

UMA ANÁLISE FÍSICO-MATEMÁTICA
DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

RODOLFO LAGOS MONACO

ORIENTADOR : GUILLERMO CABRERA OYARZUN

Trabalho apresentado ao Instituto de Física
"Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de
Campinas para a obtenção do grau de Doutor
em Ciências

*Este exemplar corresponde à redação
final da Tese defendida pelo aluno
Sr. Rodolfo Eusebio Lagos Mónaco,
e aprovado pela Comissão julgadora*

10 de dezembro de 1992

Setembro 1992

Guillermo Cabrera

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Guillermo Cabrera pela sua orientação e apoio .

Ao Prof. Roberto Lagos pelos seus valiosos conselhos .

Ao :

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
(CNPq).

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

A Coordenação de pós-graduação do Instituto de Física
da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Pelo suporte financeiro concedido para a realização deste
trabalho.

A todos os funcionários do IFGW que de uma forma ou de outra
contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos que me fizeram acreditar na nobreza da alma
humana.

A

RAUL LAGOS LEYTON

e

AURORA MONACO MONACO

MEUS QUERIDOS PAIS

e

HELENA CAMARAO TELLES RIBEIRO

MINHA AMADA ESPOSA

RESUMO

Este trabalho analisa uma nova teoria de Potencial Quântico, a qual preserva a noção de trajetórias. Foram calculadas, explicitamente, as previsões desta nova formulação para diversas experiências chaves da Mecânica Quântica, onde foram obtidas boas concordâncias teórico-experimental. Foi também deduzida, neste trabalho, uma nova representação integral como solução da equação de Schrödinger unidimensional .

ABSTRACT

We present a novel Quantum Potential Theory, preserving the trajectory's concept. We compute our theory's predictions for several key Quantum Mechanical experiments and obtain good agreement with the latter. Also we formulate a new Integral representation for the one dimensional Schrödinger equation

INDICE

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I	
(1.1) INTRODUÇÃO.....	8
(1.2) KERNEL SEMI-CLÁSSICO.....	9
(1.3) EXPANSÃO EM ORDENS SUPERIORES.....	12
(1.4) MEDIDAS DE WIENER.....	19
(1.5) DISCUSSÃO.....	22
CAPÍTULO II	
(2.1) INTRODUÇÃO.....	24
(2.2) O PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA REVISITADO.....	26
(2.3) TEORIA DA MEDIDA.....	28
(2.4) TEORIA DO POTENCIAL QUANTICO.....	32
(2.5) UM NOVO POTENCIAL QUANTICO	40
(2.6) EXPERIÊNCIA DAS DUAS FENDAS.....	44
(2.7) COMENTÁRIOS.....	52
CAPÍTULO III	
(3.1) EFEITO AHARONOV-BOHM.....	53
(3.2) SCATTERING.....	57

(3.3) ESTADOS NÃO ESTACIONÁRIOS.....	61
(3.4) OSCILADOR HARMÔNICO.....	65
(3.5) ESTATÍSTICAS E MUITOS CORPOS.....	67
(3.6) SPIN 1/2.....	69
(3.7) ÁTOMO DE HIDROGÊNIO.....	72
(3.8) DESIGUALDADES DE BELL.....	76
(3.9) EXPERIÊNCIA CHAVE.....	83

CAPÍTULO IV

(4.1) INTRODUÇÃO.....	86
(4.2) SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM LINEAR...	89
(4.3) COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO CONSTRUTIVO.....	91

INTRODUÇÃO

O formalismo da Mecânica Quântica tem mostrado um grande poder de previsibilidade e uma notável autoconsistência. Porém, apesar dos grandes refinamentos realizados nesta última metade do século, a sua interpretação ainda permanece em discussão. Uma das razões principais destas controvérsias se deve à interpretação usual adotada em Copenhagen por diferentes físicos, a qual transcende a noção de trajetórias, e pressupõe estados estendidos de probabilidade capazes de uma autointeração. Esta concepção tem se mostrado eficaz para uma descrição estatística da dinâmica das partículas. No entanto, estas amplitudes de probabilidade podem se encontrar arbitrariamente estendidas no espaço, como por exemplo, nos casos de scattering; o que parece implicar um colapso "instantâneo" a um estado de partícula no transcurso de sua observação.

Esta questão incomodou a diferentes físicos como : de Broglie, Schrödinger, Ehrenfest, e sem dúvida ao próprio Einstein, dado que este tipo de fenômeno parece estar em conflito com os princípios locais da relatividade. Este fato, certamente não impediu o surgimento da teoria Quântica Relativista. O teorema de Gödel⁽¹⁾ (1931), que demonstra que todos os sistemas axiomáticos formais apresentam proposições indecidíveis, pareceu conceder um apoio lógico à nova corrente filosófica que propunha um princípio de complementaridade. Todavia, este teorema Metamatemático pode ser entendido de uma maneira similar aos resultados de

Turing⁽²⁾ (1936), que prevê que certos algoritmos não podem ser efetuados num tempo finito. Deste ponto de vista, podemos esperar um maior questionamento dos privilégios da nova lógica Quântica sugerida pela interpretação usual. Alguns paradoxos gerados pela interação dos princípios Clássicos e Quânticos, estão ainda em aberto, como, por exemplo, "O paradoxo do gato de Schrödinger".

O principal objetivo deste trabalho é de tentar elucidar o carácter Físico e Matemático da função de onda. A ausência de outras Teorias Quânticas que possam ser competitivas com a interpretação usual, num plano experimental, tem gerado polémicas de índole semântica, visto o carácter probabilístico de quase todas as interpretações. Desta forma, seria necessário também ter uma solução geral da equação de Schrödinger, suscetível de ser estudada analiticamente. Formulações como as integrais das trajetórias de Feynman se apresentam consistentes com a interpretação usual, prometendo assim uma solução Matemática aos paradoxos suscitados.

O primeiro capítulo é dedicado ao estudo da formulação de Feynman. Demonstramos que a representação integral de Feynman num contexto de trajetórias contínuas e diferenciáveis não apresenta uma validade geral, como solução da equação de Schrödinger. Devemos assinalar que o próprio Feynman manteve reservas com sua formulação original, a qual encontrou um prolongamento numa outra interpretação de índole estocástica formulada por Nelson. A formulação estocástica demonstra a conjectura de Feynman, porém, num contexto de integrais com medidas

de Wiener, onde se conjectura um movimento das partículas de tipo Browniano, mas com um coeficiente de difusão imaginário. A difícil manipulação Matemática destas integrais e sua duvidosa interpretação em termos clássicos, nos dá lugar à procurar uma outra interpretação Físico-Matemática da função da onda Quântica.

No capítulo dois, expomos algumas das principais problemáticas da Teoria Quântica. De Broglie⁽³⁾ as tentou solucionar através de uma Teoria de Potencial Quântico (1926), contudo, foram encontradas algumas inconsistências nesta formulação. Em 1952, Bohm⁽⁴⁾ a reexamina e soluciona parcialmente algumas destas inconsistências, optando por um princípio sincrônico numa teoria de variáveis escondidas, mas esta nova interpretação não apresenta grandes possibilidades de verificação experimental. Este fato nos motivou à postular uma nova Teoria de Potencial Quântico, para estados estacionários de energia, a qual é deduzida num quadro variacional. Esta nova formulação apresenta num nível espectroscópico, uma perfeita concordância com a interpretação usual, como acontece também na Teoria de De Broglie e Bohm. As diferenças desta nova teoria Quântica com respeito à usual, se dá em dois níveis: conceitual e dinâmico.

Num nível conceitual, esta nova formulação preserva a noção de trajetórias, e não pressupõe princípios não-locais (nos estados estacionários). Assim postulamos um Lagrangeano de uma partícula que é perturbada por uma flutuação particular, que é considerada como sendo de um campo de índole Quântico. As condições de extremo do Lagrangeano com respeito as variáveis do campo Quântico, junto com as condições de normalização, fornecem os

valores iniciais de energia, do sistema Clássico-Quântico, os quais são iguais aos autovalores da equação de Schrödinger. Esta flutuação no Lagrangeano foi associada à um novo Potencial Quântico, que apresenta uma dependência com respeito as funções de onda de Schrödinger. Assim o aparente comportamento ondulatório das partículas pode ser atribuída à ação deste Potencial Quântico

Para analisar os aspectos dinâmicos é necessário estudar então as densidades de probabilidade de presença das partículas nas diversas regiões do espaço. Por conseguinte, foi analisada a experiência das duas fendas, onde comparamos as previsões teóricas desta nova formulação com as da interpretação usual. Dado a similitude dos resultados, encontramos uma situação delicada, onde pequenos efeitos de difração podem ser decisivos na escolha da previsão mais adequada.

No capítulo três estudamos o caso de scattering: próton-próton. Foram obtidos resultados encorajadores, na previsão das secções diferenciais de scattering. Porém, para colisões correspondentes a casos de grande aproximação entre as partículas, os resultados obtidos não foram totalmente satisfatórios, e isto se justifica pela forma assintótica da função de onda utilizada, assim também como pela não inclusão das forças nucleares.

Na seção seguinte, analisamos o oscilador harmônico no seu estado fundamental, onde se obteve um resultado intermediário entre a densidade de probabilidade Clássica e Quântica.

Para estados não estacionários assumimos a axiomática usual da Mecânica Quântica, e mostramos a viabilidade desta conjectura ao

generalizar nosso Lagrangeano, onde se pressupõe uma perda de continuidade no intervalo métrico. Uma análise detalhada nos indica que um tipo de tratamento estatístico não local (Born), parece também ser imprescindível nesta nova teoria. Uma das várias razões que nos levam a adotar estas hipóteses, é que as funções de onda Quânticas normalizáveis devem obedecer condições de contorno, que dificilmente poderiam ser adotadas por uma teoria puramente local (nos tempos de transição). Entretanto, o mais relevante é que os princípios clássicos podem ser utilizados sem ambiguidade nos estados estacionários, onde a métrica é bem definida. Assim as controvérsias são superadas não através de uma axiomática sincrética, mas por um dualismo no estrito sentido do termo.

Na secção seguinte generalizamos a nova teoria de Potencial Quântico para o caso de várias partículas. Isto nos permite reexaminar as estatísticas Quânticas segundo a concepção desta nova formulação. Posteriormente, introduzimos o spin $1/2$ nesta formulação Lagrangeana, onde são obtidas previsões similares as da teoria usual para os casos relativos a interferência Quânticas de nêutrons. A seguir, estudamos o átomo de hidrogénio no seu estado fundamental, sendo estes resultados coerentes com as experiências de Stern-Gerlach.

Um dos aspectos mais estudados atualmente no que concerne aos fundamentos da Teoria Quântica, são as implicações das desigualdades de Bell. Desta maneira, mostramos uma forma geométrica de compreendê-las para o caso de dois férmions de spin $1/2$ que se encontram num estado singlet. Postulamos um modelo Clássico que

permite a violação destas desigualdades sob certas condições iniciais. Em nossa formulação, estas condições seriam fixadas pela axiomática usual. Entretanto, segundo a nova concepção, estas deveriam ser sensíveis ao serem perturbadas pela presença dos detectores, fato que poderia provocar "anomalias" nas probabilidades de detecção das polarizações do spin. Assim, propomos modificar os campos eletro-magnéticos, nas regiões das condições iniciais (emissões) como um teste geral para as teorias de variáveis escondidas.

Por outro lado, retornamos a um tipo de experiência de duas fendas, na presença de um potencial vector. Constatamos assim, o efeito Aharonov e Bohm. No entanto, para intensidades de campos magnéticos dezenas de vezes mais intensos que os habitualmente utilizados neste tipo de experiência, uma deformação topológica em cada faixa de interferência deveria ser observada, segundo esta nova teoria. Diversas limitações técnicas, não tem propiciado o estudo experimental para estas intensidades do potencial vector. Tratando-se de um teste capital, sugerimos algumas idéias para sua possível execução experimental.

Na última seção do capítulo três, foi proposta uma experiência, que permitiria um teste experimental para outras grandes variedades de teorias de campo guia. Mostramos como este tipo de experiência pode ser utilizada para a obtenção de ondas quânticas vazias, o que representaria a prova definitiva de que a mecânica quântica ondulatória deve ser um tipo de formulação de campo guia ou onda piloto.

No último capítulo procuramos uma solução da equação de

Schrödinger. É fácil constatar que os manuais matemáticos não fornecem uma solução analítica compacta da equação de segunda ordem linear, que seria correspondente à equação de onda Quântica estacionária-unidimensional. Construimos então uma solução da equação de onda de uma partícula para um estado estacionário unidimensional, em termos de uma representação integral. Esta representação parece ser mais facilmente manipulável que as soluções propostas pela teoria estocástica e algumas de suas propriedades prometem uma boa operacionalidade. A sua aplicabilidade analítica depende da determinação de certas funções particulares, que satisfazem regras de recorrências bem definidas, e que possuem soluções gráficas (computacional) contínuas-regulares.

Este método tem sido testado computacionalmente com um êxito absoluto em uma grande variedade de potenciais (demonstrada através de um método construtivo). Esperamos então que este tipo de representação integral fechada e compacta, tenha uma rápida aplicação como um método analítico num futuro próximo.

Após meio-século de árduos debates sobre as diversas interpretações da Teoria Quântica, dificilmente podemos pretender finalizá-los definitivamente, contudo, esperamos através deste trabalho, contribuir moderadamente com novos critérios, que possam dar uma maior determinação físico-matemática da função de onda.

(1.1). INTRODUÇÃO.

Uma das mais célebres interpretações da Mecânica Quântica foi dada por R. Feynman⁽¹⁾, em termos de uma integral de trajetórias. O autor demonstra a viabilidade de sua conjectura, expandindo em série em termos do tempo a sua representação integral, e mostra que em primeira ordem esta é a solução da equação de Schrödinger.

Este capítulo versará sobre a inconsistência desta solução, se considerarmos ordens superiores de sua expansão em série em relação ao tempo.

Deve-se esclarecer, no entanto, que a moderna teoria de integrais de trajetórias dada por R. Feynman, está dada num contexto em medida de Wiener-Lebesgue⁽²⁾, a qual apresenta pouca aplicabilidade dada a grande complexidade algébrica desta medida.

Porém, ao que parece ainda não tem sido estabelecido se esta solução tem ou não validade num contexto de integrais do tipo Riemann. Fato que é da maior importância, visto que dela dependem questões como:

- Se existe ou não uma solução analítica fechada (em termos de poucas integrais) da equação de Schrödinger?
- E se a função de onda quântica é susceptível a ser interpretada genericamente como a superposição de todos os trajetos clássicos possíveis do sistema?

Desse modo, apresentamos a seguir a idéia original de

Feynman.:

(1.2). KERNEL SEMI-CLÁSSICO

Podemos expressar a função de onda quântica como solução de uma equação integral do tipo:

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) dx_1 \quad (2.1)$$

A conjectura de Feynman⁽¹⁾ consiste em supor que o KERNEL é igual a:

$$K(b, a) \simeq \exp\left[\frac{1}{\hbar} S(b, a)\right] \quad (2.2)$$

onde S corresponde a ação clássica do sistema descrito por um Lagrangiano L . Em primeira aproximação no tempo temos que para o caso de uma partícula de massa m submetida a um potencial V , a função de onda é :

$$\psi(x, t+\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \exp L\left(\frac{x-y}{\epsilon}, \frac{x+y}{2}\right) \psi(y, t) dy \quad (2.3)$$

com

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad ; \quad L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \quad (2.4)$$

Se considerarmos $y = x + \eta$ como uma variável arbitrária que passa por todas as posições, obtemos:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon} e^{-i\epsilon/\hbar \cdot V((x+\eta)/2, t)} \cdot \psi(x+\eta, t) d\eta \quad (2.5)$$

Expandindo em série de Taylor ambos os lados, temos :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon} \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x, t) \right] \\ &\cdot \left[\psi(x, t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] d\eta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Levando em consideração que:

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\epsilon} \cdot d\eta = \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Se obtém a constante de normalização $A = \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$. Desta forma

R.Feynman mostra que:

$$\psi + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\epsilon}{\hbar} V\psi - \frac{\hbar\epsilon}{2im} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

O que equivale a equação de Schrödinger se igualarmos os fatores que contém igual ε :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t) \psi \quad (2.9)$$

Que prova a consistência da representação integral com Kernel semi-clássico, como solução da equação de Schrödinger, em primeira ordem. Sabe-se que esta representação fornece resultados consistentes, no caso do oscilador harmônico simples, exemplo apresentado pelo próprio Feynman:

Posteriormente, foi demonstrado por Nelson que esta conjectura era absolutamente válida se considerarmos integrais na medida de Wiener-Lebesgue, todavia, não é esclarecido o que ocorre com a conjectura original, que está expressa em integrais de Riemann.

Assim se esta representação original fosse também adequada, podemos nos perguntar:

- Se os trajetos clássicos apresentam bifurcações ou instabilidades paramétricas, como estas devem ser tratadas?

E se considerarmos o princípio de incerteza, como seriam as possíveis distribuições dos pesos probabilísticos para os estados latentes?

Antes de tentar responder a estas questões, devemos verificar a validade ou não da representação integral com Kernel semi-clássico no contexto de integrais de Riemann.

(1.3). EXPANSÃO EM ORDENS SUPERIORES

Nesta seção estudaremos a consistência da solução oferecida por Feynman, testando-a em diferentes ordens de expansão em série no tempo.

Suponhamos que t_L é um tempo entre t_a, t_b , então a ação em alguma parte entre a e b pode ser descrita :

$$S[b,a] = S[b,c] + S[c,a] \quad (3.1)$$

Assim utilizaremos os mesmos argumentos apresentados na secção anterior, mas considerando ordens u no desenvolvimento em série; seja então:

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x) dt \quad (3.2)$$

pelo teorema do valor médio, sempre podemos encontrar um α_j , de tal forma que:

$$S(t_2, t_1) = \epsilon \sum_{j=1}^u \alpha_j L(\dot{x}(t_j), x(t_j)) \quad (3.3)$$

Antes de tentar responder a estas questões, devemos verificar a validade ou não da representação integral com Kernel semi-clássico no contexto de integrais de Riemann.

(1.3). EXPANSÃO EM ORDENS SUPERIORES

Nesta seção estudaremos a consistência da solução oferecida por Feynman, testando-a em diferentes ordens de expansão em série no tempo.

Suponhamos que t_L é um tempo entre t_a, t_b , então a ação em alguma parte entre a e b pode ser descrita :

$$S[b,a] = S[b,c] + S[c,a] \quad (3.1)$$

Assim utilizaremos os mesmos argumentos apresentados na seção anterior, mas considerando ordens u no desenvolvimento em série; seja então:

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x) dt \quad (3.2)$$

pelo teorema do valor médio, sempre podemos encontrar um α_j , de tal forma que:

$$S(t_2, t_1) = \epsilon \sum_{j=1}^u \alpha_j L(\dot{x}(t_j), x(t_j)) \quad (3.3)$$

Suponhamos que V independe do tempo, pertencendo a uma classe diferenciável, fazendo a mudança de variáveis $y = x + \eta$ tal que:

$$x(t_j) = x + B_j \eta \quad ; \quad x = x(t_1) \quad , \quad y = x(t_2) \quad (3.4)$$

Por outro lado:

$$x(\tau_j) = x(\tau_{j-1}) + \epsilon \dot{x}(\tau_j) \quad (3.5)$$

O que equivale:

$$\dot{x}(t_j) = \frac{B_j \eta}{\epsilon} \quad (3.6)$$

Que permite escrever:

$$S(t_2, t_1) = \epsilon \sum_{j=1}^u \alpha_j \left[\frac{B_j \eta}{\epsilon} \right]^2 - V(x + B_j \eta) \quad (3.7)$$

Propositalmente, temos definido B_j como arbitrários, sendo esta uma forma de possibilitar a introdução de uma função suave acompanhante que foi sugerida por R. Feynman para a obtenção de uma solução exata

De fato poderíamos ligar estes coeficientes se considerarmos a lei de conservação de energia, mas não o faremos em vista de generalizar ainda mais nossas conclusões finais.

Definiremos agora:

$$\lambda = \sum_{j=1}^u \alpha_j B_j^2 \quad , \quad R = - \frac{i m \lambda}{2 \hbar \epsilon} \quad , \quad i^2 = -1 \quad (3.8)$$

$$W = \sum_{j=1}^u \alpha_j V(x + B_j \eta) \quad (3.9)$$

Temos então:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-R\eta^2} e^{\frac{i\epsilon W}{\hbar}} \psi(x + \eta, t) d\eta \quad (3.10)$$

Introduzimos a nova notação :

$$\Delta r = A \cdot B^r \quad ; \quad \Delta_0 = 1 \quad (3.11)$$

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u) \quad , \quad B^r = (B_1^r, B_2^r, \dots, B_u^r) \quad (3.12)$$

Consideramos assim A e B^r como vetores em um espaço euclidiano em R^u , o que facilitará a compactação das expressões que surgiram do desenvolvimento em série, e é o que faremos a seguir :

De forma similar do realizado por Feynman , expandimos em série as expressões $\exp \frac{i\epsilon W(\eta)}{\hbar}$ e $\psi(x + \eta, t)$, que são multiplicadas entre si, e integradas junto ao fator $e^{-R\eta^2}$ com respeito a η como é indicado em (3.10), e os termos são agrupados nos fatores comuns aos potenciais de ϵ^n . Assim os termos obtidos tem a forma:

$$C_n \left[V^{(K_1)} \right]_{\epsilon_1} \left[V^{(K_2)} \right]_{\epsilon_2} \dots \left[V^{(K_s)} \right]_{\epsilon_s} \psi^{(K)} \quad (3.13)$$

$$V(K_i) = \frac{\partial^{(K_i)} V}{\partial X^{K_i}} \quad , \quad \psi^{(K)} = \frac{\partial^K \psi}{\partial X^K} \quad (3.14)$$

$$(2+K_1)\ell_1 + (2+K_2)\ell_2 + \dots + (2+K_s)\ell_s + K = 2n \quad (3.15)$$

Os coeficientes $C_n(K_1, \dots, K_s, \ell_1, \dots, \ell_s, K)$, originam-se dos valores da integral $\int e^{-R\eta^2} \eta^\alpha d\eta$, que são adicionados nas diversas combinações possíveis que forneçam igual potência em η ; realizando estas combinações obtemos que estes coeficientes c_n são do tipo:

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^\ell \left[\frac{\Delta_{K_1}}{k_1!}\right]^{\ell_1} \dots \left[\frac{\Delta_{K_s}}{k_s!}\right]^{\ell_s} \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_s!} \frac{J(d)}{K!} \quad (3.16)$$

com:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_s \quad , \quad J(d) = |(d-1)|! \left(\frac{i\hbar}{m\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \quad (3.17)$$

$$d = K_1\ell_1 + K_2\ell_2 + K_s\ell_s + K \quad (3.18)$$

Se desejarmos comprovar a equivalência da equação de Schrödinger com esta integral desenvolvida em série, em termos de ϵ , devemos compará-la com o desenvolvimento em série no tempo da própria função de onda que satisfaça a equação de Schrödinger. Aplicamos então o argumento chave desta demonstração:

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial X^2} + V(X)\right]^n \psi(X, t) \quad (3.19)$$

que substituímos na expressão:

$$\psi(X,t,\epsilon) = \psi(X,t) + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \dots \quad (3.20)$$

O que nos permite comparar os fatores entre as duas expressões de $\psi(X,t+\epsilon)$ para cada potência n de ϵ . As regras de comutação em (3.19) nos levam também a coeficientes da forma:

$$C'_n \left(v^{(K_1)} \right)^{\ell_1} \left(v^{(K_2)} \right)^{\ell_2} \dots v^{(K_s)} \ell_s \psi^{(K)} \quad . \quad (3.21)$$

Que são equivalentes aos da representação integral proposta por Feynman, exceto pelos fatores numéricos C'_n , o que facilita a comparação entre ambas expressões.

Estes novos coeficientes são de difícil compactação algébrica, mas podemos estabelecer através do princípio de indução, a relação de recorrência:

$$\begin{aligned} G'_n \left(\left(v^{(K_1)} \right)^{\ell_1} \left(v^{(K_2)} \right)^{\ell_2} \dots \left(v^{(K_s)} \right)^{\ell_s} \right) &= G'_{n-1} \left(v^{(K_1)} \ell_1 \dots v^{(K_s)} \ell_s \right) \\ &+ \binom{K + K_1}{K_1} G'_{n-1} \left(\left(v^{(K_1)} \right)^{\ell_1 - 1} \cdot \left(v^{(K_2)} \right)^{\ell_2} \dots \left(v^{(K_s)} \right)^{\ell_s} + \dots \right. \\ &\left. \left(v^{(K_s)} \right)^{\ell_s - 1} \cdot \left(v^{(K_1)} \right)^{\ell_1} \cdot \left(v^{(K_2)} \right)^{\ell_2} \dots \left(v^{(K_s)} \right)^{\ell_s} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\text{com:} \quad G'_n[1] = 1 \quad , \quad G'_1[V] = 1 \quad (3.23)$$

$$C'_n = a^{n-1} b^1 G'_n \quad : \quad a = i\hbar/2m \quad , \quad b = i/\hbar \quad (3.24)$$

O mais importante a ser notado, é que estes coeficientes C'_n, G'_n são diferentes por não satisfazerem as mesmas regras de recorrência, o que gera uma incompatibilidade entre ambas expressões.

Apresentamos a tabela que corresponde a segunda iteração da equação de Schrödinger, com a respectiva expressão relativa a segunda ordem em ϵ^2 da representação integral de Feynman.

Observamos que deve ser $\lambda = 1$, e $\lambda = \Delta_2$ que contradiz ambas as relações no termo $V^{(2)}\psi$, entretanto os demais coeficientes podem ser conciliados.

Então para um potencial do tipo $V = ax^2 + bx + c$, há uma diferença pouco significativa, pois esta pode apenas representar uma diferença em uma fase da função de onda. Temos então que os parâmetros ajustáveis nos coeficientes C'_n são os Δ_r , pois $\Delta_2 = \lambda$, ver (3.8), (3.12) e (3.16). O número destes parâmetros depende do número u (arbitrário) de subdivisões nos possíveis caminhos, ver (3.3). Porém as equações simultâneas que devem satisfazer estes Δ_r são não lineares, fato que acaba as sobredeterminando independentemente do número de intervalos u . Assim notamos a grande relevância de como foram compactadas estes parâmetros ajustáveis.

TABELA 1
Coefficientes da Equação de Schrödinger

Partição	Monômio	ℓ	$a^{2-\ell} b^{\ell}$	c_2	Coefficiente
4	$v^{(2)} \psi$	1	$\frac{1}{2m}$	1	$\frac{1}{2m}$
3+1	$v^{(1)} \psi^{(1)}$	1	$\frac{1}{2m}$	2	$\frac{1}{m}$
2+2	$v^2 \psi$	2	$-\frac{1}{\hbar^2}$	1	$-\frac{1}{\hbar^2}$
2+1+1	$v \cdot \psi^{(2)}$	1	$\frac{1}{2m}$	2	$\frac{1}{m}$
1+1+1+1	$\psi^{(4)}$	0	$-\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2$	1	$-\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2$

TABELA 2
Coefficientes da Integral de Feynman

Partição	Monômio	s	k_i	ℓ_i	k	ℓ	K	Coefficiente
4	$v^{(2)} \psi$	1	2	1	0	1	2	$\frac{\Delta_2}{m\lambda}$
3+1	$v^{(1)} \psi^{(1)}$	1	1	1	1	1	2	$\frac{2\Delta_1}{m\lambda}$
2+2	$v^2 \psi$	1	0	2	0	2	0	$-\frac{1}{\hbar^2}$
2+1+1	$v \cdot \psi^{(2)}$	1	0	1	2	1	2	$\frac{1}{m\lambda}$
1+1+1+1	$\psi^{(4)}$	0	0	0	4	0	4	$-\left(\frac{\hbar}{2m\lambda}\right)^2$

Lembremos que o número de coeficientes C_n ou C'_n corresponde ao número de partições⁽³⁾ $P(2n)$, dada uma iteração n segundo a relação (3.15). (ver tabela)

Quando o potencial é um polinômio de baixa ordem, ocorre que grande parte dos termos anulam-se devido aos fatores $V^{(K_1)}$ o que dispensa um grande número de equações nas ordens superiores. Assim, muitas possíveis incompatibilidades entre as diferentes ordens do desenvolvimento em série são eliminados, mas que num caso com V arbitrário, isto não ocorre.

Podemos ainda dar uma maior liberdade na expressão (3.5) fazendo $X(\tau_j) = X(\tau_{j-1}) + \epsilon \delta_j \dot{X}(\tau_j)$, o que não resolve a situação, devido a que só é aumentado em um o número de variáveis ajustáveis. Pois nesta situação $\Delta'_r = \sum_{j=1}^u \alpha_j \left(\frac{B_j}{\delta_j} \right)^r$ e $\lambda \neq \Delta'_r$, notamos que podemos determinar individualmente cada Δ_r calculando os termos que possuem $l_s = 0$, para $l_s \neq r$, ver (3.16) mas que são contraditórios com os outros coeficientes da equação de Schrödinger iterada. Por exemplo, as equações que só apresentam $(\Delta_r)^m$ como variáveis ajustáveis.

Desta forma mostramos o porquê esta representação integral apresenta bom resultado para o oscilador harmônico.

(1.4) MEDIDAS DE WIENER

Mostraremos superficialmente a moderna formulação estocástica⁽⁴⁾ das integrais de Feynman.

Se considerarmos um tipo de movimento browniano em uma dimensão, onde os avanços no espaço estão discretizados pela magnitude Δ e o tempo por ϵ , a probabilidade de se encontrar a partícula, entre $[a,b]$ no tempo t , se em $t = 0$, $x = 0$, estaria descrita por:

$$\int_a^b \rho(x,t) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -x^2/4Dt dx ; D = \frac{\Delta^2}{2\epsilon} = \text{Coef. Difusão}, \quad (4.1)$$

Se define então a expectativa $E_{x,t}$ de uma variável, Q que dependa dos caminhos como:

$$E_x(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \cdot \rho(x_1, t_1) \cdots \rho(x_{n-1}, t_{n-1}) Q(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (4.2)$$

Suponhamos uma solução W da equação de difusão da partícula, definida como:

$$W(x,t) = E_{x,t} [\exp(-\int u(x(\tau)) d\tau)] \quad (4.3)$$

Dado a linearidade da expectativa definida temos:

$$W(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} E_{x,t} [(\int u(x(\tau)) d\tau)^j] \quad (4.4)$$

Se soubermos que:

$$\left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^N = N! \int_0^{\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\tau_2} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-1} \cdot f(\tau_1) \cdot f(\tau_2) \cdot f(\tau_n) \quad (4.5)$$

É fácil mostrar que:

$$W(x, t) = W_0(x, t) - \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi W_0(x-\xi, t-\tau) U(\xi) W(\xi, \tau) \quad (4.6)$$

(com $W_0 = \rho$). Que é uma equação integral equivalente a:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - U(x) W(x, t) \quad (4.7)$$

Podemos então interpretar graficamente a solução como a integração produzida em todos os trajetos contínuos, que passam pelo conjunto de intervalos $[a_i, b_i]$ possíveis, considerando a distribuição de probabilidade ρ típica do movimento browniano.

Notemos também que é necessário definir um coeficiente de difusão imaginário⁽⁵⁾ para obter a equivalência com a equação da função de Green da teoria de Schrödinger. Este fato dificulta a interpretação física desta formulação. Por outro lado, de todas as trajetórias possíveis a uma grande contribuição das não diferenciáveis, o que está de acordo com o fato de que em um contexto de integrais de Riemann, esta representação integral não apresenta em geral soluções exatas.

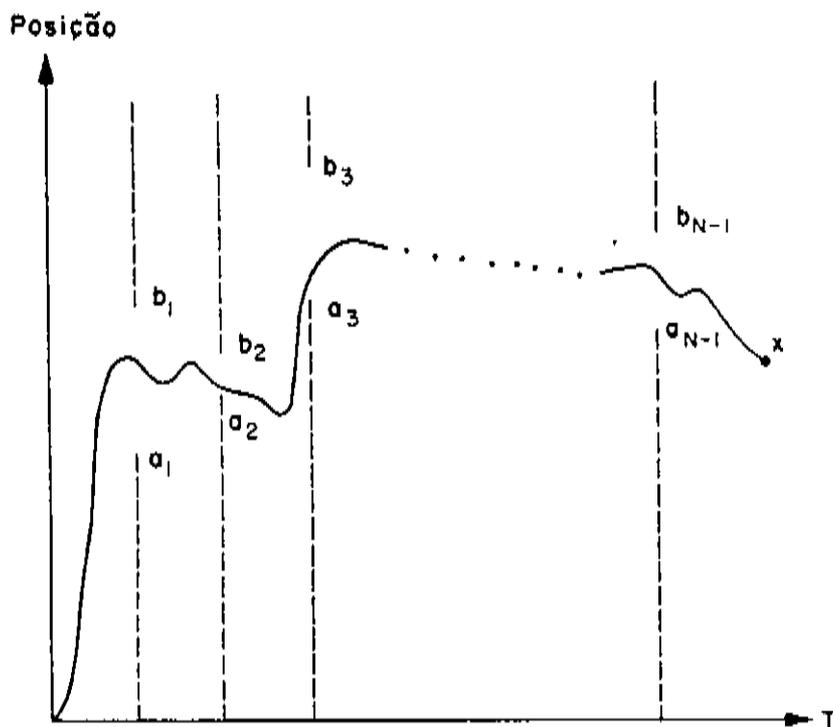


FIG (1)

A definição rigorosa deste assunto requer medidas de Wiener em integrais de Lebesgue, e a sua manipulação prática é por enquanto difícil⁽⁶⁾.

(1.5). DISCUSSÃO

Concluimos então que a representação integral de Kernel semiclássico proposta por R. Feynman não tem validade como solução exata da equação de Schrödinger para potenciais arbitrários.

Tendo este fato duas consequências muito importantes:

A não existência de uma representação integral no contexto de Riemann, como solução da equação de Schrödinger; Este fato não é tão surpreendente, visto que há uma grande variedade de problemas clássicos, cujas soluções dependem também da integrabilidade de equações do tipo de Schrödinger, mas que nunca foram abordados do ponto de vista de Feynman, o que seria válido matematicamente se estas possíveis soluções fossem exatas.

Na conferência do prêmio Nobel⁽⁷⁾, R. Feynman comentou alguns dos problemas desta teoria, no entanto a coerência com a interpretação usual, e sua elegante capacidade aproximativa, tem mantido esta formulação original longe de críticas. No último capítulo estudaremos uma outra representação integral que é proposta como solução da equação de Schrödinger.

A segunda questão se refere a não validade da interpretação da função de onda em termo de uma integral de ação com trajetórias clássicas diferenciáveis, o que pode nos dar margem a novas interpretações da mecânica quântica e é o que faremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

(2.1). INTRODUÇÃO.

O formalismo matemático da Mecânica Quântica, refinado e generalizado no espaço de mais de 50 anos, até agora não tem sido contestado seriamente, nem dos pontos de vista teórico ou experimental. Existe sim uma grande controvérsia em relação à interpretação dos resultados. Questões como o significado da matemática envolvida e da realidade subjacente nas leis e procedimentos da Mecânica Quântica continuam sendo motivo de acirradas disputas entre as diferentes escolas de pensamento. A interpretação Ortodoxa de Copenhagen (Bohr, Born) tem-se deparado com as mais diversas alternativas propostas. Dentre estas gostaríamos de mencionar a interpretação Estocástica (Nelson), a teoria das Variáveis Escondidas (Bohm,), a dos Universos Múltiplos (Wheeler, Everett), e finalmente a teoria do Potencial Quântico (de Broglie, Rosen, Bohm).

A interpretação ortodoxa usual assume que as partículas atômicas podem ser descritas através de uma distribuição de probabilidade estendida no espaço, sendo que a noção de trajetória pode não ter mais sentido (Princípio de Incerteza). A função de onda quântica carece de realidade objetiva e deve ser associada à informação potencial que possui um observador sobre o sistema em estudo.

Em contraste, a formulação Estocástica é baseada num processo probabilístico puramente clássico, onde a partícula está

sujeita à movimento Browniano causado pelas flutuações do Campo Quântico. A equação de Schrödinger é obtida em analogia com um processo de difusão (com coeficiente de difusão imaginário), assim esta formulação vem sendo alvo de extensos estudos matemáticos.

Outra corrente importante procura fornecer uma visão mais ampla sem ruptura da realidade entre o micro e o macromundo, particularmente no relativo aos processos de medição. A teoria do Potencial Quântico é o mais puro expoente desta linha de pensamento. Nela as partículas são consideradas como localizadas dentro dos seus raios clássicos convencionais; o carácter ondulatório passa a ser uma manifestação de um *Potencial-Guia* induzido pela função de onda Quântica.

No contexto da teoria de Medição, a interpretação dos Universos Múltiplos aparece como uma tentativa desesperada para evitar a idéia do *colapso* da função de onda cada vez que uma medição é feita sobre o sistema.

Neste Capítulo abordaremos algumas novas idéias que seguem o análise pioneiro de de Broglie da *onda piloto*. Uma nova teoria do Potencial Quântico será proposta inspirada na dedução original de Schrödinger (através de um Princípio Variacional) da equação de ondas. O Potencial Quântico confere realidade objetiva à função de onda, *sugerindo* os caminhos susceptíveis de serem transitados pelas partículas (por exemplo elétrons). Fenómenos ondulatórios típicos podem ser descritos desta maneira sem ter que recorrer a interpretações como a formulada por Dirac (*cada foton interfere unicamente consigo mesmo*). Desta forma analisamos a

experiência de Young das duas fendas, na sua realização moderna devida à Tonomura⁽¹⁷⁾.

(2.2). O PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA REVISITADO

A Mecânica Quântica, sendo considerada uma teoria mais geral, deverá fornecer os resultados clássicos em *algum limite*. Este fato tem recebido o nome de PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA desde o nascimento da teoria. Porém não existe um *modus operandi* geral no estudo dos limites semiclássicos, sendo que cada situação pode merecer um estudo muito particular. Já no caso simples do oscilador harmônico é necessário proceder com cuidado, e introduzir os *Estados Coerentes* para se aproximar do caso clássico. Isto se deve a que o valor médio quântico da posição (X) é identicamente nulo para todos os estados estacionários, inclusive para números quânticos arbitrariamente grandes. Os Estados Coerentes⁽¹⁾ não correspondem à autoestados de nenhum observável e formam uma base sobrecompleta, permitindo uma grande variedade de superposições quânticas sem alterar a energia média.

Na representação de coordenadas podem ser visualizados como pacotes gaussianos cujos centros seguem a trajetória clássica sem sofrer dispersão, e minimizando o Princípio de Incerteza. Esta imagem é a que mais se assemelha à uma partícula clássica em termos de localização da função de onda, mas compromete a clareza de outras situações onde é necessária uma visão de estados estendidos (como no caso da interferência na experiência de duas fendas). Isto na verdade é apenas um reflexo do antigo dilema da

dualidade partícula-onda, onde o comportamento da partícula é referido à particular medição onde será feita sobre ela. Uma visão pseudo-realista que considere as partículas como entes estritamente localizados no espaço-tempo, dificilmente poderá descrever, dentro deste quadro, as autointerferências para grandes distâncias e energias. Neste sentido, a interpretação do Potencial Quântico que proporemos neste Capítulo, é uma tentativa radical que aponta a dar realidade física à função de onda, conservando a localização das partículas atômicas.

Finalmente, para encerrar esta seção gostaríamos comentar o chamado Teorema de Ehrenfest, que muitas vezes é apresentado como contendo o Princípio de Correspondência, dada sua semelhança formal com as equações de Newton. Procedendo na representação de Schrödinger, a variação temporal do valor médio de um observável é dado por

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle \quad , \quad (2.1)$$

e no caso do observável ser o momentum obtemos a seguinte equação de evolução

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{P} \rangle = -\langle \nabla V(r) \rangle \quad , \quad (2.2)$$

que é conhecido como Teorema de Ehrenfest. A equação (2.2) em geral não descreve o movimento clássico da partícula para o centro do pacote de ondas, porque em geral

$$\langle \nabla V(r) \rangle = \langle \Psi | \nabla V(r) | \Psi \rangle \neq \nabla V(r) |_{r=R} \quad (2.3)$$

onde R é a coordenada do centro do pacote.⁽²⁾ O limite clássico é obtido assumindo, de maneira autoconsistente, que o potencial $V(r)$ não varia apreciavelmente para distâncias da ordem do tamanho do pacote, de modo que a estrutura interna dele pode ser ignorada. O oscilador harmônico é uma exceção onde não é válida a desigualdade(2,3), daí a possibilidade de construir estados que reproduzam exatamente o movimento clássico para energia arbitrária. Na interpretação do Potencial Quântico a partícula sempre segue uma trajetória bem definida no importando a energia; esta trajetória se aproxima da clássica no limite semiclássico que definiremos na seção seguinte.

(2.3). TEORIA DA MEDIDA.

A interpretação ortodoxa supõe estados arbitrariamente estendidos no espaço. Ao serem registrados como partículas, deveria suceder algo como um colapso da função de onda, o que parece exigir correlações "instantâneas", fato que foi assinalado por Einstein, no congresso de Solvay, em 1927. No mesmo congresso Schrödinger ressaltava que esta interpretação ortodoxa necessita de um esqueleto clássico, para estabelecer correlações entre os diferentes estados, o que parece até contraditório com a interpretação dos estados estendidos. Isto mesmo; quiçá, possa ser dito assinalando a impossibilidade, segundo esta interpretação, de

se estabelecer em certos casos a diferença entre simples supersposições de estados e misturas de estados (superposições entre estados macroscopicamente excluentes). Podemos então fazer a seguinte pergunta - Como atua um observador ou aparelho de medida para eliminar as interferências entre as misturas de estados? Um simples caso de interferência entre elétrons é apresentado claramente na experiência das duas fendas (neste caso o esqueleto clássico resulta ser inquestionavelmente o sistema das duas fendas fixas).

A posição de Bohr é que a mecânica quântica não é uma teoria para saber o que acontece durante a medição e sim depois, sustentando-se nas relações de incerteza e no princípio de complementaridade. Bohr advoga uma nova concepção epistemológica, livre de argumentos ontológicos. Apesar de todo o pragmatismo desta posição, ela é factível a críticas como as feitas por Fock, que foi o responsável pela redução do entusiasmo inicial de Bohr. Um dos argumentos de Fock é que se a linha divisória entre sistema e aparelho de medida é puramente imaginária e "móvel", dificilmente poderíamos afirmar que os contornos desta linha gnoseológica, não devam ser analisados pela mecânica quântica! A própria construção dos aparelhos de medida, geralmente fundamenta-se na concepção de partículas, ou seja, a epistemologia clássica continua a ser utilizada e é de vital importância. É inequívoco que certos conceitos, tais como o de função de onda, autovalores, auto-estados, quantum de ação, etc., são conceitos decididamente necessários na compreensão dos processos microscópicos.

Uma renúncia a visualização e causalidade clássica é ainda prematura, apesar das controvertidas interpretações que possam ser feitas de experiências tipo E.P.R. (Einstein, Podolsky e Rosen)⁽³⁾, ou as violações das desigualdades de Bell (como mostraremos no próximo capítulo), argumento que tem sido utilizado para proibir teorias realistas locais.

Por outro lado, tem havido intentos para explicar a ausência de interferência quântica macroscópica, empregando os princípios termodinâmicos. Desse modo, Daneri, Loinger e Prosperi⁽⁴⁾, em 1962, explicaram o processo de medida como mudanças irreversíveis no aparelho de medida, que apresenta características macroscópicas. Lamentavelmente, como foi reconhecido pelos próprios autores acima citados, a interferência quântica entre estados macroscópicos era eliminada antes do aparelho de medida chegar ao equilíbrio, fazendo uso das equações mestres, as quais não são compatíveis com a microrreversibilidade das equações quânticas, e portanto esta demonstração pode ser considerada clássica ad hoc.

Wigner⁽⁵⁾, demonstrou que a superposição macroscópica subsiste ainda que o aparelho de medição encontra-se inicialmente em estado não puro. Desta forma, Wigner, em 1967, reafirmou as posições de London e Bauer (1939). Segundo esses autores, o processo de medida propriamente dito culmina com uma superposição macroscópica e, quando, posteriormente, o observador toma consciência do estado do aparelho a superposição desaparece; emergindo um único estado de carácter clássico. Assim, um autômato não seria capaz de efetuar o "corte" em uma medição, sendo a

consciência o verdadeiro responsável por este corte transcendental - sem dúvida alguma, resulta em uma difícil compreensão do porquê se lentes, espelhos e outros dispositivos macroscópicos não interrompem a interferência quântica; haveria então de ser um outro fator de carácter mais transcendental?.... Acreditamos que a conclusão de Wigner⁽⁶⁾ pode ser considerada como imediatista. Além disso, estas conclusões fundamentam-se em experiências reproduzíveis e aparentemente desvinculadas das particularidades da consciência do observador. No entanto, não podemos perder de vista que não são as interferências quânticas observadas, se não a concepção dos estados estendidos que levam a todas estas controvérsias, razão pela qual postulamos neste capítulo uma nova teoria quântica realista.

Em 1957, foi criada uma nova interpretação, conhecida como a de "Universos Múltiplos", assim Everett, Wheeler e DeWitt⁽⁷⁾, sugeriram que o processo da medida culmina com uma superposição de distintos estados (seja no micro ou no macromundo), caracterizando cada estado um universo. Esta interpretação foi um tipo de continuação de uma outra formulação de " Estados Relativos " proposta originalmente por Everett⁽⁸⁾.

Deste modo, esta teoria antieconômica é capaz de conciliar a aparente contradição entre um formalismo determinista e o carácter, até certo ponto, aleatório da medida. Wheeler, DeWitt, Cooper e outros autores têm contribuído a esta teoria, e, com base na mesma foram criadas novas cosmologias com princípios antrópicos.

Em outro contexto interpretativo, Bohm⁽⁹⁾, em 1952,

ressuscitou a teoria de de Broglie da onda piloto ou campo guia, que a tinha abandonado em 1928, devido as fortes pressões argumentativas de Bohr, Pauli e Perrin; mas que contava, inicialmente, com o apoio de Einstein e Schrödinger. Desta forma, esta interpretação realista surgiu ou apareceu com um novo nome, que é "Teoria de Variáveis Escondidas".

(2.4). TEORIA DO POTENCIAL QUÂNTICO.

De Broglie^(10,11) e Madelung supõem uma solução da equação de Schrödinger de uma partícula, da forma $\psi = A \exp \frac{iS}{\hbar}$

$$-(\hbar^2/2m) \nabla^2 \psi + V(r)\psi = i\hbar \partial \psi / \partial t \quad (4.1)$$

ao separar a parte real e imaginária, na equação de onda, obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 A / A \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \operatorname{div} (A^2 \nabla S) = 0 \quad (4.3)$$

Assim, a primeira relação parece sugerir um movimento clássico submetido a um potencial quântico do tipo $-(\hbar^2/2m)(\Delta A/A)$ e a segunda ilustra a equação de continuidade, que mostra uma consistência com o carácter probabilístico de $|\psi|^2$, sustentado também pela própria interpretação ortodoxa. Contudo, de Broglie

supõe que a partícula não se difunde em uma nuvem de probabilidades, mas que é perturbada por um potencial quântico, produzido pela própria função de onda. Como exemplo exporemos esta interpretação no caso da experiência de duas fendas.

Elétrons são emitidos por um cátodo, os quais encontram duas fendas no caminho ao detetor (contador de centelhas). A experiência mostra que ainda que os elétrons sejam lançados um de cada vez, a distribuição de impacto obedece a relação:

$$P(x) = |\psi_a(x) + \psi_b(x)|^2 \quad (4.4)$$

A fórmula $|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2$, não é satisfeita como poderia ter sido esperado por uma formulação probabilística de índole clássica.

Tem-se concluído, segundo a interpretação ortodoxa que o elétron passa a interagir com ele mesmo em forma de onda através da amplitude de probabilidade, quando a incerteza na posição do elétron abrange as duas fendas, existindo um colapso como partícula no contador de centelhas.

A teoria de de Broglie-Bohm, prevê que o efeito de interferência é produzido pelo potencial quântico, e, desta forma as partículas seguem os caminhos sugeridos pelos vales deste potencial. Philippidis, Dewdney e Hiley⁽¹²⁾, mostraram a forma deste potencial quântico fig (2), onde este é observado desde a tela de impactos, a função de onda foi extraída do formalismo de Feynman, de maneira a considerar os efeitos de difração.

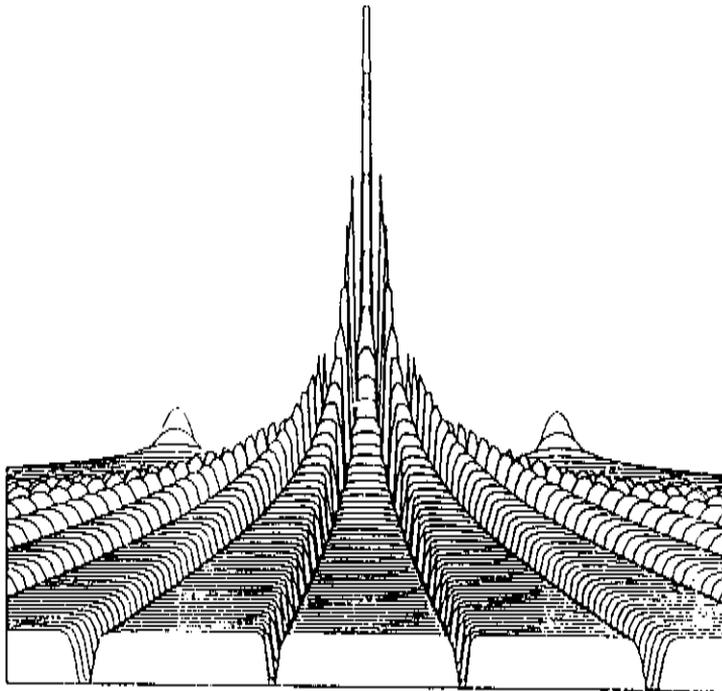


FIG (2)

O denominador representado pela função de onda em seus zeros torna $-\Delta A/A \cong \pm \infty$, criando repulsões e atrações que ligam fortemente os elétrons nestes vales (depressões). Assim, os estados estendidos são dispensados num novo contexto realista. Todas as objeções colocadas nas seções anteriores são em grande parte respondidas de forma imediata. Não há necessidade de colapso "instantâneo" a um estado de partícula, não havendo ruptura de comportamento entre o macro e micromundo.

Apesar desta teoria realista ganhar cada vez mais popularidade, possui sérios problemas em casos tais como por

exemplo de scattering entre partículas próton próton, etc...., como foi assinalado por Perrin⁽¹³⁾, sendo esta uma das razões pela qual de Broglie decidiu abandoná-la, (1928). Notemos que a derivação da equação de continuidade implica que as trajetórias clássicas obedeçam a lei de distribuição espacial quântica. Porém tem sido assumido intrinsecamente de que S é a ação ou que ∇S representa o momentum da partícula, o que compromete seriamente esta interpretação. Por exemplo, para funções de onda puramente reais temos que $\nabla S = 0$, o que nos leva a uma situação onde as partículas estariam em repouso; naturalmente esta questão apresenta-se no mínimo curiosa. Por outro lado, esta interpretação realista não pode em principio apresentar uma outra distribuição de impacto, que o da própria interpretação ortodoxa.

Deste modo esta parece nos oferecer um novo campo imaginativo, mas de pouco valor predictivo. Posteriormente, de Broglie propôs criar uma outra onda, u , desta vez com sentido físico objetivo, de tal forma a ser $u = fc^{iS}$, onde a fase S seria idêntica a da função de onda Ψ , a qual só possuiria um carácter meramente estatístico e não real no sentido de ser dotada de energia ou momentum. Assim sendo, de Broglie pretendia superar muitos dos problemas, assumindo em f , uma singularidade móvel que representaria a própria partícula. E, procurou então, uma relação entre u e Ψ , via relatividade geral, fazendo uso de argumentos geométricos intuitivos para conectar ambas e, ainda este autor pretendeu demonstrar que $\Delta A/A = \Delta f/f$.

Contudo, de Broglie reconheceu que até então não há uma forma simples ou conveniente de ligar estas ondas; reinvidicou no

entanto a possibilidade de manter viva esta teoria semi-realista que admite estados estendidos. Porém com uma singularidade central que representa a partícula, esta teoria semi-realista que dispensa o potencial quântico de Broglie a denominou " Teoria da dupla solução "

Os problemas com sua teoria original começaram já no caso de onda plana, onde $\Delta A/A$ se faz constante no espaço, fornecendo um movimento retilíneo. Entretanto, de Broglie decidiu voltar a defender esta sua antiga interpretação (1952), e utilizou, grande parte dos artigos em justificativa de diversos casos elementares problemáticos. E, desse modo, esta teoria perde elegância no meio de longos colóquios e argumentos que apesar de terem sentido físico, dificultam a compreensão e comprometem a utilidade prática desta teoria.

Nos inícios da teoria quântica, as discussões centravam-se na realidade física do campo guia. As afirmações positivas de de Broglie o levaram a um paradoxo, em vista das novas estatísticas de Bose-Einstein (BE), Fermi-Dirac (FD) , que asseveravam a indistinguibilidade entre as partículas. Argumentos que o conduziram a aceitar a interpretação de Copenhague. Após a intervenção de Bohm (1952) de Broglie junto a Andrade e Silva⁽¹⁴⁾, fundamentando-se na teoria da dupla solução , conseguiram explicar o fator $\frac{1}{N!}$ (Número de partículas idênticas), próprio da estatística de Bose. Assumindo soluções simétricas da função de onda propostas por Pauli, justificam o fator $N!^{-1}$, proferindo que este representa as permutações irrelevantes das partículas dentro das possíveis trajetórias (dadas pela simetria do potencial

quântico). De modo que estas permutações bruscas e correlacionadas seriam provocadas por flutuações subquânticas. Com esta interpretação realista explicam a indistinguibilidade das partículas, mas sem o sentido de estados estendidos de probabilidades.

A questão era então colocada de um outro ponto de vista; anteriormente perguntava-se que sentido físico poderia ter uma função de onda de várias partículas e que momentum ou energia real ela poderia ter, se esta onda quântica só indica probabilidade das correlações espaciais entre as partículas. Assim, esta questão foi parcialmente resolvida não priorizando argumentos filosóficos

Como um exemplo prático sobre esta questão ilustramos um trabalho de Dewdney, A. Kyprianidis e J.P. Vigiier⁽¹⁵⁾, onde estudou - se o itinerário de duas partículas submetidas a um potencial tipo oscilador harmônico, onde é utilizada a seguinte solução não dispersiva:

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega t} e^{-\frac{1}{2}(X-X_0 \cos\omega t)^2} e^{\frac{i}{2}(X^2 \sin 2\omega t - 2XX_0 \sin\omega t)} \quad (4.5)$$

Que adota diferentes formas segundo as estatísticas assumidas MB, BE, e FD:

$$\bar{\Psi}_{MB} = \alpha_{MB} \psi_A(x_1, t) \psi_B(x_2, t) \quad (4.6)$$

$$\bar{\Psi}_{BE} = \alpha_{BE} [\psi_A(x_1, t) \psi_B(x_2, t) + \psi_B(x_1, t) \psi_A(x_2, t)] \quad (4.7)$$

$$\Psi_{FD} = \alpha_{FD} [\psi_A(x_1, t)\psi_B(x_2, t) - \psi_B(x_1, t)\psi_A(x_2, t)] \quad (4.8)$$

A força quântica para cada partícula é expressa como $F_{x_i} = -\nabla_{x_i} (V_q)$

Neste caso não são introduzidas as perturbações subquânticas de Broglie, e simplesmente são utilizadas as equações dinâmicas.

$$\bar{\Psi} = R e^{i S/\hbar} \quad ; \quad (4.9)$$

$$R = \pm \sqrt{|\psi|^2} \quad (4.10)$$

$$V_q = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla_{x_1}^2 R / R + \nabla_{x_2}^2 R / R \right) \quad (4.11)$$

temos então que o potencial quântico $V_{(q)}$ é generalizado para duas partículas de acordo com (4.11).

Os itinerários mostram os seguintes comportamentos:

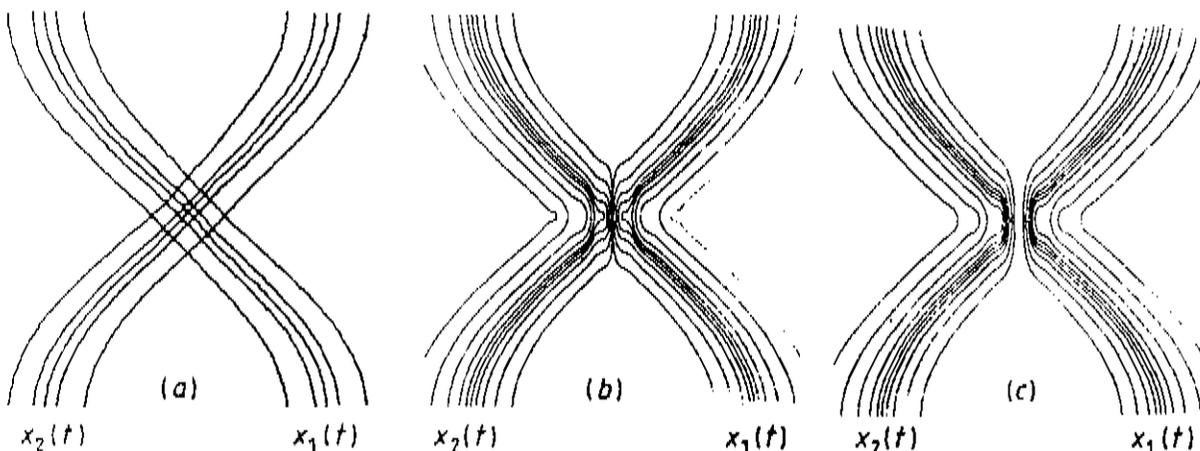


FIG (3)

que coincidem intuitivamente com o comportamento esperado das diferentes estatísticas:.

Porém a dificuldade da interpretação de de Broglie é de índole físico-matemática. A origem de todas as dificuldades, provém do fato de que a equação de onda, deve satisfazer certas condições de borde normalização, o que impõe em certos casos que esta deve ser puramente real. Assim a partícula deve ser considerada em repouso, e ainda a densidade de probabilidade quântica $|\psi(x)|^2$ não mostra coerência com esta própria interpretação. Podemos notar que na solução da equação de continuidade (4.3) esta apresenta certa "liberdade" nos casos onde $v=0$, (ou que ao menos um destes componentes seja zero), de modo que nestes casos se pode admitir a existência de densidades de probabilidades que fujam da interpretação física proposta. Isto é, que a densidade de probabilidade seja inversamente proporcional a velocidade da partícula, (Esta "liberdade" é provocada pelo típico efeito da multiplicação por zero)

Estes tipos de situações poderiam ser consideradas como "provas ou refutações" da interpretação original de de Broglie, onde é adotada a densidade de probabilidade inversa da velocidade da partícula. No entanto, o significado físico de $|\psi|^2$ permanece ainda desconhecido nestes casos singulares.

Apesar de todos os esforços realizados, de Broglie não encontrou uma resposta definitiva na sua "Teoria de Dupla Solução". a estes paradoxos.

Em 1952, D.Bohm reexamina a teoria original de de Broglie, e propõe aceitar definitivamente que $|\psi|^2$ é a densidade de

probabilidade.Bohm postula então que a relação entre ∇S e $|\psi|^2$ pode ser considerada como sendo sempre consistente (num sentido puramente estatístico),se variáveis escondidas têm uma influência sincrônica sobre as condições iniciais da partícula.

Porém esta hipótese confere um caracter, que pode ser considerado como sendo de índole não local a esta nova interpretação.A condição de não localidade de uma teoria de índole realista sugerida pelas desigualdades de Bell,justificam em parte a posição de Bohm.Mas é útil assinalar que uma simples ação a distância é um caso particular do sincronismo imposto.

Esta última interpretação pode ser considerada como equivalente a interpretação usual,dado que não apresenta novas previsões e ao que parece deve ser considerada como uma possibilidade imaginativa.Devemos entretanto notar que uma posição sincrônica implica posições filosóficas , e apresenta o inconveniente do não questionamento da ordem implícita "constatada matematicamente" .

(2.5). UM NOVO POTENCIAL QUÂNTICO.

As dificuldades encontradas pela interpretação de De Broglie ,nos leva a postular uma nova teoria de Potencial Quântico, baseada nas idéias de Schrödinger, que deduziu sua famosa equação mediante princípios variacionais (16).

Para uma rápida exposição da nova teoria dispensaremos as razões heurísticas, que no entanto serão evidentes. Postulamos

o seguinte lagrangeano de uma partícula, em um estado estacionário de energia E.

$$L = \delta^3(r-r(t)) \left(\frac{p^2}{2m} - V(r) - \beta \frac{\hbar^2}{2m} \left[(\nabla\psi)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E-V_c)\psi^2 \right] \right) \quad (5.1)$$

A distribuição $\delta^3(r-r(t))$ é um tipo de delta de Dirac que localiza as trajetórias em torno do centro de massa da partícula. Assumimos por simplicidade de exposição, funções de onda reais. Temos então que P representa momentum, $V_c(r)$ o potencial clássico e E a energia total do sistema. Onde o último termo se apresenta como uma perturbação de origem quântica. Se otimizarmos a integral:

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0 \quad (5.2)$$

derivando com relação as variáveis do campo quântico ψ e $\nabla\psi$ nas equações do tipo Lagrange, temos:

$$\nabla \cdot \frac{\delta L}{\delta \nabla \psi} - \frac{\delta L}{\delta \psi} = 0 \quad (5.3)$$

Deduzimos a equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - (E - V_c) \psi = 0 \quad (5.4)$$

O que nos sugere considerar um potencial quântico igual a:

$$V_q = \beta \frac{\hbar^2}{2m} \left[(\nabla\psi)^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_c) \psi^2 \right] \quad (5.5)$$

Otimizando o Lagrangeano com relação as variáveis dinâmicas, temos uma equação determinista, da forma:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \nabla V_c - \nabla V_q = - \nabla (V_c + V_q) \quad (5.6)$$

Em princípio podemos imaginar ψ como uma flutuação do vácuo em torno das partículas clássicas, o que seria incluído no lagrangeano na forma de um tipo de oscilador harmônico. Ao otimizarmos estas flutuações são obtidas as funções Ψ que são soluções normalizadas da equação de Schrödinger. Portanto as autofunções e autovalores devem ser calculados prioritariamente, para posteriormente serem aplicadas às equações de movimento (5.6).

Uma maneira da energia total não aparecer em forma explícita no potencial quântico é substituir a expressão:

$$V_c = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} - E \quad (5.7)$$

em (5,4), obtemos então :

$$V_q = \beta \frac{\hbar^2}{4m} \nabla(\nabla(\psi)^2) \quad (5.8)$$

A diferença com o potencial quântico de De Broglie é evidente pois este é da forma:

$$V_B(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} |\psi|^{-1} \nabla^2 |\psi| \quad (5.9)$$

A generalização para ondas complexas, resulta dos próprios estudos das lagrangeanas quânticas que fornecem a equação de Schrödinger, e nestes casos a fórmula deve ser a seguinte:

$$V_q(r) = \beta \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 + V_c(r) |\psi|^2 \right) + \frac{\hbar}{2} i (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (5.10)$$

$$V_q(r) = \beta \frac{\hbar^2}{4m} \nabla \cdot (\nabla |\psi|^2) \quad (5.11)$$

O que é evidente se consideramos como variáveis de campo ψ^* , $\nabla\psi^*$; ψ , $\nabla\psi$

A constante β não é determinada pela própria formulação (como é habitual em todas as teorias de potencial). Postulamos que β é igual ao inverso da constante de normalização da função de onda. Um estudo mais detalhado sobre esta questão será analisada no fim deste capítulo.

A seguir estudaremos uma experiência com interferência quântica, equivalente ao das duas fendas.

(6.1). EXPERIÊNCIA DAS DUAS FENDAS.

Uma das mais recentes demonstrações de interferência quântica, na experiência das duas fendas, foi realizada por A. Tonomura⁽¹⁷⁾ e colaboradores, utilizando um microscópio eletrônico equipado com um biprisma de elétrons, cuja função era ocasionar interferência. Este processo é feito de uma forma a ser equivalente a um biprisma óptico. A interferência é registrada num contador de elétrons (filme fluorescente controlado por monitores) e a experiência é realizada enviando-se um elétron de cada vez (separação virtual de 500 metros).

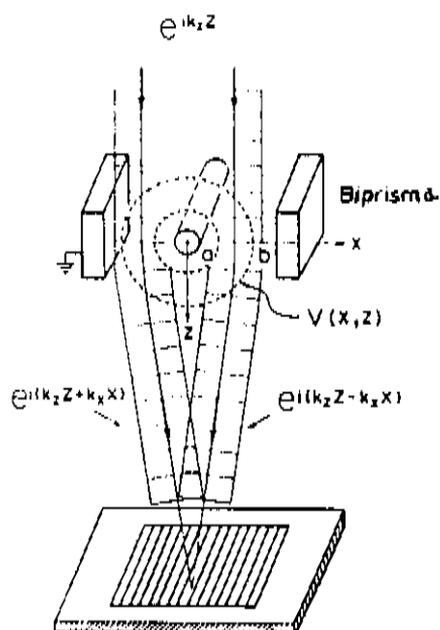


FIG (4)

O princípio deste biprisma foi inventado por Möllenstedt e Dücker, em 1956. Este dispositivo consiste de duas placas paralelas com um filamento entre elas, com um potencial em torno deste, dado aproximadamente por:

$$V(X,Z) = V_a [\log(\sqrt{X^2+Z^2}/b) / \log(a/b)] \quad (6.1)$$

Onde $V_a = 10 \text{ V}$, $a = 0.5 \mu\text{m}$, $b = 5\text{mm}$, consideramos a função de onda do elétron incidente como $e^{ik_z z}$ que está já renormalizada pelo fator $\sqrt{\beta}$, e que ao sofrer deflexão transforma-se em:

$$\psi(x,z) = \alpha \exp \left(i(K_z z - \frac{me}{\hbar^2 K_z^2} \int_{-\infty}^z V(x,z') dz') \right) \quad (6.2)$$

que é conhecida como aproximação de Glauber e, que consiste fundamentalmente em expandir a raiz da solução da equação eikonal quando $\hbar^2 K_z^2 / 2m \gg e|V(x,z)|$, como é no caso desta experiência.

Por continuidade da função de onda, esta se transforma, como está indicado na fig (4) em:

$$\psi = \alpha \exp(iK_z z) \cos(k_x x) \quad (6.3)$$

$$K_x = (\pi e V_a / \hbar v_z \log b/a) \quad ; \quad v_z = c/2 \quad (6.4)$$

Nesta aproximação α^2 representa o coeficiente de transmissão da função de onda provocada pelo biprisma. Os valores dos parâmetros utilizados nesta experiência são os seguintes: $a = 0,5 \mu\text{m}$, $b = 5\text{mm}$,

$v_z = c/2$, $V_a = 10 \text{ V}$, $K_x = (\pi/900) \text{ \AA}^{-1}$, onde os elétrons são emitidos com um $\lambda = 0.054 \text{ \AA}$. Deste modo, o espaçamento das faixas é $d = 900 \text{ \AA}$, e a amplitude da função de onda estaria dada por:

$$|\psi|^2 = \alpha^2 \cos^2(K_x x) \quad (6.5)$$

Temos então que o potencial quântico, teria a forma :

$$V_q = \alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left[K_x^2 - 2K_x^2 \cos^2 K_x x \right] \quad (6.6)$$

Para calcular a distribuição de probabilidade de impactos das partículas, determinaremos o tempo de permanência dos elétrons neste potencial quântico, de forma a ser:

$$\Delta t = \left| \frac{\Delta x}{v_x} \right| \quad (6.7)$$

A velocidade do elétron no eixo x é :

$$v_x = \frac{\hbar K_x}{m} \sqrt{(1-\alpha^2) + 2\alpha^2 \cos^2 K_x x} \quad (6.8)$$

O fator α^2 não é determinado nesta experiência, devendo ser estimado em primeira instância de forma autoconsistente, e devemos recordar que não adotamos a hipótese probabilística usual, assim a porcentagem de elétrons transmitidos pelo sistema óptico não é exatamente equivalente ao coeficiente de transmissão da onda quântica. Podemos esperar que se o pacote de onda inicial se

encontrasse mais estendido que o feixe de elétrons, o coeficiente de transmissão da função de onda seria menor que a probabilidade de transmissão das partículas, dadas as possíveis perdas laterais.

Na Fig (5,a), é comparada a previsão da interpretação usual. $|\psi|^2 = \cos^2 K_x x$, com as probabilidades desta nova formulação para valores de $\alpha=9/10$ mostrada na Fig (5,b) é para $\alpha=7/10$ na Fig(5,c). Há uma defasagem em $\pi/2$, entre ambas formulações. Porém esta não é observável, devido ao fato que esta depende das fases iniciais da função de onda adotada .

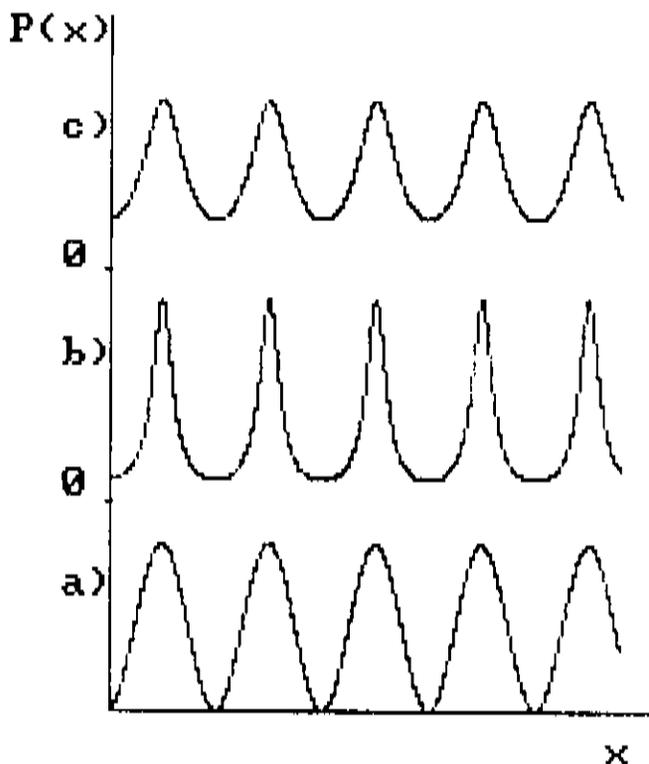


FIG (5)

Tomomura estimou através das medidas experimentais, uma desviação de 10% com respeito a previsão teórica usual, e segundo este autor, esta seria ocasionada pelos efeitos de difração com o biprisma.

De acordo com esta nova teoria de potencial quântico, as partículas estariam com maior probabilidade nos extremos superiores do potencial quântico, onde sua velocidade é menor.

O número total de elétrons numa região $[R_1, R_2]$ é dada pela integral elíptica do tipo:

$$A \eta / (k_x (1 + \alpha^2)^{1/2}) \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 x}} \right] = 1 \quad (6.9)$$

$$\rho^2 = \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (6.10)$$

$$\|R_2 - R_1\| = \eta \lambda_x / 4 \quad (6.11)$$

Onde A é o fator de normalização da densidade de probabilidade, que é dada pela função elíptica:

$$A = k_x / \eta K(\rho)^{-1} \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (6.12)$$

Estes coeficientes devem ser utilizados no caso de se tratar da avaliação em unidades absolutas da densidade de probabilidade,

o que naturalmente implica na contagem de todos os impactos eletrônicos.

Segundo a interpretação usual, a forma do pacote de ondas seria diretamente observável através da própria distribuição de impactos. Nesta nova formulação a onda e a partícula são dois entes diferentes, assim a forma do pacote de ondas poderia ser também deduzida de forma autoconsistente. Para estimar a dispersão ΔK do pacote de onda, de maneira aproximada, podemos fazer uso da relação $\Delta X \Delta K \approx 1$ (a um nível de função de onda). A qual, permite conhecer o ΔK através da distância mínima X , onde o tipo de pacote analisado, ainda interage com ele mesmo. Em geral, neste tipo de experiência são observadas poucas faixas nítidas de interferência, porém, isto pode ser devido a distribuição de elétrons, que podem estar concentrados num feixe, produzidos pelos efeitos de refração ou de difração como partícula. Assim esta distribuição $F_p(x)$ deve multiplicar a probabilidade de permanência anteriormente calculada, isto é :

$$P(x) \propto F_p(x) \left| v_x^{-1} \right| \quad (6.13)$$

De forma a modular esta densidade, na fig (6) é mostrada uma distribuição de impactos de nêutrons obtida em uma experiência de duas fendas⁽¹⁸⁾, onde se estimou um coeficiente de transmissão dos elétrons, como sendo da ordem de 9/10.

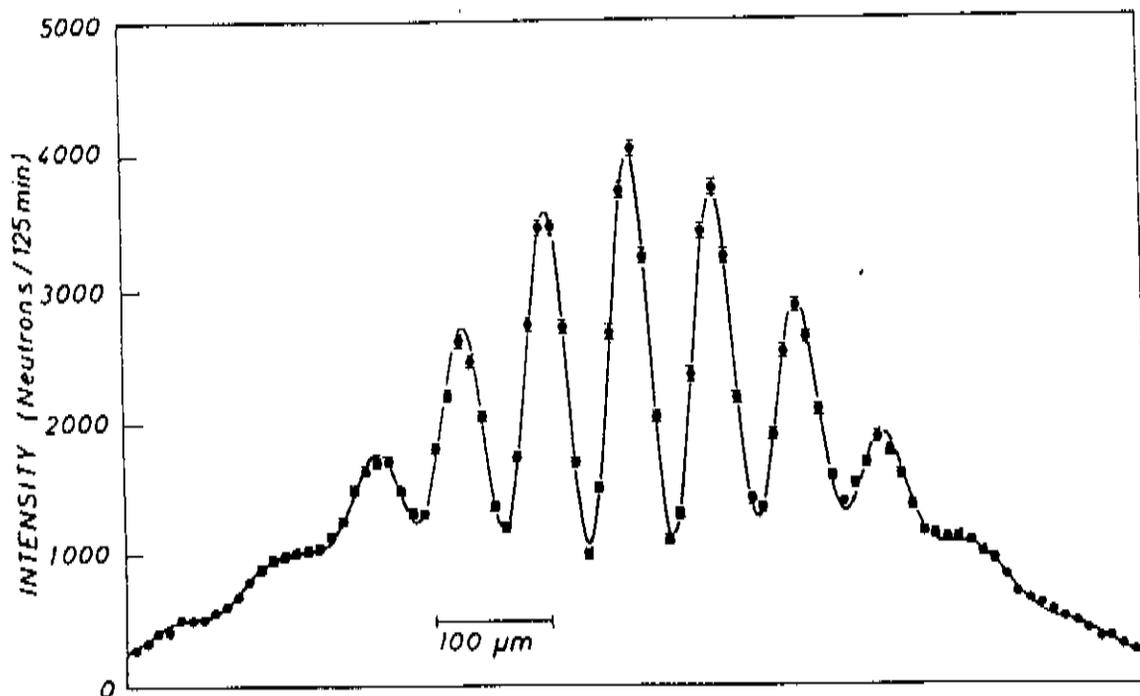


FIG (6)

É interessante notar um fundo mínimo de impactos no centro das faixas de interferência, e este fundo resulta ser exatamente a grande particularidade desta nova formulação. Notemos também que a medida que o potencial quântico diminui, a visibilidade das faixas deveria se reduzir. Resultado que se apresenta em diversas experiências^(19,20), e que parece ter sentido físico devido a dificuldade de imaginar que um potencial não dependa de uma amplitude, como por exemplo, ao de coeficientes de transmissão. No entanto, isto parece ser o caso da antiga teoria de de

Broglie, onde estas amplitudes seriam canceladas.

Em uma outra experiência realizada por J. Komrska⁽²¹⁾ onde é utilizado o mesmo tipo de biprisma, as distribuições de impacto são comparadas com cálculos elaborados de uma teoria de difração, onde é obtida uma relativa boa concordância com o tipo de teoria de difração assumida. É evidente que pequenos efeitos de difração podem ter um papel determinante na comprovação experimental de cada formulação.

Notemos que ao considerar estas funções de onda sem efeitos de difração na teoria de de Broglie, temos que:

$$- \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \cos(K_x X) / \cos K_x X = - \frac{\hbar^2}{2m} = V_B \quad (6.14)$$

que naturalmente não corresponde as expectativas experimentais. Como mostramos anteriormente na secção (2.4), foi necessário a inclusão de funções de onda derivadas da formulação de Feynman, para obter resultados compatíveis com as experiências.

Devemos notar que existe uma outra possibilidade interpretativa na teoria do potencial quântico de de Broglie, se considerarmos a amplitude A como puramente positiva, ou seja, se assumirmos as coordenadas polares. Isto gera uma descontinuidade nas derivadas, no caso de ondas planas, produzindo poços estreitos atrativos tipo deltas de Dirac, nos zeros de ψ . Porém, isto não provoca grandes consequências pois esta alteração tem medida nula.

Existe também um outro fator que deveria ser considerado nesta nova teoria, como por exemplo, as condições iniciais dos elétrons na saída do filamento incandescente, como é sugerido por Bohm na

sua teoria de variáveis escondidas. Se bem que esta hipótese será coerente com a nova formulação, neste caso particular, podemos negligenciá-la, como veremos no próximo capítulo.

(2.7). COMENTÁRIOS.

A determinação da constante do novo potencial quântico poderia ser abordada de maneira diferente se considerarmos que a constante β dependa de outras constantes físicas. É instrutivo assinalar que nos casos de interferências de elétrons, ao considerar a função de onda normalizada, seria adequada uma constante da ordem de $(10^{-8})^3 \text{ cm}^3$. Porém esta constante não se mostra de acordo com as interferências observadas nos nêutrons, dado que a amplitude do potencial quântico seria muito pequena.

Se conjecturamos uma dependência com outras constantes físicas como massa, carga, etc; os fenômenos nítidos de interferência dependeriam sensivelmente da constante de normalização da função de onda, isto é do comprimento de onda, o que não parece ser o caso.

Devemos ressaltar, no entanto, que existe uma outra forma de definir a constante β , sendo esta o inverso do valor máximo de $|\psi(r_0)|^2$, isto é, na região das condições iniciais. (em muitos casos esta última definição de β equivale a originalmente proposta)

(3.1). EFEITO AHARONOV E BOHM.

Na presença de um potencial electromagnético, o potencial quântico deve adquirir uma forma consistente com a própria equação de Schrödinger, por conseguinte, o potencial quântico efetivo é:

$$V_q = \beta \frac{\hbar^2}{2m} \left((\nabla\psi^* + \frac{ieA}{\hbar c} \psi^*) (\nabla\psi - \frac{ieA}{\hbar c} \psi) - \beta (E-V) |\psi|^2 \right) \quad (3.1)$$

O efeito Aharonov e Bohm^(1,2) pode ser observado em uma experiência similar à das duas fendas, quando se inclui um potencial vector, o qual é geralmente gerado por um solenóide "longo" (de forma a ter um campo magnético nulo no seu exterior), que se encontra entre as trajetórias dos elétrons, como podemos ver na figura (7) :

Desse modo, são evitadas as forças de Lorentz⁽³⁾. No entanto, a função de onda se modifica em cada trajeto da seguinte maneira:

$$\psi = \psi_0 \exp \frac{ie}{c} \int_{P_i}^{P_f} \vec{A} \cdot d\vec{x}; \quad (1/2m) (-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A)^2 \psi = E \psi \quad (1.2)$$

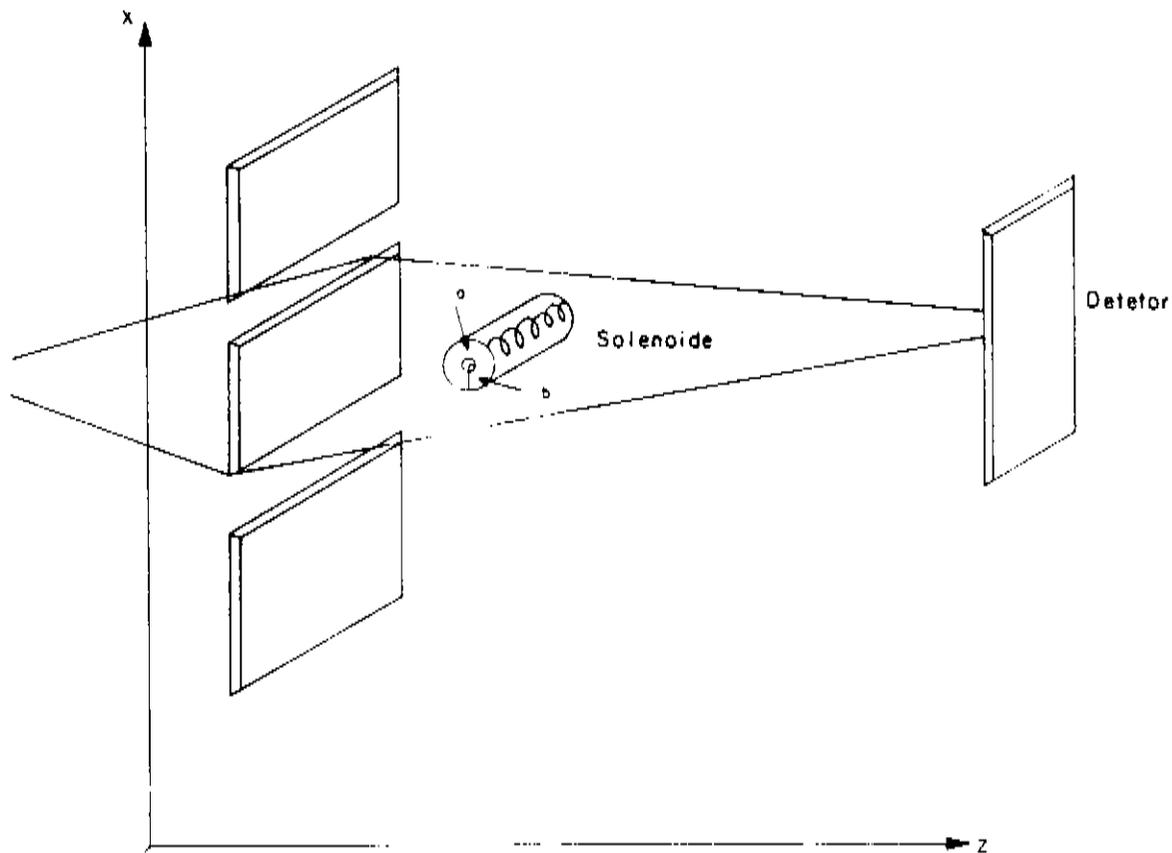


FIG (7)

Consideraremos a mesma função de onda utilizada na experiência das duas fendas, mas devemos incluir a fase provocada pelo potencial vector, temos então:

$$|\psi|^2 = \cos^2(k_x x + \phi) \quad ; \quad 2\phi = e/\hbar c \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad (1.3)$$

Onde $\oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$ é o fluxo magnético encerrado entre os trajetos. Este efeito de mudança da fase tem sido observado em diferentes experiências realizadas⁽⁴⁻⁷⁾, não possuindo análogo

clássico.

Uma quantização do fluxo magnético⁽⁸⁾ nas unidades $\frac{2\pi\hbar c}{2e}$ 10^{-7} gauss cm^2 tem sido também observada no efeito Josephson, onde o meio de propagação dos elétrons é um anel superconductor. É útil lembrar que o efeito Meissner Ochsenfel prevê um campo magnético nulo no interior destes materiais, e que um fator 2 que aparece no fluxo magnético é interpretado como devido a carga efetiva das quasi-partículas previstas na teoria BCS da superconductividade.

Assim o potencial quântico adquire a forma:

$$V_q = \alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m} ((K_x^2 - 2K_x^2 \cos^2(K_x X + \phi)) + (\frac{e^2 A^2}{2mc^2} + \frac{\hbar e}{mc} K_z A_z)) \cos^2(k_x X + \phi) \quad (1.4)$$

Temos dois casos qualitativamente diferentes, que são mostrados na fig (8) onde determinamos por conveniência a carga do elétron e como $|e|$, definindo as magnitudes R ; L como:

$$R = \frac{\hbar^2}{2m} (K_x^2) \quad ; \quad L = (\frac{e^2 A^2}{2mc^2} + \frac{\hbar e}{mc} (K_z A_z)) \quad (1.5)$$

Nas experiências onde se comprova o efeito Bohm & Aharonov, são utilizados fluxos magnéticos de ordem $\hbar c/e$ gauss cm^2 , que provoca uma desfasagem ϕ nas faixas de interferências. Por outro lado, o potencial vector exterior ao solenóide^(9,10) é da ordem de.

$$A_{\phi} = \left(\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right) / 2\pi r \quad (1.6)$$

Em geral, a distância do solenóide à placa que registra os impactos é da ordem de 10 cm, e, neste tipo de experiência é utilizado frequentemente um microscópio eletrônico, com longitudes de onda similares a estas estudadas, na experiência de duas fendas. Ademais, é comum que as faixas de interferência sejam amplificadas por outro sistema de lentes eletrônicas, fato que nos indica que o termo $L/R \approx 10^{-2}$, implicando a confirmação do efeito Aharonov e Bohm neste novo quadro interpretativo. Ou seja, é previsto uma simples mudança de fase devida ao fluxo magnético, e este caso pertence ao tipo da fig (8.a)

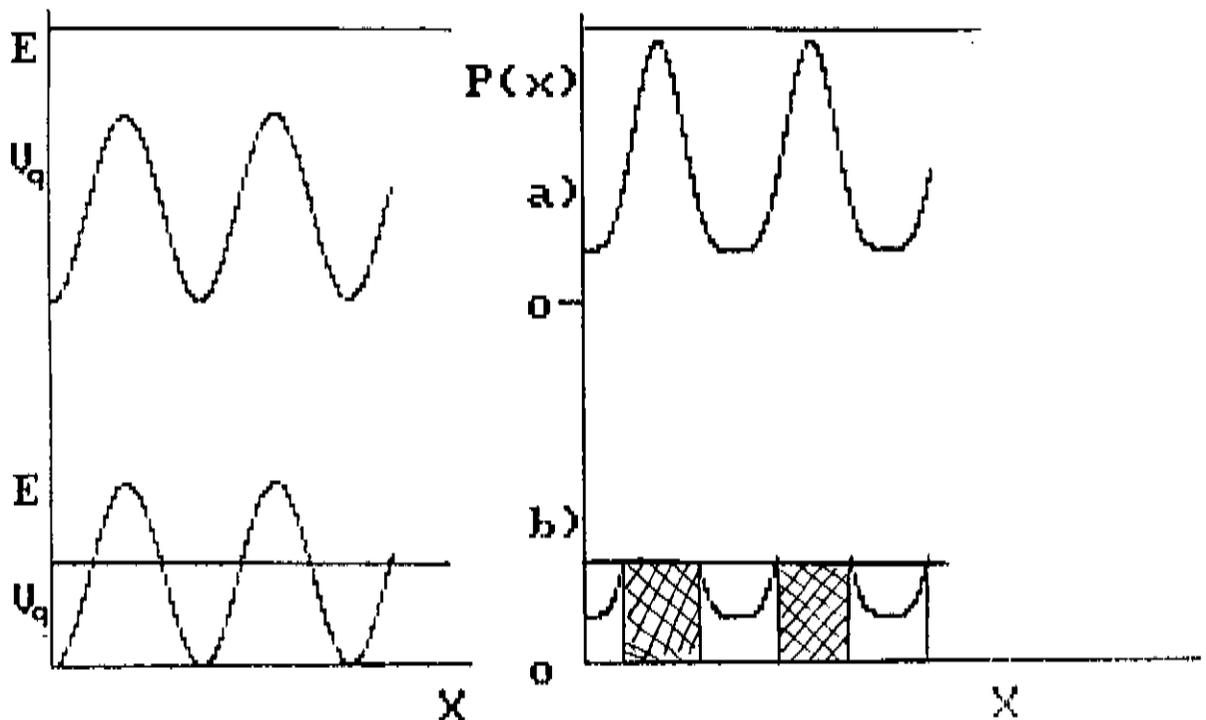


FIG (8)

Sugerimos então uma experiência chave na qual é aumentada a intensidade do potencial vector, de maneira a testar o novo efeito que se mostra na fig(8.b), $L/R \geq 1$. Nos trabalhos realizados em Tübingen são utilizados pequenos solenóides que dificultam maiores intensidades de corrente elétrica. Resulta instrutivo assinalar que para a verificação experimental qualitativa deste possível efeito, não é estritamente necessário que o solenóide esteja no interior dos trajetos, o que facilita radicalmente a preparação experimental.

É importante notar que as zonas proibidas nas faixas de interferência, que são previstas nesta nova teoria não dariam margem a dúvidas, visto que, este efeito dependeria da corrente elétrica dentro do solenóide, e não da difração com o biprisma. Assim outras questões como a relevância das condições iniciais dos elétrons, não seriam capazes de modificar qualitativamente este possível efeito.

(3.2)-SCATTERING

Nesta secção analisamos, as colisões entre próton-próton e elétron-próton, sem considerar o spin, nem os conceitos de partículas idênticas, que serão analisados posteriormente.

Para a colisão próton-próton, ao situarmos no centro de massa, a expressão assintótica da função de onda, é a seguinte:

$$\psi = e^{ikz} + \frac{e^2}{4Er} \sin^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{ikr} \quad (2.1)$$

Consideramos que é a própria onda emergente que provoca o Potencial Quântico (autointeração). Assim este adquire a forma:

$$V_q = \frac{e^4}{16E^2} \left(\frac{\hbar^2}{2mr^4} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{e^2}{r^3} \right) \quad ; m = m_p/2 \quad (2.2)$$

Desenvolvemos uma simulação numérica para o registro das trajetórias, sendo que esta consiste fundamentalmente em computar através do método de Runge e Kutta, os lançamentos de um próton contra um outro em repouso, com diferentes condições iniciais, como indica a figura (9) (respeitando a uniformidade do parâmetro de impacto s)

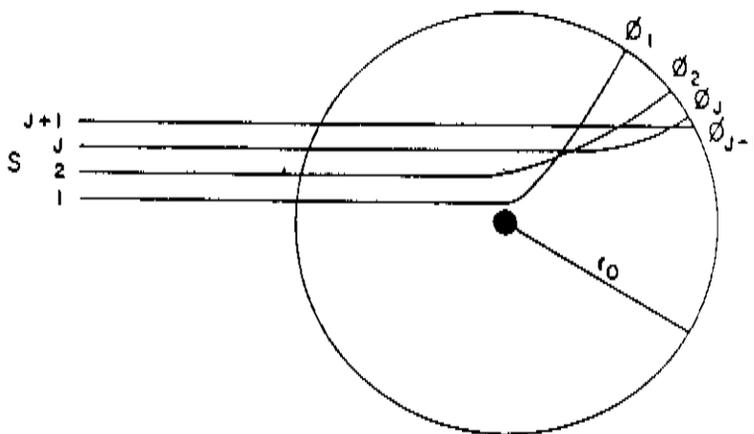


FIG (9)

Lembramos a relação entre os ângulos do sistema do laboratório com o do centro de massa $\theta_{lab} = \frac{1}{2} \theta_{cm}$, que é necessária para a redução à um caso de um corpo. Fixamos então um raio arbitrário r' , de maneira a registrar o ângulo ϕ_j da partícula emergente neste r' . A simetria azimutal nos permite fazer uma análise bidimensional, porém a densidade angular de difusão deve se multiplicar pelo fator $2\pi(j+1/2)$, para a transformação ao caso tridimensional, (dada condição da uniformidade do parâmetro de impacto). Uma forma de obter a probabilidade de difusão, é o de dividir em diferentes setores angulares, como por exemplo, $\pi/1000$, de maneira a somar todos os casos de emergência angular que se encontram nas mesmas divisões. O programa é conferido inicialmente com os modelos clássicos de difusão, o que nos indica a constante de proporcionalidade da secção de probabilidade de scattering. Assim, para um caso de 2,4 MEV (Lab), incluímos o Potencial Quântico que apresenta a forma indicada na fig (10)

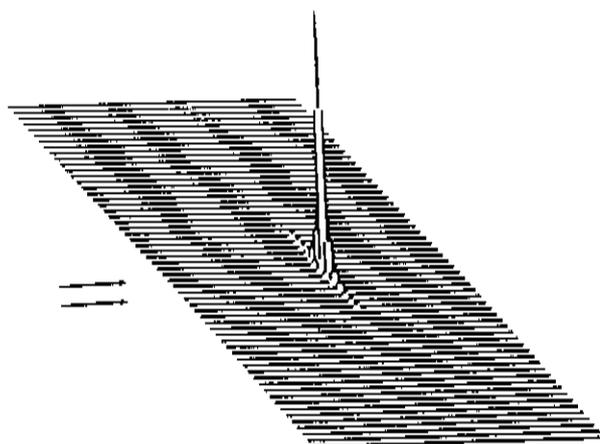
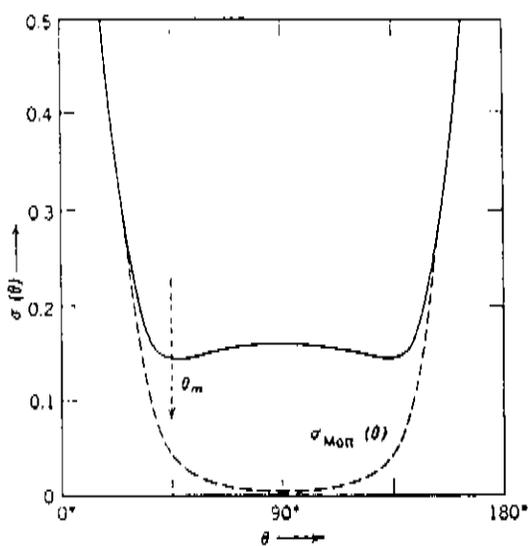


FIG (10)

Como podemos observar a força repulsiva deste potencial, impede um retorno do próton, visto que este não o deixa se aproximar demasiado da outra partícula, porém favorece os desvios intermediários. Comparamos então na fig (11.a) os dados experimentais^(11,12) com o caso puramente coulombiano (linhas entrecortadas), e na fig(11.b) está representada a simulação numérica.

a)



b)

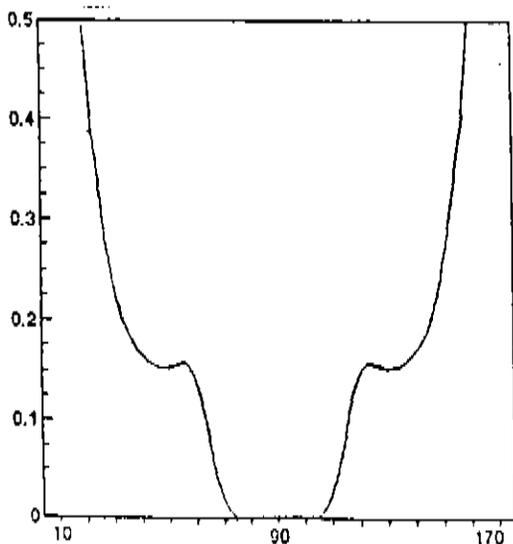


FIG (11)

A discrepância para os ângulos de retorno podem ser gerados por diferentes fatores, que enumeramos:

1) Como estes casos correspondem à scattering de tipo rasante; o spin, forças de tipo nuclear, e modelos de distribuição de carga deveriam ser incluídas. Devemos lembrar que a própria interpretação usual deve acudir a estas considerações, para obter uma laboriosa concordância teórico-experimental.

2) Temos utilizado uma solução assintótica, válida para $kr \gg 1$, o que poderia explicar estas discordâncias. Também, se adotou para maior simplicidade, que a onda quântica emergente está presente antes da própria "difusão da partícula". Fato que significaria que o pacote de onda incidente é muito estendido.

Devemos notar que em termos de porcentagem total estas discordâncias são pequenas, e assim podemos considerar que estes resultados são encorajadores. Foram também checados outras gamas de energias não relativistas apresentando o mesmo grau de concordância teórico-experimental.

(3.3)- ESTADOS NÃO ESTACIONÁRIOS

Estimamos que a formulação da teoria de estados não estacionários deve ser análoga à axiomática probabilística usual. A razão desta hipótese é que um tipo de não-localidade também se impõe nesta nova formulação. Devemos lembrar que a equação de autovalores pressupõe condições de contorno suficientemente

distantes como para ser assumida por uma teoria puramente local, (nos seus tempos de transição). Assim estimamos que a geração da função de onda quântica é processada nos estados não estacionários, e que estes devem possuir um caracter não local. Ademais, os fenômenos de emissões e absorções apresentam grandes dificuldades para uma descrição puramente determinista.

Parece então, ser necessária uma ruptura da localidade e do determinismo, a qual podemos introduzi-la, se considerarmos esta formulação como um limite não relativista de uma teoria covariante. Esta versão probabilística não local pode ser incorporada nesta nova teoria se postularmos uma fractalização da métrica nos estados não estacionários. A adoção da interpretação ortodoxa para os estados de transição pode ser justificada matematicamente se procedemos de forma análoga a formulação lagrangeana da teoria mecânica relativista (13), porém quando conjeturamos a existência de um fator $(1+G(M(|\psi|),t))$ que multiplique o intervalo ds , temos então:

$$L = -\delta^3(r-r(t)) \{ mc \, ds \, (1+G(M(|\psi|),t)) + V_c(r) + V_q(\psi, \nabla\psi, \dots) \} \quad (3.1)$$

$$a) \quad M(|\psi|) = \partial |\psi|^2 / \partial t ; \quad b) \quad M(|\psi|) = 0 \quad (\text{Estado estacionário}) \quad (3.2)$$

Se exigirmos que o fator $G(M(|\psi|),t)$ seja igual a zero para os estados estacionários (ver (3.2b)), obteremos a formulação da nova teoria de potencial quântico no limite não relativista ; e se nos estados não estacionários este fator não for diferenciável,

a velocidade da partícula permanecerá indefinida⁽¹⁴⁾ . Assim se a equação de Schrödinger continua a ser a condição que otimiza o lagrangeano em função das variáveis de campo, então nestas circunstâncias uma linha de raciocínio probabilística similar a adotada por Born⁽¹⁵⁾ se impõe para os estados não-estacionários.

Como na interpretação usual , consideramos que as emissões fotônicas são consequência das transições da função de onda e as probabilidades de transição seriam determinadas pela axiomática probabilística .A evolução temporal de um sistema no intervalo de emissão deve ser determinada através do teorema de Ehrenfest. De modo que, no caso limite (não estacionário + estacionário) podemos esperar que as condições iniciais de um estado estacionário obedeçam as distribuições de probabilidade da Teoria Quântica convencional;(condições iniciais que incluem os autovalores).Deste modo, podemos interpretar os estados de transição, como um mecanismo probabilístico não local das leis quânticas de conservação . Na análise da experiência das duas fendas consideramos que as posições iniciais dos elétrons eram aleatórias, no entanto, como $|\exp(ik_z z_0)|^2 = 1$, não foi necessária a inclusão destas condições iniciais de maneira explícita, porém o foi de forma implícita ao supor que a partícula e a função de onda surgiram da mesma região do espaço no filamento incandescente.

Resulta instrutivo assinalar que ao conjecturar esta hipótese de índole probabilística não local, evitamos a exigência de um sincronismo temporal entre as energia total do sistema e a energia quântica imposta pela equação de Schrödinger . Dado que se adotássemos uma descrição em termos de equações dinâmicas

clássicas para os estados não estacionários, a dependência temporal das funções de onda no potencial quântico perturbaria a partícula de uma forma não conservativa, devendo neste caso se impor um tipo de ligadura ad hoc. Devemos enfatizar que nosso interesse não é o de preservar todas as intuições de índole clássicas ou relativistas, se não a de possuir um sistema lógico operacional livre de contradições.

É interessante notar que durante os estados estacionários, podemos assumir os princípios relativos a uma métrica bem definida, e devemos também lembrar que as relações relativistas são comumente utilizadas na própria teoria quântica convencional. Assim esta nova conjectura dualista nos permite contornar uma axiomática sincrética.

R.Feynmann elaborou modelos de radiação electromagnética, com potenciais avançados e retardados⁽¹⁶⁾ no tempo. Este autor foi motivado pelo problema típico, de como uma partícula carregada recebe a informação das deformações de seu campo electromagnético provocadas pela sua própria aceleração. Em nossa interpretação, as regras de conservação que são processadas nos estados de transição não são obrigados a respeitar o princípio de localidade relativista. Desta forma, podemos estimar que os valores iniciais de energia num espectro semicontínuo regulam, durante os estados de transição, as perdas fônicas de energia do campo electromagnético.

As questões suscitadas pelas desigualdades de Bell que são estudadas na secção (B), também sugerem uma teoria quântica não local, de maneira que este dualismo, local-não local, parece ser

necessário se não desejarmos uma axiomática sincrética.

A hipótese feita por Bohm, de que variáveis escondidas fazem corresponder estatisticamente as condições iniciais de um sistema de modo a ser coerente com as probabilidades Quânticas (cap 2 sec 4), parece ser equivalente a nossa hipótese. Todavia, as condições iniciais de Bohm se ajustam de acordo com o valor de ∇S , de modo a aceitar um tipo de sincronismo entre partícula e função de onda. Isto é, se um princípio sincrónico é assumido ad hoc, efeitos não locais seriam somente uma manifestação particular desta forte condição que presume um tipo de ordem implícita.

(3.4). OSCILADOR HARMONICO

A equação de Schrödinger para um oscilador harmônico unidimensional é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{1}{2} m \omega x^2 \psi = E \psi \quad (4.1)$$

O Potencial Quântico para o estado fundamental é da seguinte forma :

$$V_Q = \frac{\hbar^2}{2m x_0^2} \left(2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right) e^{-\left(\frac{x}{x_0} \right)^2}; x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \quad (4.2)$$

A densidade de probabilidade se obtém adicionando este novo potencial quântico ao potencial clássico $V_C = \frac{1}{2} m \omega x^2$ para a determinação da velocidade da partícula. Devemos também multiplicar

$|v^{-1}|$ pela distribuição das condições iniciais ψ_0^2 , como foi postulado na secção anterior, de forma a ter :

$$P(x) = \alpha_0 \psi_0^2 (E - V_c - V_q)^{-1/2} ; \quad \psi_0^2 = \exp(-(x/x_0)^2) \quad (4.3)$$

Podemos observar na fig (12.a) que estes resultados são intermediários entre a teoria quântica usual e a mecânica clássica fig (12,b) ; entretanto as medidas experimentais são em geral de caracter spectrográfico⁽¹⁷⁾, resultando na dificuldade de estabelecer critérios para avaliação desta previsão. Ademais, estas deveriam depender do método experimental utilizado (especialmente de como se perturbam os níveis de energia do sistema). No fim deste capítulo propomos um novo método óptico de observação que se deriva desta nova visão Quântica.

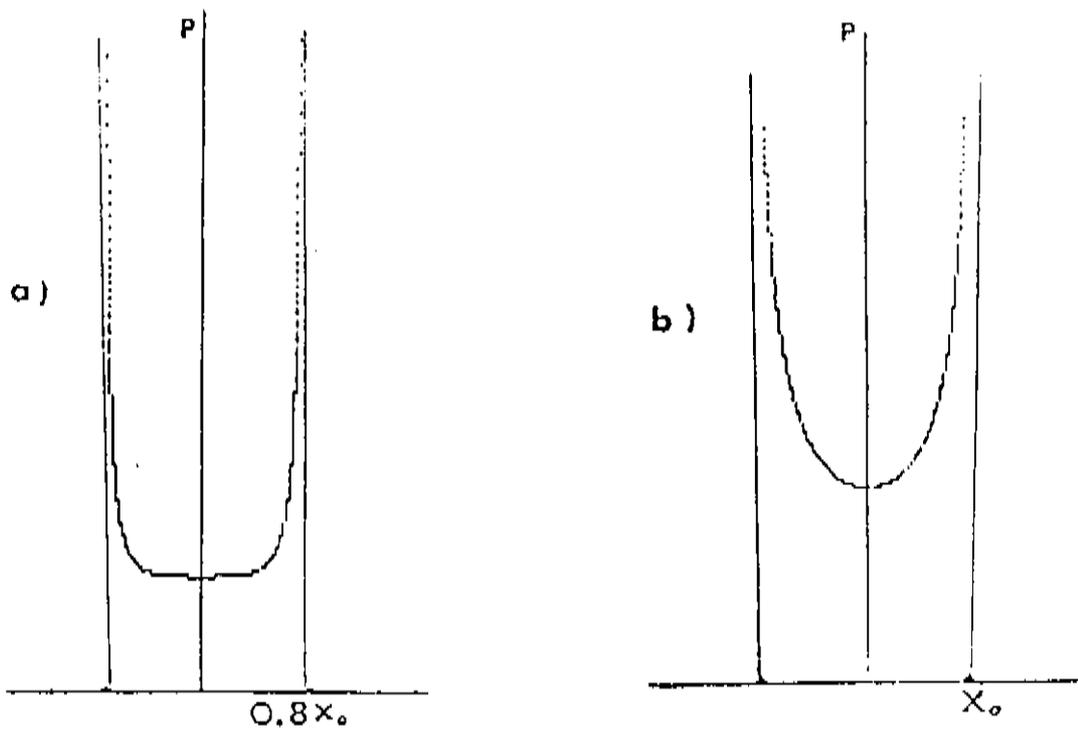


FIG (12)

Devemos ressaltar que se utilizarmos a constante β como sendo o inverso do valor máximo de $|\psi|^2$ (como foi sugerido também no fim do capítulo 2), os pontos de retornos coincidem com a mecânica clássica, isto é, estão localizados em $\mp X_0$

As previsões das teorias de de Broglie e Bohm parecem ser menos encorajantes para estes casos, (no sentido de uma medição individual), dado que nas mesmas, deve se presumir um estado de repouso.

(3.5)- ESTATISTICAS E MUITOS CORPOS

A introdução da equação de Schrödinger para muitas partículas deve consistir na integração por partes de uma funcional hamiltoniana, que junto às condições de normalização nos permita a obtenção desta equação. Deste modo, o funcional a otimizar é o próprio potencial quântico efetivo, que apresenta a forma:

$$V_Q = -\beta \left(\frac{\hbar^2}{2m} (|\nabla_{x_1} \psi|^2 + \dots + |\nabla_{x_n} \psi|^2) - (E - V_C) |\psi|^2 \right) \quad (5.1)$$

As equações de movimento são do tipo:

$$M_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = - \nabla_{x_i} V_C(x_i, \dots, x_n) - \nabla_{x_i} V_Q(x_i, \dots, x_n) \quad (5.2)$$

Faremos somente alguns comentários essenciais das particularidades deste campo quântico:

As estatísticas de Fermi-Dirac e as de Bose-Einstein, são deduzidas de forma usual; isto é, no caso de se tratar de partículas idênticas, as propriedades do operador de permutação na equação de Schrödinger sugerem soluções simétricas ou antisimétricas da função de onda. A degenerescência da função de onda ante as permutações inobserváveis entre as partículas idênticas resulta ser a causa das estatísticas quânticas. Devemos notar uma vez mais de que em nossa formulação, as energias iniciais do sistema são deduzidas da função de onda. A noção de estados estendidos é completamente irrelevante neste novo contexto. Para muitos corpos podemos esperar que o potencial quântico tende a zero, (dado seus termos individuais oscilantes). É útil lembrar que somente as condições iniciais de energia são exigidas para cada estado estacionário. Não postulamos uma correspondência temporal sincrônica entre a energia cinética individual de cada partícula e sua energia inicial. A dependência espacial do potencial quântico, mesmo quando a consideramos como sendo quase nula, pode provocar uma curta flutuação, capaz de produzir variações nas energias cinéticas das partículas.

.Toda emissão ou absorção de fótons, fônons, etc; seria causada pelas transições da função de onda do sistema. Assim o conceito de entropia deve ser entendido em relação as possibilidades das transições de energia de um sistema. "O Paradoxo de Gibbs⁽¹⁸⁾" deve ser interpretado então como uma tentativa de definir a função de partição, em termos da energia cinética das partículas, que leva a magnitudes mal definidas.

Em geral, podemos esperar que tratando-se de poucas

partículas (idênticas ou não) a condição seguinte:

$$E - V_c(x_1, \dots, x_j) - V_q(x_1, \dots, x_j) = \min \quad (5.3)$$

nos forneceria aproximadamente a configuração mais provável das posições das partículas, para um estado estacionário.

Um dos aspectos mais curioso se oferece quando dois sistemas isolados começam a se aproximar, como, por exemplo, um nêutron e um próton. Assim se imaginarmos, funções de onda relativamente extendidas, o nêutron não teria interação com o potencial quântico do próton e vice-versa. Este tipo de situação parece conferir um carácter subjetivo ao campo quântico, retirando-lhe certa realidade física. No entanto, deve também existir um potencial quântico comum produzido pela interação entre estas partículas (gravitacional, spinorial etc), de modo que nem sempre a função de onda individual de uma partícula deve ser considerada como observável. De qualquer forma, o conceito de linha de força sobre uma partícula de prova, onde não se considere a função de onda total do sistema, deve ser abandonada neste novo contexto teórico.

(3.6). SPIN 1/2

Intoduziremos o spin, de forma similar a realizada por Pauli⁽¹⁹⁾, assim postulamos um potencial quântico efetivo:

$$V_q = \beta \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \chi^\dagger \nabla \psi \chi - \beta (E - V_c - \frac{e\hbar}{2mc} (\hat{S} \cdot \hat{B})) \psi^* \chi^\dagger \psi \chi \quad (6.1)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; \chi^\dagger = (\alpha^* , \beta^*) ; \chi^\dagger \chi = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (6.2)$$

Derivando nas equações de Lagrange pelas variáveis de campo $\psi^* \chi^\dagger, \nabla \psi^* \chi^\dagger$ é obtida a equação estacionária de Pauli para partículas neutras. Apesar de que nos estados estacionários a fase temporal de ψ desaparece do potencial quântico, devemos incluí-la explicitamente, e o fator que contém a energia no potencial quântico deve ser substituído por:

$$E \psi^* \chi^\dagger \psi \chi = i \frac{\hbar}{2} (\psi^* \chi^\dagger \partial_t \psi \chi - (\partial_t \psi^* \chi^\dagger) \psi \chi) \quad (6.3)$$

A generalização para as partículas com carga é evidente se introduzimos o potencial vector da mesma forma a como foi realizado na primeira secção. A seguir estudaremos uma das experiências mais contra intuitiva da Mecânica Quântica ,a qual consiste em enviar um feixe monoenergético de neutrons,de modo similar a experiência de duas fendas⁽²⁰⁾ ,mas que num dos trajetos encontra um campo magnético B, capaz de provocar uma precessão no spin do nêutron, no seu tempo T de passagem pela região de campo B não-nulo.

Os registros de impactos no detector^(21,22) confirmam as interferências previstas pela axiomática usual,as quais apresentam uma interferência destrutiva para o caso de uma rotação do spinor em um ângulo de 2π , fato que se deve na teoria ao fator

semi-inteiro do spin do nêutron . A frequência de precessão do spinor é neste caso :

$$\omega = g_n \frac{e B}{M_n C} \quad ; \quad g_n = -1.91 \quad (6.4)$$

É prevista uma interferência quântica do tipo $\cos^2(k_x x + \frac{\omega T}{4})$, que resulta altamente contraintuitiva, devido ao fato de que uma rotação do spinor em 2π , provocaria um efeito observável, que desaparece para uma rotação de 4π . Este fato foi motivo de grande interesse, por exemplo, Wheeler⁽²³⁾ o ilustra gráficamente através da analogia seguinte:

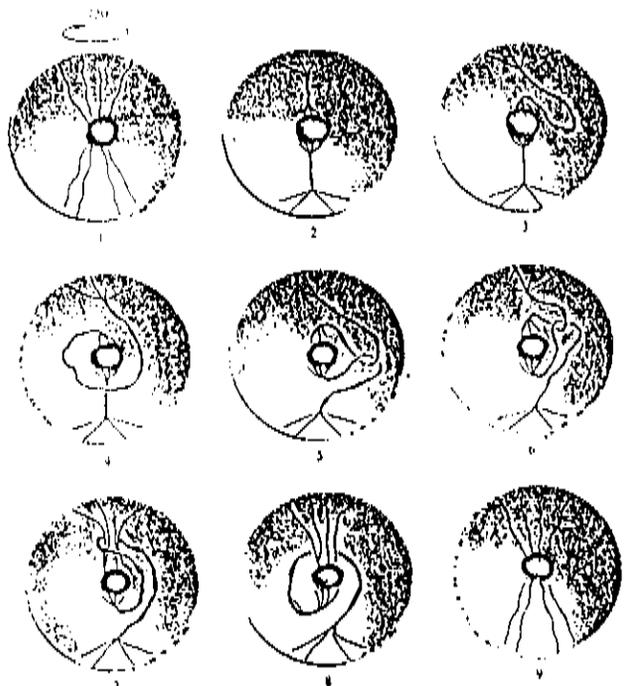


FIG (13)

Esta representação parece ter dado num sentido heurístico um impulso a teoria de fibrados aplicadas a teoria quântica.

Porém a interpretação deste efeito é de grande simplicidade nesta nova formulação, devido ao fato que não presumimos uma identidade entre função de onda e partícula. Se calcularmos a interferência das ondas próximas aos detectores ($B=0$) por exemplo, para um spin inicial $z^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, devemos então considerar a defasagem provocada pela diferença da evolução temporal da função de onda entre ambos trajetos que é:

$$\psi_{z^+} = e^{-iEt/\hbar} e^{iK_z Z} \left(e^{iK_x X} + e^{-iK_x X - i\omega T/2} \right) \quad (6.5)$$

O Potencial Quântico resulta ser então:

$$V_q = \alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \left(1 - 2 \cos^2 \left(K_x X + \frac{\omega T}{4} \right) \right) \quad (6.6)$$

Temos adotado um pacote de onda similar ao da experiência de duas fendas, analisado no cap 2, de modo que este efeito deveria ser devido pura e simplesmente à diferença de fase provocada por uma evolução temporal diferente da função de onda entre seus trajetos.

(3.7) - ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Ao situarmos no centro de massa, a equação de Schrödinger

para o átomo de hidrogênio no seu estado fundamental, temos:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + l(l+1) \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}\right) \psi(r) = E_0 \psi(r) \quad (7.1)$$

O potencial quântico na ausência de campo magnético não apresenta dependência explícita do spin, para o estado fundamental do átomo de hidrogênio e este resulta ser:

$$V_q = \psi_0^2 \left(\frac{e^2}{a_0} - \frac{e^2}{r} \right) \quad ; m = m_p m_e / (m_p + m_e) \quad (7.2)$$

$$\psi_0 = \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad ; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (7.3)$$

A condição inicial do momentum angular $l=0$ nos indica que o elétron cai ao núcleo : a fig (14) mostra a densidade de probabilidade a qual é calculada de forma análoga a realizada no oscilador harmônico.

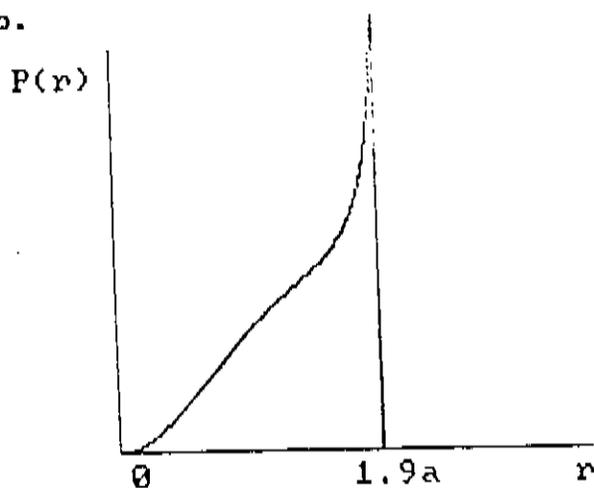


FIG (14)

O valor médio de r é da ordem de 0.72 \AA , valor que se encontra entre o raio teórico de Bohr igual a 0.53 \AA e o raio iônico experimental⁽²⁴⁾ do hidrogênio igual a 0.84 \AA . No entanto, esta previsão parece apresentar um problema o qual se refere ao curto tempo de caída do elétron ao núcleo. Esta questão é resolvida se lembrarmos de que toda transição fotônica de energia deve ser processada a um nível de função de onda, e deste modo, não deveríamos esperar um scattering com o núcleo. As vidas médias dos estados ressonantes deduzidos pela teoria ondulatoria, devem ser também respeitadas nesta nova formulação. No exemplo das duas fendas a partícula pode criar através do seu potencial clássico uma outra função de onda comum com o detector, o que possibilita uma transição energética. Devemos notar, que mesmo incluindo as forças nucleares, a axiomática usual deve prever aproximadamente os mesmos estados estacionários para o átomo de hidrogênio. Desta forma, deve ocorrer uma transmissão ou a reflexão do elétron, devido ao potencial nuclear. Esta interpretação não implica em um tipo de tunelamento semiclassical sobre barreiras de potencial, mas sim uma renúncia ao conceito de "substância clássica da matéria" como foi também abandonada pela teoria quântica de campo.

Uma outra questão a ser analisada é concernente as medidas realizadas nas experiências com aparelhos Stern - Gerlach onde se observa um spin $1/2$ quantizado nas direções do eixo do gradiente do campo magnético do aparelho. Resulta útil lembrar das antigas controvérsias dos análogos clássicos⁽²⁵⁾ do spin. Isto é, o potencial quântico relativo ao centro de massa nestas condições experimentais tende a zero, devido as soluções assintóticas do

tipo:

$$\psi (r, \vartheta, \phi) = \frac{e^{-ikr}}{r} \psi (\vartheta, \phi) \quad (7.4)$$

De modo que nestas experiências deve ser medido o momento orbital do spin que pertence a parte clássica do lagrangeano. Notemos então que devemos conjecturar que o spin do elétron possui um análogo clássico. De forma que num cálculo mais refinado das trajetórias de partículas interaguintes devem ser consideradas também as forças de Lorentz provocadas pelos pequenos campos magnéticos do spin.

O mais importante na experiência de Stern-Gerlach, analisada de um ponto de vista da teoria de estados estacionários, é que a condição de quantização inicial do momento angular magnético evita a longa precessão prevista pela teoria clássica. De modo que o itinerário da partícula (átomo neutro) seria do tipo $\frac{1}{2m} F t^2$ como foi calculado inicialmente⁽²⁶⁾ na teoria quântica do spin.

Resulta instrutivo assinalar que também é possível ter um momento angular não nulo nos estados s nesta nova formulação, se adotarmos as soluções da função de onda que são descartadas na interpretação usual por ser singulares na origem ($r \rightarrow 0$). Assim são obtidas órbitas semi-circulares próximas aos raios atômicos.

(3.8)- DESIGUALDADES DE BELL

Se em uma desintegração ou colisão, são emitidas em sentidos opostos duas partículas idênticas em estado singlet, e cujas polarizações são determinadas por dois detectores (Stern-Gerlach), que estejam paralelamente rodados em um ângulo relativo $\theta_a - \theta_b = \theta_{ab}$, como indica a fig(15), podemos definir as probabilidades de coincidências como $P(\vec{a}, \vec{b})$ e que é calculada pela multiplicação dos componentes quantizadas ± 1 das duas medições.

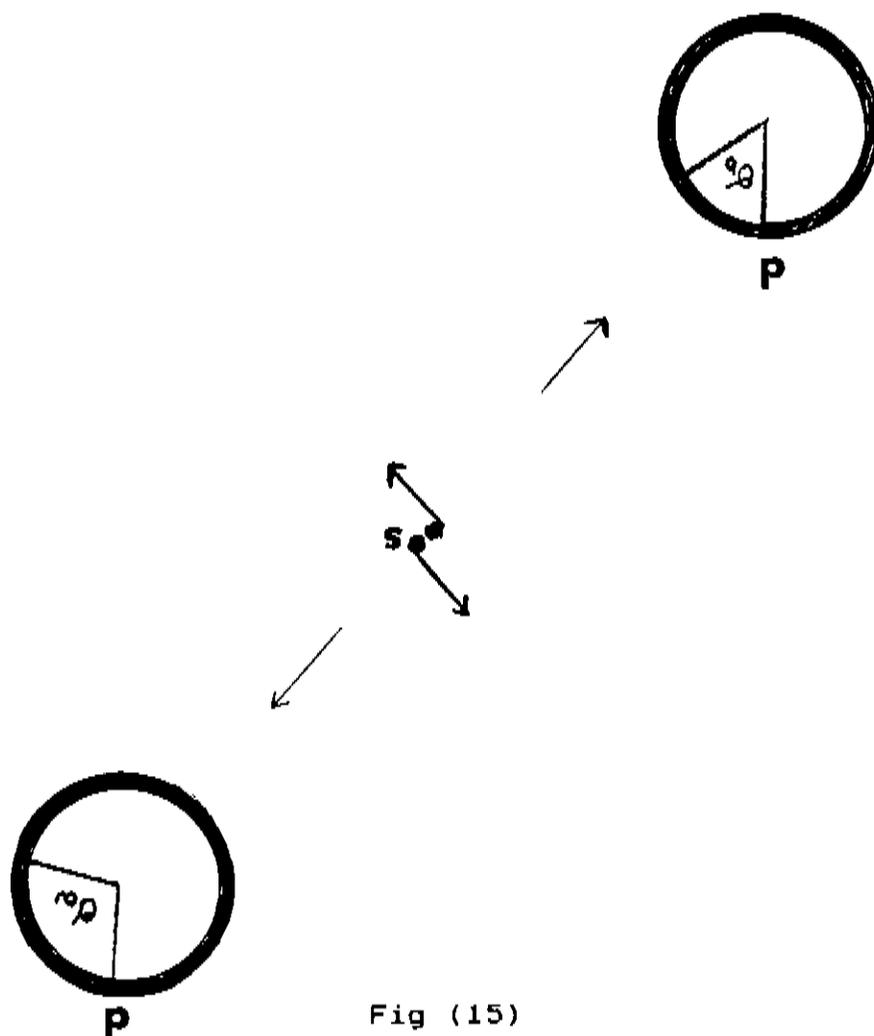


Fig (15)

Daremos uma nova noção geométrica das desigualdades propostas por Bell⁽²⁷⁾. Consideraremos por simplicidade que as partículas e seus spin emergem sempre de maneira idêntica. Assim se imaginarmos uma medição em cada uma das quatro configurações de detectores, teremos que a magnitude:

$$\begin{aligned}
 & |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}')| + |P(\vec{a}', \vec{b}) + P(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(++ | \vec{a}, \vec{b}) - P(++ | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(++ | \vec{a}', \vec{b}) + P(++ | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(++ | \vec{a}, \vec{b}) - P(++ | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(-- | \vec{a}', \vec{b}) + P(-- | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(++ | \vec{a}, \vec{b}) - P(+ - | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(++ | \vec{a}', \vec{b}) + P(+ - | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(++ | \vec{a}, \vec{b}) - P(+ - | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(-- | \vec{a}', \vec{b}) + P(-- | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(+ - | \vec{a}, \vec{b}) - P(++ | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(+ - | \vec{a}', \vec{b}) + P(++ | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \quad (8.1) \\
 & |P(+ - | \vec{a}, \vec{b}) - P(++ | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(-- | \vec{a}', \vec{b}) + P(-- | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(+ - | \vec{a}, \vec{b}) - P(+ - | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(+ - | \vec{a}', \vec{b}) + P(+ - | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \\
 & |P(+ - | \vec{a}, \vec{b}) - P(+ - | \vec{a}, \vec{b}')| + |P(-- | \vec{a}', \vec{b}) + P(-- | \vec{a}', \vec{b}')| \leq 2
 \end{aligned}$$

Podemos constatar facilmente que esta quantidade está limitada por 2 (faltam na tabela a metade dos casos, onde a polarização em \vec{a} corresponde à -1). Temos presumido que os detectores não possuem a propriedade de modificar as condições iniciais impostas, por exemplo, quando estes estão suficientemente longe. Assim se impomos um comportamento determinístico, onde as condições iniciais são idênticas em todos os casos, cada spin deve se polarizar de maneira similar para com as outras medições onde o detector encontra-se igualmente rodado, visto que a partícula sofreria as mesmas forças no caminho ao detector.

Podemos modificar as condições iniciais e obter as mesmas desigualdades. Assim se estas são distribuídas de maneira arbitrária, a desigualdade deveria ser satisfeita para as condições impostas. Outros tipos de desigualdades têm sido demonstradas (28,29) por diversos autores, contudo, nem sempre as hipóteses são equivalentes.

As previsões da teoria quântica que em geral estão de acordo com os resultados experimentais (30), podem violar estas desigualdades para certas configurações angulares dos detectores. Fato que também ocorre com as coincidências de polarização de fótons de spin 1 (29,31-33). De modo que este tipo de efeito parece proibir possíveis teorias quânticas realistas locais. Na interpretação usual, os estados estendidos de probabilidade e seu colapso instantâneo impedem os argumentos deterministas locais apresentados nesta demonstração geométrica.

Em princípio podemos argumentar que uma não localidade pode ser adotada na nossa formulação, nos estados de transição, provocada pela medição do spin. A fase de Berry é comumente utilizada (34) na descrição deste tipo de fenômeno não local. Porém resulta interessante fazer certos comentários.

Na interpretação sincrônica de Bohm parece que o potencial quântico deveria atuar a distância e de forma instantânea para que suas previsões sejam idênticas as quânticas. No entanto, existe a possibilidade de se tratar de uma questão de condições iniciais. Apesar de que em geral é enfatizada a primeira hipótese, a segunda é também adequada, dado que o sincronismo proposto por Bohm teria sua origem nas próprias condições iniciais, as quais dependeriam

de variáveis escondidas de índole não local.

É importante notar que na exposição geométrica da desigualdade de Bell, presumimos os detectores longe da região da emissão. No entanto, o fenômeno de quantização do momentum angular magnético na teoria de uma partícula, deve ser obtida mesmo com campos magnéticos infinitesimais. Assim, uma pequena amplitude de um campo magnético não deveria ser negligenciada, e a superposição dos campos dos detectores na região da emissão, poderia ser a causa da violação das desigualdades de Bell. Os pequenos gradientes de campo magnético seriam diferentes em cada caso de rotação relativa entre os detectores. Deve-se enfatizar que nesta nova demonstração geométrica das desigualdades de Bell é absolutamente necessário que as condições iniciais não dependam de maneira arbitrária do ângulo relativo entre os dois detectores. Por exemplo, estimaremos que um detector "ideal" se comporta de maneira a medir como spin up, todos os spins que cheguem a ele, entre o intervalo $(-\pi/2 + \theta_a, \pi/2 + \theta_a)$, com respeito a seu eixo de simetria situado no ângulo θ_a . Então, devemos impor que as distribuições angulares iniciais f do estado singlet devem satisfazer as seguintes equações integrais :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \nabla_B, \nabla_B^2, \dots) d\theta = 1 \quad (8.2)$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2 + \theta_{ab}} f(\theta, \nabla B, \nabla^2 B) d\theta = 1/2 \sin^2 (1/2 \theta_{ab}) \quad (8.3)$$

Supomos por simplicidade que $\theta_a = \pi/2$, cuja a primeira condição (8.2) é relativa a uma distribuição normalizada, e a segunda condição (8.3), é de satisfazer as probabilidades quânticas N que geram as coincidências $P(\vec{a}, \vec{b})$:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = N_{++} + N_{--} - N_{-+} - N_{+-} = -\cos(\theta_{ab}) \quad (8.4)$$

$$N_{+-} = N_{-+} = 1/2 \cos^2 (1/2 \theta_{ab}) ; \quad N_{++} = N_{--} = 1/2 \sin^2 (1/2 \theta_{ab}) \quad (8.5)$$

As outras equações que podem ser estabelecidas são equivalentes, se considerarmos as simetrias óbvias entre spin up e down. Naturalmente podemos descartar as soluções factorizáveis entre as variáveis \vec{a}, \vec{b} . Para uma possível interpretação física destas distribuições iniciais do estado singlet, é conveniente impor a condição de simetria entre os detectores $f(\theta, \nabla B, \dots) = f(|\theta - \theta_{ab}/2|, \nabla B, \dots)$

Uma simples inspeção geométrica intuitiva nos indica uma grande variedade de soluções possíveis (trata-se de uma equação funcional com várias variáveis). Resulta evidente que nem todas as emissões sairiam quantizadas no eixo dos detectores, fato que deveria provocar uma precessão dos spins (segundo a formulação da teoria de estados estacionários). É óbvio então que deveríamos

ser obrigados a aceitar pelo menos um estado de transição não local no caminho ao detector. Entretanto, isto não seria equivalente a adoção dos mesmos argumentos quânticos tradicionais para com esta questão, pois estas transições não necessitariam em princípio estar acopladas. Esta experiência hipotética não foi ainda realizada, já que a força de Lorentz provocada por um Stern-Gerlach sobre partículas carregadas, dificultaria a observação da polarização do spin.

Esta discussão tende a evidenciar a grande importância das condições iniciais, as quais podem ser sensíveis aos gradientes dos campos dos detectores. Assim seria interessante provocar uma alteração dos gradientes de campo nas regiões de emissão. É útil notar que nas experiências realizadas com fótons são em geral utilizados grandes polarizadores, e que nem todas as experiências⁽³⁵⁾ estão de acordo com a Mecânica Quântica. No entanto, na experiência de Aspect as condições iniciais parecem ser pouco relevantes, contudo, nesta não se varia sistematicamente os campos nas regiões da emissão dos fótons.

Devemos notar que uma análise geométrica do comportamento da distribuição das polarizações iniciais do estado singlet, dados por $(8,3)$, para o caso em que presumimos que não há precessão no caminho ao Stern-Gerlach, deveria existir uma tendência a polarização perpendicular das mesmas aos campos magnéticos na região de emissão, que em princípio deveria apresentar uma maior intensidade magnética no eixo de simetria dado pelo ângulo $(1/2\theta_{ab})$. De modo que este tipo de polarização inicial dificilmente pode ser prevista por uma representação puramente clássica, mesmo

ao presumir uma super sensibilidade aos gradientes de campo magnético.

É conveniente notar também que a natureza dos detectores não são especialmente questionados na teoria quântica usual⁽³⁶⁾. Por exemplo, parecem existir várias maneiras de superpor campos magnéticos para observar a quantização de um spin 1/2, o que resulta na dificuldade de saber qual seria o detector "ideal". E, se as probabilidades de detecção podem ser ou não modificadas através de pequenas alterações dos campos dos detectores. Todas estas questões são relevantes a nova formulação.

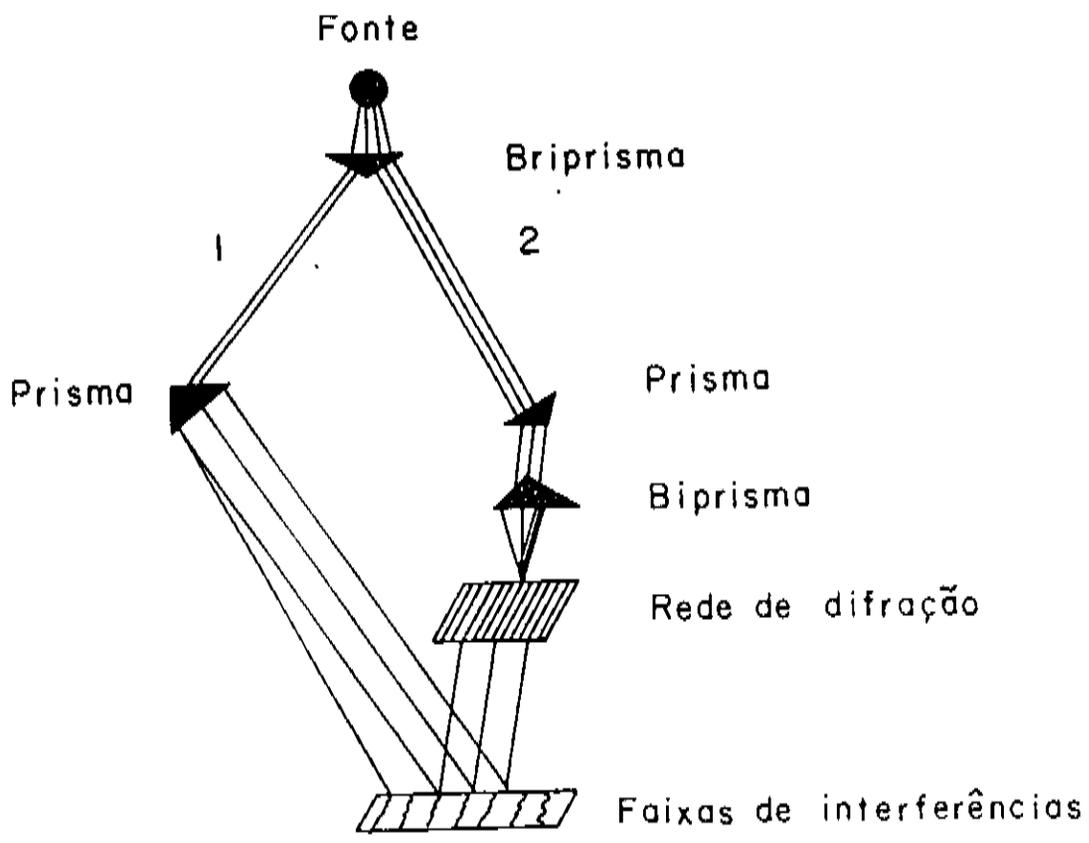
Diversos físicos tais como Selleri⁽³⁷⁾ e Costa de Beauregard insistem que evidenciar a não separabilidade não é o mesmo que sustentar uma não causalidade.

Existem várias correntes de opinião concernentes as questões suscitadas pelas desigualdades de Bell, e podemos assinalar que estas não apresentam uma resposta definitiva ao conhecido paradoxo de Einstein, Podolski e Rosen⁽³⁸⁾. Dado que os argumentos fornecidos por Bohr⁽³⁹⁾ referentes a não separabilidade não respondem a violação do princípio de incerteza como foi proposto originalmente neste controvertido artigo. Isto é, as previsões da teoria quântica usual não apresentam correlações necessariamente mais incertas do que as de uma teoria puramente clássica, dado que as probabilidades de coincidências positivas para $\theta_{ab}=0$ são nulas.

(3.9). EXPERIÊNCIA CHAVE.

Finalmente propomos uma experiência de índole ainda mais geral, que permitirá testar experimentalmente uma gama maior de possíveis teorias quânticas de campo guia.

Se elétrons são enviados por um cátodo c, como se mostra na fig (16), onde a onda quântica pode seguir os trajetos 1 e 2:



FIG(16)

Se intercalamos uma rede de difração no trajeto 2 , como é mostrado na fig (16) de maneira que na parte 2 as zonas abertas da rede de difração (especialmente construída) coincidam com as zonas de maior amplitude da função de onda, podemos esperar assim, que segundo esta nova formulação de campo guia, que mesmo que passem poucos elétrons pela rede de difração, a informação da presença desta rede deveria ser nitidamente registrada pelas interferências das ondas quânticas entre ambos os trajetos. Este fenômeno deveria ocorrer segundo esta interpretação, devido ao fato de existir uma defasagem equivalente a $\pi/2$ com a teoria quântica usual, de forma que nesta nova formulação é menos provável de encontrar os elétrons onde a amplitude da função de onda é maior.

Podemos generalizar esta experiência, pelo fato que esta poderia funcionar também para uma vasta gama de outras possíveis formulações quânticas.

Exemplificamos uma outra teoria que propõe um potencial quântico \bar{V}_q de maneira a ser quase consistente com a teoria usual, isto é, que as densidades de probabilidade sejam da forma:

$$|1/v| = (2/m (E - V_c - \bar{V}_q (\psi(x))))^{-1/2} = \alpha |\psi(x+\delta)|^2 \quad (9.1)$$

Assim esta experiência poderia determinar a fase δ desta formulação, dado que a função de onda deve passar pela rede de difração em proporção diferente da dos elétrons, o que seria em

princípio, observável nas faixas de interferências, através de um controle do número de elétrons que provém de cada trajeto 1 e 2.

Dado que a separação da onda quântica e da partícula é impossível segundo a interpretação usual, a confirmação de uma transmissão de informação dada pela função de onda, em zonas onde esta deveria ser quase nula (segundo a interpretação probabilista) se apresentaria como uma contradição.

Intensos esforços tem sido realizados na detecção de ondas vazias⁽⁴⁰⁻⁴¹⁾, no entanto os quadros teóricos não parecem estar inteiramente bem definidos.

Na interpretação das variáveis escondidas de Bohm, a medição experimental de um campo guia, parece impossível, pois em princípio se supõe um perfeito sincronismo entre a dinâmica da função de onda e a partícula.

Como notamos no final do capítulo (2), as relações de incerteza como $\Delta x \Delta k \geq 1$ continuam tendo validade a nível da função de onda, porém nesta nova visão quântica nada impede uma maior determinação das variáveis dinâmicas da partícula como foi assinalado no fim da secção anterior. Porém para os estados não estacionários as relações de incerteza têm o mesmo significado que a da interpretação usual.

Podemos constatar que as antigas polémicas estão longe de serem puramente semânticas. Assim finalizamos este capítulo sem apresentar conclusões definitivas, mas esperamos que as análises realizadas através da exposição desta nova visão quântica possam contribuir para elucidação desta interessante questão⁽⁴²⁾.

CAPÍTULO IV

(4.1) INTRODUÇÃO.

As dificuldades que enfrentam as integrais de R.Feynman num contexto de medida de Riemann (cap 1) , nos levam a procurar uma outra representação integral. Procedemos então a elaboração de um método construtivo que nos permite a obtenção de uma solução geral compacta para um potencial arbitrário. No entanto, este método requer para uma rápida operacionalidade a determinação analítica de soluções exatas de equações de diferenças lineares particulares. Este método entretanto, tem sido comprovado computacionalmente em uma grande variedade de potenciais. Uma das grandes qualidades deste método, é que este permite sua aplicação à todas as equações lineares .

Estudamos em forma particular o caso estacionário unidimensional de uma partícula, apesar da aparente simplicidade, este tipo de equação diferencial linear de segunda ordem, não tem encontrado ainda uma solução geral fechada e compacta .

Esta situação acaba favorecendo o debate sobre o carácter físico da função de onda quântica, e uma solução geral seria por exemplo, de grande utilidade para a comparação analítica de diferentes casos e suas possíveis interpretações . Soluções aproximadas⁽¹⁾ como a WKB tiveram um papel fundamental na consolidação da interpretação ortodoxa. A própria formulação de de Broglie pode ser considerada como uma motivação heurística, dada as

relações sugeridas pela sua equação de continuidade, que liga o momentum a densidade de probabilidade. Podemos pensar que uma solução exata e compacta, poderia ter um papel decisivo na análise interpretativa da função de onda quântica.

A ausência destas soluções analíticas compactas pode ser considerado como o principal problema da física matemática, e se encontra intimamente relacionada a uma grande variedade de questões, como frações contínuas, equações integrais como as de Fredholm's, equação de Riccati, etc.,.

Os métodos desenvolvidos para a análise deste tipo de equação são variados⁽²⁾, tais como as transformações de Laplace, método de séries de Fröbenius, funções de Green,, etc. Entretanto, nenhum destes fornece uma solução geral compacta.

Uma equação de primeira ordem linear, pode ser expressa através da seguinte regra de recorrência:

$$Y_n - Y_{n-1} = \epsilon A_{n-1} Y_{n-1}, \quad \lim \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

Que podemos escrevê-la como:

$$Y_n = (1 + \epsilon A_{n-1}) Y_{n-1} \quad (1.2)$$

Utilizando sucessivamente esta relação de recorrência

temos:

$$Y_n = Y_0 \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \epsilon A_j) \quad (1.3)$$

Expressão que é equivalente a:

$$Y(n) = Y_0 \exp \varepsilon \left(\sum_{j=0}^{n-1} A_j \right) \quad (1.4)$$

Relação que se obtém ao escrever o produto como soma de logaritmos.

$$\exp \left(\sum_{i=0}^n \log (1 + \varepsilon A_i) \right) = \exp \varepsilon \sum_{i=0}^n \log(1 + \varepsilon A_i)^{1/\varepsilon} \quad (1.5)$$

Adotamos esta introdução para mostrar a razão heurística da utilidade deste produto, neste caso simples. Generalizamos assim este método ao caso de uma equação linear de segunda ordem.

É conveniente mostrar que o produto:

$$(2^{n_1} + 1)(2^{n_2} + 1)(2^{n_3} + 1) \dots (2^{n_r} + 1) \quad (1.6)$$

apresenta um valor único, para $n_i \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2 \neq n_r \neq 0$

Esta afirmação a demonstraremos pelo método do absurdo.

Se:

$$(2^{n_1+1} + 1)(2^{n_2+1} + 1) \dots (2^{n_r+1} + 1) = (2^{n'_1+1} + 1)(2^{n'_2+1} + 1) \dots (2^{n'_r+1} + 1) \quad (1.7)$$

Onde os fatores comuns foram já simplificados.

Obtemos então uma relação do tipo:

$$2^{r_1} \pm 2^{r_2} \pm \dots \pm 2^{r_m} = 0 \quad ; r_i \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

A contradição resulta evidente se multiplicarmos por:

$$2^{-r_1} \quad (1.9)$$

Onde r_1 é o número natural mínimo entre todos os r_i , assim resulta impossível que a adição ou subtração de números pares possam ser iguais a 1.

(4.2). SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM LINEAR

A equação de Schrödinger estacionária unidimensional de uma partícula pode ser escrita em termos de uma relação de recorrência da forma:

$$(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1})/\epsilon^2 + V_n\psi_n = E\psi_n \quad ; \hbar^2/2m=1 \quad (2.1)$$

$$\psi_{n+1} - (2 - \epsilon^2(E - V_n))\psi_n + \psi_{n-1} = 0 \quad ; n \in \mathbb{N} ; \lim \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Definimos $R_n(z)$ como a solução geral de:

$$R_{n+1}(z) - (2 + \varepsilon (2^n + 1)^{-iz}) R_n(z) + R_{n-1}(z) = 0 \quad ; \quad i^2 = -1 \quad (2.3)$$

Definimos a função $L_n(z, V-E)$ como o produto:

$$L_n(z, V-E) = \prod_{j=1}^n (1 + \varepsilon (2^j + 1)^{iz} (V_j - E)) \quad (2.4)$$

A solução geral de ψ_n com as seguintes condições iniciais:

$$\psi_0 = \alpha \quad ; \quad \psi_1 - \psi_0 = \varepsilon \beta \quad , \quad (2.5)$$

admite a seguinte representação integral:

$$\psi_n = (1/2) \lim_{f \rightarrow 0} \int_{-1/f}^{1/f} (\alpha R_n'(z) + \beta R_n''(z)) L_n(z, V-E) dz \quad (2.6)$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} f \rightarrow 0 \quad ; \quad 1/f \geq 2^{n^3} \quad (2.7)$$

$$R_0'(z) = f \quad , \quad R_1'(z) = f \quad ; \quad R_0''(z) = 0 \quad , \quad R_1''(z) = \varepsilon f \quad (2.8)$$

Que são soluções particulares de (2,3).

(4.3) COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO CONSTRUTIVO

Ilustraremos este método para a condição inicial $\beta = 0$, onde denotamos:

$$V_j - E = a_j, \quad ((2 + \epsilon^2 (V_j - E)) = b_j ; (j \geq 2)) \quad (3.1)$$

com:

$$\alpha = b_0 ; \quad 1 + \epsilon \beta / \alpha = b_1 \quad (3.2)$$

Iterando (2,1) temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} \psi_n = & b_0 b_1 \cdot b_n \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} (b_i b_{i+1})^{-1} + \sum_{i < k}^{n-2} (b_i b_{i+1} b_{k+1} b_{k+2})^{-1} \right. \\ & \left. - \sum_{i < k < l}^{n-3} (b_i b_{i+1} b_{k+1} b_{k+2} b_{l+2} b_{l+3})^{-1} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Notemos que todas as combinações dos produtos ϵa_j estão contidas em:

$$\prod_{j=1}^4 (1 + \epsilon a_j) \quad (3.4)$$

De modo que $L(z, a)$ pode ser utilizado como "background", e devemos imaginar então um método de eliminar os produtos $a_5 \cdot a_1$ que não pertencem a solução ψ_n .

O processo de eliminação é baseado na unicidade do produto (1,6); o qual pode ser escrito como:

$$(2^{j+1})^{iz} = \exp(iz \log(2^{j+1})) \quad (3.5)$$

Lembrando ⁽³⁾ uma expressão das deltas de Dirac.

$$\lim_{f \rightarrow 0} \int_{-1/f}^{1/f} \exp(ikz) dz = \begin{cases} 2f^{-1} & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} ; i^2 = -1 \quad (3.6)$$

Devemos notar também que o desenvolvimento de ψ_n contém

sómente termos do tipo:

$$\mp 2^s e^{2^m a_l \cdot a_k \cdot \dots \cdot a_1} \quad (3.7)$$

$$(s', l', \dots, k', 1') \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

Os elementos de $L_n(z, a)$ são do tipo:

$$e^m a_i a_k \dots a_1 ((2^i+1) (2^k+1) \dots (2^1+1))^{iz} \quad (3.9)$$

$$(m, i, k, \dots, 1) \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

E os de $R_n'(z)$.

$$\mp 2^{s''} e^m ((2^{i''}+1)(2^{k''}+1)(2^{l''}+1))^{-iz} \quad (3.11)$$

$$(s'', i'', k'', \dots, l'') \in \mathbb{N} \quad (3.12)$$

De modo que ao integrar com respeito a z , os elementos de $R'_n(z) L_n(z,a)$, não são eliminados os termos de $L_n(z,a)$, que encontram seus produtos conjugados em $R'_n(z)$, isto é, que não dependam de z (ver (3.5),(3.6)). Assim dado que $R'_n(z)$ possui a mesma estrutura que a solução do desenvolvimento ψ_n , este fornece no produto os termos $\mp \epsilon^m z^s$ e os índices apropriados $(s,i,k..l)=(s'',i'',k''..l'')$, ver (2.2),(2.3),(3.1)). Por outro lado, o "background" $L_n(z,a)$ contribue com os elementos $\epsilon^m a_i a_k.. a_l$ que não são eliminados pela delta de Dirac, lembrando que a condição da unicidade do produto (1.6) exige que $(s'',i''..l'')=(s',i'..l')$.

A dependência geral com respeito as condições iniciais arbitrárias é evidente se utilizarmos a representação matricial⁽⁴⁾ da equação de segunda ordem.

$$\begin{vmatrix} \dot{\psi}(s) \\ \psi(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a(s) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\psi}(s) \\ \psi(s) \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\psi}(x) \\ \psi(x) \end{vmatrix} = e^{\int_{s=0}^x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a(s) & 0 \end{vmatrix} ds} \begin{vmatrix} \dot{\psi}(0) \\ \psi(0) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Assim as soluções podem ser decompostas em:

$$\begin{vmatrix} \dot{\psi}(0) \\ \psi(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Que fornece a estrutura concernente as condições iniciais. Uma característica notável deste método, é que é suficiente a

determinação bidimensional de somente uma das funções $R_n(z)$ ou $L_n(z,a)$. Por exemplo se determinarmos $R_{60}'(z)$, a solução de ψ_n será a correta para $n \leq 60$, e esta propriedade é consequência da unicidade do produto (1,6). É conveniente mudar a origem para uma aproximação de $(2^n+1)^{iz}$ à uma exponencial simples do tipo $\exp(izn)$, assim ilustramos a função $R_{60}'(z)$ na fig (18), com : $n_0 = 20$; $f = 0.0001$; $\epsilon = 0.01$.

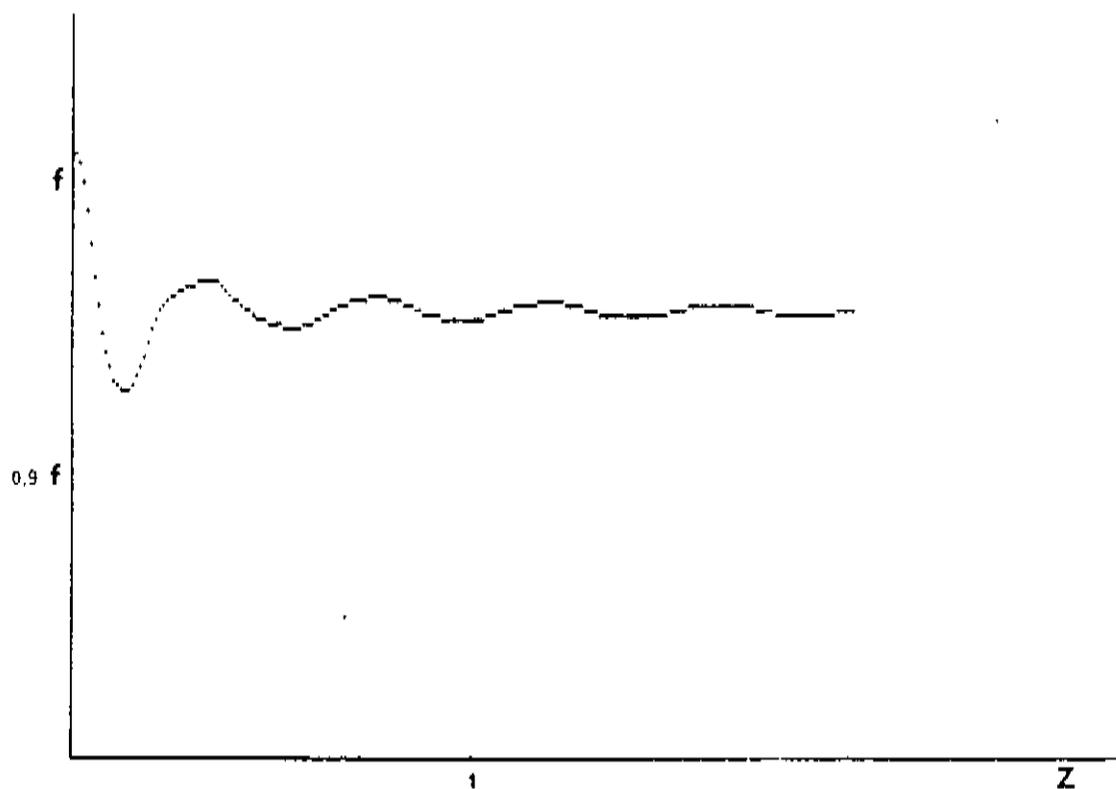


Fig.(17)

Esta função par apresenta uma dependência linear com respeito a f , e este fato nos permite renormalizá-la de maneira que a integral (2,6) possa ser expressa entre os limites de integração $(-\infty, \infty)$; se substituirmos as funções $R_n(z)$ pelas funções normalizadas $f^{-1}R_n(z)$.

Apresentamos na tabela, a comparação numérica entre os resultados deste método com diferentes intervalos de integração $(-1/f, 1/f)$ para o caso $V_n = n^2$, $\epsilon = 1$, $\psi_0 = 0$; $\psi_1 = 0.01$

n	1/f=100; $\nabla Z=0.1$	1/f=1000; $\nabla Z=0.1$	EXATO
1	0.009	0.010	0.010
2	0.049	0.050	0.050
3	0.537	0.541	0.540
4	0.982	0.972	0.967
5	27.01	26.33	26.05

Existem fundamentalmente duas fontes de erros numéricos; o primeiro destes é devido aos elementos discretos ∇Z na integração numérica de (2.6) e o segundo fator se deve a delta de Dirac (3.6) que se define para intervalos de integração entre $(-\infty, \infty)$. Assim para valores finitos este delta apresenta uma certa largura; de forma a não eliminar totalmente todas as séries de produtos do tipo (2.4) que não apresentem a estrutura de $R_n'(z)$. É fácil notar na tabela que a medida que os intervalos $(-1/f; 1/f)$ da representação integral (2.6) tendem ao infinito, os resultados numéricos deste método melhoram.

Para obter expressões analíticas é necessário avaliar o produto

$L_n(z, V-E)$, (2.4), o que equivale ao problema da soma, como foi mostrado em (1.5). Isto é, temos reduzido de ordem a equação (1,1). Uma maneira de expressar uma soma através de uma integral é dada pela teoria de resíduos.

$$\sum_{j=0}^n (E-V_j)(2^j+1)^{iz} = \int_{ABCD} (E-V(\zeta))(2^\zeta+1)^{iz} \pi \cot \pi \zeta d\zeta \quad (3.16)$$

Onde o circuito fechado ABCD deve incluir somente o eixo real positivo de 0 a n, e $(E-V(\zeta))^{iz}(2^\zeta+1)^{iz}$ deve ser analítica em seu interior. Uma outra forma de avaliação deste tipo de soma é dada pelo teorema de soma de Euler⁽⁵⁾.

A grande expectativa desta nova representação integral é a de uma fácil manipulação analítica. Assim uma função que seria conveniente determinar algebricamente é:

$$L'_n(z, \beta) = \sum_{j=0}^n (\cosh(\alpha_0 j))^{iz} \exp(\alpha_0 iz + \beta j) \quad (3.17)$$

$$\alpha_0 = (1/2) \log(2) \quad ; \quad L_n(z, \beta) = \exp(\epsilon L'_n(z, \beta)) \quad (3.18)$$

Ao derivar $\partial_{\beta} L'_n(z, \beta) |_{\beta=0}$ obteríamos as expressões analíticas necessárias para escrever $L_n(z, V-E)$, para os casos onde o potencial V_n é um polinômio arbitrário de grau n. Lembrando que :

$$L_n(z, V-E) = \exp(\epsilon \sum_{j=0}^n (V_j - E) (\cosh(\alpha_0 j))^{iz} \exp(\alpha_0 iz(j+2))) \quad (3.19)$$

Esta soma possui propriedades lineares que fornecem uma boa operacionalidade deste método, dado que para V_n polinômios de grau n , a soma (3.16) pode ser expressa através das superposições das derivadas paramétricas (iguais ou menores que n) de $L_n'(z, \beta)$. A integração paramétrica de (3.17) daria lugar a obtenção da expressão analítica da soma (3.16) para casos onde V_n é uma fração racional, fato que resulta da maior relevância, dado o grande poder aproximativo do método de Painlevé (que aproxima funções arbitrárias V_n por expressões racionais). Da mesma maneira se avaliarmos (3.17) para $\beta=1$ é possível determinar a soma nos casos onde o potencial é exponencial ou trigonométrico.

Resulta difícil dar uma interpretação física desta solução, mas certas analogias podem ser feitas com a teoria de difração para os intervalos onde $n \gg z$, devido a semelhança de (3.17) com as figuras de difração de fendas regularmente espaçadas⁽⁶⁾. Dado que se trata de soluções da equação de onda, é possível associar z ao vector de onda k , assim as funções $R_n(z)$ podem ser interpretadas como sendo ondas incidentes, e o produto $L_n(z, V-E)$ como a n ésima autosimilaridade de um fator de estrutura⁽⁷⁾ de uma rede virtual que depende do potencial.

Por outro lado, existem diversos tipos de produtos de valores únicos que poderiam ser utilizados para uma outra representação integral, por exemplo:

$$(2^{g(n)+1}) ; g(n) \in \mathbb{N} \quad (3.20)$$

$$(z^{iz} z^{g(n)}) \quad ; g(n) \in \mathbb{N} \quad (3.21)$$

Este último apresenta para $g(n) = \bar{\gamma} n$, a vantagem de poder analisar e compactar em duas variáveis o desenvolvimento em série de $L'_n(z, \beta)$. Assim é conveniente analisar em primeiro lugar as projeções deste método.

Uma generalização é possível à diversas regras de recorrências lineares, como por exemplo, para uma do tipo:

$$y_{n+1} + \epsilon^2 (b_n) y_n + (7 + \epsilon^2 a_{n-1}) y_{n-1} = 0 \quad (3.22)$$

Podemos então definir a função $R_n^*(z)$ como:

$$R_{n+1}^* + \epsilon (2^{2n} + 1)^{-iz} R_n^* + (7 + \epsilon (2^{2n-1} + 1)^{-iz}) R_{n-1}^* = 0 \quad (3.23)$$

E o "background" deve ser:

$$\prod_{j=1}^n (1 + \epsilon (2^{2j} + 1)^{iz} b_j + \epsilon (2^{2j-1} + 1)^{iz} a_j) \quad (3.24)$$

De maneira que a expressão exponencial deste produto poderia ter componentes comuns aos "background" de outras regras de recorrências. Isto é, se estes produtos são tabelados através de um tipo de função $L'_n(z, \beta)$, seria conveniente universalizá-los, definindo o número máximo de variáveis independentes que deve

apresentar uma regra de recorrência que pretende-se analisar por este tipo de representação integral. Resulta instrutivo assinalar que o método de Runge Kutta também é suscetível de ser tratado analiticamente para o caso de equações diferenciais lineares, fato que permite aumentar o intervalo ϵ , redefinindo um novo \bar{V}_j .

Uma possível generalização deste método às equações do tipo não linear, implica uma outra estrutura dos produtos únicos. A distribuição dos números primos se apresenta como uma possibilidade, dado sua unicidade ante produtos repetidos. Contudo, a sua distribuição irregular deve apresentar problemas, mesmo para possíveis aproximações deste "background", e que ademais deve apresentar as repetições na série de produtos:

$$\prod_{j=1}^n (1 + \epsilon (\sum_{m=0}^{\infty} \zeta(n, z) a^m_j)) \quad (3.25)$$

$$\zeta_1(z) = 2^{-iz}; \zeta_2(z) = 3^{-iz}; \zeta_3(z) = 5^{-iz}; \zeta_4(z) = 7^{-iz} \quad (3.26)$$

Seria então conveniente uma representação analítica mais simples para a universalização do "background".

O estudo dos pontos de ramificação desta representação integral pode fornecer um rápido mecanismo de obtenção dos autovalores da função de onda. Assim também o estudo da estabilidade paramétrica das equações diferenciais lineares poderia ser simplificado.

Desta maneira, a representação integral (2.6) requer para

uma boa operacionalidade um estudo analítico detalhado de certas funções especiais, o que será motivo de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

INTRODUÇÃO

1. K.GÖDEL: Monatshefte für Mathematica und Physik, 38, 173, (1931)
2. A.M. TURING: Proc. London Math. Soc. (2), 42, 230, (1937)
3. L. DE BROGLIE: Compt. Rend, 183, 447, (1926)
4. D. BOHM: Physical Review , 85, 166, (1952)

CAPÍTULO. I

1. R. FEYNMAN AND A. HIBBS : Quantum Mechanics and path Integrals, Mc Graw-Hill, (1965).
2. E. NELSON : J. of Math. Phys , 5, 3, 332, (1964).
3. R. MADSEN BARBOSA.: Vol II Combinatória e Grafos, Nobel (1975)
4. L. SCHULMAN: Techniques and Applications of Path Integrations, John Wiley, (1981).
5. C. MORETTE DEWITT: Commun. Math. Phys, 28, 47, (1972)
6. C. DEWITT-MORETTE: Commun. Math. Phys, 37, 63, (1974)
7. R. FEYNMAN: La Nature de la Physique, Seuil, (1987)

CAPÍTULO. II

1. R. GLAUBER: Phys. Rev. 131, 2766, (1963).
2. C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LOLÔE: Vol I, Quantum Mechanics,

John Wiley, (1977)

3. A.EINSTEIN, A.PODOLSKY and ROSEN: Phys. Rev, 47, 777, (1935).
4. A.DANERI, A.LOINGER, A.PROSPERI: Nuovo Cimento, 44 B, 119, (1966)
5. E.WIGNER : Am. J. Phy. 31, 6 , (1966)
6. I.J.GOOD. ed.: Scientist Speculates, Londres, (1962)
7. B.DEWITT: Physics, Today, 23, Sept, 30, (1970)
8. H.EVERETT III: Rev Mod. Phys, 29, 454, (1957)
9. D.BOHM: Physical Review, 8
5, 166, (1952)
10. L.DE BROGLIE: Compt. Rend. 183, 447, (1926)
11. E.MADELUNG : Z.F. Physik, 40, 332, (1926)
12. C.PHILIPPIDIS, C.DEWDEY and B.J.HILEY: Il Nuovo Cimento, 52B,
1, 15, (1979).
13. L.DE BROGLIE: Non Linear Wave Mechanics , Elsevier, (1960).
14. L.DE BROGLIE, J.L ANDRADE E SILVA: La Reinterprétation de la
Mécanique ondulatoire, Tome I , Gauthier Villars (1971).
15. C.DEWDNEY , A.KYPRIANIDIS and J.P.VIGIER: J. Phys A Math Gen,
17, 1 741, (1984).
16. E.SCHRÖDINGER : Annalen der Physik , 79, 361, (1926).
17. A.TONOMURA, J.ENDO, T.MATSUDA , T.KWASAKI and H EZAWA: Am. J.
Phys, 57, 2, (1989).
18. A.ZEILINGER, A.GAHLER, R & SKUL.C.G: Rev Mod Phys, 60, 1067, (1988)
19. A.G.KLEIN, P.D KEARNEY, G.I OPAT, A.CIMMINO. and R GAHLER Phys
Rev. Letters, 46, 15, 959, (1981)
20. H.KAISER, S.A.WERNER, E.A.GEORGE: Phys. Rev. Letters, 50, 8, 561,
(1983)
21. J.KOMRSKA, DRAHOS. V, DELONG. A: Optica. Acta, 14, 2, 147, (1967).

CAPITULO III

1. Y AHARONOV and D.BOHM: Phys.Rev,115,485,(1959)
2. W.EHRENBERG and R.E.SIDAY:Proc.Phys.Soc,62 B,8,(1949)
3. P.BOCCHIERI and A.LOINBER:Nuovo Cimento,47A,475(1978)
4. W.BAYH:Zeits.Phys,169,492,(1962)
5. H.BOERSCH,H.HAMISCH,D.WOHLLEBEN and K.GROHMANN:Zeits.Phys, 159, 397,(1960)
6. R.G CHAMBERS:Phys.Rev.Lett,5,3,(1960)
7. R.C.JAKLEVIC,J.LAMBE,J.E.MERCERAU and A.H.SILVER:Phys.Rev, 140A,1628,(1965)
8. A.TONOMURA,N.OSAKABE,T.MATSUDA,T.KAWASAKI,J.ENDO, S.YANO, and H.YAMADA:Phys Rev Letters,56,8,792,(1986)
9. E.MERZBACHER:Amer.Jour.Phys,30,237,(1962)
10. D.BOHM and B.J.HILEY:Il Nuovo Cimento ,52A,3,295,(1979)
11. S.DE BENEDETTI:Nuclear Interactions,John Wiley,(1966)
12. J.BLATT,V.WEISSKOPF:Theoretical Nuclear Physics,Wiley,(1952)
13. L.D.LANDAU.and E.M.LIFSHITZ: The Classical Theory of Fields, Pergamon Press,(1975)
14. B.D'ESPAGNAT.ed:Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica "Enrico Fermi",Academic Press,D.BOHM ,(1971)
15. M.BORN:Zeitschr.Phys,37,863,(1926)
16. R.FEYNMAN:La Nature de la Physics,Seuil,(1987)
17. J.SLATER:Electronic Structure of Molecules,New York,(1963)
18. F.REIF:Physique Statistique,Dunod,(1974)
19. W.PAULI :Zs.J.Phys.33,879,(1925)
20. H.BERNSTEIN:Phys Rev letters,18,24,1103,(1967)

21. H.RAUCH, A.ZEILINGER,G.BADUREK,A.WILFING,W.BAUSPIESS,U.BONSE :
Phys.Letters,54A,6,425,(1975)
22. S.WERNER,R.COELLA,A.OVERHAUSER,C.EAGEN: ,35,16,1053,(1975)
23. C.MISNER,K.THORNE,J.WHEELER.:Gravitation,New York,(1979)
24. HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHISICS.:Robbers.co,F152,(1970)
25. P.EKSTROM,D.WINELAND:Pour la Sience,OCT (1980)
26. W.GERLACH.O.STERN:Zeits fur Phys,9,349,(1922)
27. J.BELL:Physics:1,195,(1965)
28. J.SAKURAI:Modern Quantum Mechanics,Benjamin,(1985)
29. J.CLAUSER,M.HORNE,Phys Rev D,10,2,526,(1974)
30. M.LAMECHI-RACHTI,W MITTIG:Phys Rev D,14,10,2543,(1976)
31. J.CLAUSER:Phys Rev Letters.36,1223,(1976)
32. A.ASPECT.P.GRANGIER,G.ROGER:Phys Rev Letters,47,460,(1981)
33. E.FRY,R THOMPSON:Phys Rev Letters,37,465,(1976)
34. P.KWIAT,R.CHIAO:Phys Rev Letters,66,588,(1991)
35. G.FARACI,SGUTKOWSKI,S.NOTARRIGO et A.R.PENNISI:Lett Nuovo
Cimento,9,607,(1974)
36. B.D'ESPAGNAT.ed:Rendiconti della Scuola Internazionale di
Fisica "Enrico Fermi",Academic Press.(1971)
37. F.SELLERI:Le Grand Dévat De La Théorie
Quantique,Flammarion,(1986)
38. A.EINSTEIN,PODOLSKY.B and ROSEN:Phys Rev,47,777,(1935)
39. N.BOHR :Physical Rev,48,696,(1935)
40. A.SZCZEPANSKI:Found.Phys,6,427,(1976)
41. F.SELLERI:Lett.Nuovo Cimento:1,908,(1969)
42. D.HOME ,M.A.B.WHITAKER:Physics Reports ,210,N 4,(1992)

CAPÍTULO IV

1. M.FÉDORIOUK: Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires, Mir, (1987)
2. E. INCE: Ordinary differential equations, N Y, Dover, (1944)
3. C.COHEN-TANNOUDJI, B DIU, F LOLÛE: Vo III , Quantum Mechanics, John Wiley (1977)
4. J.DOLLARD, C FRIEDMAN : Product Integration, Gian-Carlo Rota (1979)
5. V.SMIRNOV: Cours de mathématiques supérieures, Tome III 2^e partie , Mir (1989)
6. F.A.JENKINS, H.E.WHITE: Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, (1976)
7. C.ALLAIN, M.CLOITRE: Physical Review A, 36, 12, 5751, (1987).