OPERADOR DE DIRAC, ESPAÇOS DE RIEMANN-CARTAN-WEYL E A NATUREZA DO CAMPO GRAVITACIONAL

Quintino Augusto Gomes de Souza

Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
Orientador

Este exemplar corresponde à versão final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Quintino A. Gomes de Souza e que foi aprovada pela Comissão Julgadora

WRodrigues

19/08/92

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
UNICAMP

OPERADOR DE DIRAC, ESPAÇOS DE RIEMANN-CARTAN-WEYL E A NATUREZA DO CAMPO GRAVITACIONAL

Este exemplar corresponde à versão final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Quintino Augusto Gomes de Souza e que foi aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de de 1992.

Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr.
Orientador

Tese submetida ao Instituto de Física "Gleb Wataghin" da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Julho – 1992

Resumo

Neste trabalho apresentamos a teoria da gravitação de Einstein como uma teoria de campos no sentido de Faraday, isto é, como uma teoria onde o campo gravitacional, como os demais campos físicos, reside no espaço-tempo chato de Minkowski. A maior motivação para a construção da presente teoria vem do fato de que na Relatividade Geral não existem leis de conservação fidedignas para a energia, momento e momento angular do sistema formado pelo campo gravitacional e os campos de matéria. Para implementarmos nossa teoria, desenvolvemos métodos matemáticos novos, que chamamos o formalismo do fibrado de Clifford. Em particular, introduzimos o operador de Dirac fundamental de uma variedade de Riemann-Cartan-Weyl e os operadores de Dirac associados, que desempenham um papel muito importante na teoria. Observamos que a introdução dos operadores de Dirac para espaços de Riemann-Cartan-Weyl que apresentamos nesta tese é novidade, não se tendo conhecimento de que estes operadores tenham sido usados anteriormente na literatura. Diversos outros operadores, como o comutador e o anti-comutador de Dirac e os operadores de Ricci e Einstein, que nâo têm análogos na formulação da geometria diferencial *à la* Cartan também aparecem aqui pela primeira vez. Nossa formulação esclarece muitos resultados de outras tentativas de se formular a teoria da gravitação no espaço-tempo de Minkowski e sugere diversas generalizações da teoria de Einstein. Acreditamos que a teoria apresentada nesta tese esclarece melhor tanto a natureza do campo gravitacional como da estrutura matemática que o descreve.

Abstract

In this work we present a formulation of Einstein's gravitational theory as a field theory in the sense of Faraday, i.e., as a theory in which the gravitational field, like the others physical fields, is defined on the flat Minkowski spacetime. The main motivation for the construction of this theory comes from the fact that in the General Relativity does not exist genuine conservation laws for energy, momentum and angular momentum for the system composed by the gravitational field and the other physical fields. In order to formulate our theory, we develop new mathematical methods, which we callthe Clifford bundle formalism. In particular, we introduce the fundamental Dirac operator of a Riemann-Cartan-Weyl spacetime and the associated Dirac operators, which play an important role in the treory. We observe that the introduction of the Dirac operators for Riemann-Cartan-Weyl spaces presented in this thesis is a novelty and for the best of our knowledge we never saw this operators being used previously in the literature. Several other operators, like the Dirac commutator and anticommutator, the Ricci and the Einstein operators, which do not have analogous in the formulation of the differential geometry *à la* Cartan, also appear here by the first time. Our formulation clarify many results presented in other attempts to formulate the gravitational theory in the Minkowski spacetime and it suggests several possible generalizations of Einstein's theory. We believe that the theory presented in this thesis puts some light on both the physical and mathematical nature of the gravitational field.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr., pelo incentivo, pela atuação decisiva na realização deste trabalho e pela liberdade de ação e pensamento que nos dá a todos, seus orientandos.

Agradeço também aos meus colegas e aos professores do Grupo de Física-Matemática. Menciono especialmente o Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira, José Emílio Maiorino e Jayme Vaz Jr..

Agradeço ainda ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação pelas facilidades colocadas à minha disposição ao longo destes anos. Gostaria de agradecer especialmente os funcionários do Departamento de Matemática Aplicada e do Setor de Datilografia Especializada.

Finalmente agradeço à FAPESP o apoio financeiro na elaboração deste trabalho.

Para Ana (in memoriam), *Fernanda e Pedro*

Índice

Introdução 1

I Geometria Diferencial no Fibrado de Clifford 4

1 Preliminares 5

1. Álgebra Exterior e Álgebras de Clifford 5
   1.1. Álgebra Exterior e Álgebras de Grassmann 5
   1.2. Álgebras de Clifford 7
   1.3. Automorfismos Simétricos e Produtos de Clifford Ortogonais 11
2. Fibrados de Cartan e Hodge 16
   2.1. Fibrado de Cartan 16
   2.2. Fibrado de Hodge 18
   2.3. Geometria Diferencial nos Fibrados de Cartan e Hodge 18

2 O Operador de Dirac 22

1. O Operador de Dirac Fundamental 23
   1.1. Definição; Propriedades Básicas 23
   1.2. Comutador de Dirac e Anticomutador de Dirac 24
   1.3. Operadores de Dirac Associados 27
2. O Operador de Dirac em Espaços de Riemann-Cartan-Weyl 28
   2.1. Definição; Propriedades Básicas 28
   2.2. Torção, Deformação, Cisalhamento e Dilatação de uma Conexão . . 32
   2.3. Equações de Estrutura 35

3 O Quadrado do Operador de Dirac 37

1. Operador de Dirac Fundamental 37
   1.1. D'Alembertiano 37
   1.2. Operador de Ricci 38
2. Operador de Dirac em Espaços de Riemann-Cartan-Weyl 40
   2.1. Espaços de Cartan 40
   2.2. Operadores de Dirac Associados 41

II Teoria do Campo Gravitacional 43

4 Automorfismos Simétricos na Álgebra do Espaço-tempo **44**
1. Formas Bilineares no Espaço-tempo de Minkowski 45
1.1. Reflexões 46
1.2. Dilatações 47
2. Conexões no Espaço-tempo de Minkowski 49
2.1. Conexões de Levi-Civita 49

5 Leis de Conservação em Espaços de Riemann-Cartan **51**
1. Leis de "Conservação" Covariantes 51
1.1. Identidades de Bianchi 51
2. Leis de Conservação Genuínas 55
2.1. Pseudo-potenciais em Relatividade Geral 58

6 Teoria da Gravitação no Espaço-tempo de Minkowski **61**
1. Equações de Einstein 62
1.1. Espaço Livre 62
1.2. Densidade Lagrangeana de Thirring 64
1.3. Equações de Einstein no Fibrado de Clifford 66
2. Teoria da Gravitação no Espaço-tempo de Minkowski 67
2.1. Equações de Campo 69
2.2. Teoria da Gravitação como uma Teoria de Calibre Abeliana 70
2.3. Crítica da Teoria da Gravitação como uma Teoria de Calibre do Grupo SL(2,$\mathbb{C}$) 72
2.4. Possíveis Formas da Lagrangeana Gravitacional para a Teoria de Calibre T(4) 73

Conclusões **74**

Apêndices **77**

A Formalismo Lagrangeano e Teorias de Calibre **77**
1. Princípio da Ação Estacionária e as Equações de Euler-Lagrange 77
1.1. Densidades Lagrangeanas 77
1.2. Variações 77
1.3. Equações de Euler-Lagrange 79
2. Leis de Conservação Associadas à Invariância de Calibre Global 80
2.1. Invariância da Integral de Ação sob Difeomorfismos 81
3. Teorias de Calibre 81
3.1. Teoria de Maxwell como uma Teoria de Calibre 82
3.2. Conexões em Fibrados Vetoriais 83
3.3. Ação para uma Teoria de Yang-Mills 87

B Variação da Lagrangeana de Thirring **92**

Bibliografia **95**

Introdução

...e não estava ainda bem claro para mim, apenas um jovem estudante, o fato de que o acesso ao conhecimento mais profundo dos princípios básicos da física depende dos métodos matemáticos mais complexos.
A. Einstein – Notas Autobiográficas

O objetivo deste trabalho é apresentar uma interpretação para o formalismo da Teoria de Relatividade Geral de Einstein (que é uma teoria do campo gravitacional) como uma teoria de campos nos moldes das demais teoria de campo da física, onde os campos são interpretados no sentido de Faraday e estão definidos em um "espaço-tempo de fundo," fixado *a priori*. Na nossa formulação, o espaço-tempo de fundo adotado será o espaço-tempo de Minkowski.

A principal motivação para a formulação de uma nova teoria gravitacional está no fato de que na Relatividade Geral não existem leis de conservação fidedignas para o sistema constituido do campo gravitacional e dos campos de matéria. (Este resultado fundamental é discutido no Cap. 5)

O trabalho está dividido em duas partes. Na primeira (capítulos 1 a 3), formulamos os conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento da teoria.

No Cap. 1, apresentamos uma rápida introdução aos conceitos fundamentais da teoria das Álgebras de Clifford, mostrando a relação com a Álgebra Exterior e as Álgebras de Grassmann. Introduzimos também os fibrados de Cartan e de Hodge e mostramos como é formulada a Geometria Diferencial dos espaços de Riemann-Cartan-Weyl nestes fibrados. O conceito fundamental de Fibrado de Clifford é introduzido no Cap. 2.

Também no Cap. 1, apresentamos a teoria dos automorfismos simétricos de uma álgebra de Clifford. Os desenvolvimentos apresentados nesta seção são fundamentais para todas as nossas discussões subsequentes.

Nos capítulos 2 e 3, formulamos a teoria dos operadores de Dirac, que agem nas seções do fibrado de Clifford. Introduzimos o operador de Dirac fundamental $\boldsymbol{\partial}$, associado à conexão de Levi-Civita de uma variedade Riemanniana e que constitui o operador de derivação "natural" dentro do fibrado de Clifford da variedade considerada. O operador de Dirac fundamental está associado ao operador de diferenciação exterior d e à coderivada de Hodge δ pela relação $\boldsymbol{\partial} = d - \delta$.

Subsequentemente, generalizamos o operador de Dirac fundamental para um espaço de Riemann-Cartan-Weyl e mostramos a relação deste operador de Dirac "generalizado" com o operador de Dirac fundamental. Os resultados obtidos nos permitem formular a geometria diferencial de uma variedade de Riemann-Cartan-Weyl no fibrado de Clifford.

Mostramos também que em vista dos resultados estabelecidos na teoria dos automorfismos simétricos desenvolvida no Cap. 1, podemos introduzir ainda uma infinidade de outros operadores do tipo do operador de Dirac, um para cada forma bilinear simétrica que se pode definir sobre a variedade. Estes operadores foram denominados de operadores de Dirac associados e sua introdução é indispensáveis para a formulação da nossa teoria.

No decorrer da nossa discussão é introduzida uma série de operadores novos, como o comutador e o anticomutador de Dirac de campos de 1-formas (que são seções do fibrado de Clifford) e os operadores de Ricci e Einstein. Ressaltamos que estes operadores não têm análogos na formulação da geometria diferencial *à la* Cartan e além disto são essenciais para uma formulação concisa da teoria do campo gravitacional no fibrado de Clifford.

A segunda parte do trabalho é dedicada à teoria do campo gravitacional no espaço-tempo chato de Minkowski. A idéia básica para a nossa formulação está contida no Cap. 4, que trata dos automorfismos simétricos na álgebra do espaço-tempo. Mostramos ali como é possível introduzir no espaço-tempo de Minkowski uma infinidade de formas bilineares simétricas a partir da métrica fundamental deste espaço-tempo e que podem servir para representar o campo gravitacional, segundo as idéias apresentadas no Cap. 6.

Mencionamos de passagem que os desenvolvimento matemáticos do Cap. 4 permitem a introdução de infinitos produtos de Clifford (cada um deles associado a uma das infinitas formas bilineares simétricas citadas acima) a partir de uma dada álgebra de Clifford fixada. Esta teoria esclarece alguns resultados recentes encontrados na literatura e, mais importante, sugere possíveis generalizações da teoria gravitacional que desenvolvemos e que serão investigadas oportunamente.

No Cap. 5, estudamos as leis de conservação em espaços de Riemann-Cartan e mostramos de forma definitiva que leis de conservação fidedignas da energia, momento e momento angular só ocorrem em espaços que possuam o número apropriado de vetores de Killing. Este resultado mostra que a Teoria de Relatividade Geral que modela o campo gravitacional gerado por uma dada distribuição de massas por uma variedade Lorentziana não possui, em geral, as citadas leis de conservação.

É oportuno enfatizar que não existe nenhuma evidência empírica da violação dos princípios de conservação. Como afirma o próprio Einstein,[1] o primeiro fato óbvio que uma teoria física deve satisfazer é não contradizer os fatos empíricos. É dentro deste espírito que devem ser avaliados nossos desenvolvimentos. Devemos dizer também que esta questão merece uma consideração crítica por parte daqueles autores que endossam a interpretação geométrica usual da Teoria de Relatividade Geral.

Finalmente, no Cap. 6 apresentamos a formulação da teoria gravitacional no espaço-tempo de Minkowski. Escrevemos explicitamente as equações de campo em duas formas distintas, mas equivalentes, no fibrado de Clifford. Mostramos que a teoria desenvolvida possui uma densidade Lagrangeana de tipo Yang-Mills, que contém um termo de fixação de calibre e um termo de auto-interação. Mostramos ainda que esta teoria da gravitação satisfaz os critérios de ser uma teoria de calibre abeliana, com grupo de calibre T(4), o grupo das translações no $\mathbb{R}^4$. Este resultado concorda com a nossa interpretação do campo gravitacional como deformações na "rede cósmica" no sentido de Zorawski e Kleinert e endossa as crítica de Pommaret com relação ao fato do tensor de energia-momento da matéria no formalismo usual da Relatividade Geral estar associado com rotações ao invés de translações.

Assim, ainda neste capítulo, formulamos uma crítica às apresentações da teoria da gravitação como uma teoria de calibre do grupo SL(2,$\mathbb{C}$) e estudamos também as formas possíveis para a Lagrangeana gravitacional para uma teoria de calibre do grupo T(4).

Nas Conclusões discutimos sucintamente a nossa formulação da teoria do campo gravitacional no espaço-tempo de Minkowski frente a outras teorias que aparecem na literatura.

A tese contém ainda dois apêndices. No apêndice A discutimos o formalismo Lagrangeano e as teorias de calibre, usando a teoria das formas diferenciais e alguns conceitos das teorias de fibrados principais e vetoriais. Esta apresentação é bastante satisfatória do ponto de vista matemático, pois permite, entre outras coisas, introduzir os conceitos de variação vertical e horizontal de campos de p-formas e da densidade Lagrangeana de forma rigorosa.

No Apêndice B, usando as técnicas desenvolvidas no Apêndice A realizamos explicitamente a variação da densidade Lagrangeana de Thirring, que conduz às equações de movimento da nossa teoria.

Finalmente observamos que ao longo deste trabalho estamos usando um sistema de unidades tais que as constantes fundamentais c (velocidade da luz) e G (constante de gravitação universal) têm valor 1.

Parte I

Geometria Diferencial no Fibrado de Clifford

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos recordar rapidamente alguns conceitos matemáticos que serão necessários para o desenvolvimento das idéias deste trabalho.

1. Álgebra Exterior e Álgebras de Clifford

1.1. Álgebra Exterior e Álgebras de Grassmann

a. *Álgebra Exterior*

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n (finita), V^* o seu espaço dual, T^rV o espaço dos tensores r-contravariantes sobre V ($r \geq 0$, $T^0V \equiv \mathbb{R}$, $T^1V \equiv V$) e $T(V)$ a álgebra tensorial de V.

Definimos a *álgebra exterior* de V como a álgebra quociente:

$$\Lambda(V) = \frac{T(V)}{J},$$

onde $J \subset T(V)$ é o ideal bilateral em $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $u \otimes v + v \otimes u$, com $u, v \in V$. Os elementos de $\Lambda(V)$ serão chamados *multivetores*, ou *multiformas*, se V é o dual de algum espaço vetorial especificado previamente.

Denotamos por $\rho : T(V) \to \Lambda(V)$ a projeção canônica de $T(V)$ sobre $\Lambda(V)$. A multiplicação em $\Lambda(V)$ será denotada, como usualmente, por $\wedge : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ e chamada de *produto exterior*. Temos:

$$A \wedge B = \rho(A \otimes B), \tag{1.1}$$

quaisquer que sejam $A, B \in \Lambda(V)$, onde $\otimes : T(V) \to T(V)$ é o produto tensorial usual.

Lembramos que $\Lambda(V)$ é uma álgebra associativa, com unidade, e de dimensão 2^n. Além disto, ela é uma álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, isto é,

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V),$$

com

$$\Lambda^r(V) \wedge \Lambda^s(V) \subset \Lambda^{r+s}(V),$$

$r, s \geq 0$, onde $\Lambda^r(V) = \rho(T^rV)$ é o subespaço $\binom{n}{r}$-dimensional dos *r-vetores* sobre V ($\Lambda^0(V) \equiv \mathbb{R}$, $\Lambda^1(V) \equiv V$ e $\Lambda^r(V) = \{0\}$ se $r > n$).

Se $A \in \Lambda^r(V)$ para algum valor fixo de r ($r = 0, \ldots, n$), então dizemos que A is *homogêneo.* Para quaisquer multivetores homogêneos $A \in \Lambda^r(V)$ e $B \in \Lambda^s(V)$, temos:

$$A \wedge B = (-)^{rs} B \wedge A. \tag{1.2}$$

Todo endomorfismo $\psi : V \to V$ pode ser estendido de maneira única a um homomorfismo $\Lambda\psi : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$, satisfazendo:

$$\Lambda \circ \psi = \psi \circ \rho.. \tag{1.3}$$

A restrição desta aplicação ao subespaço $\Lambda^r(V)$ é denotada $\Lambda^r\psi : \Lambda^r(V) \to \Lambda^r(V)$ e é chamada de *r-ésima potência exterior* da aplicação ψ. Temos:

$$\Lambda^r\psi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_r) = \psi(u_1) \wedge \ldots \wedge \psi(u_r), \tag{1.4}$$

quaisquer que sejam $u_1, \ldots, u_r \in V$. Em particular, $\Lambda^0\psi \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ qualquer que seja ψ. Recordamos que o *determinante* de uma transformação linear $\psi : V \to V$ pode ser definido pela relação:

$$\Lambda^n\psi(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = (\det \psi) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \tag{1.5}$$

onde $\langle e_\mu \rangle$ é uma base qualquer de V.

b. Álgebras de Grassmann

Consideremos agora um espaço vetorial métrico $\langle V, \gamma \rangle$, isto é, munimos o espaço V de um tensor métrico não-degenerado $\gamma \in T^2V^*$ de assinatura (p, q), $p + q = n$.

Chamamos de *operação de abaixamento de índice* induzida por γ ao isomorfismo $\gamma_* : V \to V^*$, definido pela relação:

$$(\gamma_* u)(v) = \gamma(u, v), \tag{1.6}$$

quaisquer que sejam $u, v \in V$. O isomorfismo inverso de γ_* será denotado por $\gamma^* : V^* \to V$ e chamado de *operação de levantamento de índice*; temos:

$$\gamma^* = \gamma_*^{-1}. \tag{1.7}$$

Este isomorfismo induz um tensor métrico $\gamma^{-1} \in T^2V$ sobre o espaço dual de V, definido por:

$$\gamma^{-1}(\alpha, \beta) = \gamma(\gamma^*\alpha, \gamma^*\beta), \tag{1.8}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in V^*$. Chamamos γ^{-1} de *recíproco* do tensor métrico γ. Pode-se mostrar que γ^{-1} tem a mesma assinatura que γ.

Chamamos de *recíproca* de uma transformação linear $\psi : V \to V$ à transformação linear $\psi^{-1} : V^* \to V^*$, definida pela relação:

$$\psi^{-1} \circ \gamma_* = \gamma_* \circ \psi. \tag{1.9}$$

Não há risco de confusão com a *inversa* da transformação ψ, já que esta última é uma transformação de V em V.

Se $\langle e_\mu \rangle \subset V$ é uma base qualquer de V e $\langle \theta^\rho \rangle \subset V^*$ é sua *base dual* em V^* $(\theta^\rho(e_\mu) = \delta^\rho_\mu)$, então denotamos por $\langle e^\rho \rangle \in V$ e por $\langle \theta_\mu \rangle \in V^*$ as bases de V e V^* definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} e^\rho &= \gamma^* \theta^\rho = \gamma^{\rho\sigma} e_\sigma \\ \theta_\mu &= \gamma_* e_\mu = \gamma_{\mu\nu} \theta^\nu, \end{aligned} \tag{1.10}$$

onde $\gamma^{\rho\sigma} = \gamma^{-1}(\theta^\rho, \theta^\sigma)$ e $\gamma_{\mu\nu} = \gamma(e_\mu, e_\nu)$. Chamamos estas bases de de *bases recíprocas* de $\langle e_\mu \rangle$ e $\langle \theta^\rho \rangle$. Note que $\langle \theta_\mu \rangle$ é a base dual de $\langle e^\rho \rangle$.

Podemos usar o tensor métrico γ para construir um produto interno $(\ |\ ) : \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \mathbb{R}$ sobre $\Lambda(V)$, definindo:

$$(A|B) = \det(\gamma(u_i, v_j)), \tag{1.11}$$

se $A = u_1 \wedge \ldots \wedge u_r$ e $B = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$, $u_i, v_i \in \Lambda^1(V)$, $i = 1, \ldots, r$, e

$$(A|B) = 0,$$

se $A \in \Lambda^r(V)$,$B \in \Lambda^s(V)$, $r \neq s$. Este produto é estendido a todos $A, B \in \Lambda(V)$ por linearidade. A álgebra exterior $\Lambda(V)$ munida deste produto interno é chamada de *álgebra de Grassmann* de V e será denotada por $\Lambda(V, \gamma)$.

Se o espaço vetorial métrico $\langle V, \gamma \rangle$ está munido também de uma *orientação*, isto é, de um *n-vetor volume* $\tau \in \Lambda^n(V)$ tal que:

$$(\tau|\tau) = (-)^q, \tag{1.12}$$

então podemos introduzir ainda um isomorfismo natural entre os espaços $\Lambda^r(V)$ e $\Lambda^{n-r}(V)$, chamado de *operador de dualidade de Hodge* (ou de *operador estrela de Hodge*) e denotado por $* : \Lambda^r(V) \to \Lambda^{n-r}(V)$. Este operador é definido pela relação:

$$A \wedge *B = (A|B)\tau, \tag{1.13}$$

quaisquer que sejam $A, B \in \Lambda^r(V)$. Obviamente, este operador é estendido naturalmente a um isomorfismo $* : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ por linearidade. O inverso $*^{-1} : \Lambda^{n-r}(V) \to \Lambda^r(V)$ do operador de dualidade de Hodge é dado por:

$$*^{-1} = (-)^{r(n-r)} \mathrm{sgn}\ \bar{\gamma}\ *, \tag{1.14}$$

onde $\mathrm{sgn}\ \bar{\gamma} = \bar{\gamma}/|\bar{\gamma}|$ denota o sinal do determinante $\bar{\gamma} = \det(\gamma_{\alpha\beta})$.

1.2. Álgebras de Clifford

A *álgebra de Clifford* $C(V, \gamma)$ de um espaço vetorial métrico $\langle V, \gamma \rangle$ é definida como a álgebra quociente[1]

$$C(V, \gamma) = \frac{T(V)}{J(\gamma)},$$

onde $J(\gamma) \subset T(V)$ é o ideal bilateral de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $u \otimes v + v \otimes u - 2\gamma(u, v)$, com $u, v \in V \subset T(V)$. As álgebras de Clifford geradas por formas

[1] Para outras maneiras possíveis de se definir as álgebras de Clifford, vide, por exemplo, [2].

bilineares simétricas também são denominadas de álgebras de Clifford *ortogonais*, a fim de se distinguí-las das álgebras de Clifford *simpléticas*, que são aquelas geradas por formas bilineares anti-simétricas.

A projeção natural de $T(V)$ sobre a álgebra quociente $C(V,\gamma)$ será denotada por $\rho_\gamma : T(V) \to C(V,\gamma)$. A multiplicação em $C(V,\gamma)$ será denotada simplesmente por justaposição e chamada de *produto de Clifford*. Temos:

$$AB = \rho_\gamma(A \otimes B) \tag{1.15}$$

quaisquer que sejam $A, B \in C(V,\gamma)$.

Podemos identificar os subespaços $\mathbb{R}, V \subset T(V)$ com suas imagens em $C(V,\gamma)$. Então, em particular, para quaisquer $u, v \in V \subset C(V,\gamma)$, temos:

$$uv + vu = 2\gamma(u,v). \tag{1.16}$$

Note que como o ideal $J(\gamma) \subset T(V)$ é inomogêneo, de graduação par, ele induz uma graduação $\mathbb{Z}_2$ na álgebra $C(V,\gamma)$, ou seja,

$$C(V,\gamma) = C^+(V,\gamma) \oplus C^-(V,\gamma),$$

com

$$\begin{aligned} C^+(V,\gamma) &= \rho_\gamma(\bigoplus_{r=0}^{\infty} T^{2r}V) \\ C^-(V,\gamma) &= \rho_\gamma(\bigoplus_{r=0}^{\infty} T^{2r+1}V). \end{aligned}$$

Os elementos de $C^+(V,\gamma)$ formam uma subálgebra de $C(V,\gamma)$, chamada de *subálgebra par* de $C(V,\gamma)$.

Enunciamos agora um teorema fundamental concernente à estrutura das álgebras de Clifford reais:[3]

$\boxed{\textbf{Universalidade de } C(V,\gamma)}$ *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra real e associativa com unidade, então cada transformação linear $\psi : V \to \mathcal{A}$ tal que*

$$(\psi(u))^2 = \gamma(u,u)$$

para todo $u \in V$, pode ser estendida de maneira única a um homomorfismo $C_\psi : C(V,\gamma) \to \mathcal{A}$, satisfazendo a relação:

$$\psi = C_\psi \circ \rho_\gamma \tag{1.17}$$

Segue deste resultado que se $\langle V,\gamma\rangle$ e $\langle V',\gamma'\rangle$ são dois espaços vetoriais métricos e $\psi : V \to V'$ é uma transformação linear tal que:

$$\gamma'(\psi(u),\psi(v)) = \gamma(u,v) \tag{1.18}$$

quaisquer que sejam $u, v \in V$, então existe um homomorfismo $C_\psi : C(V,\gamma) \to C(V',\gamma')$ entre suas álgebras de Clifford, satisfazendo:

$$C_\psi \circ \rho_\gamma = \rho_{\gamma'} \circ \psi. \tag{1.19}$$

Além disto, se $\langle V, \gamma \rangle$ e $\langle V', \gamma' \rangle$ são espaços *metricamente isomorfos*,[2] então suas álgebras de Clifford também são isomorfas.

Observamos ainda que duas álgebras de Clifford $C(V, \gamma)$ e $C(V, \gamma')$ com o mesmo espaço vetorial subjacente V são isomorfas se e somente se as formas bilineares que as induzem têm a mesma assinatura. Portanto, existe essencialmente uma álgebra de Clifford para cada assinatura sobre um espaço vetorial V dado. Em particular, denotamos por $\mathbb{R}_{p,q}$, $p + q = n$, a álgebra de Clifford do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido de um tensor métrico de assinatura (p, q).

Outra consequência (indireta) importante da universalidade é que $C(V, \gamma)$ é isomorfa, como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, à álgebra de Grassmann $\Lambda(V, \gamma)$ (denotamos este fato por $\Lambda(V, \gamma) \hookrightarrow C(V, \gamma)$). Assim, $C(V, \gamma)$ tem dimensão 2^n e dado $A \in C(V, \gamma)$ podemos escrever:

$$A = \sum_{r=0}^{n} \langle A \rangle_r, \tag{1.20}$$

com $\langle A \rangle_r \in \Lambda^r(V) \hookrightarrow C(V, \gamma)$.

Os elementos de $C(V, \gamma)$ também serão chamados de *multivetores* (ou de *multiformas*, dependendo de V). Além disto, se $A = \langle A \rangle_r$ para algum r fixo, também dizemos que A é ***homogêneo***, de *grau* r. Neste caso, também escrevemos $A = A_r \in \Lambda^r(V) \hookrightarrow C(V, \gamma)$. O produto de Clifford de multivetores homogêneos $A_r, B_s \in C(V, \gamma)$ é dado pela relação:

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \ldots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} = \sum_{k=0}^{m} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k}, \tag{1.21}$$

onde $m = \frac{1}{2}(r + s - |r - s|)$.

Podemos introduzir em $C(V, \gamma)$ os seguintes produtos fundamentais: (cf. Hestenes[4])

$\boxed{\textbf{Produto Interior}}$ $\cdot : C(V, \gamma) \times C(V, \gamma) \to C(V, \gamma)$, definido, para multivetores homogêneos, por:

$$\begin{cases} A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, & \text{se} \quad r, s > 0 \\ A_r \cdot B_s = 0, & \text{se} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad s = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Para multivetores quaisquer, $A, B \in C(V, \gamma)$, temos:

$$A \cdot B = \sum_{r,s} \langle AB \rangle_{|r-s|} \tag{1.23}$$

$\boxed{\textbf{Produto Exterior}}$ $\wedge : C(V, \gamma) \times C(V, \gamma) \to C(V, \gamma)$, definido, para multivetores homogêneos, por

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \tag{1.24}$$

Para multivetores quaisquer, $A, B \in C(V, \gamma)$, temos:

$$A \wedge B = \sum_{r,s} \langle AB \rangle_{r+s} \tag{1.25}$$

[2] Chamamos de *isomorfismo métrico* a um isomorfismo entre espaços vetoriais que satisfaça a Eq. (1.18). O termo *isometria* será reservado para designar um isomorfismo métrico de um espaço nele mesmo.

Observamos que o produto exterior é associativo, isto é,

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C. \tag{1.26}$$

Para o produto interior temos apenas as identidades:

$$\begin{aligned} A_r \cdot (B_s \cdot C_t) &= (A_r \wedge B_s) \cdot C_t \text{ for } r + s \leq t, \quad r, s > 0 \\ A_r \cdot (B_s \cdot C_t) &= (A_r \cdot B_s) \cdot C_t \text{ for } r + t \leq s. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Podemos introduzir ainda na álgebra $C(V,\gamma)$ o *automorfismo principal* $^\square : C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$, o *antiautomorfismo principal* (*reversão*) $^\dagger : C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$ e a *conjugação* $^* : C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$, dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned} (AB)^\square &= A^\square B^\square, \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \\ A^* &= (A^\dagger)^\square, \end{aligned} \tag{1.28}$$

quaisquer que sejam $A, B \in C(V,\gamma)$, com $A^\square = A$ se $A \in \mathbb{R}$, $A^\square = -A$ se $A \in V$ e $A^\dagger = A$ se $A \in \mathbb{R}$ ou $A \in V$.

Apresentamos abaixo algumas identidades muito importantes que são satisfeitas pelas operações introduzidas acima e que são válidas para quaisquer $a, a_1, \ldots, a_r \in V$, $A_r \in \Lambda^r(V)$, $B_s \in \Lambda^s(V)$, $r, s \geq 0$: (vide [4])

$$\begin{aligned} &\langle A^\square \rangle_r = \langle A \rangle_r^\square = (-)^r \langle A \rangle_r \\ &\langle A^\dagger \rangle_r = \langle A \rangle_r^\dagger = (-)^{r(r-1)/2} \langle A \rangle_r \\ &A_r \cdot B_s = (-)^{r(s-1)} B_s \cdot A_r; \quad r \leq s \\ &A_r \wedge B_s = (-)^{rs} B_s \wedge A_r \\ &a \cdot A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-)^r A_r a); \quad a \wedge A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-)^r A_r a). \\ &aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r; \quad A_r a = A_r \cdot a + A_r \wedge a \\ &a \cdot (A_r B_s) = (a \cdot A_r) B_s + (-)^r A_r (a \cdot B_s) \\ &\qquad = (a \wedge A_r) B_s - (-)^r A_r (a \wedge B_s) \\ &a \wedge (A_r B_s) = (a \wedge A_r) B_s - (-)^r A_r (a \cdot B_s) \\ &\qquad = (a \cdot A_r) B_s + (-)^r A_r (a \wedge B_s) \\ &a \cdot (a_1 \ldots a_r) = \sum_{k=1}^{r} (-)^{k+1} a \cdot a_k (a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_r) \\ &a \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^{r} (-)^{k+1} a \cdot a_k (a_1 \wedge \ldots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \ldots \wedge a_r) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Notamos também que o produto interior de Clifford para multivetores de mesma graduação está relacionado ao produto interior de Grassmann por:

$$(A_r | B_r) = A_r^\dagger \cdot B_r, \tag{1.30}$$

quaisquer que sejam $A_r, B_r \in \Lambda^r V \hookrightarrow C(V,\gamma), r > 0$.

Se o espaço vetorial métrico $\langle V,\gamma\rangle$ é ainda orientado, então podemos também estender a operação de dualidade de Hodge para a álgebra de Clifford of V, definindo $*: C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$ por:

$$* A = \sum_r *\langle A\rangle_r \,. \tag{1.31}$$

Este operador satisfaz, para quaisquer $A_r \in \Lambda^r(V)$ e $B_s \in \Lambda^s(V)$, $r,s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&A_r \wedge *B_s = B_s \wedge *A_r; \quad r = s\\
&A_r \cdot *B_s = B_s \cdot *A_r; \quad r + s = n\\
&A_r \wedge *B_s = (-)^{r(s-1)} * (A_r^\dagger \cdot B_s); \quad r \leq s\\
&A_r \cdot *B_s = (-)^{rs} * (A_r^\dagger \wedge B_s); \quad r + s \leq n\\
&*A_r = A_r^\dagger \cdot \tau = A_r^\dagger\, \tau; \quad r \geq 1\\
&*\tau = \operatorname{sgn} \bar{\gamma}; \quad *1 = \tau
\end{aligned} \tag{1.32}$$

1.3. Automorfismos Simétricos e Produtos de Clifford Ortogonais

Além do produto de Clifford "natural" de $C(V,\gamma)$, podemos introduzir, nesta mesma álgebra, uma infinidade de outros produtos do tipo do de Clifford, um para cada automorfismo simétrico do seu espaço vetorial subjacente. No que segue, vamos construir explicitamente estes produtos, que desempenharão um papel muito importante na teoria que vamos desenvolver subsequentemente.[3]

Antes de tudo, lembramos que existe uma correspondência um-a-um entre os endomorfismos de $\langle V,\gamma\rangle$ e as formas bilineares sobre V. De fato, a cada endomorfismo $\psi : V \to V$ podemos associar uma forma bilinear $\Psi : V \times V \to \mathbb{R}$, pela relação:

$$\Psi(u,v) = \gamma(u,\psi(v)), \tag{1.33}$$

quaisquer que sejam $u, v \in V$. Seguindo a abordagem de Hestenes ([4], Sec. 3-7) projetamos a forma bilinear Ψ como um "produto interno" de vetores na álgebra $C(V,\gamma)$, definindo:

$$u \circ v \equiv \Psi(u,v) \equiv u \cdot \psi(v), \tag{1.34}$$

quaisquer que sejam $u, v \in V \hookrightarrow C(V,\gamma)$. (Esta notação é conveniente quando estamos lidando com uma única forma bilinear, como é o caso neste trabalho.)

Lembramos ainda que um endomorfismo $\psi : V \to V$ é chamado *simétrico* ou *anti-simétrico* conforme a forma bilinear Ψ associada a ele seja, respectivamente, simétrica ou anti-simétrica. No caso mais geral, podemos escrever Ψ como:

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_-, \tag{1.35}$$

[3] Esta possibilidade de se introduzir produtos de Clifford diferentes na mesma álgebra de Clifford já foi encontrada por Arcuri.[5] Nossos resultados parecem explicar aqueles obtidos por ela, mas não vamos nos deter neste assunto neste trabalho.

com $\Psi_\pm(u,v) = \frac{1}{2}(\Psi(u,v) \pm \Psi(v,u))$, quaisquer que sejam $u, v \in V$. Então, correspondentemente, o endomorfismo ψ associado a Ψ é escrito como a soma de um endomorfismo simétrico e de um anti-simétrico, isto é,

$$\psi = \psi_+ + \psi_-, \tag{1.36}$$

com $\psi_+, \psi_- : V \to V$ representando os endomorfismos associados às formas bilineares Ψ_+ e Ψ_-, respectivamente.

Se $\psi \equiv \psi_+$ é um automorfismo simétrico de $\langle V, \gamma \rangle$, a forma bilinear Ψ associada a ele tem todas as propriedades de um tensor métrico sobre V e pode ser usada para definir uma nova estrutura de álgebra de Clifford $C(V, \Psi)$. Pode-se mostrar facilmente que $C(V, \Psi)$ será isomorfa à álgebra de Clifford original $C(V, \gamma)$ se e somente se existir um automorfismo $\psi^{1/2} : V \to V$ tal que:

$$u \cdot \psi(v) = \psi^{1/2}(u) \cdot \psi^{1/2}(v), \tag{1.37}$$

quaisquer que sejam $u, v \in V$. Transformações que satisfazem esta relação são chamadas de *positivas* e $\psi^{1/2}$ é usualmente chamada de "raiz quadrada" da aplicação ψ. Pode-se mostrar facilmente que toda transformação simétrica positiva possui, no máximo, $2n$ raizes quadradas, sendo todas transformações simétricas, mas apenas uma delas positiva.

Se a Eq. (1.37) é satisfeita, podemos reproduzir o produto de Clifford de $C(V, \Psi)$ na álgebra $C(V, \gamma)$ definindo uma operação $\vee : C(V,\gamma) \times C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$, por:

$$A \vee B = \Lambda\psi^{-1/2}\left(\Lambda\psi^{1/2}(A)\Lambda\psi^{1/2}(B)\right), \tag{1.38}$$

quaisquer que sejam $A, B \in C(V,\gamma)$, onde $\psi^{-1/2}$ é o inverso do automorfismo $\psi^{1/2}$ e por abuso de notação estamos escrevendo $\Lambda\psi^{1/2} : C(V,\gamma) \hookleftarrow \Lambda(V) \to \Lambda(V) \hookrightarrow C(V,\gamma)$ para a aplicação definida de acordo com a Eq. (1.3). Note que, em particular, se $u, v \in V \hookrightarrow C(V,\gamma)$ são vetores, então temos:

$$u \vee v = u \circ v + u \wedge v.$$

Além disto, estabelece-se trivialmente que o produto $\vee : C(V,\gamma) \times C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$ satisfaz todas as propriedades do produto de Clifford que enunciamos anteriormente. De fato, denotando por $\circ : C(V,\gamma) \times C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$ o "produto interior" induzido por $\vee : C(V,\gamma) \times C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$, ou seja,

$$A \circ B = \sum_{r,s>0} \langle A \vee B \rangle_{|r-s|}, \tag{1.39}$$

obtemos relações análogas àquelas dadas na seção anterior, com o produto interior usual "$\cdot$" substituido por este.

Ainda mais, se fazemos uma mudança na escala de volumes, introduzindo um outro n-vetor volume $\tau_\Psi \in \Lambda^n(V)$ tal que

$$\tau_\Psi^\dagger \circ \tau_\Psi = (-)^q, \tag{1.40}$$

então podemos introduzir também o análogo do operador de dualidade de Hodge para este novo produto de Clifford, definindo $\star : C(V,\gamma) \to C(V,\gamma)$, por:

$$A_r \wedge \star B_r = (A_r^\dagger \circ B_r)\tau_\Psi, \tag{1.41}$$

quaisquer que sejam $A_r, B_r \in \Lambda^r(V) \subset C(V,\gamma)$, $r = 0, \ldots, n$. Naturalmente, esta operação satisfaz relações análogas àquelas dadas pelas Eqs. (1.32). Além disto, este operador está relacionado ao operador de dualidade de Hodge "natural" da álgebra por:

$$\star = \Lambda\psi^{-1/2} * \Lambda\psi^{1/2}. \tag{1.42}$$

Vamos agora estabelecer nossos resultados de uma forma mais operacional. Para isto, lembramos que toda transformação linear pode ser expressa como a composta de transformações elementares dos tipos $R_a : V \to V$ e $S_{ab} : V \to V$, definidas por: ([4], Sec. 3-6)

$$\begin{aligned} R_a(u) &= -aua^{-1} \\ S_{ab}(u) &= u + (u \cdot a)b, \end{aligned} \tag{1.43}$$

qualquer que seja $u \in V$, onde $a, b \in V$ são vetores não-nulos que parametrizam a transformação e $a^{-1} = a/a^2 = a/(a \cdot a)$. Transformações do tipo R_a são chamadas de *reflexões* (ou de *simetrias*). Lembramos que toda isometria de $\langle V, \gamma\rangle$ pode ser escrita como a composta de, no máximo, n reflexões. (Teorema de Cartan-Dieudonné.)

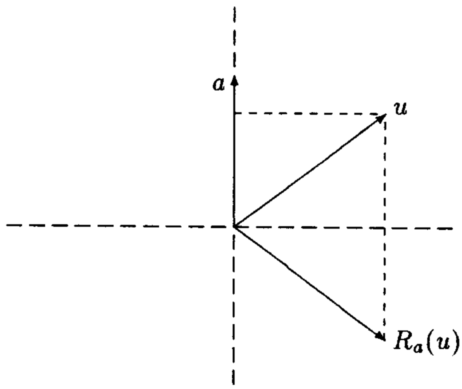

Fig. 1.1. *Reflexão.* Cada vetor $u \in V$ é levado em sua imagem especular pelo hiperplano dos vetores ortogonais a a.

A parte anti-simétrica de uma transformação do tipo S_{ab} será chamada de *torção*[4] e denotada por $S_{[ab]}$. Temos:

$$S_{[ab]}(u) = \frac{1}{2}\left(S_{ab}(u) - S_{ba}(u)\right) = \frac{1}{2} u \cdot (a \wedge b), \tag{1.44}$$

qualquer que seja $u \in V$. Por sua vez, a parte simétrica de S_{ab}, dada por

$$S_{(ab)}(u) = \frac{1}{2}\left(S_{ab}(u) + S_{ba}(u)\right), \tag{1.45}$$

para todo $u \in V$, será chamada de *cisalhamento* no plano $a \wedge b$ se $a \cdot b = 0$, ou de *dilatação* ao longo de a, se $a \wedge b = 0$. Obviamente, uma dilatação ao longo de uma direção a pode ser

[4] Nossa nomenclatura difere um pouco da adotada por Hestenes, de onde estes resultados foram extraidos. O motivo de a termos modificado é que a nomenclatura usada por ele não corresponde aos termos que são empregados normalmente na geometria diferencial e nas teorias de meios contínuos. (Ver Sec. 2.2, Cap. 2)

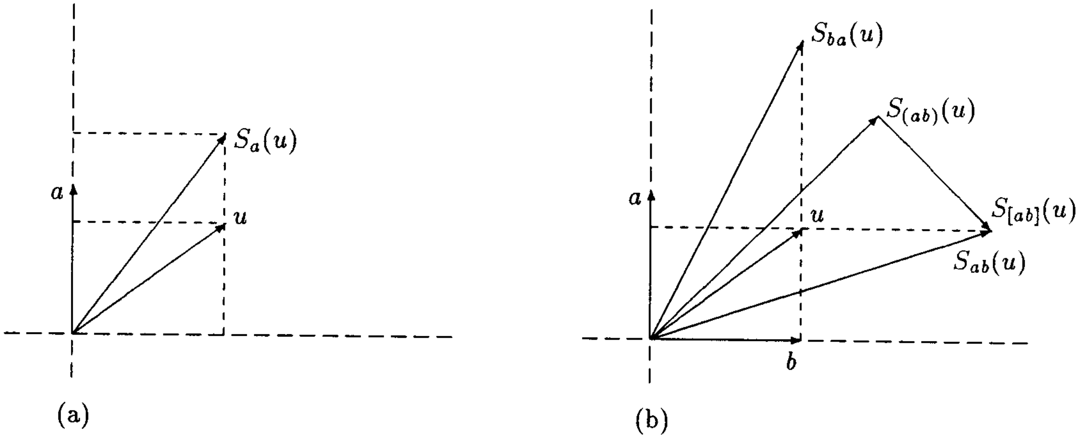

Fig. 1.2. (a) *Dilatação.* A componente, na direção de a, de cada vetor $u \in V$ é multiplicada por $1 + \xi$, sendo mantidas suas componentes nas demais direções. (b) *Torção e Cisalhamento.*

escrita mais simplesmente como:

$$S_a(u) = u + \xi(u \cdot a)\frac{a}{a^2}, \tag{1.46}$$

qualquer que seja $u \in V$, onde $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi > -1$ é um parâmetro escalar. Note que se $\xi = 0$, então S_a é a identidade de V, qualquer que seja a. Se $\xi \neq 0$, então S_a é uma contração $(-1 < \xi < 0)$ ou uma dilatação $(\xi > 0)$, na direção de a, por um fator $1 + \xi$.

Toda transformação simétrica e positiva pode ser escrita como a composição de dilatações ao longo de, no máximo, n direções ortogonais. Para ver isto é suficiente lembrar que para qualquer transformação simétrica ψ podemos encontrar uma base ortonormal $\langle a_\mu \rangle$ de V para a qual (índices alinhados não devem ser somados)

$$\psi(a_\mu) = \lambda_{(\mu)} a_\mu, \tag{1.47}$$

onde $\lambda_{(\mu)} \in \mathbb{R}$ é o *autovalor* de ψ associado ao *autovetor* a_μ $(\mu = 1, \dots, n)$. Em relação à base $\langle a_\mu \rangle$, temos:

$$\psi(u) = u + \xi_{(1)} u^1 a_1 + \cdots + \xi_{(n)} u^n a_n, \tag{1.48}$$

para todo $u = u^\alpha a_\alpha \in V$, onde $\xi_{(\mu)} = \lambda_{(\mu)} - 1$. Então, definindo

$$S_\mu(u) = u + \xi_{(\mu)}(u \cdot a_\mu)\frac{a_\mu}{a_\mu^2}, \tag{1.49}$$

qualquer que seja $u \in V$, segue que:

$$\psi = S_1 \circ \cdots \circ S_n. \tag{1.50}$$

Se além de ser simétrica a transformação ψ é positiva, então temos, em particular, $a_\mu \cdot \psi(a_\mu) = \psi^{1/2}(a_\mu) \cdot \psi^{1/2}(a_\mu) = \lambda_{(\mu)} a_\mu \cdot a_\mu$, onde $\psi^{1/2}$ é a raiz quadrada positiva de ψ.

Então, como a assinatura de uma forma bilinear é preservada por transformações lineares (lei de inércia de Sylvester), concluimos que:

$$\lambda_{(\mu)} = \frac{\psi^{1/2}(a_\mu)\cdot\psi^{1/2}(a_\mu)}{a_\mu \cdot a_\mu} > 0.$$

Isto significa que, na Eq. (1.49), o parâmetro $\xi_{(\mu)} = \lambda_{(\mu)} - 1$ é maior que -1 e portanto satisfaz a definição de dilatação dada pela Eq. (1.46). Note ainda que a raiz quadrada positiva de ψ é dada por $\psi^{1/2} = S_1^{1/2} \circ \cdots \circ S_n^{1/2}$, com

$$S_\mu^{1/2}(u) = u + \zeta_{(\mu)}(u \cdot a_\mu)\frac{a_\mu}{a_\mu^2}, \tag{1.51}$$

qualquer que seja $u \in V$, onde $\zeta_{(\mu)} = -1 + \sqrt{\lambda_{(\mu)}}$.

Com os resultados acima, é trivial dar uma forma operacional ao produto definido pela Eq. (1.38), embora eventualmente isto exija uma grande quantidade de manipulação algébrica.

É interessante notar que a transformação dada pela Eq. (1.46) unifica os conceitos de dilatação, contração, projeção e reflexão se permitirmos que o parâmetro ξ assuma qualquer valor. De fato, para $\xi = -1$, temos:

$$S_a^\xi(u) \equiv P_a(u) = u - (u \cdot a)\frac{a}{a^2}, \tag{1.52}$$

isto é, para $\xi = -1$, $S_a^\xi \equiv P_a$ é a projeção no hiperplano ortogonal a a. Evidentemente, esta transformação é singular.

Por outro lado, se $\xi = -2$, então S_a^ξ é uma reflexão em relação ao hiperplano ortogonal a a. Para ver isto, basta notar que uma reflexão simples em relação ao hiperplano ortogonal a a também pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} R_a(u) &= -aua^{-1} \\ &= -\frac{1}{a^2}\left[a\cdot(u\wedge a) + a\wedge(u\cdot a)\right] \\ &= -\frac{1}{a^2}\left[(a\cdot u)a - a^2u + (a\cdot u)a\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$R_a(u) = u - 2(a\cdot u)\frac{a}{a^2}, \tag{1.53}$$

qualquer que seja $u \in V$. Portanto, $R_a \equiv S_a^{-2}$.

Finalmente, é fácil verificar que, de modo geral, se $\xi < -1$, então

$$S_a^\xi = R_a \circ S_a^{\zeta^2-2} = S_a^{\zeta^2-2} \circ R_a, \tag{1.54}$$

onde $\zeta^2 = |\xi|$. Ou seja, S_a^ξ é a composição de uma reflexão na direção de a com uma dilatação, na mesma direção, por um fator $\zeta^2 - 1$.

Ressaltamos finalmente que embora tenhamos considerado somente as transformações simétricas positivas nas construções acima, o formalismo pode ser adaptado para incluir transformações mais gerais. De fato, poderíamos considerar até mesmo transformações não-simétricas, mas isto requereria ampliar nossa discussão das álgebras de Clifford para incluir também as álgebras de Clifford não-ortogonais. Isto está além dos propósitos deste trabalho. Somente apontamos que, em particular, transformações anti-simétricas devem gerar produtos de Clifford simpléticos.[3]

2. Fibrados de Cartan e Hodge

Nesta seção, discutiremos brevemente os processos de diferenciação nos fibrados de Cartan e Hodge e a formulação da geometria diferencial nestes fibrados. Vamos seguir basicamente a terminologia e a notação usadas por Choquet-Bruhat.[6]

2.1. Fibrado de Cartan

a. Derivada Exterior

Sejam M uma variedade C^∞ de dimensão n, T_x^*M o espaço cotangente de M em um ponto $x \in M$, T^*M o fibrado cotangente de M e $\mathcal{F}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis, a valores reais, com domínio em alguma vizinhança de M.

Definimos o *fibrado de Cartan* sobre o fibrado cotangente de M por:

$$\Lambda(T^*M) = \bigcup_{x\in M} \Lambda(T_x^*M) = \bigcup_{x\in M} \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(T_x^*M),$$

onde $\Lambda(T_x^*M)$, $x \in M$, denota a álgebra exterior do espaço T_x^*M. O sub-fibrado $\Lambda^r(T^*M) \subset \Lambda(T^*M)$ definido por:

$$\Lambda^r(T^*M) = \bigcup_{x\in M} \Lambda^r(T_x^*M)$$

é chamado de *fibrado das r-formas* ($r = 0, \ldots, n$).

No fibrado de Cartan, podemos introduzir o operador fundamental $d : \sec(\Lambda(T^*M)) \to \sec(\Lambda(T^*M))$,[5] chamado de *derivada exterior* e definido pelas relações:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && d(A+B) = dA + dB;\\
&\text{(ii)} && d(A\wedge B) = dA\wedge B + A^{\square}\wedge dB;\\
&\text{(iii)} && df(u) = u(f);\\
&\text{(iv)} && d^2 = 0,
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $A, B \in \sec(\Lambda(T^*M))$, $f \in \mathcal{F}(M)$ e $u \in \sec(TM)$.

b. Formas a Valores Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita m e T_xM o espaço tangente da variedade M em um ponto x. Uma *r-forma* ψ_x, sobre um ponto $x \in M$, *com valores* no

[5] Denotamos por $\sec(\Lambda(T^*M))$ o espaço das seções do fibrado $\Lambda(T^*M)$.

espaço vetorial V, é uma aplicação r-linear totalmente anti-simétrica de T_xM em V, isto é,

$$\begin{array}{rcl}\psi_x : T_xM \times \ldots \times T_xM & \rightarrow & V \\ (v_1, \ldots, v_r) & \mapsto & \psi_x(v_1, \ldots, v_r),\end{array}$$

quaisquer que sejam $v_1, \ldots, v_r \in T_xM$. O espaço vetorial das r-formas a valores em V, sobre um ponto $x \in M$ será denotado por $\Lambda^r_x(M, V)$.

Se $\langle E_A \rangle$, $A = 1, \ldots, m$ é uma base qualquer de V, podemos escrever $\psi_x \in \Lambda^r_x(M, V)$ como:

$$\psi_x(v_1, \ldots, v_r) = \psi^A_x(v_1, \ldots, v_r)E_A, \tag{1.55}$$

onde $\psi^A_x(v_1, \ldots, v_r) \in \mathbb{R}$. A aplicação $(v_1, \ldots, v_r) \mapsto \psi^A_x(v_1, \ldots, v_r)$ é r-linear e totalmente anti-simétrica. Portanto, ela define uma r-forma ordinária (a valores escalares) no ponto x, isto é, temos:

$$\psi_x = \psi^A_x \otimes E_A, \tag{1.56}$$

onde $\psi^A_x \in \Lambda^r_x(M)$, $A = 1, \ldots, m$.

Um *campo de r-formas* sobre M, *a valores em V* é uma aplicação $x \mapsto \psi_x$, qua a cada ponto $x \in U \subset M$ de um aberto U de M associa uma r-forma $\psi_x \in \Lambda^r_x(M, V)$. Temos:

$$\psi = \psi^A \otimes E_A, \tag{1.57}$$

onde $\psi^A \in \Lambda^r(T^*M)$, $A = 1, \ldots, m$ são campos de r-formas ordinários sobre M. Denotamos por $\Lambda^r(M, V)$ o espaço dos campos de r-formas a valores em V, isto é,

$$\Lambda^r(M, V) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^r_x(M, V).$$

Chamamos de *diferencial exterior* de um campo de r-formas $\psi = \psi^A \otimes E_A \in \Lambda^r(M, V)$ ao campo $d\psi \in \Lambda^{r+1}(M, V)$, definido pela relação:

$$d\psi = d\psi^A \otimes E_A. \tag{1.58}$$

Demonstra-se facilmente que esta definição não depende da escolha de uma base para o espaço vetorial V.

Suponhamos agora que o espaço vetorial V está munido de uma estrutura de álgebra de Lie, definida por uma operação $[\ ,\ ] : V \times V \rightarrow V$.

Definimos o *colchete* $[\ ,\ ] : \Lambda^r(M, V) \times \Lambda^s(M, V) \rightarrow \Lambda^{r+s}(M, V)$ de um campo de r-formas e um campo de s-formas sobre M a valores em V pela relação:

$$[\phi, \psi] = (\phi^A \wedge \psi^B) \otimes [E_A, E_B], \tag{1.59}$$

quaisquer que sejam $\phi \in \Lambda^r(M, V)$ e $\psi \in \Lambda^s(M, V)$. É fácil verificar que esta definição não depende da base escolhida para V. Esta operação satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&[\phi_1 + \phi_2, \psi] = [\phi_1, \psi] + [\phi_2, \psi] \\
&[\phi, \psi] = (-)^{rs+1}[\psi, \phi] \\
&(-)^{rt}[\phi, [\psi, \theta]] + (-)^{rs}[\psi, [\theta, \phi]] + (-)^{st}[\theta, [\phi, \psi]] = 0 \\
&d[\phi, \psi] = [d\phi, \psi] + (-)^r[\phi, d\psi],
\end{aligned} \tag{1.60}$$

quaisquer que sejam $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \Lambda^r(M, V)$, $\psi \in \Lambda^s(M, V)$ e $\theta \in \Lambda^t(M, V)$.

2.2. Fibrado de Hodge

Consideremos agora uma variedade métrica e orientada $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau\rangle$, quer dizer, munimos M com um campo tensorial métrico não-degenerado $\gamma \in \sec(T_0^2 M)$ de assinatura (p, q) e com uma n-forma volume $\tau \in \sec(\Lambda^n T^* M)$. Denotamos por $\gamma^{-1} \in \sec(T_2^0 M)$ o *recíproco* do tensor métrico γ e por $(\ |\ ) : \sec(\Lambda(T^*M)) \times \sec(\Lambda(T^*M)) \to \mathcal{F}(M)$ o produto de Grassmann induzido sobre $\Lambda(T^*M)$ pelo tensor métrico γ^{-1}.

Chamamos de *fibrado de Hodge* da variedade $\mathcal{M}$, ao par:

$$\Lambda(\mathcal{M}) = \langle \Lambda(T^*M), (\ |\ )\rangle .$$

Além do operador derivada exterior, está definido no fibrado de Hodge de $\mathcal{M}$ o operador *codiferencial de Hodge* $\delta : \sec(\Lambda(T^*M)) \to \sec(\Lambda(T^*M))$, dado, para multiformas homogêneas, por:

$$\delta = (-)^r *^{-1} d\, * \tag{1.61}$$

Podemos introduzir ainda o operador $\Delta : \sec(\Lambda(T^*M)) \to \sec(\Lambda(T^*M))$, chamado de *Laplaciano de Hodge*, dado por:

$$\Delta = -(d\delta + \delta d). \tag{1.62}$$

Lembramos que a derivada exterior, o codiferencial de Hodge e o Laplaciano de Hodge satisfazem as relações:

$$\begin{aligned}
&dd = \delta\delta = 0; \quad \Delta = (d - \delta)^2 \\
&d\Delta = \Delta d; \quad \delta\Delta = \Delta\delta \\
&\delta * = (-)^{r+1} * d; \quad * \delta = (-)^r d * \\
&d\delta * = * \delta d; \quad * d\delta = \delta d *; \quad * \Delta = \Delta *
\end{aligned} \tag{1.63}$$

2.3. Geometria Diferencial nos Fibrados de Cartan e Hodge

Vamos supor agora que a variedade métrica e orientada $\mathcal{M}$ está munida de uma conexão afim arbitrária ∇. Lembramos que os tensores de *torção* e *curvatura* de $\mathcal{M}$, associados à conexão ∇, são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\alpha, u, v) &= \alpha\left(\nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]\right) \\
\boldsymbol{R}(w, \alpha, u, v) &= \alpha(\nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w),
\end{aligned} \tag{1.64}$$

quaisquer que sejam $u, v, w \in \sec(TM)$ e $\alpha \in \sec(T^*M)$, onde

$$[u, v] = uv - vu \tag{1.65}$$

denota o *colchete de Lie* dos campos vetoriais u e v.

Dado um referencial móvel arbitrário $\langle e_\alpha \rangle$ sobre TM, escrevemos:

$$\begin{aligned}
[e_\alpha, e_\beta] &= c^\rho_{\alpha\beta} e_\rho \\
\nabla_{e_\alpha} e_\beta &= L^\rho_{\alpha\beta} e_\rho,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

onde $c^{\rho}_{\alpha\beta}$ são os *coeficientes de estrutura* do referencial $\langle e_\alpha \rangle$ e $L^{\rho}_{\alpha\beta}$ são os *coeficientes da conexão* neste referencial. Então, as componentes dos tensores de torção e curvatura são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} T^{\rho}_{\alpha\beta} &= L^{\rho}_{\alpha\beta} - L^{\rho}_{\beta\alpha} - c^{\rho}_{\alpha\beta} \\ R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\alpha\beta} &= e_\alpha(L^{\rho}_{\beta\mu}) - e_\beta(L^{\rho}_{\alpha\mu}) + L^{\rho}_{\alpha\sigma}L^{\sigma}_{\beta\mu} - L^{\rho}_{\beta\sigma}L^{\sigma}_{\alpha\mu} - c^{\sigma}_{\alpha\beta}L^{\rho}_{\sigma\mu}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Agora, seja $\langle \theta^\rho \rangle$ o referencial dual de $\langle e_\alpha \rangle$. Então temos:

$$\begin{aligned} d\theta^\rho &= -\frac{1}{2}c^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \\ \nabla e_\alpha \theta^\rho &= -L^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^\beta \end{aligned} \tag{1.68}$$

e introduzimos as *1-formas da conexão* $\omega^{\rho}_{\beta} \in \sec(\Lambda^1(T^*M))$, as *2-formas de torção* $\Theta^\rho \in \sec(\Lambda^2(T^*M))$ e as *2-formas de curvatura* $\Omega^{\rho}_{\beta} \in \sec(\Lambda^2(T^*M))$ associadas a $\langle \theta^\rho \rangle$, pelas relações:

$$\begin{aligned} \omega^{\rho}_{\beta} &= L^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^\alpha, \\ \Theta^\rho &= \frac{1}{2}T^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \\ \Omega^{\rho}_{\mu} &= \frac{1}{2}R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Multiplicando as Eqs. (1.67) por $\frac{1}{2}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ e usando as Eqs. (1.68) e (1.69), obtemos as *Equações de Estrutura de Cartan*:

$$\begin{aligned} D\theta^\rho &\equiv d\theta^\rho + \omega^{\rho}_{\beta} \wedge \theta^\beta = \Theta^\rho \\ D\omega^{\rho}_{\mu} &\equiv d\omega^{\rho}_{\mu} + \omega^{\rho}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}_{\mu} = \Omega^{\rho}_{\mu}, \end{aligned} \tag{1.70}$$

onde $D : \sec(\Lambda(T^*M)) \to \sec(\Lambda(T^*M))$ denota a *derivada exterior covariante* associada à conexão ∇.

Como estamos lidando com uma variedade métrica, é necessário completar as equações de estrutura de Cartan com as equações que estabelecem a relação entre a conexão e a métrica. Para isto, seguindo a nomenclatura usual,[7, 8, 9] escrevemos:

$$Q_{\alpha\beta\sigma} = -\nabla_\alpha \gamma_{\beta\sigma} = -e_\alpha(\gamma_{\beta\sigma}) + \gamma_{\mu\sigma}L^{\mu}_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\mu}L^{\mu}_{\alpha\sigma} \tag{1.71}$$

e chamamos de *ametricidade* o campo tensorial que tem estas componentes.[6] Correspondentemente, introduzimos as *2-formas de ametricidade*, por:

$$\boldsymbol{Q}^\rho = \frac{1}{2}Q^{\rho}_{[\alpha\beta]}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \tag{1.72}$$

onde $Q^{\rho}_{[\alpha\beta]} = \gamma^{\rho\mu}(Q_{\alpha\beta\mu} - Q_{\beta\alpha\mu})$. Multiplicando a Eq. (1.71) por $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ e usando a Eq. (1.70a), obtemos:

$$D\theta_\mu \equiv d\theta_\mu - \omega^{\beta}_{\mu} \wedge \theta_\beta = \Phi_\mu, \tag{1.73}$$

[6] Usamos a notação $\nabla_\sigma t^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} \equiv (\nabla_{e_\sigma} t)^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} \equiv (\nabla t)^{\mu\cdots}_{\sigma\nu\cdots}$ para as componentes da derivada covariante de um campo tensorial t. Isto não deve ser confundido com $\nabla_{e_\sigma} t^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} \equiv e_\sigma(t^{\mu\cdots}_{\nu\cdots})$, que denota a derivada das componentes de t na direção de e_σ.

onde $\langle\theta_\mu\rangle$ é o referencial recíproco de $\langle\theta^\rho\rangle$ e

$$\Phi_\mu = \Theta_\mu - \boldsymbol{Q}_\mu. \tag{1.74}$$

A Eq. (1.73) pode ser usada como o complemento das equações de estrutura de Cartan para o caso de uma variedade métrica.[7]

Além das 2-formas de torção, ametricidade e curvatura, introduzimos a *1-forma de torção* $\boldsymbol{t} \in \Lambda^1(T^*M)$, a *1-forma de Weyl* $\boldsymbol{w}_\sigma \in \sec(\Lambda^1(T^*M))$ e as *1-formas de Ricci* $\boldsymbol{R}_\mu \in \sec(\Lambda^1(T^*M))$, pelas relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= T^\rho_{\alpha\rho}\theta^\alpha \\ \boldsymbol{w} &= \gamma^{\alpha\beta}Q_{\sigma\alpha\beta}\theta^\sigma \\ \boldsymbol{R}_\mu &= R_\mu{}^\rho{}_{\alpha\rho}\theta^\alpha \end{aligned} \tag{1.75}$$

onde $T^\rho_{\alpha\beta}$, $Q_{\sigma\alpha\beta}$ e $R_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta}$ denotam, respectivamente, os tensores de torção, ametricidade e curvatura da conexão considerada. Lembramos também que $R_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha\rho}^{\ \ \ \rho}$ é o chamado *tensor de Ricci* da variedade.

Derivando as Eqs. (1.70) e (1.73) obtemos as *identidades de Bianchi*:

$$\begin{aligned} D\Theta^\rho &= d\Theta^\rho + \omega^\rho_\beta \wedge \Theta^\beta = \Omega^\rho_\beta \wedge \theta^\beta \\ D\Omega^\rho_\mu &= d\Omega^\rho_\mu - \Omega^\rho_\beta \wedge \omega^\beta_\mu + \omega^\rho_\beta \wedge \Omega^\beta_\mu = 0 \\ D\Phi_\mu &= d\Phi_\mu - \omega^\beta_\mu \wedge \Psi_\beta = -\Omega^\beta_\mu \wedge \theta_\beta. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Um par $\langle\gamma, \nabla\rangle$, onde $\gamma \in \sec(T^2_0 M)$ é um tensor métrico e ∇ é uma conexão afim sobre M, será chamado de *estrutura geométrica* (ou simplesmente de *geometria*) sobre M. Lembramos que uma estrutura geométrica está completamente caracterizada quando são conhecidos seus tensores de torção, ametricidade e curvatura.

Qualquer tripla $\langle M, \gamma, \nabla\rangle$, onde $\langle\gamma, \nabla\rangle$ é uma estrutura geométrica sobre M tal que:

$$\nabla\gamma = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}[\nabla] \neq 0, \tag{1.77}$$

é chamada de *espaço de Cartan.* Por outro lado, se

$$\boldsymbol{T}[\nabla] = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\gamma \neq 0, \tag{1.78}$$

então chamamos a tripla $\langle M, \gamma, \nabla\rangle$ de *espaço de Weyl.* Finalmente, se a torção e a ametricidade se anulam simultaneamente, isto é, se

$$\boldsymbol{T}[\nabla] = 0 \quad \text{e} \quad \nabla\gamma = 0, \tag{1.79}$$

então chamamos $\langle M, \gamma, \nabla\rangle$ de *espaço de Riemann* e neste caso o par $\langle\gamma, \nabla\rangle$ é chamado de *estrutura Riemanniana.* Além disto, se os tensores de torção e ametricidade são ambos não-nulos, então chamamos $\langle M, \gamma, \nabla\rangle$ de *espaço de Riemann-Cartan-Weyl.*

[7] Pelo nosso conhecimento, a Eq. (1.73)—e também a "identidade de Bianchi" que segue dela (Eq. 1.76c)—não é encontrada em nenhuma parte da literatura, embora ela pareça ser a extensão mais natural das equações de estrutura de Cartan para o caso de uma variedade métrica.

Lembramos que para cada tensor métrico definido sobre a variedade M existe uma única conexão nas condições das Eqs. (1.79), que é chamada de *conexão de Levi-Civita* da métrica considerada. Com exceção da derivada covariante associada à conexão de Levi-Civita—que daqui por diante denotaremos por D—e de seus coeficientes—que denotaremos por $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$—qualquer outra quantidade relativa a uma estrutura Riemanniana será denotada com um circunflexo sobre o seu símbolo usual.

É importante notar que dada uma variedade métrica qualquer, podemos expressar os coeficientes de uma conexão genérica ∇ em termos dos coeficientes da conexão de Levi-Civita da métrica da variedade. De fato, das Eqs. (1.67a) e (1.71), obtemos a expressão dos coeficientes de uma conexão ∇, com tensores de torção e ametricidade dados, respectivamente, por $T^{\rho}_{\alpha\beta}$ e $Q_{\sigma\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
L^{\rho}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[e_{\alpha}(\gamma_{\beta\sigma}) + e_{\beta}(\gamma_{\sigma\alpha}) - e_{\sigma}(\gamma_{\alpha\beta})\right] \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[\gamma_{\mu\alpha}c^{\mu}_{\beta\sigma} + \gamma_{\beta\mu}c^{\mu}_{\alpha\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}c^{\mu}_{\alpha\beta}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[Q_{\alpha\beta\sigma} + Q_{\beta\sigma\alpha} - Q_{\sigma\alpha\beta}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\gamma_{\mu\alpha}T^{\mu}_{\beta\sigma} + \gamma_{\beta\mu}T^{\mu}_{\alpha\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\alpha\beta}\right].
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Por outro lado, os coeficientes $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ da conexão de Levi-Civita D de γ, são dados por:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[e_{\alpha}(\gamma_{\beta\sigma}) + e_{\beta}(\gamma_{\sigma\alpha}) - e_{\sigma}(\gamma_{\alpha\beta})\right] \\
&- \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[\gamma_{\mu\alpha}c^{\mu}_{\beta\sigma} + \gamma_{\beta\mu}c^{\mu}_{\alpha\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}c^{\mu}_{\alpha\beta}\right],
\end{aligned} \tag{1.81}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
L^{\rho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} &+ \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[Q_{\alpha\beta\sigma} + Q_{\beta\sigma\alpha} - Q_{\sigma\alpha\beta}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\gamma_{\mu\alpha}T^{\mu}_{\beta\sigma} + \gamma_{\beta\mu}T^{\mu}_{\alpha\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\alpha\beta}\right].
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Capítulo 2

O Operador de Dirac

Chamamos de *fibrado de Clifford* da variedade métrica (e orientada) $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau \rangle$ ao fibrado vetorial:

$$\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) = \bigcup_{x \in M} C(T_x^* M, \gamma_x^{-1}),$$

onde $C(T_x^* M, \gamma_x^{-1})$ denota a álgebra de Clifford do espaço vetorial métrico $\langle T_x^* M, \gamma_x^{-1} \rangle$. Pode-se mostrar que:[10]

$$\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) = P_{SO_+(p,q)} \times_{Ad} \mathbb{R}_{p,q},$$

onde $P_{SO_+(p,q)}$ é o *fibrado principal dos referenciais ortonormais* e $Ad : Spin_+(p,q) \to Aut(\mathbb{R}_{p,q})$, $u \mapsto Ad_u$, com $Ad_u(x) = uxu^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}_{p,q}$. Note que podemos introduzir também o sub-fibrado

$$\mathcal{C}\ell_+(\mathcal{M}) = \bigcup_{x \in M} C^+(T_x^* M, \gamma_x^{-1})$$

onde $C^+(T_x^* M, \gamma_x^{-1})$ denota a subálgebra par da álgebra de Clifford $C(T_x^* M, \gamma_x^{-1})$.

Pode-se definir no fibrado de Clifford um operador diferencial $\boldsymbol{\partial}$, chamado aqui de operador de Dirac fundamental, que está intimamente relacionado à conexão de Levi-Civita de $\mathcal{M}$. No que segue, vamos estudar este operador e subsequentemente vamos mostrar que ele pode ser generalizado a conexões mais gerais que a de Levi-Civita, ou seja, a conexões que definem geometrias de Riemann-Cartan-Weyl. Além disto, usando os resultados da Sec. 2.1.c, vamos mostrar também que se pode introduzir uma infinidade de outros operadores do tipo do operador de Dirac, um para cada forma bilinear simétrica sobre $\mathcal{M}$. Estas construções nos permitirão formular a geometria dos espaços de Riemann-Cartan-Weyl no fibrado de Clifford e também generalizar a formulação da geometria diferencial destes espaços para situações nas quais se tem mais de uma estrutura geométrica. Alguns conceitos geométricos novos, como o comutador e o anticomutador de Dirac serão introduzidos e também apresentaremos uma nova decomposição de uma conexão afim genérica, identificando alguns novos tensores que são importantes para o entendimento da formulação da teoria do campo gravitacional no espaço chato e outros tópicos relacionados encontrados na literatura.

1. O Operador de Dirac Fundamental

1.1. Definição; Propriedades Básicas

Dado $u \in \sec(TM)$ e $\tilde{u} \in \sec(T^*M) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, considere a aplicação tensorial $\psi \mapsto \tilde{u}D_u\psi$, $\psi \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$. Como $D_u J(\gamma^{-1}) \subseteq J(\gamma^{-1})$, onde $J(\gamma^{-1})$ é o ideal usado na definição de $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$, a noção de derivada covariante (relacionada à conexão de Levi-Civita) passa ao fibrado quociente $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ e podemos definir o *operador de Dirac fundamental* (ou *derivada de Dirac fundamental*)

$$\boldsymbol{\partial} = \mathrm{Tr}(\tilde{u}\, D_u).$$

Se $\langle\theta^\alpha\rangle$ é um referencial móvel sobre T^*M, dual de um referencial $\langle e_\alpha\rangle$ sobre TM, temos:

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^\alpha\, D_{e_\alpha} \tag{2.1}$$

Para cada $A \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, temos:

$$\boldsymbol{\partial} A = \theta^\alpha(D_{e_\alpha}A) = \theta^\alpha \cdot (D_{e_\alpha}A) + \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha}A)$$

e então definimos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial} \cdot A &= \theta^\alpha \cdot (D_{e_\alpha}A) \\ \boldsymbol{\partial} \wedge A &= \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha}A), \end{aligned}$$

a fim de termos

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial}\cdot + \boldsymbol{\partial}\wedge \tag{2.2}$$

É fácil mostrar que os operadores $\boldsymbol{\partial}\cdot$ e $\boldsymbol{\partial}\wedge$ satisfazem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\partial} \wedge (A \wedge B) = (\boldsymbol{\partial} \wedge A) \wedge B + A^\square \wedge (\boldsymbol{\partial} \wedge B) \\ &\boldsymbol{\partial} \cdot (A_r \cdot B_s) = (\boldsymbol{\partial} \wedge A_r) \cdot B_s + A_r^\square \cdot (\boldsymbol{\partial} \cdot B_s); \quad r+1 \leq s \\ &\boldsymbol{\partial}\cdot * = (-)^r * \boldsymbol{\partial}\wedge; \quad *\boldsymbol{\partial}\cdot = (-)^{r+1}\boldsymbol{\partial}\wedge * \end{aligned} \tag{2.3}$$

Além destas identidades, temos o seguinte resultado fundamental:[10, 11, 12]

Proposição 2.1 *O operador de Dirac fundamental $\boldsymbol{\partial}$ está relacionado à derivada exterior d e ao codiferencial de Hodge δ por:*

$$\boldsymbol{\partial} = d - \delta, \tag{2.4}$$

isto é, temos $\boldsymbol{\partial}\wedge = d$ e $\boldsymbol{\partial}\cdot = -\delta$.

Prova Se f é uma função, $\boldsymbol{\partial}\wedge f = \theta^\alpha \wedge D_{e_\alpha} f = e_\alpha(f)\theta^\alpha = df$ e $\boldsymbol{\partial}\cdot f = \theta^\alpha \cdot D_{e_\alpha} f = 0$. Para um campo de 1-formas θ^ρ de um referencial móvel sobre T^*M, temos $\boldsymbol{\partial} \wedge \theta^\rho = \theta^\alpha \wedge D_{e_\alpha}\theta^\rho = -\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta = -\hat{\omega}^\rho_\beta \wedge \theta^\beta = d\theta^\rho$.

Agora, para um campo de r-formas qualquer $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$, obtemos, usando a Eq. (2.3a), $\boldsymbol{\partial} \wedge \omega = \frac{1}{r!}(d\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \wedge \theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} d\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} +$

1. O Operador de Dirac Fundamental

1.1. Definição; Propriedades Básicas

Dado $u \in \sec(TM)$ e $\tilde{u} \in \sec(T^*M) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, considere a aplicação tensorial $\psi \mapsto \tilde{u}D_u\psi$, $\psi \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$. Como $D_u J(\gamma^{-1}) \subseteq J(\gamma^{-1})$, onde $J(\gamma^{-1})$ é o ideal usado na definição de $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$, a noção de derivada covariante (relacionada à conexão de Levi-Civita) passa ao fibrado quociente $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ e podemos definir o *operador de Dirac fundamental* (ou *derivada de Dirac fundamental*)

$$\boldsymbol{\partial} = \mathrm{Tr}(\tilde{u}\, D_u).$$

Se $\langle\theta^\alpha\rangle$ é um referencial móvel sobre T^*M, dual de um referencial $\langle e_\alpha\rangle$ sobre TM, temos:

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^\alpha\, D_{e_\alpha} \tag{2.1}$$

Para cada $A \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, temos:

$$\boldsymbol{\partial} A = \theta^\alpha(D_{e_\alpha}A) = \theta^\alpha \cdot (D_{e_\alpha}A) + \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha}A)$$

e então definimos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial} \cdot A &= \theta^\alpha \cdot (D_{e_\alpha}A) \\ \boldsymbol{\partial} \wedge A &= \theta^\alpha \wedge (D_{e_\alpha}A), \end{aligned}$$

a fim de termos

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial}\cdot + \boldsymbol{\partial}\wedge \tag{2.2}$$

É fácil mostrar que os operadores $\boldsymbol{\partial}\cdot$ e $\boldsymbol{\partial}\wedge$ satisfazem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\partial} \wedge (A \wedge B) = (\boldsymbol{\partial} \wedge A) \wedge B + A^{\square} \wedge (\boldsymbol{\partial} \wedge B) \\ &\boldsymbol{\partial} \cdot (A_r \cdot B_s) = (\boldsymbol{\partial} \wedge A_r) \cdot B_s + A_r^{\square} \cdot (\boldsymbol{\partial} \cdot B_s); \quad r+1 \leq s \\ &\boldsymbol{\partial}\cdot * = (-)^r * \boldsymbol{\partial}\wedge; \quad * \boldsymbol{\partial}\cdot = (-)^{r+1} \boldsymbol{\partial}\wedge * \end{aligned} \tag{2.3}$$

Além destas identidades, temos o seguinte resultado fundamental:[10, 11, 12]

Proposição 2.1 *O operador de Dirac fundamental $\boldsymbol{\partial}$ está relacionado à derivada exterior d e ao codiferencial de Hodge δ por:*

$$\boldsymbol{\partial} = d - \delta, \tag{2.4}$$

isto é, temos $\boldsymbol{\partial}\wedge = d$ e $\boldsymbol{\partial}\cdot = -\delta$.

Prova Se f é uma função, $\boldsymbol{\partial}\wedge f = \theta^\alpha \wedge D_{e_\alpha} f = e_\alpha(f)\theta^\alpha = df$ e $\boldsymbol{\partial}\cdot f = \theta^\alpha \cdot D_{e_\alpha} f = 0$. Para um campo de 1-formas θ^ρ de um referencial móvel sobre T^*M, temos $\boldsymbol{\partial} \wedge \theta^\rho = \theta^\alpha \wedge D_{e_\alpha}\theta^\rho = -\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta = -\hat{\omega}^\rho_\beta \wedge \theta^\beta = d\theta^\rho$.

Agora, para um campo de r-formas qualquer $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$, obtemos, usando a Eq. (2.3a), $\boldsymbol{\partial} \wedge \omega = \frac{1}{r!}(d\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \wedge \theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} d\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} +$

$\cdots + (-)^{r+1}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_{r-1}}\wedge d\theta^{\alpha_r}) = d\omega$. Finalmente, usando as Eqs. (1.63c) e (2.3c), obtemos $\boldsymbol{\partial}\cdot\omega = -\delta\omega$. ■

Note finalmente que dado um referencial móvel coordenado arbitrário $\langle\theta^\rho \equiv dx^\rho\rangle$ sobre M, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial}\cdot\theta^\rho &= \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}|}}\partial_\sigma(\sqrt{|\bar{\gamma}|}\gamma^{\rho\sigma})\\ \boldsymbol{\partial}\cdot\theta_\sigma &= \Gamma^\rho_{\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}|}}\partial_\sigma(\sqrt{|\bar{\gamma}|}),\end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\partial_\sigma \equiv \partial/\partial x^\sigma$.

1.2. Comutador de Dirac e Anticomutador de Dirac

Dados dois campos de 1-formas $\alpha,\beta \in \sec(T^*M) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, definimos:

$$\begin{aligned}[\![\alpha,\beta]\!] &= (\alpha\cdot\boldsymbol{\partial})\beta - (\beta\cdot\boldsymbol{\partial})\alpha\\ \{\alpha,\beta\} &= (\alpha\cdot\boldsymbol{\partial})\beta + (\beta\cdot\boldsymbol{\partial})\alpha,\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\boldsymbol{\partial}$ denota o operador de Dirac fundamental da variedade. Estas operações serão chamadas, respectivamente, de *comutador de Dirac* e de *anticomutador de Dirac* dos campos α e β. Note que temos as identidades:

$$\begin{aligned}[\![\alpha,\beta]\!] &= \boldsymbol{\partial}\cdot(\alpha\wedge\beta) - [(\boldsymbol{\partial}\cdot\alpha)\wedge\beta - \alpha\wedge(\boldsymbol{\partial}\cdot\beta)]\\ \{\alpha,\beta\} &= \boldsymbol{\partial}\wedge(\alpha\cdot\beta) - [(\boldsymbol{\partial}\wedge\alpha)\cdot\beta - \alpha\cdot(\boldsymbol{\partial}\wedge\beta)].\end{aligned} \tag{2.7}$$

O significado algébrico destas equações é claro: elas estabelecem que o comutador e o anticomutador de Dirac medem o montante pelo qual os operadores $\boldsymbol{\partial}\cdot \equiv -\delta$ e $\boldsymbol{\partial}\wedge \equiv d$ violam a regra de Leibniz quando aplicados, respectivamente, ao produto exterior e ao produto interior de dois campos de 1-formas.

Agora, seja $\langle e_\alpha\rangle$ um referencial móvel qualquer sobre TM, $\langle\theta^\rho\rangle$ o seu referencial dual sobre T^*M e $\langle\theta_\alpha\rangle$ o referencial recíproco de $\langle\theta^\rho\rangle$. Das Eqs. (2.6), obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned}[\![\theta_\alpha,\theta_\beta]\!] &= D_{e_\alpha}\theta_\beta - D_{e_\beta}\theta_\alpha\\ &= (\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha})\theta_\rho\\ &= c^\rho_{\alpha\beta}\theta_\rho,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\{\theta_\alpha,\theta_\beta\} &= D_{e_\alpha}\theta_\beta + D_{e_\beta}\theta_\alpha\\ &= (\Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\beta\alpha})\theta_\rho\\ &= b^\rho_{\alpha\beta}\theta_\rho,\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ são as componentes da conexão de Levi-Civita D de γ, $c^\rho_{\alpha\beta}$ são os coeficientes de estrutura do referencial $\langle\theta^\alpha\rangle$ e estamos introduzindo a notação $b^\rho_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\beta\alpha}$. (O significado destes coeficientes será discutido mais adiante.)

Claramente, a Eq. (2.8) estabelece que o comutador de Dirac é o análogo do colchete de Lie de campos vetoriais. Estas operações têm propriedades similares. Em particular, notamos que o comutador de Dirac satisfaz a *identidade de Jacobi*:

$$[\![\alpha,[\![\beta,\sigma]\!]]\!] + [\![\beta,[\![\sigma,\alpha]\!]]\!] + [\![\sigma,[\![\alpha,\beta]\!]]\!] = 0,$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta, \sigma \in \sec(T^*M) \subset \mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$. Portanto, o comutador de Dirac dá ao fibrado cotangente de M uma estrutura de álgebra de Lie.

O significado geométrico do comutador e do anticomutador de Dirac também são estabelecidos facilmente a partir das Eqs. (2.8) e (2.9): considere duas linhas integrais ℓ_α e ℓ_β dos campos e_α e e_β respectivamente. Suponha que estas linhas se interseccionam em um ponto $p_0 \in M$ e considere dois pontos $p_\alpha \in \ell_\alpha$ e $p_\beta \in \ell_\beta$ sobre estas linhas integrais que estão infinitamente próximos de p_0. Transportando paralelamente o "vetor" θ_α do ponto p_0 até ao ponto p_β, ao longo de ℓ_β, obtemos o "vetor" $\bar{\theta}_\alpha$, dado por:

$$\bar{\theta}_\alpha = \theta_\alpha - \Gamma^\rho_{\beta\alpha}\theta_\rho.$$

Analogamente, transportando paralelamente o "vetor" θ_β do ponto p_0 até ao ponto p_α, ao longo de ℓ_α, obtemos o "vetor" $\bar{\theta}_\beta$, dado por:

$$\bar{\theta}_\beta = \theta_\beta - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\theta_\rho.$$

A diferença $\theta_\beta + \bar{\theta}_\alpha - (\theta_\alpha + \bar{\theta}_\beta) = (\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha})\theta_\rho = [\![\theta_\alpha, \theta_\beta]\!]$ dá a medida da abertura do "paralelograma" formado por θ_α, θ_β, $\bar{\theta}_\alpha$ e $\bar{\theta}_\beta$. Por sua vez, a Eq. (2.9) significa que o

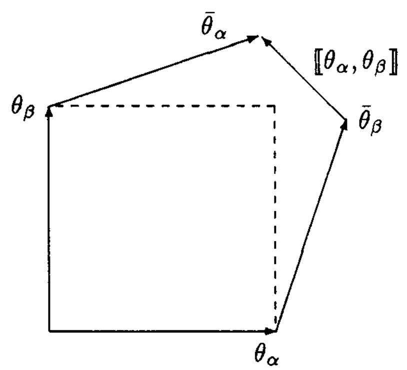

Fig. 2.1. *Comutador de Dirac.*

anticomutador de Dirac mede a taxa de deformação do referencial $\langle\theta_\alpha\rangle$: $\{\theta_\alpha, \theta_\alpha\}$ dá a taxa de dilatação do campo θ_α sob deslocamentos ao longo da suas próprias linhas integrais, enquanto $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$, $\alpha \neq \beta$, dá a taxa de variação do ângulo entre θ_α e θ_β, sob deslocamentos na direção um do outro.

Estabelecemos agora nosso segundo resultado fundamental:

Proposição 2.2 *Os coeficientes $b^\rho_{\alpha\beta}$ do anticomutador de Dirac em um referencial móvel $\langle\theta_\alpha\rangle$ são dados por:*

$$b^\rho_{\alpha\beta} = -(\pounds_{e^\rho}\gamma)_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

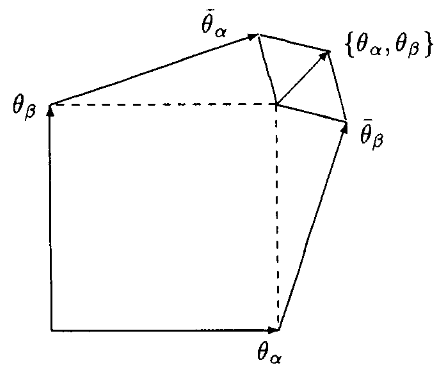

Fig. 2.2. *Anticomutador de Dirac.*

onde $\pounds_{e^\rho}$ denota a derivada de Lie na direção do campo vetorial e^ρ e $\langle e^\rho \rangle$ é o referencial dual de $\langle \theta_\alpha \rangle$.

$\boxed{\textbf{Prova}}$ Os coeficientes $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ da conexão de Levi-Civita de γ são dados por: (Eq. 1.80)

$$\begin{aligned}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[e_\alpha(\gamma_{\beta\sigma}) + e_\beta(\gamma_{\sigma\alpha}) - e_\sigma(\gamma_{\alpha\beta})\right] \\ &- \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}\left[\gamma_{\mu\alpha}c^\mu_{\beta\sigma} + \gamma_{\mu\beta}c^\mu_{\alpha\sigma} - \gamma_{\mu\sigma}c^\mu_{\alpha\beta}\right].\end{aligned} \tag{2.11}$$

Assim,

$$b^\rho_{\alpha\beta} = \gamma^{\rho\sigma}\left[e_\beta(\gamma_{\alpha\sigma}) + e_\alpha(\gamma_{\sigma\beta}) - e_\sigma(\gamma_{\beta\alpha}) - \gamma_{\mu\alpha}c^\mu_{\beta\sigma} - \gamma_{\mu\beta}c^\mu_{\alpha\sigma}\right]. \tag{2.12}$$

Por outro lado, as componentes da derivada de Lie de um campo tensorial arbitrário $\phi = \phi_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta \in \sec(T^2_0 M)$ na direção de um campo vetorial qualquer $v = v^\sigma e_\sigma \in \sec(TM)$, são dadas por:

$$\begin{aligned}\pounds_v \phi &= e_\alpha(\phi_{\mu\beta}v^\mu) + e_\beta(\phi_{\alpha\mu}v^\mu) \\ &- v^\sigma\left[e_\alpha(\phi_{\sigma\beta}) + e_\beta(\phi_{\alpha\sigma}) - e_\sigma(\phi_{\alpha\beta}) + \phi_{\mu\beta}c^\mu_{\sigma\alpha} + \phi_{\alpha\mu}c^\mu_{\sigma\beta}\right].\end{aligned} \tag{2.13}$$

e no caso em que $\phi \equiv \gamma$ e $v \equiv e^\rho = \gamma^{\rho\sigma}e_\sigma$, obtemos, a Eq. (2.10). ■

Em vista do resultado estabelecido pela Eq. (2.10), a tentativa de encontrar (caso exista) um referencial móvel para o qual $b^\rho_{\alpha\beta} = 0$ é equivalente a resolver, localmente, as equações de Killing para a variedade. Por causa disto, vamos nos referir a estes coeficientes como os *coeficientes de Killing* do referencial. Estes coeficientes não têm caráter tensorial: dados dois referenciais móveis $\langle e_\alpha \rangle$ e $\langle e_{\alpha'} \rangle$ sobre M, com $e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'}e_\alpha$, seus coeficientes de Killing $b^\rho_{\alpha\beta}$ e $b^{\rho'}_{\alpha'\beta'}$ estão relacionados por:

$$b^{\rho'}_{\alpha'\beta'} = A^{\rho'}_\rho A^\alpha_{\alpha'}e_\alpha(A^\rho_{\beta'}) + A^{\rho'}_\rho A^\beta_{\beta'}e_\beta(A^\rho_{\alpha'}) + A^{\rho'}_\rho A^\alpha_{\alpha'}A^\beta_{\beta'}b^\rho_{\alpha\beta}, \tag{2.14}$$

onde $A^{\rho'}_\rho = (A^{-1})^\rho_{\rho'}$.

Naturalmente, como as soluções das equações de Killing estão restritas pela estrutura da métrica, tanto quanto pela topologia da variedade, não será possível encontrar, no caso mais geral, nenhum referencial para o qual todos estes coeficientes sejam nulos. (No entanto, sempre é possível encontrar um referencial cujos coeficientes de Killing se anulam ao longo de uma curva escolhida arbitrariamente.)

Note ainda que em vista das Eqs. (2.8) e (2.9) podemos escrever os coeficientes $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ da conexão de Levi-Civita de γ como:

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b^{\rho}_{\alpha\beta} + c^{\rho}_{\alpha\beta}). \tag{2.15}$$

1.3. Operadores de Dirac Associados

Em vista dos resultados estabelecidos na Sec. 2.1.*c*, é claro que além do operador de Dirac fundamental que acabamos de analisar, podemos ainda introduzir no fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ uma infinidade de outros operadores do tipo do operador de Dirac, um para cada forma bilinear simétrica sobre a variedade $\mathcal{M}$.

Daqui por diante, convencionamos denotar por $g \in \sec(T^2_0 M)$ uma forma bilinear não-degenerada, induzida por um "campo de transformações lineares" simétricas e positivas $g = h^2 \in \sec(T^1_1 M)$, fixado arbitrariamente. A forma bilinear recíproca de g será denotada por $g^{-1} \in \sec(T^0_2 M)$. Temos:

$$g^{-1}(\alpha, \beta) = \alpha \cdot g^{-1}(\beta) = h^{-1}(\alpha) \cdot h^{-1}(\beta), \tag{2.16}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \sec(T^* M)$, onde g^{-1} e h^{-1} são as recíprocas das transformações g e h respectivamente. É importante ressaltar que a forma bilinear g não deve ser confundida com o tensor métrico γ da variedade.

Denotamos ainda por $\vee : \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ o "produto de Clifford" induzido em $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ pela forma bilinear g^{-1}; por $\circ : \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) \times \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ o "produto interior de Clifford" associado a $\vee$ e por $\star : \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ o "operador de dualidade de Hodge" correspondente.

Chamamos de operador de Dirac *associado* à forma bilinear $g \in \sec(T^2_0 M)$ ao operador:

$$\check{\partial} \equiv \partial\vee = \mathrm{Tr}(\tilde{u} \vee D_u).$$

Com relação a um referencial móvel $\langle\theta^\alpha\rangle$ sobre T^*M, temos:

$$\check{\partial} = \theta^\alpha \vee D_{e_\alpha}, \tag{2.17}$$

onde $\langle e_\alpha\rangle$ é o referencial dual de $\langle\theta^\alpha\rangle$. Definimos também:

$$\check{\partial}\circ \;= \theta^\alpha \circ D_{e_\alpha},$$

de modo que

$$\check{\partial} = \check{\partial}\circ \,+\, \check{\partial}\wedge = \check{\partial}\circ \,+\, \partial\wedge, \tag{2.18}$$

pois a parte exterior do operador $\check{\partial}$ coincide com a parte exterior do operador ∂.

Naturalmente, as propriedades do operador $\check{\boldsymbol{\partial}}$ diferem daquelas do operador de Dirac fundamental $\boldsymbol{\partial}$. É suficiente estabelecer as propriedades do operador $\check{\boldsymbol{\partial}}\circ$, que são obtidas da seguinte proposição:

Proposição 2.3 *Os operadores $\check{\boldsymbol{\partial}}\circ$ e $\boldsymbol{\partial}\cdot$ estão relacionados por:*

$$\check{\boldsymbol{\partial}} \circ \omega = \boldsymbol{\partial} \cdot \check{\omega} - s \cdot \check{\omega}, \tag{2.19}$$

qualquer que seja $\omega \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, onde $s = -g^{\rho\sigma} D_\rho g_{\sigma\mu} \theta^\mu \in \sec(T^*M)$ é chamada de 1-forma de dilatação da forma bilinear g.

Prova Dado um campo de r-formas qualquer $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r} \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, temos $D_{e_\rho}\omega = \frac{1}{r!}(D_\rho\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r})\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}$, com

$$D_\rho\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = e_\rho(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}) - \Gamma^\mu_{\rho\alpha_1}\omega_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_r} - \cdots - \Gamma^\mu_{\rho\alpha_r}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\mu}. \tag{2.20}$$

Então, $\theta^\rho \circ D_{e_\rho}\omega = \frac{1}{r!}D_\rho\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^\rho \circ (\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}) = \frac{1}{r!}D_\rho\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}(g^{\rho\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}+\cdots+ (-)^{r+1}g^{\rho\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_{r-1}})$, ou ainda,

$$\check{\boldsymbol{\partial}} \circ \omega = \frac{1}{(r-1)!}g^{\rho\sigma}D_\rho\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}. \tag{2.21}$$

Agora, levando em conta as identidades $g^{\rho\sigma}D_\rho\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r} = D_\rho(g^{\rho\sigma}\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r}) - (D_\rho g^{\rho\sigma})\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r}$; $g_{\sigma\mu}D_\rho g^{\rho\sigma} = -g^{\rho\sigma}D_\rho g_{\sigma\mu}$ e lembrando também que $g^{\rho\sigma} = \gamma^{\rho\mu}g^\sigma_\mu$, concluimos que

$$\begin{aligned}\check{\boldsymbol{\partial}} \circ \omega &= \frac{1}{(r-1)!}\gamma^{\rho\sigma}(D_\rho g^\mu_\sigma\omega_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_r})\theta^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r} \\ &+ \frac{1}{(r-1)!}\gamma^{\rho\sigma}(g^{\alpha\beta}D_\alpha g_{\beta\rho})g^\mu_\sigma\omega_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}.\end{aligned}$$

Então, escrevendo $\check{\omega}_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r} = g^\mu_\sigma\omega_{\mu\alpha_2\ldots\alpha_r}$ e $s_\rho = -g^{\alpha\beta}D_\alpha g_{\beta\rho}$, obtemos a Eq. (2.19). ∎

2. O Operador de Dirac em Espaços de Riemann-Cartan-Weyl

2.1. Definição; Propriedades Básicas

Consideramos agora uma variedade $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau\rangle$ munida de uma conexão afim arbitrária ∇. Neste caso, a noção de derivada covariante não será passada ao fibrado quociente $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$.[3] A despeito disto, ela continua sendo uma operação bem definida e em analogia com o que fizemos na seção anterior, podemos associar a ela, agindo nas seções do fibrado $\mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$, o operador:

$$\boldsymbol{\partial} = \mathrm{Tr}(\tilde{u}\ \nabla_u).$$

Chamaremos este operador simplesmente de *operador de Dirac* (ou *derivada de Dirac*). Também como antes, dado o referencial móvel $\langle\theta^\alpha\rangle$ móvel sobre T^*M, temos:

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^\alpha\ \nabla_{e_\alpha} \tag{2.22}$$

e definimos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial}\cdot A &= \theta^\alpha\cdot(\nabla_{e_\alpha}A) \\ \boldsymbol{\partial}\wedge A &= \theta^\alpha\wedge(\nabla_{e_\alpha}A),\end{aligned}$$

qualquer que seja $A \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, de modo que:

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial}\cdot + \boldsymbol{\partial}\wedge \tag{2.23}$$

O operador $\boldsymbol{\partial}\wedge$ satisfaz, quaisquer que sejam $A, B \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$:

$$\boldsymbol{\partial} \wedge (A \wedge B) = (\boldsymbol{\partial} \wedge A) \wedge B + A^{\square} \wedge (\boldsymbol{\partial} \wedge B), \tag{2.24}$$

o que generaliza a Eq. (2.3a). Por sua vez, a Eq. (2.3c) é generalizada de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 2.4 *Sejam $\boldsymbol{Q}^{\rho}$ as 2-formas de ametricidade associadas à conexão ∇ em um referencial móvel arbitrário $\langle\theta^{\rho}\rangle$. Então temos, para multiformas homogêneas,*

$$\begin{array}{rcl} (-)^{r} *^{-1}\boldsymbol{\partial}\cdot * & = & \boldsymbol{\partial}\wedge + \boldsymbol{Q}\wedge \\ (-)^{r+1} *^{-1}\boldsymbol{\partial}\wedge * & = & \boldsymbol{\partial}\cdot - \boldsymbol{Q}\cdot, \end{array} \tag{2.25}$$

onde:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{Q}\cdot & = & \boldsymbol{Q}^{\rho}\cdot \boldsymbol{j}_{\rho} \\ \boldsymbol{Q}\wedge & = & \boldsymbol{Q}^{\rho}\wedge \boldsymbol{i}_{\rho} \end{array} \tag{2.26}$$

e $\boldsymbol{i}_{\rho}A = \theta_{\rho}\cdot A$ e $\boldsymbol{j}_{\rho}A = \theta_{\rho}\wedge A$, qualquer que seja $A \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$.

Prova Seja $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r} \in \sec(\Lambda^r(\mathcal{M})) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$ um campo de r-formas sobre M. Temos que $(\theta_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge\theta_{\beta_r})\wedge *\omega = ((\theta_{\beta_r}\wedge\ldots\wedge\theta_{\beta_1})\cdot\omega)\tau = \omega_{\beta_1\ldots\beta_r}\tau$ e segue que $\nabla_{e_\sigma}[(\theta_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge\theta_{\beta_r})\wedge*\omega] = e_\sigma(\omega_{\beta_1\ldots\beta_r})\tau$. Por outro lado, temos também que $\nabla_{e_\sigma}[(\theta_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge\theta_{\beta_r})\wedge*\omega] = \theta_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge\theta_{\beta_r}\wedge\nabla_{e_\sigma}*\omega + (L^{\rho}_{\sigma\beta_1}\omega_{\rho\beta_2\ldots\beta_r} + \cdots + L^{\rho}_{\sigma\beta_r}\omega_{\beta_1\ldots\beta_{r-1}\rho})\tau - (Q^{\rho}_{\sigma\beta_1}\omega_{\rho\beta_2\ldots\beta_r} + \cdots + Q^{\rho}_{\sigma\beta_r}\omega_{\beta_1\ldots\beta_{r-1}\rho})\tau$ e portanto obtemos, com alguma manipulação algébrica:

$$\nabla_{e_\sigma} * \omega = *\nabla_{e_\sigma}\omega + Q_{\sigma\mu\nu} * (\theta^{\mu}\wedge(\theta^{\nu}\cdot\omega)), \tag{2.27}$$

de onde as Eqs. (2.25) são facilmente estabelecidas. ■

Levando em conta o resultado estabelecido pela proposição acima e a definição do codiferencial de Hodge (Eq. 1.61), somos motivados a introduzir no fibrado de Clifford o operador *coderivada de Dirac*, dado, para multiformas homogêneas, por:

$$\tilde{\boldsymbol{\partial}} = (-)^{r} *^{-1} \boldsymbol{\partial} * \tag{2.28}$$

Naturalmente, temos:

$$\tilde{\boldsymbol{\partial}} = (-)^{r} *^{-1} \boldsymbol{\partial}\cdot * \;+\; (-)^{r} *^{-1} \boldsymbol{\partial}\wedge *$$

e podemos, então, definir:

$$\begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\partial}}\cdot \equiv (-)^{r} *^{-1} \boldsymbol{\partial}\wedge * = -\boldsymbol{\partial}\cdot + \boldsymbol{Q}\cdot \\ \tilde{\boldsymbol{\partial}}\wedge \equiv (-)^{r} *^{-1} \boldsymbol{\partial}\cdot * = \boldsymbol{\partial}\wedge + \boldsymbol{Q}\wedge, \end{array} \tag{2.29}$$

de modo que:

$$\tilde{\boldsymbol{\partial}} = \tilde{\boldsymbol{\partial}}\cdot + \tilde{\boldsymbol{\partial}}\wedge \tag{2.30}$$

As seguintes identidades são demonstradas trivialmente:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\partial} = (-)^{r+1} *^{-1} \tilde{\boldsymbol{\partial}} * \\
&*\boldsymbol{\partial} = (-)^{r+1} \tilde{\boldsymbol{\partial}} *; \quad *\tilde{\boldsymbol{\partial}} = (-)^{r} \boldsymbol{\partial} * \\
&\boldsymbol{\partial}\tilde{\boldsymbol{\partial}} * = *\tilde{\boldsymbol{\partial}}\boldsymbol{\partial}; \quad *\boldsymbol{\partial}\tilde{\boldsymbol{\partial}} = \tilde{\boldsymbol{\partial}}\boldsymbol{\partial} * \\
&*\boldsymbol{\partial}^2 = -\tilde{\boldsymbol{\partial}}^2 *; \quad *\tilde{\boldsymbol{\partial}}^2 = -\boldsymbol{\partial}^2 *
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Além disto, notamos que a coderivada de Dirac nos permite escrever a generalização da Eq. (2.3b) de uma forma bastante elegante. De fato, em decorrência da Prop. 2.4, temos:

Corolário *Para quaisquer* $A_r \in \sec(\Lambda^r(\mathcal{M})) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$ *e* $B_s \in \sec(\Lambda^s(\mathcal{M})) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, *com* $r+1 \leq s$, *temos:*

$$
\boldsymbol{\partial} \cdot (A_r \cdot B_s) = (\tilde{\boldsymbol{\partial}} \wedge A_r) \cdot B_s + (-)^r A_r \cdot (\boldsymbol{\partial} \cdot B_s),
\tag{2.32}
$$

Prova Dado um campo de 1-formas $\alpha \in \sec(T^*M) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$ e um campo de r-formas $\omega \in \sec(\Lambda^r(\mathcal{M})) \subset \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, temos, da Eq. (2.27), que $\nabla_{e_\sigma} *(\alpha \cdot \omega) = *\nabla_{e_\sigma}(\alpha \cdot \omega + Q_{\sigma\mu\nu} * [\theta^\mu \wedge (\theta^\nu \cdot (\alpha \cdot \omega))]$. Por outro lado, temos também que $\nabla_{e_\sigma} * (\alpha \cdot \omega) = (-)^{r+1} \nabla_{e_\sigma}(\alpha \wedge *\omega) = *[(\nabla_{e_\sigma}\alpha) \cdot \omega + \alpha \cdot (\nabla_{e_\sigma}\omega + Q_{\sigma\mu\nu}\alpha \cdot (\theta^\mu \wedge (\theta^\nu \cdot \omega))]$, onde usamos a Eq. (2.27) novamente. Segue que:

$$
\nabla_{e_\sigma}(\alpha \cdot \omega) = (\nabla_{e_\sigma}\alpha) \cdot \omega + \alpha \cdot (\nabla_{e_\sigma}\omega) + Q_{\sigma\mu\nu}\alpha^\mu\theta^\nu \cdot \omega.
\tag{2.33}
$$

Então, lembrando que $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r) \cdot \omega = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r \cdot \omega$, with $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \sec(T^*M), \omega \in \sec(\Lambda^s(\mathcal{M})), r \leq s+1$, e aplicando a Eq. (2.33) sucessivamente nesta expressão, obtemos a Eq. (2.32). ∎

Outra consequência importante da Prop. 2.4 estabelece a relação entre os operadores $\boldsymbol{\partial}$ e $\boldsymbol{\eth}$. Temos:

Proposição 2.5 *Seja* $\Phi^\rho = \Theta^\rho - \boldsymbol{Q}^\rho$, *onde* Θ^ρ *e* $\boldsymbol{Q}^\rho$ *denotam, respectivamente, as 2-formas de torção e as 2-formas de ametricidade da conexão* ∇ *em um referencial móvel arbitrário* $\langle\theta^\rho\rangle$. *Então:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial}\cdot &= \boldsymbol{\eth}\cdot - \Phi\cdot, \\
\boldsymbol{\partial}\wedge &= \boldsymbol{\eth}\wedge - \Theta\wedge,
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

onde $\Phi\cdot = \Phi^\rho \cdot \boldsymbol{j}_\rho$ e $\Theta\wedge = \Theta^\rho \wedge \boldsymbol{i}_\rho$.

Prova Se f é uma função, $\boldsymbol{\partial} \wedge f = \theta^\alpha \wedge \nabla_{e_\alpha} f = e_\alpha(f)\theta^\alpha = df$ e $\boldsymbol{\partial} \cdot f = \theta^\alpha \cdot \nabla_{e_\alpha} f = 0$.

Para o campo de 1-formas θ^ρ de um referencial móvel sobre T^*M, temos $\boldsymbol{\partial} \wedge \theta^\rho = \theta^\alpha \wedge \nabla_{e_\alpha}\theta^\rho = -L^\rho_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta = -\omega^\rho_\beta \wedge \theta^\beta = d\theta^\rho - \Theta^\rho$.

Agora, para um campo de r-formas $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$, obtemos $\boldsymbol{\partial} \wedge \omega = \frac{1}{r!}(d\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \wedge \theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} d\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \cdots + (-)^{r+1}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_{r-1}} \wedge d\theta^{\alpha_r}) - \frac{1}{r!}(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\Theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \cdots + (-)^{r+1}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_{r-1}} \wedge \Theta^{\alpha_r}) = d\omega - \frac{1}{r!}\Theta^\rho \wedge (\omega_{\rho\alpha_2\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \cdots + (-)^{r+1}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\rho}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_{r-1}}) = d\omega - \Theta^\rho \wedge \boldsymbol{i}_\rho\omega$, o que prova a Eq. (2.34a).

Finalmente, das Eqs. (2.25b) e (2.34a), obtemos $\boldsymbol{\partial}\wedge *\omega = (-)^{r+1} * \boldsymbol{\partial}\cdot\omega - (-)^{r+1} * \boldsymbol{Q}^\rho \cdot \boldsymbol{j}_\rho \omega = \partial \wedge *\omega - \Theta^\rho \wedge *\omega = (-)^{r+1} * \partial \cdot \omega - (-)^{r+1} * \Theta^\rho \cdot \boldsymbol{j}_\rho \omega$. Portanto, $\boldsymbol{\partial} \cdot \omega = \partial \cdot \omega - \Phi^\rho \cdot \boldsymbol{j}_\rho \omega$, o que prova a Eq. (2.34b). ∎

Das Eqs. (2.34) obtemos as expressões de $\tilde{\boldsymbol{\partial}}\cdot$ e de $\tilde{\boldsymbol{\partial}}\wedge$ em termos de $\partial\cdot$ e de $\partial\wedge$:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\partial}}\cdot &= -\partial\cdot + \boldsymbol{Q}\cdot \\ \tilde{\boldsymbol{\partial}}\wedge &= \partial\wedge - \Phi\wedge . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Obviamente, a coderivada de Dirac associada ao operador de Dirac fundamental é dada por:

$$\tilde{\partial} = d + \delta.$$

Observamos finalmente que podemos ainda introduzir um outro operador de Dirac, obtido combinando-se a conexão afim arbitrária ∇ com a estrutura algébrica induzida pelo campo de formas bilineares genérico $g \in \sec(T_0^2 M)$. Com relação a um referencial móvel $\langle\theta^\alpha\rangle$ sobre T^*M, este operador tem a expressão:

$$\check{\boldsymbol{\partial}} \equiv \boldsymbol{\partial}\vee = \theta^\alpha \vee \nabla_{e_\alpha}. \tag{2.36}$$

Naturalmente, podemos escrever também

$$\check{\boldsymbol{\partial}} = \check{\boldsymbol{\partial}}\circ + \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge \tag{2.37}$$

onde

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\partial}}\circ &= \theta^\alpha \circ \nabla_{e_\alpha} \\ \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge &= \theta^\alpha \wedge \nabla_{e_\alpha}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Este novo operador de Dirac já está completamente caracterizado pelos resultados obtidos nas seções anteriores.

Para ver isto, suponhamos que ∇ é a conexão de Levi-Civita da forma bilinear g, ou seja, $\check{\partial}$ é o operador de Dirac fundamental da estrutura $\langle M, g, \tau_g\rangle$. Não há perda de generalidade em se fazer esta hipótese, porque se ∇' é uma conexão de Riemann-Cartan-Weyl genérica sobre a variedade, então, em vista da Prop. 2.5, temos:

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\partial}}'\circ &= \check{\boldsymbol{\partial}}\circ - \Phi'\circ \\ \check{\boldsymbol{\partial}}'\wedge &= \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge - \Theta'\wedge \end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $\check{\boldsymbol{\partial}}' = \theta^\alpha \vee \nabla'_{e_\alpha}$, $\Theta'\wedge = \Theta'^\rho \wedge \boldsymbol{i}_\rho$, $\Phi'\circ = \Phi_\rho \circ \boldsymbol{j}^\rho$, $\Phi'_\rho = \Theta'_\rho - \boldsymbol{Q}'_\rho$ e Θ'^ρ e $\boldsymbol{Q}'_\rho$ são as 2-formas de torção e "ametricidade" (em relação à forma bilinear g) da conexão ∇'.

No caso particular em que $\nabla' \equiv D$ é a conexão de Levi-Civita da métrica γ, temos $\check{\boldsymbol{\partial}}' \equiv \check{\partial}$ e segue que:

$$\check{\partial}\circ = \check{\boldsymbol{\partial}}\circ + \boldsymbol{Q}\circ \qquad \text{e} \qquad \check{\partial}\wedge = \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge \tag{2.40}$$

onde $\boldsymbol{Q}\circ = \boldsymbol{Q}_\rho \circ \boldsymbol{j}^\rho$; $\boldsymbol{Q}_\rho = -D_\alpha g_{\beta\rho} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$.

Note agora que as Eqs. (2.40) e (2.19) nos permitem relacionar os operadores ∂ e $\check{\boldsymbol{\partial}}$. Obviamente, a parte exterior destes operadores coincidem. Para a parte interior, temos a relação:

$$\check{\boldsymbol{\partial}}\circ\omega = \partial\cdot\breve{\omega} - w\cdot\breve{\omega} - \boldsymbol{j}^\rho(\boldsymbol{Q}_\rho\cdot\breve{\omega}), \tag{2.41}$$

qualquer que seja $\omega \in \sec(\mathcal{C}\ell(\mathcal{M}))$, onde

$$w = -g^{\alpha\beta}(D_\rho g_{\alpha\beta})\theta^\rho. \tag{2.42}$$

2.2. Torção, Deformação, Cisalhamento e Dilatação de uma Conexão

a. *Operadores de Torção e Deformação*

Em analogia com a introdução do comutador e do anticomutador de Dirac, vamos definir as operações:

$$\begin{aligned} [\alpha,\beta] &= (\alpha\cdot\boldsymbol{\partial})\beta - (\beta\cdot\boldsymbol{\partial})\alpha - [\![\alpha,\beta]\!] \\ \{\alpha,\beta\} &= (\alpha\cdot\boldsymbol{\partial})\beta + (\beta\cdot\boldsymbol{\partial})\alpha - \{\alpha,\beta\}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

quaisquer que sejam $\alpha,\beta \in \sec(T^*M)$. Estas operações serão chamadas, respectivamente, de *operação de torção* e de *operação de deformação* da conexão ∇. Subtraimos o comutador de Dirac e o anticomutador de Dirac nos membros direitos destas expressões de modo a termos objetos que são independentes da estrutura dos campos sobre os quais são aplicados.

Se $\langle\theta_\alpha\rangle$ é o recíproco de um referencial móvel arbitrário $\langle\theta^\rho\rangle$ sobre T^*M, obtemos, da Eq. (2.43a):

$$[\theta_\alpha,\theta_\beta] = (T^\rho_{\alpha\beta} - Q^\rho_{[\alpha\beta]})\theta_\rho,$$

onde $T^\rho_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor de torção usual (Eq. 1.67). Note desta última equação que a operação definida pela Eq. (2.43a) não satisfaz a identidade de Jacobi. De fato, temos:

$$\sum_{[\alpha\beta\sigma]}[\theta_\alpha,[\theta_\beta,\theta_\sigma]] = \sum_{[\alpha\beta\sigma]}(T^\rho_{\alpha\mu} - Q^\rho_{[\alpha\mu]})(T^\mu_{\beta\sigma} - Q^\mu_{[\beta\sigma]})\theta_\rho,$$

onde a soma nesta equação deve ser efetuada sobre todas as permutações cíclicas dos índices α,β e σ.

Por sua vez, da Eq. (2.43b), obtemos:

$$\{\theta_\alpha,\theta_\beta\} = (S^\rho_{\alpha\beta} - Q^\rho_{(\alpha\beta)})\theta_\rho,$$

onde $Q^\rho_{(\alpha\beta)} = \gamma^{\rho\sigma}(Q_{\alpha\beta\sigma} + Q_{\beta\alpha\sigma})$ e escrevemos:

$$S^\rho_{\alpha\beta} = L^\rho_{\alpha\beta} + L^\rho_{\beta\alpha} - b^\rho_{\alpha\beta}. \tag{2.44}$$

Pode-se mostrar facilmente que as quantidades $S^\rho_{\alpha\beta}$ são as componentes de um tensor. Seguindo a terminologia usada nas teorias de meios contínuos,[13, 14] vamos chamá-lo de *tensor de deformação* da conexão. Note que podemos escrever:

$$S^\rho_{\alpha\beta} = \tilde{S}^\rho_{\alpha\beta} + \frac{2}{n}s^\rho\gamma_{\alpha\beta} \tag{2.45}$$

onde $\tilde{S}^\rho_{\alpha\beta}$ é a parte de traço nulo do tensor, que será chamada de *cisalhamento* da conexão e

$$s^\rho = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}S^\rho_{\mu\nu} \tag{2.46}$$

é a parte do traço, que será chamada de *dilatação* da conexão.

A interpretação geométrica das operações de torção e deformação são facilmente estabelecidas.

Estabelece-se trivialmente que:

$$L^\rho_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}T^\rho_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}S^\rho_{\alpha\beta}. \tag{2.47}$$

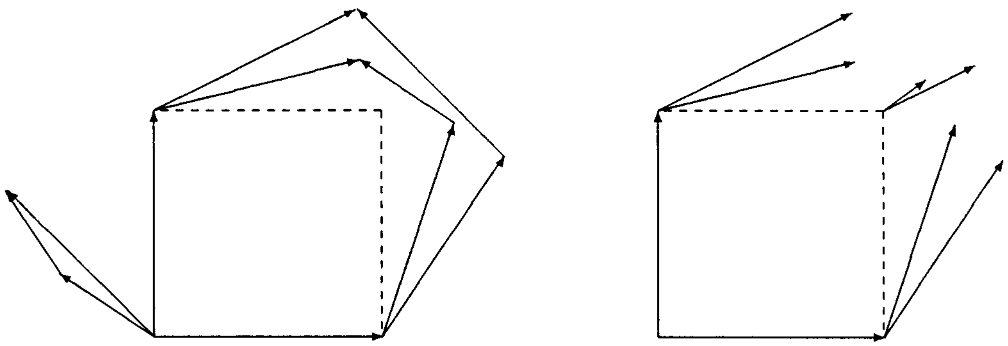

Fig. 2.3. (a) *Operação de Torção.* (b) *Operação de Deformação.*

onde $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b^{\rho}_{\alpha\beta} + c^{\rho}_{\alpha\beta})$ são as componentes da conexão de Levi-Civita de γ.[1]

Naturalmente, a Eq. (2.47) pode ser usada para relacionar as derivadas, com relação às conexões D e ∇ de qualquer campo tensorial definido na variedade. Em particular, lembrando que $D_{\alpha}\gamma_{\beta\sigma} = e_{\alpha}(\gamma_{\beta\sigma}) - \gamma_{\mu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \gamma_{\beta\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} = 0$, obtemos a expressão do tensor de ametricidade de ∇ em termos da torção e da deformação. Temos:

$$Q_{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\mu}T^{\mu}_{\alpha\sigma}) + \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\sigma}S^{\mu}_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\mu}S^{\mu}_{\alpha\sigma}). \tag{2.48}$$

A Eq. (2.48) pode ser invertida para dar a expressão da deformação em termos da torção e da ametricidade. Obtemos:

$$S^{\rho}_{\alpha\beta} = \gamma^{\rho\sigma}(Q_{\alpha\beta\sigma} + Q_{\beta\sigma\alpha} - Q_{\sigma\alpha\beta}) - \gamma^{\rho\sigma}(\gamma_{\beta\mu}T^{\mu}_{\alpha\sigma} + \gamma_{\alpha\mu}T^{\mu}_{\beta\sigma}). \tag{2.49}$$

É claro das Eqs. (2.48) e (2.49) que a ametricidade e a deformação podem ser usadas intercambiavelmente na descrição da geometria de um espaço de Riemann-Cartan-Weyl. Em particular, note que temos a relação:

$$Q_{\alpha\beta\sigma} + Q_{\sigma\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha\sigma} = S_{\alpha\beta\sigma} + S_{\sigma\alpha\beta} + S_{\beta\sigma\alpha}, \tag{2.50}$$

onde $S_{\alpha\beta\sigma} = \gamma_{\rho\sigma}S^{\rho}_{\alpha\beta}$. Portanto, em um espaço de Cartan o tensor de deformação satisfaz a relação:

$$S_{\alpha\beta\sigma} + S_{\sigma\alpha\beta} + S_{\beta\sigma\alpha} = 0. \tag{2.51}$$

b. Tensores de Curvatura

A fim de simplificar nossas próximas equações, vamos introduzir a notação:

$$\Delta^{\rho}_{\alpha\beta} = L^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T^{\rho}_{\alpha\beta} + S^{\rho}_{\alpha\beta}). \tag{2.52}$$

[1]Observamos que a possibilidade de decompor os coeficientes da conexão em rotação (torção), cisalhamento e dilatação já foi sugerida por Baekler *et al.*,[9] mas em seu trabalho não se chega à identificação de uma quantidade tensorial associada a estes dois últimos objetos.

Da Eq. (2.49) segue que:

$$\begin{aligned} \Delta^{\rho}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}(\nabla_\alpha\gamma_{\beta\sigma} + \nabla_\beta\gamma_{\sigma\alpha} - \nabla_\sigma\gamma_{\alpha\beta}) \\ &- \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}(\gamma_{\mu\alpha}T^{\mu}_{\sigma\beta} + \gamma_{\mu\beta}T^{\mu}_{\sigma\alpha} - \gamma_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{2.53}$$

onde lembramos que $Q_{\alpha\beta\sigma} = -\nabla_\alpha\gamma_{\beta\sigma}$. Note a similaridade desta equação com a Eq. (2.11), que dá os coeficientes de uma conexão Riemanniana. Note também que para $\nabla\gamma = 0$, $\Delta^{\rho}_{\alpha\beta}$ é o chamado *tensor de contorção*.[2]

Retornando à Eq. (2.47), obtemos agora a relação entre o tensor de curvatura $R_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta}$ associado à conexão ∇ e o tensor de curvatura Riemanniana $\hat{R}_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta}$ da métrica γ. Temos:

$$R_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta} = \hat{R}_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta} + J_\mu{}^\rho{}_{[\alpha\beta]}, \tag{2.54}$$

onde:

$$J_\mu{}^\rho{}_{\alpha\beta} = D_\alpha\Delta^{\rho}_{\beta\mu} - \Delta^{\rho}_{\beta\sigma}\Delta^{\sigma}_{\alpha\mu} = \nabla_\alpha\Delta^{\rho}_{\beta\mu} - \Delta^{\rho}_{\alpha\sigma}\Delta^{\sigma}_{\beta\mu} + \Delta^{\sigma}_{\alpha\beta}\Delta^{\rho}_{\sigma\mu}. \tag{2.55}$$

Multiplicando ambos os membros da Eq. (2.54) por $\frac{1}{2}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$, obtemos:

$$\Omega^{\rho}_{\mu} = \hat{\Omega}^{\rho}_{\mu} + \boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu}, \tag{2.56}$$

onde escrevemos:

$$\boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu} = \frac{1}{2}J_\mu{}^\rho{}_{[\alpha\beta]}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta. \tag{2.57}$$

Da Eq. (2.54) obtemos também a relação entre os tensores de Ricci das conexões ∇ e D:

$$R_{\mu\alpha} = \hat{R}_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha}, \tag{2.58}$$

com

$$\begin{aligned} J_{\mu\alpha} &= D_\alpha\Delta^{\rho}_{\rho\mu} - D_\rho\Delta^{\rho}_{\alpha\mu} + \Delta^{\rho}_{\alpha\sigma}\Delta^{\sigma}_{\rho\mu} - \Delta^{\rho}_{\rho\sigma}\Delta^{\sigma}_{\alpha\mu} \\ &= \nabla_\alpha\Delta^{\rho}_{\rho\mu} - \nabla_\rho\Delta^{\rho}_{\alpha\mu} - \Delta^{\rho}_{\sigma\alpha}\Delta^{\sigma}_{\rho\mu} + \Delta^{\rho}_{\rho\sigma}\Delta^{\sigma}_{\alpha\mu}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Observe que como a conexão ∇ é arbitrária, seu tensor de Ricci não será, em geral, simétrico. Então, como o tensor de Ricci de D é necessariamente simétrico, podemos desmembrar a Eq. (2.58) em:

$$\begin{aligned} R_{[\mu\alpha]} &= J_{[\mu\alpha]} \\ R_{(\mu\alpha)} &= \hat{R}_{(\mu\alpha)} + J_{(\mu\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

---

[2] As Eqs. (2.52) e (2.53) têm aparecido na literatura em dois contextos diferentes. Com $\nabla\gamma = 0$, elas têm sido usadas nas formulações da teoria dos campos espinoriais em espaços de Riemann-Cartan[15, 16, 17, 18] e com $T[\nabla] = 0$, elas têm sido usadas nas formulações da teoria do campo gravitacional sobre espaços com geometria fixa.[19, 20, 21, 22, 23]

c. *Conexões de Levi-Civita*

Agora vamos particularizar os resultados acima para o caso em que a conexão ∇ é a conexão de Levi-Civita da forma bilinear $g \in \sec(T_0^2 M)$, isto é,

$$\boldsymbol{T}[\nabla] = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g = 0.$$

Os resultados que obteremos generalizam e esclarecem aqueles encontrados nas formulações da teoria do campo gravitacional sobre espaços com métrica fixa.[19, 20, 21, 22]

Antes de tudo, note que a conexão D desempenha, com relação ao campo tensorial g, papel análogo àquele desempenhado pela conexão ∇ com relação ao tensor métrico γ. Assim, teremos equações similares relacionando estes dois pares de objetos. Em particular, a deformação de D com relação a g será igual ao negativo da deformação de ∇ com relação a γ, pois:

$$S^{\rho}_{\alpha\beta} = L^{\rho}_{\alpha\beta} + L^{\rho}_{\beta\alpha} - b^{\rho}_{\alpha\beta} = -(\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} - d^{\rho}_{\alpha\beta}),$$

onde $b^{\rho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}$ e $d^{\rho}_{\alpha\beta} = L^{\rho}_{\alpha\beta} + L^{\rho}_{\beta\alpha}$ denotam os coeficientes de Killing do referencial considerado, com relação aos tensores γ e g respectivamente. Além disto, em vista da Eq. (2.53), podemos escrever $\Delta^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}S^{\rho}_{\alpha\beta}$ como:

$$\begin{aligned} \Delta^{\rho}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}(\nabla_\alpha\gamma_{\beta\sigma} + \nabla_\beta\gamma_{\alpha\sigma} - \nabla_\sigma\gamma_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(D_\alpha g_{\beta\sigma} + D_\beta g_{\alpha\sigma} - D_\sigma g_{\alpha\beta}). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Introduzimos a notação:

$$\kappa = \sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{\gamma}}}. \tag{2.62}$$

Então temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \Delta^{\rho}_{\rho\sigma} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\sigma\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}D_\sigma g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa}\partial_\sigma(\kappa) \\ g^{\alpha\beta}\Delta^{\rho}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\kappa}D_\sigma(\kappa g^{\rho\sigma}) \\ \gamma^{\alpha\beta}\Delta^{\rho}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\kappa^{-1}}\nabla_\sigma(\kappa^{-1}\gamma^{\rho\sigma}). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Outra consequência importante da hipótese de que ∇ é uma conexão de Levi-Civita é que neste caso seu tensor de Ricci será simétrico. Em vista das Eqs. (2.60), isto implica em que valem as seguintes condições equivalentes:

$$\begin{aligned} D_\alpha\Delta^{\rho}_{\rho\beta} &= D_\beta\Delta^{\rho}_{\rho\alpha} \\ \nabla_\alpha\Delta^{\rho}_{\rho\beta} &= \nabla_\beta\Delta^{\rho}_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.3. Equações de Estrutura

Com os resultados estabelecidos acima, podemos expressar as equações de estrutura da geometria de Riemann-Cartan-Weyl definida pela conexão ∇ em termos da estrutura Riemanniana definida pela métrica γ. Para isto, vamos escrever a Eq. (2.47) na forma:

$$\omega^{\rho}_{\beta} = \hat{\omega}^{\rho}_{\beta} + w^{\rho}_{\beta} = \hat{\omega}^{\rho}_{\beta} + \tau^{\rho}_{\beta} + \sigma^{\rho}_{\beta}, \tag{2.65}$$

com $\omega^{\rho}_{\beta} = L^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}$, $\hat{\omega}^{\rho}_{\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}$, $w^{\rho}_{\beta} = \Delta^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}$, $\tau^{\rho}_{\beta} = \frac{1}{2}T^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}$ and $\sigma^{\rho}_{\beta} = \frac{1}{2}S^{\rho}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}$.

As equações de estrutura para a geometria de Riemann-Cartan-Weyl definida pela conexão ∇ e pela métrica γ são dadas por:

$$\begin{aligned} d\theta^{\rho} + \omega^{\rho}_{\mu} \wedge \theta^{\mu} &= \Theta^{\rho} \\ d\theta_{\mu} - \omega^{\rho}_{\mu} \wedge \theta_{\rho} &= \Phi_{\mu} \\ d\omega^{\rho}_{\mu} + \omega^{\rho}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}_{\mu} &= \Omega^{\rho}_{\mu} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Substituindo a expressão de ω^{ρ}_{μ} dada pela Eq. (2.65) nas Eqs. (2.66) e levando em conta a Eq. (2.56) e as equações de estrutura para a geometria (Riemanniana) definida pela métrica γ e sua conexão de Levi-Civita, concluimos que:

$$\begin{aligned} w^{\rho}_{\beta} \wedge \theta^{\beta} &= \Theta^{\rho} \\ w^{\beta}_{\mu} \wedge \theta_{\beta} &= -\Phi_{\mu} \\ \hat{D}w^{\rho}_{\mu} + w^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} &= \boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

onde $\hat{D}$ é a derivada covariante exterior associada à conexão de Levi-Civita D de γ,

$$\hat{D}w^{\rho}_{\mu} = dw^{\rho}_{\mu} + \hat{\omega}^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} + w^{\rho}_{\beta} \wedge \hat{\omega}^{\beta}_{\mu}. \tag{2.68}$$

A terceira das Eqs. (2.67) também pode ser escrita como:

$$Dw^{\rho}_{\mu} - w^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} = \boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu}, \tag{2.69}$$

onde D é a derivada covariante exterior da conexão ∇,

$$Dw^{\rho}_{\mu} = dw^{\rho}_{\mu} + \omega^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} + w^{\rho}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}_{\mu}. \tag{2.70}$$

Agora, as identidades de Bianchi para a geometria de Riemann-Cartan-Weyl são facilmente obtidas derivando-se as equações acima. Obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{D}\Theta^{\rho} &= \boldsymbol{J}^{\rho}_{\beta} \wedge \theta^{\beta} - w^{\rho}_{\beta} \wedge \Theta^{\beta} \\ \hat{D}\Phi_{\mu} &= \boldsymbol{J}^{\beta}_{\mu} \wedge \theta_{\beta} + w^{\beta}_{\mu} \wedge \Phi_{\beta} \\ \hat{D}\boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu} &= \Omega^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} - w^{\rho}_{\beta} \wedge \Omega^{\beta}_{\mu}, \end{aligned} \tag{2.71}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} D\Theta^{\rho} &= \boldsymbol{J}^{\rho}_{\beta} \wedge \theta^{\beta} \\ D\Phi_{\mu} &= \boldsymbol{J}^{\beta}_{\mu} \wedge \theta_{\beta} \\ D\boldsymbol{J}^{\rho}_{\mu} &= \hat{\Omega}^{\rho}_{\beta} \wedge w^{\beta}_{\mu} - w^{\rho}_{\beta} \wedge \hat{\Omega}^{\beta}_{\mu}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Capítulo 3

O Quadrado do Operador de Dirac

1. Operador de Dirac Fundamental

1.1. D'Alembertiano

Como vimos no capítulo 2, o operador de Dirac fundamental $\boldsymbol{\partial}$ de uma variedade $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau \rangle$ é dado por: (Eq. 2.4)

$$\boldsymbol{\partial} = d - \delta. \tag{3.1}$$

Então, o quadrado deste operador, $\boldsymbol{\partial}^2 = \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\partial}$, será dado por:

$$\boldsymbol{\partial}^2 = (d - \delta)(d - \delta) = -(d\delta + \delta d) = \Delta, \tag{3.2}$$

ou seja, $\boldsymbol{\partial}^2$ é o Laplaciano de Hodge usual da variedade. (Eq. 1.62)

Por outro lado, lembrando também que: (Eq. 2.1)

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^\alpha \, D_{e_\alpha}, \tag{3.3}$$

onde $\langle \theta^\alpha \rangle$ é um referencial móvel arbitrário sobre a variedade e D é a conexão de Levi-Civita da métrica γ, temos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial}^2 &= (\theta^\alpha D_{e_\alpha})(\theta^\beta D_{e_\beta}) = \theta^\alpha(\theta^\beta D_{e_\alpha} D_{e_\beta} + (D_{e_\alpha}\theta^\beta) D_{e_\beta}) \\
&= \gamma^{\alpha\beta}(D_{e_\alpha} D_{e_\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} D_{e_\rho}) + \theta^\alpha \wedge \theta^\beta (D_{e_\alpha} D_{e_\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} D_{e_\rho}).
\end{aligned}$$

Então, definindo os operadores:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} &= \gamma^{\alpha\beta}(D_{e_\alpha} D_{e_\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} D_{e_\rho}) \\
\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} &= \theta^\alpha \wedge \theta^\beta (D_{e_\alpha} D_{e_\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} D_{e_\rho}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

podemos escrever:

$$\boldsymbol{\partial}^2 = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} \tag{3.5}$$

É importante observar que os operadores $\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}$ e $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ não têm análogos na formulação da geometria diferencial nos fibrados de Cartan e Hodge.

O operador $\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}$ também pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left[D_{e_\alpha} D_{e_\beta} + D_{e_\beta} D_{e_\alpha} - b^\rho_{\alpha\beta} D_{e_\rho}\right]. \tag{3.6}$$

Aplicando este operador às 1-formas do referencial $\langle\theta^\alpha\rangle$, obtemos:

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\theta^\mu = -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\hat{M}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}\theta^\rho, \tag{3.7}$$

onde:

$$\hat{M}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta} = e_\alpha(\Gamma^\mu_{\beta\rho}) + e_\beta(\Gamma^\mu_{\alpha\rho}) - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\rho} - \Gamma^\mu_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\rho} - b^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\sigma\rho}. \tag{3.8}$$

A prova de que o objeto que tem estas componentes é um tensor é uma consequência da seguinte proposição:

$\boxed{\textbf{Proposição 3.1}}$ *Para qualquer campo de r-formas $\omega\in\sec(\Lambda^r M)$, $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}$, temos:*

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\omega = \frac{1}{r!}\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}, \tag{3.9}$$

onde $D_\alpha D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ são as componentes da derivada covariante de ω.

$\boxed{\textbf{Prova}}$ Temos que $D_{e_\beta}\omega = \frac{1}{r!}D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}$, com $D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = (e_\beta(\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}) - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha_1}\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha_r}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma})$. Portanto, $D_{e_\alpha}D_{e_\beta}\omega = \frac{1}{r!}(e_\alpha(D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\alpha_1}D_\beta\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\alpha\alpha_r}D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma})\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}$ e concluimos que:

$$(D_{e_\alpha}D_{e_\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}D_{e_\rho})\omega = \frac{1}{r!}D_\alpha D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\alpha_r}. \tag{3.10}$$

Multiplicando esta equação por $\gamma^{\alpha\beta}$ e usando a Eq. (3.4a), obtemos a Eq. (3.9). ■

Em vista da Eq. (3.9), vamos chamar o operador $\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}$ de *D'Alembertiano.* Note que o D'Alembertiano das 1-formas θ^μ também pode ser escrito como:

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\theta^\mu = \gamma^{\alpha\beta}(D_\alpha D_\beta\delta^\mu_\rho)\theta^\rho = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(D_\alpha D_\beta\delta^\mu_\rho + D_\beta D_\alpha\delta^\mu_\rho)\theta^\rho$$

e portanto, levando em conta a Eq. (3.7), concluimos que:

$$\hat{M}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta} = -(D_\alpha D_\beta\delta^\mu_\rho + D_\beta D_\alpha\delta^\mu_\rho), \tag{3.11}$$

o que prova nossa afirmação de que $\hat{M}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}$ são as componentes de um tensor.

1.2. Operador de Ricci

Consideremos agora o operador $\boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial}$ introduzido pela Eq. (3.4a). Também podemos escrevê-lo como:

$$\boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial} = \frac{1}{2}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta\left[D_{e_\alpha}D_{e_\beta} - D_{e_\beta}D_{e_\alpha} - c^\rho_{\alpha\beta}D_{e_\rho}\right]. \tag{3.12}$$

Aplicando este operador às 1-formas do referencial $\langle\theta^\alpha\rangle$, obtemos:

$$(\boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial})\theta^\mu = -\frac{1}{2}\hat{R}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}(\theta^\alpha\wedge\theta^\beta)\theta^\rho = -\hat{\Omega}^\mu_\rho\theta^\rho, \tag{3.13}$$

onde $\hat{R}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor de curvatura da conexão D. Das Eqs. (1.29f), temos:

$$\hat{\Omega}^\mu_\rho\theta^\rho = \hat{\Omega}^\mu_\rho\cdot\theta^\rho + \hat{\Omega}^\mu_\rho\wedge\theta^\rho.$$

O segundo termo do membro direito desta equação é identicamente nulo por causa da identidade de Bianchi dada pela Eq. (1.76a) para o caso particular de uma conexão simétrica ($\Theta^\mu = 0$). Usando as Eqs. (1.29c) e (1.29i), podemos escrever o primeiro termo do membro direito como:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}^\mu_\rho \cdot \theta^\rho &= \frac{1}{2}\hat{R}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \cdot \theta^\rho \\
&= -\frac{1}{2}\hat{R}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}(\gamma^{\rho\alpha}\theta^\beta - \gamma^{\rho\beta}\theta^\alpha) \\
&= -\gamma^{\rho\alpha}\hat{R}_\rho{}^\mu{}_{\alpha\beta}\theta^\beta = -\hat{R}^\mu_\beta\theta^\beta,
\end{aligned}$$

onde $\hat{R}^\mu_\beta$ são as componentes do tensor de Ricci da variedade. Portanto, temos:

$$(\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial})\theta^\mu = \hat{R}^\mu, \tag{3.14}$$

onde $\hat{R}^\mu = \hat{R}^\mu_\beta\theta^\beta$ são as 1-formas de Ricci da variedade. Por causa desta relação, vamos chamar o operador $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ de *operador de Ricci*. A proposição abaixo mostra que o operador de Ricci pode ser escrito de maneira puramente algébrica:

Proposição 3.2 *O operador de Ricci $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ satisfaz a relação:*

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} = \hat{R}^\sigma \wedge \boldsymbol{i}_\sigma + \hat{\Omega}^{\rho\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_\rho\boldsymbol{i}_\sigma, \tag{3.15}$$

onde $\hat{\Omega}^{\rho\sigma} = \gamma^{\rho\mu}\hat{\Omega}^\sigma_\mu = \frac{1}{2}\hat{R}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$.

Prova O Laplaciano de Hodge de um campo de r-formas arbitrário $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$ é dado por (e.g., Choquet-Bruhat[6]) $\Delta\omega = \boldsymbol{\partial}^2\omega = \frac{1}{r!}(\boldsymbol{\partial}^2\omega)_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$, com:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\partial}^2\omega)_{\alpha_1\ldots\alpha_r} &= \gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_r} \\
&- \sum_p(-)^p\hat{R}^\sigma_{\alpha_p}\omega_{\sigma\alpha_1\ldots\check{\alpha}_p\ldots\alpha_r} \\
&- 2\sum_{\substack{p,q\\p<q}}(-)^{p+q}\hat{R}^\rho{}_{\alpha_q}{}^\sigma{}_{\alpha_p}\omega_{\rho\sigma\alpha_1\ldots\check{\alpha}_p\ldots\check{\alpha}_q\ldots\alpha_r},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a notação $\check{\alpha}$ indica que o índice α foi excluido da sequência.

O primeiro termo do membro direito desta expressão são as componentes do D'Alembertiano de ω.

Por outro lado, lembrando que $\boldsymbol{i}_\sigma\omega = \theta_\sigma \cdot \omega = \frac{1}{r!}(\omega_{\sigma\alpha_2\ldots\alpha_r}\theta^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r} + \cdots + (-)^{r+1}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma}\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_{r-1}})$, obtemos:

$$\hat{R}^\sigma \wedge \boldsymbol{i}_\sigma\omega = -\frac{1}{r!}\left[\sum_p(-)^p\hat{R}^\sigma_{\alpha_p}\omega_{\sigma\alpha_1\ldots\check{\alpha}_p\ldots\alpha_r}\right]\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$$

e também,

$$\hat{\Omega}^{\rho\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_\rho\boldsymbol{i}_\sigma\omega = -\frac{2}{r!}\left[\sum_{\substack{p,q\\p<q}}(-)^{p+q}\hat{R}^\rho{}_{\alpha_q}{}^\sigma{}_{\alpha_p}\omega_{\rho\sigma\alpha_1\ldots\check{\alpha}_p\ldots\check{\alpha}_q\ldots\alpha_r}\right]\theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}.$$

Assim, levando em conta a Eq. (3.5), concluimos que $(\partial \wedge \partial)\omega = \hat{R}^{\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_{\sigma}\omega + \hat{\Omega}^{\rho\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_{\rho}\boldsymbol{i}_{\sigma}\omega$, qualquer que seja o campo de r-formas ω. ∎

Observe que aplicando o operador dado pelo segundo termo do membro direito da Eq. (3.15) às duais das 1-formas θ^{μ}, obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}^{\rho\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_{\rho}\boldsymbol{i}_{\sigma} * \theta^{\mu} &= \hat{\Omega}_{\rho\sigma} \wedge \theta^{\rho} \cdot (\theta^{\sigma} \cdot *\theta^{\mu})) \\
&= -\hat{\Omega}_{\rho\sigma} \wedge *(\theta^{\rho} \wedge \theta^{\sigma} \wedge \theta^{\mu}) \\
&= *(\hat{\Omega}_{\rho\sigma} \cdot (\theta^{\rho} \wedge \theta^{\sigma} \wedge \theta^{\mu})),
\end{aligned}$$

onde usamos as Eqs. (1.32c) e (1.32d). Então, lembrando a definição das formas de curvatura e usando a Eq. (1.29j), concluimos que:

$$\hat{\Omega}^{\rho\sigma} \wedge \boldsymbol{i}_{\rho}\boldsymbol{i}_{\sigma} * \theta^{\mu} = 2 * (\hat{R}^{\mu} - \frac{1}{2}\hat{R}\theta^{\mu}) = 2 * \hat{G}^{\mu}, \tag{3.17}$$

onde $\hat{R}$ é a curvatura escalar da variedade e $\hat{G}^{\mu}$ são as 1-formas de Einstein.

A observação acima nos motiva a introduzir um novo operador, $\Box$, ao qual chamaremos de *operador de Einstein*, dado por:

$$\Box = \frac{1}{2} *^{-1} \hat{\Omega}^{\rho\sigma}\boldsymbol{i}_{\rho}\boldsymbol{i}_{\sigma} * . \tag{3.18}$$

Naturalmente, temos:

$$\Box\theta^{\mu} = \hat{G}^{\mu} = \hat{R}^{\mu} - \frac{1}{2}\hat{R}\theta^{\mu}. \tag{3.19}$$

Além disto, é fácil verificar que também podemos escrever este operador como:

$$\Box = -\frac{1}{2}(\partial \wedge \partial + \hat{R}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_{\sigma}). \tag{3.20}$$

2. Operador de Dirac em Espaços de Riemann-Cartan-Weyl

2.1. Espaços de Cartan

Vamos considerar agora o operador de Dirac dado por:

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^{\alpha} \nabla_{e_{\alpha}}, \tag{3.21}$$

onde ∇ é uma conexão de Cartan, isto é, ela satisfaz:

$$\boldsymbol{T}[\nabla] \neq 0 \quad \text{e} \quad \nabla\gamma = 0.$$

Lembramos que:

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial} \cdot + \boldsymbol{\partial}\wedge, \tag{3.22}$$

com

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial}\cdot &= \partial \cdot - \Theta\cdot \\
\boldsymbol{\partial}\wedge &= \partial \wedge - \Theta\wedge
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Assim, o quadrado deste operador será dado por:

$$\boldsymbol{\partial}^2 = \boldsymbol{\partial}^2\cdot + \pounds\ + \boldsymbol{\partial}^2\wedge, \tag{3.24}$$

onde $\boldsymbol{\partial}^2\cdot = \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\cdot$, $\boldsymbol{\partial}^2\wedge = \boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial}\wedge$ e definimos o operador:

$$\pounds = \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\wedge + \boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial}\cdot \tag{3.25}$$

Naturalmente, o operador $\pounds$ generaliza o Laplaciano de Hodge para os espaços de Cartan. Este operador corresponde ao operador de onda introduzido por Rapoport[24] em sua teoria geométrica da mecânica quântica estocástica.

Agora, levando em conta a Eq. (3.21), notamos que também podemos escrever o operador $\boldsymbol{\partial}^2$ como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial}^2 &= (\theta^\alpha \nabla_{e_\alpha})(\theta^\beta \nabla_{e_\beta}) = \theta^\alpha(\theta^\beta \nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} + (\nabla_{e_\alpha}\theta^\beta)\nabla_{e_\beta}) \\
&= \gamma^{\alpha\beta}(\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} - L^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}) + \theta^\alpha \wedge \theta^\beta(\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} - L^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}),
\end{aligned}$$

onde $L^\rho_{\alpha\beta}$ são os coeficientes da conexão ∇. Então, definindo os operadores:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} &= \gamma^{\alpha\beta}(\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} - L^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}) \\
\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} &= \theta^\alpha \wedge \theta^\beta(\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} - L^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

podemos escrever:

$$\boldsymbol{\partial}^2 = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} \tag{3.27}$$

$\boxed{\textbf{Proposição 3.3}}$ *Sejam ω^μ_ρ as 1-formas da conexão ∇ em um referencial móvel arbitrário $\langle\theta^\alpha\rangle$. Então:*

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial})\theta^\mu &= -(\boldsymbol{\partial} \cdot \omega^\mu_\rho - \omega^\sigma_\rho \cdot \omega^\mu_\sigma)\theta^\rho \\
(\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial})\theta^\mu &= -(\boldsymbol{\partial} \wedge \omega^\mu_\rho - \omega^\sigma_\rho \wedge \omega^\mu_\sigma)\theta^\rho,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\partial}^2\theta^\mu = -(\boldsymbol{\partial}\omega^\mu - \omega^\sigma_\rho\omega^\mu_\sigma)\theta^\rho. \tag{3.29}$$

$\boxed{\textbf{Prova}}$ Temos $\boldsymbol{\partial}\cdot\omega^\mu_\rho = \theta^\alpha \cdot \nabla_{e_\alpha}(L^\mu_{\beta\rho}\theta^\beta) = \theta^\alpha \cdot (e_\alpha(L^\mu_{\beta\rho})\theta^\beta - L^\mu_{\sigma\rho}L^\sigma_{\alpha\beta}\theta^\beta) = \gamma^{\alpha\beta}(e_\alpha(L^\mu_{\beta\rho}) - L^\mu_{\sigma\rho}L^\sigma_{\alpha\beta})$ e $\omega^\sigma_\rho \cdot \omega^\mu_\sigma = (L^\sigma_{\beta\rho}\theta^\beta)\cdot(L^\mu_{\alpha\sigma}\theta^\alpha) = \gamma^{\beta\alpha}L^\mu_{\alpha\sigma}L^\sigma_{\beta\rho}$. Então, $-(\boldsymbol{\partial}\cdot\omega^\mu_\rho - \omega^\sigma_\rho\cdot\omega^\mu_\sigma)\theta^\rho = \gamma^{\alpha\beta}(e_\alpha(L^\mu_{\beta\rho}) - L^\mu_{\alpha\sigma}L^\sigma_{\beta\rho} - L^\sigma_{\alpha\beta}L^\mu_{\sigma\rho})\theta^\rho = -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(e_\alpha(L^\mu_{\beta\rho}) + e_\beta(L^\mu_{\alpha\rho}) - L^\mu_{\alpha\sigma}L^\sigma_{\beta\rho} - L^\mu_{\beta\sigma}L^\sigma_{\alpha\rho} - b^\sigma_{\alpha\beta}L^\mu_{\sigma\rho})\theta^\rho = (\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\theta^\mu$. A Eq. (3.28b) é provada de maneira análoga. ∎

2.2. Operadores de Dirac Associados

Consideremos agora o operador de Dirac "fundamental" $\check{\boldsymbol{\partial}} \equiv \boldsymbol{\partial}\vee$, associado a uma forma bilinear $g \in \sec(T^2_0 m)$, induzida por um campo de automorfismos simétricos e positivos $g \equiv h^2 \in \sec(T^1_1 M)$.

Como na seção anterior, podemos escrever o quadrado deste operador, $\check{\boldsymbol{\partial}}^2 = (\theta^\alpha \vee D_{e_\alpha})(\theta^\beta \vee D_{e_\beta}$, como:

$$\check{\boldsymbol{\partial}}^2 = \check{\boldsymbol{\partial}} \circ \check{\boldsymbol{\partial}} + \check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}}, \tag{3.30}$$

onde:

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\partial}} \circ \check{\boldsymbol{\partial}} &= \frac{1}{2}\left[\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} + \nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\alpha} - d^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}\right] & (3.31)\\ \check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}} &= \frac{1}{2}\left[\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta} - \nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\alpha} - c^\rho_{\alpha\beta}\nabla_{e_\rho}\right], & (3.32)\end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita da forma bilinear g e $d^\rho_{\alpha\beta} = L^\rho_{\alpha\beta} + L^\rho_{\beta\alpha}$ e $c^\rho_{\alpha\beta} = L^\rho_{\alpha\beta} - L^\rho_{\beta\alpha}$ são os coeficientes de Killing e os coeficientes de estrutura do referencial $\langle e_\alpha \rangle$ em relação a esta conexão.

Queremos expressar o operador $\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}}$ em termos do operador $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$. Temos:

$\boxed{\textbf{Proposição 3.4}}$ *Seja $\omega \in \sec(T^*M)$ um campo de 1-formas qualquer sobre M. Então:*

$$(\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\omega = (\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial})\check{\omega} + \boldsymbol{J}^\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\alpha \check{\omega}, \tag{3.33}$$

onde $\check{\omega}_\sigma = g^\rho_\sigma \omega_\rho$ e $J^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} J_\beta \sigma \theta^\sigma$.

$\boxed{\textbf{Prova}}$ Seja $\omega = \omega_\sigma \theta^\sigma \in \sec(T^*M)$ um campo de 1-formas qualquer sobre M. Temos:

$$\begin{aligned} (\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\omega &= \nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_\sigma (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \vee \theta^\sigma \\ &= g^{\beta\sigma}(\nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_\sigma - \nabla_\beta \nabla_\alpha \omega_\sigma \theta^\alpha. & (3.34)\end{aligned}$$

Porém, demonstra-se facilmente que:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_\sigma &= D_\alpha D_\beta \omega_\sigma - J_\sigma{}^\rho{}_{\alpha\beta} - \Delta^\mu_{\alpha\beta}(D_\mu \omega_\sigma - \Delta^\rho_{\mu\sigma}\omega_\rho) \\ &- (\Delta^\rho_{\alpha\beta} D_\alpha \omega_\rho + \Delta^\rho_{\alpha\sigma} D_\beta \omega_\rho), & (3.35)\end{aligned}$$

de modo que

$$(\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\omega = g^{\beta\sigma}(D_\alpha D_\beta \omega_\sigma)\theta^\alpha - g^{\beta\sigma} J_\sigma{}^\rho{}_{[\alpha\beta]}\omega_\rho \theta^\alpha. \tag{3.36}$$

Note agora que temos $g^{\beta\sigma}(D_\alpha D_\beta \omega_\sigma - D_\beta D_\alpha \omega_\sigma) = D_\alpha D_\beta (g^{\beta\sigma}\omega_\sigma) - D_\beta D_\alpha (g^{\beta\sigma}\omega_\sigma) - (D_\alpha D_\beta g^{\beta\sigma} - D_\beta D_\alpha g^{\beta\sigma})\omega_\sigma = -g^{\mu\sigma} J_{\alpha\mu} - g^{\mu\beta} J_\mu{}^\sigma{}_{[\alpha\beta]}$. Então,

$$(\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\omega = (D_\alpha D_\beta g^{\beta\sigma}\omega_\sigma - D_\beta D_\alpha g^{\beta\sigma}\omega_\sigma)\theta^\alpha + g^{\beta\sigma} J_{\alpha\beta}\theta^\alpha. \tag{3.37}$$

Assim, levando em conta que $g^{\beta\sigma}\omega_\sigma = \gamma^{\beta\sigma} g^\rho_\sigma \omega_\rho$, obtemos a Eq. (3.33). ■

Parte II

Teoria do Campo Gravitacional

Capítulo 4

Automorfismos Simétricos na Álgebra do Espaço-tempo

Chamamos de *espaço-tempo de Minkowski* à quádrupla $I\!M = \langle M, \gamma, \tau, D \rangle$, onde:[1]

(i) M é uma variedade diferenciável de dimensão 4, difeomorfa ao $\mathbb{R}^4$;
(ii) $\gamma \in \sec(T_0^2 M)$ é uma forma bilinear simétrica, não-degenerada, de assinatura (1,3);[2]
(iii) $\tau \in \sec(\Lambda^4 M)$ é um campo de 4-formas sobre M;
(iv) D é a conexão de Levi-Civita da métrica γ, que satisfaz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}[D] &= 0 \\ D\gamma &= 0 \\ \boldsymbol{R}[D] &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

O produto natural do fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(I\!M)$ do espaço-tempo de Minkowski será denotado por justaposição. Além disto, denotamos por $\cdot : \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M)) \times \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M)) \to \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M))$ e $\wedge : \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M)) \times \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M)) \to \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M))$ os produtos interior e exterior correspondentes e por $* : \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M)) \to \sec(\mathcal{C}\ell(I\!M))$ o operador de dualidade de Hodge de $\mathcal{C}\ell(I\!M)$.

Dado um referencial móvel arbitrário $\langle \theta^\rho \rangle$ sobre T^*M, $\rho = 0, \ldots, 3$, as equações de estrutura para o espaço-tempo de Minkowski são dadas por:

$$\begin{aligned} d\theta^\rho + \hat{\omega}^\rho_\sigma \wedge \theta^\sigma &= 0 \\ d\theta_\sigma + \hat{\omega}^\rho_\sigma \wedge \theta_\rho &= 0 \\ d\hat{\omega}^\rho_\sigma + \hat{\omega}^\rho_\beta \wedge \hat{\omega}^\beta_\sigma &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\hat{\omega}^\rho_\sigma = \Gamma^\rho_{\alpha\sigma}\theta^\alpha$ são as 1-formas da conexão D no referencial $\langle \theta^\rho \rangle$.

A partir destas equações de estrutura é possível demonstrar a existência de um sistema de referência $\langle \gamma^\rho \rangle$, definido globalmente sobre M, tal que:

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.3}$$

$\rho, \alpha, \beta = 0, \ldots, 3$, isto é, os coeficientes da conexão D em relação a $\langle \gamma^\rho \rangle$ são identicamente nulos. Sem perda de generalidade, podemos ainda considerar o referencial $\langle \gamma^\rho \rangle$ como ortonormal.

[1] Estritamente falando, o espaço-tempo de Minkowski contém ainda um objeto adicional, chamado de *orientação temporal* e denotado por $\uparrow$. Este objeto é definido como uma das classes de equivalência de vetores tipo-tempo, definida pela relação de equivalência $u \simeq v \Leftrightarrow \gamma(u, v) > 0$.

[2] Lembramos que muitos autores utilizam a métrica de assinatura (3,1) ao invés de (1,3).

A Eq. (4.3) também pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} c^{\rho}_{\alpha\beta} &= 0 \\ b^{\rho}_{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $c^{\rho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}$ e $b^{\rho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}$ denotam, respectivamente, os coeficientes de estrutura e os coeficientes de Killing do referencial $\langle\gamma^{\rho}\rangle$.

A Eq. (4.4a) significa que $\langle\gamma^{\rho}\rangle$ é um referencial coordenado, isto é, existem funções coordenadas $x^{\rho} : M \to \mathbb{R}$ (definidas globalmente sobre M), tais que:

$$\gamma^{\rho} = dx^{\rho}. \tag{4.5}$$

Naturalmente, se $\langle e_{\alpha}\rangle$ denota o referencial dual de $\langle\gamma^{\rho}\rangle$, temos:

$$e_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{4.6}$$

Por sua vez, a Eq. (4.4b) significa que os campos vetoriais e^{ρ}, recíprocos dos campos e_{α}, são campos vetoriais de Killing da variedade, isto é,

$$\pounds_{e^{\rho}}\gamma = 0. \tag{4.7}$$

Portanto, estes campos geram grupos a um parâmetro de difeomorfismos sob a ação dos quais a métrica da variedade é mantida invariante.

No que segue, vamos nos referir a $\langle\gamma^{\rho}\rangle$ como o referencial "fundamental" da variedade. Naturalmente, este referencial não é único, mas sua não-unicidade não é relevante para nossas considerações. Todas as afirmações que faremos são válidas qualquer que seja o referencial fundamental escolhido.

1. Formas Bilineares no Espaço-tempo de Minkowski

Seja $\bar{\phi} : U \to \sec(T^1_1 U)$,[3] $x \mapsto \bar{\phi}_x$; $\bar{\phi}_x : T^*_x M \to T^*_x M$ um campo de transformações lineares qualquer, definido em um aberto $U \subset M$. Escrevemos:

$$\bar{\phi}_x(\gamma^{\rho}_x) = \bar{\phi}^{\rho}_{\sigma}(x)\gamma^{\sigma}_x = \bar{\phi}^{\rho}_{\sigma}(x)dx^{\sigma}, \tag{4.8}$$

onde $\gamma^{\rho}_x \in T^*_x M$ são as 1-formas do referencial fundamental no ponto $x \in U$.

Como vimos no Cap. 1, podemos associar uma forma bilinear Φ^{-1}_x ao automorfismo $\bar{\phi}_x$, pela relação:

$$\Phi^{-1}_x(\alpha_x, \beta_x) = \gamma^{-1}_x(\alpha_x, \bar{\phi}_x(\beta_x)) = \alpha_x \cdot \bar{\phi}_x(\beta). \tag{4.9}$$

Obviamente, esta relação é estendida naturalmente a todo ponto $x \in U \subset M$, gerando um campo de formas bilineares sobre o aberto U. As componentes do campo Φ^{-1} em relação a $\langle\gamma^{\alpha}\rangle$ são dadas pelas funções $\Phi^{\alpha\beta} : U \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$\Phi^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\sigma}\bar{\phi}^{\beta}_{\sigma}. \tag{4.10}$$

[3] Dado um aberto $U \subset M$, denotamos por $T^p_q U \subset T^p_q M$ o sub-fibrado do fibrado vetorial $T^p_q M$ definido por $T^p_q U = \bigcup_{x \in U} T^p_q M_x$.

Naturalmente, como $\bar{\phi}$ é um campo de automorfismos, a forma bilinear Φ^{-1} é não-degenerada.

Vamos denotar, respectivamente, por $\bar{g} \in \sec(T_1^1 M)$ e por $\bar{f} \in \sec(T_2^0 M)$ as partes simétrica e anti-simétrica do campo $\bar{\phi}$, isto é, escrevemos:

$$\bar{\phi} = \bar{g} + \bar{f}. \tag{4.11}$$

Denotamos ainda por $g^{-1} \in \sec(T_2^0 M)$ e por $\bar{F} \in \sec(T_2^0 M)$ as formas bilineares induzidas por g e f, respectivamente. As componentes de g^{-1} e de $\bar{F}$ em relação ao referencial $\langle \gamma^\alpha \rangle$ são dadas, pelas funções $g^{\alpha\beta}, F^{\alpha\beta} : U \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\sigma} g_\sigma^\beta = \frac{1}{2}(\gamma^{\alpha\sigma}\bar{\phi}_\sigma^\beta + \gamma^{\beta\sigma}\bar{\phi}_\sigma^\alpha) \\ F^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\sigma} f_\sigma^\beta = \frac{1}{2}(\gamma^{\alpha\sigma}\bar{\phi}_\sigma^\beta - \gamma^{\beta\sigma}\bar{\phi}_\sigma^\alpha). \end{aligned}$$

No que segue, vamos investigar os tipos de formas bilineares induzidas sobre o aberto $U \subset M$ pelos vários tipos de campos de automorfismos que podemos definir sobre este conjunto.

Lembramos que uma transformação linear genérica pode ser escrita como a composta de transformações elementares dos tipos $\bar{R}_\varepsilon$ e $\bar{S}_{\varepsilon\varepsilon'}$, dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{R}_\varepsilon(v) &= -\varepsilon v \varepsilon^{-1} \\ \bar{S}_{\varepsilon\varepsilon'}(v) &= v + (v \cdot \varepsilon)\varepsilon', \end{aligned} \tag{4.12}$$

qualquer que seja $v \in \sec(T^*M)$, onde $\varepsilon, \varepsilon' \in \sec(T^*U)$ são campos de 1-formas que parametrizam as transformações. (Vide Cap. 1)

1.1. Reflexões

Toda isometria de γ^{-1} pode ser escrita como a composição de reflexões ao longo de, no máximo, quatro direções ortogonais. Assim, se $\bar{\phi} \equiv \bar{g}$ é um campo de isometrias, podemos escrevê-lo como:

$$\bar{g}(v) = (-)^m A v A^{-1}, \tag{4.13}$$

para todo $v \in \sec(T^*U)$, com

$$A = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \tag{4.14}$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \sec(T^*U)$, $\gamma^{-1}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \pm\delta_{ab}$, $a, b = 1, \ldots, m$, $m \leq 4$ e $A^{-1} = \varepsilon_1^{-1} \ldots \varepsilon_m^{-1}$.

É fácil verificar também que, inversamente, transformações que podem ser expressas unicamente como a composição de reflexões são isometrias de γ^{-1}. Mostramos isto para reflexões simples; o resultado é generalizado trivialmente.

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\bar{R}_\varepsilon(\alpha), \bar{R}_\varepsilon(\beta)) &= (\varepsilon\alpha\varepsilon^{-1}) \cdot (\varepsilon\beta\varepsilon^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon\alpha\varepsilon^{-1}\varepsilon\beta\varepsilon^{-1} + \varepsilon\beta\varepsilon^{-1}\varepsilon\alpha\varepsilon^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon\alpha\beta\varepsilon^{-1} + \varepsilon\beta\alpha\varepsilon^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\beta + \beta\alpha)\varepsilon^{-1} \\ &= \alpha \cdot \beta = \gamma^{-1}(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \sec(T^*U)$.

Observamos ainda que se o automorfismo $\bar{g}$ é uma composição de reflexões, então a forma bilinear que ele induz é necessariamente simétrica. De fato, temos, para uma reflexão simples:

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(\alpha,\beta) &= \alpha \cdot \bar{R}_\varepsilon(\beta) = -\alpha \cdot (\varepsilon\beta\varepsilon^{-1}) \\
&= -\frac{1}{2}(\alpha\varepsilon\beta\varepsilon^{-1} + \varepsilon\beta\varepsilon^{-1}\alpha) \\
&= -\frac{1}{2\varepsilon^2}\left[(\alpha\cdot\varepsilon)(\beta\cdot\varepsilon) + (\alpha\cdot\varepsilon)\beta\wedge\varepsilon + (\beta\cdot\varepsilon)\alpha\wedge\varepsilon + (\alpha\wedge\varepsilon)(\beta\wedge\varepsilon)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2\varepsilon^2}\left[(\varepsilon\cdot\beta)(\varepsilon\cdot\alpha) + (\varepsilon\cdot\beta)\varepsilon\wedge\alpha + (\varepsilon\cdot\alpha)\varepsilon\wedge\beta + (\varepsilon\wedge\beta)(\varepsilon\wedge\alpha)\right]
\end{aligned}$$

Então,

$$\Phi^{-1}(\alpha,\beta) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left[(\alpha\cdot\varepsilon)(\beta\cdot\varepsilon) + (\alpha\wedge\varepsilon)(\beta\wedge\varepsilon)\right] = \Phi^{-1}(\beta,\alpha). \tag{4.15}$$

Sem perda de generalidade, podemos usar as 1-formas γ^ρ para parametrizar o conjunto de reflexões que descrevem um dado campo de transformações lineares.

Para uma reflexão simples em relação, digamos, ao eixo temporal γ^0, $\bar{R}_{\gamma^0}(\alpha) \equiv \bar{R}_0(\alpha) = -\gamma^0\alpha\gamma^0$, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_0(\gamma^0) &= -\gamma^0 \\
\bar{R}_0(\gamma^k) &= \gamma^k,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

com $k = 1,2,3$. Então,

$$\begin{aligned}
g^{-1}(\gamma^0,\gamma^0) &= \gamma^0 \cdot \bar{R}_0(\gamma^0) = -1 \\
g^{-1}(\gamma^k,\gamma^k) &= \gamma^k \cdot \bar{R}_0(\gamma^k) = -1,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

sendo as demais componentes nulas. Portanto,

$$g^{-1} = -e_0\otimes e_0 - e_1\otimes e_1 - e_2\otimes e_2 - e_3\otimes e_3, \tag{4.18}$$

isto é, uma reflexão simples em relação ao eixo temporal γ^0 induz uma forma bilinear de assinatura $(0,4)$ (negativa definida). A Tabela 4.1 sumariza os tipos de formas bilineares induzidos por algumas reflexões típicas. Note que podemos obter uma forma bilinear de qualquer assinatura, escolhendo um campo de reflexões conveniente.

1.2. Dilatações

Vamos supor agora que o campo $\bar{h}$, induzido no aberto $U \subset M$ pelo referencial $\langle\vartheta^\rho\rangle$, é um campo de automorfismos simétricos genérico, ou seja, para cada $x \in U \subset M$, $\bar{h}_x$ é um automorfismo simétrico. Os resultados desta seção generalizam os obtidos na seção anterior.

Em decorrência dos resultados estabelecidos na seção 1.3 do Cap. 1, todo campo de transformações simétricas pode ser expresso (para um espaço quadridimensional) como a composição de campos de dilatações ao longo de, no máximo, quatro direções ortogonais.

Evidentemente, um campo de dilatações simples ao longo de uma "direção" $\varepsilon \in \sec(T^*U)$ é definido por:

$$\bar{S}^\xi_\varepsilon(v) = v + \xi(\varepsilon\cdot v)\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}, \tag{4.19}$$

$\bar{g}$	$\bar{g}(v) = (-)^m AvA^{-1}$	g^{00}	g^{11}	g^{22}	g^{33}	(p,q)	$\mathbb{R}_{p,q}$	$+/-$	$\uparrow / \downarrow$
$\bar{R}_0$	$-\gamma^0 v \gamma^0$	-1	-1	-1	-1	(0,4)	$\mathbb{H}(2)$	$-$	$\downarrow$
$\bar{R}_1$	$\gamma^1 v \gamma^1$	$+1$	$+1$	-1	-1	(2,2)	$\mathbb{R}(4)$	$-$	$\uparrow$
$\bar{R}_{01}$	$-\gamma^0\gamma^1 v \gamma^1\gamma^0$	-1	$+1$	-1	-1	(1,3)	$\mathbb{H}(2)$	$+$	$\downarrow$
$\bar{R}_{12}$	$\gamma^1\gamma^2 v \gamma^2\gamma^1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	(3,1)	$\mathbb{R}(4)$	$+$	$\uparrow$
$\bar{R}_{012}$	$-\gamma^0\gamma^1\gamma^2 v \gamma^2\gamma^1\gamma^0$	-1	$+1$	$+1$	-1	(2,2)	$\mathbb{R}(4)$	$+$	$\downarrow$
$\bar{R}_{123}$	$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 v \gamma^3\gamma^2\gamma^1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	(4,0)	$\mathbb{H}(2)$	$-$	$\uparrow$
$\bar{R}_{0123}$	$-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 v \gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	(3,1)	$\mathbb{R}(4)$	$+$	$\downarrow$

Tab. 4.1. *Formas Bilineares Induzidas por Reflexões.*

qualquer que seja $v \in \sec(T^*U)$, onde $\xi : U \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\xi(x) > -1 \ \forall x \in U$. Por simplicidade vamos supor (sem perda de generalidade) que $\varepsilon_x^2 = \pm 1 \ \forall x \in U$.

Também em decorrência dos resultados da seção 1.3 do Cap. 1, se $\bar{g}$ é um campo de transformações simétricas e positivas genérico, podemos encontrar um referencial ortonormal $\langle \vartheta^\rho \rangle$ tal que:

$$\bar{g}(\vartheta^\rho) = (1 + \xi^\rho)\vartheta^\rho, \tag{4.20}$$

onde $\xi^\rho : U \to \mathbb{R}$, $\xi^\rho(x) > -1 \ \forall x \in U$.

Para um campo de 1-formas qualquer, $v = v_\rho \vartheta^\rho \in \sec(T^*U)$, temos:

$$\bar{g}(v) = v + \xi^0 v_0 \vartheta^0 + \xi^1 v_1 \vartheta^1 + \xi^2 v_2 \vartheta^2 + \xi^3 v_3 \vartheta^3 \tag{4.21}$$

e verifica-se facilmente que $\bar{g} = \bar{S}^1 \circ \cdots \circ \bar{S}^3$, com

$$\bar{S}^\mu(v) = v + \xi^\mu(\vartheta_\mu \cdot v)\vartheta^\mu, \tag{4.22}$$

onde $\vartheta_\mu = (\vartheta^\mu)^{-1}$.

Denotando por $\langle a_\alpha \rangle$ o referencial dual de $\langle \vartheta^\rho \rangle$, a forma bilinear g^{-1}, induzida por $\bar{g}$, é dada por:

$$g^{-1} = (1+\xi^0) a_0 \otimes a_0 - (1+\xi^1) a_1 \otimes a_1 - (1+\xi^2) a_2 \otimes a_2 - (1+\xi^3) a_3 \otimes a_3. \tag{4.23}$$

Naturalmente, definindo

$$b_\mu = (1+\xi^\mu)^{\frac{1}{2}} a_\mu, \tag{4.24}$$

podemos escrever

$$g^{-1} = b_0 \otimes b_0 - b_1 \otimes b_1 - b_2 \otimes b_2 - b_3 \otimes b_3, \tag{4.25}$$

ou seja, $\langle b_\mu \rangle$ é um referencial ortonormal em relação à forma bilinear g. Note além disto que

$$\gamma(b_0, b_0) = 1 + \xi^0, \qquad \gamma(b_k, b_k) = -(1 + \xi^k), \tag{4.26}$$

$k = 1, 2, 3$, e $\gamma(b_\mu, b_\nu) = 0$ se $\mu \neq \nu$. Assim, o referencial $\langle b_\mu \rangle$ (ou qualquer referencial sobre TU) será ortonormal em relação às formas bilineares g e γ simultaneamente se e somente se $\xi^\mu(x) = 0 \; \forall x \in U$, $\mu = 0, \ldots, 3$, isto é, se e somente se $g = \gamma$. Evidentemente, este caso é irrelevante para nossas considerações.

Conhecido o campo de transformações lineares $\bar{h}$, o referencial $\langle \vartheta^\mu \rangle$ introduzido pela Eq. (4.20) é encontrado pelos processos usuais de diagonalização. Naturalmente, este referencial pode ter qualquer estrutura (não é necessariamente coordenado ou harmônico). A única restrição imposta sobre ele é que seja um referencial ortonormal em relação à métrica γ^{-1}. Isto significa simplesmente que em cada ponto do aberto U, as 1-formas ϑ^μ estão relacionadas às 1-formas do referencial fundamental $\langle \gamma^\mu \rangle$ por uma transformação de Lorentz própria e ortócrona. Esta restrição é expressa pela relação:[25]

$$\vartheta^\mu = L \gamma^\mu L^{-1}, \tag{4.27}$$

onde para cada $x \in U$ temos $L_x \in Spin_+(1,3) \approx \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Observamos de passagem que se pode escrever L na forma:

$$L = e^F \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n}{n!} = 1 + \frac{F^2}{2!} + \frac{F^3}{3!} + \cdots, \tag{4.28}$$

onde $F \in \sec(\Lambda^2(T^*M)) \subset \sec(\mathcal{C}\ell_+(I\!\!M))$ é um campo de bivetores.

2. Conexões no Espaço-tempo de Minkowski

2.1. Conexões de Levi-Civita

Dada uma forma bilinear simétrica $g \in \sec(T^2_0 M)$, definida em um aberto $U \subset M$ do espaço-tempo de Minkowski, podemos introduzir uma conexão ∇ neste aberto pelas relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}[\nabla] &= 0 \\ \nabla g &= 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Naturalmente, a Eq. (4.29b) é equivalente a:

$$\nabla g^{-1} = 0, \tag{4.30}$$

onde $g^{-1} \in \sec(T^0_2 U)$ é o recíproco do tensor g.

Os coeficientes $L^\rho_{\alpha\beta}$ da conexão ∇ em relação a um referencial $\langle e_\alpha \rangle$ arbitrário são dados por:

$$\begin{aligned} L^\rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left[e_\alpha(g_{\beta\sigma}) + e_\beta(g_{\sigma\alpha}) - e_\sigma(g_{\alpha\beta}) \right] \\ &- \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left[g_{\mu\alpha} c^\mu_{\beta\sigma} + g_{\mu\beta} c^\mu_{\alpha\sigma} - g_{\mu\sigma} c^\mu_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Em relação ao referencial fundamental $\langle \partial_\sigma \rangle$, temos:

$$L^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left[\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right]. \tag{4.32}$$

Então, como os coeficientes de Killing do referencial $\langle \partial_\sigma \rangle$ são identicamente nulos, $b^\rho_{\alpha\beta} = 0$, o tensor de deformação da conexão ∇ em relação a este referencial são dados por:

$$S^\rho_{\alpha\beta} = g^{\rho\sigma}\left[\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right]. \tag{4.33}$$

Usando agora a Eq. (2.48), obtemos as componentes do tensor de ametricidade da conexão ∇ em relação a γ. Temos:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma \gamma_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left[\gamma_{\beta\rho} g^{\rho\mu}(\partial_\sigma g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\mu\sigma} - \partial_\mu g_{\sigma\alpha})\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[\gamma_{\alpha\rho} g^{\rho\mu}(\partial_\sigma g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\mu\sigma} - \partial_\mu g_{\sigma\beta})\right]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Suponhamos agora que a forma bilinear g^{-1} é gerada por um campo de automorfismos simétricos $\bar{g} : U \to T^1_1 M$, isto é,

$$g(\alpha, \beta) = \gamma^{-1}(\alpha, \bar{g}(\beta)), \tag{4.35}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \sec(T^* U)$. Então, correspondentemente, temos:

$$g(u, v) = \gamma(u, g(v)), \tag{4.36}$$

quaisquer que sejam $u, v \in \sec(TU)$, onde $g : U \to \sec(T^1_1 U)$ é o campo recíproco de $\bar{g}$.

Derivando a Eq. (4.36) em relação à conexão ∇, na direção de um campo vetorial arbitrário $w \in \sec(TU)$, obtemos:

$$(\nabla_w \gamma)(u, g(v)) + \gamma(u, (\nabla_w g)(v)) = 0, \tag{4.37}$$

quaisquer que sejam $u, v, w \in \sec(TU)$. Segue desta equação que

$$\nabla_\sigma \gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\rho} \bar{g}^\mu_\beta \nabla_\sigma g^\rho_\mu. \tag{4.38}$$

Capítulo 5

Leis de Conservação em Espaços de Riemann-Cartan

1. Leis de "Conservação" Covariantes

O objetivo deste capítulo é mostrar que uma teoria de campos sobre um espaço-tempo de Riemann-Cartan somente admite leis de conservação genuínas se possui vetores de Killing.[29] Este resultado, quando particularizado para a teoria da gravitação de Einstein mostra claramente que nesta teoria não existem, em geral, leis de conservação da energia-momento e momento angular.

Discutimos também como se pode obter quantidades conservadas quando um espaço-tempo admite vetores de Killing. Finalmente, discutimos brevemente a tentativa de se obter leis de conservação em espaço-tempos Lorentzianos assintoticamente chatos.

1.1. Identidades de Bianchi

Seja $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau \rangle$ uma variedade Lorentziana e seja ∇ uma conexão de Riemann-Cartan sobre $\mathcal{M}$. No que segue esta estrutura será chamada de "geometria de fundo" e estamos interessados na teoria dinâmica de certos campos ϕ^A neste espaço-tempo.

Por simplicidade, suporemos que os campos ϕ^A são campos de r-formas, isto é, $\phi^A \in \sec(\Lambda^r(T^*M))$, $A = 1, \ldots, m$, $0 \leq r \leq 4$. Supomos também que estes campos carregam uma representação do grupo $Spin_+(1,3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, o grupo de recobrimento universal do grupo de Lorentz homogêneo restrito e ortócrono, $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathrm{SO}_+(1,3)$.

Sejam $\langle a_\mu \rangle$ um referencial ortonormal sobre TM, definido em um aberto $U \subset M$, $\langle \vartheta^\rho \rangle$ o seu referencial dual em T^*M e $\langle \vartheta_\mu \rangle$ o referencial recíproco de $\langle \vartheta^\rho \rangle$. As 1-formas da conexão ∇ no referencial $\langle a_\mu \rangle$ serão denotadas por $\omega^\mu_\nu = -L^\mu_{\rho\nu} \vartheta^\nu$.

Uma teoria dinâmica para os campos $\phi^A \in \sec(\Lambda^r(T^*M))$ é obtida com a introdução de uma densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_m$, que é suposta um funcional

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\vartheta^\mu, \omega^\mu_\nu, \phi^A, d\phi^A). \tag{5.1}$$

Supõe-se que este funcional é invariante por transformações de Lorentz locais. Recordamos que sob uma transformação de Lorentz local, isto é, para $L : x \mapsto \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta^\mu &\mapsto \bar{\vartheta}^\mu = L\vartheta^\mu = L^\mu_\nu \vartheta^\nu \\
\omega^\mu_\nu &\mapsto \bar{\omega}^\mu_\nu = L\omega^\mu_\nu L^{-1} + L dL^{-1} \\
\phi^A &\mapsto \bar{\phi}^A = \rho(L)\phi^A,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde $\rho(L)$ denota a representação de L carregada pelos ϕ^A.

Como vimos no Apêndice A, seção 2.1, toda densidade Lagrangeana é invariante sob difeomorfismos.

A variação total da densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_m$ quando variamos ϑ^μ, ω^μ_ν, ϕ^A e $d\phi^A$ independentemente, é dada por:

$$\boldsymbol{\delta}_t\mathcal{L}_m = \boldsymbol{\delta}_v\mathcal{L}_m - \pounds_\xi\mathcal{L}_m, \tag{5.3}$$

e temos,

$$\int \boldsymbol{\delta}_v\mathcal{L}_m = \int \left(\boldsymbol{\delta}_v\vartheta^\mu \wedge \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\vartheta^\mu} + \boldsymbol{\delta}_v\omega^\mu_\nu \wedge \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\omega^\mu_\nu} + \boldsymbol{\delta}_v\phi^A \wedge \frac{\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m}{\boldsymbol{\delta}\phi^A}\right) \tag{5.4}$$

$$\int \boldsymbol{\delta}_t\mathcal{L}_m = \int \left(\boldsymbol{\delta}_t\vartheta^\mu \wedge \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\vartheta^\mu} + \boldsymbol{\delta}_t\omega^\mu_\nu \wedge \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\omega^\mu_\nu} + \boldsymbol{\delta}_t\phi^A \wedge \frac{\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m}{\boldsymbol{\delta}\phi^A}\right) \tag{5.5}$$

e

$$*\,\Sigma_A = \frac{\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m}{\boldsymbol{\delta}\phi^A} = \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\phi^A} - (-)^r d\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial d\phi^A}\right) \tag{5.6}$$

é o funcional de Euler-Lagrange para o campo ϕ^A.

Os coeficientes de $\boldsymbol{\delta}_t\vartheta^\mu$ (ou de $\boldsymbol{\delta}_v\vartheta^\mu$) são as 3-formas

$$*\,T^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\vartheta^\mu}. \tag{5.7}$$

Chamamos $T^\mu \in \sec(\Lambda^3(T^*M))$ de *1-formas de energia-momento* do campo ϕ^A.

Os coeficientes de $\boldsymbol{\delta}_t\omega^\mu_\nu$ (ou de $\boldsymbol{\delta}_v\omega^\mu_\nu$) são as 3-formas:

$$*\,S^\nu_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\omega^\mu_\nu}. \tag{5.8}$$

Das Eqs. (5.3) até (5.8) segue imediatamente que

$$\pounds_\xi\mathcal{L}_m = *T_\mu \wedge \pounds_\xi\vartheta^\mu + *S^\nu_\mu \wedge \pounds_\xi\omega^\mu_\nu + *\Sigma_A \wedge \pounds_\xi\phi^A. \tag{5.9}$$

As equações de movimento para os campos ϕ^A são $*\Sigma_A = 0$ e quando estas equações são satisfeitas, temos:

$$\int \pounds_\xi\mathcal{L}_m = \int \left[*T_\mu \wedge \pounds_\xi\vartheta^\mu + *S^\nu_\mu \wedge \pounds_\xi\omega^\mu_\nu\right] \tag{5.10}$$

No que segue é conveniente considerarmos $\Lambda(T^*M) \subset_{\blacktriangleright} \mathcal{C}\ell(\mathcal{M})$ e assim podermos interpretar todos os campos na Eq. (5.9) como seções do fibrado de Clifford. Lembrando que

$$\pounds_\xi\vartheta^\mu = \boldsymbol{i}_\xi d\vartheta^\mu + d\boldsymbol{i}_\xi\vartheta^\mu \tag{5.11}$$

e escrevendo $\xi^* = \gamma_*(\xi) \in \sec(T^*M)$, onde γ_* denota a operação de abaixamento de índice induzida por γ, segue que:

$$\pounds_\xi\vartheta^\mu = \xi^* \cdot d\vartheta^\mu + d(\xi^* \cdot \vartheta^\mu). \tag{5.12}$$

Além disto, lembrando a primeira equação de estrutura de Cartan,

$$d\vartheta^\mu + \omega^\mu_\nu \wedge \vartheta^\nu = \Theta^\mu,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\pounds_\xi \vartheta^\mu &= \xi^* \cdot \Theta^\mu - \xi^* \cdot (\omega^\mu_\nu \wedge \vartheta^\nu) + d(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) \\ &= \xi^* \cdot \Theta^\mu - (\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu + \omega^\mu_\nu(\xi^* \cdot \vartheta^\nu) + d(\xi^* \cdot \vartheta^\mu)\end{aligned} \tag{5.13}$$

Então usando a definição de derivada exterior covariante,

$$D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) = d(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) + \omega^\mu_\nu(\xi^* \cdot \vartheta^\nu), \tag{5.14}$$

vemos que a Eq. (5.13) pode ser escrita como:

$$\pounds_\xi \vartheta^\mu = D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) + \xi^* \cdot \Theta^\mu - (\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu. \tag{5.15}$$

Precicisaremos agora do resultado enunciado na seguinte proposição:

Proposição 5.1 $\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu \in spin_+(1,3) \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ onde sl(2,$\mathbb{C}$) denota a álgebra de Lie de SL(2,$\mathbb{C}$).

Prova Recordamos que toda transformação de Lorentz infinitesimal L^ν_μ pode ser escrita como

$$L^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Lambda^\nu_\mu; \qquad \Lambda^\nu_\mu << 1 \tag{5.16}$$

Assim, se $E_\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$, temos que $E_\mu \mapsto \bar{E}_\mu = E_\mu + \Lambda_{\beta\mu}E^\beta$, com $\Lambda_{\beta\mu} = \eta_{\beta\nu}\Lambda^\nu_\mu$. Então, tendo em vista que $\gamma(\bar{E}_\mu, \bar{E}_\nu) = \gamma(E_\mu, E_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, obtemos

$$\Lambda_{\beta\mu} = \Lambda_{\mu\beta}. \tag{5.17}$$

Escrevendo $\Lambda^\nu_\mu = \xi^* \cdot \omega^\nu_\mu = \xi_\alpha\vartheta^\alpha \cdot (L^\nu_{\rho\mu}\vartheta^\rho) = \xi_\alpha\eta^{\alpha\rho}L^\nu_{\rho\mu} = \xi^\rho L^\nu_{\rho\mu}$, temos

$$\Lambda_{\beta\mu} = \eta_{\beta\nu}\Lambda^\nu_\mu = \xi^\alpha\eta_{\nu\beta}L^\nu_{\alpha\mu} = \xi^\alpha L_{\beta\alpha\mu}, \tag{5.18}$$

com $L_{\beta\alpha\mu} = \eta_{\beta\sigma}L^\sigma_{\alpha\mu}$.

Analogamente, $\Lambda_{\mu\beta} = \xi^\alpha L_{\mu\alpha\beta}$ e então

$$\Lambda_{\beta\mu} + \Lambda_{\mu\beta} = \xi^\alpha(L_{\beta\alpha\mu} + L_{\mu\alpha\beta}) = 0, \tag{5.19}$$

pois $L_{\beta\alpha\mu} = -L_{\mu\alpha\beta}$ em base ortonormal. ■

Em vista da proposição acima, podemos escrever que a variação local de ϑ^μ sob uma transformação de Lorentz infinitesimal local é dada por:

$$\delta\vartheta^\mu = (\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu. \tag{5.20}$$

e temos assim o resultado notável de que um difeomorfismo gerado pelo grupo a um parâmetro que determina ξ induz uma transformação de Lorentz local (transformação de calibre) dos ϑ^μ.

Substituindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.15), obtemos então:

$$\pounds_\xi \vartheta^\mu = D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) + \xi^* \cdot \Theta^\mu - \delta\vartheta^\mu. \tag{5.21}$$

Calculemos agora $\pounds_\xi \omega^\mu_\nu$. Temos, por definição, que

$$\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \xi^* \cdot \omega^\mu_\nu + d(\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu) \tag{5.22}$$

e usando a segunda equação de estrutura de Cartan,

$$d\omega^\mu_\nu + \omega^\mu_\alpha \wedge \omega^\alpha_\nu = \Omega^\mu_\nu, \tag{5.23}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \pounds_\xi \omega^\mu_\nu &= \xi^* \cdot (\Omega^\mu_\nu - \omega^\mu_\alpha \wedge \omega^\alpha_\nu) + d(\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu) \\ &= \xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu - (\xi^* \cdot \omega^\mu_\alpha)\omega^\alpha_\nu + (\xi^* \cdot \omega^\alpha_\nu)\omega^\mu_\alpha + d(\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Então, lembrando que para $L = 1 + \Lambda$ a Eq. (5.2) implica em que

$$\delta\omega = -d\Lambda + \Lambda\omega - \omega\Lambda, \tag{5.25}$$

e tendo em vista que $\Lambda^\mu_\nu = \xi^* \cdot \omega^\mu_\nu$ (Eq. 5.20), temos:

$$\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu - \delta\omega^\mu_\nu. \tag{5.26}$$

Substituindo as Eqs. (5.23) e (5.26) na Eq. (5.10) obtemos:

$$\begin{aligned} \int \pounds_\xi \mathcal{L}_m &= \int [*T_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Theta^\mu) + *T_\mu \wedge D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) - *T_\mu \wedge \delta\vartheta^\mu \\ &\quad *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu) - *S^\nu_\mu \wedge \delta\omega^\mu_\nu] \end{aligned} \tag{5.27}$$

Agora, por definição,

$$\int \delta\mathcal{L}_m = \int \left[*T_\mu \wedge \delta\vartheta^\mu + *S^\nu_\mu \wedge \delta\omega^\mu_\nu + *\Sigma_A \wedge \delta\phi^A\right] = 0, \tag{5.28}$$

pois $\mathcal{L}_m$ foi suposta invariante sob transformações de Lorentz locais.

Se $*\Sigma_A = 0$, isto é, se as equações de campo para ϕ^A são satisfeitas, podemos usar a Eq. (5.27) na Eq. (5.28) e obtemos:

$$\begin{aligned} \int \pounds_\xi \mathcal{L}_m &= \int \left[*T_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Theta^\mu) + *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu) - D(*T_\mu \xi^* \cdot \vartheta^\mu) + (D * T_\mu)\xi^* \cdot \theta^\mu\right] \\ &= \int \left[*T_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Theta^\mu) + *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu) + (D * T_\mu)\xi^* \cdot \vartheta^\mu\right] \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde usamos que

$$D[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] = d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] \tag{5.30}$$

e também que

$$\int_U d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] = \int_{\partial U} (\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu = 0 \tag{5.31}$$

sob a hipótese usual de que T^μ se anule na fronteira ∂U de U.

Escrevendo $\xi^* = \xi_\alpha \vartheta^\alpha = \xi^\alpha \vartheta_\alpha$, obtemos finalmente que:

$$\int_U \pounds_\xi \mathcal{L}_m = \int_U \left[*T_\mu \wedge (\vartheta_\alpha \cdot \Theta^\mu) + *S^\nu_\mu \wedge (\vartheta_\alpha \cdot \Omega^\mu_\nu) + d * T_\alpha\right] \xi^\alpha \tag{5.32}$$

Como $\mathcal{L}_m$ é um campo de 4-formas, temos $d(\xi^* \cdot \mathcal{L}_m) = \pounds_\xi \mathcal{L}_m$ e portanto

$$\int_U \pounds_\xi \mathcal{L}_m = \int_U d(\xi^* \cdot \mathcal{L}_m) = \int_{\partial U} \xi^* \cdot \mathcal{L}_m = 0, \tag{5.33}$$

novamente sob as hipótese usual de que $\mathcal{L}_m$ se anule na fronteira de U.

Assim, sendo ξ um campo vetorial arbitrário, a Eq. (5.32) implica em que

$$D * T_\alpha + *T_\alpha \wedge (\vartheta^\alpha \cdot \Theta^\mu) + *S^\nu_\mu \wedge (\vartheta_\alpha \cdot \Omega^\nu_\mu) = 0. \tag{5.34}$$

Colocando-se ainda as formas explícitas de $\boldsymbol{\delta}\vartheta^\mu$ (Eq. 5.20) e de $\boldsymbol{\delta}\omega^\mu_\nu$ (Eq. 5.25) na Eq. (5.28), temos:

$$\begin{aligned}
&\int \left[*T_\mu \wedge \Lambda^\mu_\nu \vartheta^\nu + *S^\nu_\mu \wedge (\Lambda^\mu_\nu \omega^\alpha_\nu - \omega^\mu_\alpha \Lambda^\alpha_\nu - d\Lambda^\mu_\nu) \right] = \\
&= \int \left[*T_\mu \wedge \vartheta^\nu \Lambda^\mu_\nu + *S^\alpha_\mu \wedge \omega^\nu_\alpha \Lambda^\mu_\nu - *S^\nu_\alpha \wedge \omega^\alpha_\mu \Lambda^\mu_\nu + d(*S^\nu_\mu \Lambda^\mu_\nu) - (d * S^\nu_\mu)\Lambda^\mu_\nu \right] \\
&= \int \left[\frac{1}{2}(*T_\mu \wedge \vartheta^\nu - *T^\nu \wedge \vartheta_\mu - d * S^\nu_\mu - \omega^\alpha_\mu \wedge *S^\nu_\alpha - *S^\alpha_\mu \wedge \omega^\nu_\alpha \right] \Lambda^\mu_\nu = 0.
\end{aligned}$$

Então, considerando que os coeficientes Λ^μ_ν são arbitrários, obtemos:

$$D * S^\mu_\nu = \frac{1}{2} (*T_\nu \wedge \vartheta^\mu - *T^\mu \wedge \vartheta_\nu). \tag{5.35}$$

As Eqs. (5.34) e (5.35) são conhecidas usualmente como leis de conservação covariantes, mas o fato é que elas são simplesmente identidades que seguem das hipóteses que utilizamos de que a teoria é invariante sob difeomorfismos e invariante sob a ação local de $Spin_+(1,3) \simeq$ SL(2,$\mathbb{C}$).

É necessário enfatizarmos ainda que estas equações não implicam em nenhuma restrição na forma da ação gravitacional se a geometria é dinâmica, como ocorre na Relatividade Geral.

Em vista destes comentários, podemos afirmar que estas leis de conservação covariantes não possuem nenhuma utilidade. É natural, então, que nos perguntemos em que condições existirão leis de conservação genuínas. A resposta a esta questão será respondida na próxima seção.

2. Leis de Conservação Genuínas

Mostraremos agora que se $\langle M, \gamma, \tau, \nabla \rangle$ admite simetrias, então as Eqs. (5.34) e (5.35) podem ser usadas para a construção de 3-formas fechadas, das quais resulta a existência de leis de conservação. Apresentamos este resultado como segue:

Proposição 5.2 *Para cada vetor de Killing $\xi \in \sec(TM)$ de $\langle M, \gamma, \tau, \nabla \rangle$, i.e., para cada campo vetorial $\xi \in \sec(TM)$ tal que*

$$\pounds_\xi \gamma = 0 \qquad \text{e} \qquad \pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0, \tag{5.36}$$

onde $\boldsymbol{T}$ é o tensor de torção da conexão ∇, temos:

$$d\left[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu + (\vartheta^\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) * S^\nu_\mu \right] = 0, \tag{5.37}$$

onde $L_\xi = \xi^* \cdot D + Di_\xi$ *é a chamada derivada de Lie covariante.*

Para demonstrarmos esta proposição, precisamos de alguns resultados preliminares, que são introduzidos no que se segue.

Proposição 5.3 $\pounds_\xi \vartheta^\mu = \boldsymbol{\delta} \vartheta^\mu$ *e* $\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \boldsymbol{\delta} \omega^\mu_\nu$ *se e somente se* $\pounds_\xi \gamma = 0$ *e* $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$.

Prova Mostremos primeiramente que se $\pounds_\xi \vartheta^\mu = \boldsymbol{\delta} \vartheta^\mu$, então $\pounds_\xi \gamma = 0$. Temos:

$$\pounds_\xi \gamma = \eta_{\mu\nu} (\pounds_\xi \vartheta^\mu) \otimes \vartheta^\nu + \eta_{\mu\nu} \vartheta^\mu \otimes (\pounds_\xi \vartheta^\nu). \tag{5.38}$$

Por outro lado, tendo em vista que γ (e também $\boldsymbol{T}$) é invariante sob transformações de Lorentz locais, temos também:

$$\boldsymbol{\delta} \gamma = \eta_{\mu\nu} \boldsymbol{\delta} \vartheta^\mu \otimes \vartheta^\nu + \eta_{\mu\nu} \vartheta^\mu \otimes \boldsymbol{\delta} \vartheta^\nu = 0. \tag{5.39}$$

Assim, se $\boldsymbol{\delta} \vartheta^\mu = \pounds_\xi \vartheta^\mu$, segue que $\pounds_\xi \gamma = 0$.

Inversamente, se $\pounds_\xi \gamma = 0$, temos:

$$\eta_{\mu\nu} (\pounds_\xi \vartheta^\mu) \otimes \vartheta^\nu + \eta_{\mu\nu} \vartheta^\mu \otimes (\pounds_\xi \vartheta^\nu) = 0$$

e escrevendo $\pounds_\xi \vartheta^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \vartheta^\beta$, segue que $(\eta_{\mu\beta} \Lambda^\mu_\alpha + \eta_{\alpha\mu} \Lambda^\mu_\beta) \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta = 0$, ou seja,

$$\Lambda_{\beta\alpha} + \Lambda_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.40}$$

e portanto $\Lambda_{\beta\alpha} \in spin_+(1,3)$.

A prova de que se $\boldsymbol{\delta} \omega^\mu_\nu = \pounds_\xi \omega^\mu_\nu$ então $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$ é trivial. No que segue, demonstramos a recíproca, isto é, que se $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = o$, então $\boldsymbol{\delta} \omega^\mu_\nu = \pounds_\xi \omega^\mu_\nu$. Temos:

$$\pounds_\xi \boldsymbol{T} = \pounds_\xi \Theta^\mu \otimes \boldsymbol{a}_\mu + \Theta^\mu \otimes \pounds_\xi \boldsymbol{a}_\mu.$$

Então, colocando $\pounds_\xi \boldsymbol{a}_\mu = -\Lambda^\beta_\mu \boldsymbol{a}_\beta$ e supondo que $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$, concluimos que

$$\pounds_\xi \Theta^\mu = \Lambda^\mu_\beta \Theta^\beta \tag{5.41}$$

que é uma transformação de Lorentz infinitesimal das formas de torção.

Por outro lado, levando em conta a primeira equação de estrutura de Cartan, obtemos:

$$\begin{aligned}
\pounds_\xi \Theta^\mu &= \pounds_\xi d\vartheta^\mu + (\pounds_\xi \omega^\mu_\nu) \wedge \vartheta^\nu + \omega^\mu_\nu \wedge (\pounds_\xi \vartheta^\nu) \\
&= d(\Lambda^\mu_\nu \vartheta^\nu) + (\pounds_\xi \omega^\mu_\nu) \wedge \vartheta^\nu + \omega^\mu_\nu \wedge (\Lambda^\nu_\alpha \vartheta^\alpha) \\
&= d\Lambda^\mu_\nu \wedge \vartheta^\nu + \Lambda^\mu_\nu d\vartheta^\alpha + (\pounds_\xi \omega^\mu_\nu) \wedge \vartheta^\nu + \Lambda^\nu_\alpha \omega^\mu_\nu \wedge \vartheta^\alpha
\end{aligned} \tag{5.42}$$

e também, usando a Eq. (5.41),

$$\pounds_\xi \Theta^\mu = \Lambda^\mu_\beta d\vartheta^\beta + \Lambda^\mu_\beta \omega^\beta_\nu \wedge \vartheta^\nu \tag{5.43}$$

Das Eqs. (5.42) e (5.43) concluimos que $(\pounds_\xi \omega^\mu_\nu) \wedge \vartheta^\nu = \Lambda^\mu_\beta \omega^\beta_\nu \wedge \vartheta^\nu - \Lambda^\beta_\nu \omega^\mu_\beta \wedge \vartheta^\nu - d\Lambda^\mu_\nu \wedge \vartheta^\nu$, isto é,

$$\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\beta \omega^\beta_\nu - \Lambda^\beta_\nu \omega^\mu_\beta - d\Lambda^\mu_\nu. \tag{5.44}$$

Portanto, lembrando a Eq. (5.25) obtemos finalmente $\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \delta\omega^\mu_\nu$ ■

Corolário *$\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu$ é um elemento de $spin_+(1,3)$ se e somente se $\pounds_\xi \gamma = 0$.*

Prova A derivada de Lie covariante de ϑ^μ é dada por:

$$\begin{aligned} L_\xi \vartheta^\mu &= \xi^* \cdot D\vartheta^\mu + D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) \\ &= \xi^* \cdot (d\vartheta^\mu + \omega^\mu_\nu \wedge \vartheta^\nu) + d(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) + \omega^\mu_\nu(\xi^* \cdot \vartheta^\nu) \\ &= \pounds_\xi \vartheta^\mu + (\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu - (\xi^* \cdot \vartheta^\nu)\omega^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu(\xi^* \cdot \vartheta^\nu) \\ &= \pounds_\xi \vartheta^\mu + (\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu \\ &= (\Lambda^\mu_\nu + \xi^* \cdot \omega^\mu_\nu)\vartheta^\nu, \end{aligned}$$

onde colocamos $\pounds_\xi \vartheta^\mu = \Lambda^\mu_\nu \vartheta^\nu$. Então,

$$\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu = \Lambda^\mu_\nu + \xi^* \cdot \omega^\mu_\nu. \tag{5.45}$$

Porém, $\xi^* \cdot \omega^\mu_\nu$ é um elemento de $spin_+(1,3)$ e portanto teremos $\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu \in spin_+(1,3)$ se e somente se $\Lambda^\mu_\nu \in Spin_+(1,3)$. Mas de acordo com a Prop. 5.2 isto se verifica se e somente se $\pounds_\xi \gamma = 0$. ■

Proposição 5.4 *Se $\pounds_\xi \gamma = 0$ e $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$, então verifica-se a identidade:*

$$D(\vartheta_\mu \cdot L_\xi \vartheta^\nu) + \xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu = 0 \tag{5.46}$$

Prova Usando a definição da derivada exterior covariante e da derivada de Lie covariante, obtemos:

$$\begin{aligned} D(\vartheta_\mu \cdot L_\xi \vartheta^\nu) &= d(\vartheta_\mu \cdot L_\xi \vartheta^\nu) + \omega^\alpha_\mu(\vartheta_\alpha \cdot L_\xi \vartheta^\nu) - (\vartheta_\mu \cdot L_\xi \vartheta^\alpha)\omega^\nu_\alpha \\ &= d\{\vartheta_\mu \cdot [\pounds_\xi \vartheta^\nu + (\xi^* \cdot \omega^\nu_\beta)\vartheta^\beta]\} \\ &+ \{\vartheta_\alpha \cdot [\pounds_\xi \vartheta^\nu + (\xi^* \cdot \omega^\nu_\beta)\vartheta^\beta]\}\omega^\alpha_\mu \\ &- \{\vartheta_\mu \cdot [\pounds_\xi \vartheta^\alpha + (\xi^* \cdot \omega^\alpha_\beta)\vartheta^\beta]\}\omega^\nu_\alpha, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} D(\vartheta_\mu \cdot L_\xi \vartheta^\nu) &= \pounds_\xi \omega^\nu_\mu - \xi^* \cdot (d\omega^\nu_\mu + \omega^\nu_\alpha \wedge \omega^\alpha_\mu) \\ &+ [d(\vartheta_\mu \cdot \pounds_\xi \vartheta^\nu) + (\vartheta_\mu \cdot \pounds_\xi \vartheta^\alpha)\omega^\nu_\alpha - (\vartheta_\alpha \cdot \pounds_\xi \vartheta^\nu)\omega^\alpha_\mu]. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Se $\pounds_\xi \gamma = 0$ temos $\vartheta_\alpha \cdot \pounds_\xi \vartheta^\nu \in spin_+(1,3)$ e a expressão entre colchetes no segundo membro desta equação é uma transformação de Lorentz infinitesimal dos ω^μ_ν. Se, além disto, $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$, então $\pounds_\xi \omega^\mu_\nu = \delta\omega^\mu_\nu$ e o terceiro termo do membro direito desta equação é cancelado pelo primeiro. Então, levando em conta a segunda equação de estrutura de Cartan, obtemos a Eq. (5.46). ■

Estamos agora em condições de provar a Prop. 5.2. Para isto, combinamos os resultados das Props. 5.3 e 5.4 com as identidades dadas pelas Eqs. (5.34) e (5.35). Temos:

$$\begin{aligned} d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] &= D[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T^\mu] \\ &= D(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) \wedge *T_\mu + (\xi^* \cdot \vartheta^\mu) D * T_\mu \\ &= (L_\xi \vartheta^\mu) \wedge *T_\mu - (\xi^* \cdot \Theta^\mu) \wedge *T_\mu + (\xi^* \cdot \vartheta^\mu) D * T_\mu, \end{aligned}$$

isto é,

$$d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] = (L_\xi \vartheta^\mu) \wedge *T_\mu - *S^\mu_\nu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu) \tag{5.48}$$

Note porém que se $A \in \sec(\Lambda^1 M)$, então temos $\vartheta^\nu \wedge (\vartheta_\nu \cdot A) = A$. Assim, podemos escrever a Eq. (5.48) como:

$$d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] = -(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) \wedge *T_\mu \wedge \vartheta^\nu - *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu). \tag{5.49}$$

Se $\pounds_\xi \gamma = 0$, temos, pelo corolário da Prop. 5.3, que $\xi^* \cdot L_\xi \vartheta^\mu$ é um elemento de $spin_+(1,3)$. Neste caso, a Eq. (5.49) fica:

$$\begin{aligned} d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] &= -\frac{1}{2}(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu)(*T_\mu \wedge \vartheta^\nu - *T^\nu \wedge \vartheta_\mu) - *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu) \\ &= -(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) D * S^\nu_\mu - *S^\nu_\mu \wedge (\xi^* \cdot \Omega^\mu_\nu). \end{aligned} \tag{5.50}$$

Por outro lado, se $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$, então, em vista da Prop. 5.4,

$$\begin{aligned} d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] &= -D(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) \wedge *S^\nu_\mu - (\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) D * S^\nu_\mu \\ &= -D[(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) * S^\nu_\mu] = d[(\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) * S^\nu_\mu] \end{aligned} \tag{5.51}$$

Finalmente, se $\pounds_\xi \gamma = 0$ e $\pounds_\xi \boldsymbol{T} = 0$, temos:

$$d[(\xi^* \cdot \vartheta^\mu) * T_\mu] + (\vartheta_\nu \cdot L_\xi \vartheta^\mu) * S^\nu_\mu = 0. \tag{5.52}$$

O fato de que simetrias levam à existência de 3-formas fechadas foi originariamente demonstrado por Trautman.[30]

2.1. Pseudo-potenciais em Relatividade Geral

No que segue $\langle M, g, \tau_g, \nabla \rangle$ é um espaço-tempo Lorentziano que modela o "campo gravitacional" g na Teoria de Relatividade Geral de Einstein.

Uma teoria de campos ϕ^A em interação com o campo gravitacional g; aqui representado, como no próximo capítulo, pelos campos ϑ^μ, é descrita por uma densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_m, \tag{5.53}$$

onde

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \Omega^{\mu\nu} \wedge \star(\vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu) \tag{5.54}$$

é a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert e

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\vartheta^\mu, \omega^\mu_\nu, \phi^A, d\phi^A) \tag{5.55}$$

é a densidade Lagrangeana associada à matéria e aos campos presentes $(A = 1, \ldots, m)$.

Como será visto no Cap. 6, o funcional de Euler-Lagrange para a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert são as correntes de Einstein $\star G^\mu$,

$$\star G^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_E}{\delta \vartheta_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \vartheta_\mu} + d\left(\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial d\vartheta_\mu}\right) = \star t^\mu + d \star \mathcal{G}^\mu, \tag{5.56}$$

onde:

$$\star^{-1}\mathcal{G}^{\sigma} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\wedge\star(\vartheta^{\alpha}\wedge\vartheta^{\beta}\wedge\vartheta^{\sigma}) \tag{5.57}$$

$$\star^{-1}t^{\sigma} = -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\wedge[\omega^{\sigma}_{\rho}\wedge\star(\vartheta^{\alpha}\wedge\vartheta^{\beta}\wedge\vartheta^{\rho}) + \omega^{\beta}_{\rho}\wedge\star(\vartheta^{\alpha}\wedge\vartheta^{\rho}\wedge\vartheta^{\sigma})]. \tag{5.58}$$

As equações de campo para o campo gravitacional resultam, então, em:

$$\star G^{\mu} = d\star\mathcal{G}^{\mu} + \star t^{\mu} = -\star T^{\mu}, \tag{5.59}$$

onde

$$\star T^{\mu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\vartheta_{\mu}}. \tag{5.60}$$

Os campos $\star\mathcal{G}^{\mu}$ são chamados de *superpotenciais* do campo gravitacional e os campos t^{μ} são chamados de *1-formas de energia-momento* do campo gravitacional. Observe que podemos escrever

$$t^{\mu} = t^{\mu}_{\nu}\vartheta^{\nu},$$

mas as funções t^{μ}_{ν} não se transformam como as componentes de um tensor, sob a ação local do grupo de Lorentz. Por esta razão, o objeto geométrico cujas componentes no referencial $\langle\vartheta^{\mu}\rangle$ são as funções t^{μ}_{ν} é chamado de *pseudo-tensor de energia-momento* do campo gravitacional.

É importante enfatizar ainda que a decomposição das correntes de Einstein $\star G^{\mu}$ na forma dada pela Eq. (5.59) não é única. Na verdade existem infinitas decomposições possíveis. Para vermos a razão disto, observemos que

$$D\star G^{\mu} = d\star G^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu}\wedge\star G^{\nu} = 0$$

Então, se existe $\star t^{\mu}$ tal que

$$d\star t^{\mu} = -\omega^{\mu}_{\nu}\wedge\star G^{\nu},$$

segue que

$$d(\star G^{\mu} - \star t^{\mu}) = 0 \tag{5.61}$$

e portanto $\star t^{\mu}$ fica determinada a menos de uma 1-forma fechada. Naturalmente,

$$\star G^{\mu} - \star t^{\mu} = -\star T^{\mu} - \star t^{\mu} = d\star\mathcal{G}^{\mu}. \tag{5.62}$$

Usualmente se identifica $\star(T^{\mu}+t^{\mu})$ com as correntes de energia-momento total do sistema descrito pela densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ (Eq. 5.53). Em vista das considerações acima e das "leis de conservação" dadas pelas Eqs. (5.61 é tentador definir-se o quadrimomento total do sistema constituido pelo campo gravitacional e pela matéria por:

$$P_{\mu} = -\int_{U}\star(T_{\mu}+t_{\mu}) = \int_{U} d\star\mathcal{G}_{\mu} = \int_{\partial U}\star\mathcal{G}_{\mu}. \tag{5.63}$$

Isto é o que de fato foi feito originariamente por Einstein. Contudo, como os $\star\mathcal{G}_{\mu}$ não se transformam como tensores sob a ação local de $Spin_{+}(1,3)$, surge o problema de se escolher o calibre de coordenadas, isto é, a carta local $\langle x^{\mu}\rangle$ naturalmente adaptada a um dado sistema de referência $f_0 \in \sec(TU)$.

Porém, cartas locais $\langle x^{\mu}\rangle$ e $\langle \bar{x}^{\mu}\rangle$ tais que $\bar{x}^{\mu} = f^{\mu}(x^1, x^2, x^3)$ são naturalmente adaptadas ao mesmos sistema de referência f_0. Em particular, no caso em que f_0 é um sistema de referência no espaço-tempo de Schwarzschild, Denisov e Logunov[31] mostraram explicitamente que os valores das integrais dadas pelas Eqs. (5.63) depende da carta local $\langle x^\mu \rangle$ ou $\langle \bar{x}^\mu \rangle$ naturalmente adaptada a f_0.

Como último comentário, desejamos observar que diversos autores (vide, por exemplo, Wald[32]) introduziram o conceito matemático rigoroso de espaço-tempo Lorentziano assintoticamente chato como representantes de sistemas isolados. Estes espaço-tempos admitem vetores de Killing assintóticos e pode-se então obter leis de conservação genuínas nestes espaços com a introdução do conceito de 2-formas de Komar. Estes resultados não serão discutidos aqui, pois segundo a filosofia do nosso trabalho o campo gravitacional será interpretado como um campo no sentido de Faraday, isto é, como um campo físico definido no espaço-tempo de Minkowski.

Capítulo 6

Teoria da Gravitação no Espaço-tempo de Minkowski

Na Relatividade Geral, todo campo gravitacional que é solução das equações de Einstein é modelado por um espaço-tempo Lorentziano, isto é, uma quádrupla $\mathbb{E} = \langle E, g, \tau_g, \nabla \rangle$, onde $\langle E, g, \tau_g \rangle$ é uma variedade Lorentziana, ou seja, E é uma variedade paracompacta, conexa, quadridimensional, orientada por τ_g e orientada no tempo. O campo tensorial g é uma métrica Lorentziana de assinatura $(1,3)$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.

O par $\langle T_x E, g_x \rangle$, $x \in E$, é isomorfo ao espaço vetorial de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, que não deve ser confundido com o espaço-tempo de Minkowski, isto é, com o particular espaço-tempo Lorentziano representado pela quádrupla $\mathbb{M} = \langle M, \gamma, \tau_\gamma, D \rangle$, onde γ é uma métrica Lorentziana, D é a conexão de Levi-Civita de γ, que satisfaz $D\gamma = 0$, $\boldsymbol{T}[D] = 0$ e $\boldsymbol{R}[D] = 0$.

Nosso propósito no que segue é mostrar que a teoria de Einstein admite uma interpretação natural como uma teoria de campos, no sentido das demais teorias de campo da física. Nesta interpretação, o campo gravitacional é descrito como um campo físico definido no espaço-tempo de Minkowski (vide, por exemplo, [32–42]). O acoplamento da matéria e outros campos presentes com o campo gravitacional é descrito por quatro potenciais ϑ^μ e a densidade Lagrangeana da teoria é de tipo Yang-Mills, com um termo de auto-interação e um termo de fixação de calibre.

Observamos que se encontra na literatura diversas apresentações da teoria do campo gravitacional como uma teoria de campos no espaço-tempo de Minkowski. No entanto, existe uma grande controvérsia entre os diferentes proponentes de tais teorias, devido principalmente ao fato das construções destas teorias serem baseadas em postulados de natureza *ad hoc*. Seguimos aqui uma abordagem diferente da usual, que se tornou possível devido a todo o formalismo que desenvolvemos nos capítulos anteriores.

Na nossa formulação, as equações de campo são derivadas de um princípio de ação e a densidade Lagrangeana do campo gravitacional é de tipo Yang-Mills. Além disto, quando escrita no espaço-tempo de Minkowski, ela é invariante sob a ação do grupo de Poincaré e tem o grupo das translações T(4) como grupo de calibre local. Mostramos que a escolha da densidade Lagrangeana para o campo gravitacional é bastante restrita dentro do nosso formalismo.

1. Equações de Einstein

1.1. Espaço Livre

Seja $I\!E = \langle E, \nabla, g, \tau_g \rangle$ uma variedade Lorentziana orientada de dimensão 4, onde $g \in \sec(T_0^2 E)$ denota o seu tensor métrico, ∇ é a conexão de Levi-Civita de g e $\tau_g \in \sec(\Lambda^4 E)$ é a 4-forma volume de E.

Denotamos por $C\ell(I\!E)$ o fibrado de Clifford sobre o fibrado cotangente de E, induzido pela forma bilinear $g^{-1} \in \sec(T_2^0 E)$; por "$\vee$" o produto de Clifford natural de $C\ell(I\!E)$; por "$\circ$" o produto interior correspondente e por $\star : \sec(C\ell(I\!E)) \to \sec(C\ell(I\!E))$ o operador de dualidade de Hodge de $C\ell(I\!E)$. Denotamos ainda por $\check{\boldsymbol{\partial}}$ o operador de Dirac fundamental de $C\ell(I\!E)$.

Naturalmente, as equações de estrutura para este espaço são dadas por:

$$\begin{aligned} d\theta^\rho + \omega^\rho_\sigma \wedge \theta^\sigma &= 0 \\ d\theta_\sigma - \omega^\rho_\sigma \wedge \theta_\rho &= 0 \\ d\omega^\rho_\sigma + \omega^\rho_\beta \wedge \omega^\beta_\sigma &= \Omega^\rho_\sigma, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $d \equiv \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge$ é a parte exterior do operador de Dirac fundamental da variedade; $\langle \theta^\rho \rangle$ é um referencial móvel arbitrário sobre T^*E; ω^ρ_σ são os coeficientes da conexão ∇ neste referencial e Ω^ρ_σ são as 2-formas de curvatura da variedade. Note também que temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} d\theta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} &= -\omega^{\alpha_1}_\beta \wedge \theta^{\beta \alpha_2 \ldots \alpha_r} - \cdots - \omega^{\alpha_r}_\beta \wedge \theta^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} \beta} \\ d \star \theta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} &= -\omega^{\alpha_1}_\beta \wedge \star\theta^{\beta \alpha_2 \ldots \alpha_r} - \cdots - \omega^{\alpha_r}_\beta \wedge \star\theta^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} \beta}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde $\theta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \theta^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\alpha_r}$.

As equações de Einstein para o espaço livre são obtidas da variação da seguinte integral de ação:

$$\mathcal{S}_E = \int_U \mathcal{L}_E, \tag{6.3}$$

onde $U \subseteq E$ é um aberto de E e $\mathcal{L}_E$ é a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert, dada por: (o fator 1/2 é introduzido por conveniência)

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} R \tau_g, \tag{6.4}$$

onde $R = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é a curvatura escalar da variedade.

Esta densidade Lagrangeana é escrita no fibrado de Clifford como:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta), \tag{6.5}$$

onde $\Omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho} \Omega^\rho_\beta$ são as 2-formas de curvatura da variedade. De fato, temos $\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) = (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \wedge \star\Omega_{\alpha\beta} = -\star[\theta^\alpha \circ (\theta^\beta \circ \Omega_{\alpha\beta})] = \star(\theta^\alpha \circ R_\alpha) = \star R = R\tau_g = 2\mathcal{L}_E$.

As equações de campo para a densidade Lagrangeana dada pela Eq. (6.5) são obtidas de

$$\delta \mathcal{S}_E = \int_U \delta \mathcal{L}_E = 0. \tag{6.6}$$

A variação de $\mathcal{L}_E$ é calculada como segue:

Proposição 6.1 *Sejam $\omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma_\beta$ as 1-formas da conexão ∇ em um referencial móvel arbitrário $\langle\theta^\rho\rangle$ sobre T^*E. A variação da densidade Lagrangeana dada pela Eq. (6.5) em relação aos campos de 1-formas θ_ρ e $\omega_{\alpha\beta}$, tomados como variáveis independentes, é dada por:*

$$\delta\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}d[\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] + \frac{1}{2}\delta\theta_\sigma \wedge \Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma). \tag{6.7}$$

Prova Vamos demonstrar este resultado para um referencial ortonormal, isto é, tomando $g^{\alpha\beta} = \theta^\alpha \circ \theta^\beta \equiv \eta^{\alpha\beta}$. Para uma prova mais completa, vide, por exemplo, [28].

Temos $\delta\mathcal{L}_E = \delta[\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)]$, ou seja,

$$\delta\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\delta\Omega_{\alpha\beta}) \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) + \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} \wedge [\delta \star (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)]. \tag{6.8}$$

Além disto, segue da Eq. (6.2e $\delta\Omega_{\alpha\beta} = \delta d\omega_{\alpha\beta} + \delta(\omega_{\alpha\rho} \wedge \omega^\rho_\beta) = d\delta\omega_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\rho} \wedge \omega^\rho_\beta + \omega_{\alpha\rho} \wedge \delta\omega^\rho_\beta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) &= d\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \\ &+ \delta\omega_{\alpha\rho} \wedge \omega^\rho_\beta \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \\ &+ \omega_{\alpha\rho} \wedge \delta\omega^\rho_\beta \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta). \end{aligned}$$

Desenvolvendo o primeiro termo do membro direito desta equação, obtemos $d\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) = d[\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] + \delta\omega_{\alpha\beta} \wedge d\star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) = d[\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] - \delta\omega_{\alpha\beta} \wedge [\omega^\alpha_\rho \wedge \star(\theta^\rho \wedge \theta^\beta) + \omega^\beta_\rho \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\rho)] = d[\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] - \delta\omega_{\alpha\rho} \wedge \omega^\rho_\beta \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) - \omega_{\alpha\rho} \wedge \delta\omega^\rho_\beta \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)$ e concluimos que:

$$\delta\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) = d[\delta\omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)]. \tag{6.9}$$

Para obter a variação do segundo termo do membro direito da Eq. (6.8) basta levar em conta que $\delta \star (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) = \delta\theta_\sigma \wedge [\theta^\sigma \circ \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] = \delta\theta_\sigma \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma)$. Então,

$$\Omega_{\alpha\beta} \wedge [\delta \star (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)] = \delta\theta_\sigma \wedge \Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma). \tag{6.10}$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (6.9) e (6.10) na Eq. (6.8), obtemos a Eq. (6.7). ∎

Na expressão de $\delta\mathcal{L}_E$ dada pela Eq. (6.7), o primeiro termo é uma diferencial exata e portanto não contribui para a variação da ação. Então, considerando variações arbitrárias dos campos de 1-formas θ_σ e $\omega_{\alpha\beta}$, teremos $\delta\mathcal{S}_E = 0$ se e somente se

$$\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma) = 0. \tag{6.11}$$

Porém, $\Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma) = -\star[\Omega_{\alpha\beta} \circ (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma)] = -\frac{1}{2}R_{\alpha\beta\mu\nu}\star[\theta^\mu \circ \theta^\nu \circ (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\sigma)] = -2\star(R^\sigma - \frac{1}{2}R\theta^\sigma) = -2\star G^\sigma$. Portanto, a Eq. (6.11) é equivalente a:

$$G^\sigma = R^\sigma - \frac{1}{2}R\theta^\sigma = 0, \tag{6.12}$$

que são as equações de Einstein para o espaço livre.

1.2. Densidade Lagrangeana de Thirring

Em um referencial ortonormal, podemos escrever as 1-formas da conexão ∇ como segue:

Proposição 6.2 *Sejam $\varpi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\rho}\varpi^{\rho}_{\beta}$ os coeficientes da conexão ∇ em um referencial móvel ortonormal arbitrário $\langle\vartheta^{\alpha}\rangle$ sobre T^*E. Então:*

$$\varpi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\vartheta_{\alpha} \circ d\vartheta_{\beta} - \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} - (\vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\sigma})\vartheta^{\sigma}], \tag{6.13}$$

ou ainda,

$$\varpi_{\alpha\beta} = \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} - \vartheta_{\alpha} \circ d\vartheta_{\beta} + \frac{1}{2}\vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ (\vartheta^{\sigma} \wedge d\vartheta_{\sigma}). \tag{6.14}$$

Prova Da Eq. (6.1b) obtemos $\vartheta_{\alpha} \circ d\vartheta_{\beta} = \vartheta_{\alpha} \circ (\varpi^{\sigma}_{\beta} \wedge \vartheta_{\sigma}) = (\vartheta_{\alpha} \circ \varpi^{\sigma}_{\beta})\vartheta_{\sigma} - \varpi_{\alpha\beta}$, de modo que

$$\varpi_{\alpha\beta} = -\vartheta_{\alpha} \circ d\vartheta_{\beta} + (\vartheta_{\alpha} \circ \varpi^{\sigma}_{\beta})\vartheta_{\sigma}$$

e também,

$$\varpi_{\beta\alpha} = -\vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} + (\vartheta_{\beta} \circ \varpi^{\sigma}_{\alpha})\vartheta_{\sigma}.$$

Então, levando em conta que, em um referencial ortonormal, $\varpi_{\beta\alpha} = -\varpi_{\alpha\beta}$ e que $\vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\sigma} = \vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ (\varpi^{\rho}_{\sigma} \wedge \vartheta_{\rho}) = -\vartheta_{\beta} \circ \varpi_{\alpha\sigma} + \vartheta_{\alpha} \circ \varpi_{\beta\sigma}$, obtemos a Eq. (6.13).

Agora, o terceiro termo do membro direito da Eq. (6.13) também pode ser escrito $\vartheta^{\sigma} \wedge (\vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\sigma}) = -\vartheta_{\alpha} \circ [\vartheta^{\sigma} \wedge (\vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\sigma})] + \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} = -\vartheta_{\alpha} \circ [-\vartheta_{\beta}(\vartheta^{\sigma} \wedge d\vartheta_{\sigma}) + d\vartheta_{\beta}] + \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} = -\vartheta_{\alpha} \circ d\vartheta_{\beta} + \vartheta_{\beta} \circ d\vartheta_{\alpha} + \vartheta_{\alpha} \circ \vartheta_{\beta} \circ (\vartheta^{\sigma} \wedge d\vartheta_{\sigma})$, de onde obtemos a Eq. (6.14). ■

Como consequência da Prop. 6.1, a Lagrangeana $\mathcal{L}_E$ também pode ser escrita unicamente em termos dos campos de 1-formas ϑ^{α} de um referencial móvel ortonormal arbitrário sobre T^*E e dos diferenciais destas 1-formas. De fato, temos:[26, 27, 28]

Proposição 6.3 *Dado um referencial móvel ortonormal arbitrário $\langle\vartheta^{\alpha}\rangle$ sobre T^*E, temos:*

$$\mathcal{L}_E = -d(\vartheta^{\alpha} \wedge \star d\vartheta_{\alpha}) - \frac{1}{2}d\vartheta^{\alpha} \wedge \star d\vartheta_{\alpha} + \frac{1}{2}\delta\vartheta^{\alpha} \wedge \star\delta\vartheta_{\alpha} + \frac{1}{4}(d\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta_{\alpha}) \wedge \star(d\vartheta^{\beta} \wedge \vartheta_{\beta}), \tag{6.15}$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_E = -d(\vartheta^{\alpha} \wedge \star d\vartheta_{\alpha}) - \frac{1}{2}(d\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta}) \wedge \star(d\vartheta_{\beta} \wedge \vartheta_{\alpha}) + \frac{1}{4}(d\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta_{\alpha}) \wedge \star(d\vartheta^{\beta} \wedge \vartheta_{\beta}). \tag{6.16}$$

Prova Levando em conta as equações de estrutura $\Omega_{\alpha\beta} = d\varpi_{\alpha\beta} + \varpi_{\alpha\rho} \wedge \varpi^{\rho}_{\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_E &= \frac{1}{2}d\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta}) + \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\rho} \wedge \varpi^{\rho}_{\beta} \wedge \star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta}) \\
&= \frac{1}{2}d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta})] + \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge d\star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta}) + \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\rho} \wedge \varpi^{\rho}_{\beta} \wedge \star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta}) \\
&= \frac{1}{2}d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^{\alpha} \wedge \vartheta^{\beta})] - \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^{\alpha}_{\rho} \wedge \star(\vartheta^{\rho} \wedge \vartheta^{\beta}),
\end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (6.2b).

Observamos agora que $\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta) = -\star[\varpi_{\alpha\beta} \circ (\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta)] = \star[(\varpi_{\alpha\beta} \circ \vartheta^\beta)\vartheta^\alpha - (\varpi_{\alpha\beta} \circ \vartheta^\alpha)\vartheta^\beta] = 2\star[(\varpi_{\alpha\beta} \circ \vartheta^\beta)\vartheta^\alpha]$. Por outro lado, segue da Eq. (6.1) que $\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha = \vartheta^\alpha \wedge \star(\omega_{\beta\alpha} \wedge \vartheta^\beta) = -\star[\vartheta^\alpha \circ (\varpi_{\beta\alpha} \wedge \vartheta^\beta)] = -\star(\varpi_{\alpha\beta} \circ \vartheta^\beta)\vartheta^\alpha$. Portanto, $d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta)] = -d(\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha)$ e obtemos:

$$\mathcal{L}_E = -d(\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha) - \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho \wedge \star(\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta). \tag{6.17}$$

Desenvolvendo o segundo termo do membro direito da Eq. (6.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho \wedge \star(\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta) &= \vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta \wedge \star(\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho) \\
&= -\vartheta^\rho \wedge \star[\vartheta^\beta \circ (\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho)] \\
&= -\vartheta^\rho \wedge \star[(\vartheta^\beta \circ \varpi_{\alpha\beta})\varpi^\alpha_\rho - (\vartheta^\beta \circ \varpi^\alpha_\rho)\varpi_{\alpha\beta}] \\
&= -\star[(\vartheta^\beta \circ \varpi_{\alpha\beta})(\vartheta^\rho \circ \varpi^\alpha_\rho) - (\vartheta^\beta \circ \varpi^\alpha_\rho)(\vartheta^\rho \circ \varpi_{\alpha\beta})]. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

Porém, $(\vartheta^\beta \circ \varpi^\alpha_\rho)(\vartheta^\rho \circ \varpi_{\alpha\beta}) = \varpi_{\alpha\beta} \circ [(\vartheta^\beta \circ \varpi^\alpha_\rho)\vartheta^\rho] = \varpi_{\alpha\beta} \circ [\vartheta^\beta \circ (\varpi^\alpha_\rho \wedge \vartheta^\rho) + \varpi^{\alpha\beta}] = (\varpi_{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\beta) \circ (\varpi^\alpha_\rho \wedge \vartheta^\rho) + \varpi_{\alpha\beta} \circ \varpi^{\alpha\beta}$. Então, $\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho \wedge \star(\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta) = -(\vartheta^\beta \circ \varpi_{\alpha\beta})(\vartheta^\rho \wedge \star\varpi^\alpha_\rho) - (\varpi_{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\beta) \wedge \star(\varpi^\alpha_\rho \wedge \vartheta^\rho) + \varpi_{\alpha\beta} \wedge \star\varpi^{\alpha\beta}$, ou ainda, lembrando que $d\vartheta^\alpha = -\varpi^\alpha_\rho \wedge \vartheta^\rho$, $d\star\vartheta^\alpha = -\varpi^\alpha_\rho \wedge \star\vartheta^\rho$ e que $\delta\vartheta_\alpha = -\star^{-1} d \star \vartheta_\alpha = -\varpi_{\alpha\beta} \circ \vartheta^\beta$,

$$\varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho \wedge \star(\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta) = -\delta\vartheta_\alpha \wedge \star\delta\vartheta^\alpha - d\vartheta_\alpha \wedge \star d\vartheta^\alpha + \varpi_{\alpha\beta} \wedge \star\varpi^{\alpha\beta}.$$

Contudo, segue da Eq. (6.14) que $\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star\varpi^{\alpha\beta} = \varpi_{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta^\beta - \varpi_{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\beta \wedge \star d\vartheta^\alpha - \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \star(d\vartheta^\sigma \wedge \vartheta_\sigma) = 2d\vartheta_\alpha \wedge \star d\vartheta^\alpha - \frac{1}{2}d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)$ e finalmente obtemos a Eq. (6.15).

Além disto, notando que $d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \star(d\vartheta_\beta \wedge \vartheta_\alpha) = d\vartheta^\alpha \wedge \star[(\vartheta^\beta \circ d\vartheta_\beta) \wedge \vartheta_\alpha + d\vartheta_\alpha] = d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha - (\vartheta_\alpha \circ d\vartheta^\alpha) \wedge \star(\vartheta_\beta \circ d\vartheta^\beta) = d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha - (\delta\vartheta_\alpha \wedge \vartheta^\alpha) \wedge \star(\delta\vartheta_\beta \wedge \vartheta^\beta) = d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha - \delta\vartheta^\alpha \wedge \star\delta\vartheta_\alpha$, obtemos a Eq. (6.16). ■

Observe ainda que escrevendo $\varpi^\rho_\beta = L^\rho_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha$, obtemos, da Eq. (6.18):

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{2}g^{\beta\mu}(L^\sigma_{\mu\rho}L^\rho_{\sigma\beta} - L^\sigma_{\sigma\rho}L^\rho_{\mu\beta})\tau_g - \frac{1}{2}d(\vartheta^\mu \wedge \star d\vartheta_\mu). \tag{6.19}$$

Proposição 6.4 *As 1-formas de Einstein $G^\sigma = R^\sigma - \frac{1}{2}R\vartheta^\sigma$ podem ser escritas como:*

$$\star G^\sigma = d \star \mathcal{G}^\sigma + \star t^\sigma, \tag{6.20}$$

onde:

$$\star^{-1} \mathcal{G}^\sigma = \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) \tag{6.21}$$

$$\star^{-1} t^\sigma = -\frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta} \wedge [\varpi^\sigma_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\rho) + \varpi^\beta_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\rho \wedge \vartheta^\sigma)]. \tag{6.22}$$

Prova Temos $2\star G^\sigma = \Omega_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) = d\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) + \varpi_{\alpha\rho} \wedge \varpi^\rho_\beta \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma)$. Porém, $d\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) = d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) + \varpi_{\alpha\beta} \wedge d\star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma)] =$

$d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) - \varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\alpha_\rho \wedge \star(\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma) - \varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\beta_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\rho \wedge \vartheta^\sigma) - \varpi_{\alpha\beta} \wedge \varpi^\sigma_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\rho)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2\star G^\sigma &= d[\varpi_{\alpha\beta} \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\sigma)] \\ &- \varpi_{\alpha\beta} \wedge [\varpi^\sigma_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\rho) + \varpi^\beta_\rho \wedge \star(\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\rho \wedge \vartheta^\sigma)]. \end{aligned}$$

Então, usando as Eqs. (6.21) e (6.22), obtemos a Eq. (6.20). ∎

Segue da proposição acima que também podemos escrever as equações de Einstein na forma:

$$d\star \mathcal{G}^\sigma + \star t^\sigma = \star T^\sigma, \tag{6.23}$$

onde T^σ é o tensor de energia-momento da matéria e dos campos presentes.

1.3. Equações de Einstein no Fibrado de Clifford

As equações de Einstein são escritas, em um referencial móvel qualquer $\langle\theta^\rho\rangle$, como:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = T^\mu_\nu, \tag{6.24}$$

onde T^μ_ν são as componentes do tensor de energia-momento da matéria. Calculando o traço desta equação, obtemos:

$$R - \frac{1}{2}4R = T \Rightarrow R = -T,$$

onde T é o traço do tensor de energia-momento. Assim, também podemos escrever as equações de Einstein na forma:

$$R^\mu_\nu = T^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu T. \tag{6.25}$$

Multiplicando os dois membros da Eq. (6.25) por θ^ν, obtemos:

$$R^\mu = T^\mu - \frac{1}{2}T\theta^\mu. \tag{6.26}$$

onde R^μ são as 1-formas de Ricci e T^μ são chamadas de *1-formas de energia-momento.*

Porém, vimos no Cap. 3 que as 1-formas de Ricci de uma variedade munida de uma estrutura Riemanniana, satisfazem:

$$(\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\theta^\mu = R^\mu, \tag{6.27}$$

onde $\check{\boldsymbol{\partial}}$ é o operador de Dirac fundamental da variedade. Portanto, podemos escrever as equações de Einstein na forma:

$$(\check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}})\theta^\mu = T^\mu - \frac{1}{2}T\theta^\mu. \tag{6.28}$$

Lembrando ainda as relações

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\partial}}^2 &= \check{\boldsymbol{\partial}} \circ \check{\boldsymbol{\partial}} \wedge + \check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}} \circ \\ \check{\boldsymbol{\partial}}^2 &= \check{\boldsymbol{\partial}} \circ \check{\boldsymbol{\partial}} + \check{\boldsymbol{\partial}} \wedge \check{\boldsymbol{\partial}} \end{aligned} \tag{6.29}$$

podemos escrever as Eqs. (6.28) alternativamente como:

$$-(\check{\partial} \circ \check{\partial})\theta^\mu + \check{\partial} \wedge (\check{\partial} \circ \theta^\mu) + \check{\partial} \circ (\check{\partial} \wedge \theta^\mu) = T^\mu - \frac{1}{2}T\theta^\mu. \tag{6.30}$$

Naturalmente, as Eqs. (6.28) ou (6.30) são equivalentes às equações de Einstein. Isto é, estas equações são satisfeitas se e somente se

$$\star G^\mu = \star\left(R^\mu - \frac{1}{2}R\theta^\mu\right) = \star T^\mu, \tag{6.31}$$

onde G^μ são as 1-formas de Einstein.

A Eq. (6.30) é uma equação de onda para os θ^μ e sugere que tomemos estes campos de 1-formas como as variáveis básicas na representação do campo gravitacional. Observe que a Eq. (6.30) é uma *equação intrínseca*, escrita para seções do fibrado de Clifford da variedade. $\langle\theta^\mu\rangle$ não necessita ser um referencial coordenado. Quando $\theta^\mu = \check{\partial} \wedge x^\mu = dx^\mu$ e no calibre $\check{\partial} \circ \theta^\mu = \delta_g\theta^\mu = 0$ (δ_g é o codiferencial de Hodge), a Eq. (6.30) se reduz a

$$-(\check{\partial} \circ \check{\partial})\theta^\mu = T^\mu - \frac{1}{2}T\theta^\mu. \tag{6.32}$$

2. Teoria da Gravitação no Espaço-tempo de Minkowski

Na Prop. 6.3 mostramos que a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert pode ser escrita unicamente em termos dos campos ϑ^μ e de seus diferenciais $d\vartheta^\mu$, onde $\langle\vartheta^\mu\rangle$ é um referencial móvel ortonormal arbitrário sobre a variedade. A menos da parte que é uma diferencial exata, que é irrelevante para nossas considerações, esta densidade Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}_E^{(1)} = -\frac{1}{2}d\vartheta^\mu \wedge \star d\vartheta_\mu - \frac{1}{2}d\star\vartheta^\mu \wedge \star(d\star\vartheta_\mu) + \frac{1}{4}(d\vartheta^\mu \wedge \vartheta_\mu) \wedge \star(d\vartheta_\nu \wedge \vartheta^\nu) \tag{6.33}$$

Escrita desta forma, a densidade Lagrangeana de Einstein-Hilbert é um funcional dos campos de 1-formas ϑ^μ e de seus diferenciais $d\vartheta^\mu$, e não faz referência direta a conceitos geométricos como curvatura, tensor de Ricci, tensor de Einstein, etc. De fato, a única referência a objetos de natureza geométrica que aparece na densidade Lagrangeana acima está no aparecimento do operador de dualidade de Hodge $\star$.

É claro que a partir das equações obtidas podemos recuperar as equações de Einstein na sua formulação usual. Para isto basta atribuir significado geométrico aos campos de 1-formas $\varpi_{\alpha\beta}$, interpretando-os como as 1-formas da conexão de Levi-Civita sobre a variedade (métrica) considerada.

Vamos, no entanto, seguir um caminho diferente. Para isto, observamos que o presença do operador de dualidade de Hodge na densidade Lagrangeana acima (que constitui o único vínculo que esta equação ainda possui com a eventual geometria Lorentziana determinada por g) é, na verdade, imaterial, pois este operador representa essencialmente o tensor métrico, ou seja, uma forma bilinear simétrica, mas vimos que em qualquer espaço métrico é possível expressar uma forma bilinear simétrica dada em termos do tensor métrico da variedade.

Sugerimos, então, interpretar a densidade Lagrangeana dada pela Eq. (6.33) como uma densidade Lagrangeana definida no espaço-tempo de Minkowski. Ou seja, propomos que a teoria do campo gravitacional seja descrita da seguinte forma:

Axioma 1 *O universo físico tem a estrutura do espaço-tempo de Minkowski, isto é, ele é descrito pela quádrupla* $\mathbb{M} = \langle M, \gamma, \tau_\gamma, D\rangle$, *onde* M *é uma variedade diferenciável de dimensão 4, difeomorfa ao* $\mathbb{R}^4$, γ *é a métrica de Minkowski,* τ_γ *é o elemento de volume de* M *e* D *é a conexão de Levi-Civita de* γ, *que satisfaz:*

$$D\gamma = 0, \qquad \boldsymbol{T}[D] = 0, \qquad \boldsymbol{R}[D] = 0 \tag{6.34}$$

Axioma 2 *O campo gravitacional é descrito por quatro potenciais* $\vartheta^\alpha \in \sec(T^*M)$ *cujo acoplamento com a matéria satisfaz as equações de campo resultantes da variação da densidade Lagrangeana dada por:*

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} d\vartheta^\mu \wedge \star d\vartheta_\mu - \frac{1}{2} d\star\vartheta^\mu \wedge \star(d\star\vartheta^\mu) + \frac{1}{4}(d\vartheta^\mu \wedge \vartheta_\mu) \wedge \star(d\vartheta_\nu \wedge \vartheta^\nu) - \vartheta^\mu \wedge \star T_\mu, \tag{6.35}$$

onde T_μ *representa o tensor de energia-momento da matéria e dos campos presentes (exceto o campo gravitacional) e as operações de abaixamento e levantamento de índices e a operação de dualidade* $\star$ *são definidas com relação à forma bilinear simétrica* g *definida por:*

$$g = \eta_{\mu\nu}\vartheta^\mu \otimes \vartheta^\nu, \tag{6.36}$$

onde $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+ - - -)$.

É importante ressaltar de início que o tensor g não é para ser interpretado como a métrica da variedade. Além disto, o operador $\star$ não constitui o operador de dualidade de Hodge da variedade. Estes objetos são apenas quantidades em termos das quais a densidade Lagrangeana dada pela Eq. (6.35) são escritas de uma maneira mais conveniente, não sendo, na verdade, essenciais à formulação da teoria. De fato, se não quisermos fazer uso destes objetos para escrever a Lagrangeana da teoria, procedemos como segue.

Recordamos que à forma bilinear g está associada um campo de automorfismos simétrico g, definido pela relação:

$$g(u,v) = \gamma(u, \mathsf{g}(v)), \tag{6.37}$$

quaisquer que sejam $u, v \in \sec(TM)$. Como por hipótese g tem a mesma assinatura de γ, então o campo g é positivo, isto é existe um campo de automorfismos simétricos e positivos h, tal que:

$$g(u,v) = \gamma(h(u), h(v)). \tag{6.38}$$

quaisquer que sejam $u, v \in \sec(TM)$.

Naturalmente, se g^{-1} denota a recíproca da forma bilinear g, temos

$$g^{-1}(\alpha,\beta) = \gamma^{-1}(\alpha, \bar{\mathsf{g}}(\beta)) = \gamma^{-1}(\bar{h}(\alpha), \bar{h}(\beta)), \tag{6.39}$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \sec(T^*M)$.

Lembramos então que o operador $\star$ está relacionado ao operador de dualidade de Hodge $*$ associado à álgebra do espaço-tempo de Minkowski por:

$$\star = \Lambda h * \Lambda \bar{h}. \tag{6.40}$$

Esta relação nos permite, então eliminar toda referência à forma bilinear g da densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_G$ e escrevê-la apenas em termos das operações usuais da álgebra do espaço-tempo de Minkowski.

2.1. Equações de Campo

Naturalmente, as equações de campo que seguem da densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_G$ dada pela Eq. (6.33) são dadas por:

$$d\star\mathcal{G}^\mu + \star t^\mu = \star T^\mu, \tag{6.41}$$

onde

$$\star^{-1}\mathcal{G}^\sigma = \frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta}\wedge\star(\vartheta^\alpha\wedge\vartheta^\beta\wedge\vartheta^\sigma), \tag{6.42}$$

$$\star^{-1} t^\sigma = -\frac{1}{2}\varpi_{\alpha\beta}\wedge[\varpi^\sigma_\rho\wedge\star(\vartheta^\alpha\wedge\vartheta^\beta\wedge\vartheta^\rho) + \varpi^\beta_\rho\wedge\star(\vartheta^\alpha\wedge\vartheta^\rho\wedge\vartheta^\sigma)] \tag{6.43}$$

e ainda,

$$\varpi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\vartheta_\alpha\circ d\vartheta_\beta - \vartheta_\beta\circ d\vartheta_\alpha - (\vartheta_\alpha\circ\vartheta_\beta\circ d\vartheta_\sigma)\vartheta^\sigma], \tag{6.44}$$

ou,

$$\varpi_{\alpha\beta} = \vartheta_\beta\circ d\vartheta_\alpha - \vartheta_\alpha\circ d\vartheta_\beta + \frac{1}{2}\vartheta_\alpha\circ\vartheta_\beta\circ(\vartheta^\sigma\wedge d\vartheta_\sigma). \tag{6.45}$$

A Eq. (6.41) é ainda equivalente a:

$$-(\check{\boldsymbol{\partial}}\circ\check{\boldsymbol{\partial}})\theta^\mu + \check{\boldsymbol{\partial}}\wedge(\check{\boldsymbol{\partial}}\circ\theta^\mu) + \check{\boldsymbol{\partial}}\circ(\check{\boldsymbol{\partial}}\wedge\theta^\mu) = T^\mu - \frac{1}{2}T\theta^\mu, \tag{6.46}$$

ou também,

$$\star G^\mu = \star\left(R^\mu - \frac{1}{2}R\theta^\mu\right) = \star T^\mu. \tag{6.47}$$

A Eq. (6.41) pode ser escrita apenas em termos das operações usuais da álgebra do espaço-tempo de Minkowski lembrando-se a Eq. (6.40). Temos:

$$d * \mathcal{G}^\sigma_M + * t^\sigma_M = * T^\sigma_M, \tag{6.48}$$

onde definimos:

$$\begin{aligned} *\mathcal{G}^\sigma_M &= \Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}}\mathcal{G}^\sigma \\ *t^\sigma_M &= \Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}} t^\sigma \\ *T^\sigma_M &= \Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}} T^\sigma \end{aligned} \tag{6.49}$$

e ainda,

$$\Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}}\mathcal{G}^\sigma = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\wedge\Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}}(\theta^\mu\wedge\theta^\nu\wedge\theta^\sigma) \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}} t^\sigma &= -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\wedge\Big[\omega^\sigma_\rho\wedge\Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}}(\theta^\mu\wedge\theta^\nu\wedge\theta^\rho) + \\ &+ \omega^\nu_\rho\wedge\Lambda_h * \Lambda_{h^{-1}}(\theta^\mu\wedge\theta^\rho\wedge\theta^\sigma)\Big], \end{aligned} \tag{6.51}$$

onde os coeficientes $\varpi_{\alpha\beta}$ são dados pelas Eqs. (6.44 ou (6.45)

Por sua vez, a Eq. (6.46) é escrita em termos das operações usuais da álgebra do espaço-tempo de Minkowski lembrando o resultado enunciado na Prop. 3.4 (Cap. 3), isto é, temos:

$$(\check{\partial} \wedge \check{\partial})\omega = (\partial \wedge \partial)\check{\omega} + g^{\rho\sigma} J_{\alpha\sigma} \omega_\rho \vartheta^\alpha, \tag{6.52}$$

onde $\omega = \omega_\rho \vartheta^\rho$, $\check{\omega} = \bar{g}(\omega) = g^\rho_\alpha \omega_\rho \vartheta^\alpha$ e $J_{\alpha\sigma}$ são definidos pelas Eqs. (2.59). Em particular, para os campos de 1-formas ϑ^μ que representam os potenciais gravitacionais, temos:

$$(\partial \wedge \partial)\check{\vartheta}^\mu + \check{J}^\mu = T^\mu - \frac{1}{2} T \vartheta^\mu, \tag{6.53}$$

onde definimos

$$\check{J}^\mu = g^{\mu\nu} J_{\nu\rho} \vartheta^\rho. \tag{6.54}$$

2.2. Teoria da Gravitação como uma Teoria de Calibre Abeliana

Consideremos agora a teoria da gravitação no espaço-tempo de Minkowski desenvolvida na seção anterior. Seja $x \in \Lambda^0(M, \mathbb{R}^4)$ uma *aplicação carta* ($\langle x^\mu \rangle$ é uma carta) do espaço-tempo de Minkowski e $dx \in \Lambda^1(M, \mathbb{R}^4)$ é um referencial ortonormal. Seja $\phi \in \sec(\Lambda^r(M))$ o campo da matéria.

A densidade Lagrangeana para este campo ϕ está automaticamente acoplada com dx devido à necessidade de usarmos o dual de Hodge $\star$ na densidade Lagrangeana, que é uma aplicação $\mathcal{L}_m : (x, dx, \phi, d\phi) \mapsto \mathcal{L}_m(x, dx, \phi, d\phi)$.

Uma translação em M pode ser descrita por:

$$x \mapsto x + \varepsilon = (x^\mu + \varepsilon^\mu) E_\mu, \tag{6.55}$$

onde $\langle E_\mu \rangle$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ e ε^μ são constantes. Temos:

$$\boldsymbol{\delta} x = \boldsymbol{\delta}_h x = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{transl}} x = \varepsilon \tag{6.56}$$

Suponhamos, como usualmente, que

$$\boldsymbol{\delta}\phi = \boldsymbol{\delta}_h \phi = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{transl}} \phi = 0. \tag{6.57}$$

Então a invariância de $\mathcal{L}_m$, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m = 0$, implica em:

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m = \boldsymbol{\delta} x \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x} + \boldsymbol{\delta} dx \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial dx} + \boldsymbol{\delta}\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} = 0, \tag{6.58}$$

ou seja, como o segundo e terceiro termos desta equação se anulam,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x} = 0, \tag{6.59}$$

o que significa que $\mathcal{L}_m$ não depende explicitamente de x.

Se fizermos $\varepsilon = \varepsilon(x)$ na Eq. (6.55) a simetria $\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m = 0$ deixa de ser satisfeita, exceto no caso trivial $\partial\mathcal{L}_m/\partial x = \partial\mathcal{L}_m/\partial dx = 0$, pois agora temos:

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_m = \varepsilon \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x} + d\varepsilon \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial dx}. \tag{6.60}$$

De acordo com as idéias padrão das teorias de calibre, devemos introduzir um potencial de calibre para termos uma Lagrangeana que fique invariante sob transformações de calibre T(4) locais.

Sejam $c \in \Lambda^1(M) \otimes t(4)$, onde t(4) é a álgebra de Lie de T(4). Seja $\mathcal{L}'_m$ a densidade Lagrangeana desejada, $\mathcal{L}'_m : (x, dx, \phi, d\phi, c) \mapsto \mathcal{L}'_m(x, dx, \phi, d\phi, c)$. Temos:

$$\delta\mathcal{L}'_m = \delta x \wedge \frac{\partial \mathcal{L}'_m}{\partial x} + \delta dx \wedge \frac{\partial \mathcal{L}'_m}{\partial dx} + \delta c \wedge \frac{\partial \mathcal{L}'_m}{\partial c}. \tag{6.61}$$

Então as Eqs. (A.95) e (A.100), implicam em que:

$$* T = \frac{\partial \mathcal{L}'_m}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{L}'_m}{\partial dx} \tag{6.62}$$

e devemos ter $D{*}T = 0$ de acordo com a Eq. (A.96), onde T é a corrente de energia-momento do campo ϕ.

Naturalmente,

$$\delta c = -\delta dx = -d\varepsilon. \tag{6.63}$$

Como T(4) é abeliano, temos de fato que $\delta c = -d\varepsilon$.

A Eq. (6.63) significa que c corresponde ao potencial de calibre de um grupo abeliano quadridimensional. No caso, o grupo T(4). Por sua vez, a Eq. (6.61) nos diz que c deve aparecer em $\mathcal{L}'_m$ na combinação $dx + c = \vartheta$. Definindo

$$Dx = dx + c = \vartheta \tag{6.64}$$

temos pela Eq. (6.63) que, sob a ação de T(4), $\delta\vartheta = 0$.

Por outro lado, identificando $t(4) = TM = \mathbb{R}^4$ temos $X_\mu = E_\mu$ e

$$Dx = dx + c \wedge x = dx + c^\mu \wedge X_\mu x = dx + c \tag{6.65}$$

e temos também:

$$\delta x = \varepsilon^\mu X_\mu x = \varepsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} x = \varepsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\alpha \otimes E_\alpha = \varepsilon^\alpha \otimes E_\alpha. \tag{6.66}$$

Note que $D\phi = d\phi + c \wedge \phi \equiv d\phi$, pois $\delta\phi = \varepsilon^\mu X_\mu \phi = 0$. Note também que em vista da Eq. (6.63), podemos transformar c em zero por uma transformação de calibre local. Então, se dx é um referencial ortonormal (como supusemos), segue que no particular calibre onde $c = 0$, temos $\vartheta = dx$ e segue daíque $e = dx + c$ continua sendo ortonormal em vista da Eq. (6.64). Então,

$$\mathcal{L}'_m(dx, \phi, d\phi, c) \equiv \mathcal{L}_m(\vartheta = Dx, \phi, d\phi) \tag{6.67}$$

para concordar com $\mathcal{L}_m$ quando $c = 0$ (acoplamento mínimo).

A corrente de energia-momento do campo ϕ fica:

$$\star T = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \vartheta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial dx}, \tag{6.68}$$

ou seja, escrevendo $T = T^\mu \otimes E_\mu$, temos:

$$\star T^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \vartheta^\mu}, \tag{6.69}$$

que concorda com a definição de $\star T^{\mu}$ dada no Cap. 5. Note que esta corrente não é conservada, pois em vista da identidade $\mathcal{L}_{e_\mu}\mathcal{L}_m = d(\vartheta_\mu \cdot \mathcal{L}_m)$ segue que:

$$(\vartheta_\mu \cdot d\phi) \wedge \star\Sigma(\phi) + (-)^r(\vartheta_\mu \cdot \phi) \wedge d\star\Sigma(\phi) = d\star T_\mu - (\vartheta_\mu \cdot d\vartheta^\rho) \wedge \star T_\rho, \tag{6.70}$$

onde $\Sigma(\phi)$ é o funcional de Euler-Lagrange para o campo ϕ. Assim, quando as equações de Euler-Lagrange são satisfeitas, segue que

$$d\star T_\mu + c^\rho_{\mu\nu}\vartheta^\nu \wedge \star T_\rho = 0, \tag{6.71}$$

onde $c^\rho_{\mu\nu}$ são as constantes de estrutura da "base" $\langle\vartheta^\mu\rangle$.

Leis de conservação genuínas para nossa teoria são obtidas pelos métodos descritos no capítulo anterior.

Desejamos comentar aqui que a tentativa de se formular a teoria da gravitação como uma teoria de calibre do grupo T(4) aparece originariamente em Wallner.[27] Contudo, a apresentação de Wallner é *nonsequitur*, pois ele usa o operador de Hodge associado à métrica fundamental γ e a teoria resultante não é equivalente à teoria de Einstein.

2.3. Crítica da Teoria da Gravitação como uma Teoria de Calibre do Grupo SL(2,$\mathbb{C}$)

Na seção anterior vimos que a teoria da gravitação formulada no espaço-tempo de Minkowski pode ser entendida como uma teoria de calibre abeliana T(4).

Existem muitas teorias de calibre da gravitação onde o grupo de calibre é tomado como sendo o grupo de Lorentz $\mathcal{L}^\uparrow_+4$, ou o seu grupo de recobrimento universal SL(2,$\mathbb{C}$) ou ainda o grupo de Poincaré P $= \mathcal{L}^\uparrow_+ \otimes$ T(4).

De fato, sob uma transformação de $Spin_+(1,3) =$ SL(2,$\mathbb{C}$) os campos ϑ^μ se transformam como:

$$\delta\vartheta^\mu = \varepsilon^\mu_\nu(x)\vartheta^\mu, \tag{6.72}$$

onde $\varepsilon^\mu_\nu \in spin_+(1,3)$, para todo $x \in M$ e as teorias de calibre com grupo SL(2,$\mathbb{C}$) da gravitação consideram as 1-formas da conexão como os potenciais de calibre. De fato, sob uma transformação local de $Spin_+(1,3)$, temos:

$$\delta\omega^{\mu\nu} = -d\omega^{\mu\nu} - \omega^\mu_\alpha\varepsilon^{\alpha\nu} + \omega^\nu_\alpha\varepsilon^{\mu\alpha} = D\varepsilon^{\mu\nu}. \tag{6.73}$$

O problema com estas teorias é que os ω^μ_ν não são variáveis independentes. De fato, as Eqs. (6.44) ou (6.45) mostram que os ω^μ_ν são completamente determinados pelos ϑ^μ e $d\vartheta^\mu$ e portanto não podem ser usados como campos compensadores no sentido das teorias de calibre, onde $d\phi \mapsto D\phi = d\phi + \omega \wedge \phi$.

Além do mais, tais teorias acabam associando rotações com o tensor de energia-momento, o qual está associado com translações, o que é incompreensível e justifica as crítica de Pommaret a estas formulações.

Se nos recordamos da Prop. 5.1 do capítulo 5 e particularmente as Eqs. (5.20) e (5.25) temos que a ação de um difeomorfismo gerado por um grupo a um parâmetro que induz um campo ξ, induz uma transformação de Lorentz local dos ϑ^μ como na Eq. (6.72) e dos ω^μ_ν, como na Eq. (6.73). Talvez seja esta a razão que tenha levado diversos autores (vide, por exemplo, [47]) à formulação de teorias de calibre da gravitação com grupo SL(2,$\mathbb{C}$).

2.4. Possíveis Formas da Lagrangeana Gravitacional para a Teoria de Calibre T(4)

Tendo identificado os ϑ^μ como os potenciais gravitacionais, temos agora diversas possibilidades de fabricarmos Lagrangeanas para estes campos que sejam invariantes sob transformações de calibre do grupo T(4). Temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= a_1 \vartheta^\mu \wedge \star\vartheta_\mu \\
\mathcal{L}_2 &= a_2 d\vartheta^\mu_\wedge \star d\vartheta_\mu \\
\mathcal{L}_3 &= a_3 d\vartheta^\mu \wedge \vartheta_\mu \wedge \star(d\vartheta^\nu \wedge \vartheta_\nu) \\
\mathcal{L}_4 &= a_4 d\vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu \wedge \star(d\vartheta_\nu \wedge \vartheta_\mu)
\end{aligned}$$

A Lagrangeana $\mathcal{L}_1$ corresponde ao termo cosmológico que aparece algumas vezes na formulação da teoria de Einstein. Naturalmente, $\mathcal{L}_1$ não pode ser tomada como a densidade Lagrangeana da teoria, pois não produz equações de movimento.

Por sua vez, a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_2$, embora seja de tipo Yang-Mills, também não serve, isoladamente, para densidade Lagrangeana da teoria, pois como se pode verificar, não produz o limite newtoniano correto.

No caso de um sistema de simetria esférica, $d\vartheta^\mu$ é proporcional a ϑ^μ e a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_3$ é identicamente nula. Portanto, $\mathcal{L}_3$ também não é apropriada para descrever, isoladamente, a densidade Lagrangeana da teoria.

Finalmente, $\mathcal{L}_4$ foi usada por Hehl[47] e leva a uma teoria que é indistinguível da teoria de Einstein até termos de quinta ordem na aproximação pós-newtoniana.[48]

Se relembramos a Eq. (6.16), vemos que a densidade Lagrangeana de Einstein difere por uma diferencial exata da densidade Lagrangeana dada pela soma de $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$, com coeficientes apropriados. Concluimos, portanto, que nesta formulação da teoria da gravitação como uma teoria de calibre com grupo T(4) a forma da densidade Lagrangeana para o campo gravitacional é bastante restrita.

Conclusões

Como dissemos no Cap. 6, existem diversas tentativas de se formular a teoria do campo gravitacional como uma teoria de campo (no sentido das demais teorias de campo da física) no espaço-tempo de Minkowski.

Em particular, Weinberg[49] é de opinião que a interpretação geométrica da teoria do campo gravitacional em termos de um espaço-tempo Lorentziano é uma coincidência. Neste trabalho mostramos como esta "coincidência" aparece. Isto foi possível devido aos desenvolvimentos matemáticos novos que foram apresentados nos capítulos 1 a 4 e principalmente à teoria dos automorfismos simétricos das álgebras de Clifford, que nos permitiu eliminar o campo g como representante da métrica de um espaço-tempo Lorentziano que modela um dado campo gravitacional.

Uma das principais críticas à interpretação geométrica da teoria vem do grupo de Logunov. Em particular, na teoria geométrica não existem, em geral, leis de conservação genuínas para a energia-momento e momento angular. Este ponto é de fato muito importante e necessita uma consideração crítica pelos autores que endossam a interpretação geométrica.

Em seu livro *General Relativity for Mathematicians*, Sachs e Wu[50] dizem: *It is a shame to loose the special relativistic total energy conservation in General Relativity. Many of the attempts to ressurrect it are quite interesting, many are simply garbage.* Em nossa teoria temos uma lei de conservação de energia e momento genuína para o campo gravitacional e os campos de matéria, que segue do fato do espaço-tempo de Minkowski ter os vetores de Killing apropriados. (Vide as discussões do Cap. 5. O fato dos resultados fundamentais apresentados neste capítulo—a respeito da não existência de leis de conservação em espaços que não admitem vetores de Killing—não serem discutidos nos textos é algo lamentável, para dizer-se o mínimo)

Em sua teoria da gravitação (RTG), Logunov fixa o calibre escrevendo $D_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$, onde $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu} + \sqrt{\gamma}\phi^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$ são as componentes da métrica de Minkowski e $\phi^{\mu\nu}$ são as componentes do campo gravitacional. A equação de fixação de calibre é então interpretada como uma das equações de campo necessárias para eliminar os estados de spin 0' e 1 do tensor $\phi^{\mu\nu}$. De acordo com Logunov, este calibre torna possível à RTG predizer sem ambiguidade fenômenos gravitacionais como o atraso de eco de radar. Também de acordo com Logunov, a RTG com as condições de calibre escolhida príbe a existência de buracos negros. (Não discutimos estas afiramções neste trabalho.)

Obtivemos aqui as condições para a teoria gravitacional de Einstein ser equivalente a uma teoria de campos no espaço-tempo de Minkowski sem a fixação de qualquer calibre.

Devemos enfatizar aqui que a arena dos fenômenos físicos na nossa teoria é o espaço-tempo de Minkowski $\langle M, \gamma, \tau_\gamma, D\rangle$. O espaço-tempo Lorentziano $\langle M, g, \tau_g, \nabla\rangle$ desta teoria gravitacional representa uma geometria efetiva, não-chata, originada pelo campo. Portanto, ela deve ter topologia compaível com a topologia do $\mathbb{R}^4$, sendo *non sequitur* a afirmação de Grishchuk de que na RTG é possível a existência de universos fechados (isto impõe restrições à "coincidência" postulada por Weinberg).

Uma interpretação muito simples de como as medidas realizadas com réguas erelógios padrão em um campo gravitacional causam o aparecimento de uma variedade Lorentziana não-chata efetiva é dada por Schwinger.[51]

Deve-se notar também que a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_E^{(1)}$ escrita no espaço de Minkowski sugere a interpretação co campo gravitacional como um campo de calibre e embora $Spin_+(1,3)$ seja um grupo calibre local da teoria, deve-se enfatizar que esta não é uma teoria de calibre do grupo $Spin_+(1,3)$. De fato, como mostramos na seção 2.2 do Cap. 6, esta é uma teoria de calibre do grupo das translações T(4). Na nossa abordagem isto parece natural, já que a métrica efetiva g é gerada por deformações (no sentido de Kleinert[52]) na "rede cósmica" $\langle\vartheta^\mu\rangle$.

Desejamos enfatizar ainda que o método empregado para a formulação da teoria de Einstein no espaço-tempo de Minkowski é completamente geral, no sentido de que podemos implementar a teoria da gravitação com os campos ϑ^μ definidos em qualquer variedade Lorentziana que sirva de "geometria de fundo" para a teoria.

Assim, nossa apresentação justifica as críticas de Pommaret[53] à apresentação usual da Relatividade Geral como uma teoria de calibre do grupo de Lorentz (rotações)

Gostaríamos também de chamar a atenção para o fato de que se pode demonstrar que os campos de Maxwell e de Dirac podem ser representados como seções do fibrado de Clifford sobre o espaço-tempo de Minkowski (vide, por exemplo, [10, 12, 54, 55])

É interessante que este também é o caso do campo gravitacional. Obviamente, a representação destes campos como objetos da mesma natureza matemática é a condição preliminar para qualquer tentativa de se construir uma teoria unificada de campos.

É oportuno comentar finalmente que existem diversas aplicações de álgebras de Clifford na teoria da gravitação,[56, 57, 58] mas estas aplicações não são equivalentes à que foi desenvolvida no presente trabalho.

Apêndices

Apêndice A

Formalismo Lagrangeano e Teorias de Calibre

1. Princípio da Ação Estacionária e as Equações de Euler-Lagrange

1.1. Densidades Lagrangeanas

Sejam $\mathcal{M} = \langle M, \gamma, \tau \rangle$ uma variedade métrica e orientada de dimensão n e seja V um espaço vetorial de dimensão m sobre um corpo F. Denotamos por $\Lambda^r(M,V)$ o fibrado das r-formas sobre M, a valores em V.

O *fibrado dos 1-jatos* sobre $\Lambda(M,V)$ é o fibrado vetorial $J_1(M,V)$ definido por:

$$J_1(M,V) = \{(x, \phi(x), d\phi(x)); x \in M, \phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))\}. \tag{A.1}$$

Lembramos que a cada seção local $\phi \in \sec(\Lambda(M,V))$, podemos associar uma seção local $j_1(\phi) \in \sec(J_1(M,V))$.

Vamos chamar de *funcional* de campos de r-formas a qualquer aplicação $\mathcal{L}$: $J_1(\Lambda^r(M,V)) \to \Lambda^p(M)$, $r \leq p = 1, \ldots, n$.

Dada uma seção local $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$, denotamos por $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$ a aplicação definida por:

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L} \circ j_1(\phi). \tag{A.2}$$

Chamamos $\mathcal{L}(\phi)$ de funcional *do campo* ϕ.

Naturalmente, dados dois funcionais $\mathcal{L} : \phi \mapsto \mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$ e $\mathcal{H} : \phi \mapsto \mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^q(M))$, podemos definir o funcional produto exterior $\mathcal{L} \wedge \mathcal{H} : J_1(M,V) \to \Lambda^{p+q}(M)$ pela relação:

$$(\mathcal{L} \wedge \mathcal{H})(\phi) = \mathcal{L}(\phi) \wedge \mathcal{H}(\phi), \tag{A.3}$$

qualquer que seja $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$.

No caso particular em que $\mathcal{L} : J_1(M,V) \to \Lambda^n(M)$, isto é, $\mathcal{L}(\phi)$ é um campo de n-formas, então chamamos $\mathcal{L}$ de *densidade Lagrangeana* e correspondentemente, $\mathcal{L}(\phi)$ é chamado de densidade Lagrangeana *do campo* ϕ.

1.2. Variações

a. *Variação Vertical*

Em todas as teorias de campo, supõe-se que ϕ carrega uma particular representação de um dado grupo de Lie G, com álgebra de Lie $\hat{G}$. Temos $\rho : G \to \rho(G)$, $g \mapsto \rho(g)$, com

$\rho(g) : \sec(\Lambda^r(M,V)) \to \sec(\Lambda^r(M,V))$, por

$$\phi(x) \mapsto \bar{\phi}(x) = \rho(g)\phi(x). \tag{A.4}$$

Note que ϕ e $\bar{\phi}$ são interpretadas como duas seções distintas de $\Lambda^r(M,V)$. Se escrevemos $\phi(x) = \phi^A(x) \otimes E_A$ e $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}^B(x) \otimes E_B$, temos

$$\bar{\phi}^B(x) = [\rho(g)]^B_A \phi^A(x). \tag{A.5}$$

Seja ρ uma transformação infinitesimal, isto é,

$$\rho = 1 + \varepsilon^a X_a, \qquad |\varepsilon^a| << 1, \tag{A.6}$$

onde X_a, $a = 1,\ldots,\dim G$, são os geradores da álgebra de Lie de G na representação ρ. Por definição, a *variação vertical infinitesimal* de ϕ é o campo $\boldsymbol{\delta}_v\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$, dado por:

$$\boldsymbol{\delta}_v\phi = \bar{\phi} - \phi = (\varepsilon^a X_a)\phi \tag{A.7}$$

b. Variação Horizontal

Seja σ_τ um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de M e seja $\xi \in \sec(TM)$ o campo vetorial que gera σ_τ, isto é,

$$\xi^\mu = \frac{d\sigma^\mu_\tau(x)}{d\tau}|_{\tau=0}. \tag{A.8}$$

Definimos a *variação horizontal* de um campo $\phi \in \Lambda^r(M,V)$, induzida pelo grupo a um parâmetro σ_τ, por:

$$\boldsymbol{\delta}_h\phi = \lim_{\tau\to 0} \frac{\sigma^*_\tau\phi - \phi}{\tau} = -\pounds_\xi\phi, \tag{A.9}$$

onde $\pounds_\xi$ denota a derivada de Lie na direção do campo vetorial ξ e σ^*_τ denota o *retrocesso* (pull-back) da aplicação σ_τ.

Note que os campos ϕ e $\sigma^*_\tau\phi$ são interpretados novamente como duas seções distintas de $\Lambda^r(M,V)$. Note também que apesar de termos chamado $\boldsymbol{\delta}_h\phi$ de variação horizontal, temos que esta quantidade é um elemento de $\sec(\Lambda^r(M,V))$, isto é, para cada $x \in M$, $\boldsymbol{\delta}_h\phi(x)$ é um deslocamento na fibra sobre o ponto x.

Definimos finalmente a *variação total* do campo ϕ por:

$$\boldsymbol{\delta}_t\phi = \boldsymbol{\delta}_v\phi + \boldsymbol{\delta}_h\phi = \boldsymbol{\delta}_v\phi - \pounds_\xi\phi. \tag{A.10}$$

c. Derivação Algébrica

Dado um campo $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$, vamos denotar por $\boldsymbol{\delta}\phi$ uma variação genérica de ϕ (seja ela horizontal, vertical, ou total).

Note que esta "operação de variação" comuta com a derivada exterior, isto é, se em particular $\mathcal{L}(\phi) = d\phi$, então,

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}(\phi) = \boldsymbol{\delta}d\phi = d\boldsymbol{\delta}\phi. \tag{A.11}$$

É fácil verificar também que dados dois funcionais $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$, e $\mathcal{H}(\phi) \in \sec(\Lambda^q(M))$, a variação $\boldsymbol{\delta}(\mathcal{L}\wedge\mathcal{H})(\phi) \in \sec(\Lambda^{p+q}(T^*M))$ é dada por:

$$\boldsymbol{\delta}(\mathcal{L}\wedge\mathcal{H})(\phi) = \boldsymbol{\delta}\mathcal{L}(\phi)\wedge\mathcal{H}(\phi) + \mathcal{L}(\phi)\wedge\boldsymbol{\delta}\mathcal{H}(\phi). \tag{A.12}$$

Definimos a *derivada algébrica* de um funcional $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$ de um campo de r-formas ϕ como o funcional $\partial\mathcal{L}(\phi)/\partial\phi \in \sec(\Lambda^{p-r}(M))$, tal que:

$$\delta\mathcal{L}(\phi) = \delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi}. \tag{A.13}$$

Dados $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$ e $\mathcal{H}(\phi) \in \sec(\Lambda^q(M))$, é fácil verificar, usando a Eq. (A.12), que:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}[\mathcal{L}(\phi) \wedge \mathcal{H}(\phi)] = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} \wedge \mathcal{H}(\phi) + (-)^{pr}\mathcal{L}(\phi) \wedge \frac{\partial\mathcal{H}(\phi)}{\partial\phi}. \tag{A.14}$$

1.3. Equações de Euler-Lagrange

Seja $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^n(T^*M))$ a densidade Lagrangeana de um campo $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$. Chamamos de *integral de ação* do campo ϕ à integral:

$$\mathcal{S}(\phi) = \int_U \mathcal{L}(\phi), \tag{A.15}$$

onde $U \subset M$ é um aberto da variedade M.

Chama-se de *princípio da ação estácionária* à afirmação de que a variação da integral de ação acima é nula para variações arbitrárias de ϕ que se anulam na fronteira ∂U do aberto $U \subset M$, isto é,

$$\delta \int_U \mathcal{L}(\phi) = 0, \tag{A.16}$$

qualquer que seja a variação de ϕ tal que

$$\delta\phi|_{\partial U} = 0. \tag{A.17}$$

Calculando a variação de $\mathcal{S}(\phi)$ para as variáveis de campo ϕ e seus diferenciais $d\phi$ tomados como variáveis independentes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}(\phi) &= \delta\int_U \mathcal{L}(\phi) = \int_U \delta\mathcal{L}(\phi) \\
&= \int_U \left[\delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} + \delta(d\phi) \wedge \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial(d\phi)}\right)\right] \\
&= \int_U \left\{\delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} + d\left[\delta\phi \wedge \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right] - (-)^r\delta\phi \wedge d\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right\} \\
&= \int_U \delta\phi \wedge \left[\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} - (-)^r d\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right] + \int_U d\left[\delta\phi \wedge \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right].
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Lembrando agora o teorema de Stokes:

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega, \tag{A.19}$$

qualquer que seja $\omega \in \sec(\Lambda^{n-1}(T^*M))$, podemos escrever o último termo da Eq. (A.18) acima como:

$$\int_U d\left[\delta\phi \wedge \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right] = \int_{\partial U} \delta\phi \wedge \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right). \tag{A.20}$$

A integral no segundo membro desta equação é nula, pois estamos considerando variações de ϕ que se anulam na fronteira de U. Portanto, temos:

$$\delta\mathcal{S}(\phi) = \int_U \delta\phi \wedge \left[\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} - (-)^r d\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right)\right]. \tag{A.21}$$

Assim, como estamos considerando variações arbitrárias do campo ϕ, o princípio da ação estacionária será satisfeito se e somente se

$$*\,\Sigma(\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} - (-)^r d\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right) = 0. \tag{A.22}$$

Chamamos $\Sigma(\phi)$ de *funcional de Euler-Lagrange* para o campo ϕ. Correspondentemente, as Eqs. (A.22) são chamadas de *equações de Euler-Lagrange* para o campo ϕ.

2. Leis de Conservação Associadas à Invariância de Calibre Global

1º Teorema de Noether *Seja $\mathcal{L}(\phi) : M \to \Lambda^n(T^*M)$ a densidade Lagrangeana de um campo $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$ e suponhamos que $\mathcal{L}(\phi)$ é invariante sob a ação infinitesimal de um grupo G, isto é, se $\phi \mapsto \phi + \delta\phi$ e $d\phi \mapsto d\phi + \delta d\phi$, então $\delta\mathcal{L}(\phi) = 0$. Nestas condições, temos:*

$$d * \mathcal{J}(\phi) = 0, \tag{A.23}$$

onde

$$*\,\mathcal{J}(\phi) = \delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}, \tag{A.24}$$

é a corrente associada à densidade Lagrangeana $\mathcal{L}(\phi)$.

Prova Temos:

$$\delta\mathcal{L}(\phi) = \delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} + \delta d\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi} = 0.$$

Então, levando em conta as equações de Euler-Lagrange, $\partial\mathcal{L}(\phi)/\partial\phi = (-)^r d[\partial\mathcal{L}(\phi)/\partial d\phi]$, obtemos:

$$(-)^r\delta\phi \wedge d\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right) + d(\delta\phi) \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi} = d\left(\delta\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right) = 0. \qquad \blacksquare$$

Dizemos que a corrente $\mathcal{J}(\phi)$ é *fracamente conservada*, porque a validade das Eqs. (A.23) está condicionada à validade das equações de Euler-Lagrange para o campo ϕ.

Sejam X_a, $a = 1, \ldots, \dim G$ os geradores de G na representação ρ e ε^a constantes infinitesimais. Então $\delta\phi = (\varepsilon^a X_a)\phi$ e as correntes associadas à invariância de $\mathcal{L}(\phi)$ sob a ação de G são dadas por:

$$*\,\mathcal{J}_a(\phi) = X_a\phi \wedge \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi} \tag{A.25}$$

$a = 1, \ldots, \dim G$.

2.1. Invariância da Integral de Ação sob Difeomorfismos

Seja $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^p(M))$ um funcional qualquer de um campo $\phi \in \Lambda^r(M,V)$ e seja $\sigma : M \to M$ um difeomorfismo de M.

Dizemos que $\mathcal{L}(\phi)$ é *invariante* sob σ se e somente se

$$\sigma^*\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi). \tag{A.26}$$

onde $\sigma^* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M)$ denota o retrocesso do difeomorfismo σ. Naturalmente, dado um grupo a um parâmetro de difeomorfismos σ_τ, dizemos que $\mathcal{L}(\phi)$ é invariante sob σ_τ, se e somente se $\mathcal{L}(\phi)$ é invariante sob cada difeomorfismos deste grupo.

É possível demonstrar que o funcional $\mathcal{L}(\phi)$ é invariante sob a ação de um grupo a um parâmetro σ_τ se e somente se

$$\pounds_\xi\mathcal{L}(\phi) = 0, \tag{A.27}$$

onde $\xi \in \sec(TM)$ denota o gerador infinitesimal do grupo σ_τ.

Proposição *Toda teoria de campos formulada termos de formas diferenciais é tal que sua ação é invariante sob a ação de grupos a um parâmetro de difeomorfismos.*

Prova Seja $\mathcal{L}(\phi) \in \sec(\Lambda^r(M,V))$ a densidade Lagrangeana da teoria. A variação da ação associada é dada por:

$$\boldsymbol{\delta}_h\mathcal{S}(\phi) = \int_U \pounds_\xi\mathcal{L}(\phi). \tag{A.28}$$

Porém, a derivada de Lie de um campo de formas diferenciais é dada por

$$\pounds_\xi = d\boldsymbol{i}_\xi + \boldsymbol{i}_\xi d \tag{A.29}$$

onde $\boldsymbol{i}_\xi$ denota a operação de contração usual. Então, como $d\mathcal{L}(\phi) = 0$, pois a densidade Lagrangeana é um campo de n-formas, segue que:

$$\boldsymbol{\delta}_h\mathcal{S}(\phi) = \int_U d(\boldsymbol{i}_\xi\mathcal{L}(\phi)) = \int_{\partial U} \boldsymbol{i}_\xi\mathcal{L}(\phi) = 0$$

onde usamos a hipótese de que $\mathcal{L}(\phi)$ se anula na fronteira ∂U do domínio considerado. ■

É importante ressaltar que mesmo que a densidade Lagrangeana da teoria não seja invariante sob a ação de um grupo a um parâmetro de difeomorfismos, a integral de ação correspondente será invariante.

3. Teorias de Calibre

Apresentamos aqui um resumo das principais idéias relacionadas com as teorias de calibre, com o objetivo de justificar que a teoria da gravitação formulada no Cap. 7 pode ser interpretada como uma teoria de calibre abeliana com grupo de calibre T(4), o grupo das translações no $\mathbb{R}^4$.

3.1. Teoria de Maxwell como uma Teoria de Calibre

Seja $\langle \mathbb{M}, D\rangle$ o espaço-tempo de Minkowski, onde $\mathbb{M} = \langle M, \gamma, \tau_\gamma\rangle$ é a variedade de Minkowski e consideremos os campos $A \in \sec(\Lambda^1(M))$, $*j \in \sec(\Lambda^3(M))$ e $F \in \sec(\Lambda^2(M))$, dados por:

$$
\begin{aligned}
A &= A_\mu dx^\mu \\
j &= j_\mu dx^\mu \qquad (A.30)\\
F &= \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \qquad (A.31)
\end{aligned}
$$

onde $\langle x^\mu \rangle$ é uma carta local naturalmente adaptada a um sistema de referência inercial. Escrevemos ainda $(j_\mu) = (\rho, -j_1, -j_2, -j_3)$, $(A_\mu) = (\phi, A_1, A_2, A_3)$,

$$
(F_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

onde ρ, j_i, ϕ, A_i, E_i e B_i têm o significado usual.

A ação para o campo eletromagnético interagindo com a corrente j é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{em} &= \int_U \mathcal{L}_{em} = \int_U \left[-\frac{1}{2} F \wedge *F - *j \wedge A \right] \\
&= \int_U \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right) dx^0 \wedge \dots dx^3. \qquad (A.32)
\end{aligned}
$$

As equações de Maxwell, que resultam do princípio da ação estacionária $\delta\mathcal{S}_{em} = 0$, são:

$$
F = dA, \quad dF = 0, \quad \delta F = -j. \qquad (A.33)
$$

Note que se interpretamos A, F e j como seções do fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathbb{M})$, então estas equações são escritas simplesmente como:

$$
\partial F = j, \qquad (A.34)
$$

onde $\partial = d - \delta$ é o operador de Dirac fundamental do espaço-tempo de Minkowski.

Note agora que se $\chi \in \sec(\Lambda^0(M))$ é um campo escalar qualquer, a transformação

$$
A \mapsto A' = A + d\chi \qquad (A.35)
$$

é tal que $dA' = dA$. Por esta razão dizemos que o campo F está determinado a menos de uma transformação de calibre. Observamos ainda que $\mathcal{S}_{em}$ é invariante sob uma transformação de calibre apenas no caso em que a corrente j é consevada. De fato,

$$
\delta\mathcal{S}_{em} = -\int_U *j \wedge dA = \int_U d(*j \wedge d\chi) - \int_U d * j \wedge \chi.
$$

Porém, o primeiro termo no membro direito desta equação é identicamente nulo por causa do teorema de Stokes e das hipóteses usuais de que $*j$ se anula na fronteira de U. Então $\delta\mathcal{S}_{em} = 0$ se $d * j = 0$.

Para estabelecermos uma analogia da teoria de calibre do eletromagnetismo com as teorias de calibre não-abelianas que discutiremos na próxima seção, vamos introduzir uma constante de acoplamento g e definir $\omega \in \sec(\Lambda(M, \mathrm{U}(1)))$, $\Omega \in \sec(\Lambda^2(M, \mathrm{U}(1)))$ e $j_\omega \in \sec(\Lambda^1(M, \mathrm{U}(1)))$ por:

$$\omega = -igA, \qquad \Omega = -igF, \qquad j_\omega = -\frac{i}{g}j. \tag{A.36}$$

A densidade Lagrangeana $\mathcal{L}_{em}$ pode, então, ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2g}\Omega \wedge *\Omega + *j_\omega \wedge \omega \tag{A.37}$$

e a transformação de calibre dada pela Eq. (A.35) fica:

$$\omega \mapsto e^{\Lambda}\omega e^{-\Lambda} + e^{\Lambda} d e^{-\Lambda}, \tag{A.38}$$

onde $\Lambda = ig\chi$. Observe que e^{Λ} é uma aplicação de M em $\mathrm{U}(1)$. No que segue, a notação será tal que ω e Ω correspondem ao caso eletromagnético se nos restringirmos ao caso em que o grupo de calibre é o grupo $\mathrm{U}(1)$.

3.2. Conexões em Fibrados Vetoriais

a. *Fibrados*

Sejam X uma variedade diferenciável conexa, paracompacta, de dimensão n, $\mathcal{E}$ uma variedade diferenciável de dimensão $m+n$ e $\pi : \mathcal{E} \to X$ uma aplicação diferenciável e sobrejetora.

Dizemos que $\mathcal{E}$ é uma *fibração* sobre X, com *projeção* π se para todo $y \in \mathcal{E}$ existe uma vizinhança coordenada $(\mathcal{U}, \Phi)$ de $\mathcal{E}$, em torno de y e uma vizinhança coordenada (U, φ) de X, em torno de $x = \pi(y) \in X$, tal que $U = \pi(\mathcal{U})$ e o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E} & \supset & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
\pi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \supset & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

A variedade X é chamada de *base* da fibração e $\mathcal{E}$ é chamada de *espaço total*. Para cada $x \in X$, a subvariedade

$$F_x = \pi^{-1}(x) = \{y \in \mathcal{E}, \pi(y) = x\}$$

é chamada de *fibra* sobre o ponto x.

Uma *seção local* de $\mathcal{E}$ sobre um aberto $U \subset X$ é uma aplicação $\phi : U \to \mathcal{E}$, tal que

$$(\pi \circ \phi)(x) = x, \tag{A.39}$$

qualquer que seja $x \in U$.

Dizemos que uma fibração $\langle \mathcal{E}, \pi, X \rangle$ é um *fibrado* com *fibra típica* F e *grupo estrutural* G, se existem uma variedade diferenciável F, um grupo de Lie G de difeomorfismos de F e uma cobertura de X por uma família de abertos $\{U_\alpha; \alpha \in J\}$, tais que:

(i) $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é difeomorfo ao produto $U_\alpha \times F$, isto é, para cada aberto U_α existe um difeomorfismo $\varphi_\alpha; \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, tal que

$$\pi(y) = \pi_1(\varphi_\alpha(y)), \tag{A.40}$$

para todo $y \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, onde $\pi_1 : U_\alpha \times F \to U_\alpha$, por $(x, f) \mapsto x$.

Cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado uma *trivialização local* do fibrado. Para cada trivialização local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, introduzimos uma aplicação $\hat{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to F$, definida pela relação:

$$\varphi_\alpha(y) = (\pi(y), \hat{\varphi}_\alpha(y)), \tag{A.41}$$

qualquer que seja $y \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Para cada $x \in X$, denotamos por $\hat{\varphi}_{\alpha,x} : F_x \to F$ a restrição de $\hat{\phi}_\alpha$ à fibra sobre o ponto x.

(ii) Dadas duas trivializações locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, o difeomorfismo $\hat{\varphi}_{\beta,x} \circ \hat{\varphi}_{\alpha,x}^{-1} : F \to F$ é um elemento do grupo estrutural G, para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

As aplicações $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ definidas por

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \hat{\varphi}_{\beta,x} \circ \hat{\varphi}_{\alpha,x}^{-1} \tag{A.42}$$

são chamadas de *funções de transição* e satisfazem a relação:

$$\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x), \tag{A.43}$$

qualquer que seja $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Uma fibração é chamada de *fibrado vetorial* se ela é um fibrado cuja fibra típica tem estrutura de espaço vetorial e o grupo estrutural é um subgrupo de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, o grupo geral linear das matrizes $m \times m$ com coeficientes reais.

Um fibrado no qual a fibra típica F coincide com o grupo estrutural G e no qual G age sobre F por translações à esquerda, é chamado de *fibrado principal.*

Dizemos que um fibrado vetorial $\langle \mathcal{E}, X, \pi', F, G \rangle$ é um *fibrado vetorial associado* ao fibrado principal $\langle \mathcal{P}, X, \pi, G \rangle$ pela representação ρ de G no espaço vetorial F, se as funções de transição de $\mathcal{E}$ são imagens sob ρ das funções de transição correspondentes do fibrado principal $\mathcal{P}$. Escrevemos $\mathcal{E} = \mathcal{P} \times_\rho F$.

b. Conexões

Vimos na seção anterior que a ação da eletrodinâmica é invariante sob transformações U(1) locais. Vamos estudar agora o caso em que temos um conjunto de campos em interação cuja ação é invariante sob transformações de calibre locais, induzidas pela ação de um grupo de Lie G não-abeliano (o caso abeliano é diferente do caso geral e é tratado no Cap. 6). O restante desta seção tem caráter eminentemente matemático.

Seja $E \equiv \Lambda^r(M, V)$ o fibrado vetorial das r-formas a valores em V e consideremos o grupo estrutural G agindo em V por intermédio de uma representação ρ. Denotamos, respectivamente, por $\mathcal{A}^0(E) \equiv \Gamma(E)$ e $\mathcal{A}^1(E) \equiv \Gamma(T^*M \otimes E)$ os conjuntos das seções dos fibrados vetoriais E e $T^*M \otimes E$.

Chamamos de *conexão linear* (ou de *derivada covariante*) sobre E a uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $D : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$, satisfazendo a regra de Leibnitz,

$$D(f\Phi) = df \otimes \Phi + fD\Phi, \tag{A.44}$$

quaisquer que sejam $f \in \mathcal{F}(M)$ e $\Phi \in \sec(E)$. Se $X(M)$ denota o espaço das seções dos campos vetoriais sobre o M, podemos escrever $D : \Gamma(E) \times X(M) \to \Gamma(E)$, $(\Phi, v) \mapsto D_v\Phi$ e temos:

$$D_v(f\Phi) = df(v)\Phi + fD_v\Phi, \tag{A.45}$$

quaisquer que sejam $f \in \mathcal{F}(M)$, $\Phi \in \sec(E)$ e $v \in X(M)$.

Consideremos agora uma carta local $\langle x^\mu \rangle$, definida em um aberto $U \subset M$, satisfazendo:

$$\pi_E^{-1}(U) = U \times V = U \times F^m, \tag{A.46}$$

onde F é o corpo sobre o qual o espaço vetorial V está definido.

Um referencial para U é um conjunto de seções $\{E_1, \ldots, E_m\} \subset \Gamma(U, E)$ (onde $\Gamma(U, E)$ é o conjunto das seções de U sobre E). Para cada $x \in U$, o conjunto $\{dx^\mu \otimes E_A, 0 \leq \mu \leq 3, 1 \leq A \leq m\} \subset \Gamma(U, T^*M \otimes E)$ é uma base de $T_x^*M \otimes E_x$. Então, para toda seção $\Phi : U \to T^*M \otimes E$, podemos escrever:

$$\Phi = \Phi^i_\mu dx^\mu \otimes E_i, \tag{A.47}$$

onde $\theta : U \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞. Portanto, se $\Phi \in \sec(\Gamma(U, E))$, temos:

$$D\Phi = (D\Phi)^i_\mu dx^\mu \otimes E_i \tag{A.48}$$

e se $v = v^\mu \partial_\mu \in X(M)$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, então,

$$D_v\Phi = v^\mu D_{\partial_\mu}\Phi. \tag{A.49}$$

Portanto, a aplicação $v \mapsto D_v\Phi$ é $\mathcal{F}(M)$-linear.

Como $\Phi \in \Gamma(U, E)$, temos também $\Phi = \Phi^i E_i$, de modo que

$$D\Phi = d\Phi^i \otimes E_i + \Phi^i DE_i, \tag{A.50}$$

e segue que:

$$D_v\Phi = v^\mu \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\mu} + \Phi^i D_{\partial_\mu} E_\mu \right). \tag{A.51}$$

Escrevendo

$$D_{\partial_\mu} E_i = \Gamma^k_{i\mu} E_k, \tag{A.52}$$

obtemos finalmente

$$D_v\Phi = v^\mu \left(\frac{\partial \Phi^k}{\partial x^\mu} + \Phi^i \Gamma^k_{i\mu} \right) E_k. \tag{A.53}$$

As $4^2 m$ funções $\Gamma^k_{i\mu}$ são chamadas de *coeficientes da conexão* em relação à carta e ao referencial escolhidos. Estas funções determinam completamente a conexão D no aberto U. Reciprocamente, se estas $4^2 m$ funções forem conhecidas, então a equação acima determina uma conexão no fibrado $\pi^{-1}(U) \subset E$.

Se $\Gamma^k_{i\mu} = 0$ para todos os valores dos índices i, k, μ, então

$$D_v\Phi = v^\mu \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^\mu} E_k, \tag{A.54}$$

ou seja, $D_v\Phi$ é a derivada direcional da seção Φ na direção do campo v.

c. 1-Formas da Conexão

Consideremos uma trivialização local (U, φ_U) do fibrado E, isto é, $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V \simeq U \times F^m$. É fácil verificar que

$$E_i(x) = \hat{\varphi}_U^{-1}(x, (0, \dots, 1, \dots, 0)) \tag{A.55}$$

$i = 1, \dots, p$, é uma seção de E em U e que $\{E_1, \dots, E_m\}$ é um referencial. Podemos, então, escrever

$$DE_i = \omega_i^j \otimes E_j \tag{A.56}$$

onde $\omega_i^j = \omega_U$ é uma matriz cujos elementos são 1-formas sobre U. Chamamos ω_i^j de *1-formas da conexão* ou de *matriz da conexão* para D. Nas teorias de campo os ω_i^j são chamados de *potenciais de calibre.*

Se (W, φ_W) é uma outra trivialização local de E, com $U \cap W \neq \emptyset$, podemos construir um referencial $\{E'_1, \dots, E'_m\}$, com

$$E'_i(x) = \hat{\varphi}_W^{-1}(x, (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)). \tag{A.57}$$

Isto nos fornece

$$DE'_i = \omega_i'^j \otimes E_j, \tag{A.58}$$

onde $\omega_W = \omega_i'^j$ são as 1-formas de conexão para W.

Naturalmente, para cada $x \in U \cap W$, temos:

$$E'_i(x) = \rho_i^j(x) E_j(x), \tag{A.59}$$

onde $\rho_i^j : U \to W$ são as funções de transição de E. Temos então:

$$DE'_i = (D\rho_i^j E_j) = (d\rho_i^k + \rho_i^j \omega_j^k) \otimes E_k. \tag{A.60}$$

Por outro lado, temos também:

$$DE'_i = \omega_i'^j \otimes D'_j = \omega_i'^j \rho_j^k \otimes E_k. \tag{A.61}$$

Comparando as Eqs. (A.60) e (A.61) concluimos que:

$$d\rho_i^k + \rho_i^j \omega_j^k = \omega_i'^j \rho_j^k. \tag{A.62}$$

Em notação matricial esta equação é escrita $d\rho + \rho\omega_U = \omega_W \rho$, ou seja,

$$\omega_W = \rho\omega_U \rho^{-1} + d\rho\rho^{-1}. \tag{A.63}$$

Esta equação mostra que a dependência de ω com o referencial não é linear, isto é, ω não é um campo de tensores. Nas teorias de campo, a relação dada pela Eq. (A.63) é chamada de lei de transformação do campo de calibre.

Consideremos agora $\bar{E} = \Lambda^r(M, V)$, o fibrado das r-formas a valores em V, com grupo estrutural G, agindo em V pela representação ρ. Pode-se mostrar que $\bar{E} = \Lambda^r(M) \otimes E$.

Podemos estender a definição da conexão em E para $\bar{E}$ como segue. Denotamos por $\mathcal{A}^r(E) = \Gamma(\Lambda^r(M) \otimes E)$ e por $\mathcal{A}^{r+1} = \Gamma(\Lambda^{r+1}(M) \otimes E)$. Definimos então uma conexão linear em E como uma aplicação r-linear $D : \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}^{r+1}$, satisfazendo a relação:

$$D(\Phi \otimes \Psi) = D\Phi \otimes \Psi + (-)^r \Phi \otimes D\Psi, \tag{A.64}$$

quaisquer que sejam $\Phi \in \sec(\Lambda^r(M))$ e $\Psi \in \sec(\Lambda^s(M))$. Note que esta definição concorda com a que foi dada anteriormente.

d. Curvatura da Conexão

Vamos considerar agora a aplicação $\boldsymbol{R}^D : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^2(E)$ definida por:

$$\boldsymbol{R}^D(\Phi) = D^2\Phi = D(D\Phi). \tag{A.65}$$

Note que esta aplicação é $\mathcal{F}(M)$-linear, ou seja, se $\Phi \in \mathcal{A}^0(E)$, temos:

$$\boldsymbol{R}^D(f\Phi) = D(df \otimes \Phi + fD\Phi) = f\boldsymbol{R}^D(\Phi). \tag{A.66}$$

Assim, $\boldsymbol{R}^D$ é induzida por uma aplicação entre os fibrados E e $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \otimes E$. Para entender o significado desta afirmação, consideremos uma trivialização local (U, φ_U) de E. Como anteriormente, seja $E_i(x) = \hat{\varphi}_U^{-1}(x, (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0))$, com $DE_i = \omega_i^j \otimes E_j$. Então temos:

$$\boldsymbol{R}^D(E_i) = D(\omega_i^j \otimes E_j) = \Omega_i^j \otimes E_j, \tag{A.67}$$

onde definimos:

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_k^j \wedge \omega_i^k. \tag{A.68}$$

Assim, $\boldsymbol{R}^D$ pode ser escrito localmente como uma matriz $m \times m$, $\Omega_U = (\Omega_i^j)$, cujos elementos são campos de 2-formas.

Chamamos $\boldsymbol{R}^D$ de *curvatura* da conexão D. Em notação matricial, a Eq. (A.68) se escreve:

$$\Omega_U = d\omega_U - \omega_U \wedge \omega_U. \tag{A.69}$$

Os campos Ω_U são chamados de *2-formas de curvatura* na trivialização local (U, φ_U). Nas teorias de campo, Ω_U é chamado de *campo de calibre* associado ao potencial ω.

A Eq. (A.69) é conhecida como a segunda equação de estrutura de Cartan. Diferenciando esta equação, obtemos:

$$d\Omega_u = \omega_U \wedge \Omega_U - \Omega_U \wedge \omega_U \tag{A.70}$$

ou

$$D\Omega_U = 0. \tag{A.71}$$

Esta equação é conhecida como *identidade de Bianchi.*

Se (W, φ_W) é outra trivialização local de E, com $U \cap W \neq \emptyset$, $E_i'(x) = \hat{\varphi}_W^{-1}(x, (0, \ldots, 1, \ldots, 0))$ e $E_i'(x) = \rho_i^j(x) E_j(x)$, obtemos imediatamente que:

$$\Omega_W = \rho\Omega_U\rho^{-1}. \tag{A.72}$$

Nas teorias de campo, esta equação é conhecida como a lei de transformação do campo de calibre.

3.3. Ação para uma Teoria de Yang-Mills

Para os desenvolvimentos que se seguem, necessitamos ainda do conceito de ação à direita de G no fibrado principal $\langle \mathcal{P}, X, \pi, G \rangle$.

Seja $\{U_\alpha\}$ um recobrimento da variedade X, usado para definir a estrutura do fibrado principal. Definimos primeiramente a aplicação $\widetilde{R}_g$ em $\pi^{-1}(U_\alpha)$ e mostramos então que ela pode ser estendida coerentemente a todo o fibrado principal $\mathcal{P}$.

Seja $p \in F_x$, $x \in U_\alpha$ e defina g_α por:

$$g_\alpha = \hat{\varphi}_{\alpha,x}(p) \tag{A.73}$$

onde $\hat{\varphi}_{\alpha,x}$ é o homeomorfismo de F_x em G. Por definição,

$$(\widetilde{R}_g p)_\alpha = \hat{\varphi}^{-1}_{\alpha,x}(R_g g_\alpha). \tag{A.74}$$

Naturalmente, $\widetilde{R}_{g_1}\widetilde{R}_{g_2}p = \widetilde{R}_{g_1 g_2}p$, ou seja, $\{\widetilde{R}_g, g \in G\}$ é um grupo (anti) isomorfo a G, que age pela direita em $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Note que p e $\widetilde{R}_g p$ pertencem à mesma fibra e que o grupo $\{\widetilde{R}_g, g \in G\}$ age *transitivamente* em cada fibra.

Pode-se demonstrar que se verifica a relação:

$$(\widetilde{R}_g p)_\alpha = (\widetilde{R}_g p)_\beta, \tag{A.75}$$

se $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Como resultado desta relação temos que a aplicação $\widetilde{R}_g$ é independente da escolha do aberto U_α que contém $\pi(p)$ e portanto ela está bem definida sobre toda a variedade $\mathcal{P}$ e podemos escrever

$$\widetilde{R}_g p = (\hat{\varphi}^{-1}_{\alpha,x} \circ R_g \circ \hat{\varphi}_{\alpha,x})p \tag{A.76}$$

onde $x = \pi(p)$. Algumas vezes usa-se a notação simplificada pg ao invés de $\widetilde{R}_g p$.

Definimos a noção de *transformação de calibre ativa* em $\mathcal{P}$ como sendo um automorfismo vertical $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, tal que[59]

$$\text{(i)} \qquad \pi \circ \alpha = \pi \tag{A.77}$$
$$\text{(ii)} \qquad \alpha(\widetilde{R}_g p) = \widetilde{R}_g \alpha(p), \tag{A.78}$$

quaisquer que sejam $p \in \mathcal{P}$ e $g \in G$.

Uma tranformação de calibre ativa $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ define de maneira óbvia um isomorfismo vertical $\alpha_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ no fibrado vetorial $\mathcal{E}$ associado ao fibrado principal $\mathcal{P}$ como segue.

Considere uma seção $\phi \in \sec(\mathcal{E})$. Uma transformação de calibre ativa α introduz uma mudança da conexão ω associada à derivada covariante que age em $\mathcal{E}$ e uma mudança de ϕ. Temos:

$$\omega \mapsto \omega' = \rho\omega\rho^{-1} + d\rho\rho^{-1} \tag{A.79}$$
$$\phi \mapsto \phi' = \alpha_\mathcal{E}(\phi) \equiv \rho(x)\phi(x), \tag{A.80}$$

onde $\rho(x)$ é a representação de G carregada por ϕ. A formulação usual das teorias de calibre ou teorias de Yang-Mills que aparece nos textos de teorias de campos é a seguinte.

Imagina-se o campo da matéria como uma seção $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$. Supomos que ϕ carrega uma representação local $\rho(x)$ do grupo de calibre G, que age ativamente em $\Lambda^r(M,V)$ como segue:

$$\begin{aligned} \rho(x) : \Lambda^r(M,V) &\longrightarrow \Lambda^r(M,V) \\ \phi(x) &\longmapsto \phi'(x) = \rho(x)\phi(x) \end{aligned}$$

A variação vertical infinitesimal de ϕ é dada, então, por:

$$\delta_v \phi = \varepsilon^a(x) X_a \phi \tag{A.81}$$

Introduz-se um potencial $\omega \in \sec(\Lambda^1(M)) \times \hat{G}$ ($\hat{G}$ é a álgebra de Lie de G na representação $\rho(x)$). Sob uma transformação de calibre, ω se transforma como:

$$\omega \mapsto \omega' = \rho\omega\rho^{-1} - \rho d\rho^{-1} = \rho\omega\rho^{-1} + d\rho\rho^{-1}. \tag{A.82}$$

Define-se a *derivada (exterior) covariante* das seções de $\Lambda^r(M,V)$ por $D : \Lambda^r(M,V) \to \Lambda^{r+1}(M,V)$, com

$$D\phi = d\phi + \omega \wedge \phi. \tag{A.83}$$

Note que:

$$D(\phi \wedge \psi) = D\phi \wedge \psi - (-)^r \phi \wedge D\psi, \tag{A.84}$$

quaisquer que sejam $\phi \in \sec(\Lambda^r(M,V))$ e $\psi \in \sec(\Lambda^s(M,V))$.

Observe que sob uma transfromação de calibre $\phi \mapsto \phi' = \rho\phi$, temos:

$$(D\phi)' = d\phi' + \omega' \wedge \phi' = \rho D\phi. \tag{A.85}$$

Introduz-se o campo de calibre como sendo $\Omega \in \sec(\Lambda^2(M,V))$ tal que:

$$\Omega = D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{A.86}$$

Note que temos:

$$D\Omega = d\Omega + \omega \wedge \Omega. \tag{A.87}$$

Porém, $d\Omega = d(d\omega + \omega\wedge\omega) = (d\omega)\wedge\omega + \omega\wedge(d\omega) = (\Omega - \omega\wedge\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(\Omega - \omega\wedge\omega) = -\omega\wedge\Omega$, de modo que

$$D\Omega = 0. \tag{A.88}$$

Esta equação é conhecida como *identidade de Bianchi.* Em particular, no caso da teoria de Maxwell esta equação corresponde à equação $dF = 0$. Portanto, $D\Omega = 0$ é uma generalização das equações de Maxwell.

A teoria prossegue exigindo-se que a densidade Lagrangeana do campo ϕ seja um invariante de calibre. Vejamos o significado desta afirmação.

Vimos nas seções 1 e 2 que uma densidade Lagrangeana para o caso de teorias que eram invariantes sob transformações de calibre globais era uma aplicação $\mathcal{L}(\phi) : M \to \Lambda^4(M)$. Vimos também que quando G é um grupo de calibre global, $\mathcal{L}$ é invariante sob a ação de G se

$$\mathcal{L}(x, \phi(x), d\phi(x)) = \mathcal{L}(x, \rho\phi(x), \rho d\phi(x)) \tag{A.89}$$

com ρ independente de x. Dada uma densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ invariante sob a ação global de G, podemos obter uma densidade Lagrangeana invariante sob a ação local de G postulando que: $\mathcal{L} : M \times \Lambda^r(M,V) \times \Lambda^r(M,V) \to \Lambda^4(M)$, por

$$(x, \phi(x), D\phi(x)) \mapsto \mathcal{L}'(x, \phi(x), D\phi(x))$$

Por exemplo, seja $\phi \in \sec(\Lambda^0(M,\mathbb{C}^2))$, onde $\mathbb{C}^2$ é o espaço vetorial complexo de dimensão 2 e suponhamos que o grupo de calibre é o grupo U(1). Então

$$\mathcal{L}(\phi) = (D\phi)^* \wedge *(D\phi) - m^2\phi^+ \wedge *\phi, \tag{A.90}$$

onde $\phi \overset{\rho}{\mapsto} e^{ix}\phi$, $(\phi_1 + i\phi_2)^+ = \phi_1 - i\phi_2$ e

$$D\phi = d\phi - ieA\phi = d\phi + \omega\phi. \tag{A.91}$$

Nas teorias de calibre, supõe-se que o campo $\Omega = D\omega$ é um campo dinâmico, cuja densidade Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(\omega) = \mathrm{Tr}(\Omega \wedge *\Omega). \tag{A.92}$$

Escrevendo $\Omega = \Omega^A \otimes E_A$, obtemos:

$$\begin{aligned}\Omega \wedge *\Omega &= (\Omega^A \otimes E_A) \wedge *(\Omega^B \otimes E_B)\\ &= (\Omega^A \wedge *\Omega^B) \otimes [E_A, E_B]\end{aligned}$$

e segue que

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathrm{Tr}(\Omega \wedge *\Omega) = \Omega^A \wedge *\Omega_A, \tag{A.93}$$

onde $\Omega_A = h_{AB}\Omega^B$ e h_{AB} é a métrica de Killing-Cartan.[60]

A ação para a nossa teoria de campos é dada por:

$$\mathcal{S}(\phi,\omega) = \int_U \mathrm{Tr}(\Omega \wedge *\Omega) + \int_U \mathcal{L}_m(x, \phi(x) D\phi(x)) = \mathcal{S}(\omega) + \mathcal{S}(\phi). \tag{A.94}$$

Vamos mostrar agora a existência de uma corrente "covariantemente" conservada para a teoria de calibre dada por esta ação. Temos:

$$\delta\mathcal{S}(\phi) = \int_U \delta\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial \phi} + \delta(D\phi) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial D\phi}.$$

Notando agora que $\delta D = D\delta$, obtemos:

$$\delta\mathcal{S}(\phi) = \int_U \delta\phi \wedge \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial \phi} - (-)^r D\left(\frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial D\phi}\right)\right] + \int_U D\left(\delta\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial D\phi}\right).$$

Porém, como $\delta\mathcal{S}(\phi) = 0$ por construção, pois $\mathcal{L}_m(\phi)$ é invariante de calibre, vemos que a teoria possui uma corrente que é conservada covariantemente. De fato,

$$-\delta\phi \wedge *\Sigma(\phi) = D\left(\delta\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial D\phi}\right) = D * \mathcal{J},$$

$$* \mathcal{J} = \delta\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial D\phi} \tag{A.95}$$

e quando $*\Sigma(\phi) = 0$, isto é, quando o campo ϕ obedece as equações de Euler-Lagrange, temos:

$$D * \mathcal{J} = 0. \tag{A.96}$$

Escrevendo $\mathcal{J} = \mathcal{J}^i \otimes E_i$, $\omega = A^i \otimes X_i$ e $[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k$, temos $D * \mathcal{J} = 0$ se

$$d * \mathcal{J}^k + f_{ij}^k A^i \wedge *\mathcal{J}^j = 0. \tag{A.97}$$

Se consideramos $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(x, \phi, d\phi, \omega)$, então

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}(\phi) = \boldsymbol{\delta}\phi \wedge *\Sigma'(\phi) + d\left(\boldsymbol{\delta}\phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial d\phi}\right) + \boldsymbol{\delta}\omega \wedge \frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial \omega} + \tag{A.98}$$

que é igual a zero por construção.

Agora, a derivada algébrica de $\mathcal{L}_m(\phi)$ com relação a ω é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega \wedge \phi) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial d\phi} = \phi \wedge \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial d\phi}. \tag{A.99}$$

Então, comparando a Eq. (A.95) com a equação que resulta da invariância de $\mathcal{S}(\phi)$, usando a Eq. (A.99) e considerando ainda que $\boldsymbol{\delta}\omega = -d\varepsilon + \varepsilon\omega - \omega\varepsilon$ e $\boldsymbol{\delta}\phi = \varepsilon^a X_a \phi = \varepsilon\phi$, concluimos que a invariância de $\mathcal{S}(\phi)$ implica:

$$* \mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{L}_m(\phi)}{\partial \omega} \tag{A.100}$$

Apêndice B

Variação da Densidade Lagrangeana de Thirring

Como aplicação do formalismo desenvolvido no apêndice A, vamos calcular a variação da ação de Einstein, com a densidade Lagrangeana dada pela Eq. 6.15,

$$\mathcal{L}_E = -d(\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha) - \frac{1}{2} d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha + \frac{1}{2}\delta\vartheta^\alpha \wedge \star\delta\vartheta_\alpha + \frac{1}{4}(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \wedge \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta),$$

onde $\langle\vartheta^\alpha\rangle$ é um referencial móvel ortonormal arbitrário sobre a variedade $\mathcal{E} = \langle E, \nabla, g, \mu\rangle$. Adotamos aqui a notação utilizada no Cap. 5.

O primeiro termo da densidade Lagrangeana acima, $\mathcal{L}_E^{(1)} = -d(\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha)$, é uma diferencial exata e portanto não contribui para a variação de $\mathcal{S}_E$. A variação do segundo termo, $\mathcal{L}_E^{(2)} = -\frac{1}{2} d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha$, é calculada como segue. Temos:

$$\vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu \wedge \star d\vartheta_\alpha = d\vartheta_\alpha \wedge \star(\vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu). \tag{B.1}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\vartheta^{\mu\nu} \wedge \delta \star d\vartheta_\alpha &= \delta d\vartheta_\alpha \wedge \star\vartheta^{\mu\nu} + d\vartheta_\alpha \wedge \delta \star \vartheta^{\mu\nu} - \delta\vartheta^{\mu\nu} \wedge \star d\vartheta_\alpha \\
&= \delta d\vartheta_\alpha \wedge \star\vartheta^{\mu\nu} + d\vartheta_\alpha \wedge \delta\vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star\vartheta^{\mu\nu}) - \delta\vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \vartheta^{\mu\nu}) \wedge \star d\vartheta_\alpha \\
&= \delta d\vartheta_\alpha \wedge \star\vartheta^{\mu\nu} + \delta\vartheta^\sigma \wedge [d\vartheta_\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star\vartheta^{\mu\nu}) - (\vartheta_\sigma \circ \vartheta^{\mu\nu}) \wedge \star d\vartheta_\alpha],
\end{aligned}$$

onde escrevemos $\vartheta^{\mu\nu} = \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu$. Multiplicando esta equação por $\frac{1}{2!}(d\vartheta_\alpha)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} c^\sigma_{\mu\nu}$, obtemos:

$$d\vartheta^\alpha \wedge \delta \star d\vartheta_\alpha = \delta d\vartheta_\alpha \wedge \star d\vartheta^\alpha + \delta\vartheta^\sigma \wedge [d\vartheta_\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star d\vartheta^\alpha) - (\vartheta_\sigma \circ d\vartheta^\alpha) \wedge \star d\vartheta_\alpha]. \tag{B.2}$$

Então, lembrando que $\delta(d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha) = \delta d\vartheta^\alpha \wedge \star d\vartheta_\alpha + d\vartheta^\alpha \wedge \delta \star d\vartheta_\alpha$, concluimos que:

$$\delta\mathcal{L}_E^{(2)} = -\delta d\vartheta^\sigma \wedge \star d\vartheta_\sigma + \frac{1}{2}\delta\vartheta^\sigma \wedge [(\vartheta_\sigma \circ d\vartheta^\alpha) \wedge \star d\vartheta_\alpha - d\vartheta_\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star d\vartheta^\alpha)]. \tag{B.3}$$

Assim, as derivadas algébricas de $\mathcal{L}_E^{(2)}$ em relação a $d\vartheta^\sigma$ e ϑ^σ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_E^{(2)}}{\partial d\vartheta^\sigma} &= -\star d\vartheta_\sigma && \text{(B.4)}\\
\frac{\partial\mathcal{L}_E^{(2)}}{\partial\vartheta^\sigma} &= \frac{1}{2}[(\vartheta_\sigma \circ d\vartheta^\alpha) \wedge \star d\vartheta_\alpha - d\vartheta^\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star d\vartheta_\alpha)]. && \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

A variação do terceiro termo da densidade Lagrangeana de Einstein, $\mathcal{L}_E^{(3)} = -\frac{1}{2} d \star \vartheta^\alpha \wedge \star d \star \vartheta_\alpha$, é calculada de maneira análoga. Temos:

$$\vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} \wedge \star d \star \vartheta_\alpha = d \star \vartheta_\alpha \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda}. \tag{B.6}$$

Então,

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} \wedge \delta \star d \star \vartheta_\alpha &= \delta d \star \vartheta_\alpha \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} + d \star \vartheta_\alpha \wedge \delta \star \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} - \delta \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} \wedge \star d \star \vartheta_\alpha \\ &= d\delta \star \vartheta_\alpha \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda} - \delta \vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \vartheta^{\mu\nu\rho\lambda}) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha \end{aligned}$$

e multiplicando esta equação pelos coeficientes $\frac{1}{4!}(d \star \vartheta^\alpha)_{\mu\nu\rho\lambda}$, obtemos:

$$d \star \vartheta^\alpha \wedge \delta \star d \star \vartheta_\alpha = \delta d \star \vartheta_\alpha \wedge \star d \star \vartheta^\alpha - \delta \vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ d \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha. \tag{B.7}$$

Desenvolvendo o primeiro termo do membro direito desta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta d \star \vartheta_\alpha \wedge \star d \star \vartheta^\alpha &= d\delta \star \vartheta^\alpha \wedge \star d \star \vartheta_\alpha \\ &= d[\delta \vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha)] \wedge \star d \star \vartheta_\alpha \\ &= \delta d\vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha - \delta \vartheta^\sigma \wedge d(\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $\delta(d\star\vartheta^\alpha \wedge \star d \star \vartheta_\alpha) = \delta d \star \vartheta^\alpha \wedge \star d \star \vartheta_\alpha + d \star \vartheta^\alpha \wedge \delta \star d \star \vartheta_\alpha$, concluimos que:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_E^{(3)} &= -\delta d\vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha && \text{(B.8)} \\ &+ \delta \vartheta^\sigma \wedge \left[d(\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha + \frac{1}{2}(\vartheta_\sigma \circ d \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha \right], && \text{(B.9)} \end{aligned}$$

de modo que as derivadas algébricas de $\mathcal{L}_E^{(3)}$ em relação a $d\vartheta^\sigma$ e ϑ^σ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_E^{(3)}}{\partial d\vartheta^\sigma} &= -(\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha && \text{(B.10)} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_E^{(3)}}{\partial \vartheta^\sigma} &= d(\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha + \frac{1}{2}(\vartheta_\sigma \circ d \star \vartheta^\alpha) \wedge \star d \star \vartheta_\alpha. && \text{(B.11)} \end{aligned}$$

Finalmente, a variação do último termo da densidade Lagrangeana de Einstein, $\mathcal{L}_E^{(4)} = \frac{1}{4}(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \wedge \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)$, é calculada como segue. Temos:

$$\vartheta^{\mu\nu\rho} \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) = d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho}. \tag{B.12}$$

Então,

$$\begin{aligned} \vartheta^{\mu\nu\rho} \wedge \delta \star (d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) &= \delta d\vartheta^\sigma \wedge \vartheta_\sigma \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho} + \delta \vartheta^\sigma \wedge d\vartheta_\sigma \wedge \star \vartheta^{\mu\nu\rho} \\ &- \delta \vartheta^\sigma \wedge d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star \vartheta^{\mu\nu\rho}) \\ &- \delta \vartheta^\sigma \wedge (\vartheta_\sigma \circ \vartheta^{\mu\nu\rho}) \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha). \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{3!}(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)_{\mu\nu\rho}$, obtemos:

$$\begin{aligned} d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \wedge \delta \star (d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) &= \delta d\vartheta^\sigma \wedge \vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \\ &+ \delta\vartheta^\sigma \wedge d\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \\ &- \delta\vartheta^\sigma \wedge d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge [\vartheta_\sigma \circ \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)] \\ &- \delta\vartheta^\sigma \wedge [\vartheta_\sigma \circ (d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)] \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha). \end{aligned}$$

Assim, como $\delta[d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha)] = \delta d\vartheta^\sigma \wedge \vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) + \delta\vartheta^\sigma \wedge d\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) + d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta \wedge \delta \star (d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha)$, segue que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_E^{(4)} &= \frac{1}{2}\delta d\vartheta^\sigma \wedge \vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \\ &+ \frac{1}{2}\delta\vartheta^\sigma \wedge d\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \\ &- \frac{1}{4}\delta\vartheta^\sigma \wedge d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \left[\vartheta_\sigma \circ \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)\right] \\ &- \frac{1}{4}\delta\vartheta^\sigma \wedge \left[\vartheta_\sigma \circ (d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)\right] \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Portanto,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_E^{(4)}}{\partial d\vartheta^\sigma} = \frac{1}{2}\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_E^{(4)}}{\partial\vartheta^\sigma} &= \frac{1}{2}d\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) \\ &- \frac{1}{4}d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \left[\vartheta_\sigma \circ \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)\right] \\ &- \frac{1}{4}\left[\vartheta_\sigma \circ (d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha)\right] \wedge \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta). \end{aligned} \tag{B.15}$$

Das Eqs. (B.4), (B.10) e (B.14), obtemos, desconsiderando a contribuição da diferencial exata $\mathcal{L}_E^{(1)}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_E}{\partial d\vartheta^\sigma} = -d\star\vartheta_\sigma - (\vartheta_\sigma \circ \star\vartheta^\alpha) \wedge \star d\star\vartheta_\alpha + \frac{1}{2}\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha). \tag{B.16}$$

Analogamente, das Eqs. (B.5), (B.11) e (B.15), também desconsiderando a contribuição de $\mathcal{L}_E^{(1)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_E}{\partial\vartheta^\sigma} &= \frac{1}{2}\left[(\vartheta_\sigma \circ d\vartheta^\alpha) \wedge \star d\vartheta_\alpha - d\vartheta^\alpha \wedge (\vartheta_\sigma \circ \star d\vartheta_\alpha)\right] \\ &+ d(\vartheta_\sigma \circ \star\vartheta^\alpha) \wedge \star d\star\vartheta_\alpha + \frac{1}{2}(\vartheta_\sigma \circ d\star\vartheta^\alpha) \wedge \star d\star\vartheta_\alpha \\ &+ \frac{1}{2}d\vartheta_\sigma \wedge \star(d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha) - \frac{1}{4}d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha \wedge \left[\vartheta_\sigma \circ \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta)\right] \\ &- \frac{1}{4}\left[\vartheta_\sigma \circ (d\vartheta^\alpha \wedge \vartheta_\alpha)\right] \wedge \star(d\vartheta^\beta \wedge \vartheta_\beta) \end{aligned} \tag{B.17}$$

Bibliografia

[1] A. Einstein. *Notas Autobiográficas.* Editora Nova Fronteira, Terceira Edição, 1982.

[2] R. Ablamowicz, P. Lounesto, and J. Maks. *Found. of Phys.*, **21** (1991).

[3] A. Crumeyrolle. *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[4] D. Hestenes and G. Sobczyc. *Clifford Algebra to Geometric Calculus.* D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1984.

[5] R. C. Arcuri. *J. Math. Phys.*, **32**(7), 1890 (1991).

[6] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1982.

[7] J. A. Schouten. *Ricci Calculus.* Springer-Verlag Publ. Comp., Berlin, 1954.

[8] M. Zorawski. *Théorie Mathématique des Dislocations.* Dunod, Paris, 1967.

[9] P. Baekler, F. W. Hehl, and E. W. Mielke. Nonmetricity and Torsion: Facts and Fancies in Gauge Approaches to Gravity. *Preprint — Inst. for Theor. Phys. — Univ. of Cologne.*

[10] W. A. Rodrigues, Jr. and V. L. Figueiredo. *Int. J. Theor. Phys.*, **29**(4), 451 (1990).

[11] W. A. Rodrigues, Jr., M. A. Faria-Rosa, A. Maia, Jr., and E. Recami. *Hadronic Journal*, **12**, 187 (1989).

[12] A. Maia, Jr., E. Recami, W. A. Rodrigues, and M. A. Faria-Rosa. *J. Math. Phys.*, **31**, 502 (1990).

[13] L. Sédov. *Mécanique des Milieux Continus.* Mir, Moscou, 1975.

[14] I. S. Sokolnikoff. *Mathematical Theory of Elasticity.* McGraw-Hill Publ. Comp., New Delhi, 1971.

[15] F. W. Hehl. *Gen. Rel. and Grav.*, 4(4), 333 (1973).

[16] F. W. Hehl and B. K. Datta. *J. of Math. Phys.*, **12**(7), 1334 (1971).

[17] P. von der Heyde F. W. Hehl and G. D. Kerlick. *Rev. of Mod. Phys.*, **48**(3), 393 (1976).

[18] R. P. Wallner. *Gen. Rel. and Grav.*, **23**(6), 623 (1991).

[19] N. Rosen. *Gen. Rel. and Grav.*, **4**(6), 435 (1973).

[20] N. Rosen. *Found. of Phys.*, **15**(10), 455 (1985).

[21] L. P. Grishchuk and A. N. Petrov. *Sov. Astron. Lett.*, **12**(3), 179 (1987).

[22] A. A. Logunov, Yu. M. Loskutov, and M. A. Mestvirishvili. *Int. J. of Mod. Phys. A*, **3**(9), 2067 (1988).

[23] W. Drechsler. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **37**(2), 155 (1982).

[24] D. L. Rapoport-Campodónico. *Int. J. Theor. Phys.*, **30** (1991).

[25] J. R. Zeni and W. A. Rodrigues, Jr. *Int. J. Mod. Phys. A*, **7**(8), 1793 (1992).

[26] W. Thirring. *A Course in Mathematical Physics.* Springer-Verlag Publ. Comp., New York, 1979.

[27] R. P. Wallner. *Acta Phys. Austr.*, **54**, 165 (1982).

[28] W. Thirring and R. Wallner. *Rev. Bras. de Física*, **8**(3) (1978).

[29] I. M. Benn. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, XXXVII A, 67 (1982).

[30] A. Trautman. *Bull. Aca. Polon. Sci.*, **21**, 345 (1973)

[31] V. I. Denisov and A. A. Logunov. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, **51**(2), 163 (1981). English translation.

[32] R. M. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[33] H. Poincaré. *Rend. C. Math. Palermo*, **21**, 129 (1906).

[34] N. Rosen. *Phys. Rev.*, **57**, 147 (1940).

[35] N. Rosen. *Ann. Phys.*, **22**, 1 (1963).

[36] A. Papapetrou. *Proc. R. Ir. Acad.*, **A52**, 11 (1948).

[37] R. H. Kraichnan. *Phys. Rev.*, **98**, 1118 (1955).

[38] S. N. Gupta. *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 334 (1957).

[39] R. P. Feynman. *Acta Phys. Pol.*, **24**, 697 (1963).

[40] L. Halpern. *Bull. Acad. R. Belg. Cl. Sci.*, **49**, 226 (1963).

[41] V. I. Ogsevetsky and I. V. Polubarinon. *Ann. Phys.*, **35**, 167 (1965).

[42] S. Weinberg. *Phys. Lett.*, **B138**, 988 (1965).

[43] Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. *The Theory of Gravitation and the Evolution of Stars.* Nauka, Moscow, 1971, pp. 87.

[44] L. P. Grishchuk, A. N. Petrov and A. D. Popova. *Comm. Math. Phys.*, **94**, 379 (1984).

[45] A. A. Logunov and M. A. Mestvirishvili. *Found. of Phys.*, **16**, 1 (1986).

[46] Ya. B. Zel'dovich and L. P. Grishchuk. *Sov. Phys. Usp.*, **29**, 780, 1976.

[47] F. W. Hehl and J. Nitsch, in *Proc. of the 6th Course os the Int. School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity,* P. G. Bergmann and V. de Sabatta (eds). Plenum Press, New York, 1980.

[48] M. Schweizer and N. Straumann. *Phys. Lett.*, **71A**, 493 (1979).

[49] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology.* J. Wiley & Sons, New York, 1972.

[50] R. K. Sachs and H. Wu. *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[51] J. Schwinger. *Particles, Sources and Fields.* A. Wesley Publ. Comp. Reading, Ma, 1970.

[52] H. Kleinert. *Gauge Fields in Condensed Matter*, vol. II. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1989.

[53] J. F. Pommaret. *Lie Pseudogroups and Mechanics.* Gordon and Breach, New York, 1989.

[54] V. L. Figueiredo, E. C. Oliveira e W. A. Rodrigues, Jr. *Int. J. Theor. Phys.*, **29**, 411 (1990).

[55] W. A. Rodrigues, Jr. and E. C. Oliveira. *Int. J. Theor. Phys.*, **29**, 435 (1990).

[56] D. Hestenes. *J. Math. Phys.*, **8**, 1046 (1967).

[57] F. J. Chinea. *Gen. Rel. Grav.*, **21** (1989).

[58] R. W. Tucker. in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* ed. J. S. R. Chisholm and A. K. Common. D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1986.

[59] J. Henning and J. Nitsch. *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 947 (1981).

[60] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1974.