UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin

RICARDO ALEXANDRE ALVES PEREIRA

APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL

LEARNING OF THE CONCEPT OF VECTOR SPACE

CAMPINAS
2017

RICARDO ALEXANDRE ALVES PEREIRA

APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática, na área de concentração Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: PROF. DR. SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO RICARDO ALEXANDRE ALVES PEREIRA E ORIENTADA PELO PROF. DR. SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

CAMPINAS

2017

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

P414a

Pereira, Ricardo Alexandre Alves, 1976-
Aprendizagem do conceito de espaço vetorial / Ricardo Alexandre Alves Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Espaços vetoriais. 2. Aprendizagem significativa. 3. Situações didáticas. 4. Campos conceituais. 5. Engenharia didática. I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Learning of the concept of vector space
Palavras-chave em inglês:
Vector spaces
Meaningful learning
Didactic situations
Conceptual fields
Didactic engineering
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]
Alessandra Aparecida Viveiro
Carlos Miguel da Silva Ribeiro
Saddo Ag Almouloud
Valdinei Cézar Cardoso
Data de defesa: 20-12-2017
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin

TESE DE DOUTORADO

APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL

Autor: Ricardo Alexandre Alves Pereira
Orientador: Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (orientador)
Profa. Dra. Alessandra Aparecida Viveiro
Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Prof. Dr. Valdinei Cézar Cardoso

Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

CAMPINAS
2017

Dedico esta pesquisa aos professores, educadores e pesquisadores que buscam aprimorar o ensino, a aprendizagem da matemática e contribuir para uma educação mais justa, possível e acessível a todos.

Dedico também, em particular, à minha esposa Gabriela e aos meus filhos Felipe e Henrique.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Gabriela, pelo incentivo, apoio e paciência para a realização da presente pesquisa,

ao meu pai *(in memoriam)* pelos seus ensinamentos,

à minha mãe, irmãos e irmã que me acompanharam nesse percurso,

ao Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira que me orientou e ajudou em fases decisivas para a efetivação e execução deste estudo,

ao amigo Eduardo Maurício Moreno Pinto pelas conversas e momentos de reflexão,

aos professores e colegas do grupo de pesquisa – Pecimat - Unicamp que muito contribuíram para a concretização deste trabalho,

ao Instituto Federal de São Paulo, por me conceder o afastamento de minhas atividades docentes visando à maior dedicação ao doutorado, como também aos funcionários, técnico-administrativos, professores e alunos (em especial aos da Licenciatura em Matemática) do campus de Bragança Paulista pela grande colaboração para o desenvolvimento desta investigação,

ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Unicamp que proporcionou as condições necessárias à minha formação acadêmica e pesquisa, cumprindo, assim, com os seus objetivos na produção de conhecimentos no campo de ensino de Ciências e Matemática, na articulação entre as experiências de professores e os conhecimentos acadêmicos e exame dos processos de reflexão e transformação da prática docente.

RESUMO

A grande dificuldade na aprendizagem do conceito de espaço vetorial e sua relevância como objeto de estudo da Álgebra Linear motivou a sua escolha para o presente trabalho. Embora existam pesquisas que abordem o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, há uma carência de investigações sobre a aprendizagem do conceito de espaço vetorial. Este estudo trata desse conceito pela perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel, por meio das situações didáticas de Brousseau e pela teoria dos campos conceituais de Vergnaud. A pergunta que norteou a pesquisa foi: “Como desenvolver atividades pedagógicas que podem favorecer a aprendizagem do conceito de espaço vetorial?”. O objetivo foi analisar o processo de aprendizagem desenvolvido à luz dos referenciais teóricos da pesquisa, buscando identificar contribuições e limitações do método adotado. Como abordagem metodológica, adotou-se a qualitativa, cuja metodologia foi a engenharia didática. A investigação foi feita usando um material elaborado pela óptica dos referenciais citados, em um minicurso, com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de São Paulo – Bragança Paulista. Nesses encontros, foi desenvolvida uma sequência didática que contemplou uma atividade constituída de exercícios com vetores do IR^2 e IR^3, um organizador prévio e situações didáticas com a intenção de propiciar condições para uma aprendizagem significativa do conceito de espaço vetorial. A partir dos resultados obtidos, pode-se dizer que, de forma geral, ocorreu aprendizagem significativa, mas se verificou a necessidade de maior variedade de atividades de forma a proporcionar ao aluno a possibilidade da utilização de diversas condutas e esquemas a fim de se constituir, de maneira mais clara e estável, o conceito em sua estrutura cognitiva.

Palavras-chave: espaço vetorial; aprendizagem significativa; situações didáticas; campos conceituais; engenharia didática.

ABSTRACT

The great difficulty in learning the concept of vector space and its relevance as object of study of Linear Algebra motivated its choice for the present work. Although there is research that addresses the teaching and learning of Linear Algebra, there is a lack of research on learning the concept of vector space. This study deals with this concept from the perspective of meaningful learning of Ausubel, through the didactic situations of Brousseau and the theory of conceptual fields of Vergnaud. The question that guided the research was: "How to develop pedagogical activities that can favor the learning of the concept of vector space?". The objective was to analyze the learning process developed in the light of the theoretical references of the research, seeking to identify contributions and limitations of the method adopted. As a methodological approach, the qualitative approach was adopted, whose methodology was didactic engineering. The research was done using a material developed by the aforementioned references, in a mini-course, with a group of students of the Licenciatura degree in Mathematics, Federal Institute of São Paulo - Bragança Paulista. In these meetings, a didactic sequence was developed that contemplated an activity consisting of exercises with IR^2 and IR^3 vectors, a previous organizer and didactic situations with the intention of providing conditions for a meaningful learning of the concept of vector space. From the obtained results, it can be said that, in general, significant learning occurred, but the need for a greater variety of activities was verified in order to provide the student with the possibility of using various conduits and schemes in order to constitute , in a clearer and more stable way, the concept in its cognitive structure.

Keywords: space vector; meaningful learning; teaching situations; conceptual fields; didactic engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação do princípio da assimilação.....25
Figura 2 - Um “mapa” conceitual da teoria de Ausubel.....28
Figura 3 - Relação entre alguns conceitos da TCC.....35
Figura 4 - Um mapa conceitual para a teoria dos campos conceituais de Vergnaud 38
Figura 5 - Tipos de variáveis de comando.....41
Figura 6 - Mapa da engenharia.....44
Figura 7 - Definição de espaço vetorial.....56
Figura 8 - Exemplo do livro A.....57
Figura 9 - Teorema 1.4.1- Propriedades da aritmética matricial.....59
Figura 10 - Exercícios do livro A.....60
Figura 11 - Exercícios do livro A.....60
Figura 12 - Definição de espaço vetorial.....61
Figura 13 - Exemplo 2 do livro B.....62
Figura 14 - Exemplo 4 do livro B.....62
Figura 15 - Exercício 5 do livro B.....62
Figura 16 - Definição de espaço vetorial.....63
Figura 17 - Exemplo 1 do livro C.....64
Figura 18 - Exemplo 7 do livro C.....64
Figura 19 - Exercício resolvido 1 do livro C.....65
Figura 20 - Exercício proposto do livro C.....65
Figura 21 - Imagem do sistema de tomografia computadorizada da General Electric 66
Figura 22 - Imagem de uma seção transversal típica de uma cabeça humana.....67
Figura 23 - Código utilizado nos esquemas.....71
Figura 24 - Propriedades da aritmética vetorial.....72
Figura 25 - Classes de problemas.....77
Figura 26 - Conexão entre TCC, esquemas e invariantes operatórios.....81
Figura 27 - Processo metodológico utilizado.....102
Figura 28 - “Mapa” geral da Álgebra Linear, segundo a teoria de Ausubel.....104
Figura 29 - “Mapa” do espaço vetorial.....106
Figura 30 - “Mapa” integrador.....111
Figura 31 - Slide do “Mapa” geral da Álgebra Linear.....114
Figura 32- Slide do “Mapa” do Espaço Vetorial Real.....116
Figura 33 - Máquina de mistura de cores.....117
Figura 34 - Tabelas das cores amarela e vermelha.....118
Figura 35 - Resolução do aluno A1 na terceira situação didática.....130
Figura 36 - Resolução do aluno A8 da quarta situação didática.....131
Figura 37 - Caminho percorrido das hipóteses aos resultados.....160

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tipos de tarefas identificadas nos livros A, B e C.....69
Quadro 2- Conceito de vetor.....84
Quadro 3 - Compreensão do conceito de vetor pelos alunos.....86
Quadro 4 - Correspondência entre as hipóteses e as variáveis globais……101
Quadro 5 - Dados obtidos do questionário……..112
Quadro 6 - Correspondência entre as variáveis locais e as atividades……....127
Quadro 7 - Conceito de espaço vetorial…….....133
Quadro 8 - Aspectos adotados para verificação da formação dos conhecimentos em ação……..….134
Quadro 9 - Compreensão do conceito de espaço vetorial pelos alunos……..….137
Quadro 10 - Hipóteses – Validação..……..…..161

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

I – Significado

IFSP – Instituto Federal de São Paulo

MD – Momentos didáticos

OP – Organização praxeológica

R – significante

S – Referente

SD – Situação didáticas

TAD – Teoria antropológica do didático

TAS – Teoria da aprendizagem significativamente

TCC – Teoria dos campos conceituais

TCLE – Termo de consentimento livre e esclarecido

TSD – Teoria das situações didáticas

Unesp – Universidade Estadual Paulista

Unicamp – Universidade Estadual de Campinas

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

A PESQUISA....14
Apresentação....14
Algumas investigações....15
Pergunta, objetivo, referenciais e metodologia....17
Estrutura....18
1 EMBASAMENTO TEÓRICO....20
1.1 Aprendizagem significativa....20
1.1.1 A teoria....20
1.1.2 Algumas vantagens da aprendizagem significativa sobre a aprendizagem mecânica....21
1.1.3 Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta....22
1.1.4 Organizadores prévios....23
1.1.5 Exigências para a aprendizagem significativa....24
1.1.6 Indícios da aprendizagem significativa....24
1.1.7 Assimilação....25
1.1.8 Princípios relativos à programação eficiente do conteúdo....26
1.2 As situações didáticas....30
1.2.1 Contrato didático....32
1.2.2 Classificação das situações didáticas....33
1.3 Teoria dos campos conceituais....33
2 METODOLOGIA....39
2.1 Análises prévias....40
2.2 Concepção e análise *a priori*....41
2.3 Experimentação....42
2.4 Análise *a posteriori* e validação....42
3 TEMA, CAMPO DE AÇÃO E ANÁLISES PRÉVIAS....45
3.1 Tema e campo de ação....45
3.2 Análises prévias....45
3.2.1 Dimensão epistemológica....46
3.2.2 Dimensão didática....51
3.2.2.1 Análise de conteúdo dos livros didáticos....54
3.2.3 Dimensão cognitiva....70
4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*....97
4.1 Constrangimentos....97
4.2 Variáveis de comando macrodidáticas ou globais....98
4.3 Variáveis de comando microdidáticas ou locais....100
4.3.1 Hipóteses....100
4.4 Material utilizado durante as aulas....102
4.4.1 Elaboração do material....103
5 EXPERIMENTAÇÃO....112
5.1 Visão geral da Álgebra Linear, organizador prévio e situações didáticas – aplicação e resultados....113
5.1.1 Visão geral da Álgebra Linear....113
5.1.2 Organizador prévio....115
5.1.3 Situações didáticas....117
6 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO....127
6.1 Análise *a posteriori*....127
6.2 Validação....158
CONSIDERAÇÕES FINAIS....162

REFERÊNCIAS.....165
ANEXOS.....170
Anexo A – Atividades.....171
Anexo B – Questionário.....174
Anexo C – Apresentação utilizada para uma visão geral da Álgebra Linear, organizador prévio e exercícios.....175
Anexo D – Situações didáticas.....184
Anexo E – Entrevistas.....192
Anexo F – Termo de consentimento livre e esclarecido.....193

A PESQUISA

Inicio o texto escrevendo sobre a minha trajetória acadêmica e profissional que me instigaram a escolher e a reconhecer a relevância do tema da presente pesquisa. Também exibo algumas pesquisas que fundamentam tal escolha. Em seguida, apresento a pergunta que norteou este estudo, o objetivo e as razões dos referenciais adotados. Ao final, faço uma exposição resumida de cada capítulo da tese.

Apresentação

Durante a minha formação no ensino fundamental e médio, a disciplina de Matemática sempre foi para mim um desafio a ser superado. Desafio por exigir muita atenção, raciocínio e estudo para sua compreensão. O esforço e a dedicação para a sua aprendizagem eram recompensados toda vez que conseguia resolver um exercício e entender os conceitos ali envolvidos. Na minha preparação ao vestibular, senti vontade de conhecer mais profundamente a Matemática e ensiná-la. Assim, escolhi fazer o curso de Licenciatura em Matemática.

Fui aprovado no vestibular da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), em 2000, onde obtive, durante os quatro anos seguintes, uma visão mais abrangente da Matemática e do seu ensino. No decorrer do curso de graduação, atuei como monitor da disciplina em uma escola particular, o que me ajudou a confirmar o meu desejo pela docência.

Dentre as disciplinas de Matemática do curso, a de Álgebra Linear era vista com muito medo de reprovação pelos alunos. E, infelizmente, a reprovação tornava-se realidade para a maioria deles. Eu consegui ser aprovado, mas apenas depois do exame final (tipo de prova de recuperação). Isso me fez refletir sobre essa disciplina, o seu conteúdo, o seu ensino e aprendizagem.

Em 2003 me graduei em Licenciatura em Matemática e no decorrer dos anos seguintes lecionei no ensino fundamental e médio em escolas públicas e privadas.

Em 2007, motivado a atuar no ensino superior, concorri a uma vaga no processo seletivo do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e

Computacional da Unicamp sendo aprovado. Nesse curso, por meio da interdisciplinaridade e de aplicações, aperfeiçoei os meus conhecimentos matemáticos. Novamente, a Álgebra Linear esteve presente na minha formação acadêmica e na produção da dissertação, a qual versou sobre Problemas de Programação Linear.

Após o término do mestrado, em 2010, fui aprovado no concurso para professor de Matemática do Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Iniciei as minhas atividades como docente em 2011 atuando tanto na formação de estudantes do ensino básico, técnico e tecnológico como na de professores de Matemática. Como professor na Licenciatura em Matemática do IFSP, lecionei a disciplina de Álgebra Linear, por sete semestres, percebendo, agora como professor, as dificuldades do seu ensino.

Nessas aulas, observei que o conceito de espaço vetorial surgia para os alunos como algo novo e de difícil entendimento. Como era de se esperar, a não aprendizagem dele comprometia a aprendizagem dos tópicos subsequentes e, portanto, a disciplina como um todo.

Com a intenção de investigar o ensino e a aprendizagem da Matemática ingressei no doutorado do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática da Unicamp, em 2014.

Diante da minha experiência e da busca por maneiras para ajudar nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, o meu orientador e eu selecionamos a Álgebra Linear como objeto de estudo deste trabalho e, mais especificamente, o conceito de espaço vetorial.

Além do relatado, a seguir, cito alguns estudos para fundamentar o interesse pela Álgebra Linear.

Algumas investigações

A relevância da Álgebra Linear é evidente por sua presença em quase todos os domínios da Matemática, como os sistemas de equações lineares, a geometria, aritmética, estudo das quádricas, equações diferenciais, etc. (CELESTINO, 2000).

Ainda destacando a sua importância, conforme Celestino (2000, p. 9), “[...] é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam

a Matemática, tanto como objeto de estudo quanto como instrumento para outros estudos, dominem seus principais conceitos [da Álgebra Linear]".

A escolha da Álgebra Linear também foi motivada pela pouca aprendizagem de seu conteúdo dos alunos de cursos superiores. Essa pode ser verificada pela seguinte análise feita por Celestino (2000, p. 13), a partir do índice de retenção da disciplina na Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual Paulista (Unesp) e Universidade Estadual de Campinas (Unicamp): "[...] a Álgebra Linear figura entre as matérias que têm um alto percentual de retenção de 25 a 50%, refletindo as dificuldades dos estudantes com sua aprendizagem". O autor complementa:

> Isto não acontece somente no Brasil, pois pesquisas realizadas em outros países, por exemplo na França (cf. Dorier 1994), revelam que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos de Álgebra Linear, o que interfere em seus aproveitamentos (ibid.).

Coimbra (2008) também reconhece as deficiências no ensino e na aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos de graduação. Ele relata que, após décadas atuando no seu ensino, elas permaneceram. Em sua dissertação, aborda alguns aspectos que considera como possíveis obstáculos ao ensino e aprendizagem como dificuldades com o uso da geometria, com termos conhecidos de outras disciplinas, lógica e outras.

Segundo Dorier (2003), a Álgebra Linear representa, com o Cálculo, as duas principais disciplinas matemáticas ensinadas em faculdades de ciências exatas. Afirma que o seu ensino sempre foi difícil. E destaca que, nas duas últimas décadas, tornou-se uma área ativa de pesquisa em educação matemática em vários países.

Além desses estudos, existem outros que abordam os processos de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. Entre eles ressaltam-se: Oliveira (2002) que, baseada no modelo teórico dos campos semânticos, trata da produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear; Karrer (2006) que envolve o design de atividades sobre o objeto matemático "transformação linear", explorando a conversão de registros em um ambiente de geometria dinâmica; Furtado (2010) que investiga como alunos de faculdade compreendem os conceitos abstratos abordados na disciplina, focando no tópico

transformação linear e Richit *et al*. (2013) que fazem uma articulação entre Álgebra Linear e tecnologias digitais.

Apesar de haver pesquisas que versam acerca do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, poucos as fazem pelo olhar da teoria dos campos conceituais (TCC) de Vergnaud, como Andreoli (2009), Machado e Bianchini (2012) e Cardoso (2014).

Andreoli (2009) investiga dificuldades na compreensão da dependência linear de alunos do primeiro ano de uma universidade da Argentina. Atenta a construção do conhecimento pelo aluno a pesquisadora faz um estudo, predominantemente qualitativo, descritivo e explicativo baseado na observação, coleta de dados, análise historiográfica e de conteúdo.

A pesquisa realizada por Machado e Bianchini (2012) lida com concepções de transformação linear entre espaços vetoriais reais de estudantes de licenciatura em matemática em EAD. Esse estudo de caso possibilitou identificar o estágio da construção da concepção de duas estudantes.

Já Cardoso (2014), em sua tese de doutorado, procura apurar em que medida os vídeos digitais e a metodologia de ensino podem contribuir para a conceitualização em Álgebra Linear.

Com a intenção de agregar novos saberes a tais trabalhos, este busca, por meio da TCC, em situações didáticas, contribuir e investigar a aprendizagem do conceito de espaço vetorial em um período de tempo que, habitualmente, é desenvolvido em sala de aula[1]. Assim, além de fornecer um estudo científico, pretende-se inspirar professores de matemática à preparação de sequências didáticas que ajudem na construção do conhecimento pelo aluno.

Pergunta, objetivo, referenciais e metodologia

Tendo em vista que o espaço vetorial é o objeto de estudo da Álgebra Linear, a pergunta que norteou a pesquisa foi: “Como desenvolver atividades pedagógicas que podem favorecer a aprendizagem do conceito de espaço vetorial?”.

1 Número de aulas próximo ao praticado por professores em cursos de graduação.

Com o intuito de responder a ela, definiu-se, como objetivo a análise do processo de aprendizagem, desenvolvido à luz dos referenciais teóricos da pesquisa, buscando identificar contribuições e limitações do método adotado.

A escolha de tais referenciais foi feita levando em consideração algumas de suas características, como versar sobre aprendizagem, realizar atividades pedagógicas em curto espaço de tempo e auxiliar na formação do conceito de espaço vetorial.

Assim, usou-se a concepção de aprendizagem significativa e os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo da teoria da aprendizagem significativa (TAS) de Ausubel, para subsidiar a preparação das atividades empregadas em sala de aula e a análise dos dados.

Em razão de ensinar o conceito de espaço vetorial em um número de aulas próximo ao praticado por professores em cursos de graduação, utilizaram-se situações didáticas consoantes com a teoria das situações didáticas (TSD) de Brousseau.

Para tanto, foi elaborado um material, composto por atividades, segundo os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo da TAS e que propiciasse uma sequência didática conforme a TSD.

Com a finalidade de compreender a progressão e a fase do conhecimento do aluno, no decorrer do andamento das atividades e após o seu término, foi empregada a TCC. Essa proporcionou a percepção e intervenção, quando necessária, nos esquemas estabelecidos na estrutura cognitiva do aprendiz, assim como examinar os conhecimentos em ação utilizados por ele[2].

Como metodologia foi adotada a engenharia didática. Conforme Artigue (1996), ela é comparada ao trabalho do engenheiro que, para a realização de um projeto, se fundamenta nos conhecimentos científicos do seu domínio, submete-se a um controle do tipo científico e, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a lidar com objetos não tão controlados na prática.

Estrutura

Este trabalho está organizado em seis capítulos.

2 Os termos aqui usados são tratados no Capítulo 1.

O Capítulo 1 aborda o embasamento teórico da pesquisa. Nele são apresentados os principais aspectos utilizados da aprendizagem significativa de Ausubel, das situações didáticas de Brousseau e da teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

O Capítulo 2 versa sobre metodologia da engenharia didática, destacando-se as fases das análises prévias, concepção e análise *a priori,* experimentação, análise *a posteriori* e validação.

No Capítulo 3, aborda-se a aprendizagem do conceito de espaço vetorial por meio das análises prévias as quais se dividem nas dimensões epistemológica, didática e cognitiva. Nele é feito um estudo detalhado almejando encontrar os constrangimentos[3] existentes em cada uma das dimensões.

Com o reconhecimento dos constrangimentos, obtidos no capítulo anterior, no Capítulo 4 são determinadas as variáveis de comando macrodidáticas, as hipóteses consideradas como realizações prováveis e as variáveis locais. Também, é descrita, minuciosamente, a elaboração do material, justificando, por meio de fundamentações teóricas e científicas, a sequência didática, a escolha das situações didáticas e as ações desejadas do professor/pesquisador durante a experimentação e as expectativas dos comportamentos dos alunos.

A experimentação é relatada no Capítulo 5 em que são narradas as aulas que trataram da visão geral da Álgebra Linear, do organizador prévio e das situações didáticas. Estas são desenvolvidas em quatro classificações (ação, formulação, validação e institucionalização), conforme as propostas por Guy Brousseau.

No Capítulo 6, é realizada a análise dos resultados gerados na fase de experimentação. Esse estudo é efetuado, principalmente, pelo olhar da TCC de Vergnaud. Também, é feita a validação pelo confronto das hipóteses com os resultados.

Por fim, são apresentadas as considerações finais. Trazem um relato de cada momento da pesquisa e exibem-se as aproximações e distanciamentos encontrados entre as expectativas de resultados e os alcançados. Acrescentam-se, ainda, as percepções, conclusões e questionamentos surgidos durante a pesquisa.

---

3 Os constrangimentos são entendidos como restrições que tendem a fazer um ponto do sistema didático com funcionamento, aparentemente, pouco satisfatório um ponto de equilíbrio.

1 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados os aportes teóricos do presente trabalho. Em cada seção é feito um recorte da teoria estudada com o objetivo de expor suas principais características e os pontos relevantes utilizados na pesquisa. A abordagem ficou dividida em três seções. Nas duas primeiras, há a contextualização do conceito de aprendizagem significativa e das situações didáticas em relação às suas respectivas teorias. Na terceira seção ocorre uma explanação da teoria dos campos conceituais.

1.1 Aprendizagem significativa

David Paul Ausubel (1918-2008) foi um pesquisador norte-americano que se dedicou à psicologia educacional. Em 1963, ele apresentou sua teoria cognitiva que atribui grande importância ao conhecimento prévio do aluno para a aprendizagem. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), o fator isolado mais considerável que influencia a aprendizagem está naquilo que o aprendiz já conhece.

A seguir, são expostos os principais aspectos dessa teoria.

1.1.1 A teoria

A teoria cognitiva de aprendizagem de David Ausubel tem como principal conceito a aprendizagem significativa, que é um processo pelo qual novos conhecimentos adquirem significados por meio da interação com conhecimentos especificamente relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Segundo Moreira (2011, p. 19), a estrutura cognitiva nada mais é do que “um conjunto hierárquico de subsunçores dinamicamente inter-relacionados”.

Uma vez que conceitos relevantes e inclusivos (subsunçores) estejam claros e disponíveis na estrutura cognitiva, eles atuam como pontos de ancoragem para novas informações, dando origem a novos significados, os quais, da mesma forma, funcionarão como pontos de ancoragem para a atribuição de outros significados.

Quando as novas informações têm pouca ou nenhuma interação com os subsunçores, há o que Ausubel considera como aprendizagem mecânica.

A aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica não formam uma dicotomia, mas sim um contínuo. No entanto, a passagem desta para aquela não é natural. Há a necessidade de que o aluno tenha conhecimento prévio, predisposição para aprender significativamente, que o material seja potencialmente significativo e que o professor faça essa mediação.

1.1.2 Algumas vantagens da aprendizagem significativa sobre a aprendizagem mecânica

A aprendizagem significativa e a mecânica ocorrem como um contínuo durante o processo de aquisição de conhecimento. A classificação em aprendizagem significativa ou mecânica se deve ao predomínio de uma ou outra nesse processo. A consideração de vantagens se faz necessária para mostrar que, mesmo sendo um contínuo, deve-se priorizar a aprendizagem significativa em relação à aprendizagem mecânica.

A seguir, são apresentadas algumas vantagens quando se aprende significativamente (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA; MASINI, 2001; SOARES, 2009; MOREIRA, 2011):

a) há uma retenção mais duradoura da informação: o conhecimento aprendido permanece mais tempo na memória, no entanto, isso não significa que ele estará completamente disponível na memória. Será visto adiante que o esquecimento de parte do conhecimento faz parte do processo cognitivo (assimilação obliteradora);

b) facilita a aquisição de novos conhecimentos relacionados com os anteriormente adquiridos: quando se tem a aprendizagem significativa, os subsunçores se modificam por meio da interação com os novos conhecimentos, tornando-se mais claros e inclusivos. Com isso, novas aprendizagem significativas são mais fáceis de ocorrerem;

c) a nova informação a ser relacionada com a anterior é guardada na memória de longo prazo: o novo conhecimento permanece na memória por muito mais tempo;

d) é ativa, pois depende da assimilação das atividades de aprendizagem por parte do aluno: para existir tal aprendizagem, o aprendiz deve se predispor a relacionar, o que se pretende aprender, ao subsunçor pertencente à sua estrutura cognitiva;
e) é pessoal, já que a significação da aprendizagem depende dos recursos cognitivos do aluno: como cada pessoa possui um conjunto de conhecimentos, o processo de significação necessário à respectiva aprendizagem é pessoal;
f) possibilita a reaprendizagem: mesmo em caso de esquecimento de parte do que foi aprendido significativamente, ao se retomar tal conteúdo, é possível a reaprendizagem (acontece muito mais rápida do que a primeira aprendizagem). Quando se aprende mecanicamente, não existe a reaprendizagem, pois o assunto será completamente novo para o aprendiz.
g) fornece sua própria recompensa: quando se aprende significativamente, existe uma recompensa intrínseca à própria aprendizagem. O aluno se sente gratificado pelo fato de ter aprendido.

Adiante, são apresentadas duas possíveis estratégias de ensino e aprendizagem visando a esclarecer que o uso de uma ou outra não é garantia de ocorrência da aprendizagem significativa.

1.1.3 Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta

A aprendizagem receptiva ocorre quando a estratégia de ensino fornece ao aluno o que é para ser aprendido em sua forma final. Esse tipo de aprendizagem não deve ser confundido com o ensino expositivo tradicional, pois ela pode ser realizada por meio de livros, aulas, experiências, filmes, uso de programas de computador, entre outros. E para que ela seja significativa, o aluno deve ser ativo, fazendo relações de forma específica e substantiva dos novos conhecimentos com os subsunçores de sua estrutura cognitiva (MOREIRA; MASINI, 2001).

Já a aprendizagem por descoberta acontece quando a estratégia de ensino propõe algumas “pistas” sobre o conteúdo final a ser aprendido e não o apresenta em sua forma definitiva. O professor tem em mente onde deseja que o aluno chegue, dando orientações para que ele alcance o conhecimento pretendido. Ainda assim, após a descoberta, o estudante precisa promover integração entre o seu conhecimento prévio e o novo para que exista a aprendizagem significativa.

Portanto, essa estratégia também usa o conhecimento anterior do aluno (MOREIRA; MASINI, 2001).

Assim, conforme Pontes Neto (2006, p. 119) afirma, “o caráter da aprendizagem – significativa ou mecânica – independe da estratégia de ensino utilizada”.

Destaque-se que, como na aprendizagem significativa e mecânica, a aprendizagem receptiva e a por descoberta também formam um contínuo. Para essa classificação se considera a predominância de uma ou de outra nas atividades de aprendizagem.

1.1.4 Organizadores prévios

Para que exista a aprendizagem significativa, quando o indivíduo não possui os subsunçores, Ausubel aconselha o uso de organizadores prévios[4] para funcionarem como âncora à nova aprendizagem e provocarem o desenvolvimento de subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente (MOREIRA; MASINI, 2001). Ausubel atribui aos organizadores prévios a função de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber.

Esses organizadores podem ser de dois tipos: explicativo ou comparativo.

O organizador explicativo é utilizado quando o material a ser trabalhado não for totalmente familiar ao aluno. Ele busca promover subsunçores que sustentam uma relação superordenada[5] com esse material, proporcionando uma conexão com o que o aprendiz já sabe.

O organizador comparativo é empregado quando o material a ser trabalhado for relativamente familiar ao aluno. Ele serve para integrar novas ideias com os conhecimentos da estrutura cognitiva e também ampliar a diferenciação entre ideias novas e as já existentes (MOREIRA, 2011).

---

4 São materiais introdutórios apresentados antes do próprio material que será utilizado para aprender (MOREIRA; MASINI, 2001).

5 É a aquisição de um novo significado que passa a incluir conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva.

1.1.5 Exigências para a aprendizagem significativa

Para ocorrer a aprendizagem significativa, são necessárias duas condições:

1) o material a ser estudado deve ser potencialmente significativo;

2) a existência da predisposição do aluno em interagir os novos conhecimentos com os conhecimentos específicos e relevantes pertencentes à sua estrutura cognitiva.

A primeira condição pressupõe que o material a ser aprendido seja relacionável de maneira não arbitrária (conhecimentos relevantes) e não literal (mecanicamente) aos conhecimentos prévios do aprendiz.

A segunda condição subentende que ele deva “desejar” estabelecer associações entre os novos conhecimentos e o seu conhecimento prévio. Esse “desejar” não está relacionado precisamente à motivação. “Embora a motivação constitua um fator altamente significativo na aprendizagem e a facilite enormemente, ela não é de modo algum uma condição indispensável” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.333)[6].

Para as situações de desmotivação dos alunos em sala de aula, Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 334) afirmam que “frequentemente a melhor maneira de ensinar alunos não motivados consiste em ignorar seu presente estado motivacional e concentrar-se em ensiná-los tão efetivamente quanto possível”, evidenciando que a motivação não é essencial para a aprendizagem significativa. Assim, esse “desejar” está na predisposição em estabelecer relações entre o que se quer aprender e o que o aprendiz já sabe.

É evidente, nas duas exigências, que aquilo que o aluno já sabe é fundamental para a aprendizagem significativa. Isso justifica a importância dada por Ausubel ao conhecimento prévio do aprendiz.

1.1.6 Indícios da aprendizagem significativa

Para se verificar se ocorreu a aprendizagem significativa, Ausubel aconselha que se utilizem questões e problemas novos e não familiares os quais levem os alunos a transformarem os seus conhecimentos.

6 Para Tapia e Fita (2015) a motivação intrínseca a uma atividade tem efeitos mais positivos sobre a aprendizagem do que a motivação externa que pouco contribui para aprendizagem favorecendo, predominantemente, à realização das atividades.

De forma prática, deve-se

a) pedir aos alunos que resolvam situações-problema;

b) solicitar que diferenciem ideias relacionadas;

c) sugerir que identifiquem os elementos de um conceito ou proposição de uma lista;

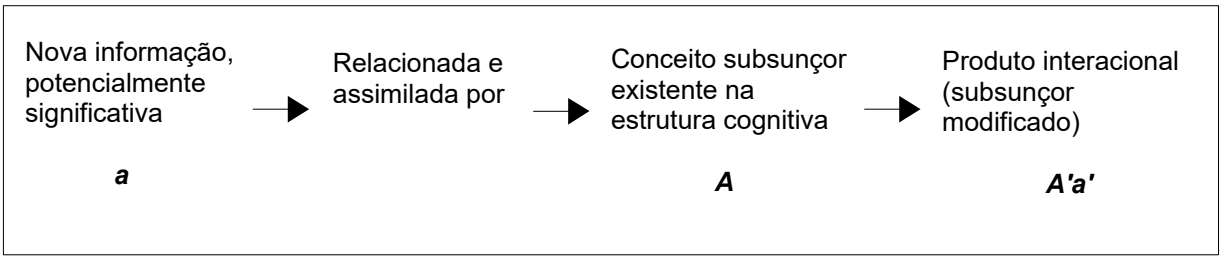
d) propor uma tarefa de aprendizagem sequencialmente dependente de outra.

Com isso, é possível evitar que alunos que priorizam a aprendizagem mecânica obtenham sucesso nas avaliações e eles passem a valorizar mais a aprendizagem significativa.

1.1.7 Assimilação

Para a compreensão da aquisição e da organização do conhecimento na estrutura cognitiva pelo processo de “subsunção”, Ausubel utiliza o que ele chama de “princípio de assimilação”, representado na Figura 1.

Figura 1 - Representação do princípio da assimilação



Fonte: Moreira e Masini (2001, p. 25)

Pela representação, a interação entre a nova informação **a** e o subsunçor **A** produz mudanças em ambos, passando **a** a ser **a'** e **A** a ser **A'**, resultando em uma nova unidade **A'a'**, ou seja, o conhecimento prévio transformado.

Dessa forma, a nova informação, potencialmente significativa, é assimilada por um conceito relevante e inclusivo pertencente à estrutura cognitiva do aprendiz. Como produto, tem-se um subsunçor modificado, mais claro e estável.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), no período de retenção, os conhecimentos **a'** e **A'** permanecem dissociáveis, o que torna possível reproduzi-los separadamente. No entanto, com o passar do tempo, o subsunçor modificado, **A'a'**, torna-se cada vez mais indissociável chegando ao ponto em que

não se pode mais separar os conhecimentos que lhe deram origem. Nesse momento, inicia-se um segundo estágio de subsunção, chamado de assimilação obliteradora, em que ocorre o esquecimento de particularidades a favor da formação de um conceito mais amplo e inclusivo.

O processo descrito é conhecido como subsunção subordinada no qual um conceito **a** é assimilado por uma ideia mais inclusiva **A**.

De forma contrária, também pode existir a chamada aprendizagem superordenada que é caracterizada pela aprendizagem de um novo conhecimento mais inclusivo **A**, a partir de conhecimentos relevantes **a**, menos inclusivos e pertencentes à estrutura cognitiva.

Uma outra forma de aprendizagem é a combinatória, definida como aquela que relaciona novos conceitos ou proposições com conhecimentos prévios nem mais inclusivos nem mais específicos.

1.1.8 Princípios relativos à programação eficiente do conteúdo

Na prática do ensino escolar, Moreira e Masini (2001), levando em consideração os pensamentos de Ausubel, defendem que é necessário, para a aprendizagem em sala de aula, a utilização de recursos, como o mapa conceitual visto adiante, que facilitem a captação da estrutura conceitual do conteúdo e sua interação à estrutura cognitiva do aluno, fazendo o material significativo.

Dessa forma, o professor precisa auxiliar o aluno a organizar a estrutura conceitual da matéria estudada e a relacioná-la à sua estrutura cognitiva.

Nesse contexto, inserem-se quatro princípios relativos à programação eficiente do conteúdo que se caracteriza pela intenção de facilitar a aprendizagem significativa:

a) diferenciação progressiva: apresentar antes as ideias mais gerais e inclusivas de uma disciplina, sendo progressivamente diferenciadas;

b) reconciliação integrativa: explorar as relações entre as ideias (similaridades e diferenças);

c) organizaçao sequencial: utilizar as dependências sequenciais naturais existentes na disciplina;

d) consolidação: insistir no domínio do que está sendo estudado, antes da introdução de novos materiais.

É importante destacar que se iniciar com a ideia mais geral não significa expô-la em sua forma final. Segundo Moreira (2011, p. 44),

> Isso estaria contrariando a diferenciação progressiva, a reconciliação integrativa e o levar em conta o conhecimento prévio do aluno. No caso de um conteúdo científico, por exemplo, que esteja organizado em torno de duas ou três leis científicas, a abordagem desse conteúdo deveria começar com essas leis, mas de um ponto de vista fenomenológico e conceitual. Progressivamente, as mesmas seriam exemplificadas e modeladas matematicamente, em níveis crescentes de complexidade, até alcançar-se o nível esperado no contexto da disciplina.

Portanto, a apresentação inicial da ideia mais geral é do ponto de vista fenomenológico e conceitual, não de sua forma acabada, a qual deve ser alcançada de maneira progressiva de níveis crescentes de dificuldade.

Um instrumento útil para a implementação dos dois primeiros princípios é o mapa conceitual, o qual é um diagrama que indica relações entre conceitos. Essa técnica foi desenvolvida por Novak e colaboradores na Universidade de Cornell, nos Estados Unidos. Como a aprendizagem significativa leva à atribuição de significados, o mapa conceitual é um recurso didático que possibilita a manifestação dos significados de alunos e professores. Dessa forma, não existe um mapa conceitual correto ou errado. O que o professor pode inferir deles são os significados atribuídos aos conceitos pelos alunos e as relações entre eles.

Conforme Souza e Boruchovitch (2010), os mapas facilitam ao aluno a compreensão do significado dos conteúdos, a relação entre os seus conhecimentos prévios e a avaliação contínua do que está realizando, o que favorece a construção do conhecimento de tal forma que essa não se faz do estímulo recebido pelos sentidos nem da repetição do que já se sabia, mas da sua própria maneira em decorrência do seu conhecimento anterior.

É aconselhado que o professor, segundo Moreira (2001), no uso de mapas conceituais,

- procure fazê-los de maneira clara e completa;
- utilize-os, preferencialmente, quando os alunos já possuem algum conhecimento sobre o conteúdo (final do estudo de um assunto);
- estimule os alunos a produzirem os seus próprios mapas.

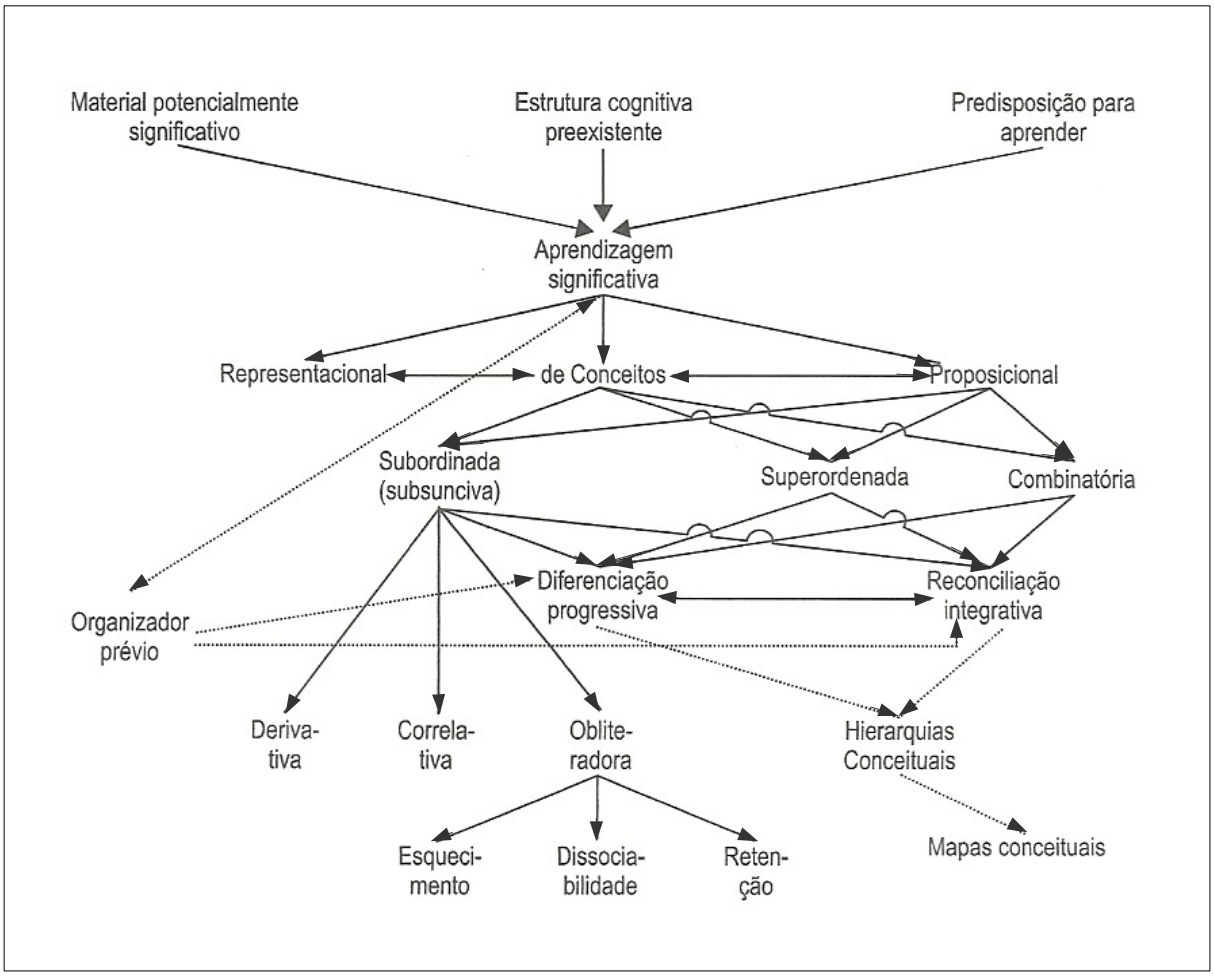
Naturalmente, cada disciplina tem sua própria estrutura e, uma vez identificados os principais conceitos de um conteúdo, o professor deve organizá-los

em uma estrutura na qual os conceitos mais gerais se situem na parte superior do mapa. Em seguida, são inseridos os conceitos menos inclusivos até chegar àqueles mais detalhados e específicos. Assim, o mapa estará progressivamente diferenciando os conceitos.

Para existir a reconciliação integrativa, Novak (1977) recomenda que, enquanto o professor for expondo os novos conceitos, faça um movimento entre aqueles mais inclusivos e os subordinados explicitando as semelhanças e diferenças que levaram a essa disposição no mapa.

A Figura 2 apresenta um mapa conceitual da teoria de Ausubel. Dessa forma, além de relatar sobre o uso desse recurso como estratégia de ensino e aprendizagem é trazido um mapa da teoria.

Figura 2 - Um “mapa” conceitual da teoria de Ausubel



Fonte: Adaptado de Moreira e Masini (2001, p. 101)

Referido mapa contém os principais conceitos envolvidos na teoria. Nem todos os conceitos presentes nele foram tratados nesta seção, pois se preferiu destacar apenas aqueles relevantes à pesquisa.

No mapa, a aprendizagem significativa vem logo abaixo dos conceitos de material potencialmente significativo, estrutura cognitiva preexistente (conhecimento prévio) e predisposição para aprender, demonstrando a importância deles para que ela exista.

Logo abaixo, encontram-se os três tipos de aprendizagem: representacional, de conceitos e proposicional.

A aprendizagem representacional consiste em conferir significados a símbolos, ou seja, o símbolo é reconhecido como seu referente, o que ele significa.

A aprendizagem proposicional apoia-se no significado de ideias enunciadas em proposições. Busca-se o significado que transcende a reunião dos significados das palavas ou conceitos presentes na proposição.

Neste texto, foi abordado apenas o tipo de aprendizagem significativa de conceitos, tratada durante esta seção, por ser a predominante na educação escolar.

Em seguida, aparecem as três formas de aprendizagem: subordinada, superordenada e combinatória. Assim como na teoria de Ausubel, deu-se maior atenção à forma subordinada, que pode ser derivativa ou correlativa e que, após a assimilação, sofre um processo de redução chamado de obliteração.

Como já explicado, na obliteração, à medida que existe a retenção, há o esquecimento das especificidades do novo conhecimento e a perda gradativa da dissociabilidade dele com o subsunçor. Surge, assim, um produto interacional muito mais claro e estável. Complementando a apresentação do mapa conceitual, verifica-se o uso do organizador prévio que funciona como uma ponte entre o que o aluno sabe e o que ele deve saber para que o material a ser estudado seja potencialmente significativo.

Existem, também, os mapas conceituais que auxiliam e facilitam a organização e associação dos novos conhecimentos à estrutura cognitiva do aprendiz. Esse instrumento é indicado por Ausubel para atender aos princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, relativos à programação eficiente do conteúdo.

Na produção deste texto, buscou-se implantar os princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Iniciou-se por conceitos mais

inclusivos indo para os intermediários e chegando aos mais específicos. Ao final, foi apresentado um mapa conceitual da teoria.

Essa teoria, como já citado, foi utilizada na elaboração do material aplicado, no desenvolvimento das aulas e na análise das manifestações dos estudantes em relação às atividades propostas na pesquisa.

1.2 As situações didáticas

As situações didáticas pertencem à teoria das situações didáticas (TSD) que foi desenvolvida na década de 1970 por Guy Brousseau (2008). Essa teoria deslocou o foco do ensino da matemática do professor para a interação entre ele, o aluno e o saber. Nela, o docente propõe atividades aos alunos que interagem com elas de maneira autônoma. A intervenção dele só ocorre quando existe a necessidade de redirecionar o estudante à sequência didática[7] previamente elaborada por ele.

Para a elaboração da teoria, os membros do Instituto de Pesquisas no Ensino de Matemática de Bordeaux, na França, liderados por Brousseau, buscaram, por meio da produção de conhecimentos para controlar e produzir ações sobre o ensino, levar a pesquisa científica para os processos pertencentes ao ensino escolar da matemática (GÁLVEZ, 1996).

A partir desses conhecimentos e a fim de dar sentido ao saber escolar e contribuir para a sua construção, Brousseau (1982, p. 39) propõe o uso da situação didática a qual ele define como

> Um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.

Dada a sua importância, a situação didática é o objeto de estudo da Didática da Matemática. Portanto, para a análise de atividades pedagógicas é fundamental a investigação do seu funcionamento, ou seja, das particularidades de cada situação que colaboram para a estruturação dos conhecimentos do aluno.

---

7 Uma sequência didática, segundo Zabala (1998, p. 18), é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (...)”

A situação didática leva em consideração o fato de ele ter de aprender, em pouco tempo, um conceito que levou muito tempo para ser elaborado e que o professor deve criar condições que o conduzam à construção do seu conhecimento.

Para explicar sua teoria, Brousseau (1996a, 1996b) propôs o sistema didático composto pelo professor, o aluno e o saber que fazem parte da relação didática.

A ideia de “meio”, presente na teoria, é primordial para a preparação didática. Brousseau (2008, p. 54) expressa essa ideia da seguinte maneira:

> A intervenção do professor evoca, necessariamente, em relação aos conhecimentos que ensina, um funcionamento possível em outras circunstâncias, não apenas nas “situações com fins didáticos” (exercícios ou problemas) que ele propõe. Cria, então, fictícia ou efetivamente, um outro “meio”, em que o aluno atua de forma autônoma [...]

É por uma mudança no “meio” (novos problemas, situações, atividades…) que o sistema didático sofre um desequilíbrio, proporcionando a possibilidade de aprendizagem.

As relações entre o professor, o aluno e o saber podem ser entendidas como apresentadas a seguir.

- Na relação entre o professor e o saber são considerados os processos de ensino e aprendizagem do saber escolar (aproximação do saber, do ensino e da aprendizagem), bem como as condições sob as quais se pode produzir o conhecimento e as maneiras para alcançá-lo.
- Na relação entre o saber e o aluno é valorizado o conhecimento prévio[8] deste, ou seja, aquilo que ele já sabe, assim como as suposições sobre o novo saber e o seu desenvolvimento na construção do conhecimento. Nessa interação, as atividades matemáticas (o material utilizado) têm grande importância, pois, por meio delas, será possível perceber a evolução do aluno na aquisição do conhecimento.
- A relação entre professor e aluno se caracteriza pela comunicação entre eles na qual a intenção pedagógica do professor tem um importante papel.

Ressalte-se que, em uma relação didática, o professor possui um maior conhecimento sobre o saber do que o aluno. Mesmo este tendo alguma noção, suposição ou conhecimento prévio sobre um conteúdo, sua relação com o saber é

8 Para Ausubel, o conhecimento prévio é o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem (MOREIRA; MASINI, 2001).

ainda primária (MENEZES; LESSA; MENEZES, 2006). Isso confere ao professor uma grande responsabilidade na relação didática, devendo ele criar situações a fim de que o aluno se aproprie do novo saber.

1.2.1 Contrato didático

Para que exista a interação professor-aluno-saber em acordo com uma sequência didática, é estabelecido um contrato didático que é essencial para o funcionamento da teoria. Segundo Brousseau (1986) o contrato didático é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Tal conjunto de regras determina uma pequena parte explicitamente, mas principalmente implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Referido contrato regula o funcionamento da aula e as relações professor-aluno-saber, determinando a atuação e a atribuição de cada um. A condição de que as regras sejam sobretudo implícitas se deve ao paradoxo de que, se o professor expuser todas elas (“fazendo o aluno aprender”), ele pode estar tirando do aluno a oportunidade de aprendizagem, pois este não terá condições tão favoráveis para sua participação na construção do seu conhecimento.

Um componente essencial do contrato didático é a devolução. Ela é entendida como “o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência”[9] (BROUSSEAU, 2008, p. 91).

Assim, pode ocorrer a construção do conhecimento quando o aluno assume a responsabilidade por sua aprendizagem, utilizando o saber que está constituído em uma situação adidática.

9 As situações adidáticas são situações fora do contexto do ensino, sem qualquer indicação intencional de ensinar (BROUSSEAU, 1996b)

1.2.2 Classificação das situações didáticas

As situações didáticas são classificadas em quatro tipos: ação, formulação, validação e institucionalização. A sequência e suas características encontram-se a seguir.

1. As situações de ação são aquelas em que surge uma interação entre os alunos e o meio. Eles devem tomar decisões, aplicando seus conhecimentos prévios para resolver um problema proposto, originando-se um conhecimento.
2. As situações de formulação constituem-se aquelas em que os alunos são levados a explicitar as estratégias usadas (comunicação entre eles). Para isso, precisam formulá-las verbalmente.
3. As situações de validação ocorrem quando se tenta convencer um ou vários interlocutores da validade das afirmações feitas. Nesse caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Além da comprovação empírica de que o que dizem é certo, eles devem explicar por que, necessariamente, é assim. A superação de eventual dificuldade na comprovação pode ocorrer com o auxílio do professor.
4. As situações de institucionalização acontecem quando se pretende que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber que foi elaborado por eles.

É válido destacar que essa classificação serve apenas para operacionalizar uma análise didática e não para induzir uma separação nítida entre elas, pois, geralmente, acham-se fortemente entrelaçadas (PAIS, 2008).

A partir da TSD, Artigue (1996) estruturou a metodologia da engenharia didática, a qual é utilizada neste trabalho e apresentada em detalhes no Capítulo 2.

1.3 Teoria dos campos conceituais

A teoria dos campos conceituais foi desenvolvida por Gérard Vergnaud. Ela resgata os estudos de Vygotsky sobre o pensamento e a linguagem e utiliza o conceito de esquema de Piaget (GRINGS; CABALLERO; MOREIRA, 2006). Diferente do foco piagetiano que é as operações lógicas gerais, o da TCC está no funcionamento cognitivo do “sujeito-em-situação”, tendo como norte o conteúdo do conhecimento e o estudo conceitual desse (FRANCHI, 1999; VERGNAUD, 1994).

A TCC considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais.

Para Vergnaud (1998, p. 168), um campo conceitual[10] é “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”.

Os principais conceitos dessa teoria psicológica cognitivista, além do campo conceitual, são: concepção de conceito, situação, esquema e invariantes operatórios (teorema em ação ou conceito em ação).

Vergnaud (1988, 1990a, 1993, 1997) atribui os seguintes significados dos referidos conceitos.

A) Concepção de conceito: a formação de uma conceito envolve três conjuntos - S, I e R:

- S (referente) é um conjunto de situações que produz sentido ao conceito;
- I (significado) é um conjunto de invariantes operatórios que sustenta a operacionalidade do conceito;
- R (significante) é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos, diagramas...) que pode ser usado para indicar e denotar esses invariantes e designar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Um conceito adquire sentido por meio de um conjunto de situações. Assim, essas situações têm um papel preponderante na formação de um conceito, sendo o início de um campo conceitual.

B) Situação: é concebida como tarefa, não como situação didática. Foi visto que as situações são responsáveis por dar sentido a um conceito. Esse sentido, de acordo com Vergnaud (1990a, 1993), é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes. Mais precisamente são os comportamentos e sua organização (esquemas), evocados no sujeito por uma situação ou por uma representação simbólica que constituem o sentido de tal situação ou representação para esse indivíduo (ibid.).

C) Esquema: é a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações[11]. Essa organização, conforme Vergnaud (1996), é baseada em quatro classes de elementos principais (ingredientes):

10 Também definido como um conjunto de *situações* (como será visto, elas são entendidas como tarefas, não como situações didáticas).

11 Uma classe de situações é um conjunto de tarefas que solicitam um mesmo esquema.

1. metas e antecipações - um esquema se direciona a uma determinada classe de situações, nas quais o sujeito pode identificar metas e fazer previsões;

2. regras de ação - regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;

3. invariantes operatórios (teoremas em ação[12] e conceitos em ação[13]) - conhecimentos contidos nos esquemas, possibilitando reconhecer os elementos que viabilizam a determinação, por inferência, das metas, antecipações e regras de ação.

4. inferência - por meio dela e a partir dos invariantes operatórios, é possível estabelecer metas, fazer previsões e localizar as regras para lidar com uma dada classe de situações.

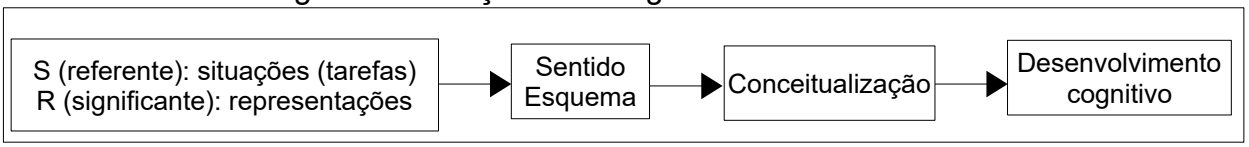
Dentre essas classes, os invariantes operatórios possuem um papel de destaque, conforme será mostrado a seguir.

D) Invariantes operatórios (teorema em ação ou conceito em ação): constituem a base conceitual, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e da meta a alcançar, inferir as regras de ação mais adequadas para lidar com uma situação (VERGNAUD, 1996).

O teorema em ação e o conceito em ação conduzem à evolução da ação sendo chamados de conhecimentos em ação. O vínculo teórico entre conceitos e a atividade é promovido por eles.

Para melhor se compreender a relação entre os conceitos expostos, é apresentado o esquema da Figura 3.

Figura 3 - Relação entre alguns conceitos da TCC



Fonte: Autor da pesquisa

As situações e/ou as representações são as iniciadoras do processo para o desenvolvimento cognitivo. O sentido se estabelece pela relação do aluno com esses conjuntos. Tal relação nada mais é que o esquema solicitado ao aluno diante

12 Teorema em ação é uma proposição considerada, pelo aprendiz, como verdadeira sobre o real (VERGNAUD, 1998).

13 Conceito em ação é uma categoria de pensamento considerada, pelo aprendiz, como pertinente (VERGNAUD, 1998).

das referidas situações e/ou representações. A partir dos esquemas é que ocorre a conceitualização, a qual constitui o núcleo do desenvolvimento cognitivo.

De acordo com Franchi (1999) a ausência de uma conceitualização adequada está no centro da origem dos erros sistemáticos cometidos pelos alunos.

Como a conceitualização é uma consequência dos esquemas, pode-se afirmar que “é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito (os conceitos em ação e as teorias em ação), uma vez que é aí que podemos encontrar os elementos que fazem com que a sua ação seja operatória” (CARVALHO JÚNIOR; AGUIAR JÚNIOR, 2008, p. 216).

Vergnaud (1993) ensina que as classes de situações em que os esquemas estão relacionados podem ser de duas formas:

1. aquelas em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
2. aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso.

Para cada uma dessas classes, o conceito de esquema é diferente. Na primeira, os comportamentos são automatizados por apenas um esquema. Já na segunda, são utilizados vários esquemas na busca do objetivo a ser atingido. Esses esquemas concorrem para serem os mais adequados em uma dada classe sendo, muitas vezes, abandonados, modificados ou combinados entre si (VERGNAUD, 1998).

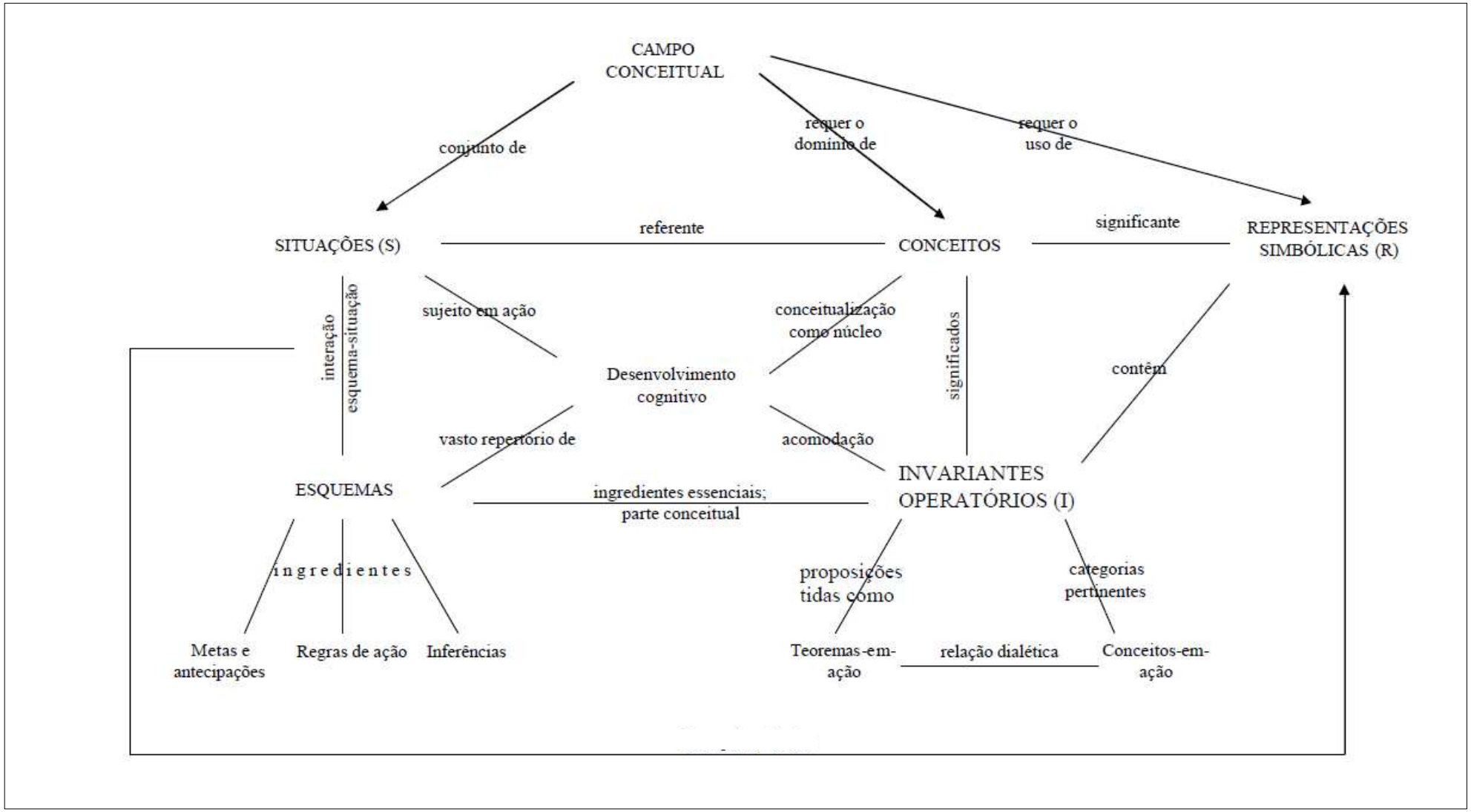
A segunda classe de situações propicia aos alunos momentos de descoberta. É nessas situações que o professor deve levar o aluno a aceitar a responsabilidade por sua aprendizagem, viabilizando a construção do seu conhecimento.

Assim, pelo acompanhamento desses momentos, é possível analisar os conhecimentos em ação pertencentes aos esquemas utilizados pelos alunos. Para a análise desse conhecimento, que é sobretudo implícito, se faz necessária a sua explicitação pelo aprendiz.

Para finalizar, foi inserida a Figura 4, que é um mapa conceitual para a teoria de Vergnaud. Nele encontram-se os principais conceitos da TCC e suas relações. As palavras que aparecem sobre as linhas que conectam os conceitos

buscam expor a natureza da relação entre eles. As setas, quando existem, sugerem apenas uma direção para leitura.

Figura 4 - Um mapa conceitual para a teoria dos campos conceituais de Vergnaud



Fonte: Moreira e Sousa (2002)

2 METODOLOGIA

A escolha pelo tipo de abordagem metodológica para esta pesquisa se pautou por suas características: a fonte dos dados é o ambiente natural da sala de aula; ela é descritiva; o maior interesse é pelo processo e não pelos resultados; a análise é de forma indutiva e o significado tem grande importância.

As cinco características elencadas contemplam as apontadas por Bogdan e Bilken (1994) para uma pesquisa qualitativa.

Diante disso e da pergunta da pesquisa "Como desenvolver atividades pedagógicas que podem favorecer a aprendizagem do conceito de espaço vetorial?", a qual busca saber "como" favorecer a aprendizagem, a abordagem considerada mais adequada foi a qualitativa.

Nessa perspectiva, a procura pela compreensão e pela descrição da evolução da aprendizagem do conceito de espaço vetorial pelos alunos, quando sujeitos a um material elaborado pela óptica dos referenciais da pesquisa, e não a sua expressividade numérica, fez com que a investigação fosse feita com um número reduzido de estudantes. De acordo com Goldenberg (2004, p. 50), "O pesquisador qualitativo buscará casos exemplares que possam ser reveladores da cultura em que estão inseridos. O número de pessoas é menos importante do que a teimosia em enxergar a questão sob várias perspectivas".

Levando-se em conta tais considerações e o objetivo deste trabalho, foi escolhida como metodologia de pesquisa a engenharia didática.

Essa metodologia surgiu na década de 1980 na didática da matemática francesa, tendo como principal referencial teórico a TSD de Brousseau (2008).

Conforme Carneiro (2005, p. 89–90),

> A origem desta teoria está na preocupação com uma certa "ideologia da inovação" presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino.

Logo, as realizações didáticas a serem aplicadas na sala de aula devem ser consideradas no processo da investigação.

A engenharia didática foi concebida para tratar de duas questões:

a) as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino;

b) o lugar das realizações didáticas nas metodologias da investigação didática.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) classificam-na

> [...] em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori.

Essa metodologia se diferencia de outras, baseadas nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão relacionados. Efetivamente, segundo Artigue (1996, p. 197),

> […] as investigações que recorrem a experimentações na sala de aula situam-se, a maioria das vezes, numa abordagem comparativa com validação externa dos desempenhos de grupos experimentais e de grupos testemunho. Este paradigma não é o da engenharia didáctica, que se situa no lado oposto, no registro dos estudos de casos, e cuja validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Para a aplicação da engenharia didática, Artigue (1996) exibe quatro fases:

1ª) análises prévias;

2ª) concepção e análise *a priori*;

3ª) experimentação;

4ª) análise *a posteriori* e validação.

A seguir, é apresentada uma síntese de cada uma delas.

2.1 Análises prévias

A fase de análises prévias pretende examinar o funcionamento do ensino de um conteúdo escolhido. Tem por objetivo elucidar as concepções dos alunos e os obstáculos existentes para a construção do conhecimento. E, de posse dessas informações, fazer uma reflexão sobre as dificuldades descobertas e definir possíveis alterações para superá-las.

Na realização da análise, Artigue (1996) recomenda uma abordagem em três dimensões:

a) a epistemológica, associada às características do saber em jogo;

b) a didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino;

c) a cognitiva, associada às características cognitivas dos alunos.

Nesta fase é que se identificam os constrangimentos que prejudicam ou até mesmo bloqueiam a aprendizagem e, por meio de um exame das perspectivas epistemológica, didática e cognitiva, se propõem mudanças.

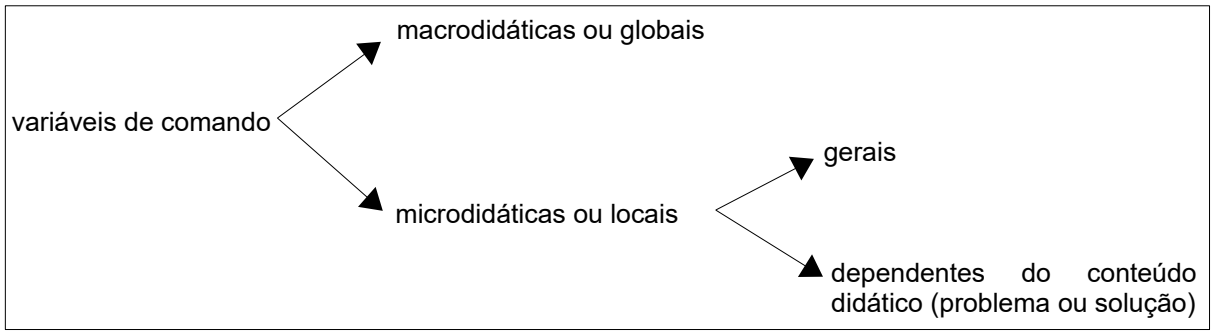
2.2 Concepção e análise *a priori*

Nesta fase, o pesquisador define as variáveis do sistema (variáveis de comando) que não estão fixadas pelos constrangimentos com as quais ele irá agir. Faz a escolha dessas variáveis levando em conta as que considera pertinentes ao problema estudado.

Existem as variáveis de comando macrodidáticas ou globais e as microdidáticas ou locais.

A Figura 5 apresenta um esquema dos dois tipos de variáveis de comando.

Figura 5 - Tipos de variáveis de comando



Fonte: Autor da pesquisa

As variáveis macrodidáticas ou globais estão relacionadas à organização global da engenharia.

Já as variáveis microdidáticas ou locais estão associadas à organização local da engenharia. Essa organização refere-se à sistematização de uma sessão ou fase, podendo ser de ordem geral ou dependente do conteúdo didático cujo ensino é

visado (ARTIGUE, 1996). Nesse último caso, as variáveis didáticas podem ser divididas naquelas associadas ao problema e nas associadas às soluções.

Na sequência dos procedimentos da engenharia, após o exame dos constrangimentos, feito na fase de análises prévias, são tratadas as variáveis globais, como uso de tecnologias digitais, estratégias de ensino a serem usadas, determinação do nível a ser abordado e estudo qualitativo do conteúdo, entre outros. Em seguida, começa o passo a passo da engenharia pela mediação das variáveis locais.

Também é nesta etapa que o processo de validação se inicia por meio da análise *a priori*, a qual pode ser entendida como um estudo de controle de sentido. Tem, como objetivo, "[…] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos" (ARTIGUE, 1996, p. 205). Para isso, propõem-se hipóteses que serão testadas na experimentação e observadas na análise *a posteriori* para a sua validação.

A análise *a priori* é composta por uma parte descritiva e uma preditiva, direcionada às características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se vai tentar devolver aos alunos (ARTIGUE, 1996).

2.3 Experimentação

Esta fase ocorre em sala de aula. Ela se concretiza pela aplicação das atividades construídas a partir das análises realizadas nas fases anteriores. As situações didáticas são desenvolvidas por meio de sequências didáticas junto com o registro de observações e manifestações dos alunos. Para complementar os dados, pode-se fazer uso de questionários, entrevistas, diários de aula, avaliações escritas, entre outros. O material obtido aqui será de fundamental importância para a fase de validação (confirmação das hipóteses da investigação).

2.4 Análise *a posteriori* e validação

Esta última fase é composta pela análise *a posteriori* e pela validação. A análise *a posteriori* é feita pelo exame dos dados coletados na experimentação. As

conclusões obtidas são comparadas com as hipóteses formuladas na segunda fase da engenharia didática. É no confronto das análises *a priori* e *a posteriori* "[..] que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação" (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Assim, pela constatação do que se esperava e do que ocorreu durante a prática, tem-se a validação ou não das hipóteses da pesquisa.

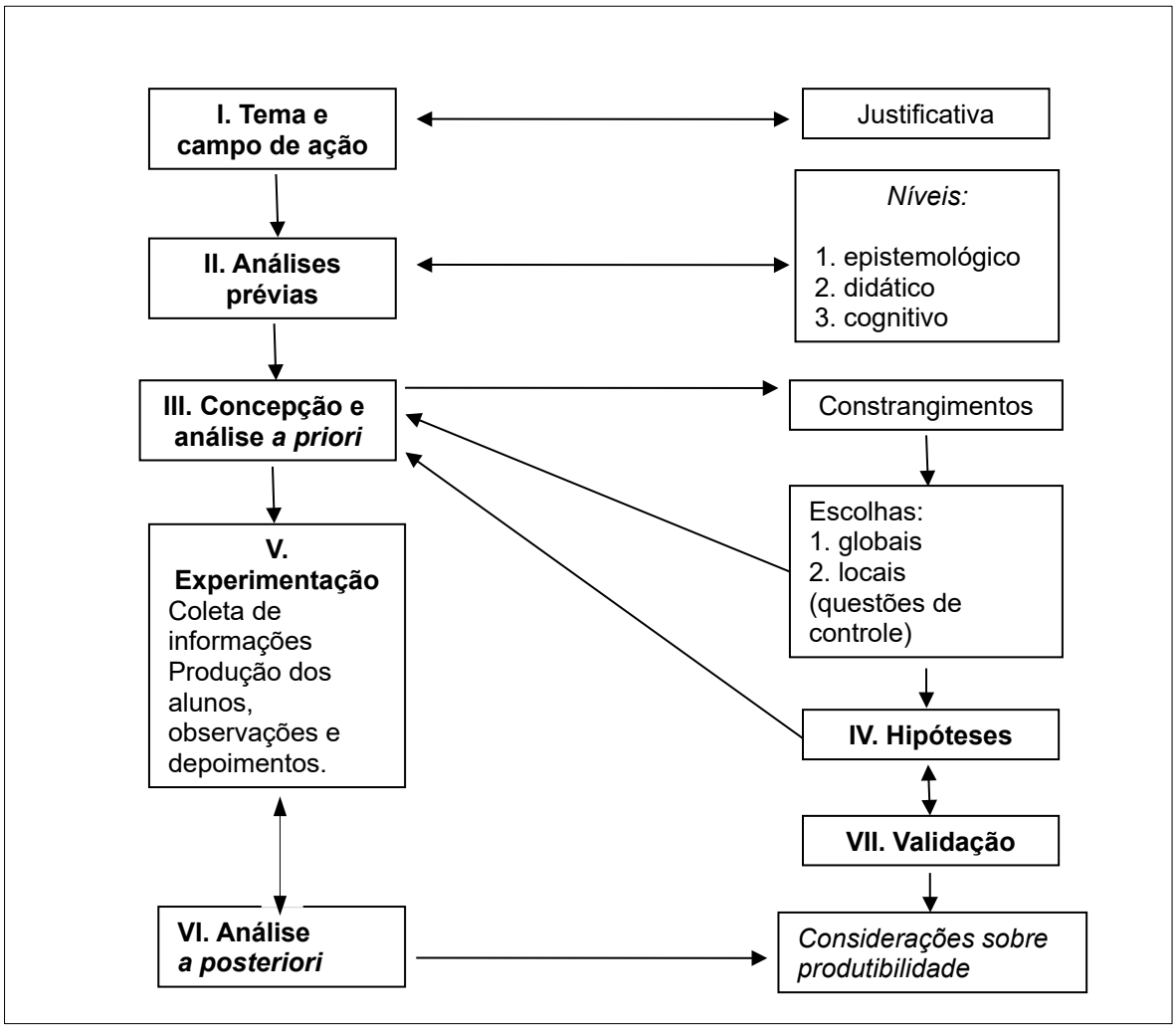
Nesta pesquisa, optou-se, como Carneiro (2005), por delinear o percurso por uma divisão mais elaborada da engenharia. Esse caminho é composto por:

I. tema e campo de ação;
II. análises prévias;
III. concepção e análise *a priori*;
IV. hipóteses;
V. experimentação;
VI. análise *a posteriori;*
VII. validação.

Para uma compreensão melhor da relação entre essas fases, é apresentado na Figura 6 um mapa da engenharia[14], que é um esquema da estrutura desta pesquisa.

14 A numeração dos itens no mapa refere-se à sequência metodológica adotada na tese.

Figura 6 - Mapa da engenharia



Fonte: Carneiro (2005, p. 117)

3 TEMA, CAMPO DE AÇÃO E ANÁLISES PRÉVIAS

Este capítulo traz um breve relato do tema e do campo de ação da pesquisa. Em seguida, é apresentada a fase das análises prévias com o aprofundamento de suas dimensões.

3.1 Tema e campo de ação

O tema deste estudo é a aprendizagem do conceito de espaço vetorial. As motivações para a sua escolha foram elencadas no início da tese na parte da apresentação.

A investigação foi realizada com um grupo de oito alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – Bragança Paulista (campo de ação), que participou de um minicurso, em horário distinto das aulas regulares da turma, com oito aulas, de 50 minutos, sendo duas por semana (semanas consecutivas) e de entrevistas (Anexo E), individualmente, com cada aluno, após o término do minicurso. Nesses encontros foi desenvolvida uma sequência didática que contemplou um organizador prévio e situações didáticas com a intenção de propiciar condições para uma aprendizagem significativa do conceito de espaço vetorial[15].

Os alunos eram do terceiro semestre do curso e não haviam estudado o conteúdo que abordei na pesquisa[16]. Além disso, eles já tinham feito disciplinas que são pré-requisitos para uma melhor compreensão dos espaços vetoriais reais, como Geometria I e II, Fundamentos de Geometria Analítica e Vetores, Geometria Analítica.

3.2 Análises prévias

Esta parte da engenharia didática tem como objetivo analisar o funcionamento do ensino tradicional de Álgebra Linear para sugerir mudanças que favoreçam uma aprendizagem significativa.

De acordo com Carneiro (2005, p. 93),

---

15 O grupo de alunos e o contexto das aulas são mais elucidados na p.82 e no Capítulo 5.

16 Espaços vetoriais reais pertence à disciplina de Álgebra Linear, que é oferecida no quarto semestre do curso.

> A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. A tradição é vista como um estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema dinâmico, que tem falhas. A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório.

Tal análise é realizada abordando as dimensões epistemológica, didática e cognitiva. Na sua implementação, busca-se reconhecer constrangimentos que atrapalham a construção do conhecimento com a finalidade de recomendar modificações.

A seguir, é realizada uma apresentação de cada dimensão, acompanhada de sua análise, em relação ao ensino tradicional da Álgebra Linear.

3.2.1 Dimensão epistemológica

A dimensão epistemológica está associada às características do saber em jogo. Para o seu estudo, foi adotada a noção de obstáculo epistemológico, introduzida na Didática da Matemática por Brousseau, em 1976, o qual se inspirou nas ideias do filósofo francês Bachelard, apresentadas em 1938.

Para Brousseau (1983), a noção de obstáculo epistemológico é constituída como um conhecimento e não como uma dificuldade ou falta de conhecimento, produzindo respostas adaptadas em um determinado contexto. Entretanto, quando usado fora dele, se revela falso, promovendo respostas incorretas. O aluno resiste às contradições geradas pelo obstáculo e a sua modificação por um novo conhecimento, o que torna todo conhecimento possível de ser uma resistência à aquisição de novos conhecimentos.

Com essa concepção, é possível mudar o entendimento do erro produzido pelo aluno. De acordo com Brousseau (1983, p. 104)

> o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente mal adaptado.

Nessa citação, destaca-se a presença do conhecimento prévio influenciando de maneira contundente a aprendizagem do estudante. Essa consideração vem ao encontro da importância dada por David Ausubel, na sua teoria

da aprendizagem significativa, que considera o conhecimento que o aluno já possui como o fator isolado mais importante para a aquisição de novos saberes.

Neste trabalho, optou-se por uma das abordagens da epistemologia da matemática feita por Vergnaud (1990b), na qual utiliza a perspectiva histórica para entender os ambientes sociais e científicos em que novos conceitos e técnicas dessa disciplina emergiram e se desenvolveram.

O uso da História da Matemática no ensino não é novo. No entanto, a ideia de se analisar o conhecimento matemático numa perspectiva histórica, para se obterem algumas luzes de como se dá o processo de construção do conhecimento pelos estudantes, só tomou força nos últimos 35 anos, devido, principalmente, aos estudos de Bachelard (IGLIORI, 1999).

Bachelard (1971) defende que é pelo estudo do processo histórico da construção do conhecimento científico que se pode reconhecer os obstáculos epistemológicos.

Assim, para identificar esses obstáculos, deve-se confrontar a evolução histórica com as dificuldades recorrentes dos alunos. Ressalta-se que existem obstáculos epistemológicos observados no desenvolvimento histórico, mas que não são obstáculos que gerem tais dificuldades aos alunos.

Para fazer tal levantamento histórico e compará-lo com os erros habituais dos aprendizes no estudo da Álgebra Linear, foram tomados como referência os estudos de Dorier (1999, 2003) e Sierpinska (1996).

O levantamento feito por Dorier (1999) se refere à última fase da gênese da teoria dos espaços vetoriais que teve início em 1930. Nesse momento, ocorreu a axiomatização da Álgebra Linear com a reconstrução teórica de métodos para a resolução de problemas lineares por meio do uso de conceitos e ferramentas da nova teoria axiomática. Referidos métodos possibilitaram a aplicação em uma variedade de contextos, como sistemas de equações lineares, geometria, estudo das quádricas, equações diferenciais, etc.

Segundo Dorier (2003, p. 2, tradução nossa), “A abordagem axiomática não foi absolutamente necessária, exceto para problemas de dimensão infinita não enumerável, mas isso tornou uma forma universal de pensar e organizar a Álgebra Linear”.

Essa axiomatização não possibilitou a resolução de novos problemas matemáticos, mas, devido ao seu poder de generalização e unificação, simplificou a busca por métodos de resolução de problemas (DORIER, 1999, 2003).

A simplificação proporcionada por ela não é, geralmente, reconhecida pelos alunos em um primeiro momento. Muitas vezes, o aluno consegue resolver os problemas usando conhecimentos já pertencentes à sua estrutura cognitiva. No entanto, estes conhecimentos são específicos e limitados para um certo conjunto de problemas. A sua percepção acerca das vantagens da utilização da Álgebra Linear surge durante o curso, porém, a sua aprendizagem é comprometida quando ele não compreendeu os conceitos iniciais.

Conforme Dorier *et al*.(1999), a unificação e generalização da Álgebra Linear tem como consequência didática a dificuldade em motivar a aprendizagem[17] da nova teoria, devido às vantagens só aparecerem depois de ela ter sido aplicada em uma grande variedade de situações.

A pesquisadora Anna Sierpinska do *Department of Mathematics and Statistics da Concordia University* (Canadá) apresenta estudos nessa mesma linha de investigação. No livro "*History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*", na seção intitulada "*The Diachronic Dimension in Research on Understanding in Mathematics – Usefulness and Limitations of the Concept of Epistemological Obstacle*", ela identifica os principais obstáculos epistemológicos no ensino e na aprendizagem da Álgebra Linear tomando por base as dificuldades na construção do conhecimento e os momentos históricos em que existiu oposição ao saber científico.

Para Sierpinska (1996), um dos maiores obstáculos epistemológicos consiste na mudança do pensamento algébrico do "nível inter-operacional" que o aluno vem do Ensino Médio para o "trans-nível" (nível que precisa de maior quantidade de axiomas e definições), necessário no Ensino Superior para compreender os conteúdos e a importância de conceitos mais gerais, como espaços vetoriais, dependência vetorial e transformações lineares.

Robert e Robinet (1989), citados por Dorier (1999), também constataram esse fato pela óptica dos alunos. Em uma *survey*, verificaram como principais dificuldades para a aprendizagem da Álgebra Linear o uso do formalismo, a grande

17 Como mencionado em 1.1.5, embora a motivação seja desejável, ela não é necessária para que exista a aprendizagem significativa.

quantidade de definições e a falta de conexão com os conhecimentos que eles já possuíam.

Os obstáculos epistemológicos apresentados por Sierpinska (1996) são quatro, descritos a seguir.

1º) A passagem da geometria plana e espacial para a geometria no $\mathbb{R}^n$

O primeiro obstáculo na aprendizagem da Álgebra Linear, identificado por ela, foi na passagem da geometria plana e espacial para a geometria no $\mathbb{R}^n$. Essa limitação se evidencia pela grande dificuldade dos alunos em raciocinar quando não conseguem representar por figuras objetos do $\mathbb{R}^n$.

De acordo com Borges (2007, p.8),

> Ao utilizarem ilustrações geométricas para resolverem os problemas na geometria euclidiana, os alunos se apegam às imagens, não entendendo que a matemática também pode ser entendida como um modelo da realidade e não a realidade em si mesma, as figuras simbólicas são apenas representações da realidade e não a realidade em si, servindo apenas como idéias introdutórias dos conceitos abstratos que irão surgir.

Em consequência disso, quando os alunos entram em contato com estruturas algébricas em $\mathbb{R}^n$, surge um obstáculo para a compreensão desse conceito, pois eles não pensam na matemática, como, por exemplo, em conceitos de números, funções, etc, sendo objetos ideais ou gerais, que não consistem de propriedades de objetos, mas, sim, de classes ou coleções destes (BORGES, 2007).

2º) Decifrar significados das representações analíticas

Neste obstáculo, Sierpinska reconhece o grande sucesso histórico do simbolismo da Álgebra Linear. Entretanto, os estudantes que têm aprendido conceitos pelas definições formuladas nesse simbolismo apresentam sérias razões para afirmar que ele esconde mais do que revela.

3º) A necessidade de uma hipótese inicial para a compreensão de uma definição

Em suas experiências, a pesquisadora observou que os alunos formulam hipóteses já no começo da leitura de uma definição, ou seja, procuram o entendimento antes mesmo da leitura chegar ao final. Muitas vezes essas suposições são equivocadas em razão dos termos serem novos para eles, o que compromete a sua compreensão.

Para a superação desse problema, ela aconselha que seja iniciada uma apresentação de conjecturas antes da definição. Também destaca a necessidade da negociação de significados[18] para que o aluno tenha o entendimento do conceito como ele é aceito no contexto da Álgebra Linear.

Para a aprendizagem significativa, Moreira (2011, p. 48), similarmente, afirma que

> [..] a captação de significados implica diálogo, negociação de significados. O aluno tem que externalizar os significados que está captando. Esse processo pode ser longo e só termina quando o aluno capta os significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino.

4º) Composição de provas[19]

Na perspectiva histórica da epistemologia, Harel (1999) declara que é possível encontrar alguns dos obstáculos enfrentados pela comunidade matemática os quais apareceram na história, quanto ao desenvolvimento da concepção dos alunos em relação a provas.

Para muitos deles, o que diferencia o curso de Álgebra Linear de outros cursos são as provas que devem ser entendidas e produzidas. Nas entrevistas feitas por Sierpinska (1996), os alunos relataram a grande dificuldade de começar, de terminar e de saber se realmente foi provado o que se pretendia.

Para a pesquisadora, o problema para provar é uma dificuldade de todo estudante, mas é maior para aqueles que nunca estudaram lógica ou provaram algum resultado durante o Ensino Médio.

---

18 A negociação de significados consiste no processo de apresentação por parte do professor dos significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino e “devolução” pelos alunos dos significados captados. Esse processo termina quando o aluno capta os significados aceitos no contexto da matéria de ensino (MOREIRA, 2011).

19 Prova é uma demonstração de que, dados certos axiomas, algum enunciado de interesse é necessariamente verdadeiro (KRANTZ, 2007).

Como alternativa para a superação desse obstáculo, Sierpinska faz vários questionamentos em relação às respostas do aluno, levando-o a sentir a necessidade de produzir provas para justificá-las.

3.2.2 Dimensão didática

A dimensão didática está associada às características do funcionamento do sistema de ensino[20], entendido como o ambiente do sistema didático que, por sua vez, é a instituição pela qual a intenção didática se manifesta.

Para a análise desta dimensão, foi tomado como referência o livro que, como afirma Lajolo (1996), "é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal".

Na matemática o seu valor é ainda maior. Conforme Valente (2006), quando comparado com outros campos de estudos, como a física, a química ou a biologia, pode-se assegurar que o ensino e a aprendizagem da matemática estão fortemente atrelados ao uso dos livros didáticos.

Portanto, esse recurso possui um papel relevante no ensino e na aprendizagem da matemática.

Lajolo (1996, p. 4) destaca o valor do livro didático no país quando declara que

> […] sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina.

Os livros[21] a serem analisados foram selecionados a partir das indicações das bibliografias da disciplina de Álgebra Linear dos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades estaduais paulistas USP, Unesp, Unicamp e do IFSP – Campus Bragança, local da realização desta pesquisa. Os livros[22] escolhidos foram:

- Livro A - ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

20 Como exemplo de sistema de ensino tem-se uma escola na qual um curso relativo a um objeto do saber constitui um sistema didático (BRUN, 1996).

21 Embora os livros analisados não sejam considerados, rigorosamente, didáticos, eles têm grande influência na didática do professor.

22 Utilizei esses livros tanto como aluno quanto como professor o que me ajudou na análise.

- Livro B - BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- Livro C - CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1987.

Para a análise crítica dos livros didáticos foi usada a organização praxeológica da teoria antropológica do didático (TAD), elaborada pelo didata francês Yves Chevallard. A TAD promoveu uma ampliação conceitual da didática francesa. Essa ampliação ocorreu devido à inserção do papel das instituições[23] na interação entre o professor, o aluno e o saber, proposta por Brousseau (1996a).

Como postulado básico da TAD, Chevallard (1999) defende que toda atividade humana pode ser descrita por um modelo único, a praxeologia.

De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 250-251, tradução nossa),

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, há duas partes em que uma não pode viver sem a outra. Por um lado estão as tarefas e técnicas e, por outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que chamamos de "prática" ou, em grego, práxis. A segunda é formada por elementos que possibilitam justificar e compreender o que é feito, é o campo do discurso fundamentado - implícito ou explícito - sobre a prática, que os gregos chamavam de logos.

A composição da prática (*práxis*) com o saber (*logos*) institui a praxeologia que é concebida pelos conceitos de tarefa (t), algo a ser realizado; tipo de tarefa (T), tarefa composta por outras tarefas; técnica (ô), maneira de realizar as tarefas de um tipo; tecnologia (θ), discurso racional sobre a técnica com função de justificá-la, explicá-la e produzir novas técnicas; e teoria (Θ) que fundamenta o discurso da tecnologia (CHEVALLARD, 1999).

Assim, a tarefa (T) e a técnica (ô) compõem a prática (T, ô). E a tecnologia (θ) com a teoria (Θ) compõem o saber (θ, Θ). Em notação temos a praxeologia como (T, ô, θ, Θ).

A TAD é composta por essa parte estrutural, que corresponde à praxeologia ou organização praxeológica, e pela parte funcional, representada por seis momentos didáticos (MD):

a) primeiro encontro com a praxeologia da matemática estudada;

---

23 Para Chevallard, citado por Barbosa e Lins (2010), uma instituição é um dispositivo social total "que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar".

b) exploração do tipo de tarefa e de elaboração de técnicas;

c) constituição do ambiente tecnológico e teórico;

d) institucionalização;

e) trabalho da técnica;

f) avaliação.

Como neste trabalho optou-se somente pelo uso do aspecto estrutural da teoria para a análise dos livros, não será detalhada a parte funcional da TAD.

Com o intuito de fazer inferências sobre o funcionamento do ensino dos conceitos inerentes à definição de espaço vetorial, por meio da análise da organização praxeológica dos livros escolhidos, foram priorizados os seguintes aspectos em relação à apresentação e ao desenvolvimento desse conteúdo que

a) é potencialmente significativo para os alunos;

b) favorece o surgimento de situações adidáticas.

Considerando o potencial significativo buscou-se identificar nos livros uma organização sequencial, diferenciação progressiva, reconciliação integrativa e a consolidação do conteúdo segundo a TAS.

Para o aspecto do surgimento de situações adidáticas procurou-se nos livros o potencial deles em poder desenvolver essas situações.

Em seguida são apresentadas algumas particularidades dos livros.

O livro A - **Álgebra Linear com Aplicações** - é de autoria de Howard Anton, Ph.D. em matemática pelo *Polytechnic Institute of Brooklyn*, e Chris Rorres, Ph.D. pelo *Courant Institute of New York University*. Esse livro é uma publicação de 2001 da Editora Bookman da obra de título original **Elementary Linear Algebra: Applications Version**, traduzida pelo professor Claus Ivo Doering.

Ele possui onze capítulos compostos por teoria, aplicações da Álgebra Linear e exercícios que promovem discussão, descoberta e requerem o uso de computadores. O décimo primeiro capítulo consiste em vinte e uma aplicações da Álgebra Linear selecionadas dentre a administração, economia, engenharia, física, ciência da computação, teoria da aproximação, ecologia, sociologia, demografia e genética.

O livro B - **Álgebra Linear** - é de autoria de José Luiz Boldrini, Ph.D. em Matemática Aplicada pela *Brown University*; Sueli I. Rodrigues Costa, doutora em matemática pela Unicamp; Vera Lúcia Figueiredo, doutora em matemática pela

Unicamp e Henry G. Wetzler. Ele foi publicado em 1980 pela Editora Harper e Row do Brasil.

O livro é formado por catorze capítulos os quais buscam inserir cada conteúdo em um contexto de aplicação da Álgebra Linear, seguidos de exercícios teóricos e aplicados. Algumas demonstrações foram deixadas como exercícios dando ao texto uma maior fluência e possibilitando ao aluno desenvolvê-los pelo seu raciocínio lógico.

O livro C - **Álgebra Linear e Aplicações** - foi elaborado por Carlos A. Callioli, professor titular da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo); Hygino H. Domingues, professor adjunto do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Unesp (Rio Preto) e Roberto C. F. Costa, professor livre-docente do Instituto de Matemática e Estatística – USP. A publicação analisada é de 1987 da Atual Editora.

Ele está dividido em duas partes: Álgebra Linear e Aplicações. A primeira contém oito capítulos e a segunda, seis. Em cada capítulo há a apresentação da teoria seguida de exercícios resolvidos e propostos. A abordagem feita no livro não é contextualizada, mesmo na segunda parte, sendo teórica em todos os conteúdos. A segunda parte trata da aplicação dos conhecimentos da primeira parte na própria matemática, como diagonalização de operadores lineares, polinômios de Lagrange, sequências recorrentes, entre outros.

3.2.2.1 Análise de conteúdo dos livros didáticos

Inicialmente, é apresentada a forma como estão estruturadas as seções que tratam de espaços vetoriais reais nos três livros. Foram selecionadas algumas situações de cada livro para exemplificar a abordagem feita pelos autores à luz da organização praxeológica (OP) da TAD. Em seguida, foi mostrado um quadro com a identificação dos tipos de tarefas encontradas nos livros e sua análise. Essa foi realizada a partir dos aspectos citados, visando a identificar a maneira com que os autores introduzem e desenvolvem o conceito escolhido.

O Livro A - **Álgebra Linear com Aplicações -** possui três capítulos que tratam de espaços vetoriais.

O Capítulo 4, Espaços Vetoriais Euclidianos, tem por objetivo o estudo das propriedades e operações sobre os vetores de espaços do tipo n-dimensional. A sua análise não foi feita em razão de ele não trabalhar com a definição propriamente dita do espaço vetorial, sendo apenas uma extensão do estudo de vetores pertencentes a espaços vetoriais euclidianos.

O Capítulo 10, Espaços Vetoriais Complexos, faz o estudo de espaços vetoriais quando os escalares podem ser números complexos. Também não foi feita a sua análise pois é um conteúdo que não se insere nos tópicos iniciais da disciplina.

Já o Capítulo 5, Espaços Vetoriais Arbitrários, refere-se a espaços vetoriais quaisquer, que cumprem com os axiomas (regras) necessários para tal. Ele está dividido em seis seções das quais foi analisada a primeira: Espaços Vetoriais Reais.

No início, os autores anunciam a ampliação do conceito de vetor por meio da generalização das principais propriedades dos vetores usuais. Tem-se a seguinte introdução:

> *Nesta seção nós iremos estender o conceito de vetor extraindo as propriedades mais importantes dos vetores usuais e transformando-as em axiomas. Assim, quando um conjunto de objetos satisfizer estes axiomas, estes objetos automaticamente têm as mais importantes propriedades dos vetores usuais, o que torna razoável considerar estes novos objetos como novos tipos de vetores.*

Então, é dada a seguinte definição (Figura 7) de espaço vetorial com dez axiomas:

Figura 7 - Definição de espaço vetorial

Definição

Seja $\mathbf{V}$ um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números). Por ***adição*** nós entendemos uma regra que associa a cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$ um objeto $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, chamado a ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** nós entendemos uma regra que associa a cada escalar k e cada objeto $\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$ um objeto $k\mathbf{v}$, chamado o ***múltiplo*** de $\mathbf{v}$ por k. Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em $\mathbf{V}$ e quaisquer escalares k e l, então nós dizemos que $\mathbf{V}$ é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de $\mathbf{V}$ são ***vetores***.

(1) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em $\mathbf{V}$ então $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é um objeto em $\mathbf{V}$.

(2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(4) Existe um objeto $\mathbf{0}$ em $\mathbf{V}$, chamado um ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** de $\mathbf{V}$, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em $\mathbf{V}$.

(5) Para cada $\mathbf{u}$ em $\mathbf{V}$, existe um objeto $-\mathbf{u}$, chamado um ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

(6) Se k é qualquer escalar e $\mathbf{v}$ é um objeto em $\mathbf{V}$, então $k\mathbf{v}$ é um objeto em $\mathbf{V}$.

(7) $l(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$

(8) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$

(9) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

(10) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 158)

Alguns exemplos de espaços vetoriais são exibidos. Um deles é a Figura 8.

Figura 8 - Exemplo do livro A

Mostre que o conjunto $\mathbf{V}$ de todas as matrizes 2x2 com entradas reais é um espaço vetorial se a adição vetorial é definida pela adição matricial e a multiplicação vetorial por escalar é definida pela multiplicação matricial por escalar.

Solução

Neste exemplo é conveniente verificar os axiomas na seguinte ordem: 1, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5 e 10. Sejam

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Para provar o Axioma 1, nós devemos mostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em $\mathbf{V}$, ou seja, nós devemos mostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é uma matriz 2x2. Mas isto segue da definição de soma matricial, pois

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}.$$

Similarmente, o Axioma 6 vale pois para cada número real k nós temos

$$k\mathbf{v} = k\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix}$$

e portanto $k\mathbf{v}$ é uma matriz 2x2 e conseqüentemente um objeto em $\mathbf{V}$.

O Axioma 2 segue do Teorema 1.4.1a (Figura 9) pois

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Similarmente, o Axioma 3 segue da parte (*b*) daquele teorema e os Axiomas 7, 8 e 9 seguem das partes (*h*), (*j*) e (*l*), respectivamente.

Para provar o Axioma 4, nós devemos encontrar um objeto $\mathbf{0}$ em $\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em $\mathbf{V}$. Isto pode ser feito definindo $\mathbf{0}$ como

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Com esta definição,

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{u}$$

e, similarmente, $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. Para provar o Axioma 5, nós devemos mostrar que cada objeto $\mathbf{u}$ em $\mathbf{V}$ tem um negativo $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Isto pode ser feito definindo o negativo de $\mathbf{u}$ como

$$-\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-u_{11} & -u_{12}\\ -u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix}.$$

Com esta definição,

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-u_{11} & -u_{12}\\ -u_{21} & -u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

e, similarmente, $(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Finalmente, o Axioma 10 é uma simples conta:

$$1\mathbf{u}=1\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{u}.$$

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 158-159)

Figura 9 - Teorema 1.4.1- Propriedades da aritmética matricial

Teorema 1.4.1 **Propriedade da Aritmética Matricial**

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) A + B = B + A	(Lei da Comutatividade para a Adição)
(b) A + (B + C) = (A + B) + C	(Lei da Associatividade da Adição)
(c) A (B C) = (A B) C	(Lei da Associatividade da Multiplicação)
(d) A (B + C) = A B + A C	(Lei da Distributividade à Esquerda)
(e) (A + B) C = A C + B C	(Lei da Distributividade à Direita)
(f) A (B – C) = A B – A C	*(j) (a + b) C + a C + b C*
(g) (B – C) A = B A – C A	*(k) (a – b) C = a C – b C*
(h) a (B + C) = a B + a C	*(l) a (b C) = (a b) C*
(i) a (B – C) = a B – a C	*(m) a (B C) = (a B) C = B (a C)*

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 49)

No exemplo citado, como em outros presentes no livro, a abordagem é puramente algébrica e de verificação dos axiomas elencados no início.

Pela OP tem-se:

− tarefa: mostrar que um conjunto de objetos é um espaço vetorial pela verificação de axiomas;

− técnica: buscar, a cada axioma da definição, chegar à tese a partir da hipótese, considerando as propriedades válidas para as operações envolvidas;

− discurso teórico-tecnológico: constatar que diferentes conjuntos de elementos podem ser um espaço vetorial.

Para os dezesseis primeiros exercícios pertencentes ao conjunto de exercícios, é feito o seguinte enunciado:

> *Nos Exercícios 1-16 é dado um conjunto de objetos junto com operações de adição e multiplicação por escalar. Determine quais dos conjuntos são espaços vetoriais com as operações dadas. Para os que não são, liste todos os axiomas que falham.*

Dois desses exercícios são:

Figura 10 - Exercícios do livro A

- O conjunto de todos os ternos ordenados (x,y,z) de números reais com as operações

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z') \text{ e } k(x,y,z)=(kx,y,z)$$

- O conjunto de todos os números reais x com as operações usuais de adição e multiplicação.

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 160)

Nesses exercícios tem-se:

− tarefa: determinar quais dos conjuntos são espaços vetoriais com as operações dadas; listar todos os axiomas que falham para os conjuntos que não são espaços vetoriais;

− técnica: buscar, a cada axioma da definição, chegar à tese a partir da hipótese, considerando as propriedades válidas para as operações envolvidas;

− discurso teórico-tecnológico: constatar que diferentes conjuntos de elementos podem ser um espaço vetorial.

Na seção de exercícios intitulada como Discussão e Descoberta, há alguns com o seguinte estilo:

Figura 11 - Exercícios do livro A

Você considera possível existir um espaço vetorial formado por exatamente dois vetores distintos?

Explique seu raciocínio.

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 161)

Esse tipo de exercício pode ser classificado como:

− tarefa: explicar o raciocínio que levou à conclusão de ser possível ou não existir um espaço vetorial formado por exatamente dois vetores distintos;

− técnica: tomar dois vetores distintos e verificar os axiomas da definição de espaço vetorial;

− discurso teórico-tecnológico: potencializar o raciocínio para a constatação da formação de espaços vetoriais por conjuntos com alguns elementos.

No livro B - **Álgebra Linear** - o Capítulo 4, Espaços Vetorias, trabalha especificamente com a definição de espaço vetorial na seção 4.2, a qual foi analisada.

Já no início é feita a definição de espaço vetorial como segue (Figura 12).

Figura 12 - Definição de espaço vetorial

Definição: Um *espaço vetorial real* é um conjunto $\mathbf{V}$, não vazio, com duas operações: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \xrightarrow{+} \mathbf{V}$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times \mathbf{V} \xrightarrow{\cdot} \mathbf{V}$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $a,b \in \mathbb{R}$, as propriedades de i) a viii) sejam satisfeitas.

Propriedades:

i) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

iii) Existe $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo).

iv) Existe objeto $-\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

v) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

vi) $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$

vii) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Fonte: Boldrini, J. L. *et al*. (1980, p. 103)

Cinco exemplos são mostrados, sendo que dois deles são apresentados nas figuras 13 e 14:

Figura 13 - Exemplo 2 do livro B

Exemplo 2: No lugar de ternas de números reais consideremos como vetores *n*-uplas de números reais.

$a \in \mathbb{R}$ e se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \text{ e } a\mathbf{u} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

Neste caso perdemos, é claro, a visão geométrica de "vetores", pois saímos de um espaço de "dimensão" 3 da geometria e passamos a um espaço de "dimensão" *n*. Apesar disto, podemos trabalhar com estes espaços da mesma maneira que em $\mathbb{R}^3$.

Fonte: Boldrini, J. L. *et al*. (1980, p. 104)

Figura 14 - Exemplo 4 do livro B

Exemplo 4: $\mathbf{V} = P_n$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a *n* (incluindo o zero). As operações são soma de polinômios e multiplicação destes por números reais.

Fonte: Boldrini, J. L. *et al*. (1980, p. 105)

Nesses dois exemplos, como nos outros presentes no livro, é apenas citado que **V** é um espaço vetorial sem nenhuma tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Na parte destinada aos exercícios, existe apenas o da Figura 15 que trata predominantemente da definição de espaço vetorial.

Figura 15 - Exercício 5 do livro B

5. Verifique se os conjuntos abaixo são espaço vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba uma base e dê a dimensão.

a) Matrizes diagonais *n* x *n*

b) Matrizes escalares *n* x *n*

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\mathbf{V} = \{(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n : a \in \mathbb{R}\}$

e) $\{(1, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

f) A reta $\{(x, x+3) : x \in \mathbb{R}\}$

g) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$

Fonte: Boldrini, J. L. *et al*. (1980, p. 129)

Esse exercício pode ser categorizado como:

− existem duas tarefas: I - verificar quais dos conjuntos dados são espaços vetoriais reais, com as operações usuais; II - exibir uma base e dar a dimensão, no caso de ser espaço vetorial (essa outra tarefa não é relevante para este estudo);

− técnica: buscar, a cada axioma da definição, chegar à tese a partir da hipótese, considerando as propriedades válidas para as operações envolvidas;

− discurso teórico-tecnológico: compreender o que é um espaço vetorial por meio da constatação da validade ou não dos axiomas de sua definição. E conceber que existem diferentes conjuntos que podem ser chamados de espaço vetorial.

No livro C - **Álgebra Linear e Aplicações** - Capítulo 2, Espaços Vetoriais, a seção 2 trata da definição de um espaço vetorial.

Na seção 1 é feita uma introdução. Nela é destacado que os conjuntos $\mathbf{V}$ dos vetores da geometria e o conjunto $\mathbf{M_{mxn}}$ **(R)** das matrizes reais com m linhas e n colunas apresentam uma coincidência estrutural no que se refere às operações de adição e multiplicação por um número real (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1987). Considerando-se lógico o estudo de ambos os conjuntos e de todos os que revelem essa mesma “estrutura”.

A seção 2 é iniciada com a seguinte definição:

Figura 16 - Definição de espaço vetorial

Definição – Dizemos que um conjunto $\mathbf{V} \neq \varnothing$ é um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ quando, e somente quando:

I – Existe uma adição $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$, com as seguintes propriedades:

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}, \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (comutativa);

b) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}, \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (associativa);

c) Existe em $\mathbf{V}$ um *elemento neutro* para essa adição o qual será simbolizado genericamente por $\mathbf{0}$. Ou seja:

$$\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V}; \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V};$$

d) Para todo elemento $\mathbf{u}$ em $\mathbf{V}$ existe o *oposto*; indicaremos por $(-\mathbf{u})$ esse oposto. Assim:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \exists (-\mathbf{u}) \in \mathbf{V}; \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$

II – Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R}$ x $\mathbf{V}$ em $\mathbf{V}$, o que significa que a cada par $(\alpha,\mathbf{u})$ de $\mathbb{R}$ x $\mathbf{V}$ está associado um único elemento de $\mathbf{V}$ que se indica por $\alpha\mathbf{u}$, e para essa multiplicação tem-se o seguinte:

a) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

b) $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

c) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

d) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

para quaisquer $\mathbf{u},\mathbf{v}$ de $\mathbf{V}$ e α,β de $\mathbb{R}$.

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (1987, p. 44)

São apresentados nove exemplos, entre eles:

Figura 17 - Exemplo 1 do livro C

1) O espaço vetorial $\mathbb{R}$

Não é novidade para o leitor que a adição de números reais verifica as propriedades I-a, I-b, I-c e I-d da definição de espaço vetorial. Tão pouco que o produto de um número real por um outro é também um número real e que essa multiplicação obedece aos itens II-a, II-b, II-c e II-d da definição mencionada. Logo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (1987, p. 45)

Figura 18 - Exemplo 7 do livro C

Seja $n \geq 0$ um número natural. Indicaremos por $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios reais de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo.

O leitor, que já estudou os polinômios sobre $\mathbb{R}$, não terá dificuldades em perceber que

$$(a)\ f(t), g(t) \in P_n(\mathbb{R}) \Rightarrow f(t) + g(t) \in P_n(\mathbb{R})$$
$$(b)\ \alpha \in \mathbb{R}, f(t) \in P_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f(t) \in P_n(\mathbb{R})$$

Daí, lembrando as propriedades das operações com polinômios, concluirá que $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (1987, p. 46)

Nesses exemplos, assim como em outros exibidos no livro, são feitas algumas considerações sobre os conjuntos envolvidos, destacando-se que são espaços vetoriais por satisfazerem as propriedades necessárias. Neles não existe nenhuma tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Este livro possui uma seção com exercícios resolvidos. Todos eles são do mesmo tipo, por isso, será usado, a título de exemplo, o exercício resolvido 1.

Figura 19 - Exercício resolvido 1 do livro C

1. Como já vimos $\mathbb{R}^2 = \{(x,y); x,y \in \mathbb{R}\}$. O $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ desce que se definam adição e multiplicação por um número real assim:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \text{ e } a(x,y)=(ax,ay).$$

Faremos aqui a verificação dos axiomas relativos à multiplicação.

II-a: $(ab)(x,y)=((ab)x,(aby))=(a(bx),a(by))=a(bx,by)=a(b(x,y))$.

II-b: $(a+b)(x,y)=((a+b)x,(a+b)y)=(ax+bx,ay+by)=(ax,ay)+(bx,by)=$

$=a(x,y)+b(x,y).$

II-c: $a((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=a(x_1+x_2,y_1+y_2)=(a(x_1+x_2),a(y_1+y_2))=$

$=(ax_1+ax_2,ay_1+ay_2)=(ax_1,ay_1)+(ax_2,ay_2)=a(x_1,y_1)+a(x_2,y_2).$

II-d: $1(x,y)=(1x,1y)=(x,y).$

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (1987, p. 47)

Também nesses exemplos não existe nenhuma tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Apenas são verificados os axiomas para o conjunto ser um espaço vetorial (neste caso, somente os da multiplicação).

Na seção de exercícios propostos, há oito no estilo da Figura 20.

Figura 20 - Exercício proposto do livro C

No conjunto $V = \{(x,y); x,y \in \mathbb{R}\}$ definamos "adição" assim:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,0)$$

e multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x,y)=(ax,ay).$$

Nessas condições V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

Fonte: Callioli, Domingues e Costa (1987, p. 49)

Pela OP tem-se:

− tarefa: determinar se o conjunto **V** é um espaço vetorial com as operações dadas; justificar a conclusão;

− técnica: buscar, a cada axioma da definição, chegar à tese a partir da hipótese, considerando as propriedades válidas para as operações envolvidas;

− discurso teórico-tecnológico: compreender o que é um espaço vetorial por meio da constatação da validade ou não dos axiomas de sua definição.

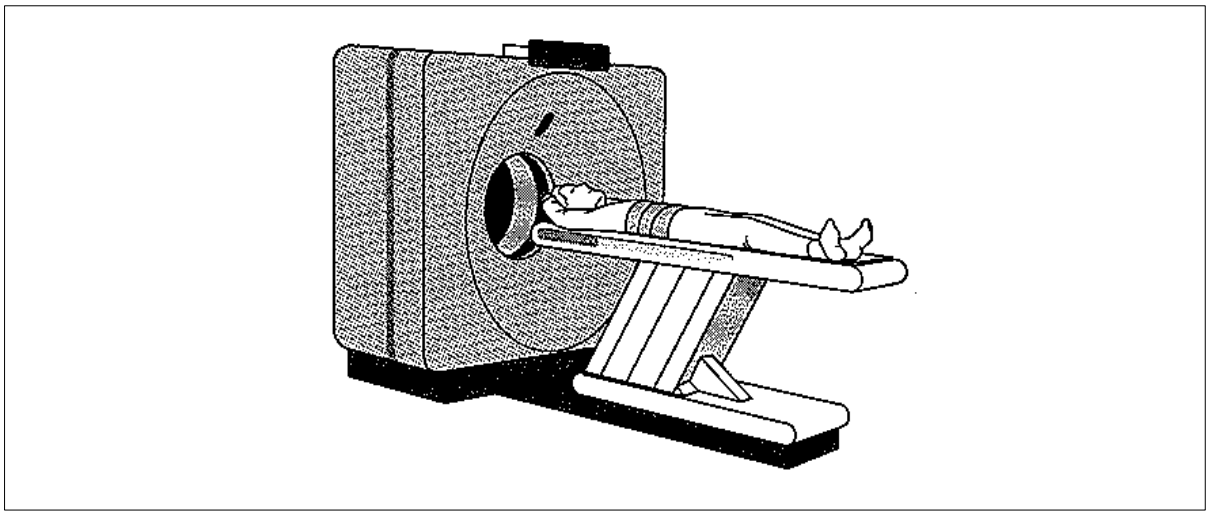
Nas seções analisadas nos três livros, verifica-se a introdução do conceito de espaço vetorial apenas pela definição. Os autores dos livros procuram, por meio do tratamento exclusivamente algébrico, promover a aprendizagem desse conceito tão importante da Álgebra Linear.

No livro A, somente a seção Discussão e Descoberta propõe atividades mais desafiadoras ao aluno, mas ainda com predominância do uso da álgebra. Já o Capítulo 11, Aplicações da Álgebra Linear, traz várias aplicações das quais a seção 13, Tomografia Computadorizada, e a seção 14, Fractais, têm como um dos pré-requisitos o Espaço Euclidiano IR^n.

A seção referente a Tomografia Computadorizada trata da aplicação da Álgebra Linear na construção da imagem de um corte transversal de um corpo humano pela análise do escaneamento por raios-X que leva a um sistema linear inconsistente (ANTON; RORRES, 2001). E é apresentada uma técnica iterativa para fornecer uma “solução aproximada” do referido sistema.

Logo no início são exibidas as Figuras 21 e 22.

Figura 21 - Imagem do sistema de tomografia computadorizada da General Electric

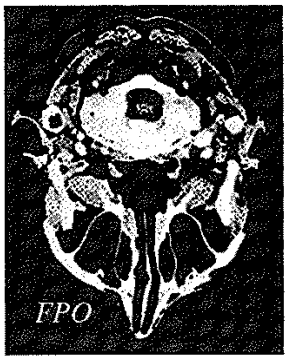


Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 436)

A Figura 21 mostra um paciente preparado para ter uma seção transversal da cabeça escaneada por um feixe de raios-X.

Em seguida, na Figura 22, é exibida a imagem de uma seção transversal típica de uma cabeça humana pelo uso do sistema.

Figura 22 - Imagem de uma seção transversal típica de uma cabeça humana



Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 436)

Essas figuras ajudam na contextualização dos conceitos estudados, o que cria condições mais favoráveis à sua aquisição.

Em toda a seção são colocadas imagens acompanhadas de textos explicativos que conectam a Álgebra Linear a essa aplicação.

No final, existem alguns exercícios que se relacionam com a aplicação feita na teoria. Essa relação consiste no diálogo entre as tarefas propostas com os exemplos, equações e algoritmos presentes no texto. Busca-se, dessa maneira, dar mais sentido aos exercícios e, consequentemente, ao conteúdo considerado.

Nos exemplos do livro B, não é feito nem mesmo o desenvolvimento algébrico para a verificação dos axiomas.

Já no livro C, os exercícios resolvidos apresentam exemplos de demonstração dos axiomas da definição de espaço vetorial. E nos exercícios propostos são solicitadas tarefas e justificativas da resolução feita pelo aluno.

A análise

Para fazer a análise, foi construído o Quadro 1, tomando como referência a TAS e a TSD.

Na TAS os critérios adotados foram os quatro princípios relativos à programação eficiente do conteúdo, proposta por Moreira e Masini (2001) a partir das ideias de Ausubel: organização sequencial, diferenciação progressiva, reconciliação integrativa e consolidação. E na TSD o critério foi o potencial das tarefas propostas em poderem desenvolver situações adidáticas, ou seja, situações que levam o aluno a aceitar a responsabilidade por sua aprendizagem.

Os tipos de tarefas foram concebidas em concordância com os critérios da seguinte maneira:

- organização sequencial e diferenciação progressiva: as que propõem uma sequência de ideias para a formação do conceito do espaço vetorial e uma abordagem dos aspectos mais gerais para os mais específicos;
- reconciliação integrativa: as que favoreçam a relação entre as ideias trabalhadas anteriormente;
- consolidação: as que possibilitem a aplicação do conhecimento em diferentes contextos;
- situação adidática: as que, de forma geral, conduzam os alunos à construção de seu conhecimento.

Por meio da análise dos tipos de tarefas, procurou-se reconhecer evidências da existência dos critérios mencionados.

Foram verificados todos os exercícios, dos capítulos citados anteriormente, que tratam do tema.

Quadro 1 - Tipos de tarefas identificadas nos livros A, B e C

Teorias	Critérios	Tipos de tarefas	Livro A		Livro B		Livro C	
			7 exemplos	30 exercícios	4 exemplos	1 exercício	11 exemplos	7 exercícios
Teoria da Aprendizagem Significativa	Organização sequencial e diferenciação progressiva	Propor uma sequência de ideias para a conceitualização de espaço vetorial. Partir das mais gerais para as específicas utilizando um mapa conceitual.	0	0	0	0	0	0
	Reconciliação integrativa	Escrever as similaridades e as diferenças em relação às ideias enunciadas na tarefa anterior.	0	0	0	0	0	0
	Consolidação	Aplicar o conhecimento em diferentes contextos.	5	10	3	1	7	1
Teoria das Situações Didáticas	Potencial para situação adidática	Complementar um exemplo ou completar a resolução do exemplo dado.	0	3	0	0	2	1
		Resolver o exercício de maneiras diferentes.	0	0	0	0	0	0
		Propor outros conjuntos que sejam espaços vetoriais.	0	0	0	0	0	0

Fonte: Autor da pesquisa

Considerando os critérios adotados para a TAS, dos quatro princípios relativos à programação eficiente do conteúdo, apenas um é abordado. Mesmo esse único princípio - o da consolidação - é pouco presente nos exercícios de todos os livros.

O livro C, como já citado, faz a introdução do conceito de espaço vetorial relacionando certos aspectos dos conjuntos dos vetores da geometria e das matrizes reais. E a partir da constatação da coincidência estrutural em referência à adição e à multiplicação nos conjuntos, propõe o estudo simultâneo dos conjuntos e de todos aqueles que apresentam a mesma “estrutura”. Esta maneira de desenvolver o tema, pela associação e analogia, se caracteriza pelo encadeamento de uma sequência de ideias que se aproximam com a finalidade de conceitualizar o espaço vetorial. No entanto, não se faz dos conceitos mais gerais para os específicos e também não motiva o aluno a fazê-lo, como é constatado no Quadro 1.

Ainda mais ausente está a TSD pela falta de tarefas com potencial para o desenvolvimento de situações adidáticas.

Portanto, os princípios inerentes a TAS e TSD, praticamente, não são contemplados no desenvolvimento dos livros.

Diante das citadas constatações e da importância de tais teorias para o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, no subseção 4.4.1, foram considerados esses aspectos para a elaboração do material que foi aplicado em sala de aula.

3.2.3 Dimensão cognitiva

A dimensão cognitiva está associada às características cognitivas dos alunos. Ela ocupa-se da relação entre o saber e o aluno. Como citado no Capítulo 1, seção 1.2 - As situações didáticas –, nessa relação são contemplados o conhecimento prévio do aluno, as suas suposições sobre o que vai ser aprendido e o seu desenvolvimento na construção do conhecimento.

Como suporte teórico para o estudo dessa dimensão, foi utilizada a teoria dos campos conceituais, a qual considera que o conhecimento está organizado em campos conceituais.

Assim, com a utilização da TCC, foi elaborada uma atividade (Anexo A), composta por um conjunto de tarefas que versou sobre vetores, as suas propriedades e formas de representação.

Considerando o conteúdo de Álgebra Linear escolhido para esta pesquisa, os axiomas que definem os espaços vetoriais reais são baseados nas propriedades de vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Portanto, elas constituem um dos principais pré-requisitos para o seu estudo e compreensão. Com isso, as tarefas propostas na busca das concepções dos alunos sobre o tema se pautaram nessas propriedades.

Para a análise do conhecimento matemático utilizado por eles na atividade, fez-se o uso, principalmente, do exame dos cálculos relacionais envolvidos nas operações para a resoluções das tarefas, tendo como referência o estudo realizado por Cardoso, Kato e Oliveira (2013), que utilizaram esses cálculos em operações com matrizes.

O cálculo relacional caracteriza-se por uma visão das estruturas aditivas e das multiplicativas que vai além das quatro operações da aritmética. Essa perspectiva surgiu pela constatação de Vergnaud (2014), qual seja, os processos de conceitualização e as dificuldades dos alunos referiam-se, primeiro, aos objetos e às relações não numéricas, algo anterior, mas em solidariedade às operações propriamente numéricas.

Reforçando esse olhar, Vergnaud (2014, p. 18) afirma que

> A análise dos procedimentos não é por si própria suficiente para esgotar a análise científica dos problemas colocados pelo ensino da matemática. Na verdade, os meios utilizados pela criança, os caminhos que ela toma para resolver um problema ou atingir um dado objetivo numa determinada tarefa escolar, são profundamente enraizados na representação que ela faz da situação.

Assim, essa teoria busca, por meio do estudo das representações e dos procedimentos aplicados em certas tarefas, compreender o desenvolvimento e o estágio em que se encontra o conhecimento do aluno.

A noção de representação, empregada aqui, vai além da noção de símbolo ou de signo, abrangendo também a noção de conceito.

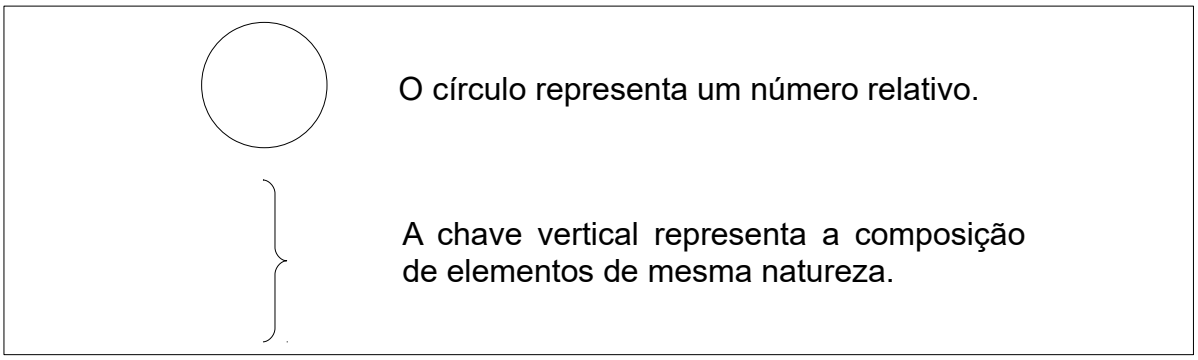
Conforme Vergnaud (2014, p. 19),

> O símbolo é a parte diretamente visível do *iceberg* conceitual; a sintaxe de um sistema simbólico é apenas a parte diretamente comunicável do campo de conhecimento que ele representa. Essa sintaxe não seria nada sem a semântica que a produziu, isto é, sem a atividade prática e conceitual do sujeito no mundo real.

A seguir, será feita uma explanação das implicações do cálculo relacional utilizado na elaboração e análise da atividade aplicada.

Inicialmente, mostra-se, na Figura 23, a representação que Vergnaud (2014) aconselha para o estudo em questão[24]:

Figura 23 - Código utilizado nos esquemas



Fonte: Vergnaud (2014, p. 201)

Como as situações propostas aos alunos envolveram propriedades de vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o círculo foi utilizado para representar esses vetores cujos componentes eram números inteiros.

24 Os números relativos são os números inteiros, os quais são dotados de sinais. Os vetores, usados nesta pesquisa, têm como componentes apenas números inteiros, sendo considerados como "números relativos".

O teorema seguinte, Figura 24, enumera as propriedades fundamentais de vetores nos espaços bi e tridimensionais.

Figura 24 - Propriedades da aritmética vetorial

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores de um espaço bi ou tridimensional e k e l são escalares, então valem as seguintes relações.

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(e) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

(f) $l(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$

(g) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$

(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Fonte: Anton e Rorres (2001, p. 106)

Como pode ser constatado, os campos conceituais compreendidos na aritmética vetorial são o das estruturas aditivas e o das multiplicativas[25]. No campo conceitual aditivo, aparecem as letras *a, b, c* e *d.* E no campo conceitual multiplicativo, as letras *e, g* e *h.* Na letra *f* existem operações dos dois campos.

Primeiramente, será tratado o campo conceitual aditivo.

Campo conceitual aditivo – Aritmética Vetorial

Os exercícios pertencentes a este campo conceitual são chamados de “problemas de tipo aditivo” por Vergnaud, sendo entendidos como todos aqueles cuja solução exige tão somente adições ou subtrações. As relações aditivas são ternárias, ou seja, relações que associam três elementos entre si. A aritmética vetorial utiliza-se de uma estrutura aditiva que pode ser verificada na categoria[26] de

25 Para este estudo, ampliou-se a ideia de Vergnaud (2014) para adição e multiplicação por escalar de vetores.

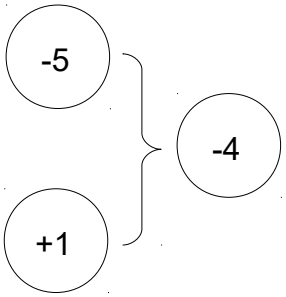
26 Para Vergnaud, existem seis categorias fundamentais nas relações aditivas, sendo uma delas a de dois estados relativos que se compõem para resultar em um estado relativo.

estados relativos (relações) que se compõem para resultar em um estado relativo. Como exemplo, tem-se:

João deve 5 reais a Pedro, mas Pedro deve 1 real a João. Portanto, João deve 4 reais a Pedro.

Os números -5, +1, -4 são números relativos (inteiros).

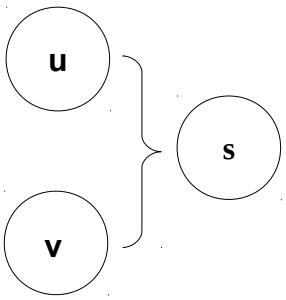
O cálculo relacional é representado como:



A equação correspondente é: (-5) **+** (+1) = (-4) (**+** é a lei de composição que corresponde à adição de dois números relativos).

Fazendo uma correspondência com vetores do $\mathbb{R}^2$, de maneira genérica, obtém-se:

Dados os vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{s}$, esquematicamente tem-se:

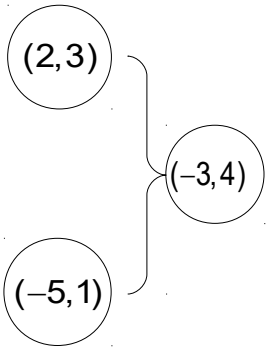


A equação correspondente é:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{s} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (s_1, s_2).$$

Como exemplo numérico, considere os vetores $\mathbf{u} = (2,3)$ e $\mathbf{v} = (5,-1)$, em que para calcular $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tem-se que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{s}$, ou seja, uma soma.

Esquematicamente, o cálculo relacional fica como:

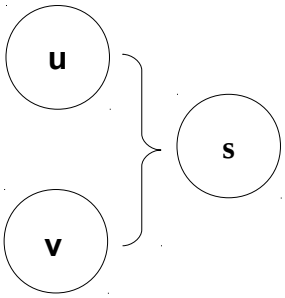


A equação correspondente é:

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})=\mathbf{s}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2,3)-(5,-1)=(2,3)+(-(5,-1))=(2-5,3+1)=(-3,4).$$

Analogamente, para $\mathbb{R}^3$:

Dados os vetores $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{s}$, esquematicamente:



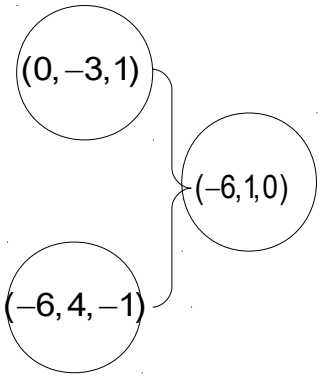
A equação correspondente é:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{s}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)=(s_1,s_2,s_3).$$

Um exemplo numérico em $\mathbb{R}^3$ é:

Considere os vetores $\mathbf{u}=(0,-3,1)$ e $\mathbf{v}=(-6,4,-1)$. Para calcular $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{s}$, basta determinar cada elemento $s_i\in\mathbf{s};i=1,2,3$, como $u_i+v_i;u_i$ é componente de $\mathbf{u}$ e v_i é componente de $\mathbf{v}$.

Esquematicamente, o cálculo relacional fica como:



A equação correspondente é:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{s} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0,-3,1) + (-6,4,-1) = (-6,1,0).$$

Agora, será tratado o campo conceitual multiplicativo.

Campo conceitual multiplicativo – Aritmética Vetorial

É possível diferenciar duas grandes categorias de relações multiplicativas: aquelas que comportam uma multiplicação e as que comportam uma divisão. Na aritmética vetorial, para as propriedades estudadas, existe o produto entre escalares e vetores. No caso da multiplicação, a principal relação é a quaternária (associa quatro elementos entre si) e não a ternária, como na adição. Como exemplo, tem-se:

1 novelo de lã tem massa de 50 gramas. São necessários 7 para fazer uma blusa. Qual vai ser a massa da blusa?

O cálculo relacional é representado como:

novelos	gramas
1 →	50
7 →	x

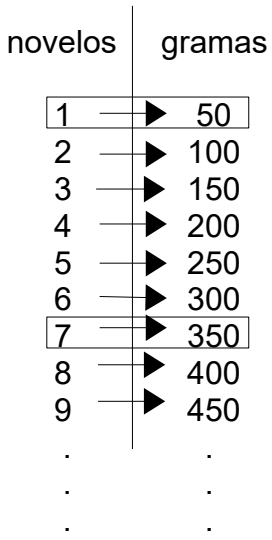
Em que a flecha horizontal indica uma transformação entre elementos de mesma natureza.

A representação algébrica é:

$$\frac{1}{7} = \frac{50}{x}.$$

Nessa forma de relação multiplicativa, utilizada na multiplicação de um escalar por um vetor, duas quantidades são de certo tipo (novelos / escalares) e as duas outras medidas, de outro tipo (gramas / vetores).

O esquema utilizado isola quatro quantidades particulares de um quadro mais completo, como segue:

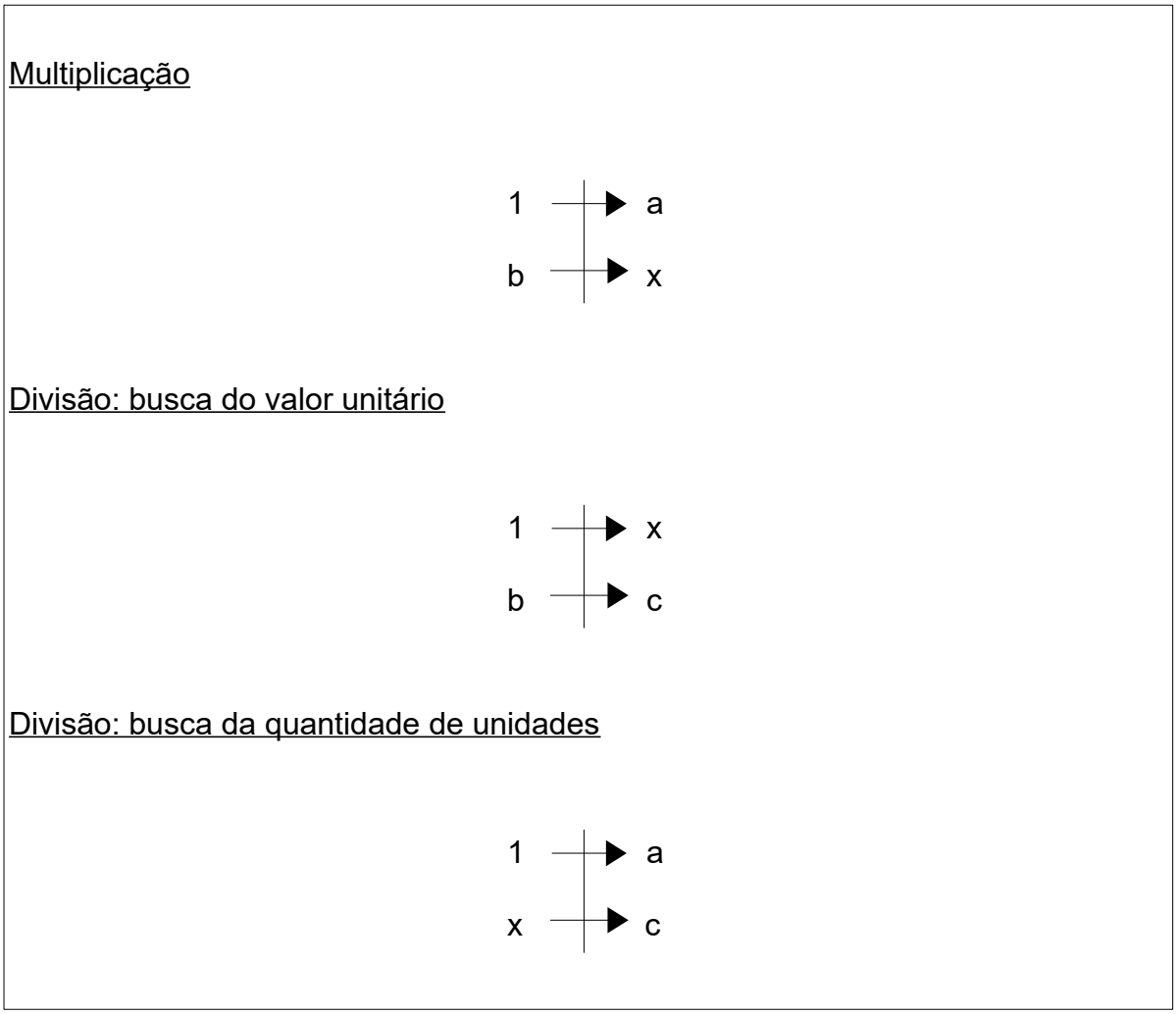


Esse quadro de correspondência traduz o isomorfismo de dois tipos de medidas (número de novelos e massa em gramas). Esse isomorfismo coloca em jogo quatro quantidades, sendo que uma delas é igual a um.

Vergnaud (2014) estabelece três grandes classes de problemas, conforme seja a incógnita uma ou outra das três outras quantidades.

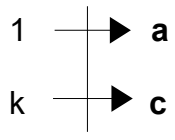
As três classes podem ser ilustradas pelos seguintes esquemas da Figura 25 (x representa a incógnita).

Figura 25 - Classes de problemas



Fonte: Vergnaud (2014, p. 261)

Para a devida relação entre essas classes e a aritmética vetorial, foi mantido 1 como o “valor unitário”; substituído b por k, que é a quantidade do “valor unitário” e considerados **a** e **c** vetores, com x sendo a incógnita.



Em cada classe, o x assumirá a posição de **a**, k ou **c**.

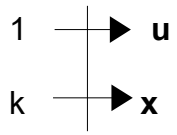
Na atividade proposta e nos exemplos aqui exibidos, foi tomado $k \in \mathbb{Z}$. Isso se deve ao objetivo da investigação, que é de identificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação aos procedimentos para efetuar as operações de

multiplicação e divisão envolvidas na aritmética vetorial, e não se os alunos sabem realizar multiplicações e divisões.

Fazendo uma equivalência com $k \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, de maneira genérica, para cada caso obtém-se:

Multiplicação $\mathbf{x} = k\mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

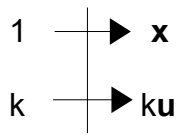


A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2).$$

Divisão: busca do valor unitário $\mathbf{x} = \mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

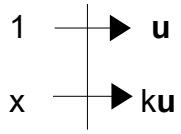


A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{k}(ku_1, ku_2) = \frac{1}{k}k(u_1, u_2) = (u_1, u_2).$$

Divisão: busca da quantidade de unidades $\mathbf{x} = k$.

O cálculo relacional é representado como:



A representação algébrica é:

Como $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2) = k(u_1, u_2); \mathbf{u} = (u_1, u_2)$, então x=k.

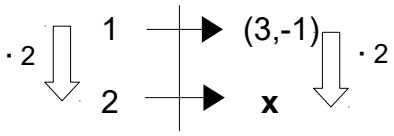
Para vetores do $\mathbb{R}^3$, nas três classes, a generalização é análoga.

Como exemplo numérico, com vetor do $\mathbb{R}^2$, considere $k = 2,$ e $\mathbf{u} = (3, -1).$

Para as três classes, tem-se:

Multiplicação $\mathbf{x} = k\mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

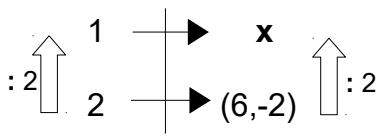


A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = 2(3, -1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot (-1)) = (6, -2)$$

Divisão: busca do valor unitário $\mathbf{x} = \mathbf{u}$.

O cálculo relacional é representado como:

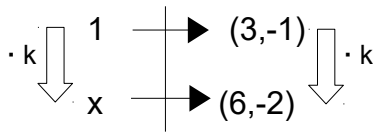


A representação algébrica é:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{k}(ku_1, ku_2) = \frac{1}{k}k(u_1, u_2) = (u_1, u_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2}(6, -2) = \frac{1}{2}2(3, -1) = (3, -1).$$

Divisão: busca da quantidade de unidades $\mathbf{x} = k$.

O cálculo relacional é representado como:



A representação algébrica é:

Como $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2) = k(u_1, u_2); \mathbf{u} = (u_1, u_2)$, então $x = k$.
Como $(6,-2) = (2 \cdot 3, 2 \cdot (-1)) = 2(3, -1); \mathbf{u} = (3, -1)$, então $x = 2$.

Para vetores do $\mathbb{R}^3$, nas três classes, o exemplo seria análogo ao exposto acima.

Na letra *f*, das propriedades da aritmética vetorial,

$$l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$$

existe uma soma vetorial seguida de um produto por escalar no primeiro termo. Essas operações podem ser classificadas separadamente: a soma no campo conceitual aditivo e o produto no campo conceitual multiplicativo.

A abordagem do cálculo relacional na aritmética vetorial permite a constatação do desenvolvimento e estágio dos conceitos na estrutura cognitiva do estudante.

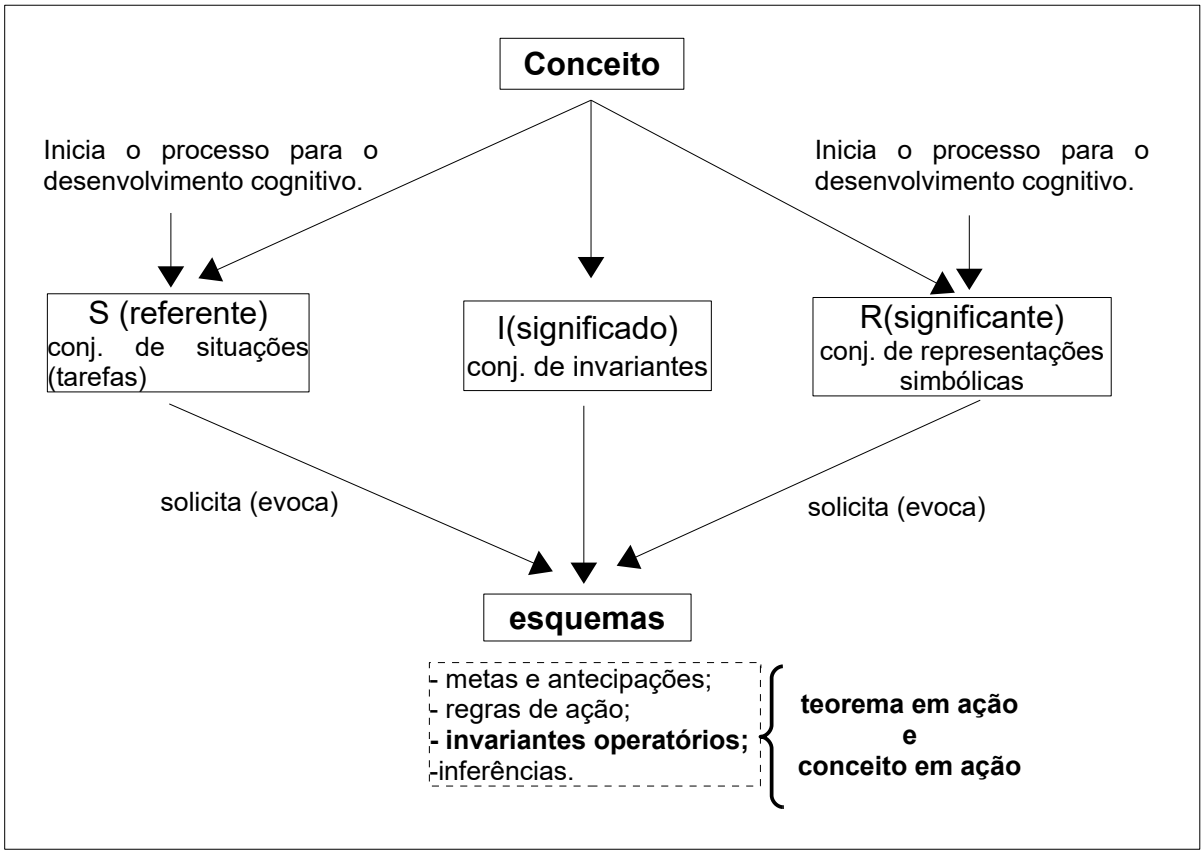
Na análise dos resultados, fundamentada na TCC, feita adiante, pôde-se verificar a grande contribuição desse recurso de pesquisa. Ele possibilitou a identificação dos esquemas utilizados pelos alunos em relação a cada campo

conceitual e, com isso, reconhecer os invariantes operatórios (teorema em ação e conceito em ação) inadequados por eles empregados.

A importância desse conhecimento está em colaborar para que o professor seja capaz de intervir de maneira eficaz na aprendizagem do aluno, assim como preparar as aulas de maneira a criar condições que favoreçam uma aprendizagem alicerçada em uma base conceitual apropriada[27].

Para melhor compreender a correlação entre a TCC, o cálculo relacional e a aprendizagem dos alunos, é apresentada a Figura 26 que ilustra a conexão entre esses elementos.

Figura 26 - Conexão entre TCC, esquemas e invariantes operatórios



Fonte: Autor da pesquisa

Como já visto, a formação de um conceito é o início de um campo conceitual, sendo definido pelos conjuntos: S (referente), I(significado) e R (significante). A partir de S e R é solicitado ao aluno esquemas[28], os quais têm quatro classes de elementos.

27 Uma base conceitual apropriada é aquela, normalmente, aceita por uma comunidade científica.
28 No esquema tem-se a organização dos invariantes operatórios, pertencentes ao conjunto I, para atuar em uma classe de situações.

A classe mais importante para o ensino e a aprendizagem é a dos invariantes operatórios, pois é nela que se encontram o teorema em ação e o conceito em ação. Esses nada mais são que os conhecimentos (conhecimentos em ação) contidos nos esquemas. É nessa classe que o cálculo relacional entra em jogo, identificando o teorema em ação e o conceito em ação, utilizados pelo aluno numa dada situação. Com isso, o professor, por meio de uma mediação conveniente, pode conduzi-lo a uma conceitualização e a um desenvolvimento cognitivo esperados.

Diante disso, o estudo da dimensão cognitiva foi feito por meio da produção de um grupo de alunos, quando da utilização das atividades elaboradas (Anexo A). O relato da sua aplicação, a apresentação e a análise dos dados são feitos na sequência.

Aplicação da atividade, apresentação e análise dos dados

A seleção dos participantes para a pesquisa teve como critério de inclusão alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – Bragança Paulista e como critério de exclusão alunos que já haviam feito a disciplina de Álgebra Linear[29], a qual contempla o conteúdo de espaços vetoriais. Optou-se por alunos do terceiro semestre pois já tinham feito disciplinas que são pré-requisitos para uma melhor compreensão dos espaços vetoriais (Geometria I e II; Fundamentos de Geometria Analítica e Vetores com Geometria Analítica).

Assim, após a apresentação das justificativas, objetivo e procedimentos da pesquisa, dos dezessete alunos do semestre, onze se interessaram em fazer parte, mas apenas nove tiveram disponibilidade de horário. Desses nove alunos, um deles não participou das duas últimas aulas e da entrevista em razão de problemas pessoais. Assim, a pesquisa foi realizada com oito alunos[30].

A aplicação da atividade foi realizada em duas aulas de 50 minutos. No início, ocorreu a leitura, com os alunos, do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) (Anexo F)[31], explicando-se cada fase da pesquisa e tirando as

29 A disciplina de Álgebra Linear pertence ao quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – Bragança Paulista.

30 Todos os alunos participantes receberam certificado.

31 O projeto foi aprovado tanto pelo comitê de ética da Unicamp (instituição proponente; CAAE: 64261716.8.0000.5404 – código na Plataforma Brasil), como pelo comitê de ética do IFSP (instituição coparticipante; CAAE: 64261716.8.3001.5473 - código na Plataforma Brasil).

dúvidas. Após, foi informado que os exercícios tratavam de vetores do IR^2 e IR^3 e deveriam ser feitos individualmente. Foi pedido que os alunos retomassem os seus conhecimentos a respeito do assunto e que, em cada resposta, procurassem expor o raciocínio utilizado por meio de cálculos e/ou anotações. Por fim, foi dito que, se não conseguissem fazê-los, relatassem as razões (não tinha aprendido, não lembrava, não tinha entendido a questão, etc.).

Como o objetivo dessa atividade era verificar o conhecimento prévio do aluno acerca do conceito de vetor e suas suposições sobre o que iria aprender, a interação entre o professor/pesquisador e os alunos se restringiu à explicação de algumas dúvidas a respeito do que estava sendo pedido em alguns itens.

Esse instrumento de avaliação foi constituído por dez exercícios da seguinte forma:

- dois tratavam da definição de vetor;
- seis abordavam operações de soma de vetores, subtração de vetores e produto de escalar por vetor. Nessas, existia a solicitação tanto de cálculos algébricos como a representação geométrica em IR^2 e IR^3;
- um requeria a elaboração, pelo aluno, de uma questão envolvendo vetores do IR^2 ou do IR^3;
- um dizia respeito ao que o aluno esperava aprender em Álgebra Linear II, disciplina que versa sobre espaços vetoriais.

Ao final, havia a possibilidade de o estudante fazer comentários sobre os exercícios propostos.

Para a análise dos exercícios do instrumento de avaliação (Anexo A) é apresentado no Quadro 2 o conceito de vetor por meio da TCC, ou seja, as situações, os invariantes operatórios e as representações.

Quadro 2- Conceito de vetor

<table>
<tr><td colspan="3">Vetor</td></tr>
<tr><td>Situações</td><td>Invariantes operatórios</td><td>Representações</td></tr>
<tr><td rowspan="2">- Operações de soma

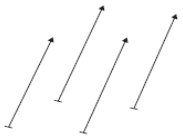
- Operações de subtração

- Multiplicação por escalar

- Representação em duas e três dimensões</td><td>“<u>Conceitos em ação</u>”:

- vetor: é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesmo módulo, direção e sentido;

- dados $\vec{v}=(v_1,v_2)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2)$ então $\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1,v_2+w_2)$

- dados $k\in\mathbb{R}$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$ então $k\vec{v}=(kv_1,kv_2)$</td><td rowspan="2"> 

$\vec{u}$;

$(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$;

$(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$.</td></tr>
<tr><td>“<u>Teoremas em ação</u>”:

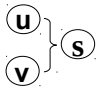
- os vetores podem interagir entre si, produzindo uma resultante;

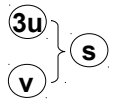
- as operações entre vetores e entre vetores e escalares respeitam propriedades aritméticas.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor da pesquisa

Os “conceitos em ação” descritos correspondem a conceitos aceitos no contexto da matéria abordada os quais serviram como parâmetro na investigação dos conceitos em ação inferidos das produções dos alunos. Da mesma maneira, foram descritos exemplos de “teoremas em ação” os quais consistem nas associações esperadas dos conceitos em ação por meio de proposições.

Para a análise dos teoremas em ação, como já mencionado, foi utilizado o cálculo relacional. Fazendo uso desse no exercício 8, tem-se:

<table>
<tr><td>8. Sejam $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Resolva:</td></tr>
<tr><td>a) $\vec{u}-\vec{w}$</td></tr>
<tr><td>Cálculo relacional</td></tr>
<tr><td>De cada componente de $\vec{u}$ é somado o oposto aditivo do valor da respectiva componente de $\vec{w}$, ou seja, $\vec{u}-\vec{w}=(u_1,u_2,u_3)+(-(w_1,w_2,w_3))=(u_1-w_1,u_2-w_2,u_3-w_3)=(s_1,s_2,s_3)=\vec{s}$, onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.</td></tr>
<tr><td>Esquema</td></tr>
<tr><td> 
</td></tr>
</table>

b) $3\vec{u}+\vec{v}$
Cálculo relacional
Cada componente de $\vec{u}$ é multiplicada por 3 e adicionada ao valor da respectiva componente de $\vec{v}$, ou seja, $3\vec{u}=3(u_1,u_2,u_3)=(3u_1,3u_2,3u_3)$, com isso, $3\vec{u}+\vec{v}=(3u_1,3u_2,3u_3)+(v_1,v_2,v_3)=$ $=(3u_1+v_1,3u_2+v_2,3u_3+v_3)=\vec{s},$ onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.
Esquema
$1 \rightarrow \vec{u}$ $3 \rightarrow 3\vec{u}$ 
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional
Cada componente de $\vec{v}$ é o triplo das respectivas componentes de $\vec{t}$. Assim, para se determinar $\vec{t}$, tem-se $\vec{t}=\frac{1}{3}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{3}(3t_1,3t_2,3t_3)=\frac{1}{3}3(t_1,t_2,t_3)=(t_1,t_2,t_3).$
Esquema
$1 \rightarrow \vec{t}$ $3 \rightarrow \vec{v}=3\vec{t}$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional
$\vec{w}$ é um múltiplo de $\vec{u}$. Podendo ser calculada essa quantidade como: $\vec{w}=k\vec{u}=(ku_1,ku_2,ku_3)=k(u_1,u_2,u_3);\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3))$ e $x=k$.
Esquema
$1 \rightarrow \vec{u}$ $x \rightarrow k\vec{u}$

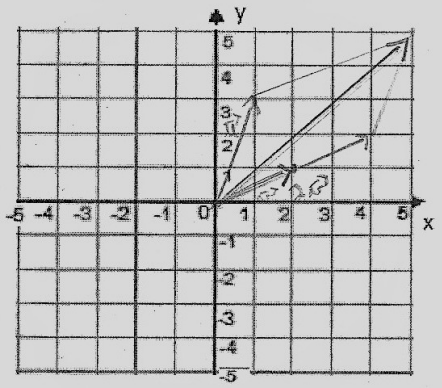
Fonte: Autor da pesquisa

Para que fosse possível um acompanhamento dos caminhos de aprendizagem percorridos pelos estudantes, o qual ocorre, sobretudo, de forma individual, optou-se por fazer o estudo da produção de cada um.

O Quadro 3 refere-se à compreensão do conceito de vetor por cada participante[32], deduzida das suas respostas.

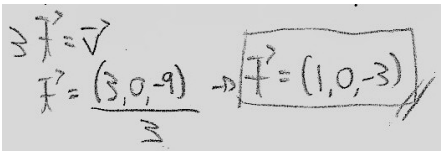
32 Os oito alunos participantes da pesquisa foram denominados por A1, A2, A3 e assim por diante.

Quadro 3 - Compreensão do conceito de vetor pelos alunos

A1	Conhecimentos em ação
	Conceitos em ação
	1. O que é vetor? O que não é vetor? É um segmento orientado com sentido e direção. Um segmento qualquer não é um vetor. 8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva: a) $\vec{u}-\vec{w}$ → (-21, 12, -9)
	Análise
	É possível constatar que o aluno teve apenas uma noção sobre o que é vetor, sendo redundante quando diz que é um segmento orientado com sentido e direção. Mostrou ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.
	Teoremas em ação
	7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo. 
	Análise
	Pela questão 7 verifica-se que ele possui uma visão geométrica da adição de vetores e o produto de escalar por um vetor.
	8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
	b) $3\vec{u}+\vec{v}$
	Cálculo relacional
	→ (21, -12, 9) + (3, 0, -9) → (24, -12, 0)

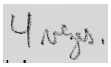
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional

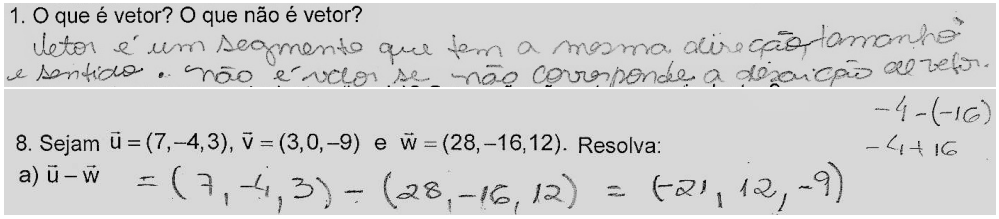


Análise

Pode-se depreender que o aluno reconheceu que os vetores podem interagir entre si, produzindo resultante. E indícios que ele tem conhecimento que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas.

A2 Conhecimentos em ação

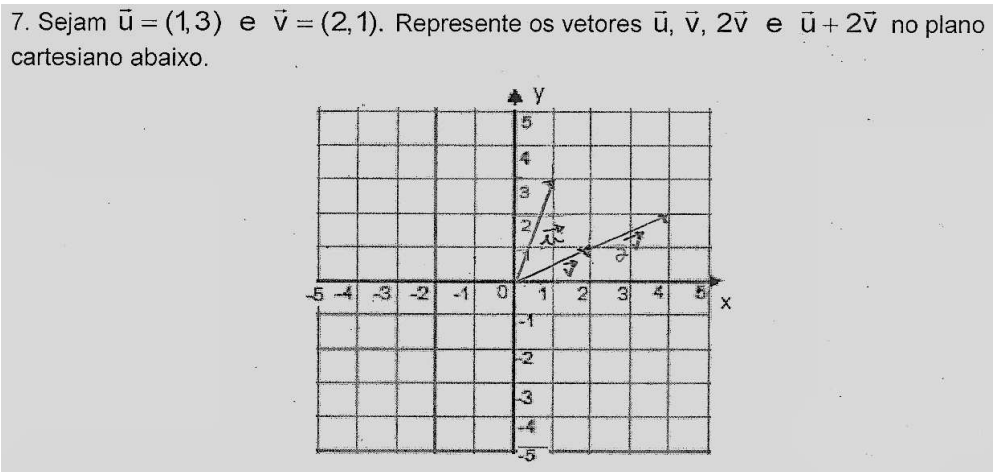
Conceitos em ação



Análise

O aluno verificou as características de um vetor, mas ainda não tem clara a sua definição. Indicou ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.

Teoremas em ação



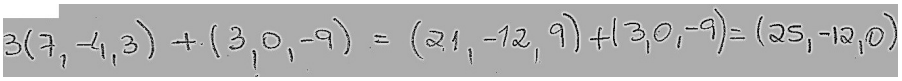
Análise

Neste exercício, ele representou os vetores no gráfico, mas não a resultante da soma indicada. Considerando que no exercício 4 da lista ele não desenhou a resultante solicitada, depreende-se que, mesmo sabendo realizar o cálculo algébrico, ele não tem uma visão geométrica da resultante.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u}+\vec{v}$

Cálculo relacional

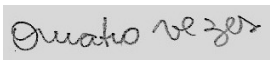


c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional

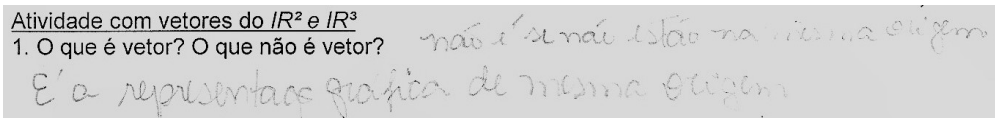


Análise

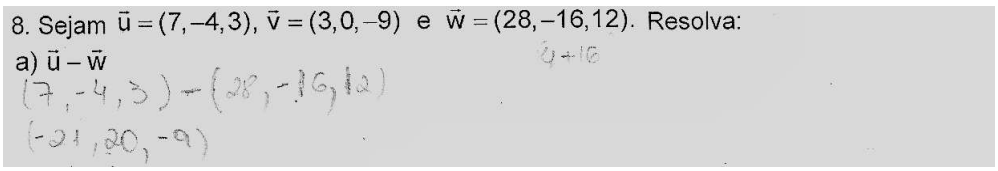
Observa-se que na letra c o aluno não compreendeu o que foi exposto. A falta de clareza nos conceitos em ação e a dificuldade na sua associação demonstram uma inadequação da compreensão do conceito de vetor, possivelmente por não ter formado o teorema em ação verdadeiro.

A3 Conhecimentos em ação

Conceitos em ação



Transcrição: “não é se não estão na mesma origem
É a representação grafica (gráfica) de mesma origem”



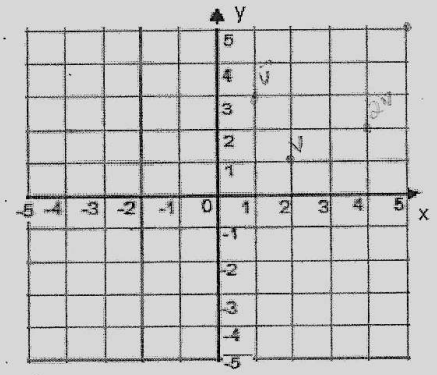
Transcrição: (7, -4, 3) – (28, -16, 12)
(-21, 20, -9)

Análise

O aluno associou o vetor à representação geométrica, mas não apontou a respeito de qual representação faz referência, atribuindo uma característica “mesma origem” que não existe.
Por meio da resposta da questão 8, verifica-se que há dificuldade no produto de escalar por vetor.

Teoremas em ação

7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



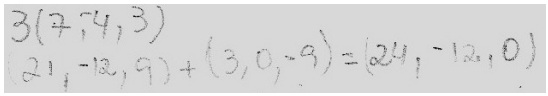
Análise

Neste exercício, o aluno só identificou as extremidades dos vetores, demonstrando falhas na representação deles.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u}+\vec{v}$

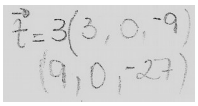
Cálculo relacional



Transcrição: 3(7, -4, 3)
(21, -12, 9) + (3, 0, -9) = (24, -12, 0)

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



Transcrição: $\vec{t}$ = 3(3, 0, -9)
(9, 0, -27)

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional

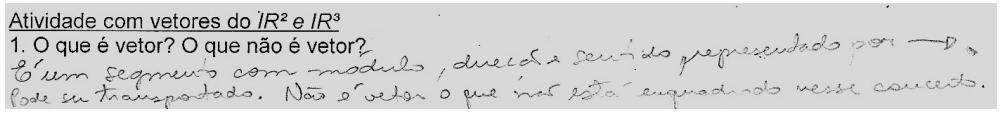
Transcrição: $\vec{w}$ é maior que $\vec{u}$ 4 vezes

Análise

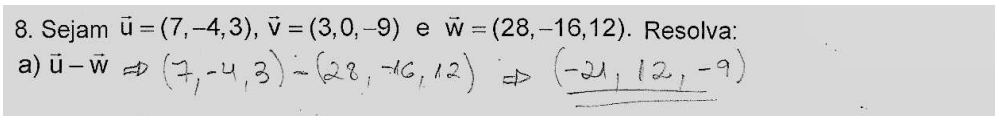
Assim como o aluno A2, observa-se que na letra c ele não compreendeu o que foi exposto. A falta de clareza nos conceitos em ação e a dificuldade na sua associação demonstram uma inadequação da compreensão do conceito de vetor, possivelmente por não ter formado o teorema em ação verdadeiro.

A4 Conhecimentos em ação

Conceitos em ação


Atividade com vetores do IR^2 e IR^3
1. O que é vetor? O que não é vetor?
É um segmento com módulo, direção e sentido representado por →.
Pode ser transportado. Não é vetor o que não está enquadrado nesse conceito.

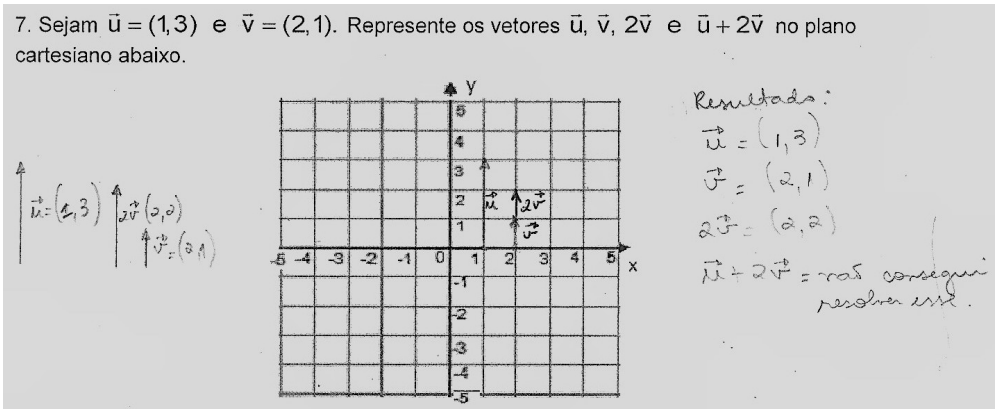
Transcrição: "É um segmento com módulo, direção e sentido, representado por →.
Pode ser transportado. Não é vetor o que não está enquadrado nesse conceito."


8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
a) $\vec{u}-\vec{w}$ ⇒ $(7,-4,3)-(28,-16,12)$ ⇒ $(-21,12,-9)$

Análise

Pode-se inferir que o aluno possui os conceitos em ação sobre vetor, soma de vetores e produto por escalar de forma clara em sua estrutura cognitiva.

Teoremas em ação



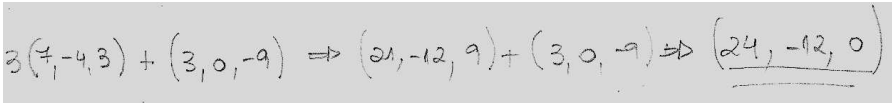
Análise

Neste exercício, ele cometeu erros na representação, provavelmente por não lembrar que a origem dos vetores deve coincidir com a do plano cartesiano.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

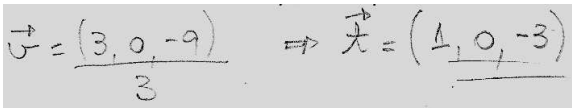
b) $3\vec{u}+\vec{v}$

Cálculo relacional


$3(7,-4,3)+(3,0,-9)$ ⇒ $(21,-12,9)+(3,0,-9)$ ⇒ $(24,-12,0)$

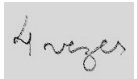
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional


$\vec{v}=\frac{(3,0,-9)}{3}$ ⇒ $\vec{t}=(1,0,-3)$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional


4 vezes

Análise
Ele resolveu adequadamente a letra c em que muitos alunos tiveram dificuldade. Nota-se que existe apenas uma falha na representação geométrica.

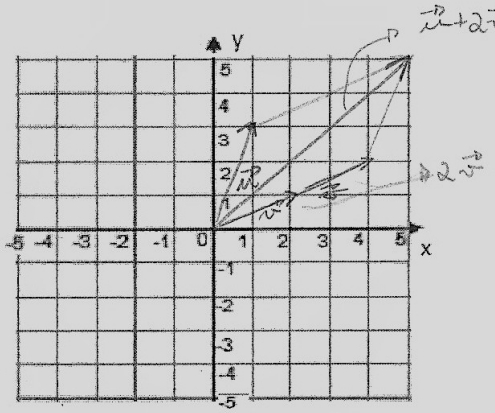
A5	Conhecimentos em ação
Conceitos em ação	

1. O que é vetor? O que não é vetor?
Vetor é um segmento de reta direcionado e orientado.
Não é reta ou uma reta, um segmento, etc.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
a) $\vec{u}-\vec{w}$ $\vec{u}-\vec{w}=(7-28,-4-(-16),3-12)=(-21,12,-9)$

Análise
O aluno reconheceu duas características de um vetor, mas ainda não tem clara a sua definição. Mostrou ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.
Teoremas em ação

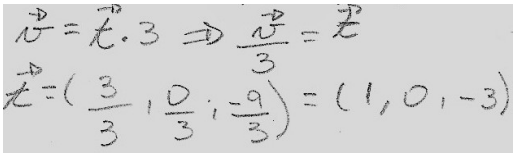
7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



Análise
Pela questão 7, verifica-se que ele possui uma visão geométrica da adição de vetores e o produto de escalar por um vetor.
8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
b) $3\vec{u}+\vec{v}$
Cálculo relacional

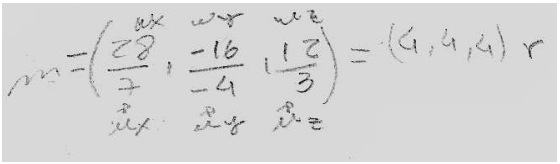
$3\vec{u}+\vec{v}=(3\cdot 7+3,\ 3(-4)+0,\ 3\cdot 3+(-9))=(24,-12,0)$

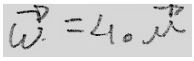
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional





Análise

Pode-se deduzir que o aluno reconheceu que os vetores podem interagir entre si, produzindo resultante e que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas.

A6 Conhecimentos em ação

Conceitos em ação

1. O que é vetor? O que não é vetor?

É a representação de todos segmentos orientados de mesma origem e mesmo sentido.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

a) $\vec{u}-\vec{w}$

$(7,-4,3)-(28,-16,12)=(7-28,-4-16,3-12)=(-21,-20,-9)$

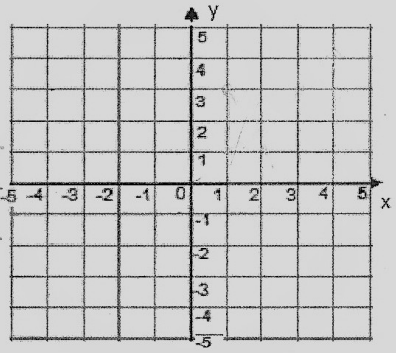
Análise

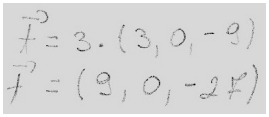
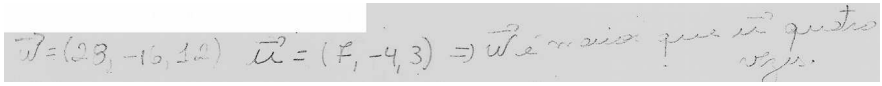
O aluno relacionou vetor à representação e atribui como característica a mesma origem.
Por meio da resposta da questão 8, observa-se que há dificuldade no produto de escalar por vetor.

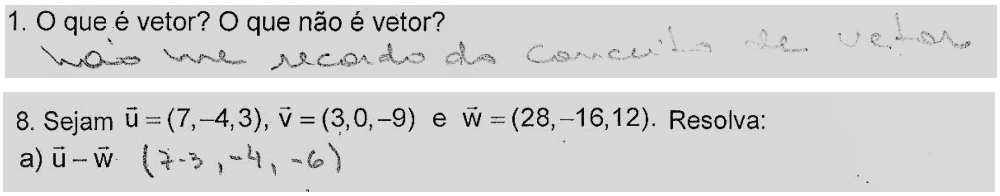
Teoremas em ação

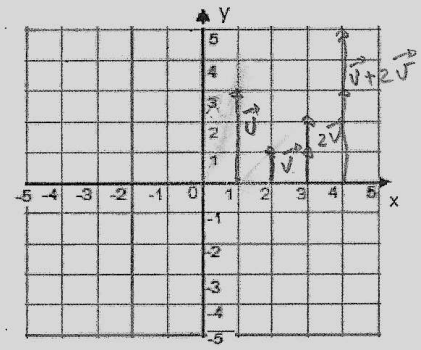
7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.

não me lembro, apenas lembro que o professor me dizia que o vetor é a representação do vetor saindo da origem.



Análise
Neste exercício, ele relatou que não lembrava como representar vetores, apenas que a sua origem coincidia com a do plano cartesiano.
8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
b) $3\vec{u}+\vec{v}$
Cálculo relacional
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional

Análise
Assim como os alunos A2 e A3, observa-se que na letra c ele não compreendeu o que foi exposto. A falta de clareza nos conceitos em ação e a dificuldade na sua associação demonstram uma inadequação do conceito de vetor.

A7	Conhecimentos em ação
Conceitos em ação	
	
Análise	
O aluno afirmou não se recordar do conceito e fez confusão entre os vetores envolvidos na letra a. Considerando a alteração de $\vec{w}$ por $\vec{v}$, o resultado mostra que ele tem conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.	

Teoremas em ação
7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo. 
Análise
Neste exercício, ele cometeu erros na representação, provavelmente por não lembrar que a origem dos vetores deve coincidir com a do plano cartesiano.
8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:
b) $3\vec{u}+\vec{v}$
Cálculo relacional
$(21,-12,9)+(3,0,-9)=(24,-12,0)$
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional
$v=3t \Rightarrow t=\frac{v}{3}$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional
$w:(28,-16,12) \div (7,-4,3)=4 \Rightarrow$ é 4 vezes maior.
Análise
Na letra c, ele somente deixa indicado o vetor $\vec{t}$. Como conseguiu resolver a letra b corretamente, pode-se deduzir que na letra a ocorreu uma troca de vetores por falta de atenção. Assim, ele tem conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar, mas apresenta dificuldade na representação geométrica.

A8	Conhecimentos em ação
Conceitos em ação	
1. O que é vetor? O que não é vetor? Vetor é um segmento orientado e a representação gráfica de segmentos equipolentes / Um segmento que não possui direção e sentido não é um vetor. 2. O que são vetores equivalentes (iguais)? O que não são vetores equivalentes?	
Transcrição: Vetor é um segmento orientado e a representação gráfica de segmentos equipolentes. Um segmento que não possui direção e sentido não é um vetor.	

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

a) $\vec{u}-\vec{w}$ $(7,-4,3)-(28,-16,12)$

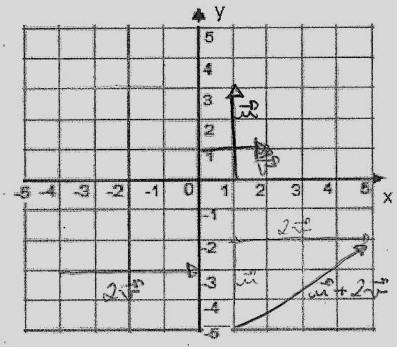
$(-21,+12,-9)$

Análise

O aluno demonstra ter uma ideia vaga sobre vetor, o que torna a sua resposta confusa. Mostrou ter conhecimento da soma de vetores e do produto por escalar.

Teoremas em ação

7. Sejam $\vec{u}=(1,3)$ e $\vec{v}=(2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u}+2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



Não sei como fazer.

Análise

O aluno demonstrou limitação na representação dos vetores.

8. Sejam $\vec{u}=(7,-4,3)$, $\vec{v}=(3,0,-9)$ e $\vec{w}=(28,-16,12)$. Resolva:

b) $3\vec{u}+\vec{v}$

Cálculo relacional

$3\vec{u}=3(7,-4,3)$

$3\vec{u}=(21,-12,9)$

$3\vec{u}+\vec{v}$

$(21,-12,9)+(3,0,-9)$

$(24,-12,0)$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional

$\vec{v}=3\cdot\vec{t}$

$(3,0,-9)=3\vec{t}$

$\left(\frac{3,0,-9}{3}\right)=\vec{t}$

$\vec{t}=(1,0,-3)$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional

$\vec{u}=(7,-4,3)\times 4=\vec{w}=(28,-16,12)$ 4 vezes

Análise

Ele resolveu adequadamente a letra c, o que muitos alunos tiveram dificuldade. Nota-se que existe apenas uma deficiência na representação geométrica.

É possível inferir que, para a maioria dos estudantes envolvidos na pesquisa, o conceito de vetor não foi construído da forma esperada. Isso compromete novas aprendizagens que necessitam desse conceito.

Como afirmam Moreira e Masini (2001, p. 14)

> Novas idéias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para as novas idéias e conceitos.

Para preencher essa lacuna, foi preparado um organizador prévio (Anexo C), o qual é relatado na subseção 4.4.1.

Os alunos, em geral, não responderam à questão 9 que pedia que se elaborasse uma questão envolvendo vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$. O aluno A7 escreveu “não consigo elaborar a questão”. A questão 9 tinha como objetivo verificar a capacidade de abstração do aprendiz. Não somente se ele conseguia transpor o conhecimento, que é um indicativo de aprendizagem, como também se conseguia criar algo referente ao que sabia. Apenas os alunos A1, A5 e A8 elaboraram a questão. Consultando a análise feita de cada aluno sobre o conceito de vetor, constata-se que A1 e A5 atenderam aos conhecimentos em ação esperados e o A8 apresentou somente uma dificuldade na representação geométrica, o que dá sinais de correlação entre os resultados.

No tocante às suposições acerca do que iriam aprender, observa-se a expectativa de “...compreender melhor o conceito de vetores...” (aluno A8), “As relações entre álgebra e vetores; e suas aplicações.” (aluno A1) e um aprofundamento no estudo de vetores. A busca por essas suposições teve por finalidade identificar as intenções dos alunos, pois, de acordo com May (1973), a capacidade humana de ter intenções está na essência da consciência sendo a estrutura que dá significado à experiência.

Na parte aberta a comentários a respeito dos exercícios propostos, o que predominou foi a dificuldade em relembrar o conceito de vetor e as operações entre eles.

A partir dessa atividade, foi possível vislumbrar o organizador prévio, o qual funcionou como uma complementação do que os alunos sabiam para os conhecimentos necessários à aprendizagem do conceito de espaço vetorial.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta fase, será abordado um certo número de variáveis do sistema, não fixadas pelos constrangimentos. Conhecidas por variáveis de comando, estão relacionadas às dificuldades do ensino e aprendizagem do conteúdo sobre espaços vetoriais reais, especificamente quanto ao tratamento inicial feito por sua definição.

Para o exame das variáveis de comando de maneira preditiva e descritiva, foram investigadas as variáveis macrodidáticas ou globais, referentes à organização global da engenharia, e as variáveis microdidáticas ou locais, associadas à organização local da engenharia (sistematização de uma sessão ou fase).

Para essa investigação, tomaram-se por base os constrangimentos de cada dimensão discutida nas análises prévias as quais, de maneira sucinta, serão expostas em seguida.

4.1 Constrangimentos

Os constrangimentos, identificados e analisados no Capítulo 3, em relação às dimensões tratadas, são verificados a seguir.

A) Dimensão epistemológica:

1. reconhecimento, em um primeiro momento, da simplificação na busca por métodos de resolução de problemas, proporcionada pela Álgebra Linear;
2. passagem da geometria plana e espacial para a geometria no $\mathbb{R}^n$;
3. decifração dos significados das representações analíticas;
4. necessidade de uma hipótese inicial para se compreender uma definição;
5. composição de provas.

B) Dimensão didática:

Ausência dos seguintes tipos de tarefas:

6. explicação de forma escrita e representação geométrica, quando possível, da resolução de um exercício;
7. proposição de uma sequência de ideias para a conceitualização de espaço vetorial;

8. apresentação das similaridades e diferenças em relação às ideias enunciadas no item anterior;
9. complementação de um exemplo ou resolução do exemplo dado;
10. resolução do exercício de maneiras diferentes;
11. sugestão de outros conjuntos que sejam espaços vetoriais.
C) Dimensão cognitiva:
12. invariantes operatórios inadequados no campo conceitual aditivo;
13. invariantes operatórios inadequados no campo conceitual multiplicativo.

Com esses treze constrangimentos, foi possível descrever as escolhas efetuadas, definindo as variáveis de comando no âmbito global e no âmbito local.

4.2 Variáveis de comando macrodidáticas ou globais

As primeiras escolhas correspondem às variáveis globais. Nesse caso, considerando-se as variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos, devem ser referidas as ações a seguir.

1. Deixar claro que, apesar de a axiomatização da Álgebra Linear não possibilitar a resolução de novos problemas matemáticos, ela simplificou a busca por métodos de solução de problemas.
2. Explicar que as figuras simbólicas são apenas representações da realidade e não a realidade em si, servindo somente como ideias introdutórias dos conceitos abstratos que serão estudados no decorrer da disciplina.
3. Introduzir a representação geométrica, sempre que possível, para facilitar a compreensão das representações analíticas.
4. Iniciar com a apresentação de conjecturas antes da definição e negociar os significados para que o aluno tenha o entendimento do conceito como ele é aceito no contexto da Álgebra Linear.
5. Fazer vários questionamentos em relação às respostas dos aprendizes, levando-os a sentir necessidade de produzir provas para justificá-las.

Solicitar, de 6 a 11, os tipos de tarefas que se encontram a seguir.

6. Explicar, mediante registros de representação, a resolução de um exercício.
7. Propor uma sequência de ideias para a conceitualização de espaço vetorial.

8. Apresentar as similaridades e as diferenças em relação às ideias enunciadas no item anterior.

9. Complementar um exemplo ou resolver o exemplo dado.

10. Resolver o exercício de maneiras diferentes.

11. Sugerir outros conjuntos que sejam espaços vetoriais.

12. Identificar alguns possíveis invariantes operatórios inadequados utilizados em situações que envolvem adição, para, por meio de uma mediação conveniente, tentar levar o aluno à conceitualização esperada.

13. Identificar alguns possíveis invariantes operatórios inadequados utilizados em situações que envolvem multiplicação, para, por meio de uma mediação conveniente, tentar levar o aluno à conceitualização esperada.

Apoiado nessas escolhas globais, foi feito um plano de ações em que participaram as escolhas locais. Isso se deve à inter-relação entre as escolhas globais e as locais. Como destaca Brousseau (1981,p.55), "[…] é necessário assegurar-se constantemente que a concepção geral é capaz de permitir a invenção, a organização e o desenvolvimento de situações locais".

Esse plano de ações foi estruturado em uma sequência de ações, aplicadas em seis aulas, de 50 minutos. As ações tiveram como referência as questões de controle sugeridas por Artigue (1996, p.206). Essas questões são:

1) Qual é o problema que cada um dos alunos está encarregado de resolver?

2) Poderemos explicar esse problema em termos de teoria dos jogos?

3) O que basta ao aluno saber ou saber fazer para compreender as instruções (entrar no jogo)?

4) O que basta ao aluno saber ou saber fazer para ter êxito (ganhar o jogo)

5) Que controle tem o aluno sobre a sua ação?

6) Haverá diversas fases?

Elas contribuíram para descrever e prever o comportamento dos alunos nas situações adidáticas[33] que se pretendeu constituir, permitindo determinar de que forma as escolhas feitas poderiam intervir de maneira eficaz na sua aprendizagem.

Essa intervenção, como visto no Capítulo 1, seção 1.2, se faz na formação do esquema mais adequado a uma dada classe de situações, em que o aluno não dispõe de todas as competências necessárias para o seu exame.

33 Situação que permite ao aluno tornar-se protagonista da construção de seu conhecimento, buscando estabelecer esquemas adequados para a resolução de classes de situações, com base nos conhecimentos prévios presentes em sua estrutura cognitiva.

4.3 Variáveis de comando microdidáticas ou locais

A escolha das variáveis locais foi feita relacionando-as com as previsões sobre o comportamento dos alunos. Busca detalhar como seria o controle das relações entre os sentidos dos comportamentos deles com as situações didáticas propostas. Para isso, foram concebidas hipóteses, as quais foram confrontadas, no Capítulo 6, com os resultados finais, auxiliando na validação da pesquisa.

4.3.1 Hipóteses

De posse das variáveis globais foi possível a elaboração das hipóteses, por meio das quais procurou-se estabelecer conjecturas mais específicas, pois, de acordo com Carneiro (2005, p. 103-104),

> Para efeitos de validação, as hipóteses não podem ser muito amplas, a ponto de por em jogo processos de aprendizagem, a longo prazo. Ao expressá-las, é preciso ter consciência de que vamos voltar a elas, durante a experimentação, checando-as, inquirindo-as. Será que o Plano funciona? Será que nossas hipóteses são válidas?

Valorizando esses aspectos, as hipóteses foram formuladas admitindo que o conjunto de ações aplicadas levasse os alunos a

1. perceberem, de início, as vantagens da utilização da Álgebra Linear;
2. abstraírem as figuras simbólicas;
3. representarem geometricamente, quando possível, as expressões analíticas e a resolução de exercícios;
4. reconhecerem a necessidade da composição de provas;
5. resolverem exercícios em contextos distintos e de maneiras diferentes;
6. utilizarem meios aceitos cientificamente na resolução das tarefas propostas.

No Quadro 4, é estabelecida a correspondência entre as hipóteses e as variáveis globais.

Quadro 4 - Correspondência entre as hipóteses e as variáveis globais

Hipóteses	Variáveis globais
1. Percepção das vantagens	1
2. Abstração das figuras simbólicas	2
3. Uso de representação por registros	3 e 6
4. Reconhecimento da necessidade da composição de provas	5
5. Resolução de exercícios em contextos distintos e de maneiras diferentes	4, 7, 8, 9, 10 e 11
6. Utilização de procedimentos adequados na resolução de exercícios	12 e 13

Fonte: Autor da pesquisa

As hipóteses 1, 2, 3 e 4 propiciam condições importantes para a efetivação da hipótese 5. Esta, que possui a maioria das variáveis globais, é um forte indicativo de que foram criadas situações que possibilitaram a construção do conhecimento para uma aprendizagem significativa. No entanto, esta não é garantia de uma aprendizagem “correta”, ou seja, aprendizagem de conceitos aceitos no contexto de uma matéria.

Como afirma Moreira (2011, p. 24),

> Quando o sujeito atribui significados a um dado conhecimento, ancorando-o interativamente em conhecimentos prévios, a aprendizagem é significativa, independente de se estes são os aceitos no contexto de alguma matéria de ensino, i.e., de se os significados atribuídos são também contextualmente aceitos, além de serem pessoalmente aceitos.

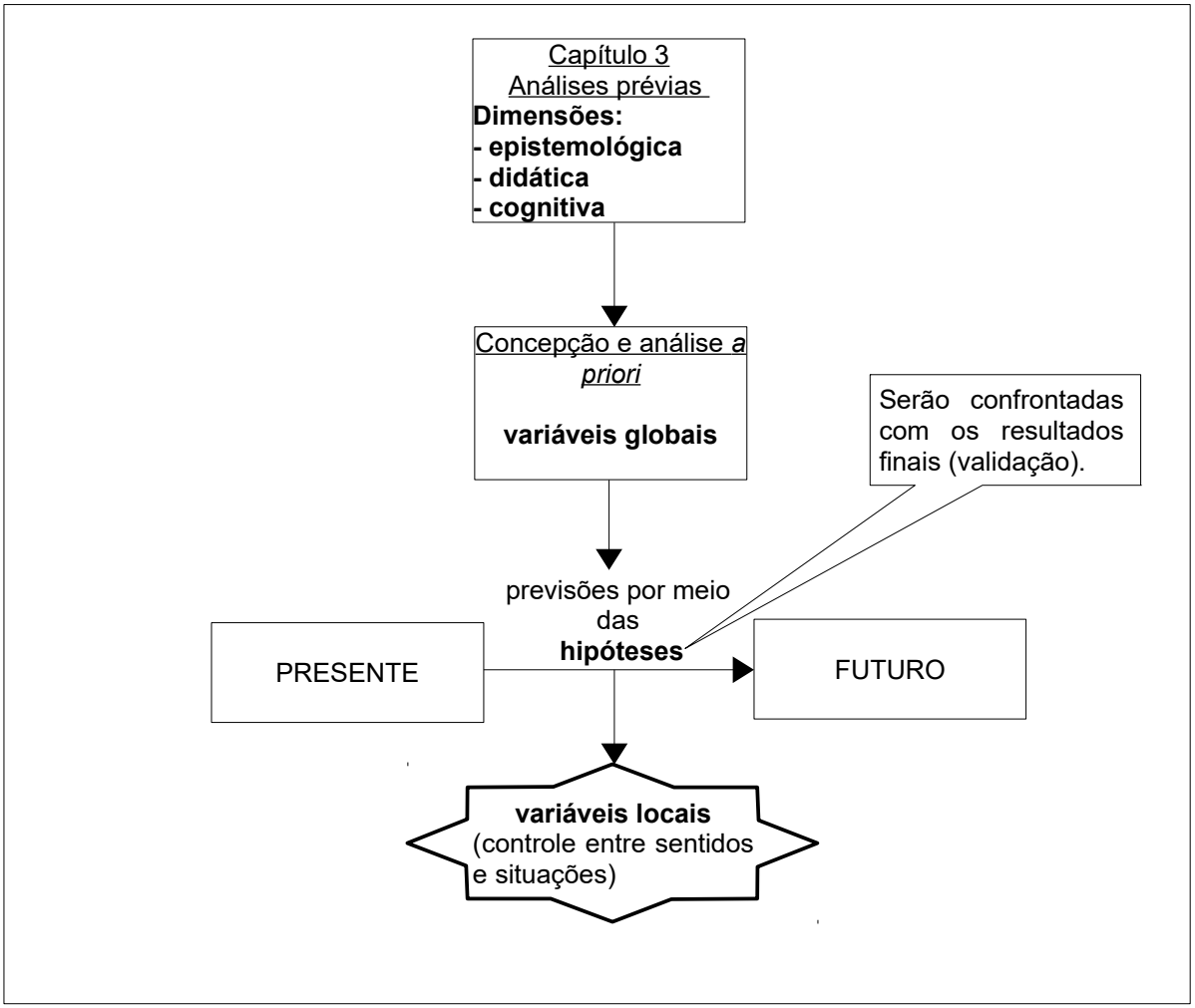
É nos esquemas utilizados pelos alunos que se torna possível verificar se ocorreu tal aprendizagem. É a hipótese 6 que dá indícios de que essa aprendizagem existiu.

Com as hipóteses sobre o comportamentos dos alunos, escolheram-se as variáveis locais. São elas:

1. reconhecimento de vantagens do uso da Álgebra Linear;
2. abstração de simbologias;
3. representação por registros;
4. necessidade de demonstração;
5. resolução de exercícios diferentes e com outras estratégias;
6. formação de esquemas adequados.

No esquema da Figura 27, é apresentado o processo metodológico utilizado até o momento.

Figura 27 - Processo metodológico utilizado



Fonte: Autor da pesquisa

Assim, as variáveis locais foram obtidas pelas hipóteses as quais foram elaboradas em razão das variáveis globais que, por sua vez, tiveram como fundamento as análises prévias.

Em seguida, será exposto o material produzido para o uso em sala de aula.

4.4 Material utilizado durante as aulas

Para a experimentação, na fase seguinte da engenharia didática, foi elaborado um material (Anexos C e D) que será mostrado em detalhes, procurando

justificar a escolha de abordagem do conteúdo e seleção das atividades, à luz das teorias que fundamentam a pesquisa e das variáveis locais. Também como se pensou o controle das relações entre os sentidos dos comportamentos dos alunos e as situações didáticas propostas com a descrição das etapas de ação, formulação, validação e institucionalização.

4.4.1 Elaboração do material

A elaboração do material foi feita em duas etapas:

1ª: preparação segundo os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo da TAS;

2ª: incorporação de tarefas que propiciem uma sequência didática consoante à TSD;

As variáveis locais foram inseridas durante a estruturação das etapas.

Essa divisão efetuou-se somente para sistematizar a elaboração do material e não para estabelecer uma separação entre elas, pois, pela proposta da pesquisa, elas são interligadas.

A seguir, é explicitada cada uma das etapas.

1ª etapa: preparação segundo os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo da TAS.

Por meio das lentes da TAS, foram tomados como referência os exemplos dados por Moreira e Masini (2001) que ilustram, em diferentes disciplinas, o uso dessa teoria.

Retomando, como já visto, os quatro princípios relativos à programação eficiente do conteúdo são:

a) diferenciação progressiva: apresentar antes as ideias mais gerais e inclusivas de uma disciplina, sendo progressivamente diferenciadas;

b) reconciliação integrativa: explorar as relações entre as ideias (similaridades e diferenças);

c) organização sequencial: utilizar as dependências sequenciais naturais existentes na disciplina;

d) consolidação: insistir no domínio do que está sendo estudado, antes da introdução de novos materiais.

A sequência adotada, para contemplar esses princípios, foi dividida em três unidades, conforme apresentado a seguir.

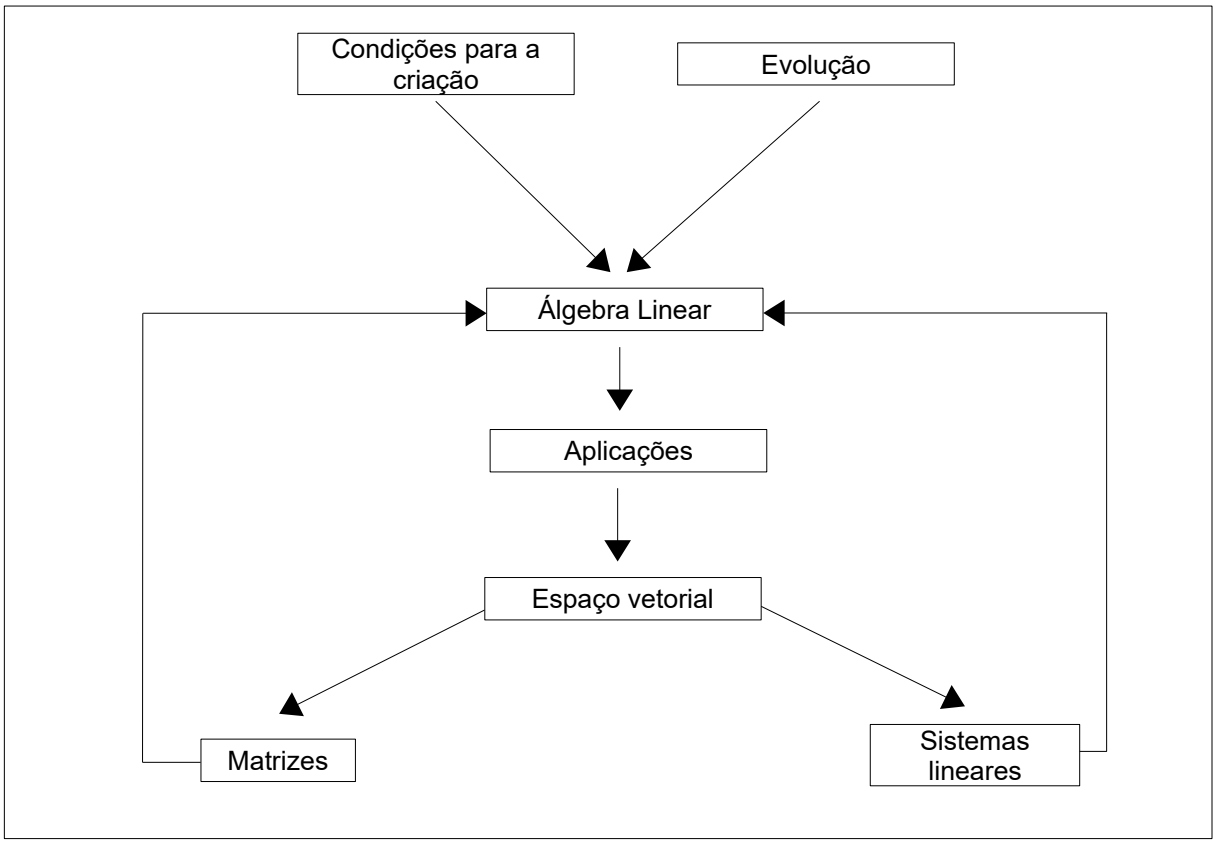
1ª unidade: visão geral da Álgebra Linear.

Tradicionalmente, a sistematização sequencial do conteúdo para se chegar à definição de espaço vetorial é linear, partindo de conceitos mais específicos para os mais gerais: vetor, operações de adição de vetores, multiplicação por escalares e espaço vetorial. Esses temas são abordados separadamente, sendo reunidos na definição final.

Essa sucessão é contrária à teoria ausubeliana que sugere o tratamento das ideias mais gerais para as mais específicas. Os conceitos gerais devem ser expostos primeiro, pois eles funcionarão como subsunçores das ideias menos inclusivas.

Desse modo, a unidade começa com um debate sobre a Álgebra Linear, com as condições que levaram à sua criação, evolução, conceitos envolvidos e aplicações. Finaliza-se com um "mapa" geral da Álgebra Linear, Figura 28, em que é inserido o espaço vetorial nesse contexto.

Figura 28 - "Mapa" geral da Álgebra Linear, segundo a teoria de Ausubel



Fonte: Autor da pesquisa

Assim, as ideias mais gerais e inclusivas são mostradas antes, sendo progressivamente diferenciadas. Como visto no Capítulo 1, em 1.1.8, essa apresentação inicial da ideia mais geral e inclusiva é do ponto de vista fenomenológico e conceitual, não de sua forma final matemática, a qual deve ser alcançada de maneira gradual em níveis crescentes de dificuldade.

2ª unidade: visão mais específica.

Nesta unidade, existiu um tratamento mais específico, focando o conceito de espaço vetorial. No entanto, ele também é geral, pois envolve o conceito de vetor e as propriedades da aritmética vetorial. De certa forma, essa abordagem acaba funcionando como uma espécie de organizador prévio para o conteúdo.

Em razão dos alunos já terem feito as disciplinas que são pré-requisitos para uma melhor compreensão dos espaços vetoriais reais, foi escolhido o organizador prévio "comparativo", pois é o mais adequado para dar suporte à nova aprendizagem subsidiando a construção de subsunçores.

Esse organizador é utilizado para agregar novas ideias com conceitos similares pertencentes à estrutura cognitiva e para acrescentar a discriminabilidade entre as ideias novas e as já existentes, tornando-as tão próximas a ponto de se confundirem (MOREIRA; MASINI, 2001).

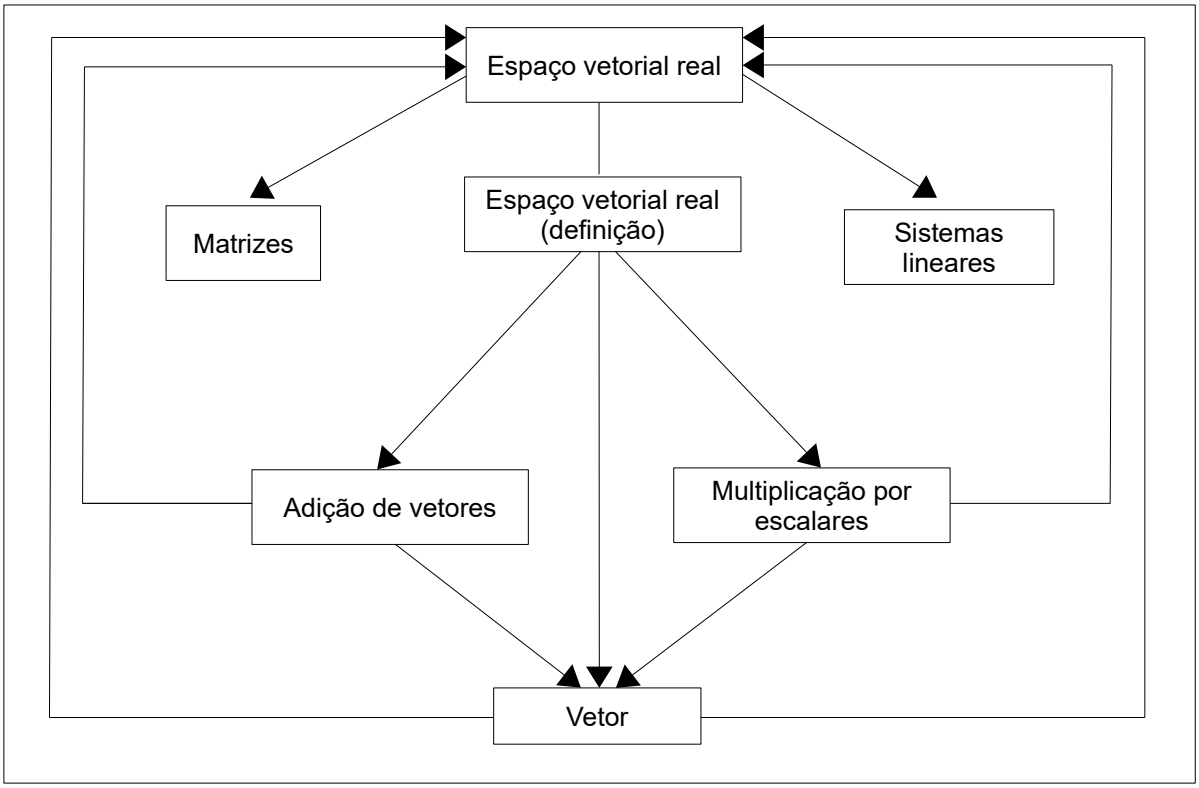
O organizador prévio, muitas vezes, se faz necessário, pois, segundo Moreira (2011, p. 119),

> O conhecimento prévio do aluno pode estar obliterado. A assimilação obliteradora é uma continuidade natural da assimilação (aprendizagem subordinada). Organizadores prévios podem ser usados para 'resgatar', 'ativar', 'recuperar' esse conhecimento obliterado.

Portanto, foram retomados o conceito de vetor e as propriedades da aritmética vetorial, com a representação geométrica, sempre que possível. Isso foi realizado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que geralmente é feito, para que esse conteúdo funcionasse como uma ponte entre o que o aluno já sabia e o que ele deveria saber, com o objetivo de favorecer a aprendizagem significativa do material a ser aprendido.

Assim, nesse momento de especificação, foram incorporados os conceitos pertencentes à definição de espaço vetorial e a aritmética vetorial, terminando com um "mapa" mais específico, Figura 29.

Figura 29 - “Mapa” do espaço vetorial



Fonte: Autor da pesquisa

3ª unidade: especificação maior do que a da 2ª unidade.

Continuando com a diferenciação progressiva, esta unidade se torna mais específica que a anterior, pois trata especificamente de espaços vetoriais reais.

A 2ª etapa se insere nesta unidade, como segue abaixo.

2ª etapa: incorporação de tarefas que propiciem uma sequência didática consoante à TSD.

Nesta etapa, foi estabelecida uma sequência didática composta por cinco situações didáticas[34], cada uma delas de acordo com as quatro classificações (ação, formulação, validação e institucionalização) das referidas situações didáticas propostas por Guy Brousseau.

34 Para a composição das situações didáticas, foi tomado como referência o artigo *Proposta de uma Metodologia de Ensino de Espaço Vetorial* (2015), de Figueroa e Almouloud.

1ª situação didática

É apresentada aos alunos a ilustração de uma máquina de mistura de tintas, sua utilização e algumas informações referentes ao seu modo de trabalhar. Com algumas indicações acerca do seu funcionamento, procura-se criar condições que favoreçam o estabelecimento, pelos estudantes, de relações entre esse e as operações com pares ordenados.

Depois da contextualização, é feito questionamentos sobre comandos a serem dados para se obter tonalidades da cor laranja e outras possíveis instruções. Nesse momento, o aluno tem a oportunidade de fazer descobertas, sendo levado a assumir a responsabilidade por sua aprendizagem, o que favorece a construção do seu conhecimento.

A organização foi feita segundo as quatro situações explicitadas:

a) **ação:** os alunos, diante da circunstância de reflexão, proporcionada pelo sistema de produção de tons de tintas e pelas questões propostas, começam a analisar os saberes envolvidos na situação;

b) **formulação:** nesse momento os estudantes são instigados a trocarem informações entre si, buscando elementos para descreverem, formularem e registrarem o processo para a resolução da situação proposta;

c) **validação:** nessa fase, eles procuram justificar, com um tratamento matemático, os aspectos e registros feitos na formulação;

d) **institucionalização:** nessa situação, o professor/pesquisador junto com os educandos reconhecem o significado socialmente estabelecido o qual é registrado.

2ª situação didática

Nesta situação, busca-se que o aluno observe e examine, após ter relacionado o funcionamento da máquina de tintas com as operações entre pares ordenados (1ª situação didática), que os comandos podem ser vistos como vetores.

O aluno é motivado a expressar o seu raciocínio por meio da escrita, cálculos e linguagem natural. Isso possibilita a análise dos conhecimentos em ação pertencentes aos esquemas utilizados por ele diante da situação.

É solicitado aos estudantes a realização de operações de adição e multiplicação por escalar de vetores.

A estruturação referente às quatro situações é a seguinte:

a) **ação:** os alunos são levados a refletir sobre a soma de vetores e multiplicação por escalar, quando solicitados à prática das atividades;

b) **formulação:** nessa etapa, os aprendizes fazem conjecturas acerca do conjunto de pares ordenados e o conjunto de vetores;

c) **validação:** eles por meio da verificação de propriedades da adição e multiplicação, tentam ratificar as hipóteses feitas na formulação;

d) **institucionalização:** o professor/pesquisador, recorrendo aos registros dos alunos, pode identificar os invariantes operatórios utilizados e, se necessário, direcionar para uma conceitualização esperada.

3ª situação didática

Neste momento, o objetivo é levar o aluno a perceber que um conjunto de comandos (comandos e escalar a ser multiplicado de números inteiros) e um de vetores apresentam uma coincidência estrutural quanto às operações de adição e multiplicação por escalar. E, dessa forma, formalizar o conceito de espaço vetorial.

É pedido ao aluno que verifique que quaisquer códigos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ do conjunto de comandos V, com $k, l \in \mathbb{Z}$, satisfazem as propriedades dos espaços vetoriais.

Com $\mathbf{u} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (u_1, u_2);\ u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{v} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (v_1, v_2); v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{w} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (w_1, w_2); w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$

A formação desta situação didática ficou como segue:

a) **ação:** na situação de reflexão sobre vetores, os alunos analisam e pensam sobre os saberes envolvidos na verificação das propriedades de soma de vetores e multiplicação por escalar de um conjunto de vetores relacionados a comandos dados no contexto da 1ª situação didática;

b) **formulação:** diante da exposição do saber, o discente faz suposições para o reconhecimento das condições pedidas;

c) **validação:** ocorre a observação e o conhecimento das propriedades da adição e multiplicação por escalar de vetores e ele procura justificar e demonstrar as suposições sobre o conjunto de vetores, levantadas na fase anterior;

d) **institucionalização:** os registros feitos pelos alunos são discutidos. O professor/pesquisador sistematiza e generaliza o conhecimento construído.

Obs.: Esta situação didática, como será visto no Capítulo 5, foi substituída por uma outra. Isso ocorreu em razão da constatação, durante a experimentação, da necessidade de alterações para o direcionamento à validação futura.

4ª situação didática

Esta situação busca fornecer indícios de aprendizagem do aluno. É solicitado a ele que crie ou apresente outro exemplo de espaços vetoriais (consolidação[35]), verificando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar.

A situação ficou assim ordenada:

a) **ação:** o aprendiz, como protagonista na construção de seu saber, reflete sobre vetores, soma de vetores e multiplicação por escalar procurando abstrair tais conhecimentos para ser capaz de elaborar novos conjuntos com as propriedades estudadas e reconhecê-los em outros;

b) **formulação:** os alunos trocam informações formulando e descrevendo o seu exemplo de espaço vetorial ou justificando-o por meio de ferramentas matemáticas. Procura responder às questões:

O seu exemplo é um espaço vetorial? Verifica as propriedades da adição e multiplicação por escalar?

c) **validação:** situação em que os estudantes explicam de forma a esclarecer o que desenvolveram no momento anterior e o professor/pesquisador inicia uma intervenção para fazer a institucionalização no momento seguinte;

d) **institucionalização:** o professor/pesquisador socializa com os alunos os espaços vetoriais criados ou escolhidos por estes. Possibilita condições para questionamentos e eventuais dúvidas. Com isso, faz os esclarecimentos necessários, retomando os saberes trabalhados nas situações anteriores.

5ª situação didática

35 Insistir no domínio do que está sendo estudado, antes da introdução de novos materiais.

Nesta situação, procura-se reconhecer, na estrutura cognitiva do aluno, as relações estabelecidas entre os conceitos retomados e o conceito de espaço vetorial. É pedido a ele que faça um mapa conceitual relacionando os conceitos abordados no minicurso.

Esta situação ficou disposta como segue:

a) **ação:** o aluno pensa nos conceitos revistos e na associação deles com o conceito de espaço vetorial e tenta explicitar, por meio de um mapa conceitual, a sua compreensão sobre a correlação deles;

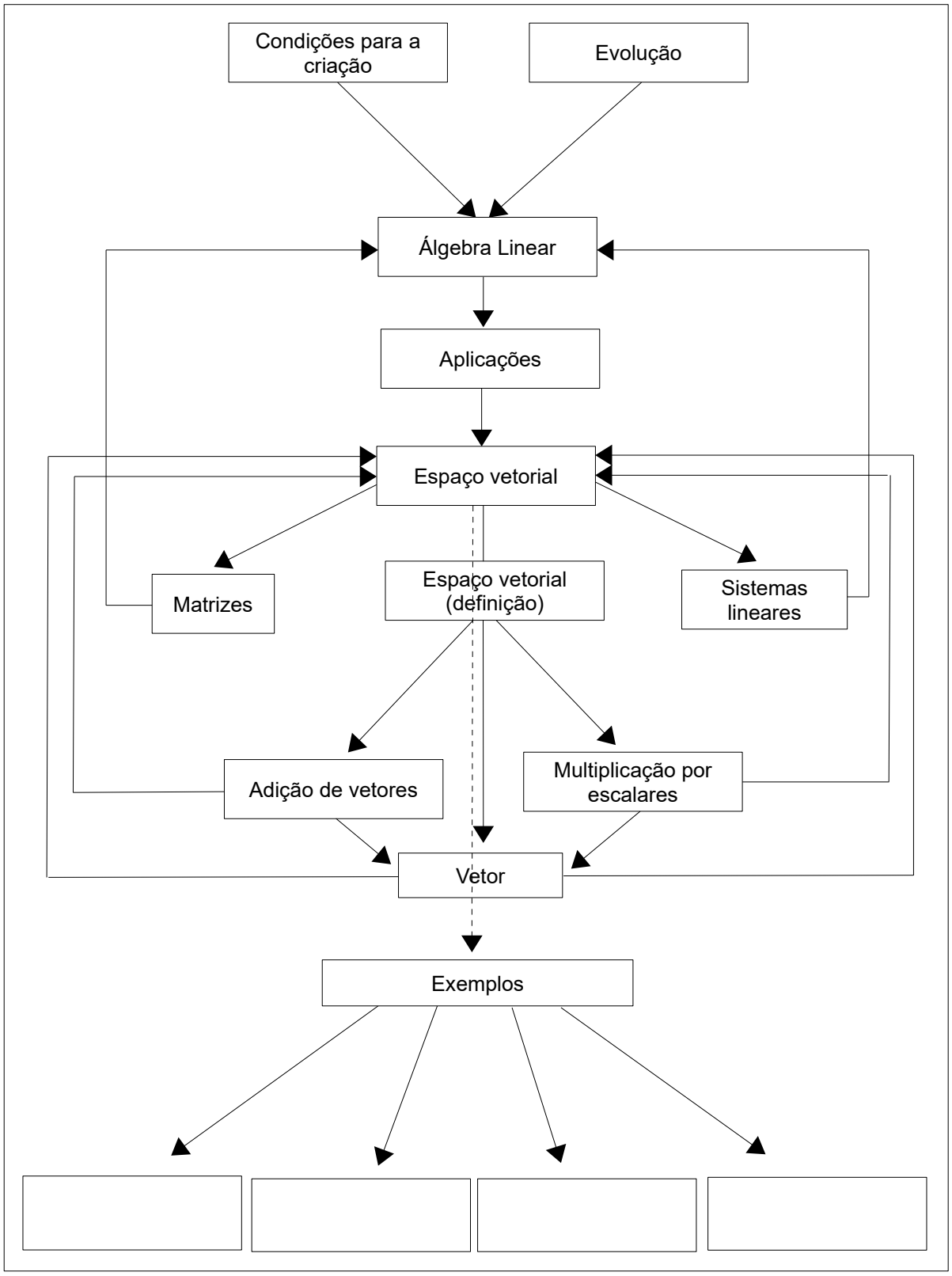
b) **formulação:** os alunos, em alguns momentos de dúvida, conversam entre si. Argumentam sobre as relações entre os conceitos que acreditam existir. Isso favorece a uma melhor compreensão da correlação dos conceitos;

c) **validação:** durante as explicações dos estudantes, o professor/pesquisador começa a interagir com eles com questões. Essas têm por finalidade direcioná-los à fase de institucionalização;

d) **institucionalização:** o professor/pesquisador, com os alunos, constrói um mapa conceitual na lousa, debatendo sobre as relações instituídas por eles em seus mapas. Nesse momento, o professor/pesquisador seleciona e organiza as ideias, com a intenção de ajudá-los a tornar mais claro e estável o conceito de espaço vetorial. Os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo - diferenciação progressiva, reconciliação integrativa e organização sequencial - foram considerados nas três unidades expostas. O princípio da consolidação é aplicado durante as unidades e, principalmente, na institucionalização de cada situação didática. Uma vez percebido que os alunos não tiveram uma aprendizagem adequada, uma alternativa, é voltar aos mapas buscando esclarecer as eventuais dúvidas que ficaram, para uma maior compreensão do que está sendo estudado.

Na Figura 30 é exibido um exemplo de mapa integrador dos conceitos estudados.

Figura 30 - “Mapa” integrador



Fonte: Autor da pesquisa

5 EXPERIMENTAÇÃO

Esta fase será detalhada neste capítulo, embora tenham sido utilizados e examinados dados produzidos pelos alunos (Anexo A) na dimensão cognitiva da seção de análises prévias do Capítulo 3.

Ela foi realizada em sala de aula, em um minicurso intitulado “O conceito de espaço vetorial”, ao longo de oito aulas de 50 minutos, sendo duas por semana sequencialmente. A escolha do número de aulas foi feita levando em consideração o tempo necessário para a realização da atividade inicial (Anexo A) – duas aulas - e o número de aulas que, normalmente (conforme a experiência docente do pesquisador), é utilizado para a introdução do conceito de espaço vetorial (Anexos C e D) - seis aulas. O professor foi o autor desta pesquisa, o qual não havia lecionado anteriormente para essa turma. Também ocorreram sessões de entrevistas (Anexo E), individualmente, com cada aluno participante, após o término do minicurso. As entrevistas foram realizadas buscando identificar em cada aluno: o reconhecimento das vantagens do uso da Álgebra Linear; os esquemas solicitados diante das situações didáticas (anexo D); a possibilidade da resolução dos exercícios com outras estratégias e a percepção da aprendizagem ocorrida. Tanto as aulas como as entrevistas foram gravadas.

Como já visto, o grupo era composto por oito alunos (três homens e cinco mulheres) os quais pertenciam ao terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática do IFSP – Bragança Paulista.

Para a caracterização da turma, foi utilizado um questionário (Anexo B). Os dados obtidos são exibidos no Quadro 5.

Quadro 5 - Dados obtidos do questionário

Perguntas	Sim	Não
Já tem formação em outro curso de graduação?	1	7
Já ficou em dependência em alguma disciplina?	5	3
Pretende ser professor?	8	0
Leciona?	0	8

Fonte: Autor da pesquisa

Nenhum aluno tem experiência docente, mas pretendem ser professores. Entre eles apenas um já era graduado (Bacharelado em Administração) e a maioria tinha apresentado reprovação em mais de uma disciplina do curso.

A turma regular desses alunos tinha quatro aulas por dia durante toda a semana, das 7h50min às 11h25min. As aulas foram feitas às terças-feiras, das 13h30min às 15h10min.

Já no começo da experimentação, em reuniões com o orientador, teve início a Análise *a posteriori* e a validação das hipóteses, de maneira que essa ação conjunta possibilitou realizar algumas mudanças e indicar caminhos para a validação futura, como a que será relatada na terceira situação didática.

As atividades, construídas a partir dos estudos feitos nas fases anteriores, foram empregadas na sequência abaixo.

Nas duas primeiras aulas, foram utilizadas as atividades do Anexo A. O relato da sua aplicação, a apresentação e a análise dos dados, já feitos na dimensão cognitiva da seção de análises prévias, se encontram no Capítulo 3. As seis aulas seguintes são explanadas adiante, sendo as entrevistas abordadas no Capítulo 6.

5.1 Visão geral da Álgebra Linear, organizador prévio e situações didáticas – aplicação e resultados

Esta seção tem por objetivos contextualizar a fase de experimentação, descrever a dinâmica das aulas e atividades, relatar a forma de coleta de dados, a produção, as observações e manifestações dos alunos. Com isso, espera-se criar condições mais favoráveis à compreensão, pelo leitor, da análise dos dados feita no Capítulo 6.

5.1.1 Visão geral da Álgebra Linear

3ª aula

O professor/pesquisador apresentou aos alunos um panorama histórico da Álgebra Linear.

Relatou sobre o povo da Babilônia que, por volta de 4.000 anos atrás, já sabia como resolver um sistema 2x2 simples de equações lineares com duas

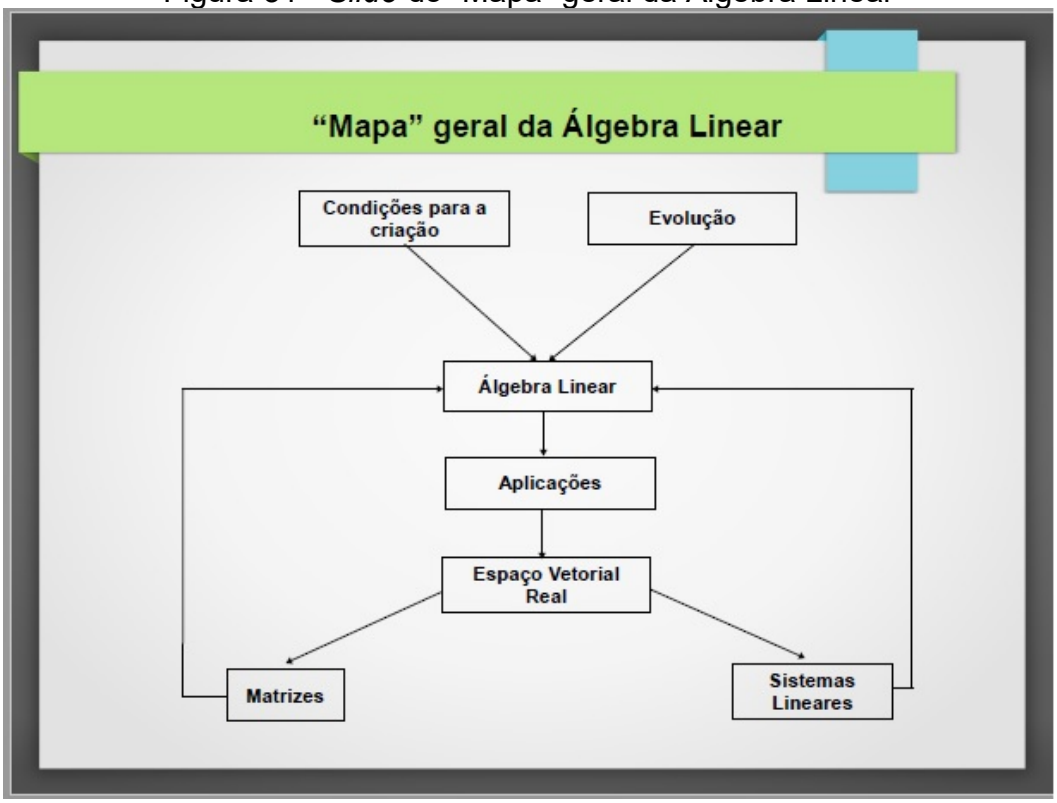
incógnitas. Em 200 a.C., os chineses resolviam sistemas de equações 3x3, e a equação ax + b = 0 era uma questão antiga estudada por muitas pessoas.

Falou sobre a contribuição, para a Álgebra Linear, de vários estudiosos como Leibniz, Lagrange, Cramer, Euler e Gauss.

Chegando ao espaço vetorial, salientou que a axiomatização não possibilitou a resolução de novos problemas matemáticos, mas, devido ao seu poder de generalização e unificação, simplificou a busca por métodos de resolução de problemas (DORIER et al., 1999; DORIER, 2003). Deu exemplos de aplicações, como na criptografia, deformações e morfismo, circuitos elétricos, computação gráfica, tomografia computadorizada e imagens digitais.

Ao final, foi exibido o *slide* da Figura 31, o qual contém um “Mapa” geral da Álgebra Linear, previamente construído na etapa de elaboração do material.

Figura 31 - *Slide* do “Mapa” geral da Álgebra Linear



Fonte: Autor da pesquisa

Com isso, pretendeu-se trabalhar a variável local: 1. reconhecimento de vantagens do uso da Álgebra Linear.

Como essa aula consistiu apenas em contextualizar historicamente e mostrar aplicações e ganhos com o emprego da Álgebra Linear, a participação dos alunos restringiu-se em acompanhá-la tecendo alguns comentários, os quais demonstraram interesse. Como exemplo, quando se falou acerca da evolução histórica da resolução de sistemas lineares, os alunos perguntaram sobre a matemática ensinada em relação à matemática conhecida nos dias atuais.

Durante a exibição das aplicações, uma aluna se manifestou: “...hoje, para a M., (professora de Álgebra Linear da turma) eu falei assim: - M., pelo amor de Deus, explica pra que é que você está ensinando isso!”. Evidencia-se que, para ela, o conteúdo estava começando a fazer sentido.

5.1.2 Organizador prévio

4ª aula

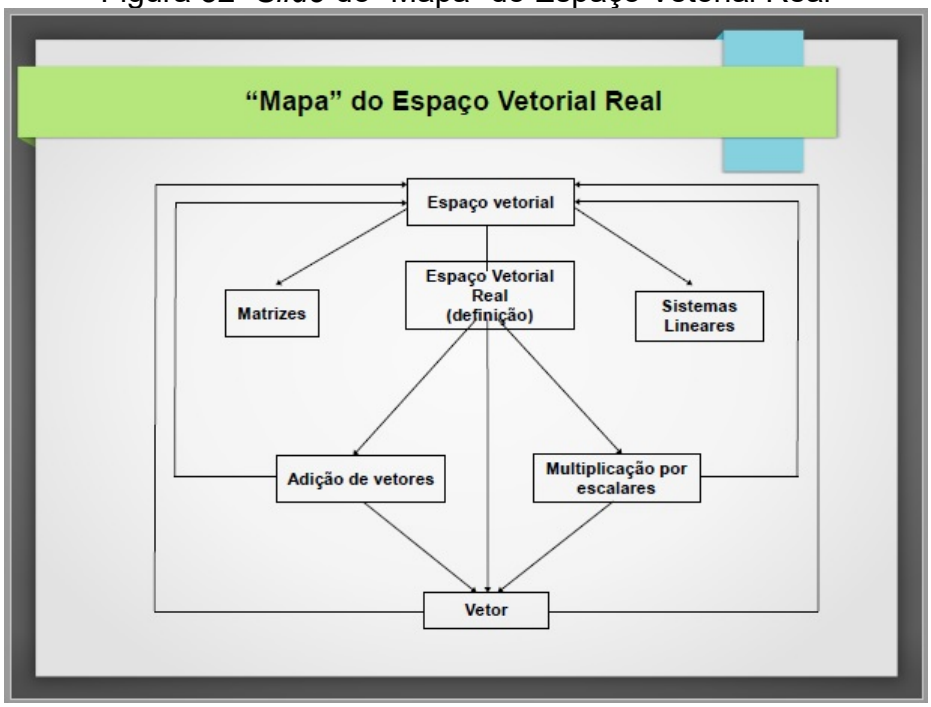
A partir das respostas obtidas nas atividades do Anexo A, foi possível identificar as dificuldades dos alunos em relação ao conhecimento prévio necessário ao entendimento do conceito de espaço vetorial. Assim, nessa aula, foi dada uma maior atenção ao conceito de vetor, composto pelas situações, invariantes operatórios e representações.

Com o uso do organizador prévio (Anexo C), ajustado às dificuldades encontradas (conceito de vetor), o professor/pesquisador pôde retomar tal conceito e as propriedades da aritmética vetorial.

Buscando modificar a estrutura cognitiva daqueles alunos que ainda não possuíam o conceito de vetor de forma clara e estável, foram trabalhadas as definições de grandeza escalar e vetorial, os conceitos em ação (definição de vetor, soma de vetores e multiplicação por escalar), os teoremas em ação (interação dos vetores e suas propriedades aritméticas) e as conexões desses com o espaço vetorial.

A aula foi encerrada com a apresentação do *slide* da Figura 32, evidenciando a inter-relação entre os conceitos, dos mais gerais para os específicos.

Figura 32- *Slide* do “Mapa” do Espaço Vetorial Real



Fonte: Autor da pesquisa

Sendo o organizador prévio uma estratégia instrucional, a atuação dos alunos se limitou em assistir à aula com atenção. Apesar deles terem feito poucas intervenções durante a apresentação, verificou-se, nas situações didáticas e entrevistas, que essa estratégia os ajudou a relembrar a respeito de vetor. Isso facilitou a assimilação e a retenção das informações subsequentes.

Em seguida, são transcritas algumas falas dos alunos nas entrevistas[36] corroborando tal constatação:

A1: “Relembrei um monte de coisa que tinha visto semestre passado em vetores e que vai acabar usando agora em Álgebra Linear que eu estou fazendo.”;

A3: “… a parte lá dos vetores, assim, né, principalmente, que coisas que eu não lembrava mais, que clareou bastante...”;

A5: “ … eu até brinquei com ele (professor atual do aluno e havia dado aula de vetor) na aula dele. Falei: Professor, lembrei bastante de suas aulas do **u** do **v** da questão da soma dos vetores….do vetor resultante...”.

36 As entrevistas foram realizadas, individualmente, uma semana após a conclusão das aulas.

5.1.3 Situações didáticas

As situações didáticas foram realizadas nas quatro aulas subsequentes. Nelas foram proporcionadas condições necessárias para o surgimento das situações adidáticas, essenciais ao protagonismo do aluno. Também foi possível auxiliar os discentes na construção do conceito de espaço vetorial, intervindo, sempre que necessário, na formação de seus esquemas.

1ª situação didática (5ª e 6ª aula)

A situação didática teve início com a apresentação da imagem de uma máquina de mistura de cores (Figura 33) e a narração do professor/pesquisador sobre a dificuldade dos fabricantes de tintas de parede de obter tons específicos de tintas e, principalmente, repeti-los depois. Em virtude disso, eles desenvolveram máquinas que misturam as cores automaticamente, a partir de fórmulas específicas, conseguindo produzir diversas cores diferentes.

Figura 33 - Máquina de mistura de cores

Fonte: <https://portuguese.alibaba.com/product-detail/automatic-paint-or-ink-mixing-machine-jy-30a-499276606.html>

O funcionamento da referida máquina consiste em adicionar uma série de corantes em proporções eletronicamente calculadas sobre uma base branca. Os tons são obtidos a partir de códigos relacionados a eles.

O professor/pesquisador explicou que, para se conseguir um tom de laranja, é necessário informar à máquina dois comandos numéricos, um referente à quantidade de amarelo e o outro à quantidade de vermelho a ser adicionada a uma base branca, ou seja, o laranja é determinado pelo par ordenado: (amarelo, vermelho). A Figura 34 mostra duas tabelas que indicam o número de gotas, o comando a ser dado (código) ao computador e o tom da cor amarela e vermelha obtida, respectivamente.

Figura 34 - Tabelas das cores amarela e vermelha

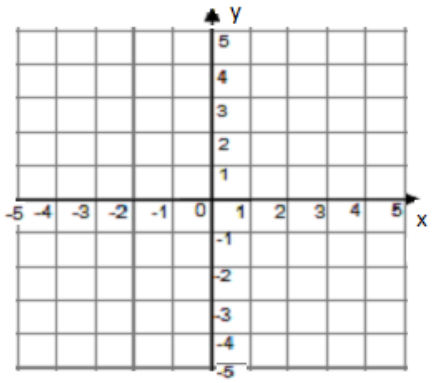
Cor amarela		
Gotas (0,05ml/gota)	Comando (código)	Tom de amarelo (em 1ml de base branca)
1	(1,0)	
2	(2,0)	
3	(3,0)	
4	(4,0)	
5	(5,0)	

Cor vermelha		
Gotas (0,05ml/gota)	Comando (código)	Tom de vermelho (em 1ml de base branca)
1	(0,1)	
2	(0,2)	
3	(0,3)	
4	(0,4)	
5	(0,5)	

Fonte: Autor da pesquisa

Depois da contextualização, foram propostas as questões:

- *Quais comandos você daria para obter os tons de laranja identificados pelos códigos* $(2,3)$ *e* $(3,1)$*, a partir dos códigos das tabelas da Figura 1* (Figura 34)*?*
- *Se você desejasse um tom de laranja pela mistura dos tons obtidos anteriormente* ($(2,3)$ *e* $(3,1)$)*, qual seria o código desse outro tom de laranja? Escreva o resultado em forma de soma com igualdade.*
- *O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos* $(2,3)$ *e* $(3,1)$*, você desse a sequência contrária* $(3,1)$ *e* $(2,3)$*? Apresente os cálculos.*
- *Represente, por meio de vetores, no plano cartesiano abaixo, os tons identificados pelos códigos* $(2,3)$, $(3,1)$ *e a resultante da soma deles.*



- *Admita que uma vez dado um comando ao computador ele não aceite a sua alteração, sendo necessário um novo comando de adição ou multiplicação por escalar* $(\mathbb{Z})$ *para que o resultado seja modificado.*
- *Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,*

$$(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (\quad , \quad) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- *E multiplicado, ou seja,*

$$__ \, x\,(\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- *Qual comando você daria para cancelar o seguinte código informado* $(4,5)$ *?*

$$(4,5) + (\quad , \quad) = (\quad , \quad)$$

Essas questões favoreceram as interações entre professor/pesquisador e aluno perante as situações.

A organização das quatro situações foi:

a) **ação:** os alunos, individualmente, buscaram responder às questões resgatando o conhecimento prévio e as sugestões dos colegas.

Uma aluna comentou: “Até para pintar a casa vamos ter que pensar no par ordenado”, percebendo a contextualização da atividade. Outra aluna disse: “É tão bom quando a gente lembra de uma coisa, junta com uma outra e faz sentido”, sinalizando a aproximação das atividades com o conhecimento prévio.

Foi pedido aos alunos que fizessem registros da resolução pela álgebra e pela forma de texto;

b) **formulação:** durante a troca de informações, os estudantes procuraram compreender a situação proposta para responderem às questões e realizaram a correspondência dos dados das tabelas com os comandos em pares ordenados. Uma aluna expôs o seu raciocínio para a sala: "… pega e mistura as cores… você tem que garantir que vai dar (2,3)… pegando da tabela amarela e da tabela vermelha… porque você olha aqui assim (2,3) e fala, mas já está aqui o negócio, mas não, ele quer que faça direitinho, bonitinho.";

c) **validação:** nesta fase, diante dos comentários dos aprendizes, o professor/pesquisador constatou que eles notaram alguma correspondência entre matriz e vetor e fez a pergunta: "O que tem a ver matriz com vetor?"

Os alunos tentaram construir uma ligação entre os conjuntos afirmando que havia semelhanças na adição e multiplicação, mas com algumas exceções.

Debateram sobre o produto de matrizes o qual nem sempre existe e não guarda a propriedade comutativa.

Repararam nessas semelhanças, no entanto acreditavam não terem conhecimento para explicá-las;

d) **institucionalização:** o professor/pesquisador descreveu as etapas realizadas de maneira a conscientizá-los da trajetória percorrida por eles. Destacou, que a atividade proposta pedia a verificação das propriedades aritméticas vetoriais, e que existe, como perceberam, uma aproximação entre as operações de adição e multiplicação por escalar entre o conjunto das matrizes e vetores.

Dessa forma, almejou-se trabalhar as variáveis locais: 2. abstração de simbologias; 3. representação por registros; 4. necessidade de demonstração; 5. resolução de exercícios diferentes.

2ª situação didática (7ª aula)

Esta situação se pautou a tratar das operações entre vetores e multiplicação por escalar. Isso se fez com exercícios semelhantes ao exercício 8 da atividade inicial (Anexo A).

A situação foi estruturada como:

a) **ação:** os alunos em ação, diante das atividades, raciocinaram sobre as operações solicitadas;

b) **formulação** e c) **validação:** nesse momento, mesmo havendo possibilidade de manifestarem as suas opiniões, eles preferiram resolver os exercícios em silêncio. Pela constatação do resultado das resoluções (analisadas no Capítulo 6), pôde-se verificar que tal atitude retratou uma melhor compreensão das operações quando comparadas ao resultado do exercício 8 da atividade inicial;

d) **institucionalização:** pelos registros dos estudantes, identificou-se que os invariantes operatórios inadequados demonstrados na atividade inicial, após a utilização do organizador prévio e de seus exercícios (Anexo C), para alguns deles já se constituíam uma conceitualização mais apropriada.

Com isso, buscou-se lidar com as variáveis locais: 2. abstração de simbologias e 6. formulação de esquemas adequados.

3ª situação didática (7ª aula)

A terceira situação didática (Anexo D) foi criada com o objetivo de levar o aluno a perceber que um conjunto de comandos e um de vetores apresentam uma coincidência estrutural quanto às operações de adição e multiplicação por escalar. E, com isso, formalizam o conceito de espaço vetorial.

No entanto, o professor/pesquisador, ao observar que na primeira situação didática os alunos notaram a aproximação entre as operações de adição e multiplicação por escalar entre o conjunto dos vetores e matrizes, produziu uma outra situação didática.

De certo modo, na experimentação, auxiliada pelo professor/pesquisador e seu orientador, instituiu-se a análise a *posteriori*, gerando alterações, conforme a relatada, com a finalidade de um direcionamento à validação futura.

A nova situação considerou a descoberta dos alunos como se pode confirmar a seguir.

Ela teve início com o texto abaixo:

Na aula passada, foi observado que existiam semelhanças nas operações de adição e multiplicação por escalar entre o conjunto V dos vetores da geometria e o conjunto $M_{mxn}(\mathbb{R})$ *das matrizes reais com* $m,n \in \mathbb{N}^*$.

Como já constatado, o conjunto de vetores do $\mathbb{R}^2$ *satisfaz as propriedades de adição e multiplicação estudadas até aqui.*

Ao aluno, foi pedido:

Agora, verifique se o conjunto $M_{2x1}(\mathbb{R})$ *também satisfaz essas propriedades.*

Lembrando:

Adição (A)

A1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

A3) Existe um elemento nulo $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

A4) Existe $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Multiplicação (M)

M1) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

M2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$

M3) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$

M4) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

para quaisquer $\vec{u}+\vec{v}$ de V *e* k,l de $\mathbb{R}$.

Adote: $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix};\ u_1,u_2\in\mathbb{R}$

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix};v_1,v_2\in\mathbb{R}$

$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix};w_1,w_2\in\mathbb{R}$

O organização, segundo as situações, ficou assim:

a) **ação:** os alunos refletiram sobre os saberes envolvidos, quando da verificação das propriedades pedidas. Na tentativa de certificá-las, utilizaram, além da forma oral, expressões algébricas. Isso evidenciou a necessidade, sentida por eles, da demonstração;

b) **formulação:** retomando a aritmética vetorial, sugeriram que a resolução fosse feita como se as matrizes fossem vetores, assumindo, como hipótese, a coincidência das operações nos conjuntos;

c) **validação:** pela uso da álgebra e da aritmética, os aprendizes observaram cada uma das propriedades, justificando e demonstrando a hipótese declarada na formulação.

A maioria deles justificou oralmente, relatando que as operações com vetores do $\mathbb{R}^2$ e com as matrizes $M_{2x1}(\mathbb{R})$ eram as mesmas. Portanto, como os vetores do $\mathbb{R}^2$, as matrizes $M_{2x1}(\mathbb{R})$ também satisfazem as propriedades.

Durante essa fase, o professor/pesquisador buscou ajustar os esquemas sobre a adição e multiplicação os quais não estavam adequados.

d) **institucionalização:** após o debate acerca dos registros, orais e escritos, feitos pelos alunos, o professor/pesquisador sistematizou e generalizou o conhecimento construído.

Esta situação didática teve como intenção trabalhar as variáveis locais: 2. abstração de simbologias; 3. representação por registros; 4. necessidade de demonstração; 5. resolução de exercícios diferentes; 6. formulação de esquemas adequados.

4ª situação didática (8ª aula)

É iniciada a aula com o seguinte texto:

Sabendo que um espaço vetorial é um conjunto de elementos que se comportam como vetores em relação às operações de adição e multiplicação.

E que para termos um ***espaço vetorial real*** *é necessário que para cada par de elementos* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V *associado a um elemento* $\vec{u}+\vec{v}$ de V *se verifiquem as propriedades da adição e para cada número* ***real*** k *e a cada elemento* $\vec{u}$ de V *associado a um elemento* $k\vec{u}$ de V *se verifiquem as propriedades da multiplicação.*

Crie ou apresente um exemplo de espaço vetorial real, verificando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar.

Lembrando:

Adição (A)

A1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A3) Existe um elemento nulo $\vec{0}$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

A4) Existe $-\vec{u}$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Multiplicação (M)

M1) $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$

M2) $(\vec{u} + \vec{v}) = l\vec{u} + l\vec{v}$

M3) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$

M4) $1\vec{u} = \vec{u}$

para quaisquer $\vec{u} + \vec{v}$ de V *e* k, l de $\mathbb{R}$.

Implicitamente, estão presentes os questionamentos:

O seu exemplo é um espaço vetorial? Verifica as propriedades da adição e multiplicação por escalar?

O situação ficou assim estruturada:

a) **ação:** os alunos, diante da situação, tentaram relacionar o seu conhecimento prévio e as atividades feitas até aqui para abstrair os conhecimentos da soma de vetores e multiplicação por escalar a fim de criar novos espaços vetoriais;

b) **formulação:** trocando informações, eles empenharam-se em conseguir compreender a definição de espaço vetorial. Questionaram se todo conjunto, mesmo não sendo de vetores, que apresentasse as propriedades estudadas também seria espaço vetorial;

c) **validação:** nesse momento, o professor/pesquisador, tendo uma noção do que os alunos acreditavam ser espaço vetorial (formulação), interveio e perguntou-lhes, se um conjunto de matrizes, de polinômios ou qualquer outro que apresentasse as propriedades de adição e multiplicação por escalar, como o conjunto de vetores, poderia ser chamado de espaço vetorial. As respostas se dividiram, e então o professor/pesquisador, e os alunos iniciaram a verificação das propriedades de um conjunto de polinômios reais de terceiro grau, preparando-se para a institucionalização na fase seguinte;

d) **institucionalização:** nessa fase, foi socializado com os participantes o espaço vetorial formado por cada um.

O professor/pesquisador observou que a principal dúvida dos alunos era chamar de espaço vetorial um conjunto de elementos, os quais respeitam as propriedades estudadas, que não são os vetores da geometria. Devido a isso, esclareceu que na teoria dos espaços vetoriais é normal aproveitar a terminologia dos vetores da geometria, chamando os elementos de um espaço vetorial qualquer de vetores, o elemento neutro da adição de vetor nulo desse espaço e os elementos de $\mathbb{R}$ de escalares (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1987).

Planejou, nessa situação, ocupar-se das variáveis locais: 2. abstração de simbologias; 3. representação por registros; 4. necessidade de demonstração; 5. resolução de exercícios diferentes e com outras estratégias; 6. formulação de esquemas adequados.

5ª situação didática (8ª aula)

O professor/pesquisador, com o objetivo de obter informações sobre a organização que os alunos construíram para o conjunto de conceitos envolvidos no minicurso, fez a seguinte proposta:

Faça um mapa conceitual relacionando os conceitos abordados no minicurso.

Dessa forma, o mapa conceitual está sendo utilizado como um instrumento de avaliação. Conforme Moreira e Masini (2001, p. 57), essa avaliação é feita "… não no sentido de testar conhecimento e atribuir nota ao aluno, mas no sentido de se obter informações sobre o tipo de estrutura que o aluno vê para um dado conjunto de conceitos".

A situação constitui-se como segue:

a) **ação:** os alunos começaram a pensar nas aulas, nas atividades feitas, na introdução histórica, nas aplicações da Álgebra Linear, na recuperação da definição de vetor, suas propriedades artiméticas, representações e passaram a fazer o mapa conceitual da maneira como entenderam a relação entre os conceitos;

b) **formulação:** nessa fase, eles debateram entre si acerca das ligações que aceitaram como verdadeiras, argumentando de modo lógico para convencer os colegas.

c) **validação:** preparando para a institucionalização, o professor/pesquisador fez algumas questões como:

Qualquer conjunto pode ser um espaço vetorial? O que é necessário acontecer? Mesmo sendo um conjunto que não é formado por vetores da geometria ele pode ser considerado um espaço vetorial?

d) **institucionalização:** o professor/pesquisador e os alunos conversaram sobre as ligações dos conceitos sugeridas por estes e aquele procurou ajudar na formação de relações mais compreensíveis e consistentes.

A variável local de que se visou a ocupar-se foi a 6. formação de esquemas adequados.

Na experimentação, foi possível identificar o interesse dos alunos em aprenderem o conteúdo do minicurso. Isso se verificou pela participação deles, nas situações didáticas, de maneira crítica e reflexiva, pelas produções escritas e entrevistas que serão analisados no próximo capítulo.

6 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Este capítulo está dividido em duas partes. A primeira refere-se à análise *a posteriori* que é feita, sobretudo, pelo olhar da TCC. A segunda trata da validação a qual, sendo essencialmente interna, se fará pelo confronto entre a análise *a priori* e a *a posteriori* (ARTIGUE, 1996). Esse confronto sucede-se entre as hipóteses formuladas e os resultados obtidos na fase de experimentação.

6.1 Análise *a posteriori*

Inicialmente, destinando-se uma melhor organização para a investigação dos resultados com foco nas variáveis locais, no Quadro 6 é instituída a correspondência delas com as atividades utilizadas.

Quadro 6 - Correspondência entre as variáveis locais e as atividades

Variáveis locais	Atividades
1. Reconhecimento de vantagens do uso da Álgebra Linear	Visão geral da Álgebra Linear (Anexo C)
2. Abstração de simbologias	1ªSD, 2ªSD, 3ªSD e 4ªSD
3. Representação por registros	1ªSD, 3ªSD e 4ªSD
4. Necessidade de demonstração	1ªSD, 3ªSD e 4ªSD
5. Resolução de exercícios diferentes e com outras estratégias	1ªSD, 3ªSD e 4ªSD
6. Formação de esquemas adequados	2ªSD, 3ªSD, 4ªSD e 5ªSD

SD: situação didática
Obs: As entrevistas forneceram informações, especialmente sobre as variáveis 1, 4 e 6.
Fonte: Autor da pesquisa

Desse modo, o estudo dos dados coletados no minicurso fez-se pelo exame das produções dos alunos acerca das variáveis locais.

Dado que se adotou o acompanhamento dos caminhos de aprendizagem percorridos pelos estudantes, a seguir é feito um estudo das exposições escritas e/ou orais de cada um. Esse estudo foi preparado ocupando-se das variáveis locais.

Ao final, é exibida uma visão global das observações e produções.

Variável local 1 - Reconhecimento de vantagens do uso da Álgebra Linear

Os meios pelos quais se lidou com esta variável foram a atividade do Anexo C que retratou os aspectos históricos sobre a criação, evolução e conceitos envolvidos na Álgebra Linear com suas aplicações e os debates que ocorreram, especialmente na terceira aula.

A investigação desta variável realizou-se pelas entrevistas.

Para isso, o professor/pesquisador adotou, como procedimento, ouvir todas as entrevistas; identificar as falas dos alunos as quais certificaram os ganhos na utilização da Álgebra Linear em face da questão “Você reconhece vantagens no uso da Álgebra Linear?”; transcrever referidas falas e interpretá-las focando a variável local 1.

O aluno A1 reconheceu a aplicação da Álgebra Linear dizendo que ela está presente “... em computadores, em celulares, tecnologias...”.

O aluno A2 relatou o seguinte: “Conforme eu estou aprendendo mais, eu estou conseguindo enxergar maneiras de aplicar a Álgebra Linear em outras áreas que não necessariamente ali na Álgebra, por exemplo, quando tem um sistema pra resolver que não é exatamente da Álgebra. Eu já consigo enxergar aplicação ali...”. Observa-se que ele conseguiu ver a utilização da Álgebra Linear em outros campos do conhecimento.

O aluno A3 contou que “agora tem todas as vantagens fazendo a matéria, eu não sabia que era para tanta coisa”. Recordou-se da primeira situação didática referente à formação das tonalidades das tintas.

O aluno A4 lembrou-se de aplicações assim afirmando: “... nos casos das matrizes mesmo, em que eu posso usar, por exemplo, nas tabelas de preços... você tem que aplicar uma constante. Por exemplo, eu vou aumentar o preço de um trabalho, eu tenho que aplicar. Nesse caso eu consigo visualizar...”.

O aluno A5 mencionou o emprego na geometria analítica: “… resolução de tipos de retas, como elas estão, usando matrizes...”. E acrescentou, também na Física: “…, por exemplo, no equilíbrio de alguma coisa, você tem diversos vetores, a força em diversos pontos, … , precisa de equilíbrio na construção de uma ponte, … , na estática...”. Nota-se que o aluno foi capaz de transpor o conhecimento para outras áreas.

O aluno A6 afirmou que “O minicurso ajudou bastante…. Para mim, aquela Álgebra Linear era só aquilo pra fazer aquelas contas ou resolver os exercícios do livro e pronto. Não tinha tido essa percepção que ia além, que em outras coisas estava implícita a Álgebra...”.

O aluno A7 comentou que “...a gente pode utilizar isso aí em várias coisas que a gente não tinha noção que podia...”, o que evidencia que ampliou a visão sobre a sua aplicação.

O aluno A8 apontou como vantagem o uso de matrizes para calcular os custos das construções de casas quando se tem a quantidade de material necessária e os valores dos materiais envolvidos. Ele destacou que “… você pode fazer isso calculando separadamente. Só que, se você fizer por matriz, é mais organizado, você não se perde nas contas e é mais fácil porque você chega no resultado certinho”. Constata-se a preferência do aluno pela Álgebra Linear mesmo sabendo que é possível calcular sem matrizes.

Assim, infere-se que os alunos perceberam algumas vantagens da utilização da Álgebra Linear, o que possivelmente os ajudou na formação de uma pré-disposição para a aprendizagem desse conhecimento (DORIER et al., 1999). Dessa forma, foram criadas condições favoráveis à superação do obstáculo epistemológico, originado por não se reconhecer os ganhos pelo emprego da Álgebra Linear.

Os recursos que atenderam as demais variáveis foram as cinco situações didáticas, conforme o Quadro 6, e as negociações de significados que se sucederam na quinta, sexta, sétima e oitava aulas.

A investigação decorreu pela análise das exteriorizações escritas e verbais dos alunos.

Variáveis locais: 2 – Abstração de simbologias e 4 – Necessidade de demonstração

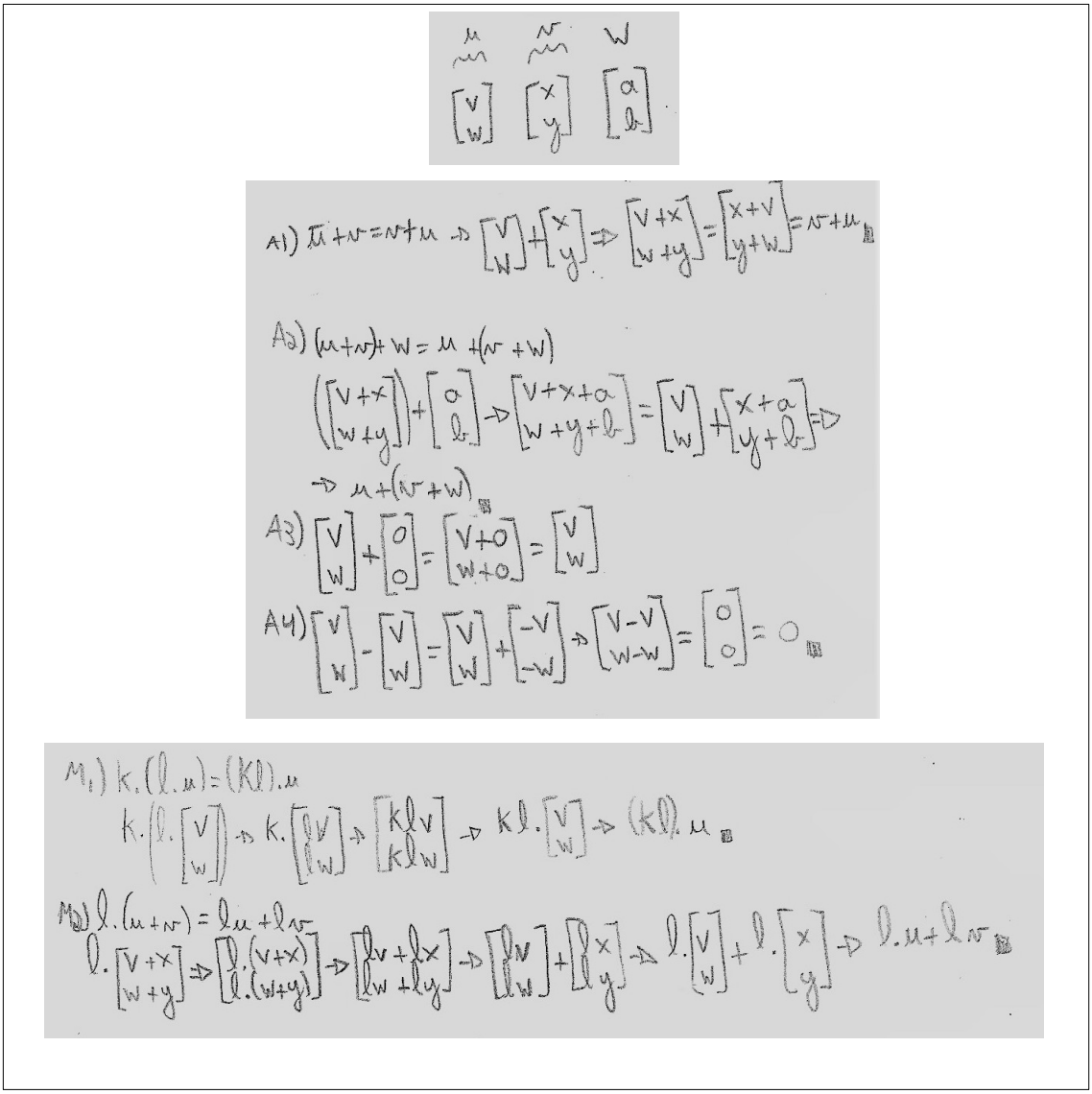
As variáveis 2 e 4 são evidenciadas especialmente na terceira e na quarta situação didática.

Os alunos A2, A4 e A6 deixaram em branco a resolução da terceira situação didática. Já na quarta situação didática, somente o aluno A7 não fez. Em ambas as situações, os que tentaram desenvolver as situações propostas não a

resolveram por completo. Possivelmente, tanto aqueles que não resolveram como os que resolveram parcialmente tiveram dificuldade na formalização matemática exigida e com o escasso tempo disponível para provar os axiomas.

A Figura 35 exibe a verificação dos axiomas pelo aluno A1 na terceira situação didática.

Figura 35 - Resolução do aluno A1 na terceira situação didática



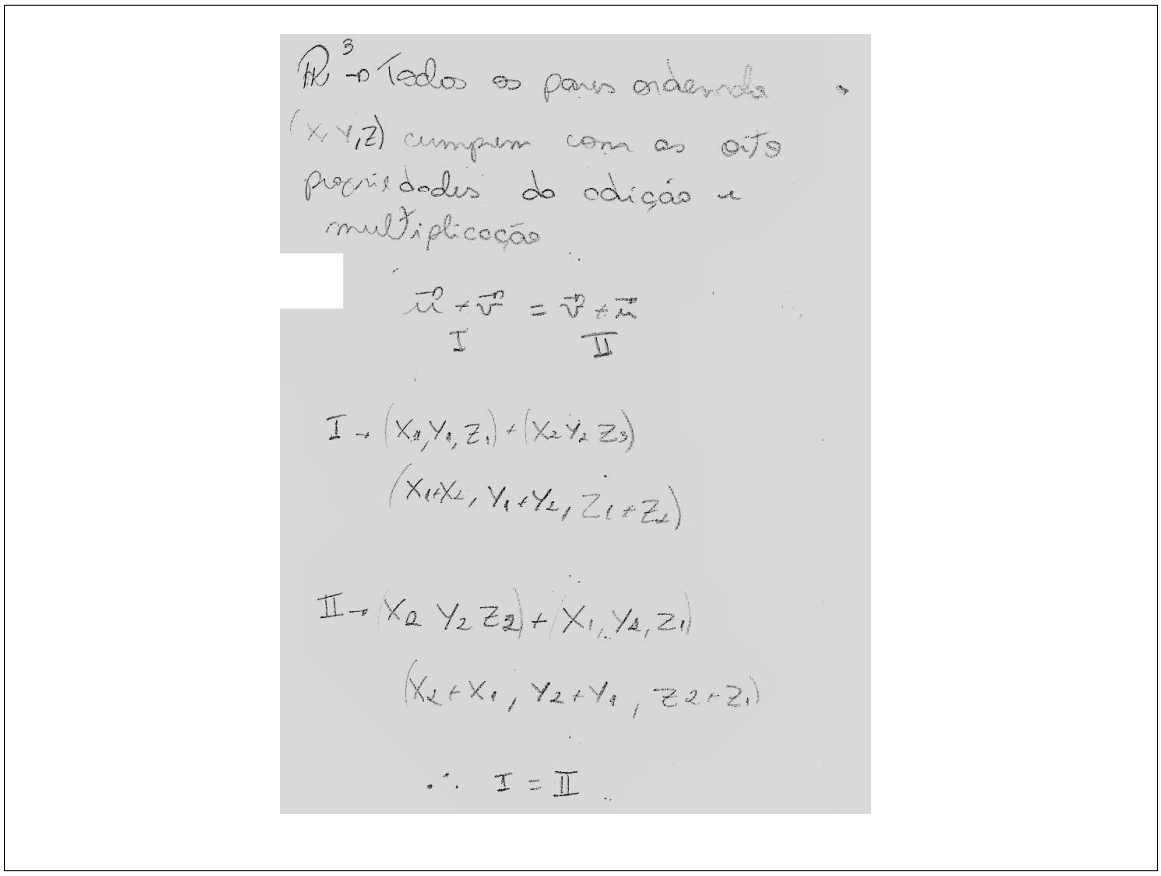
Fonte: Aluno participante da pesquisa

Este aluno resolveu adequadamente a situação proposta. Ele parou a demonstração porque não havia mais tempo para fazê-la. O tempo disponível a tal atividade ficou reduzido em razão de a maioria dos alunos procurar justificar oralmente cada axioma. Pode-se presumir que a tentativa deles em apresentar a resolução de maneira oral (com pouco rigor matemático) esteja relacionada a certa

limitação na demonstração e abstração das figuras simbólicas. Este último obstáculo torna-se mais evidente nas respostas dadas na quarta situação didática. Nesta situação, que solicitou a criação ou a apresentação de um exemplo de espaço vetorial real, apenas foram exemplificados espaços vetoriais formados por matrizes com duas linhas e uma coluna e por vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$.

A Figura 36 mostra a solução dada pelo aluno A8.

Figura 36 - Resolução do aluno A8 da quarta situação didática



Fonte: Aluno participante da pesquisa

O aluno, antes de compor a prova, já afirma que o conjunto dos elementos do $\mathbb{R}^3$ cumprem com as propriedades da adição e da multiplicação, necessárias para serem considerados um espaço vetorial. Inicia, após isso, a demonstração dos axiomas. Essa sequência se justifica devido à fase de formulação na qual os alunos trocaram informações sobre alguns conjuntos que poderiam ser espaços vetoriais.

Mesmo exemplificando com um conjunto de vetores, na parte que trata da variável local 6, verifica-se que ele conseguiu abstrair o conceito para além dos conjuntos formados por vetores.

Diante do esforço dos alunos na demonstração das propriedades e das dificuldades em realizá-la pelo uso da simbologia matemática e exibição de um exemplo distinto daqueles formados por vetores da geometria, é possível constatar que eles reconhecem a necessidade da composição de provas, mas não conseguem fazê-las algebricamente e, de certa forma, abstraí-las.

Variável local 3 – Representação por registros

Esta variável busca identificar a formação dos esquemas, mais precisamente se ocorreu aprendizagem significativa por meio da análise dos diferentes registros produzidos pelos alunos. E dessa forma tratar, principalmente, do constrangimento na decifração dos significados das representações analíticas envolvidas na definição de espaço vetorial.

Os registros dos alunos, encontrados na 1ªSD, 3ªSD, 4ªSD e durante as aulas, foram, de maneira geral, a linguagem natural, a escrita e as expressões matemáticas (axiomas). Não houve, praticamente, representações geométricas.

Com referência a mudança entre tais registros, elas foram realizadas com certa dificuldade e, em sua maioria, de maneira incompleta.

Pode-se dizer que existiram sinais de compreensão e de aprendizagem em relação ao conceito versado. O tratamento da variável local 6 (formação de esquemas adequados), que será feito adiante, reforçará essa interpretação pois respectivos sinais, embora ocorram em maior intensidade em alguns alunos do que em outros, na generalidade se mostraram relativamente satisfatórios.

Variável local 5 – Resolução de exercícios diferentes e com outras estratégias

Inicialmente, em relação a esta variável, após a observação dos resultados obtidos na experimentação, faz-se necessário dividi-la em duas partes: resolução de exercícios diferentes e resolução de exercícios com outras estratégias. Essa separação deve-se à constatação de que as ações não ocorreram de forma conjunta.

Examinando tais ações, cujo suporte foram as resoluções da 1ªSD, 3ªSD e 4ªSD, é possível afirmar que os alunos conseguiram realizar as atividades da 1ªSD, a qual contemplava uma situação contextualizada, e as da 3ªSD e da 4ªSD,

as quais tratavam, mais precisamente, da definição e generalização do conceito de espaço vetorial. No entanto, as respostas obtidas não apresentaram outras estratégias, ou seja, era esperado que, pelo menos, ocorressem resoluções com representações geométricas por meio de vetores, o que não existiu. As soluções se restringiram ao uso de expressões algébricas e de explicações orais no decorrer das aulas.

Portanto, constatou-se que os alunos foram capazes de resolver exercícios diferentes, mas não empregaram estratégias distintas para isso.

Variável local 6 – Formação de esquemas adequados

Já a variável 6 (formação de esquemas adequados), uma vez tendo como um de seus elementos os invariantes operatórios, permeia, praticamente, todas as situações didáticas.

Para o acompanhamento da construção do conceito de espaço vetorial empreendeu-se a TCC.

E como feito na dimensão cognitiva no Capítulo 3, o Quadro 7, que se refere ao conceito de espaço vetorial, foi concebido segundo as categorias propostas por Vergnaud. Assim, dispôs-se o conceito tendo em vista as situações, os invariantes operatórios e as representações.

Os “conceitos em ação” e os “teoremas em ação” do quadro são aqueles considerados pelo autor como necessários para dar conta das situações propostas.

Quadro 7 - Conceito de espaço vetorial

Espaço vetorial		
Situações	Invariantes operatórios	Representações
- Operações de soma entre os elementos de um conjunto - Operações de subtração entre os elementos de um conjunto - Multiplicação dos elementos de um conjunto por escalar - Verificação das propriedades aritméticas da adição e multiplicação por escalar de vetores entre elementos de um conjunto	“Conceitos em ação”: - existem conjuntos de elementos $\mathbf{V}$ que satisfazem as propriedades da adição: A1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ A2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ A3) $\exists\vec{0};\ \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ A4) $\exists(-\vec{u});\ \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ e as propriedades da multiplicação por escalar:	- Dado um espaço vetorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$, tem-se: I – Existe uma adição $(\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto\mathbf{u}+\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$, com as propriedades da adição de vetores. II – Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R}\,x\,\mathbf{V}$ em $\mathbf{V}$, com as propriedades da multiplicação por escalar de vetores.

- Associação de conjuntos que apresentam a mesma estrutura que os vetores da geometria, em relação a adição e multiplicação por escalar - Abstração e generalização das características do espaço vetorial	M1) $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$ M2) $l(\vec{u}+\vec{v}) = l\vec{u}+l\vec{v}$ M3) $(k+l)\vec{v} = k\vec{v}+l\vec{v}$ M4) $1\vec{u} = \vec{u}$ para quaisquer $\vec{u}+\vec{v}$ de **V** e k, l de $\mathbb{R}$. - espaço vetorial: é um conjunto de elementos que se comportam como vetores em relação às operações de adição e multiplicação (cumprem com as propriedades acima);	
	"Teoremas em ação": - os elementos de um espaço vetorial respeitam as propriedades da adição: comutativa, associativa, elemento neutro e oposto; - os elementos de um espaço vetorial respeitam as propriedades da multiplicação: associativa em relação aos escalares, distributiva em relação à adição de vetores, distributiva em relação à adição de escalares e elemento neutro.	

Fonte: Autor da pesquisa

No Quadro 8 consta o que foi levado em consideração pelo professor/pesquisador, em cada situação didática e nas entrevistas, para averiguar a formação dos conhecimentos em ação sobre espaço vetorial.

Quadro 8 – Aspectos adotados para verificação da formação dos conhecimentos em ação

Aluno	**Conhecimentos em ação**
	Conceitos em ação
- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar. 1ª SD Questões: - O resultado seria diferente se, em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? - Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,	

$$(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (\quad , \quad) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- E multiplicado, ou seja,

$$__ \, x\,(\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- Definição de espaço vetorial

Entrevistas

Questão 4 – O que é um espaço vetorial?

Análise

Pelas questões escolhidas da 1ª SD, buscou-se identificar se o aluno reconhece algumas propriedades da aritmética vetorial. Já na questão 4 da entrevista, procurou-se, de maneira objetiva, verificar se o aprendiz tinha noção da definição de espaço vetorial.

Teoremas em ação

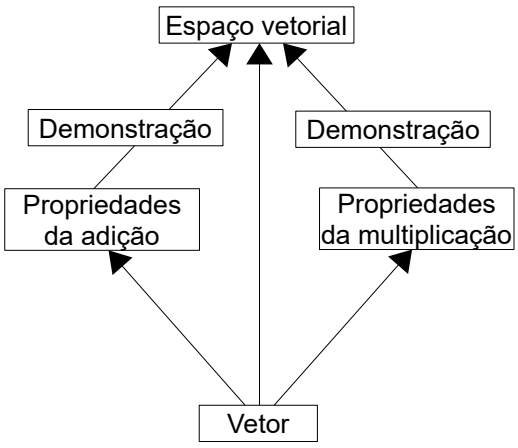
Relação entre os conceitos em ação

2ª SD

Operações entre vetores e multiplicação por escalar
Obs: utilização do cálculo relacional

5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.
Como exemplo de um mapa conceitual, é exibido o seguinte:



O critério adotado para o reconhecimento de uma estrutura conceitual adequada foi a presença dos conceitos de vetor, espaço vetorial, demonstração, propriedades da adição de vetores e multiplicação por escalar da aritmética vetorial. Além desses conceitos, foram levadas em conta as relações entre eles.

A 3ª SD (semelhanças das operações entre vetores e matrizes) e a 4ª SD (generalização do conceito de espaço vetorial) foram estudadas de maneira geral e não individual. Essa escolha foi feita em razão de os alunos se expressarem, essencialmente, em conjunto em relação aos aspectos envolvidos.

Análise

Neste campo foi analisado se o aluno estabeleceu proposições adequadas entre os conceitos em ação.

Análise geral
Por fim, foi verificado se os conhecimentos em ação formaram invariantes operatórios satisfatórios, sinalizando uma possível aprendizagem do conceito de espaço vetorial.

SD: situação didática

Fonte: Autor da pesquisa

Uma das ferramentas para a análise dos teoremas em ação será o cálculo relacional, utilizada no exercício 3 da 2ª SD. O estudo foi feito tendo como referência os resultados obtidos no exercício 8 da atividade inicial (Anexo A), investigados no Capítulo 3 na dimensão cognitiva.

A abordagem será feita como segue:

3. Sejam $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Resolva:
a) $\vec{u}-\vec{w}$
Cálculo relacional
De cada componente de $\vec{u}$ é somado o oposto aditivo do valor da respectiva componente de $\vec{w}$, ou seja, $\vec{u}-\vec{w}=(u_1,u_2,u_3)+(-(w_1,w_2,w_3))=(u_1-w_1,u_2-w_2,u_3-w_3)=(s_1,s_2,s_3)=\vec{s}$, onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.
Esquema
b) $\vec{u}+2\vec{v}$
Cálculo relacional
Cada componente de $\vec{u}$, é adicionada à respectiva componente de $\vec{v}$, multiplicada por 2, ou seja, $2\vec{v}=2(v_1,v_2,v_3)=(2v_1,2v_2,2v_3)$, implica que $\vec{u}+2\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(2v_1,2v_2,2v_3)=$ onde $\vec{s}$ é o vetor resultante.
Esquema
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional
Cada componente de $\vec{v}$ é o quíntuplo das respectivas componentes de $\vec{t}$. Assim, para se determinar $\vec{t}$, tem-se $\vec{t}=\frac{1}{5}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{5}(5t_1,5t_2,5t_3)=\frac{1}{5}5(t_1,t_2,t_3)=(t_1,t_2,t_3).$
Esquema
$1 \rightarrow \vec{t}$ $5 \rightarrow \vec{v}=5\vec{t}$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional
$\vec{w}$ é um múltiplo de $\vec{u}$. Podendo ser calculada essa quantidade como:

$\vec{w} = k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) = k(u_1, u_2, u_3); \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $x = k$.
Esquema
$1 \rightarrow \vec{u}$ $x \rightarrow k\vec{u}$

Fonte: Autor da pesquisa

Na sequência, o Quadro 9 expõe a compreensão do conceito de espaço vetorial por cada aluno, depreendida de suas respostas. Como já mencionado, a escolha pelo acompanhamento da produção individual se fez necessária em virtude da intenção de se verificarem os caminhos de aprendizagem percorridos por eles.

Quadro 9 – Compreensão do conceito de espaço vetorial pelos alunos

A1	**Conhecimentos em ação**
Conceitos em ação	
- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.	
O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos. $(2,3)+(3,1) = [(2+3, 3+1)] = (5,4)$ $(3,1)+(2,3) = [(3+2), (1+3)] = (5,4)$ ∴ O resultado é igual. Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja, $(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (\bigcirc, \bigcirc) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$ E multiplicado, ou seja, $1 \times (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$	
- Definição de espaço vetorial O que é um espaço vetorial? "É qualquer conjunto de números reais que obedece às propriedades de adição e da multiplicação da aritmética vetorial."	
Análise	
O aluno demonstrou ter conhecimento da propriedade comutativa da adição, da existência do elemento neutro da adição e da multiplicação. Na definição, restringindo os espaços vetoriais ao conjunto de números reais, ele manifestou uma limitação quanto a esse conceito em ação.	

Teoremas em ação

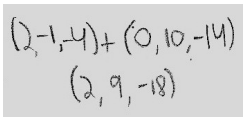
2ª SD

Operações entre vetores e multiplicação por escalar

8. Sejam $\vec{u}=(2,-1,-4)$, $\vec{v}=(0,5,-7)$ e $\vec{w}=(6,-3,-12)$. Resolva:

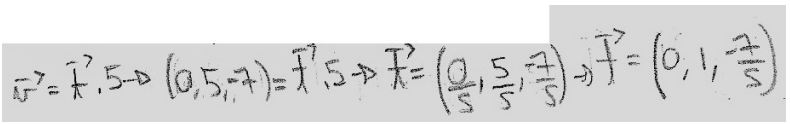
b) $\vec{u}+2\vec{v}$

Cálculo relacional



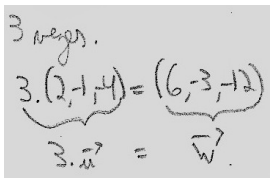
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional



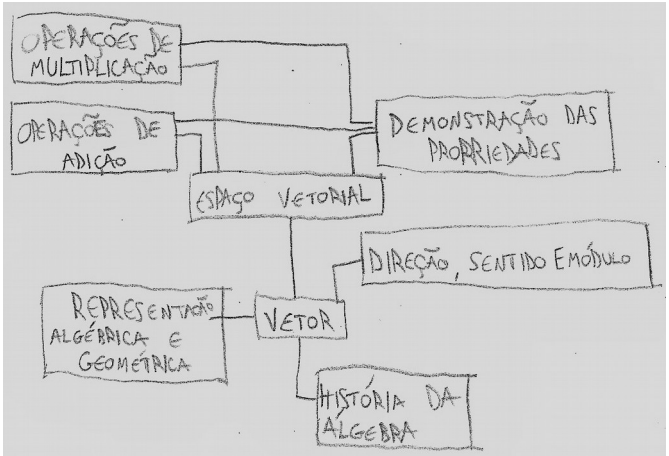
Análise

Como no exercício 8 da atividade do Anexo A, o aluno demonstrou reconhecer que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam as propriedades aritméticas. Esta é uma proposição verdadeira (teorema em ação verdadeiro).

5ª SD

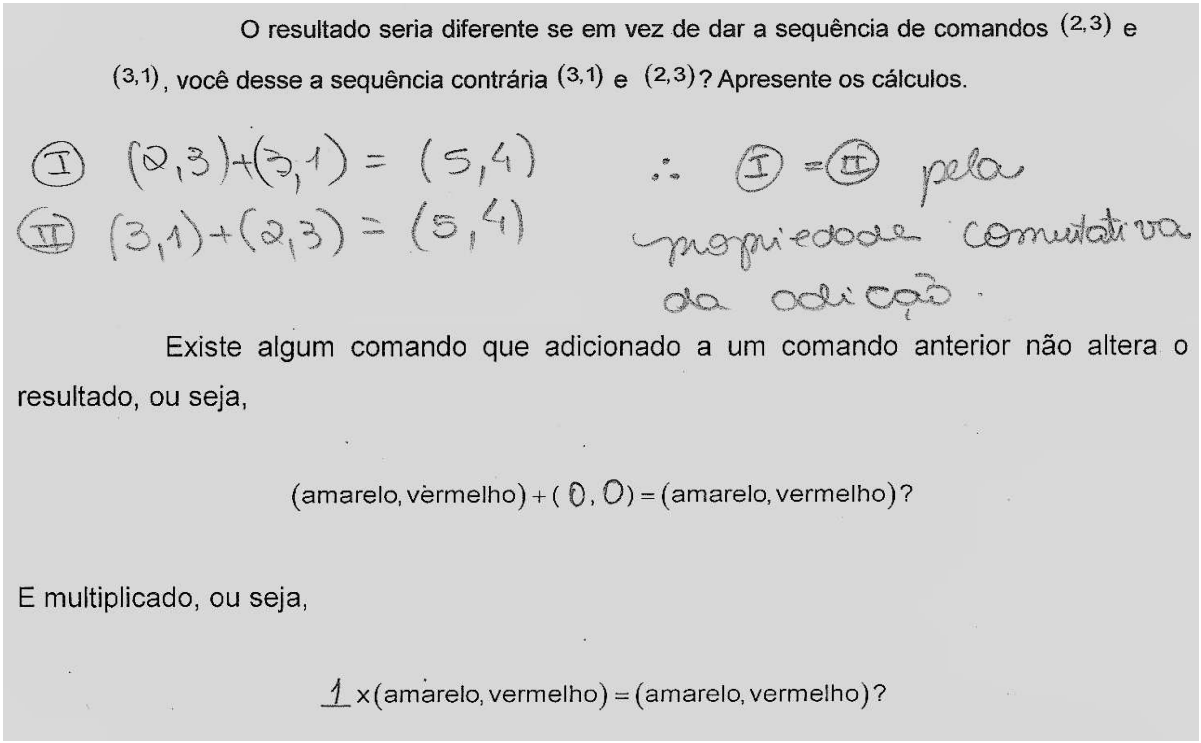
Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

Mapa conceitual



Análise
Estão presentes todos os conceitos desejados (vetor, espaço vetorial, demonstração, propriedades da adição e da multiplicação). Ele acrescentou a representação algébrica, geométrica, a história da Álgebra e as características de um vetor. Pelas ligações feitas, é possível presumir que o aluno reconheceu a importância da contextualização histórica e da demonstração para formar o conceito de espaço vetorial.
Análise geral
Acompanhando as produções do aluno, é possível inferir que, apesar de ter restringido a definição de espaço vetorial ao conjunto de números reais, ele identificou as propriedades necessárias à sua existência. O que também é demonstrado no mapa conceitual. Com isso, pode-se constatar uma provável aprendizagem do conceito do espaço vetorial.

A2	**Conhecimentos em ação**
Conceitos em ação	



O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

(I) $(2,3)+(3,1)=(5,4)$

(II) $(3,1)+(2,3)=(5,4)$

∴ (I) = (II) pela propriedade comutativa da adição.

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$$(\text{amarelo, vermelho})+(0,0)=(\text{amarelo, vermelho})?$$

E multiplicado, ou seja,

$$1 \times (\text{amarelo, vermelho})=(\text{amarelo, vermelho})?$$

- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.- Definição de espaço vetorial

O que é um espaço vetorial?

"… tem que verificar...aquelas propriedades lá da adição, da multiplicação… Para ser espaço vetorial ela tem que corresponder a todas aquelas operações… comutativa, distributiva...

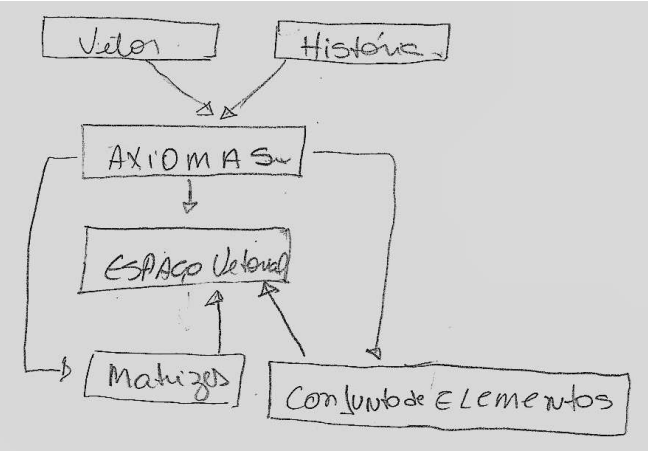
Análise
O aluno evidenciou o conhecimento da propriedade comutativa da adição, registrando-a por escrito na resposta da questão, da existência do elemento neutro da adição e da multiplicação. Na entrevista, ele teve um pouco de dificuldade para lembrar a definição de espaço vetorial, demonstrando que não estava claro e estável, em sua estrutura cognitiva, esse conceito em ação.
Teoremas em ação
2ª SD Operações entre vetores e multiplicação por escalar
8. Sejam $\vec{u}=(2,-1,-4)$, $\vec{v}=(0,5,-7)$ e $\vec{w}=(6,-3,-12)$. Resolva:
b) $\vec{u}+2\vec{v}$

Cálculo relacional
$(2,-1,-4)+2(0,5,-7) = (2,-1,-4)+(0,10,-14) = (2,9,-18)$
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.
Cálculo relacional
$\vec{v}(0,5,-7) \quad t = \frac{\vec{v}}{5}(0,1,-\frac{7}{5})$
d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional
$\frac{\vec{u}=(2,-1,-4)}{\vec{w}=(6,-3,-12} = 3$
Análise
Diferente do que havia feito no exercício 8 da atividade do Anexo A, o aluno resolveu corretamente os exercícios. Isso indica que, possivelmente, após o tratamento dado pelo organizador prévio, ele passou a caracterizar as operações entre vetores e escalar e vetores de forma adequada (teorema em ação verdadeiro).

5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

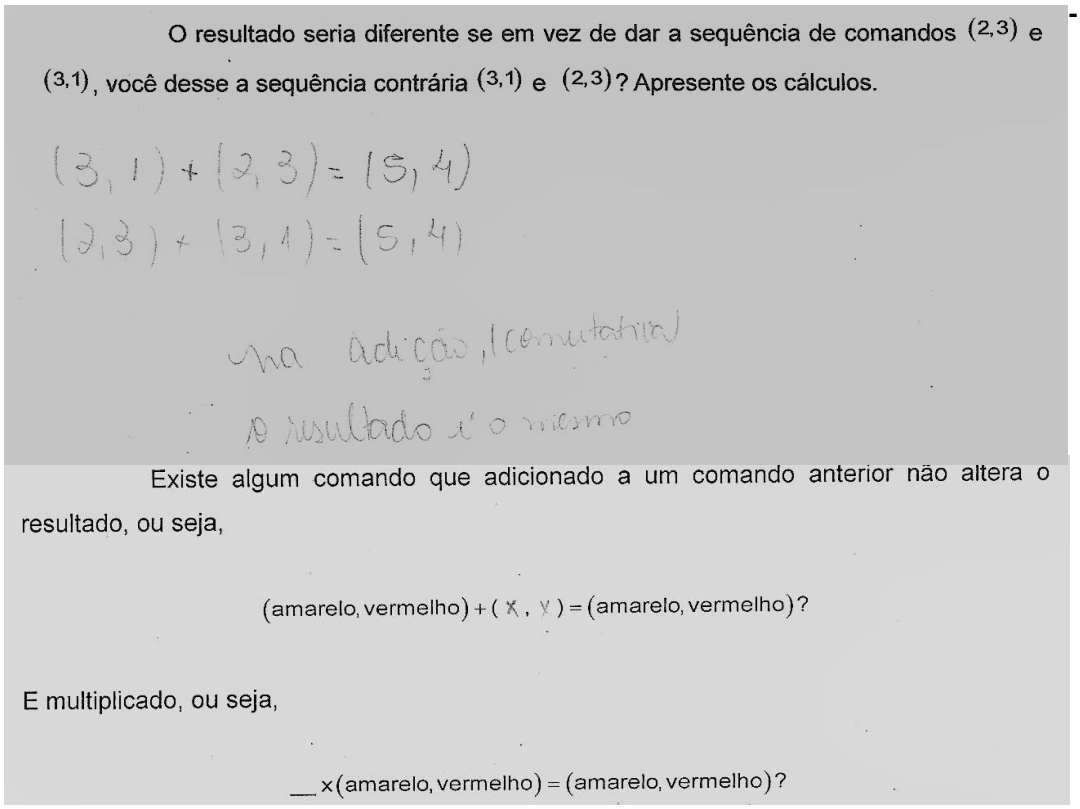
Mapa conceitual



Análise
Dos conceitos desejados (vetor, espaço vetorial, demonstração, propriedades da adição e da multiplicação) apenas faltou o da demonstração. Dentro dos axiomas, entendem-se contempladas as propriedades almejadas. O aluno, como A1, também exibiu um retângulo destacando a história. As relações realizadas mostram, como se esperava, uma convergência dos conceitos e assuntos para o conceito de espaço vetorial.
Análise geral
Mesmo na entrevista tendo dificuldade para definir espaço vetorial, observou-se uma evolução no reconhecimento das propriedades trabalhadas. No mapa, ele apontou os principais conceitos abordados e deu sinais (relações indicadas entre os conceitos) de alguma compreensão sobre espaço vetorial.

A3	Conhecimentos em ação

Conceitos em ação



Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.- Definição de espaço vetorial

O que é um espaço vetorial?“ ...são os conjuntos não vazios que têm os vetores dentro…” “(verificar) se tinha as propriedades...de tamanho...módulo...isso é de vetor...”

Análise

Este aluno, como o anterior, revelou conhecimento da propriedade comutativa da adição, registrando-a por escrito na resposta da questão. No entanto, na parte que trata da existência do elemento neutro da adição, respondeu genericamente e não respondeu a parte do elemento neutro da multiplicação. Pode-se inferir que para ele ainda não estão compreensíveis os conceitos em ação envolvidos. Isso, possivelmente comprometerá a formação dos teoremas em ação.

Na transcrição feita, verifica-se uma confusão entre espaço vetorial e vetores. Essa é percebida pelo aluno, entretanto, ele não consegue distingui-los.

Teoremas em ação

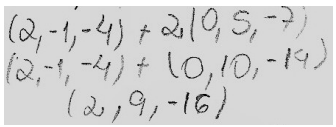
2ª SD

Operações entre vetores e multiplicação por escalar

8. Sejam $\vec{u} = (2,-1,-4)$, $\vec{v} = (0,5,-7)$ e $\vec{w} = (6,-3,-12)$. Resolva:

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

Cálculo relacional

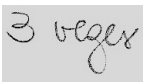


c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional



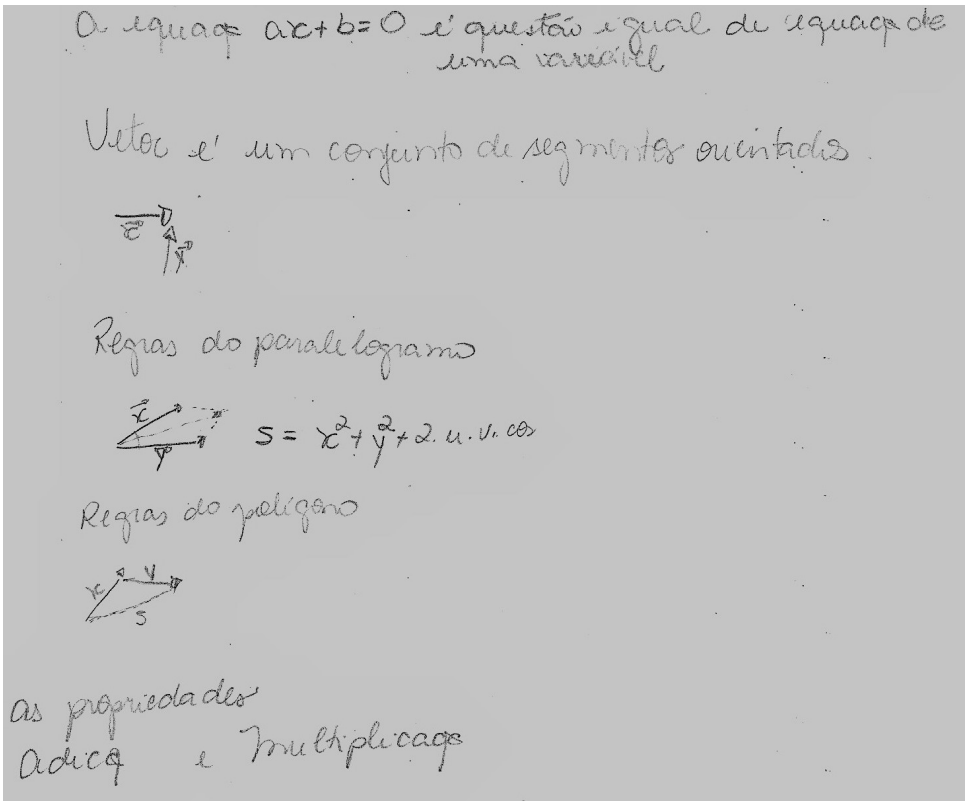
Análise

Na letra c, o aluno teve dificuldade para compreender o que foi solicitado. Na letra d, apenas foi dada a resposta, prejudicando a análise. Como no exercício 8 da atividade do Anexo A ele apresentou as mesmas limitações, presume-se que ainda não tenha formado o teorema em ação verdadeiro em relação às operações envolvidas nas questões.

5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

Mapa conceitual



Análise

O aluno não esboçou um mapa conceitual propriamente dito. Apenas apontou alguns conceitos de forma vaga e sem precisar uma relação entre eles. Pelo exposto, pode-se inferir que não ficaram discrimináveis e seguros, na sua estrutura cognitiva, os conceitos e as associações que os envolvem.

Análise geral
Por fim, pode-se deduzir que o aluno não conseguiu compreender satisfatoriamente o conceito de espaço vetorial. Isso se deve, provavelmente, pela não formação dos conceitos em ação adequados, o que comprometeu a constituição dos teoremas em ação e, em consequência, do referido conceito.

A4	**Conhecimentos em ação**
Conceitos em ação	

- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.

O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

1º TOM LARANJA = $(3,1)$
2º TOM LARANJA = $(2,3)$
} MISTURA $\Rightarrow (3,1)+(2,3) \Rightarrow ((3+2),(1+3)) \Rightarrow (5,4)$

∴ o resultado seria o mesmo.

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

(amarelo, vermelho) + (0, 0) = (amarelo, vermelho)?
Pela propriedade elemento neutro da adição.

E multiplicado, ou seja,

1 x (amarelo, vermelho) = (amarelo, vermelho)?
pela propriedade do elemento neutro da multiplicação

- Definição de espaço vetorial

O que é um espaço vetorial?

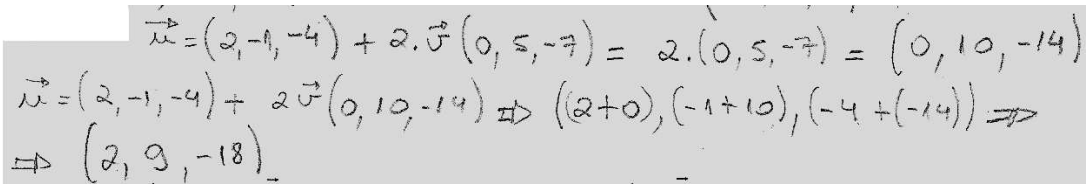
“Ficou muito gravado pra mim,…, que o espaço vetorial é quando ele atende as propriedades tanto da adição quanto da multiplicação. Até lembro de você falando, se tiver uma que não atinge não é espaço vetorial.”

Análise
O aluno, além da resolução numérica, reconheceu as propriedades, indicando que possui os conceitos em ação abordados. Pela resposta do que é espaço vetorial, ele revelou ter claras as condições para um conjunto ser assim considerado.

Teoremas em ação
2ª SD Operações entre vetores e multiplicação por escalar

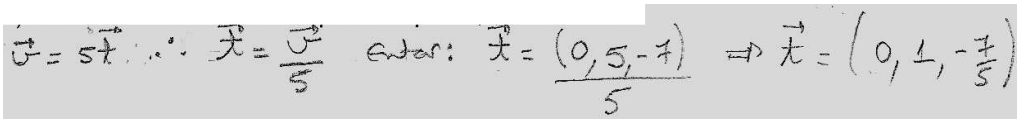
8. Sejam $\vec{u}=(2,-1,-4)$, $\vec{v}=(0,5,-7)$ e $\vec{w}=(6,-3,-12)$. Resolva:
b) $\vec{u}+2\vec{v}$

Cálculo relacional



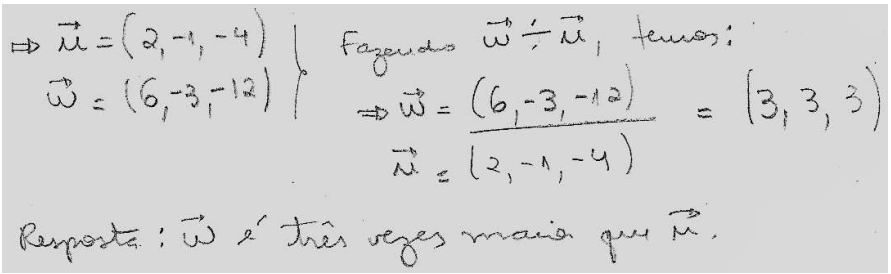
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional



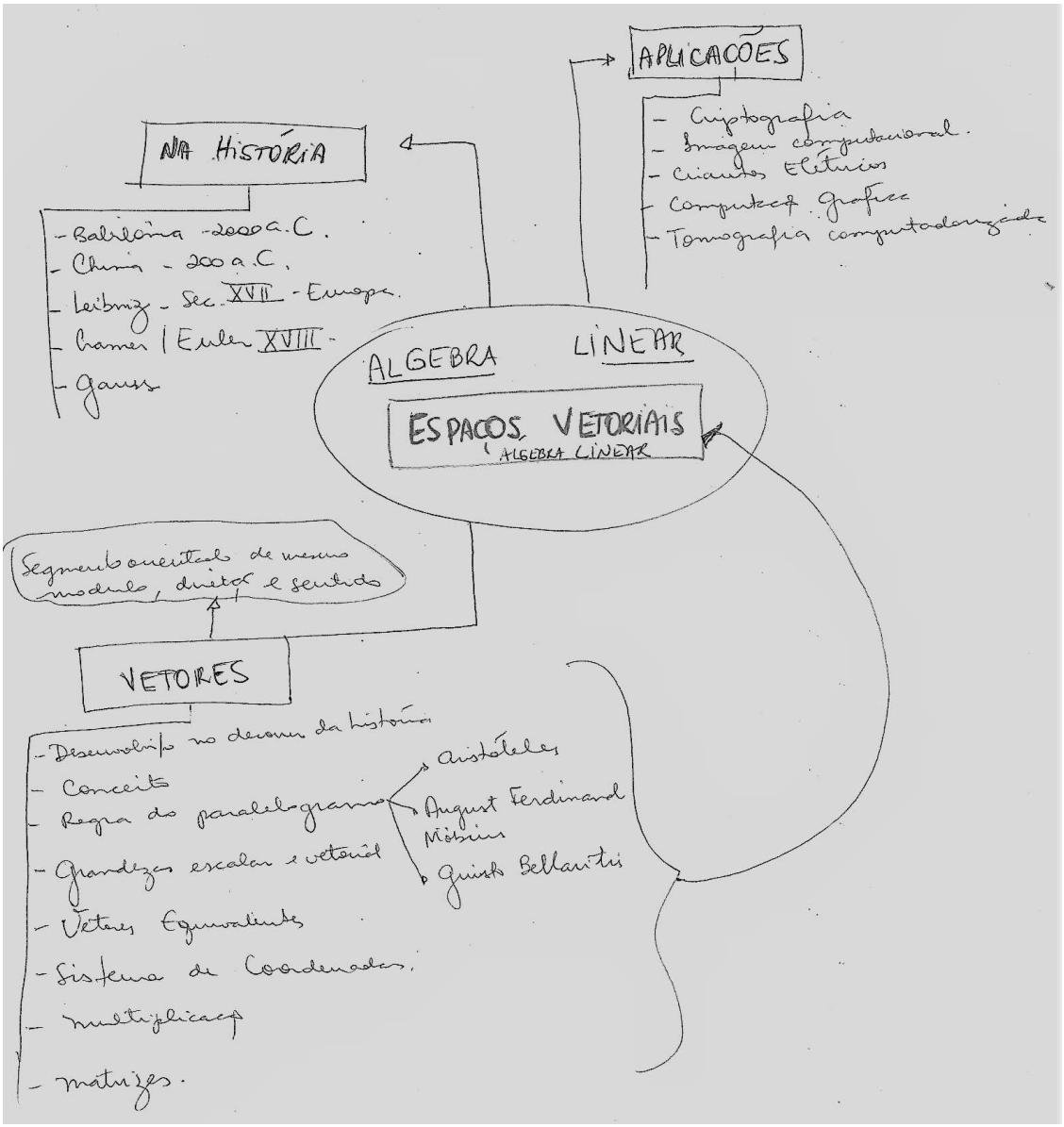
Análise

Assim como no exercício 8 da atividade do Anexo A, ele resolveu corretamente os exercícios. Demonstrou reconhecer que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas, a qual é uma proposição verdadeira (teorema em ação verdadeiro).

5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

Mapa conceitual



Análise
No mapa, dos conceitos esperados, encontra-se apenas o de vetor e espaço vetorial. O aluno contemplou a história e algumas aplicações, indicando uma correspondência entre eles. Há a ausência das propriedades da adição de vetores e da multiplicação por escalar.
Análise geral
O aluno demonstrou a formação dos conhecimentos em ação almejados. Embora em seu mapa conceitual não aparecerem as propriedades necessárias à existência de um espaço vetorial, na entrevista constatou-se que ele reconhece a exigência delas. Portanto, pode-se considerar que ocorreu alguma compreensão do conceito de espaço vetorial.

A5	**Conhecimentos em ação**
Conceitos em ação	
- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.	

O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

I $(2,0)(0,3) = (2+0, 0+3) = (2,3)$

II $(0,3)(2,0) = (0+2, 3+0) = (2,3)$

$\therefore$ I = II

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$$(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (0,0) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

E multiplicado, ou seja,

$$1 \times (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- Definição de espaço vetorial
O que é um espaço vetorial?
"É o espaço de atuação do vetor pela direção e o sentido..."

Análise

O aluno não conseguiu identificar a propriedade comutativa envolvida na questão inicial. Possivelmente por não entender o que foi pedido, pois ele verificou a propriedade utilizando outros pares ordenados. Em seguida, mostrou conhecer as propriedades de elemento neutro da adição e multiplicação.
Na entrevista, o aluno não conseguiu definir espaço vetorial. Pela frase transcrita, pode-se constatar essa dificuldade.

Teoremas em ação

2ª SD
Operações entre vetores e multiplicação por escalar

8. Sejam $\vec{u} = (2,-1,-4)$, $\vec{v} = (0,5,-7)$ e $\vec{w} = (6,-3,-12)$. Resolva:

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

Cálculo relacional

$\vec{u} + 2\vec{v} \Rightarrow (2,-1,-4) + 2(0,5,-7) \Rightarrow (2,-1,-4) + (2\cdot 0, 2\cdot 5, 2\cdot(-7)) \Rightarrow$
$(2,-1,-4) + (0,-2,-14) \Rightarrow (2+0, -1+(-2), -4+(-14)) = (2,-3,18)$

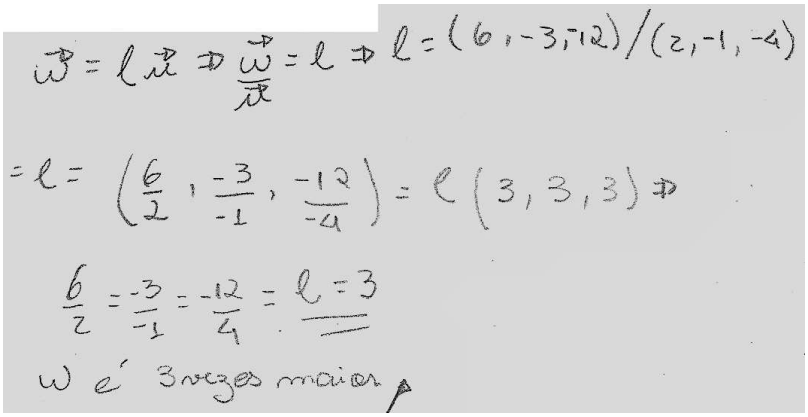
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional

$\vec{v} = \vec{t} \cdot 5 \Rightarrow \frac{\vec{v}}{5} = \vec{t} \Rightarrow \left(\frac{0}{5}, \frac{5}{5}, \frac{-7}{5}\right) = \vec{t} \Rightarrow \vec{t} = \left(0, 1, -\frac{7}{5}\right)$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional



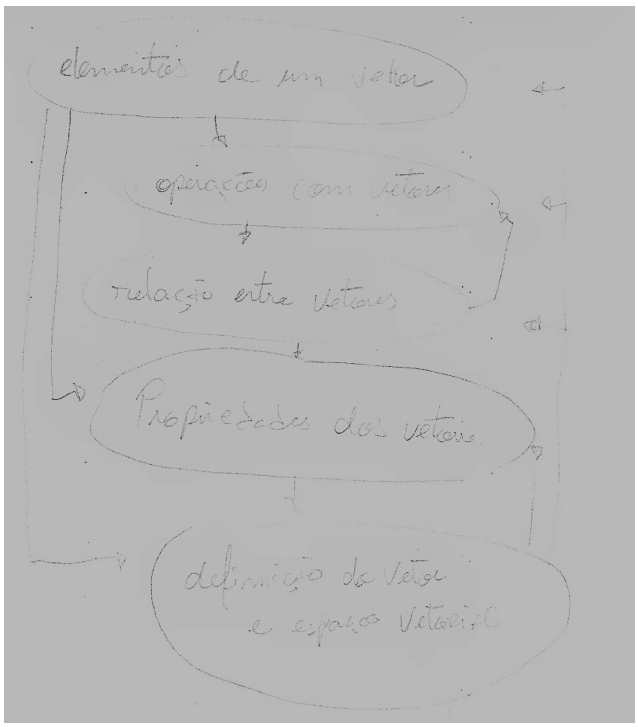
Análise

Apesar de cometer um erro de cálculo na letra d, o aluno demonstrou reconhecer que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas, sendo esta uma proposição verdadeira (teorema em ação verdadeiro).

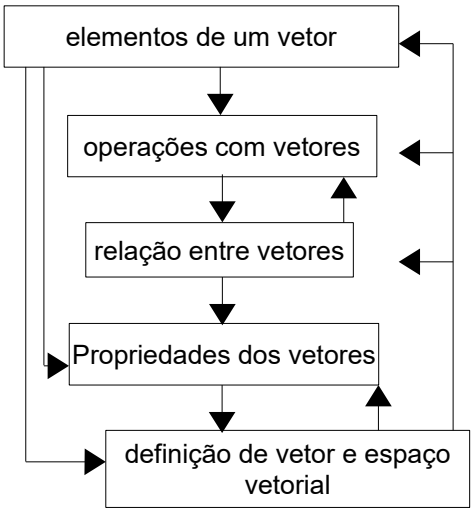
5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

Mapa conceitual



Para melhor visualização, o mapa é reproduzido em seguida.



Análise

Dos conceitos esperados (vetor, espaço vetorial, demonstração, propriedades da adição e da multiplicação), está ausente o da demonstração. É assinalada uma relação entre todos os conceitos (setas), apontando a percepção, pelo aluno, de uma estrita aproximação deles.

Análise geral

Verifica-se que os seus conhecimentos em ação se encontram em formação. Pela entrevista, parece que ainda não estão claros e disponíveis em sua mente. Portanto, o conceito de espaço vetorial até então não se constituiu satisfatoriamente.

A6	**Conhecimentos em ação**
	Conceitos em ação

- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.

O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

$(3,1)+(2,3)=(3+2,1+3)=(5,4)$

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$$(\text{amarelo, vermelho})+(0,0)=(\text{amarelo, vermelho})?$$

E multiplicado, ou seja,

$$1\times(\text{amarelo, vermelho})=(\text{amarelo, vermelho})?$$

- Definição de espaço vetorial
Parte da entrevista entre o professor/pesquisador e o aluno A6.
- O que é um espaço vetorial?
- ...eram quatro (propriedades)… adição, subtração e a multiplicação por escalar...
- Para ser espaço vetorial, o que precisa acontecer?
- Cumprir todas essas, essas propriedades, fiquei com isso na cabeça. Eu tentei achar uma que não cumpria...
- Mesmo um conjunto que não seja de vetores, se cumprir (as propriedades), a gente pode falar que é espaço vetorial?
- Sim. Se cumpriu, podemos falar que é espaço vetorial.
- Mesmo que seja de polinômios?
- Mas polinômio não vai…
- Uma vez cumprindo…
- Fixou na minha cabeça que se ele cumpriu … pode falar que ele é espaço vetorial…

Análise

Este aluno demonstrou ter conhecimento da propriedade comutativa da adição, da existência do elemento neutro da adição e da multiplicação.
Do diálogo pode-se inferir que o aluno "fixou" a necessidade de os elementos de um conjunto satisfazerem as propriedades de adição de vetores e de multiplicação por escalar para que seja admitido como espaço vetorial. Mesmo não apresentando de imediato esse conceito em ação, o aprendiz expôs ter alguma compreensão a respeito dele.

Teoremas em ação

2ª SD
Operações entre vetores e multiplicação por escalar

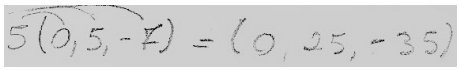
8. Sejam $\vec{u}=(2,-1,-4)$, $\vec{v}=(0,5,-7)$ e $\vec{w}=(6,-3,-12)$. Resolva:

b) $\vec{u}+2\vec{v}$

Cálculo relacional

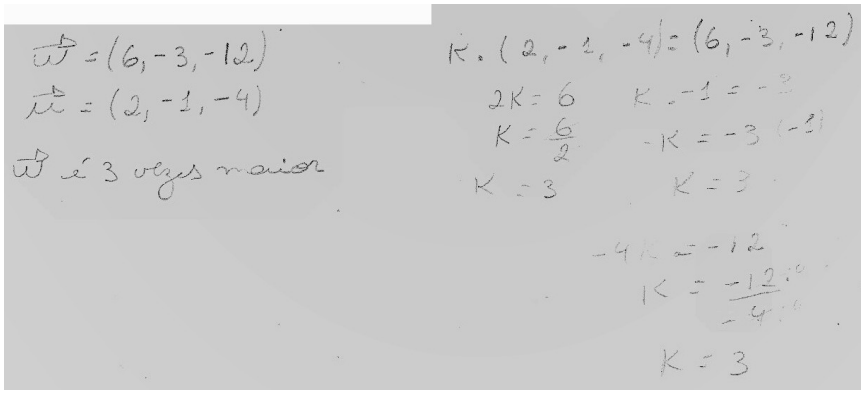
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

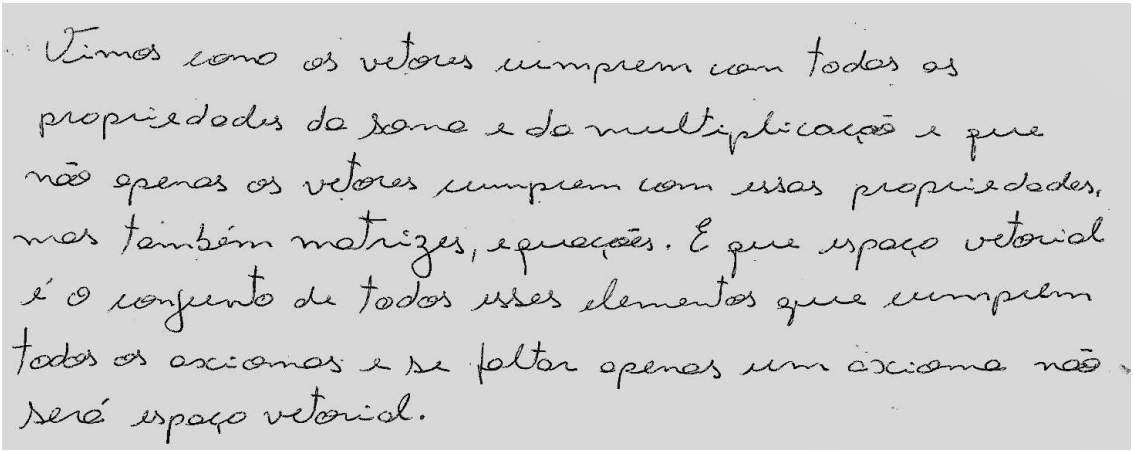
Cálculo relacional



Análise
Na letra c, o aluno teve dificuldade para compreender o que foi exposto. Como no exercício 8 da atividade do Anexo A ele apresentou a mesma limitação, presume-se que ainda não tenha formado o teorema em ação verdadeiro referente à operação envolvida na alternativa.

5ª SD

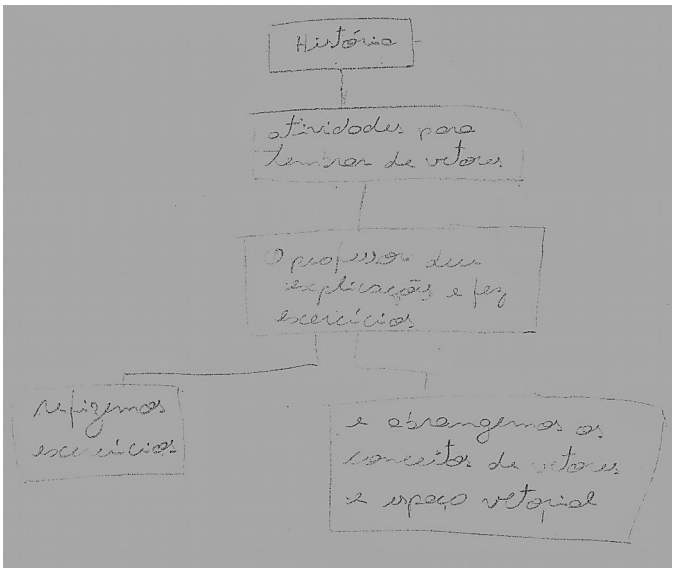
Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.
Antes do mapa conceitual o aluno fez o seguinte texto:


Vimos como os vetores cumprem com todas as propriedades da soma e da multiplicação e que não apenas os vetores cumprem com essas propriedades, mas também matrizes, equações. E que espaço vetorial é o conjunto de todos esses elementos que cumprem todos os axiomas e se faltar apenas um axioma não será espaço vetorial.

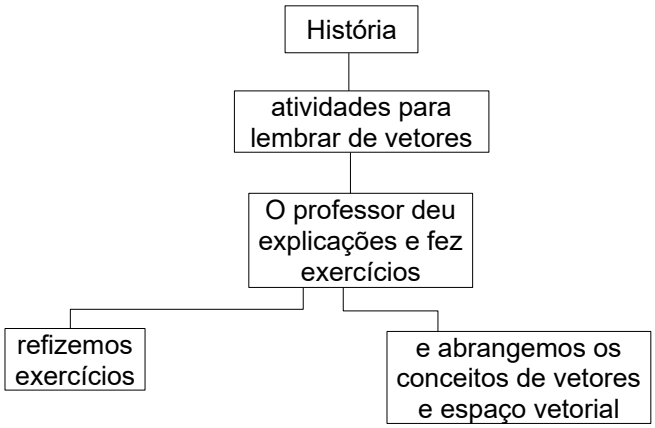
A transcrição do texto é:

“Vimos como os vetores cumprem com todas as propriedades da soma e da multiplicação e que não apenas os vetores cumprem com essas propriedades, mas também matrizes, equações. E que espaço vetorial é o conjunto de todos esses elementos que cumprem todos os axiomas e se faltar apenas um axioma não será espaço vetorial”.

Mapa conceitual



Para melhor visualização, o mapa é reproduzido em seguida.



Análise

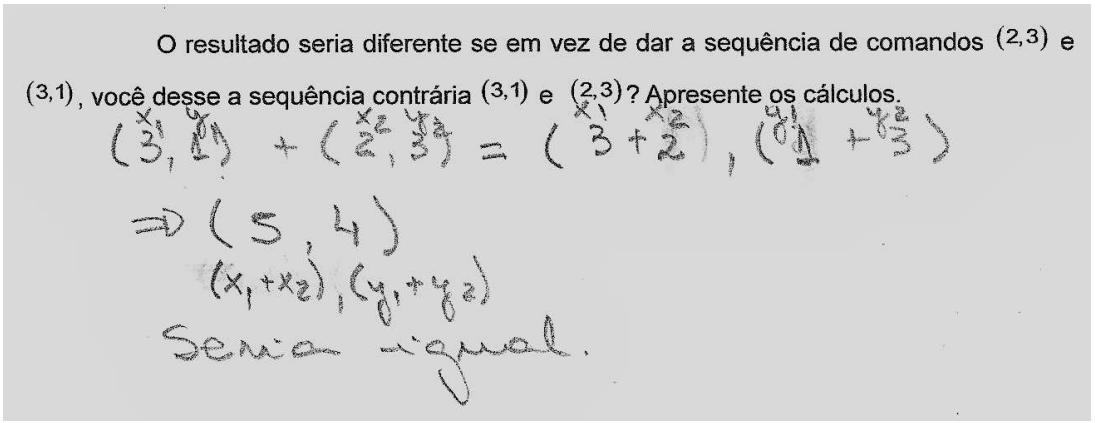
O mapa traz a sequência das aulas destacando a história da Álgebra Linear e a presença dos conceitos de vetor e espaço vetorial. Embora não exibidos no mapa, pelo texto apresentado o aluno relatou a necessidade de se verificar "todos os axiomas" (propriedades e demonstração) para um conjunto ser considerado espaço vetorial. Também abstraiu essa condição escrevendo que "não apenas os vetores", mas outros conjuntos que satisfaçam os axiomas são espaços vetoriais.

Análise geral

Pode-se deduzir, das análises anteriores, que o estudante tinha clara a necessidade da verificação das propriedades de adição de vetores e de multiplicação por escalar para um conjunto ser chamado de espaço vetorial. No entanto, possivelmente ele apresentou alguma dificuldade para na resolução da letra c do exercício 8 por não ter formado o teorema em ação verdadeiro referente a operação envolvida.

A7	**Conhecimentos em ação**
	Conceitos em ação

- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.


O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

$(3,1) + (2,3) = (3+2, 1+3)$

$\Rightarrow (5, 4)$

$(x_1+x_2), (y_1+y_2)$

Seria igual.

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$$(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (0, 0) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

E multiplicado, ou seja,

$$1 \times (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

- Definição de espaço vetorial

Parte da entrevista entre o professor/pesquisador e o aluno A7.

- O que é um espaço vetorial?
- …
- Você lembra que a gente trabalhou com algumas propriedades?
- Sim.
- Quantas propriedades são ... da adição?
- São quatro propriedades.
- E da multiplicação?
- São quatro também.
- Um conjunto, para ele ser espaço vetorial ... o que precisa acontecer com os elementos desse conjunto...?
- Eles teriam que estar enquadrados entre as quatro?

Análise

O aluno A7 demonstrou ter conhecimento da propriedade comutativa da adição, da existência do elemento neutro da adição e da multiplicação.
No início da entrevista, ele mencionou ter dificuldade para se lembrar dos assuntos estudados, o que se verificou também em relação ao conceito de espaço vetorial.

Teoremas em ação

2ª SD
Operações entre vetores e multiplicação por escalar.

8. Sejam $\vec{u} = (2, -1, -4)$, $\vec{v} = (0, 5, -7)$ e $\vec{w} = (6, -3, -12)$. Resolva:

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

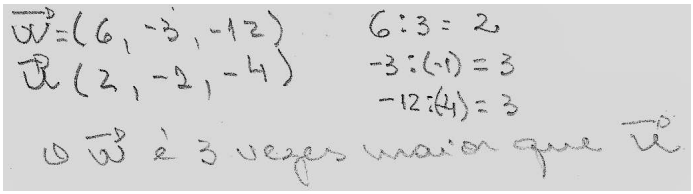
Cálculo relacional

$$(2,-1,-4) + 2(0,5,-7)$$
$$(2,-1,-4) + (0,10,-14) = (2,9,-18)$$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional

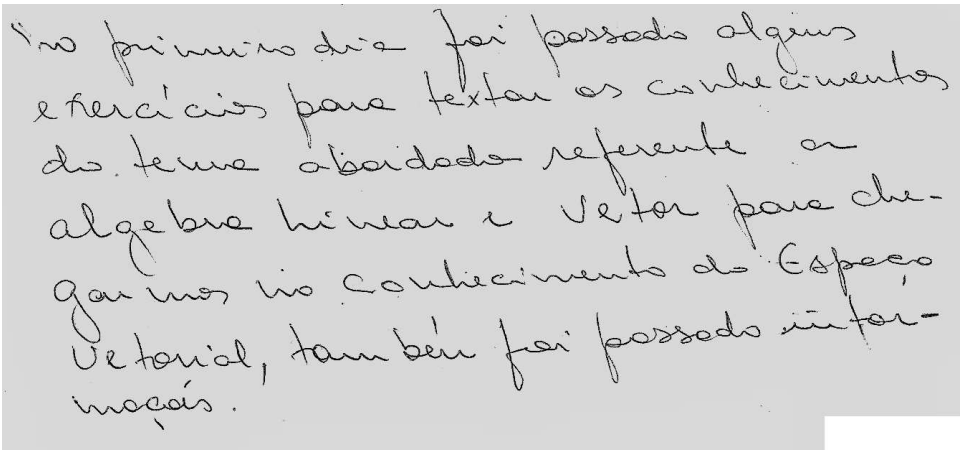
$$\vec{v} = \vec{t} \times 5 = 5\vec{t} = (0{,}25, -35)$$

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?
Cálculo relacional

Análise
No exercício 8 da atividade do Anexo A, o aluno deixou indicada a resolução correta da questão. Como na letra c ele apresentou a resolução errada, presume-se que ainda não tenha formado o teorema em ação verdadeiro referente à operação envolvida na alternativa.

5ª SD

Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

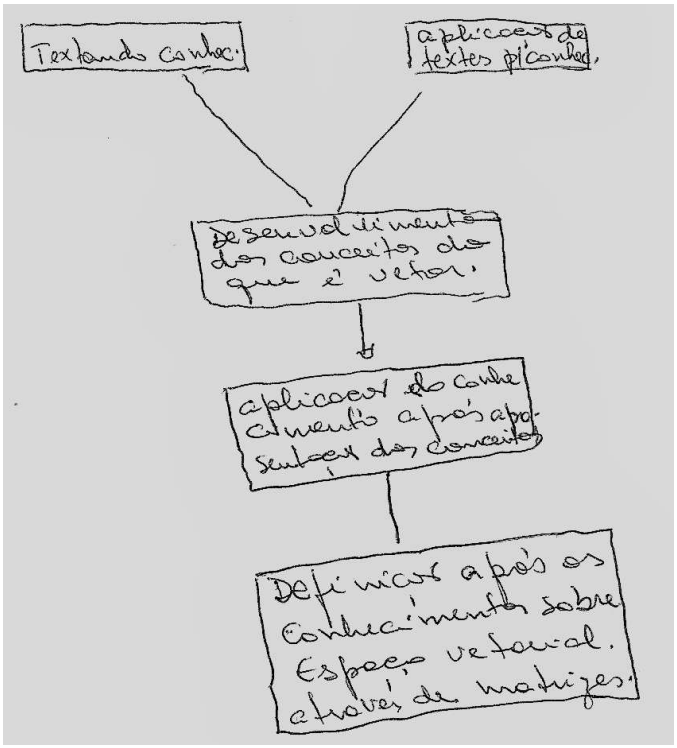
Antes do mapa conceitual, o aluno fez o seguinte texto:



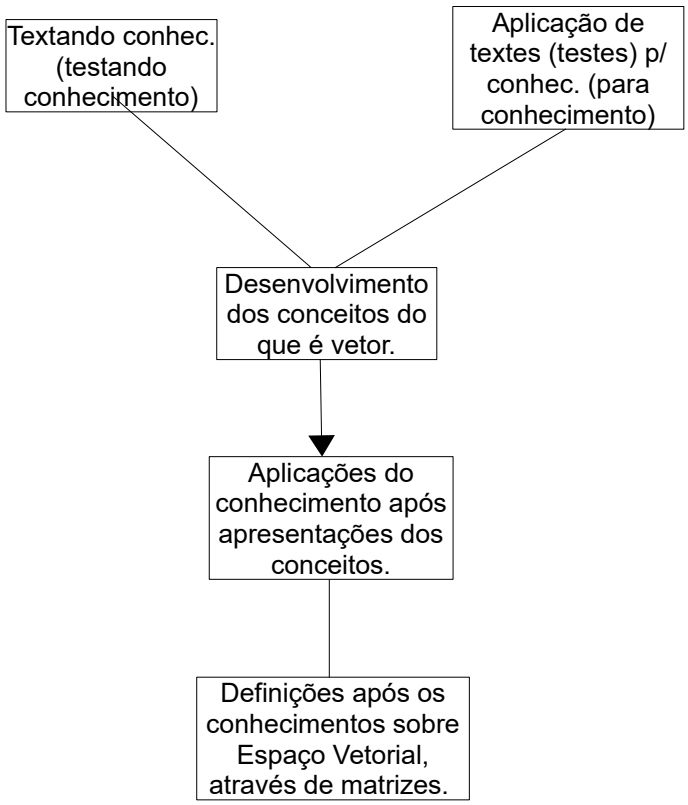
A transcrição do texto é:

“No primeiro dia foi passado (foram passados) alguns exercícios para textar (testar) os conhecimentos do tema abordado referente a algebra (álgebra) linear e vetor para chegarmos no conhecimento do Espaço Vetorial, também foi passado (foram passadas) informações”.

Mapa conceitual



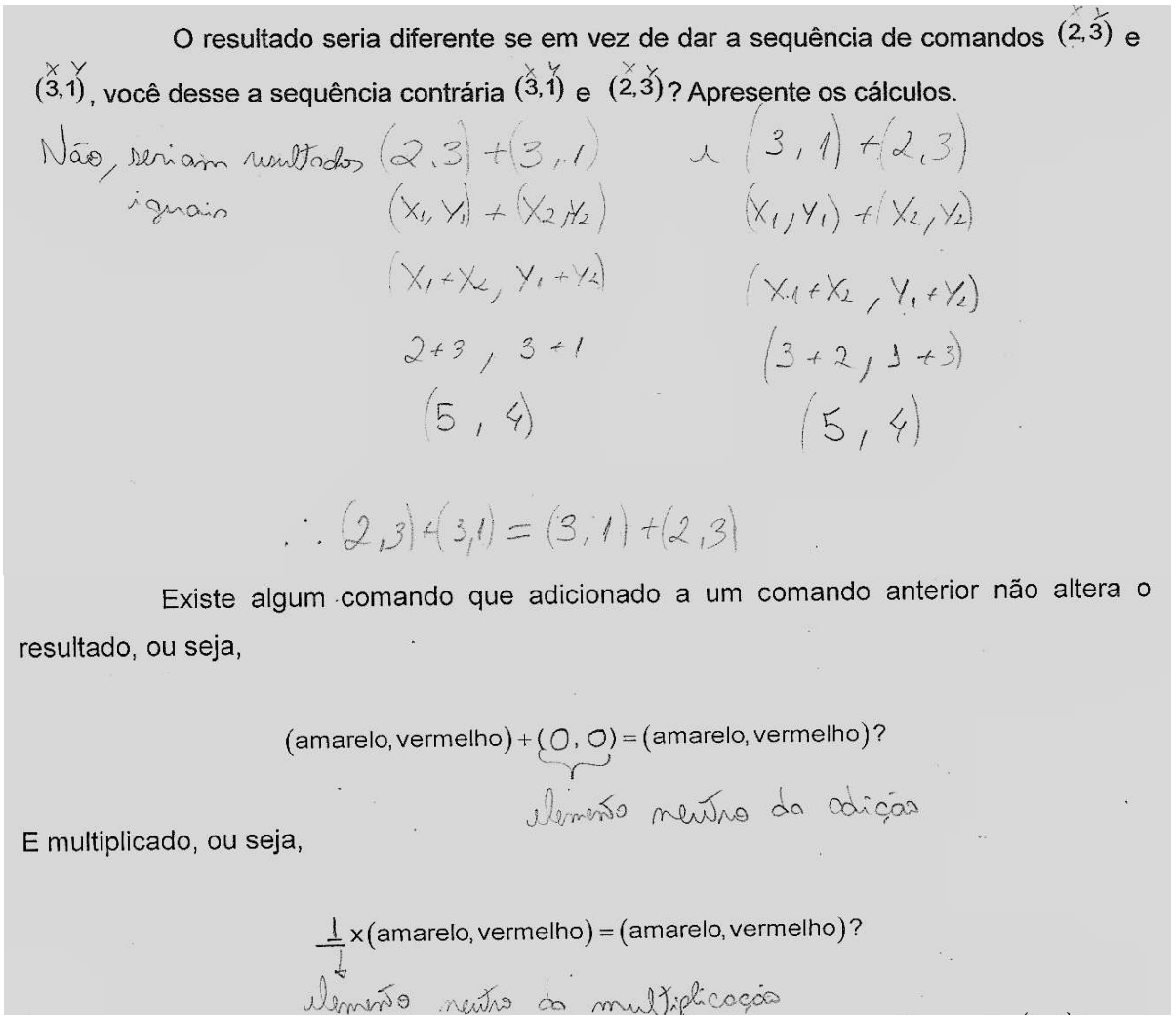
Para melhor visualização, o mapa é reproduzido em seguida.



Análise
No mapa, há a presença dos conceitos de vetor e espaço vetorial. No entanto, ele não demonstrou a estrutura cognitiva formada pelo aluno, uma vez que, pelo texto inicial e o mapa, se verifica que foi apenas exibida a sequência das aulas do minicurso.
Análise geral
Pelas análises do caminho de aprendizagem deste aluno, constatam-se limitações na formação dos conhecimentos trabalhados, e o mapa conceitual feito atesta essas dificuldades. Portanto, pode-se deduzir que não ocorreu a aprendizagem significativa do conceito de espaço vetorial pelo aprendiz.

A8	**Conhecimentos em ação**
Conceitos em ação	

- Existem conjuntos de elementos que cumprem com as propriedades da adição vetorial e multiplicação por escalar.


O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(\overset{x}{2},\overset{y}{3})$ e $(\overset{x}{3},\overset{y}{1})$, você desse a sequência contrária $(\overset{x}{3},\overset{y}{1})$ e $(\overset{x}{2},\overset{y}{3})$? Apresente os cálculos.

Não, seriam resultados iguais

$(2,3)+(3,1)$ e $(3,1)+(2,3)$

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$ $\quad$ $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$

$(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ $\quad$ $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$2+3,\ 3+1$ $\quad$ $(3+2,\ 1+3)$

$(5,4)$ $\quad$ $(5,4)$

$\therefore (2,3)+(3,1)=(3,1)+(2,3)$

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$(\text{amarelo},\text{vermelho})+(0,0)=(\text{amarelo},\text{vermelho})?$

elemento neutro da adição

E multiplicado, ou seja,

$1\times(\text{amarelo},\text{vermelho})=(\text{amarelo},\text{vermelho})?$

elemento neutro da multiplicação

- Definição de espaço vetorial

Parte da entrevista entre o professor/pesquisador e o aluno A8.

- O que é um espaço vetorial?
- Espaço vetorial é um conjunto de elementos que tem as propriedades da adição e da multiplicação. Se a gente pegasse as propriedades e aplicasse e desse certo, era um espaço vetorial.
- Independente de ser (um conjunto formado por) vetor ou não?
- Independente de ser vetor ou não,…, pode ser até de matrizes … cumprindo aquelas propriedades…

Análise

Este aluno, além da resolução numérica, reconheceu as propriedades. Na primeira questão, demonstrou a existência da propriedade comutativa da adição. Isso dá sinais de que os conceitos em ação encontram-se claros na sua estrutura cognitiva.
Pode-se depreender do diálogo que ele possui o conceito em ação de maneira clara, a ponto de abstrair além dos conjuntos dos vetores que cumprem as propriedades necessárias.

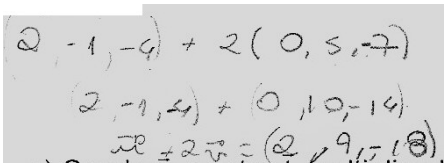
Teoremas em ação

2ª SD
Operações entre vetores e multiplicação por escalar

8. Sejam $\vec{u}=(2,-1,-4)$, $\vec{v}=(0,5,-7)$ e $\vec{w}=(6,-3,-12)$. Resolva:

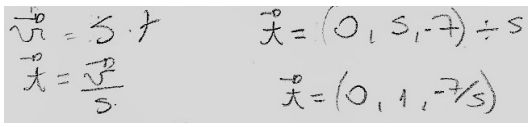
b) $\vec{u}+2\vec{v}$

Cálculo relacional



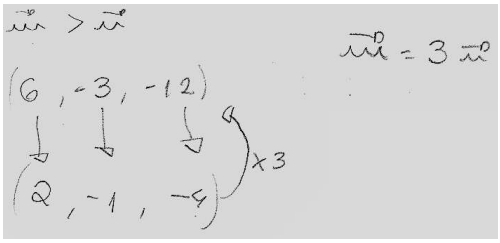
c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

Cálculo relacional



d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

Cálculo relacional

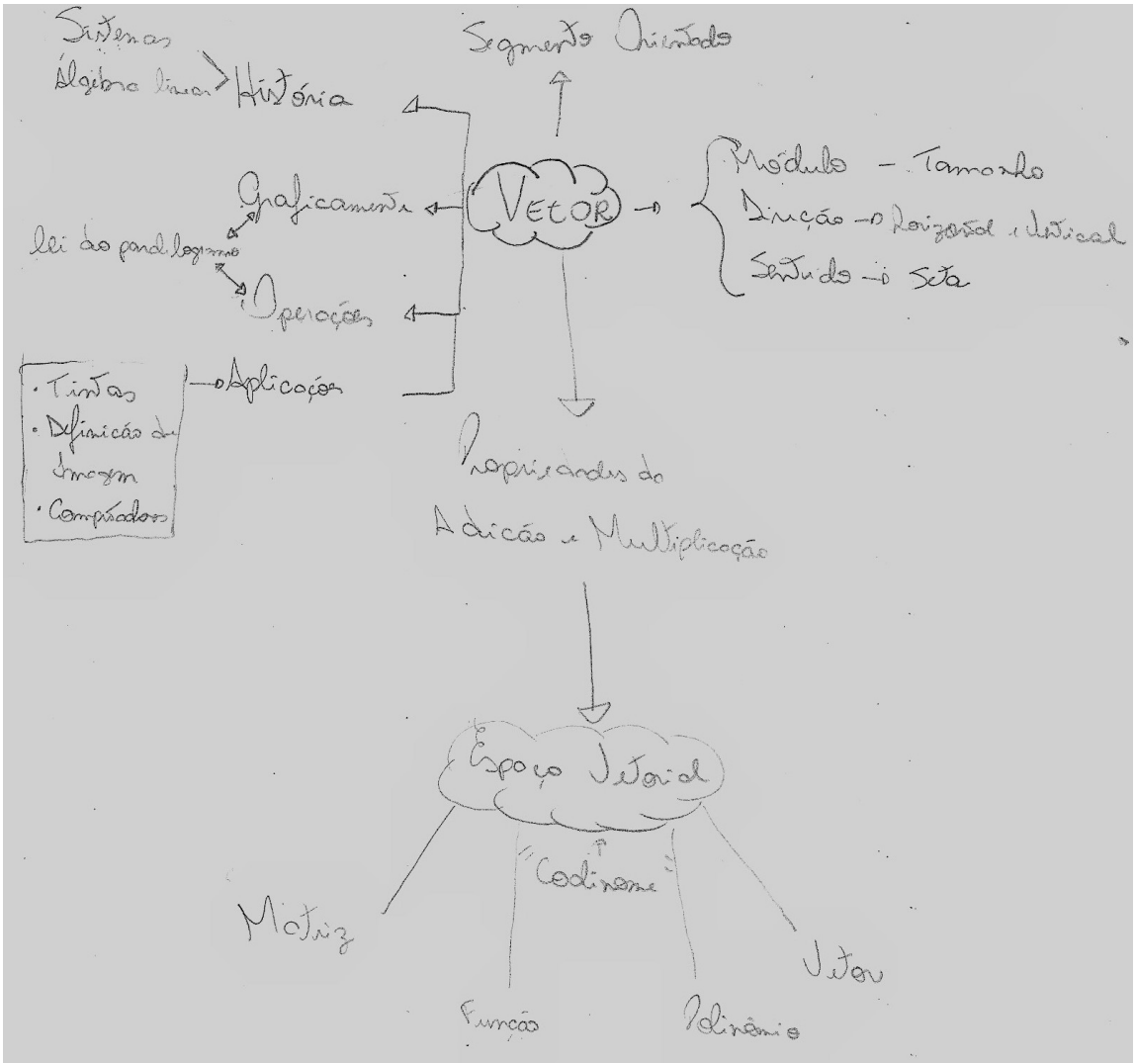


Análise

O aluno resolveu corretamente todas as alternativas, como havia feito no exercício 8 da atividade do Anexo A. Reconhece que as operações entre vetores e escalar e vetores respeitam propriedades aritméticas, sendo esta uma proposição verdadeira (teorema em ação verdadeiro).

5ª SD
Relações estabelecidas pelos alunos. Indicativos da estrutura cognitiva formada.

Mapa conceitual



Análise
Dos conceitos desejados (vetor, espaço vetorial, demonstração, propriedades da adição e da multiplicação), apenas faltou o da demonstração. Dentro dos axiomas, entendem-se contempladas as propriedades almejadas. O aluno ainda citou a história da Álgebra Linear, as operações com vetores, as aplicações e as características dos vetores. Relacionou todos esses conceitos ao do espaço vetorial o qual, como exibido, pode ser de matrizes, funções, polinômios, vetores...
Análise geral
O aluno deu indicativos de ter formado tanto os conceitos em ação como os teoremas em ação esperados. A entrevista e o mapa conceitual vêm respaldar essa constatação. Pode-se perceber que ocorreu a construção do conceito de espaço vetorial de maneira relativamente clara e estável.

Assim, fazendo um levantamento das análises gerais dessa variável tem se que, conforme os critérios adotados, os alunos A1, A2, A4 e A8 formaram o conceito de espaço vetorial como esperado. Já os alunos A3, A5 e A7 demonstraram dificuldades, seja na formação dos conceitos em ação, seja nos teoremas em ação o

que, consequentemente, levou a uma aprendizagem que não pode ser considerada significativa. E por fim, o aluno A6 apresentou um conhecimento organizado até certo ponto (necessário verificar as propriedades de adição de vetores e de multiplicação por escalar para um conjunto ser chamado de espaço vetorial) e limitação no tocante à demonstração das propriedades do espaço vetorial. Isso foi identificado devido à não formação do teorema em ação verdadeiro por ele.

Os indícios de aprendizagem reconhecidos sinalizam que os alunos, incluindo os que revelaram uma melhor compreensão, estão em processo de constituição do conceito de espaço vetorial. Isso se verifica, possivelmente, em virtude da necessidade de maior quantidade de situações para que o aprendiz experimente diferentes condutas e esquemas e, dessa forma, consiga que o conceito se torne mais claro e estável.

Em consonância a isso, Vergnaud (1996, p. 165) afirma que

> […] a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada através de situações variadas, e o investigador deve analisar uma grande variedade de condutas e de esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito [...]

Pode-se afirmar que, de forma geral, ocorreu aprendizagem significativa, mas é preciso haver mais atividades e mais tempo para a compreensão do conceito de espaço vetorial.

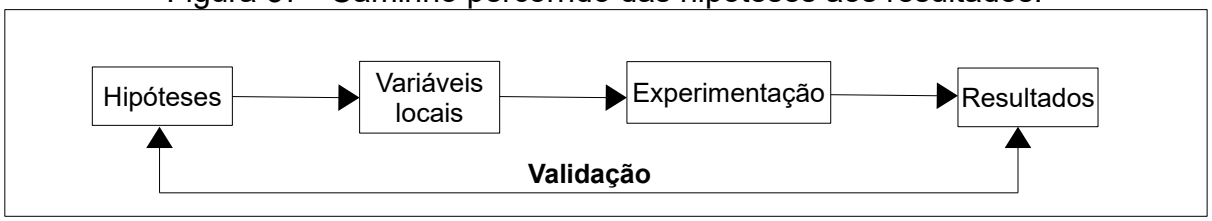
Essas necessidades podem ser contempladas durante o curso de Álgebra Linear, o qual lida com espaço vetorial o tempo todo.

6.2 Validação

A validação, como já citado anteriormente, é feita pela confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.* Isso se realiza entre as hipóteses formuladas e os resultados obtidos na fase de experimentação.

Esquematicamente, a Figura 37 exibe o caminho percorrido das hipóteses aos resultados.

Figura 37 - Caminho percorrido das hipóteses aos resultados.



Fonte: Autor da pesquisa

As hipóteses tiveram origem, basicamente, nos constrangimentos caracterizados nas análises prévias e motivaram as variáveis locais. Estas serviram como parâmetro à análise dos resultados obtidos na experimentação.

Na presente pesquisa, o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* (validação) consiste em investigar o que foi considerado nas hipóteses e o que, na experimentação, sofreu perturbações, deixando de ser válido[37]. Para isso, será feita uma análise de cada hipótese em relação ao resultado obtido e estudado na seção anterior.

A hipótese 1 que se refere à percepção das vantagens do uso da Álgebra Linear é considerada válida. Os alunos exteriorizaram, por meio de suas falas, o reconhecimento dos benefícios na utilização da Álgebra Linear ao resolverem questões matemáticas. A presença dos aspectos históricos e aplicações em vários mapas conceituais também demonstram essa percepção.

A hipótese 2 previa a abstração das figuras simbólicas, e a 4 esperava, que o aluno verificasse a necessidade da composição de provas. Tais hipóteses foram avaliadas conjuntamente na fase de análise *a posteriori.* Nesta, observou-se que ocorreu referida necessidade afim de justificar se um conjunto poderia ser chamado de espaço vetorial. No entanto, houve dificuldade em efetuar as provas e em exibir exemplos desses conjuntos.

Portanto, a hipótese 2 deve ser repensada, pois, embora tenha acontecido alguma abstração com o uso de exemplos, estes ficaram restritos a conjuntos de vetores da geometria ou de matrizes, além de haver certa limitação na escrita por expressões algébricas.

Já a hipótese 4 é declarada válida. Apesar da composição de poucas provas, houve a manifestação do desejo em utilizá-las para a comprovação dos axiomas do espaço vetorial.

37 Foi considerada válida a hipótese que atendeu ao objetivo proposto por ela.

A hipótese 3 que conjecturava o uso de registros de representação pelos alunos precisa ser revista. Mesmo que tenham sucedido diferentes registros, a mudança entre eles foi pouco satisfatória, por não ser feita com facilidade e de forma natural.

Esse resultado deve-se, provavelmente, ao conceito de espaço vetorial se apoiar nos campos conceituais aditivo e multiplicativo da aritmética vetorial. Assim, é necessário para o seu domínio maior número de situações, atividades e, consequentemente, um longo período de tempo (VERGNAUD, 1980).

A hipótese 5 presumia a resolução de exercícios em contextos distintos e de maneiras diferentes.

Em razão das soluções obtidas na experimentação, a variável correspondente a essa hipótese, na análise *a posteriori,* foi dividida em duas partes. Portanto se faz necessário separar a hipótese 5 em resolução de exercícios em contextos distintos e resolução de exercícios de maneiras diferentes.

Em relação à parte referente à primeira resolução, ela é válida pois os alunos conseguiram resolver as atividades que envolveram circunstâncias variadas.

Quanto à segunda resolução, ela não é válida porque os discentes se limitaram, nas respostas, ao uso de expressões algébricas e explicações orais. Sendo essas apenas formas distintas de se manifestar e não maneiras diferentes de resoluções.

A hipótese 6 que contava com o emprego de procedimentos adequados na resolução dos exercícios é considerada válida. Essa classificação se deve à constatação, na maior parte dos casos, de evidências de aprendizagem. No entanto, observou-se a conveniência de mais situações para que haja melhor entendimento do conceito estudado.

Por fim, é apresentado o Quadro 10 que traz, pelo confronto das hipóteses com os resultados finais, se elas foram validadas ou não[38].

38 Apesar das hipóteses que não foram confirmadas poderem ser validadas ao longo do processo de aprendizagem, optou-se por uma classificação (válida/não válida) considerando o tempo da pesquisa realizada.

Quadro 10 - Hipóteses – Validação

Hipóteses	Validação
1. Percepção das vantagens	Válida
2. Abstração das figuras simbólicas	Não válida
3. Uso de registros de representação	Não válida
4. Reconhecimento da necessidade da composição de provas	Válida
5. Resolução de exercícios em contextos distintos Resolução de exercícios de maneiras diferentes	Válida Não válida
6. Utilização de procedimentos adequados na resolução de exercícios	Válida

Fonte: Autor da pesquisa

Portanto, as hipóteses foram parcialmente confirmadas, e aquelas que não foram consideradas válidas devem ser reformuladas. Nas análises delas, observaram alguns aspectos que talvez tenham interferido na sua validade. No entanto, para a sua adequação, tornam-se oportunos novos estudos e pesquisas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presença da Álgebra Linear nos diversos âmbitos da matemática, a insatisfatória aprendizagem de seu conteúdo pelos alunos de cursos superiores (CELESTINO, 2000; DORIER, 2003; COIMBRA, 2008), somadas às poucas investigações sobre o seu ensino e aprendizagem, foram aspectos motivadores para a presente pesquisa.

Sendo o espaço vetorial o objeto de estudo da Álgebra Linear, esta investigação buscou responder à seguinte pergunta: "Como desenvolver atividades pedagógicas que podem favorecer a aprendizagem do conceito de espaço vetorial?". Dessa forma, o objetivo estabeleceu-se em analisar o processo de aprendizagem, desenvolvido à luz dos referenciais teóricos da pesquisa, visando a identificar contribuições e limitações do método adotado.

Para isso, usou-se da concepção de aprendizagem significativa e os princípios relativos à programação eficiente do conteúdo da TAS de Ausubel, às situações didáticas de Brousseau e da TCC de Vergnaud.

Além desses referenciais teóricos, procurou-se, por meio da metodologia da engenharia didática, garantir a confiabilidade da pesquisa. Pais (2008, p. 100) afirma que "Além do suporte do referencial teórico, é preciso que a realização prática da pesquisa seja submetida a um controle sistemático, visando a preservar as condições de confiabilidade da atividade científica [...]". Assegura que a engenharia didática satisfaz a esse controle.

Assim, estruturou-se a investigação conforme tal metodologia e, dessa forma, promoveu-se o seguinte percurso: tema e campo de ação; análises prévias; concepção e análise *a priori*; hipóteses; experimentação; análise *a posteriori;* validação (ARTIGUE, 1996; CARNEIRO, 2005).

Nas análises prévias pretendeu-se identificar os constrangimentos que dificultam a aprendizagem e, com isso, propor mudanças. Essas análises foram feitas considerando as dimensões epistemológica, didática e cognitiva.

Os constrangimentos encontrados na dimensão epistemológica foram o não reconhecimento pelos alunos, em um primeiro momento, da simplificação na busca por métodos de resolução de problemas, proporcionada pela Álgebra Linear (DORIER et al., 1999; DORIER, 2003); a dificuldade na passagem da geometria

plana e espacial para a geometria no $\mathbb{R}^n$ e na decifração dos significados das representações analíticas; a necessidade de uma hipótese inicial para se compreender uma definição e a composição de provas (SIERPINSKA, 1996).

Para a dimensão didática, admitindo-se que ela é preponderantemente influenciada pelo livro didático (LAJOLO, 1996), foram feitas análises qualitativas de livros de Álgebra Linear, pertencentes às bibliografias de quatro cursos de Licenciatura em Matemática do estado de São Paulo. Com isso, reconheceram-se os seguintes constrangimentos: explicação de forma escrita e representação geométrica, quando possível, da resolução de um exercício; proposição de uma sequência de ideias para a conceitualização de espaço vetorial; apresentação das similaridades e diferenças em relação às ideias enunciadas no item anterior; complementação de um exemplo ou resolução do exemplo dado; resolução do exercício de maneiras diferentes e sugestão de outros conjuntos que sejam espaços vetoriais.

Finalmente, na dimensão cognitiva, foi utilizada a TCC e o cálculo relacional (VERGNAUD, 1980, 1986, 1990b, 1993, 1998, 2014), para identificar alguns de seus aspectos. Dessa maneira, obtiveram-se os constrangimentos de invariantes operatórios inadequados no campo conceitual aditivo e multiplicativo.

Com esses constrangimentos, determinou-se as variáveis globais que possibilitaram propor hipóteses e, assim, constituir as variáveis locais. Referidas hipóteses foram fundamentais para a validação que, na metodologia adotada, é substancialmente interna.

Conforme Artigue (1996, p. 204),

> Uma das originalidades do método de engenharia didáctica reside, [..], no seu modo de validação, conscientemente interna. É desde a fase de concepção, através da análise *a priori* das situações didácticas da engenharia, estreitamente ligada à concepção local desta última, que este processo de validação se estabelece.

A partir daí foi elaborado um material fundamentado nas teorias da investigação com vistas a responder à pergunta norteadora da pesquisa.

Na fase de experimentação, por meio de situações didáticas, pretendeu-se colocar à prova as hipóteses concebidas e ainda articular ciência e técnica, aproximando o saber acadêmico ao das práticas escolares (PAIS, 2008). Essa

conexão possibilitou a exemplificação de atividades, ricas em bases teóricas, utilizadas em sala de aula com características (currículo, conteúdo, tempo disponível, alunos, professor) muito próximas à realidade universitária e o seu emprego por professores não só em relação a espaços vetoriais, mas também a outros conceitos da Matemática.

A análise da experimentação foi realizada, essencialmente, pelo olhar da TCC. Nela observou-se indícios de aprendizagem. No entanto, notou-se a necessidade de maior variedade de atividades de modo a permitir ao aluno a utilização de diversas condutas e esquemas a fim de se formar de maneira mais clara e estável, o conceito em sua estrutura cognitiva. Naturalmente, uma quantidade maior de situações exige um tempo maior para a compreensão de que consiste, pela óptica cognitiva, um conceito (VERGNAUD, 1996).

Tendo em vista que o conceito de espaço vetorial, como já mencionado, constitui o objeto de estudo da Álgebra Linear, durante todo o curso da disciplina o aluno estará lidando com tal conceito em diversos contextos o que favorecerá a sua construção. Portanto, pode-se afirmar que a aprendizagem demonstrada pela turma sinaliza o êxito das atividades, da sequência didática e dinâmica operadas na experimentação.

Na validação, foram confirmadas as hipóteses de percepção das vantagens do uso da Álgebra Linear, do reconhecimento da necessidade da composição de provas, da resolução de exercícios em contextos distintos e da utilização de procedimentos adequados na resolução de exercícios. Se constrangimentos que deram origem a essas hipóteses não foram superados, ao menos os seus efeitos foram reduzidos, dando-se um passo a mais em direção a viabilizar um melhor ensino e aprendizagem do conceito de espaço vetorial e, consequentemente, da Álgebra Linear.

Concluindo, esta pesquisa, pela sua conjugação de conhecimentos científicos e práticos, vem contribuir para a aprendizagem do conceito de espaço vetorial por meio de atividades pedagógicas e, mais do que isso, inspirar professores a organizarem aulas conforme as teorias e práticas trabalhadas nesta investigação e instigá-los à realização de novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. DE Q. E S. **Engenharia didática:** características e seus usos em trabalhos apresentados no GT - 19 /ANPEd. v. 3.6, 2008. p. 62–77.

ANDREOLI, D. I. **Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad**. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Instituto, 2009.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Ed.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193–217.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda, 1980.

BACHELARD, G. **A epistemologia**. Lisboa: Edições 70, 1971.

BARBOSA, E. J. T.; LINS, A. F. Teoria antropológica do didático: uma análise sobre equação do primeiro grau em livros didáticos. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2010. p. 1–10.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

BORGES, M. F. Obstáculos encontrados pelos alunos na aprendizagem da álgebra linear. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007. p. 16.

BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique dês decimaux. **Recherches en Didactique dês Mathématiques**. v. 2, n. 3, 1981. p. 37–127.

_____. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. **Procedimentos da 2ª Escola de Verão de Didática de Matemática**, Olivet, IREM Orleans, 1982. p. 39–60.

_____. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 2, 1983. p. 165–198.

_____. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** Grenoble: RDM, Pensée Sauvage, 1986.

_____. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. (Ed.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996a. p. 35–113.

_____. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. In: **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996b. p. 48–72.

_____. **Introdução ao estudo das situações didáticas**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

BRUN, J. (ED.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1987.

CARDOSO, V. C. **Ensino e aprendizagem de álgebra linear:** uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Estadual de Campinas, 2014.

_____; KATO, L. A.; OLIVEIRA, S. R. DE. Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes : uma investigação acerca dos invariantes operatórios. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, dez. 2013. p. 95–116.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática : um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, v. 13, n. 23, 2005. p. 87–120,

CARVALHO JR., G. D. DE; AGUIAR JR., O. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 25, n. 2, 2008. p. 207–227.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear :** as pesquisas brasileiras na década de 90. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathéematicques**, v. 19, n. 2, 1999. p. 221–266.

_____; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje**. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

CHRISTENSEN, J. **A brief history of Linear Algebra**. April, 2012.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) Universidade Federal do Pará, 2008.

DORIER, J. L. et al. Teaching and learning linear algebra in first year of French science university. **Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, 1999. p. 103–112.

_____. **Teaching linear algebra at university**. v. III, p. 10, 2003.

FIGUEROA, T. P.; ALMOULOUD, S. A. **Proposta de uma metodologia de ensino de espaço vetorial**. v. 8, 2015. p. 1–26.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: ALCÂNTARA MACHADO, S. D. ET AL. (1999) (Ed.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 155–195.

FURTADO, A. L. C. **Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemáticas) Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

GÁLVEZ, G. A. Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Eds.). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. p. 26–35.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRINGS, E. T. DE O.; CABALLERO, C.; MOREIRA, M. A. Possíveis indicadores de invariantes operatórios apresentados por estudantes em conceitos da termodinâmica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 4, 2006. p. 463–471.

HAREL, G. **Students Õ understanding of proofs:** a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. v. 303, 1999. p. 601–613.

IGLIORI, S. B. C. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: MACHADO, S. (Ed.). **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 89–113.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e geometria:** um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KRANTZ, S. G. **The history and concept of mathematical proof**. p. 36, 2007.

LAJOLO, M. **Livro didático:** um (quase) manual de usuário. v. 19, 1996. p. 3–9.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, 2012. p. 69–89.

MAY, R. **Psicologia e dilema humano**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1973.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2001.

_____; SOUSA, C. M. S. G. **Dificuldades de alunos de Física Geral com o conceito de potencial elétrico**. Projeto de pesquisa em andamento. 2002.

_____. **Aprendizagem significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

NOVAK, J. D. An alternative do piagetian psychology for Science and Mathematics education. **Science Education**, 1977. p. 453–477.

OLIVEIRA, V. C. A. DE. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PONTES NETO, J. A. DA S. Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel: perguntas e respostas. **Periódico do Mestrado em Educação da UCDB**, v. 21, 2006. p. 117–130.

RICHIT, A. et al. Articulação entre Álgebra Linear e tecnologias digitais: perspectivas de exploração matemática no software Geogebra. **Actas del VII CIBEM**, 2013. p. 515–522.

SIERPINSKA, A. The diachronic dimension in research on understanding in mathematics – usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. In: JAHNKE, H. N.; KNOCHE, M.; OTTE, M. (Eds.). **History of mathematics and education:** ideas and experiences. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1996. p. 289–318.

SOARES, L. H. **Aprendizagem significativa na educação matemática:** uma proposta para a aprendizagem de geometria básica. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal da Paraíba, 2009.

SOUZA, N. A. DE; BORUCHOVITCH, E. Mapas conceituais: estratégia de ensino/aprendizagem e ferramenta avaliativa. **Educação em Revista**, v. 26, n. 3, 2010. p. 195–218.

TAPIA, J. A.; FITA, E. C. **A motivação em sala de aula:** o que é, como se faz. 11. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2015.

VALENTE, W. R. A Matemática moderna nas escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, 2006. p. 19–36.

VENTURI, J. J. **Álgebra vetorial e geometria analítica**. 10. ed. Curitiba: Aut Paranaense, 2015.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. **Addition and subtraction:** a cognitive perspective. 1982. p. 39–59.

_____. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo:** as estruturas aditivas. v. 1, p. 75–90, 1986.

_____. Multiplicative structures (Eds.). **Research Agenda in Mathematics Education.** Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. In: IN HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.), 1988. p. 141–161.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 1990a. p. 133–170.

_____. Epistemology and Psichology of Mathematics Education. Mathematics and Cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of Mathematics Education. **ICMI Study Series**, 1990. p. 14–30.

_____. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed). **Anais do 1 Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**,1993. p. 1–26.

_____. Multiplicative conceptual field: what and why? In: IN GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41–59.

_____. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, n. 26(10), 1996. p. 195–207.

_____. The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.). **Learning and teaching mathematics, an international perspective. Hove (East Sussex)**, Psychology Press Ltd., 1997.

_____. A Mathematics, comprehensive theory of representation for Education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, 1998. p. 167–181.

_____. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2014.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ANEXOS

Anexo A – Atividades

Álgebra Linear

Esta atividade constitui-se de exercícios com vetores do IR^2 e IR^3. Procure retomar seus conhecimentos sobre o assunto. Em cada exercício, exponha seu raciocínio por meio de cálculos e/ou anotações. Se não conseguir fazer, relate as razões (não aprendeu, não lembra, não entendeu a questão, etc.).

Não é necessário se identificar.

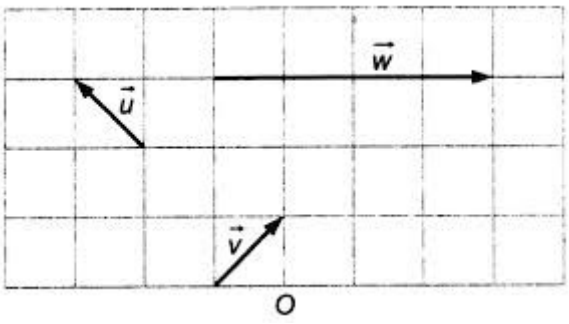
Atividade com vetores do *IR^2 e IR^3*

1. O que é vetor? O que não é vetor?

2. O que são vetores equivalentes (iguais)? O que não são vetores equivalentes?

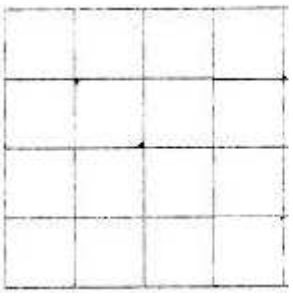
3. Podem-se combinar dois vetores de módulos iguais para que se tenha uma resultante nula? E três vetores de módulos iguais? Se for possível, faça uma representação geométrica de cada caso.

4. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$,

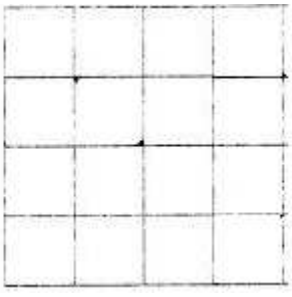


obtenha, graficamente,

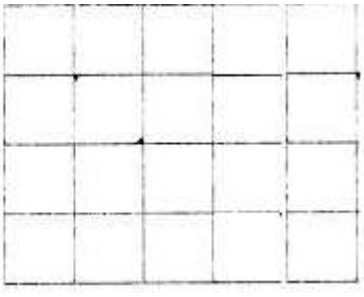
a) $\vec{u} + \vec{v}$



b) $\vec{u} - \vec{v}$

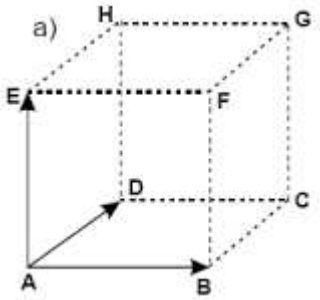


c) $-3\vec{u} + \vec{v} + \frac{\vec{w}}{2}$

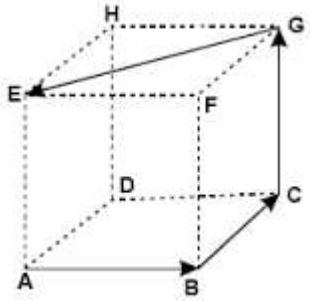


5. Nos cubos abaixo, represente a soma dos vetores indicados.

a)

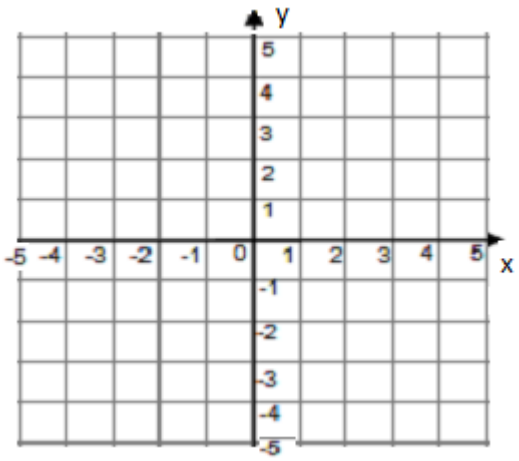


b)



6. Desenhe uma figura que mostra quatro vetores não-nulos cuja soma é zero. Explique seu raciocínio.

7. Sejam $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$. Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$ e $\vec{u} + 2\vec{v}$ no plano cartesiano abaixo.



8. Sejam $\vec{u} = (7,-4,3)$, $\vec{v} = (3,0,-9)$ e $\vec{w} = (28,-16,12)$. Resolva:

a) $\vec{u} - \vec{w}$

b) $3\vec{u} + \vec{v}$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 3, determine $\vec{t}$.

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

9. Elabore uma questão que envolva vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$.

10. O que você espera aprender na disciplina de Álgebra Linear II?

Se quiser, faça comentários sobre os exercícios propostos.

Obrigado pela participação!

Anexo B – Questionário

Questionário

1. Gênero

Masculino __

Feminino __

2. Idade __

3. Já tem formação em outro curso de graduação?

Sim __. Qual curso? _____

Não __

4. Já ficou de dependência em alguma disciplina?

Sim __. Qual (is)? _____

Não __

5. Pretende ser professor?

Sim __

Não __. Por quê? _____

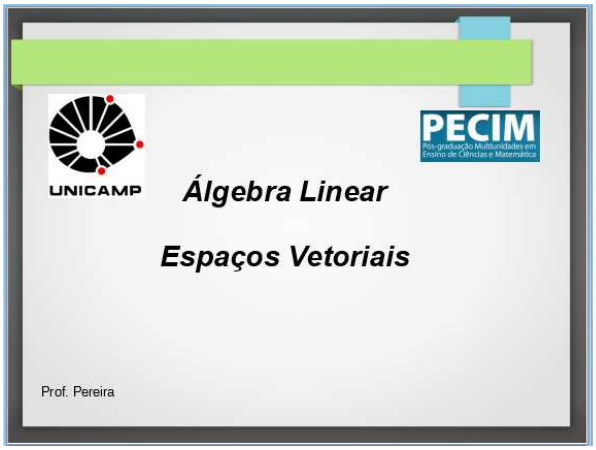
6. Leciona?

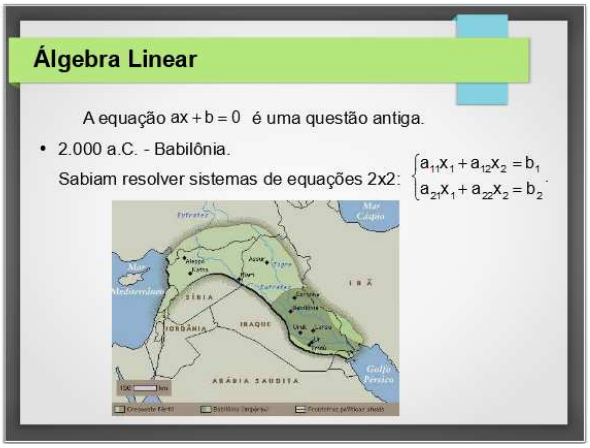
Sim __. Há quanto tempo?_____

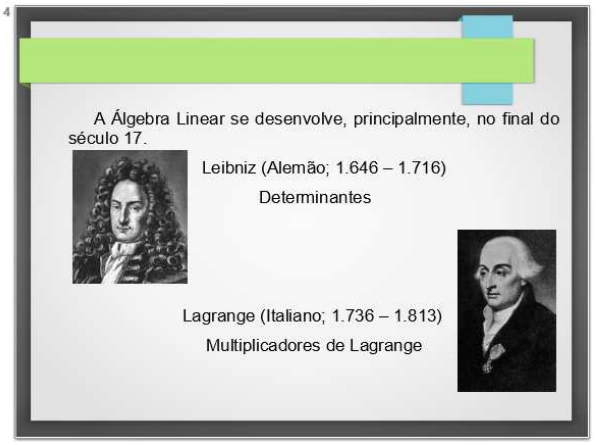
Não __

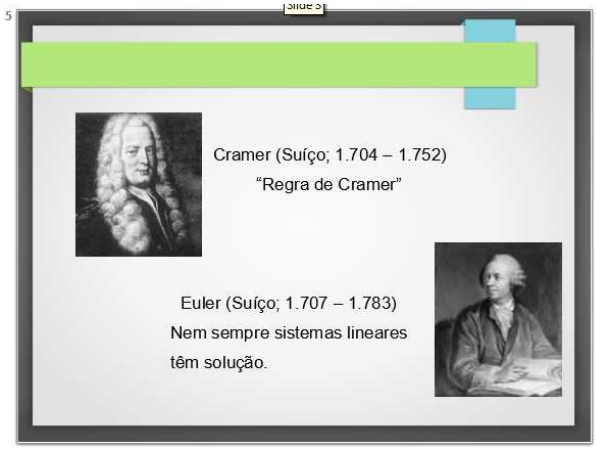
Anexo C – Apresentação utilizada para uma visão geral da Álgebra Linear, organizador prévio e exercícios

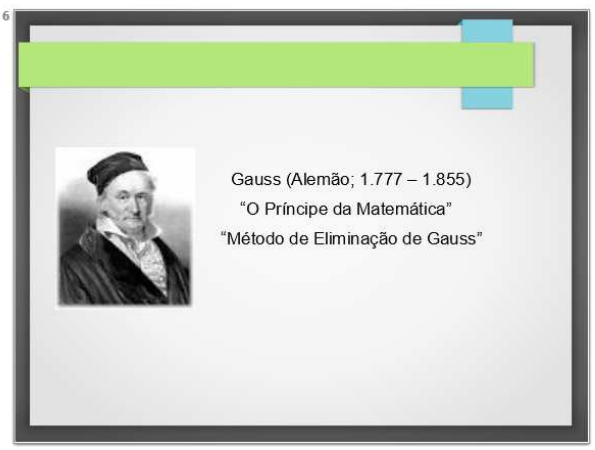
Visão geral da Álgebra Linear[39]











39 Estes *slides* foram compostos tomando como referência os artigos *A Brief History of Linear Algebra* de Jeff Christensen (2012) e *Teaching and learning linear algebra in first year of French science university de* Dorier *et al.* (1999).

7

Espaços vetoriais

- objeto de estudo da Álgebra Linear;

- 1930: axiomatização.

- a axiomatização não possibilitou a resolução de novos problemas matemáticos, mas devido seu poder de generalização e unificação simplificou a busca por métodos de resolução de problemas (DORIER, 1999, 2003).

8

Aplicações

O campo de aplicação da disciplina é muito vasto. Como exemplo podemos citar:

- **Criptografia**

9

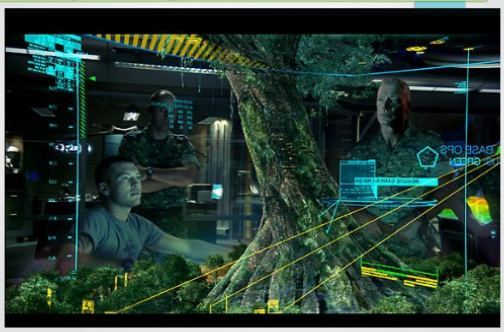
• Deformações e morfismo

10

• Circuitos elétricos

11

• Computação gráfica



12

• Tomografia computadorizada

13

- **Imagens digitais**

14

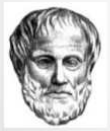
"Mapa" geral da Álgebra Linear

Organizador prévio e exercícios[40]

15

Vetor

A ideia de poder utilizar um segmento de reta orientado (uma seta) para representar a magnitude, a direção e o sentido de uma velocidade, de uma força ou de um deslocamento, desenvolveu-se gradualmente no decorrer de um longo período de tempo.

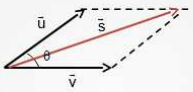


Aristóteles
(384 a.C.-322 a.C.)

Tinha conhecimento da "regra do paralelogramo"

16

Enunciou a "regra do paralelogramo"



Galileu Galilei
(1564-1642)

August Ferdinand
Möbius
(1790-1868)

Aplicações de vetores à Geometria.

17

Propôs uma "álgebra" de segmentos de reta orientados.

Giusto Bellavitis
(1803-1880.)

18

Grandeza escalar e vetorial

- **Grandeza escalar:** é aquela que fica caracterizada por um número e sua unidade de medida.

Exemplos: massa, temperatura, altura, ...

- **Grandeza vetorial:** é aquela que fica caracterizada por um módulo, uma direção e um sentido.

Exemplos: deslocamento, velocidade, força, ...

40 Estes slides foram elaborados tomando por base o livro *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica* de Venturi (2015) e o livro *Álgebra Linear com Aplicações* de Anton e Rorres (2001).

19

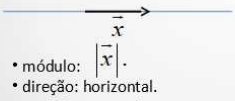
Vetor

Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesmo módulo, direção e sentido.

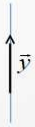
Conjunto de segmentos orientados de um único vetor:

20

Um vetor pode ser representado graficamente por um segmento de reta orientado.



- módulo: $|\vec{x}|$.
- direção: horizontal.
- sentido: para a direita.



- módulo: $|\vec{y}|$.
- direção: vertical.
- sentido: para cima.

21

- Vetor nulo: direção e sentido arbitrários, e módulo igual a zero.

- Vetor oposto: o vetor oposto de um vetor $\vec{v}$ é representado por $-\vec{v}$.
Exemplo:

22

Vetores equivalentes (iguais)

Dois vetores são equivalentes (iguais) quando possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

23

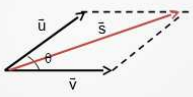
Adição de Vetores

Considere dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, abaixo.

24

Regra do paralelogramo (válida apenas para dois vetores)

O vetor soma $\vec{s}$ é obtido graficamente da seguinte forma:



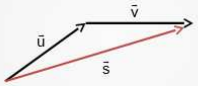
Algebricamente temos:

$$s^2 = u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\theta$$

25

Regra do polígono

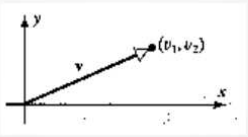
O vetor soma $\vec{s}$ é obtido graficamente da seguinte forma:



26

Vetores em sistemas de coordenadas

Seja qualquer vetor no plano. As **coordenadas** (v_1, v_2) do ponto final de $\vec{v}$ são chamadas **componentes** de $\vec{v}$ e escrevemos $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



27

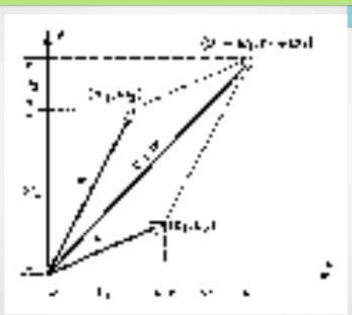
As operações vetoriais de adição e multiplicação por escalar são facilmente executáveis em termos de componentes, se

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \text{ e } \vec{w} = (w_1, w_2)$$

então

$$\boxed{\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)}$$

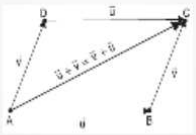
28



29

Propriedades

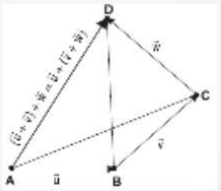
A1) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



"Regra do paralelogramo"

30

A2) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



31

A3) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

A4) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

32

Resumindo, as **propriedades da adição** são:

A1) Comutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

A2) Associativa

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

A3) Elemento neutro

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

A4) Elemento oposto

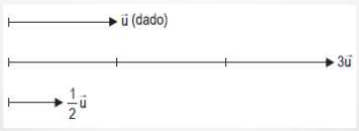
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

33

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

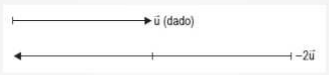
Seja k um escalar e $\vec{v}$ um vetor. O produto do vetor $\vec{v}$ pelo número real k é representado por $k\vec{v}$. Então, se:

I) $k > 0$



34

II) $k < 0$



Casos particulares

$0(\vec{v}) = \vec{0}$.

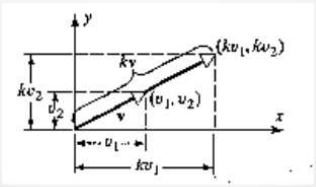
$k\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

$(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ onde $-\vec{v}$ é o oposto de $\vec{v}$.

35

Para um vetor $k\vec{v}$, sendo k um escalar, temos:

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2)$$



36

Propriedades da multiplicação por escalar

M1) Associativa em relação aos escalares

$$k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$$

M2) Distributiva em relação à adição de vetores

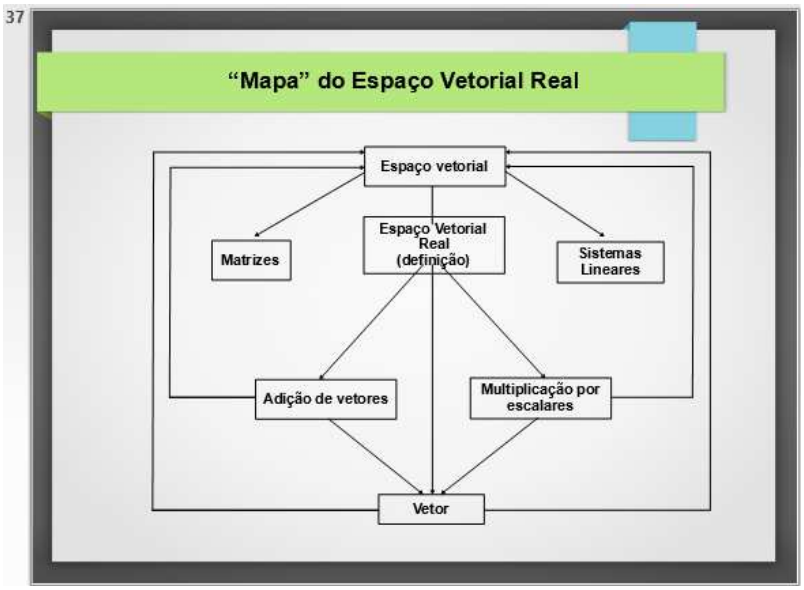
$$l(\vec{u} + \vec{v}) = l\vec{u} + l\vec{v}$$

M3) Distributiva em relação à adição de escalares

$$(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$$

M4) Elemento neutro

$$1\vec{u} = \vec{u}$$


37
"Mapa" do Espaço Vetorial Real
Espaço vetorial
Matrizes
Espaço Vetorial Real (definição)
Sistemas Lineares
Adição de vetores
Multiplicação por escalares
Vetor

1. Dado o conjunto $IR^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, e as operações de adição:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

e de multiplicação por escalar $a \in \mathbb{R}$.

$$a(x,y)=(ax,ay).$$

Verifique se são válidas as propriedades da adição e da multiplicação por escalar da aritmética vetorial.

2. No conjunto $V = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ definamos “adição” assim:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,0)$$

e a multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x,y)=(ax,ay).$$

Verifique se são válidas as propriedades da adição da aritmética vetorial.

Anexo D – Situações didáticas

1ª Situação didática

Tons de tintas produzidos por máquinas

Para resolver a dificuldade de se atingir tons específicos e, principalmente, repeti-los posteriormente, as fabricantes de tintas de paredes, desenvolveram máquinas que misturam as cores automaticamente a partir de fórmulas específicas e assim conseguem obter diversas cores diferentes.

Máquina de mistura de cores

Fonte: <https://portuguese.alibaba.com/product-detail/automatic-paint-or-ink-mixing-machine-jy-30a-499276606.html>

Sobre uma base em geral branca é adicionada uma série de corantes em proporções eletronicamente calculadas. A máquina então agita a mistura por tempo determinado de forma a conseguir uma cor homogênea. Cada fabricante tem atualmente catálogos com diversos tons, cada um com um código. Basta escolher o código e a máquina produz a cor desejada.

Caso seja necessário comprar mais tinta, basta retornar a qualquer loja com aquele código[41].

Considere que para fazer um tom de laranja seja necessário informar à máquina de mistura de cores dois comandos numéricos, um referente a quantidade de amarelo e o outro a quantidade de vermelho a ser adicionada a uma base branca, ou seja, o laranja é determinado pelo par ordenado: (amarelo, vermelho). Na Figura 1, são apresentadas duas

41 <http://casaeimoveis.uol.com.br/tire-suas-duvidas/arquitetura/como-funcionam-os-sistemas-de-mistura-de-tintas-eles-repetem-uma-cor-com-exatidao.jhtm>

tabelas que indicam o número de gotas, o comando a ser dado (código) ao computador e o tom da cor amarela e vermelha obtida, respectivamente.

Figura 1 – Tabelas das cores amarela e vermelha

Cor amarela		
Gotas (0,05ml/gota)	**Comando (código)**	**Tom de amarelo (em 1ml de base branca)**
1	(1,0)	
2	(2,0)	
3	(3,0)	
4	(4,0)	
5	(5,0)	

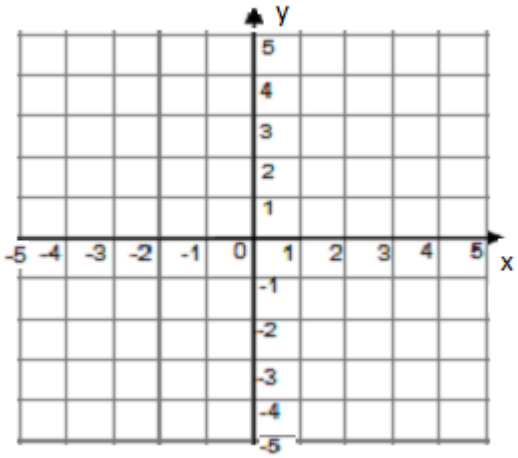
Cor vermelha		
Gotas (0,05ml/gota)	**Comando (código)**	**Tom de vermelho (em 1ml de base branca)**
1	(0,1)	
2	(0,2)	
3	(0,3)	
4	(0,4)	
5	(0,5)	

Quais comandos você daria para obter os tons de laranja identificados pelos códigos $(2,3)$ e $(3,1)$, a partir dos códigos das tabela da Figura 1? Escreva o resultado em forma de soma com igualdade.

Se você desejasse um tom de laranja pela mistura dos tons obtidos anteriormente ($(2,3)$ e $(3,1)$), qual seria o código desse outro tom de laranja? Escreva o resultado em forma de soma com igualdade.

O resultado seria diferente se em vez de dar a sequência de comandos $(2,3)$ e $(3,1)$, você desse a sequência contrária $(3,1)$ e $(2,3)$? Apresente os cálculos.

Represente, por meio de vetores, no plano cartesiano abaixo, os tons identificados pelos códigos $(2,3)$, $(3,1)$ e a resultante da soma deles.



Admita que uma vez dado um comando ao computador ele não aceite a sua alteração, sendo necessário um novo comando de adição ou multiplicação por escalar $(\mathbb{Z})$ para que o resultado seja modificado.

Existe algum comando que adicionado a um comando anterior não altera o resultado, ou seja,

$$(\text{amarelo}, \text{vermelho}) + (\quad , \quad) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

E multiplicado, ou seja,

$$__ \, x\,(\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (\text{amarelo}, \text{vermelho})?$$

Qual comando você daria para cancelar o seguinte código informado $(4,5)$?

$$(4,5) + (\quad , \quad) = (\quad , \quad)$$

2ª Situação didática

Em todos os casos, apresente os cálculos.

1. Considerando os vetores $\mathbf{u} = (2,3)$ e $\mathbf{v} = (5,-1)$, calcule $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

2. Dados os vetores $\mathbf{u} = (0,-3,1)$ e $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (-6,1,0)$, determine $\mathbf{v}$.

3. Sejam $\vec{u} = (2,-1,-4)$, $\vec{v} = (0,5,-7)$ e $\vec{w} = (6,-3,-12)$. Resolva:

a) $\vec{u} - \vec{w}$

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

c) Sendo $\vec{v}$ o vetor $\vec{t}$ multiplicado por 5, determine $\vec{t}$.

d) Quantas vezes $\vec{w}$ é maior do que $\vec{u}$?

3ª Situação didática (seria utilizada)

Em relação ao exemplo da 1ª situação didática, considere que os comandos e o escalar a ser multiplicado sejam números inteiros. Verifique que para quaisquer códigos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ do conjunto de comandos V, com $k, l \in \mathbb{Z}$, satisfazem as seguintes propriedades:

Adição (A)

A1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
A2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
A3) Existe um elemento nulo $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
A4) Existe $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Multiplicação (M)

M1) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
M2) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$
M3) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$
M4) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Adote: $\mathbf{u} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (u_1, u_2);\ u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$
$\mathbf{v} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (v_1, v_2);\ v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$
$\mathbf{w} = (\text{amarelo}, \text{vermelho}) = (w_1, w_2);\ w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$

3ª Situação didática (utilizada)

Na aula passada, foi observado que existiam semelhanças nas operações de adição e multiplicação por escalar entre o conjunto *V* dos vetores da geometria e o conjunto $M_{mxn}(\mathbb{R})$ das matrizes reais com $m,n \in \mathbb{N}^*$.

Como já constatado, o conjunto de vetores do $\mathbb{R}^2$ satisfaz as propriedades de adição e multiplicação estudadas até aqui. Agora, verifique se o conjunto $M_{2x1}(\mathbb{R})$ também satisfaz essas propriedades.

Lembrando:

Adição (A)

A1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

A3) Existe um elemento nulo **0**, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

A4) Existe $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Multiplicação (M)

M1) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

M2) $l(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$

M3) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$

M4) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

para quaisquer $\vec{u}+\vec{v}$ de V e k,l de $\mathbb{R}$.

Adote: $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}; u_1,u_2 \in \mathbb{R}$

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}; v_1,v_2 \in \mathbb{R}$

$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}; w_1,w_2 \in \mathbb{R}$

4ª Situação didática

Sabendo que um espaço vetorial é um conjunto de elementos que se comportam como vetores em relação às operações de adição e multiplicação.

E que para termos um **espaço vetorial real** é necessário que para cada par de elementos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V associado a um elemento $\vec{u}+\vec{v}$ de V se verifiquem as propriedades da adição e para cada número **real** k e a cada elemento $\vec{u}$ de V associado a um elemento $k\vec{u}$ de V se verifiquem as propriedades da multiplicação. Crie ou apresente um exemplo de espaço vetorial real, verificando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar.

Lembrando:

Adição (A)

A1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

A2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

A3) Existe um elemento nulo $\vec{0}$, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

A4) Existe $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

Multiplicação (M)

M1) $k(l\vec{u})=(kl)\vec{u}$

M2) $(\vec{u}+\vec{v})=l\vec{u}+l\vec{v}$

M3) $(k+l)\vec{v}=k\vec{v}+l\vec{v}$

M4) $1\vec{u}=\vec{u}$

para quaisquer $\vec{u}+\vec{v}$ de V e k, l de $\mathbb{R}$.

5ª Situação didática

Faça um mapa conceitual relacionando os conceitos abordados no minicurso.

Anexo E – Entrevistas

As perguntas foram:

1. Você reconhece vantagens no uso da Álgebra Linear?
2. Quais foram os conceitos que você considerou para a resolução das situações propostas?
3. O quanto você considera que a metodologia aplicada favoreceu à sua aprendizagem?
4. O que é um espaço vetorial?
5. Por que é importante estudar espaços vetoriais?

Anexo F – Termo de consentimento livre e esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL POR MEIO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS[42]

Prof. Me. Ricardo Alexandre Alves Pereira
Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira

Número do CAAE: (64261716.8.3001.5473)

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

A grande dificuldade na aprendizagem do conceito de espaço vetorial e sua relevância como objeto de estudo da Álgebra Linear levou à sua escolha para essa pesquisa. Embora existam trabalhos que tratem do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, há uma carência de investigações focadas na aprendizagem do conceito de espaço vetorial. O objetivo desse estudo é analisar o processo de aprendizagem desse conceito por meio de um material elaborado de maneira a favorecer a construção do conhecimento pelo aluno.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: participar de dez sessões, de 50 minutos, sendo duas por semana. Nesses encontros, será desenvolvida uma sequência didática que contempla um organizador prévio e situações didáticas com a finalidade de propiciar uma aprendizagem significativa dos conceitos que envolvem a definição e as propriedades dos espaços vetoriais reais; e entrevistas. Essas sessões serão divididas da seguinte maneira: 2 sessões – aplicação do organizador prévio; 6 sessões – tratamento do conceito de Espaço Vetorial; 2 sessões - serão feitas as entrevistas. Todas as sessões serão gravadas, sendo estas descartadas após a defesa da tese prevista para dezembro de 2017

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se já tiver feito a disciplina de Álgebra Linear, a qual contempla o conteúdo de Espaços Vetoriais.

Os desconfortos e riscos que podem ocorrer são:

- constrangimento ao se expor durante a realização das atividades;
- desconforto, constrangimento ou alterações de comportamento durante gravações de áudio e vídeo;
- alterações na autoestima provocadas pela dificuldade ou facilidade em atingir as expectativas em relação as tarefas propostas;
- cansaço ou aborrecimento ao participar da entrevista.

42 Foi substituído pelo título A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL

Para minimizar esses desconfortos e riscos serão esclarecidas todas as dúvidas sobre os procedimentos da pesquisa. Assim como, será destacada a importância dessa pesquisa para a produção de conhecimentos que contribuam à melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática.

Benefícios:

Os benefícios para os participantes da pesquisa são:

- aprendizagem significativa dos conceitos estudados;
- percepção de formas alternativas de aprendizagem;
- reconhecimento da importância do próprio indivíduo na construção do seu conhecimento;
- aprender um conteúdo relevante para sua formação e profissão.

Acompanhamento e assistência:

Durante todas as sessões e após o encerramento serão dados esclarecimentos sobre questionamentos sobre o estudo.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado.

Ressarcimento e Indenização:

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores:

- Prof. Me. Ricardo Alexandre Alves Pereira.

e-mail: ric_pereira@bol.com.br

Local de trabalho: Instituto Federal de São Paulo – Bragança Paulista

Endereço profissional: Avenida Francisco Samuel Lucchesi Filho, 770; Bairro: Penha; CEP: 12.929-600; Bragança Paulista – SP; Tel.: (11) 4035-8110; e-mail: braganca@ifsp.edu.br

- Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira.

e-mail: samuel@ime.unicamp.br

Local de trabalho: Universidade Estadual de Campinas - Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação, Departamento de Matemática Aplicada.

Endereço profissional: Rua: Sérgio Buarque de Holanda, 651; Cidade Universitária; CEP: 13.083-859; Campinas, SP; Tel.: (19) 3521-5956; Fax: (19) 3289-1466.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Rua: Tessália Vieira de Camargo, 126; CEP 13083-887 Campinas – SP; telefone (19) 3521-8936 ou (19) 3521-7187; e-mail: cep@fcm.unicamp.br.

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do (a) participante:

_____

Contato telefônico:

_____

e-mail (opcional):

_____

_____Data: ____/_____/_____.
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

_____Data: ____/_____/_____.
(Assinatura do pesquisador)