível definir uma velocidade *global* entre dois objetos muito distantes. Portanto, mesmo galáxias que se afastam com $v > 1$, eventualmente entram em contato causal [37].

É comum encontrarmos referências ao raio de Hubble como sendo o alcance efetivo de contato causal no estudo de formação de galáxias. De acordo com Bardeen [36], as equações de perturbação são governadas por termos $k^{-1}H$. Então, se $k^{-1}H > 1$, as perturbações são maiores que o raio de Hubble e crescem mais devagar do que as que são menores do que o raio de Hubble. Bradenberger [36] diz que o raio de Hubble é a distância máxima na qual processos físicos podem agir coerentemente, e para distâncias maiores que H^{-1} , o tempo que a luz demora para viajar excede o tempo característico de expansão cosmológica. Mas nenhum desses argumentos realmente justifica uma relação entre o raio de Hubble e causalidade local.

Vamos tentar encontrar limites causais *locais* na métrica Robertson-Walker. Considere um efeito físico que começa em um tempo t_i . Devido as limitações impostas pela velocidade finita de propagação de informação, em um tempo $t_f = t_i + \Delta t$, o efeito físico poderá ser sentido por partículas com valores de coordenadas comóveis a uma distância máxima igual a Δu dado pela equação (A.2).

$$\Delta u \equiv r_f - r_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \quad (\text{A.6})$$

O resultado para o período da radiação:

$$\int \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^2 H} = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G \Omega_r}{3}}} \quad (\text{A.7})$$

Pois a densidade de energia da radiação domina e H é dado por

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\Omega_r}{3a^4}} \quad (\text{A.8})$$

Resulta que

$$\Delta u_r = \frac{1}{a_f H} \left(1 - \frac{a_i}{a_f} \right) \quad (\text{A.9})$$

No período da matéria, muda o parâmetro de Hubble, dominado por Ω_m .

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\Omega_m}{3a^3}} \quad (\text{A.10})$$

O resultado semelhante é dado por

$$\Delta u_m = \frac{2}{a_f H} \left(1 - \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Os resultados mostram que as distâncias envolvidas dependem do valor instantâneo do raio de Hubble, realmente um valor *local*. Mas os outros fatores contribuem claramente de forma não local.

Apêndice B

Linearidade do Espectro de Potência

Para vermos que podemos usar teoria de perturbações lineares mesmo quando o acúmulo de matéria é fortemente não-linear em pequenas escalas, supomos que a distribuição de massas é representada por uma coleção de partículas de massa m_j em posições \mathbf{x}_j . As amplitudes de Fourier para a distribuição de massa serão

$$\delta(\mathbf{k}) \propto \Sigma_j m_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j}$$

Considerando o comprimento de onda λ do modo \mathbf{k} maior que tamanho da região de acúmulo não-linear. As interações não-lineares movem as partículas distâncias $\Delta\mathbf{x}_j \lesssim \lambda$. Podemos considerar este efeito em $\delta_{\mathbf{k}}$:

$$\delta(\mathbf{k}) \propto \Sigma_j m_j [e^{i\mathbf{k}\cdot(\Delta\mathbf{x}_j+\mathbf{x}_j)} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j}] \quad (\text{B.2})$$

Expandindo as exponenciais temos

$$\delta(\mathbf{k}) \propto \Sigma_j m_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j} [ik\cdot\Delta\mathbf{x}_j - (k\cdot\Delta\mathbf{x}_j)^2/2 + \dots] \quad (\text{B.3})$$

Como as interações conservam momento em relação ao centro de massa, todos os termos $m_j \Delta x_j$ se cancelam. E a contribuição dos deslocamento ao espectro de potência serão no máximo de ordem $(k\lambda)^4$, visto que $P(k) = \delta_k^2$. Então se o espectro de potência se aproxima do zero menos rapidamente que $P \propto k^4$, os termos lineares dominam a evolução de $\delta_k(t)$ e podemos fazer o tratamento conforme teoria de perturbações lineares.

Referências Bibliográficas

- [1] P.J.E. Peebles, Principles of Physical Cosmology, Princeton Un. Press, 1993.
- [2] E. Komatsu et al. , 2009, ApJS, 180, 330-376.
- [3] Land K., Magueijo J., 2005b, Phys. Rev. Lett., 95, 071301.
- [4] V.F. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge Un. Press, 2005.
- [5] A.R.Liddle & D.H.Lyth, Phys.Rept. 231 (1993) 1-105.
- [6] Disponível em '<http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tbcambform.cfm>'
- [7] C. F. McKee and E. C. Ostriker, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 45 (2007) , 565.
- [8] Kahn, F. D., Astron. Astrophys., 37 (1974) 149.
- [9] Belczynski, K. et al, Astrophys. J. 629 (2005), 915.
- [10] T. Dahlen et al., Astrophys. J. 613 (2004) 189.
- [11] P. Madau et al , 297 Mon.Not.Roy.Astron.Soc.(1998), L17.
- [12] A. Burrows, Astrophys. J. 334 (1988) 891.
- [13] Lattimer, J. H. Prakash, M. Science 304 (2004) 536.
- [14] Kotake, K. et al, Rept. Prog. Phys. 69 (2006) 971.

- [15] Madau, P., Pozzetti, L., Dickinson, M. 1998, ApJ, 498, 106.
- [16] Porciani, C., and P. Madau, Astrophys. J. 548 (2001) 522.
- [17] S. Ando, J.F. Beacom, H. Yuksel, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 171101.
- [18] C. Lunardini, Astropart. Phys. 26 (2006) 190.
- [19] S. Ando, K. Sato, New J. Phys. 6 (2004) 170.
- [20] Salpeter, E. E., Astrophys. J. 121 (1954) 161.
- [21] Gould, A. et al, Astrophys. J. 465 (1996), 759.
- [22] Madau, P., & Pozzetti, L. Mon.Not.Roy.Astron.Soc., 312 (2000) L9
- [23] Dickinson, M. et. al, Astrophys. J., 587:25-40, 2003.
- [24] Springel,V. & Hernquist, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 339 (2003a) 289.
- [25] Springel,V. & Hernquist, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 339 (2003b) 312.
- [26] M. Fukugita, C.J. Hogan, & P.J.E. Peebles,1998, Astrophys. J. 503,518.
- [27] P.J.E.Peebles, The Large Scale Structure of the Universe, Princeton Un. Press, 1980.
- [28] Ma, C. & Bertschinger, E. , Astrophys. J. 455 (1995) 7-25.
- [29] R. Durrer, Fund. Cosmic Phys. **15** (1994) 209.
- [30] Dodelson, S., Modern Cosmology, Academic Press, 2003.
- [31] T. Padmanabhan, Structure formation in the universe, Cambridge Un. Press, 1993.
- [32] A.R.Liddle & D.H.Lyth, Cosmological Infaltion and Large Scale Structure, Cambridge Un. Press, 2000.

- [33] W. Hu & N. Sugiyama, *Astrophys. J.* 471, 542 (1996).
- [34] J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999.
- [35] Peacock, J.A.& Dodds, S.J. ,*Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 267 (1994) 1020-1034.
- [36] G.F.R. Ellis, W. Stoeger, *Class. Quantum Grav.* 5 (1988) 207-220
- [37] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago Un. Press, 1984.