Mistura de Quatro Ondas Degenerada num Meio Absorvente Saturável

Ray Viana Sampaio

Orientador: Prof.Dr. Erik Johannes Bochove

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

DEDICATÓRIA

À meus pais Waldeck e Maria do Carmo, à minha esposa Vane e aos meus três filhos, Dan, Penélope e Thiago, pelo apoio recebido durante todos esses anos e também pela paciência que tiveram comigo nos períodos mais críticos, os quais influenciaram muito negativamente minha saúde e também meu estado de espírito. O mínimo que eu posso fazer é pedir a todos vocês, aos quais eu muito amo, mil e um perdões, por todos aqueles maus momentos que os fiz passar.

Ao perene reitor Dr. João Lyra Filho, que também nos meus momentos de angústia e ansiedade, fazendo uso de sua invulgar experiência, lucidez e sabedoria, não só em problemas acadêmicos, mas também e principalmente nos relacionados com o lado prático da vida, deu-me várias "injeções" de fé, otimismo e coragem para enfrentar de cabeça erguida aqueles períodos de insegurança e incerteza. Mais uma vez muito obrigado.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Erik Johannes Bochove pela oportunidade de termos trabalhado em conjunto, ocasião em que aprendi muita coisa com sua vasta experiência em física e também pela preocupação que teve comigo quando surgiram os problemas econômicos, meu muito obrigado.

Ao professor Paulo Hiroshi Sakanaka pela grande ajuda na parte computacional da tese, o que me permitiu economizar uma enorme parte do tempo, minha eterna gratidão.

A Universidade Federal do Rio Grande do Norte que me deu a oportunidade de fazer o doutoramento e me sustentou financeiramente durante a maior parte do mesmo.

Ao professor Ramakant Srivastava pela ajuda monetária concedida quando me faltou o suprimento que vinha recebendo até então.

Ao projeto Fibras Óticas - Telebrás - Unicamp que foi o sustentáculo financeiro durante todo o último ano da tese.

Aos professores Alvin Elliot Kiel e Wladimir Oswaldo Negrão Guimarães pelos esforços feitos com o intuito de solucionar o impasse surgido por ocasião da prorrogação da minha estadia em Campinas afim de que eu pudesse terminar a tese.

Ao Milton Kayama, Silas Lenz, Joaquim "São" Paulino Neto, Marcos Santiago, Josué e Mauro Biscaro pelos bons e maus momentos e também pelos "papos" tipo higiene mental e ditos "cultura inútil", mas que no fundo, olhando sob um outro ângulo, foram muito mais úteis do que se pensa.

À Rosa que, com sua enorme boa vontade, esmero e paciência, tão bem datilografou a tese.

Ao Charles e ao Vasco da seção de desenhos que, apesar da grande quantidade com muito boa vontade fizeram todos gráficos e figuras.

À Simone, Carmen e Augusto que muitas vezes datilografaram documentos e cartas que eram para serem enviados urgentemente.

Às meninas da biblioteca, Rita, Nilza, Zezé, Gisela, Sueli, Célia, Nazaré e Blandina pelas conversas agradáveis e pelo cafezinho que muitas vezes "esfriaram" minha cabeça quando ela estava quente.

Fora da Unicamp eu estou em grande débito com Frau Gertrude Schünemann do Instituto Hans Staden que compreendeu e colaborou com a minha difícil situação financeira do último ano de tese.

E também a psicóloga Marta Romano Pavan com a qual, no auge dos problemas, eu pude trocar idéias, as quais me fizeram enxergar algumas coisas sob outros pontos de vista e que muito me ajudaram.

ÍNDICE

RESUMO

Fazemos incidir sobre um certo material, três feixes de lasers todos com a mesma frequência w. Os três feixes são quase colineares, sendo que dois incidem na face $z = 0$ e o outro na face $z = L$. (L é o comprimento do material) Estes três campos induzem no material uma polarização não linear de terceira ordem a qual, entre outros efeitos, produz uma quarta onda denominada retro-espalhada (caminha no sentido decrescente de z).

No nosso trabalho consideramos um sistema de moléculas de dois níveis e as polarizações dos quatro campos foram consideradas iguais. A influência do movimento molecular não foi incluída pois a geometria quase colinear minimiza este efeito. Todos os campos foram tomados como ondas planas cujas amplitudes variam ao longo de z. Utilizando as aproximações de a) onda girante e b) amplitude lentamente variável, estudamos no regime estacionário o comportamento da onda retro-espalhada s (z = 0) em função das amplitudes das outras três ondas, da dissintonia $\phi = tg^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ onde $\delta = (\omega-\omega_0)\tau_2$ e $w_0 = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{h}$ e do coeficiente $\alpha_0 L$ sendo α_0 o coeficiente de absorção (ou ganho) linear. Neste caso nós constatamos que a curva s(o) em função das ondas de "bomba" é maior no caso em que α_0 é negativo (ganho) do que se α_0 é positivo. Observamos ainda que s(o) diminui de intensidade com $\alpha_0 L$ e que os valores máximos de s(o) ocorrem para valores menores das ondas de "bomba" quando α_0 é negativo em comparação com o caso em que α_0 é positivo. Observamos também que para $\phi = \pi/4$ os valores de s(o) são maiores do que para $\phi = \pi/2$. Outra conclusão é a que se a onda de "bomba" b(ç) que caminha no mesmo sentido da onda retro-espalhada for

maior do que a onda de "bomba" f(o) que caminha em sentido oposto, então a curva s(o) será maior do que quando f(o) for maior do que b(l) pela mesma diferença. Outro fato que vale a pena mencionar é que após o valor máximo de s(o), os valores da onda retro-espalhada são maiores para $\alpha_o > 0$ do que para $\alpha_o < 0$.

Nós estudamos também o comportamento das quatro ondas dentro do material, de onde se obtém um resultado interessante que o valor da onda objeto p(l) atinge seu valor máximo simultaneamente com s(o), mostrando assim que o recebimento de energia da onda objeto e a retro-espalhada, quando f(o) = b(l), estão em fase. Se f(o) ≠ b(l) isto não ocorre. Notamos ainda que p(l) é maior no caso em que f(o) > b(l) do que no caso inverso e que s(o) é maior quando b(l) > f(o), o que evidencia um acoplamento preferencial entre as ondas que caminham no mesmo sentido.

ABSTRACT

We make three lasers beams all with the same frequency ω to strike onto a material. The three beams are almost colinear; two of them strike upon the face $z = 0$ and the other upon $z = L$ (L is the lenght of the material). These fields induce in the material a third order non linear polarization, which among others effects, generates a fourth wave called conjugate or retro wave (it propagates in the minus z direction). The whole process is called "Degenerate Four Wave Mixing". The production of the fourth wave is somewhat similar to the conventional holography. The material consists of a system of two level molecules and all the fields have their polarizations along the same direction. Moreover we justify why we do not include the Doppler effect, consider all fields as plane waves, use the rotating wave approximation, the slowling varying envelope approximation and not considering transverse (x and y) variations, we study, in the stationary case, the behaviour of the conjugate wave in the plane $z = 0$ as a function of the amplitudes of the other three waves, of the detuning coefficient $\phi = tg^{-1}(\frac{1}{\delta})$, where $\delta = (\omega-\omega_0)\tau_2$ with $\omega_0 = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\hbar}$ and of the coefficient $\alpha_0 L$, where α_0 is the linear absorption (or gain) coefficient. It is also studied the behaviour of the four amplitudes inside the material (along z) as function of the parameters mentioned above.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. Introdução Geral

Uma nova área de pesquisa em ótica coerente tem sido alvo de grande atenção à medida em que maiores são as aplicações descobertas neste campo. O nome desta área é ótica de fase conjugada. O efeito consiste na geração de uma onda eletromagnética com uma distribuição de fase espacial, que é em cada ponto do espaço, a oposta de uma onda incidente arbitrária.[38]

Para melhor exemplificar o que é conjugação de fase, vamos considerar uma onda ótica de frequência ω movendo-se na direção +z

$$E = \mathrm{Re}\ \{\psi(x,y,z)e^{i\omega t}\} \qquad \text{I1}$$

onde

$$\psi(x,y,z) = A(x,y)\ e^{i|\phi(x,y)-kz|} \qquad \text{I2}$$

onde A é real. A onda de fase conjugada é definida a partir de E como sendo:

$$E_{fc} = \mathrm{Re}\ \{\psi^*(x,y,z)e^{i\omega t}\} \qquad \text{I3}$$

$$E_{fc} = \mathrm{Re}\ \{A(x,y)e^{-i|\phi(x,y)-kz|}e^{i\omega t}\} \qquad \text{I4}$$

Então a onda de fase conjugada E_{fc} é obtida a partir de E tomando-se o complexo conjugado somente da parte espa -

cial, não se alterando a parte temporal. Esta onda conjugada corresponde a uma onda movendo-se na direção -z, com a fase $\phi(x,y)$ invertida em relação a onda incidente.

Pode-se pensar também neste processo, como sendo um tipo de reflexão combinado com uma inversão de fase. Ele é equivalente a deixar-se inalterada a parte espacial de E e inverter-se o sinal de t. Neste sentido, a conjugação de fase é equivalente a uma inversão temporal. A Fig. 1 nos dá uma clara idéia do que seja conjugação de fase, pela comparação das reflexões de um espelho comum e um "espelho de fase conjugada"; nesta figura uma onda esférica divergente incide num espelho comum num ângulo θ e é refletida num ângulo $-\theta$ e continua a divergir. Por outro lado a mesma onda incidindo num espelho de fase conjugada é convertida em uma onda convergente, a qual retraça de volta o caminho original da onda incidente.

Outra característica deste "espelho" é a capacidade de corrigir aberrações. Na Fig. 2, por exemplo, uma onda incidente sofre uma distorção antes de incidir nos espelhos; esta distorção pode ser causada por uma placa de vidro, uma atmosfera turbulenta, etc. Tal onda se incidente num espelho conjugado resulta numa onda conjugada (caminhando em sentido inverso mas com a mesma distorção que possuia antes da incidência no conjugador). Em seguida, após uma passagem de retorno pelo meio distorcivo, a onda emergirá do outro lado idêntica em forma à onda antes de indidir sobre o meio aberrador, só que agora propagando-se em sentido contrário. Entretanto se a tal onda, depois de passar pelo meio distorcivo, incidir num espelho comum, a onda resultante será uma onda comumente refletida num espelho. Esta onda ao passar de volta pelo meio aberrador terá portanto sua aberração duplicada, como pode concluir da Fig. 2.

Para se entender, tomando-se como exemplo ondas planas, o que significa conjugação de fase como inversão temporal considere o campo de um feixe ótico dado por

$$E_1(\vec{r},t) = \frac{1}{2} E_{01}(\vec{r}) \exp|i(\omega t-kz)| + C.C. \qquad I5$$

que se propaga da esquerda para a direita, na direção z crescente, num meio linear sem perdas, dispersivo, onde a amplitude $E_{01}(\vec{r})$ carrega informação sobre efeitos de distorção e difração. Suponha-se agora que é gerado, por um mecanismo qualquer, num ponto z_0 deste meio, um campo $E_2(\vec{r},t)$ que é localmente dado por

$$E_2(\vec{r},t) = \frac{1}{2} E_{02}(\vec{r}) \exp|i(\omega t+kz)| + C.C. \qquad I6$$

onde

$$E_{02}(\vec{r}) = E^*_{01}(\vec{r}) \qquad p/ \quad z < z_0 \qquad I6A$$

Então o campo $E_2(\vec{r},t)$ é chamado de "conjugado" de $E_1(\vec{r},t)$. Deve-se observar que pode-se obter E_2 a partir de E_1, tomando-se o complexo conjugado da parte espacial; mas não alterando o fator $\exp(i\omega t)$.

Pode-se notar ainda que o mesmo campo $E_2(\vec{r},t)$ é obtido a partir de $E_1(\vec{r},t)$ não se alterando nem a amplitude nem a fase espacial, porém complexo-conjugando a fase temporal $\exp(i\omega t) \to \exp(-i\omega t)$, este fato mostra a equivalência entre a complexo-conjugação da parte espacial e a inversão temporal, ou seja, a troca de t por -t no fator $\exp(i\omega t)$.

As distorções causadas pelo meio, no campo E_1, são "compensadas" pelo campo conjugado E_2 gerado, que caminha em direção oposta ao campo E_1, e que ao longo desta trajetória invertida vai "desfazendo" em cada ponto as distorções que aparecem no campo E_1, emergindo finalmente com as propriedades originais, não distorcidas, do campo E_1.

Pode-se ainda verificar estas conclusões fazendo-se propagar um campo E_1 num meio cuja constante dielétrica, que é suposta estacionária durante o tempo de travessia de E_1 num sentido e do retorno do campo E_2, vale $\varepsilon(\vec{r})$. Considerando-se o meio sem perdas $|\varepsilon(\vec{r})$ real$|$, a equação escalar de onda é

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \ \varepsilon(\vec{r}) \ E = 0 \qquad \text{I7}$$

Usando-se a eq. I5 teremos:

$$\nabla^2 E_{01} - i2k \frac{\partial E_{01}}{\partial z} + |\omega^2 \mu \ \varepsilon(\vec{r}) - k^2| E_{01} = 0 \qquad \text{I8}$$

O complexo conjugado desta eq. vale:

$$\nabla E^*_{01} + i2k \frac{\partial E^*_{01}}{\partial z} + |\omega^2 \mu \ \varepsilon(\vec{r}) - k^2| E^*_{01} = 0 \qquad \text{I9}$$

que representa a equação de onda de um campo descrito por

$$E_2 = \frac{1}{2} E^*_{01}(\vec{r}) \ \exp|i(\omega t + kz)| + \text{C.C.} \qquad \text{I9A}$$

que descreve o já citado campo E_2, movendo-se em direção contrária a E_1 (isto é, no sentido -z) e com amplitude igual ao complexo conjugado da amplitude do campo E_1.

Uma experiência precursora neste sentido foi realizada por J.P. Woerdman[1]. O objetivo da experiência entretanto não foi a geração de uma onda de fase conjugada. Na experiência é produzido e analisado um holograma transiente (que decai com o tempo) numa fatia de silício, com um laser, na forma de uma figura de transportadores livres (electrons e buracos) modulados espacialmente. Nesta experiência, não foi dada a devida atenção ao fato de que a formação do holograma, era na realidade um típico processo de conjugação de fase. Outras experiências precursoras foram feitas por Zeldovich et al[2] e Nosach et al[3]. Zeldovich et al[2] usando espalhamento Brillouin estimulado, demonstrou a conjugação de fase no feixe retro espalhado. Nosach et al[3] utiliza o feixe conjugado do espalhamento Brillouin para cancelar distorções de fase que ocorrem num meio amplificador.

Na verdade há uma grande semelhança entre a experiência de conjugação de fase e as de holografia convencional. A nova e atrativa característica que diferencia a ótica de fase conjugada da holografia é o uso de mistura ótica não linear para gerar em tempo real (ou seja, não há necessidade de se processar uma chapa como na holografia) uma réplica conjugada (e amplificada se desejado) da onda incidente sem necessidade de equipamentos eletrônicos.

A. Yariv[4] e P.V. Avizonis et al[5] propuseram independentemente o uso de um processo chamado mistura de três ondas em cristais para compensar a distorção que aparece por causa da dispersão na transmissão de informações através de uma fibra ótica multimodo.

I.2. Mistura de três ondas

O processo de mistura de três ondas consiste em fazer-se com que duas ondas as quais incidam simultaneamente, num certo meio, interajam entre si produzindo uma terceira.

Uma onda $\vec{E}_1$, frequência ω e vetor de onda $\vec{k}_1(\omega)$ e a outra $\vec{E}_2$, frequência 2ω e vetor de onda $\vec{k}_2(2\omega)$. Além da polarização linear, é formada uma polarização não linear de segunda ordem a qual é proporcional as amplitudes $E^*_{01}E_{02}$ [6] (se o meio não possuir simetria de inversão) que dá origem a formação de uma terceira onda $\vec{E}_3$ com uma frequência $\omega_3 = 2\omega - \omega = \omega$ com uma distribuição espacial de amplitude proporcional a $E^*_{01}E_{02}$ e vetor de onda $k_3(\omega)$.

Como exemplo temos:

$$\vec{E}_1 = \hat{e}_1 \frac{E_{01}}{2}(\vec{r})\, e^{i(\omega t - \vec{k}_1(\omega).\vec{r}\,)} + C.C. \qquad I10$$

$$\vec{E}_2 = \hat{e}_2 \frac{E_{02}}{2}(r)\, e^{i(\omega t - \vec{k}_2(2\omega).\vec{r})} + C.C. \qquad I11$$

a onda gerada seria então da forma

$$E_3 = \hat{e}_3 \frac{E_{03}}{2}(r)\, e^{i(\omega t - \vec{k}_3(\omega).\vec{r})} + C.C. \qquad I12$$

onde E_{03} é proporcional a $E^*_{01}E_{02}$. No caso da onda $\vec{E}_2$ ser uma onda plana, a onda $\vec{E}_3$ será uma réplica conjugada da onda $\vec{E}_1$. A onda $\vec{E}_3$, como já foi dito, propaga-se no meio com um vetor de onda $\vec{k}_3(\omega)$ enquanto a fonte de polarização tem um vetor de onda $\vec{k}_2(2\omega) - \vec{k}_1(\omega)$. Uma transferência efetiva de energia de $\vec{E}_2$ para E_3 só é possível se

$$\vec{k}_3(\omega) \cong \vec{k}_2(2\omega) - \vec{k}_1(\omega) \qquad I13$$

Esta condição é chamada de "casamento de fase". Se esta condição não for satisfeita, as frentes de onda que geram $\vec{E}_3$ nas diferentes regiões do material não se somarão em fase e esta interferência destrutiva reduzirá em muito a intensidade da onda $\vec{E}_3$ gerada. A. Yariv[7] mostra que se $|\Delta\vec{k}| = |\vec{k}_2(2\omega)-\vec{k}_1(\omega)|$ representa o "descasamento de fase" dos vetores de onda, então o comprimento do cristal que deve ser usado para que haja um mínimo de interferência destrutiva é da ordem de $\frac{\pi}{\Delta k}$ cujo valor é tipicamente ao redor de 50 μm. Portanto o "casamento de fase" é um fator importante a ser levado em conta quando se deseja um longo comprimento de interação para gerar uma intensa onda $\vec{E}_3$. Via de regra o exato "casamento de fase" só é conseguido ao longo de uma única direção para o caso de materiais anisotrópicos dispersivos[8]. Isto causa uma forte limitação na divergência angular das duas ondas e portanto também na quantidade de informação ou distorção que pode ser conjugada ou corrigida.

I.3. Mistura de quatro ondas

Aspectos gerais

Uma maneira sugerida para contornar o problema causado pelo "casamento de fase" foi dada por Hellwarth[9]. Ele demonstrou que a incidência de mais uma onda no material, a qual se propaga em direção oposta a uma outra (já presente na mistura de três ondas) anularia automaticamente o incômodo efeito do "casamento de fase". Este processo foi denominado "mistura de quatro ondas". Hellwarth[9] mostrou que esta mistura se utiliza de uma polarização oticamente induzida a qual é cúbica nos campos elétricos, e que um dos termos desta polarização não linear de terceira ordem é responsável pela geração, quase instantânea, de uma onda retro-espalhada que é, a menos de constantes, uma réplica inverti da no tempo de uma das três ondas incidentes (aquela que não participa do par de ondas que se propagam em sentidos opostos). Em virtude da polarização que produz o efeito ser da terceira ordem e não de segunda como é no caso da mistura de três ondas, este processo não fica restrito a cristais assimétricos e pode ocorrer em qualquer material: sólido, líquido ou gás. Hellwarth(9) concluiu ainda que se as frequências das ondas forem todas iguais, o campo conjugado é proporcional ao incidente no mesmo ponto do espaço; e se as frequências das duas ondas que se propagam em sentidos opostos (que ele chamou de ondas de "bomba" e que foram consideradas constantes ao atravessarem o meio, por serem de alta intensidade comparativamente a onda objeto) forem iguais entre si mas diferentes da frequência da terceira onda incidente então a onda teroativa é proporcional a incidente porém não mais no mesmo ponto do espaço mas sim num ponto vizinho. Se as frequências das ondas não forem todas iguais o processo é chamado mistura de quatr ondas; mas se todas as frequências forem iguais ele se chama mistura de quatro ondas degenerada. Descrevendo um pouco mais detalhadamente, a mistura de quatro ondas é um processo não linear no qual três ondas que entram num meio se misturam para gerar uma quarta onda: a chamada onda retro-espalhada. Duas das três ondas de entrada, propagam-se em sentidos opostos (ondas de "bomba") cujos símbolos são E_f e E_b (do inglês "forward" e "backward") e a terceira chamada onda "objeto" ou "sinal" cujo símbolo é E_p (do inglês "probe") entra no meio num ângulo arbitrário em relação às ondas de bomba. Todas as três ondas se acoplam através da susceptibilidade não linear de terceira $\chi^{(3)}$ para produzir uma quarta onda E_s retro-espalhada. A polarização não linear que produz a onda retro-espalhada E_s origina-se, nos meios isotrópicos, da contribuição de três termos separados(6,36), a saber:

$$\vec{P}_{n\ell} = A(\theta)|\vec{E}_f.\vec{E}_p|\vec{E}_b + A(\pi-\theta)|\vec{E}_b.\vec{E}_p|\vec{E}_f + B|\vec{E}_f.\vec{E}_b|\vec{E}_p^* \quad \text{I14}$$

Os dois primeiros termos são responsáveis pela analogia existente entre a mistura de quatro ondas degenerada e a holografia. Cada um destes dois termos contém um produto escalar que correspondem a interferência entre uma das ondas de bomba (onda de "referência" na holografia) e a onda "objeto" ou "sinal"; e o resultado do produto escalar é multiplicado pelo campo da outra onda de "bomba". Então cada termo corresponde a criação de um holograma por meio de uma das ondas de bomba e da onda "objeto" enquanto simultaneamente o processo de "leitura" ou "impressão" é feito pela outra onda de "bomba". Este processo pode ser ilustrado pela figura 3, a imagem holográfica da mistura de quatro ondas degenerada. Os processos de formação e leitura são mostrados separadamente, embora na realidade eles sejam simultâneos. O processo de formação é como a geração de duas estruturas de redes sobrepostas, mas que na figura 3, estão separadas por simplicidade. Cada uma consiste de uma série de planos paralelos, com as normas nas direções $\vec{k}_f-\vec{k}_p$ e $\vec{k}_b-\vec{k}_p$. A distância entre os planos é dada por $D = \dfrac{(\lambda/2)}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}$ onde θ é o ângulo entre os feixes que formam o holograma ou seja entre $\vec{E}_f$ e $\vec{E}_p$ ou $\vec{E}_b$ e $\vec{E}_p$. O processo de leitura ocorre quando, a onda de bomba que se propaga para "trás" $\vec{E}_b$ é espalhada pela rede formada pela outra onda de bomba $\vec{E}_f$ e pela onda objeto $\vec{E}_p$, ou quando a onda de bomba que se propaga para "frente" $\vec{E}_f$ é espalhada pela rede formada por $\vec{E}_b$ e $\vec{E}_p$, gera em qualquer um dos casos uma onda conjugada. Então o fenômeno descrito pelos dois primeiros termos da eq. I14 pode ser encarado como um no qual o índice de refração do material não linear é espacialmente modulado como resultado da interferência entre uma das ondas de bomba e a onda objeto. A outra onda de bomba é em seguida espalhada pela rede.

O terceiro termo da eq. I14 não possue análogo holográfico. O produto escalar de $\vec{E}_f$ por $\vec{E}_b$ corresponde a um fator não linear o qual não possui modulação espacial pois $\vec{k}_f+\vec{k}_b = 0$, e que oscila com uma frequência 2ω. A onda objeto que não interage com este campo corrente "forçado" com frequência 2ω, cria uma polarização que resulta na geração de uma onda conjugada.

As magnitudes relativas dos coeficientes A e B dependem fortemente das propriedades não lineares do meio escolhido para se fazer a mistura de quatro ondas. Se por exemplo, o meio não linear possui uma ressonância ótica para uma transição quântica correspondendo a uma frequência ω_o perto da frequência ω dos lasers usados na experiência, é conseguindo um grande aumento da intensidade onda conjugada(10) advindos dos dois primeiros termos em comparação a um sistema não resonante.

Vamos considerar um meio não linear formado por um "ensemble" de átomos ou moléculas com dois níveis de energia. A contribuição, próxima da ressonância, à polarização não linear é basicamente devida aos dois primeiros termos da eq. I14, e se manifesta como uma modulação espacial das populações do nível mais baixo em relação ao nível mais alto. As redes formadas pela interferência entre as ondas de bomba e a onda sinal seriam funções periódicas das populações, ou seja, se nos deslocarmos ao longo da direção $\vec{k}_f-\vec{k}_p$ (ou $\vec{k}_b-\vec{k}_p$) dentro do meio, nós notaríamos que a população de átomos do estado excitado em relação ao nível mais baixo oscila sinusoidalmente com um "período" $D = \dfrac{(\lambda/2)}{\text{sen}(\theta/2)}$. Por outro lado se o meio possui um par de níveis de energia da mesma paridade os quais se acoplam coerentemente através de uma interação que envolve não um, mas sim dois fotons, ou seja, interação não ressonante, então o terceiro termo da polarização não linear (eq. I14) será o dominante na geração da onda conjugada.

Em virtude dos três termos que formam a polarização não linear aparecerem como um produto escalar, é possível, usando-se uma apropriada seleção de combinações entre as polarizações dos campos, colineares ou perpendiculares, estudar as contribuições dos três termos da eq. I14 separadamente, para vários materiais não lineares.

Vamos supor agora que estamos numa situação de ressonância ($\omega \approx \omega_0$, isto é, predominância dos dois primeiros termos[36] da eq. I14) e que os átomos ou moléculas do meio utilizado sejam considerados estacionários. Neste caso a rede formada pela variação periódica das populações das moléculas também seria fixa no espaço. Esta configuração que influencia diretamente a onda conjugada, dependeria basicamente de dois fatores: da intensidade da luz das ondas de bomba (a qual determina a quantidade de átomos que serão colocados no estado excitado) e também do tempo de permanência no estado excitado antes do decaimento dos átomos de volta ao estado de energia mais baixa. Entretanto se os átomos não são estacionários e podem mover-se numa fração apreciável da distância periódica D durante o tempo de permanência no estado excitado, então tem-se um mecanismo através do qual o processo de mistura de quatro ondas é "apagado": é o chamado efeito de "desmachamento" da rede.

O tempo que um átomo com uma velocidade média térmica levaria para percorrer uma distância D depende logicamente de quão grande é o valor de D. Da expressão para D vê-se que sua variação vai desde $\frac{\lambda}{2}$ até infinito; isto significa que quan to maior é o valor de D menor é o efeito de "desmanchamento" da rede. Os resultados experimentais obtidos para se estudar este efeito quando comparados aos cálculos teóricos que levam em conta o movimento dos átomos dão excelente concordância[11,12].

É claro que o movimento dos átomos introduz também o chamado efeito Doppler, o qual modifica a frequência estática de absorção ω_0 e por conseguinte a condição de ressonância inicialmente suposta $\omega \approx \omega_0$, não será mais válida. Portanto os comentários feitos nos dois últimos parágrafos não seriam úteis neste contexto, já que, como já foi dito, fora da ressonância o termo que contribui fortemente para a polarização macroscópica é o terceiro da eq. I14 e não os dois primeiros; e este terceiro termo pela sua origem não sofre o efeito de "desmanchamento".

Vemos assim que o movimento dos átomos provoca dois efeitos competitivos:

a) diminui a polarização, pela diminuição dos dois primeiros termos da eq. I14 e consequentemente a diminuição da intensidade da onda conjugada, através do efeito de "desmanchamento".

b) aumenta a polarização, pela não mais validade da condição de ressonância ($\omega \approx \omega_0$) e consequentemente pelo aumento, em importância, do terceiro termo da eq. I14 e por conseguinte um aumento da intensidade da onda conjugada, já que fora da ressonância a grande contribuição à polarização macroscópica é dada por este termo.

I.4. Progressos realizados no campo de mistura de quatro ondas degeneradas

A primeira observação experimental de conjugação de fase usando holografia em tempo real foi feita por Stepanov et al,[13] enquanto D.M. Blooom e G. Bjorklund[14,15,16] observaram conjugação de fase usando mistura de quatro ondas degenerada e mais tarde também Jensen e Hellwarth[17,18,19]. Em seguida ao pioneiro artigo teórico de Hellwarth[9], Yariv e Pepper[20] aplicaram o formalismo de ótica não linear e mostraram que o processo de mistura de quatro ondas degenerada, num meio não absorvente, não saturável, e não se levando em conta o esgotamento das ondas de bomba (amplitudes das ondas de bomba constantes do longo do material) era capaz de aumentar a intensidade da onda objeto na saída do material, ou seja, $\frac{I_{obj}(L)}{I_{obj}(0)} > 1$; de amplificar a intensidade da onda conjugada em relação a intensidade da onda objeto na entrada do material, ou seja, $\frac{I_{conj}(0)}{I_{obj}(0)} > 1$; e também se se tiver valores suficientemente fortes das ondas de bomba, obter-se oscilação, sem haver realimentação espelhar, ou seja, $\frac{I_{conj}(0)}{I_{obj}(0)} = \infty$ e $\frac{I_{obj}(L)}{I_{obj}(0)} = \infty$ isto com o $I_{conj}(L) = 0$. Estendendo o trabalho de Yariv e Pepper[20], Abrams e Lind[10] incluiram efeitos de absorção e saturação, mas não levando em conta também o esgotamento das ondas de bomba. Neste artigo é mostrada uma relação crescente do gráfico da refletividade $R = \frac{I_{conj}(0)}{I_{obj}(0)}$ em função da intensidade das ondas de bomba para valores crescentes do coeficiente de absorção linear $\alpha_0 L$ e na condição de ressonância $\delta = (\omega-\omega_0)\tau_2 = 0$. É também observado uma relação crescente no gráfico da refletividade R em função da intensidade das ondas de bomba para um valor constante de $\beta L = \frac{\alpha_0 L}{1+\delta^2} = 1$ e valores crescentes de δ (fora da ressonância). Entretanto não são previstas nem condições de ganho e nem de oscilação. Outra contribuição nesta área foi dada por Marburger e Lam[21] os quais calculam expressões analíticas para a máxima intensidade da onda conjugada em função das duas ondas de bomba e da onda objeto (condição que é conseguida ajustando-se o valor L do comprimento do meio não linear). No cálculo são levados em conta o efeito do esgotamento das ondas de bomba, auto-modulação, absorção, mas não é levado em consideração o efeito de saturação. Marburger e Lam[21] chegam a algumas conclusões interessantes como, por exemplo, que nesta condição de máxima refletividade, pode-se obter uma intensidade finita da onda conjugada $I_{conj}(0)$, mesmo não havendo o "input" da onda objeto $I_{obj}(0)$, mas que este fato só acontece se somente se as intensidades das duas ondas de bomba forem iguais. Eles[21] concluem também que a intensidade da onda conjugada $I_{conj}(0)$ nunca é maior do que a intensidade $I_b(L)$ da onda de bomba que se propaga no mesmo sentido da onda conjugada.

I.5. Aplicações

Muitas aplicações do processo de mistura de quatro ondas foram sugeridas. Hellwarth[9] em seu artigo pioneiro e também Hellwarth e Jensen[22] onde observaram experimentalmente a geração de uma réplica invertida no tempo de uma onda monocromática. Marburger[23] mostra que a modulação de fase num pulso pode ser invertida no tempo usando-se mistura de quatro ondas degeneradas. Yariv[24] e Yariv et al[25-30] demonstram uma série de aplicações, entre as quais uma[24] que (vide fig. 4) indica uma maneira de compensar um sinal ótico, o qual sofre distorção ao atravessar uma atmosfera turbulenta fato que acarreta ser muito útil em assuntos de telecomunicação. Yariv[31] mostra que se consegue transmitir e receber imagens tri-dimensionais em guias de onda (vide fig. 5) de tal modo que uma imagem pode ser criada no fim de uma fibra ótica, imagem esta que é idêntica a imagem do objeto coerente situado na entrada da fibra. Yariv, Fekete e Pepper[30] sugeriram um método para estreitar um pulso que sofreu alargamento ao ser transmitido através de uma fibra (vide fig. 6). Uma potencial aplicação à fusão é também considerada (vide fig. 7), na qual um feixe de laser depois de iluminar os átomos a sofrerem fusão, entra num amplificador, sai amplificado porém é distorcido entrando em seguida num "espelho conjugado", sendo então retro espalhado (sofre conjugação de fase), entra novamente no amplificador e ao sair já não existem mais as distorções introduzidas pelo amplificador e também o feixe está muito mais intenso, sendo que em seguida ele incide de volta sobre os átomos que devem então sofrer o processo de fusão. Um problema importante inerente a este processo de fusão, é que os átomos que devem sofrer a fusão não podem mudar de configuração durante o tempo de percurso do feixe de laser desde quando ele é refletido pelos átomos até quando o feixe conjugado incide de volta sobre os mesmos átomos. Isto é necessário pois o feixe retro-refletido (conjugado) tem que ser a réplica conjugada da imagem do objeto (no caso em questão dos átomos) no instante em que ele é iluminado e espalha a luz.

Outra interessante e potencialmente promissora aplicação de ótica de fase conjugada e em particular em mistura de quatro ondas é usá-la como parte numa cavidade ótica ressonante. A característica deste ressonador é que um (ou os dois) espelhos concencionais são substituídos por espelhos conjugados. Alguns artigos[32,33] descrevem as propriedades destes dispositivos e algumas foram observadas experimentalmente[34]. Uma destas propriedades torna esta cavidade ressonante bastan te atrativa para aplicação em osciladores de alta potência: ele pode compensar distorções óticas dentro da cavidade. Pode se mostrar[32] que a quando a luz é refletida pelo espelho convencional, sua fase transversal depende somente da forma detalhada da superfície do espelho; a fase não depende de nenhuma outra fonte de distorção dentro da cavidade[34].

Outra possível aplicação é a que se refere a diferentes polarizações das ondas envolvidas no processo. Pode-se, utilizando-se polarizações ortogonais das duas ondas de bomba que se propagam em sentidos opostos, conseguir-se uma onda retro-espalhada cuja polarização é ortogonal a polarização da onda objeto[35]. A fig. 8 mostra um esquema desta experiência. Duas são aplicações imediatas desta modulação de polarização. A primeira é que pode-se redirecionar a onda conjugada numa outra direção que não a direção oposta àquela da onda objeto, embora ela continue guardando todas as demais características da onda conjugada da onda objeto. A segunda é que pode-se refocalizar a onda retroativa num outro plano, diferente daquele no qual originou-se a onda objeto.

Depois de alguns anos pesquisando este novo campo, a maior parte dos fundamentos físicos da ótica de fase conjugada está bem entendido. Muitas experiências foram já realizadas sob as mais diferentes condições. Na tabela 1 estão resumidos alguns dos resultados e é interessante notar em alguns casos, as altas refletividades observadas conseguidas com densidades de potência relativamente baixas e comprimentos das amostras também pequenos.

Dois bons artigos de revisão[36,37] foram já feitos onde são apresentadas os fundamentos físicos, os desenvolvimentos teóricos e experimentais, comparações com ramos semelhan -

tes, como por exemplo holografia e espalhamento Brillouin estimulado e outras possíveis aplicações, algumas das quais já realizados e outras, como sugestões, ainda a serem realizadas.

Pode-se ainda citar a aplicação da mistura de quatro ondas degenerada a plasmas[40], onde é mostrado que a susceptibilidade de terceira ordem pode ser da ordem ou várias ordens de grandeza maior do que a susceptibilidade correspondente para típicos materiais não lineares.

CAPÍTULO II

MODELO E OBJETIVOS

II.1. Considerações gerais e geometria do problema

Vamos considerar um meio não linear de extensão infinita nas dimensões transversais (eixos x e y) confinado entre dois planos paralelos separados por uma distância L. Vamos supor também que cada molécula do material possui, além do estado fundamental, dois níveis, os quais denominaremos de 1 e 2. Este é portanto um meio absorvente e saturável. Fazemos incidir sobre o meio três ondas eletromagnéticas, todas com a mesma frequência ω, e com sentidos de propagação como mostra a fig. 9. Duas são as chamadas ondas de bomba $\vec{E}_f$ e $\vec{E}_b$ e propagam-se em sentidos opostos, fazendo um ângulo $\theta \ll 1$ com o eixo z, enquanto a onda objeto $\vec{E}_p$ propaga-se no sentido z positivo. Este pequeno ângulo θ entre as ondas de bomba e a onda objeto é experimentalmente necessário por dois motivos. Primeiro devido ao fato de que como vamos considerar as polarizações das três ondas iguais, há a necessidade de distingui-las e este ângulo θ já é suficiente. Em segundo lugar em virtude da influência do efeito de "desmanchamento" causado pelo movimento das moléculas (efeito Doppler) já discutido anteriormente. O que acontece é que para pequenos ângulos, o "período" D da rede de espalhamento formada no material é muito grande e portanto aumenta muito o tempo necessário para as moléculas percorrerem uma distância periódica D e consequentemente diminui muito a possibilidade da influência do efeito de "desmanchamento".

Outro aspecto a ser salientado aqui é o fato de que em virtude das polarizações de todas as ondas serem iguais, faz com que todos os três termos da polarização macroscópica não linear, eq. I14, contribuam para o processo de formação da onda retroespalhada ou conjugada e portanto não é possível analisar separadamente os efeitos de cada um dos termos.

II.2. Conexão entre matriz densidade e a polarização macroscópica

A presença destes campos no material induz a formação de uma Hamiltoniana de interação dipolar do tipo

$$H_{int} = -\vec{p}.\vec{E}(\vec{r},t) \qquad \text{M1}$$

onde $\vec{p}$ é o operador momento dipolar da molécula e $\vec{E}(\vec{r},t)$ o campo elétrico total. A Hamiltoniana total será então

$$H = H_o + H_{int} \qquad \text{M1A}$$

onde H_o é a Hamiltoniana já existente no material na ausência dos campos elétricos. Os dois níveis de energia ε_1 e ε_2 são os que resultam da Hamiltoniana H_o, ou seja,

$$H_o|\psi_1> = \varepsilon_1|\psi_1> \quad ; \quad H_o|\psi_2> = \varepsilon_2|\psi_2> \qquad \text{M2}$$

Vale a pena enfatizar que o que chamamos de campo total $\vec{E}(\vec{r},t)$ inclui não somente as três ondas incidentes sobre o meio, mas também a quarta onda gerada: a onda conjugada, a qual chamaremos de $\vec{E}_s$.

Usando-se o operador momento dipolar $\vec{p}$, pode-se calcular o valor quântico médio $<\vec{p}>$ da molécula, induzido pelo campo $\vec{E}(\vec{r},t)$, através da equação

$$<\vec{p}> = tr(\rho\vec{p}) \qquad M3$$

onde ρ é a matriz densidade do sistema qual obedece a seguinte equação de evolução temporal

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[\rho, H\right] \qquad M4$$

Deve-se ainda incluir na eq. M4 os chamados termos de colisão. No caso da molécula de dois níveis, a matriz densidade será de dois por dois sendo que para os elementos da diagonal é introduzido um tempo de relaxação τ_1 o qual representa o tempo médio da permanência da molécula no estado excitado ε_2, antes de decair para o estado ε_1 devido a colisões entre as moléculas. Para os elementos fora da diagonal é introduzido um tempo de relaxação τ_2, o qual representa o tempo médio da perda de correlação entre as fases dos dipolos individuais das moléculas; τ_2 é conhecido como tempo de perda da "memória" de fase. Enquanto τ_1 é um tempo associado a uma mudança de energia da molécula (decaimento do estado ε_2 para o estado ε_1), o tempo τ_2 está associado a mudanças na orientação dos dipolos de cada molécula, não acarretando portanto mudanças na energia da molécula. Matematicamente os termos de colisão para os elementos da diagonal da matriz densidade possuem a forma $\frac{(\rho_{ii}-\rho_{ii}^{(e)})}{\tau_1}$; e os termos de colisão para os elementos fora da diagonal da matriz densidade possuem a forma $\frac{\rho_{ij}}{\tau_2}$ onde i,j = 1,2 que representam os dois estados da molécula e $\rho_{ii}^{(e)}$ representa o elemento da matriz densidade para o caso de equilíbrio, ou seja, quan do não existe campo elétrico externo aplicado.

Com o cálculo de ρ através da eq. M4 (com a inclusão dos termos de colisão) pode-se então obter o valor $<p>$ da molécula dado pela eq. M3. A polarização macroscópica induzida será então dada por

$$\vec{P}(t) = N<\vec{p}(t)> \qquad M5$$

II.3. Descrição do método de resolução da equação de onda

Uma vez de posse da expressão para $\vec{P}(t)$, deve-se inseri-la na equação de onda (MKS)

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad M6$$

e resolver esta equação para achar-se os quatro campos procurados. Fisicamente o que ocorre é que os campos dos lasers induzem uma polarização macroscópica não linear (além da linear). Esta polarização não linear funciona como fonte para alterar os próprios campos elétricos dentro do meio, os quais já modificados, induzem uma nova polarização não linear a qual novamente funciona como fonte alterando os campos elétricos e assim sucessivamente num processo auto consistente até que uma condição de equilíbrio seja atingida. É depois de ser alcançada esta situação, ou seja, num estado estacionário, é que são feitos os cálculos deste nosso trabalho.

Os campos elétricos aplicados são supostos da forma

$$\vec{E}_j = \frac{E_{oj}}{2}(\vec{r},t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_j.\vec{r})\right] + C.C. \qquad M7$$

Vamos considerar os campos como ondas planas pois a área transversal ocupada pelos feixes dos lasers é bem pequena para que se possa considerar as ondas como planas e também o comprimento L do material na direção z é suficientemente pequeno para que não se precise considerar o alargamento e estreitamento dos feixes de laser, enquanto eles atravessam o material. Vamos portanto na equação M6 desprezar todas as derivadas transversais (em relação a x e y) que apareçam. Para resolver a equação M6 vamos considerar a polarização no caso estacionário e fazermos uma transformada de Fourier desta polarização obtendo assim os coeficientes de $\exp(\pm inkz)$, $n = 0,1,2,3 \ldots$ com o objetivo de igualarmos os coeficientes do termo $n = 1$ desta expansão com os correspondentes do lado esquerdo da equação de onda M6. Os coeficientes dos termos para $n \neq 1$ não contribuem efetivamente na solução da equação M6 devido ao não "casamento" de fase com termos do lado direito desta mesma equação e este "descasamento" resulta, que após um tempo necessário para se atingir o estado estacionário, teremos uma influência nula para os campos elétricos.

O que distingue este trabalho dos demais já feitos, é basicamente o fato de ter-se levado em consideração simultaneamente o esgotamento das ondas de bomba E_f e E_b, ou seja, considerar-se a variação da amplitude destas ondas ao longo do comprimento da amostra; ter-se também considerado os casos de diferentes intensidades entre si, de entrada das ondas de bomba; analisado o comportamento das quatro ondas dentro do meio não linear para diferentes valores do coeficiente de dessintonia $\delta=(\omega-\omega_0)\tau_2$; diferentes valores da onda objeto E_p e do coeficiente de absorção $\alpha_0 L$, nos dois casos possíveis, isto é, com $\alpha_0 L$ positivo que corresponde a absorção e com $\alpha_0 L$ negativo correspondente a ganho, já que neste caso, a população do nível 2 (nível excitado), antes de se fazer incidir as três ondas no material, já está maior do que a do nível 1. Vale salientar também o enfoque diferente de ter-se utilizado transformada de Fourier para fazer-se o "casamento" de fases, para a solução das equações, nunca antes feito.

CAPÍTULO III

OBTENÇÃO DA MATRIZ DENSIDADE

III.1 Equações de Evolução Temporal da Matriz Densidade.

Como já dissemos antes, vamos considerar somente dois níveis (além do estado fundamental) excitados de uma molécula ou átomo. Esta hipótese pode ser considerada boa para o nosso propósito, se a frequência ω do campo incidente for da ordem de grandeza de

$$\omega \sim \omega_{21} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} \qquad \text{T1}$$

A hamiltoniana de interação dipolar (eq. M1) induzirá transições entre os dois níveis. Estas transições darão origem a uma polarização média $\langle\vec{p}\rangle$ dada pela eq. M3. Para calculá-la precisamos resolver a equação de evolução temporal da matriz densidade (eq. M4) incluindo-se também ainda os termos de relaxação. Considerando-se apenas os dois níveis, tem-se em virtude da eq. M3

$$\langle\vec{p}\rangle = \sum_{n,\ell=1}^{2} \rho_{n\ell}\, \vec{p}_{\ell n} \qquad \text{T2}$$

$$\langle\vec{p}\rangle = \sum_{n=1}^{2} (\rho_{n1}\vec{p}_{1n} + \rho_{n2}\vec{p}_{2n})$$

$$\langle\vec{p}\rangle = \rho_{11}\vec{p}_{11} + \rho_{12}\vec{p}_{21} + \rho_{21}\vec{p}_{12} + \rho_{22}\vec{p}_{22}$$

Mas como os operadores dipolares não ligam estados de mesma paridade

$$p_{11} \equiv \langle\psi_1|p|\psi_1\rangle = 0 \qquad \text{T3A}$$

$$p_{22} \equiv \langle\psi_2|p|\psi_2\rangle = 0 \qquad \text{T3B}$$

$$\langle\vec{p}\rangle = \vec{p}_{12}\rho_{21} + \vec{p}_{21}\rho_{12} \qquad \text{T4}$$

Valendo-se da propriedade hermitiana do operador p

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_{21} \qquad \text{T3C}$$

temos finalmente

$$\langle\vec{p}\rangle = \vec{p}_{12}(\rho_{12} + \rho_{21}) \qquad \text{T5}$$

Vamos agora resolver a eq. M4 para as componentes de ρ

$$\langle n|\frac{\partial\rho}{\partial t}|\ell\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle n|\left|\rho,H\right||\ell\rangle - \frac{\langle n|\Delta\rho|\ell\rangle}{\tau_{n\ell}} \qquad \text{T6}$$

Para a componente ρ_{11} temos

$$\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\langle 1|\left[\rho(H_o+V) - (H_o+V)\rho\right] - \frac{(\rho_{11}-\rho_{11}^e)}{\tau_1} \qquad \text{T7}$$

onde foi usado

$$H_{int} \equiv V \quad ; \quad \tau_{nn} \equiv \tau_1$$

$$|\psi_1\rangle \equiv |1\rangle \quad ; \quad |\psi_2\rangle \equiv |2\rangle \qquad \text{T8}$$

sendo ρ_{nn}^{e} = componentes diagonais da matriz densidade no equilí - brio $(\vec{E}(\vec{r},t)=0)$.

Usando as equações M2 temos, e sabendo-se que ε_1 e ε_2 são reais temos

$$\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{<1|\rho V|1> - <1|V\rho|1>\} - \frac{(\rho_{11}-\rho_{11}^{e})}{\tau_1} \qquad \text{T9}$$

Inserindo entre ρ e V um conjunto completo

$$\sum_{j=1}^{M} |j><j| = 1 \qquad \text{T10}$$

e lembrando que estamos considerando apenas dois níveis, ou seja,

$$<j|V|j'> = 0 \qquad \text{se } j \text{ ou } j' \neq 1,2 \qquad \text{T11}$$

e também em virtude das eqs. T3A e T3B

$$\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} V_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) - \frac{(\rho_{11} - \rho_{11}^{e})}{\tau_1} \qquad \text{T12}$$

Para a componente ρ_{12} temos:

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{<1|\Big|\rho,(H_o+V)\Big||2>\} - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T13}$$

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}|<1|\Big|\rho(H_o+V) - (H_o+V)\rho\Big||2> - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T13A}$$

chamamos $\tau_{12} \equiv \tau_2$.

Usando novamente as eqs. M2 temos:

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\rho_{12}+<1|\rho V|2> - <1|V\rho|2>\} - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T14}$$

Inserindo um conjunto completo entre ρ e V e usando também as eqs. T3A e T3B

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\rho_{12} + V_{12}(\rho_{11}-\rho_{22})\} - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T14A}$$

pela definição da matriz densidade

$$\rho_{21} = \rho_{12}^* \qquad \text{T15}$$

Então

$$\frac{\partial\rho_{21}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\rho_{21} + V_{12}(\rho_{22}-\rho_{11})\} - \frac{\rho_{21}}{\rho_2} \qquad \text{T16}$$

Para a componente ρ_{22}

$$\frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\{<2|\Big|\rho(H_o+V)-(H_o+V)\rho\Big||2>\} - \frac{(\rho_{22}-\rho_{22}^e)}{\tau_1} \qquad \text{T17}$$

$$\frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}V_{12}(\rho_{21}-\rho_{12}) - \frac{(\rho_{22}-\rho_{22}^e)}{\tau_1} \qquad \text{T18}$$

Vamos definir:

$$D = \rho_{11} - \rho_{22} \quad ; \quad D_e = \rho_{11}^e - \rho_{22}^e \qquad \text{T19}$$

Fazendo T12 - T18 vem:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 2\,\frac{i}{\hbar}\,V_{12}\,(\rho_{12}-\rho_{21}) - \frac{(D-D_e)}{\tau_1} \qquad \text{T20}$$

Da eq. T14

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = i\omega_o\,\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}\,V_{12}D - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T21}$$

onde foi usada a eq. T1 com $\omega_o \equiv \omega_{21}$. A frequência ω dos três campos incidentes sobre o material são iguais (caso degenerado) e da ordem de grandeza de ω_o. Se $V(r,t) = 0$, ou seja, não existe campo incidindo sobre o meio, a solução da eq. T21 será da forma

$$\rho_{12} \propto \exp\,(i\omega_o - \frac{1}{\tau_2})t \qquad \text{T22}$$

Na presença dos campos com $\omega \approx \omega_o$, vamos então supor a solução de T21

$$\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12}(t)\,\exp\,(i\omega t) \qquad \text{T23}$$

ou seja, vamos eliminar a variação rápida de ρ_{12} e trabalhar somente com a função lentamente variável no tempo $\tilde{\rho}_{12}(t)$. Para a função D não precisamos supor uma solução do tipo T23, pois se $V(r,t) = 0$, a função D decai exponencialmente no tempo. Nas eqs. T12, T18 (e consequentemente T 20) foi suposto que os outros níveis excitados não influenciam os níveis 1 e 2, contribuindo somente na determinação das populações de equilíbrio, o que é levado em conta através de ρ_{11}^e e ρ_{22}^e.

III.2 Forma dos Campos e Aproximações Usadas.

Vamos considerar que os campos aplicados são ondas planas da forma (já justificada anteriormente)

$$E_n(r,t) = \frac{1}{2} E_{on}(r,t) \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{r})\right] + C.C. \qquad T24$$

onde $n \equiv f,b,p,s$. As ondas E_f e E_p caminham da esquerda para a direita no sentido de z positivo. As ondas E_b e E_s no sentido de z negativo. Mas em virtude da eq. M1 e T8

$$V_{12} = -\vec{p}_{12} \cdot \left[\frac{\vec{E}_o(r,t)\exp(i\omega t) + \vec{E}_o^{*}(r,t)\exp(-i\omega t)}{2}\right]$$

T25

onde

$$\vec{E}_o(r,t) = \sum_n \vec{E}_{on}(r,t) \exp(-i\vec{k}_n.\vec{r}) \qquad T26$$

Como já dissemos antes, vamos considerar iguais as polarizações dos quatro campos, pois se a polarização de apenas um, dos quatro campos fosse diferente dos demais, haveria necessidade de se considerar mais que dois níveis de energia, isto porque o campo $\vec{E}$ com mais de uma componente, induziria transições entre outros níveis, já que no produto escalar $\vec{p}.\vec{E}$, apareceriam termos proporcionais a x e y, ou x e z, ou y e z devido ao operador momento de dipolo $\vec{p}$, cujos elementos de matriz fariam ligações entre mais de dois níveis.

Levando T23 e T25 em T20, usando T15 e desprezando os termos proporcionais a exp ($\pm$ i$2\omega t$) vem (denomina-se esta aproximação "aproximação da onda rotatória")

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} p_{12} \left[E_0(r,t)\tilde{\rho}^*_{12} - E^*_0(r,t)\tilde{\rho}_{12}\right] - \frac{(D-D_e)}{\tau_1} \qquad \text{T27}$$

O fato de termos desprezado os termos proporcionais a $\exp(\pm i2\omega t)$ se justifica pois suas médias temporais dão zero em um intervalo de tempo pequeno comparado com o tempo de observação da experiência, porém grande comparado com $\frac{2\pi}{\omega}$ que é o período de oscilação do campo elétrico.

Levando T23 em T21 e igualando os coeficientes de $\exp(+i\omega t)$ temos:

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_{12}}{\partial t} = i\Delta\omega\tilde{\rho}_{12} - \frac{i}{\hbar}\frac{p_{12}}{2} E_0(r,t)D - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T28}$$

onde $\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega$ T28A

O complexo conjugado de T28 vale:

$$\frac{\partial\tilde{\rho}^*_{12}}{\partial t} = -i\Delta\omega\tilde{\rho}^*_{12} + \frac{i}{\hbar}\frac{p_{12}}{2} E^*_0(r,t)D - \frac{\tilde{\rho}^*_{12}}{\tau_2} \qquad \text{T29}$$

Vale salientar que não estamos considerando a inclusão do efeito Doppler. Entretanto isto poderia ser feito[41], por exemplo, por simplicidade, supondo-se movimento dos átomos ou moléculas somente na direção z. Neste caso a derivada temporal da matriz densidade seria

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) \qquad \text{T28B}$$

onde v_z é a componente da velocidade ao longo do eixo z. Então nas equações de evolução temporal da matriz densidade, o fator $\Delta\omega$ é substituído por

$$\Delta\omega_d = \omega_o - \omega + kv_z \qquad \text{T28C}$$

Depois de resolver-se as equações de movimento para $\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega_d)$ no caso estacionário, toma-se a média térmica, utilizando-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann; assim:

$$<\tilde{\rho}_{12}> = \left(\frac{M}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}_{12}(v_z)\exp\left[-\frac{M}{2K_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right] dv_x dv_y dv_z \qquad \text{T28D}$$

As integrais em v_x e v_y podem ser feitas sem problemas. Para a integral em v_z pode-se fazer uma mudança de variável usando-se a eq. T28C. Tem-se então:

$$<\tilde{\rho}_{12}> = \frac{1}{k}\left(\frac{M}{2\pi K_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega_d)\exp\left[-\frac{M}{2K_B T}\,\frac{(\Delta\omega_d-\Delta\omega)^2}{k^2}\right] d(\Delta\omega_d) \qquad \text{T28E}$$

Lembrando-se ainda que

$$\frac{2K_B T}{M} = v_{mp}^2 \sim v_{rms}^2 = \frac{3K_B T}{M} \qquad \text{T28F}$$

onde v_{mp} e v_{rms} são a velocidade mais provável média quadrática respectivamente, obtém-se finalmente

$$<\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega)> = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, kv_{rms}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega_d)\ \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega_d-\Delta\omega}{kv_{rms}}\right)^2\right] d(\Delta\omega_d) \qquad \text{T28G}$$

Com o cálculo de $<\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega)>$ pode-se obter então a polarização macroscópica (ver adiante eq. T40). Alguns trabalhos que consideram a inclusão do movimento atômico já foram feitos[11,12].

Na realidade a solução completa de D e ρ_{12} exigiria expansões do tipo

$$D = D_o(r,t)+D_1(r,t)e^{i\omega t}+D_1^*(r,t)e^{-i\omega t}+D_2(r,t)e^{i2\omega t}+D_2^*(r,t)e^{-i2\omega t}+\ldots. \qquad \text{T30A}$$

$$\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12}(r,t)e^{i\omega t}+\tilde{\tilde{\rho}}_{12}(r,t)e^{i2\omega t}+\tilde{\tilde{\tilde{\rho}}}_{12}(r,t)e^{i3\omega t}+\ldots. \qquad \text{T30B}$$

Teríamos então que levar estas expansões, juntamente com a eq. T24 nas eqs. T20 e T21 e igualar os coeficientes de mesma ordem nas exponenciais exp(imωt) onde m = 0,1,2,3... e teríamos assim um conjunto infinito de equações com infinitos coeficientes a determinar.

Entretanto neste cálculo consideramos somente os primeiros termos das duas expansões T30 e T30B porque supusemos que $\omega \sim \omega_o$ e isto faz com que os coeficientes seguintes sejam bem pequenos se comparados com os primeiros termos de cada expansão.

Somando as eqs. T28 e T29

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\rho}_{12}+\tilde{\rho}_{12}^*)=i\Delta\omega(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{12}^*) - \frac{ip_{12}}{2\hbar} D\left[E_o(r,t)-E_o^*(r,t)\right] - \frac{1}{\tau_2}(\tilde{\rho}_{12}+\tilde{\rho}_{12}^*) \qquad \text{T31}$$

Mas

$$\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}^*_{12} = 2R_e(\tilde{\rho}_{12}) \equiv 2X$$

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}^*_{12} = i2\ \mathrm{Im}(\tilde{\rho}_{12}) \equiv i2Y \qquad \text{T33}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\Delta\omega Y + \frac{p_{12}D}{2h} E_{oI} - \frac{X}{\tau_2} \qquad \text{T31A}$$

Fazendo T28-T29 vem

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}^*_{12}) = i\Delta\omega(\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}^*_{12}) - \frac{ip_{12}D}{2h}\left[E_o(r,t) + E^*_o(r,t)\right]$$

$$- \frac{1}{\tau_2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}^*_{12}) \qquad \text{T32}$$

usando T32

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \Delta\omega X - \frac{p_{12}D}{2h} E_{OR} - \frac{Y}{\tau_2} \qquad \text{T32A}$$

onde E_{OR} e E_{OI} são as partes reais e imaginárias dos campos elé - tricos, excluindo-se as exponenciais $\exp(\pm\ i\omega t)$, ou seja, partes reais e imaginárias da eq. T26.

Para a eq. T27 usando T33 e reescrevendo T26 como:

$$E_o(r,t) = E_{OR}(r,t) + iE_{OI}(r,t) \qquad \text{T26}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} p_{12} \left[(E_{OR}+iE_{OI})(X-iY) - (E_{OR}-iE_{OI})(X+iY)\right] - \frac{(D-D_e)}{\tau_1} \qquad \text{T34}$$

Agrupando os termos em X e Y vem:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} p_{12}\left[E_{OI}X - E_{OR}Y\right] - \frac{(D-D_e)}{\tau_1} \qquad \text{T34A}$$

III.3 Cálculo da Polarização Macroscópica e Forma Explícita da Equação de Onda

As equações T31A, T32A e T34A representam as evoluções temporais dos elementos não diagonais e da diferença entre os dois elementos da diagonal, dentro das aproximações já citadas. Vemos também que estas equações estão acopladas ao campo elétrico $E_0(r,t)$ o qual é regido pela equação T7. O campo total é da forma

$$E(r,t) = \sum_n \frac{1}{2} E_{on}(r,t) \exp |i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{r})| + c.c. \qquad T35$$

onde $\underline{n} \equiv f,b,p,s$ representando os quatro campos. Como estamos considerando apenas variações longitudinais (ao longo do eixo z) teremos então para as derivadas espaciais:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial E_{on}}{\partial z}(z,t) \exp \left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right]$$

$$- \frac{1}{2} \sum_n i\vec{k}_n.\hat{z}\; E_{on}(z,t) \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] + c.c. \qquad T36$$

A derivada segunda valerá

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial^2 E_{on}}{\partial z^2}(z,t) \exp \left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] -$$

$$\sum_n i\vec{k}_n.\hat{z} \frac{\partial E_{on}}{\partial z}(z,t) \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] - \frac{1}{2} \sum_n (\vec{k}_n.\hat{z})^2 E_{on}(z,t) \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right]$$

$$+ c.c. \qquad T37$$

Para as derivadas temporais teremos analogamente a equação T36:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\partial E_{on}}{\partial t}(z,t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] +$$

$$\frac{1}{2}\sum_n i\omega E_{on}(z,t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] + c.c. \qquad T38$$

Para a derivada segunda analogamente a equação T37

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\partial^2 E_{on}}{\partial t^2}(z,t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] + \sum_n i\omega \frac{\partial E_{on}}{\partial t}(z,t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_n \omega^2 E_{on}(z,t)\ \exp\left[i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})\right] + c.c. \qquad T39$$

Por outro lado, precisamos também calcular a polarização macroscópica. Com este objetivo levamos T23 e seu complexos conjugado em T5 e este resultado em M8.

$$P(t) = Np_{12}\left[\tilde{\rho}_{12}(t)\ \exp(i\omega t) + \tilde{\rho}^*_{12}(t)\ \exp(-i\omega t)\right] \qquad T40$$

Usando a equação T33

$$P(t) = 2Np_{12}\left[X(t)\ \cos(\omega t) - Y(t)\ \mathrm{sen}(\omega t)\right] \qquad T40A$$

Temos agora que levar as equações T37, T39 e T40A na equação I7. Mas antes, vamos fazer a chamada "aproximação da amplitude lentamente variável". Esta aproximação consiste em desprezar as derivadas segundas em comparação ao produto das derivadas primeiras vezes os fatores que tornam estes produtos dimensionalmente iguais as derivadas segundas. Assim teremos

$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right| \ll \left|\frac{\omega \partial E}{t}\right|$$
$$\left|\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{k \partial E}{\partial z}\right| \qquad \text{T41}$$

Estas aproximações são justificadas desde que as variações, tanto espaciais como temporais, do campo elétrico dentro do meio não linear são pequenos dentro de um período do campo. Levando-se então as equações T37, T39 (com as aproximações T41) e T40A na equação I7 teremos

$$\sum i\vec{k}_n.\hat{z}\ \frac{\partial E_{on}}{\partial z}\ \exp|i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})| - \frac{1}{2}\sum_n (\vec{k}_n.\hat{z})^2 E_{on}\ \exp|i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})|$$

$$\mu\varepsilon\omega \sum_n \frac{\partial E_{on}}{\partial t}\ \exp|i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})| + \frac{1}{2}\mu\varepsilon\omega^2 \sum_n E_{on}\ \exp|i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})|$$

$$+ \text{c.c.} = 2\mu\ Np_{12}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ |X(t)\ \cos(\omega t)-Y(t)\ \text{sen}(\omega t)| \qquad \text{T42}$$

Devido ao fato de todos os campos serem de mesma frequência ω e que também

$$(\vec{k}_n.\hat{z})^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \qquad \text{T43}$$

pois $k^2 \equiv (\vec{k}_n.\hat{z})^2$, o segundo e o quarto termo do lado esquerdo da equação T42 cancelam-se mutuamente. Por outro lado a derivada segunda do lado direito da equação T42 vale:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\,\text{sen}(\omega t)| = \left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\cos(\omega t)\right.$$

$$- 2\omega\frac{\partial X}{\partial t}\,\text{sen}(\omega t) - \omega^2 X\cos(\omega t) - \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\,\text{sen}(\omega t) - 2\omega\frac{\partial Y}{\partial t}\cos(\omega t)$$

$$\left. + \omega^2 Y\text{sen}(\omega t)\right] \qquad \text{T44}$$

Analogamente ao que fizemos com o campo elétrico vamos desprezar as derivadas segundas em comparação o produto de $\underline{\omega}$ pelas derivadas primeira, ou seja,

$$\left|\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right| \ll \left|\omega\frac{\partial X}{\partial t}\right|$$

$$\left|\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right| \ll \left|\omega\frac{\partial Y}{\partial t}\right| \qquad \text{T45}$$

Esta aproximação justifica-se devido ao fato de que tanto X como Y são ligados a $\tilde{\rho}_{12}(t)$ que varia lentamente no tempo, já que a dependência rápida foi eliminada (ver eq. T23). Então

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|X(t)\cos(\omega t) - Y(t)\text{sen}(\omega t)| \approx |-2\omega\frac{\partial X}{\partial t}\,\text{sen}(\omega t)$$

$$- \omega^2 X\cos(\omega t) - 2\omega\frac{\partial Y}{\partial t}\cos(\omega t) + \omega^2 Y\,\text{sen}(\omega t)| \qquad \text{T44A}$$

Nosso objetivo agora é resolver as eqs. T31A, T32A, T34A e também T42A dada por:

$$\sum_n i\vec{k}_n\cdot\hat{z}\,\frac{\partial E_{on}}{\partial z}\exp|i(\omega t-\vec{k}_n\cdot\vec{z})| - i\mu\varepsilon\omega\sum_n\frac{\partial E_{on}}{\partial t}\exp|i(\omega t-\vec{k}_n\cdot\vec{z})|$$

$$+ \text{ c.c. } = 2\mu \, Np_{12} \left| -2\omega \frac{\partial X}{\partial t} \operatorname{sen}(\omega t) - \omega^2 X \cos(\omega t) \right.$$

$$\left. - 2\omega \frac{\partial Y}{\partial t} \cos(\omega t) + \omega^2 Y \operatorname{sen}(\omega t) \right| \qquad \text{T42A}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\Delta\omega Y + \frac{p_{12}D}{2h} E_{0I} - \frac{X}{\tau_2} \qquad \text{T31A}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \Delta\omega X - \frac{p_{12}D}{2h} E_{0R} - \frac{Y}{\tau_2} \qquad \text{T32A}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = - \frac{2p_{12}}{h} \left| E_{0I}X - E_{0R}Y \right| - \frac{(D-D_e)}{\tau_1} \qquad \text{T34A}$$

Na forma em que estão, as soluções destas eqs. nos fornecem, além de X, Y e D, os valores dos quatro campos E_{of}, E_{op}, E_{ob}, e E_{os} em função de z e t. Estamos interessados no entanto, numa solução estacionária e não numa solução temporal transiente da matriz densidade. Para isto vamos zerar todas as derivadas temporais de X, Y e D em T31A, T32A, T34A e T42A.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \qquad \text{T46}$$

Assim podemos resolver as eqs. T31A, T32A, e T34A para X, Y e D em função de E_{0R} e E_{0I} (isto é, dos quatro campos) e substituir os respectivos resultados no lado direito da eq. T42A. Observando a eq. T42A, vemos que mesmo com as condições dadas por T46, as derivadas temporais dos campos são diferentes de zero. Neste caso teríamos o que se chama "adiabatic following approximation".

Na prática esta aproximação pode ser aplicada até para pulsos de pico segundos.

Usando as condições T46 tem-se

$$\frac{X}{\tau_2} + \Delta\omega Y - \frac{p_{12}D}{2h} E_{0I} = 0 \qquad \text{T47A}$$

$$\Delta\omega X - \frac{Y}{\tau_2} - \frac{p_{12}D}{2h} E_{0R} = 0 \qquad \text{T47B}$$

$$2\,\frac{p_{12}}{h} E_{0I}X - 2\,\frac{p_{12}}{h} E_{0R}Y + \frac{D}{\tau_1} = \frac{D_e}{\tau_1} \qquad \text{T47C}$$

cujas soluções são:

$$X = \frac{\left(\frac{D_e}{2\tau_1}\right)\left[\Delta\omega F_R + \frac{F_I}{\tau_2}\right]}{\frac{1}{\tau_1}\left[\frac{1}{\tau_2^2} + \Delta\omega^2\right] + \frac{1}{\tau_2}\left[F_R^2+F_I^2\right]} \qquad \text{T48A}$$

$$Y = \frac{\frac{D_e}{2\tau_1}\left[\Delta\omega F_I - \frac{F_R}{\tau_2}\right]}{\frac{1}{1}\left[\frac{1}{\tau_2^2} + \Delta\omega^2\right] + \frac{1}{\tau_2}\left[F_R^2+F_I^2\right]} \qquad \text{T48B}$$

$$D = \frac{\frac{D_e}{\tau_1}\left[\frac{1}{\tau_2^2} + \Delta\omega^2\right]}{\frac{1}{\tau_1}\left[\frac{1}{\tau_2^2} + \Delta\omega^2\right] + \frac{1}{\tau_2}\left[F_R^2 + F_I^2\right]} \qquad \text{T48C}$$

onde

$$F_R(z) = \frac{p_{12}}{2h} E_{0R}(z) \quad ; \quad F_I = \frac{p_{12}}{2h} E_{0I}(z) \qquad \text{T49}$$

Como já foi dito anteriormente, os quatro campos são tais que E_{of} e E_{op} caminham para a direita e E_{ob} e E_{os} para a esquerda. Assim em virtude da eq. T24 e T26

$$E_{OR} = \frac{E_A(z)\exp(ikz)+E_A^*(z)\exp(-ikz)}{2} \qquad \text{T50A}$$

$$E_{OI} = \frac{\Delta E_A(z)\exp(ikz)-\Delta E_A^*(z)\exp(-ikz)}{2i} \qquad \text{T50B}$$

onde

$$E_A(z) = E_{ob} + E_{os} + E_{of}^* + E_{op}^* \qquad \text{T51A}$$

$$\Delta E_A(z) = (E_{ob}+E_{os}) - (E_{of}^* + E_{op}^*) \qquad \text{T51B}$$

Se definirmos

$$E_+ = \frac{E_A+\Delta E_A}{2} \quad ; \quad E_- = \frac{E_A-\Delta E_A}{2} \qquad \text{T52}$$

Podemos reescrever T48A, T48B e T48C como:

$$D(z) = \frac{\Omega_R^2 \frac{p_{12}}{2h} \left|E_A(z)e^{ikz}+E_A^*(z)e^{-ikz}\right| + \Omega_I^2 \frac{p_{12}}{i2h} \left|\Delta E_A(z)e^{ikz}-\Delta E_A^*(z)e^{-ikz}\right|}{\Omega^3+\Omega_2 \; |E_+|^2+|E_-|^2 + E_+E_-e^{i2kz} + E_+^*E_-^*e^{-i2kz}} \qquad \text{T53A}$$

$$D(z) = \frac{\Omega_R^2 \frac{p_{12}}{i2h} \left|\Delta E_A(z)e^{ikz}-\Delta E_A^*(z)e^{-ikz}\right| - \Omega_I^2 \frac{p_{12}}{2h} \left|E_A(z)e^{ikz}+E_A^*(z)e^{-ikz}\right|}{\Omega^3+\Omega_2 \; |E_+|^2+|E_-|^2+E_+E_-e^{i2kz} + E_+^*E_-^*e^{-i2kz}} \qquad \text{T53B}$$

$$D(z) = \frac{D_e \, \Omega^3}{\Omega^3+\Omega_2 \; |E_+|^2+|E_-|^2+E_+E_-e^{i2kz} + E_+^*E_-^*e^{-i2kz}} \qquad \text{T53C}$$

onde

onde

$$\Omega_R^2 = \frac{D_e \Delta\omega}{2\tau_1} \; ; \; \Omega_I^2 = \frac{D_e}{2\tau_1\tau_2} \; ; \; \Omega_2 = \frac{1}{\tau_2}\frac{p_{12}}{h^2} \; ; \; \Omega^3 = \frac{1}{\tau_1}\left|\frac{1}{\tau_2^2} + \Delta\omega^2\right| \qquad \text{T54}$$

Pode-se ainda reescrever T53A, T53B e T53C como:

$$X(z) = \frac{C_x \exp(ikz) + C_x^* \exp(-ikz)}{M_B + M\exp(i2kz) + M^*\exp(-i2kz)} \qquad \text{T55A}$$

$$Y(z) = \frac{C_y \exp(ikz) + C_y^* \exp(-ikz)}{M_B + M\exp(i2kz) + M^*\exp(-i2kz)} \qquad \text{T55B}$$

$$D(z) = \frac{C_d}{M_B + M\exp(i2kz) + M^*\exp(-i2kz)} \qquad \text{T55C}$$

onde

$$C_x = \frac{p_{12}}{2h}\left(\Omega_R^2 E_A + \frac{\Omega_I^2}{i} \Delta E_A\right) \qquad \text{T56A}$$

$$C_y = \frac{p_{12}}{2h}\left(\frac{^2_R}{i} \Delta E_A - \Omega_I^2 E_A\right) \qquad \text{T56B}$$

$$M_B = \Omega^3 + \Omega_2(|E_+|^2 + |E_-|^2) \qquad \text{T56C}$$

$$M = \Omega_2 E_+ E_- \qquad \text{T56D}$$

$$C_d = D_e\Omega^3 \qquad \text{T56E}$$

CAPÍTULO IV

Obtenção das Equações Diferenciais para os Campos

IV.1. Ondas quase paralelas e expansão da solução da matriz densidade em série de Fourier

Nosso objetivo agora é resolver a eq. T42A com as condições T46. Para isto precisamos considerar duas coisas: Primeira: vamos igualar os termos de mesma fase dos dois lados de T42A. Do lado esquerdo não há problema para se identificar os termos de fases diferentes, como se pode ver claramente. Do lado direito entretanto a identificação não é imediata. Precisa-se antes escrever as funções sen (ωt) e cos (ωt) em termos de exp $(\pm i\omega t)$. Depois faz-se uma expansão em série de Fourier de X e Y, os quais são dados pelas eqs. T55A e T55B e guarda-se os de ordem 1, ou seja, exp $(\pm ikz)$. Acopla-se então os coeficientes que estão multiplicando exp $(\pm ikz)$ com os que multiplicam exp $(\pm i\omega t)$, agrupando os termos de mesma fase. Assim pode-se igualar os termos de mesma fase dos lados direito e esquerdo da eq. T42A.

Vale salientar que o fato de usar-se apenas os termos de ordem 1 na expansão de Fourier de X e Y é baseada em que os termos de ordem mais alta não estão em fase com nenhum termo do lado esquerdo da eq. T42A e que portanto não dão contribuição efetiva.

Segunda: como o modelo de dois níveis excitados da molécula ou átomo nos obriga a considerar as polarizações de todas as ondas iguais, na separação por fase teríamos que incluir juntos de um lado os campos E_{of} e E_{op} e de outro os campos E_{ob} e E_{os} pois não haveria meio de distingui-los. Entretanto como já foi dito, para fazer a identificação experimental, faz-se a incidência de E_{of}

e E_{op} sobre o material com um pequeno ângulo $\theta \ll 1$ de diferença entre eles o suficiente para distingui-los, e fazendo a mesma coisa com os campos E_{ob} e E_{os}. Assim pode-se separar as equações nos quatro campos e não em duas.

Uma justificativa de que esta geometria não afeta tanto os cálculos, pode ser analisada da seguinte maneira. Pela figura a onda objeto R_p propaga-se na direção z positiva. A onda E_f propaga-se no plano xz fazendo um ângulo $\theta \ll 1$ com o eixo z. Os vetores de onda são $\vec{k}_p$ e $\vec{k}_f$ respectivamente. Como $|\vec{k}_f| = |\vec{k}_p|$ e $\theta \ll 1$ pode-se supor que $\vec{k}_{//}$ é quase paralelo ao eixo x e também que

$$|\vec{k}_{//}| \approx |\vec{k}_f|\theta \qquad \text{A1}$$

Então tem-se para o produto escalar

$$\vec{k}_f.\vec{r} = (\vec{k}_p+\vec{k}_{//}).(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = |\vec{k}_p|z - |k_{//}|x \qquad \text{A2}$$

Mas nesta aproximação pode-se escrever

$$x \approx z\theta \qquad \text{A3}$$

Levando A1 e A3 em A2 vem:

$$\vec{k}_f.\vec{r} = |k_f|z(1-\theta^2) \qquad \text{A4}$$

No laboratório um ângulo de 1^o já é suficiente (para o tamanho da célula usada) para identificar os dois feixes, e neste caso $\theta^2 = 0.0003$, logo $\vec{k}_f.\vec{r}$ pode ser aproximado por $|k_f|z$, ou seja

$$\vec{k}_f \cdot \vec{r} = |k_f| z \qquad \text{A5}$$

Com estes dois comentários vamos então expandir em série de Fourier as funções X(z) e Y(z). Assim temos:

$$X(z) = \frac{A_{ox}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_{nx} \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) + B_{nx} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) \right| \qquad \text{T57}$$

onde

$$A_{nx} = \frac{2}{L} \int_0^L X(z) \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) dz \qquad \text{T57A}$$

$$B_{nx} = \frac{2}{L} \int_0^L X(z) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) dz \qquad \text{T57B}$$

Analogamente para Y

$$Y(z) = \frac{A_{oy}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{ny} \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) + B_{ny} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) \qquad \text{T58}$$

onde

$$A_{ny} = \frac{2}{L} \int_0^L Y(z) \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) dz \qquad \text{T58A}$$

$$B_{ny} = \frac{2}{L} \int_0^L Y(z) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) dz \qquad \text{T58B}$$

$$D(z) = \frac{A_{OD}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_{nD} \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) + B_{nD} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) \right| \qquad \text{T58C}$$

onde

$$A_{nD} = \frac{2}{L} \int_0^L D(z) \cos\left(\frac{2\pi n z}{L}\right) dz \qquad \text{T58D}$$

$$B_{nD} = \frac{2}{L}\int_0^L D(z)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n z}{L}\right)dz \qquad \text{T58E}$$

Pelas expressões T55A e T55B para X(z) e Y(z) vê-se que elas são periódicas, com período $kL = 2\pi$. Levando T55A em T57A e T57B reescrevendo as funções seno e coseno como exponenciais tem-se:

$$A_{nx} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{C_x e^{ikz} + C_x^* e^{-ikz}}{M_B + M_e^{i2kz} + M_e^{*-i2kz}}\right|\left(\frac{e^{inkz} + e^{-inkz}}{2}\right)kdz$$

T59A

$$B_{nx} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{C_x e^{ikz} + C_x^* e^{-ikz}}{M_B + M_e^{i2kz} + M_e^{*-i2kz}}\right|\left(\frac{e^{inkz} - e^{-inkz}}{2i}\right)kdz$$

T59B

IV.2. Cálculo dos Coeficientes de Fourier pelo Método de Resíduos

Com expressões análogas para A_{ny} e B_{ny} com os C_y e C_y^* nos lugares dos C_x e C_x^* respectivamente. Vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$\eta = e^{ikz} \therefore d\eta = ike^{ikz}dz \therefore kdz = \frac{d\eta}{i\eta} \qquad \text{T60}$$

Com esta mudança vamos fazer no plano complexo, tomando como contorno um círculo de raio unitário tendo como centro a origem do plano complexo. Assim as eqs. para A_{nx} e B_{nx} serão:

$$A_{nx} = \frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{C_x\eta^{(n+1)} + C_x^*\eta^{-(n+1)} + C_x\eta^{-(n-1)} + C_x^*\eta^{(n-1)}}{M_B + M\eta^2 + M^*\eta^{-2}}\right]\frac{d\eta}{\eta} \qquad \text{T61}$$

$$B_{nx} = \frac{1}{2\pi}\oint\left[\frac{C_x\eta^{(n+1)}-C_x^*\eta^{-(n+1)}-C_x\eta^{-(n-1)}+C_x^*\eta^{(n-1)}}{M_B + M\eta^2 + M^*\eta^{-2}}\right]\frac{d\eta}{\eta} \qquad \text{T61}$$

Vamos realizar as integrais pelo método dos resíduos. Para isso precisamos achar os polos dos integrandos das eqs. T61A e T61B. Antes vamos multiplicar e dividir o integrando por η^2. O denominador destas duas equações ficaria então:

$$\text{Denominador} = M\eta^4 + M_B\eta^2 + M^* \qquad \text{T62}$$

Esta é uma equação biquadrada, cujas raízes são os polos da função. Os quatro polos são

$$\eta_1 = +\sqrt{\frac{-M_B + \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{2M}} \qquad \text{T63A}$$

$$\eta_2 = -\sqrt{\frac{-M_B + \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{2M}} \qquad \text{T63B}$$

$$\eta_3 = +\sqrt{\frac{-M_B - \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{2M}} \qquad \text{T63C}$$

$$\eta_4 = -\sqrt{\frac{-M_B - \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{2M}} \qquad \text{T63D}$$

Usando as equações T56C e T56D mostra-se que:

$$M_B^2 - 4|M|^2 = \Omega^6+2\Omega^3\Omega_2(|E_{(+)}|^2+|E_{(-)}|^2)+\Omega_{(2)}^2(|E_{(+)}|^2-|E_{(-)}|^2)^2 \qquad \text{T64}$$

que é uma quantidade positiva. Vamos agora procurar qual dos polos tem módulo menor do que 1. O módulo de η_2 é igual ao módulo de η_1. Além disso pode-se escrever que:

$$\eta_1^2 = \gamma_1 = \frac{-M_B + \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{2|M|} \qquad \text{T65A}$$

$$|\gamma_1|^2 = \left(\frac{r^2}{2} - 1\right) - r\sqrt{\frac{r^2}{4} - 1} \qquad \text{T65B}$$

onde

$$r = \frac{M_B}{|M|} \quad .$$

Mas em virtude de T64 ser positiva tem-se que

$$\frac{r^2}{4} - 1 > 0 \rightarrow r > 2 \quad . \qquad \text{T66}$$

Assim podemos observar que no limite $r \rightarrow 2$, o valor de $|\gamma_1|^2 \rightarrow 1$. Quando $r \rightarrow \infty$ teremos $|\gamma_1|^2 \rightarrow 0$ (zero). Estes resultados nos permitem concluir que os dois polos η_1 e η_2 tem sempre módulo menor do que 1.

Por outro lado o módulo de η_3 é igual ao módulo de η_4 e também

$$\eta_3^2 = \gamma_3 \therefore |\gamma_3|^2 = \left(\frac{r^2}{2} - 1\right) + r\sqrt{\frac{r^2}{4} - 1} \qquad \text{T67}$$

Portanto pode-se concluir, usando o raciocínio anterior, que os dois polos η_3 e η_4 tem sempre módulo maior do que 1. Isto significa que os polos que nos interessam para o cálculo dos resíduos são apenas o η_1 e o η_2.

Vamos agora realizar as integrais T61A e T61B. Na eq. T61A podemos separar a integral em quatro integrais. Deste modo tem-se para a primeira integral:

$$I1A_x(n) = \frac{C_x}{2\pi i M}\oint \frac{\eta^{(n+2)}\, d\eta}{(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)(\eta-\eta_4)} \qquad T68$$

$$I1A_x(n) = \frac{C_x}{M}\left[\frac{\eta_1^{(n+2)}}{(\eta_1-\eta_2)(\eta_1-\eta_3)(\eta_1-\eta_4)} + \frac{\eta_2^{(n+2)}}{(\eta_2-\eta_1)(\eta_2-\eta_3)(\eta_2-\eta_4)}\right]$$

T68A

Mas como $\eta_2 = -\eta_1$ e $\eta_4 = -\eta_3$

$$I1A_x(n) = \frac{C_x}{2\eta_1 M}\left[\frac{\eta_1^{(n+2)}}{(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{(-1)^n.\eta_1^{(n+2)}}{(\eta_1^2 - \eta_3^2)}\right] \qquad T68B$$

Para a segunda integral de T61A teremos:

$$I2A_x(n) = \frac{C_x^*}{2\pi i M}\oint \frac{d\eta}{(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)(\eta-\eta_4)\eta^n} \qquad T69$$

Esta integral tem que ser feita separadamente para cada $\underline{n}$ pois além dos polos η_1 e η_2 existe outro polo na origem de ordem $\underline{n}$, que precisa ser levado em conta pois está dentro do círculo de raio unitário $|\eta| < 1$.

O resíduo de ordem $\underline{n}$ para o polo $\eta = \eta_p$ vale

$$a_n = \lim_{\eta\to\eta_p} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{d\eta^{(n-1)}}\{(\eta-\eta_p)^n\ f(\eta)\} \qquad T70$$

No nosso caso $\eta_p = 0$

$$a_n = \lim_{\eta\to o} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{d\eta^{(n-1)}}\{\eta^n f(\eta)\} \qquad T70A$$

onde

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta^{n}(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)(\eta-\eta_4)} \qquad \text{T71}$$

Para os casos n = 0, n = 1 e n = 2 temos:

$$I2A_x(o) = \frac{C_x^*}{2\eta_1 M}\left[\frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right] = 0 \qquad \text{T69A}$$

$$I2A_x(1) = \frac{C_x^*}{\eta_1^2 M}\left[\frac{1}{\eta_3^2} + \frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right] \qquad \text{T69B}$$

$$I2A_x(2) = \frac{C_x^*}{M}\left[\frac{\eta_1(\eta_3\eta_4-\eta_3\eta_4) + \eta_1(\eta_2\eta_3-\eta_2\eta_3)}{(\eta_1^4\eta_3^4)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\eta_1^3(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{1}{2\eta_1^3(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right] = 0 \qquad \text{T69C}$$

Para a terceira integral teremos:

$$I3A_x(n) = \frac{C_x}{M}\oint \frac{\eta^2 d\eta}{\eta^{n}(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)(\eta-\eta_4)} \qquad \text{T72}$$

Para n = 0, n = 1, n = 2 e n = 3 tem-se:

$$I3A_x(o) = \frac{C_x}{M}\left[\frac{\eta_1^2}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{\eta_1^2}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right] = 0 \qquad \text{T72A}$$

$$I3A_x(1) = \frac{C_x}{M}\left|\frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \qquad \text{T72B}$$

$$I3A_x(2) = \frac{C_x}{M}\left|\frac{1}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{1}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| = 0 \qquad \text{72C}$$

$$I3A_x(3) = \frac{C_x}{\eta_1^2 M}\left[\frac{1}{\eta_3^2} + \frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right] \qquad \text{T72D}$$

A quarta integral vale:

$$I4A_x(n) = \frac{C_x^*}{M}\oint \frac{\eta^n d\eta}{(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)(\eta-\eta_4)} \qquad \text{T73}$$

Então:

$$I4A_x(n) = \frac{C_x^*}{2\eta_1 M}\left|\frac{\eta_1^n}{(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{(1)^n.\eta_1^n}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \qquad \text{T73A}$$

Para n = 0, n = 1, n = 2 e n = 3 tem-se:

$$I4A_x(o) = \frac{C_x^*}{M}\left|\frac{1}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{1}{2\eta_1(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| = 0 \qquad \text{T73B}$$

$$I4A_x(1) = \frac{C_x^*}{M}\left|\frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \qquad \text{T73C}$$

$$I4A_x(2) = \frac{C_x^*}{M}\left|\frac{\eta_1}{2(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{\eta_1}{2(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| = 0 \qquad \text{T73D}$$

$$I4A_x(3) = \frac{C_x^*}{M}\left|\frac{\eta_1^2}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \tag{T73E}$$

Por analogia com estes resultados, podemos fazer as integrais a eq. T61B. Para a primeira integral teremos:

$$I1B_x(n) = -\frac{iC_x}{2\eta_1 M}\left|\frac{\eta_1^{(n+2)}}{(\eta_1^2-\eta_3^2)} - \frac{(-1)^n.\eta_1^{n+2}}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \tag{T74}$$

Para a segunda integral com n = 0, n = 1 e n = 3

$$I2B_x(o) = 0 \tag{T75A}$$

$$I2B_x(1) = \frac{iC_x^*}{\eta_1^2 M}\left|\frac{1}{\eta_3^2} + \frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \tag{T75B}$$

$$I2B_x(2) = 0 \tag{T75C}$$

Para a terceira integral com n = 0, n = 1, n = 2 e n = 3 tem-se:

$$I3B_x(o) = 0 \tag{T76A}$$

$$I3B_x(1) = \frac{iC_x}{M}\left|\frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \tag{T76B}$$

$$I3B_x(2) = 0 \tag{T76C}$$

$$I3B_x(3) = \frac{iC_x}{\eta_1^2 M}\left|\frac{1}{\eta_3^2} + \frac{1}{(\eta_1^2-\eta_3^2)}\right| \tag{T76D}$$

Para a quarta integral tem-se:

$$I4B_x(n) = -\frac{iC_x^*}{2n_1 M}\left|\frac{n_1^n}{(n_1^2-n_3^2)} - \frac{(-1)^n . n_1^n}{(n_1^2-n_3^2)}\right| \quad T77$$

Para n = 0, n = 1, n = 2 e n = 3 tem-se:

$$I4B_x(o) = 0 \quad T77A$$

$$i4B_x(1) = -\frac{iC_x^*}{M}\left|\frac{1}{(n_1^2-n_3^2)}\right| \quad T77B$$

$$I4B_x(2) = 0 \quad T77C$$

$$I4B_x(3) = -\frac{iC_x^*}{M}\left|\frac{n_1^2}{(n_1^2-n_3^2)}\right| \quad T77D$$

Na forma mais geral, teremos então para os coeficientes A_{nx} e B_{nx}

$$A_{nx} = |I1A_x(n) + I2A_x(n) + I3A_x(n) + I4A_x(n)| \quad T78$$

$$B_{nx} = |I1B_x(n) + I2B_x(n) + I3B_x(n) + I4B_x(n)| \quad T79$$

Os valores das integrais correspondentes as eqs. T38A e T58B para A_{ny} e B_{ny}, são obtidos a partir dos correspondentes A_{nx} e B_{nx} apenas trocando o C_x e o C_x^* onde eles aparecem, pelo C_y e C_y^* respectivamente. Logo:

$$A_{ny} = |I1A_y(n) + I2A_y(n) + I3A_y(n) + I4A_y(n)| \quad T80$$

$$B_{ny} = |I1B_y(n) + I2B_y(n) + I3B_y(n) + I4B_y(n)| \quad T81$$

Como já foi dito anteriormente, estamos interessados nos coeficientes A_{1x}, B_{1x}, A_{1y} e B_{1y}, pois são os que permitem "casamento" de fase (eq. T42A). Entretanto é interessante notar que os A_{nx}, B_{nx}, A_{ny} e B_{ny} são zero para todos os n pares e diferentes de zero para todos os n ímpares. Por outro lado ao se fazer a expansão em série de Fourier da função D(z) (eq. T58C) acontece o oposto: os coeficientes A_{nD} e B_{nD} da série são zero para todos os n ímpares e diferentes para todos os n pares (exceto B_{0D} que é zero). Por exemplo, para a primeira integral:

$$I1A_D(n) = \frac{C_d}{2n_1 M} \left| \frac{n_1^{n+1}}{(n_1^2-n_3^2)} + \frac{(-1)^n . n_1^{n+1}}{(n_1^2-n_3^2)} \right| \qquad T82$$

Para a segunda integral, com n = 0, n = 1 e n = 2:

$$I2A_D(o) = \frac{C_d}{M} \left| \frac{1}{(n_1^2-n_3^2)} \right| \qquad T83A$$

$$I2A_D(1) = 0 \qquad T83B$$

$$I2A_D(2) = \frac{C_d}{n_1^2 M} \left| \frac{1}{n_3^2} + \frac{1}{(n_1^2-n_3^2)} \right| \qquad T83C$$

Para os coeficientes B_{nD} teremos as expressões:

$$I1B_D(n) = - iI1A_D(n)$$

$$I2B_D(n) = iI2A_D(n)$$

IV.3. "Casamento" de Fases e Obtenção das Equações Diferenciais para os Campos no Caso Estacionário

Se observarmos as eqs. T31A, T32A e T34A ou as equivalentes estacionárias T47A, T47B e T47C, concluimos que, por exemplo nas eqs. T47A e T47B os coeficientes de $\exp(+ikz)$ (ou $\exp(-ikz)$) de X e Y se acoplam ao produto do coeficiente de ordem zero de D com o coeficiente de exp $(+ikz)$ (ou $\exp(-ikz)$) de $E_{0I,R}$. Por outro lado os coeficientes de $\exp(+i3kz)$ (ou $\exp(-i3kz)$) de X e Y se acoplam ao produto do coeficiente de $\exp(+i2kz)$ (ou $\exp(-i2kz)$) de D com o coeficiente de $\exp(+ikz)$ (ou exp $(-ikz)$) de $E_{0I,R}$. Isto significa que nestas duas eqs. são acoplados os coeficientes de exp $|\pm i(2n+1)kz|$ de X e Y com o produto do coeficiente de $\exp(\pm i2nkz)$ de D com o coeficiente de $\exp(\pm ikz)$ de $E_{0I,R}$, onde $n = 0,1,2,3....$

Já na eq. T47C os coeficientes de ordem zero de D se acoplam ao produto do coeficiente de exp $(+ikz)$ (ou $\exp(-ikz)$) de X e Y com o coeficiente de $\exp(-ikz)$ (ou $\exp(+ikz)$) de $E_{0I,R}$. Por outro lado os coeficientes de $\exp(+i2kz)$ (ou $\exp(-i2kz)$) de D se acoplam ao produto do coeficiente de $\exp(i3kz)$ (ou $\exp(-i3kz)$) de X e Y com o coeficiente de $\exp(-ikz)$ (ou $\exp(+ikz)$) de $E_{0I,R}$. De forma geral então os coeficientes de exp $(\pm i2nkz)$ de D se acoplam ao produto do coeficiente de $\exp|\pm i(2n+1)kz|$ de X e Y com o coeficiente de $\exp(\mp ikz)$ de $E_{0I,R}$, onde $n = 0,1,2,3....$

Teremos assim uma série infinita para X, Y e D, isto é, eqs. T57, T58 e T58C, cujos coeficientes são obtidos, primeiramente em função dos campos (pois η_1, η_2, η_3 e η_4 dependem das amplitudes) calculando-se os valores de A_{nx}, B_{nx}, A_{ny}, B_{ny}, A_{nD} e B_{nD} e inserindo estes valores (obedecendo as igualdades das fases espaciais) nas eqs. T47A, T47B e T47C seguindo as técnicas estabelecidas nos dois parágrafos anteriores, e simultaneamente resolvendo a equação de onda T42A igualando-se os termos de mesma fase, o que significa dizer que, nesta equação só os coeficientes de n = 1 contribuem.

Vamos então explicitar a eq. T42A para os quatro campos, com a condição T46, igualando os termos de mesma fase

$$\frac{\partial E_{of}}{\partial z} + \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{of}}{\partial t} = -\frac{p_{12}N\mu\omega^2}{k}(iA^* - U^*) \qquad \text{T85A}$$

$$\frac{\partial E_{ob}}{\partial z} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{ob}}{\partial t} = \frac{p_{12}N\mu\omega^2}{k}(iA - U) \qquad \text{T85B}$$

$$\frac{\partial E_{op}}{\partial z} + \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{op}}{\partial t} = -\frac{p_{12}N\mu\omega^2}{k}(iA^* - U^*) \qquad \text{T85C}$$

$$\frac{\partial E_{os}}{\partial z} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{os}}{\partial t} = \frac{p_{12}N\mu\omega^2}{k}(iA - U) \qquad \text{T85D}$$

onde A e U são dados pelos coeficientes de n = 1 de X e Y respectivamente. Das eqs. T57 e T58 e a condição de periodicidade $kL = 2\pi$ $(A_{ox} = A_{oy} = 0)$

$$X = A_{1x}\cos(kz) + B_{1x}\,\text{sen}\,(kz) + \ldots. \qquad \text{T86}$$

$$Y = A_{1y}\cos(kz) + B_{1y}\,\text{sen}(kz) + \ldots. \qquad \text{T87}$$

$$X = \frac{1}{2}\left(A_{1x} + \frac{B_{1x}}{i}\right)e^{ikz} + \frac{1}{2}\left(A_{1x} - \frac{B_{1x}}{i}\right)e^{-ikz} \qquad \text{T86A}$$

$$X = Ae^{ikz} + A^*e^{-ikz} \qquad \text{T86B}$$

$$Y = \frac{1}{2}\left(A_{1y} + \frac{B_{1y}}{i}\right)e^{ikz} + \frac{1}{2}\left(A_{1y} - \frac{B_{1y}}{i}\right)e^{-ikz} \qquad \text{T87A}$$

$$Y = U\,e^{ikz} + U^*\,e^{-ikz} \qquad \text{T87B}$$

Em virtude das T68B, T69B, T72B e T73C teremos para a eq. T78 para o caso n = 1

$$A_{1x} = \frac{1}{M}\left[\frac{(C_x + C_x^* + C_x n_1^2)}{(n_1^2 - n_3^2)} + \frac{C_x^*}{n_1^2(n_1^2 - n_3^2)} + \frac{C_x^*}{n_1^2 n_3^2}\right]$$

$$A_{1x} = \frac{1}{M}\left[\frac{(C_x + C_x^* + C_x n_1^2)}{(n_1^2 - n_3^2)} + \frac{C_x^*}{n_3^2(n_1^2 - n_3^2)}\right] \qquad \text{T88}$$

Em virtude das eqs. T74, T75B, T76B e T77B teremos para a eq. T79 para o caso n = 1

$$B_{1x} = \frac{i}{M}\left[\frac{(C_x - C_x^* - C_x n_1^2)}{(n_1^2 - n_3^2)} + \frac{C_x^*}{n_3^2(n_1^2 - n_3^2)}\right] \qquad \text{T89}$$

Analogamente para A_{1y} e B_{1y} teremos:

$$A_{1y} = \frac{1}{M}\left[\frac{(C_y + C_y^* + C_y n_1^2)}{(n_1^2 - n_3^2)} + \frac{C_y^*}{n_3^2(n_1^2 - n_3^2)}\right] \qquad \text{T90}$$

$$B_{1y} = \frac{i}{M}\left[\frac{(C_y - C_y^* - C_y\eta_1^2)}{(\eta_1^2 - \eta_3^2)} + \frac{C_y^*}{\eta_3^2(\eta_1^2 - \eta_3^2)}\right] \qquad \text{T91}$$

Os coeficientes A_{1x}, B_{1x}, A_{1y} e B_{1y} são todos reais (como é exigido) pois pelas eqs. T63A e T63C

$$\eta_1^2 = \frac{1}{(\eta_3^2)^*} \qquad \text{T92}$$

e também por estas mesmas duas equações

$$\eta_1^2 - \eta_3^2 = \frac{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}{M} \qquad \text{T93}$$

consequentemente:

$$M(\eta_1^2 - \eta_3^2) = \sqrt{M_B^2 - 4|M|^2} \qquad \text{T93A}$$

Mas em virtude de T86A, T86B e T87A, T87B

$$A = \frac{1}{2}(A_{1x} + \frac{B_{1x}}{i}) \qquad \text{T94A}$$

$$U = \frac{1}{2}(A_{1y} + \frac{B_{1y}}{i}) \qquad \text{T94B}$$

Levando T88, T89 em T94A e T90 e T91 em T94B e usando T92 e T93A

$$A = \frac{C_x + C_x^*(\eta_1^2)^*}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}} \qquad \text{T95A}$$

$$A^* = \frac{C_x^* + C_x\eta_1^2}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}} \qquad \text{T95B}$$

$$U = \frac{C_y + C_y^*(\eta_1^2)^*}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}} \qquad \text{T95C}$$

$$U^* = \frac{C_y + C_y^*(\eta_1^2)^*}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}} \qquad \text{T95D}$$

Vamos agora construir os fatores do lado direito das eqs. T85A, T85B, T85C e T85D. Usando as eqs. T56A, T56B e seus complexos conjugados teremos:

$$iC_x - C_y = \frac{ip_{12}}{2\hbar}\,\Omega_c^2\left[E_A + \Delta E_A\right] \qquad \text{T96A}$$

$$iC_x^* - C_y^* = \frac{ip_{12}}{2\hbar}\,\Omega_c^2\left[E_A^* + \Delta E_A^*\right] \qquad \text{T96B}$$

onde

$$\Omega_c^2 = \Omega_R^2 - i\Omega_I^2 \qquad \text{T97}$$

Assim

$$iA - U = \frac{ip_{12}}{2\hbar}\,\frac{\Omega_c^2}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}\left\{\left[E_A + \Delta E_A\right] + \left[E_A^* - \Delta E_A^*\right](\eta_1^2)^*\right\} \qquad \text{T98A}$$

$$iA^* - U^* = \frac{ip_{12}}{2\hbar}\,\frac{\Omega_c^2}{\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}}\left\{\left[E_A^* - \Delta E_A^*\right] + \left[E_A + \Delta E_A\right]\eta_1^2\right\} \qquad \text{T98B}$$

Para escrevermos M_B, M e $\sqrt{M_B^2 - 4|M|^2}$ em função de E_A, E_A^*, ΔE_A e ΔE_A^*, vamos primeiro usar as eqs. T52

$$|E_{(+)}|^2 = \frac{1}{4}\left[|E_A|^2+|\Delta E_A|^2+(E_A\Delta E_A^*+E_A^*\Delta E_A)\right] \qquad \text{T99A}$$

$$|E_{(-)}|^2 = \frac{1}{4}\left[|E_A|^2+|\Delta E_A|^2-(E_A\Delta E_A^*+E_A^*\Delta E_A)\right] \qquad \text{T99B}$$

$$E_{(+)}E_{(-)} = \frac{1}{4}\left[(E_A)^2 - (\Delta E_A)^2\right] \qquad \text{T99C}$$

Levando T99A, T99B e T99C em T56C, T56D e T64 teremos:

$$M_B = \Omega^3 + \Omega_{(2)}\left[\frac{|E_A|^2+|\Delta E_A|^2}{2}\right] \qquad \text{T100A}$$

$$M = \Omega_{(2)}\left[\frac{(E_A)^2-(\Delta E_A)^2}{4}\right] \qquad \text{T100B}$$

$$|M_B^2-4|M|^2|^{1/2} = \{\Omega^6+\Omega^3\Omega_{(2)}(|E_A|^2+|\Delta E_A|^2)$$

$$+ \frac{\Omega_{(2)}^2}{4}\left[2|E_A|^2|\Delta E_A|^2+E_A^2(\Delta E_A^2)^*+(E_A^2)^*\Delta E_A^2\right]\}^{1/2}$$

$$\text{T100C}$$

Levando as eqs. T51A e T51B em T100A, T100B e T100C teremos:

$$M_B = \Omega^3 + \Omega_{(2)} \left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})+(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right] \qquad \text{T101A}$$

$$M = \Omega_{(2)} \left[(E_{ob} + E_{os})(E^*_{of}+E^*_{op})\right] \qquad \text{T101B}$$

$$\sqrt{M_B^2-4|M|^2} = \{\Omega^6+2\Omega^3\Omega_{(2)}\left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})+(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right]$$

$$+ \Omega^2_{(2)} \left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})-(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right]\}^{1/2} \qquad \text{T101C}$$

Diretamente de T51A e T51B vem

$$E_A-\Delta E_A = 2(E^*_{of}+E^*_{op}); \quad E^*_A-\Delta E^*_A = 2(E_{of}+E_{op}) \qquad \text{T102A}$$

$$E_A+\Delta E_A = 2(E_{ob}+E_{os}); \quad E^*_A+\Delta E^*_A = 2(E^*_{ob}+E^*_{os}) \qquad \text{T102B}$$

Levando T102A e T102B em T98A e T98B, e os resultados em T85A, T85B, T85C e T85D, depois dividindo M_B (eq. 101A), M (eq. 101B), $\sqrt{M_B^2-4|M|^2}$ (eq. 101C) e consequentemente η_1^2 e $(\eta_1^2)^*$ (eq. 63A) por Ω^3 para torná-las admensionais (η_1 já é automaticamente admensional), teremos:

$$\frac{\partial E_{of}}{\partial z} + \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{of}}{\partial t} = -\frac{i(p_{12})^2 N\mu\omega^2\Omega^2_{(c)}}{\hbar k\Omega^3}\left\{\frac{(E_{of}+E_{op})+(E_{ob}+E_{os})\eta^2_{1a}}{(\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a}\right. \qquad \text{T103A}$$

$$\frac{\partial E_{ob}}{\partial z} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{ob}}{\partial t} = \frac{i(p_{12})N\mu\omega^2\Omega^2_{(c)}}{\hbar k\Omega^3}\left\{\frac{(E_{ob}+E_{os})+(E_{of}+E_{op})(\eta^2_{1a})^*}{(\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a}\right\} \qquad \text{T103B}$$

$$\frac{\partial E_{op}}{\partial z} + \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{op}}{\partial t} = -\frac{i(p_{12})^2N\mu\omega^2\Omega^2_{(c)}}{\hbar k\Omega^3}\left\{\frac{(E_{of}+E_{op})+(E_{ob}+E_{os})\eta^2_{1a}}{(\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a}\right\} \qquad \text{T103C}$$

$$\frac{\partial E_{os}}{\partial z} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{k}\frac{\partial E_{os}}{\partial t} = \frac{i(p_{12})^2N\mu\omega^2\Omega^2_{(c)}}{\hbar k\Omega^3}\left\{\frac{(E_{ob}+E_{os})+(E_{of}+E_{op})(\eta^2_{1a})}{(\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a}\right\} \qquad \text{T103D}$$

e os complexos conjugados destas quatro equações onde:

$$M_{Ba} = 1 + \frac{\Omega_{(2)}}{\Omega^3}\left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})+(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right] \qquad \text{T104A}$$

$$M_a = \frac{\Omega_{(2)}}{\Omega^3}\left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{of}+E^*_{op})\right] \qquad \text{T104B}$$

$$(\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a = \{1 + 2\frac{\Omega_{(2)}}{\Omega^3}\left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})+(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right]$$

$$+ \frac{\Omega^2_{(2)}}{\Omega^6}\left[(E_{ob}+E_{os})(E^*_{ob}+E^*_{os})-(E_{of}+E_{op})(E^*_{of}+E^*_{op})\right]^2\}^{1/2} \qquad \text{T104C}$$

$$\eta^2_{1a} = \frac{-M_{Ba} + (\sqrt{M_B^2-4|M|^2})_a}{2M_a} \qquad \text{T104D}$$

Por outro lado em virtude das eqs. T54, o fator que frequentemente aparece nestas eqs. vale:

$$\frac{\Omega_{(2)}}{\Omega^3} = \frac{\frac{1}{\tau_2}\left(\frac{p_{12}}{\hbar}\right)^2}{\frac{1}{\tau_1}\left[\Delta\omega^2 + \frac{1}{\tau_2^2}\right]} = \frac{\tau_1\tau_2(p_{12})^2}{\hbar^2}\ \mathrm{sen}^2\phi \qquad \text{T105A}$$

onde

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{1}{\tau_2\Delta\omega} \qquad \text{T105B}$$

Pode-se ainda redefinir a eq. T105A

$$\frac{\Omega_{(2)}}{\Omega^3} = \frac{\mathrm{sen}^2\phi}{E_{sat}^2} \qquad \text{T105C}$$

onde

$$E_{sat}^2 = \frac{\hbar^2}{\tau_1\tau_2(p_{12})^2} \qquad \text{T105D}$$

sendo E_{sat}^2 a "intensidade" de saturação.

Por outro lado, o fator (excluindo-se o $\pm i$) que multiplica a chave { } nas eqs. T103A até T103D tem dimensões de $[L]^{-1}$, e é complexo. Vamos chamá-lo

$$\frac{1}{L(\phi)} = \frac{(p_{12})^2 N\mu\omega^2\Omega_{(c)}^2}{\hbar k\Omega^3} \qquad \text{T106}$$

Usando as eqs. T54 em T106

$$\frac{1}{L(\phi)} = \frac{(p_{12})^2 N\mu\omega^2 D_{(e)}(\Delta\omega - i/\tau_2)}{2\hbar k\left[\Delta\omega^2 + \frac{1}{\tau_2^2}\right]} \qquad \text{T106A}$$

$$L(\phi) = \frac{2\hbar k\sqrt{1+(\Delta\omega\tau_2)^2}}{(p_{12})^2 N\mu\omega^2\tau_2 D_{(e)}}\, e^{i\phi} \qquad \text{T106B}$$

Usando T104B em T106B

$$L(\phi) = \frac{2\hbar k}{(\rho_{12})^2 N\mu\omega^2\tau_2 D_{(e)}\operatorname{sen}\phi}\, e^{i\phi} \qquad \text{T106C}$$

Para se mostrar o paralelismo existente entre os parâmetros contidos no trabalho de Abrams e Lend(10) e os deste trabalho é útil redefinir o parâmetro $L(\phi)$. Para isto vamos retirar a dependência em ϕ, e chamar

$$L_c = \frac{2hk}{(p_{12})^2\ \mu\omega^2\ \tau_2 N D_e} \qquad \text{T106D}$$

e notar que este fator L_c é igual ao inverso do fator α_o no trabalho citado. Pode-se ainda comparar o parâmetro $\mathrm{tg}\phi$ com o δ de A. e L. Observa-se então que

$$\alpha_o = \frac{1}{L_c}$$

$$\delta = \cot\phi \qquad \text{T106E}$$

Nota-se ainda que o campo definido como E_{sat}^2 é igual ao $|E_s|^2$ de A. e L.(10)

CAPÍTULO V

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

V.1 Análise das Equações

Nosso objetivo é resolver as equações diferenciais T103, desprezando porém, como já foi justificado anteriormente as derivadas temporais das amplitudes dos campos. Pelas formas das equações T103 e T104 vê-se que não é possível resolvê-las analiticamente. Devido a complexidade das equações, não nos foi possível achar uma equação diferencial que permitisse uma solução analítica (como a que foi achada no caso de intensidade fraca da onda objeto, na equação 50 do apêndice) ou até mesmo uma equação diferencial que resultasse numa lei de conservação, como por exemplo no caso bem simples em que se tem a onda conjugada proporcional apenas ao complexo conjugado da onda objeto, isto é,

$$\frac{\partial E_{os}}{\partial z} = - \theta E^*_{op} \qquad \text{R1}$$

$$\frac{\partial E^*_{op}}{\partial z} = \theta^* E_{os} \qquad \text{R2}$$

que é um caso particular das equações e do apêndice. Logo:

$$E^*_{os} \frac{\partial E_{os}}{\partial z} + \text{c.c.} = \frac{\partial}{\partial z} |E_{os}|^2 = -\theta E^*_{os} E^*_{p} - \theta^* E_{os} E_{op} \qquad \text{R3}$$

$$E_{op} \frac{\partial E^*_{op}}{\partial z} + \text{c.c.} = \frac{\partial}{\partial z} |E_{op}|^2 = + \theta^* E_{op} E_{os} + \theta E^*_{op} E^*_{os} \qquad \text{R4}$$

Somando R3 com R4

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(|E_{os}|^2 + |E_{op}|^2\right) = 0 \qquad \text{R5}$$

onde obteve-se então uma lei de conservação, a qual em qualquer situação é sempre muito útil. É interessante observar que a equação R5 continua válida mesmo que θ dependa dos campos de bomba.

Embora não seja fácil, talvez seja possível achar uma equação diferencial que relacione as intensidades dos quatro campos entre si em função da distância z; entretanto, provavelmente ela só pode ser obtida de modo empírico, a posteriori, ou seja, resolvendo-se as equações para os campos numericamente em função de z e depois procurar descobrir qual tipo de relação existe entre as intensidades dos campos como função de z. Achar uma equação deste tipo seria extremamente útil, pois talvez permitisse calcular analiticamente variações das intensidades entre as quatro ondas ao longo da célula, através da variação da relação entre as intensidades, a qual obedece a equação diferencial empiricamente achada. Pode-se fazer entretanto algumas considerações qualitativas a respeito das equações.

É razoável esperar-se que os resultados advindos das equações T103 sejam diferentes do caso em que as ondas de bomba propagam-se em sentido contrário, porém numa direção arbitrária, não paralela a z, que é a direção da onda objeto. Isto ocorre porque a região de interação dos feixes no material aumenta a medida em que a direção de propagação das ondas de bomba se aproxima da direção da onda objeto. Matematicamente isto pode ser constatado ao se comparar as equações 25A e 26 do apêndice, com as equações 8 do trabalho de Abrams e Lind(10). Ambos os casos são calculados no limite de sinal fraco porém no cálculo que fizemos, a direção das ondas de bomba é quase coincidente (justificativa já dada anteriormente no capítulo IV pag. 43) com a da onda objeto, o que acarreta o aparecimento de outros termos.

É de se supor também que quanto maior é a região de interação entre os feixes, maior deve ser a eficiência do processo de mistura de quatro ondas.

Outro resultado que podemos esperar da resolução das equações T103, é algo análogo a equação 59 do apêndice. Lá pode-se observar que dependendo do valor de δ ($\delta^2 < 3$) existe uma periódica troca de energia entre a onda objeto e a onda retro-espalhada (conjugada) ao longo da distância z. Naquele caso as amplitudes das ondas de bomba são supostas constantes ao longo de z.

Neste trabalho entretanto é suposto que as amplitudes das ondas de bomba também podem variar com z. Portanto é razoável esperar-se também que haja uma troca de energia entre as quatro ondas e não somente entre duas. Este fato deve ser mais evidente, se L for da ordem de L_c (10), e se E_{op} e E_{os} tendem a infinito dentro do meio não linear, mesmo se tiverem intensidades pequenas na entrada. É claro que não se pode esperar que os resultados obtidos das soluções das equações T103 reflitam sempre de alguma forma, o resultado 59 do apêndice, ainda que no caso limite de intensidade fraca da onda objeto, pois na solução das equações 29,30 31,32 do apêndice, não foram considerados três termos, já que a intenção ali era somente analisar a influência dos outros dois termos.

Algumas vezes é possível apenas por uma análise qualitativa de uma equação diferencial, concluir-se de antemão, qual termo contribuirá de maneira positiva ou negativa para a ocorrência de um determinado efeito (como por exemplo na equação

$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$, o termo $\lambda\dot{x}$ corresponde a um amortecimento). Entretanto no caso das equações T103, torna-se difícil pela estrutura delas, fazer uma previsão de quais termos favorecerão ou inibirão a intensidade da onda de fase conjugada gerada no processo.

V.2 Construção do programa de computador

A fim de solucionar nossas equações, foi elaborado*, um programa de computador constando de um programa principal e uma subrotina conforme xerox anexo. A solução das equações em si está na subrotina (chamada O.D.E.) a qual se utiliza do método de Runge-Kutta. No programa principal constavam os parâmetros que iríamos variar, como por exemplo valores iniciais dos quatro campos, o coeficiente de dissintonia ϕ, e coeficiente de atenuação de campo α_0. Para facilitar os cálculos, todos os parâmetros foram feitos admensionais. Assim sendo, os valores dos quatro campos foram normalizados com respeito a E_{sat} que é o campo de saturação dado por $E_{sat}^2 = \frac{h^2}{\tau_1\tau_2(p_{12})^2}$, a distância z ao longo da célula (o meio não linear) apareceu como $z_a = \frac{z}{L}$ (onde L é o comprimento da célula) variando portanto entre zero e um e o coeficiente de atenuação linear do meio entrou como $\alpha_0 L$; o coeficiente de dissintonia $\phi = tg^{-1}(\frac{1}{\delta})$ onde $\delta = \Delta\omega\tau_2$. Devido ao fato de que os campos propagam-se em sentidos opostos dois a dois, as condições iniciais de contorno tem que ser dadas nas faces $z_a = 0$ e $z_a = 1$ respectivamente. O método de solução foi começar com quatro campos dados na mesma face, só que dois deles já com os valores corretos desejados e os outros dois com valores arbitrários e fizemos o programa ser executado tantas vezes quantas fossem necessárias, até que os valores dos dois campos arbitrariamente dados numa das faces atingissem os valores corretos desejados na outra face como assim exige a situação real; assim teríamos os quatro campos com suas condições iniciais ajustadas, duas das quais já previamente corretas. Neste ponto tem-se en

---

* conjuntamente com o Professor Paulo Hiroshi Sakanaka.

tão a solução das equações diferenciais para os quatro campos de $z_a = 0$ até $z_a = 1$, para aquelas condições de contorno dos campos desejadas. Esta condição final era conseguida substituindo-se, depois de cada execução (etapa intermediária) os dois valores inicialmente arbitrários dos dois campos numa das faces, pelos novos valores para esses mesmos dois campos calculados na outra face, havendo assim um processo de convergência, até que esses dois campos chegassem aos valores de contorno corretos na face desejada.

V.3 Esquema de interação das quatro ondas no meio não linear

As condições de contorno impostas ao problema foram as de que duas ondas, a objeto e a de referência ou reconstrutora (uma das ondas de bomba) incidem sobre o meio na face $z_a = 0$ com intensidades conhecidas. Na face $z_a = 1$ incide a onda reconstrutora ou referência (a outra onda de bomba) também com intensidade conhecida.

Neste processo considerou-se somente a incidência de três ondas sobre o meio não linear e deste modo a condição de contorno da quarta onda foi a de que ela tinha intensidade zero na face $z_a = 1$. Esta quarta onda, chamada onda retroespalhada ou onda conjugada, era gerada através da interação entre a onda objeto e a onda de referência, a qual pode ser tanto a que incide em $z_o = 0$ como a que incide em $z_a = 1$, formando assim no meio não linear uma rede de difração e a onda reconstrutora, a qual também pode ser a que incide em $z_a = 0$ ou $z_a = 1$ (ou seja, é aquela que não participa da formação da rede de difração juntamente com a onda objeto) e que é espalhada por esta rede (vide figura 3).

Neste ponto faz-se necessário um comentário a respeito do modo como são dados os valores dos quatro campos. Eles foram introduzidos da seguinte forma: (parte real, parte imaginária). Variando-se ambas as partes, mantendo-se porém o módulo constante, as intensidades dos campos não se alteram, entretanto as fases ficam modificadas. No caso das ondas objeto e conjugada não só as intensidades, mas também as fases são importantes quando se quer saber se a onda retroespalhada representa a imagem conjugada da onda objeto, ou seja, no pinto $z_a = 0$ tem-se $s(o) \propto p(o)$, mas com a fase da onda retroespalhada sendo o simétrico da fase da onda objeto.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS E CONCLUSÕES

VI.1 Análise da onda retroespalhada em função: da onda objeto, das ondas de bomba, com intensidades iguais nas duas faces ($f(o) = b(1)$), do coeficiente de atenuação e do coeficiente de dessintonia

Quanto ao comportamento da onda retroespalhada $s(0)$, observa-se que para valores fixos de $\alpha_0 L$ (positivos ou negativos), e de ϕ, a medida que o valor $p(o)$ aumenta, o valor máximo de $s(o)$ ocorre para valores cada vez menores das ondas de bomba, ou seja, a saturação começa a aparecer antes. Isto acontece porque no denominador da saturação aparecem os quatro campos ($|E_{tot}|/E_{sat}$), e como este fator atinge um ponto máximo sempre para o mesmo valor do campo total, ao aumentarmos o valor inicial de um deles (no caso da onda objeto), o valor da saturação para os campos de bomba tem que ser menores, para que a soma total dos quatro permanece a mesma. Por outro lado se fixamos os valores da onda objeto na entrada e o valor de $\alpha_0 L$ e variamos o valor de $\phi = \frac{\pi}{2}$ para $\phi = \frac{\pi}{4}$, observamos que há um aumento de intensidade da onda retroespalhada $s(o)$ e também um deslocamento do máximo desta onda, na direção crescente das ondas de bomba. O aumento de intensidade justifica-se, já que quando $\phi = \frac{\pi}{2}$ ("casamento" das frequências), a absorção linear no meio é maior do que quando $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Ainda para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{4}$ e para $p(o) = 0.14142$, comparando-se os valores da onda retroespalhada em função das ondas de bomba, para valores de $\alpha_0 L = 1$ (absorção) e $\alpha_0 L = -1$ (ganho), observa-se que no caso de ganho, os valores da onda retroespalhada antes da saturação são sempre maiores do que no caso de absorção, o que representa um resultado esperado. O valor máximo desta onda, ocorre antes para o ganho e o seu valor máximo é ligeiramente maior do que no caso de perda (vide ~~com~~parar fig. 10).).

Se o valor da onda objeto vale p(o) = 0.28284, os valores da onda retroespalhada em função das ondas de bomba, antes da saturação continuam sendo maiores no caso de ganho do que no caso de absorção e o valor máximo dela é maior no caso de ganho do que no caso de perda; neste caso a diferença é ainda maior do que no caso em que p(o) = 0.14142 (vide fig. 11)

No caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$ e para p(o) = 0.14142 os valores da onda retroativa em função das ondas de bomba, são também maiores no caso em que $\alpha_0 L = -1.0$ do que no caso em que $\alpha_0 L = 1.0$ até quando f(o) = b(1) = 0.6. Daí em diante, a onda retroespalhada passa a ser maior para $\alpha_0 L = 1.0$ do que para $\alpha_0 L = -1.0$, e como consequência seu valor máximo fica sendo maior no caso em que $\alpha_0 L = 1.0$ (vide fig. 12).

Se a onda objeto vale p(o) = 0.28284 todas as conclusões do parágrafo anterior continuam valendo, só que a diferença entre os máximos da onda retroespalhada para $\alpha_0 L = 1.0$ e $\alpha_0 L = -1.0$ é agora menor (vide fig. 13).

Para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, p(o) = 0.14142, os valores da onda retroativa são maiores no caso em que $\alpha_0 L = -0.5$ do que para $\alpha_0 L = 0.5$ até quando f(o) = 0.5; mas o valor máximo da onda retroespalhada é um pouco maior para $\alpha_0 L = 0.5$ do que para $\alpha_0 L = -0.5$. (vide fig. 14).

Já quando $\phi = \frac{\pi}{4}$ e p(o) = 0.14142 os valores da onda retroespalhada são maiores no caso em que $\alpha_0 L = -0.5$ do que para $\alpha_0 L = 0.5$ até quando f(o) = 0.8 e o valor máximo da onda retroativa são aproximadamente iguais para $\alpha_0 L = -0.5$ e $\alpha_0 L = 0.5$. (fig. 15)

Podemos ainda observar a onda retroespalhada como função de $\alpha_0 L$. Fixando-se os valores de ϕ e da onda objeto foram feitos gráficos para seis valores diferentes das ondas de bomba. A característica geral destes gráficos é que o valor da onda retroespalhada cresce para valores negativos crescentes de $\alpha_0 L$ e também para valores positivos crescentes de $\alpha_0 L$, passando por zero em $\alpha_0 L = 0$, resultado que concorda com o trabalho de A. e L.[10]. Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e p(o) = 0.14142, vemos na fig. 16 os gráficos para três valores diferentes de f(o). Para f(o) = 0.1 nota-se uma clara assimetria da onda conjugada em relação a origem $\alpha_0 L = 0$. Para valores negativos de $\alpha_0 L$, a onda retroespalhada atinge valores maiores do que os correspondentes simétricos positivos. Para f(o) = 0.2 e f(o) = 0.5, a assimetria continua e também a onda retroespalhada é maior para os valores negativos de $\alpha_0 L$, porém observa-se que a assimetria vai se tornando menos evidente. Para estes valores de f(o) abaixo da região de saturação estes resultados são característicos, ou seja, representam o fato de que se $\alpha_0 L$ é negativo (ganho), a onda retroespalhada é razoável ser maior do que se $\alpha_0 L$ é positivo (perda). Outra característica desta região é que para $\alpha_0 L$ maiores que 1.0 a onda retroespalhada aparentemente tende para um valor constante de saturação. Este é um resultado que vem do fato das ondas de bomba serem de baixa intensidade, não transferirem muita energia para a onda retroespalhada, como é o caso por exemplo, dos dois primeiros valores de f(o). Para o caso em que a onda de bomba vale 0.5, o efeito de saturação parece ocorrer, porém com um valor bem mais alto.

Já na fig. 17 pode-se observar o mesmo tipo de gráfico, só que agora para outros três valores mais intensos das ondas de bomba a saber: 0.7, 0.9 e 2.0. Neste caso vê-se que para os três valores da onda de bomba a onda retroespalhada é um pouco maior para os $\alpha_0 L$ positivos do que para os correspondentes simétricos. Na verdade, isto é uma consequência de que a saturação da onda conjugada ocorre antes para valores negativos de $\alpha_0 L$ do que para os positivos.

Já nas figs. 18 e 19 têm-se os mesmos tipos de gráficos, só que agora com $\phi = \frac{\pi}{4}$ e observa-se um comportamento semelhante ao caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Nestes gráficos é interessante notar que para intensidades baixas das ondas de bomba figs. 18 , as intensidades da onda retroespalhada para cada valor de $\alpha_0 L$ sempre aumentam com o aumento das intensidades das ondas de bomba. Já no caso em que as ondas de bomba são mais intensas, fig. 19 , este comportamento não mais se verifica, ou seja, para cada valor de $\alpha_0 L$ os valores da onda retroespalhada não aumentam com o aumento da intensidade das ondas de bomba, e sim intercalam-se entre si.

VI.2 Análise da onda retroespalhada em função das ondas de bomba com intensidades iniciais diferentes $f(o) \neq b(1)$, do coeficiente de atenuação e do coeficiente de dessintonia

Vamos analisar primeiro a onda retroespalhada para $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_c L = 1.0$. Comparando-se as figs. 20 e 21 observamos que, no caso em que b(1) é maior que f(o), a onda retroespalhada é superior, para todos os valores das ondas de bomba considerados, ao caso inverso, ou seja f(o) maior que b(1) e também que o máximo da onda conjugada ocorre quando f(o) ∿ 0.9 no caso em que b(1) é maior, e quando b(1) ∿ 0.9 no caso em que f(o) é maior. Do primeiro comentário se pode concluir, pelo menos para diferenças entre módulos das ondas de bomba até 0.1, que o módulo da onda conjugada é uma função crescente de (b(1)-f(o)) sendo que b(1) maior que f(o). Então dentro dessa mesma faixa de diferença de valores das ondas de bomba, o fornecimento de energia para a onda conjugada, é maior quando a onda de bomba que caminha no mesmo sentido que ela (onda conjugada) é maior.

Comparando-se as ondas retroespalhadas nos casos em que os valores iniciais das ondas de bomba são iguais (fig. 12) e diferentes por 0.1 ora em favor de b(1) (fig. 20) ora em favor de f(o) (fig. 21), pode-se observar que quando b(1) é maior, a onda retroespalhada é também sempre maior do que quando as ondas de bomba são iguais e quando f(o) é maior, a onda retroespalhada é sempre menor do que quando as ondas de bomba são iguais, fato este que fortalece ainda mais a conclusão final do último parágrafo.

Nas figs. 22 e 23 tem-se o caso $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o)=0.14142$ e $\alpha_o L = -1.0$; neste caso de ganho, é fácil observar a grande diferença existente entre as situações em que b(1) é maior e menor do que f(o). Quando b(1) é maior, a onda retroespalhada é bem maior para os valores pequenos das ondas bomba em comparação ao caso inverso; e também seu máximo é maior do que no caso inverso. Na realidade se b(1) é maior, a onda retroespalhada é maior do que o caso inverso desde valores pequenos das ondas de bomba ($\sim$ 0.01) até um pouco depois de se atingir o valor máximo da onda conjugada quando ela começa então a diminuir, ou seja a onda retroespalhada cresce mais rapidamente e também decresce mais rapidamente em função das ondas de bomba. Se tivermos f(o) maior, a onda retroespalhada cresce mais lentamente e também decresce mais lentamente em função das ondas de bomba.

Para $\phi = \frac{\pi}{2}$, é uma característica geral da onda retroespalhada ser maior para os valores iniciais das ondas de bomba, no caso em que $\alpha_o L = -1.0$ em comparação ao caso em que $\alpha_o L = 1.0$ e a medida que vai-se aumentando as ondas de bomba a onda retroespalhada passa a ser maior para $\alpha_o L = 1.0$, sendo inclusive que o valor máximo de s(o) é sempre maior para $\alpha_o L = 1.0$ do que para $\alpha_o L = -1.0$. Isto ocorre porque no caso de ganho todas as quatro ondas recebem energia do meio e portanto as ondas de bomba também aumentam de intensidade ao atravessarem o meio. Se $\alpha_o L = 1.0$ somente as ondas objeto e conjugada aumentam de intensidade ao atravessarem o meio e a energia por elas recebida provem apenas das duas ondas de bomba, ou seja, neste caso a energia é repartida somente entre duas ondas. Estes fatos nos induzem também a concluir que para valores relativamente baixos das ondas de bomba, a fonte de transferência de energia para as ondas objeto e conjugada é predominantemente do meio, ou seja, fornecida pelo decaimento dos átomos do nível superior para o inferior e a medida que a intensidade das ondas de bomba vão aumentando, a fonte de transferência de energia passa a ser predominantemente as próprias ondas de bomba. Por esta mesma linha de raciocínio pode se concluir também que a fonte mais poderosa de transferência de energia são as ondas de bomba.

Já nas figs. 24 e 25 temos o caso em que $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_0 L = 1.0$. Neste caso a onda retroespalhada é mais intensa quando b(1) é maior, porém, diferentemente do caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$ isto só ocorre até quando $f(o) \sim 1.7$ e também embora o máximo da onda conjugada seja maior para quando b(1) é maior, a diferença é menor do que no caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Isto é devido ao fato de que quando se está na condição de "casamento" de frequência, $\phi = \frac{\pi}{2}$, a absorção de energia pelo meio é bem mais forte e portanto ao se alternar a maior intensidade das ondas de bomba, isto é, entre b(1) e f(o), a diferença entre as ondas retroespalhadas nos dois casos é mais marcante. Este fato nos leva a concluir que para $\alpha_0 L = 1.0$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$ a influência da alternância de valores entre as duas ondas de bomba não é tão crítico quanto no caso em que $\alpha_0 L = 1.0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Comparando-se os gráficos para b(1) maior que f(o), entre $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ nota-se que as ondas conjugadas têm a mesma intensidade até aproximadamente $f(o) \sim 0.8$ quando então s(o) se torna maior para $\phi = \frac{\pi}{4}$, sendo que seu máximo é um pouco maior do que para $\phi = \frac{\pi}{2}$. Para valores de f(o) maiores do que 1.0, os valores de s(o) se tornam sempre maiores para $\phi = \frac{\pi}{4}$, em virtude da maior absorção das ondas pelo meio quando $\phi = \frac{\pi}{2}$. Para o caso em que f(o) é maior que b(1), o comportamento das ondas conjugadas para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ é bastante semelhante; a diferença consiste basicamente nos valores máximos das ondas conjugadas, os quais são maiores para os dois casos em que b(1) é maior, resultado já obtido anteriormente.

Para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$, $\alpha_0 L = -1.0$ comparando-se as figs. 26 e 27 pode-se constatar também que quando b(1) é maior, a onda retroespalhada é mais intensa desde

$f(o) \sim 0.01$ até $f(o) = 1.0$, mas a diferença entre os máximos nas duas possibilidades (para $\phi = \frac{\pi}{4}$) é bem pequena em comparação com o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Comparando-se os gráficos, no caso em que $b(1)$ é maior, para $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, observa-se que para valores pequenos das ondas de bomba, a onda retroespalhada é mais intensa até $f(o) = 0.4$ para $\phi = \frac{\pi}{4}$, aliás antes deste valor, a onda conjugada já atingiu seu valor máximo, o que para $\phi = \frac{\pi}{2}$ ocorre quando $f(o) = 0.3$. Pode-se notar também que o valor máximo de $s(o)$ é ligeiramente maior quando $\phi = \frac{\pi}{4}$. No caso em que se tem $f(o)$ maior, constata-se que a onda retroespalhada é maior quando $\phi = \frac{\pi}{4}$ para todos valores $b(1)$ considerados. Destes fatos pode-se também concluir, analogamente ao caso $\alpha_o L = 1.0$, que para $\alpha_o L = -1.0$, a onda conjugada sofre maiores variações quando se está na condição de ressonância.

VI.3 Análise do comportamento dos quatro campos dentro do material para valores de contorno iguais das ondas de bomba

Vamos analisar primeiramente o caso em que se está exatamente na condição de ressonância, ou seja, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e também $\alpha_{oL} = 1.0$ e $p(o) = 0.14142$. A fig. 28 nos mostram as curvas das quatro ondas para $f(o) = b(1) = 0.5$. Como é de se esperar, estas duas ondas de bomba diminuem continuamente ao longo de z_a devido a absorção pelo material e também a perda de energia para as ondas objeto e conjugada. A onda objeto $p(z_a)$ inicialmente decai um pouco devido a absorção linear do meio mas depois passa a aumentar devido a energia recebida das ondas de bomba, sendo que em $z_a = 1$ ela chega a possuir um valor maior do que na entrada $z_a = 0$. Já a onda conjugada $s(z_a)$, como é previsto, aumenta continuamente desde $z_a = 1.0$, onde pela condição de contorno, tem o valor igual a zero, até $z_a = 0$, onde possui uma intensidade maior do que a onda objeto no mesmo ponto.

A fig. 29 agora com as ondas de bomba valendo $f(o) = b(1) = 0.8$, nos mostra o mesmo tipo de comportamento do caso anterior. Entretanto a queda inicial observada na onda objeto é um pouco menos pronunciada e também o mínimo da curva ocorre para um valor de z_a ligeiramente menor, ou seja, um pouco mais próximo da origem. Este é um resultado razoável de se esperar pois em virtude das intensidades iniciais das ondas de bomba serem maiores, existe uma maior transferência de energia das ondas de bomba para a onda objeto. Como consequência deste fato, o valor de $p(1)$ é maior neste caso do que no anterior. A onda conjugada apresenta também um comportamento semelhante, ou seja, para estes valores maiores das ondas de bomba ela é em todos os pontos z_a correspondentes, maiores do que no caso anterior.

Para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o) = 0.14142$ mas com $\alpha_0 L = 0.5$, a figura 30 nos mostra as mesmas quatro curvas para $f(o) = b(1) = 0.5$. Neste caso a absorção linear do meio é menor e assim a queda da onda objeto ao longo de z_a é mais suave, sendo então que o mínimo ocorre para um valor de z_a um pouco maior do que seis enquanto que para $\alpha_0 L = 1$ o mínimo ocorre para z_a igual a três; contudo este valor mínimo é bem próximo daquele em que $\alpha_0 L = 1$ e também o crescimento da onda objeto depois de passar pelo mínimo é bem suave, acarretando o fato que para $z_a = 1$ a onda objeto tem um valor menor do que para $z_a = 0$. Quanto a onda conjugada pode-se observar que seu crescimento desde $z_a = 1$ até $z_a = 0$ é menor do que o correspondente para $\alpha_0 L = 1.0$. Estes resultados são coerentes com o fato de que para $\alpha_0 L = 0.5$ o decréscimo das duas ondas de bomba ao longo de z_a é menor do que no caso em que $\alpha_0 L = 1.0$, o que significa que para $\alpha_0 L = 0.5$ existe uma transferência menor de energia das ondas de bomba para a onda objeto e a onda conjugada do que quando $\alpha_0 L = 1.0$. Para $\alpha_0 L = 0.5$ observa-se ainda que a onda conjugada em $z_a = 0$ é um pouco menor do que a onda objeto também para $z_a = 0$.

Todos os argumentos apresentados no último parágrafo podem ser aplicados no caso em que as ondas de bomba valem $f(o) = b(1) = 0.8$. Só que agora o ganho de energia da onda conjugada e da onda objeto é um pouco maior do que quando os valores iniciais das ondas de bomba são iguais a 0.5. Por isso para cada valor de z_a as ondas conjugadas e objeto são um pouco maiores. (fig. 31)

Uma característica do valor de $p(1)$ é que ele atinge o máximo simultaneamente com o valor máximo de $s(o)$, mostrando assim que neste caso, o recebimento de energia da onda objeto da onda conjugada estão em fase.

No caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, p(o) = 0.14142 e $\alpha_0 L = -1.0$, ou seja, numa situação de ganho, como era de se esperar, ao invés de sofrerem absorção e decrescer continuamente como acontece no caso de valores positivos de $\alpha_0 L$, as duas ondas de bomba crescem continuamente ao atravessarem o meio não linear. Este fato pode ser observado na figura 32, onde foi escolhida a situação em que se tem o valor máximo da onda conjugada s(o), o que ocorre quando os valores iniciais das ondas de bomba são iguais a 0.5. A onda objeto também cresce continuamente desde $z_a = 0$ até $z_a = 1.0$. Comparando-se os valores da onda conjugada em $z_a = 0$ para os casos $\alpha_0 L = 1.0$ (fig. 28) $\alpha_0 L = -1.0$ (fig. 32) vê-se que ela é um pouco maior para $\alpha_0 L = -1.0$ (é o valor máximo neste caso) que representa o ganho, o que é um resultado razoável pois ao contrário dos valores positivos de $\alpha_0 L$ que representam absorção do meio, a onda conjugada pode utilizar toda a energia recebida das ondas de bomba para o aumento de sua intensidade não sofrendo absorção do material. Pode-se notar ainda entretanto, que ao longo de quase todo o meio, desde $z_a = 1$ até quase $z_a = 0$, os valores da onda conjugada são maiores para $\alpha_0 L = 1.0$ do que para $\alpha_0 L = -1.0$, nos pontos z_a correspondentes. Este resultado aparentemente paradoxal pode ser explicado com base no argumento de que no caso de ganho, as ondas de bomba também crescem de intensidade e portanto não fornecem tanta energia a onda conjugada, como no caso de valores positivos de $\alpha_0 L$ em que as ondas de bomba decrescem continuamente ao longo do meio. No caso dos valores negativos de $\alpha_0 L$, o aumento de intensidade de todas as quatro ondas é feito às expensas da energia dos átomos ou moléculas os quais se encontram no estado excitado ($\alpha_0 L < 0$ significa que o nível 2 está mais populado que o nível 1) e que ao se desexcitarem durante a passagem das quatro ondas vão lhes fornecendo energia.

Para $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_o L = -0.5$ vide fig. 33 , as ondas de bomba sobem também continuamente ao longo de z_a, como no caso anterior para $\alpha_o L = -1.0$. Só que agora o ganho é menor (quanto mais negativo é $\alpha_o L$ maior é o ganho) e como consequência o crescimento é menor do que quando $\alpha_o L = -1.0$. Também neste caso para efeito de comparação com o gráfico para $\alpha_o L = -1.0$ os valores iniciais das ondas de bomba valem 0.5. Só que para este valor das de bomba o valor de s(o) não é o valor máximo como o foi para $\alpha_o L = -1.0$. A onda objeto cresce sempre desde $z_a = 0$ até $z_a = 1.0$, mas seu valor p(1) é menor para $\alpha_o L = -0.5$ do que para $\alpha_o L = -1.0$; na realidade a onda objeto, neste gráfico, para cada valor de z_a é sempre menor do que para o z_a correspondente quando $\alpha_o L = -1.0$. Outro resultado previsto é que a onda conjugada para cada valor de z_a é também sempre menor para $\alpha_o L = -0.5$ do que para $\alpha_o L = -1.0$.

Vamos agora analisar o caso em que estamos fora da ressonância $\phi = \frac{\pi}{4}$ (isto é $\delta = 1$). Para $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_o L = 1.0$ como de costume, as ondas de bomba decrescem continuamente ao longo do material, vide figura 34 . Para a onda objeto entretanto ocorre um fato curioso. Há inicialmente uma queda muito forte da intensidade, até um certo ponto z_a do material; é uma queda muito abrupta, logo em seguida acompanhada de uma subida tão abrupta quanto a queda, até $z_a = 1.0$. Este fenômeno ainda está sendo alvo de estudos.

A onda conjugada tem um comportamento semelhante aos casos anteriores como se pode notar. Em comparação com o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, mas com os outros parâmetros mantidos iguais (absorção linear e onda objeto) vê-se que a onda conjugada para o caso $\phi = \frac{\pi}{4}$ tem aproximadamente o mesmo valor para quase todos os valores de z_a, sendo que somente para os z_a próximos zero é que ela se torna maior do que para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Este resultado é coerente com o fato de que se $\phi = \frac{\pi}{4}$, estamos fora da ressonância e a absor ção linear é bem pequena e por isso é razoável que a onda conjugada seja maior neste caso.

Para $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_o L = 0.5$ vide fig. 35, as ondas de bomba também decrescem ao longo do meio só que agora como a absorção linear está reduzida a metade o decréscimo é mais lento do que no caso em que $\alpha_o L = 1.0$. A onda objeto continua tendo o mesmo comportamento do caso anterior, só que agora o abrupto decréscimo é mais suave e o mínimo ocorre no entorno de $z_a = 0.9$ e logo depois começa a subida abrupta, enquanto que para $\alpha_o L = 1.0$ o mínimo acontece para $z_a = 0.4$. A onda conjugada é para todos os valores de z_a menor do que no caso em que $\alpha_o L = 1.0$.

Já para o caso de ganho, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_o L = -1.0$, vide fig. 36, as ondas de bomba aumentam continuamente como já era de se esperar, o mesmo acontecendo com a onda objeto, não ocorrendo nenhum fato curioso como acontceu para os valores positivos de $\alpha_o L$. Já para a onda conjugada observa-se que até $z_a = 0.2$ ela é maior no caso em que $_o L = 1.0$ do que para $\alpha_o L=-1.0$; daí em diante até $z_a = 0.0$, a onda conjugada fica maior para $\alpha_o L = -1.0$. Isto é devido ao fato de que, no caso de ganho as ondas de bomba recebem também a energia do meio e não somente a onda conjugada, embora elas forneçam parte da energia recebida para a onda conjugada. Para o caso em que $\alpha_o L > 0$, somente a onda conjugada e a onda objeto recebem energia, a qual provem das ondas de bomba enquanto o meio absorve energia de todas as quatro. No caso em que $\alpha_o L < 0$ todas as quatro ondas recebem energia do meio e também as ondas de bomba fornecem um pouco da energia para as ondas objeto e conjugada.

Comparando-se as ondas conjugadas para $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ no caso em que $\alpha_o L = -1.0$ observa-se que ela é maior para $\phi = \frac{\pi}{4}$ que é o caso fora da ressonância, o que significa um resultado esperado já que neste caso nao há absorção de energia pelas moléculas para se excitarem, podendo assim a energia do meio e das ondas de bomba irem para a onda conjugada.

No caso em que $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_o L = -0.5$ vide figura 37 o crescimento das ondas de bomba, objeto e conjugada são menores do que para $\alpha_o L = -1.0$, como é de se esperar devido ao ganho ser menor. A explicação do comportamento da onda conjugada ao longo de z_a ao se comparar os casos entre $\alpha_o L = -0.5$ e $\alpha_o L = 0.5$ é semelhante ao caso anterior quando se comparou os casos para $\alpha_o L = -1.0$ e $\alpha_o L = 1.0$. Também neste caso a onda conjugada para $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\alpha_o L = -0.5$ é, para todos os valores de z_a maior do que para $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha_o L = -0.5$ por se estar fora da ressonância.

VI.4 Análise do comportamento dos quatro campos dentro do material para valores de contorno diferentes das ondas de bomba

Nas figs. 38 e 39 pode-se ver dois gráficos dos quatro campos para valores diferentes das ondas de bomba para $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_0 L = 1.0$ e $p(o) = 0.14142$. Um deles com o valor $f(o)$ maior do que $b(1)$ e o outro vice-versa. Comparando-se as duas figuras, observamos que no caso em que $f(o)$ é maior, o valor da onda objeto $p(1)$ é maior do que no caso em que $f(o)$ é menor. Por outro lado vemos que quando $b(1)$ é maior, o valor da onda conjugada $s(o)$ é maior do que no caso em $b(1)$ é menor. Na realidade para o valor $f(o)$ maior, tem-se que $p(z_a)$ é maior do que o caso inverso para todos os pontos z_a; e também para o valor de $b(1)$ maior tem-se que $s(z_a)$ é maior do que o caso inverso para todos os valores de z_a. Estes fatos nos induzem a concluir que as transferências de energia são feitas neste caso, preferencialmente entre as ondas que se propagam no mesmo sentido, como já foi dito anteriormente no item 4.b, isto é, a onda de bomba E_f com a onda E_p e a onda de bomba E_b com a onda conjugada gerada E_s.

Comportamento semelhante é o que acontece no caso em que se tem ganho. Comparando-se as figuras 40 e 41 para $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_0 L = -1.0$. A intensidade da onda objeto para o valor de $f(o)$ maior, é superior para todos os valores de z_a a intensidade da mesma onda objeto para o caso em que o valor de $f(o)$ é menor; também a onda conjugada é maior, em todos os valores de z_a, no caso em que $b(1)$ é maior em comparação com o gráfico em que $b(1)$ é menor.

Já nas figuras 42 e 43 onde tem-se os parâmetros $\phi = \frac{\pi}{4}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_0 L = 1.0$, observa-se um fato curioso em relação a onda objeto. A abrupta absorção seguida também de um abrupto crescimento na intensidade dela (onda objeto), que surgiu no caso em que os valores iniciais das ondas de bomba são iguais, está presente também neste caso, mas somente quando o valor de f(o) é maior do que b(l) Se b(l) for maior do que f(o), há um decréscimo seguido de um aumento, porém bem mais suave e bastante semelhante a curva obtida no caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, mantidos os outros parâmetros iguais. Na realidade tanto no caso em que os valores iniciais das ondas de bomba são iguais como no caso em que f(o) é maior que b(l), este "funil" pontiagudo só ocorre para valores intermediários das ondas de bomba que nós consideramos, ou seja, entre os valores das ondas de bomba da ordem de 0.3 $\sim$ 0.4 até 4.0 $\sim$ 5.0. Fora desta faixa a onda objeto sofre uma diminuição contínua e bem mais suave absorção. Antes da onda de bomba f(o) atingir um valor da ordem de 0.3 $\sim$ 0.4 e depois de ultrapassar o valor 4,0 $\sim$ 5,0 o abrupto decréscimo e crescimento não ocorre porque se está numa faixa de valores da onda conjugada s(o) que é menor ou da ordem do valor da onda objeto p(o). Para valores das ondas de bomba que produzam s(o) maior do que p(o) o que provavelmente deve ocorrer, é que há uma transferência abrupta de energia para a onda conjugada e depois como a intensidade do objeto fica muito pequena ela passa a receber um "reforço" das ondas bomba e também da própria onda conjugada; e é interessante observar que o valor de p(l) é da ordem ou ligeiramente maior do que p(o) o que mostra que o meio, para todos os efeitos, não absorve energia da onda objeto.

Já no caso em que b(l) é maior que f(o) este fenômeno não ocorre. A diferença de energia em favor de b(l) é fornecida à onda objeto, impedindo assim o abrupto decréscimo. Vê-se então que diferentemente do caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, as trocas de energia podem também serem feitas entre as ondas que não se propagam no mesmo sentido.

Nas figuras 44 e 45 onde tem-se $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_0 L=-1.0$ e $p(o) = 0.14142$ observa-se um comportamento semelhante ao caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Há um crescimento contínuo das intensidades das ondas de bomba e também da onda objeto, tanto no caso em que $f(o)$ é maior que $b(l)$ como no caso inverso, fato que é uma consequência natural de $\alpha_0 L = -1.0$. Se compararmos o comportamento da onda conjugada, entre $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$, tanto no caso em que $f(o) > b(l)$ e vice-versa, observa-se que para todos os valores de z_a, a onda conjugada será maior quando $\phi = \frac{\pi}{4}$, o que ocorre devido ao fato de se estar fora da ressonância. Como no caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$ a onda conjugada é maior para todos os valores de z_a quando $b(l)$ é maior do que $f(o)$.

Por outro lado se $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p(o) = 0.14142$ e $\alpha_0 L = -0.5$, como era de se esperar, tem-se um crescimento menor das ondas de bomba, objeto e conjugada, para todos os valores de z_a, do que para o caso em que $\alpha_0 L = -1.0$, como se pode observar nas figuras 46 e 47 .

SUMÁRIO DOS RESULTADOS MAIS IMPORTANTES

I. Com $f(o) = b(1)$

1. Os valores da onda retro-espalhada $S(o)$ antes da saturação, são sempre maiores no caso de ganho ($\alpha_0 < 0$) do que no caso de absorção ($\alpha_0 > 0$)
2. A onda retro-espalhada $S(o)$ é maior no caso em que $\phi = \pi/4$ ($\delta = 1$) em comparação a $\phi = \pi/2$ ($\delta = 0$) mantendo-se constantes $p(o)$ e $\alpha_0 L$
3. A onda retro-espalhada $s(o)$ satura antes para valores negativos de $\alpha_0 L$ (ganho) em comparação a $\alpha_0 L > 0$ (absorção)
4. Para $\alpha_0 L > 0$, dentro do material tanto $f(z_a)$ como $b(z_a)$ diminuem monotonamente ao longo de z_a; $p(z_a)$ tende inicialmente a decrescer sobe de intensidade; $S(z_a)$ sempre aumenta de intensidade. Isto é válido para os valores de ϕ e $p(o)$ utilizados
5. Para $\alpha_0 L < 0$, dentro do material, $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $s(z_a)$ sempre aumentam
6. O valor de $p(1)$ atinge seu valor máximo simultaneamente com $s(o)$, mostrando assim que o recebimento de energia da onda objeto e da onda retro-espalhada estão em fase. Se $f(o) \neq b(1)$ isto não ocorre

II. Com $f(o) \neq b(1)$

1. Os valores de $S(o)$ são sempre maiores no caso em que $b(1) > f(o)$ do que se $f(o) > b(1)$
2. Os valores de $p(1)$ são sempre maiores no caso em que $f(o) > b(1)$ do que $b(1) > f(o)$. Estes dois fatos nos induzem a concluir que as ondas retro-espalhada e objeto são mais favorecidas energeticamente quando a onda de "bomba" que caminha no mesmo sentido que elas é maior.

APÊNDICE

CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O CASO DOS QUATRO CAMPOS PARALELOS ENTRE SI NO LIMITE DE INTENSIDADE FRACA DA ONDA OBJETO E DA ONDA RETRO-ESPALHADA

Nós começamos com a equação de onda

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad 1$$

onde $\vec{E}$ é o campo total dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_f + \vec{E}_b + \vec{E}_p + \vec{E}_s \qquad 2$$

todos com a frequência ω e $\vec{P}$ a polarização macroscópica dado por

$$\vec{P} = \chi(\vec{E})\vec{E} \qquad 3$$

Vamos considerar um "ensemble" de átomos de dois níveis, os quais são caracterizados por um momento dipolar p_{12} e tempos de relaxação longitudinal e transverso dados por τ_1 e τ_2 respectivamente.

Supondo que todos os quatro campos estão polarizados no mesmo sentido, pode-se mostrar[1] que no caso estacionário as equações da matriz densidade podem ser resolvidas exatamente fornecendo

$$\chi(E) = -\frac{2\alpha_0}{k} \frac{(i+\delta)}{(1+\delta^2+|E/E_{sat}|^2)} \qquad 4$$

onde

$\delta = (\omega-\omega_o)\tau_2$ é o coeficiente de dessintonia das frequências

$|E_{sat}|^2 = \dfrac{h^2}{T_1 T_2 (p_{12})^2}$ é a intensidade de saturação do centro de linha

$\alpha_o = \dfrac{(p_{12})^2 \Delta N_e \tau_2 k}{2\varepsilon_o h}$ é o coeficiente de atenuação

k é o vetor de onda para a frequência ω.

Expandindo $\chi(E)$ em série de Taylor no entorno de E_1 (definido em seguida), pode-se escrever a polarização até primeira ordem em ΔE (também definido a seguir)

$$P = \varepsilon_o \chi(E_1)E_1 + \varepsilon_o \chi(E_o)\Delta E - \frac{\varepsilon_o \chi(E_1)(E_1 \Delta E^* + E_1^* \Delta E)}{|E_{sat}|^2 (1+\delta^2+|E_1/E_{sat}|^2)} \qquad 5$$

onde

$$E_1 = E_f + E_b \quad ; \quad \Delta E = E_p + E_s \qquad 6$$

$$E = E_1 + \Delta E$$

$$E_n = \frac{E_{on}}{2} \exp o(\omega t - \vec{k}_n . \vec{r}) + c.c. \qquad 7$$

E_f e E_b ondas de bomba

E_p: onda objeto; E_s: onda retroespalhada.

Para o operador laplaciano:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\partial^2 E_{on}}{\partial z^2} \exp i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z}) - \sum_n i\vec{k}.\vec{z}\ \frac{\partial E_{oi}}{\partial z} \exp i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})$$

$$- \frac{1}{2}\sum_n (\vec{k}_n.\vec{z})^2\ E_{on} \exp i\ (\omega t-\vec{k}_n.\vec{z}) + c.c. \qquad 8$$

Para a derivada temporal tem-se

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\partial^2 E_{on}}{\partial t^2} \exp i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z}) + \sum_n i\ \frac{\partial E_{on}}{\partial t} \exp i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z})$$

$$- \frac{1}{2}\sum_n \omega^2\ E_{on} \exp i(\omega t-\vec{k}_n.\vec{z}) + c.c. \qquad 9$$

Para a derivada da polarização vamos considerar primeiro o cálculo para o quadrado da soma das ondas de bomba:

$$E_1^2 = (E_f+E_b)^2 = E_f^2 + 2E_fE_b + E_b^2 \qquad 10$$

Pela eq. 7

$$E_{f,p} = \frac{1}{2}\ E_{of,op}(z) \exp i(\omega t-kz) + c.c. \qquad 11$$

$$E_{b,s} = \frac{1}{2}\ E_{ob,os}(z) \exp i(\omega t+kz) + c.c. \qquad 12$$

$$E_f^2 = \frac{2|E_{of}|^2}{4} + \frac{1}{4}\ E_{of}^2 \exp i\ 2(\omega t-kz) + \frac{1}{4}(E_{of}^*)^2 \exp\{-i2(\omega t-kz)\} \qquad 13$$

$$E_b^2 = \frac{2|E_{ob}|^2}{4} + \frac{1}{4} E_{ob}^2 \exp i2(\omega t+kz) + \frac{1}{4}(E_{ob}^*)^2 \exp\{-i2(\omega t+kz)\} \qquad 14$$

$$2E_f E_b = \frac{2E_{of}E_{ob}}{4} e^{i2\omega t} + \frac{2E_{of}^* E_{ob}^*}{4} e^{-i2\omega t} + \frac{2}{4} E_{of}^* E_{ob} e^{i2kz} +$$

$$\frac{2}{4} E_{of} E_{ob}^* e^{-i2kz} \qquad 15$$

Para o termo que aparece no denominador da eq. 5 tem-se então pela eq. 10

$$\left|\frac{E_1}{E_{sat}}\right|^2 = \left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2 \{1 + \frac{(e^{i2kz}+e^{-2ikz})}{2}\} \qquad 16$$

Foi considerado que

a) $E_{of} = E_{ob} = E_o$

b) os termos que contém exp $(\pm i2\omega t)$ oscilam muito rapidamente a zero.

A eq. 16 fica então

$$\left|\frac{E_1}{E_{sat}}\right|^2 = \left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2 \{1 + \cos(2kz)\}$$

$$\left|\frac{E_1}{E_{sat}}\right|^2 = 2\left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2 \cos^2(kz) \qquad 16A$$

Para o numerador tem-se que ter mais cuidado pois o fator $|E_1|^2$ em um dos termos aparece multiplicado por ΔE. Na polarização $\tilde{P}$ temos que separar os termos de mesma fase. Para a onda que caminha para a direita a fase vale:

$\pm i\ (\omega t - kz)$: sentido de z positivo.

Os termos da eq. 5 que contribuirão serão:

$$P\{+i(\omega t-kz)\} = \varepsilon\chi(E_1)\{\frac{E_{of}}{2}e^{i(\omega t-kz)}\} + \varepsilon\chi(E_1)\{\frac{E_{op}}{2}e^{i(\omega t-kz)}\}$$

$$\frac{\varepsilon\chi(E_1)}{A(E_1)|E_{sat}|^2}\{\frac{1}{2}(|E_{of}|^2+|E_{ob}|^2)E_{op}\,e^{i(\omega t-kz)} + (\frac{1}{8}E_{of}^2E_{op}^* + \frac{1}{4}E_{of}E_{ob}E_{os}^*$$

$$+\frac{1}{4}E_{of}E_{ob}^*E_{os})\,e^{i(\omega t-kz)}\} \qquad 17$$

Os termos da eq. 5 que contribuirão para a fase $i(\omega t+kz)$ no sentido z negativo vale:

$$P\{i(\omega t+kz)\} = \varepsilon\chi(E_1)\{\frac{E_{ob}}{2}e^{i(\omega t+kz)}\} + \varepsilon\chi(E_1)\{\frac{E_{os}}{2}e^{i(\omega t+kz)}\}$$

$$\frac{\varepsilon\chi(E_1)}{A(E_1)|E_{sat}|^2}\{\frac{1}{2}(|E_{of}|^2+|E_{ob}|^2)E_{os}\,e^{i(\omega t+kz)} + (\frac{1}{8}E_{ob}^2E_{os}^* + \frac{1}{4}E_{of}E_{ob}E_{op}^*$$

$$+\frac{1}{4}E_{of}^*E_{ob}E_{op})\,e^{i(\omega t+kz)}\} \qquad 18$$

$$A(E_1) = \left[1+\delta^2+\left|\frac{E_1}{E_{sat}}\right|^2\right] = \left[1+\delta^2+2\left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2\cos^2 kz\right] \qquad 18A$$

É importante salientar que as eqs. 17 e 18 só são corretas, se os dois campos de bomba forem paralelos ao eixo z, assim como o são E_{op} e E_{os}. Se E_{of} e E_{ob} tiverem outra direção (mas ainda propagando-se em sentidos opostos) que não o eixo z, na eq. 17 não entrarão os termos proporcionais a E_{of}, $E^2_{of}E^*_{op}$, $E_{of}E^*_{ob}E_{os}$ e na eq. 18 não entrarão os termos E_{ob}, $E^2_{ob}E^*_{os}$, $E^*_{of}E_{ob}E_{op}$ que representa o caso analisado por Abrams e Lund.

Por outro lado tem-se a expressão para $\chi(E_1)$

$$\chi(E_1) = -\frac{2\alpha_o}{k}\,\frac{(i+\delta)}{\left[1+\delta^2+|E_1/E_{sat}|^2\right]} \qquad 19$$

Usando a eq. 16A com $E_{of} = E_{ob} = E_o$

$$\chi(E_o) = -\frac{2\alpha_o}{k}\,\frac{(i+\delta)}{\left[1+\delta^2+2\left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2\cos^2 kz\right]} \qquad 20$$

Teremos então para a derivada segunda temporal da polarização P. (Não consideramos as derivadas temporais das amplitudes dos campos E_{op} e E_{os}: caso estacionário. Por hipótese E_{of} e E_{ob} não variam nem com z e nem com t.)

Para a eq. 17

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega^2\varepsilon\chi(E_o)\left\{\frac{(E_o+E_{op})}{2} - \frac{1}{A(E_o)|E_{sat}|^2}\left[|E_o|^2E_{op} + \frac{1}{8}E_o^2E^*_{op}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\left(|E_o|^2 E_{os} + E_o^2E^*_{os}\right)\right]\right\}e^{i(\omega t-kz)} \qquad 21$$

Para a eq. 18

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = - \omega^2 \varepsilon \chi(E_o) \left\{ \frac{(E_o + E_{os})}{2} - \frac{1}{A(E_o)\,|E_{sat}|^2} \left| |E_o|^2 E_{os} + \frac{1}{8} E_o^2 E_{os}^* \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4} \left(|E_o|^2 E_{op} + E_o^2 E_{op}^* \right) \right| \right\} e^{i(\omega t + kz)} \qquad 22$$

Vamos agora agrupar, em ambas as eqs., os termos em E_{op}, E_{op}^*, E_{os}, E_{os}^*. Para a onda que caminha para a direita, eq. 17

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = <\alpha_1(E_o)>E_{op} + <\beta_i(E_o)>E_{op}^* + <\eta_1(E_o)>E_{os} + <\theta_1(E_o)>E_{os}^* + <g_1(E_o)> \qquad 23$$

Para a onda que caminha para a esquerda eq. 18

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = <\alpha_1(E_o)>E_{os} + <\beta_1(E_o)>E_{os}^* + <\eta_1(E_o)>E_{op} + <\theta_1(E_o)>E_{op}^* + <g_1(E_o)> \qquad 24$$

Vamos agora construir as eqs. de onda separando-as por fases iguais, ou seja, $i(\omega t \pm kz)$. Para a onda E_p que caminha para a direita, usando as eqs. 1, 8, 9 e 23

$$\frac{\partial E_{op}}{\partial z} = <\alpha(E_o)>E_{op} + <\beta(E_o)>E_{op}^* + <\eta(E_o)>E_{os} + <\theta(E_o)>E_{os}^* + <g(E_o)> \qquad 25$$

Para a onda E_{os} que caminha para a esquerda usando as eqs. 1, 8, 9 e 24

$$\frac{\partial E_{os}}{\partial z} = -|<\alpha\ (E_o)>E_{os}+<\beta(E_o)>E^*_{os}+<\eta(E_o)>E_{op}+<\theta(E_o)>E^*_{op}+<g(E_o)>| \qquad 26$$

onde (o sīmbolo <> significa o valor mēdio em kz)

$$<\alpha(E_o)>=<i\frac{\mu}{k}\ \alpha_1(E_o)> \ ; \quad <\beta(E_o)>=<i\ \frac{\mu}{k}\ \beta_1(E_o)>;\ <\theta(E_o)> = <i\frac{\mu}{k}\ \theta_1(E_o)>;$$

$$<g(E_o)> = <i\ \frac{\mu}{k}\ g_1(E_o)> \qquad 27$$

E assim:

$$<\alpha(E_o)> = -<i\ \frac{\mu\omega^2}{k}\varepsilon\chi\ (E_o)\ \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{A(E_o)}\left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2\right|> \qquad 27A$$

$$<\beta(E_o)> = +<i\ \frac{\mu\omega^2\varepsilon\chi(E_o)}{8k\ A(E_o)}\ \frac{E_o^2}{|E_{sat}|^2}> \qquad 27B$$

$$<\eta(E_o)> = <+\ i\frac{\mu\omega^2\varepsilon\chi(E_o)}{4kA(E_o^*)}\left|\frac{E_o}{E_{sat}}\right|^2> \qquad 27C$$

$$<\theta(E_o)> = +<i\ \frac{\mu\omega^2\varepsilon\chi(E_o)}{4kA(E_o)}\ \frac{E_o^2}{|E_{sat}|^2} \qquad 27D$$

$$<g(E_o)> = -<i\ \frac{\mu\omega^2\varepsilon\chi(E_o)}{2k}\ E_o> \qquad 27E$$

Tomando o complexo conjugado da eq. 25 vem:

$$\frac{\partial E^*_{op}}{\partial z} = \alpha^*(E_o)E^*_{op}+\beta^*(E_o)E_{op}+\eta^*(E_o)E^*_{os}+\theta^*(E_o)E_{os}+g^*(E_o) \qquad 25A$$

Em virtude das eqs. 27 podemos ainda observar que:

$$|\eta|^2 = 4|\beta|^2$$

$$28$$

$$|\eta|^2 = |\theta|^2$$

Afim de analisar apenas a influência dos termos,que só aparecem devido ao fato das quatro ondas serem quase paralelas (ângulo θ de inclinação muito menor que 1) entre si, vamos levar em consideração somente os segundo e terceiro termos das equações 25 e 26 e também de seus complexos conjugados. Para simplificar a notação, daqui em diante os parâmetros β e η já devem ser entendidos como valores médios.

$$\frac{\partial E_{op}}{\partial z} = \beta E^*_{op} + \eta E_{os} \qquad 29 \qquad ; \qquad \frac{\partial E_{os}}{\partial z} = -\beta E^*_{os} - \eta E_{op} \qquad 30$$

$$\frac{\partial E^*_{op}}{\partial z} = \beta^* E_{op}+\eta^* E^*_{os} \qquad 31 \qquad ; \qquad \frac{\partial E^*_{os}}{\partial z} = -\beta^* E_{os}-\eta^* E^*_{op} \qquad 32$$

da equação 29 vem:

$$-\beta^* E_{op}\frac{\partial E_{op}}{\partial z} = -|\beta|^2 I_p-\beta^*\eta E_{op}E_{os} \qquad 33$$

da equação 30 vem

$$-\beta^* E_{os} \frac{\partial E_{os}}{\partial z} = + |\beta|^2 I_s + \beta^* \eta E_{os} E_{op} \qquad 34$$

Somando 33 e 34 tem-se

$$-\frac{\beta^*}{2} \frac{\partial}{\partial z} (E_{op}^2 + E_{os}^2) = -|\beta|^2 (I_p - I_s) \qquad 35$$

da equação 31 vem:

$$-\frac{1}{2} E_{op} \frac{\partial E_{op}^*}{\partial z} = -\frac{\beta^*}{2} E_{op}^2 - \frac{\eta^*}{2} E_{op} E_{os}^* \qquad 36$$

da equação 32 vem:

$$\frac{1}{2} E_{os} \frac{\partial E_{os}^*}{\partial z} = -\frac{\beta^*}{2} E_{os}^2 - \frac{\eta^*}{2} E_{os} E_{op}^* \qquad 37$$

Somando 35 + seu complexo conjugado tem-se

$$-\frac{\beta^*}{2} \frac{\partial}{\partial z} (E_{op}^2 + E_{os}^2) - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial z} (E_{op}^{*2} + E_{os}^{*2}) = -2|\beta|^2 (I_p - I_s) \qquad 38$$

Somando 36 + 37 vem

$$-\frac{\beta^*}{2} (E_{op}^2 + E_{os}^2) = -\frac{1}{2} E_{op} \frac{\partial E_{op}^*}{\partial z} + \frac{1}{2} E_{os} \frac{\partial E_{os}^*}{\partial z} + \frac{\eta^*}{2} (E_{op} E_{os}^* + E_{op}^* E_{os}) \qquad 39$$

O complexo conjugado de 39 vale:

$$-\frac{\beta}{2} (E_{op}^{*2} + E_{os}^{*2}) = -\frac{1}{2} E_{op}^* \frac{\partial E_{op}}{\partial z} + \frac{1}{2} E_{os}^* \frac{\partial E_{os}}{\partial z} + \frac{\eta}{2} (E_{op}^* E_{os} + E_{op} E_{os}^*) \qquad 40$$

Somando 39 + 40 tem-se:

$$-\frac{\beta^*}{2}(E_{op}^2+E_{os}^2) - \frac{\beta}{2}(E_{op}^{*2}+E_{os}^{*2}) = -\frac{1}{2}\frac{dI_p}{dz} + \frac{1}{2}\frac{dI_s}{dz} + \frac{(\eta+\eta^*)}{2}(E_{op}E_{os}^*+E_{op}^*E_{os}) \qquad 41$$

Derivando 41 vem:

$$-\frac{\beta^*}{2}\frac{\partial}{\partial z}(E_{op}^2+E_{os}^2) - \frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial z}(E_{op}^{*2}+E_{os}^{*2}) = -\frac{1}{2}\frac{d^2I_p}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2I_s}{2dz^2} + \frac{(\eta+\eta^*)}{2}\frac{\partial}{\partial z}(E_{op}E_{os}^*+E_{op}^*E_{os}) \qquad 42$$

Em virtude da igualdade das equações 38 e 42 vem:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2I_p}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2I_s}{dz^2} + 2|\beta|^2(I_p-I_s) = -\frac{(\eta+\eta^*)}{2}\frac{\partial}{\partial z}(E_{op}E_{os}^*+E_{op}^*E_{os}) \qquad 43$$

Da eq. 29 vem:

$$E_{os}^*\frac{\partial E_{op}}{\partial z} = \beta E_{os}^*E_{op}^* + \eta I_s \qquad 44$$

Da eq. 32 vem:

$$E_{op}\frac{\partial E_{os}^*}{\partial z} = -\beta^*E_{op}E_{os} - \eta^*I_p \qquad 45$$

O c.c. de 44 vale:

$$E_{os}\frac{\partial E_{op}^*}{\partial z} = \beta^*E_{os}E_{op} + \eta^*I_s \qquad 46$$

O c.c. de 45 vale:

$$E_{op}^*\frac{\partial E_{os}}{\partial z} = -\beta E_{op}^*E_{os}^* - \eta I_p \qquad 47$$

Somando 44 + 45 + 46 + 47 tem-se

$$\frac{\partial}{\partial z}(E_{op}E_{os}^*+E_{op}^*E_{os}) = (\eta+\eta^*)I_s - (\eta+\eta^*)I_p \qquad 48$$

Levando 48 em 43 vem:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2I_p}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2I_s}{dz^2} + 2|\beta|^2(I_p-I_s) = -\frac{(\eta+\eta^*)^2}{2}(I_s-I_p) \qquad 49$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(I_p-I_s) - 4|\beta|^2(I_p-I_s) + (\eta+\eta^*)^2(I_p-I_s) = 0 \qquad 50$$

onde tem-se finalmente a equação:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \left[4|\beta|^2 - (\eta+\eta^*)^2\right]y = 0 \qquad 50A$$

onde $y = I_p - I_s$

A solução será do tipo: $y = e^{\kappa z}$ 51

$$\text{onde } \kappa^2 - \left[4|\beta|^2 - (\eta+\eta^*)^2\right] = 0 \qquad 52$$

$$\kappa = \pm\sqrt{\left[4|\beta|^2 - (\eta+\eta^*)^2\right]} \qquad 52A$$

Então

$$y = I_p - I_s = C_+ e^{\kappa_+ z} + C_- e^{\kappa_- z} \qquad 53$$

Mas da eq. 28 conclui-se que:

$$|\eta|^2 = 4|\beta|^2 \qquad 54$$

Então a raiz da eq. 52A fica:

$$\sqrt{4|\beta|^2 - (\eta+\eta^*)^2} = \sqrt{|\eta|^2 - (\eta+\eta^*)^2} \qquad 55$$

Mas:

$$|\eta|^2 - (\eta+\eta^*)^2 = \eta_I^2 - 3\eta_R^2 \qquad 56$$

Das equações 18A, 20 e 27C pode-se concluir que em virtude de:

$$\eta = \eta_R + i\,\eta_I = \eta_c(1-i\delta) \qquad 57$$

tem-se que:

$$\eta_I^2 - 3\eta_R^2 = \eta_c^2\,(\delta^2-3) \qquad 58$$

onde $\eta_c = \left\langle \dfrac{\alpha_o}{2(1+\ {}^2+2\cos^2 kz)^2} \left|\dfrac{E_o}{E_{sat}}\right|^2 \right\rangle$

Isto significa que se $\delta^2 < 3$ teremos uma solução da forma: (usando 52A)

$$y = I_p - I_s = C_+\,e^{i\kappa_I z} + C_-\,e^{-i\kappa_I z} \qquad 59$$

onde: $$\kappa_I = \eta_c\sqrt{3-\delta^2} \qquad 60$$

Se $\delta^2 > 3$ tem-se a solução da forma:

$$y = C_+ e^{\kappa z} + C_- e^{-\kappa z} \qquad 61$$

onde κ é dado por 52A. Usando 58 tem-se:

$$\kappa = \eta_c\,\sqrt{\delta^2-3} \qquad 62$$

Como y tem que ser real, pode-se tirar algumas conclusões a respeito de C_+ e C_-. Para $\delta^2 > 3$ existem duas possibilidades:

a) $C_+ = C_- = C$: real

b) $C_+ = -C_- = C_o$: real

Para o caso z teríamos para a equação 61

$$y = 2C\cosh(\kappa z) \qquad 63$$

Para o caso b teríamos para a equação 61

$$y = 2C_o\ \mathrm{senh}\ (\kappa z) \qquad 64$$

Se impusermos a condição de contorno para $I_s(L)$

$$I_s(L) = 0 \Rightarrow y(L) = I_p(L) \qquad 65$$

e lembrando-nos da definição de y (eq. (53)), concluimos que tanto C como C_o são positivos. Utilizando a condição 65 temos para os casos a e b respectivamente

$$y(z) = I_p(L)\frac{\cosh(\kappa z)}{\cosh(\kappa L)} \qquad 66$$

$$y(z) = I_p(L)\frac{\mathrm{senh}(\kappa z)}{\mathrm{senh}(\kappa L)} \qquad 67$$

Vemos então que no caso b $y(o) = 0$, o que significa que $I_p(o) = I_s(o)$, ou seja, a intensidade da onda conjugada é sempre igual a intensidade da onda objeto para $z = 0$, para qualquer valor de κL, um resultado fisicamente falso. Já para o caso a tem-se:

$$y(o) = \frac{I_p(L)}{\cosh(\kappa L)} \qquad 68$$

Como $\cosh(\kappa L)$ é sempre maior que um (supondo-se $\kappa L \neq 0$) implica que $y(o) < I_p(L)$ sempre, ou seja

$$0 < \frac{I_p(o) - I_s(o)}{I_p(L)} < 1 \qquad 69$$

ou seja $I_p(o)$ é sempre maior do que $I_s(o)$, mas $I_p(L)$ pode ser maior ou menor do que $I_p(o)$.

Se $\delta^2 < 3$ o valor de κ é puramente imaginário (eq. 62) e existem também duas possibilidades para que o valor de y (eq. 61) seja real, a saber:

a) $C_- = C_+ = C$: real

c) $C_- = C_+^*$

O caso a é o análogo do caso a para $\delta^2 > 3$ e o resultado para y vale então:

$$y = 2C \cos(\kappa_I z) \qquad 70$$

onde

$$\kappa_I = n_c \sqrt{3 - \delta^2} \qquad 71$$

Usando a condição 65 tem-se que

$$y = I_p(L) \frac{\cos(\kappa_I z)}{\cos(\kappa_I L)} \qquad 72$$

Para $z = 0$ obtém-se

$$y(o) = \frac{I_p(L)}{\cos(\kappa_I L)} \qquad 73$$

ou ainda

$$\frac{I_p(o)-I_s(o)}{I_p(L)} = \sec\ (\kappa_I L) \qquad 74$$

Nota-se então que esta expressão é sempre maior que um ou menor do que menos um. Isto significa que se $\kappa_I L$ for tal que $\sec\ (\kappa_I L)$ seja maior do que um, então $I_p(o)$ é maior do que $I_s(o)$ e também que $I_p(o)$ é maior do que $I_p(L)$. Se $\sec\ (\kappa_I L)$ for menor do que menos um, então $I_s(o)$ é maior do que $I_p(o)$.

Para o caso c tem-se:

$$y = C_+\ e^{i\kappa_I z} + C_+^* e^{-i\kappa_I z} \qquad 75$$

$$y = 2|C_+|\cos(\kappa_I z + \gamma) \qquad 76$$

E usando-se a eq. 65

$$y = I_p(L)\ \frac{\cos(\kappa_I z+\gamma)}{\cos(\kappa_I L+\gamma)}$$

Para z = 0 tem-se:

$$\frac{y(o)}{I_p(L)} = \frac{\cos\gamma}{\cos(\kappa_I L+\gamma)} \qquad 77$$

λ (nm)	LASER	MEIO	L	REFLET.	POT
589	DYE/CW	Na		17%	
589	DYE/PULS.	Na		10^4%	
10^4	CO_2/PULS.	SF_6	2 cm	37%	200 KW/cm^2
10^4	"	HgCdTe	0.5 mm	10%	100 KW/cm^2
10^4	"	Ge	15 cm	25%	10 MW/cm^2
1060	Nd:YAG/PULS.	Si	1 mm	180%	6 MW/cm^2
1060	"	BDN dye		600%	
694	RUBY/PULS.	CS_2	40 cm	100%	
532	Nd:YAG/PULS.	CdSCdSe		30%	
532	"	VAPOR I_2		0.1%	
532	"	RHODAMINA		100%	
532	"	RHODAMINA B		10%	
510	DYE/PULS.	CdSCdSe		1%	
480	Ar^+/CW	$BiSiO_4$		1%	
514	"	$BaTiO_3$		100%	

TABELA 1

LEGENDA DAS FIGURAS

Figura 1. Diferença entre espelho comum e "conjugado" na reflexão e espalhamento da onda incidente.

Figura 2. Comparação entre espelho comum e "conjugado" na correção de distorções das ondas.

Figura 3. Formação e leitura do processo de mistura de quatro ondas.

Figura 4. Aplicação. Correção da distorção sofrida por um feixe ótico ao atravessar uma atmosfera turbulenta, usando conjugação de fase.

Figura 5. Aplicação. O mesmo conceito da figura anterior só que o meio agora é uma fibra ótica multi-modo.

Figura 6. Aplicação. Ilustração do princípio de estreitamento de um pulso na fibra.

Figura 7. Aplicação. Utilização de mistura de quatro ondas para fazer-se fusão.

Figura 8. Controle de foco e mudança de polarização da onda objeto em relação a onda retro-espalhada.

Figura 9. Geometria usado no modelo teórico da tese.

Figura 10. Onda retro-espalhada S(o) versus ondas de"bomba" f(o) = b(l) para p(o) = 0,14142, $\phi = \pi/4$ e $\alpha_0 L = \pm 1,0$.

Figura 11. Onda retro-espalhada S(o) versus ondas de"bomba" f(o) = b(l), para p(o) = 0,28284, $\phi = \pi/4$ e $\alpha_0 L = \pm 1,0$.

Figura 12. Onda retro-espalhada S(o) versus ondas de "bomba" f(o) = b(l) para p(o) = 0,14142, $\phi = \pi/2$ e $\alpha_0 L = \pm 1,0$.

Figura 13. S(o) versus f(o) = b(l) para p(o) = 0,28284, $\phi = \pi/2$ e $\alpha_0 L = \pm 1,0$.

Figura 14. S(o) versus f(o) = b(l) para p(o) = 0,14142, $\phi = \pi/2$ e $\alpha_0 L = \pm 0,5$.

Figura 15. $S(o)$ versus $f(o) = b(1)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/4$ e $\alpha_0 L = \pm\ 0,5$.

Figura 16. $S(o)$ versus $\alpha_0 L$ para $f(o) = b(1) = 0,1;\ 0,2;\ 0,5$ com $p(o) = 0.14142$ e $\phi = \pi/2$.

Figura 17. $S(o)$ versus $\alpha_0 L$ para $f(o) = b(1) = 0.7;\ 0,9;\ 2,0$ com $p(o) = 0,14142$ e $\phi = \pi/2$.

Figura 18. $S(o)$ versus $\alpha_0 L$ para $f(o) = b(1) = 0,1;\ 0,2;\ 0,5$ e para $p(o) = 0,14142$ e $\phi = \pi/4$.

Figura 19. $S(o)$ versus $\alpha_0 L$ para $f(o) = b(1) = 0,7;\ 0,9;\ 2,0$ com $p(o) = 0,14142$ e $\phi = \pi/4$.

Figura 20. $S(o)$ versus $f(o)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $b(1) - f(o) = 0,1$.

Figura 21. $S(o)$ versus $b(1)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $f(o) - b(1) = 0,1$.

Figura 22. $S(o)$ versus $f(o)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = -1,0$ e $b(1) - f(o) = 0,1$.

Figura 23. $S(o)$ versus $b(1)$ para $p(o) = 0.14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = -1,0$ e $f(o) - b(1) = 0,1$.

Figura 24. $S(o)$ versus $f(o)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $b(1) - f(o) = 0,1$.

Figura 25. $S(o)$ versus $b(1)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $f(o) - b(1) = 0,1$.

Figura 26. $S(o)$ versus $f(o)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_0 L = -1,0$ e $b(1) - f(o) = 0,1$.

Figura 27. $S(o)$ versus $b(1)$ para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_0 L = -1,0$ e $f(o) - b(1) = 0,1$.

Figura 28. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $f(o) = b(1) = 0,5$.

Figura 29. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0,14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_0 L = 1,0$ e $f(o) = b(1) = 0,8$.

Figura 30. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = 0{,}5$ e $f(o) = b(1) = 0{,}5$.

Figura 31. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = 0{,}5$ e $f(o) = b(1) = 0{,}8$.

Figura 32. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -1{,}0$ e $f(o) = b(1) = 0{,}5$.

Figura 33. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -0{,}5$ e $f(o) = b(1) = 0{,}5$.

Figura 34. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = 1{,}0$ e $f(o) = b(1) = 0{,}7$.

Figura 35. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = 0{,}5$ e $f(o) = b(1) = 0{,}7$.

Figura 36. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = -1{,}0$ e $f(o) = b(1) = 0{,}7$.

Figura 37. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = -0{,}5$ e $f(o) = b(1) = 0{,}6$.

Figura 38. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = 1{,}0$, $f(o) = 0{,}7$ e $b(1) = 0{,}6$.

Figura 39. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = 1{,}0$, $f(o) = 0{,}6$ e $b(1) = 0{,}7$.

Figura 40. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -1{,}0$, $f(o) = 0{,}7$ e $b(1) = 0{,}8$.

Figura 41. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -1{,}0$, $f(o) = 0{,}8$ e $b(1) = 0{,}7$.

Figura 42. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = 1{,}0$, $f(o) = 0{,}6$ e $b(1) = 0{,}7$.

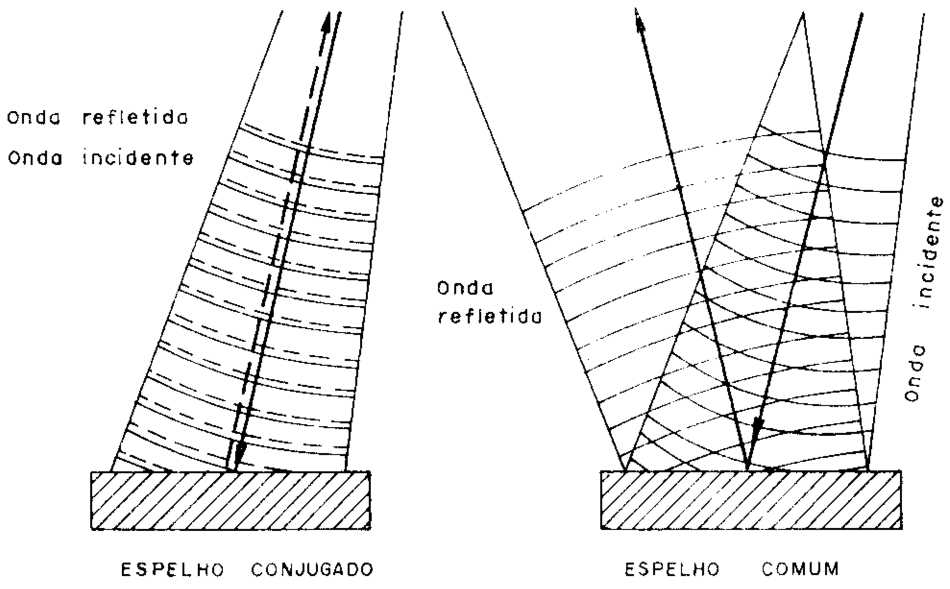
Figura 43. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = 1{,}0$, $f(o) = 0{,}7$ e $b(1) = 0{,}6$.

Figura 44. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = -1{,}0$, $f(o) = 0{,}7$ e $b(1) = 0{,}8$.

Figura 45. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/4$, $\alpha_o L = -1{,}0$, $f(o) = 0{,}8$ e $b(1) = 0{,}7$.

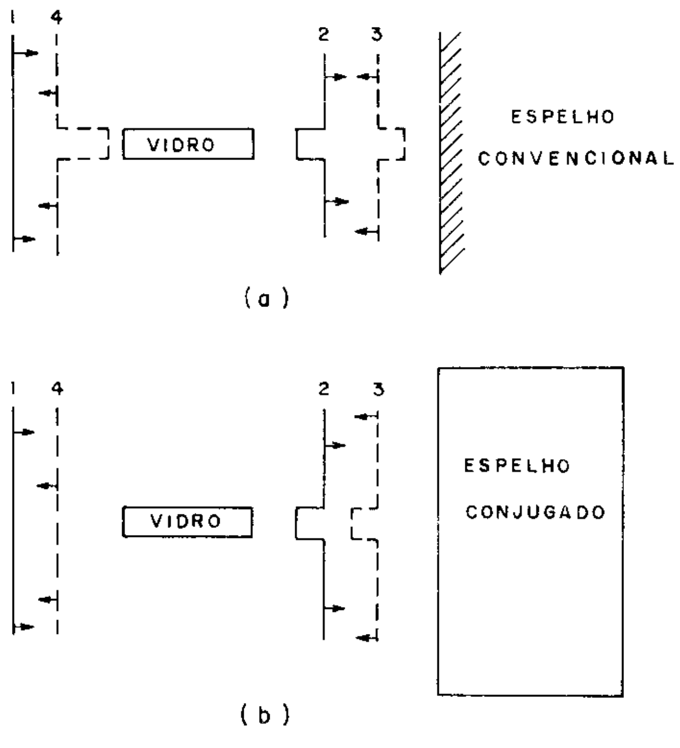
Figura 46. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -0{,}5$, $f(o) = 0{,}7$ e $b(1) = 0{,}8$.

Figura 47. $f(z_a)$, $b(z_a)$, $p(z_a)$ e $S(z_a)$ versus z_a para $p(o) = 0{,}14142$, $\phi = \pi/2$, $\alpha_o L = -0{,}5$, $f(o) = 0{,}8$ e $b(1) = 0{,}7$.



Onda refletida
Onda incidente
Onda refletida
Onda incidente
ESPELHO CONJUGADO
ESPELHO COMUM

Fig. 1



1
4
2
3
VIDRO
ESPELHO CONVENCIONAL
(a)
1
4
2
3
VIDRO
ESPELHO CONJUGADO
(b)

Fig. 2

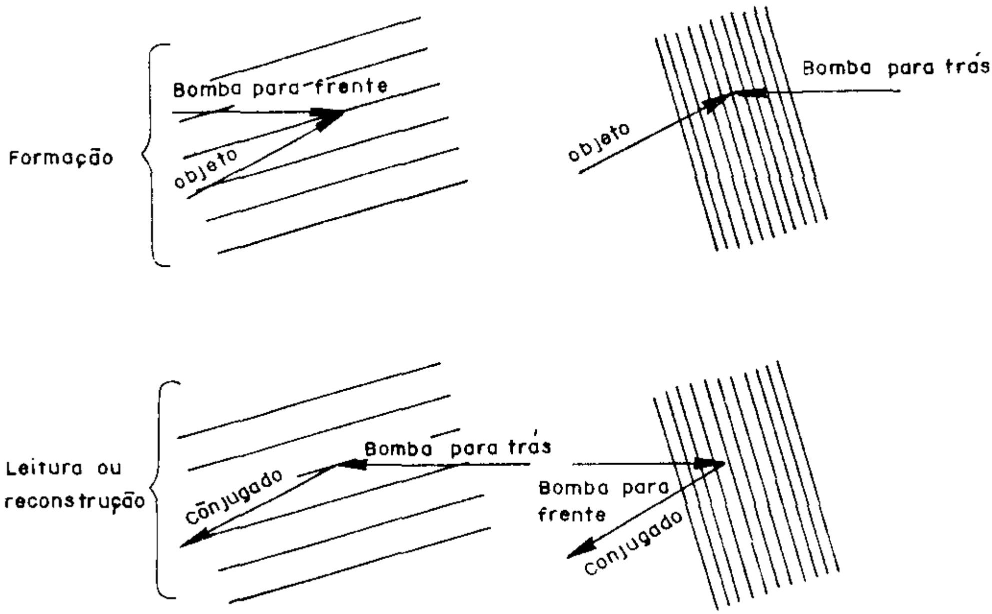
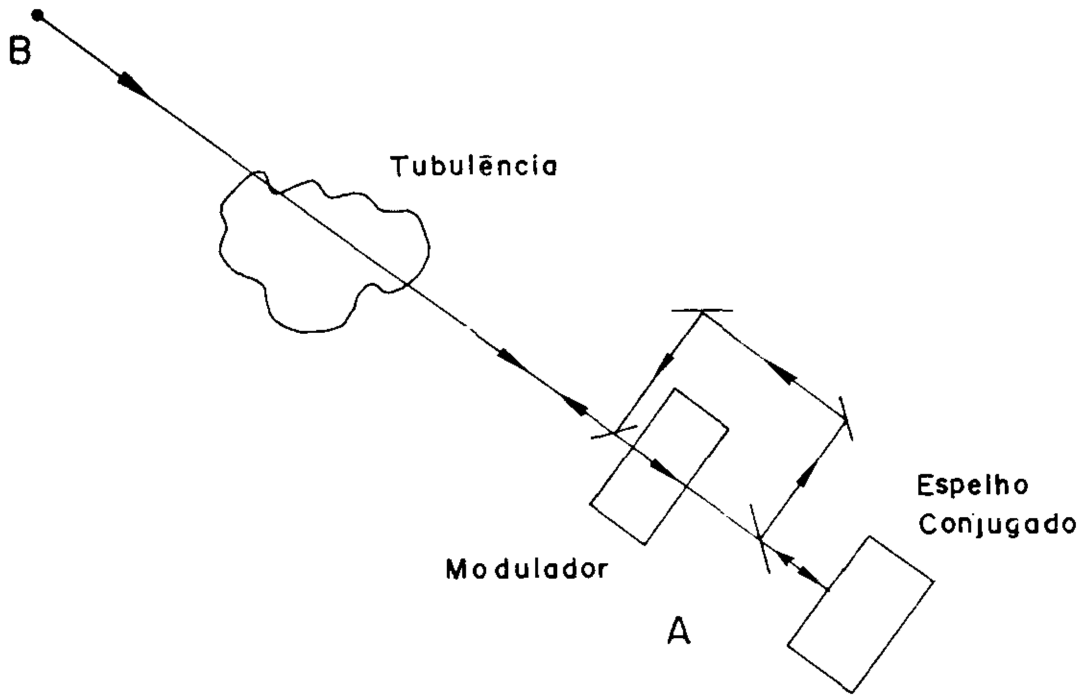
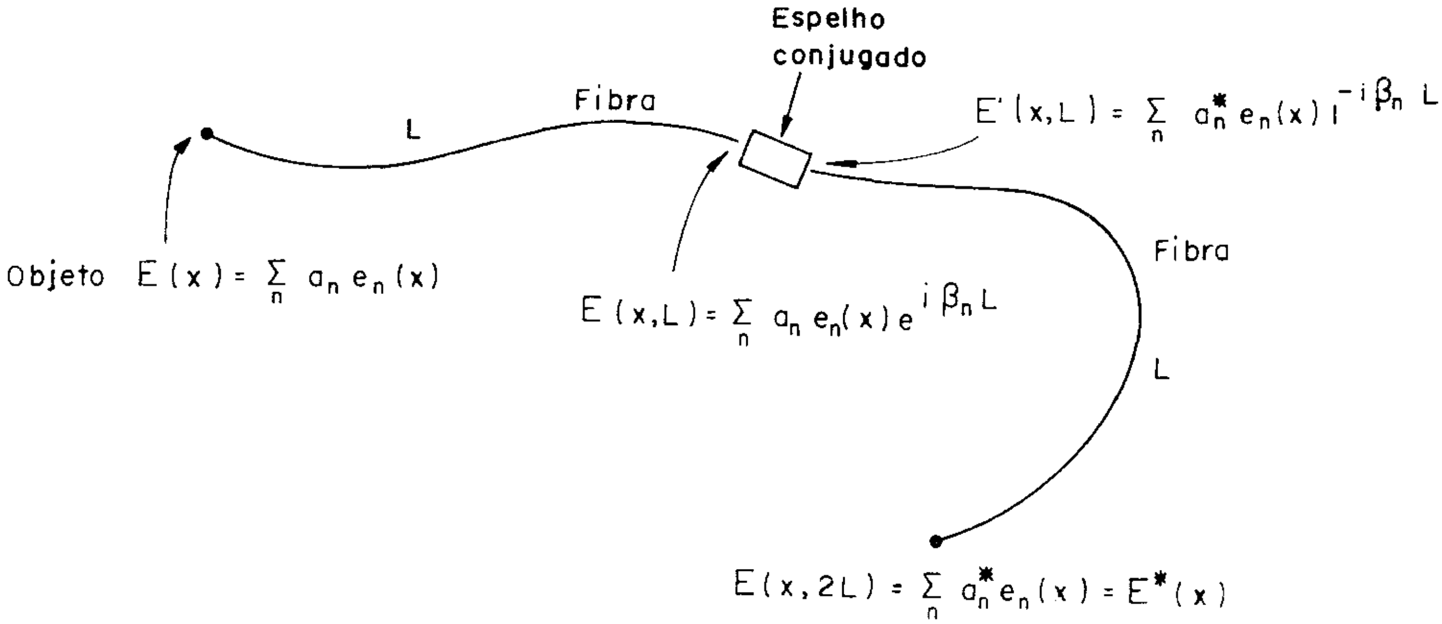

Formação
Bomba para frente
objeto
objeto
Bomba para trás
Leitura ou reconstrução
Bomba para trás
Conjugado
Bomba para frente
Conjugado

Fig. 3



Considere o problema de uma comunicação por laser do ponto A ao ponto B que estão separados por uma atmosfera turbulenta. A técnica consiste em enviar um sinal de B para A, onde ele é primeiramente modulado e depois entra no "espelho conjugado". O feixe retro-espalhado, o qual é modulado emerge do "espelho", contorna o modulador e é mandado de volta para B. Se ele atravessa a mesma atmosfera, as distorções de fase que surgem durante a primeira passagem, são canceladas na viagem de retorno.

Fig. 4



O conceito é exatamente o mesmo do exemplo anterior. Só que ao invés de se ter uma atmosfera turbulenta, a transmissão ocorre uma fibra multi-modo. Depois da conjugação de fase, a imagem não é mandada de volta pela mesma fibra, mas sim continua através de uma segunda fibra que é idêntica à primeira.

Fig. 5

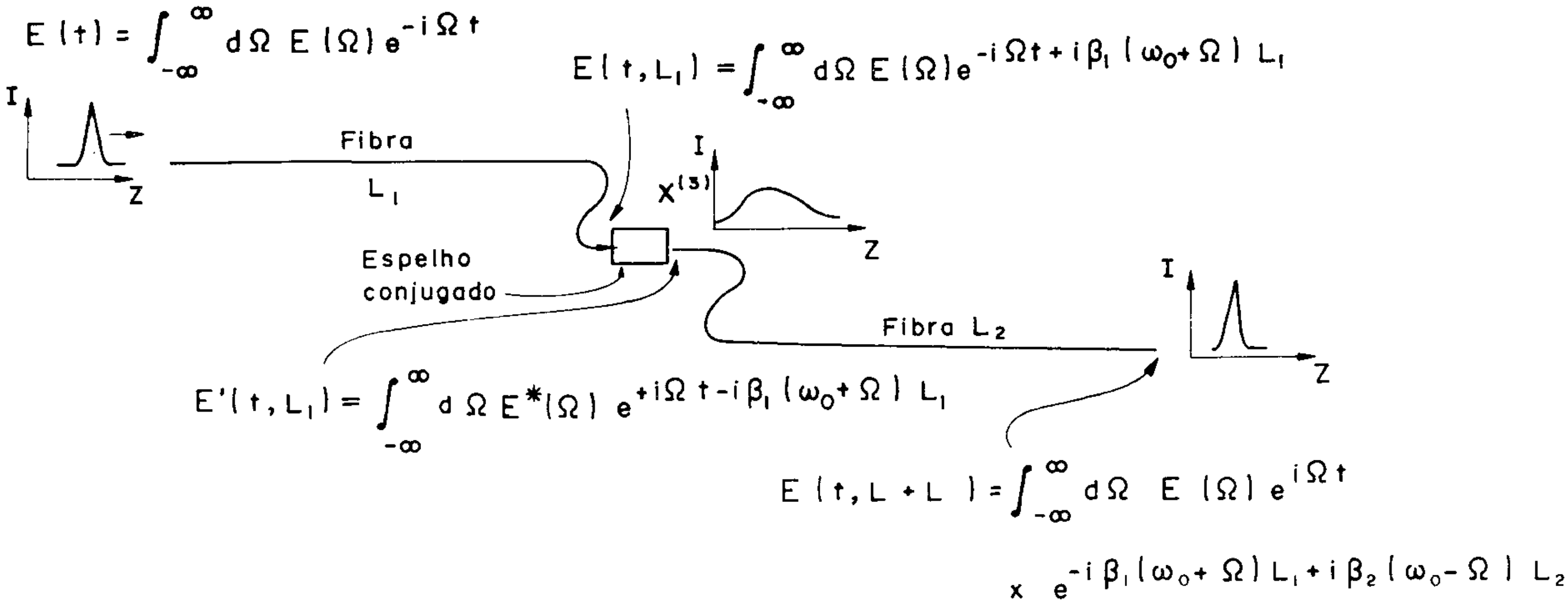
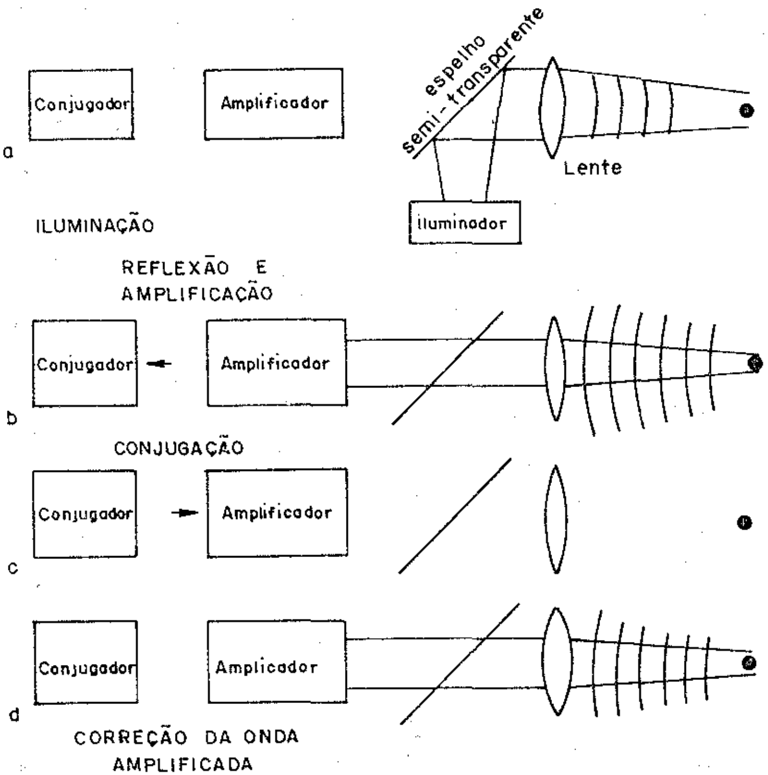


ILUSTRAÇÃO DO PRINCÍPIO DE ESTREITAMENTO DE UM PULSO NA FIBRA

Fig. 6



Conjugador
Amplificador
espelho
semi-transparente
Lente
a
ILUMINAÇÃO
Iluminador
REFLEXÃO E
AMPLIFICAÇÃO
Conjugador
Amplificador
b
CONJUGAÇÃO
Conjugador
Amplificador
c
Conjugador
Amplicador
d
CORREÇÃO DA ONDA
AMPLIFICADA

Fig. 7

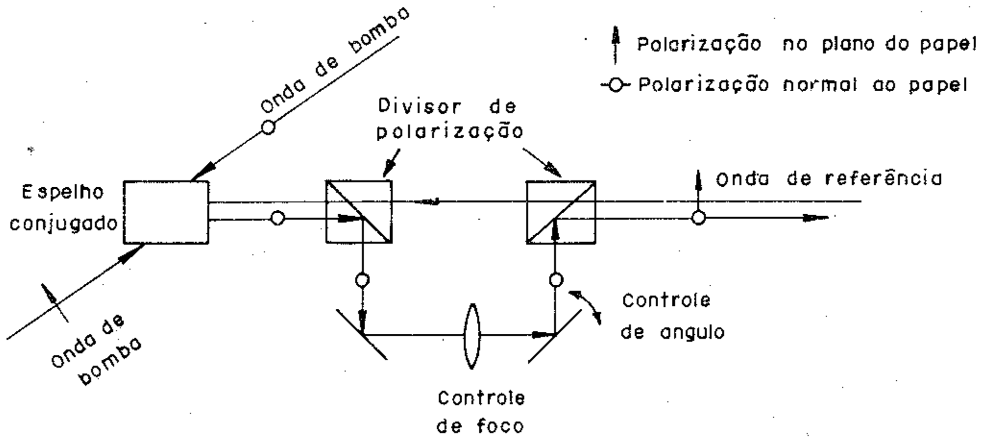

Polarização no plano do papel
Polarização normal ao papel
Onda de bomba
Divisor de polarização
Espelho conjugado
Onda de referência
Controle de angulo
Onda de bomba
Controle de foco

Fig. 8

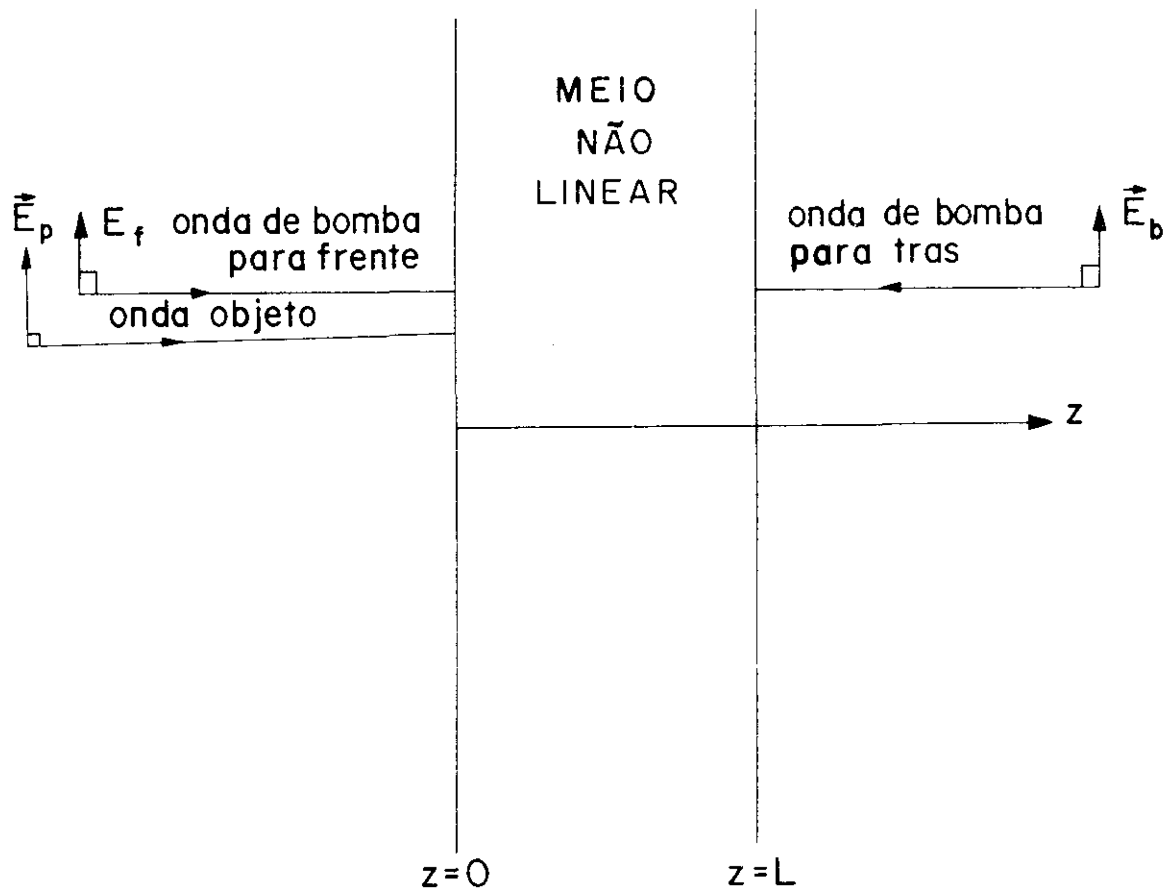
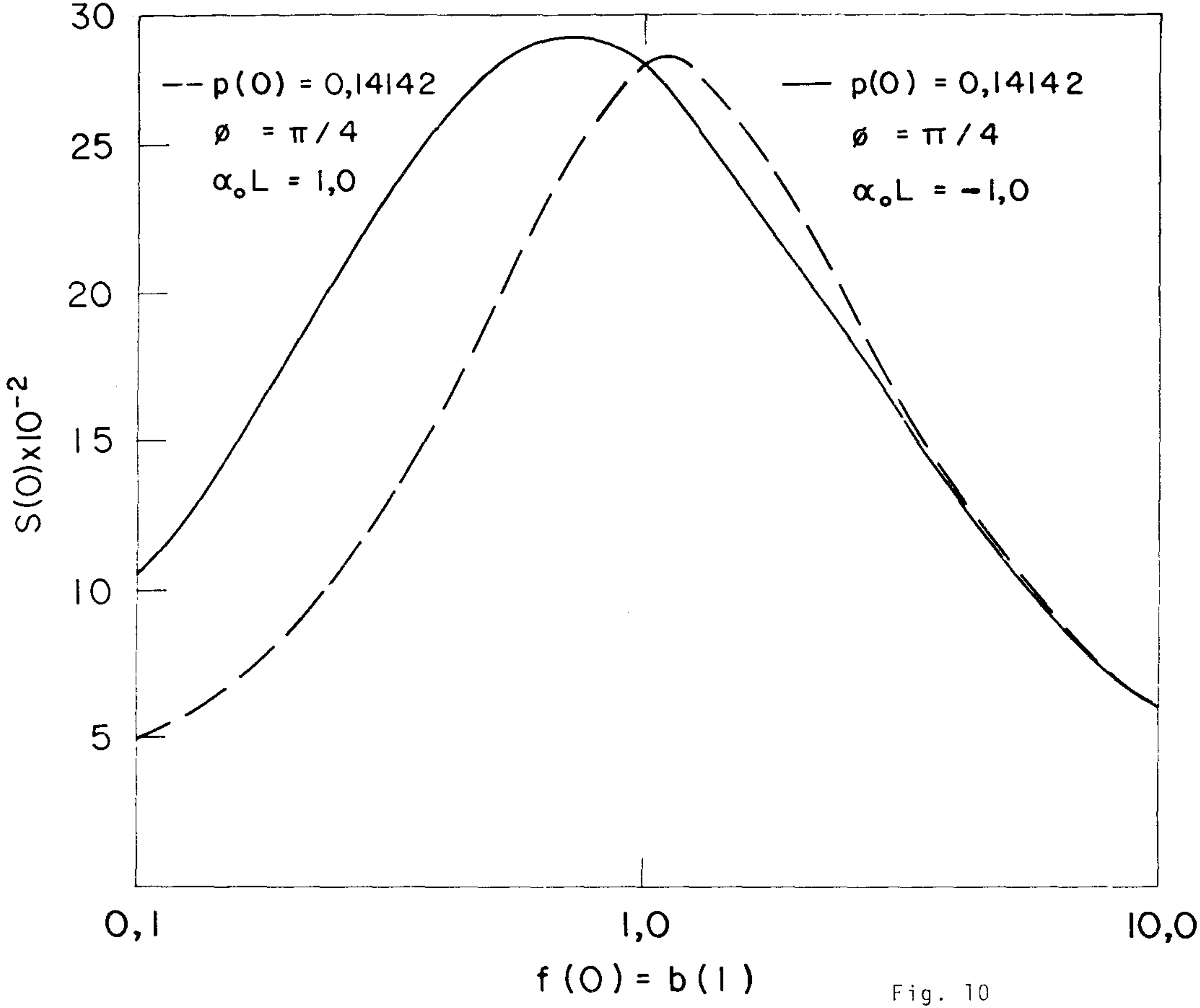
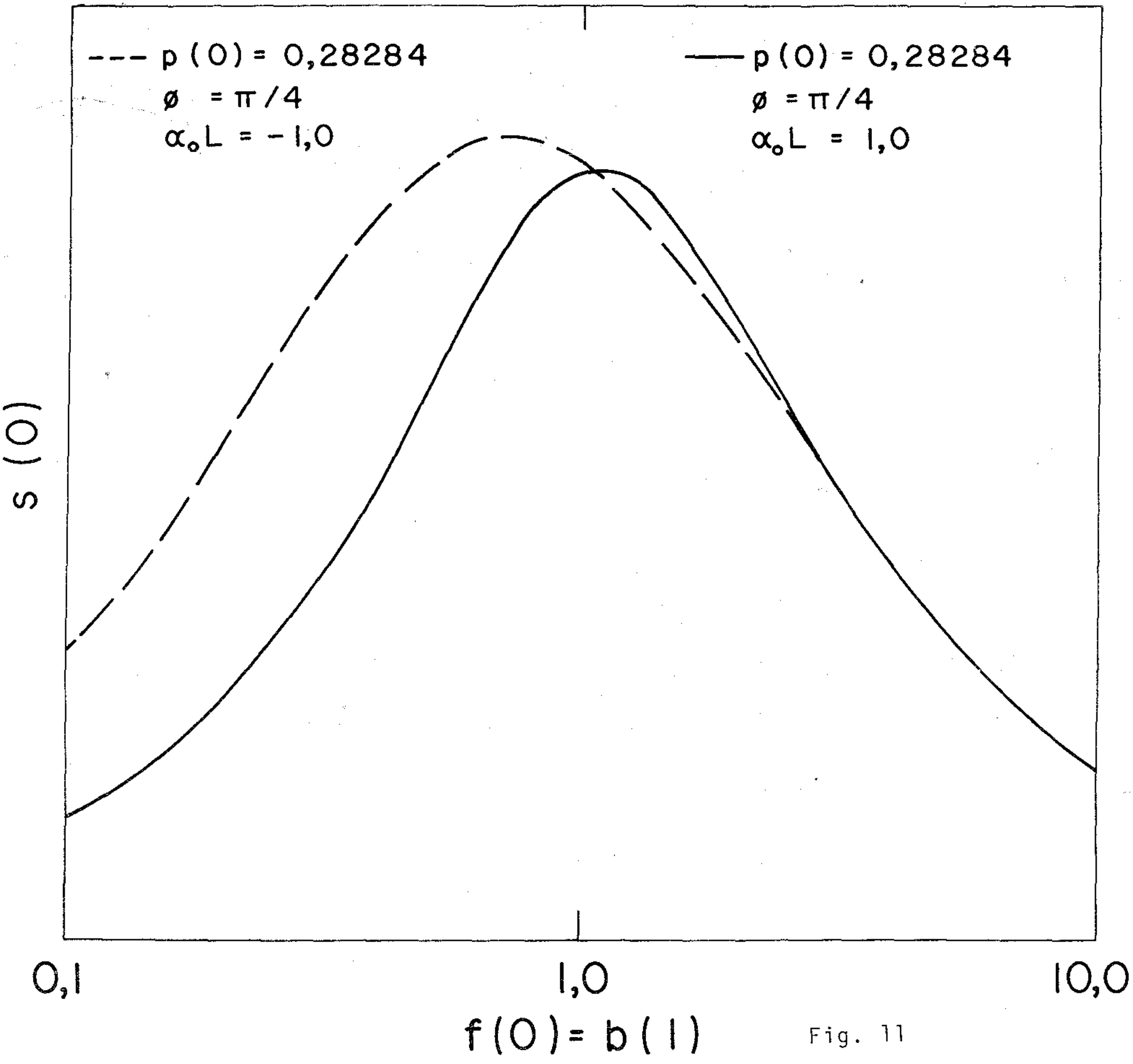

MEIO
NÃO
LINEAR
$\vec{E}_p$
E_f
onda de bomba para frente
onda objeto
onda de bomba para tras
$\vec{E}_b$
z
z=0
z=L

Fig. 9



30
25
20
15
10
5
S(O)x10^-2
-- p(O) = 0,14142
ø = π / 4
α₀L = 1,0
— p(O) = 0,14142
ø = π / 4
α₀L = -1,0
0,1
1,0
10,0
f(O) = b(1)

Fig. 10



--- p (0) = 0,28284
ø = π/4
$\alpha_o L$ = −1,0
— p (0) = 0,28284
ø = π/4
$\alpha_o L$ = 1,0
s (0)
0,1
1,0
10,0
f (0) = b (1)

Fig. 11

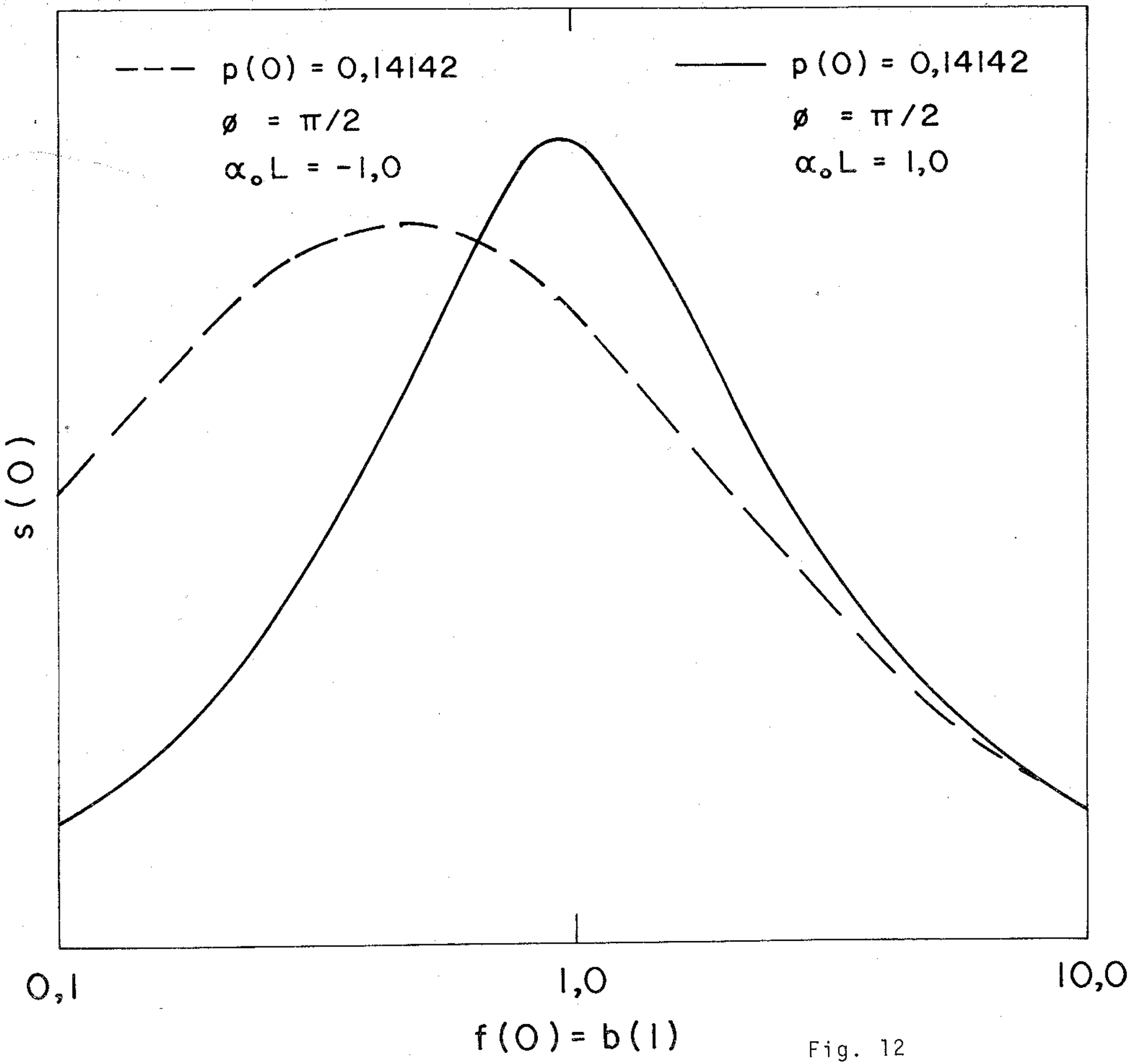


Fig. 12

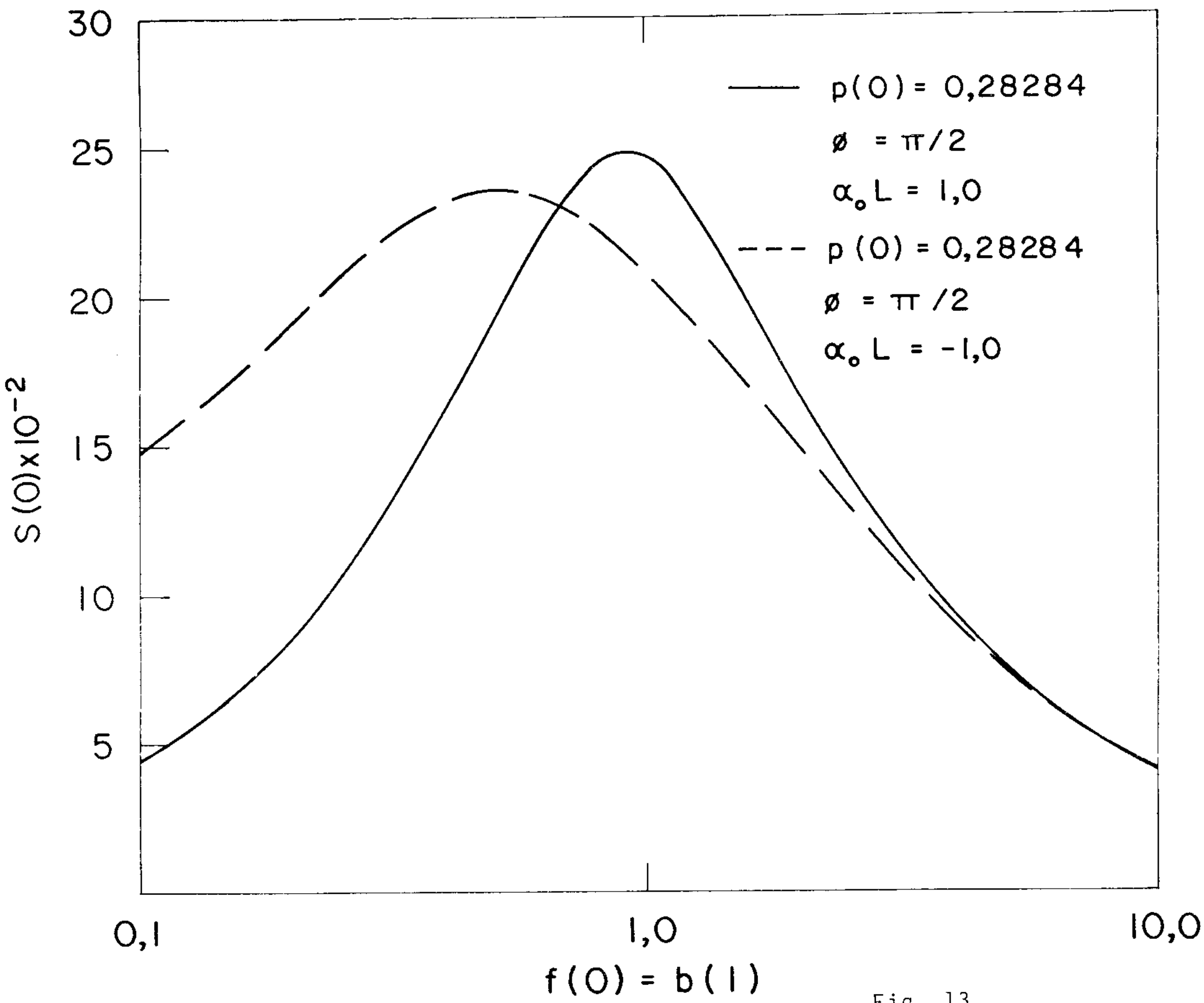

30
25
20
15
10
5
S (O) x 10⁻²
0,1
1,0
10,0
f (O) = b (1)
p(O) = 0,28284
ø = π/2
α₀ L = 1,0
p (O) = 0,28284
ø = π /2
α₀ L = -1,0

Fig. 13

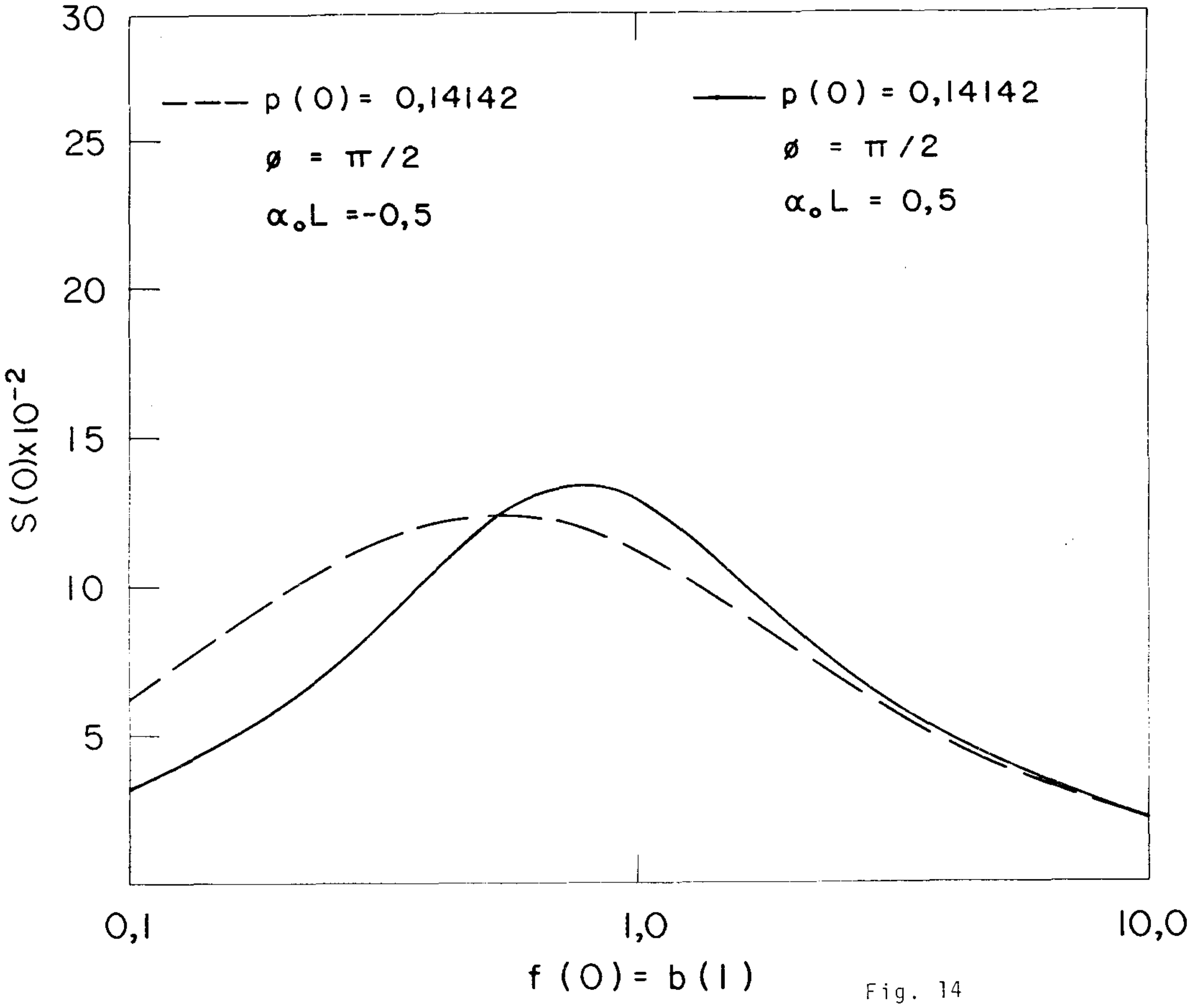

30
25
20
15
10
5
S(O)x10⁻²
p(O) = 0,14142
ø = π/2
α₀L = -0,5
p(O) = 0,14142
ø = π/2
α₀L = 0,5
0,1
1,0
10,0
f(O) = b(I)

Fig. 14

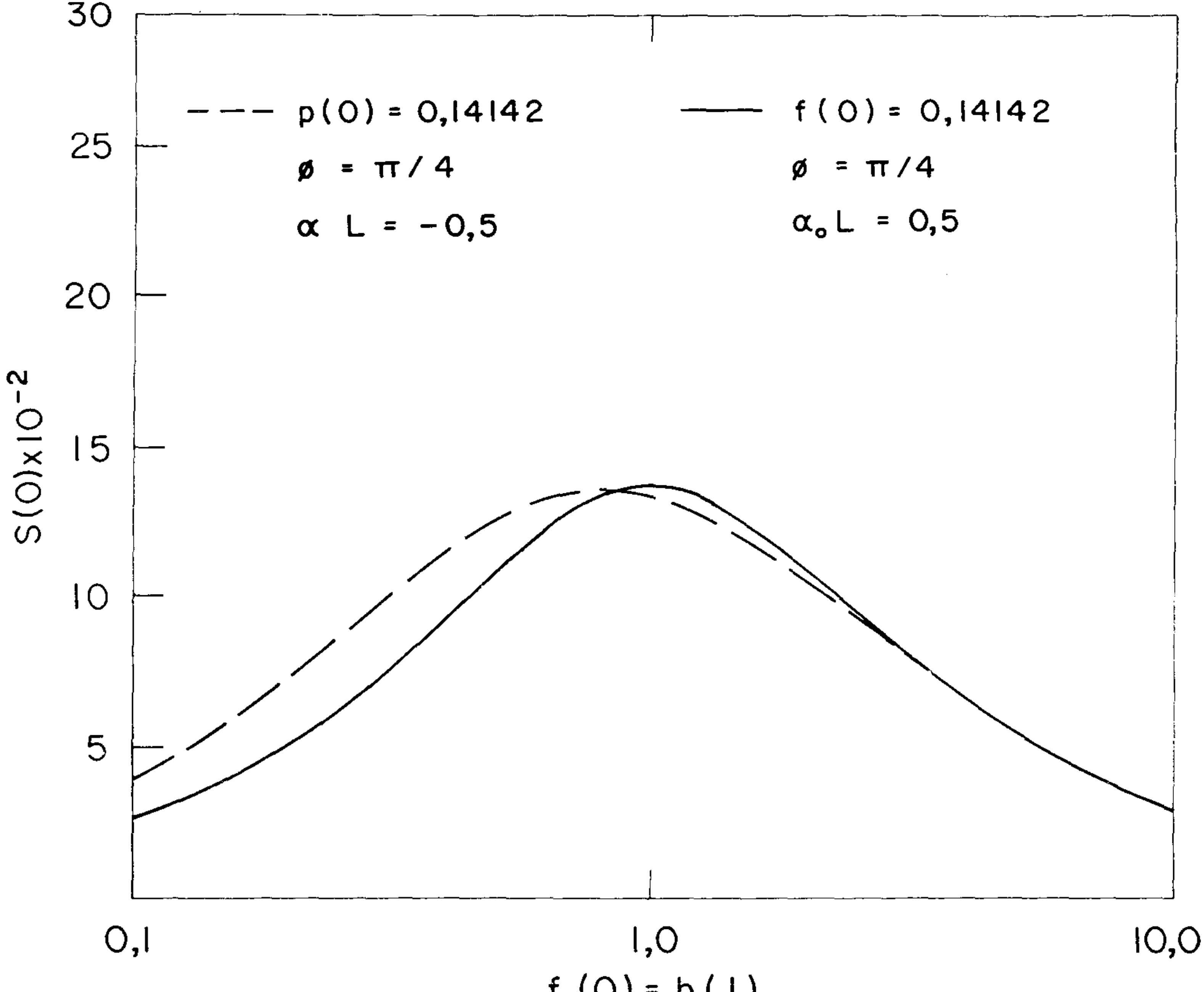
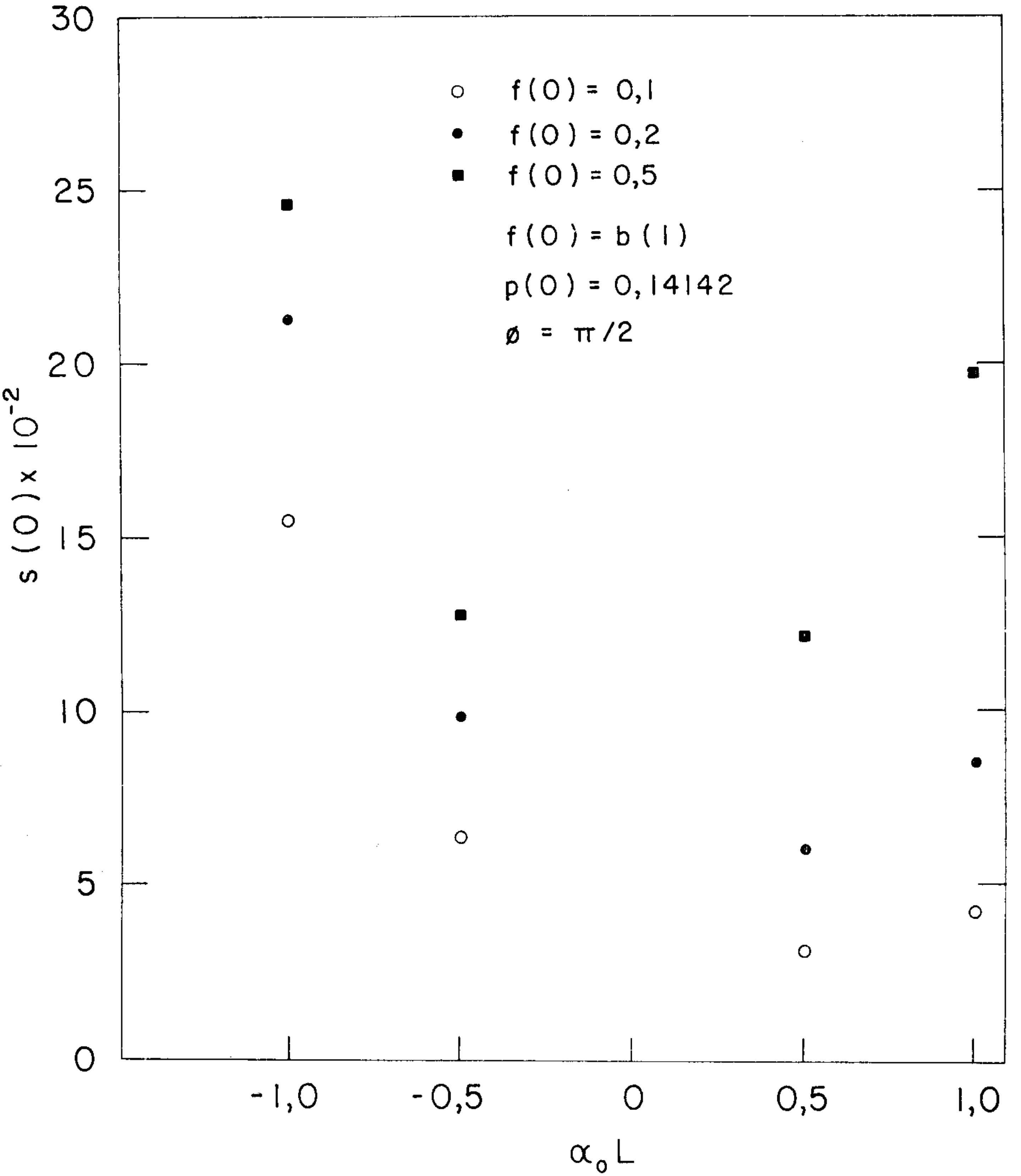
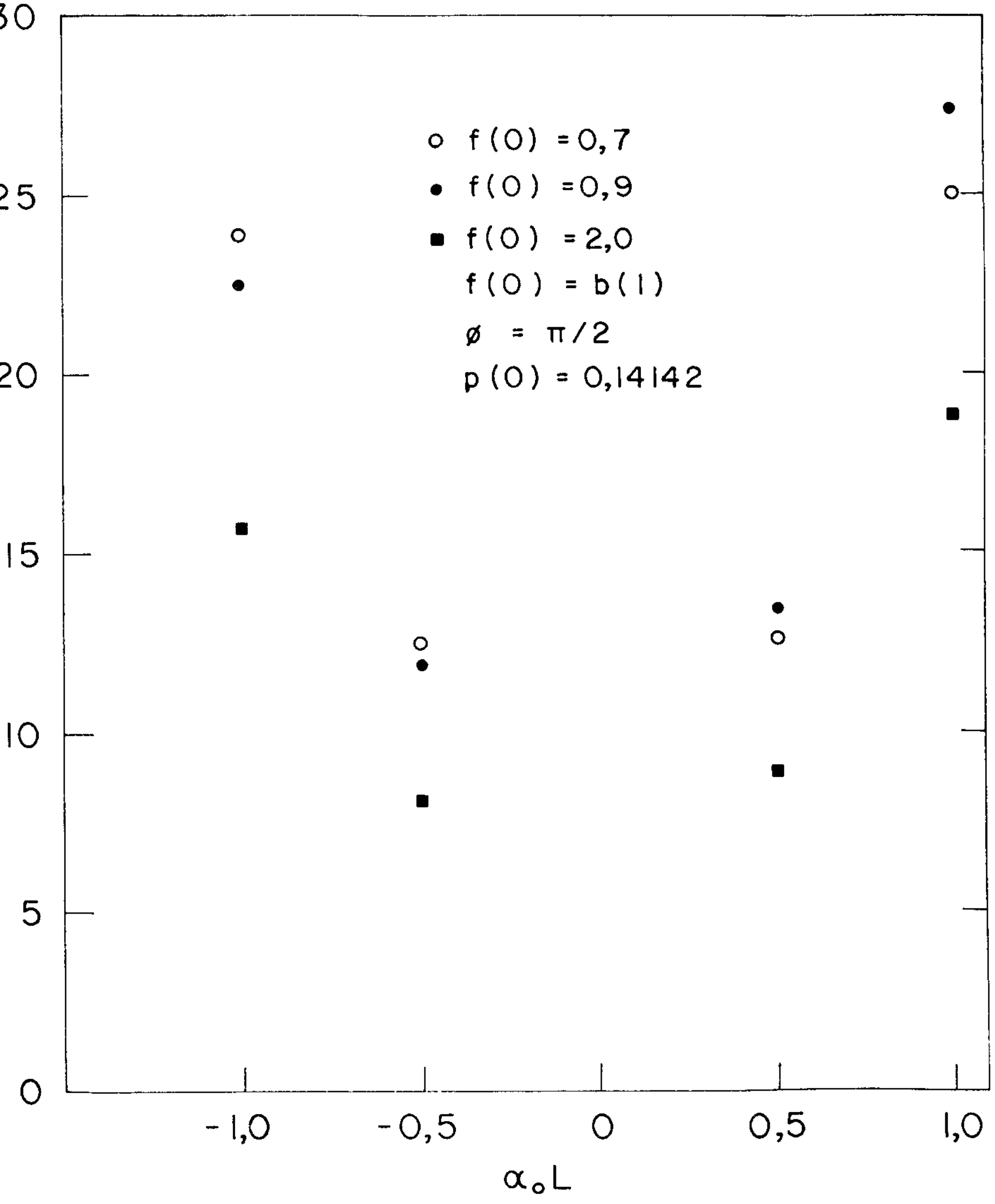

30
25
20
15
10
5
$S(0) \times 10^{-2}$
$p(0) = 0,14142$
$\phi = \pi/4$
$\alpha L = -0,5$
$f(0) = 0,14142$
$\phi = \pi/4$
$\alpha_o L = 0,5$
0,1
1,0
10,0
$f(0) = b(1)$

Fig. 15



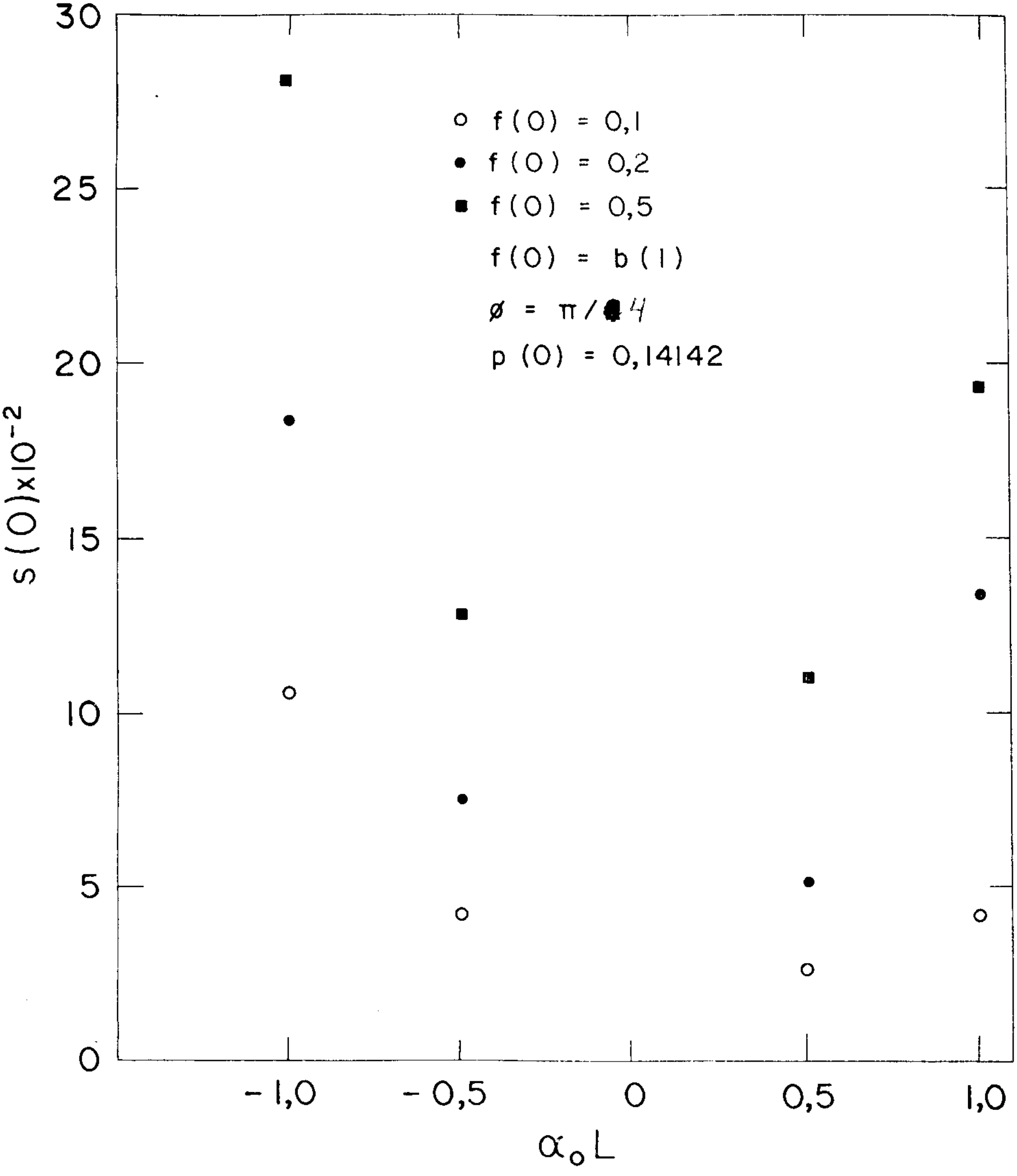
30
25
20
15
10
5
0
s (0) x 10^-2
○ f(0) = 0,1
● f(0) = 0,2
■ f(0) = 0,5
f(0) = b(1)
p(0) = 0,14142
ø = π/2
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
α_0 L

Fig. 16



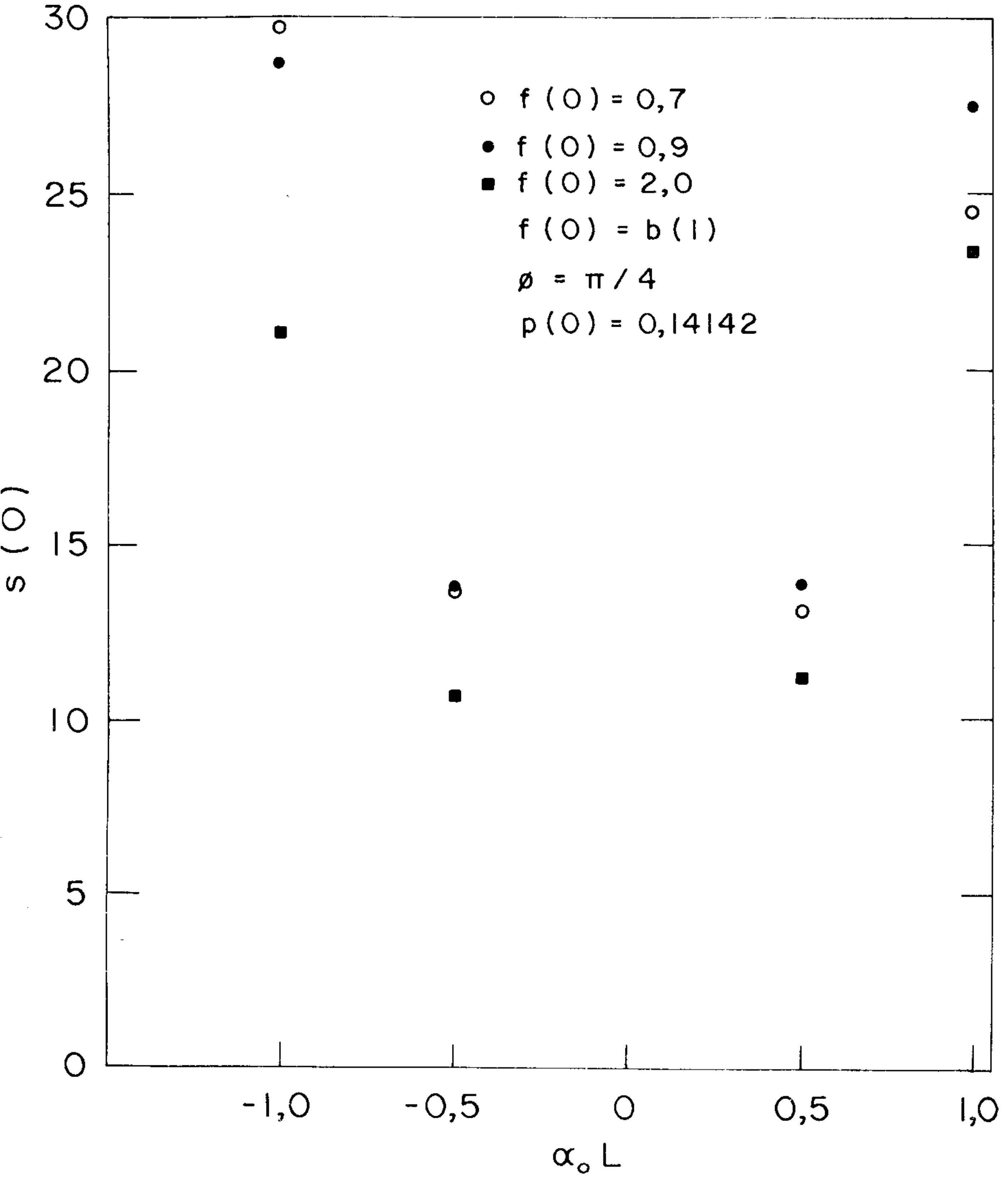
30
25
20
15
10
5
0
○ f(0) = 0,7
● f(0) = 0,9
■ f(0) = 2,0
f(0) = b(1)
ø = π/2
p(0) = 0,14142
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
$\alpha_o L$

Fig. 17



f(0) = 0,1
f(0) = 0,2
f(0) = 0,5
f(0) = b(1)
ø = π/4
p(0) = 0,14142
s(0)x10⁻²
30
25
20
15
10
5
0
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
$\alpha_o L$

Fig. 18



30
25
20
15
10
5
0
s (0)
f (0) = 0,7
f (0) = 0,9
f (0) = 2,0
f (0) = b (1)
ø = π / 4
p (0) = 0,14142
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
α₀ L

Fig. 19

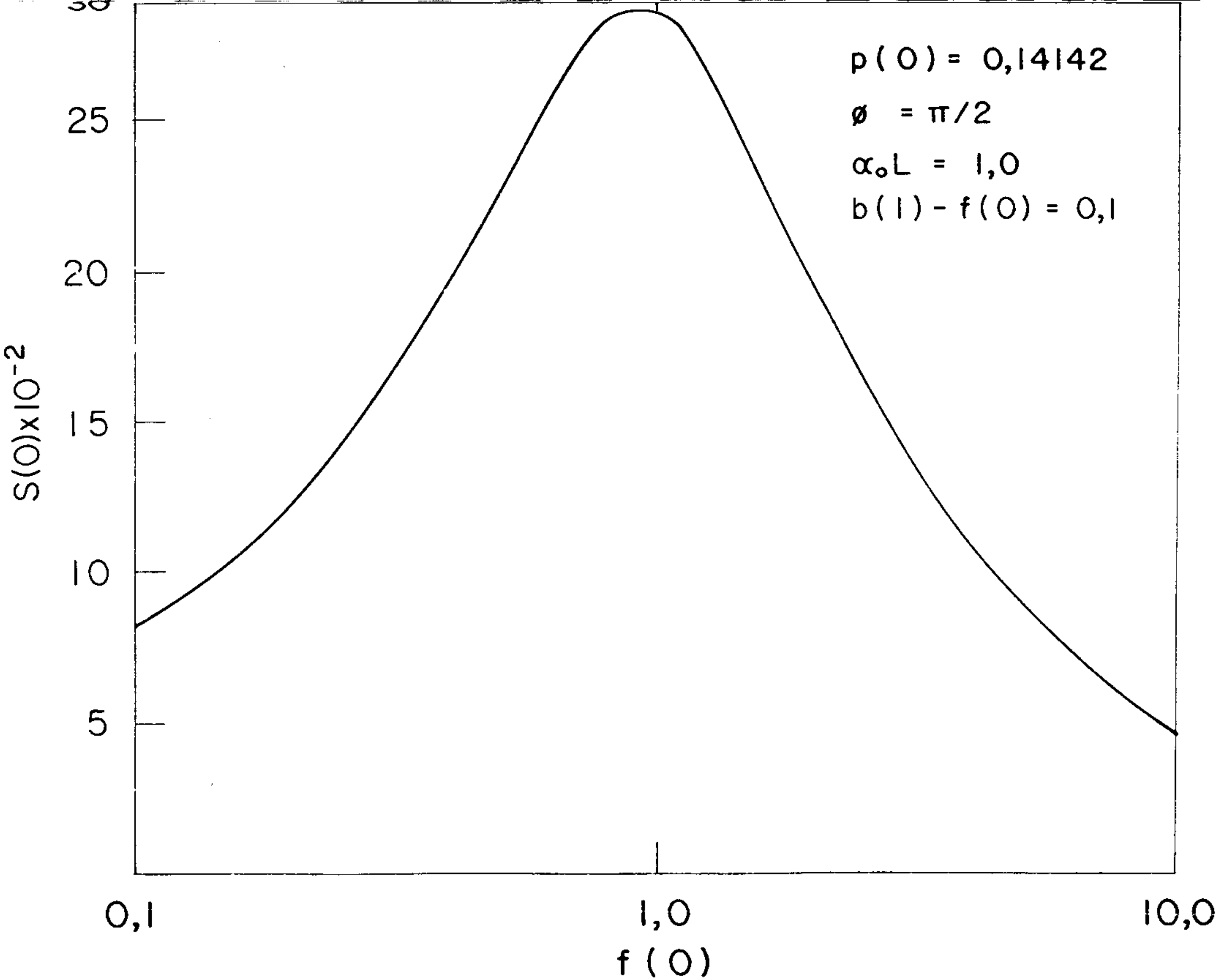


Fig. 20

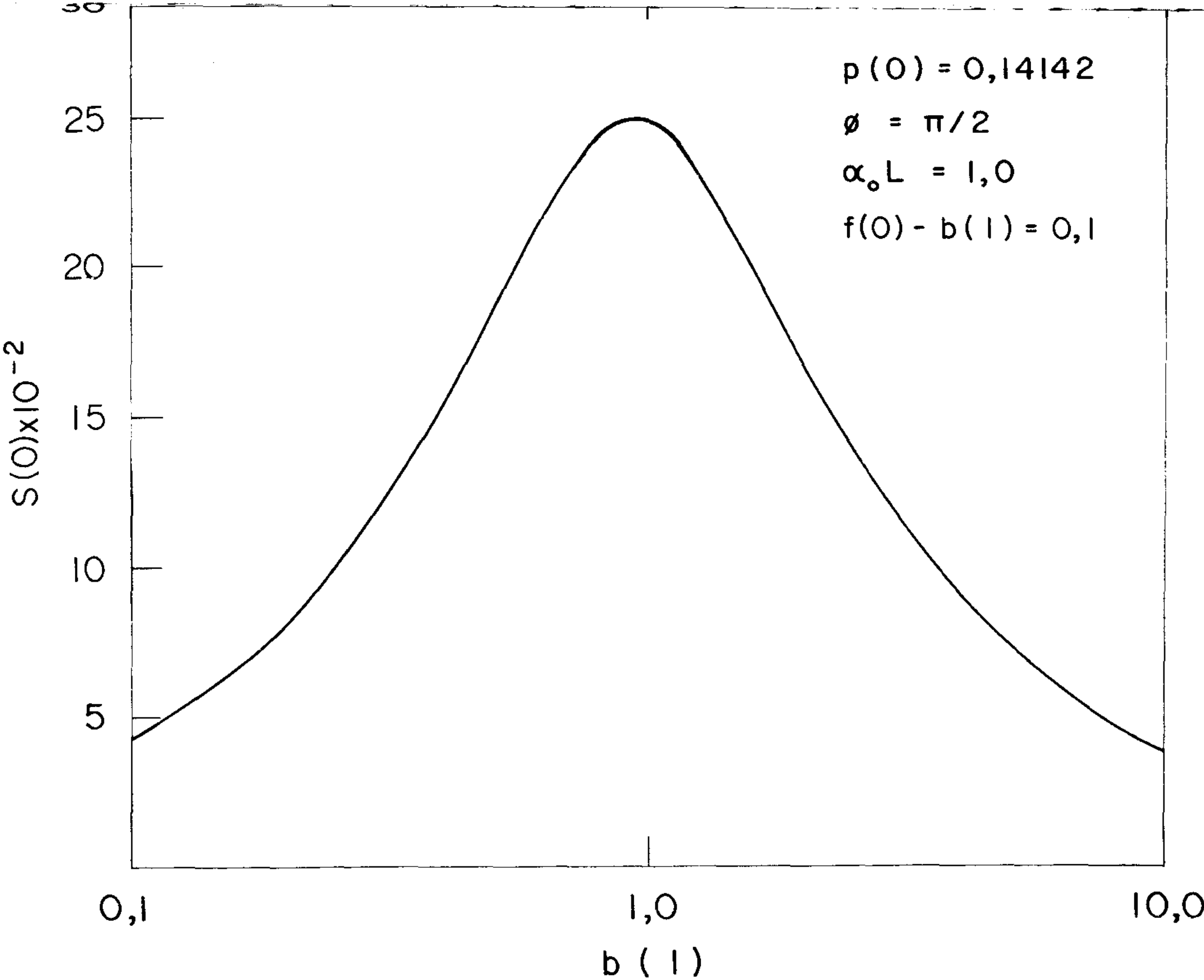
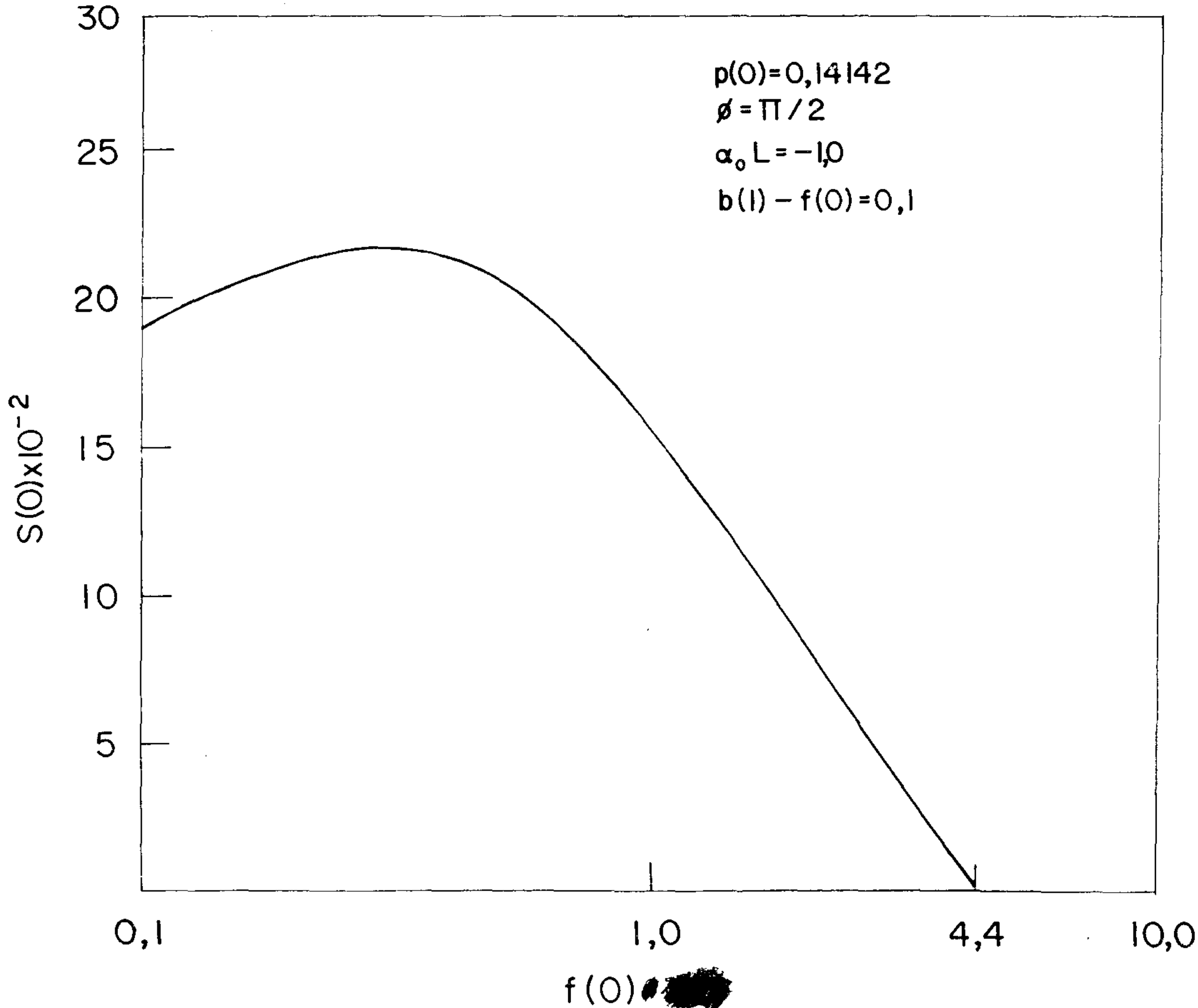


Fig. 21



p(0)=0,14142
ø=π/2
α₀L=−1,0
b(1)−f(0)=0,1
30
25
20
15
10
5
S(0)x10⁻²
0,1
1,0
4,4
10,0
f(0)

Fig. 22

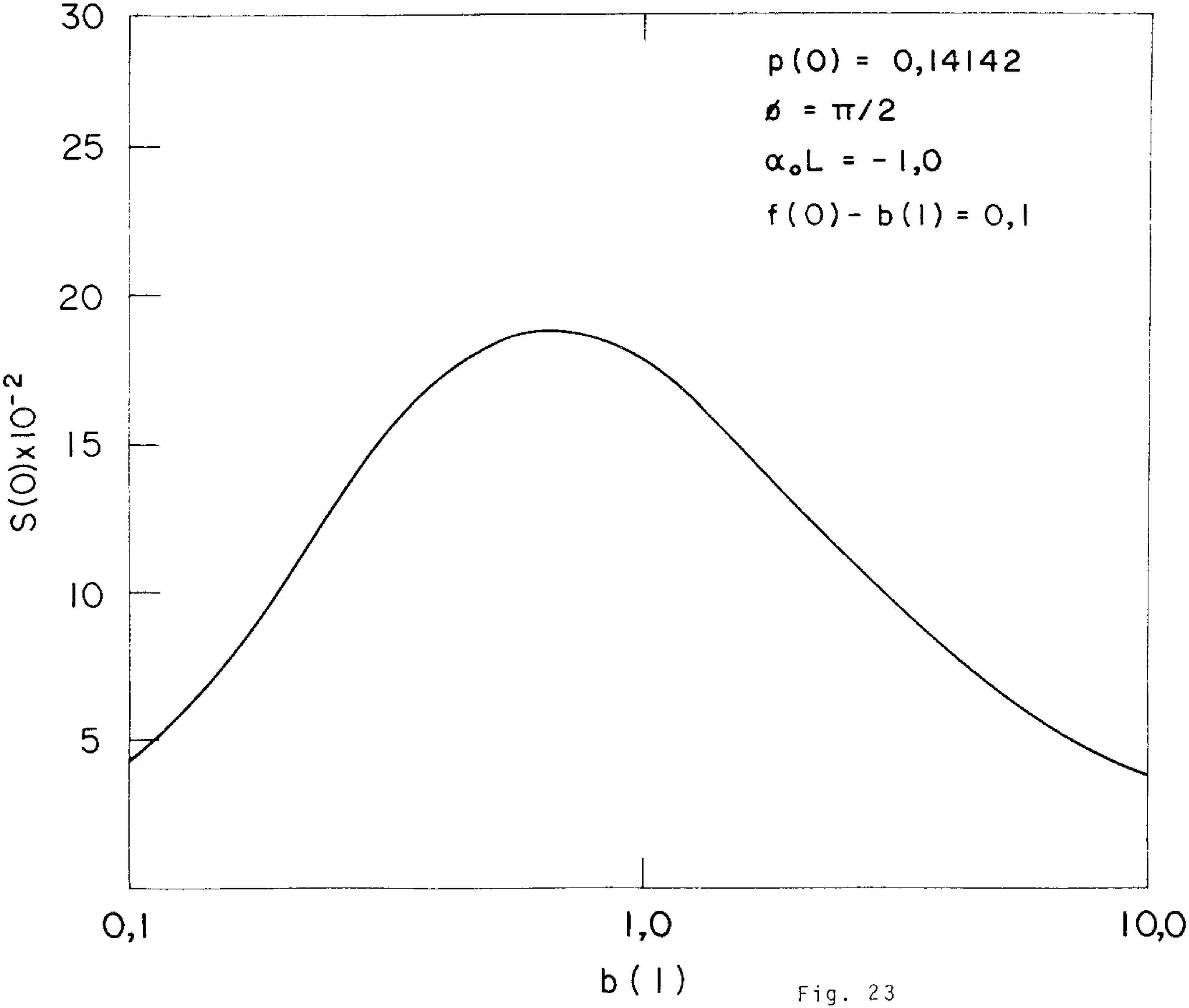


Fig. 23

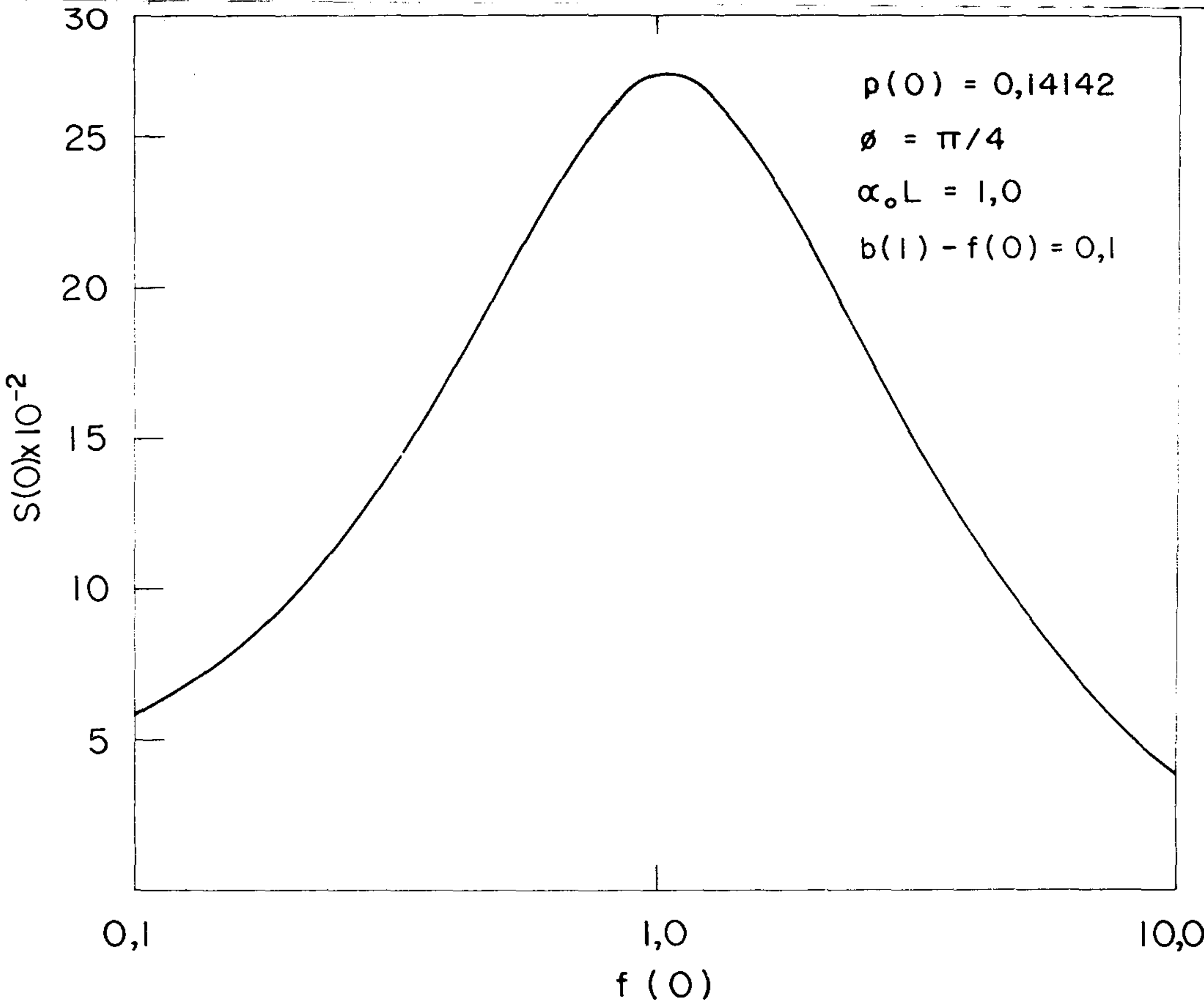


Fig. 24

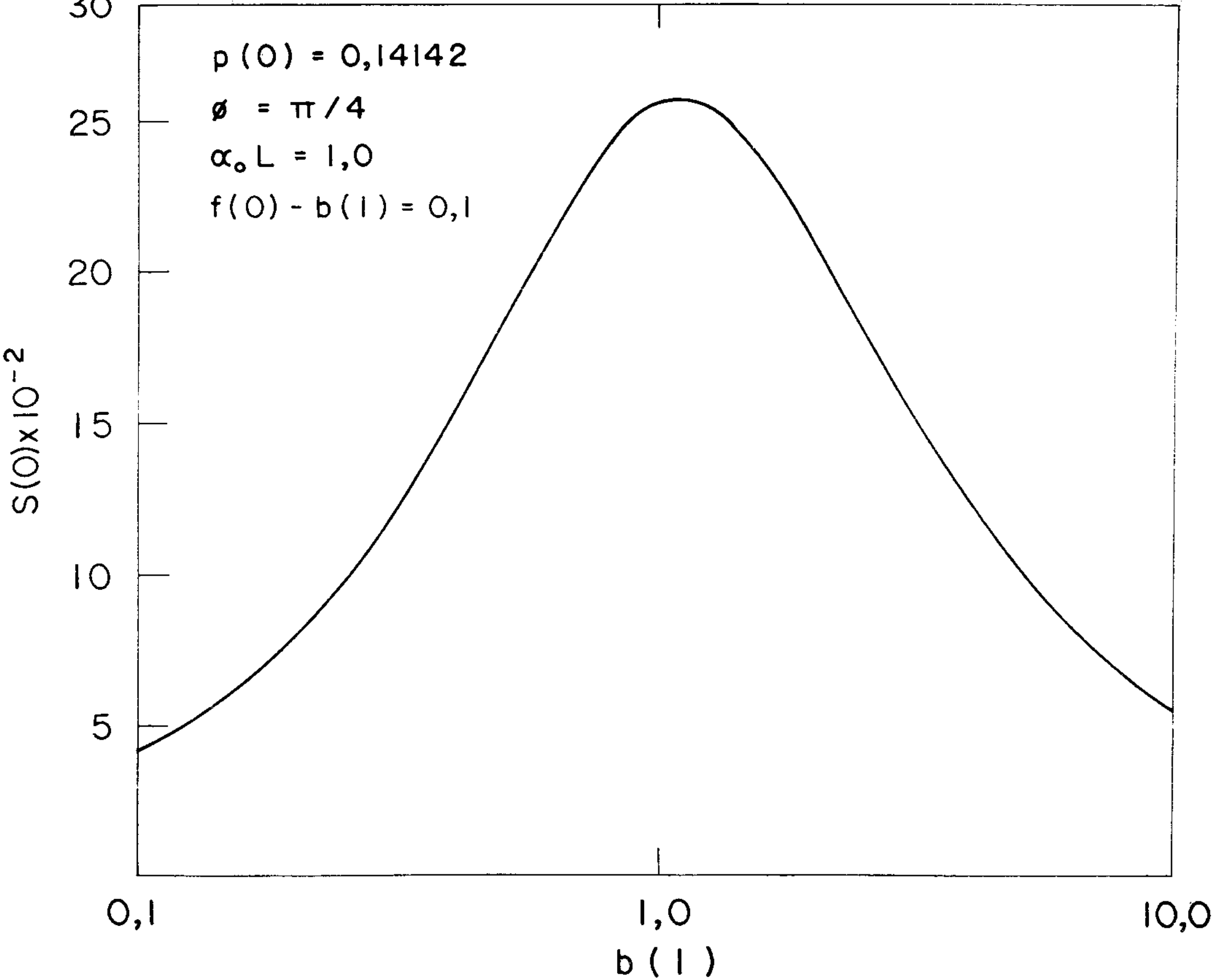


Fig. 25

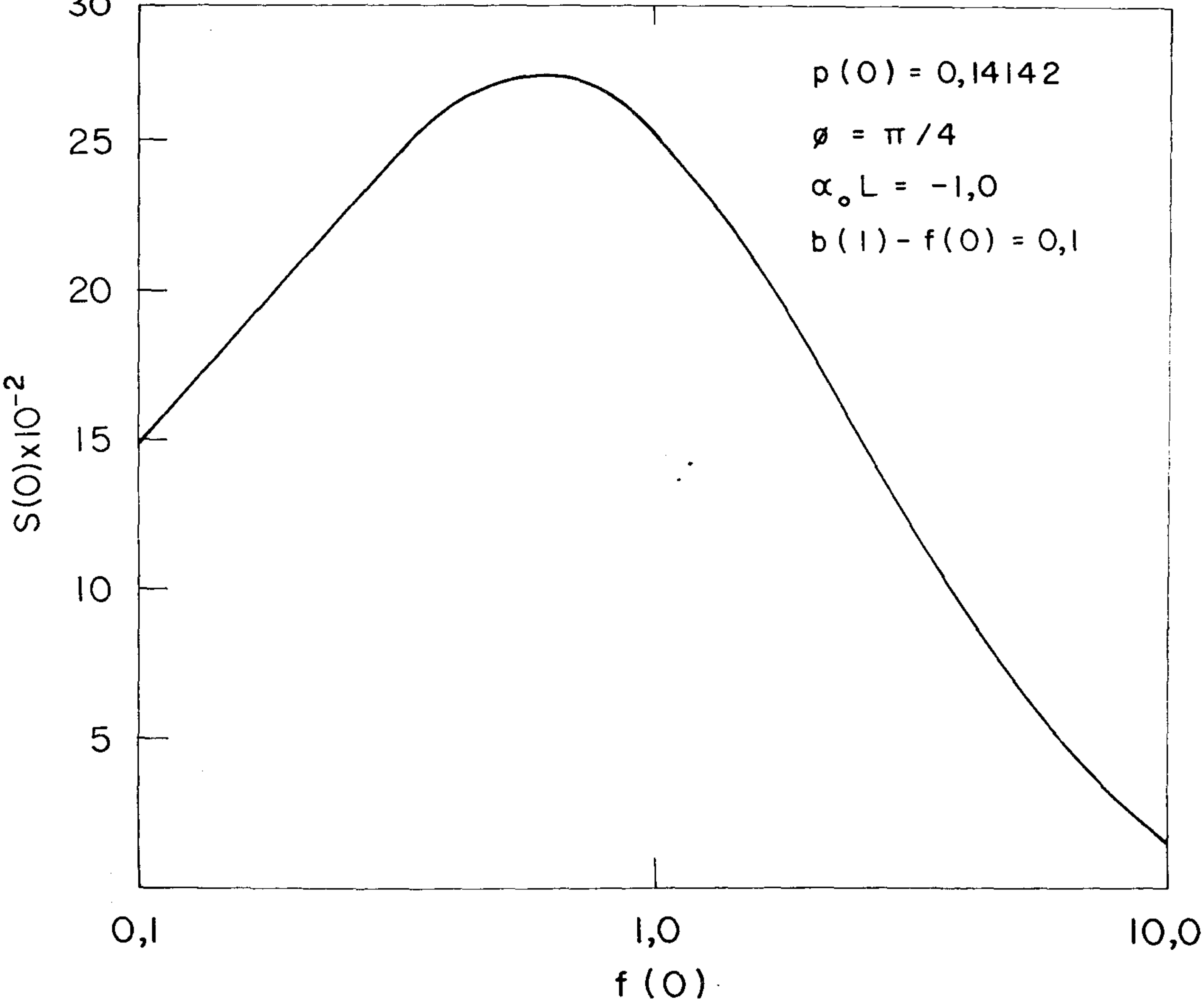


Fig. 26

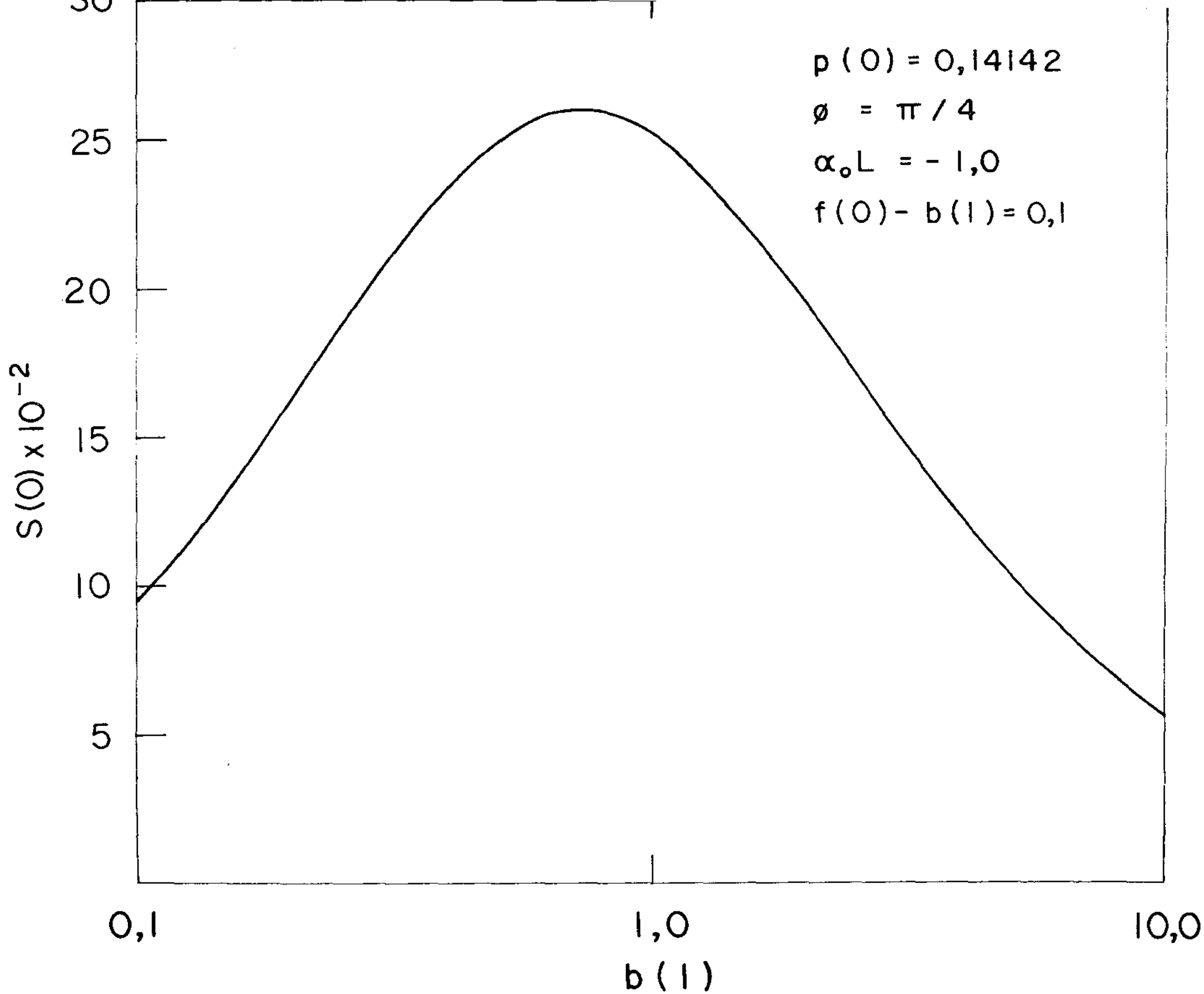


Fig. 27

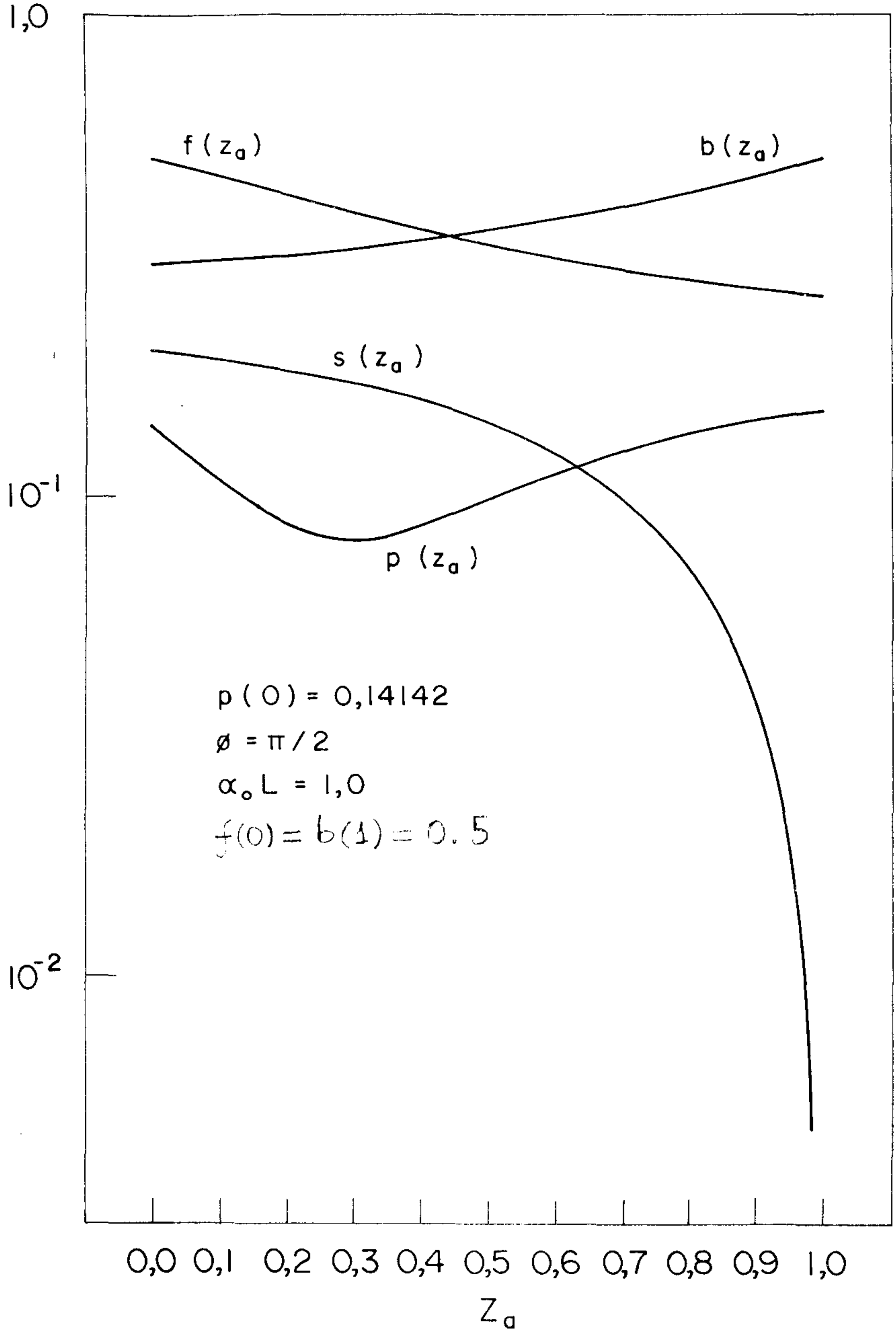

1,0
f (z_a)
b (z_a)
s (z_a)
10^-1
p (z_a)
p (0) = 0,14142
ø = π / 2
α_o L = 1,0
f(0) = b(1) = 0.5
10^-2
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 28

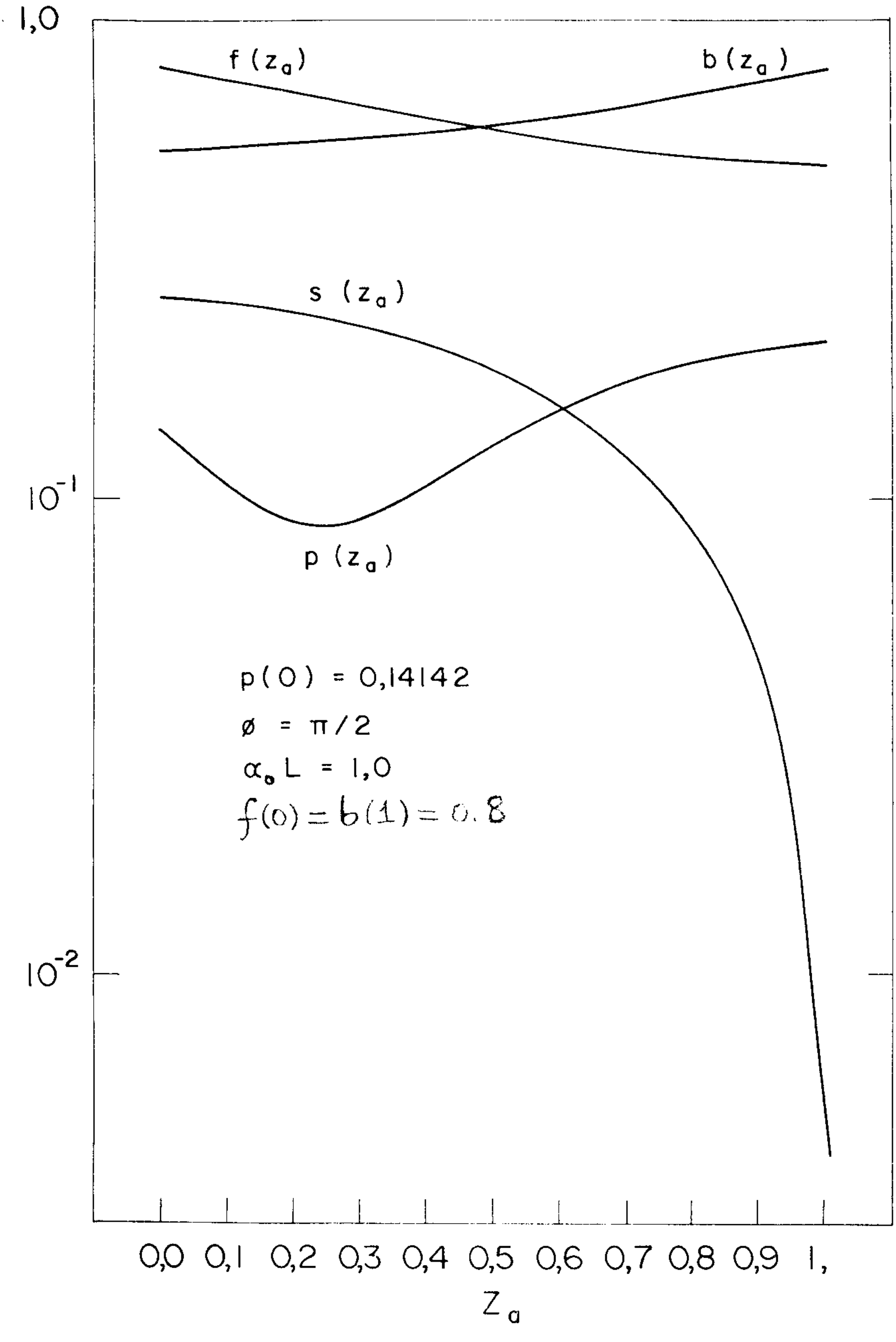

1,0
$f(z_a)$
$b(z_a)$
$s(z_a)$
10^{-1}
$p(z_a)$
$p(0) = 0,14142$
$\phi = \pi/2$
$\alpha_o L = 1,0$
$f(0) = b(1) = 0.8$
10^{-2}
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,
Z_a

Fig. 29

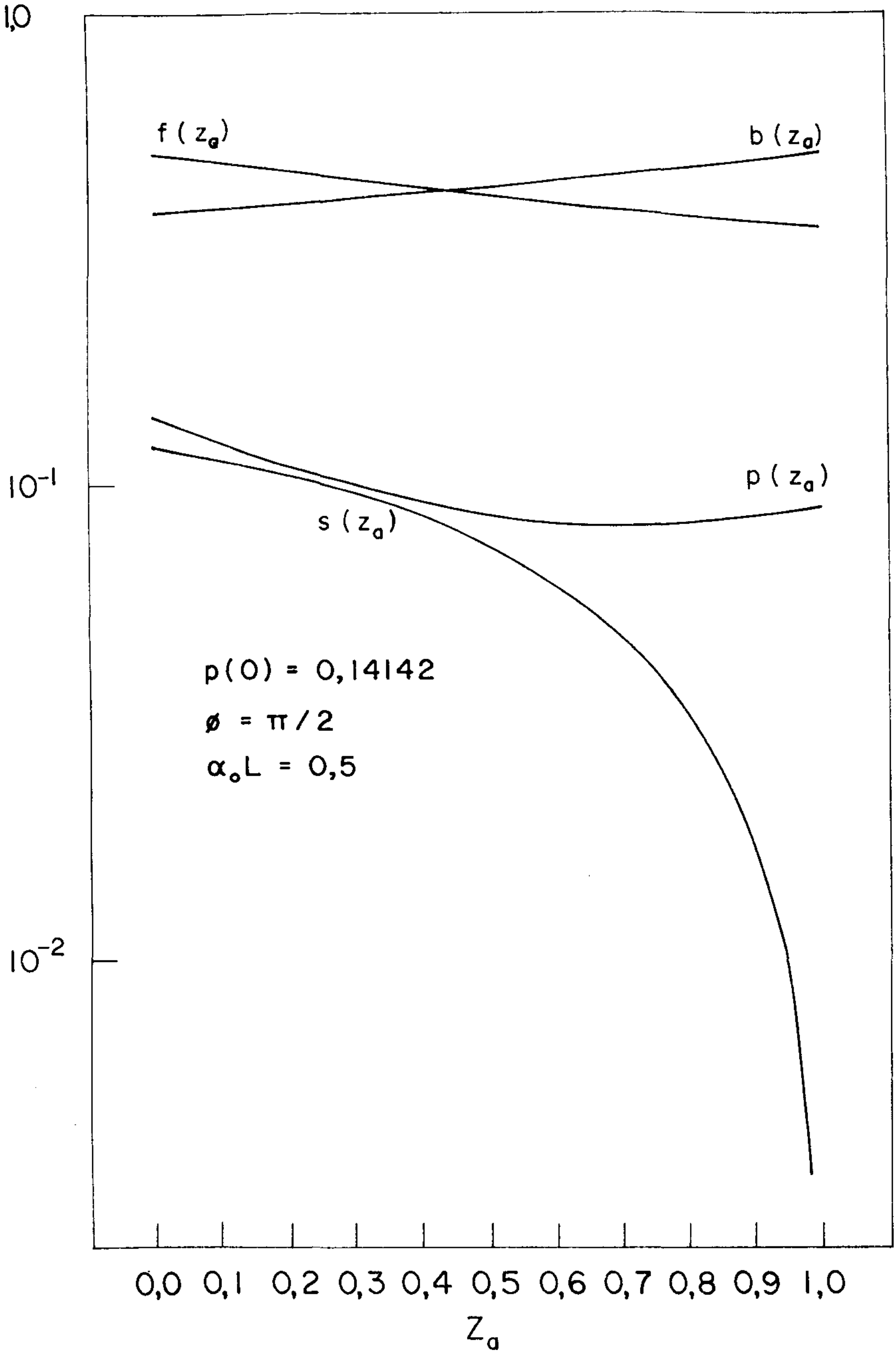
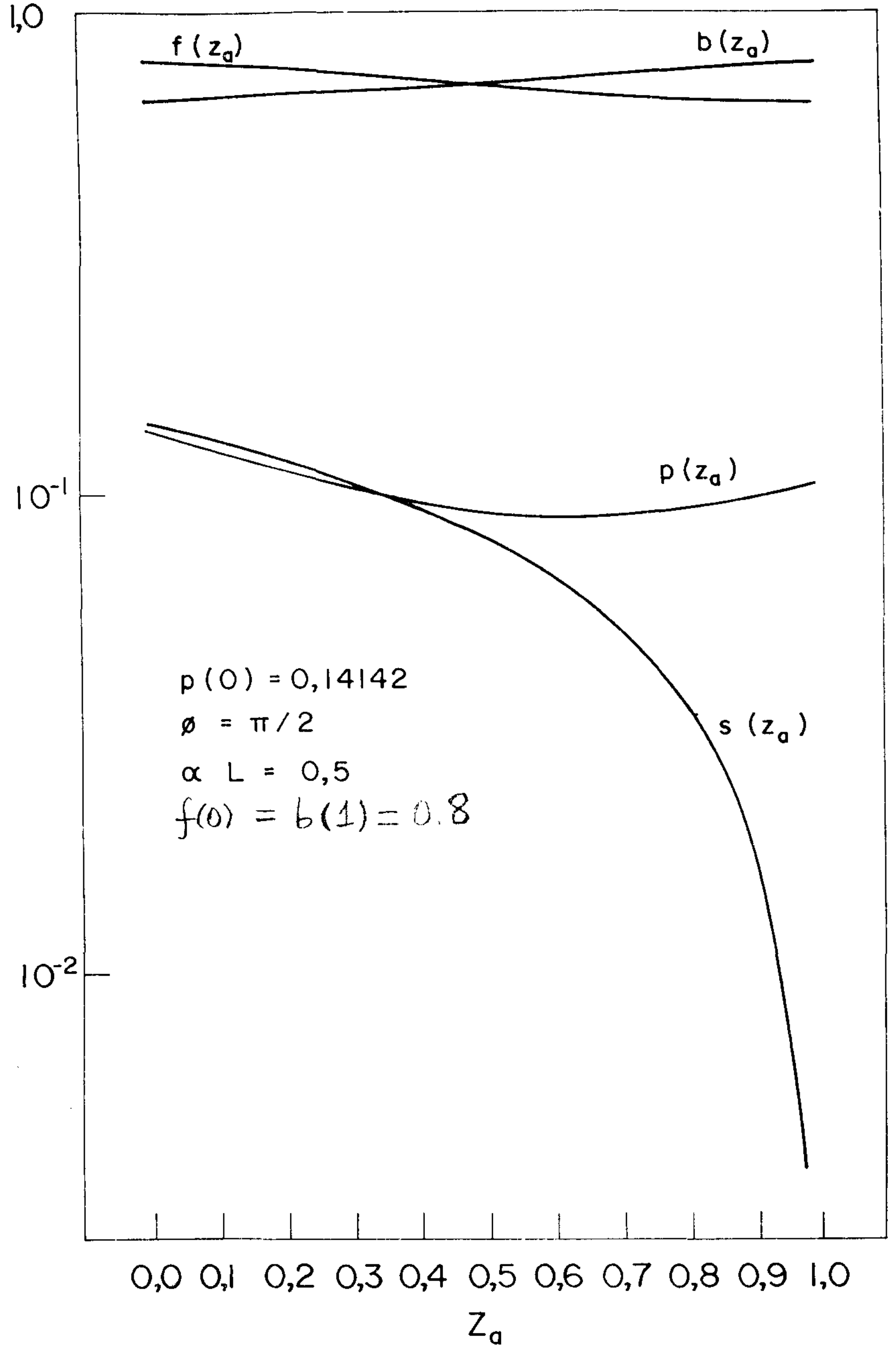

1,0
f (z_a)
b (z_a)
10^-1
p (z_a)
s (z_a)
p(0) = 0,14142
ø = π / 2
α_o L = 0,5
10^-2
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 30



1,0
f (z_a)
b (z_a)
p (z_a)
10^-1
p (0) = 0,14142
ø = π / 2
α L = 0,5
f(0) = b(1) = 0.8
s (z_a)
10^-2
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 31

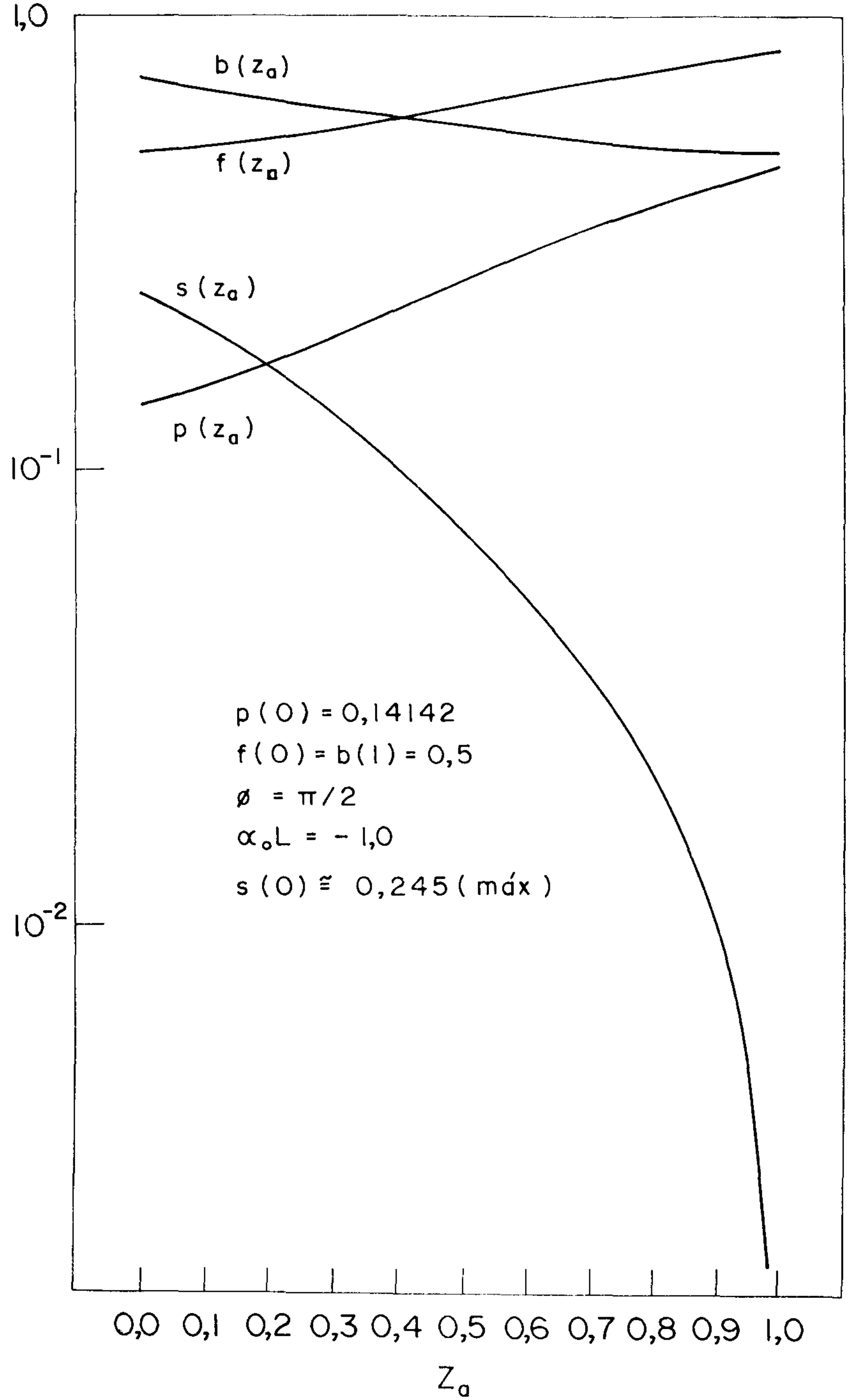

1,0
b (z_a)
f (z_a)
s (z_a)
p (z_a)
10^-1
10^-2
p (0) = 0,14142
f (0) = b (1) = 0,5
ø = π/2
α_o L = - 1,0
s (0) ≅ 0,245 (máx)
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 32

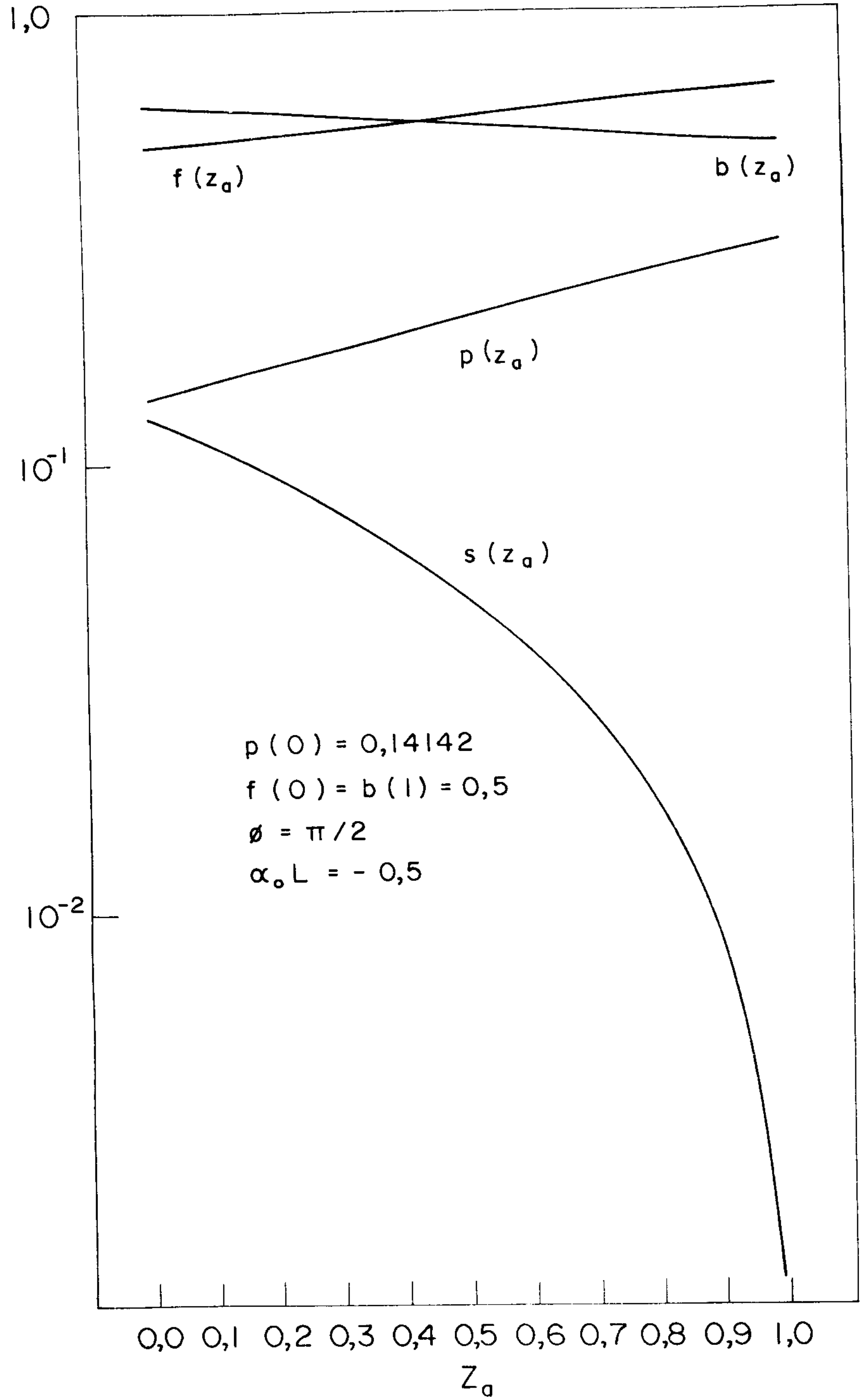

1,0
$f(z_a)$
$b(z_a)$
$p(z_a)$
10^{-1}
$s(z_a)$
$p(0) = 0{,}14142$
$f(0) = b(1) = 0{,}5$
$\phi = \pi/2$
$\alpha_0 L = -0{,}5$
10^{-2}
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 33

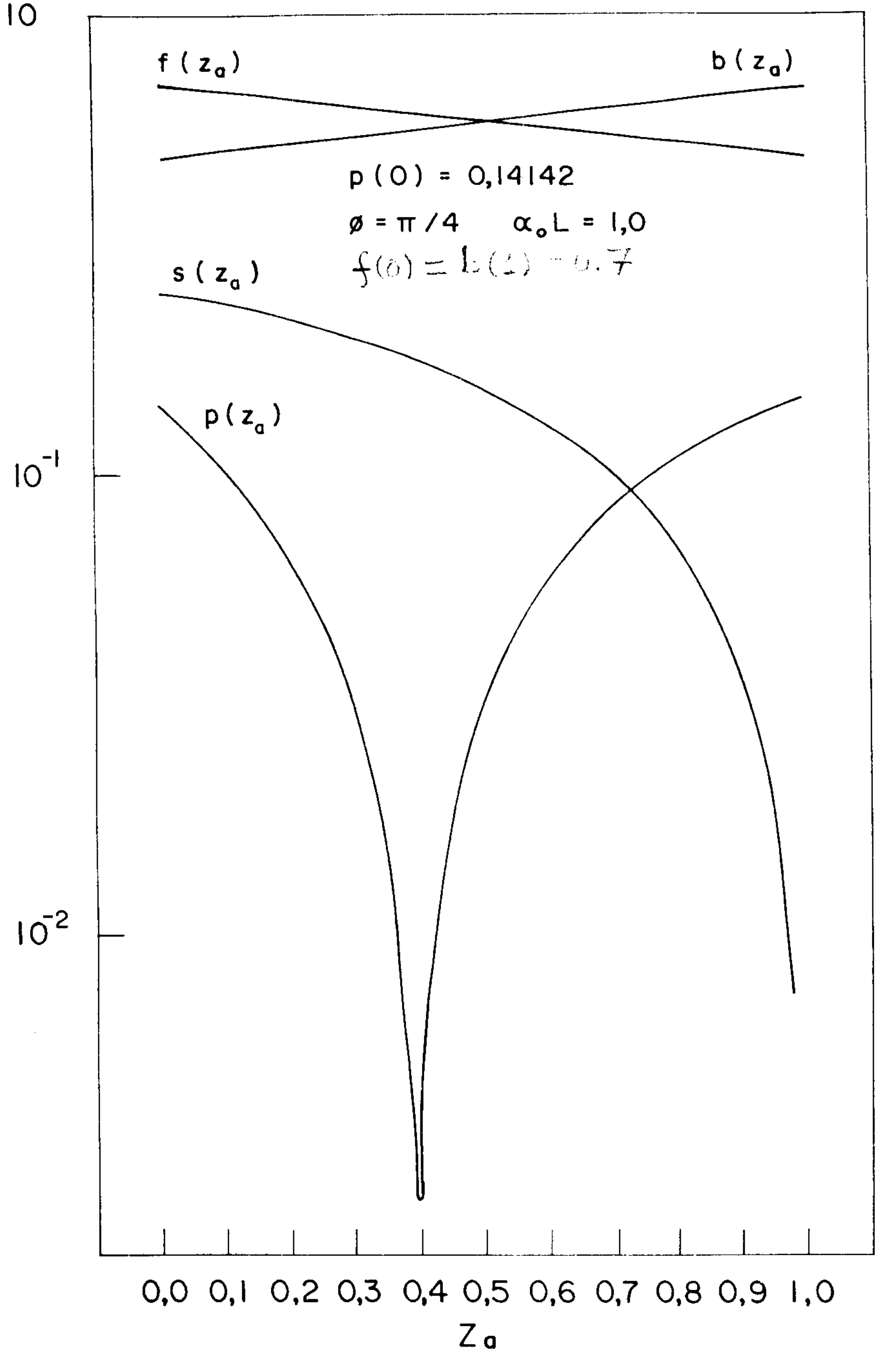
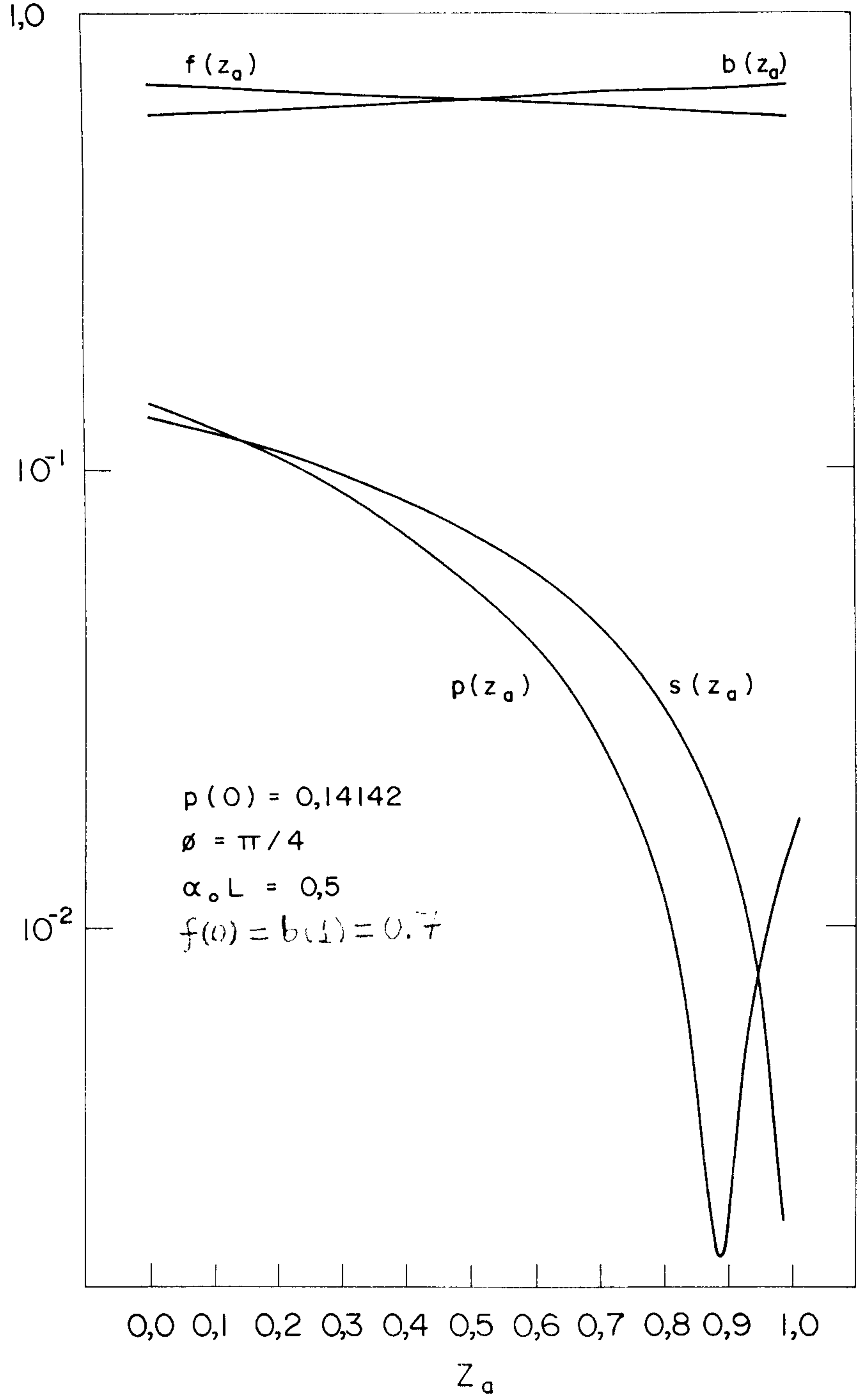

10
f (z_a)
b (z_a)
p (0) = 0,14142
ø = π / 4 α_o L = 1,0
f(0) = b(1) = 0.7
s (z_a)
p (z_a)
10^-1
10^-2
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 34



1,0
$f(z_a)$
$b(z_a)$
10^{-1}
$p(z_a)$
$s(z_a)$
$p(0) = 0{,}14142$
$\phi = \pi/4$
$\alpha_o L = 0{,}5$
10^{-2}
$f(0) = b(1) = 0.7$
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 35

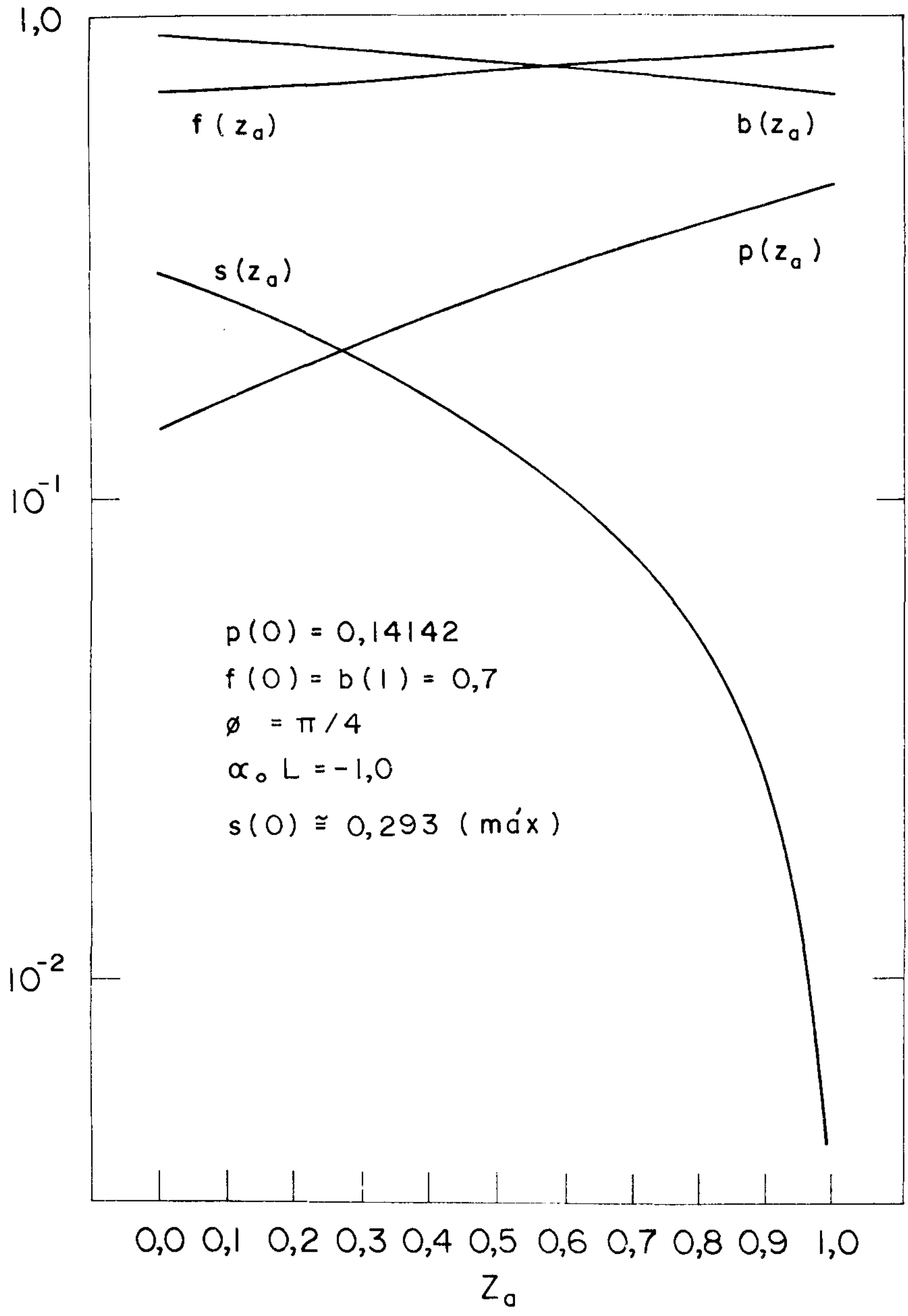
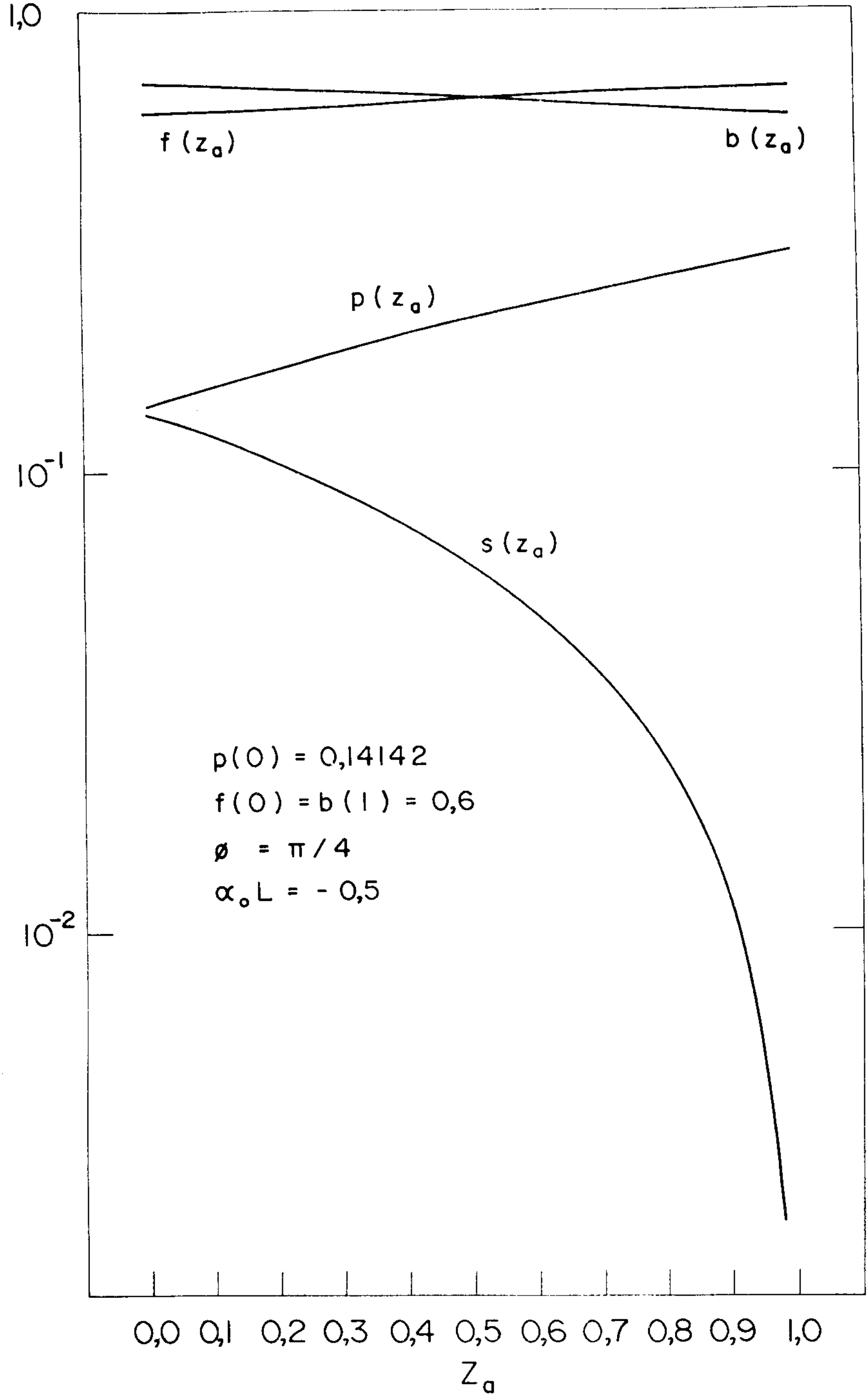
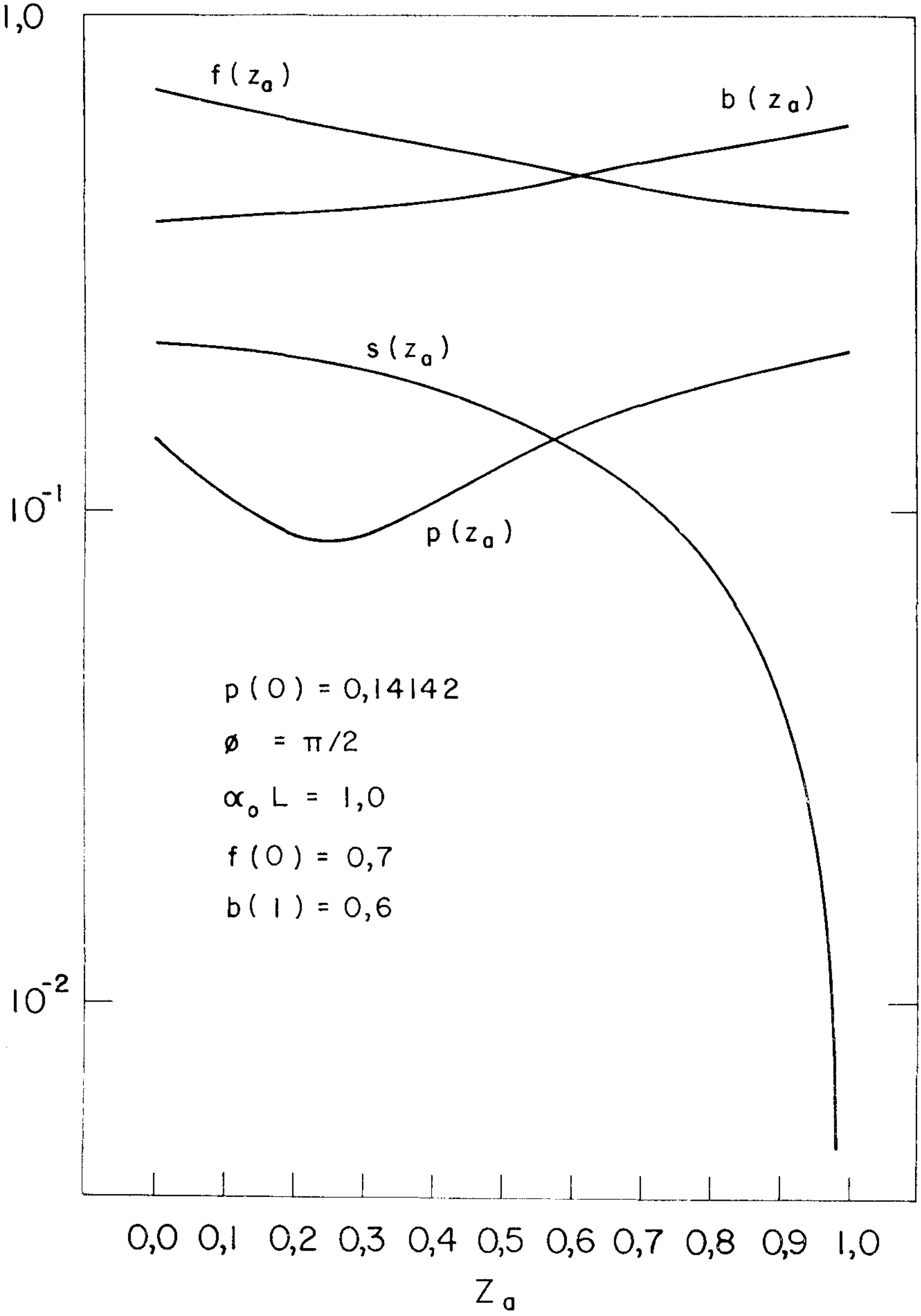

1,0
10^{-1}
10^{-2}
$f(z_a)$
$b(z_a)$
$p(z_a)$
$s(z_a)$
p(0) = 0,14142
f(0) = b(1) = 0,7
$\phi = \pi/4$
$\alpha_o L = -1,0$
s(0) ≅ 0,293 (máx)
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 36



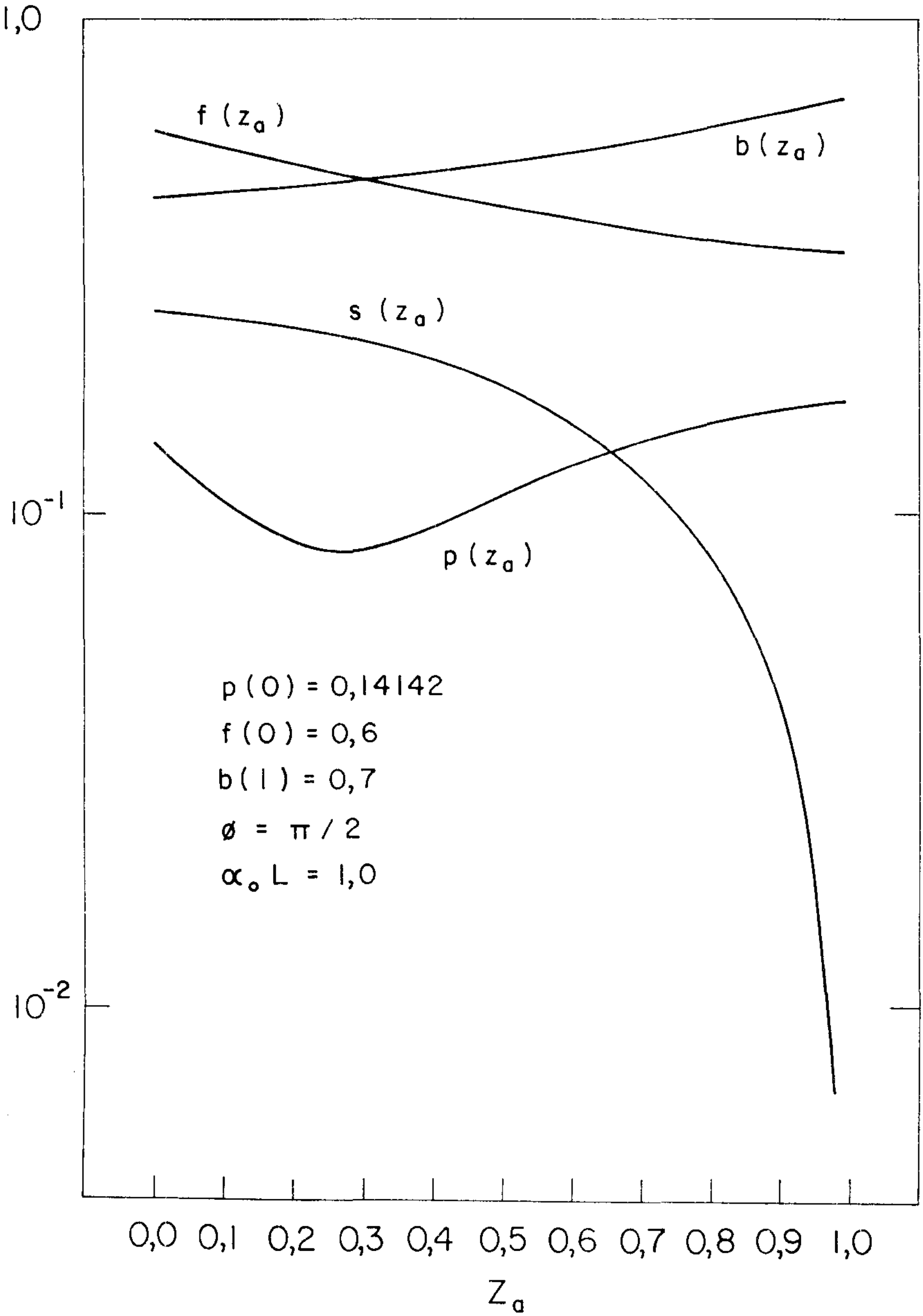
1,0
f (z_a)
b (z_a)
p (z_a)
10^-1
s (z_a)
p(0) = 0,14142
f(0) = b(1) = 0,6
ø = π/4
α_o L = - 0,5
10^-2
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 37



1,0
10^{-1}
10^{-2}
f (z_a)
b (z_a)
s (z_a)
p (z_a)
p (0) = 0,14142
ø = π/2
α_o L = 1,0
f (0) = 0,7
b (1) = 0,6
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 38



1,0
10^{-1}
10^{-2}
f (z_a)
b (z_a)
s (z_a)
p (z_a)
p (0) = 0,14142
f (0) = 0,6
b (1) = 0,7
ø = π / 2
α_o L = 1,0
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
Z_a

Fig. 39

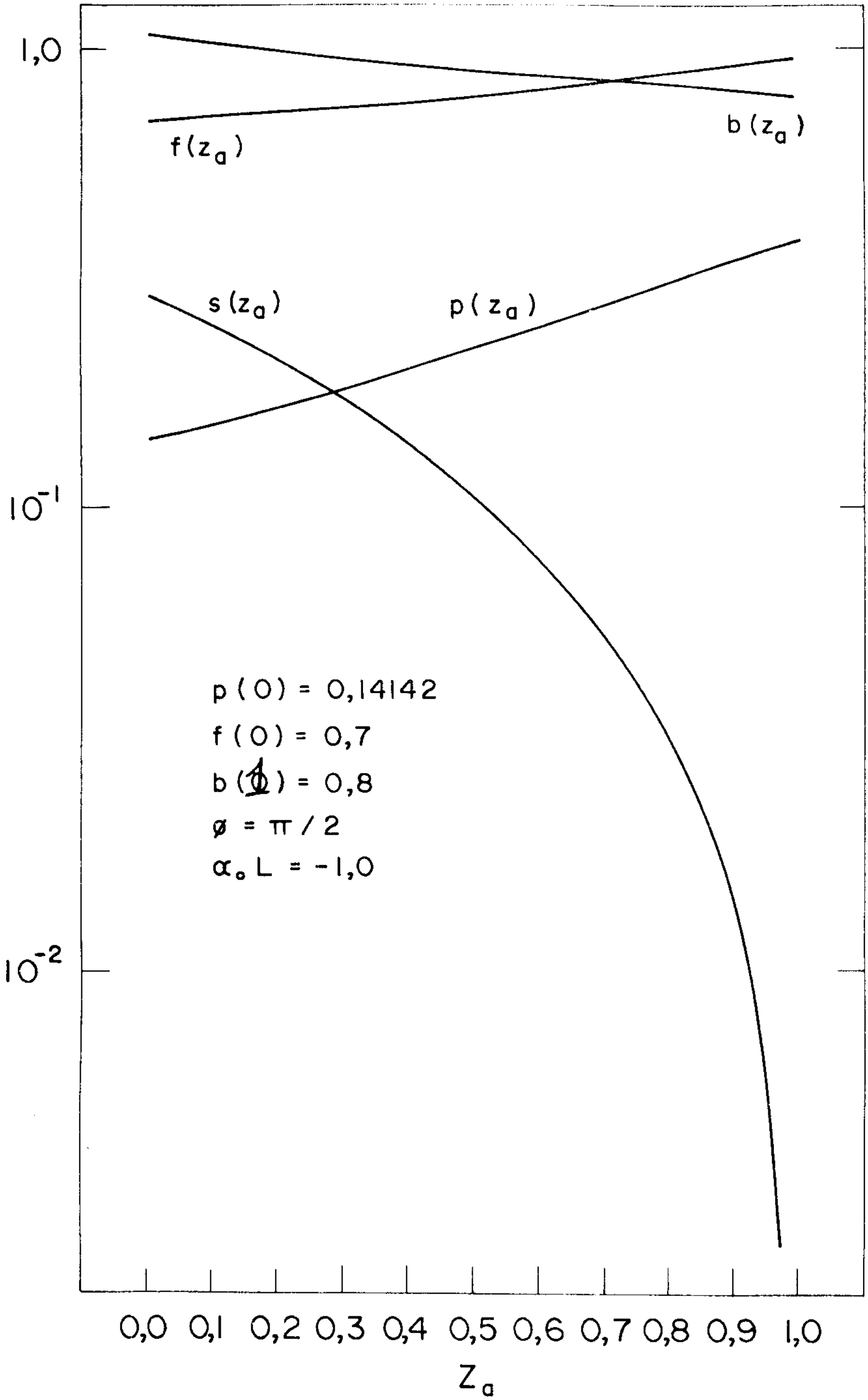
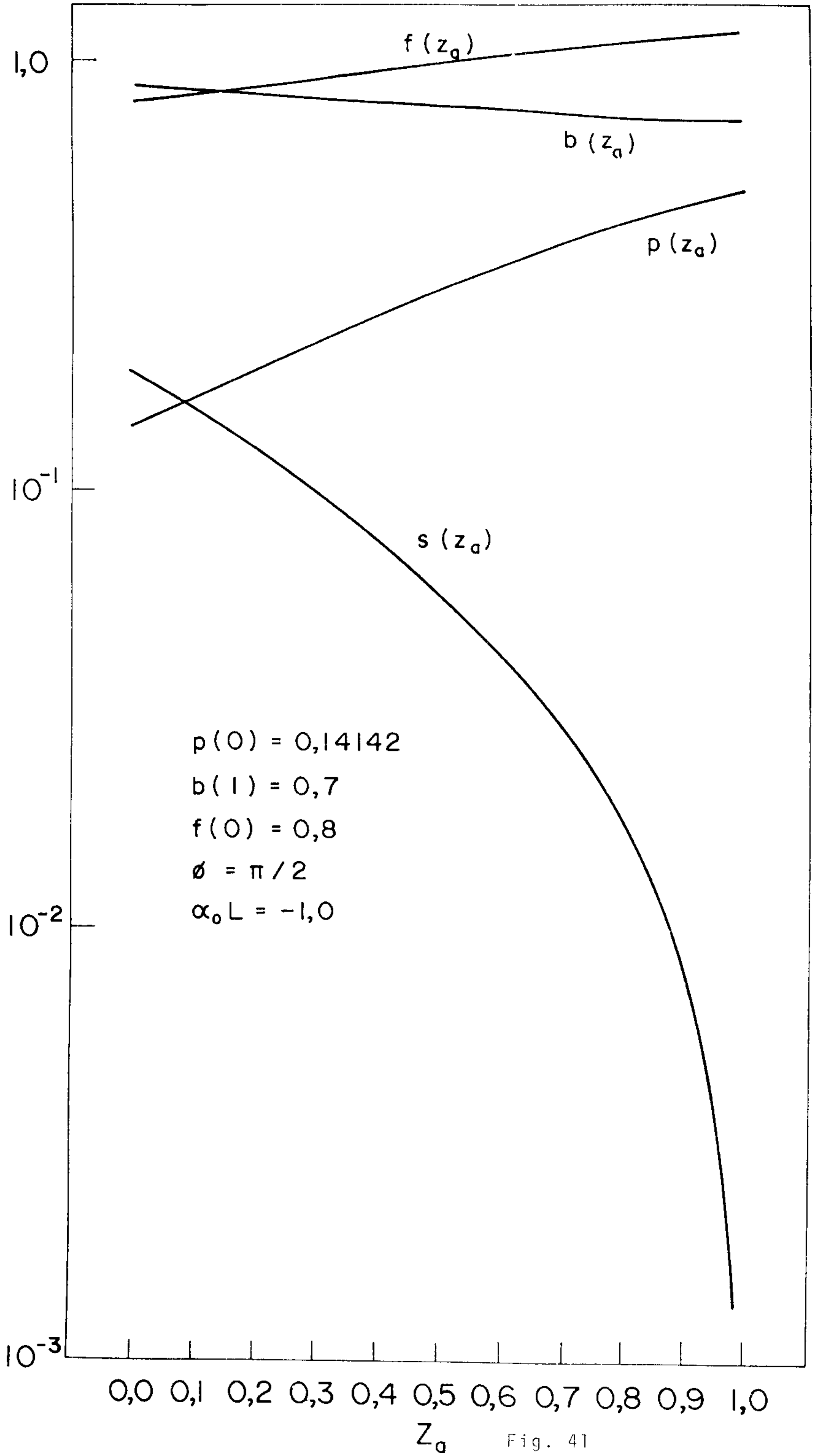
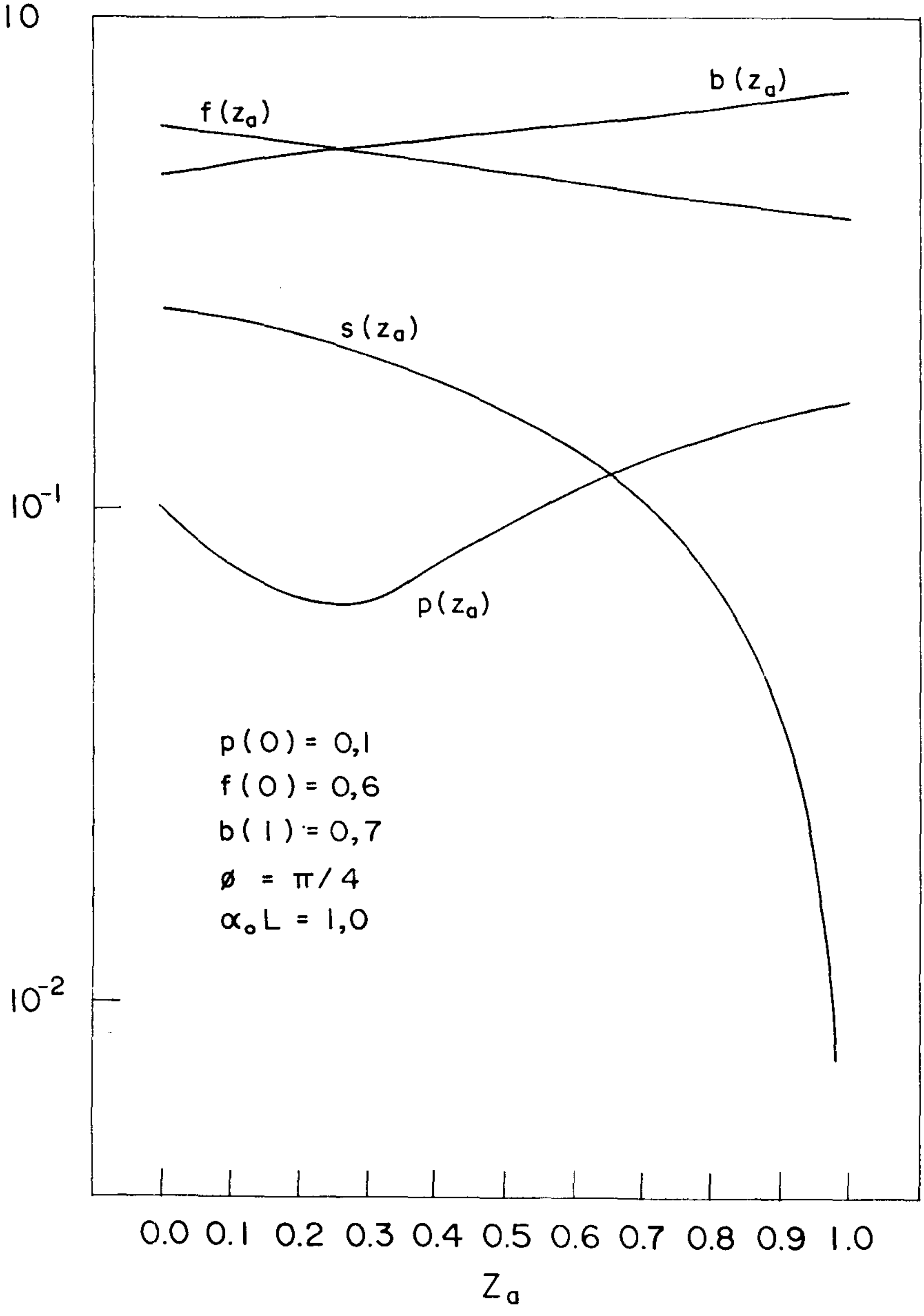

1,0
10^{-1}
10^{-2}
f(z_a)
b(z_a)
s(z_a)
p(z_a)
p(0) = 0,14142
f(0) = 0,7
b(1) = 0,8
ø = π/2
α₀L = -1,0
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
Z_a

Fig. 40



1,0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
f (z_a)
b (z_a)
p (z_a)
s (z_a)
p(0) = 0,14142
b(1) = 0,7
f(0) = 0,8
ø = π/2
$\alpha_0 L$ = -1,0
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 41



10
10^{-1}
10^{-2}
$b(z_a)$
$f(z_a)$
$s(z_a)$
$p(z_a)$
$p(0) = 0,1$
$f(0) = 0,6$
$b(1) = 0,7$
$\phi = \pi/4$
$\alpha_o L = 1,0$
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
Z_a

Fig. 42

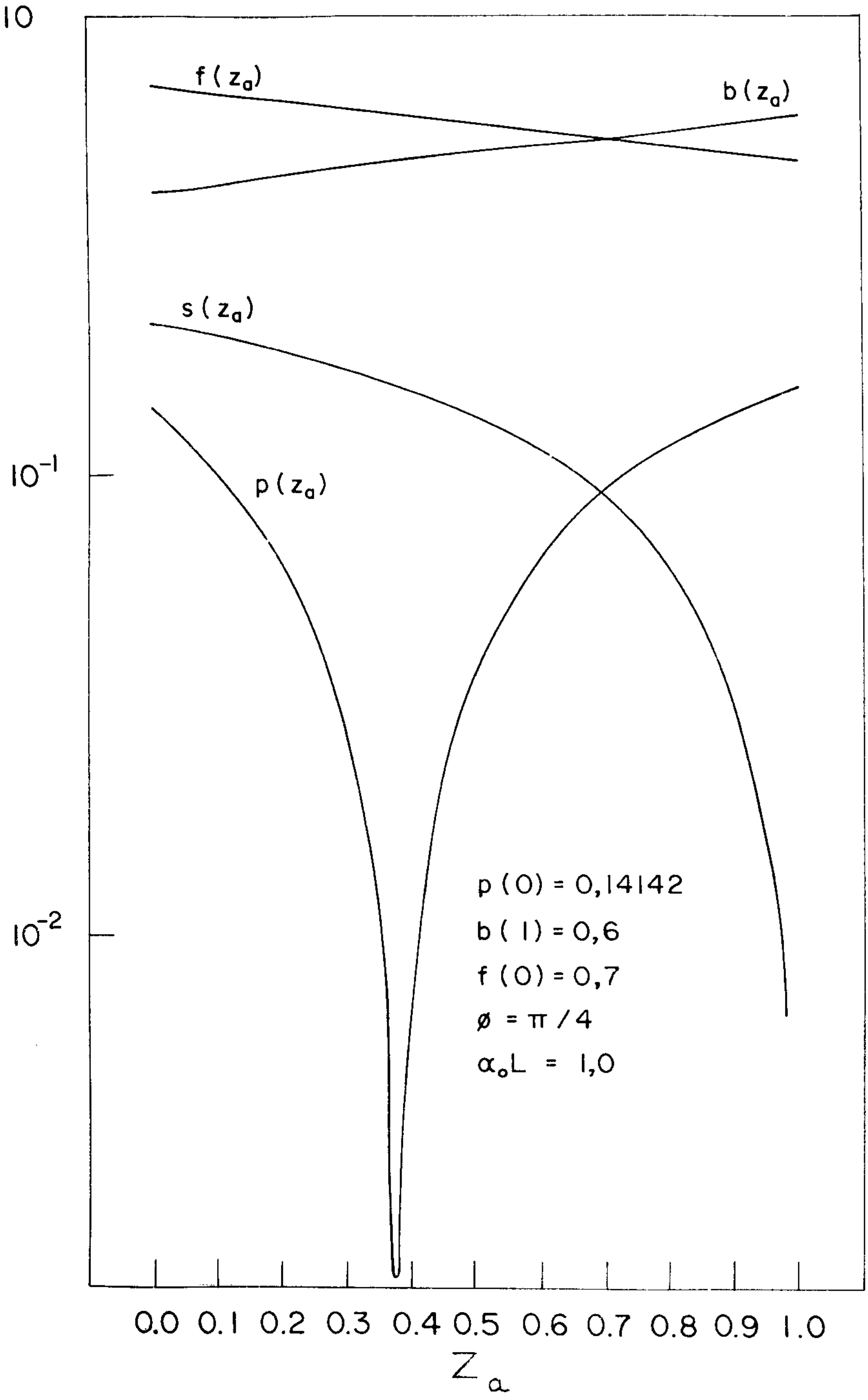

10
10^{-1}
10^{-2}
$f(z_a)$
$b(z_a)$
$s(z_a)$
$p(z_a)$
$p(0) = 0,14142$
$b(1) = 0,6$
$f(0) = 0,7$
$\phi = \pi/4$
$\alpha_o L = 1,0$
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
Z_a

Fig. 43

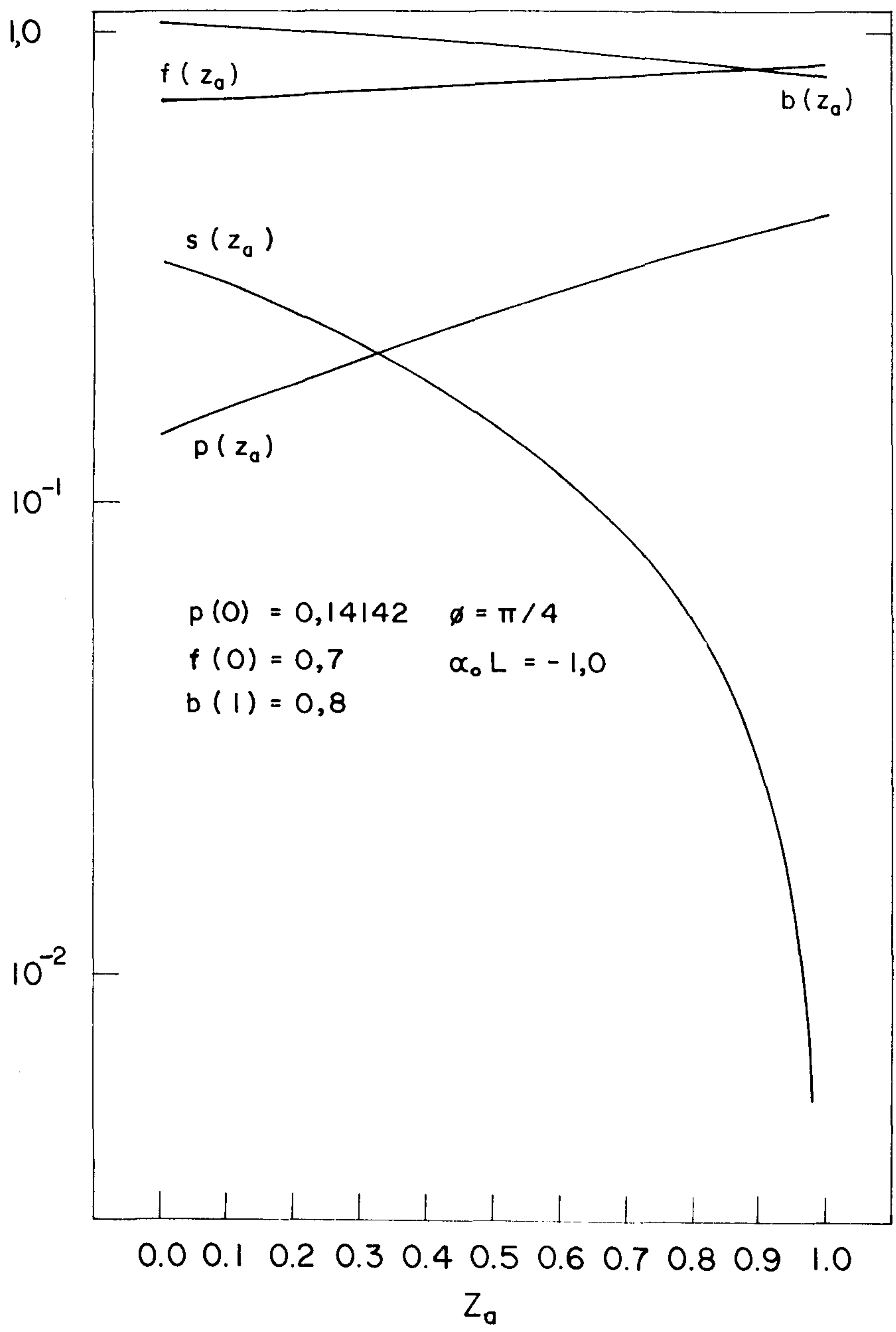

1,0
f (z_a)
b (z_a)
s (z_a)
p (z_a)
10^{-1}
p (0) = 0,14142
ø = π / 4
f (0) = 0,7
$\alpha_o L$ = - 1,0
b (1) = 0,8
10^{-2}
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
Z_a

Fig. 44

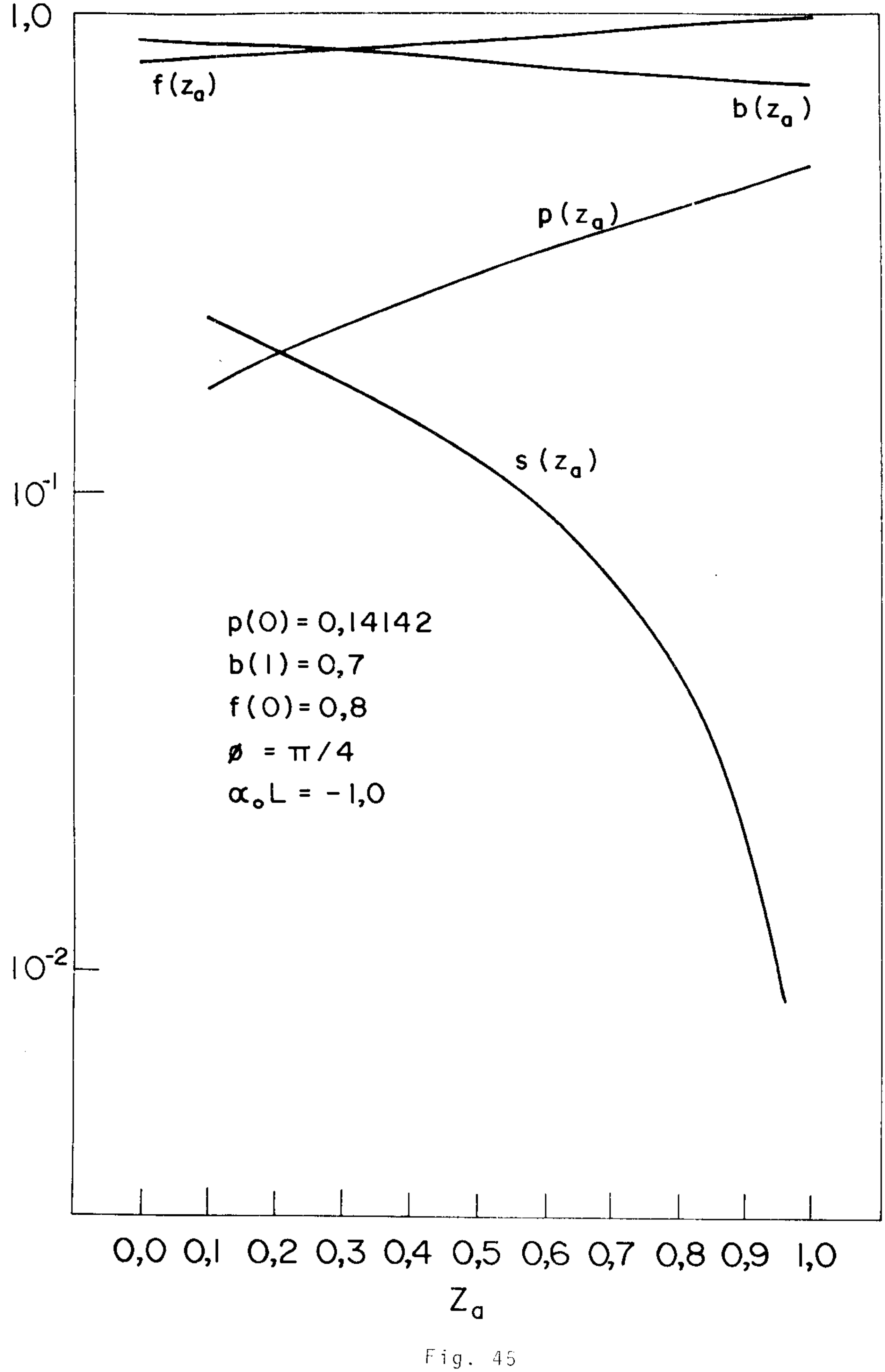
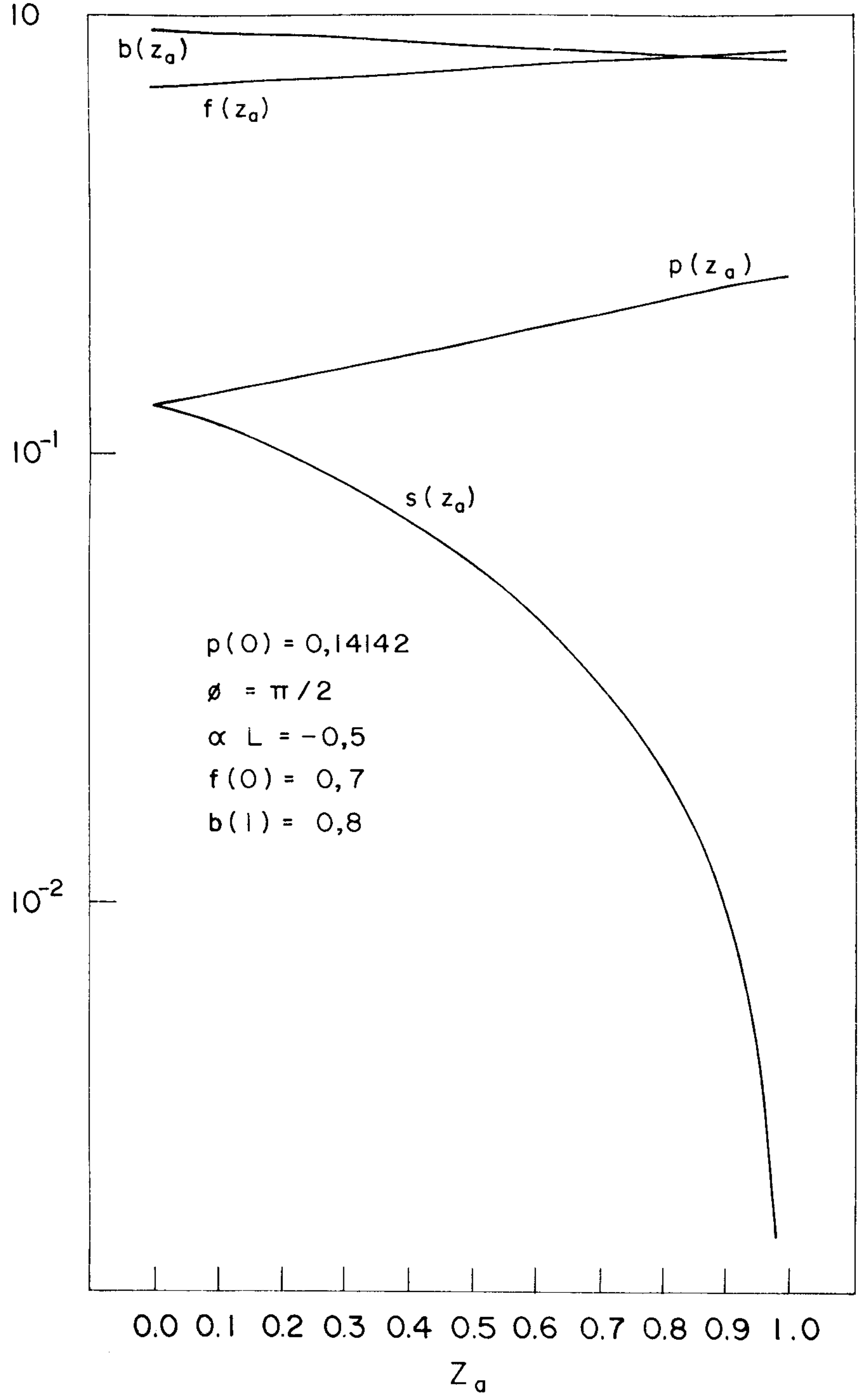
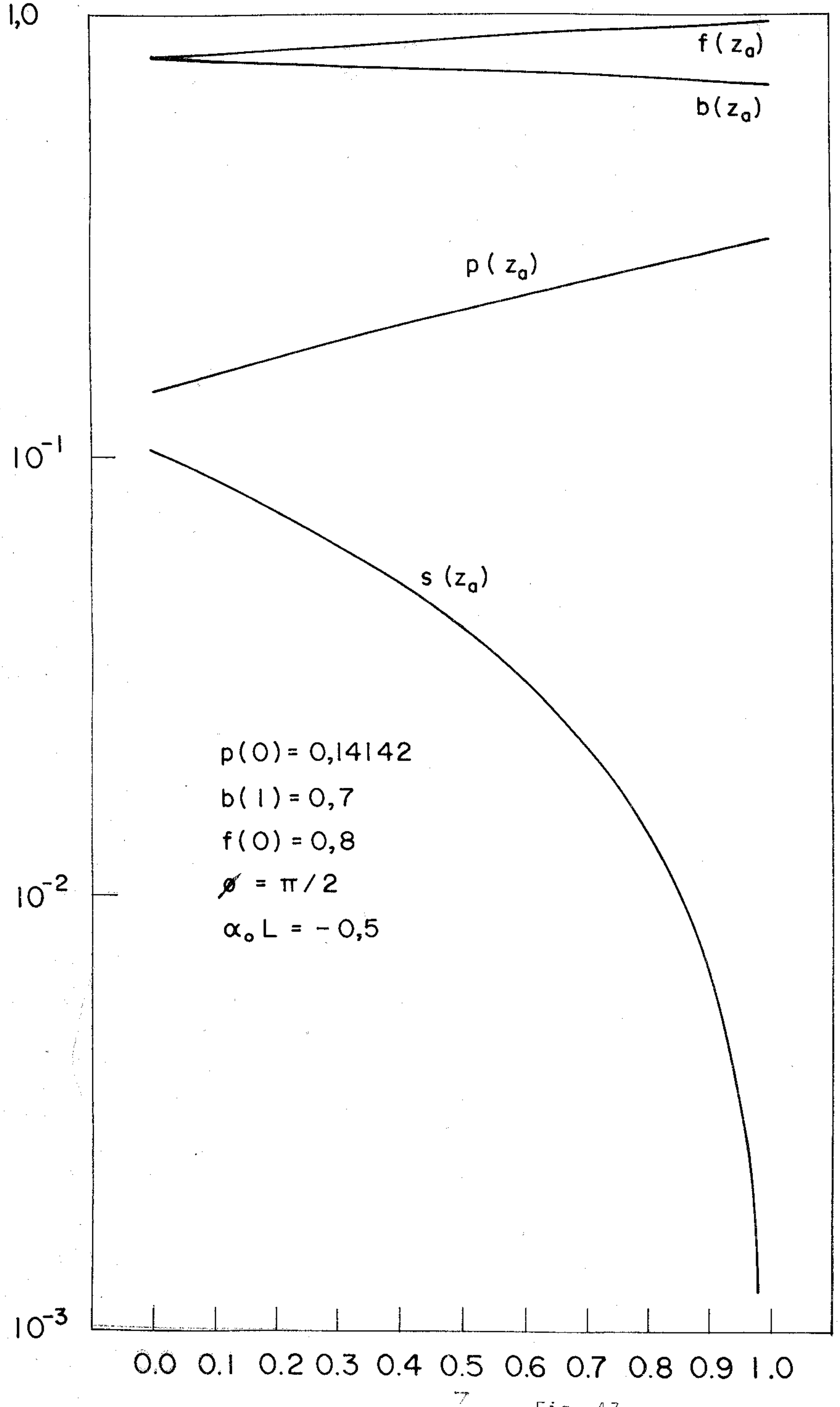

1,0
10^{-1}
10^{-2}
f (z_a)
b (z_a)
p (z_a)
s (z_a)
p(0) = 0,14142
b(1) = 0,7
f(0) = 0,8
ø = π/4
α_o L = - 1,0
0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
Z_a

Fig. 45



10
b(z_a)
f(z_a)
p(z_a)
10^-1
s(z_a)
p(0) = 0,14142
ø = π/2
α L = −0,5
f(0) = 0,7
b(1) = 0,8
10^-2
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
Z_a

Fig. 46



1,0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$f(z_a)$
$b(z_a)$
$p(z_a)$
$s(z_a)$
$p(0) = 0,14142$
$b(1) = 0,7$
$f(0) = 0,8$
$\phi = \pi/2$
$\alpha_o L = -0,5$
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
z_a

Fig. 47

REFERÊNCIAS

1. J.P. Woerdman, Optics Communications 2, nº 5, 212 (1970).
2. B.Ya. Zel'dovich, V.I. Popovichev, V.V. Ragul'skii e F.S. Faizulov, Sov. Phys. JETP 15, 109 (1972).
3. O.Yu. Nosach, V.I. Popovichev, V.V. Ragul'skii e F.S. Faizulov, Sov. Phys. JETP 16, 435 (1972).
4. A. Yariv, Appl. Phys. Lett. 28, 88 (1976); A. Yariv, J. Opt. Soc. Am. 66, 301 (1976).
5. P.Y. Avizonis, F.A. Hopf, W.D. Bonberger, S.F. Jacobs, A. Tomita e K.W. Womack, Appl. Phys. Lett. 31, 435 (1977).
6. P.D. Maker e R.W. Terhune, Phys. Rev. 137, A801 (1965).
7. A. Yariv, Quantum Electronics, 2ª Edição, 423 (Wiley, New York, 1975).
8. A. Yariv, Quantum Electronics, 2ª Edição, 424 (Wiley, New York, 1975).
9. R.W. Hellwarth, J. Opt. Soc. Am. 67, nº 1, 1 (1977).
10. R.L. Abrams e R.C. Lind, Opt. Lett. 2, 94 (1978).
11. D.G. Steel, R.C. Lind, J.F. Lam, C.R. Giuliano, Appl. Phys. Lett. 35, 376 (1976).
12. S.M. Wandzura, Opt. Lett. 4, 208 (1979).
13. B.I. Stepanov, E.V. Ivakin, A.S. Rubariov, Sov. Phys. Doklady 16, 46 (1971).
14. D.M. Bloom e G.C. Bjorklund, Appl. Phys. Lett. 31, 592 (1977).
15. P.F. Liao, D.M. Bloom e N.P. Economou, Appl. Phys. Lett. 32, 813 (1978).
16. P.F. Liao, D.M. Bloom, Opt. Lett. 3, 1 (1978).
17. R.W. Hellwarth e S.M. Jensen, Appl. Phys. Lett. 32 (3), 166 (1978).

18. R.W. Hellwarth, J. Opt. Soc. Am. 68, 8 (1978).

19. S.M. Jensen e R.W. Hellwarth, Appl. Phys. Lett. 33 (5), 404 (1978).

20. A. Yariv e D.M. Pepper, Opt. Lett. 1, 16 (1977).

21. J.H. Marburger e J.F. Lam, Appl. Phys. Lett. 34 (6), 389 (1979).

22. J.H. Marburger, Appl. Phys. Lett. 32 (6), 372 (1978).

23. A. Yariv, Opt. Comm. 21, 1 (1977).

24. A. Yariv e D.M. Pepper, Opt. Lett. 1, 1 (1977).

25. A. Yariv, J. AuYeung, D. Fekete e D.M. Pepper, Appl. Phys. Lett. 32, 10 (1978).

26. D.M. Pepper, J. AuYeung, D. Fekete e A. Yariv, Opt. Lett. 3, 1 (1978).

27. A. Yariv, Opt. Comm. 25, 1 (1978).

28. J. Nilsen e A. Yariv, Appl. Opt. 15 jan. 1979.

29. A. Yariv, D. Fekete e D.M. Pepper, Opt. Lett. 4, 2 (1979).

30. D.M. Pepper e A. Yariv, Opt. Lett. 5, 2 (1980).

31. A. Yariv, J. Opt. Soc. Am. 66, 4, 301 (1976).

32. A. Gover, C.P. Lee e A. Yariv, J. Opt. Soc. Am. 66, 4, 306 (1976).

33. J.F. Lam e W.P. Brown, Opt. Lett. 5, 61 (1980).

34. J. AuYeung, D. Fekete, D.M. Pepper e A. Yariv, IEEE J. Quantum Electronics QE-15, 1180 (1979); P.A. Belanger, A. Hardy, A.E. Siegman, Appl. Opt. 19, 602 (1980).

35. D.M. Pepper, D. Fekete e A. Yariv, Appl. Phys. Lett. 33, 41 (1978).

36. C.R. Giuliano, Physics Today, pag. 27, Abril 81.

37. D.G. Steel, R.C. Lind, J.F. Lam e C.R. Giuliano, Appl. Phys. Lett. 35 (5), 376 (1979).

38. A. Yariv, IEEE J. Quantum Electronics, QE-14, 650 (1978).

39. Erik Bochove e Ramakant Srivastava, Artigo de Revisão, publicado pelo departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas (1979).

40. D.G. Steel e J.F. Lam, Opt. Lett. 4 (11), 363 (1979).

41. P.G. Harper e B.S. Wherrett, Nonlinear Optics, pag. 309, Academic Press (1977).

ERRATA

As polarizações das quatro ondas não precisam ser necessariamente iguais para que se possa aplicar o modelo de moléculas de dois níveis de energia. Na verdade um nível ε_2 que possua $m = 1$ e portanto $m_z = 0 \pm 1$, pode ser considerado como um só para efeito de transição com ε_1, desde que estes três sub-níveis sejam igualmente populados em razão do movimento térmico. Esta equalização de população deve entre os sub-níveis ser bem rápida, ou seja, eles tem que estar igualmente populados antes de haver transições entre eles e o nível ε_1.